Simetrias e Simetrias Relativas em Singularidades e Sistemas Dinâmicos

Míriam Garcia Manoel

ICMC - Universidade de São Paulo
São Carlos, 16 de Outubro/2012

Capítulo 1

Introdução: uma revisão dos resultados obtidos correlacionados à literatura

Capítulo 2

Teoria invariante e singularidades de sistemas reversíveis equivariantes

Consideramos Γ grupo de Lie compacto agindo num espaço vetorial de dimensão finita V e um epimorfismo

$$\sigma : \Gamma \to \mathbf{Z}_2. \tag{2.0.1}$$

Um elemento $\gamma \in \Gamma$ é chamado *simetria* se $\sigma(\gamma) = 1$ e *anti-simetria* se $\sigma(\gamma) = -1$. Γ_+ denota o subgrupo das simetrias de Γ. Notemos que $\Gamma_+ = \ker(\sigma)$, e é portanto subgrupo normal de índice 2 de Γ. Γ_- é o conjunto das anti-simetrias. Para $\delta \in \Gamma_-$ arbitrário, temos

$$\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup} \Gamma_- = \Gamma_+ \dot{\cup} \ \delta \Gamma_+ \ .$$

À ação de Γ em V corresponde uma representação ρ de Γ sobre V, ou seja, um homomorfismo de grupos $\rho : \Gamma \to GL(V)$. Definimos agora a representação $\rho_\sigma : \Gamma \to GL(V)$ por $\rho_\sigma(\gamma) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)$. A representação ρ_σ é chamada *dual* de ρ. A ação de Γ em V pode então ser escrita como

$$(\gamma, x) \mapsto \rho_\sigma(\gamma)x. \tag{2.0.2}$$

Denotamos por (V, ρ) o espaço vetorial V com a representação ρ e (V, ρ_σ) o espaço vetorial V com a representação ρ_σ.

Definição 2.0.1 *Uma representação* ρ *de* Γ *é chamada* auto-dual *se é isomorfa a* ρ_σ. *Neste caso, dizemos que* (V, ρ) *é um espaço* auto-dual.

Definição 2.0.2 *Dada uma representação* ρ *de* Γ *sobre* V, *o caracter de* ρ *é a função* $\chi_V : \Gamma \to \mathbf{R}$,

$$\chi_V(\gamma) = \operatorname{tr}\big(\rho(\gamma)\big),$$

onde $\operatorname{tr}\big(\rho(\gamma)\big)$ *denota o traço da matriz de* $\rho(\gamma)$.

Nossos objetos de estudo na Seção 2.3 são germes de aplicações suaves na origem $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \to V$ a um parâmetro. Assumimos que o espaço de parâmetros $\mathbb{R}$ não sofre efeito pela ação de Γ.

Um germe de função $f:(V\times \mathbf{R},0)\mapsto \mathbf{R}$ é Γ-invariante se

$$f(\gamma x,\lambda)=f(x,\lambda),\quad \forall\gamma\in\Gamma,\ \forall x\in V$$

e denotamos por $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ o anel de tais germes. Pelo teorema de Hilbert-Weyl [38], existe um conjunto finito de geradores polinomiais para $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Um germe $g:(V\times \mathbf{R},0)\to V$ é Γ-*reversível-equivariante*, ou (Γ,σ)-equivariante, se

$$g(\gamma x,\lambda)=\sigma(\gamma)\gamma g(x,\lambda),\quad \text{for all } \gamma\in\Gamma \text{ and } x\in V, \tag{2.0.3}$$

e denotamos por $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ o módulo dos germes Γ-reversíveis-equivariantes sobre o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$. Segue do Teorema de Schwartz [38] que $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ admite um número finito de geradores, por ser Γ grupo de Lie e compacto. Usando a representação reescrevemos ρ, reescrevemos (2.0.3) como

$$g\big(\rho(\gamma)x\big)=\rho_\sigma(\gamma)g(x),\quad \forall\gamma\in\Gamma,\ \forall x\in V. \tag{2.0.4}$$

2.1 Componentes σ-isotípicas e o σ-índice

2.1.1 Componentes σ-isotípicas

Dizemos que um subespaço $U \subseteq V$ é Γ-*invariante* se $\gamma u \in U$ para todo $u \in U$, $\gamma \in \Gamma$. Se, além disso, os únicos subespaços Γ-invariantes de U são os triviais $\{0\}$ e U, então a representação de Γ em U é chamada *irredutível* e U é chamado subespaço Γ-*irredutível* de V. Um subespaço Γ-invariante admite um complementar em V também Γ-invariante ([38, Proposition XII 2.1]). Como consequência, temos:

(i) A menos de isomorfismo, existe um número finito de subespaços Γ-irredutíveis $U_k \subset V$, $k = 1, \ldots, m$, U_k não isomorfo a U_j se $k \neq j$.

(ii) Se V_k é a soma de todos os subespaços Γ-irredutíveis de V, que são isomorfos a U_k, então
$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m. \tag{2.1.1}$$

Seja ρ uma representação de Γ sobre V e seja $\{(U_1,\rho_1),\ldots,(U_m,\rho_m)\}$ o conjunto das representações irredutíveis de Γ, com $\rho_k = \rho_{|_{U_k}}$, tal que cada classe de representações Γ-isomorfas contenha precisamente um U_k, $k = 1,\ldots,m$. No que segue, escrevemos U_k para denotar (U_k,ρ_k) e $(U_k)_\sigma$ para sua dual $\big((U_k,\rho_k)_\sigma\big)$, onde $(\rho_k)_\sigma = \rho_{\sigma|_{U_k}}$.

Proposição 2.1.1 *Seja L (Γ,σ)-equivariante em V. Considere V decomposto em componentes isotípicas observando os três tipos de subespaços irredutíveis:*

(a) *U_k é auto-dual;*

(b) *U_k não é auto-dual e existe um U_j $(j \neq k)$ Γ-irredutível que é isomorfo a $(U_k)_\sigma$;*

(c) *U_k não é auto-dual e não existe um U_j Γ-irredutível isomorfo a $(U_k)_\sigma$.*

Então: Se U_k é do tipo (a), então $L(V_k) \subseteq V_k$. Se U_k é do tipo (b), então $L(V_k) \subseteq V_j$ e $L(V_j) \subseteq V_k$. Se U_k é do tipo (c), então $L(V_k) = \{0\}$.

É através deste resultado que pudemos estabelecer o teorema abaixo, que finalmente estabelece a construção das componentes σ-isotípicas:

Teorema 2.1.2 *Considere V decomposto em componentes isotípicas V_k's como em (2.1.1), cada uma correspondente ao Γ-irredutível U_k, $k = 1, \ldots, m$. Então, existe uma permutação π de ordem 2 de $\{1, \ldots, m\}$ tal que o subespaço*

$$\widehat{V}_k = V_k + V_{\pi(k)} \tag{2.1.2}$$

é invariante por toda aplicação linear (Γ, σ)-equivariante, com $\pi(k) = k$ se U_k é dos tipos (a) *e* (c) *acima e $\pi(k) = j$, $j \neq k$, se U_k é do tipo* (b).

A soma em (2.1.2) é direta se U_k é do tipo (b).

Definição 2.1.3 *Os subespaços $\widehat{V}_k$'s dados em (2.1.2) são chamados* componentes σ-isotípicas *de V. A decomposição*

$$V = \widehat{V}_1 \oplus \ldots \oplus \widehat{V}_q$$

é chamada decomposição σ-isotípica *de V.*

Note que o número q de subespaços $\widehat{V}_l$'s é no máximo o número m de componentes V_k's.

2.1.2 O σ-índice

Para $\Sigma \subset \Gamma$ subgrupo, lembremos que o subespaço de pontos fixos de Σ é o subespaço de V dado por

$$\mathrm{Fix}_V(\Sigma) = \{x \in V \ : \ \rho(\gamma)x = x, \ \forall \gamma \in \Sigma\}.$$

Definição 2.1.4 *Seja Σ um subgrupo de Γ. Definimos o σ-índice de Σ em V como*

$$s_V(\Sigma) = \dim \mathrm{Fix}_V(\Sigma) - \dim \mathrm{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma).$$

O primeiro resultado que aparece em [5] dá uma decomposição da integral de Haar sobre subgrupos fechados de Γ, usado no estudo do σ-índice:

Proposição 2.1.5 *Seja Γ um grupo de simetrias e anti-simetrias e seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ subgrupo fechado e $\delta \in \Sigma$ anti-simetria qualquer. Se $f : \Sigma \to \mathbf{R}$ é função contínua, então*

$$\int_\Sigma f(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = \frac{1}{2}\left(\int_{\Sigma_+} f(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma + \int_{\Sigma_+} f(\delta\gamma)\,\mathrm{d}\gamma\right).$$

Aqui tratamos das fórmulas obtidas em [5] para o cálculo do σ-índice de Σ subgrupo de V,

$$s_V(\Sigma) = \dim \mathrm{Fix}_V(\Sigma) - \dim \mathrm{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma).$$

O uso destas fórmulas reduzem o problema de encontrar $\dim \mathrm{Fix}_V(\Sigma)$ e $\dim \mathrm{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma)$ ao cálculo direto da diferença das dimensões.

Façamos aqui alguns comentários:

- O σ-índice é um invariante das classes de conjugação de Γ
- Se V é um espaço auto-dual, $s_V(\Sigma) = 0$, para todo $\Sigma \subseteq \Gamma$
- Para os casos não auto-duais, o σ-índice pode assumir a priori qualquer valor (zero, positivo ou negativo). Obtemos uma fórmula para este caso.

