UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

FORMALISMO HAMILTONIANO EM FÍSICA DE PLASMAS

IBERÊ LUIZ CALDAS

SBI-IFUSP
305M810T0703

Tese de Livre-Docência apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

INSTITUTO DE FÍSICA-USP
BIBLIOTECA CENTRAL
REG. 196

Agosto/1984

Em memória de
meu avô Manoel Luiz Caldas,
minha sogra Salmi Ehlin Martins e
meu pai Albino Luiz Caldas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos

Aos Profs. Drs. H. Tasso e P.J. Morrison pelas interessantes discussões durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. I.C. Nascimento pelo apoio e oportunidade de pesquisa.

Ao Prof. Dr. D. Pfirsch pelo apoio durante os estágios realizados no Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (Alemanha Federal).

Ao Instituto de Física da USP (IFUSP), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e ao Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP) pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

À Srta. Izabel T. Yokomizo pelo serviço datilográfico.

Aos colegas e funcionários do IFUSP e do IPP pelo estímulo e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

A representação de Clebsch é estendida ao modelo magneto-hidrodinâmico com viscosidade de giro e ao modelo de dois fluidos. Com essa representação são obtidas as formulações Hamiltonianas canônicas para esses modelos, usados em Física de Plasmas. O colchete de Poisson não-canônico, deduzido para a magneto-hidrodinâmica com viscosidade de giro, é utilizado para se obter constantes de movimento e invariantes de Casimir. A influência da viscosidade de giro no espectro das oscilações em tokamaks é analisada neste trabalho.

ABSTRACT

The Clebsch representation is extended to the gyroviscous magnetohydrodynamical model and to the two-fluid model. With this representation canonical Hamiltonian formulations are obtained for these models used in Plasma Physics. The non canonical Poisson bracket deduced for the gyroviscous magnetohydrodynamics is used to obtain constants of motion and Casimir invariants. The influence of the gyroviscosity in the tokamak oscillation spectrum is analyzed in this work.

ÍNDICE

Página

I. INTRODUÇÃO..... 1

II. FORMALISMO HAMILTONIANO PARA FLUIDOS..... 6

a. Introdução..... 6

b. Princípio variacional..... 7

c. Formalismo Hamiltoniano canônico..... 12

d. Formalismo Hamiltoniano não-canônico..... 12

III. FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O MODELO DE DOIS FLUIDOS 18

a. Introdução..... 18

b. Equações básicas..... 20

c. Princípio variacional..... 22

d. Formalismo Hamiltoniano canônico..... 26

e. Formalismo Hamiltoniano não-canônico..... 33

IV. FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O MODELO DE UM FLUIDO COM VISCOSIDADE DE GIRO..... 36

a. Introdução..... 36

b. Equações básicas..... 37

c. Princípio variacional..... 42

d. Formalismo Hamiltoniano canônico..... 46

e. Formalismo Hamiltoniano não-canônico..... 50

f. Constantes de movimento..... 58

Página

V. ESPECTRO DE FLUTUAÇÕES EM TOKAMAKS..... 61

a. Introdução..... 61

b. Equilíbrio e perturbações..... 62

c. Espectro de flutuações..... 68

VI. CONCLUSÕES..... 71

REFERÊNCIAS..... 73

I. INTRODUÇÃO

A Física de Plasmas foi inicialmente desenvolvida por sua importância na Astrofísica e para a interpretação dos problemas cósmicos. Nas últimas décadas, entretanto, esse desenvolvimento tem sido também motivado por inúmeras aplicações tecnológicas, em utilização ou em desenvolvimento, sendo a principal delas a produção de energia através da fusão termonuclear controlada (Nascimento, 1979).

Apesar do intenso esforço de pesquisa em Física de Plasmas, vários problemas importantes não foram ainda resolvidos. Entre estes pode-se citar as instabilidades e oscilações que ocorrem em plasmas confinados magneticamente. Em tokamaks, por exemplo, esse fenômeno é responsável pelo deterioramento das condições de equilíbrio e mesmo frequentemente pela destruição da coluna de plasma. Os grandes desenvolvimentos teórico e experimental da investigação das causas das instabilidades em tokamaks não levaram ainda ao seu completo esclarecimento e controle. No momento essa é ainda uma das questões mais intensamente estudadas pelos especialistas em Física de Plasmas (Sakanaka, 1981; Robinson, 1982; Galvão, 1983).

Na investigação de vários fenômenos que ocorrem em plasmas, estes podem ser considerados como fluidos (Spitzer, 1962). Assim sendo, os modelos macroscópicos, como o magneto-hidrodinâmico ou o de dois fluidos, são muito utilizados. Várias caracte

rísticas das principais instabilidades e oscilações que ocorrem em tokamaks podem ser razoavelmente bem descritas por estes dois modelos (Freidberg, 1982; Sakanaka, 1981). As formulações teóricas, ocorridas na descrição de plasmas como fluidos, propiciaram e orientaram o desenvolvimento de vários trabalhos numéricos e experimentais importantes. Um exemplo significativo foi a formulação do princípio de energia (Lundqvist, 1951 e 1952; Hain, Lüst e Schlüter, 1957). O intenso desenvolvimento, que atualmente está ocorrendo na formulação Hamiltoniana da Física de Plasmas, está possibilitando a realização de várias investigações importantes, tanto analíticas (Hazeltine, Holm, Marsden e Morrison, 1984) como numéricas (Cary, 1984). Como exemplo, no primeiro caso, pode-se citar a investigação da estabilidade não-linear de plasmas confinados magneticamente e, no segundo, a determinação de critérios para evitar a estocasticidade do campo magnético em esteleradores. Além dessas aplicações, as formulações teóricas novas permitem, em geral, uma melhor compreensão e interpretação das questões abordadas.

Um dos objetivos principais deste trabalho é obter resultados que colaborem na determinação das causas do espectro turbulento das oscilações de deriva, detectadas em tokamaks (Surko e Slusher, 1980), embora estes resultados tenham ainda outras aplicações.

Este trabalho tratará da formulação Hamiltoniana de plasmas descritos como fluidos, sendo considerados os modelos magneto-hidrodinâmico com viscosidade de giro e o de dois fluidos. Serão discutidas formulações Hamiltonianas canônicas, em termos de variáveis de Clebsch (Clebsch, 1859), e formulações não-canônicas, em termos de variáveis físicas, a partir de colchetes de Poisson não-canônicos (Gardner, 1971). A descrição de Euler (Goldstein, 1980) será utilizada para se escrever as equações que representam

os sistemas físicos analisados. Como ilustração dos métodos aplicados para o desenvolvimento deste trabalho, serão discutidos resultados obtidos para a equação de Korteweg-de Vries (Gardner, 1971) e para outras equações não-lineares (Caldas e Tasso, 1979).

Na Física de Fluidos os princípios variacionais para sistemas de equações diferenciais são importantes por, entre outras razões, possibilitarem, em geral, a elaboração de formalismos Hamiltonianos. Uma dificuldade intrínseca, para se obter princípios variacionais para essas equações, é o fato da descrição de Euler ser a mais conveniente em Física de Fluidos. Esta dificuldade provém da perda nesta descrição da semelhança que há, na descrição de Lagrange, entre os sistemas contínuos considerados e os sistemas discretos de partículas (Goldstein, 1980). As transformações dos princípios variacionais na descrição de Lagrange nos princípios variacionais na descrição de Euler não são, em geral, conhecidas (Saarloos, 1981). A aplicação do teorema de Vainberg (Vainberg, 1964) permite determinar as condições necessária e suficiente para a existência de um princípio variacional, em termos das variáveis escolhidas, para um sistema de equações diferenciais (Atherton e Homsy, 1975). Um exemplo dessa aplicação é apresentado no capítulo II, no qual se mostra ser necessário a introdução de uma variável potencial, para que a equação de Korteweg-de Vries possa ser deduzida de um princípio variacional.

Clebsch (1859), utilizando a descrição de Euler, introduziu uma representação do tipo potencial para a velocidade de um elemento de fluido e obteve um princípio variacional para fluidos incompressíveis. Ampliando essa representação, Seliger e Whitham (1968) obtiveram princípios variacionais para fluidos compressíveis e para plasmas descritos pelo modelo de fluidos, neste último caso sem considerar o movimento térmico dos fluidos.

As equações que descrevem os modelos magneto-hidrodi

nâmico e de dois fluidos, ambos com pressões finitas, expressas em termos de variáveis de Euler físicas, não podem ser deduzidas de princípios variacionais. Nos capítulos III e IV serão introduzidas variáveis de Clebsch, do tipo potencial, para representar as variáveis de fluido desses modelos. Dessa forma serão obtidos princípios variacionais para esses dois modelos. As representações de Clebsch utilizadas são generalizações das anteriores, destacando-se aquela relativa ao modelo com viscosidade de giro.

A partir dos princípios variacionais, apresentados nos capítulos III e IV, serão desenvolvidos os formalismos Hamiltonianos canônicos, usando-se as representações de Clebsch, para os modelos discutidos nesses capítulos (Caldas e Tasso, 1984a; Morrison, Caldas e Tasso, 1984).

Os formalismos Hamiltonianos não-canônicos, em termos das variáveis físicas, podem ser obtidos definindo-se, apropriadamente, colchetes de Poisson não-canônicos. Com uma Hamiltoniana expressa em termos dessas variáveis, pode-se escrever as equações de movimento na forma das equações de Hamilton. Esse método permite estender o formalismo Hamiltoniano aos sistemas de equações que não podem ser deduzidas de princípios variacionais. Esses colchetes generalizados foram introduzidos inicialmente por Gardner (1971) para a equação de Korteweg-de Vries. Posteriormente Tasso (1978a) estendeu o resultado de Gardner para uma classe de equações não-lineares. Morrison e Greene (1980) introduziram um colchete de Poisson não-canônico para descrever o modelo magneto-hidrodinâmico (sem viscosidade de giro), sendo o mesmo feito por estes autores para descrever as equações da hidrodinâmica. Estes colchetes possuem várias das propriedades algébricas dos colchetes canônicos, como a bilinearidade e a anti-simetria, e satisfazem à identidade de Jacobi. Essa formulação Hamiltonia

na em termos das variáveis físicas evita as condições de calibre, existentes na formulação Hamiltoniana canônica em termos das variáveis potenciais de Clebsch. A passagem de uma formulação para a outra pode ser feita por uma transformação não-canônica.

