

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

TEXTO SISTEMATIZADO

Análise Global e Teoria Espectral de pseudovariiedades

LUIZ Roberto HARTMANN Junior

DM - UFSCar

*Apresentado como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Livre-Docente em Matemática pelo ICMC-USP
na especialidade*

Topologia e Singularidades
Especialidade V: SMA - 5871 - Geometria das Variedades

27 de Julho de 2019



À minha família...

Prefácio

Apresento aqui alguns dos trabalhos desenvolvidos por mim, com ou sem colaboração. Optei por não incluir todos, descrevendo apenas os que possuem uma temática comum, ou seja, os que estão relacionados ao estudo de invariantes espectrais sobre pseudovariiedades.

Gostaria, primeiramente, de explicar porque não comentarei sobre os trabalhos [BFH16, DOHV19, DAHA19]. O trabalho [BFH16] utiliza ferramentas de Topologia Algébrica, [DOHV19] está relacionado a Análise Funcional e [DAHA19] está ligado a Teoria de Singularidade. Todos não possuem conexão direta com os assuntos tratados nesse texto. Quanto aos trabalhos [DMHS09, DMHS12, HASP10, HAR14, HASP17A] também não os comentarei pois são desdobramentos diretos da minha tese [HAR09].

Os trabalhos não serão apresentados em ordem cronológica, e sim em uma ordem que acredito ser natural de modo a fazer a leitura fluir. Dessa forma no Capítulo 1 são discutidos os trabalhos relacionados ao zeta-determinante regularizado de um operador auto-adjunto, nele comentarei os trabalhos [HAR19, HLV17, HASP19]. No Capítulo 2 são discutidos os trabalhos relacionados com a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para espaços com singulares cônicas, nele comentarei os artigos [HASP11, HASP12, HASP16, HASP17B]. No último capítulo, o Capítulo 3, apresento meus trabalhos relacionados a expansão assintótica do traço do resolvente em pseudovariiedade suavemente estratificadas, nele comento os trabalhos [HLV18A, HLV18B].

Conteúdo

Prefácio	iv
1 Zeta-determinantes regularizados de operadores auto-adjuntos	1
1.1 Introdução	1
1.2 O método da soma dupla para operadores auto-adjuntos	3
1.2.1 Operadores com espectro de dimensão discreta	3
1.2.2 O determinante de Fredholm e sua relação com o espectro de dimensão discreta	7
1.2.3 Zeta-determinante regularizado e sua conexão com o determinante de Fredholm	8
1.2.4 Zeta-determinante de operadores espectralmente decompostos	9
1.3 Zeta-determinantes de operadores de Sturm-Liouville do tipo cúspide	11
1.4 Zeta determinante do operador de Laplace em espaços projetivos reais	15
1.4.1 A função zeta do operador de Laplace em esferas e nos planos projetivos reais	16
1.4.2 Zeta-determinante do operador de Laplace em esferas e espaços projetivos reais	18
2 Extensão do Teorema de Cheeger-Müller em Espaços Singulares	23
2.1 Introdução	23
2.1.1 Teorema de Cheeger-Müller	24
2.2 Torção Analítica de cones métricos finitos sobre uma variedade compacta	28
2.2.1 Cone métrico finito e o espectro do operador de Hodge-Laplace	28
2.2.2 Torção Analítica do cone métrico finito	31
2.2.3 Identificação das contribuições Geométricas/Topológicas	33
2.2.4 Caso limite do cilindro cônico finito	35
2.3 Sobre a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para o cone	37
2.3.1 Torção de Reidemeister do cilindro cônico	37
2.3.2 Extensão do Teorema de Cheeger-Müller para um cone de dimensão par	39
2.3.3 Torção de Interseção do Cone	42
2.3.4 Cone de dimensão ímpar	44

3	Expansão Assintótica do traço do resolvente	45
3.1	Introdução	45
3.2	Domínios de operadores de Dirac e Laplace em espaços estratificados .	46
3.2.1	Espaços estratificados e métricas cônicas iteradas	47
3.2.2	Operadores de Dirac em uma quina abstrata	51
3.2.3	Espaços de Sobolev em uma quina abstrata	52
3.2.4	Invertibilidade dos operadores modelo e a parametrix dos operadores abstratos de Dirac e Laplace	53
3.2.5	Domínio minimal dos operadores de Dirac e Laplace em uma quina abstrata	55
3.2.6	Domínio dos operadores de Dirac e Laplace em uma pseudovarietade suavemente estratificada	58
3.3	Expansão assintótica do traço do resolvente em espaços estratificados .	60
3.3.1	Lema singular assintótico com parâmetros	61
3.3.2	O operador de Hodge-Laplace em uma pseudovarietade suavemente estratificada	62
3.3.3	Espaços de Sobolev abstratos em cones e quinas - Revisitado . .	63
3.3.4	O resolvente do operador de Bessel em um cone e uma quina abstratos	64
3.3.5	Expansão assintótica do traço do resolvente em uma quina abstrata	67
3.3.6	Expansão assintótica do traço do resolvente em uma pseudovarietade suavemente estratificada	71
	Bibliografia	75

Capítulo 1

Zeta-determinantes regularizados de operadores auto-adjuntos

Neste capítulo apresentamos os trabalhos relacionados ao zeta-determinante que são [HAR19, HLV17, HASP19]. Na Seção 1.2, apresentamos a definição do zeta-determinante regularizado e suas relações com o traço do semi-grupo do calor, traço do resolvente e o determinante de Fredholm. Ao fim apresentamos a principal ferramenta utilizada para determinar a Torção Analítica descrita no Capítulo 2 que são os Teoremas 1.10 e 1.12. Na Seção 1.3, apresentamos os resultados do artigo [HLV17], onde estudamos o operador de Sturm-Liouville do tipo cúspide em um intervalo não limitado. Este é o primeiro trabalho na literatura neste contexto. Por fim, a Seção 1.4 apresenta o cálculo explícito do zeta-determinante do operador de Laplace em esperas e planos projetivos reais.

1.1 Introdução

Nos estudos iniciais de matemática o determinante aparece como uma ferramenta mágica. Por meio dele, resolvemos sistemas lineares, determinamos o produto vetorial entre vetores, calculamos a área de paralelogramos, isto para citar apenas alguns exemplos. O objetivo principal de Ray e Singer em [RASi71] foi generalizar este conceito para operadores em espaços de dimensão infinita. A motivação para a Definição 1.8 vem do seguinte fato:

Exemplo 1.1. *Dado um espaço vetorial de dimensão finita, sabemos que se um operador $L : V \rightarrow V$ é diagonalizável então o determinante de L , $\det L$, é dado pelo produto dos seus autovalores, i.e., se $\{\lambda_j\}_{n=1}^m$ é o conjunto de autovalores, então*

$$\det L = \prod_{j=1}^m \lambda_j.$$

Suponha que $\lambda_j \neq 0$ para $j = 1, \dots, m$ e defina a função zeta associada a L por

$$\zeta(s; L) := \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-s}.$$

Esta função é analítica em \mathbb{C} e sua derivada em zero é dada por

$$\begin{aligned}\zeta'(0; L) &= -\sum_{j=1}^m \log \lambda_j \\ &= -\log \prod_{j=1}^m \lambda_j = -\log \det L.\end{aligned}$$

Apesar do zeta-determinante nascer dentro do contexto da Torção Analítica (veja Capítulo 2), esta ferramenta possui interesse próprio. Os físicos já utilizavam a ideia do determinante de um operador ser definido a partir do produto de seus autovalores. Por exemplo, essa é a abordagem para o cálculo de integrais de caminho Gaussianas, seguindo a sua formulação na Mecânica Quântica (veja [FEH10, GUT67, GEJA60]). Após a definição precisa do zeta-determinante regularizado, feita por Ray e Singer [RASI71], S. Hawking [HAW77] usou o zeta-determinante regularizado para descrever uma técnica de “obter valores finitos para integrais de caminhos de campos (incluindo o campo gravitacional) em um espaço-tempo curvo”. Motivados por estas aplicações, Levit e Smilansky [LESM77] descreveram o zeta-determinante de um operador de Sturm-Liouville regular em um intervalo fechado em função do Wronskiano de um sistema fundamental de soluções normalizado. Tal ideia foi posteriormente explorada em [LES98, LEVE11] no estudo de um operador de Sturm-Liouville no caso regular-singular em um intervalo limitado. Em [LES98], ele ainda observa que o estudo destes determinantes levaria à prova do Teorema de Cheeger-Müller no caso singular (veja o Capítulo 2).

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta, o zeta-determinante regularizado do operador de Laplace em M fornece informações importantes sobre a geometria de M . Por exemplo, Osgood, Phillips e Sarnak [OPS88B, OPS88A] estudaram propriedades extremas do zeta-determinante para aplicar na caracterização de conjuntos de métricas isoespectrais sobre superfícies compactas. Em particular, eles provaram que o máximo do zeta-determinante regularizado do Laplaciano sobre uma superfície fechada em uma classe conforme de métricas é atingido quando a métrica é uniforme, ou seja possui curvatura constante. Depois aplicam esse resultado para provar que conjuntos isoespectrais em classes de métricas isométricas são sequencialmente compactos na topologia C^∞ . A motivação destes trabalhos é a questão sobre variedades isoespectrais serem isométricas. Em geral, sabe-se que esta resposta é falsa. Mas apenas em 1992 a questão sobre superfícies foi resolvida com um exemplo de duas regiões não isométricas mas isoespectrais, cf. [GWW92].

Outro ponto de interesse ligado ao zeta-determinante é o seu cálculo explícito. Por exemplo, na Teoria dos Números uma das questões em aberto é sobre a irracionalidade de números da forma $\zeta_R(2n+1)$, $n \geq 1$, onde $\zeta_R(s)$ denota a função zeta de Riemann. O resultado para $n = 1$ foi provado por Roger Apéry [APÉ79], o caso para $n > 1$ continua em aberto. Com isso, fórmulas para a representação desses números são de grande interesse. O conhecimento explícito do espectro de operadores em

uma variedade é raro e basicamente temos apenas o caso das esferas e quocientes de esferas por grupos finitos. O zeta-determinante neste caso pode ser escrito a partir da função zeta de Riemann. Nessa linha, trabalhos que calculem explicitamente o zeta-determinante em casos particulares possuem um certo apressado.

1.2 O método da soma dupla para operadores auto-adjuntos

Esta seção é fundamentada no trabalho em andamento [HAR19]. Em [COMO95], é discutido em um contexto geral, a importância de se obter a extensão meromorfa da função zeta associada a um operador auto-adjunto com resolvente compacto. Um operador com essa propriedade é dito possuir um espectro de dimensão discreta. Connes e Moscovici usam essa formulação para provar uma fórmula do índice local em um contexto abstrato. Tal contexto é verificado para variedades Riemannianas, espaços com singularidades isoladas, conjuntos de Cantor entre outros.

Uma das propriedades do espectro de dimensão discreta é ser fechado para a soma direta finita de operadores. No estudo do operador de Hodge-Laplace sobre o cone, por exemplo, este operador é decomposto como soma direta infinita de operadores que possuem o espectro de dimensão discreta. E ainda, sabe-se que neste caso o operador de Hodge-Laplace tem espectro de dimensão discreta. A questão que se levanta é, existe uma condição natural para que a soma direta infinita de operadores com espectro de dimensão discreta tenha um espectro de dimensão discreta? Existem alguns trabalhos nessa direção mas sem uma resposta muito específica. Em [LEVE15], os autores respondem essas questões positivamente mas para o caso específico do Laplaciano em uma superfície de revolução. Em [HASP10, SPR12], o problema não é diretamente atacado pois o interesse está em estudar a função zeta em uma vizinhança da origem.

Desta forma o objetivo em [HAR19] é provar que sobre certas condições a soma direta infinita de operadores com espectro de dimensão discreta ainda possui espectro de dimensão discreta. Tal resultado ainda não está provado, e neste texto trazemos algumas relações entre expansões assintóticas e o espectro de dimensão discreta. Decidi incluir esta seção pois seus resultados principais são os Teoremas 1.10 e 1.12, que serão utilizados no Capítulo 2 para se obter a Torção Analítica de um cone métrico finito. E ainda, serve para mostrar a relação entre o estudo das expansões assintóticas do traço do resolvente, ou o traço do núcleo do calor, ou ainda a expansão assintótica do determinante de Freedholm, com os invariantes espectrais, como o zeta-determinante regularizado, a Torção Analítica, invariantes eta e outros.

1.2.1 Operadores com espectro de dimensão discreta

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável e $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto, que é limitado inferiormente. Sem perda de generalidade assumimos que

$$\langle Lu, u \rangle \geq \|u\|^2, \quad u \in \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H}. \quad (1.1)$$

Então L é um operador discreto com núcleo trivial. A Eq. (1.1) implica que podemos definir o semi-grupo do calor associado a L , denotado por e^{-tL} , para todo $t \geq 0$. Outra consequência é que

$$\text{Spec } L \cap \Lambda_\epsilon^c = \emptyset, \quad (1.2)$$

onde $\Lambda_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| < \epsilon\}$, para algum $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$. E ainda, assumimos que para $p > 0$,

$$L^{-1} \in \mathbf{B}^p(\mathcal{H}), \quad (1.3)$$

onde $\mathbf{B}^p(\mathcal{H})$ é a classe de Schatten de ordem p .

Com a condição (1.3), podemos definir a *Função Zeta* associada a L por

$$\zeta(s; L) := \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_q^{-s}, \quad (1.4)$$

para $\text{Re}(s) > p$. A Transformada de Mellin de $e^{-t \cdot \lambda_q}$ implica que

$$\lambda_q^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t \cdot \lambda_q} dt, \quad (1.5)$$

e somando em q , obtemos a seguinte representação da função zeta de L

$$\zeta(s; L) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \cdot \text{Tr}(e^{-tL}) dt, \quad (1.6)$$

onde $\text{Tr}(e^{-tL})$ denota o traço do semi-grupo do calor. Esta função é holomorfa para $\text{Re}(s) > p$. Então definimos (cf. [COMO95, Definição II.1]):

Definição 1.2. *O operador L possui espectro de dimensão discreta se $\zeta(s; L)$ estende à uma função meromorfa ao plano complexo \mathbb{C} tal que em cada faixa vertical $|\Gamma(s) \cdot \zeta(s; L)| = O(|s|^{-N})$, quando $\text{Im}(s) \rightarrow \infty$, para qualquer $N \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\Sigma(L)$ o conjunto de polos da função $\Gamma(s) \cdot \zeta(s; L)$.*

Para estender $\zeta(s; L)$ meromorficamente em todo o plano complexo, é necessário assumir algum tipo de expansão assintótica. Por exemplo, suponha que temos a seguinte expansão assintótica para o traço do semi-grupo do calor,

$$\text{Tr}(e^{-tL}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k(j)} A_{jk} t^{\alpha_j} \log^k t \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+, \quad (1.7)$$

onde $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números complexos ordenados por $|\alpha_j| < |\alpha_{j+1}|$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $\text{Re}(\alpha_j) \rightarrow \infty$. De modo mais curto, escreveremos

$$\text{Tr}(e^{-tL}) \sim \sum_{\substack{\text{Re}(\alpha) \rightarrow \infty \\ 0 \leq k \leq k(\alpha)}} A_{\alpha k} t^{\alpha} \log^k t \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+. \quad (1.8)$$

Segue diretamente desta expansão o seguinte lema.

Lema 1.3. Se $\text{Tr}(e^{-L})$ tem uma expansão assintótica como na Eq. (1.8) então a função $\zeta(s; L)$ possui uma extensão meromorfa em \mathbb{C} . Os polos da função $\zeta(s; L)$ são em $s = -\alpha$ e a parte principal é dada por

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^{k(\alpha)} (-1)^k \Gamma(k) A_{jk} (s + \alpha)^{-k-1}. \quad (1.9)$$

Como consequência, se $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$ a ordem do polo $s = -\alpha$ é $k(\alpha) + 1$ com resíduo

$$\text{Res}_{k(\alpha)+1} \zeta(-\alpha; L) = (-1)^{k(\alpha)} \frac{A_{\alpha k(\alpha)} \Gamma(k(\alpha))}{\Gamma(-\alpha)}, \quad (1.10)$$

e se $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ então $\Gamma(s)^{-1}$ possui um zero simples em $s = -\alpha$, então a ordem do polo α é $k(\alpha)$ com resíduo

$$\text{Res}_{k(\alpha)} \zeta(-\alpha; L) = (-1)^{k(\alpha)+\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(k(\alpha)) A_{\alpha k(\alpha)}. \quad (1.11)$$

Aqui $\text{Res}_k f(a)$ significa o coeficiente de $(s - a)^{-k}$ na série de Laurent de f .

Um operador ter espectro de dimensão discreta e a expansão assintótica do traço do semi-grupo do calor, Eq. (1.8), são equivalentes, desde que adicionada a hipótese de diferenciabilidade da expansão. Isto foi discutido em [BRLE99, Lema 2.2], mais precisamente temos:

Proposição 1.4. O operador L possui um espectro de dimensão discreta se, e somente se, $\text{Tr}(e^{-tL})$ possui uma expansão assintótica (1.8) que pode ser diferenciável, i.e., para $N, K > 0$, temos

$$\left| \partial_t^N \left(\text{Tr}(e^{-tL}) - \sum_{\substack{\text{Re}(\alpha) \leq N+K \\ 0 \leq k \leq k(\alpha)}} A_{\alpha k} t^\alpha \log^k t \right) \right| \leq C_{N,K} t^K, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+. \quad (1.12)$$

A existência da expansão assintótica em (1.8) é equivalente a existência da expansão assintótica do traço do resolvente como segue. Por [KAT95, Chapter 9], se o operador é auto-adjunto e satisfaz Eq. (1.1) podemos definir o resolvente de L em função do semi-grupo do calor pela equação

$$(L + z)^{-1} := \int_0^\infty e^{-zt} e^{-tL} dt, \quad \text{para qualquer } \text{Re } z \geq 0, \quad (1.13)$$

e mais geralmente,

$$(L + z)^{-n} := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-zt} e^{-tL} dt \quad \text{para qualquer } \text{Re } z \geq 0. \quad (1.14)$$

A hipótese na Eq. (1.3), a equação do resolvente e a desigualdade de Hölder provam que

$$(L + z)^{-n} \in \mathbf{B}^1(\mathcal{H}), \quad \forall n \geq p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.15)$$

com norma do traço uniforme em Λ_ϵ . A existência da expansão assintótica em (1.8) implica na existência da Eq. (1.17), diretamente como

$$\mathrm{Tr}(L + z)^{-n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-zt} \mathrm{Tr}(e^{-tL}) dt. \quad (1.16)$$

A implicação contrária também é verdadeira, ou seja, se temos a seguinte expansão assintótica

$$\mathrm{Tr}(L + z)^{-n} \sim \sum_{\substack{\mathrm{Re}(\alpha) \rightarrow \infty \\ 0 \leq k \leq k(\alpha)}} A_{\alpha k} z^{-\frac{\alpha}{2} - n} \log^k z, \quad \text{quando } z \rightarrow \infty, \quad (1.17)$$

para algum $n > p$, então a expansão assintótica do traço do semi-grupo do calor associado a L quando $t \rightarrow 0$ é uma consequência da seguinte igualdade

$$e^{-tL} = t^{1-n} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-t\mu} \cdot (L - \mu)^{-n} d\mu, \quad (1.18)$$

onde Γ está representado na figura a seguir. Consequentemente, a expansão assintótica do $\mathrm{Tr}(e^{-tL})$ é dada por

$$\mathrm{Tr}(e^{-tL}) \sim \sum_{\substack{\mathrm{Re}(\alpha) \rightarrow \infty \\ 0 \leq k \leq k(\alpha)}} C_{\alpha k} t^{\frac{\alpha}{2}} \log^k t, \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+. \quad (1.19)$$

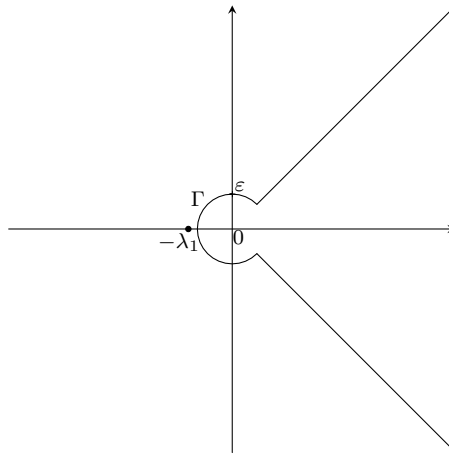


FIGURA 1.1: Representação gráfica de Γ .

1.2.2 O determinante de Fredholm e sua relação com o espectro de dimensão discreta

Antes de apresentar a relação entre o determinante de Fredholm e o espectro de dimensão discreta, lembrarei algumas definições e propriedades do determinante de Fredholm.

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert complexo e separável e L um operador auto-adjunto em \mathcal{H} satisfazendo Eq. (1.1). Suponha ainda que L^{-1} é da classe de traço, o *determinante de Fredholm* de L^{-1} é definido por

$$\det(I + L^{-1}) := \prod_{q=1}^{\infty} (1 + \lambda_q^{-1}). \quad (1.20)$$

Defina a função $f(z) := \det(I + z L^{-1})$. Então f é analítica em \mathbb{C} com singularidades removíveis em todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $-z \in \text{Spec}(L)$. Mais ainda,

$$\frac{d}{dz} f(z) = f(z) \cdot \text{Tr}((L + z)^{-1}). \quad (1.21)$$

Como consequência obtemos que

$$\frac{d}{dz} \log \det(I + z L^{-1}) = \text{Tr}(L + z)^{-1}. \quad (1.22)$$

Seguindo a ideia de [SIM77, Seção 6], definimos:

Definição 1.5. Seja $L^{-1} \in \mathbf{B}^p(\mathcal{H})$ e $n \geq p$. O n -determinante de Fredholm de L^{-1} é definido por

$$\det_n(I + L^{-1}) := \prod_{q=1}^{\infty} \left((1 + \lambda_q^{-1}) \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{\lambda_q^{-k}}{k}\right) \right). \quad (1.23)$$

Note que para $p = 1$, $\det_1(I + L^{-1}) = \det(I + L^{-1})$. De forma similar que o caso $n = 1$ prova-se que

$$\frac{d}{dz} \log \det_n(I + z L^{-1}) = \sum_{q=1}^{\infty} \left((\lambda_q + z)^{-1} + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k+1} z^k \cdot \lambda_q^{-k-1} \right). \quad (1.24)$$

Então por indução temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} \log \det_n(I + z L^{-1}) &= (-1)^{n+1} (n-1)! \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_q + z)^n} \\ &= (-1)^{n+1} (n-1)! \text{Tr}(L + z)^{-n}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

A conexão entre a expansão assintótica do determinante de Fredholm e o espectro de dimensão discreta é uma consequência da seguinte proposição.

Proposição 1.6. *Seja L um operador auto-adjunto satisfazendo (1.1), tal que $L^{-1} \in B^p(\mathcal{H})$. O traço do semi-grupo do calor e^{-tL} possui a expansão assintótica (1.8) se, e somente se, o logaritmo do p -determinante de Fredholm de L^{-1} possui a seguinte expansão assintótica*

$$\log \det_p(I + z L^{-1}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k(j)} B_{jk} z^{-\alpha_j - 1} \log^k z \quad \text{quando } z \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

em qualquer raio disjunto de $-\Lambda_\epsilon$, onde $|\alpha_j| < |\alpha_{j+1}|$ para todo j com $\operatorname{Re}(\alpha_j) \rightarrow \infty$. Mais ainda, se uma das expansões é diferenciável então a outra também será.

Como consequência temos:

Corolário 1.7. *Para um operador L ter espectro de dimensão discreta é necessário e suficiente que o logaritmo do determinante de Fredholm possua uma expansão assintótica (1.26) diferenciável.*

Observo que o conhecimento explícito da expansão assintótica (1.26) implica no conhecimento explícito da expansão (1.8). Entretanto, a volta não é verdadeira. Em [FRI89], o termo constante da Eq. (1.26) é determinado para um operador diferencial elíptico, e este termo coincide com menos o logaritmo do zeta-determinante do operador. Em cf. [HLV17, pag. 3439], mostramos um resultado equivalente para um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert. Este fato é de grande interesse pois o termo constante é um dos mais importantes da expansão assintótica. Afinal o termo constante fornece informações sobre a distribuição dos autovalores que podem ser obtidas por meio de teoremas Tauberianos.

1.2.3 Zeta-determinante regularizado e sua conexão com o determinante de Fredholm

Continuamos com as mesmas hipóteses sobre L e \mathcal{H} da subseção anterior.

Definição 1.8. *Considere a função zeta de L definida na Eq. (1.4), se $\zeta(s; L)$ é regular em $s = 0$ então o zeta-determinante regularizado, ou mais brevemente zeta-determinante, é definido por*

$$\det_\zeta(L) := \exp(-\zeta'(0; L)). \quad (1.27)$$

Sobre certas condições nas expansões assintóticas podemos obter informações sobre o zeta-determinante. Por exemplo, no caso da expansão assintótica do traço do semi-grupo do calor obtemos o seguinte resultado.

Lema 1.9. *Se o traço do semi-grupo do calor de L possui a expansão assintótica (1.8) então $\zeta(s; L)$ possui uma extensão meromorfa em todo plano complexo. Mais ainda, para $\zeta(s; L)$ ser regular em $s = 0$ é necessário que não existam termos $\log^k t$, com $k \geq 1$, if $\alpha_j = 0$. E ainda, neste caso, $\zeta(0, L) = A_{0,0}$.*

Equivalentemente podemos obter um resultado similar ao lema anterior usando a definição da função zeta envolvendo o traço do resolvente, *i.e.*, usando Eq. (1.18) e a definição da função gamma de Euler (*cf.* [GRRY15, 8.310-2]). Mais precisamente,

$$\zeta(s; L) = \frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(n) \cdot \Gamma(1 - n + s)}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{n-1-s} \cdot \text{Tr}(L + z)^{-n} dz, \quad (1.28)$$

para qualquer $n \geq p$ e $\text{Re}(s) > n$.

A informação do lema anterior a respeito do valor no zero da função $\zeta(s; L)$ é o máximo que podemos obter com a expansão assintótica do traço do semi-grupo do calor, a derivada dessa função no zero não depende apenas da expansão. Entretanto, a expansão assintótica do determinante de Fredholm fornece informação suficiente para obter a o valor da derivada de $\zeta(s; L)$.

Teorema 1.10. *Suponha que o logaritmo do n -determinante de Fredholm de L , $n \geq p$, possui a seguinte expansão assintótica*

$$\log \det_n(I + z L^{-1}) \sim_{z \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{\alpha_j, k} z^{-\alpha_j} \log^k z, \quad (1.29)$$

sobre qualquer raio disjunto de $-\Lambda_\epsilon$, onde $|\alpha_j| < |\alpha_{j+1}|$ para todo j com $\text{Re}(\alpha_j) \rightarrow \infty$. Se $\alpha_j = 0$ para algum j e $A_{0, k} = 0$ para $k \geq 2$, então a função zeta associada a L perto de $s = 0$ satisfaz

$$\zeta(s; L) = -A_{0,1} - A_{0,0} \cdot s + O(s^2). \quad (1.30)$$

Note que este resultado também recupera a fórmula de Friedlander [FRI89].

1.2.4 Zeta-determinante de operadores espectralmente decompostos

Considere \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável e L um operador auto-adjunto limitado inferiormente como antes. Assuma que para algum $p > 0$,

$$L^{-1} \in \mathbf{B}^p(\mathcal{H}). \quad (1.31)$$

Suponha que podemos decompor L em uma soma direta de operadores auto-adjuntos limitados inferiormente, *i.e.*,

$$L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n. \quad (1.32)$$

A hipótese sobre L implica que:

- a) L_n é discreto para todo n .
- b) $L_n^{-1} \in \mathbf{B}^{p_1}(\mathcal{H}_n)$ para algum $p_1 \in \mathbb{N}_0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_n$.

Nesta situação a função zeta associada a L é dada por

$$\zeta(s; L) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(s; L_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n,k}^{-s}, \quad (1.33)$$

para $\operatorname{Re}(s) > p$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, assumimos que L_n possui uma expansão assintótica do logaritmo do determinante de Fredholm como no Teorema 1.10. Note que pelo Corolário 1.7 cada L_n possui um espectro de dimensão discreta.

Com essas hipóteses podemos escrever

$$\begin{aligned} \zeta(s; L) &= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(s; L_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{tz}}{z} \log \det_p(I + zL_n^{-1}) dz dt, \end{aligned} \quad (1.34)$$

para $\operatorname{Re}(s) > p$.

Suponha que existe um operador auto-adjunto $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ com $A^{-1} \in L^{p_1}(\mathcal{H})$ que também possui uma expansão assintótica como no Teorema 1.10. Mais ainda, suponha que A comuta com L_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos os elementos do espectro de A por μ_n , i.e., $\operatorname{Spec} A = \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Mais ainda, como L e A comutam existe uma base de autovetores que diagonalizam L e A simultaneamente. Denotamos por A_n a restrição de A ao subespaço \mathcal{H}_n . Com essas hipóteses definimos:

Definição 1.11. *O par (L, A) é admissível se $\log \det_p(I + z A_n L_n^{-1})$ possui a seguinte expansão assintótica*

$$\log \det_p(I + z A_n L_n^{-1}) = \sum_{j=0}^{j_1} \sum_{k=0}^1 \phi_{\beta_j, k}(z) u_n^{-\beta_j} \log^k u_n + O(u_n^{-p_1 - \epsilon}), \quad (1.35)$$

uniformemente em $z \in \Lambda_\epsilon$ para algum $\epsilon > 0$, onde $|\beta_j| < |\beta_{j+1}| < p_1$ para todo j e as funções $\phi_{\beta_j, k}(z)$ possuem a seguinte expansão assintótica para $z \rightarrow \infty$, $z \in \Lambda_\epsilon$,

$$\phi_{\beta_j, k}(z) \sim_{z \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{k_1(l)} C_{lk_1, j} z^{-\alpha_l} \log^{k_1} z, \quad (1.36)$$

onde $(\alpha_l)_{l \in \mathbb{N}}$ é a mesma sequência de (1.29). As funções $\phi_{\beta_j, 1}(z)$ são polinômios em z satisfazendo a condição $\phi_{\beta_j, 1}(0) = 0$.