Em [5] tratamos do σ-índice para a classe de representações que admitem apenas irredutíveis dos tipos (a) e (b). Vamos aqui discutir sobre este caso. Quando V admite pelo menos um subespaço Γ-irredutível U_k auto-dual, vamos assumir sem perda de generalidade que U_k é auto-dual para $k \in I = \{1, \ldots, p\}$ e é não auto-dual para $k \in J = \{p+1, \ldots, m\}$. Caso contrário, I é vazio. Aqui assumimos

- $J \neq \emptyset$
- para todo $k \in J$, U_k é do tipo (b).

Seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que Σ_- é não-vazio. Em [5, Theorem 4.5], deduzimos uma expressão para $s_V(\Sigma)$ em termos dos $s_{U_k}(\Sigma)$, $k \in J$. Notemos que $s_{U_k}(\Sigma) = 0$ se $k \in I$:

$$s_V(\Sigma) = \sum_{k=p+1}^{\frac{m-p}{2}} \Big(\alpha(k) - \alpha\big(\pi(k)\big)\Big) s_{U_k}(\Sigma), \tag{2.1.3}$$

onde π é a permutação do Teorema 2.1.2 e $\alpha(k)$ é o número de subespaços $\Gamma-$irredutíveis cuja soma direta é o bloco V_k.

2.2 Teoria invariante para campos de vetores reversíveis equivariantes

Tanto a análise local como a global de sistemas sujeitos a simetrias partem da forma geral dos campos de vetores. Os teoremas de Schwarz e Poénaru ([38, Theorem XII 4.3 e Theorem XII 5.2]) reduzem a tarefa de se obter esta forma geral a um problema algébrico da teoria de invariantes. Podemos encontrar um conjunto de geradores para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das funções polinomiais invariantes $V \to \mathbf{R}$ e para o módulo $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $V \to V$ equivariantes trabalhando grau a grau, com base nas decomposições de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ como álgebras graduadas

$$\mathcal{P}_V(\Gamma) \;=\; \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_V^d(\Gamma), \qquad\qquad \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \;=\; \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma).$$

Os resultados em [1] se baseiam numa ligação existente entre a teoria de invariantes para Γ e para o subgrupo normal Γ_+ das simetrias de Γ. Mais precisamente, observamos que $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é subanel de $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e portanto tem estrutura de módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Para estabelecer esta relação, vamos introduzir o espaço $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ das funções polinomiais anti-invariantes: Uma função $f : V \to \mathbf{R}$ é chamada *anti-invariante* se

$$f(\rho(\gamma)x) \;=\; \sigma(\gamma)f(x) \;, \tag{2.2.1}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$. $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ é um módulo graduado finitamente gerado sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Nosso primeiro resultado nesta direção foi obter as decomposições

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) \;=\; \mathcal{P}_V(\Gamma) \oplus \mathcal{Q}_V(\Gamma) \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) \;=\; \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$$

como soma direta de módulos sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

2.2.1 Métodos algébricos

Consideremos o *operador de Reynolds relativo* de Γ_+ em Γ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, $R^{\Gamma}_{\Gamma_+} : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \to \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. No nosso caso particular ele é dado por

$$R^{\Gamma}_{\Gamma_+}(f)(x) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\gamma\Gamma_+} f(\gamma x) \;=\; \frac{1}{2}\big(f(x) + f(\delta x)\big) \;, \tag{2.2.2}$$

para um arbitrário, mas fixo, $\delta \in \Gamma_-$.

Definimos o *operador de Reynolds σ-relativo* sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, $S^{\Gamma}_{\Gamma_+} : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \to \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, como

$$S^{\Gamma}_{\Gamma_+}(f)(x) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\gamma\Gamma_+} \sigma(\gamma) f(\gamma x) \;=\; \frac{1}{2}\big(f(x) - f(\delta x)\big) \;, \tag{2.2.3}$$

para um arbitrário, mas fixo, $\delta \in \Gamma_-$.

Teorema 2.2.1 *Vale a seguinte decomposição de módulos sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$:*

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) \;=\; \mathcal{P}_V(\Gamma) \oplus \mathcal{Q}_V(\Gamma) \;. \tag{2.2.4}$$

Os operadores de Reynolds são homomorfismos de $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$-módulos e projeções idempotentes. Estas são as propriedade básicas das quais advém o teorema acima.

Relacionamos agora os módulos das aplicações polinomiais equivariantes por Γ e Γ_+. Isto é feito através de uma construção similar ao caso invariante, construindo outro *operador de Reynolds relativo* de Γ_+ em Γ agora sobre $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, $\vec{R}^{\Gamma}_{\Gamma_+} : \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) \to \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, que, em nosso caso, fica

$$\vec{R}^{\Gamma}_{\Gamma_+}(G)(x) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\gamma\Gamma_+} \gamma^{-1}G(\gamma x) \;=\; \frac{1}{2}\big(G(x) + \delta^{-1}G(\delta x)\big)\ , \tag{2.2.5}$$

para um arbitrário, mas fixo, $\delta \in \Gamma_-$.

E agora introduzimos outro *operador de Reynolds σ-relativo* de Γ_+ em Γ sobre $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, $\vec{S}^{\Gamma}_{\Gamma_+} : \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) \to \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, por

$$\vec{S}^{\Gamma}_{\Gamma_+}(G)(x) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\gamma\Gamma_+} \sigma(\gamma)\gamma^{-1}G(\gamma x) \;=\; \frac{1}{2}\big(G(x) - \delta^{-1}G(\delta x)\big)\ , \tag{2.2.6}$$

para um arbitrário e fixo $\delta \in \Gamma_-$.

Teorema 2.2.2 *Vale a seguinte decomposição em sma direta de módulos sobre o anel* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$:

$$\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) \;=\; \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)\ .$$

Teorema 2.2.3 *Seja* Γ *grupo de Lie compacto agindo em* V *e seja* $\{u_1, \ldots, u_s\}$ *uma base de Hilbert do anel* $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$*. Tomemos*

$$\tilde{u}_j \;=\; S^{\Gamma}_{\Gamma_+}(u_j) \;.$$

Então, $\{\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_s\}$ *é um conjunto de geradores para o módulo* $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ *sobre* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$*.*

Passamos agora para geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$.

Teorema 2.2.4 *Seja* Γ *um grupo de Lie compacto agindo em* V*. Seja* $\{u_1, \ldots, u_s\}$ *uma base de Hilbert de* $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ *e* $\{H_0, \ldots, H_r\}$ *um conjunto de geradores do módulo* $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ *sobre o anel* $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$*. Seja* $\{\tilde{u}_0 \equiv 1, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_s\}$ *um conjunto de geradores do módulo* $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ *sobre o anel* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$*. Então*

$$\{\tilde{H}_{ij} \;=\; \vec{S}^{\Gamma}_{\Gamma_+}(\tilde{u}_i H_j) : i = 0, \ldots, s\,;\; j = 0, \ldots, r\}$$

é um conjunto de geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ *sobre* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$*.*

Eis aqui o procedimento:

Algoritmo 2.2.5 (Conjunto gerador dos reversíveis equivariantes)

INPUT: · *compact Lie group* $\Gamma \subset \mathbf{O}(n)$
· *normal subgroup* $\Gamma_+ \subset \Gamma$ *of índice* 2
· $\delta \in \Gamma \setminus \Gamma_+$
· *Hilbert basis* $\{u_1, \ldots, u_s\}$ *of* $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$
· *generating set* $\{H_0, \ldots, H_r\}$ *of* $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ *over* $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$

OUTPUT: *generating set* $\{\tilde{K}_1, \ldots, \tilde{K}_\ell\}$ *of the module of reversible-equivariants* $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ *over the ring* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$

PROCEDURE:
```
k := 1
for i from 1 to s do
    ũ_i(x) := 1/2 (u_i(x) − u_i(δx))
    for j from 0 to r do
        H_0j(x) := H_j(x)
        H_ij(x) := ũ_i(x) H_j(x)
        H̃_ij(x) := 1/2 (H_ij(x) − δ^{-1} H_ij(δx))
        if H̃_ij ≠ 0 then
            K̃_k := H̃_ij
            k := k + 1
        end
    end
end
l := k − 1
return {K̃_1, ..., K̃_ℓ}
```

O número $\ell \leq rs$ que aparece na saída do algoritmo é o número de aplicações polinomiais não nulas que geram $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$.

2.2.2 Fórmulas de Molien e fórmulas de caracter

Agora apresentamos as séries de Hilbert-Poincaré, as fórmulas de Molien e fórmulas de caracter para anti-invariantes e reversíveis-equivariantes.

As séries de Hilbert-Poincaré de $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e de $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ são definidas como séries formais

$$\tilde{\Phi}_V^\Gamma(t) \;=\; \sum_{d=0}^{\infty} \dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma)\, t^d, \qquad \tilde{\Psi}_V^\Gamma(t) \;=\; \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma)\, t^d\ .$$

Teorema 2.2.6 *Seja Γ um grupo de Lie compacto e sejam (V,ρ) e (W,η) representações de Γ com caracteres χ_V e χ_W, respectivamente. Então,*

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma) \;=\; \int_\Gamma \chi_{V(d)}(\gamma)\chi_W(\gamma)\mathrm{d}\gamma\ ,$$

onde $\chi_{V(d)}$ é o caracter vindo da ação induzida de Γ em S^dV.