No capítulo II serão apresentados os colchetes de Poisson não-canônicos para a equação de Korteweg-de Vries e para uma classe de equações não-lineares com constantes de movimento.

No capítulo IV será apresentada uma formulação não-canônica para o modelo magneto-hidrodinâmico com viscosidade de giro. As constantes de movimento desse modelo e os invariantes de Casimir, associados a esses colchetes, serão também apresentados nesse capítulo.

Um formalismo Hamiltoniano canônico para o modelo magneto-hidrodinâmico com viscosidade de giro será utilizado no capítulo V para analisar o espectro das ondas de deriva, observadas em tokamaks (Surko e Slusher, 1980). Como ainda não é conhecido um sistema de equações que descreva adequadamente essas ondas, justifica-se a procura de modelos simples, incluindo efeitos dispersivos e/ou não-lineares, que levam a resultados concordantes qualitativamente com as observações experimentais.

II. FORMALISMO HAMILTONIANO PARA FLUIDOS

a. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados um princípio variacional e formalismos Hamiltonianos, canônico e não-canônico, para fluidos considerados como meios contínuos. Como ilustração, serão consideradas a equação de Korteweg-de Vries (KdV) e outras equações não-lineares. A equação KdV pode ser apresentada como

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \quad , \tag{II.1}$$

onde $u(x,t)$ é a variável dependente das coordenadas espacial (x) e temporal (t). Os índices em u indicam derivações parciais em relação à coordenada indicada.

O objetivo dessa apresentação é o de introduzir várias idéias e métodos que serão aplicados, nos capítulos seguintes, a plasmas descritos pelos modelos magneto-hidrodinâmico e de dois fluidos.

A escolha da equação KdV como ilustração explica-se pela sua importância em várias áreas da Física, inclusive a de plasmas, pela sua simplicidade relativa e pelo fato dela possuir muitas das propriedades relevantes descobertas para várias equações não-lineares (como soluções do tipo sóliton, método do espalhamento inverso, infinitas constantes de movimento, etc.) (Scott

e outros, 1973). O fato dessa equação possuir um termo dispersivo, u_{xxx} , combinado com um termo não-linear, uu_x , também é importante. Essas propriedades fazem com que ela seja utilizada como um modelo conveniente para vários sistemas físicos, permitindo um estudo numérico de vários problemas relevantes como, por exemplo, o cálculo do espectro das flutuações observadas em tokamaks (Tasso e Lerbinger, 1983). Como outro exemplo da relevância da equação KdV para a Física de Plasmas, pode-se mencionar a descrição de ondas acústicas iônicas (Karpman, 1975).

O esquema de exposição seguido neste capítulo será semelhante aos dos dois capítulos seguintes. Inicialmente será apresentado um princípio variacional para a equação KdV (item b), seguido de um formalismo Hamiltoniano canônico (item c) e não-canônico (item d) para essa equação. No item d será também apresentada uma classe de equações não-lineares (Caldas e Tasso, 1979), cujo formalismo Hamiltoniano, não-canônico, pode ser considerado uma extensão do formalismo apresentado por Gardner (1971) para a equação KdV.

b. PRINCÍPIO VARIACIONAL

A descoberta de um princípio variacional para uma equação diferencial, ou um conjunto de equações diferenciais, que descrevem um problema físico em fluidos, tem consequências importantes. A partir desse princípio variacional, pode-se encontrar soluções dessas equações, obter um formalismo Hamiltoniano para o problema físico considerado ou mesmo elaborar novas interpretações físicas para esse problema. Na descrição de um sistema físico, em geral, é encontrado, inicialmente, um conjunto de equações diferenciais e, posteriormente, um correspondente princípio variacio

nal equivalente a esse conjunto. Até recentemente, princípios variacionais eram procurados tentando-se obter, intuitivamente ou por algum método restrito, a ação I - um funcional das variáveis do sistema - cuja variação

$$\delta I = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

levasse ao conjunto correto de equações diferenciais. Além das dificuldades envolvidas, muitas vezes o princípio variacional procurado, em termos das variáveis consideradas, não existia.

Uma dificuldade intrínseca à Física de Fluidos é o fato de que nesta a descrição de Euler é, em geral, preferível à de Lagrange (Goldstein, 1980). Nesta última descrição, a semelhança com um sistema de partículas discretas é mantida, o que significa a obtenção de um princípio variacional. Naturalmente, é sempre possível, através do princípio de Hamilton, passar de um princípio variacional, em termos de variáveis de Lagrange, para outro, em termos de variáveis de Euler. Entretanto, essa transformação nem sempre é conhecida (Saarlos, 1981).

A procura de um princípio variacional, para um conjunto de equações diferenciais, corresponde ao problema de se achar um funcional cujos pontos estacionários sejam descritos por essas equações. Esse problema pode ser tratado sistematicamente, aplicando-se o teorema de Vainberg (Vainberg, 1964). Assim, a existência de um princípio variacional, para um conjunto de equações diferenciais, dependerá do fato de um operador, determinado a partir dessas equações, ser do tipo potencial. Isso será explicitado a seguir, para uma equação diferencial representada por

$$N(u) = 0 \quad , \qquad \text{(II.3)}$$

onde $N(u)$ é um operador (podendo ser não-linear) e u é a va-

riável (função das coordenadas). Se a derivada de Frechet do operador $N(u)$, definida como

$$N'_u \phi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N(u+\varepsilon\phi) - N(u)}{\varepsilon} = \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} N(u + \varepsilon\phi) \right]_{\varepsilon=0} , \qquad (II.4)$$

for simétrica, isto é,

$$\int d\vec{r}\, dt\, \psi N'_u(\phi) = \int d\vec{r}\, dt\, \phi N'_u(\psi) , \qquad (II.5)$$

a equação diferencial representada pela equação (II.3) pode ser obtida a partir do princípio variacional

$$\delta F = 0 , \qquad (II.6)$$

onde

$$F = \int d\vec{r}\, dt\, u \int_0^1 d\lambda\, N(u\lambda) . \qquad (II.7)$$

A integração anterior é feita na região de domínio físico. Se a condição (II.5) for satisfeita, a equação (II.3) será a equação de Euler-Lagrange correspondente ao princípio variacional expresso pelas equações (II.6) e (II.7). A condição (II.5) é necessária e suficiente para a existência de um princípio variacional (Atherton e Homsey, 1975).

A equação de KdV não possui, em termos da variável u, um princípio variacional, pois a condição (II.5) não é satisfeita, conforme será mostrado a seguir. Para a equação (II.1),

$$N(u) = -u_t + uu_x + u_{xxx} , \qquad (II.8)$$

sendo a derivada de Frechet de $N(u)$

$$N'_u(\phi) = -\phi_t + (u\phi)_x + \phi_{xxx} \quad . \tag{II.9}$$

Nesse caso, integrando-se por partes, tem-se

$$\int d\vec{r}\, dt\, \psi\, N'_u(\phi) = \int d\vec{r}\, dt\, \psi \left[-\phi_t + (u\phi)_x + \phi_{xxx}\right] =$$

$$= -\int d\vec{r}\, dt\, \phi \left[-\psi_t + (u\psi)_x + \psi_{xxx}\right] = -\int d\vec{r}\, dt\, \phi\, N'_u(\psi) \quad .$$

Esse resultado mostra que a condição (II.5) não é satisfeita. Portanto, não existe um princípio variacional para a equação KdV, em termos da variável u. Entretanto, como em vários casos, pode-se alterar o operador $N(u)$ de modo a fazer com que ele satisfaça à condição (II.5). Isso será conseguido através da transformação diferencial

$$u = v_x \quad . \tag{II.10}$$

Assim sendo, a equação (II.1), torna-se

$$N(v) = -v_{xt} + v_x\, v_{xx} + v_{xxxx} = 0 \quad . \tag{II.11}$$

A derivada de Frechet do operador $N(v)$ é

$$N'_v(\phi) = -\phi_{xt} + (v_x\, \phi_x)_x + \phi_{xxxx} = 0 \quad . \tag{II.12}$$

Nesse caso, integrando-se por partes, tem-se

$$\int d\vec{r}\, dt\, \psi\, N'_v(\phi) = \int d\vec{r}\, dt\, \psi \left[-\phi_{xt} + (v_x\, \phi_x)_x + \phi_{xxxx}\right] =$$

$$= \int d\vec{r}\, dt\, \phi \left[-\psi_{xt} + (v_x\, \psi_x)_x + \psi_{xxxx}\right] = \int d\vec{r}\, dt\, \phi\, N'_v(\psi) \quad .$$

Portanto, a condição (II.5) é satisfeita e o funcional F pode ser calculado a partir da equação (II.7)

$$F(v) = \int d\vec{r}\, dt\, v \int_0^1 d\lambda\, N(\lambda v) =$$

$$= \int d\vec{r}\, dt\, v \int_0^1 (-\lambda v_{xt} + \lambda^2 v_x v_{xx} + \lambda v_{xxxx}) d\lambda =$$

$$= \int d\vec{r}\, dt\, v \left[-\frac{\lambda^2}{2} v_{xt} + \frac{\lambda^3}{3} v_x v_{xx} + \frac{\lambda^2}{2} v_{xxxx}\right]_0^1 .$$

O resultado é

$$F(v) = \int d\vec{r}\, dt \left(-\frac{1}{2} v v_{xt} + \frac{1}{3} v v_x v_{xx} + \frac{1}{2} v v_{xxxx}\right) . \quad (II.13)$$