Sobre essa estrutura foi provado em [HASP10, Teorema 3] o seguinte resultado que descrevo agora. Defina

$$\Phi_{\beta_j}(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\epsilon} \frac{e^{zt}}{z} \phi_{\beta_j, 0}(z) dz dt.$$

Teorema 1.12. *Suponha que o par (L, A) é admissível e que $\Phi_{\beta_j}(s)$ possui no máximo polos simples em $s = 0$. Então $\zeta(s; L)$ é regular em $s = 0$ e*

$$\begin{aligned}\zeta(0; L) &= -A_{0,1}(0) + \sum_{j=0}^{j_1} \operatorname{Res}_1 \Phi_{\beta_j}(s) \operatorname{Res}_1 \zeta(s; A), \\ \zeta'(0; L) &= -A_{0,0}(0) - A'_{0,1}(0) + \gamma \sum_{j=0}^{j_1} \operatorname{Res}_1 \Phi_{\beta_j}(s) \operatorname{Res}_1 \zeta(s; A) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{j_1} \operatorname{Res}_{s=0} \Phi_{\beta_j}(s) \operatorname{Res}_{s=\beta_j} \zeta(s; A) + \sum_{j=0}^{j_1} \operatorname{Res}_1 \Phi_{\beta_j}(s) \operatorname{Res}_{s=\beta_j} \zeta(s; A)\end{aligned}$$

onde a última soma é apenas sobre os termos tais que $\zeta(s; A)$ possui um polo em $s = \beta_j$, as funções $A_{0,0}(s)$ e $A_{0,1}(s)$ são regulares em $s = 0$ e construídas a partir da expansão assintótica de $\phi_{\beta_j,0}(z)$ e $\log \det_p(I + z A_n L_n^{-1})$ para z suficientemente grande em Λ_ϵ .

Este último resultado é a ferramenta fundamental para se obter a Torção Analítica do cone. A generalização deste resultado é apresentado em [SPR12, Teorema 3.8]. Observo que a afirmação do teorema anterior é apenas sobre o valor da função zeta em $s = 0$ e não a extensão meromorfa de $\zeta(s; L)$ em \mathbb{C} .

1.3 Zeta determinantes de operadores de Sturm-Liouville com potenciais quadráticos no infinito

Nesta subseção apresentaremos o artigo [HLV17]. Nele investigamos o zeta-determinante de operadores de Sturm-Liouville com potenciais que possuem crescimento quadrático no infinito, ou seja, operadores da forma

$$H = -\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \cdot \right) + x^2 \mu - \frac{1}{4} + V(x) := D_\mu + V(x), \quad (1.37)$$

no intervalo $[a, \infty)$, $a > 0$, com $\mu > 0$, e condições mínimas de regularidade no potencial V . Foi a primeira vez na literatura que foi estudado o determinante de um operador em um intervalo não limitado.

Nossa motivação para esse trabalho foi que tais operadores surgem no estudo da geometria espectral de variedades hiperbólicas, ou mais geralmente, variedades com cúspides. Foi W. Müller em [MÜL83] que iniciou o estudo da geometria espectral deste tipo de espaço. Mais recentemente, o colaborador Boris Vertman estudou a Torção Analítica e o Teorema de Cheeger-Müller nestas configurações [VER19].

Pretendemos com este artigo iniciar uma discussão sobre estes operadores, paralela aos desenvolvimentos no contexto de operadores de Sturm-Liouville regular-singular, que por sua vez são motivados pela geometria de espaços com singularidades do tipo cônico.

Antes de enunciar o principal resultado deste trabalho precisamos de algumas definições. A condição de contorno em $x = a$ é definida por

$$R_a f := \text{sen } \theta_a \cdot f'(a) + \text{cos } \theta_a \cdot f(a), \quad 0 \leq \theta_a < \pi. \quad (1.38)$$

Uma função g é dita normalizada em a se $R_a g = 0$ e

$$\begin{aligned} g'(a) &= a^{-3/2}, & \text{se } \theta_a = 0 \text{ (Dirichlet)}, \\ g(a) &= a^{-1/2}, & \text{se } \theta_a > 0 \text{ (Neumann generalizada)}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Usamos ainda a notação de uma letra maiúscula X para representar a multiplicação por x .

O principal resultado deste trabalho é o seguinte:

Teorema 1.13. *Fixe $\nu \geq 0$ e suponha que o potencial V em (1.37) satisfaz $V \in X^\gamma L^1[a, \infty)$ para $\gamma < 2$ fixo. O operador H está no caso de ponto limite no infinito e assim é essencialmente auto-adjunto no domínio $\{f \in C_0^\infty[a, \infty) \mid R_a f = 0\}$. Denotamos por $H(R_a)$ esta realização auto-adjunta. Escolha um sistema fundamental de soluções ϕ e ψ para $(H + \nu^2)f = 0$, onde $R_a \phi = 0$ satisfaz a condição de contorno em $x = a$ e $\psi \in L^2[a, \infty)$. Normalizamos ϕ como em (1.39) e ψ por*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) \cdot \sqrt{x} \cdot K_\nu(\mu x)^{-1} = 1. \quad (1.40)$$

Aqui K_ν é a função de Bessel modificada de segundo tipo de ordem ν .

Então $H(R_a) + \nu^2$ é auto-adjunto com espectro discreto. Mais ainda, a sua função zeta admite uma continuação meromorfa no plano $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > -\epsilon\}$ para algum $\epsilon > 0$ com 0 sendo um ponto regular. Portanto, seu zeta-determinante está bem definido e ainda

$$\det_\zeta(H(R_a) + \nu^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a^2 \cdot W(\psi, \phi)(a), \quad (1.41)$$

onde $W(\psi, \phi)(a) := (\psi \cdot \phi' - \psi' \cdot \phi)(a)$ é o Wronskiano de ψ e ϕ .

A prova para o teorema anterior é construída por meio de vários passos, os quais descreverei a seguir.

O operador H é tratado como uma perturbação do operador “cúspide” modelo parametrizado por μ ,

$$D_\mu = -\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \cdot \right) + x^2 \mu^2 - \frac{1}{4}. \quad (1.42)$$

Se $\mu = 0$ este operador possui um espectro contínuo, assim consideramos apenas $\mu > 0$. Um sistema fundamental de soluções para $(D_\mu + z^2)f = 0$ é dado em termos das funções de Bessel modificadas por

$$x^{-\frac{1}{2}} \cdot K_z(\mu x), \quad x^{-\frac{1}{2}} \cdot I_z(\mu x). \quad (1.43)$$

Portanto, os problemas espectrais e a análise do resolvente se reduzem ao final a questões sobre as funções de Bessel modificadas e os comportamentos assintóticos de ambas.

Observação 1.14. Na maioria dos artigos apresentados neste texto sistematizado as funções de Bessel possuem um papel central na obtenção dos resultados. Na literatura são conhecidas diversas propriedades destas funções, em particular, em [HLV17] dedicamos uma seção para a apresentação das expansões assintóticas conhecidas das funções de Bessel Modificadas.

Para a boa definição do zeta-determinante é preciso analisar o comportamento assintótico do traço do resolvente.

Teorema 1.15. *Seja $V \in X^\gamma L^1[a, \infty)$ como no Teorema 1.13 e suponha fixada a condição de contorno de Dirichlet ou Neumann generalizada para H em a . Então o resolvente de $H(R_a)$, $(H(R_a) + z^2)^{-1}$, é da classe de Traço e existe uma expansão assintótica*

$$\mathrm{Tr}\left(H(R_a) + z^2\right)^{-1} = b_0 \cdot z^{-1} \log z + a_0 \cdot z^{-1} + a_1 \cdot z^{-2} + O(z^{-2-\delta}), \quad \text{quando } z \rightarrow \infty, \quad (1.44)$$

para algum $\delta > 0$. As constantes b_0, a_0, a_1 não depende do potencial. Explicitamente $a_0 = \frac{1}{2} \log \frac{2}{\mu a}$, $b_0 = \frac{1}{2}$, para a condição de contorno de Dirichlet em a temos que $a_1 = \frac{1}{4}$ enquanto para condição de contorno de Neumann generalizada em a temos $a_1 = -\frac{1}{4}$.

Observo que no caso do operador D_μ ($V = 0$) existe uma expansão assintótica completa para o traço do resolvente.

Denotaremos por f para a integral regularizada por Hadamard. Podemos definir o zeta-determinante usando a integral regularizada da seguinte forma

$$\zeta(s; H(R_a)) := \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec} H(R_a)} \lambda^{-s} = \frac{\mathrm{sen} \pi s}{\pi} \int_0^\infty x^{-s} \cdot \mathrm{Tr}\left(H(R_a) + x\right)^{-1} dx. \quad (1.45)$$

A Eq. (1.44) implica que $\zeta(s, H(R_a))$ possui um extensão meromorfa para $\mathrm{Re}(s) > -\delta$ com 0 sendo um valor regular. Portanto temos,

$$\begin{aligned} \log \det_\zeta\left(H(R_a) + z^2\right) &:= \zeta'(0, H) = -\int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(H(R_a) + z\right)^{-1} dz \\ &= -2 \int_0^\infty z \cdot \mathrm{Tr}\left(H(R_a) + z^2\right)^{-1} dz. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Observação 1.16. Observo aqui que neste trabalho usamos a definição do zeta-determinante por meio da integral regularizada de Hadamard e a expansão assintótica do traço do resolvente. A vantagem da integral regularizada é que ela sempre existe, entretanto a não existência de um termo da forma $z^{-2} \log z$ em (1.44) garante que esta abordagem para o zeta-determinante é equivalente a anterior. Para um bom entendimento a respeito da integral regularizada de Hadamard recomendo o livro [LES97, Seção 2.1].

A expansão assintótica (1.44) nos permite determinar o comportamento assintótico da função de contagem $N(\lambda)$ dos autovalores λ de $H(R_a)$. Observe a presença do termo $z^{-1} \log z$ como termo líder na expansão assintótica do traço do resolvente, este termo distingue este caso das discussões similares no caso de operadores de Sturm-Liouville regular-singular. Este caso também possui um termo logaritmo, entretanto, diferente do nosso caso ele não é o termo líder.

O termo líder sendo da forma $z^{-1} \log z$ é claramente um novo fenômeno do nosso caso não compacto e possui uma importante consequência para a Lei de Weyl do operador $H(R_a)$. De fato, da expansão assintótica do traço do resolvente, concluímos que

$$\zeta(s; H) - \frac{1}{\Gamma(s)} \left(-\frac{c_0}{\left(s - \frac{1}{2}\right)} + \frac{c_1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2} \right) \quad (1.47)$$

é contínua para $\text{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$, onde as constantes c_0 e c_1 são determinadas explicitamente pelos coeficientes da expansão assintótica do traço do resolvente. Aplicando um argumento Tauberiano obtemos o comportamento assintótico da função de contagem do autovalores, $N(\lambda)$, de $H(R_a)$,

$$N(\lambda) \sim \frac{\sqrt{\lambda} \log \lambda}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (1.48)$$

O próximo passo é obter a formula de variação para o zeta-determinante. Para isso precisamos conhecer o comportamento de um sistema fundamental de soluções da equação homogênea. Tal resultado será descrito abaixo e é uma versão do Teorema de Bocher[BÔC00] do caso regular-singular. Defina

$$\psi_z(x) := x^{-\frac{1}{2}} \cdot K_z(\mu x) \quad \text{e} \quad \phi_z(x) := x^{-\frac{1}{2}} \cdot I_z(\mu x).$$

Teorema 1.17. *Seja*

$$H = D_\mu + X^2 \cdot W, \quad (1.49)$$

com $W \in L^1[a, \infty)$ e fixe $z \geq 0$. Então a equação diferencial $(H + z^2)f = 0$ possui um sistema fundamental de soluções $\{h_1, h_2\}$, tais que

$$h_1(x) = \psi_z(x) \cdot g_1(x), \quad h_2(x) = \phi_z(x) \cdot g_2(x), \quad (1.50)$$

com $g_j \in C_b[a, \infty)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g_j(x) = 1, j = 1, 2$. Mais ainda,

$$h'_1(x) = \psi'_z(x) \cdot \tilde{g}_1(x), \quad h'_2(x) = \phi'_z(x) \cdot \tilde{g}_2(x), \quad (1.51)$$

onde $\tilde{g}_j \in C_b[a, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{g}_j(x) = 1, j = 1, 2$, e $x^2 \cdot W(h_1, h_2)(x) = 1$.

Com este resultado em mãos prova-se o Teorema 1.15 usando o Teste de Shur e a Série de Neumann. Então provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.18. *Seja W_t uma família de funções em $L^1[a, \infty)$ e $\varepsilon > 0$. É conveniente considerar $t_0 = 0$. Fixe $\nu \geq 0$ e considere o operador perturbado*

$$H_t := D_\mu + X^{2-\varepsilon}W_t. \quad (1.52)$$

Mais ainda, seja R_a uma condição de contorno em a . Seja $\{\psi_t, \phi_t\}$ um sistema fundamental de soluções da equação $(H_t + \nu^2)u = 0$, onde ϕ_t é normalizado no sentido de Eq. (1.39) e ψ_t satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_t(x) \sqrt{x} K_\nu(\mu x)^{-1} = 1. \quad (1.53)$$

Assuma que H_0 é invertível. Então a variação do zeta-determinante é dada por

$$\frac{d}{dt} \log \det_\zeta(H_t + \nu^2)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \log(x^2 \cdot W(\psi_t, \phi_t)(x))|_{t=0}. \quad (1.54)$$

Segue deste teorema que

$$\det_\zeta(H(R_a) + \nu^2) = c_0(a, \mu) \cdot a^2 \cdot W(\psi, \phi)(a),$$

onde a constante não depende de V e nem da condição de contorno R_a . Em particular, se $V = 0$ mostramos que

$$c_0(a, \mu) = \frac{\det_\zeta(H(R_a) + \nu^2)}{a^2 \cdot W(\psi, \phi)(a)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Como consequência provamos o teorema principal, *i.e.*, Teorema 1.13.

1.4 Zeta determinante do operador de Laplace em espaços projetivos reais

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana fechada¹ de dimensão m . Considere $\Delta_M : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ o operador de Laplace associado a métrica g . É conhecido que Δ é simétrico, positivo, possui uma única extensão auto-adjunta e ainda, possui um espectro de pontos puros. A Lei de Weyl (*cf.* [CHA84, Seção 1.3]) garante que se λ_k é um autovalor de Δ_M , então

$$\lambda_k \sim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\text{Vol}_g(M)}{\omega_m} \cdot k^{\frac{2}{m}}, \quad (1.55)$$

onde ω_m é o volume do disco unitário em \mathbb{R}^m , $\text{Vol}_g(M)$ é o volume M na métrica g . A Eq. (1.55) implica que o resolvente $\Delta^{-1} \in \mathbf{B}^p(\mathcal{H}^0(M)^\perp)$ para qualquer $p > \frac{m}{2}$, onde $\mathcal{H}^0(M)$ denota o subespaço das funções harmônicas em $L^2(M)$. Logo a função

¹O contexto desta sub-seção requer apenas variedades fechadas entretanto, vários dos resultados gerais lembrados aqui valem para uma variedade com bordo.

zeta associada a Δ_M está bem definida para $\text{Re}(s) > \frac{m}{2}$ e é dada por

$$\zeta(s; \Delta) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}.$$

Temos também a expansão assintótica do traço do operador do calor, provada por Minakshisundaram [MIN53], e dada por

$$\text{Tr}(e^{-t\Delta_M}) \sim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(M) t^{k - \frac{m}{2}}, \quad (1.56)$$

onde os coeficientes $a_k(M)$ são determinados pela estrutura geométrica de M . Como consequência, $\zeta(s; \Delta_M)$ possui uma extensão meromorfa em \mathbb{C} com possíveis polos simples. Em particular, zero é um ponto regular e então o zeta determinante está bem definido por

$$\det_{\zeta}(\Delta_M) = \exp(-\zeta'(0; \Delta_M)). \quad (1.57)$$

Como observado na introdução, a função zeta e o zeta-determinante regularizado de Δ_M possuem importantes informações sobre a geometria de M . Entretanto, cálculos explícitos do zeta-determinante são poucos pois dependem do conhecimento explícito do espectro de Δ_M . As primeiras fórmulas explícitas para o zeta-determinante regularizado foram para o operador de Laplace em esferas de baixa dimensão. O caso de uma esfera de dimensão arbitrária foi estudado por Kumagai [KUM99](veja [BAFU08, MIZ06, NAO'95] para outras fórmulas). Nesta seção, que é referente ao trabalho [HASP19], seguimos essa linha de investigação e apresentamos fórmulas explícitas para o zeta-determinante regularizado do operador de Laplace no caso das esferas e dos espaços projetivos. Determinamos também de modo explícito uma descrição da estrutura aritmética de $\det_{\zeta}(\Delta_{S^m})$ e $\det_{\zeta}(\Delta_{\mathbb{R}P^m})$. Recentemente, o caso complexo foi descrito em [AWO18].

1.4.1 A função zeta do operador de Laplace em esferas e nos planos projetivos reais

Seja (S^m, g) a esfera euclidiana de raio um, $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, com a métrica g induzida pela métrica euclidiana. Denote por Δ_{S^m} o Laplaciano de S^m induzido pela métrica g . O espectro do operador de Hodge-Laplace e as suas autoformas são apresentados em [IKTA78, Teorema 4.2] utilizando Teoria de Representação. No caso do operador de Hodge-Laplace sobre funções temos que os autovalores são $\lambda_n = n(n + m - 1)$, $n \geq 1$, com multiplicidade

$$\begin{aligned} m_{2p-1, n} &= \frac{n+p-1}{p-1} \binom{2p+n-3}{n} \\ &= \frac{2}{(2p-2)!} \prod_{j=2}^p (n+1+j)(n+2p-1-j), \end{aligned} \quad (1.58)$$

se $m = 2p - 1$ e

$$\begin{aligned} m_{2p,n} &= \frac{2n + 2p - 1}{2p - 1} \binom{2p + n - 2}{n} \\ &= \frac{2n + 2p - 1}{(2p - 1)!} \prod_{j=2}^p (n + j - 1)(n + 2p - j) \end{aligned} \quad (1.59)$$

se $m = 2p$, ambos com $p \geq 1$. Sabe-se também que as autofunções são descritas usando polinômios harmônicos [BGM71, Página 159].

Motivados pela abordagem feita em [HAR09, Seção 6.5] defina $\alpha_q = \frac{1}{2} + q - \frac{m}{2}$ e

$$d^0 := (-\alpha_1^2, \dots, -\alpha_q^2, \dots, -\alpha_{p-1}^2), \quad (1.60)$$

onde $p = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1$ com $\lfloor \cdot \rfloor$ representando a função menor inteiro. Denote por $e_{p-1-k}(d^0)$ o polinômio elementar simétrico em d^0 de grau $p - 1 - k$. Então as multiplicidades (1.58) e (1.59) podem ser reescritas usando os polinômios simétricos elementares da seguinte forma:

$$m_{m,n} = \frac{2}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} e_{p-1-k}(d^0) (n - \alpha_0)^{2k+c}, \quad (1.61)$$

onde $c = 0$ se $m = 2p - 1$ e $c = 1$ se $m = 2p$. Note que podemos re-escrever $\lambda_n = (n - \alpha_0)^2 - \alpha_0^2$ e então a função zeta associada ao Laplaciano da S^m é dada por

$$\begin{aligned} \zeta(s; \Delta_{S^m}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{m,n}}{\lambda_n^s} \\ &= \frac{2}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} e_{p-1-k}(d^0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \alpha_0)^{2k+c}}{((n - \alpha_0)^2 - \alpha_0^2)^s}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Considere $\mathbb{R}P^m$ o espaço projetivo construído por meio da projeção $\pi : (S^m, g) \rightarrow (\mathbb{R}P^m, g)$ que identifica os pontos antípodos da esfera. É conhecido que π é uma aplicação de recobrimento e uma submersão Riemanniana logo uma isometria local. Seja $\Delta_{\mathbb{R}P^m}$ o Laplaciano sobre funções de $\mathbb{R}P^m$, as autofunções são dadas por polinômios harmônicos que são invariantes por ação antipodal, *i.e.*, polinômios harmônicos de ordem par. Denotando os autovalores de $\Delta_{\mathbb{R}P^m}$ por $\tilde{\lambda}_n$, temos que

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_{2n} = 2n(2n + m - 1)$$

com multiplicidade $\tilde{m}_{m,n} = m_{m,2n}$. Então a função zeta associada ao operador de Laplace de $\mathbb{R}P^m$ é dada por

$$\zeta(s; \Delta_{\mathbb{R}P^m}) = \frac{2}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} e_{p-1-k}(d^0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - \alpha_0)^{2k+c}}{((2n - \alpha_0)^2 - \alpha_0^2)^s}. \quad (1.63)$$

1.4.2 Zeta-determinante do operador de Laplace em esferas e espaços projetivos reais

Com a determinação das funções zeta na sub-seção anterior precisamos de resultados auxiliares para obter o zeta-determinante do operador de Laplace nas esferas e nos planos projetivos reais. Dado α um inteiro não negativo, $x, y \in \mathbb{Q}$ tal que $x + y, x - y \in \mathbb{Z}$ com $x \geq 0$, defina a função

$$h(s; \alpha, x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^\alpha}{((n+x)^2 - y^2)^s}. \quad (1.64)$$

Mostra-se que h é analítica e possui uma extensão meromorfa para $\operatorname{Re}(s) > -\epsilon$, com $\epsilon > 0$, e os valores em zero de h e sua derivada h' é apresentado na seguinte proposição.

Proposição 1.19. *A função $h(s; \alpha, x, y)$ é analítica para $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}(\alpha + 1)$ e ainda*

$$\begin{aligned} h(0; \alpha, x, y) &= \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} x^j \zeta_R(j - \alpha) - \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + \frac{1 - (-1)^\alpha}{2(\alpha + 1)} y^{\alpha+1} \\ h'(0; \alpha, x, y) &= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor} \binom{\alpha}{2j} y^{2j} \zeta'_R(2j - \alpha) + 2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor} \binom{\alpha}{2j} y^{2j} \sum_{n=1}^{x+y} n^{\alpha-2j} \log n \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j \sum_{n=1+x-y}^{x+y} n^{\alpha-j} \log n \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(1 + (-1)^{\alpha+1}) y^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \sum_{j=2}^{\alpha+1} (-1)^j 2^{j-1} \binom{\alpha + 1}{j} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l}. \end{aligned}$$

A prova dessa proposição é feita por análise direta da definição da função h , usando resultados da função Gamma de Euler, $\Gamma(z)$, a função digama, $\psi(z)$, e a função zeta de Riemann. A função h é usada para obtermos o zeta-determinante de Δ_{S^m} , para $\Delta_{\mathbb{R}P^m}$ precisamos definir outras duas funções relacionadas com h .

Definição 1.20. *Se $x + y$ e $x - y$ são inteiros positivos pares, então defina*

$$h_{\text{even}}(s; \alpha; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+x)^\alpha ((2n+x)^2 - y^2)^{-s}. \quad (1.65)$$

Se $x + y$ é um inteiro positivo ímpar e $x - y$ é um inteiro positivo par, então defina h_{odd} pela mesma expressão anterior, ou seja,

$$h_{\text{odd}}(s; \alpha; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+x)^\alpha ((2n+x)^2 - y^2)^{-s}. \quad (1.66)$$

A derivada $h_{\text{even}}(s)$ é dada na seguinte equação

$$h'_{\text{even}}(0; \alpha; x, y) = -2^{\alpha+1} h\left(0; \alpha; \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \log 2 + 2^\alpha h'\left(0; \alpha; \frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

Para $h_{\text{odd}}(s)$ é um pouco mais trabalhoso e obtemos

$$\begin{aligned}
h'_{\text{odd}}(0; \alpha; x, y) &= \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j ((-1)^{j+1} (2^{\alpha-j} - 1) + 2^{\alpha-j}) \zeta'_R(j - \alpha) \\
&+ \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j ((-1)^j - 1) 2^{\alpha-j} \zeta_R(j - \alpha) \log 2 \\
&+ \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j ((-1)^{j+1} + 1) 2^{\alpha-j} \sum_{n=1}^{\frac{x-y}{2}} \frac{\log 2}{n^{j-\alpha}} \\
&+ \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j (-1)^{j+1} 2^{\alpha-j} \sum_{n=1+\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y-1}{2}} \frac{\log 2}{n^{j-\alpha}} \\
&+ \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j (-1)^j \sum_{n=1+\frac{x+y-1}{2}}^{x+y} \frac{\log n}{n^{j-\alpha}} \\
&+ \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j ((-1)^j (1 - 2^{\alpha-j}) - 2^{\alpha-j}) \sum_{n=1}^{\frac{x-y}{2}} \frac{\log n}{n^{j-\alpha}} \\
&+ \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} y^j (-1)^j (1 - 2^{\alpha-j}) \sum_{n=1+\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y-1}{2}} \frac{\log n}{n^{j-\alpha}} \\
&+ \frac{(-1)^{\alpha} - 1}{2} \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sum_{j=2}^{\alpha+1} (-1)^j 2^{j-2} \binom{\alpha+1}{j} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l}.
\end{aligned}$$

Com esses resultados auxiliares re-escrevemos (1.62) e (1.63) utilizando as funções $h(s)$, $h_{\text{odd}}(s)$ e $h_{\text{even}}(s)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\zeta(s; \Delta_{S^m}) &= \frac{2}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} e_{p-1-k}(d^0) h\left(s; 2k+c, \frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right), \\
\zeta(s; \Delta_{\mathbb{R}P^{2p-1}}) &= \frac{2}{(2p-2)!} \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) h_{\text{even}}(s; 2k, p-1, p-1), \\
\zeta(s; \Delta_{\mathbb{R}P^{2p}}) &= \frac{2}{(2p-1)!} \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) h_{\text{odd}}\left(s; 2k+1, \frac{2p-1}{2}, \frac{2p-1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Então os principais teoremas desta seção são os seguintes:

Teorema 1.21.

$$\begin{aligned}
\zeta'(0, \Delta_{S^{2p-1}}) &= \frac{4}{(2p-2)!} \sum_{l=0}^{p-1} a_{2p-1, 2l} \zeta'_R(-2l) + \frac{2}{(2p-2)!} \sum_{n=1}^{2p-2} b_{2p-1, n} \log n, \\
\zeta'(0, \Delta_{S^{2p}}) &= \frac{4}{2^{2p-2} (2p-1)!} \sum_{l=0}^{p-1} a_{2p, 2l+1} \zeta'_R(-2l-1) + \frac{2^{2-p}}{(2p-1)!} \sum_{n=1}^{2p-1} b_{2p, n} \log n + c,
\end{aligned}$$

onde $\zeta_R(s)$ é a função zeta de Riemann, e os coeficientes a e b são inteiros dados pelas seguintes formulas:

$$\begin{aligned} a_{2p-1,2l} &= \sum_{h=0}^{p-1-l} \binom{2l+2h}{2h} (p-1)^{2h} e_{p-1-l-h}(d^0), \\ b_{2p-1,n} &= \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \left(2 \sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} (p-1)^j n^{2k-2j} - \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (p-1)^j n^{2k-j} \right), \\ a_{2p,2l+1} &= \sum_{h=0}^{p-1-l} 2^{2p-2-2h} \binom{2l+2h+1}{2h} (2p-1)^{2h} e_{p-1-l-h}(d^0), \\ b_{2p,n} &= \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \left(2 \sum_{j=0}^k \binom{2k+1}{2j} (2p-1)^{2j} 2^{p-1-2j} n^{2k+1-2j} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k+1}{j} (2p-1)^j 2^{p-1-j} n^{2k+1-j} \right), \end{aligned}$$

e o último termo c é um número racional dado pela seguinte fórmula

$$c = - \frac{2}{(2p-1)!} \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \frac{(2p-1)^{2k+2}}{2^{2k+2}(k+1)} \sum_{j=2}^{2k+2} (-1)^j \binom{2k+2}{j} \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l},$$

onde $p = \lceil \frac{m-1}{2} \rceil + 1$, $\alpha_q = -\frac{1}{2}(m-2q-1)$, $e_l(d^0)$ denota o polinômio simétrico elementar de grau l nas $p-1$ variáveis $d^0 = (-\alpha_1^2, \dots, -\alpha_{p-1}^2)$, e m é a dimensão da esfera.