Corolário 2.2.7 *Seja Γ um grupo de Lie compacto. Seja (V, ρ) uma representação de Γ com caracter χ. Então*

$$\dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) \;=\; \int_\Gamma \sigma(\gamma)\chi_{(d)}(\gamma)\mathrm{d}\gamma$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) \;=\; \int_\Gamma \sigma(\gamma)\chi_{(d)}(\gamma)\chi(\gamma)\mathrm{d}\gamma \ ,$$

onde $\chi_{(d)}$ é o caracter vindo da ação induzida da ação de Γ em S^dV.

Para se calcular estas fórmulas de caracter é necessário se calcular $\chi_{(d)}$ de S^dV (n-ésima potência tensorial simétrica de V). Existe uma fórmula recursiva (ver [1, Section 4]):

$$d\,\chi_{(d)}(\gamma) \;=\; \sum_{i=0}^{d-1} \chi(\gamma^{d-i})\chi_{(i)}(\gamma) \ , \tag{2.2.7}$$

com $\chi_{(0)} = 1$.

Usamos aqui um teorema do tipo de Fubini para as expressões integrais para as dimensões como integrais iteradas: Para um arbitrátio (e fixado) $\delta \in \Gamma_-$,

$$\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2}\Big[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_+} \chi_{(\mathrm{d})}(\delta\gamma)\mathrm{d}\gamma\Big] ,$$

$$\dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2}\Big[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_+} \chi_{(\mathrm{d})}(\delta\gamma)\mathrm{d}\gamma\Big] ,$$

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2}\Big[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\chi_V(\gamma)\mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_+} \chi_{(\mathrm{d})}(\delta\gamma)\chi_{\mathrm{V}}(\delta\gamma)\mathrm{d}\gamma\Big] ,$$

$$\dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2}\Big[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\chi_V(\gamma)\mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_+} \chi_{(\mathrm{d})}(\delta\gamma)\chi_{\mathrm{V}}(\delta\gamma)\mathrm{d}\gamma\Big] .$$

A partir destas expressões, obtemos também

$$\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) + \dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) = \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\mathrm{d}\gamma = \dim \mathcal{P}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{d}}(\Gamma_+) \tag{2.2.8}$$

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) + \dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\chi_V(\gamma)\mathrm{d}\gamma = \dim \tilde{\mathcal{P}}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{d}}(\Gamma_+) , \tag{2.2.9}$$

Façamos agora uma inspeção do caso em que a representação (V, ρ) de Γ é auto-dual. Primeiro, observemos que neste caso, toda anti-simetria tem traço nulo. Assim, das fórmulas obtidas acima segue o

Corolário 2.2.8 *Seja Γ um grupo de simetrias e anti-simetrias. Se V é auto-dual, então as séries de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ são iguais. Além disso, todos os coeficientes da série de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ são pares.*

Notemos ainda que se V auto-dual, do anulamento do traço das anti-simetrias e de (2.2.7) segue que $\chi_{(d)}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma_-$ se d é ímpar. Portanto, por um argumento semelhante como aplicado acima para os equivariantes e reversíveis equivariantes, concluímos que

$$\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) \ = \ \dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma), \quad \text{se } d \text{ é ímpar.}$$

De (2.2.8), $\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma_+)$ é par sempre que d é ímpar.

2.3 Classificação de bifurcações reversíves equivariantes sobre espaços auto-duais

Consideremos

$$\dot{x} + g(x, \lambda) = 0 \tag{2.3.1}$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias, onde $g : (V \times \mathbf{R}, 0) \to V$ é um germe a um parâmetro de aplicações suaves na origem em $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$,

$$g(\gamma x, \lambda) \; = \; \sigma(\gamma)\gamma g(x, \lambda).$$

Quando Γ_- é não-vazio, g é (puramente) Γ-equivariante. Quando Γ_- é não-vazio, Γ é dito grupo das simetrias reversíveis de (2.3.1).

A equação diferencial é invariante pela transformação $(x, t) \mapsto (\gamma x, \sigma(\gamma)t)$. Assim, simetrias e anti-simetrias levam trajetórias em trajetórias, as primeiras preservando o tempo e as outras revertendo o tempo.

Esta seção contém a parte principal do trabalho feito em [4], que estabelece uma correspondência entre as singularidades puramente equivariantes e as reversíveis-equivariantes auto-duais.

Assuma V auto-dual. Assim, existe um isomorfismo linear $L : V \to V$ (Γ, σ)-equivariante, ou seja, a representação de Γ em V é isomorfa à sua representação dual. L induz o isomorfismo de módulos

$$\begin{array}{rcccc} L^* & : & \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) & \to & \vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma) \\ & & g & \mapsto & Lg \end{array} \tag{2.3.2}$$

sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$. L^* é chamado *pullback* de L. Assim, obtemos o seguinte resultado chave:

Lema 2.3.1 *No caso auto-dual, os módulos $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ são isomorfos.*

Lema 2.3.2 *Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e seja L^* o pullback (2.3.2). Então*

(a) $\mathrm{T}(g)$ e $\mathrm{T}(L^*g)$ são isomorfos.

(b) Se g tem codimensão finita, então a codimensão de L^*g em $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ é igual à codimensão de g em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Teorema 2.3.3 *Considere uma representação (V, ρ) de Γ sobre V segundo a qual V é auto-dual, e seja $L : V \to V$ um isomorfismo linear Γ-reversível-equivariante. Então, o pullback L^* definido em (2.3.2) determina uma correspondência um-a-um entre a classificação de bifurcação de germes em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e em $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.*

A partir deste resultado, para o caso auto-dual, se a classificação de bifurcações equivariantes é conhecida, então fica também conhecida a classificação das bifurcações correspondentes reversíveis-equivariantes: formas normais, condições de não-degenerecência e desdobramentos miniversais. Com respeito aos diagramas de bifurcação, as equações dos ramos são preservadas, mas claramente a estabilidade das soluções pode não ser, então estas devem ser investigadas em cada caso. Entretanto, em muitos exemplos é possível estabelecer uma associação para se deduzir, de uma maneira simples e direta, a estabilidade de um caso a partir do outro. Este procedimento é discutido em [4] para o caso da ação auto-dual de $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ no plano a 1 parâmetro.

Capítulo 3

Teoria invariante e simetrias relativas

Estendemos o formalismo descrito na Seção 2.2 do capítulo anterior quando o conjunto de simetrias H de um grupo de Lie compacto Γ é um subgrupo normal de índice m maior que 2. As funções agora são a valores complexos e a representação de Γ é uma representação complexa. Enfatizamos que quando $m = 2$ a existência do epimorfismo σ é uma consequência natural do fato de Γ_+ ter índice 2. Entretanto, não é para todo $m \in \mathbb{R}$ que existe um epimorfismo de Γ em $\mathbf{Z}_m$, isto é, a existência de um subgrupo normal de índice finito arbitrário com quociente cíclico não é garantida. Desta forma, no presente contexto esta é uma hipótese que deve ser assumida.

Consideramos um epimorfismo

$$\sigma : \Gamma \to \mathbf{Z}_m, \tag{3.0.1}$$

com $\mathbf{Z}_m$ o grupo cíclico gerado pela raíz m-ésima da unidade, com $H = \ker(\sigma)$. Em consequência, Se fixamos $\delta \in \Gamma$ tal que $\sigma(\delta)$ é uma m-ésima raíz primitiva da unidade , então temos a decomposição de Γ como união disjunta de *cosets*,

$$\Gamma = \dot{\bigcup}_{i=0}^{m-1} \delta^i \, H.$$

3.0.1 Invariantes σ-relativos

Definição 3.0.4 *Para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, uma função polinomial $f : V \to \mathbf{C}$ é chamada invariante σ^j-relativa se*

$$f(\gamma x) \;=\; \sigma^j(\gamma) f(x) \tag{3.0.2}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$.

Denotamos por $\mathcal{P}_{\sigma^j}(\Gamma)$ o conjunto dos invariantes polinomiais σ^j-relativos, que tem estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Lema 3.0.5 *Seja σ um epimorfismo como em (3.0.1), com núcleo H, e fixemos $\delta \in \Gamma$ tal que $\sigma(\delta)$ é a m-ésima raíz primitiva da unidade. Para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, temos*

$$\mathcal{P}_{\sigma^j}(\Gamma) \;=\; \{f \in \mathcal{P}(H) : f(\delta x) = \sigma^j(\delta) f(x)\,,\ \forall\, x \in V\}.$$

Operadores σ^j-relativos de Reynolds sobre $\mathcal{P}(H)$, $R_j\colon \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$, por

$$R_j(f)(x) \ = \ \frac{1}{m}\sum_{\gamma H} \overline{\sigma^j(\gamma)} f(\gamma x),$$

para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, onde a barra é a conjugação complexa. Então,

$$R_j(f)(x) \ = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \overline{\sigma^{jk}(\delta)} f(\delta^k x), \tag{3.0.3}$$

para $\delta \in \Gamma$ qualquer (e fixado) tal que $\sigma(\delta)$ is a m-ésima raíz primitiva da unidade.

Proposição 3.0.6 *Para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, os operadores de Reynolds R_j's satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) São homomorfismos de $\mathcal{P}(\Gamma)$-módulos e

$$R_0 + R_1 + \ldots + R_{m-1} \;=\; I_{\mathcal{P}(H)} \ . \tag{3.0.4}$$

(ii) São projeções idempotentes, com $\mathrm{Im(R_j)} \;=\; \mathcal{P}_{\sigma^{\mathrm{j}}}(\Gamma)$.