Integrando-se por partes a integral da equação anterior, tem-se

$$F(v) = \int d\tau \left(-\frac{1}{2} v_x v_t + \frac{1}{6} v_x^3 + v_x v_{xxx} + \frac{v_{xx}^2}{2}\right) . \quad (II.14)$$

A partir das equações (II.6) e (II.14) obtém-se a equação (II.11). Esta última pode ser escrita, usando-se a definição de v dada pela equação (II.10), na forma da equação (II.1). Assim, a equação de KdV pode ser derivada a partir de um princípio variacional em termos da variável v, do tipo potencial, mas não em termos de u. Esse exemplo mostra a importância da escolha das variáveis na procura de um princípio variacional.

c. FORMALISMO HAMILTONIANO CANÔNICO

Gardner (1971) apresentou um formalismo canônico para as soluções periódicas da equação (II.1). As soluções $u(x)$, com período 2π e com derivadas contínuas, podem ser representadas pelos coeficientes de Fourier u_n

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{inx} \quad . \tag{II.15}$$

Definindo-se as variáveis (para $n > 0$)

$$q_n \equiv \frac{u_n}{n} \quad , \quad p \equiv u_{-n} \quad , \tag{II.16}$$

pode-se obter a equação (II.1) das equações de Hamilton:

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad , \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \quad . \tag{II.17}$$

A Hamiltoniana $H(u)$, um funcional da variável u, é dada por

$$H(u) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \left(\frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2\right) \quad . \tag{II.18}$$

d. FORMALISMO HAMILTONIANO NÃO CANÔNICO

A equação de KdV pode ser escrito na forma (Gardner, 1971)

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u} \quad , \tag{II.19}$$

onde

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2\right) \quad . \tag{II.20}$$

A derivada funcional $\frac{\delta H}{\delta u}$ é definida como

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(u+\varepsilon w)\Big|_{\varepsilon=0} = \int dx \frac{\delta H}{\delta u} w \quad . \tag{II.21}$$

A equação (II.19) pode também ser escrita como

$$u_t = \{u,H\} \quad , \tag{II.22}$$

onde o colchete de Poisson não-canônico $\{F,G\}$ entre dois funcionais F e G é definido como

$$\{F,G\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta F}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u} \quad . \tag{II.23}$$

Para se chegar à equação (II.19), a partir das duas últimas equações, é preciso escrever a função $u(x)$ como um funcional

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u(x')\, \delta(x-x') \quad , \tag{II.24}$$

pois, dessa forma, obtém-se

$$\frac{\delta u(x)}{\delta u(x')} = \delta(x-x') \quad . \tag{II.25}$$

O colchete de Poisson $\{F,G\}$, definido pela equação

(II.23), possui várias das propriedades algébricas dos colchetes de Poisson canônicos, sendo satisfeita a identidade de Jacobi (Gardner, 1971).

Deste item pode-se concluir que é possível desenvolver um formalismo Hamiltoniano não-canônico, para uma equação diferencial, sem que seja necessário obter antes um princípio variacional ou um formalismo Lagrangiano (Tasso, 1979a; Morrison e Greene, 1980). Exemplos dessa propriedade podem ser construídos a partir de equações diferenciais não-lineares do tipo (Caldas e Tasso, 1979)

$$\hat{B}\, u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u} \quad , \tag{II.26}$$

onde $\hat{B}$ é um operador simétrico, ou seja,

$$\int dx\, \psi\, \hat{B}\, \phi = \int dx\, \phi\, \hat{B}\, \psi \quad , \tag{II.27}$$

que satisfaz às propriedades

$$\hat{B} \frac{\partial}{\partial x} \psi = \frac{\partial}{\partial x} \hat{B}\, \psi \tag{II.28}$$

e

$$\hat{B}\, \hat{B}^{-1} = 1 \quad . \tag{II.29}$$

Os colchetes de Poisson associados às equações (II.26) são

$$\{F,G\} = \int dx\, \frac{\delta F}{\delta u}\, \hat{B}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u} \quad . \tag{II.30}$$

Esses colchetes possuem as mesmas propriedades algébricas do colchete introduzido por Gardner (1971) para a equação KdV (Tasso, 1978a). Em termos desses colchetes, as equações (II.26) podem ser escritas na forma

$$u_t = \{u,H\} \quad . \tag{II.31}$$

Um sistema dinâmico, descrito por uma equação não-linear, possui uma densidade C, que é conservada, se essa densidade satisfizer a uma equação do tipo

$$C_t + \nabla \cdot D = 0 \quad , \tag{II.32}$$

onde C e D dependem da variável dinâmica do sistema. Para cada C existe uma integral, que é uma constante de movimento, pois

$$\frac{d}{dt} \int dx\, C(u) = - \int dx\, \nabla \cdot D = 0 \quad . \tag{II.33}$$

A segunda integral da equação anterior é nula, se os termos de superfície forem considerados nulos.

Uma classe particular de equações do tipo (II.26) é caracterizada pela Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (u^2\, \hat{B}\, u - \frac{u^3}{3}) \quad . \tag{II.34}$$

As equações determinadas por essas Hamiltonianas possuem, pelo menos, as seguintes constantes de movimento:

$$F_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \hat{B} u \tag{II.35}$$

$$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u \hat{B} u \tag{II.36}$$

$$F_3 = H \tag{II.37}$$

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x \hat{B} u + t u \hat{B} u) \quad . \tag{II.38}$$

Além disso, pode ser demonstrado (Caldas e Tasso, 1979) que se o funcional F

$$F = \int dx\, f(u, u_x, \ldots, u_{nx}) \tag{II.39}$$

for uma constante de movimento, o funcional $\{F,G\}$ também o será. A partir das equações (II.38) e (II.39), pode-se calcular essa constante de movimento, aplicando-se o Teorema de Poisson (Goldstein, 1980),

$$\{F,G\} = \int dx\, \frac{\delta F}{\delta u} \quad . \tag{II.40}$$

A relação (II.40) é satisfeita pelas constantes de movimento da equação de KdV, para a qual $\hat{B} = 1$ (Miura, 1968 e Tasso, 1978b). Essa relação pode ser útil na procura de novas constantes de movimento, como ocorreu no caso da equação KdV (Miura, 1968).

Para

$$\hat{B} = 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad , \tag{II.41}$$

a equação (II.26) torna-se

$$u_t - u_{txx} - 2\,u\,u_x - 4\,u_x\,u_{xx} - 2\,u\,u_{xxx} = 0 \quad . \tag{II.42}$$

As constantes de movimento conhecidas para essa equação são:

$$F_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, u \tag{II.43}$$

$$F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (u^2 + u_x^2) \tag{II.44}$$

$$F_3 \equiv H = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (\frac{1}{3}\, u^3 + u\, u_x^2) \tag{II.45}$$

$$G = \int dx \left[xu + t(u^2 + u_x^2) \right] \quad . \tag{II.46}$$

As constantes de movimento G, dadas pelas equações (III.38) e (III.46), estão relacionadas, fisicamente, à uniformidade do movimento do centro de massa do fluido, descrito pela coordenada

$$x_{cm} = v_{cm}\, t + x_{0\,cm} \quad . \tag{II.47}$$

As idéias e métodos expostos e aplicados à equações diferenciais não-lineares, neste capítulo, serão utilizados, nos capítulos seguintes, na dedução de formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano de plasmas descritos como fluidos.

III. FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O MODELO DE DOIS FLUIDOS

a. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será apresentada e discutida a aplicação dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano para plasmas descritos pelo modelo de dois fluidos. Como em várias outras aplicações, a analogia entre os métodos utilizados na hidrodinâmica e na teoria de fluidos, em interação com campos elétrico e magnético, é comum mas não trivial.

As variáveis físicas e os potenciais introduzidos serão considerados como funções das coordenadas de Euler (Goldstein, 1980). Essa descrição, por ser mais simples para fluidos, é mais conveniente que a de Lagrange (Seliger e Whitham, 1968). Entretanto, na descrição de Euler, os princípios variacionais e os formalismos Hamiltonianos não podem ser tão facimente obtidos quanto na descrição de Lagrange (Seliger e Whitham, 1968). A razão é que, nessa última descrição, a similaridade entre um meio contínuo e um sistema discreto de partículas é mantida. Este é um problema que, ultimamente, tem despertado grande interesse, devido às inúmeras aplicações dos métodos da mecânica clássica e da mecânica estatística à Física de Fluidos.

A dificuldade principal em se obter princípios variacionais e formalismos Hamiltonianos, na descrição de Euler, é que, em geral, o sistema de equações considerado não pode ser derivado de um princípio variacional. Uma possibilidade para se resol

ver esse problema é encontrar um sistema de equações, equivalente ao original, em termos de novas variáveis não-físicas, em geral potenciais, para o qual existem um princípio variacional e um formalismo Lagrangiano. A partir desse formalismo Lagrangiano é desenvolvido, então, um formalismo Hamiltoniano canônico. Outra possibilidade é o de expressar as equações do sistema considerado em termos de variáveis físicas (não-potenciais), para as quais possa ser encontrado um formalismo Hamiltoniano não-canônico. Nesse caso é necessário definir, de maneira adequada, um colchete de Poisson não-canônico e uma Hamiltoniana conveniente. Dessa forma é possível obter-se diretamente um formalismo Hamiltoniano sem a necessidade de um formalismo Lagrangiano que, em geral, não existe em termos dessas variáveis.

Clebsch (1859), utilizando a descrição de Euler, introduziu uma representação do tipo potencial para a velocidade de fluido e obteve um princípio variacional para fluidos incompressíveis. Generalizando a representação de Clebsch, Seliger e Whitham (1968) obtiveram princípios variacionais para fluidos compressíveis e para plasmas descritos pelo modelo de dois fluidos, neste último caso sem considerar o movimento térmico dos fluidos.