Teorema 1.22.

$$\begin{aligned} \zeta'(0, \Delta_{\mathbb{R}P^{2p-1}}) &= \frac{4}{(2p-2)!} \sum_{l=0}^{p-1} a'_{2p-1,2l} \zeta'_R(-2l) - \frac{4 \log 2}{(2p-2)!} \sum_{l=0}^{2p-2} a_{2p-1,l} \zeta_R(-l) \\ &\quad + \frac{2}{(2p-2)!} \sum_{n=1}^{p-1} b_{2p-1,n} \log n, \\ \zeta'(0, \Delta_{\mathbb{R}P^{2p}}) &= \frac{2}{(2p-1)!} \sum_{l=0}^{2p-1} a'_{2p,l} \zeta'_R(-l) - \frac{4 \log 2}{(2p-1)!} \sum_{l=0}^{p-1} a_{2p,2l} \zeta_R(-2l) \\ &\quad + \frac{2}{(2p-1)!} \sum_{n=1}^{p-1} b_{2p,n} \log n + \frac{2}{(2p-1)!} \sum_{n=1}^{2p-1} c_{2p,n} \log n \\ &\quad + \frac{2}{(2p-1)!} (d \log 2 + f), \end{aligned}$$

onde os coeficientes a , a' , b e c são inteiros dados pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
a_{2p-1,2l} &= \sum_{j=l}^{p-1} e_{p-1-j}(d^0) \binom{2j}{2j-2l} 2^{2j} (p-1)^{2j-2l}, \\
a_{2p-1,2l+1} &= \sum_{j=l+1}^{p-1} e_{p-1-j}(d^0) \binom{2j}{2j-2l-1} 2^{2j} (p-1)^{2j-2l-1}, \\
a'_{2p-1,2l} &= 2^{2l} \sum_{j=l}^{p-1} e_{p-1-j}(d^0) \binom{2j}{2j-2l} (p-1)^{2j-2l}, \\
b_{2p-1,n} &= \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \left(2 \sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} (p-1)^j (2n)^{2k-j} - \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} (p-1)^j (2n)^{2k-j} \right), \\
a_{2p,2l} &= 2^{2l} \sum_{j=l}^{p-1} e_{p-1-j}(d^0) \binom{2j+1}{2j+1-2l} \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{2j+1}, \\
a'_{2p,2l} &= \left(2^{2l+1} - 1 \right) \sum_{j=l}^{p-1} e_{p-1-j}(d^0) \binom{2j+1}{2j+1-2l} \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{2j+1}, \\
a'_{2p,2l+1} &= \sum_{j=l}^{p-1} e_{p-1-j}(d^0) \binom{2j+1}{2j-2l} \left(\frac{2p-1}{2} \right)^{2j}, \\
b_{2p,n} &= \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^{j+1} \binom{2k+1}{j} \left(\frac{2p-1}{2} \right)^j (2n)^{2k+1-j}, \\
c_{2p,n} &= \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \binom{2k+1}{j} \left(\frac{2p-1}{2} \right)^j n^{2k+1-j},
\end{aligned}$$

e os últimos termos d e f são números racionais dados pelas seguintes fórmulas

$$\begin{aligned}
d &= \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^{j+1} \binom{2k+1}{j} \left(\frac{2p-1}{2} \right)^j \sum_{n=1}^{p-1} (2n)^{2k+1-j}, \\
f &= \sum_{k=0}^{p-1} e_{p-1-k}(d^0) \frac{(2p-1)^{2k+2}}{(2k+2)2^{2k+2}} \sum_{j=2}^{2k+2} (-1)^j 2^{j-2} \binom{2k+2}{j} \sum_{t=1}^{j-1} \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

onde $p = \lceil \frac{m-1}{2} \rceil + 1$, $\alpha_q = -\frac{1}{2}(m - 2q - 1)$, $e_l(d^0)$ denota o polinômio elementar simétrico de grau l nas $p-1$ variáveis $d^0 = (-\alpha_1^2, \dots, -\alpha_{p-1}^2)$ e m é a dimensão do espaço projetivo.

Capítulo 2

Extensão do Teorema de Cheeger-Müller em Espaços Singulares

Neste capítulo apresento os artigos relacionado a extensão do Teorema de Cheeger-Müller [[HASP11](#), [HASP12](#), [HASP16](#), [HASP17B](#)].

2.1 Introdução

No início do século passado Hurewicz fez a seguinte conjectura:

“Duas variedades fechadas homotopicamente equivalentes são homeomorfas.”

Essa conjectura é verdadeira em dimensão um e dois mas é falsa em dimensão três. Os espaços Lenticulares $L(7, 1)$ e $L(7, 2)$ servem como contra-exemplo para a conjectura. Este contra-exemplo foi obtido por meio da Torção de Reidemeister. Definida em 1935, por K. Reidemeister [[REI35](#)], foi o primeiro invariante combinatorial que é capaz de detectar diferenças em espaços homotopicamente equivalentes. K. Reidemeister usou este invariante para se obter uma classificação homotópica dos espaços Lenticulares.

Em 1968, o renomado Teorema do Índice de Atiyah e Singer [[ATSi68](#)] faz uma conexão entre a Topologia e a Análise que motiva o desenvolvimento de vários tópicos de pesquisa, entre eles a definição da Torção Analítica. Em 1971, Ray e Singer [[RASi71](#)] definiram o zeta-determinante regularizado e a Torção Analítica com o objetivo de apresentar uma contra-parte analítica para a Torção de Reidemeister. Apesar de apresentarem várias propriedades para a Torção Analítica que a Torção de Reidemeister também satisfaz, não conseguiram provar que os dois invariantes coincidiam sobre uma variedade fechada. Apenas no final da década de 1970, W. Müller [[MÜL78](#)] e J. Cheeger [[CHE79](#)], independentemente, provaram que as duas torções coincidem, e este fato leva o nome de Teorema de Cheeger-Müller. Após a prova do caso em que a variedade é fechada, várias generalizações foram apresentadas, sempre sobre variedades suaves, *cf.* [[LÜC93](#), [VIS95](#), [BiZH92](#), [BRMA06](#), [BRMA13](#)].

A discussão sobre este teorema em casos singulares inicia-se com o trabalho de A. Dar [DAR87]. Neste artigo estão as definições da Torção Analítica e da Torção de Interseção para uma pseudovariiedade com singularidade cônica. A. Dar utilizou os trabalhos J. Cheeger [CHE80, CHE83] e Goresky e Macpherson [GOMA80, GOMA83]. Nos dois primeiros é o início da discussão da Geometria Espectral em espaços singulares, enquanto os dois últimos é o início da Teoria de Homologia de Interseção. O colaborador M. Lesch em [LES98, Seção 5] observa que uma possível abordagem para se obter a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para uma pseudovariiedade com singularidade cônica é provar o teorema para o caso do cone métrico finito. Posteriormente obter a extensão completa por meio de fórmulas de colagem. Assim os primeiros resultados sobre a Torção Analítica de um cone foram apresentado simultaneamente por [VER12, MÜVE14, HASP10, HASP11, HASP17B]. As fórmulas de colagem foram provadas no caso suave por Brüning e Ma [BRMA13]. Em casos singulares mais gerais, que inclui o caso cônico, temos a fórmula de Lesch [LES13]. A fórmula de Lesch possui uma restrição técnica de que próximo ao corte, a métrica tem que ser produto.

Possuo trabalhos em andamento neste tópico, que envolvem obter a extensão da fórmula de colagem de Lesch sem a restrição da métrica, exemplos explícitos do cálculo da Torção de Interseção em pseudovariiedades com singularidades cônicas, o estudo da Torção de Interseção de um cone de dimensão ímpar e a prova da extensão do Teorema de Cheeger-Müller nesse contexto.

Este capítulo está organizado da seguinte forma; nas próximas subseções farei uma breve descrição dos principais ingredientes do Teorema de Cheeger-Müller. Na Seção 2.2 apresentamos os trabalhos [HASP11, HASP17B] onde determinamos a Torção Analítica do cone e fazemos uma discussão sobre o limite da Torção Analítica do cilindro cônico finito quando colapsamos um de seus bordos. Na Seção 2.3, falaremos sobre os trabalhos [HASP12, HASP16] onde provamos a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para um cone de dimensão par, discutimos a Torção de Interseção do cone e fazemos a contraparte topológica do limite da Torção de Reidemeister do cilindro cônico finito quando colapsamos um de seus bordos.

2.1.1 Teorema de Cheeger-Müller

Como o grande ponto de discussão desse capítulo é a extensão do Teorema de Cheeger-Müller apresentarei brevemente os elementos necessários para o entendimento deste teorema.

Por questão de simplicidade considero nesta subseção que (W, \tilde{g}) é uma variedade Riemanniana fechada¹ orientável de dimensão m e métrica \tilde{g} .

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, se $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_{\dim V}\}$ e $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_{\dim V}\}$ são duas bases de V denotaremos por (\mathbf{w}/\mathbf{v}) a matriz de mudança

¹Todo o contexto poderia ser feito para uma variedade Riemanniana compacta com bordo, sem grandes alterações.

de base de v para w , *i.e.*, $w_i = \sum_{j=1}^{\dim V} (\mathbf{w}/\mathbf{v})_{ji} v_j$. $[\mathbf{w}/\mathbf{v}]$ denota o módulo do determinante de (\mathbf{w}/\mathbf{v}) e dizemos que \mathbf{w} é equivalente a \mathbf{v} se, e somente se, $[\mathbf{w}/\mathbf{v}] = 1$. Neste caso, escrevemos $\mathbf{w} \sim \mathbf{v}$.

Considere

$$\mathfrak{C} : 0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

um complexo de cadeia finito de espaços vetoriais de dimensão finita. Fixe a notação $Z_q := \text{Ker } \partial_q$, $B_q := \text{Im } \partial_{q+1}$ e $H_q(\mathfrak{C}) := Z_q/B_q$. Escolha uma base *preferida* \mathbf{c}_q para cada C_q e uma base \mathbf{h}_q para $H_q(\mathfrak{C})$. Considere um levantamento $\tilde{\mathbf{h}}_q$ para \mathbf{h}_q , *i.e.*, $\tilde{\mathbf{h}}_q \subset C_q$, e $\tilde{\mathbf{h}}_q$ é um conjunto linearmente independente de vetores, tais que $\pi(\tilde{\mathbf{h}}_q) = \mathbf{h}_q$. Escolha um conjunto \mathbf{b}_q que é linearmente independente em C_q tal que $\partial_q(\mathbf{b}_q)$ é uma base de B_{q-1} . Então $\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}) \tilde{\mathbf{h}}_q \mathbf{b}_q$ é uma base de C_q e faz sentido considerarmos $[\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}) \tilde{\mathbf{h}}_q \mathbf{b}_q/\mathbf{c}_q]$. Denotaremos este número por $[\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}) \mathbf{h}_q \mathbf{b}_q/\mathbf{c}_q]$ como depende apenas de \mathbf{b}_q , \mathbf{b}_{q+1} e \mathbf{h}_q .

Definição 2.1. A *Torção de Reidemeister* de um complexo de cadeia \mathfrak{C} com relação as bases \mathbf{h} e \mathbf{c} é o número real positivo

$$\tau(\mathfrak{C}; \mathbf{h}; \mathbf{c}) = \prod_{q=0}^m [\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}) \mathbf{h}_q \mathbf{b}_q/\mathbf{c}_q]^{(-1)^q}, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{c} = \{\mathbf{c}_q : 0 \leq q \leq m\}$ e $\mathbf{h} = \{h_q : 0 \leq q \leq m\}$.

O produto alternado garante que $\tau(\mathfrak{C}; \mathbf{h}; \mathbf{c})$ não depende das escolhas dos conjuntos \mathbf{b}_q .

Posteriormente precisaremos do seguinte resultado de J. Milnor [MIL66]. Seja

$$0 \longrightarrow \mathfrak{C} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{D} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{E} \longrightarrow 0, \quad (2.3)$$

uma sequência exata curta de complexos finitos de espaços vetoriais de dimensão finita, *i.e.*, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_q & \xrightarrow{\varphi_q} & D_q & \xrightarrow{\phi_q} & E_q \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_{\mathfrak{C}} & \circlearrowleft & \downarrow \partial_{\mathfrak{D}} & \circlearrowleft & \downarrow \partial_{\mathfrak{E}} \\ 0 & \longrightarrow & C_{q-1} & \xrightarrow{\varphi_{q-1}} & D_{q-1} & \xrightarrow{\phi_{q-1}} & E_{q-1} \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

onde cada linha é exata. Sobre essa condições temos a seguinte relação entre as Torções de Reidemeister que é conhecida como *Fórmula de Colagem* da Torção de

Reidemeister.

Teorema 2.2. *Seja \mathfrak{C} , \mathfrak{D} e \mathfrak{E} como anteriormente, então*

$$\log \tau(\mathfrak{D}; \mathbf{h}_{\mathfrak{D}}; \mathbf{d}) = \log \tau(\mathfrak{C}; \mathbf{h}_{\mathfrak{C}}; \mathbf{c}) + \log \tau(\mathfrak{E}; \mathbf{h}_{\mathfrak{E}}; \mathbf{e}) + \log \tau(\mathbf{H}), \quad (2.4)$$

onde \mathbf{H} é a sequência exata de homologia associada a sequência exata curta em Eq. (2.3) e a base \mathbf{d} é equivalente a base $\varphi(\mathbf{c}) \oplus \phi^{-1}(\mathbf{e})$.

Considere K uma decomposição celular de W , \tilde{K} se recobrimento universal e ρ uma representação de $\pi_1(K)$ no grupo ortogonal de \mathbb{R}^N . Defina o complexo de cadeias de espaços vetoriais reais pelo seguinte complexo torcido

$$C_q(K; \rho) := C_q(\tilde{K}; \mathbb{R}\pi_1(K)) \otimes_{\mathbb{R}\pi_1(K)} \mathbb{R}^N. \quad (2.5)$$

Escolha uma *base preferida* para $C_q(K; \rho)$ dada por $\{\mathbf{c}_q \otimes \mathbf{e}\}$, where \mathbf{e} é uma base ortonormal de \mathbb{R}^N e $\mathbf{c}_q = \{c_{q,j}\}$, onde $c_{q,j}$ são elementos de uma base de $C_q(\tilde{K}; \pi_1(K))$ dada pelos levantamentos de células de K .

Definição 2.3. *A Torção de Reidemeister de (W, \tilde{g}) para uma representação ortogonal ρ e uma base da homologia $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_q\}$ é definida por*

$$\tau(W; \mathbf{h}; \rho) := \tau(C(K; \rho); \mathbf{h}; \mathbf{c} \otimes \mathbf{e}), \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{c} \otimes \mathbf{e} = \{\mathbf{c}_q \otimes \mathbf{e}\}$.

Aparentemente esta definição depende da escolha do mergulho de K em \tilde{K} , da orientação das células de K e da base ortonormal \mathbf{e} . Entretanto, ela é independente dessas escolhas. A Torção de Reidemeister é chamada de invariante combinatorial pois não depende da escolha da decomposição celular para qualquer base da homologia fixada. Isto foi provado por J. Milnor em [MIL66].

Para o contexto do Teorema de Cheeger-Müller precisamos fixar a base da homologia de uma maneira especial. A construção a seguir foi apresentada por [RASI71]. Seja E_ρ o fibrado vetorial associado a representação ρ e $\Omega^*(W; E_\rho)$ o complexo de De Rham com valores em E_ρ . A métrica \tilde{g} define o operador estrela de Hodge, $*$: $\Omega^q(W; E_\rho) \rightarrow \Omega^{m-q}(W; E_\rho)$. O adjunto formal da diferencial exterior d é definido por $\delta := (-1)^{mq+m+1} * d*$. Definimos o operador de *Hodge-Laplace* por

$$\Delta^{(q)} = d^{(q+1)}\delta^{(q)} + \delta^{(q-1)}d^{(q)} \quad (2.7)$$

e o espaço das q -formas harmônicas por $\mathcal{H}^q(W; E_\rho) := \{\omega \in \Omega^q(W; E_\rho) : \Delta^{(q)}\omega = 0\}$.

Definição 2.4. *O isomorfismo de Ray e Singer é definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{RS}_q : \mathcal{H}^q(W; E_\rho) &\rightarrow H_q(W; E_\rho) \\ \omega &\mapsto (-1)^{(m-1)q} \mathcal{P}_q^{-1} \mathcal{D}^{m-q} * \omega, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde \mathcal{D}^\bullet é a aplicação de De Rham e \mathcal{P}_\bullet é a dualidade de Poincaré.

Se considerarmos uma base ortonormal \mathfrak{h}_q de $\mathcal{H}^q(W; E_\rho)$ então $\mathcal{RS}_q(\mathfrak{h}_q)$ é uma de $H_q(W; E_\rho)$.

Definição 2.5. A Torção de Reidemeister com a base de Ray e Singer é definida por

$$\tau(W; \rho) := \tau(W; \mathcal{RS}(\mathfrak{h}); \rho),$$

onde $\mathcal{RS}(\mathfrak{h}) = \{\mathcal{RS}_q(\mathfrak{h}_q)\}$.

A partir de agora sempre que me referir a Torção de Reidemeister será no sentido anterior, *i.e.*, com a base fixada pelas formas harmônicas por meio do isomorfismo de Ray e Singer.

Utilizando a Definição 1.8 definiremos a Torção Analítica. Toda a discussão realizada na Seção 1.4 pode ser feita no contexto desta seção. Em resumo, R.T. Seeley[SEE67] provou que traço do semi-grupo do calor do operador de Hodge-Laplace $\Delta^{(q)}$ possui a seguinte expansão assintótica,

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta^{(q)}}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{q,k}(W) t^{k-\frac{m}{2}}, \text{ as } t \rightarrow 0^+, \quad (2.9)$$

onde $a_{q,k}(W)$ podem ser determinados usando a estrutura geométrica de W . Então o zeta-determinante de $\Delta^{(q)}$ é regular em $s = 0$ e podemos definir:

Definição 2.6. A Torção Analítica de (W, \tilde{g}) com uma representação ortogonal ρ do grupo fundamental de W é definida por

$$\log T((W, \tilde{g}); \rho) = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^m (-1)^q q \cdot \zeta'(0, \Delta^{(q)}). \quad (2.10)$$

Omitiremos ρ e \tilde{g} quando o contexto permitir.

Podemos agora enunciar o teorema que é o ponto central da discussão deste capítulo.

Teorema 2.7 (Teorema de Cheeger-Müller). *Se (W, \tilde{g}) uma variedade Riemanniana fechada orientável e ρ uma representação do ortonormal do grupo fundamental de W , então*

$$\tau(W) = T(W).$$

Observo que o teorema anterior é trivial se a dimensão de W é par, pois nesse caso as duas torções são iguais a um. Assim a prova do teorema é quando a dimensão de W é ímpar, *cf.* [CHE79, MÜL78].

2.2 Torção Analítica de cones métricos finitos sobre uma variedade compacta

Esta seção se refere aos artigos [HASP11, HASP17B]. Estes trabalhos podem ser considerados como uma generalização da discussão iniciada em [HASP10]. Nelas determinamos explicitamente a Torção Analítica de um cone sobre uma variedade fechada. Este é o único exemplo explícito do cálculo da torção analítica sobre um espaço singular. Não é conhecido na literatura um exemplo do cálculo em um espaço com uma singularidade mais geral. A ferramenta fundamental para a obtenção dos resultados são os Teoremas 1.10 e 1.12. Além dessa determinação, no final de [HASP17B] apresentamos uma discussão formal sobre o termo anômalo que aparece na Torção Analítica do cone sobre uma variedade de dimensão par. Digo formal pois consideramos autovalores que não estão na definição da Torção Analítica pois vêm de formas que não são quadrado integráveis sobre o cone (cf. Subseção 2.2.4).

Observação 2.8. A definição da Torção Analítica requer uma representação do grupo fundamental da variedade no espaço das matrizes ortogonais reais. Como trabalhamos com o cone sobre uma variedade fechada, seu grupo fundamental é trivial. Consequentemente, só temos a representação trivial neste caso. Então, apenas representações triviais serão consideradas nesta seção. Quando não for o caso, deixaremos claro qual a representação utilizada.

2.2.1 Cone métrico finito e o espectro do operador de Hodge-Laplace

Como observado anteriormente J. Cheeger [CHE83] iniciou o estudo da Geometria Espectral em espaços singulares pelo caso mais simples.

Definição 2.9. *Seja (W, \tilde{g}) uma variedade Riemanniana fechada orientável de dimensão m . Um cone métrico sobre W é o espaço, $CW = [0, \infty) \times W / \sim$, onde identificamos $\{0\} \times W \equiv \{v\}$. A métrica em CW é definida para $x > 0$ e dada por*

$$g = dx^2 + x^2\tilde{g}. \quad (2.11)$$

Um cone métrico finito é o espaço $C_lW = [0, l] \times W / \sim$, com a mesma identificação, a métrica g é definida para $x > 0$ e $l \in \mathbb{R}_+$. Um cilindro métrico limitado é o espaço $FW = [l_1, l_2] \times W$ com a métrica g definida para todo $x \in [l_1, l_2]$, onde $0 < l_1 < l_2$.

Um espaço com singularidade cônica é definido como segue:²

Definição 2.10. *Dizemos que X é um espaço com singularidade cônica de dimensão $m + 1$ se X é compacto e existem $p_j \in X$, $j = 1, \dots, k$ tal que $X - \cup_{j=1}^k \{p_j\}$ é uma variedade suave aberta (possivelmente com bordo) e cada p_j possui uma vizinhança U_j tal que $U_j - \{p_j\}$ é isométrico à $C_{l_j}W_j - \{v_j\}$, onde v_j é o vértice do cone métrico*

²Este espaço também é uma pseudovarietade suavemente estratificada como definido na Seção 3.2.

finito e W_j é uma variedade Riemanniana fechada de dimensão m . A métrica em X é denotada por g_X .

Seja $\Omega_0^q(C_l W)$ o espaço das formas diferenciáveis com suporte compacto em $C_l W$. Dada $\omega \in \Omega_0^q(C_l W)$ a estrutura de $C_l W$ nos permite a seguinte decomposição

$$\omega(x, y) = f_1(x)\omega_1(y) + f_2(x)dx \wedge \omega_2(y),$$

onde f_1 e f_2 são funções suaves com suporte compacto em $(0, l]$, $\omega_1 \in \Omega^{(q)}(W)$ e $\omega_2 \in \Omega^{(q-1)}(W)$. Então o operador de Hodge-Laplace tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \Delta^{(q)}\omega(x, y) &= (-\partial_x^2 f_1(x) - (m - 2q)x^{-1}\partial_x f_1(x))\omega_1(y) + x^{-2}f_1(x)\tilde{\Delta}\omega_1(y) \\ &\quad - 2x^{-1}f_2(x)\tilde{d}\omega_2(y) + dx \wedge (x^{-2}f_2(x)\tilde{\Delta}\omega_2(y) \\ &\quad + \omega_2(y)(-\partial_x^2 f_2(x) - (m - 2q + 2)x^{-1}\partial_x f_2(x) \\ &\quad + (m - 2q + 2)x^{-2}f_2(x)) - 2x^{-3}f_1(x)\tilde{d}^\dagger\omega_1(y)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde os elementos com $\tilde{\cdot}$ são referentes a seção W . O próximo resultado é provado em [CHE83] e é importante para obtermos o espectro de $\Delta^{(q)}$.

Lema 2.11. *Seja $\{\varphi_{\text{har}}^{(q)}, \varphi_{\text{cex},n}^{(q)}, \varphi_{\text{ex},n}^{(q)}\}$ uma base ortonormal de $\Omega^{(q)}(W)$ consistindo de autoformas harmônicas, co-exatas e exatas de $\tilde{\Delta}^{(q)}$. Denote por $\tilde{\lambda}_{q,n}$ os autovalores de $\varphi_{\text{cex},n}^{(q)}$ e $m_{\text{cex},q,n}$ sua multiplicidade. Seja J_ν a função de Bessel de índice ν . Defina*

$$\alpha_q = \frac{1}{2}(1 + 2q - m), \quad \mu_{q,n} = \sqrt{\lambda_{q,n} + \alpha_q^2}.$$

Então, assumindo que $\mu_{q,n}$ não é um número inteiro, as soluções da equação $\Delta^{(q)}u = \lambda^2 u$, com $\lambda \neq 0$, são dadas pelos seguintes seis tipos:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm,1,n,\lambda}^{(q)} &= x^{\alpha_q} J_{\pm\mu_{q,n}}(\lambda x) \varphi_{\text{cex},n}^{(q)}, \\ \psi_{\pm,2,n,\lambda}^{(q)} &= x^{\alpha_{q-1}} J_{\pm\mu_{q-1,n}}(\lambda x) \tilde{d}\varphi_{\text{cex},n}^{(q-1)} + \partial_x(x^{\alpha_{q-1}} J_{\pm\mu_{q-1,n}}(\lambda x)) dx \wedge \varphi_{\text{cex},n}^{(q-1)} \\ \psi_{\pm,3,n,\lambda}^{(q)} &= x^{2\alpha_{q-1}+1} \partial_x(x^{-\alpha_{q-1}} J_{\pm\mu_{q-1,n}}(\lambda x)) \tilde{d}\varphi_{\text{cex},n}^{(q-1)} \\ &\quad + x^{\alpha_{q-1}-1} J_{\pm\mu_{q-1,n}}(\lambda x) dx \wedge \tilde{d}^\dagger \tilde{d}\varphi_{\text{cex},n}^{(q-1)} \\ \psi_{\pm,4,n,\lambda}^{(q)} &= x^{\alpha_{q-2}+1} J_{\pm\mu_{q-2,n}}(\lambda x) dx \wedge \tilde{d}\varphi_{\text{cex},n}^{(q-2)} \\ \psi_{\pm,E,\lambda}^{(q)} &= x^{\alpha_q} J_{\pm|\alpha_q|}(\lambda x) \varphi_{\text{har}}^{(q)} \\ \psi_{\pm,O,\lambda}^{(q)} &= \partial_x(x^{\alpha_{q-1}} J_{\pm|\alpha_{q-1}|}(\lambda x)) dx \wedge \varphi_{\text{har}}^{(q-1)}. \end{aligned}$$

Quando $\mu_{q,n} \in \mathbb{Z}$ as soluções – devem ser escritas com funções de Bessel Y_ν , no lugar das funções $J_{-\nu}$.

A obtenção do resultado anterior é muito trabalhosa e segue resolvendo a equação diferencial do autovalor. Entretanto para continuarmos na direção da Torção Analítica precisamos definir o domínio do operador de Hodge-Laplace. Mais precisamente, como $C_l W$ é um espaço da forma $(0, l] \times W$, analiticamente, é necessário

introduzir condições de contorno em $x = 0$ e em $x = l$. Note que quando $x = l$ temos a subvariedade $\{l\} \times W$ que é o bordo do cone e nos referiremos a este ponto dessa forma.

O ponto $x = l$ é um ponto regular e podemos trabalhar com condição de contorno de *Neumann*, que chamaremos de condições *Absolutas*, ou a condição de contorno de *Dirichlet*, que chamaremos de *Relativas*. O ponto $x = 0$ é um ponto regular-singular e precisa de um cuidado maior. Se $\dim W = 2p - 1$ ou $\dim W = 2p$ e $\mathcal{H}^p(W) = 0$ então não é necessário nenhuma condição de contorno em $x = 0$. No caso em que $\dim W = 2p$ e $\mathcal{H}^p(W) \neq 0$, Cheeger define a condição de contorno *ideal* de modo que com essas condições Δ possui uma extensão auto-adjunta. A definição da condição *ideal* foi alvo de investigação de diversos trabalhos, pois tem implicações importante no operador de Hodge-Laplace em um espaço com singularidade cônica. Uma caracterização para todas as possíveis extensões deste operador é apresentada em [BRLE93].

Aplicando as condições de contorno em $x = 0$ e $x = l$ obtemos o espectro do operador de Hodge-Laplace, que é descrito abaixo. Considerarei sempre em $x = 0$ a condição de contorno *ideal* e assim não farei menção a isso na notação do operador.

Lema 2.12. *Seja $0 \leq q \leq m + 1$. A parte positiva do espectro do operador de Hodge-Laplace em $C_l W$, com condições de contorno absolutas em $x = l$ e condições de contorno ideal em $x = 0$ é:*

Se $m = \dim W = 2p - 1, p \geq 1$, então

$$\begin{aligned} \text{Spec}_+ \Delta_{\text{abs}}^{(q)} &= \left\{ m_{\text{cex},q,n} : \hat{j}_{\mu_q,n,\alpha_q,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex},q-1,n} : \hat{j}_{\mu_{q-1},n,\alpha_{q-1},k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \\ &\cup \left\{ m_{\text{cex},q-1,n} : j_{\mu_{q-1},n,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex},q-2,n} : j_{\mu_{q-2},n,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \\ &\cup \left\{ m_{\text{har},q} : \hat{j}_{|\alpha_q|,\alpha_q,k}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{har},q-1} : \hat{j}_{|\alpha_{q-1}|,\alpha_q,k}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Se $m = \dim W = 2p, p \geq 1$, então

$$\begin{aligned} \text{Spec}_+ \Delta_{\text{abs}}^{(q \neq p, p+1)} &= \left\{ m_{\text{cex},q,n} : \hat{j}_{\mu_q,n,\alpha_q,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex},q-1,n} : \hat{j}_{\mu_{q-1},n,\alpha_{q-1},k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \\ &\cup \left\{ m_{\text{cex},q-1,n} : j_{\mu_{q-1},n,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex},q-2,n} : j_{\mu_{q-2},n,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \\ &\cup \left\{ m_{\text{har},q} : \hat{j}_{|\alpha_q|,\alpha_q,k}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{har},q-1} : \hat{j}_{|\alpha_{q-1}|,\alpha_{q-1},k}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Spec}_+ \Delta_{\text{abs}}^{(p)} &= \left\{ m_{\text{cex},p,n} : \hat{j}_{\mu_p,n,\alpha_p,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex},p-1,n} : \hat{j}_{\mu_{p-1},n,\alpha_{p-1},k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \\ &\cup \left\{ m_{\text{cex},p-1,n} : j_{\mu_{p-1},n,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex},p-2,n} : j_{\mu_{p-2},n,k}^2 / l^2 \right\}_{n,k=1}^{\infty} \\ &\cup \left\{ \frac{1}{2} m_{\text{har},p} : j_{\frac{1}{2}}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{2} m_{\text{har},p} : j_{-\frac{1}{2}}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty} \\ &\cup \left\{ m_{\text{har},p-1} : \hat{j}_{|\alpha_{p-1}|,\alpha_{p-1},k}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Spec}_+ \Delta_{\text{abs}}^{(p+1)} &= \left\{ m_{\text{cex}, p+1, n} : \hat{j}_{\mu_{p+1, n, \alpha_{p+1, k}}}^2 / l^2 \right\}_{n, k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex}, p, n} : \hat{j}_{\mu_{p, n, \alpha_p, k}}^2 / l^2 \right\}_{n, k=1}^{\infty} \\
 &\cup \left\{ m_{\text{cex}, p, n} : j_{\mu_{p, n, k}}^2 / l^2 \right\}_{n, k=1}^{\infty} \cup \left\{ m_{\text{cex}, p-1, n} : j_{\mu_{p-1, n, k}}^2 / l^2 \right\}_{n, k=1}^{\infty} \\
 &\cup \left\{ m_{\text{har}, p+1} : \hat{j}_{|\alpha_{p+1}|, \alpha_{p+1, k}}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{2} m_{\text{har}, p} : j_{-\frac{1}{2}}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty} \\
 &\cup \left\{ \frac{1}{2} m_{\text{har}, p} : j_{\frac{1}{2}}^2 / l^2 \right\}_{k=1}^{\infty},
 \end{aligned}$$

onde os $j_{\mu, k}$ são os zeros positivos da função de Bessel $J_{\mu}(x)$, os $\hat{j}_{\mu, c, k}$ são os zeros positivos da função $\hat{J}_{\mu, c}(x) = cJ_{\mu}(x) + xJ'_{\mu}(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Torção Analítica do cone métrico finito

De posse dessas informações temos que o resolvente $(\Delta_{\text{abs}}^{(q)})^{-1} \in \mathbf{B}^p(\mathcal{H}^{(q)}(C_l W))^{\perp}$ para qualquer $p > \frac{m+1}{2}$ e então a função zeta associada a $\Delta_{\text{abs}}^{(q)}$ está bem definida para $\text{Re}(s) > \frac{m+1}{2}$ por

$$\zeta(s; \Delta_{\text{abs}}^{(q)}) := \sum_{\lambda \in \text{Spec}_+ \Delta_{\text{abs}}^{(q)}} \lambda^{-s}.$$

Em [CHE83] é provado a seguinte expansão assintótica do traço do operador do calor

$$\text{Tr}(e^{-t\Delta_{\text{abs}}^{(q)}}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(q)} t^{j - \frac{m+1}{2}} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(q)} t^j + c_0^{(q)}(C_l W) \log t, \quad \text{as } t \rightarrow 0^+. \quad (2.13)$$

Observo aqui que o termo $c_0^{(q)}(C_l W)$ é possivelmente não nulo apenas se o bordo de W for não vazio. Assim, no nosso caso, a função $\zeta(s; \Delta_{\text{abs}}^{(q)})$ possui uma extensão meromorfa em \mathbb{C} que é regular em zero.