(iii) Para todo $1 \leq j \leq m-1$,

$$\mathcal{P}_{\sigma^j}(\Gamma) \cap \big(\mathcal{P}(\Gamma) + \ldots + \mathcal{P}_{\sigma^{j-1}}(\Gamma)\big) = \{0\}.$$

O primeiro resultado principal é:

Teorema 3.0.7 *A seguinte decomposição em soma direta de $\mathcal{P}(\Gamma)$-módulos vale:*

$$\mathcal{P}(H) \;=\; \mathcal{P}(\Gamma) \oplus \mathcal{P}_{\sigma}(\Gamma) \;\oplus\; \ldots \;\oplus \mathcal{P}_{\sigma^{m-1}}(\Gamma).$$

Para obter tal resultado, trabalhamos com os operadores de Reynolds σ-relativos. A prova é feita por uma hipótese de indução usando a Proposição 3.0.6 e também, para $\delta \in \Gamma \setminus H$ tal que $\delta^m \in H$, a igualdade

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sigma^{ik}(\delta) = 1 + \sigma^{k}(\delta) + \sigma^{2k}(\delta) + \ldots + \sigma^{(m-1)k}(\delta) = 0, \tag{3.0.5}$$

para todo $k \in \{1, \ldots, m-1\}$.

3.0.2 Base de Hilbert para Γ-invariantes

Mostramos aqui como calcular geradores de $\mathcal{P}(\Gamma)$, como anel, a partir de uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(H)$, onde H é o subgrupo normal de índice m de Γ.

Comecemos com $m = 2$.

Teorema 3.0.8 *Seja $\sigma : \Gamma \to \mathbf{Z}_2$ um epimorfismo. Seja $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$, onde Γ_+ é o núcleo de σ. Então, o conjunto*

$$\{R_0(u_i), R_1(u_i)R_1(u_j),\ 1 \leq i, j \leq s\}$$

forma uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Exemplo 3.0.9 ($\Gamma = (\mathbf{D}_6 \rtimes \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2$) Para $v_j = z_j\bar{z}_j$, $j = 1, 2, 3$, os polinômios elementares simétricos em v_j dados por

$$u_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_2 = v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3, \quad u_3 = v_1v_2v_3$$

juntamente com $u_4 = z_1z_2z_3 + \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$ formam uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbf{C}^3}(\mathbf{D}_6 \rtimes \mathbf{T}^2)$.

Temos que $R_0(u_j) = u_j$ e $R_1(u_j) = 0$, para $j = 1, 2, 3$, $R_0(u_4) = 0$ e $R_1(u_4) = u_4$. Então, pelo Teorema 3.0.8, o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ é gerado por

$$u_1, \; u_2, \; u_3 \; u_4^2.$$

O teorema a seguir estende o Teorema 3.0.8 para índice m maior que 2. Ele tem por base a caracterização de um elemento $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$ como aqueles que satisfazem $R_0(f) = f$.

Teorema 3.0.10 *Seja H o núcleo do epimorfismo σ como em (3.0.1). Seja $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base de Hilbert do anel $\mathcal{P}(H)$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, tomemos $\alpha(j) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ji}$, com $\alpha_{ji} \in \mathbf{N}$. Então, os invariantes*

$$R_0(u_1), R_0(u_2), \ldots, R_0(u_s),$$

$$R_1(u_1)^{\alpha_{11}} \ldots R_1(u_s)^{\alpha_{1s}} \ldots R_{m-1}(u_1)^{\alpha_{m-1,1}} \ldots R_{m-1}(u_s)^{\alpha_{m-1,s}},$$

tal que $\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} j\alpha(j) \equiv 0 \bmod m$, formam uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Capítulo 4

Involuções e diagramas divergentes de dobras

Definição 4.0.11 *Uma* involução *é um germe de difeomorfismo* $\varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ *tal que* $\varphi \circ \varphi = I$*.*

Definição 4.0.12 *Um germe de aplicação* $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ *é uma* dobra *se é* $\mathcal{A}$*-equivalente ao germe*

$$f^0 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^2, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.0.1}$$

isto é, se existem germes de difeomorfismos h *e* k *de* $(\mathbf{R}^n, 0)$ *tais que* $f = k \circ f^0 \circ h^{-1}$*.*

A relação de equivalência entre s-uplas $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ e $(\psi_1, \ldots, \psi_s)$ de involuções em $(\mathbf{R}^n, 0)$ é dada pela conjugação simultânea: se existe h germe de difeomorfismo de $(\mathbf{R}^n, 0)$ tal que $\psi_i = h \circ \varphi_i \circ h^{-1}$, for all $i = 1, \ldots, s$.

Definição 4.0.13 *Dada uma involução* $\varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ *e uma dobra* $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$*,* f *é associada a* φ*, ou* φ *é associada a* f*, se* $\varphi \neq I$ *a* $f \circ \varphi = f$*.*

Ao passo que a uma dobra está associada uma única involução ([48, Proposition 2.6]), a uma dada involução φ sobre $(\mathbf{R}^n, 0)$ com $\mathrm{Fix}(\varphi)$ de codimensão 1 existe uma dobra associada, mas não de forma única. De fato, o conjunto de todas as dobras associadas a uma involução é a órbita de uma (qualquer) delas pelo grupo $\mathcal{L}$ das equivalências à esquerda.

Aqui assumimos, portanto,

$$\operatorname{codim} \mathrm{Fix}(\varphi) = 1.$$

Um diagrama divergente de dobras é um diagrama de germes de aplicações da forma

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{R}^n,0) \\
(f_1,\ldots,f_s):(\mathbf{R}^n,0) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] \arrow[dr, "f_s"'] & (\mathbf{R}^n,0) \\
 & \vdots \\
 & (\mathbf{R}^n,0)
\end{tikzcd}
$$

onde cada f_i é uma dobra, para $i = 1,\ldots,s$. Identificamos agora o diagrama acima com o germe da aplicação $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n, 0)$, $\;f(x) = (f_1(x),\ldots,f_s(x))$, mantendo a notação $(f_1,\ldots,f_s)$ para f.

A equivalência de diagramas divergentes de dobras corresponde à ação do grupo $\mathcal{A}$ das mudanças de coordenadas na fonte e na meta, consistindo de elementos tais que os germes de difeomorfismos na meta são do tipo produto, isto é, preservam a estrutura de $\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n$. Assim, $(f_1, \ldots, f_s) : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n, 0)$ e $(g_1, \ldots, g_s) : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n, 0)$ são equivalentes se existem germes de difeomorfismos $h, k_1, \ldots, k_s$ de $(\mathbf{R}^n, 0)$ tais que $g_i = k_i \circ f_i \circ h^{-1}$, for all $i = 1, \ldots, s$.

Com base nas estruturas acima, damos

Definição 4.0.14 *O diagrama divergente de dobras* $(f_1, \ldots, f_s)$ é associado à s-upla de involuções $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$*, ou* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ é associado a $(f_1, \ldots, f_s)$*, se* f_i *é uma dobra associada a* φ_i *para todo* $i = 1, \ldots, s$.

4.1 A classificação de diagramas de dobras via involuções associadas

Teorema 4.1.1 *Se* $(f_1, \ldots, f_s)$ *é um diagrama divergente de dobras associado a* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ *e* $(g_1, \ldots, g_s)$ *é um diagrama divergente de dobras associado a* $(\psi_1, \ldots, \psi_s)$*, então* $(f_1, \ldots, f_s)$ *e* $(g_1, \ldots, g_s)$ *são equivalentes se, e somente se,* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ *e* $(\psi_1, \ldots, \psi_s)$ *são equivalentes.*

A partir deste resultado, aparece um invariante da órbita de um diagrama divergente de dobras, dado pelo traço da linearização da composta das involuções associadas.

Motivamos pelo Teorema 4.1.1, investimos na obtenção de formas normais para a classe de s-uplas de involuções transversais, levando a uma classificação dos diagramas associados.

Um conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ de involuções sobre $(\mathbf{R}^n, 0)$, $s \leq n$, é transversal se $\mathrm{Fix}(\varphi_i)$ é transversal a $\mathrm{Fix}(\varphi_j)$ em 0 para $i \neq j$ e se

$$codim \ \cap_{i=1}^{s} \mathrm{T}_0\mathrm{Fix}(\varphi_i) \ = \ \sum_{i=1}^{s} codim \ \mathrm{Fix}(\varphi_i),$$

onde $\mathrm{T}_0\mathrm{Fix}(\varphi_i)$ denota o espaço tangente a $\mathrm{Fix}(\varphi_i)$ em 0. A hipótese de transversalidade que assumimos na construção de formas normais nos permite supor, a menos de equivalência, que os subespaços de pontos fixos das involuções são dados pelos hiperplanos coordenados $\{x_i = 0\}$, para cada $i = 1, \ldots, s$, de forma que possamos partir de uma pré-forma normal:

$$\psi_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + a_{i1}x_i, \ldots, -x_i, \ldots, x_n + a_{in}x_i), \tag{4.1.1}$$

nos parâmetros a_{ij}, para $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$. Em consequência, um cálculo direto com a expressão acima nos leva à pré-forma normal da dobra associada àquela involução:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \frac{a_{i1}}{2}x_i, \ldots, x_i^2, \ldots, x_n + \frac{a_{in}}{2}x_i). \tag{4.1.2}$$

Daqui para frente, focamos o estudo a pares de involuções transversais lineares sobre $(\mathbf{R}^n, 0)$, ou seja, $s = 2$ e $n \geq 2$. Com base na discussão precedente, o caso $s = n = 2$ é a chave para a análise dos casos $s = 2$, $n \geq 3$.