Neste capítulo será apresentado um princípio variacional (item c) e um formalismo canônico (item d) para o modelo de dois fluidos com pressões finitas, apresentado no item b, (Caldas e Tasso, 1984a). Para isso será utilizada a descrição de Euler e uma combinação da representação de Clebsch para as variáveis de fluido com os potenciais eletromagnéticos para os campos elétrico e magnético. A densidade de energia interna de cada um dos fluidos será considerada como uma função da densidade de partículas e da densidade de entropia desse fluido. Por último, será apresentado (item e) um formalismo Hamiltoniano não-canônico, em termos de variáveis físicas, obtido recentemente (Spencer, 1982).

b. EQUAÇÕES BÁSICAS

Neste item são introduzidas as equações que descrevem um plasma totalmente ionizado e composto de elétrons e um único tipo de íon, considerados ambos como fluidos (Spitzer, 1962). A representação usada será a de Euler (Goldstein, 1980).

Como os processos contendo ionização e recombinação não serão considerados, as equações de continuidade podem ser escritas como

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \vec{v}_s) = 0 \qquad s = i, e \quad , \qquad \text{(III.1)}$$

onde o índice s indica que a equação anterior é válida tanto para os elétrons como para os íons. As variáveis n_s e $\vec{v}_s$ representam, respectivamente, a densidade de partículas por unidade de volume e a velocidade do elemento de fluido considerado.

As equações de conservação da quantidade de movimento linear podem ser escritas como

$$m_s n_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = - \nabla P_s + e_s (\vec{E} + \vec{v}_s \times \vec{B}) \qquad \text{(III.2)}$$

onde m_s é a massa da partícula considerada, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ representam, respectivamente, o campo elétrico e o campo magnético, P_s é a parte escalar da pressão e e_s é a carga elétrica dos elétrons ou dos íons.

A transmissão de energia através do plasma ocorre devido a mecanismos macroscópicos (transporte com velocidade $\vec{v}_s$ e trabalho devido à pressão) e microscópicos (condutividade térmica, viscosidade, etc.). Os mecanismos microscópicos aumentam a entropia do plasma, ocorrendo conversão de energia mecânica em ca

lor. Entretanto, quando o intervalo de tempo característico dos processos dissipativos for grande, comparado com o inverso da frequência dos movimentos considerados no plasma, pode-se considerar a entropia como sendo conservada, ou seja,

$$\frac{dS_s}{dt} = 0 \qquad \text{(III.3)}$$

onde S_s é a entropia por unidade de massa.

A energia interna por unidade de massa U_s e a pressão P_s serão consideradas como funções de n_s e S_s, e ligadas a outras quantidades termodinâmicas através da relação

$$dU_s = T_s\, dS_s - P_s\, d(m_s n_s)^{-1} \qquad \text{(III.4)}$$

onde T_s é a temperatura do fluido.

Para a descrição do campo eletromagnético, devem ser acrescentadas às equações anteriores as equações de Maxwell:

$$\varepsilon_0\, c^2\, \nabla \times \vec{B} = \sum_s e_s\, n_s\, \vec{v}_s + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(III.5)}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(III.6)}$$

$$\varepsilon_0\, \nabla \cdot \vec{E} = \sum_s e_s\, n_s \qquad \text{(III.7)}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad . \qquad \text{(III.8)}$$

Estas equações formam um sistema fechado e, ao menos em princípio, qualquer uma das variáveis, que descrevem um dos fluidos ou o campo eletromagnético, pode ser calculada a partir dessas equações.

Nos itens a seguir será utilizada a hipótese de que integrais do tipo

$$\int_V d\vec{r}\, \nabla \cdot \vec{F} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{F}$$

se anulam, ou seja, os termos de superfície serão considerados nulos.

c. PRINCÍPIO VARIACIONAL

O sistema de equações, na forma apresentada no item anterior, não pode ser derivado de um princípio variacional expresso em termos das coordenadas de Euler. O procedimento adotado neste trabalho foi o de procurar um sistema de equações, equivalente ao original, para o qual se pudesse obter um princípio variacional. A solução encontrada foi a de introduzir os potenciais χ e $\vec{A}$ para os campos elétrico e magnético, e potenciais de Clebsch, similares aos utilizados na hidrodinâmica (Seliger e Whitham, 1968), para descrever as equações de fluido.

Os campos elétrico e magnético podem ser obtidos a partir dos potenciais χ e $\vec{A}$ usando-se as equações

$$\vec{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\chi \qquad \text{(III.9)}$$

$$\vec{B} = \nabla \times A \quad . \qquad \text{(III.10)}$$

A representação de Clebsch escolhida para a velocidade do fluido $\vec{v}_s$ foi

$$m_s\vec{v}_s + e_s\vec{A} = \nabla\phi_s + \alpha_s\nabla\beta_s + S_s\nabla\eta_s \quad . \qquad \text{(III.11)}$$

Nessa representação, a soma $m_s\vec{v}_s + e_s\vec{A}$ é dada pelas variáveis ϕ_s, α_s, β_s e η_s, além da entropia S_s. As equações (III.9) e (III.11) constituem uma representação mista de potenciais elétrico, magnético e de Clebsch. Na ausência dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, essa representação se reduziria à representação de Clebsch usual na hidrodinâmica (Seliger e Whitham, 1968).

O princípio variacional encontrado pode ser expresso na forma

$$\delta \iint d\vec{r}\, dt\, L = 0 \quad , \tag{III.12}$$

sendo a densidade de Lagrangeana L expressa por

$$L = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\chi\right)^2 - c^2(\nabla\times\vec{A})^2\right] -$$

$$- \sum_s n_s \left[\frac{\partial\phi_s}{\partial t} + \alpha_s\frac{\partial\beta_s}{\partial t} + S_s\frac{\partial\eta_s}{\partial t} + e_s\chi + \frac{1}{2m_s}(-e_s\vec{A} +\right.$$

$$\left. + \nabla\phi_s + \alpha_s\nabla\beta_s + S_s\nabla\eta_s) + m_s U_s\right] \quad . \tag{III.13}$$

Considerando-se as variações de ϕ_s, α_s, β_s, η_s, S_s, χ e $\vec{A}$, e a representação expressa pelas equações (III.9) e (III.11), pode-se obter a partir de (III.12) e (III.13) as equações introduzidas no item anterior, como será mostrado a seguir.

A variação em relação a η_s permite obter a equação

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_s S_s) + \nabla\cdot(n_s S_s\vec{v}_s) = 0 \quad , \tag{III.14}$$

que é uma combinação das equações (III.1) e (III.3). Das variações em relação a $\vec{A}$ e χ obtêm-se, respectivamente, as equa-

ções (III.5) e (III.7). As outras duas equações de Maxwell, (III.6) e (III.8), são satisfeitas pelas expressões (III.9) e (III.10).

Considerando a variação em relação a n_s, obtém-se

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \alpha_s \frac{\partial \beta_s}{\partial t} + S_s \frac{\partial \eta_s}{\partial t} + e_s \chi + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{\partial}{\partial n_s} (m_s n_s U_s) = 0 \ . \tag{III.15}$$

Da relação (III.4) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial n_s} (m_s n_s U_s) = m_s \left(U_s + n_s \frac{\partial U_s}{\partial n_s} \right) = m_s \left(U_s + \frac{p}{m_s n_s} \right) = m_s H_s \tag{III.16}$$

onde

$$H_s(n_s, S_s) = U_s + \frac{p_s}{m_s n_s} \quad , \tag{III.17}$$

sendo H_s a entalpia do fluido s. Substituindo-se a relação (III.16) em (III.15), obtém-se

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \alpha_s \frac{\partial \beta_s}{\partial t} + S_s \frac{\partial \eta_s}{\partial t} + e_s \chi + \frac{1}{2} m v_s^2 + m_s H_s = 0 \ . \tag{III.18}$$

As variações em relação às variáveis S_s, α_s e β_s, levam à obtenção das seguintes equações:

$$\frac{d}{dt} \eta_s + T_s m_s = 0 \tag{III.19}$$

$$\frac{d}{dt} \beta_s = 0 \tag{III.20}$$

$$\frac{d}{dt} \alpha_s = 0 \ . \tag{III.21}$$

Se as variáveis $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{v}$ forem substituídas na

equação (III.2), esta poderá ser escrita como

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \alpha_s \frac{\partial \beta_s}{\partial t} + S_s \frac{\partial \eta_s}{\partial t} + e_s \chi + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + m_s H_s \right) -$$

$$- \nabla \alpha_s \frac{d\beta_s}{dt} + \nabla \beta_s \frac{d\alpha_s}{dt} + \nabla \eta_s \frac{dS_s}{dt} - \nabla S_s \left(\frac{d\eta_s}{dt} + m_s T_s \right) = 0 \quad . \tag{III.22}$$

Com o auxílio das equações (III.14), (III.19) a (III.21), pode-se concluir que a equação (III.18), encontrada a partir da variação em relação a n_s, é equivalente à equação (III.22), obtida a partir da equação (III.2).

Assim, as equações que descrevem o modelo de dois fluidos para plasmas podem ser obtidas a partir do princípio variacional, expresso pelas equações (III.12) e (III.13), desde que seja utilizada a representação determinada pelas equações (III.9) a (III.11).

As equações para as variáveis ϕ_s, α_s, β_s, η_s, S_s, χ e $\vec{A}$ são (III.1), (III.5), (III.7), (III.3), (III.18) a (III.21). A introdução dessas variáveis permitiu obter um princípio variacional para o modelo de dois fluidos e também, como será mostrado a seguir, um formalismo Hamiltoniano canônico para esse mesmo modelo. Essas variáveis são funções das coordenadas de Euler e permitem, como variáveis não-físicas (isto é, como variáveis que determinam uma representação potencial), a existência de condições de calibre. Esta última característica pode ser evitada num formalismo Hamiltoniano não-canônico, como será mostrado no item e deste capítulo e do seguinte.

A densidade de Lagrangiana, dada pela equação (III.13), será a seguir expressa em uma forma mais compacta. Isso pode ser feito substituindo-se a equação (III.18) na expressão (III.13).