Definição 2.13. A função zeta de torção com condições absolutas é definida por

$$t_{\text{abs}}(s) := \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{m+1} (-1)^q q \cdot \zeta(s; \Delta_{\text{abs}}^{(q)}).$$

Então a Torção Analítica de $C_l W$ com condições absolutas no bordo é dada por

$$\log T_{\text{abs}}(C_l W) = t'(0) = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{m+1} (-1)^q q \cdot \zeta'(0; \Delta_{\text{abs}}^{(q)}),$$

como definido anteriormente. Mesmo que $c_0^{(q)}(C_l W)$ seja não nulo, a equação anterior está bem definida. Isso foi provado por A. Dar [DAR87].

Observação 2.14. A escolha da condição absoluta em $x = l$ não é uma restrição, se considerarmos condições de contorno relativas em $x = l$ obtemos os mesmos resultados descritos anteriormente e por meio da Teoria de Hodge prova-se sem

muita dificuldade que

$$t_{\text{abs}}(s) := (-1)^m t_{\text{rel}}(s).$$

A estratégia agora é utilizar os Teoremas 1.10 e 1.12. Então re-escrevemos $t_{\text{abs}}(s)$ da seguinte forma:

$$t_{\text{abs}}(s) := t_{\text{abs}}^{(m)}(s) = t_0^{(m)}(s) + t_1^{(m)}(s) + t_2^{(m)}(s) + t_3^{(m)}(s),$$

com

$$\begin{aligned} t_0^{(m)}(s) &= \frac{l^{2s}}{2} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} (-1)^q \left((Z_q(s) - \hat{Z}_{q,+}(s)) + (-1)^{m-1} (Z_q(s) - \hat{Z}_{q,-}(s)) \right), \\ t_1^{(2p-1)}(s) &= (-1)^{p-1} \frac{l^{2s}}{2} \left(Z_{p-1}(s) - \hat{Z}_{p-1,0}(s) \right), & t_1^{(2p)}(s) &= 0 \\ t_2^{(m)}(s) &= \frac{l^{2s}}{2} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^{q+1} m_{\text{har},q} (z_{q-1,-}(s) + (-1)^m z_{q,-}(s)), \\ t_3^{(2p)}(s) &= (-1)^{p+1} m_{\text{har},p} \frac{l^{2s}}{4} (z_{p,+}(s) + z_{p,-}(s)), & t_3^{(2p-1)}(s) &= 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $\hat{Z}_{q,0}$ denota $\hat{Z}_{q,\pm}$ com $\alpha_q = 0$, e

$$\begin{aligned} Z_q(s) &= \sum_{n,k=1}^{\infty} m_{\text{cex},q,n} j_{\mu_{q,n},k}^{-2s}, & \hat{Z}_{q,\pm}(s) &= \sum_{n,k=1}^{\infty} m_{\text{cex},q,n} j_{\mu_{q,n},\pm\alpha_q,k}^{-2s}, \\ z_{q,\pm}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} j_{\pm\alpha_q,k}^{-2s}. \end{aligned}$$

Então o Teorema 1.10 é utilizado em $t_2^{(m)}(s)$ e $t_3^{(m)}(s)$ e o Teorema 1.12 em $t_0^{(m)}(s)$ e $t_1^{(m)}(s)$. O uso destes teoremas só é possível devido a relação da função de Bessel modificada do tipo I e a sua relação com os zeros das funções do tipo J . Após uma extensa análise de cada um dos termos de (2.14) provamos os seguintes teoremas.

Teorema 2.15. *Se a dimensão W é ímpar igual a $2p - 1$, $p \geq 1$, então a Torção Analítica de $C_l W$ é dada por*

$$\begin{aligned} \log T(C_l W) &= \frac{1}{2} \log T(W, \tilde{g}) + \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \frac{l^{2p-2q}}{2(p-q)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \sum_{j=1}^{p-1} \text{Res}_{s=0} \Phi_{2j+1,q}^{\text{odd}}(s) \text{Res}_{s=j+\frac{1}{2}} \zeta_{\text{cex}} \left(s, \tilde{\Delta}^{(q)} + \alpha_q^2 \right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde as funções $\Phi_{2j+1,q}^{\text{odd}}(s)$ são funções universais explicitamente conhecidas por relações recursivas, $\tilde{\Delta}$ é o operador de Hodge-Laplace na seção do cone e $r_q = \text{rank } H_q(W)$.

Teorema 2.16. *Se a dimensão de W é par e igual a $2p$, $p \geq 1$, então a Torção Analítica de $C_l W$ é dada por*

$$\begin{aligned} \log T(C_l W) &= \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \frac{r_q}{2} \log \frac{l^{2p-2q+1}}{2p-2q+1} + (-1)^p \frac{r_p}{4} \log l + \frac{1}{2} \chi(W) \log 2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{q+1} \mathcal{A}_{0,0,q}(0) + \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{q+1} r_q \log(2p-2q-1)!! \quad (2.16) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{s=0} \Phi_{2j,q}^{\text{even}}(s) \operatorname{Res}_{s=j} \zeta_{\text{cex}} \left(s, \tilde{\Delta}^{(q)} + \alpha_q^2 \right), \end{aligned}$$

onde as funções $\Phi_{2j,q}^{\text{even}}(s)$ são funções universais explicitamente conhecidas por relações recursivas, $\tilde{\Delta}$ é o operador de Hodge-Laplace na seção do cone, $r_q = \operatorname{rank} H_q(W)$ e

$$\mathcal{A}_{0,0,q}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{\alpha_q}{\mu_{q,n}} \right) - \log \left(1 + \frac{\alpha_q}{\mu_{q,n}} \right) \right) \frac{m_{q,n}}{\mu_{q,n}^{2s}}.$$

2.2.3 Identificação das contribuições Geométricas/Topológicas

Passamos agora a identificação das contribuições Geométricas/Topológicas nos Teorema 2.15 e 2.16. É direto do Teorema de Cheeger-Müller para variedades fechadas que, cf. Teorema 2.7,

$$\log T(W; l^2 \tilde{g}) = \log \tau(W; l^2 \tilde{g}).$$

Para a identificação do bordo utilizando os trabalhos de J. Brüning e X. Ma [BRMA06, BRMA13]. Eles provaram a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para uma variedade compacta com bordo mostrando que a comparação entre a Torção Analítica e a Torção de Reidemeister requer um termo de correção que depende exclusivamente do bordo.

Teorema 2.17. *Seja (M, g_M) uma variedade Riemanniana compacta com bordo e ρ uma representação do grupo fundamental de M em $O(n; \mathbb{R})$. Então,*

$$\log T_{\text{abs}}(M) = \log \tau(M) + \frac{\operatorname{rk}(\rho)}{4} \chi(\partial M) \log 2 + \operatorname{rk}(\rho) A_{\text{BM}}(\partial M),$$

onde $\operatorname{rk}(\rho)$ é o “rank” da representação ρ .

O termo $A_{\text{BM}}(\partial M)$ é chamada de *Termo Anômalo do Bordo*. Ele é definido a partir da segunda forma fundamental do ∂M de modo que se o bordo for totalmente geodésico então este termo é nulo. A mudança da condição de contorno troca apenas o sinal no termo anômalo, e este sinal depende da dimensão de M .

Considere o cilindro métrico finito da Definição 2.9, $FW = [l_1, l_2] \times W$ com a métrica g dada em (2.11). Então FW é uma variedade suave com bordo e podemos aplicar o Teorema 2.17. Usando condições de contorno relativa em $x = l_1$, condições de contorno absolutas em $x = l_2$ e usando a representação trivial de $\pi_1(M)$ obtém-se

que

$$\log T_{\text{rel/abs}}(FW) = \frac{1}{2}\chi(W) \log 2 + 2A_{\text{BM}}(W),$$

onde rel/abs se refere as condições de contorno nos bordos. Note que o termo $\log \tau(FW, \{l_1\} \times W)$ não está na fórmula pois este termo é zero. O bordo $\{l_1\} \times W$ é um retrato de deformação forte de FW e consequentemente $\tau(FW, \{l_1\} \times W) = 1$.

Por outro lado podemos utilizar a mesma abordagem das Subseções 2.2.1 e 2.2.2 deste capítulo para obtermos o espectro do operador de Hodge-Laplace e as função zeta de torção do cilindro cônico. A função zeta de torção é dada por:

$$t_{\text{rel/abs}}^{(m)}(s) = w_0^{(m)}(s) + w_1^{(m)}(s) + w_2^{(m)}(s) + w_3^{(m)}(s),$$

com

$$\begin{aligned} w_0^{(m)}(s) &= \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} (-1)^q \left((\hat{D}_{q,-}(s; l_2, l_1) - \hat{D}_{q,+}(s; l_1, l_2)) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m-1} (\hat{D}_{q,+}(s; l_2, l_1) - \hat{D}_{q,-}(s; l_1, l_2)) \right), \\ w_1^{(2p-1)}(s) &= (-1)^{p-1} \frac{1}{2} \left(\hat{D}_{p-1,0}(s; l_2, l_1) - \hat{D}_{p-1,0}(s; l_1, l_2) \right), & w_1^{(2p)}(s) &= 0, \\ w_2^{(m)}(s) &= \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^{q+1} (d_q(s; l_2, l_1) + (-1)^m d_q(s; l_1, l_2)), \\ w_3^{(2p)}(s) &= (-1)^{p+1} \frac{1}{2} d_p(s; l_1, l_2), & w_3^{(2p-1)}(s) &= 0, \end{aligned}$$

onde $\hat{D}_{p-1,0}$ é dado por $\hat{D}_{p-1,+}$ ou $\hat{D}_{p-1,-}$, pois $\alpha_{p-1} = 0$, quando $m = 2p - 1$, e

$$\begin{aligned} \hat{D}_{q,\pm}(s; l_1, l_2) &= \sum_{n,k=1}^{\infty} m_{\text{cex},q,n} \hat{f}_{\mu_q,n,\pm\alpha_q,k}^{-2s}(l_1, l_2), \\ d_q(s; l_1, l_2) &= m_{\text{har},q} \sum_{k=1}^{\infty} f_{-\alpha_{q-1},k}^{-2s}(l_1, l_2). \end{aligned}$$

Os números $\hat{f}_{\mu,c,k}(a, b)$ são os zeros da função

$$\hat{F}_{\mu,c}(x; l_1, l_2) = J_{\mu}(l_1 x)(cY_{\mu}(l_2 x) + l_2 x Y'_{\mu}(l_2 x)) - Y_{\mu}(l_1 x)(cJ_{\mu}(l_2 x) + l_2 x J'_{\mu}(l_2 x)),$$

onde J_{μ} e Y_{μ} são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Aplicamos os Teoremas 1.10 e 1.12 novamente, e obtemos que se $\dim W = 2p - 1$, então

$$\log T_{\text{rel/abs}}(FW) = \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \sum_{j=1}^{p-1} \text{Res}_{s=0} \Phi_{2j+1,q}^{\text{odd}}(s) \text{Res}_{s=j+\frac{1}{2}} \zeta_{\text{cex}} \left(s, \tilde{\Delta}^{(q)} + \alpha_q^2 \right),$$

e se $\dim W = 2p$, então

$$\log T_{\text{rel/abs}}(FW) = \frac{1}{2}\chi(W) \log 2 + \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \sum_{j=1}^p \operatorname{Res}_{s=0} \Phi_{2j,q}^{\text{even}}(s) \operatorname{Res}_{s=j} \zeta_{\text{cex}} \left(s, \tilde{\Delta}^{(q)} + \alpha_q^2 \right).$$

Com isso provamos os principais teoremas de [HASP11, Teoremas 1.1 e 1.2] e [HASP17B, Teorema 1.1].

Teorema 2.18. *Seja (W^m, \tilde{g}) é uma variedade Riemanniana fechada orientável de dimensão m e métrica g . A Torção Analítica do cone métrico finito de $C_l W$ com condições de contorno absoluta no bordo e condições de contorno ideais em $x = 0$ é dada por:*

$$\begin{aligned} \log T(C_l W^{2p-1}) &= \frac{1}{2} \log \tau(W, \tilde{g}) + \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \frac{l^{2p-2q}}{2^{(p-q)}} + A_{\text{BM}}(W), \\ \log T(C_l W^{2p}) &= \left(\frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q (2p - 2q + 1) r_q + (-1)^p \frac{1}{4} r_p \right) \log l \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log(2p - 2q + 1) ((2p - 2q - 1)!)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{q+1} \mathcal{A}_{0,0,q}(0) + \frac{1}{2} \chi(W) \log 2 + A_{\text{BM}}(W), \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{A}_{0,0,q}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{\alpha_q}{\mu_{q,n}} \right) - \log \left(1 + \frac{\alpha_q}{\mu_{q,n}} \right) \right) \frac{m_{q,n}}{\mu_{q,n}^{2s}}.$$

Observo que no caso de dimensão ímpar quase todos os termos tiveram sua interpretação Topológica/Geométrica determinada. Para afirmarmos a extensão do Teorema de Cheeger-Müller precisamos utilizar a Torção de Interseção, isto será apresentado na próxima seção. O caso par é bem mais complicado. O grande desafio passa pelo entendimento do termo com $\mathcal{A}_{0,0,q}(0)$ e no entendimento da Torção de Interseção neste caso. Ambos os casos continuam em aberto. Observo que em [DMHS09] este termo foi estudado no caso de um cone de ângulo α sobre a S^2 e provamos que se $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ então o cone converge para um disco de dimensão três e é possível determinar $\mathcal{A}_{0,0,0}(0)$.

2.2.4 Caso limite do cilindro cônico finito

Existe alguma relação entre a Torção Analítica do cilindro métrico finito e a Torção Analítica do cone? Vimos que condições mistas nos bordos do cilindro fornecem a contribuição do bordo. Então a ideia passa a ser considerar a mesma condição de contorno no bordo. Aplicando a mesma estratégia dos casos anteriores provamos.

Teorema 2.19. *Se (W, \tilde{g}) é uma variedade Riemanniana fechada orientável*

$$\log T_{\text{abs/abs}}(FW) = \log T(W, \tilde{g}) + \sum_{q=0}^m (-1)^q r_q \log \Gamma_q + \frac{1}{2} \chi(W) \log 2 + 2A_{\text{BM}}(W), \quad (2.17)$$

onde

$$\Gamma_q = \begin{cases} \frac{1}{m+1-2q} \left(l_2^{m+1-2q} - l_1^{m+1-2q} \right) & \text{if } m+1-2q \neq 0, \\ \ln \frac{l_2}{l_1}, & \text{if } m+1-2q = 0. \end{cases}$$

Observo que o fator Γ_q é a comparação entre as normas das formas harmônicas em dimensão q de FW e de W .

Com o teorema anterior surge uma questão natural sobre o que acontece com $\log T_{\text{abs/abs}}(FW)$ se $l_1 \rightarrow 0^+$. É claro que o limite direto diverge, o que sugere a necessidade de uma regularização. Assim consideramos o conjunto formal das autoformas do cone que não são quadrado integráveis e procedemos formalmente. Aplicamos as condições de contorno no bordo, essas autofunções fornecem um novo conjunto de autovalores para o operador formal. Por simplicidade chamamos de *parte negativa do espectro*. Então verificamos que esse operador formal que nos fornece a parte negativa do espectro satisfaz as condições dos Teoremas 1.10 e 1.12. Provamos:

Teorema 2.20. *A Torção Analítica negativa de $C_l W$ é dada por: Se $m = 2p - 1$ então*

$$\begin{aligned} \log T_-(C_l W^{2p-1}) &= \frac{1}{2} \log T(W, g) - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \gamma_q + A_{\text{BM}}(W) \\ &\quad - \sum_{q=0}^{p-2} (-1)^q r_q \log \frac{p-q}{p-q-1}; \\ \log T_-(C_l W^{2p}) &= -\frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \gamma_q + \frac{1}{2} \chi(W) \log 2 + A_{\text{BM}}(W) \\ &\quad + \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log(2p-2q-1)!! - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q \mathcal{A}_{0,0,q}(0) \\ &\quad + \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log l \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log(2p-2q-1)(2p-2q+1), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde

$$\gamma_q = \frac{l^{m-2q+1}}{m-2q+1}.$$

Note que, se $q < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$

$$\lim_{l_1 \rightarrow 0^+, l_2 = l} \Gamma_q = \gamma_q.$$

Considerando a diferença entre as equações (2.17) e (2.18), fazendo o limite para $l_1 \rightarrow 0^+$ provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.21. *Nas hipóteses anteriores, o termo constante do limite para $l_1 \rightarrow 0^+$ da diferença entre a Torção Analítica de FW com condições absolutas no bordo e a Torção Analítica negativa de $C_{l_1}W$ é dado por:*

$$\operatorname{Res}_{l_1=0} (\log T_{\text{abs/abs}}(FW) - \log T_-(C_{l_1}W)) = \log T(C_{l_2}W) - \frac{1}{2}\chi(W) \log 2.$$

Observação 2.22. A motivação para essa abordagem é justamente o espectro do operador de Hodge-Laplace em FW . Quando impomos a condição que as formas tem que ser L^2 em C_lW perdemos autovalores que de certa forma implicam no termo $A_{0,0,q}(s)$.

2.3 Sobre a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para o cone

Os resultados da seção anterior vão na direção da extensão do Teorema de Cheeger-Müller no caso cônico e que nos levou a escrever os trabalhos [HASP12, HASP16] que serão descrito nesta seção. Estes trabalhos envolvem mais Topologia Algébrica do que qualquer outro descrito neste texto sistematizado. Ambos possuem naturezas distintas pois em [HASP12] o interesse é em entender a relação entre o limite da Torção de Reidemeister de FW com a Torção de Interseção de C_lW enquanto em [HASP16] utilizamos fórmulas de colagem para identificar a Torção de Interseção dentro da fórmula da Torção Analítica do Teorema 2.18 e assim provar a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para o cone de dimensão par. Ao final desta seção farei uma pequena discussão sobre o caso do cone de dimensão ímpar que continua em aberto.

2.3.1 Torção de Reidemeister do cilindro cônico

Considere o cilindro cônico (FW, g) como na Definição 2.9. Gostaríamos de determinar não apenas a Torção de Reidemeister deste espaço mas também compará-la com a Torção de Reidemeister da seção. Para isso temos o seguinte lema que relaciona as formas harmônicas de ambos espaços.

Lema 2.23. *As formas harmônicas com condições absolutas no bordo de FW , $\mathcal{H}_{\text{abs}}^q(FW)$, coincidem com a extensão constante das formas harmônicas de W , $\mathcal{H}^q(W)$. A aplicação $\omega \mapsto (-1)^{m-q} x^{2q-m} dx \wedge \omega$ define um isomorfismo de $\mathcal{H}^q(W)$ sobre $\mathcal{H}_{\text{rel}}^{q+1}(FW)$, o espaço das formas harmônicas de FW com condições relativas.*

Aplicando a definição da Torção de Reidemeister (tomando conta das devidas adaptação para uma variedade com bordo) obtemos a relação entre as torções na seguinte proposição.

Proposição 2.24. *A Torção de Reidemeister do cilindro cônico finito FW com a métrica g é dada por:*

$$\log \tau(FW; g; \rho) = \log \tau(W; \tilde{g}; \rho) + \text{rk}(\rho) \sum_{q=0}^m (-1)^q r_q \log \Gamma_q,$$

onde Γ_q é dado no Teorema 2.19.

Observe que se a dimensão de W for par a Torção de Reidemeister de FW dependerá apenas dos termos Γ_q . Este termos é comparação do tamanho das formas harmônicas da seção na métrica do cilindro cônico. Assim fixaremos a dimensão W sendo ímpar e da forma $m = 2p - 1$, $p \geq 1$. Os últimos p -termos do somatório na proposição divergem quando $l_1 \rightarrow 0^+$, apresentando uma necessidade de regularização para que este limite faça sentido. E ainda, na Torção Analítica do cone temos a raiz quadrada da Torção de Reidemeister da seção do cone. Estes fatos sugerem a seguinte abordagem.

Seja K uma decomposição celular dada por uma triangulação suave de W e fixe \mathbf{c} uma base preferida graduada para $C(W; E_\rho)$ dada pelas células e \mathbf{z} uma base para homologia. Escolha uma base graduada \mathbf{b} e denote por

$$D_q = [\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}) \mathbf{z}_q \mathbf{b}_q / \mathbf{c}_q] \in \mathbb{R}^+.$$

Considere \hat{K} o complexo de blocos duais e $K_{(q)}$ o q -esqueleto de K . A homologia em dimensão $p - 1$ de $K_{(p-1)}$ coincide com o ciclos de K nesta dimensão, se considerarmos a torção de $K_{(p-1)}$ temos

$$\tau(K_{(p-1)}; \mathbf{x}) = \tau(C(K_{(p-1)}; E_\rho), \mathbf{x}) = \prod_{q=0}^{p-1} [\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}) \mathbf{z}_q \mathbf{b}_q / \mathbf{c}_q],$$

onde \mathbf{z}_q são ciclos que projetam sobre uma base fixada \mathbf{x}_q de $H_q(K_{(p-1)})$. É claro que a única dimensão que possui uma liberdade de escolha diferente da escolha na Definição 2.5 é em dimensão $p - 1$. Agora escreva a Torção de Reidemeister de W como

$$\tau(W) = \prod_{q=0}^{2p-1} D_q^{(-1)^q} = \prod_{q=0}^{p-1} D_q^{(-1)^q} \prod_{q=p}^{2p-1} D_q^{(-1)^q}.$$

Usando a Dualidade de Poincaré, se

$$\hat{D}_q = [\hat{\partial}_{q+1}(\hat{\mathbf{b}}_{q+1}) \hat{\mathbf{z}}_q \hat{\mathbf{b}}_q / \hat{\mathbf{c}}_q],$$

onde o $\hat{\cdot}$ representa os respectivos elementos no complexo do bloco dual, então temos que $\hat{D}_q = D_{2p-1-q}^{-1}$. Logo

$$\tau(W) = \prod_{q=0}^{p-1} D_q^{(-1)^q} \prod_{q=0}^{p-1} \hat{D}_q^{(-1)^q}.$$

Novamente usando a dualidade de Poincaré fixamos a base em dimensão $p - 1$ de modo que $\tau(K_{(p-1)}, \mathbf{w}) = \tau(\hat{K}_{(p-1)}; \hat{\mathbf{w}})$ e com essa escolha obtemos que

$$\tau(W) = (\tau(K_{(p-1)}; \mathbf{w}))^2. \quad (2.19)$$

Com isso provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.25. *No limite $FW \rightarrow C_{l_2}W$, a regularização geométrica da Torção de Reidemeister do cilindro cônico finito sobre uma variedade fechada de dimensão ímpar W converge para a Torção de Interseção de $C_{l_2}W$ ³.*

Observação 2.26. Observo que a dimensão é essencial nesse resultado. A mesma abordagem em dimensão par não funciona. No processo de fixar a base \mathbf{w} a dualidade nos fornece uma equação que não é suficiente para fixar a base. Este problema continua em aberto.

2.3.2 Extensão do Teorema de Cheeger-Müller para um cone de dimensão par

Nesta seção descreverei o artigo [HASP16]. Neste trabalho apresentamos a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para o cone sobre uma variedade fechada de dimensão par. Este foi o primeiro resultado na literatura da extensão do Teorema de Cheeger-Müller para um espaço singular. No caso em que $\dim W = 2p - 1$, o Teorema 2.18 mostra que precisamos identificar o termo

$$\frac{1}{2} \log \tau(W, \tilde{g}) + \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \frac{l^{2p-2q}}{2(p-q)}.$$

A ideia é usar os trabalhos [DAR87, MIL66] e relacionar este termo com a Torção de Interseção de $C_l W$. Antes de apresentarmos algumas definições.

Definição 2.27. *Uma pseudovarietade de dimensão zero é um conjunto enumerável de pontos com a topologia discreta. Seja X um espaço topológico Hausdorff para-compacto e $n > 0$ tal que:*

- (1) *Existe um subespaço fechado Σ , $\dim \Sigma \leq n - 2$, tal que $X - \Sigma$ é denso em X . Chamamos Σ de singular locus de X .*
- (2) *$X - \Sigma$ é uma variedade suave sem bordo de dimensão n .*
- (3) *X possui uma filtração de subespaços fechados de*

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-3} \subset X_{n-2} = X_{n-1} = \Sigma \subset X_n = X,$$

chamada de estratificação, tal que para cada $j \leq n - 2$ e cada ponto $x \in X_j - X_{j-1}$ existe uma pseudovarietade suave compacta L de dimensão $n - j - 1$

³Definição 2.31

com uma filtração

$$\emptyset = L_{-1} \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_{n-j-3} = L_{n-j-2} \subset L_{n-j-1} = L,$$

e uma vizinhança U_x de $x \in X$ com um homeomorfismo $\varphi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^j \times \mathring{C}L$ que respeita a estratificação, a saber, φ leva $U_x \cap X_{j+k+1}$ sobre $\mathbb{R}^j \times \mathring{C}L_k$ homeomorficamente.

Neste caso dizemos que X é uma pseudovarietade suave de dimensão n sem bordo.

Se trocarmos (2) por (2'), onde

(2') Existe um subespaço fechado B de X , com $B \cap \Sigma = \emptyset$, tal que $M = X - \Sigma$ é uma variedade suave com bordo e $\partial M = B$.

Dizemos que X é uma pseudovarietade suave de dimensão n com bordo suave.

Se $\Sigma = \emptyset$ então X é uma variedade suave. Posteriormente trabalharemos no caso em que $\dim \Sigma = 0$ e neste caso a estratificação é dada por

$$\emptyset = X_{-1} \subset \Sigma = X_0 = X_1 = \cdots = X_{n-1} \subset X_n = X.$$

Observação 2.28. Assumimos que toda pseudovarietade suave compacta nesta subseção é um espaço linear por partes finito e orientável.

Definição 2.29. Uma perversidade $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}_j\}_{j=2}^{m+1}$ é uma sequência de números inteiros tais que $\mathfrak{p}_2 = 0$ e $\mathfrak{p}_{j+1} = \mathfrak{p}_j$ ou $\mathfrak{p}_{j+1} = \mathfrak{p}_j + 1$.

A perversidade nula é definida por $0_j = 0$, e a perversidade máxima é definida por $t_j = j - 2$. Dada uma perversidade \mathfrak{p} , a perversidade complementar \mathfrak{p}^c é definida por $\mathfrak{p}_j^c = t_j - \mathfrak{p}_j = j - \mathfrak{p}_j - 2$. A perversidade: $m = \{m_j = [j/2] - 1\}$ é chamada perversidade média inferior.

Considere uma pseudovarietade compacta suave X , possivelmente com bordo, com uma estratificação dada na Definição 2.27. Se $q \in \mathbb{Z}$ e \mathfrak{p} é uma perversidade, então um subespaço A de X é chamado de (\mathfrak{p}, j) -admissível se

$$\dim(A) \leq j, \quad \dim(A \cap X_{n-k}) \leq j - k + \mathfrak{p}_k, \quad \forall k \geq 2.$$

Definição 2.30. Seja $C_*(X)$ o complexo de cadeias simpliciais de X . O grupo de cadeias de interseção é definido por

$$I^{\mathfrak{p}}C_q(X) := \{c \in C_q(X) \mid |c| \text{ é } (\mathfrak{p}, q) \text{-admissível, } |\partial c| \text{ é } (\mathfrak{p}, q) \text{-admissível}\}.$$

O grupo de cadeias de interseção relativo é definido por

$$I^{\mathfrak{p}}C_q(X, \partial X) := \frac{I^{\mathfrak{p}}C_q(X)}{I^{\mathfrak{p}}C_q(\partial X)}.$$

Note que $I^{\mathfrak{p}}C_q(\partial X) = C_q(\partial X)$ pois ∂X é uma variedade suave.

Temos então o seguinte complexo de cadeia

$$I^p C_\bullet(X) := 0 \longrightarrow I^p C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} I^p C_{n-1}(X) \longrightarrow \dots \quad I^p C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} I^p C_0(X) \longrightarrow 0,$$

onde o operador bordo é dado pela restrição. A Homologia de Interseção com perversidade p de X é então definida como a homologia do complexo $I^p C_\bullet(X)$ e não depende da estratificação escolhida. De modo similar definimos a Homologia de Interseção relativa com perversidade p . A Cohomologia de interseção é definida como o dual algébrico da Homologia de interseção⁴. Neste contexto a Dualidade de Poincaré é recuperada e dada por

$$I^p : I^p H_q(X) \rightarrow I^{p^c} H^{m-q}(X),$$

no caso sem bordo. No caso com bordo temos,

$$I^p : I^p H_q(X) \rightarrow I^{p^c} H^{m-q}(X, \partial X).$$

Seja X é um espaço com singularidade cônica (cf. Definição 2.10). Segue que X é uma pseudovarietade compacta suave, possivelmente com bordo, com singularidades isoladas, *i.e.*, Σ é um conjunto finito de pontos. Neste contexto, J. Cheeger [CHE80] estendeu a aplicação de De Rham, logo temos a extensão do isomorfismo de Ray e Singer que denotaremos por $I^p \mathcal{RS}$ com $p = m$ ou $p = m^c$. Com isso definimos a Torção de Interseção nas mesmas linhas da Definição 2.5.