Antes de adentrar no caso de duas involuções no plano, chamamos atenção para a classe especial das involuções transversais que geram um grupo Abeliano, para a qual obtivemos formas normais sem que estas sejam necessariamente lineares:

Teorema 4.1.2 *Se $G_s = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$ é transversal e $\Lambda_s = [\varphi_1, \ldots, \varphi_s]$ é Abeliano, então $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ é equivalente a $(\varphi_1^0, \ldots, \varphi_s^0)$, onde*

$$\varphi_i^0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, s. \tag{4.1.3}$$

Teorema 4.1.3 *Nas condições do Teorema 4.1.2, qualquer diagrama divergente de dobras $(f_1, \ldots, f_s)$ associado a $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ é equivalente a $(f_1^0, \ldots, f_s^0)$, onde*

$$f_i^0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i^2, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, s.$$

4.2 O caso linear transversal no plano

Para o caso de pares de involuções no plano, a partição do espaço de parâmetros vindos das pré-formas normais dadas em (4.1.1) pode ser obtida facilmente. Neste caso, tal espaço é o plano (a_{12}, a_{21}) : Se consideramos os pares (ψ_{1_a}, ψ_{2_a}) e (ψ_{1_b}, ψ_{2_b}),

$$\psi_{1_a}(x, y) = (-x, y + a_{12}x),$$

$$\psi_{2_a}(x, y) = (x + a_{21}y, -y)$$

e

$$\psi_{1_b}(x, y) = (-x, y + b_{12}x),$$

$$\psi_{2_b}(x, y) = (x + b_{21}y, -y),$$

segue que (ψ_{1_a}, ψ_{2_a}) e (ψ_{1_b}, ψ_{2_b}) são equivalentes se, e somente se, existe uma constante não-nula α tal que

$$b_{12} = \alpha a_{12}$$

$$b_{21} = \frac{1}{\alpha} a_{21}.$$

Escolhemos as expressões das nossas formas normais tomando

$$(\bar{a}_{12}, \bar{a}_{21}) = \begin{cases} (1,0) & \text{se} \quad a_{21} = 0 \\ (2 + \operatorname{tr}(\psi_1 \circ \psi_2), 1) & \text{se} \quad a_{21} \neq 0. \end{cases}$$

E a partir daí podemos obter as formas normais para todo o plano de parâmetros:

Teorema 4.2.1 *([48, Theorem 6.2]) Seja* (φ_1, φ_2) *um par de involuções lineares transversais sobre* $(\mathbf{R}^2, 0)$*. Considere o group* $\Lambda_2 = [\varphi_1, \varphi_2]$*.*

(a) Se Λ_2 *é Abeliano, então* (φ_1, φ_2) *é equivalente ao par canônico* $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$*, onde*

$$\varphi_1^0(x, y) = (-x, y), \quad \varphi_2^0(x, y) = (x, -y). \tag{4.2.1}$$

(b) Suponhamos Λ_2 *não-Abeliano. Se* $\mathcal{A}(\varphi_2) = \mathrm{Fix}(\varphi_1)$*, então* (φ_1, φ_2) *é equivalente a* $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$*, onde*

$$\bar{\psi}_1(x, y) = (-x, y + x), \quad \bar{\psi}_2(x, y) = (x, -y). \tag{4.2.2}$$

Se $\mathcal{A}(\varphi_2) \neq \mathrm{Fix}(\varphi_1)$*, então* (φ_1, φ_2) *é equivalente a* $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$*, onde*

$$\bar{\psi}_1(x, y) = (-x, y + (2 + \mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2))x), \quad \bar{\psi}_2(x, y) = (x + y, -y). \tag{4.2.3}$$

Teorema 4.2.2 *([48, Theorem 6.4]) Seja* $(f_1, f_2) : (\mathbf{R}^2, 0) \to (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2, 0)$ *um diagrama divergente de dobras associado a um par de involuções como no Teorema 4.2.1.*

(a) Se Λ_2 *é Abeliano, então* (f_1, f_2) *é equivalente ao diagrama canônico* (f_1^0, f_2^0)*, onde*

$$f_1^0(x,y) = (x^2, y), \quad f_2^0(x,y) = (x, y^2). \tag{4.2.4}$$

(b) Suponhamos Λ_2 *naõ-Abeliano. Se* $\mathcal{A}(\varphi_2) = \mathrm{Fix}(\varphi_1)$*, então* (f_1, f_2) *é equivalente a* (g_1, g_2) *com*

$$g_1(x,y) = \big(x^2, y + \frac{1}{2}x\big), \quad g_2(x,y) = (x, y^2). \tag{4.2.5}$$

Se $\mathcal{A}(\varphi_2) \neq \mathrm{Fix}(\varphi_1)$*, então* (f_1, f_2) *é equivalente a* (g_1, g_2) *com*

$$g_1(x,y) = \big(x^2, y + (1 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2))x\big), \quad g_2(x,y) = \big(x + \frac{1}{2}y, y^2\big). \tag{4.2.6}$$

Como consequência deste teorema, temos que os pares de dobras no plano associadas a pares de involuções transversais lineares que são caracterizados pelo invariante $\mathrm{tr}(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2)$ forma um conjunto aberto e denso.

Os resultados acima podem ser generalizados para duas involuções em $(\mathbf{R}^n, 0)$, $n \geq 3$:

Teorema 4.2.3 *([48, Theorem 7.3]) Considere (φ_1, φ_2) um par de involuções transversais lineares sobre $(\mathbf{R}^n, 0)$, $n \geq 3$ e o grupo $\Lambda_2 = [\varphi_1, \varphi_2]$.*

(a) Se Λ_2 é Abeliano, então (φ_1, φ_2) é equivalente ao par canônico $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$, onde

$$\varphi_1^0(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad \varphi_2^0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_n). \tag{4.2.7}$$

(b) Suponha agora Λ_2 não-Abeliano. Temos dois casos:

(b1) Suponha que $\mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \neq n$. *If* $\mathcal{A}(\varphi_2) \subset \mathrm{Fix}(\varphi_1)$, *então* (φ_1, φ_2) *é equivalente a* $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$, *onde*

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (-x_1, x_2 + x_1, x_3, \ldots, x_n), \\ \bar{\psi}_2(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Se $\mathcal{A}(\varphi_2) \not\subset \mathrm{Fix}(\varphi_1)$, *então* (φ_1, φ_2) *é equivalente a* $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$ *dado por*

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (-x_1, x_2 + (4 - n + tr(\varphi_1 \circ \varphi_2))x_1, x_3, \ldots, x_n), \\ \bar{\psi}_2(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (x_1 + x_2, -x_2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

(b2) Suponha que $\mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = n$. *Se* $\mathcal{A}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$, *então* (φ_1, φ_2) *é equivalente a* $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$ *onde*

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (-x_1, x_2 + 4x_1, x_3, \ldots, x_n), \\ \bar{\psi}_2(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (x_1 + x_2, -x_2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Se $\mathcal{A}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$, *então* (φ_1, φ_2) *é equivalente a* $(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2)$, *onde*

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (-x_1, x_2 + 4x_1, x_3, \ldots, x_n), \\ \bar{\psi}_2(x_1, \ldots, x_n) = & \quad (x_1 + x_2, -x_2, x_3 + x_2, x_4, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Temos, assim o teorema de classificação dos diagramas de dobras:

Teorema 4.2.4 *([48, Theorem 7.4]) Seja* $(f_1, f_2) : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, 0)$ *um diagrama divergente de dobras associado a um par* (φ_1, φ_2) *de involuções lineares transversais sobre* $(\mathbf{R}^n, 0)$*,* $n \geq 3$*. Considere o grupo* $\Lambda_2 = [\varphi_1, \varphi_2]$*.*

(a) Se Λ_2 *é Abeliano, então* (f_1, f_2) *é equivalente ao diagrama canônico* (f_1^0, f_2^0)*,*

$$f_1^0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2, x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad f_2^0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_2^2, x_3, \ldots, x_n). \qquad (4.2.12)$$

(b) Suponha Λ_2 não-Abeliano.

(b1) Suponha que $\mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \neq n$*. If* $\mathcal{A}(\varphi_2) \subset \mathrm{Fix}(\varphi_1)$*, então* (f_1, f_2) *é equivalente a* (g_1, g_2)*, com*

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) = & \ \big(x_1^2, x_2 + \tfrac{1}{2}x_1, x_3, \ldots, x_n\big), \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = & \ (x_1, x_2^2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Se $\mathcal{A}(\varphi_2) \not\subset \mathrm{Fix}(\varphi_1)$*, então* (f_1, f_2) *é equivalente a* (g_1, g_2)*, com*

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) = & \ \big(x_1^2, x_2 + \tfrac{1}{2}(4 - n + \mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2))x_1, x_3, \ldots, x_n\big), \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = & \ \big(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2, x_2^2, x_3, \ldots, x_n\big). \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

(b2) Suponha que $\mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = n$*. Se* $\mathcal{A}(\varphi_1) = \mathcal{A}(\varphi_2)$*, então* (f_1, f_2) *é equivalente a* (g_1, g_2)*, com*

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) = & \ \big(x_1^2, x_2 + 2x_1, x_3, \ldots, x_n\big), \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = & \ (x_1 + \tfrac{1}{2}x_2, x_2^2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Se $\mathcal{A}(\varphi_1) \neq \mathcal{A}(\varphi_2)$*, então* (f_1, f_2) *é equivalente a* (g_1, g_2) *com*

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) = & \ \big(x_1^2, x_2 + 2x_1, x_3, \ldots, x_n\big), \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) = & \ (x_1 + \tfrac{1}{2}x_2, x_2^2, x_3 + \tfrac{1}{2}x_2, x_4, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

4.3 Pares de involuções e difeomorfismos reversíveis

Dada uma involução φ on $(\mathbf{R}^n, 0)$, um germe de difeomorfismo $F : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ é φ-reversível se $\varphi \circ F = F^{-1} \circ \varphi$.