Assim,

$$L = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\chi\right)^2 - c^2(\nabla \times \vec{A})^2\right] - \sum_s n_s m_s (U_s - H_s) \qquad \text{(III.23)}$$

ou, usando a relação (III.16) e as equações (III.9) e (III.10),

$$L = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 - B^2) + \sum_s P_s \quad . \qquad \text{(III.24)}$$

Na expressão anterior, $\vec{E}$, $\vec{B}$ e P_s devem ser compreendidos como funções das variáveis não-físicas introduzidas neste item, ou seja, a representação expressa pelas equações (III.9) a (III.11) fica implícita. Na ausência dos campos elétrico e magnético, a densidade de Lagrangiana corresponde, nesta representação, à soma das pressões dos fluidos. O termo $\varepsilon_0(E^2-B^2)/2$ coincide, na representação utilizada neste item, com a densidade de Lagrangiana dos campos elétrico e magnético no vácuo.

d. FORMALISMO HAMILTONIANO CANÔNICO

A partir da formulação Lagrangiana apresentada no item anterior, é possível desenvolver uma formulação Hamiltoniana canônica para o sistema de equações descrito no item b deste capítulo. As variáveis canonicamente conjugadas serão ϕ_s, β_s, η_s, A_j e π_{ϕ_s}, π_{β_s}, π_{η_s} e π_{A_j}, definidas como

$$\pi_{\phi_s} \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial t}\right)} = -n_s \qquad \text{(III.25)}$$

$$\pi_{\beta_s} \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \beta_s}{\partial t}\right)} = -n_s\,\alpha_s \qquad \text{(III.26)}$$

$$\pi_{\eta_s} \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \eta_s}{\partial t}\right)} = - n_s S_s \tag{III.27}$$

$$\pi_{A_j} \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_j}{\partial t}\right)} = - \varepsilon_0 E_j \quad ; \quad j = 1,2,3 \quad . \tag{III.28}$$

A densidade de Hamiltoniana H , dada pela equação

$$H = \sum_s \left(\pi_{\phi_s} \frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \pi_{\beta_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial t} + \pi_{\eta_s} \frac{\partial \eta_s}{\partial t}\right) + \sum_j \pi_{A_j} \frac{\partial A_j}{\partial t} - L \quad , \tag{III.29}$$

pode ser escrita como

$$H = \sum_s \left[\frac{-1}{2 m_s \pi_{\phi_s}} (\pi_{\phi_s} \nabla\phi_s + \pi_{\beta_s} \nabla\beta_s + \pi_{\eta_s} \nabla\eta_s - e_s \pi_{\phi_s} \vec{A})^2 - \right.$$

$$- m_s \pi_{\phi_s} U_s \left(\pi_{\phi_s}, \frac{\pi_{\eta_s}}{\pi_{\phi_s}}\right) + \chi\left(\sum_s e_s n_s - \varepsilon_0 \nabla . \vec{E}\right) +$$

$$\left. + \varepsilon_0 \left[\frac{c^2}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0^2} \sum_j \pi_{A_j}^2\right]\right] \quad . \tag{III.30}$$

Para que a densidade de Hamiltoniana (III.30) seja expressa apenas em termos das variáveis canonicamente conjugadas, pode-se escolher a equação (III.7)

$$\varepsilon_0 \nabla . \vec{E} = \sum_s e_s n_s$$

como uma condição inicial (nesse caso essa igualdade permanece válida para qualquer instante).

A densidade de Hamiltoniana dada pela equação (III.30)

corresponde à densidade de energia do sistema, como pode ser visto escrevendo-se a expressão (III.30) em termos das variáveis físicas $\vec{E}$, $\vec{B}$, n_s e $\vec{v}_s$. Assim, a Hamiltoniana H

$$H = \int d\vec{r}\,\mathcal{H} = \int d\vec{r}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}(E^2+B^2) + \sum_s m_s n_s \left(\frac{v_s^2}{2} + U_s\right)\right] \qquad \text{(III.31)}$$

é a energia total do sistema.

A seguir, as equações do modelo de dois fluidos serão obtidas a partir das equações de Hamilton:

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi_{\phi_s}} \qquad \text{(III.32)}$$

$$\frac{\partial \pi_{\phi_s}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \phi_s} \qquad \text{(III.33)}$$

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi_{\beta_s}} \qquad \text{(III.34)}$$

$$\frac{\partial \pi_{\beta_s}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \beta_s} \qquad \text{(III.35)}$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi_{\eta_s}} \qquad \text{(III.36)}$$

$$\frac{\partial \pi_{\eta_s}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_s} \qquad \text{(III.37)}$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi_{A_j}} \qquad \text{(III.38)}$$

$$\frac{\partial \pi_{A_j}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta A_j} \quad . \qquad \text{(III.39)}$$

A Hamiltoniana

$$H = \int d\vec{r}\, \mathcal{H}\, (\phi_s\, , \beta_s\, , \eta_s\, , A_j\, , \pi_{\phi_s}\, , \pi_{\beta_s}\, , \pi_{\eta_s}\, , \pi_{A_j})$$

é um funcional das variáveis canônicas ϕ_s, β_s, η_s, A_j, π_{ϕ_s}, π_{β_s}, π_{η_s} e π_{A_j}. A derivada funcional $\frac{\delta H}{\delta u}$ do funcional H em relação a u, qualquer uma dessas variáveis canônicas, é definida como (Atherthon e Homsy, 1975)

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(u + \varepsilon w)\Big|_{\varepsilon=0} = \int dx\, \frac{\delta H}{\delta u}\, w \quad . \tag{III.40}$$

No caso de

$$H = \int d\vec{r}\, \mathcal{H}\, (u\, , u_x\, , u_y\, , u_z\, , u_{xx}\, , \ldots) \quad , \tag{III.41}$$

obtém-se

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\partial H}{\partial u} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{x_i}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{xx}} + \ldots \quad , \tag{III.42}$$

onde u_x significa a derivada de u em relação a x e assim por diante.

Das equações (III.32), (III.34) e (III.36) obtêm-se, respectivamente,

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \frac{m_s v_s^2}{2} - \vec{v}_s \cdot (\nabla \phi_s - e_s \vec{A}) - m_s H_s + S_s \frac{\partial U_s}{\partial S_s} \tag{III.43}$$

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial t} = - \vec{v}_s \cdot \nabla \beta_s \tag{III.44}$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial t} = - \vec{v}_s \cdot \nabla \eta_s - \frac{\partial U_s}{\partial S_s} \quad . \tag{III.45}$$

Combinando-se estas três últimas equações, obtém-se a equação (III.17)

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \alpha_s \frac{\partial \beta_s}{\partial t} + S_s \frac{\partial \eta_s}{\partial t} + \frac{m_s v_s^2}{2} + m_s H_s = 0 \quad ,$$

a partir da qual se pode determinar a equação de movimento (III.2). Para se obter as equações (III.43) e (III.45) foi usada a igualdade

$$U(n_s, S_s) = U(\pi_{\phi_s}, \pi_{\eta_s}) \quad . \tag{III.46}$$

Da equação (III.33) obtém-se a equação (III.1), da equação (III.35) a equação (III.20), da equação (III.37) a equação (III.3) e da equação (III.39) a equação (III.5).

Assim sendo, todas as equações do modelo de dois fluidos podem ser encontradas, usando-se o formalismo Hamiltoniano apresentado neste item.

O colchete de Poisson canônico $\{F,G\}$ entre dois funcionais F e G das variáveis canônicas, utilizadas neste item, pode ser definido como

$$\{F,G\} \equiv \int d\vec{r} \left\{ \sum_s \left[\frac{\delta F}{\delta \phi_s} \frac{\delta G}{\delta \pi_{\phi_s}} - \frac{\delta G}{\delta \phi_s} \frac{\delta F}{\delta \pi_{\phi_s}} + \frac{\delta F}{\delta \alpha_s} \frac{\delta G}{\delta \pi_{\alpha_s}} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\delta G}{\delta \alpha_s} \frac{\delta F}{\delta \pi_{\alpha_s}} + \frac{\delta F}{\delta S_s} \frac{\delta G}{\delta \pi_{S_s}} - \frac{\delta G}{\delta S_s} \frac{\delta F}{\delta \pi_{S_s}} \right] +$$

$$\left. + \sum_j \left[\frac{\delta F}{\delta A_j} \frac{\delta G}{\delta \pi_{A_j}} - \frac{\delta G}{\delta A_j} \frac{\delta F}{\delta \pi_{A_j}} \right] \right\} \quad . \tag{III.47}$$

Dessa forma, usando-se a Hamiltoniana dada pela equação (III.31), pode-se obter as equações do modelo de dois fluidos a partir das

equações de Hamilton escritos na forma

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \left\{\phi_s , H\right\} \quad ; \quad \frac{\partial \pi_{\phi_s}}{\partial t} = \left\{\pi_{\phi_s} , H\right\} \tag{III.48}$$

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial t} = \left\{\beta_s , H\right\} \quad ; \quad \frac{\partial \pi_{\beta_s}}{\partial t} = \left\{\pi_{\beta_s} , H\right\} \tag{III.49}$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial t} = \left\{\eta_s , H\right\} \quad ; \quad \frac{\partial \pi_{\eta_s}}{\partial t} = \left\{\pi_{\eta_s} , H\right\} \tag{III.50}$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = \left\{A_j , H\right\} \quad ; \quad \frac{\partial \pi_{A_j}}{\partial t} = \left\{\pi_{A_j} , H\right\} \quad . \tag{III.51}$$

Cada uma das variáveis canônicas pode ser escrita como um funcional pois, por exemplo,

$$\phi_s(\vec{r}) = \int d\vec{r}' \; \phi_s(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad . \tag{III.52}$$

Assim sendo, pode-se calcular as seguintes derivadas funcionais

$$\frac{\delta \phi_s(\vec{r})}{\delta \phi_s(\vec{r}')} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{III.53}$$

e

$$\frac{\delta \phi_s}{\delta u} = 0 \quad , \tag{III.54}$$

onde u representa qualquer uma das variáveis canônicas, com exceção de ϕ_s. Dessa forma pode-se, facilmente, mostrar que as equações (III.48) correspondem às equações (III.32) e (III.33):

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \left\{\phi_s , H\right\} = \int d\vec{r}\,' \frac{\delta H}{\delta \pi_{\phi_s}} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{\delta H}{\delta \pi_{\phi_s}}$$

$$\frac{\partial \pi_{\phi_s}}{\partial t} = \left\{\pi_{\phi_s} , H\right\} = - \int d\vec{r}\,' \frac{\delta H}{\delta \phi_s} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = - \frac{\delta H}{\delta \phi_s} \quad .$$

Da mesma maneira pode-se mostrar que as equações (III.49) a (III.51) correspondem às equações (III.34) a (III.39).