Definição 2.31. *A Torção de Interseção de X com respeito a uma representação ρ do grupo fundamental de X é definida por*

$$\log I\tau(X; \rho) = \frac{1}{2} \left(\log I^m \tau(X; \rho) + \log I^{m^c} \tau(X; \rho) \right),$$

onde

$$I^m \tau(X; \rho) := \tau(I^m C(X; \rho); \mathcal{RS}(\mathfrak{h}); \rho),$$

e similarmente para a perversidade média complementar.

Fazendo as devidas adaptações, o caso relativo é definido de modo análogo por

$$\log I\tau(X, \partial X; \rho) = \frac{1}{2} \left(\log I^m \tau(X, \partial X; \rho) + \log I^{m^c} \tau(X, \partial X; \rho) \right).$$

A Torção de Interseção não depende da estratificação escolhida. É claro que se X é uma variedade compacta suave recuperamos a Torção de Reidemeister.

Passamos agora a discutir a prova do teorema principal dessa subseção que implicará na extensão do Teorema de Cheeger-Müller para cones de dimensão par. A ideia é utilizar o resultado do Teorema 2.2 para descrever a Torção de Interseção de $C_l W$ em função da Torção de Reidemeister de W .

⁴É possível fazer uma construção celular do complexo de cadeia de interseção mas não faremos aqui

Seja (W, \tilde{g}) uma variedade Riemanniana fechada de dimensão ímpar $m = 2p - 1$. Considere o cone $C_l W$ com na Definição 2.9 e denote por $\text{Susp}_l W = [0, 2l] \times W / \sim$ onde identificamos $\{0\} \times W \equiv \{v\}$ e $\{2l\} \times W \equiv \{v_1\}$, realizado pela colagem de duas cópias de $C_l W$ pelo bordo. Observo que segue da definição que os complexos de interseção com perversidade média e média complementar coincidem, portanto enunciaremos apenas o caso com a perversidade média.

Aplicando o Teorema 2.2 na seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow C^m(\partial C_l W) \rightarrow C^m(C_l W) \oplus C^m(C_l W) \rightarrow C^m(\Sigma_l W) \rightarrow 0,$$

e fazendo uma análise detalhada da torção da sequência exata de homologia obtemos

$$\log I^m \tau(C_l W; g) = \frac{1}{2} \log \tau(W; l^2 \tilde{g}) + \frac{1}{2} \log I^m \tau(\text{Susp}_l W) + \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \frac{l}{2p - 2q},$$

onde $r_q = \text{rank} H_q(W)$. Seguindo a mesma abordagem mas na sequência exata curta do par $(C_l W, \partial C_l W)$ obtemos

$$\log I^m \tau(C_l W; g) = \log \tau(W; l^2 \tilde{g}) + \log I^m \tau(C_l W, \partial C_l W) + \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \frac{l}{2p - 2q}.$$

Coletando essas duas informações o principal resultado do artigo [HASp16] segue, e é dado por:

Teorema 2.32. *Se W é uma variedade Riemanniana fechada orientável e conexa de dimensão ímpar, $m = 2p - 1$ então*

$$\begin{aligned} \log I\tau(C_l W) &= -\log I\tau(C_l W; \partial C_l W) \\ &= \frac{1}{2} \log \tau(W; l^2 \tilde{g}) + \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q r_q \log \frac{l}{2p - 2q}. \end{aligned}$$

Então a extensão do Teorema de Cheeger-Müller para o cone de dimensão par é dada no seguinte teorema.

Teorema 2.33. *Seja (W, \tilde{g}) uma variedade Riemanniana fechada orientável de dimensão ímpar. Então a relação entre a Torção Analítica e a Torção de Interseção de $C_l W$ é dada por:*

$$\log T(C_l W) = \log I\tau(C_l W) + A_{\text{BM}}(W).$$

2.3.3 Torção de Interseção do Cone

Aqui vamos apresentar as ideias para o cálculo direto da Torção de Interseção do cone a partir da definição. Continuamos sobre o mesmo escopo das subseções anteriores, ou seja, W é uma variedade Riemanniana fechada conexa de dimensão m ,

K é uma decomposição celular dada por uma triangulação suave de W . Considere CK a decomposição celular de C_lW , construída a partir de K .

Vamos especificar os itens que envolvem o complexo de interseção com uma perversidade p no caso do cone. Seja q um número inteiro e p uma perversidade. Aplicando a definição obtemos que

$$I^p C_q(CK) = \begin{cases} C_q(K) & q < a, \\ H_a(CK_{(a)}, K_{(a-1)}), & q = a, \\ C_q(CN) & q > a. \end{cases}$$

onde $a = m + 1 - p_{m+1}$. Diretamente obtemos a homologia de interseção de CK no caso de perversidade média inferior e perversidade média inferior complementar:

$$I^m H_q(C_lW) = I^{m^c} H_q(C_lW) = \begin{cases} H_q(K), & q \leq p - 1, \\ 0, & q > p - 1, \end{cases}$$

e quando $m = 2p$

$$I^m H_q(C_lW) = \begin{cases} H_q(K), & q \leq p, \\ 0, & q > p, \end{cases} \quad \text{e} \quad I^{m^c} H_q(C_lW) = \begin{cases} H_q(K), & q \leq p - 1, \\ 0, & q > p. \end{cases}$$

O complexo de cadeia de interseção com perversidade p pode ser construído a partir aplicação cônica de um complexo, que é uma ferramenta puramente algébrica. A partir deste complexo obtemos de modo algébrico que

$$\begin{aligned} \tau(I^p C(CK); I^p \mathbf{h}, I^p \mathbf{c}, I^p \mathbf{z}_{a-1}) &= \prod_{q=0}^{a-2} [(I^p \mathbf{h}_q / \mathbf{z}_q)]^{(-1)^q} [(\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}, \mathbf{z}_q, \mathbf{b}_q / \mathbf{c}_q))]^{(-1)^q} \\ &\quad \times [(\mathbf{c}_{a-1} / I^p \mathbf{z}_{a-1}, \mathbf{b}_{a-1})]^{(-1)^a}, \end{aligned}$$

onde $I^p \mathbf{h}$ é uma base graduada da homologia do cone, \mathbf{z}_q é uma base graduada em $Z_q(K)$ dada pelo levantamento da base de uma base de $H_q(K)$, e $I^p \mathbf{z}_{a-1}$ é uma base de $Z_{a-1}(K)$.

Se $m = 2p - 1$ então $a = p + 1$ e

$$\begin{aligned} \tau(I^m C(CK); I^m \mathbf{h}, I^m \mathbf{c}, I^m \mathbf{z}_p) &= \prod_{q=0}^{p-1} [(I^m \mathbf{h}_q / \mathbf{z}_q)]^{(-1)^q} [(\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}, \mathbf{z}_q, \mathbf{b}_q / \mathbf{c}_q))]^{(-1)^q} \\ &\quad \times [(I^m \mathbf{z}_p, \mathbf{b}_p / \mathbf{c}_p)]^{(-1)^p}. \end{aligned}$$

Agora usamos o mesmo argumento na Eq. (2.19) para fixar a base \mathbf{w} e então a base $I^m \mathbf{z}_p$ é fixada requerendo que

$$[(I^m \mathbf{z}_p, \mathbf{b}_p / \mathbf{c}_p)] = 1.$$

Portanto,

$$\tau(I^m C(CK); I^m \mathbf{h}, I^m \mathbf{c}, I^m \mathbf{z}_p) = \prod_{q=0}^{p-1} [(I^m \mathbf{h}_q / \mathbf{z}_q)]^{(-1)^q} [(\partial_{q+1}(\mathbf{b}_{q+1}, \mathbf{z}_q, \mathbf{b}_q / \mathbf{c}_q))]^{(-1)^q}.$$

Se fixarmos as bases $I^m \mathbf{h}$ usando o isomorfismo de Ray e Singer obtemos

$$\begin{aligned} I\tau(C_l W) &:= \tau(I^m C(CK); I^m \mathbf{h}, I^m \mathbf{c}, \mathbf{z}_p) \\ &= \tau(W)^{\frac{1}{2}} \prod_{q=0}^{p-1} \left(\frac{l^{2p-2q}}{2p-2q} \right)^{(-1)^q \frac{r_q}{2}}, \end{aligned}$$

que é o mesmo resultado obtido no Teorema 2.32.

Se a dimensão é par, $m = 2p$, não existe uma maneira natural, por meio da dualidade de Poincaré, de se fixar a base $I^p \mathbf{z}_{a-1}$ e consequentemente a Torção de Interseção do cone nesse caso continua em aberto.

2.3.4 Cone de dimensão ímpar

Diante de tudo o que foi apresentado nesta seção fica o questionamento a respeito da Extensão do Teorema de Cheeger-Müller no caso do cone de dimensão ímpar.

As abordagens apresentadas não nos permite provar esta extensão, alguns comentários a respeito deste fato são necessários. Fixe a $\dim W = 2p$, $p > 1$.

Um primeiro problema é determinar os valores de $\mathcal{A}_{0,0,q}(0)$, $q = 0, 1, \dots, p-1$, acredita-se que esses valores são contribuições do ponto singular na Torção Analítica. De fato, isso é verdade quando o cone é construído sobre a S^2 , cf. [DMHS12]. Entretanto, não se conhece uma prova concreta deste fato. Outro fato é que a Torção de Reidemeister neste caso é trivial e assim não contribui na formula, por outro lado a Torção de Interseção de $C_l W$ não é trivial e a abordagem por meio da colagem não nos fornece informação do valor dessa torção. E ainda, direto da definição não se conhece um modo natural para fixar as bases $I^m z_{p+1}$ e $I^{m^c} z_p$. Vários resultados na literatura atual (veja por exemplo [VER19, ARS18A, ARS18B]) assumem a condição de Witt, *i.e.*, $H_p(W) = \{0\}$, entretanto isso não é suficiente para fixar essas bases. E ainda, em [ARS18B] é anunciado a prova do Teorema de Cheeger-Müller para uma quina de dimensão maior ou igual a 1. Tal prova não se aplica no caso de uma pseudovarietade suave de dimensão ímpar e singularidade cônica isolada.

Capítulo 3

Expansão assintótica do traço do resolvente em espaços estratificados

Neste capítulo apresento os trabalhos relacionado ao estudo da expansão assintótica do traço do resolvente em espaços singulares. Tal tópico é fundamental para o desenvolvimento de invariantes espectrais em tais espaços. Serão apresentados os resultados dos trabalhos [HLV18A, HLV18B].

3.1 Introdução

Pseudovarietades suavemente estratificadas com métricas cônicas iteradas produzem uma classe natural de espaços que englobam variedades algébricas, espaços modulares, bem como limites de espaços suaves com degenerações controladas. Como mencionado no capítulo anterior, J. Cheeger iniciou um programa muito influente de “estender a teoria do operador de Laplace para certos espaços Riemannianos com singularidades”. Subsequentemente, uma grande gama de trabalhos em espaços com singularidades isoladas e singularidades cilíndricas tornaram-se um ponto central de pesquisa por Brüning e Seeley, [BRSE85, BRSE87], Lesch [LES98], [MEL93], Schulze [SCH91] e muitos outros. Um espaço com singularidade isolada é o exemplo mais simples de pseudovarietade suavemente estratificada com métrica cônica iterada, o próximo exemplo é um espaço com quinas (veja Figura 3.1). A teoria de operadores elípticos em espaço com quinas foi desenvolvida por [MAZ91] e também por Schulze [SCH89, SCH02].

Se quisermos ir além no estudo da Teoria Espectral em espaços estratificados mais gerais, a dificuldade é apresentada no próximo exemplo mais simples, *i.e.*, em espaços estratificados com métricas cônicas iteradas de profundidade dois. Assim nossa ideia com os dois trabalhos que serão descritos a seguir é iniciar este estudo. Observo que resultados sobre Teoria do Índice nestes espaços foram apresentados por [ALMP12, ALMP18]. E ainda, em [ALGR16], Albin e Gell-Redman também apresentam resultados paralelos aos que apresentados na Seção 3.3 fazendo o uso de análise microlocal e do b -cálculo. Nos trabalhos discutidos aqui não fazemos uso

dessas ferramentas e sim técnicas de análise funcional. Os resultados que obtemos propicia uma base para o estudo da Teoria do Índice e invariantes espectrais nesses espaços, em particular, inicia a discussão para definição do zeta determinante e a Torção Analítica nesse contexto mais geral, e estes serão projetos futuros que irei desenvolver.

Nosso ponto de partida para os trabalhos [HLV18A, HLV18B] foi o artigo de Brüning e Seeley [BRSE91] onde é apresentado a expansão assintótica do traço do resolvente para um espaço estratificado com quinas. A grosso modo tais espaços são fibrações de espaços suaves com fibra cônica. A ideia de abordagem é trabalhar em cada vizinhança coordenada do fibrado e fazer a decomposição do operador em relação a base, que é suave, e a fibra. Apesar da fibra ser cônica, a seção do cone é uma variedade compacta suave e isso nos fornece aspectos técnicos muito úteis. Por exemplo, neste caso o domínio do Laplaciano da fibra é bem conhecido e não tem dependência do ponto base. No caso geral tratado aqui, essa é a primeira questão de ser atacada pois, a priori, não temos a garantia dessa invariância. Isso motivou o trabalho apresentado da Seção 3.2.

Com este fato em mãos, passamos ao objetivo principal que é provar a existência da expansão assintótica do traço do resolvente do operador de Hodge-Laplace. De maneira bem rudimentar, nossa abordagem é baseada em um processo indutivo na profundidade dos espaços (subseção 3.2.1.2), para isso fizemos uma construção abstrata para o operador de Hodge-Laplace e fazemos um extenso uso da construção feita em [HLV18A] (veja Seção 3.2). Assim aplicamos esse resultado em uma vizinhança coordenada, posteriormente, usamos um argumento de colagem para obter o resultado no espaço todo.

3.2 Sobre o domínio de operadores do tipo Dirac e Laplace em espaços estratificados

Neste trabalho nosso principal resultado é formulado usando o conceito da condição espectral de Witt e os espaços de Sobolev com quinas e peso $\mathcal{H}_e^{1,1}(M)$, onde M é uma pseudovariiedade compacta suavemente estratificada de Witt com uma métrica cônica iterada. Elementos dos espaços de Sobolev com quinas assumem valores em um fibrado vetorial Hermitiano E , que é suprimido da notação.

Por hora, a condição espectral de Witt é um gap no espectro de certos operadores nas fibras F (cf. Eq. (3.14)), e no caso do operador de Gauss-Bonnet em uma pseudovariiedade suavemente estratificada de Witt pode ser sempre obtido reescalando a métrica iterada cônica de modo apropriado. O espaço de Sobolev com quinas e peso $\mathcal{H}_e^{s,\delta}(M) = \rho^\delta \mathcal{H}_e^s(M)$ é o espaço de Sobolev $\mathcal{H}_e^s(M)$ de todas as seções quadrado integráveis do fibrado vetorial Hermitiano E que continuam quadrado integráveis sobre a aplicação fraca de s campos de vetores com quinas, com peso de δ potências de uma função ρ que se anula no estrato singular com ordem um.

Antes de enunciar o resultado principal, observo alguns trabalhos relacionados. Gil, Krainer e Mendoza [GKM13, Teorema 4.2] provam que para um operador quina elíptico A de ordem m em um espaço com quina, sobre certas hipóteses nas raízes indiciais, $\mathcal{D}_{\min}(A) = \mathcal{H}_e^{m,m}(M)$. Nosso teorema estende esse resultado para pseudovarietades compactas suavemente estratificadas no caso do operador de Gauss-Bonnet e Dirac spin. Mais ainda, Albin, Leichtnam, Piazza e Mazzeo [ALMP12, Proposição 5.9] provam que sobre a condição espectral de Witt o domínio minimal $\mathcal{D}_{\min}(D)$ do operador de Gauss-Bonnet D está contido na interseção de $\mathcal{H}_e^{1,\delta}(M)$ para todo $\delta < 1$. Nosso teorema melhora este resultado provando a igualdade ao invés da inclusão.

Teorema 3.1. *Seja M uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com uma métrica cônica iterada. Seja D ou o operador de Gauss-Bonnet ou o operador de Dirac spin e assuma que a condição espectral de Witt é satisfeita, i.e., Definição 3.14 (veja Eq. (3.14)). Então D e D^2 são essencialmente auto-adjuntos com domínios*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\max}(D) &= \mathcal{D}_{\min}(D) = \mathcal{H}_e^{1,1}(M), \\ \mathcal{D}_{\max}(D^2) &= \mathcal{D}_{\min}(D^2) = \mathcal{H}_e^{2,2}(M).\end{aligned}\tag{3.1}$$

No caso do operador de Gauss-Bonnet, as seções tomam valores na álgebra exterior do espaço cotangente de quinas incompletas $\Lambda^*({}^{ie}T^*M)$. No caso do operador de Dirac spin, as seções toma valores no fibrado spin S .

Nas próximas subseções farei uma apresentação das principais definições e resultados encontrados no trabalho de modo que seja possível o entendimento do que foi desenvolvido no mesmo.

3.2.1 Espaços estratificados e métricas cônicas iteradas

A seguir apresento aspectos básicos da definição de um espaço suavemente estratificado com profundidade $d \in \mathbb{N}_0$. Para os interessados na discussão completa recorrendo as referências [ALMP12, ALMP18].

3.2.1.1 Espaços suavemente estratificados com profundidade zero e um

Um espaço compacto suavemente estratificado de profundidade zero é uma variedade compacta suave. Um espaço compacto suavemente estratificado M de profundidade um consiste de um estrato aberto suave e denso M_{reg} , um estrato singular B , que é uma variedade fechada e sua vizinhança tubular $\mathcal{U} \subset M$. A vizinhança tubular \mathcal{U} é o espaço total de uma fibração $\phi : \mathcal{U} \rightarrow B$ com as fibras dadas por $C_1F = [0, 1) \times F / (0, \theta_1) \sim (0, \theta_2)$, onde F é uma variedade compacta suave. Assumimos também que $\phi : (\partial\mathcal{U}, g_F + \phi^*g_B) \rightarrow (B, g_B)$ é uma submersão Riemanniana onde g_F e g_B são métricas em F e B , respectivamente.

Considere coordenadas locais (x, y, θ) em $\mathcal{U} \setminus B$ próximo a quina, onde x é a coordenada radial i.e., a restrição de x em cada fibra $\phi^{-1}(q)$ é uma função radial do

cone, y é o levantamento de um sistema de coordenada local em B e θ se restringe a uma coordenada local em F . Uma métrica cônica incompleta g em M é uma métrica Riemanniana longe do estrato B , que é dada em $\mathcal{U} \cap M_{\text{reg}}$ por

$$g|_{\mathcal{U} \cap M} = dx^2 + \phi^* g_B + x^2 g_F + h =: g_0 + h, \quad (3.2)$$

onde, por abuso de notação, denotamos novamente g_F o 2-tensor simétrico que coincide com a métrica de F na altura $\{x = 1\}$, tal que sua restrição aos links F nos dá uma família suave de métricas Riemannianas. O termo de ordem alta h satisfaz $|h|_{g_0} = O(x)$, quando $x \rightarrow 0$, onde $|\cdot|_{g_0}$ denota a norma nos 2-tensores simétricos de T^*M_{reg} induzidos pelo termo líder g_0 . Neste caso, M é chamada de espaço compacto com quinas simples.

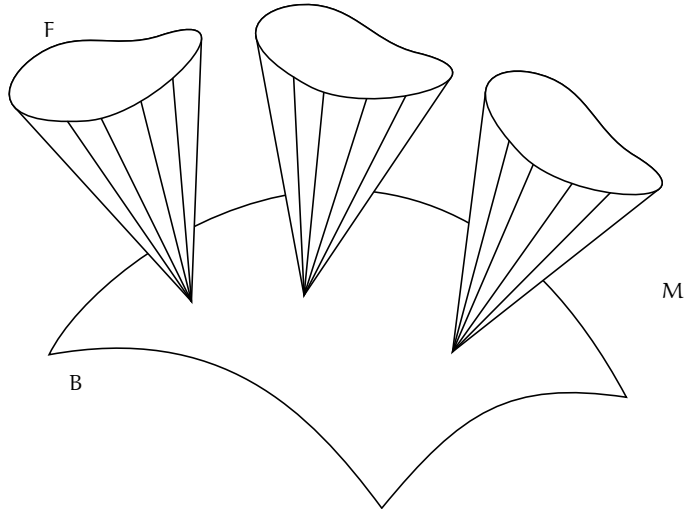


FIGURA 3.1: Quina com um fibrado cônico sobre B .

3.2.1.2 Espaços suavemente estratificados com profundidade d

Dizemos que M é um espaço compacto suavemente estratificado com profundidade $d \geq 2$ com estratos $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, onde cada estrato é identificado com o seu interior, se M é compacto e as seguinte propriedades, indutivamente definidas, são satisfeitas:

- i) Se $Y_\alpha \cap \bar{Y}_\beta \neq \emptyset$ então $Y_\alpha \subset \bar{Y}_\beta$.
- ii) A profundidade de um estrato Y é o maior $j \in \mathbb{N}_0$ tal que existe uma cadeia de estratos, dois a dois distintos, $\{Y = Y_j, Y_{j-1}, \dots, Y_1, Y_0 = M_{\text{reg}}\}$ com $Y_i \subset \bar{Y}_{i-1}$ para todo $1 \leq i \leq j$.
- iii) O estrato de profundidade máxima é uma variedade fechada e suave. A profundidade máxima de todos os estratos de M é chamada de profundidade de M .

- iv) Qualquer ponto de Y_α , um estrato de profundidade j , possui uma vizinhança tubular $\mathcal{U}_\alpha \subset M$, que é um espaço total de uma fibração $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subseteq Y_\alpha$ com fibras dadas por cones $C_1F = [0, 1) \times F_\alpha / (0, \theta_1) \sim (0, \theta_2)$, com o link F_α sendo um espaço compacto suavemente estratificado com profundidade $j-1$.
- v) Seja X_j a união de todos os estratos de dimensão menor ou igual à j . Então $M = X_n$ e $X_n \setminus X_{n-1}$ é uma variedade suave aberta e densa em M .
- vi) Se tivermos ainda $X_{n-1} = X_{n-2}$, *i.e.*, não existe estrato de dimensão $\dim M - 1 = n - 1$ então chamamos M uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada. Neste caso, M satisfaz as condições da Definição 2.27 e temos a seguinte estratificação

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-3} \subset X_{n-2} = X_{n-1} \subset X_n = M.$$

Chamamos a união X_{n-2} de todos os Y_α , $\alpha \in A$, a parte singular de M ou, como no capítulo anterior, de singular locus de M . O complemento de X_{n-2} em M é chamado de parte regular de M , e será denotado por M_{reg} . A precisa definição de espaços compactos suavemente estratificados é um pouco mais elaborada, veja [ALMP12, ALMP18].

Definimos uma métrica cônica iterada g em M pedindo que g seja uma métrica Riemanniana longe do estrato singular e sobre cada vizinhança tubular \mathcal{U}_α de um ponto qualquer de Y_α seja da forma

$$g|_{\mathcal{U}_\alpha \cap M} = dx^2 + \phi_\alpha^* g_{Y_\alpha} + x^2 g_{F_\alpha} + h =: g_0 + h, \quad (3.3)$$

onde a restrição $g_{Y_\alpha} \upharpoonright \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ é uma métrica Riemanniana, g_{F_α} é um 2-tensor simétrico no conjunto de nível $\{x = 1\}$, na qual a sua restrição aos links F_α (espaços suavemente estratificados de profundidade no máximo $(j-1)$) é uma família suave de métricas cônicas iteradas. O termo de ordem mais alta h satisfaz, como antes, $|h|_{g_0} = O(x)$, quando $x \rightarrow 0$.

Nós ainda assumimos que $\phi_\alpha|_{\partial\mathcal{U}_\alpha} : (\partial\mathcal{U}_\alpha, g_{F_\alpha} + \phi_\alpha^* g_{Y_\alpha}) \rightarrow (\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha), g_{Y_\alpha})$ é uma submersão Riemanniana e colocamos a mesma condição nos estratos de profundidade inferior. A existência de métricas cônicas iteradas é provada em [ALMP12, Proposição 3.1]. Um espaço compacto suavemente estratificado de profundidade 2 com uma métrica cônica iterada é ilustrado na Figura 3.2.

3.2.1.3 Resolução das singularidades e campos vetoriais com quinas

A resolução \tilde{M} é definida iterativamente trocando os cones na fibração ϕ_α por cilindros finitos $[0, 1) \times F_\alpha$, e subsequentemente, trocando o espaço compacto suavemente estratificado F_α de profundidade menor por sua resolução \tilde{F}_α da mesma forma. Isto define uma variedade compacta com quinas [ALMP12, Seção 2]. O mesmo processo aplicado a qualquer vizinhança tubular \mathcal{U}_α , nos leva a sua resolução $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$.

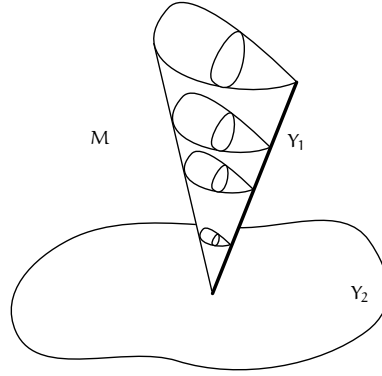


FIGURA 3.2: Espaço estratificado com profundidade dois.

Os campos vetoriais com quinas iterados $\mathcal{V}_{e,d}$ como também os campos vetoriais incompletos com quinas iterados $\mathcal{V}_{ie,d}$ sobre o espaço compacto suavemente estratificado M são definidos por um processo indutivo. No caso $d = 0$, ambos são simplesmente campos de vetores suaves. Para $d \geq 1$, denotamos por ρ uma função suave na resolução \widetilde{M} , que não se anula no seu interior, e se anula com ordem um em cada face do bordo. Então $\mathcal{V}_{e,d} = \rho \mathcal{V}_{ie,d}$ são, por definição, campos de vetores suaves no interior M_{reg} , e para qualquer vizinhança tubular \mathcal{U}_α com função radial x e coordenadas locais $\{s_1, \dots, s_{\dim Y_\alpha}\}$ em $\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subseteq Y_\alpha$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{e,d} \upharpoonright \widetilde{\mathcal{U}}_\alpha &= C^\infty(\widetilde{\mathcal{U}}_\alpha)\text{-span} \{ \rho \partial_x, \rho \partial_{s_1}, \dots, \rho \partial_{s_{\dim Y_\alpha}}, \mathcal{V}_{e,d-1}(F_\alpha) \}, \\ \mathcal{V}_{ie,d} \upharpoonright \widetilde{\mathcal{U}}_\alpha &= C^\infty(\widetilde{\mathcal{U}}_\alpha)\text{-span} \{ \partial_x, \partial_{s_1}, \dots, \partial_{s_{\dim Y_\alpha}}, \rho^{-1} \mathcal{V}_{e,d-1}(F_\alpha) \}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2.1.4 Espaços de Sobolev em pseudovarietades suavemente estratificadas

Podemos agora definir os espaços de Sobolev com quinas neste contexto. Seja M uma pseudovarietade suavemente estratificada M com profundidade d com uma métrica cônica iterada. Denote por ${}^{ie}TM$ o fibrado vetorial canônico definido pela condição que os campos vetoriais incompletos $\mathcal{V}_{ie,d}$ formam (localmente) um conjunto de geradores das seções $\mathcal{V}_{ie,d} = C^\infty(\widetilde{M}, {}^{ie}TM)$. Denotamos por ${}^{ie}T^*M$ o dual de ${}^{ie}TM$, que chamamos de fibrado cotangente com quinas incompleto. Escrevemos $E = \Lambda^*({}^{ie}T^*M)$, quando discutimos o operador de Gauss–Bonnet, e escrevemos E para o fibrado spin, quando discutimos o operador de spin de Dirac. Em ambos os casos definimos os espaços de Sobolev com quinas com valores em E como segue.

Definição 3.2. *Seja M uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com profundidade $d \in \mathbb{N}_0$ com uma métrica cônica iterada g . Denotamos por $L^2(M; E)$ o completamento L^2 das formas diferenciais suaves com suporte compacto*

$${}^{ie}\Omega_0^*(M_{\text{reg}}) := C_0^\infty(M_{\text{reg}}; E). \quad (3.5)$$

Denote por ρ uma função suave na resolução \widetilde{M} , que não se anula no interior, e se anula com ordem um em cada face do bordo. Então, para cada $s \in \mathbb{N}_0$ e $\delta \in \mathbb{R}$

definimos os espaços de Sobolev com peso por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_e^s(M) &:= \{\omega \in L^2(M; E) \mid V_1 \circ \cdots \circ V_s \omega \in L^2(M; E), \text{ for } V_j \in \mathcal{V}_{e,d}\}, \\ \mathcal{H}_e^{s,\delta}(M) &:= \{\omega = \rho^\delta u \mid u \in \mathcal{H}_e^s(M)\},\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde $V_1 \circ \cdots \circ V_s \omega \in L^2(M; E)$ é entendido no sentido distribucional¹.

3.2.2 Operadores de Dirac em uma quina abstrata

O resultado geral deste trabalho é demonstrado por meio de um argumento indutivo. Com isso em mente, faz-se necessário uma abordagem abstrata dos operadores envolvidos, pois em cada passo da indução nos deparamos com operadores diferentes mas com a mesma estrutura abstrata.