Para quaisquer duas involuções φ_1 e φ_2 sobre $(\mathbf{R}^n, 0)$, a composição $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ é φ_1-reversível.

Reciprocamente, um germe de difeomorfismo F com uma simetria reversível involutória φ_1 pode sempre ser escrita como a composição de duas involuções: $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

Assim, o estudo do difeomorfismo $F = \varphi_1 \circ \varphi_2$ está itimamente ligado ao estudo dos pares de involuções (φ_1, φ_2).

Há aqui um ponto a ser observado: para quaisquer dois pares de involuções (φ_1, φ_2) e $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ equivalentes, as composições $\varphi_1 \circ \varphi_2$ e $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$ são difeomorfismos conjugados. A recíproca disto, entretanto, não é valida em geral: se tomamos

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = &\quad (-x_1, x_2, \ldots, x_n), \\
\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = &\quad (x_1 + a x_2, -x_2, x_3, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_1(x_1, \ldots, x_n) = &\quad (x_1 + b x_2, -x_2, x_3, \ldots, x_n), \\
\tilde{\varphi}_2(x_1, \ldots, x_n) = &\quad (-x_1 - (a+b) x_2, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

para $a \neq 0$ e b qualquer, então as composições são iguais, mas (φ_1, φ_2) e $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ não são equivalentes (basta usar o Teorema 4.2.1 para $n = 2$ e o Teorema 4.2.3 para $n \geq 3$. Nos perguntamos então que restrições o estudo dos pares (φ_1, φ_2) impõe ao estudo da dinâmica associada ao difeomorfismo $\varphi_1 \circ \varphi_2$. Os teoremas de classificação da seção anterior revelam que, por equivalência, não existe restrição alguma para quase todo par (φ_1, φ_2) de involuções lineares transversais. De fato, quase todo par é caracterizado por $\mathrm{tr}(\varphi_1 \circ \varphi_2)$.

Fazemos aqui uma descrição de difeomorfismos lineares reversíveis no plano da forma $\varphi_1 \circ \varphi_2$ quando $\mathcal{A}(\varphi_2)$ e $\mathrm{Fix}(\varphi_1)$ são subespaços distintos. Neste caso, temos $\det(F) = 1$, e então $-2 < \mathrm{tr}(F) < 2$ se, e somente se, F é conjugado a uma rotação. Agora, pelo Teorema 4.2.1, o par (φ_1, φ_2) é representado pelo par $(2+\mathrm{tr}(F), 1)$, ou seja, podemos assumir que as involuções são dadas por

$$\varphi_1(x, y) = (-x, y + (2 + \mathrm{tr}(F))x), \qquad \varphi_2(x, y) = (x + y, -y).$$

Então, o intervalo $-2 < \mathrm{tr}(F) < 2$ determina os pares equivalentes aos pares de reflexões. Se $\mathrm{tr}(F) > 2$ ou $\mathrm{tr}(F) < -2$, então F corresponde a um difeomorfismo φ_1-reversível hiperbólico. Concluímos ainda que no caso em que as involuções são reflexões, então pares são equivalentes se, e somente se, o ângulo entre suas retas de pontos fixos são iguais. Isto segue diretamente de uma análise geométrica das involuções neste caso.

Capítulo 5

Involuções e difeomorfismos normalmente hiperbólicos

Dois pares de involuções cuja composição é um difeomorfismo normalmente hiperbólico geram um grupo não Abeliano, em geral não compacto. Nesta linha, nos interessamos em [49] pelo problema de linearização desta classe de difeomorfismo. Assim como no capítulo anterior, a equivalência de difeomorfismos aqui tratada é via conjugação (por homeo ou difeomorfismo) e a equivalência de pares de involuções é por conjugação simultânea.

5.1 O teorema de linearização

Definição 5.1.1 *Seja* $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ *um germe de difeomorfismo,* $f \neq I$*. Suponha que* $\mathrm{Fix}(f)$ *seja uma subvariedade em* $(\mathbf{R}^n, 0)$ *e que* $\dim \mathrm{Fix}(f) = k$*. Dizemos que* f *é normalmente hiperbólico se o espectro de* $df(0)$ *tem, contando multiplicidade,* $n-k$ *elementos fora do círculo* $S^1 \subset \mathbf{C}$*.*

Se $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$, a definição acima se reduz ao conceito de germe de difeomorfismo hiperbólico. Se $\dim \mathrm{Fix}(f) = k > 0$, então 1 é autovalor de $df(0)$ com mesma multiplicidade algébrica e geométrica, igual a k; além disso, $T_0\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(df(0))$. Assim, $df(0)$ é um isomorfismo normalmente hiperbólico se f o é.

Assumimos transversalidade das involuções:

Definição 5.1.2 *Dadas duas involuções* $\varphi_1, \varphi_2 : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, φ_1 *e* φ_2 *são transversais se* $\mathrm{Fix}(\varphi_1)$ *e* $\mathrm{Fix}(\varphi_2)$ *estão em posição geral, ou seja, se*

$$\mathbf{R}^n = T_0\mathrm{Fix}(\varphi_1) + T_0\mathrm{Fix}(\varphi_2). \tag{5.1.1}$$

Sob esta hipótese, por equivalência podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\mathrm{Fix}(\varphi_i) = \mathrm{Fix}(d\varphi_i(0)),\ i = 1, 2.$$

Ainda para a descrição da classe de pares de involuções para a qual o teorema de linearização se aplica, consideramos $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ um isomorfismo linear normalmente hiperbólico e tomamos a decomposição

$$\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus \mathrm{Fix}(L), \tag{5.1.2}$$

onde E^s e E^u são respectivamente os subespaços estável e instável de L. Seja

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \stackrel{L}{\longrightarrow} & \mathbf{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fix}(L) & \stackrel{I}{\longrightarrow} & \mathrm{Fix}(L) \end{array} \tag{5.1.3}$$

um automorfismo fibrado hiperbólico cobrindo a identidade I, cujas fibras são $E^s \oplus E^u$.

Teorema 5.1.3 *Seja* (φ_1, φ_2) *um par de involuções transversais sobre* $(\mathbf{R}^n, 0)$ *tal que* $\mathrm{Fix}(\varphi_i) = \mathrm{Fix}(d\varphi_i(0))$, $i = 1, 2$, $\varphi_1 \circ \varphi_2$ *é normalmente hiperbólico e cada* φ_i *localmente respeita o fibrado em (5.1.3) para* $L = d(\varphi_1 \circ \varphi_2)(0)$*. Então, este par é* C^0*-equivalente a* (L_1, L_2)*, onde* $L_i = d\varphi_i(0)$, $i = 1, 2$.

A prova é baseada em dois lemas:

Seja $C_b^0(\mathbf{R}^n)$ o espaço das aplicações contínuas limitadas sobre $\mathbf{R}^n$. O primeiro lema é um caso particular do que aparece em [59, Theorem 2.1], para automorfismos fibrados hiperbólicos (5.1.3):

Lema 5.1.4 *Seja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ um isomorfismo linear normalmente hiperbólico. Existe $\epsilon > 0$ tal que se $g \in C_b^0(\mathbf{R}^n)$ tem constante de Lipschitz limitada por ϵ, $L + g$ cobre a identidade $I : \mathrm{Fix}(L) \to \mathrm{Fix}(L)$ e $\mathrm{Fix}(L+g) \supseteq \mathrm{Fix}(L)$, então existe um único homeomorfimo $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ também cobrindo $I : \mathrm{Fix}(L) \to \mathrm{Fix}(L)$, da forma $h = I + \eta$, com $\eta \in C_b^0(\mathbf{R}^n)$ e $\eta|_{\mathrm{Fix}(L)} \equiv 0$, que é uma conjugação entre $L + g$ e L.*

Lema 5.1.5 *Seja (φ_1, φ_2) m par de involuções sobre $(\mathbf{R}^n, 0)$ nas hipóteses do Teorema 5.1.3. Dado $\epsilon > 0$, existem extensões involutórias $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de φ_1, φ_2 de forma que $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2 = d(\varphi_1 \circ \varphi_2)(0) + g$, onde $g \in C_b^0(\mathbf{R}^n)$ tem constante de Lipschitz limitada por ϵ, $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2$ cobre a identidade $I : \mathrm{Fix}(d(\varphi_1 \circ \varphi_2)(0)) \to \mathrm{Fix}(d(\varphi_1 \circ \varphi_2)(0))$ e $\mathrm{Fix}(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2) \supseteq \mathrm{Fix}(d(\varphi_1 \circ \varphi_2)(0))$.*

5.2 Classificação dos pares de involuções lineares

Para os resultados desta seção, a menos que mencionado o contrário, tratamos de involuções lineares.

Pares de involuções lineares têm estruturas rígidas:

$$\mathbf{R}^n = \mathrm{Fix}(\varphi) \oplus \mathcal{A}(\varphi). \tag{5.2.1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2) &= \mathrm{Fix}(\varphi_1) \cap \mathrm{Fix}(\varphi_2) \oplus \mathcal{A}(\varphi_1) \cap \mathcal{A}(\varphi_2), \\ \mathcal{A}(\varphi_1 \circ \varphi_2) &= \mathrm{Fix}(\varphi_1) \cap \mathcal{A}(\varphi_2) \oplus \mathcal{A}(\varphi_1) \cap \mathrm{Fix}(\varphi_2). \end{aligned}$$

Como consequência da última igualdade acima, se $\mathcal{A}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \{0\}$, então $\dim \mathrm{Fix}(\varphi_1) = \dim \mathrm{Fix}(\varphi_2)$.