O colchete de Poisson, definido pela equação (III.47), é anti-simétrico em relação à troca do funcional F pelo funcional G

$$\{F,G\} = - \{G,F\} \tag{III.55}$$

é linear em F

$$\{c_1 F_1 + c_2 F_2 , G\} = c_1\{F_1 ,G\} + c_2\{F_2 ,G\} \quad , \tag{III.56}$$

satisfaz tanto a identidade de Jacobi

$$\{E , \{F,G\}\} + \{F , \{G,E\}\} + \{G , \{E,F\}\} = 0 \tag{III.57}$$

como a regra do produto (Goldstein, 1980)

$$\{F , F_2 , G\} = \{F_1 , G\} F_2 + F_1\{F_2 , G\} \quad . \tag{III.58}$$

As propriedades (III.55) a (III.57) definem uma álgebra de Lie (Marsden e Morrison, 1984). Um colchete de Poisson, que satisfaz as propriedades (III.55) a (III.58), é denominado estrutura de Poisson (Marsden e Morrison, 1984).

Os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano apresentados neste capítulo podem ser extendidos para descrever plasmas, descritos pelo modelo de dois fluidos, em um campo gravitacional (Caldas e Tasso, 1984a).

e. FORMALISMO HAMILTONIANO NÃO-CANÔNICO

Para o modelo de dois fluidos é possível obter-se um formalismo Hamiltoniano não-canônico (Spencer, 1982). Para isto basta definir-se um colchete de Poisson não-canônico em termos das variáveis físicas $\vec{M}_s$, n_s, S_s, $\vec{E}$ e $\vec{B}$. O colchete de Poisson a ser definido depende explicitamente dessas variáveis não-canonicamente conjugadas. Apesar dessa formulação não ser canônica, ela tem a vantagem de evitar as condições de calibre, presentes no formalismo Hamiltoniano canônico apresentado no item anterior, uma vez que as grandezas físicas (como $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{v}_s$) foram descritas por potenciais ($\vec{A}$, χ e potenciais de Clebsch). O colchete de Poisson $\{F,G\}$ definido a seguir possui as mesmas propriedades algébricas dos colchetes canônicos, como a linearidade em F e G, a anti-simetria quanto a troca do funcional F com o funcional G, além de satisfazer à identidade de Jacobi e à regra do produto.

Nesse formalismo, a Hamiltoniana é a mesma já definida em (III.31), escrita desta vez em termos da densidade de momento linear $\vec{M}_s$:

$$H = \int d\vec{r} \left[\frac{\varepsilon_0}{2} (E^2+B^2) + \sum_s \left(\frac{M_s^2}{2\, m_s\, n_s} + m_s\, n_s\, U_s \right) \right] \quad . \qquad \text{(III.59)}$$

A densidade de energia interna $U_s(n_s,S_s)$ é uma função da densidade de partículas e da entropia por unidade de massa. A Hamiltoniana $H(\vec{M}_s, n_s, S_s, \vec{E}, \vec{B})$ é um funcional das variáveis indicadas.

As equações do modelo de dois fluidos podem ser escritas como equações de Hamilton, ou seja,

$$\frac{\partial \psi^k}{\partial t} = \left\{ \psi^k , H \right\} \quad , \qquad \text{(III.60)}$$

onde ψ^k denota qualquer uma das variáveis físicas mencionadas (qualquer componente de $\vec{M}_s$, $\vec{E}$ ou $\vec{B}$, ou uma das variáveis n_s, S_s). Para que isso seja possível, é necessário que o colchete de Poisson entre dois funcionais F e G, das variáveis utilizadas, seja definido como (Spencer, 1982):

$$\{F,G\} = - \int d\vec{r} \sum_s \left[n_s \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}_s} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta n_s} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}_s} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta n_s} \right) + \right.$$

$$+ S_s \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}_s} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta S_s} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}_s} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta S_s} \right) +$$

$$\left. + \vec{M}_s \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}_s} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta \vec{M}_s} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}_s} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta \vec{M}_s} \right) \right] +$$

$$+ \int d\vec{r} \left[\frac{\delta F}{\delta \vec{E}} \cdot \left(\nabla \times \frac{\delta G}{\delta \vec{B}} \right) - \frac{\delta G}{\delta \vec{E}} \cdot \left(\nabla \times \frac{\delta F}{\delta \vec{B}} \right) \right] +$$

$$+ \int d\vec{r} \sum_s e_s n_s \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}_s} \cdot \frac{\delta G}{\delta \vec{E}} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}_s} \cdot \frac{\delta F}{\delta \vec{E}} + \vec{B} \cdot \frac{\delta F}{\delta \vec{M}_s} \times \frac{\delta G}{\delta \vec{M}_s} \right) . \quad \text{(III.61)}$$

A primeira integral na definição anterior corresponde ao colchete de Poisson não-canônico que aparece na hidrodinâmica (Morrison e Greene, 1980). As equações de Maxwell, para o vácuo, podem ser escritas como equações de Hamilton, considerando-se o primeiro termo da integral da equação (III.59) como a Hamiltoniana do sistema e a segunda integral da equação (III.61) como definição do correspondente colchete de Poisson (Pauli, 1981, Born e Infeld, 1935). Assim, a primeira integral da equação (III.61) contém apenas variáveis de fluido ($\vec{M}_s$, n_s, S_s), enquanto na segunda integral dessa equação aparecem apenas as variáveis eletromagnéticas ($\vec{E}$ e $\vec{B}$). Finalmente, a terceira integral na definição de

$\{F,G\}$ representa o acoplamento entre os fluidos e os campos elétrico e magnético.

É importante ressaltar que o formalismo não-canônico apresentado neste item pode ser derivado do formalismo canônico do item anterior. Para isto basta substituir na definição do colchete de Poisson canônico, dada pela equação (III.47), as variáveis canônicas pelas não-canônicas. O mesmo deve ser feito na expressão da Hamiltoniana. Uma aplicação desse método será apresentada em detalhes no item e do capítulo IV.

IV. FORMALISMO HAMILTONIANO PARA O MODELO DE UM FLUIDO COM VISCOSIDADE DE GIRO

a. INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão considerados plasmas não dissipativos descritos pelo modelo magneto-hidrodinâmico (Spitzer, 1962), levando-se em conta a viscosidade de giro (Kaufman, 1960). Esse tipo de viscosidade depende do raio de giro dos íons, na direção perpendicular às linhas de força do campo magnético, e não altera a entropia do plasma. Serão consideradas configurações bidimensionais independentes da coordenada z, considerada na direção do campo magnético. Essas configurações são importantes para a descrição das descargas elétricas em tokamaks (Hazeltine, Kotschenreuther e Morrison) e para a interpretação do espectro das oscilações observadas durante essas descargas (Tasso e Lerbinger, 1983; Caldas e Tasso, 1984b).

As equações do modelo magneto-hidrodinâmico, expressas em termos de variáveis físicas, podem ser deduzidas de um princípio variacional, na descrição de Euler, se os efeitos da viscosidade de giro não forem considerados (Zakharov e Kuznetsov, 1971). Um formalismo Hamiltoniano não-canônico foi obtido por Morrison e Greene (1980) para essas equações. Este resultado teve conseqüências importantes na Física de Plasmas, indicando a possibilidade de se descrever sistemas, aparentemente não Hamiltonianos,

por formalismos Hamiltonianos generalizados. Para isso é necessário obter um colchete de Poisson não-canônico e uma Hamiltoniana, a partir dos quais o sistema de equações considerado possa ser obtido. Apesar desse progresso, nenhum tipo de formalismo Lagrangiano ou Hamiltoniano para fluidos, levando-se em conta a viscosidade de giro, havia sido obtido antes da conclusão deste trabalho (Caldas e Tasso, 1984a; Morrison, Caldas e Tasso, 1984).

Considerando a viscosidade de giro, será apresentado um princípio variacional (item c) e um formalismo canônico (item d) para o modelo magneto-hidrodinâmico, apresentado no item b. Para isso será utilizada a descrição de Euler e uma generalização da representação de Clebsch. No item e será desenvolvido um formalismo Hamiltoniano não-canônico, em termos de variáveis físicas, a partir do formalismo Hamiltoniano descrito no item anterior. Dessa forma será obtido um colchete de Poisson não-canônico correspondente ao sistema de equações considerado. Como uma aplicação deste último resultado, serão obtidas, no item f, constantes de movimento e invariantes de Casimir do modelo discutido neste capítulo.

b. EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações do modelo magneto-hidrodinâmico (modelo [illegible]), que descreve um plasma como um fluido em interação com os campos elétrico e magnético (Spitzer, 1962), são apresentadas neste item. Processos dissipativos não são considerados, mas é levada em conta a viscosidade de giro, que é um tipo de viscosidade dependente do raio de giro dos íons. Isso significa que, no modelo considerado,

$$\tau\,\omega_c \rightarrow \infty \quad ,$$

onde ω_c é a frequência de cíclotron para os íons e τ é o tempo médio entre as colisões iônicas. A viscosidade de giro tem sido considerada em vários trabalhos, entre os quais pode-se citar o livro de Chapman e Cowling (1953) e o artigo de Kaufman (1960). A influência dessa viscosidade sobre a estabilidade linear de plasmas descritos pelo modelo mhd, foi discutida em vários trabalhos (Newcomb, 1966; Tasso e Schram, 1966). A representação usada, como nos capítulos anteriores, é a de Euler (Goldstein, 1980).