Seja S uma família de operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert H com parâmetro $y \in \mathbb{R}^b$ e um domínio fixo \mathcal{D}_S . Assumimos que cada $S(y)$ é discreto. Um operador de Dirac generalizado D agindo em $C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H^\infty)$, onde $H^\infty := \bigcap_{n=0}^\infty \mathcal{D}(S^n)$, é definido pelo seguinte expressão diferencial

$$D := \Gamma(\partial_x + X^{-1}S) + T,\tag{3.7}$$

onde $x \in \mathbb{R}_+$, X denota o operador multiplicação por x , Γ é um operador unitário anti-adjunto no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H)$, e T é um operador de Dirac simétrico generalizado em \mathbb{R}^b , dado em termos das coordenadas $(y_1, \dots, y_b) \in \mathbb{R}^b$ e uma família $(c_1(y), \dots, c_b(y))$ de operadores lineares limitados em H , que satisfazem as relações de Clifford para cada $y \in \mathbb{R}^b$ fixo, dado por

$$T = \sum_{j=1}^b c_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}.\tag{3.8}$$

Aqui, escondemos a ação do fibrado vetorial do operador de Dirac T no espaço de Hilbert H .

Assumimos que as seguintes relações padrões de comutadores valem

$$\begin{aligned}\Gamma S + S \Gamma &= 0, \\ \Gamma T + T \Gamma &= 0, \\ T S - S T &= 0.\end{aligned}\tag{3.9}$$

É possível verificar que o operador de Gauss–Bonnet ou o operador de Dirac spin em um espaço com quinas satisfaz essas relações.

Consideramos ainda D com coeficientes congelados em algum $y_0 \in \mathbb{R}^b$

$$D_{y_0} := \Gamma(\partial_x + X^{-1}S(y_0)) + T_{y_0}, \quad \text{onde } T_{y_0} = \sum_{j=1}^b c_j(y_0) \frac{\partial}{\partial y_j}.\tag{3.10}$$

¹ Esse não é o espaço de Sobolev usual $H^s(\mathbb{R}_+)$ if $M = \mathbb{R}_+$.

Considere a transformada de Fourier $\mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi}$ na componente $L^2(\mathbb{R}^b)$ de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H)$. Usamos a normalização de Hörmander e escrevemos

$$(\mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^b} e^{-i\langle y, \xi \rangle} f(y) dy, \quad (\mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi}^{-1} g)(y) = \int_{\mathbb{R}^b} e^{i\langle y, \xi \rangle} g(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^b}. \quad (3.11)$$

Temos

$$\mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi} \circ D_{y_0} \circ \mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi}^{-1} = \Gamma(\partial_x + X^{-1}S(y_0)) + ic(\xi; y_0) =: L(y_0, \xi), \quad (3.12)$$

onde

$$c(\xi; y_0) := \sum_{j=1}^b c_j(y_0) \xi_j. \quad (3.13)$$

A estratégia agora é estudar a invertibilidade de $L(y_0, \xi)$ em espaços apropriados, e assim usá-los para construir a parametrix de D e analisar o seu domínio.

Assumiremos a *condição espectral de Witt*, i.e.,

$$\text{Spec } S(y) \cap [-2, 2] = \emptyset, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^b. \quad (3.14)$$

Observação 3.3. Se D é o operador de Gauss-Bonnet em uma pseudovarietade de Witt suavemente estratificada, nós sempre podemos obter a condição espectral $\text{Spec } S(y) \cap (-R, R) = \emptyset$ para qualquer $R > 0$ reescalando a métrica.

Em vista das relações na Eq. (3.9), o operador de Laplace generalizado D^2 e $D_{y_0}^2$, ambos agindo em $C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H^\infty)$, são da seguinte forma

$$\begin{aligned} D^2 &= -\partial_x^2 + X^{-2} S(S+1) + T^2, \\ D_{y_0}^2 &= -\partial_x^2 + X^{-2} S(y_0)(S(y_0)+1) + T_{y_0}^2. \end{aligned}$$

Definimos $A := |S + \frac{1}{2}|$. Assumindo que $\text{Spec } S \cap [-2, 2] = \emptyset$, encontramos $S(S+1) = A^2 - 1/4$ e reescrevemos os Laplacianos generalizados D^2 e $D_{y_0}^2$ como segue

$$\begin{aligned} D^2 &= -\partial_x^2 + X^{-2} \left(A^2 - \frac{1}{4} \right) + T^2, \\ D_{y_0}^2 &= -\partial_x^2 + X^{-2} \left(A^2(y_0) - \frac{1}{4} \right) + T_{y_0}^2. \end{aligned}$$

Como antes, podemos aplicar a transformada de Fourier $\mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi}$ e determinar

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi} \circ D_{y_0}^2 \circ \mathfrak{F}_{y \rightarrow \xi}^{-1} &= -\partial_x^2 + X^{-2} \left(A^2(y_0) - \frac{1}{4} \right) + c(\xi, y_0)^2 \\ &=: L(y_0, \xi)^2, \quad \text{onde } c(\xi; y_0)^2 = - \sum_{j,k=1}^b c_j(y_0) c_k(y_0) \xi_j \xi_k. \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.3 Espaços de Sobolev em uma quina abstrata

Para cada $y_0 \in \mathbb{R}^b$ temos a escala de interpolação $H^s(S(y_0))$, $s \in \mathbb{R}$. Com isto podemos definir escalas de Sobolev no caso *modelo do cone* e no caso *modelo de quinas* neste

contexto abstrato. Considere a escala de Sobolev $H_e^\bullet(\mathbb{R}_+)$ gerado por $^2(iX\partial_x + i/2)$; e a escala de Sobolev $H_e^\bullet(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b)$ gerado por $\Lambda = (iX\partial_x + i/2)\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}XT_{y_0}$. O índice inferior e indica que essas escalas de interpolação coincidem com os espaços de Sobolev com quinas de ordem inteiras.

Definição 3.4. *Seja $y_0 \in \mathbb{R}^b$ fixo.*

- a) *A escala de Sobolev $W^\bullet(\mathbb{R}_+; H)$ de um cone modelo abstrato é definido como uma escala de interpolação com gerador $(iX\partial_x + i/2)\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}S(y_0)$ e assim*

$$W^s(\mathbb{R}_+; H) := (H_e^s(\mathbb{R}_+) \hat{\otimes} H) \cap (L^2(\mathbb{R}_+) \hat{\otimes} H^s(S(y_0))). \quad (3.16)$$

- b) *A escala de Sobolev $W^\bullet(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H)$ de uma quina modelo abstrata é definida pela escala de interpolação com gerador $\Lambda\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}S(y_0)$, onde Λ é o gerador da escala de Sobolev $H_e^s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b)$ e assim*

$$W^s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) := (H_e^s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b) \hat{\otimes} H) \cap (L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b) \hat{\otimes} H^s(S(y_0))). \quad (3.17)$$

Observação 3.5. Prova-se que para $y, y_0 \in \mathbb{R}^b$, as escalas de interpolação de $S(y)$ e $S(y_0)$ não coincidem necessariamente. Entretanto, como para qualquer $y \in \mathbb{R}^b$, o domínio de $S(y)$ é fixo e dado dor \mathcal{D}_S , temos que $H^s(S(y)) = H^s(S(y_0))$ para $0 \leq s \leq 1$. Em particular, veremos que podemos assumir a independência de $y_0 \in \mathbb{R}^b$ na escala de Sobolev $W^s(\mathbb{R}_+; H)$ e $W^s(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H)$ para $0 \leq s \leq 2$.

Definição 3.6. *As escalas de Sobolev com peso são definidos por*

$$W^{s,\delta,l} := X^\delta(1+X)^{-l}W^s(\mathbb{R}_+, H), \quad W^{s,\delta} := W^{s,\delta,0}. \quad (3.18)$$

3.2.4 Invertibilidade dos operadores modelo e a parametrix dos operadores abstratos de Dirac e Laplace

Nesta subseção as escalas de Sobolev estão definidas em termos da interpolação das escalas $H^s(S(y_0))$, que a priori dependem do ponto base $y_0 \in \mathbb{R}^b$. Entretanto, nesta subseção o ponto base y_0 está fixo.

De posse das definições dos espaços de Sobolev com peso, passamos ao estudo da invertibilidade dos operadores $L(y_0, \xi)$, definido na Eq. (3.12), e $L(y_0, \xi)^2$ definido na Eq. (3.15). Tais operadores são fundamentais para obtermos as inversas dos operadores modelos. Então provamos:

Proposição 3.7. *Assuma a condição espectral de Witt (3.14). Então para parâmetros fixo $(y, \xi) \in \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$, o operador*

$$L(y, \xi)^2 : W^{2,2}(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow W^{0,0,-2}(\mathbb{R}_+; H)$$

²A escala de Sobolev com quina $H_e^\bullet(\mathbb{R}_+)$ prescreve regularidade em relação a diferenciação por $X\partial_x$. Entretanto, $X\partial_x$ não é um operador simétrico e assim consideramos sua simetrização $(ix\partial_x + i/2)$ como um gerador das escalas de Sobolev.

é injetor com inversa a direita

$$\left(L(y, \xi)^2\right)^{-1} : W^{0,0}(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow W^{2,2}(\mathbb{R}_+; H),$$

limitada uniformemente nos parâmetros (y, ξ) .

A prova desse resultado é construída para $\xi = 0$ e $\xi \neq 0$. No caso $\xi = 0$ construímos operadores integrais K e $\tilde{K} := X^{-2} \circ K$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} W^{2,2} & \xrightleftharpoons[K(y,0)]{L^2(y,0)} & W^{0,0} \\ \uparrow X^2 & \circlearrowleft & \parallel \\ W^{2,0} & \xrightleftharpoons[\tilde{K}]{\tilde{L}^2} & W^{0,0} \end{array}$$

A construção é por meio da decomposição do espaço H em uma base ortonormal $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ que diagonaliza $A^2(y)$. Em cada auto-espaço, prova-se a injetividade. Ainda em cada auto-espaço, o núcleo integral de $K(y, 0)$ é conhecido explicitamente o que nos permite provar o restante das afirmações da proposição.

No caso $\xi \neq 0$ a ideia é similar, construímos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} W^{2,2} & \xrightleftharpoons[K(y,\xi)]{L^2(y,\xi)} & W^{0,0,-2} \\ \uparrow X^2 & \circlearrowleft & \parallel \\ W^{2,0} & \xrightleftharpoons[\tilde{K}]{\tilde{L}^2} & W^{0,0,-2} \end{array},$$

onde K é um operador integral que construímos da seguinte forma. Usamos as relações de comutatividade (3.9) para obter uma base ortonormal de H que diagonaliza $A^2(y)$ e $c\left(y, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right)$, simultaneamente. Em cada auto-espaço o núcleo integral de K é conhecido explicitamente e dado em função de funções de Bessel modificadas do tipo I_ν e K_ν . O operador \tilde{K} é definido por $\tilde{K} = X^{-2} \circ K$. A partir do comportamento assintótico das funções de Bessel provamos os resultados afirmados na proposição.

Como consequência desse resultado prova-se que o operador

$$L(y, \xi) : W^{1,1}(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow W^{0,0,-1}(\mathbb{R}_+; H),$$

é injetor e possui uma inversa a direita limitada uniformemente em (y, ξ) ,

$$L(y, \xi)^{-1} := L(y, \xi) \circ (L(y, \xi)^2)^{-1} : W^{0,0}(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow W^{1,1}(\mathbb{R}_+; H).$$

Uma vez estabelecida a invertibilidade de $L(y, \xi)$ e $L(y, \xi)^2$ para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^b$ e não apenas para $\xi \neq 0$, podemos escrever a parametrix desses operadores explicitamente usando a transformada de Fourier e estabelecer propriedades das aplicações

por meio do Teorema de Plancherel. É necessário introduzir os seguintes subespaços de funções com suporte compacto em $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} W_{\text{comp}}^\bullet(\mathbb{R}_+; H) &:= \{\phi u \mid u \in W^\bullet(\mathbb{R}_+; H), \phi \in C_0^\infty[0, \infty), \text{supp } \phi \subset [0, 1]\}, \\ W_{\text{comp}}^\bullet(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) &:= \{\phi u \mid u \in W^\bullet(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H), \phi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^b), \\ &\quad \text{supp } \phi \subset [0, 1] \times \mathbb{R}^b\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Subespaços de escalas de Sobolev com peso consistindo de funções com suporte compacto em $[0, 1]$ e $[0, 1] \times \mathbb{R}^b$, como acima, são denotados de maneira análoga. A parametriz dos operadores de Dirac e Laplace são dados no seguinte teorema.

Teorema 3.8. *Assuma a condição espectral de Witt (3.14). Considere $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H^\infty)$ e denote sua transformada de Fourier em \mathbb{R}^b por $\hat{u}(\xi)$. Fixe $y_0 \in \mathbb{R}^b$ e considere o operador de Dirac generalizado D_{y_0} e seu quadrado $D_{y_0}^2$. Definimos*

$$\begin{aligned} Qu(y) &:= \int_{\mathbb{R}^b} e^{i\langle y, \xi \rangle} L(y_0, \xi)^{-1} \hat{u}(\xi) d\xi, \quad d\xi := \frac{d\xi}{(2\pi)^b}, \\ Q^2 u(y) &:= \int_{\mathbb{R}^b} e^{i\langle y, \xi \rangle} (L(y_0, \xi)^2)^{-1} \hat{u}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Então Q e Q^2 são inversas a direita de D_{y_0} e $D_{y_0}^2$, respectivamente, e definem operadores limitados,

$$\begin{aligned} Q : W_{\text{comp}}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) \subset W^0 &\rightarrow X \cdot W^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) = W^{1,1}, \\ Q^2 : W_{\text{comp}}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) \subset W^0 &\rightarrow X^2 \cdot W^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) = W^{2,2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2.5 Domínio minimal dos operadores de Dirac e Laplace em uma quina abstrata

Vamos caracterizar o domínio minimal dos operadores de Dirac generalizado e Laplace em uma quina abstrata. Para obter essa caracterização utilizamos as parametrizes construídas na seção anterior. Este é um ponto central do trabalho para obtermos o Teorema 3.1.

Como observado anteriormente as escalas de interpolação $H^s(S(y))$ e $H^s(S(y_0))$ coincidem para $0 \leq s \leq 1$. Lembre que $H = H(S(y_0))$ e as definições do domínio minimal e maximal como seguem:

Definição 3.9. *O domínio maximal e minimal de D são definidos como seguem:*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(D_{\text{max}}) &:= \{u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) \mid Du \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H)\} \\ \mathcal{D}(D_{\text{min}}) &:= \{u \in \mathcal{D}(D_{\text{max}}) \mid \exists (u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H^\infty) \\ &\quad \text{com } u_n \xrightarrow{L^2} u, Du_n \xrightarrow{L^2} Du\}. \end{aligned}$$

Usando funções bacía com suporte em $[0, 1] \times \mathbb{R}^b$ definimos as versões localizadas dos domínios, como em (3.19). As versões dos domínios minimais e maximais,

$\mathcal{D}(D_{y_0, \min})$ e $\mathcal{D}(D_{y_0, \max})$, e suas versões localizadas, $\mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \min})$ e $\mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \max})$, são definidas analogamente.

Como consequência das definições e o Teorema 3.8 prova-se que

$$\mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \min}) = \mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \max}) = W_{\text{comp}}^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H). \quad (3.22)$$

Logo precisamos estender este resultado para uma perturbação de D_{y_0} ,

$$P = \Gamma(\partial_x + X^{-1}S(y)) + T + V := D_{y_0} + D_{1, y_0},$$

onde $V : W^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) \rightarrow W^{0,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H)$ é um operador limitado, preservando suportes compactos.

Teorema 3.10. *Assuma a condição espectral de Witt (3.14) e que*

$$\partial_y S(y)(|S(y_0)| + 1)^{-1} \quad (3.23)$$

são operadores limitados em H para quaisquer $y, y_0 \in \mathbb{R}^b$. Então,

$$\mathcal{D}_{\text{comp}}(P_{\min}) = \mathcal{D}_{\text{comp}}(P_{\max}) = W_{\text{comp}}^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H). \quad (3.24)$$

A prova deste teorema é dividida em quatro passos. Primeiro usando uma função bacia $\phi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^b)$, com $\text{supp } \phi \subset [0, \epsilon) \times B_\epsilon(y_0)$, e o Teorema 3.8 mostra-se que as normas dos gráficos de D_{y_0} e $(D_{y_0} + \phi D_{1, y_0})$ são equivalentes e assim

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \min}) &= \mathcal{D}_{\text{comp}}((D_{y_0} + \phi D_{1, y_0})_{\min}), \\ \mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \max}) &= \mathcal{D}_{\text{comp}}((D_{y_0} + \phi D_{1, y_0})_{\max}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Consequentemente, usando (3.22) e a igualdade anterior obtêm-se que

$$\mathcal{D}_{\text{comp}}((D_{y_0} + \phi D_{1, y_0})_{\min}) \subseteq \mathcal{D}_{\text{comp}}((D_{y_0} + D_{1, y_0})_{\min}). \quad (3.26)$$

Então provamos que

$$\mathcal{D}_{\text{comp}}(P_{\min}) \subseteq \mathcal{D}_{\text{comp}}(P_{\max}) \subseteq W_{\text{comp}}^{1,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H). \quad (3.27)$$

Assim concluímos o resultado pelas seguintes inclusões

$$\begin{aligned} W_{\text{comp}}^{1,1} &\stackrel{(3.22)}{=} \mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \min}) \\ &\stackrel{(3.25)}{=} \mathcal{D}_{\text{comp}}((D_{y_0} + \phi D_{1, y_0})_{\min}) \stackrel{(3.26)}{\subseteq} \mathcal{D}_{\text{comp}}(P_{\min}) \\ &\subseteq \mathcal{D}_{\text{comp}}(P_{\max}) \stackrel{(3.27)}{=} W_{\text{comp}}^{1,1}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Passamos para a discussão do domínio do operador de Laplace em uma quina abstrata. A definição do domínio minimal e maximal para o operador de Laplace

D^2 é dada de maneira similar a Definição 3.9, ou seja.

Definição 3.11. O domínio maximal e minimal de D^2 são definidos como seguem:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(D_{\max}^2) &:= \{u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) \mid D^2 u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H)\} \\ \mathcal{D}(D_{\min}^2) &:= \{u \in \mathcal{D}(D_{\max}^2) \mid \exists (u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H^\infty) \\ &\quad \text{com } u_n \xrightarrow{L^2} u, D^2 u_n \xrightarrow{L^2} D^2 u\}.\end{aligned}$$

A definição dos domínios localizados, o domínio maximal e minimal de $D_{y_0}^2$ são feitos de maneira análoga com as mudanças apropriadas.

Enquanto na parte anterior precisamos que as escalas de interpolação $H^s(S(y_0))$ e $H^s(S(y))$ coincidam para $0 \leq s \leq 1$, para a discussão do domínio do operador de Laplace esses valores são insuficientes. Então para os resultados a seguir faremos a seguinte suposição:

Suposição 3.12. A escala de interpolação $H^s(S(y))$ é independente de $y \in \mathbb{R}^b$ para $0 \leq s \leq 2$ e neste caso escrevemos $H^s \equiv H^s(S(y))$.

Observamos que repetindo os argumentos usados para provar as igualdades (3.22) obtemos

$$\mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \min}^2) = \mathcal{D}_{\text{comp}}(D_{y_0, \max}^2) = W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H). \quad (3.29)$$

Queremos estender estas igualdades para uma perturbação de $D_{y_0}^2$, i.e.,

$$G = -\partial_x^2 + X^{-2} S(y) (S(y) + 1) + T^2 + W := D_{y_0}^2 + R_{y_0},$$

onde $W : W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H) \rightarrow W^{0,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H)$ é um operador limitado preservando suportes compactos. Neste contexto provamos.

Teorema 3.13. Assuma a condição espectral de Witt (3.14) e que

$$\partial_y S(y) \circ (|S(y_0)| + 1)^{-1}, \quad (|S(y_0)| + 1) \circ \partial_y S(y) \circ (|S(y_0)| + 1)^{-2} \quad (3.30)$$

são operadores limitados em H para quaisquer $y, y_0 \in \mathbb{R}^b$. Então,

$$\mathcal{D}_{\text{comp}}(G_{\min}) = \mathcal{D}_{\text{comp}}(G_{\max}) = W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b; H).$$

A prova deste teorema segue o espírito da prova do Teorema 3.10, só observamos que o segundo termo de (3.30) é equivalente a

$$\partial_y A^2(y) \circ (|S(y_0)| + 1)^{-2},$$

onde que $A = |S + \frac{1}{2}|$, definido na subsecção 3.2.2.

3.2.6 Domínio dos operadores de Dirac e Laplace em uma pseudovariabilidade suavemente estratificada

Com os resultados sobre o domínio dos operadores de Dirac e Laplace em uma quina abstrata apresentados passamos a discussão do resultado principal do trabalho que é a caracterização dos domínios destes operadores em uma pseudovariabilidade compacta suavemente estratificada.

Considere $M := M_d$ uma pseudovariabilidade compacta suavemente estratificada de profundidade $d \in \mathbb{N}$ com uma métrica cônica iterada g_d . Cada estrato singular B de M_d admite uma vizinhança \mathcal{U} com coordenadas locais y , e um função definidora de bordo x_d tal que

$$g_d|_{\mathcal{U}} = dx_d^2 + x_d^2 g_{d-1}(x_d, y) + g_B(y) + h =: \bar{g} + h, \quad (3.31)$$

onde $g_{d-1}(x_d, y)$ é uma família de métricas cônicas iteradas em um espaço suavemente estratificado M_{d-1} de profundidade menor que d e h é um 2-tensor de ordem superior suave na resolução $\tilde{\mathcal{U}}$ com $|h|_{\bar{g}} = O(x_d)$ quando $x \rightarrow 0$. Os espaços de Sobolev foram definidos na Definição 3.2. Denotamos as versões localizadas dos espaços de Sobolev por,

$$\mathcal{H}_{e,\text{comp}}^{s,\delta}(M) := \{\phi \cdot u \mid \phi \in C_0^\infty(\tilde{\mathcal{U}}), u \in \mathcal{H}_e^{s,\delta}(M)\}. \quad (3.32)$$

Os operadores de Dirac spin e de Gauss-Bonnet D_d em (M_d, g_d) admitem, apos a mudança de variável \mathcal{S} (cf. [BRSE88, (5.9a), (5.9b)] e Subseção 3.3.2), a seguinte forma sobre a vizinhança $\mathcal{U} \subset M_d$,

$$\mathcal{S} \circ D_d \circ \mathcal{S}^{-1} = \Gamma(\partial_{x_d} + X_d^{-1} S_{d-1}(y)) + T + V. \quad (3.33)$$

Este operador satisfaz as seguintes propriedades iterativas:

- (i) $S_{d-1}(y) = D_{d-1}(y) + R_{d-1}(y)$, onde $D_{d-1}(y)$ é uma família suave de operadores diferenciais (ou o operador de Dirac spin ou o operador de Gauss-Bonnet) em $(M_{d-1}, g_{d-1}(0, y))$. Os operadores $S_{d-1}(y)$, $D_{d-1}(y)$ estendem continuamente a aplicações limitadas $\mathcal{H}_e^{1,1}(M_{d-1}) \rightarrow L^2(M_{d-1})$. Mais ainda, $R_{d-1}(y)$ estende continuamente a um operador limitado em $L^2(M_{d-1})$;
- (ii) $x_d^{-1} V$ estende continuamente a uma aplicação de $\mathcal{H}_{e,\text{comp}}^{1,1}$ em L_{comp}^2 ;
- (iii) T é um operador de Dirac em B .

Neste ponto ainda não temos que $S_{d-1}(y)$ é essencialmente auto-adjunto e nem que este operador é discreto na sua extensão auto-adjunta, então reformulamos a condição espectral de Witt (3.14) em termos de formas quadráticas. Usamos as noções introduzidas por [KAT95, Capítulo 6, Seção 1]. Para qualquer função $u \in C_0^\infty(M_{d-1})$ definimos, usando o produto interno de $L^2(M_{d-1}, g_{d-1}(0, y))$,

$$t(S_{d-1}(y))[u] := \|S_{d-1}(y)u\|_{L^2}^2. \quad (3.34)$$

Esta é a forma quadrática associada ao operador diferencial simétrico $S_{d-1}(y)^2$, densamente definido com domínio $C_0^\infty(M_{d-1})$ no espaço de Hilbert $L^2(M_{d-1}, g_{d-1}(0, y))$. A imagem de $t(S_{d-1}(y))$ sobre os vetores de norma um é definido pelo seguinte conjunto

$$\Theta(S_{d-1}(y)) := \{t(S_{d-1}(y))[u] \in \mathbb{R} \mid u \in C_0^\infty(M_{d-1}), \|u\|_{L^2}^2 = 1\}. \quad (3.35)$$

Então a condição espectral de Witt pode ser reformulada como segue:

Definição 3.14. *Uma pseudovarietade suavemente estratificada M_d satisfaz a condição espectral de Witt, se existe $\delta > 0$ tal que em todas as profundidades $j \leq d$, $\Theta(S_j(y))$ são subconjuntos de $[4 + \delta, \infty)$ para qualquer $y \in B$.*

A equivalência entre as condições espectrais de Witt é apresentada na seguinte proposição.

Proposição 3.15. *Assuma que $S_{d-1}(y)$ com domínio $C_0^\infty(M_{d-1})$ no espaço de Hilbert $L^2(M_{d-1}, g_{d-1}(0, y))$ é essencialmente auto-adjunto e sua realização auto-adjunta é discreta. Então $\Theta(S_{d-1}(y)) \subset [4 + \delta, \infty)$ para algum $\delta > 0$ se, e somente se, $\text{Spec } S_{d-1}(y) \cap [-2, 2] = \emptyset$.*

Podemos então enunciar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 3.16. *Seja M_d uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com profundidade d . Denote por D_d ou o operador de Dirac spin ou o operador de Gauss-Bonnet. Assuma que D_d satisfaz a condição espectral de Witt. Então $\mathcal{D}_{\max}(D_d) = \mathcal{D}_{\min}(D_d) = \mathcal{H}_e^{1,1}(M_d)$.*

A prova é dada por indução na seguinte suposição:

Suposição 3.17. *Em qualquer pseudovarietade compacta suavemente estratificada M_j , o operador D_j satisfaz a seguinte condição próximo a cada estrato B : Para cada $y \in B$, $S_{j-1}(y)$ admite uma única extensão auto-adjunta em $L^2(M_{j-1})$ com espectro discreto e $\text{Spec } S_{j-1} \cap [-2, 2] = \emptyset$. O domínio da extensão auto-adjunta de $S_{j-1}(y)$ é dado por $\mathcal{H}_e^{1,1}(M_{j-1})$. As composições $S_{j-1}(y) \circ (|S_{j-1}(y_0)| + 1)^{-1}$ e $\partial_y S_{j-1}(y) \circ (|S_{j-1}(y_0)| + 1)^{-1}$ são limitadas em $L^2(M_{j-1})$ para $y, y_0 \in B$.*

Essa suposição é satisfeita para $d = 1$ (veja [BRSE91]). Se assumirmos que essa suposição é válida para $j \leq d$, usamos os Teoremas 3.8, 3.10 e a condição espectral de Witt para mostrar que essas suposição é válida para $d + 1$.

Como corolário deste teorema obtemos

Corolário 3.18. *Seja M_d uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com profundidade d . Denote por D_d ou o operador de Dirac spin ou o operador de Gauss-Bonnet. Assuma que D_d satisfaz a condição espectral de Witt. Então $\mathcal{D}_{\max}(D_d^2) = \mathcal{D}_{\min}(D_d^2) = \mathcal{H}_e^{2,2}(M_d)$.*

Observo que geometricamente não podemos controlar a condição de Witt no caso do operador de Dirac spin, entretanto para o operador de Gauss-Bonnet em um espaço de Witt suavemente estratificado, temos que $0 \notin \text{Spec } S_d$ em cada passo do processo iterativo, e podemos obter o gap espectral simplesmente reescalando a métrica para obtermos a condição espectral de Witt.

3.3 Expansão assintótica do traço do resolvente em pseudo-variedades suavemente estratificadas

Esta seção é fundamentada no pré-print [HLV18B]. O extenso trabalho realizado na Seção 3.2 (veja [HLV18A]) serve como estrutura fundamental para a obtenção do principal resultado desta seção. Por tal motivo usaremos as notação e as definições da seção anterior.

No intuito de entender os invariantes espectrais apresentados nos Capítulos 1 e 2, abordamos o problema de estudar a expansão assintótica do traço do resolvente do operador de Hodge-Laplace em espaços singulares mais gerais que as singularidades cônicas. Esse era o grande objetivo proposto por J. Cheeger em [CHE83]. Como mencionado anteriormente, esta procura nos fez estudar e entender o domínio dos operadores de Gauss-Bonnet, ou Dirac spin, e do operador de Laplace. A caracterização desses domínios apresentados no Teorema 3.1 é que permite a prova do principal teorema deste trabalho.

Teorema 3.19. *Seja (M, g) uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com uma métrica cônica iterada g e profundidade d satisfazendo a condição espectral de Witt (veja Subseção 3.2.1.2 e Definição 3.14). Denote por Δ o correspondente operador de Hodge-Laplace. Então Δ é essencialmente auto-adjunto. Mais ainda, para $2m > \dim M$ a m -ésima potência $(\Delta + z)^{-m}$ do resolvente é da classe de traço e seu traço admite a seguinte expansão assintótica quando $z \rightarrow \infty$*

$$\text{Tr} (\Delta + z^2)^{-m} \sim z^{-2m} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot z^{-j+\dim M} + \sum_{\{Y\}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{d(Y)} c_{j\ell}^Y \cdot z^{-j+\dim Y} \log^{\ell} z \right),$$

onde o segundo somatório é sobre todo estrato singular $\{Y\}$ e $d(Y)$ denota a profundidade do estrato Y .

A princípio não afirmamos nada sobre os coeficientes da expansão assintótica. Para podermos definir o zeta determinante, Torção Analítica ou invariantes eta, faz-se necessário o estudo destes coeficientes. Isto não será discutido neste trabalho.