Notamos agora que dois pares (φ_1, φ_2) e (ψ_1, ψ_2) em $\mathbf{R}^n$ são linearmente equivalentes, isto é, equivalentes por um germe de isomorfismo linear se, e somente se, $(-\varphi_1, -\varphi_2)$ e $(-\psi_1, -\psi_2)$ são linearmente equivalentes. Ainda, a condição de transversalidade de φ_1 e φ_2 se reduz à igualdade $\mathbf{R}^n = \mathrm{Fix}(\varphi_1) + \mathrm{Fix}(\varphi_2)$. Logo, quando a composta é normalmente hiperbólica, se a transversalidade falha para φ_1 e φ_2 mas $\mathcal{A}(\varphi_1)$ e $\mathcal{A}(\varphi_2)$ estão em posição geral, então ainda é possível se obter a forma normal do par (φ_1, φ_2) aplicando-se os resultados para $(-\varphi_1, -\varphi_2)$, já que $\mathrm{Fix}(-\varphi_i) = \mathcal{A}(\varphi_i), \quad i = 1, 2$. Em certas dimensões, esta observação pode resultar na classificação completa de pares de involuções lineares com composição normalmente hiperbólica. Estes são precisamente os casos para os quais a hiperbolicidade normal de $\varphi_1 \circ \varphi_2$ implica que ou $\mathrm{Fix}(\varphi_1)$ e $\mathrm{Fix}(\varphi_2)$ ou $\mathcal{A}(\varphi_1)$ e $\mathcal{A}(\varphi_2)$ estão em posição geral.

Assumindo $\varphi_1 \circ \varphi_2$ isomorfismo linear normalmente hiperbólico, temos ainda

(NH1) $1 \leq \dim \mathrm{Fix}(\varphi_i) \leq n-1, \;\; i = 1, 2.$

(NH2) $\dim \mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \leq n-2;$

(NH3) $\mathcal{A}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \{0\}.$

Ainda:

Teorema 5.2.1 *Seja φ_1 e φ_2 involuções lineares em $\mathbf{R}^n$ com $\varphi_1 \circ \varphi_2$ normalmente hiperbólica. Então a composta $\varphi_1 \circ \varphi_2$ é hiperbólica se, e somente se, n é par, φ_1 e φ_2 são transversais e $\dim \mathrm{Fix}(\varphi_1) = \dim \mathrm{Fix}(\varphi_2) = n/2$.*

Da álgebra linear obtemos que o par (φ_1, φ_2) é linearmente equivalente ao par (ϕ_1, ϕ_2) tal que ϕ_1 e ϕ_2 têm matrizes

$$\phi_1 = \left(\begin{array}{c|c} -I_r & 0 \\ \hline A & I_r \end{array}\right), \quad \phi_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & I_r \\ \hline 0 & -I_r \end{array}\right), \tag{5.2.2}$$

com A invertível. E, além disso, (ϕ_1, ϕ_2) é linearmente equivalente a (ϕ_1', ϕ_2') do mesmo tipo

$$\phi_1' = \left(\begin{array}{c|c} -I_r & 0 \\ \hline A' & I_r \end{array}\right), \quad \phi_2' = \left(\begin{array}{c|c} I_r & I_r \\ \hline 0 & -I_r \end{array}\right)$$

(A' invertível) se, e somente se, A e A' são semelhantes. Logo, a matriz A pode ser tomada na sua forma de Jordan.

O teorema acima se generaliza para pares não lineares:

Corolário 5.2.2 *Sejam φ_1 e φ_2 involuções em $(\mathbf{R}^n, 0)$ com $\varphi_1 \circ \varphi_2$ normalmente hiperbólico. Então $\varphi_1 \circ \varphi_2$ é hiperbólico se, e somente se, n é par, φ_1 e φ_2 são tansversais e* $\dim \mathrm{Fix}(\varphi_1) = \dim \mathrm{Fix}(\varphi_2) = n/2$.

Este resultado segue diretamente do teorema anterior aplicado às involuções $d\varphi_1(0)$ e $d\varphi_2(0)$, lembrando que $T_0\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(dg(0))$ quando g é uma involução ou g é normalmente hiperbólico.

Vamos primeiro apresentar o teorema de caracterização das órbitas dos pares cuja composição é hiperbólica. As demais possibilidades são suspensões deste caso.

Teorema 5.2.3 *Sejam φ_1 e φ_2 involuções lineares sobre $\mathbf{R}^n$ tais que $\varphi_1 \circ \varphi_2$ é hiperbólica e $r = \dim \mathrm{Fix}(\varphi_1) = \dim \mathrm{Fix}(\varphi_2) = n/2$. Então, o par (φ_1, φ_2) é linearmente equivalente ao par (ϕ_1, ϕ_2),*

$$\phi_1 = \left(\begin{array}{c|c} -I_r & 0 \\ \hline A & I_r \end{array}\right), \quad \phi_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & I_r \\ \hline 0 & -I_r \end{array}\right) \tag{5.2.3}$$

para alguma matriz invertível A tal que seus possíveis autovalores ξ satisfazem $\xi < 0$ ou $\xi > 4$, sem restrição sobre ocorrência de autovalores imaginários.

Uma série de resultados que aparecem em [49] dão a passagem do caso hiperbólico do teorema acima para o caso geral, evidenciando que de fato o caso normalmente hiperbólico é uma suspensão do hiperbólico:

Teorema 5.2.4 *Sejam φ_1, φ_2 involuções lineares transversais em $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, com $\varphi_1 \circ \varphi_2$ normalmente hiperbólica e seja $r = \dim \mathrm{Fix}(\varphi_1) = \dim \mathrm{Fix}(\varphi_2)$. Então, $n/2 \leq r \leq n-1$ e o par (φ_1, φ_2) é linearmente equivalente ao par (ψ_1, ψ_2) tal que ψ_1 e ψ_2 têm matrizes*

$$\psi_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -I_{n-r} & 0 & \\ \hline A & I_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{2r-n} \end{array}\right), \quad \psi_2 = \left(\begin{array}{cc|c} I_{n-r} & I_{n-r} & \\ \hline 0 & -I_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{2r-n} \end{array}\right),$$

com as submatrizes

$$\phi_1 = \left(\begin{array}{c|c} -I_{n-r} & 0 \\ \hline A & I_{n-r} \end{array}\right), \quad \phi_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-r} & I_{n-r} \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array}\right)$$

nas condições do Teorema 5.2.3.

Observação 5.2.5 Para involuções lineares φ_1 e φ_2 que sejam transversais com composta normalmente hiperbólica, podemos concluir que

$$\mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mathrm{Fix}(\varphi_1) \cap \mathrm{Fix}(\varphi_2). \tag{5.2.4}$$

Em geral $\mathrm{Fix}(\varphi_1) \cap \mathrm{Fix}(\varphi_2) \subseteq \mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2)$, mas concluímos a igualdade por um argumento de dimensão, já que neste caso a intersecção tem também dimensão $2r - n$. Isto é precisamente a que se reduz à condição (a) que demos no início desta seção pela transversalidade e pela hiperbolicidade normal.

Então podemos generalizar (5.2.4) para o caso não linear. De fato, podemos assumir

$$\mathrm{Fix}(\varphi_i) = \mathrm{Fix}(d\varphi_i(0)), \quad i = 1, 2$$

em $(\mathbf{R}^n, 0)$. Assim, localmente temos

$$\mathrm{Fix}(\varphi_1) \cap \mathrm{Fix}(\varphi_2) = \mathrm{Fix}(d(\varphi_1 \circ \varphi_2)(0)) = T_0\mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2),$$

onde a primeira igualdade é obtida de (5.2.4). Logo, $\mathrm{Fix}(\varphi_1) \cap \mathrm{Fix}(\varphi_2)$ é uma subvariedade de $\mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2)$ de mesma dimensão. E o resultado segue.

Referências Bibliográficas

[1] F. Antoneli, P.H. Baptistelli, A.P.S. Dias, M. Manoel, Invariant theory and reversible-equivariant vector fields, *Journal of Pure and Applied Algebra* **213** (2009) 649–663.

[2] V. I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Berlin, Springer (1983).

[3] P.H. Baptistelli, M.G. Manoel, Some Results on Reversible-Equivariant Vector Fields. *Cadernos de Matemática, ICMC* **6** (2005) 237–263.

[4] P.H. Baptistelli e M. Manoel, The classification of reversible equivariant steady-state bifurcations on auto-dual spaces, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **145** (2) (2008) 379–401.

[5] P.H. Baptistelli e M. Manoel, The σ-isotypic decomposition and the σ-index of reversible-equivariant systems. *Topology and its Applications* **159** 389–396 (2012).

[6] P.H. Baptistelli e M. Manoel, Invariants and relative invariants under compact Lie groups, *Cadernos de Matemática ICMC-USP* **352**. arXiv:1207.1513 (2012).

[7] J.C. Barbosa, M. Manoel . A Mathematical Model for the Spectrum of a Two-Dimensional Schrödinger Equation with Magnetic Field under Dirichlet Boundary Conditions. *Physica Scripta* **61** (2000) 129–132.

[8] M. V. Berry, *Semi-classical mechanics in phase space: A study of Wigner's function*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., A 287(1977) 237–271.

[9] T. Bountis, L. Drossos e I.C. Percival, On nonintegrable systems with square root singularities in complex time, *Physics Letters A* **159** (1991) 1–5.