A equação de conservação da densidade da quantidade de movimento linear pode ser escrita como (Spitzer, 1962)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi} \quad , \qquad \text{(IV.1)}$$

onde ρ é a densidade de massa do fluido, $\vec{v}$ é a velocidade de um elemento do fluido e P_s é a sua pressão escalar. $\overleftrightarrow{\pi}$ é o tensor (a ser definido) que descreve a viscosidade de giro, $\vec{j}$ é a densidade de corrente elétrica e $\vec{B}$ é o campo magnético.

A conservação da densidade de massa é expressa pela equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad . \qquad \text{(IV.2)}$$

Neste capítulo serão consideradas apenas transformações adiabáticas, portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right)^{\gamma} = 0 \quad , \qquad \text{(IV.3)}$$

onde γ é a razão entre os calores específicos, a pressão e a

temperatura constantes.

As equações de Maxwell, no modelo mhd, se reduzem a

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{IV.4}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{IV.5}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \tag{IV.6}$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico. Nesse modelo é desprezada a corrente de deslocamento e considerada válida a condição de quase neutralidade. Os campos elétricos satisfazem também à relação

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad . \tag{IV.7}$$

Usando-se as equações (IV.4) e (IV.7) para eliminar $\vec{j}$ e $\vec{E}$ nas equações (IV.1) e (IV.5), respectivamente, pode-se escrever as equações que descrevem o modelo magneto-hidrodinâmico na forma

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi} \tag{IV.8}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{IV.9}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \vec{v} \tag{IV.10}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla P - \gamma P \nabla \cdot \vec{v} \quad . \tag{IV.11}$$

O termo $\nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi}$, na equação (IV.1), está associado à densidade da quantidade de movimento linear devido ao movimento

de giro, que ocorre na direção perpendicular ao campo magnético. Neste capítulo são considerados campos magnéticos do tipo

$$\vec{B} = B(x,y,t)\,\vec{e}_z \tag{IV.12}$$

e as demais grandezas (ρ, $\vec{v}$, P, $\vec{j}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$) também independentes da coordenada z. A velocidade de fluido considerada é perpendicular ao vetor $\vec{B}$, ou seja,

$$\vec{v} = v_x(x,y)\vec{e}_x + v_y(x,y)\vec{e}_y \quad . \tag{IV.13}$$

Nesse caso, os elementos do tensor $\overleftrightarrow{\pi}$ são (Kaufman, 1960):

$$\pi_{xx} = -\pi_{yy} = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \tag{IV.14}$$

$$\pi_{\alpha z} = \pi_{z\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha = x,y,z \quad .$$

A função β é definida como

$$\beta = \frac{mc}{e}\,\frac{P}{|B|} \quad . \tag{IV.15}$$

Para a classe de soluções consideradas neste trabalho, as equações do modelo mhd se reduzem a

$$\rho\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \nabla\,.\,\overleftrightarrow{\pi} \tag{IV.16}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla\,.\,(B\vec{v}) \tag{IV.17}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \vec{v} \tag{IV.18}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \vec{v} \cdot \nabla P - \gamma P \nabla \cdot \vec{v} \quad . \tag{IV.19}$$

As últimas quatro equações podem ser escritas em termos das variáveis M_s, ρ, B e β, onde M_s é a componente s da quantidade de movimento linear

$$M_s = \rho \, v_s \quad . \tag{IV.20}$$

Assim sendo,

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = - \partial_i \left(\frac{M_i M_s}{\rho} \right) - \partial_s \left(\beta |B| + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \partial_i \, \pi_{is} \tag{IV.21}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \partial_s \, M_s \tag{IV.22}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \partial_s \left(\frac{B M_s}{\rho} \right) \tag{IV.23}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = - \partial_s \left(\frac{\beta M_s}{\rho} \right) \quad . \tag{IV.24}$$

Nessas equações e nas seguintes ficam subentendidas somas sobre índices repetidos. Os elementos do tensor $\overleftrightarrow{\pi}$, dados pela equação (IV.14), podem ser escritos, em termos de M_s, ρ e β, como

$$\pi_{is} = N_{sjik} \, \beta \, \partial_k \left(\frac{M_j}{\rho} \right) \quad . \tag{IV.25}$$

O tensor N_{sjik} é definido como

$$N_{sjik} = \frac{1}{2}(\delta_{sk}\,\varepsilon_{ji} - \delta_{ji}\,\varepsilon_{sk}) \quad , \tag{IV.26}$$

onde c é uma constante, δ_{sk} é o delta de Kronecker e ε_{ji} é um tensor anti-simétrico cujas componentes são

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad i = 1 \ , \ j = 2 \\ -1 & \text{para} \quad i = 2 \ , \ j = 1 \\ 0 & \text{para} \quad i = j \end{cases} \quad . \tag{IV.27}$$

c. PRINCÍPIO VARIACIONAL

As equações (IV.21) a (IV.24), que descrevem configurações bidimensionais de plasmas, descritos pelo modelo magnetohidrodinâmico, incluindo-se os efeitos da viscosidade de giro, não podem, quando expressas em termos das variáveis M_s, ρ, B e β, ser obtidas de um princípio variacional. Entretanto, como no capítulo anterior, será apresentado neste item um princípio variacional, introduzindo-se novas variáveis potenciais, a partir do qual se pode obter um sistema de equações equivalente ao constituído pelas equações mencionadas. Para isso será utilizada uma generalização da representação de Clebsch, usada no item b do capítulo III. Nessa representação, as componentes da densidade da quantidade de movimento linear são expressas como

$$M_s = \beta\,\partial_s\alpha + \rho\,\partial_s\chi + B\,\partial_s\psi + \hat{\theta}_s\,\beta \quad , \tag{IV.28}$$

sendo o operador $\hat{\theta}_s$ definido pela expressão

$$\hat{\theta}_s \equiv -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ks}\,\partial_k \quad . \tag{IV.29}$$

As variáveis α, χ e ψ são variáveis de Clebsch do tipo potencial. Esta representação de M_s, contendo o operador $\hat{\theta}$, difere das representações de Clebsch anteriormente empregadas nos modelos hidrodinâmico e magneto-hidrodinâmico (Morrison, Caldas e Tasso, 1984).

A seguir será mostrado que as equações (IV.21) a (IV.24) podem ser obtidas a partir do princípio variacional

$$\delta \int\int d\vec{r}\, dt\, \mathcal{L} = 0 \quad . \tag{IV.30}$$

A densidade de Lagrangiana $\mathcal{L}$ é dada pela expressão

$$\mathcal{L} = -\frac{M^2}{2\rho} - \beta|B| - \frac{B^2}{2u_0} - \left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial t} + B\frac{\partial\psi}{\partial t} + \rho\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \quad , \tag{IV.31}$$

ficando implícita a representação para M_s, caracterizada pela equação (IV.28). Convém notar que

$$d\vec{r} \equiv dx\, dy \quad .$$

Considerando-se na equação (IV.30) a variação da Lagrangiana

$$L = \int d\vec{r}\, \mathcal{L}\,(\alpha, \beta, \chi, \rho, \psi, B) \quad , \tag{IV.32}$$

em relação à variável α, obtém-se

$$\delta L = \iint d\vec{r}\, dt \left(-\frac{M_s}{\rho}\beta\,\partial_s\,\delta\alpha - \beta\,\delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) =$$

$$= \iint d\vec{r}\, dt \left[\partial_s\left(\frac{M_s}{\rho}\beta\right) + \frac{\partial\beta}{\partial t}\right]\delta\alpha = 0 \quad .$$

Assim pode-se deduzir da equação anterior a equação (IV.24). Analogamente, as variações de L, em relação às variáveis χ e ψ, levam à obtenção das equações (IV.22) e (IV.23), respectivamente.

Para se obter a equação (IV.21), deve-se considerar uma combinação das equações obtidas, a partir das variações de L em relação às variáveis β, ρ e B. Estas equações são

$$\delta\beta : \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\frac{M_s}{\rho}\,\partial_s\alpha - |B| - \hat{\theta}_s^{+}\left(\frac{M_s}{\rho}\right) \qquad \text{(IV.33)}$$

$$\delta\rho : \qquad \frac{\partial\chi}{\partial t} = -\frac{M_s}{\rho}\,\partial_s\chi + \frac{M^2}{2\rho^2} \qquad \text{(IV.34)}$$

$$\delta B : \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{M_s}{\rho}\,\partial_s\psi - (\text{sinal de } B)\,\beta - \frac{B}{\mu_0}\ . \qquad \text{(IV.35)}$$

Derivando-se os termos da equação (IV.28) em relação a t, obtém-se

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\,\partial_s\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\partial_s\chi + \frac{\partial B}{\partial t}\,\partial_s\psi\right) +$$

$$+ \left(\beta\,\partial_s\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \rho\,\partial_s\frac{\partial\chi}{\partial t} + B\,\partial_s\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) + \hat{\theta}_s\frac{\partial\beta}{\partial t}\ . \qquad \text{(IV.36)}$$

As derivadas das variáveis ρ, B e β, em relação a t, são dadas pelas equações (IV.22) a (IV.24) e as derivadas de α, χ e ψ, pelas equações (IV.33) a (IV.35). Combinando-se estas equações com a equação (IV.36), tem-se

$$-\frac{\partial M_s}{\partial t} = \partial_j\left(\frac{\beta M_j}{\rho}\right)\partial_s\alpha + \partial_j(M_j)\,\partial_s\chi + \partial_j\left(\frac{BM_j}{\rho}\right)\partial_s\psi + \partial_j\hat{\theta}_s\left(\frac{\beta M_j}{\rho}\right) +$$

$$+ \beta\,\partial_s\left(\frac{M_j}{\rho}\,\partial_j\alpha\right) + \rho\,\partial_s\left(\frac{M_j}{\rho}\,\partial_j\chi\right) + B\,\partial_s\left(\frac{M_j}{\rho}\,\partial_j\psi\right) +$$

$$+ \partial_s \left(\beta |B| + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \rho \partial_s \left(\frac{M^2}{2\rho^2} \right) - \beta \partial_s \hat{\theta}_j \left(\frac{M_j}{\rho} \right) . \qquad \text{(IV.37)}$$