Observo que no manuscrito [ALGR17] os autores provam a expansão assintótica do traço do resolvente em espaços estratificados usando técnicas totalmente diferentes das que utilizamos. Enquanto em [ALGR17] recai sobre uma delicada análise de “blow-up” microlocal, nossas técnicas são totalmente independentes e possuem um

abordagem funcional analítica motivada por Brüning e Seeley [BRSE91]. Em particular, usamos uma versão do Lema Singular Assintótico (SAL) com parâmetros [BRSE87, p. 372], o Lema do Traço [BRSE91, Lema 4.3], a construção explícita do operador de Legendre [BRSE87, Lema 3.5] e [BRSE91, Teorema 4.1], e a prova da integrabilidade do SAL [BRSE91, Lema 5.5].

3.3.1 Lema singular assintótico com parâmetros

Antes de iniciarmos a discussão para obtermos a prova do Teorema 3.19, apresentamos uma das ferramentas utilizadas para obter a expansão assintótica do traço do resolvente que é o Lema singular assintótico. Este resultado é fundamental dentro da teoria desenvolvida por Brüning e Seeley [BRSE85, BRSE87, BRSE91] e é comparado ao Teorema do Pushforward de Melrose [MEL90, MEL92], que também é utilizado para se obter expansões assintóticas. Uma discussão interessante a respeito da equivalência dessas ferramentas é apresentada em [GRGR01].

Teorema 3.20 (Lema Singular Assintótico com parâmetro). *Suponha que $\sigma(x, s, \zeta)$ está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^b \times C$, onde C é o setor $\{|\arg \zeta| < \pi - \varepsilon\}$ e σ é suave em x com derivadas analíticas em ζ . Assuma ainda:*

- a) A função $\sigma(x, s, \zeta)$ possui uma expansão assintótica diferenciável quando $\zeta \rightarrow \infty$, uniformemente em s . Mais precisamente, existem funções $\sigma_{\alpha j}(x, s)$ com $\sigma_{\alpha j}(\cdot, s) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tais que para $J, K, Q \in \mathbb{N}$,

$$\left| x^J \partial_x^K \left(\sigma(x, s, \zeta) - \sum_{\operatorname{Re}(\alpha) > -Q} \sum_{j=0}^{J_\alpha} \sigma_{\alpha j}(x, s) \zeta^\alpha \log^j \zeta \right) \right| \leq C_{JKM} |\zeta|^{-Q}, \quad (3.36)$$

para $s \in \mathbb{R}^b$, $|\zeta| \geq 1$, $0 \leq x \leq |\zeta|/c_0$ e C_{JKQ} independente de s . Note que para cada Q existe no máximo um número finito de índices $\operatorname{Re}(\alpha) > -Q$, $j \in \mathbb{N}_0$ com $\sigma_{\alpha j} \neq 0$.

- b) As derivadas $\sigma^{(j)}(x, s, \zeta) := \partial_x^j \sigma(x, s, \zeta)$ satisfazem

$$\int_0^1 \int_0^1 y^j |\sigma^{(j)}(\theta y t, s, y \xi)| dy dt \leq C_j, \quad (3.37)$$

uniformemente para $0 \leq \theta \leq 1$, $|\xi| = c_0$ e $s \in \mathbb{R}^b$.

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sigma(x, s, xz) dx &\sim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 0} z^{-k-1} \int_0^\infty \frac{\zeta^k}{k!} \sigma^{(k)}(0, s, \zeta) d\zeta \\ &+ \sum_{\alpha, j} \int_0^\infty \sigma_{\alpha j}(x, s) (xz)^\alpha \log^j(xz) dx \\ &+ \sum_{\alpha=-1}^{-\infty} \sum_{j=0}^{J_\alpha} \sigma^{(-\alpha-1)}(0, s) \frac{z^\alpha \log^{j+1} z}{(j+1)(-\alpha-1)!}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

uniformemente em s .

3.3.2 O operador de Hodge-Laplace em uma pseudovarietade suavemente estratificada

Considere uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada M com uma métrica cônica iterada g . Seja d a derivada exterior agindo nas formas com suporte compacto em M_{reg} , e d^t denota seu adjunto formal em relação ao produto interno L^2 induzido pela métrica Riemanniana g . Então o operador de Gauss-Bonnet de (M, g) é definido por $D := d + d^t$. O operador de Hodge-Laplace é definido por

$$\Delta = D^t D = d^t d + d d^t.$$

Vamos discutir a estrutura do operador de Gauss-Bonnet e do operador de Hodge-Laplace.

Considere uma vizinhança tubular \mathcal{U}_α de um ponto no estrato singular Y_α , onde a métrica cônica iterada tem a forma

$$g|_{\mathcal{U}_\alpha} = dx^2 + \phi_\alpha^* g_{Y_\alpha} + x^2 g_{F_\alpha} + h =: g_0 + h. \quad (3.39)$$

Os operadores D e Δ restritos à \mathcal{U}_α agem em formas diferenciais com suporte compacto ${}^{ie}\Omega_0^*(Y_\alpha \times C(F_{\alpha, \text{reg}})) = C_0^\infty(Y_\alpha \times C(F_{\alpha, \text{reg}}), {}^{ie}\Lambda^* T^*(Y_\alpha \times C(F_{\alpha, \text{reg}})))$, onde $C(F_{\alpha, \text{reg}}) = (0, 1) \times F_{\alpha, \text{reg}}$ e usamos a notação introduzida em (3.5). Seja $f = \dim F_\alpha$, denote por (y) as variáveis locais em Y_α , e por $x \in (0, 1)$ a função radial no cone $C(F_\alpha)$. Escrevemos D e Δ usando a mudança de variável de Brüning e Seeley [BRSE88, Seção 5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : {}^{ie}\Omega_0^*(Y_\alpha \times C(F_{\alpha, \text{reg}})) &\rightarrow {}^{ie}\Omega_0^*(Y_\alpha \times C(F_{\alpha, \text{reg}})), \\ \omega &\mapsto x^{-f/2} \omega. \end{aligned}$$

Esta aplicação estende a uma isometria

$$\mathcal{S} : L^2({}^{ie}\Omega_0^*, dx^2 + g_{F_\alpha}(y) + \phi_\alpha^* g_{Y_\alpha}) \longrightarrow L^2({}^{ie}\Omega_0^*, g_0). \quad (3.40)$$

Consideramos primeiro D^{g_0} , Δ^{g_0} com respeito a métrica g_0 . Por meio desta transformação isométrica, os operadores assumem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{-1} \circ D^{g_0} \circ \mathcal{S} &= \Gamma_\alpha \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x} S_\alpha(y) \right) + T_\alpha, \\ \mathcal{S}^{-1} \circ \Delta^{g_0} \circ \mathcal{S} &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x^2} (A_\alpha(y) - \frac{1}{4}) \right) + \Delta_{Y_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde $S_\alpha(y)$ é uma família suave de operadores diferenciais simétricos agindo sobre as formas diferenciais com suporte compacto ${}^{ie}\Omega_0^*(F_{\alpha, \text{reg}})$, Γ_α é um operador unitário anti-adjunto em $L^2((0, 1) \times Y_\alpha, L^2({}^{ie}\Omega_0^*(F_\alpha)))$ e T_α é um operador de Dirac em $Y_\alpha \subset \mathbb{R}^b$. Em (3.9) foram apresentadas as relações de comutatividade desses operadores.

Mais ainda,

$$A_\alpha(y) = S_\alpha(y)(S_\alpha(y) + 1) + \frac{1}{4} = \left(S_\alpha(y) + \frac{1}{2}\right)^2$$

é dado explicitamente em termos do operador de Hodge-Laplace $\Delta_{F_\alpha}(y)$, derivadas exteriores d_{F_α} e seus respectivos adjuntos formais $d_{F_\alpha}^t$ sobre a pseudovariedade compacta suavemente estratificada $(F_\alpha, g_{F_\alpha}(y))$ de profundidade inferior por

$$\begin{aligned} & A_\alpha(y) \upharpoonright^{ie} \Omega_0^{\ell-1}(F_\alpha) \oplus^{ie} \Omega_0^\ell(F_\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_{\ell-1, F_\alpha}(y) + (\ell - (f+3)/2)^2 & 2(-1)^\ell \delta_{\ell, F_\alpha}(y) \\ 2(-1)^\ell d_{\ell-1, F_\alpha} & \Delta_{\ell, F_\alpha}(y) + (\ell - (f+1)/2)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

No caso geral de uma perturbação h com $|h|_{g_0} = O(x)$ quando $x \rightarrow 0$ e $\phi_\alpha|_{\partial\mathcal{U}_\alpha} : (\partial\mathcal{U}_\alpha, g_{F_\alpha}(y) + \phi_\alpha^* g_{Y_\alpha}) \rightarrow (\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha), g_{Y_\alpha})$ é uma submersão Riemanniana, as formulas em (3.41) possuem termos adicionais de ordem superior e a segunda formula muda para

$$\mathcal{S}^{-1} \circ \Delta \circ \mathcal{S} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x^2} \left(A_\alpha(y) - \frac{1}{4} \right) \right) + \Delta_{Y_\alpha} + R, \quad (3.43)$$

onde $R \in x\mathcal{V}_{ie}^2(M)$. Esses termos adicionais em R são termos de correção com ordem superior determinados pela curvatura da submersão Riemanniana ϕ_α e também pela segunda forma fundamental das fibras F_α . A seguir trabalharemos apenas sobre a mudança de variável \mathcal{S} e escrevemos o operador após essa transformação apenas com Δ . Observamos que as mudanças de variáveis são definidas localmente sobre Y_α , e sobre vizinhanças diferentes são equivalentes a menos de difeomorfismo.

A condição espectral de Witt (3.14) implica em um gap espectral nos operadores $S_\alpha(y)$ e $A_\alpha(y)$,

$$\begin{aligned} \forall s \in Y_\alpha : \text{Spec } S_\alpha(y) \cap [-2, 2] &= \emptyset, \\ \forall s \in Y_\alpha : \text{Spec } A_\alpha(y) \cap \left[0, \frac{9}{4}\right] &= \emptyset. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Observamos ainda que devido a positividade de Δ e $A_\alpha(y)$, existem inversas limitadas para $z > 0$,

$$\begin{aligned} (\Delta + z^2)^{-1} : L_*^2(M) &\rightarrow \mathcal{H}_e^{2,2}(M) \subset L_*^2(M), \\ (A_\alpha(y) + z^2)^{-1} : L_*^2(F_\alpha) &\rightarrow \mathcal{H}_e^{2,2}(F_\alpha) \subset L_*^2(F_\alpha). \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.3 Espaços de Sobolev abstratos em cones e quinas - Revisitado

Como observado utilizamos tudo o que foi construído na seção anterior. Nesta subseção estamos utilizando a Subseção 3.2.3. Lembre que

$$H^\infty(S(y)) := \bigcap_{n=0}^{\infty} H^n(S(y)). \quad (3.46)$$

Definição 3.21. Um operador linear $P : H^\infty(S(y)) \rightarrow H^\infty(S(y))$ é dito de ordem q se P admite um adjunto formal P^t e para qualquer $s \in \mathbb{R}^b$ e qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, P e P^t estendem continuamente para $H^{n+q}(S(y)) \rightarrow H^n(S(y))$.

Operadores lineares de uma dada ordem em uma escala de Hilbert são discutidos em detalhes em [HLV18A, Definição 3.6]. O operador linear $S(y)$ possui ordem 1. Posteriormente estaremos interessados em escalas de Hilbert até $H^2(S(y))$, e assim se P e P^t levam $H^{n+q}(S(y)) \rightarrow H^n(S(y))$ apenas se $n + q \leq 2$, nós ainda nos referimos a um operador linear de ordem q . Definimos um operador auto-adjunto em H com domínio $H^2(S(y))$ por

$$A(y) := S(y)(S(y) + 1) + \frac{1}{4} = \left(S(y) + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (3.47)$$

Faremos as seguintes suposições motivados pelo Teorema 3.1.

Suposição 3.22.

- (i) $S(y)$ é uma família de operadores auto-adjuntos discretos em H com domínio \mathcal{D}_S independente do parâmetro $y \in \mathbb{R}^b$, i.e., $H^1 := H^1(S(y))$ é independente de y . Mais ainda, a aplicação $\mathbb{R}^b \ni y \mapsto S(y) \in \mathcal{L}(H^1, L^2)$ é suave.
- (ii) $A(y)$ é uma família suave de operadores discretos auto-adjuntos em H com domínio \mathcal{D}_A independente do parâmetro $y \in \mathbb{R}^b$, i.e., $H^2 := H^2(S(y))$ é independente de y . Analogamente, a aplicação $\mathbb{R}^b \ni s \mapsto A(y) \in \mathcal{L}(H^2, L^2)$ é suave.

Observo que o parâmetro sobre a suavidade em (i) e (ii) implicam que $S(y)$ e $A(y)$ são aplicações limitadas localmente uniforme no parâmetro y . Lembro também que a escala de Hilbert $H^n \equiv H^n(S(y))$, que a priori depende do ponto base $y \in \mathbb{R}^b$. Com a Suposição 3.22, os espaços de Hilbert $H^1(S(y))$ e $H^2(S(y))$, e assim os espaços de Sobolev W^1 e W^2 , ambos no cone abstrato e também na quina abstrata são independentes do parâmetro y .

3.3.4 O resolvente do operador de Bessel em um cone e uma quina abstratos

Na Seção 3.2.4 provamos a invertibilidade dos operadores de Gauss-Bonnet e Laplace abstratos, fato que foi essencial para a caracterização dos domínios no Teorema 3.1. Para o estudo do resolvente do operador de Laplace abstrato precisamos refinar a Proposição 3.7 e o Teorema 3.8. Então defina:

Definição 3.23. O operador de Bessel abstrato em um cone abstrato é definido por

$$\ell(y) := -\frac{d^2}{dx^2} + X^{-2}A(y) : W^{2,2}(\mathbb{R}_+, H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, H), \quad (3.48)$$

onde $y \in \mathbb{R}^b$.

O próximo resultado pode ser visto como um refinamento da Proposição 3.7.

Proposição 3.24. *Assumimos a Suposição 3.22 e adicionalmente que $A(y) > \frac{9}{4}$ para todo $y \in \mathbb{R}^b$. Então o operador*

$$\ell(y) + z^2 : (W^{2,2} \cap L^2)(\mathbb{R}_+, H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, H), \quad (3.49)$$

é bijetivo e admite para $z > 0$ uma inversa limitada uniformemente

$$G(y, z) := (\ell(y) + z^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}_+, H) \rightarrow (W^{2,2} \cap L^2)(\mathbb{R}_+, H), \quad (3.50)$$

com a norma na interseção dada pela soma das normas individuais. Em particular, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|G(y, z)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \cdot z^{-2}, \quad (3.51)$$

onde C é localmente independente de $y \in \mathbb{R}^b$.

Além de estimar a norma do resolvente precisamos estimar o resolvente aplicado sobre operadores de ordem no máximo 2, isto é feito a seguir.

Proposição 3.25. *Assuma a Suposição 3.22 e adicionalmente que $A(y) > \frac{9}{4}$ para todo $y \in \mathbb{R}^b$. Sejam $\phi, \psi \in C^\infty[0, \infty)$ funções positivas limitadas tal que*

$$\text{supp } \phi \cap \text{supp } \psi = \emptyset,$$

com pelo menos uma delas possuindo suporte compacto em $[0, \infty)$. Escreveremos Φ e Ψ para os operadores de multiplicação por ϕ e ψ , respectivamente.

Considere um conjunto $\{P_1(y), \dots, P_\alpha(y)\}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, de famílias suaves de operadores lineares na escala de Hilbert $H^*(S(y))$ de ordem no máximo 2. Então para qualquer $N \in \mathbb{N}$ existe uma constante $C_{\alpha, N} > 0$, localmente independente de $s \in \mathbb{R}^b$, tal que para todo $z > 0$

$$\left\| \Phi \circ \left(\prod_{j=1}^{\alpha} P_j(y) \circ G(y, z) \right) \circ \Psi \right\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_{\alpha, N} \cdot z^{-N}. \quad (3.52)$$

Passamos ao estudo do operador de Laplace em uma quina abstrata.

Definição 3.26. *O operador de Laplace em uma quina abstrata é definido por*

$$\mathfrak{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + X^{-2}A(y) + \Delta_{\mathbb{R}^b, y} : W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H),$$

onde $\Delta_{\mathbb{R}^b, y}$ é um operador elíptico do tipo Laplace agindo em $C_0^\infty(\mathbb{R}^b, H)$, com símbolo principal $|\sigma|_y^2$. Aqui, $|\cdot|_y$ é uma família de normas em \mathbb{R}^b , suave no parâmetro $y \in \mathbb{R}^b$.

Para $y_0 \in \mathbb{R}^b$ fixo, denotamos por $\mathfrak{L}(y_0)$ o operador obtido de \mathfrak{L} fixando os coeficiente em y_0 .

Proposição 3.27. Considere $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H^\infty)$ e denote sua transformada de Fourier em \mathbb{R}^b por $\hat{u}(\sigma)$. Para $y_0 \in \mathbb{R}^b$ fixo, assumamos que $A(y_0) > \frac{9}{4}$. Então o operador $(\mathfrak{L}(s_0) + z^2) : (W^{2,2} \cap L^2)(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H)$ é invertível com inversa

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(y_0, z)u(y) &\equiv (\mathfrak{L}(y_0) + z^2)^{-1}u(y) \\ &:= \frac{1}{(2\pi)^b} \int_{\mathbb{R}^b} e^{i\langle y, \sigma \rangle} G(y_0, \sqrt{|\sigma|_{y_0}^2 + z^2}) \hat{u}(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (3.53)$$

que define um operador limitado

$$\mathcal{G}(y_0, z) : L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H) \rightarrow (W^{2,2} \cap L^2)(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H), \quad (3.54)$$

onde G é o resolvente definido em (3.50).

O principal resultado dessa subseção é a construção do resolvente do operador \mathfrak{L} . Para isso estendemos o resultado anterior para uma perturbação de $\mathfrak{L}(y_0)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} + R &= -\partial_x^2 + X^{-2}A(y) + \Delta_{\mathbb{R}^b, y} + R \\ &:= \mathfrak{L}(y_0) + R - R_{y_0}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde os termos de ordem superior R_{y_0} e R são definidos por

$$\begin{aligned} R_{y_0} &:= X^{-2}(A(y_0) - A(y)) + \Delta_{\mathbb{R}^b, y_0} - \Delta_{\mathbb{R}^b, y}, \\ R &:= \sum_{\alpha + |\beta| \leq 2} a_{\alpha\beta}(x, y) \circ X^{-1} \circ (x\partial_x)^\alpha \circ (x\partial_y)^\beta. \end{aligned} \quad (3.56)$$

A soma anterior é sobre $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $\beta \in \mathbb{N}_0^b$. O coeficiente $a_{\alpha\beta}(x, y)$ é uma família suave de operadores lineares na escala de Hilbert $H^\bullet(S(y_0))$ de ordem no máximo $(2 - \alpha - |\beta|)$.

Teorema 3.28. Assuma a Suposição 3.22 com $A(y) > \frac{9}{4}$ para todo $y \in \mathbb{R}^b$. Para $\varepsilon > 0$ denotamos por $\chi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^b)$ uma função bacia com suporte compacto em $[0, 2\varepsilon) \times B_{2\varepsilon}(y_0)$ tal que $\chi \upharpoonright [0, \varepsilon) \times B_\varepsilon(y_0) \equiv 1$. Considere

$$\mathfrak{L} + z^2 := \mathfrak{L}_\chi + z^2 = \mathfrak{L}(y_0) + \chi(R - R_{y_0}) + z^2. \quad (3.57)$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $z > 0$ o operador

$$\mathfrak{L} + z^2 : (W^{2,2} \cap L^2)(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H), \quad (3.58)$$

é invertível com inversa limitada

$$\mathcal{G}(z) \equiv (\mathfrak{L} + z^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H) \rightarrow W^{2,2} \cap L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H). \quad (3.59)$$

Escreva $y = (y_1, \dots, y_b) \in \mathbb{R}^b$ para as coordenadas em \mathbb{R}^b . Obtemos mais ainda, que para qualquer $J \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que para qualquer multi-índice

$j = (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, b\}^k$ com $|j| \leq J$, os comutadores³

$$C^j(\mathcal{G}(z)) := [\partial_{y_{j_1}}, [\partial_{y_{j_2}}, [\dots, [\partial_{y_{j_k}}, \mathcal{G}(z)] \dots]]] \quad (3.60)$$

também definem operadores limitado de L^2 to $W^{2,2} \cap L^2$.

Com a construção do resolvente passamos ao estudo de propriedades de classes Schatten deste operador. Denotamos por $C_p(\mathcal{H})$ para p -ésima classe de Schatten de operadores lineares em espaços de Hilbert \mathcal{H} . Posteriormente, omitiremos \mathcal{H} quando o espaço de Hilbert for óbvio. Obtemos a seguinte caracterização das classes de Schatten de \mathcal{G} multiplicada por uma função ϕ com suporte compacto em $[0, \infty) \times \mathbb{R}^b$.

Teorema 3.29. *Assuma a Suposição 3.22 e assumo que $A(y_0) > \frac{9}{4}$ para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}^b$. Seja $\phi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^b)$ e escreva Φ para o operador de multiplicação por ϕ . Se $A(y_0)^{-1}$ pertence a classe de Schatten $\mathbf{B}^p(H)$ para algum $p > 0$ e qualquer $y_0 \in \mathbb{R}^b$, então para qualquer multi-índice $j \in \{1, \dots, b\}^k$ temos que*

$$\begin{aligned} \Phi \circ \mathcal{G}(z) &\in \mathbf{B}^{p+\frac{b+1}{2}}(L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H)), \\ \Phi \circ C^j(\mathcal{G}(z)) &\in \mathbf{B}^{p+\frac{b+1}{2}}(L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H)). \end{aligned} \quad (3.61)$$

E ainda, se $A(y_0)$ depende de um parâmetro adicional $y_1 \in \mathbb{R}^{b_1}$ com norma de Schatten de $A(y_0)^{-1} \in \mathbf{B}^p(H)$ sendo uniforme em y_1 , então as normas de Schatten de $\Phi \circ \mathcal{G}(z)$ e $\Phi \circ C^j(\mathcal{G}(z))$ são uniformes em y_1 também.

3.3.5 Expansão assintótica do traço do resolvente em uma quina abstrata

O processo para se obter a expansão assintótica do traço do resolvente possui uma alta tecnicidade para lidar com todos os operadores envolvidos no processo indutivo. No intuito de melhorar essa apresentação fazemos uma discussão sobre monômios em espaços de Hilbert. Assim definimos um conjunto \mathcal{R}_\bullet^* formado de famílias suaves de operadores em escalas de Hilbert de gerador $S(y_0)$, que aparecem na ação do operador \mathcal{L} . Na próxima subseção o índice inferior \bullet referirá a profundidade da estratificação da seção na fibração da quina. Mais precisamente, lembre da Eq. (3.56) que

$$R := \sum_{\alpha+|\beta| \leq 2} a_{\alpha\beta}(x, y) \circ X^{-1} \circ (x\partial_x)^\alpha \circ (x\partial_y)^\beta,$$

onde para um índice $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e um multi-índice $\beta \in \mathbb{N}_0^b$, o coeficiente $a_{\alpha\beta}(x, y)$ é uma família suave de operadores linear em escalas de Hilbert $H^*(S(y_0))$ de ordem no máximo $(2 - \alpha - |\beta|)$. Consideramos famílias suaves de operadores em escalas de

³Precisamos do resultado apenas com um numero finito de multi-índices, mais precisamente apenas para $|j| \leq b$, tal que o Lema do Traço em [BRSE91, Lemma 4.3] se aplica.

Hilbert $H^*(S(y_0))$ com parâmetros $(x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^b$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\bullet^0 &:= \text{span} \{a_{\alpha\beta}, \text{Id} \mid \alpha + |\beta| = 2\} \\ \mathcal{R}_\bullet^1 &:= \mathcal{R}_\bullet^0 - \text{span} \{a_{\alpha\beta}, \partial_y^\gamma S(y) \mid \alpha + |\beta| = 1, \gamma \in \mathbb{N}_0^b\}, \\ \mathcal{R}_\bullet^2 &:= \mathcal{R}_\bullet^0 - \text{span} \{a_{\alpha\beta}, R_1 \circ R_2 \mid R_1, R_2 \in \mathcal{R}_\bullet^1, \alpha + |\beta| = 0\}.\end{aligned}$$

Claramente, por construção e a definição em (3.47),

$$S(y) \in \mathcal{R}_\bullet^1 \text{ and } A(y) \in \mathcal{R}_\bullet^2.$$

A função grau, $\text{deg} : \mathcal{R}_\bullet^0 \sqcup \mathcal{R}_\bullet^1 \sqcup \mathcal{R}_\bullet^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\text{deg} \upharpoonright \mathcal{R}_\bullet^0 := 0, \quad \text{deg} \upharpoonright \mathcal{R}_\bullet^1 := 1, \quad \text{deg} \upharpoonright \mathcal{R}_\bullet^2 := 2. \quad (3.62)$$

As composições $\mathcal{R}_\bullet^* \circ (A(y) + z^2)^{-1}$ definem operadores limitados no espaço de Hilbert H . Consideramos monômios de fatora ção fixa, compostos de $(A(y) + z^2)^{-1}$ e $R \circ (A(y) + z^2)^{-1}$, $R \in \mathcal{R}_\bullet^*$. Definimos o grau de tais monômios como segue. Defina $\text{deg}(A(y) + z^2)^{-1} := -2$. Dado um mon mio de elementos $(A(y) + z^2)^{-1}$ e $R \circ (A(y) + z^2)^{-1}$, onde $R \in \mathcal{R}_\bullet^*$, com uma fatora ção fixada, a soma dos graus de cada fator individual   chamado de grau do mon mio ⁴. Denotamos qualquer mon mio de grau $(-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ por

$$\langle A(y) + z^2 \rangle^{-\alpha}. \quad (3.63)$$

Por exemplo, dado qualquer $R_i \in \mathcal{R}_\bullet^i$, $i = 0, 1, 2$, encontramos por contagem simples que

$$R_0 \circ (A(y) + z^2)^{-1} \circ R_1 \circ (A(y) + z^2)^{-2} \circ R_2 \circ (A(y) + z^2)^{-3} = \langle A(y) + z^2 \rangle^{-9}.$$

Observa o 3.30. V rias das propriedades provadas nas subse es anteriores se referem especificamente a operadores agindo em escalas de Hilbert at  $H^2(S(y_0))$. Esta   a raz o do porqu  nossas defini es s o feitas dessa forma, ou seja, para evitar exemplos da forma $R^\alpha \circ (A(y) + z^2)^{-\alpha}$, $\alpha \geq 2$, para algum $R \in \mathcal{R}_\bullet^2$, que iria requerer que trabalh ssemos com a escala de interpola o completa $H^*(S(y_0))$.

Passamos agora para a discuss o de mon mios na quina abstrata. Definimos um conjunto de operadores $\mathcal{R}_{\bullet+1}^*$ em uma quina abstrata, que aparecem na a o do operador \mathfrak{L} . Na pr xima subse o, $\bullet + 1$ refere ao fato que a profundidade da estratifica o da quina   uma ordem a mais que a maior ordem da sua se o. Mais

⁴Note que n o estamos afirmando que essa no o de grau nos fornece uma gradua o em uma certa  lgebra de operadores. A fatora o fixada na defini o   parte da informa o.

precisamente, usamos a notação introduzida anteriormente e consideramos os operadores lineares

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\bullet+1}^0 &:= C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^b) \circ \mathcal{R}_\bullet^0 \\ \mathcal{R}_{\bullet+1}^1 &:= \mathcal{R}_{\bullet+1}^0 - \text{span} \{ \partial_x, \partial_y, X^{-1}R \mid R \in \mathcal{R}_\bullet^1 \}, \\ \mathcal{R}_{\bullet+1}^2 &:= \mathcal{R}_{\bullet+1}^0 - \text{span} \{ R_1 \circ R_2, X^{-2}R \mid R_1, R_2 \in \mathcal{R}_{\bullet+1}^1, R \in \mathcal{R}_\bullet^2 \}.\end{aligned}$$

Definimos o grau de maneira similar do que foi definido anteriormente,

$$\text{deg} \upharpoonright \mathcal{R}_{\bullet+1}^0 := 0, \quad \text{deg} \upharpoonright \mathcal{R}_{\bullet+1}^1 := 1, \quad \text{deg} \upharpoonright \mathcal{R}_{\bullet+1}^2 := 2. \quad (3.64)$$

Note que na notação do Teorema 3.28 e para qualquer função bacia $\psi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^b)$, temos por construção que

$$\chi \circ (R - R_{y_0}), \quad \Psi \circ \mathcal{L}(y_0), \quad \Psi \circ \mathcal{L} \in \mathcal{R}_{\bullet+1}^2.$$

As composições $\mathcal{R}_{\bullet+1}^* \circ (\mathcal{L} + z^2)^{-1}$ definem operadores limitados em $L^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^b, H)$. Consideramos monômios de fatoração fixada compostos de $(L + z^2)^{-1}$ e $P \circ (L + z^2)^{-1}$, para qualquer $P \in \mathcal{R}_{\bullet+1}^*$. Definimos o grau de tais monômios como segue. Defina $\text{deg}(L + z^2)^{-1} := -2$. Dado um monômio de elementos $(L + z^2)^{-1}$ e $P \circ (L + z^2)^{-1}$, $P \in \mathcal{R}_{\bullet+1}^*$ com uma fatoração fixada, a soma dos graus dos fatores individuais é chamada de grau do monômio. Denotamos qualquer monômio de grau $(-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$ por

$$\langle L + z^2 \rangle^{-\alpha} \equiv \langle \mathcal{G}(z) \rangle^\alpha. \quad (3.65)$$

Como anteriormente a fatoração fixada na definição é parte da informação. No caso de fatores individuais $\mathcal{G}(z)$ são sempre compostos com alguma função bacia $\phi \in C_0^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^b)$, escrevemos para o monômio resultante $\langle \Phi \circ \mathcal{G}(z) \rangle^\alpha$. Por exemplo, para qualquer $R_i \in \mathcal{R}_{\bullet+1}^i$, $i = 0, 1, 2$, por cálculo direto temos

$$R_0 \circ (L + z^2)^{-1} \circ R_1 \circ (L + z^2)^{-1} \circ R_2 \circ (L + z^2)^{-2} = \langle L + z^2 \rangle^{-5}.$$

Observação 3.31. Várias das propriedades e estimativas nas subseções anteriores referem a operadores agindo em escalas de Sobolev até $W^{2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H)$. Esta é a razão do porquê nossas definições de monômios evitam exemplos da forma $R^\alpha \circ (L + z^2)^{-\alpha}$, $\alpha \geq 1$, para algum $R \in \mathcal{R}_{\bullet+1}^2$. Isto iria requerer que usássemos a escala de Sobolev completa $W^{*,*}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H)$.