[10] T. Bountis, Investigating non-integrability and chaos in complex time, *Physica D* **86** (1995) 256–267.

[11] T. Bröcker, T tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics **98**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[12] P.L. Buono, J.S.W. Lamb, R.M. Roberts, Bifurcation and branching of equilibria in reversible equivariant vector fields, *Nonlinearity* **21** (2008) 625–660.

[13] J. W. Bruce and D. Fidal, On binary differential equations and umbilics, *Proceedings R. Society Edinb.* **A111** (1989) 147–168.

[14] J.W. Bruce and F.Tari, On binary differential equations, *Nonlinearity* **8** (1995) 255–271.

[15] J.W. Bruce and F. Tari, Implicit differential equations from the singularity theory viewpoint. Singularities and differential equations, *Banach Center Publ.* **33** (1996) 23–38.

[16] J. W. Bruce and F. Tari, Generic one-parameter families of binary differential equations of Morse type, *Disc. Cont. Dyn. Sys.* **3** (1997) 79–90.

[17] J.W. Bruce and F. Tari, On the multiplicity of implicit differential equations, *J. Differential Equations* **148** (1998) 122–147.

[18] J. W. Bruce and F. Tari, Duality and implicity differencial equations, *Nonlinearity* **13** (2000) 791–811.

[19] J. W. Bruce, G. J. Fletcher and F. Tari, Bifurcations of implicit differential equations, *Proc. R. Soc. Edinb.* **A130** (2000) 485–506.

[20] H. Cartan, *Sur les groupes de transformations analytiques.* Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, **198** (1935).

[21] L. Challapa, Invariants of binary differential equations, *Proc. Real and Complex Singularities*, LMS Lecture Notes Series **380** (2010).

[22] P. Chossat, R. Lauterbach, *Methods in equivariant bifurcations and dynamical systems* . Advanced series in nonlinear dynamics **15**, World Scientific (2000).

[23] J. Damon. *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$.* Mem. Amer. Math. Soc. **306** Providence (1984).

[24] A. A. Davydov, *Qualitative control theory*, Transl. Math. Monogr. **142** (1994).

[25] A.A. Davydov and L. Ortiz-Bobadilha, Smooth normal forms of folded elementary singular points. *J. Dyn. Contr. Sys.* **1** (1995) 463–482.

[26] W. Domitrz, M. Manoel, P.M. Rios, The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions. arXiv:12-7.1068 (2012).

[27] J.P. Dufour, *Diagrammes d'applications différentiables.* Thèse, Université des Sciences de Montpellier, France (1979).

[28] Y. N. Fedorov e D. Gťomez-Ullate, Dynamical systems on infinitely sheeted Riemann surfaces, *Physica D* **227** (2) (2007) 120–134.

[29] M. Forger, Invariant polynomials and Molien functions, *Journal of Mathematical Physics* **39** (2) (1998) 1107–1141.

[30] R. Garcia and J. Sotomayor Harmonic mean curvature lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^3$, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S)* **34** (2003) 303–331.

[31] The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.9 (2006) (http://www.gap-system.org)

[32] K. Gatermann, Semi-invariants, Equivariants and Algorithms. *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* **7** (1996) 105–124.

[33] K. Gatermann, *Computer Algebra Methods for Equivariant Dynamical Systems*. Lecture Notes in Mathematics **1728**, Sringer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2000).

[34] P. J. Giblin, P. A. Holtom,*The centre symmetry set*, Geometry and Topology of Caustics, Banach Center Publications, Vol 50, Warsaw (1999) 91–105.

[35] P. J. Giblin, V. M. Zakalyukin, *Singularities of systems of chords*, Funct. Anal. Appl. 36 (2002) 220–224.

[36] P. J. Giblin, V. M. Zakalyukin, *Singularities of centre symmetry sets*, Proc. London Math. Soc. **90** 3 (2005) 132–166.

[37] P. J. Giblin, V. M. Zakalyukin,*Recognition of centre symmetry set singularities*, Geom. Dedicata **130** (2007) 43–58.

[38] M. Golubitsky, I. Stewart, D. Schaeffer, *Singularities e Groups in Bifurcation Theory, Vol. II.* Appl. Math. Sci. **69**, Springer-Verlag, New York (1985).

[39] R. Goodman, N.R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups.* Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[40] G.M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR 3.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2005). (http://www.singular.uni-kl.de)

[41] R. Hermann, *The formal linearization of a semisimple Lie algebra of vector fields about a singular point.* Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968) 105–108.

[42] A. Jacquemard, M.A. Teixeira, *A note on rigid decompositions of reversible mappings.* Fields Inst. Commun. 31 (2002) 189–199.

[43] G. James, M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups. 2nd ed.* Cambridge University Press, New York (2001).

[44] S. Janeczko, *Bifurcations of the center of simetria*, Geom. Dedicata 60 (1996) 9–16.

[45] A.G. Kusmin, *Nonclassical equations of mixed type and their applications in gas dynamics*, Int. Ser. Numer. Math. **109** (1992).

[46] J.S.W. Lamb, J.A.G. Roberts, *Time-reversal simetria in dynamical systems: A survey*, Pyisica D 112 (1998) 1–39.

[47] J.S.W Lamb, R.M. Roberts, Reversible Equivariant Linear Systems, *J. Diff. Eq.* **159** (1999) 239–279.

[48] S. Mancini, M. Manoel, M.A. Teixeira, Divergent diagrams of folds and simultaneous conjugacy of involutions, *Disc. Cont. Dyn. Sys.* **4** (2005) 657–674.

[49] S. Mancini, M. Manoel, M.A. Teixeira, Simultaneous linearization of a class of pairs of involutions with mormally hyperbolic composition. *Cadernos de Matemática ICMC-USP* (2012).

[50] Manoel, M., Stewart, I. The Classification of Bifurcations with Hidden Symmetries. Proceedings of the London Mathematical Society **80** (2000) n. 80, 198–234.

[51] Manoel, M.G., Stewart, I. Degenerate bifurcations with $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$-simmetry. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, World Scientific Publishing Co **9** (1999) n. 8, 1653–1667.

[52] I. Melbourne, A Singularity Theory Analysis of Bifurcation Problems with Octahedral Symmetry. *Dynam. Stab. Sys.* **1** (4) (1986) 293–321.

[53] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological Transformation Groups* Interscience, New York (1955).

[54] M.S. Naschie, Time Symmetry Breaking, Duality and Cantorian Space-Time, *Chaos, Solitons e Fractals* **7** (4) (1996) 499–518.

[55] M.S. Naschie, Wick rotation, Cantorian spaces and the complex arrow of time in quantum physics, *Chaos, Solitons e Fractals* **7** (9) (1996) 1501–1506.

[56] J.M. Oliver, Linear involutions and binary differential equations. Preprint (2010).

[57] J. Palis Jr, W. Melo, *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Projeto Euclides (1978).

[58] C. Polymilis, G. Rowlands e A.N. Yannacopoulos, A Method for locating singularities in the complex time domain for integrable dynamical systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **68** (4) (1997) 273–281.

[59] C. Pugh, M. Schub, Linearization of normally hyperbolic diffeomorphisms and flows. *Inventiones Math.* **10** (1970) 187–198.

[60] V. Reiner, Free Modules of Relative Invariants of Finite Groups, *Studies in Applied Math.* **81** (1989) 181–184.

[61] D.H. Sattinger, *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory.* Lecture Notes in Mathematics **762**, Springer-Verlag, New York (1979).

[62] L. Smith, Free Modules of Relative Invariants and Some Rings of Invariants that are Cohen-Macaulay. *Proc. of the American Math. Soc.* **134** (2006) 2205–2212.

[63] J. Sotomayor and C. Gutierrez, Structurally stable configurations of lines of principal curvature, *Bif. Erg. Th. Appl.* (Dijon 1981), 195–215, Astérisque, (1982) 98–99.

[64] R.P. Stanley, Relative invariants of Finite Groups generated by Pseudoreflections, *J. of Algebra* **49** (1977) 134–148.

[65] R.P. Stanley, Combinatorics and Invariant Theory, *Proc. of Symposia in Pure Mathematics* **34** (1979) 345–355.

[66] W.-H. Steeb e A. Fatykhova, Singularities in the complex time plane and exactly solvable dynamical systems, *Canadian Journal of Physics* **72** (1994) 147–151.

[67] B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory.* Springer-Verlag, New York, (1993).

[68] F. Tari, Pairs of foliations on surfaces, *Proc. Real and Complex Singularities,* LMS Lecture Notes Series **380** (2010) .

[69] M. A. Teixeira, *Generic singularities of discontinuous vector fields.* An Ac Bras Cienc 53, 2 (1981).

[70] M. A. Teixeira, *On topological stability of divergent diagrams of folds.* Math Zeitschrift 180 (1982) 361–371.

[71] M. A. Teixeira, *Local and simultaneous structural stability of certain diffeomorphisms,* in: "Proceedings of Dynamical Systems, Stability and Turbulence"(Warwick), Lecture Notes in Mathematics **898** (1981) 382–390.

[72] M. A. Teixeira, *Local reversibility and applications*, in: Real and Complex Singularities, J.W.Bruce and F. Tari (Eds), CRC Research Notes in Mathematics **412** (2000) 251–265.

[73] S. M. Voronin, *Analytic classification of pairs of involutions and its applications.* Funct Anal Appl **16**(2) (1982) 21–29.

[74] P. A. Worfolk, Zeros of Equivariant Vector Fields: Algorithms for an Invariant Approach. *J. Symb. Comp.*, **17** (1994) 487–511.