Agora podemos enunciar os teoremas que apresentam a expansão assintótica do traço do resolvente no caso abstrato. O primeiro resultado é para o “interior” no sentido que usamos um função bacia que o suporte não intersepta a “quina”. Mais precisamente,

Teorema 3.32. *Suponha que:*

- a) A Suposição 3.22 é satisfeita e que $A(y_0) > \frac{9}{4}$ para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}^b$.

- b) $(A(y_0) + 1)^{-1} \in \mathbf{B}^p(H)$ para algum $p > 0$ e para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}^b$. Em particular, os monômios $\langle A(y_0) + 1 \rangle^{-\alpha}$ são da classe de traço se $\alpha > 2p$.
- c) Para $\alpha > 2p$ os monômios $\langle A(y_0) + z^2 \rangle^{-\alpha}$ admitem uma expansão assintótica, uniforme no parâmetro $y_0 \in \mathbb{R}^b$, para algum $\beta \in \mathbb{N}_0$, quando $\zeta \rightarrow \infty$

$$\mathrm{Tr}_H \langle A(y_0) + \zeta^2 \rangle^{-\alpha} \sim \zeta^{-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{p_j} \omega_{j\ell}(y_0) \zeta^{-j+\beta} \log^\ell(\zeta) \right). \quad (3.66)$$

Então para qualquer $\phi \in C_0^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^b)$ com ⁵ $\mathrm{supp} \phi \subset (\delta, \varepsilon) \times B_\varepsilon(y_0)$ para algum $0 < \delta < \varepsilon$ e $\alpha > 2p + b + 1$, o núcleo de Schwartz dos monômios $\langle \Phi \circ \mathcal{G}(z) \rangle^\alpha$, restritos à diagonal, admitem uma expansão assintótica uniforme nos parâmetros, quando $z \rightarrow \infty$

$$\mathrm{Tr}_H \langle \Phi \circ \mathcal{G}(z) \rangle^\alpha(x, x, y, y, z^2) \sim z^{-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{p_j} \sigma_{j\ell}(x, y) z^{-j+\beta+b+1} \log^\ell(z) \right), \quad (3.67)$$

No caso em que $A(y)$ depende de um parâmetro adicional $y_1 \in \mathbb{R}^{b_1}$, com as suposições a), b) e c) satisfeitas localmente independente de y_1 , a expansão assintótica (3.67) é ainda localmente uniforme no parâmetro y_1 .

A prova deste resultado utiliza cálculo pseudo-diferencial. O desafio está em trabalhar sobre a limitação imposta na escala de interpolação, veja Observação 3.30. Então primeiro construímos a parametrix “na mão” e então aplicamos a teoria de operadores pseudo-diferenciais e isto permite fazer uso das hipóteses para obtermos o resultado.

Na “vizinhança da quina abstrata” a situação é diferente, neste caso seguimos as ideias de [BRSE91], com as devidas adaptações, para provarmos o teorema a seguir. Fazemos uso também do Lema do Traço [BRSE91, Lemma 4.3] e do Lema Singular assintótico com parâmetros, Teorema 3.20.

Teorema 3.33. *Considere as hipóteses do Teorema 3.32. Então para qualquer ϕ função bacia com suporte compacto em $[0, \infty) \times \mathbb{R}^b$, os monômios $\langle \Phi \circ \mathcal{G}(z) \rangle^\alpha$ estão na classe de Schatten $\mathbf{B}^{\frac{2p+b+1}{\alpha}}(L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^b, H))$ e para $\alpha > 2p + b + 1$ são da classe de traço. Se mais ainda,⁶ $\mathrm{supp} \phi \subset [0, \varepsilon) \times B_\varepsilon(y_0)$, então para $\alpha > 2p + b + 1$ obtemos uma expansão assintótica quando $z \rightarrow \infty$ do $\mathrm{Tr} \langle \Phi \circ \mathcal{G}(z) \rangle^\alpha$ como segue*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \langle \Phi \circ \mathcal{G}(z) \rangle^\alpha \sim z^{-\alpha} \cdot & \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j+b} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{p_j} c_{j\ell} z^{-j+\beta+b+1} \log^\ell(z) \right. \\ & \left. + \sum_{j=\beta}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{p_j} d_{j\ell} z^{-j+\beta+b+1} \log^{\ell+1}(z) \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

⁵ $\varepsilon > 0$ é fixado no Teorema 3.28.

⁶ $\varepsilon > 0$ é fixado no Teorema 3.28.

No caso em que $A(y)$ depende de um parâmetro adicional $y_1 \in \mathbb{R}^{b_1}$, com as suposições a), b) and c) do Teorema 3.32 satisfeitas localmente uniformemente no parâmetro y_1 , a expansão assintótica (3.68) é ainda localmente uniforme no parâmetro y_1 .

3.3.6 Expansão assintótica do traço do resolvente em uma pseudovarietade suavemente estratificada

Apresentaremos nessa subseção as ideias da prova do teorema principal desta seção.

Seja $M := M_d$ uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com profundidade d e uma métrica cônica iterada g . Escreveremos Δ_d para o correspondente operador de Hodge-Laplace. Escreveremos ainda $\mathcal{V}_{ie,d}^2$ para a união dos campos vetoriais incompletos $\mathcal{V}_{ie,d}$ e suas composições de segunda ordem. Seguindo a notação do início da Subseção 3.3.5 para \mathcal{R}_\bullet , definimos

$$\mathcal{R}_d := \mathcal{V}_{ie,d}, \quad \mathcal{R}_d^2 := \mathcal{V}_{ie,d}^2. \quad (3.69)$$

Note que, por (3.45), a inversa $(\Delta_d + z^2)^{-1}$ leva $L^2(W_d)$ em $\mathcal{H}_e^{2,2}(W_d)$. Portanto as composições $\mathcal{R}_d^2 \circ (\Delta_d + z^2)^{-1}$ são limitadas, como $\mathcal{R}_d^2 : \mathcal{H}_e^{2,2}(W_d) \rightarrow L^2(W_d)$. Da mesma forma que na Subseção 3.3.5 denote um monômio consistindo de composições por $(\Delta_d + z^2)^{-1}$ e $R \circ (\Delta_d + z^2)^{-1}$, $R \in \mathcal{R}_d^2$, de grau $(-\alpha)$ por

$$\langle \Delta_d + z^2 \rangle^{-\alpha}. \quad (3.70)$$

Re-enunciamos nosso teorema principal de modo mais preciso.

Teorema 3.34. *Seja $M = M_d$ uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com uma métrica cônica iterada e profundidade d satisfazendo a condição espectral de Witt, Definição 3.14, tal que os operadores tangenciais $A_\alpha(y) > \frac{9}{4}$ em cada profundidade independente de y . Então as seguintes afirmações valem:*

- i) *A inversa $(\Delta_d + z^2)^{-1}$ está na classe de Schatten $\mathbf{B}^{\frac{\dim M_d}{2} + 1}(L^2(M_d))$, onde o sinal de mais adicional no subscrito indica que $(\Delta_d + z^2)^{-1} \in \mathbf{B}^q(L^2(M_d))$ para $2q > \dim M_d$. Em particular, qualquer monômio (3.70) de grau $\alpha > \dim M$ é da classe de traço.*
- ii) *Para $\alpha > \dim M_d$ um monômio (3.70) admite a seguinte expansão assintótica quando $z \rightarrow \infty$*

$$\mathrm{Tr} \langle \Delta_d + z^2 \rangle^{-\alpha} \sim z^{-\alpha} \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j + \dim W_d} + \sum_{\{Y\}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{d(Y)} c_{j\ell}^Y \cdot z^{-j + \dim Y} \log^\ell z \right).$$

Note que a maior potência possível de $\log z$ é dada pela profundidade da estratificação $d(Y)$ para qualquer estrato Y .

A demonstração é feita por indução na profundidade d . Se $d = 0$ então M é uma variedade compacta suave e o resultado é bem conhecido. Se $d = 1$, então M é uma quina simples, onde as seções dos cones são suaves e assim o resultado segue do Teorema 3.33 e o processo de colagem que descreverei a seguir. Este é também o resultado principal de [BRSE91]. O próximo passo de iteração apresenta todos os ingredientes para o passo geral de indução, então com o objetivo de reduzir a technicalidade apresentamos a prova do caso $d = 2$. Aqui farei apenas uma discussão geral dessas ideias.

Seja $M = M_2$ uma pseudovarietade compacta suavemente estratificada com um estrato singular B de profundidade dois. Considere uma vizinhança tubular $\mathcal{U} \subset B$ e a fibração $\phi_2 : \mathcal{U} \rightarrow B$. As fibras desta fibração são dadas por cones sobre pseudovarietades compactas suavemente estratificadas com profundidade um. Denotamos este espaço por M_1 .

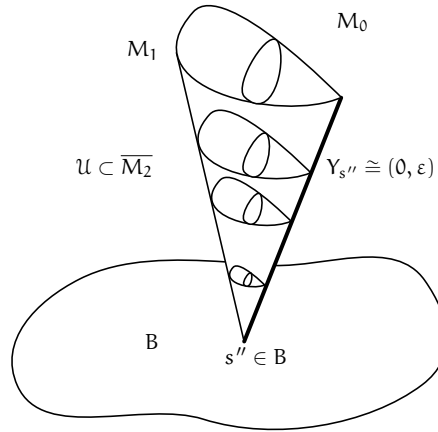


FIGURA 3.3: Vizinhança tubular $\mathcal{U} \subset M_2$ de profundidade 2.

Escrevemos

$$x_2 : C(M_1) = [0, \varepsilon) \times M_1 / \sim \rightarrow [0, \varepsilon),$$

para a função radial no cone, dada por meio da projeção sobre o primeiro fator. O interior de cada cone $C(M_1)$ sobre $s'' \in B$ possui uma singularidade quina sobre a base $Y_{s''} \cong (0, \varepsilon)$. Note que na notação da Figura 3.3,

$$Y_1 = \bigsqcup_{s'' \in B} Y_{s''} \cong (0, \varepsilon) \times B \subset (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^b,$$

onde a última inclusão é feita localmente por meio de parametrização da variedade compacta suave B . A vizinhança tubular do estrato Y_1 é dado por uma fibração ϕ_1 cuja as fibras são cones sobre uma variedade fechada suave M_0 . Como anteriormente, escrevemos

$$x_1 : C(M_0) = [0, \varepsilon) \times M_0 / \sim \rightarrow [0, \varepsilon),$$

para função radial. As funções radiais x_1 e x_2 estendem naturalmente para os correspondentes espaços totais das fibrações ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente

$$x_1 : \phi_1^{-1}(Y_1) \rightarrow [0, \varepsilon), \quad x_2 : \phi_2^{-1}(B) \rightarrow [0, \varepsilon). \quad (3.71)$$

Com isso decomparamos a pseudovarietade M_2 em três partes,

$$M_2 = \phi_2^{-1}(B) \cup \phi_1^{-1}(Y_1) \cup M_{2,\text{reg}}. \quad (3.72)$$

Considere funções bacía $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty[0, \infty)$ com suporte em $[0, \varepsilon)$ como na Figura 3.4.

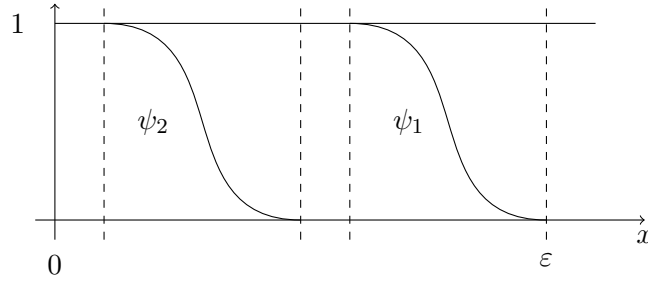


FIGURA 3.4: As funções ψ_1 e ψ_2 .

Por construção seus suportes estão relacionados como seguem:

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi_2 &\subset \text{supp } \psi_1 \subset [0, \varepsilon), & \psi_1 \upharpoonright \text{supp } \psi_2 &\equiv 1, \\ \text{supp } \psi_1' \cap \text{supp } \psi_2 &= \emptyset, & \text{supp } (1 - \psi_1) \cap \text{supp } \psi_2 &= \emptyset. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Usaremos essas funções bacía para definir uma partição da unidade subordinada a decomposição (3.72). Existem famílias discretas $\{s_{1j}\}_j \in Y_1 \subset (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^b$ e $\{s_{2j}\}_j \in B \subset \mathbb{R}^b$, tais que definindo para cada j ,

$$\begin{aligned} \psi_{1,1j} &\in C^\infty([0, \varepsilon) \times Y_1), & \psi_{1,1j}(x_1, y) &:= \psi_1(x_1) \cdot \psi_1(\|y - s_{1j}\|), \\ \psi_{1,2j} &\in C^\infty([0, \varepsilon) \times B), & \psi_{1,2j}(x_2, y) &:= \psi_1(x_2) \cdot \psi_1(\|y - s_{2j}\|), \\ \psi_{1,0} &\in C_0^\infty(M_{2,\text{reg}}), & \left(\psi_{1,0} + \sum_j \psi_{1,1j} + \sum_j \psi_{1,2j} \right) &\equiv 1, \end{aligned} \quad (3.74)$$

definem uma partição da unidade $\{\psi_{1,0}, (\psi_{1,1j})_j, (\psi_{1,2j})_j\}$ subordinada a decomposição (3.72), onde estendemos cada $\psi_{1,1j}$ e $\psi_{1,2j}$ identicamente a $\phi_1^{-1}(Y_1)$ e $\phi_2^{-1}(B)$, respectivamente. Similarmente, definimos uma partição da unidade $\{\psi_{2,0}, (\psi_{2,1j})_j, (\psi_{2,2j})_j\}$ usando a função bacía ψ_2 .

Com isso construímos uma parametrix para $(\Delta_2 + z^2)$ da seguinte forma. Na parte regular $M_{2,\text{reg}}$, $(\Delta_2 + z^2)$ possui uma parametrix interior usual e sua composição com as funções bacía possuem todas as propriedades que precisamos. Para a parametrix sobre $\phi_1^{-1}(Y_1)$ (lembre que Y_1 tem profundidade um) garantimos a existência

local de parametrizes sobre cada um dos suportes de $\psi_{1,1j}$. Então obtemos propriedades que seguem dos Teoremas 3.28, 3.29, 3.33. Note que neste caso particular poderíamos aplicar [BRSE91] diretamente, como queremos um argumento geral utilizamos os resultados construídos anteriormente. Para a parametrix sobre $\phi_2^{-1}(B)$ obtemos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno uma parametrix sobre o $\text{supp } \psi_{1,2j}$, para cada j , obtida utilizando a hipótese de indução e os Teoremas 3.28, 3.29, 3.33.

Após as construções locais, utilizamos a partição da unidade descrita acima junto com as parametrizes construídas em cada parte da decomposição de M_2 para obtermos a parametrix global e assim o resultado segue.

Bibliografia

- [ALGR16] P. ALBIN e J. GELL-REDMAN, *The index of Dirac operators on incomplete edge spaces*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12** (2016), Paper No. 089, 45. MR 3544861
- [ALGR17] ———, *The index formula for families of dirac type operators on pseudomanifolds*, arXiv:1712.08513 [math.DG].
- [ALMP12] P. ALBIN, E. LEICHTNAM, R. MAZZEO, e P. PIAZZA, *The signature package on Witt spaces*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **45** (2012), no. 2, 241–310. MR 2977620
- [ALMP18] ———, *Hodge theory on Cheeger spaces*, J. Reine Angew. Math. **744** (2018), 29–102. MR 3871440
- [APÉ79] R. APÉRY, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$* , Astérisque (1979), no. 61, 11–13, Luminy Conference on Arithmetic. MR 3363457
- [ARS18A] P. ALBIN, F. ROCHON, e D. SHER, *Analytic torsion and R-torsion of Witt representations on manifolds with cusps*, Duke Math. J. **167** (2018), no. 10, 1883–1950. MR 3827813
- [ARS18B] ———, *A Cheeger-Müller theorem for manifolds with wedge singularities*, arXiv:1807.02178.
- [ATSi68] M. F. ATIYAH e I. M. SINGER, *The index of elliptic operators. I*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–530. MR 0236950
- [AWO18] R. O. AWONUSIKA, *Determinants of the Laplacians on complex projective spaces $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ ($n \geq 1$)*, J. Number Theory **190** (2018), 131–155. MR 3805450
- [BAFU08] W. BAUER e K. FURUTANI, *Zeta regularized determinant of the Laplacian for classes of spherical space forms*, J. Geom. Phys. **58** (2008), no. 1, 64–88. MR 2378457
- [BFH16] A. P. BARRETO, M. C. FENILLE, e L. HARTMANN, *Inverse mapping theorem and local forms of continuous mappings*, Topology Appl. **197** (2016), 10–20. MR 3426904
- [BGM71] M. BERGER, P. GAUDUCHON, e E. MAZET, *Le spectre d’une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. MR 0282313

- [BiZH92] J.-M. BISMUT e W. ZHANG, *An extension of a theorem by Cheeger and Müller*, *Astérisque* (1992), no. 205, 235, With an appendix by François Laudenbach. MR 1185803
- [BÔC00] M. BÔCHER, *On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **1** (1900), no. 1, 40–52. MR 1500523
- [BRLE93] J. BRÜNING e M. LESCH, *Kähler-Hodge theory for conformal complex cones*, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), no. 5, 439–473. MR 1233862
- [BRLE99] ———, *On the η -invariant of certain nonlocal boundary value problems*, *Duke Math. J.* **96** (1999), no. 2, 425–468. MR 1666570
- [BRMA06] J. BRÜNING e X. MA, *An anomaly formula for Ray-Singer metrics on manifolds with boundary*, *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006), no. 4, 767–837. MR 2255381
- [BRMA13] ———, *On the gluing formula for the analytic torsion*, *Math. Z.* **273** (2013), no. 3-4, 1085–1117. MR 3030691
- [BRSE85] J. BRÜNING e R. SEELEY, *Regular singular asymptotics*, *Adv. in Math.* **58** (1985), no. 2, 133–148. MR 814748
- [BRSE87] ———, *The resolvent expansion for second order regular singular operators*, *J. Funct. Anal.* **73** (1987), no. 2, 369–429. MR 899656
- [BRSE88] ———, *An index theorem for first order regular singular operators*, *Amer. J. Math.* **110** (1988), no. 4, 659–714. MR 955293
- [BRSE91] ———, *The expansion of the resolvent near a singular stratum of conical type*, *J. Funct. Anal.* **95** (1991), no. 2, 255–290. MR 1092127
- [CHA84] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, *Pure and Applied Mathematics*, vol. 115, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984, Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk. MR 768584
- [CHE79] J. CHEEGER, *Analytic torsion and the heat equation*, *Ann. of Math. (2)* **109** (1979), no. 2, 259–322. MR 528965
- [CHE80] ———, *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, pp. 91–146. MR 573430
- [CHE83] ———, *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, 575–657 (1984). MR 730920

- [COMO95] A. CONNES e H. MOSCOVICI, *The local index formula in noncommutative geometry*, *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), no. 2, 174–243. MR 1334867
- [DAHA19] T. M. DALBELO e L. HARTMANN, *Brasselet number and Newton polygons*, *Manuscripta Math.* (2019).
- [DAR87] A. DAR, *Intersection r -torsion and the analytic torsion for pseudomanifolds*, *Math. Z.* **154** (1987), 155–210.
- [DMHS09] T. DE MELO, L. HARTMANN, e M. SPREAFICO, *Reidemeister torsion and analytic torsion of discs*, *Boll. Unione Mat. Ital.* (9) **2** (2009), no. 2, 529–533. MR 2537286
- [DMHS12] ———, *The analytic torsion of a disc*, *Ann. Global Anal. Geom.* **42** (2012), no. 1, 29–59. MR 2912667
- [DOHV19] C. R. DE OLIVEIRA, L. HARTMANN, e A. A. VERRI, *Effective Hamiltonians in surfaces of thin quantum waveguides*, *J. Math. Phys.* **60** (2019), no. 2, 022101, 9. MR 3910778
- [FEH110] R. P. FEYNMAN e A. R. HIBBS, *Quantum mechanics and path integrals*, emended ed., Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2010, Emended and with a preface by Daniel F. Styer. MR 2797644
- [FRI89] L. FRIEDLANDER, *The asymptotics of the determinant function for a class of operators*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), no. 1, 169–178. MR 975642
- [GEJA60] I. M. GELFAND e A. M. JAGLOM, *Integration in functional spaces and its applications in quantum physics*, *J. Mathematical Phys.* **1** (1960), 48–69. MR 0112604
- [GKM13] J. B. GIL, T. KRAINER, e G. A. MENDOZA, *On the closure of elliptic wedge operators*, *J. Geom. Anal.* **23** (2013), no. 4, 2035–2062. MR 3107690
- [GOMA80] M. GORESKEY e R. MACHPHERSON, *Intersection homology theory*, *Topology* **19** (1980), 135–162.
- [GOMA83] ———, *Intersection homology ii*, *Invent. Math.* **72** (1983), 77–129.
- [GRGR01] D. GRIESER e M. J. GRUBER, *Singular asymptotics lemma and push-forward theorem*, *Approaches to singular analysis* (Berlin, 1999), *Oper. Theory Adv. Appl.*, vol. 125, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 117–130. MR 1827172
- [GRRY15] I. S. GRADSHTEYN e I. M. RYZHIK, *Table of integrals, series, and products*, eighth ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2015, Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Daniel Zwillinger and Victor Moll, Revised from the seventh edition [MR2360010]. MR 3307944

- [GUT67] M. C. GUTZWILLER, *Phase-integral approximation in momentum space and the bound states of an atom*, J. Mathematical Phys. **8** (1967), no. 10, 1979–2000.
- [GWW92] C. GORDON, D. WEBB, e S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Invent. Math. **110** (1992), no. 1, 1–22. MR 1181812
- [HAR09] L. HARTMANN, *Analytic torsion and extensions for the cheeger-müller theorem*, Ph.D. thesis, USP, dec 2009.
- [HAR14] ———, *The boundary term from the analytic torsion of a cone over a m -dimensional sphere*, Mat. Contemp. **43** (2014), 133–169. MR 3426260
- [HAR19] ———, *Double summand method for zeta-determinants on self-adjoint operators*, in preparation, 2019.
- [HASP10] L. HARTMANN e M. SPREAFICO, *The analytic torsion of a cone over a sphere*, J. Math. Pures Appl. (9) **93** (2010), no. 4, 408–435. MR 2609036
- [HASP11] ———, *The analytic torsion of a cone over an odd dimensional manifold*, J. Geom. Phys. **61** (2011), no. 3, 624–657. MR 2763625
- [HASP12] ———, *R torsion and analytic torsion of a conical frustum*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **6** (2012), 28–57. MR 3011644
- [HASP16] ———, *On the cheeger-müller theorem on an even-dimensional cone*, St. Petersburg Math. J. **27** (2016), no. 1, 137–154, MR 3443271.
- [HASP17A] ———, *Analytic torsion of half spheres*, Internat. J. Math. **28** (2017), no. 10, 1750072, 14. MR 3699169
- [HASP17B] ———, *The analytic torsion of the finite metric cone over a compact manifold*, J. Math. Soc. Japan **69** (2017), no. 1, 311–371. MR 3597557
- [HASP19] ———, *Zeta determinant of the Laplacian on the real projective spaces*, Int. J. Number Theory **15** (2019), no. 2, 373–388. MR 3922605
- [HAW77] S. W. HAWKING, *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), no. 2, 133–148. MR 0524257
- [HLV17] L. HARTMANN, M. LESCH, e B. VERTMAN, *Zeta-determinants of Sturm-Liouville operators with quadratic potentials at infinity*, J. Differential Equations **262** (2017), no. 5, 3431–3465. MR 3584897
- [HLV18A] ———, *On the domain of Dirac and Laplace type operators on stratified spaces*, J. Spectr. Theory **8** (2018), no. 4, 1295–1348. MR 3870069
- [HLV18B] ———, *Resolvent trace asymptotics on stratified spaces*, arXiv:1810.04204, 2018.

- [IKTA78] A. IKEDA e Y. TANIGUCHI, *Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$* , Osaka Math. J. **15** (1978), no. 3, 515–546. MR 510492
- [KAT95] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1980 edition. MR 1335452
- [KUM99] H. KUMAGAI, *The determinant of the Laplacian on the n -sphere*, Acta Arith. **91** (1999), no. 3, 199–208. MR 1735678
- [LES97] M. LESCH, *Operators of Fuchs type, conical singularities, and asymptotic methods*, Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics], vol. 136, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1997. MR 1449639
- [LES98] ———, *Determinants of regular singular Sturm-Liouville operators*, Math. Nachr. **194** (1998), 139–170. MR 1653090
- [LES13] ———, *A gluing formula for the analytic torsion on singular spaces*, Anal. PDE **6** (2013), no. 1, 221–256. MR 3068545
- [LESM77] S. LEVIT e U. SMILANSKY, *A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm-Liouville type operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **65** (1977), no. 2, 299–302. MR 0457836
- [LEVE11] M. LESCH e B. VERTMAN, *Regular singular Sturm-Liouville operators and their zeta-determinants*, J. Funct. Anal. **261** (2011), no. 2, 408–450. MR 2793118
- [LEVE15] ———, *Regularizing infinite sums of zeta-determinants*, Math. Ann. **361** (2015), no. 3-4, 835–862. MR 3319550
- [LÜC93] W. LÜCK, *Analytic and topological torsion for manifolds with boundary and symmetry*, J. Differential Geom. **37** (1993), no. 2, 263–322. MR 1205447
- [MAZ91] R. MAZZEO, *Elliptic theory of differential edge operators. I*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 10, 1615–1664. MR 1133743 (93d:58152)
- [MEL90] R. B. MELROSE, *Pseudodifferential operators, corners and singular limits*, ICM-90, Mathematical Society of Japan, Tokyo; distributed outside Asia by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, A plenary address presented at the International Congress of Mathematicians held in Kyoto, August 1990. MR 1127161
- [MEL92] ———, *Calculus of conormal distributions on manifolds with corners*, Internat. Math. Res. Notices (1992), no. 3, 51–61. MR 1154213
- [MEL93] ———, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Research Notes in Mathematics, vol. 4, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993. MR 1348401

- [MIL66] J. MILNOR, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 358–426. MR 0196736
- [MIN53] S. MINAKSHISUNDARAM, *Eigenfunctions on Riemannian manifolds*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **17** (1953), 159–165 (1954). MR 0061750
- [MIZ06] Y. MIZUNO, *The spectral zeta function of the unit n -sphere and an integral treated by Ramanujan*, Kyushu J. Math. **60** (2006), no. 2, 317–330. MR 2268239
- [MÜL78] W. MÜLLER, *Analytic torsion and R -torsion of Riemannian manifolds*, Adv. in Math. **28** (1978), no. 3, 233–305. MR 498252
- [MÜL83] ———, *Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula*, Math. Nachr. **111** (1983), 197–288. MR 725778
- [MÜVE14] W. MÜLLER e B. VERTMAN, *The metric anomaly of analytic torsion on manifolds with conical singularities*, Comm. PDE **39** (2014), no. 1, 1–46, MR 3169782.
- [NAO'95] C. NASH e D. O'CONNOR, *Determinants of Laplacians, the Ray-Singer torsion on lens spaces and the Riemann zeta function*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 3, 1462–1505. MR 1317455
- [OPS88A] B. OSGOOD, R. PHILLIPS, e P. SARNAK, *Compact isospectral sets of surfaces*, J. Funct. Anal. **80** (1988), no. 1, 212–234. MR 960229
- [OPS88B] ———, *Extremals of determinants of Laplacians*, J. Funct. Anal. **80** (1988), no. 1, 148–211. MR 960228
- [RASI71] D. B. RAY e I. M. SINGER, *R -torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Advances in Math. **7** (1971), 145–210. MR 0295381
- [REI35] K. REIDEMEISTER, *Homotopieringe und Linsenräume*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), no. 1, 102–109. MR 3069647
- [SCH89] B.-W. SCHULZE, *Pseudo-differential operators on manifolds with edges*, Symposium “Partial Differential Equations” (Holzhau, 1988), Teubner-Texte Math., vol. 112, Teubner, Leipzig, 1989, pp. 259–288. MR 1105817
- [SCH91] ———, *Pseudo-differential operators on manifolds with singularities*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 24, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991. MR 1142574
- [SCH02] ———, *Operators with symbol hierarchies and iterated asymptotics*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **38** (2002), no. 4, 735–802. MR 1917163
- [SEE67] R. T. SEELEY, *Complex powers of an elliptic operator*, Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967, pp. 288–307. MR 0237943

-
- [SIM77] B. SIMON, *Notes on infinite determinants of Hilbert space operators*, *Advances in Math.* **24** (1977), no. 3, 244–273. MR 0482328
- [SPR12] M. SPREAFICO, *Zeta determinant for double sequences of spectral type*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), no. 6, 1881–1896. MR 2888176
- [VER12] B. VERTMAN, *The metric anomaly of analytic torsion at the boundary of an even dimensional cone*, *Ann. Global Anal. Geom.* **41** (2012), no. 1, 61–90. MR 2860397
- [VER19] ———, *Cheeger-Müller theorem on manifolds with cusps*, *Math. Z.* **291** (2019), no. 3-4, 761–819. MR 3936089
- [VIS95] S. M. VISHIK, *Generalized Ray-Singer conjecture. I. A manifold with a smooth boundary*, *Comm. Math. Phys.* **167** (1995), no. 1, 1–102. MR 1316501