Para se deduzir a equação anterior foi utilizada a relação

$$\hat{\theta}_j^+ = - \hat{\theta}_j \quad , \qquad \text{(IV.38)}$$

deduzida da definição de $\hat{\theta}_j$, dada pela equação (IV.29). Usando-se a representação de M_s , dada pela equação (IV.28), e somando-se e subtraindo-se o termo $\partial_s \left(\frac{M_j}{\rho}\right) \hat{\theta}_j \beta$ à equação anterior, tem-se

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = - \partial_j \left(M_j \frac{M_s}{\rho} \right) - \partial_s \left(\beta |B| + \frac{B^2}{2u_0} \right) -$$

$$- \partial_j \left(\beta \hat{\theta}_s \frac{M_j}{\rho} \right) + \partial_s \left(\frac{M_j}{\rho} \right) \hat{\theta}_j \beta + \beta \partial_s \hat{\theta}_j \left(\frac{M_j}{\rho} \right) . \qquad \text{(IV.39)}$$

A soma dos três últimos termos da equação anterior corresponde ao último termo da equação (IV.21), que se quer obter. Para isso serão usadas as identidades

$$\hat{\theta}_j \beta \partial_s \left(\frac{M_j}{\rho} \right) + \beta \partial_s \hat{\theta}_j \left(\frac{M_j}{\rho} \right) = - \frac{1}{2} \partial_i (\delta_{st} \varepsilon_{ij} \beta \partial_t v_j) \qquad \text{(IV.40)}$$

e

$$- \partial_j \left(\beta \hat{\theta}_s \frac{M_j}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \partial_i (\delta_{ji} \varepsilon_{ts} \beta \partial_t v_j) . \qquad \text{(IV.41)}$$

Somando-se os termos destas duas últimas equações, pode-se obter

$$- \partial_j \left(\beta \hat{\theta}_s \frac{M_j}{\rho} \right) + \hat{\theta}_j \beta \partial_s \left(\frac{M_j}{\rho} \right) + \beta \partial_s \hat{\theta}_j \left(\frac{M_j}{\rho} \right) =$$

$$- \frac{1}{2} \partial_i \left[(\delta_{st} \varepsilon_{ij} - \delta_{ji} \varepsilon_{ts}) \beta \partial_t v_j \right] = - \partial_i (N_{sjit} \beta \partial_t v_j) = - \partial_i \pi_{is} . \qquad \text{(IV.42)}$$

Substituindo-se este resultado na equação (IV.39), obtém-se a equação (IV.21) desejada. Assim, o sistema de equações, que descreve o modelo bidimensional considerado, pode ser deduzido de um princípio variacional.

A densidade de Lagrangiana, dada pela equação (IV.31), será expressa a seguir numa forma mais compacta. Isso pode ser feito subsituindo-se a expressão

$$\beta \frac{\partial \alpha}{\partial t} + B \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho \frac{\partial \chi}{\partial t} = - \frac{M_s}{\rho} (B \partial_s \alpha + \rho \partial_s \chi + B \partial_s \psi) -$$

$$- \beta \hat{\theta}_s^+ \left(\frac{M_s}{\rho} \right) + \frac{M^2}{2\rho} - 2\beta |B| - \frac{B^2}{\mu_0} \quad , \qquad \text{(IV.43)}$$

obtida das equações (IV.33) a (IV.35), na equação (IV.32). O resultado obtido é

$$L = \frac{B^2}{2\mu_0} + P \quad . \qquad \text{(IV.44)}$$

Nesta expressão, B e P são funções das variáveis não físicas introduzidas neste item, ou seja, a representação expressa pela equação (IV.28) fica implícita. Neste caso, a densidade de Lagrangiana é igual à pressão total. Na ausência de campo magnético, L é igual à pressão do fluido (Seliger e Whitham, 1968).

d. FORMALISMO HAMILTONIANO CANÔNICO

A partir da formulação Lagrangiana apresentada no item anterior, é possível desenvolver uma formulação Hamiltoniana canônica, para o sistema de equações descrito naquele item. As variáveis canonicamente conjugadas são as variáveis potenciais α,

ψ, χ e π_α, π_ψ e π_χ definidas por

$$\pi_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)} = -\beta \tag{IV.45}$$

$$\pi_\chi \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)} = -\rho \tag{IV.46}$$

$$\pi_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)} = -B \quad . \tag{IV.47}$$

A densidade de Hamiltoniana H, dada pela equação

$$H = \left(\pi_\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \pi_\psi \frac{\partial\psi}{\partial t} + \pi_\chi \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - L$$

pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{2\rho^2}\left(\beta\,\partial_s\alpha + \rho\,\partial_s\chi + B\,\partial_s\psi + \hat{\theta}_s\beta\right)^2 + \beta|B| + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad . \tag{IV.48}$$

Essa densidade de Hamiltoniana corresponde à densidade de energia do plasma descrito pelas equações (IV.21) a (IV.24). A Hamiltoniana desse sistema, que é um funcional das variáveis canonicamente conjugadas introduzidas neste item, é dada pela integral

$$H = \int d\vec{r}\, H = \int d\vec{r}\left(\frac{M^2}{2\rho} + \beta|B| + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) \quad . \tag{IV.49}$$

As equações (IV.21) a (IV.24) podem ser deduzidas a partir das equações de Hamilton escritas a seguir

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi_\alpha} \tag{IV.50}$$

$$\frac{\partial \pi_\alpha}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \alpha} \tag{IV.51}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi_\chi} \tag{IV.52}$$

$$\frac{\partial \pi_\chi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \chi} \tag{IV.53}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi_\psi} \tag{IV.54}$$

$$\frac{\partial \pi_\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\partial \psi} \quad . \tag{IV.55}$$

$\frac{\delta H}{\delta u}$ representa uma derivada funcional, definida pela expressão (III.40), de H em relação a uma variável u (qualquer uma das variáveis canonicamente conjugadas).

Das equações (IV.51), (IV.53) e (IV.55) pode-se deduzir, respectivamente, as equações (IV.24), (IV.22) e (IV.23). Calculando-se as derivadas funcionais que aparecem nas equações (IV.50), (IV.52) e (IV.54), obtêm-se, respectivamente, as equações (IV.33) a (IV.35), a partir das quais foi deduzida, no item anterior, a equação (IV.21).

O colchete de Poisson canônico $\{F,G\}$ entre dois funcionais F e G, dependentes das variáveis canônicas introduzidas neste item, pode ser definido como (Goldstein, 1980)

$$\{F,G\} = \int d\vec{r} \left\{ \left(\frac{\delta F}{\delta \alpha} \frac{\delta G}{\delta \pi_\alpha} - \frac{\delta G}{\delta \pi_\alpha} \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right) + \left(\frac{\delta F}{\delta \chi} \frac{\delta G}{\delta \pi_\chi} - \frac{\delta G}{\delta \chi} \frac{\delta F}{\delta \pi_\chi} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\delta F}{\delta \psi} \frac{\delta G}{\delta \pi_\psi} - \frac{\delta G}{\delta \psi} \frac{\delta F}{\delta \pi_\psi} \right) \right\} \quad . \tag{IV.56}$$

Usando-se essa definição do colchete de Poisson e a Hamiltoniana da equação (IV.49), pode-se deduzir as equações de movimento do sistema considerado, a partir das equações de Hamilton escritos na forma

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \{\alpha,H\} \quad , \quad \frac{\partial\pi_\alpha}{\partial t} = \{\pi_\alpha,H\} \tag{IV.57}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = \{\chi,H\} \quad , \quad \frac{\partial\pi_\chi}{\partial t} = \{\pi_\chi,H\} \tag{IV.58}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \{\psi,H\} \quad , \quad \frac{\partial\pi_\psi}{\partial t} = \{\pi_\psi,H\} \quad . \tag{IV.59}$$

Cada uma das variáveis canônicas pode ser escrita como um funcional, como por exemplo

$$\alpha(\vec{r}) = \int d\vec{r}\,'\ \alpha(\vec{r}\,')\ \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \quad . \tag{IV.60}$$

Assim sendo, pode-se calcular as seguintes derivadas funcionais

$$\frac{\delta\alpha(\vec{r})}{\delta\alpha(\vec{r}\,')} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{IV.61}$$

$$\frac{\delta\alpha}{\partial u} = 0 \quad , \tag{IV.62}$$

onde u representa qualquer uma das variáveis canônicas, exceto α. Dessa forma, pode-se facilmente mostrar que as equações (IV.57) correspondem às equações (IV.50) e (IV.51)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \{\alpha,H\} = \int d\vec{r}\ \frac{\delta H}{\delta\pi_\alpha}\ \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{\delta H}{\delta\pi_\alpha}$$

$$\frac{\partial \pi_\alpha}{\partial t} = \{\pi_\alpha, H\} = - \int d\vec{r}\,' \frac{\delta H}{\delta \alpha} \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = - \frac{\delta H}{\delta \alpha} \quad .$$

Da mesma forma pode-se deduzir que as equações (IV.58) e (IV.59) correspondem às equações (IV.52) a (IV.55).

O colchete de Poisson, definido pela equação (IV.56), é anti-simétrico em relação à troca do funcional F pelo funcional G, é linear em F, satisfaz à regra do produto e à identidade de Jacobi (Goldstein, 1980).

e. FORMALISMO HAMILTONIANO NÃO-CANÔNICO

Um colchete de Poisson não-canônico será deduzido neste item a partir do colchete canônico definido no item anterior. Com este novo colchete pode-se ter uma formulação Hamiltoniana, para as equações que descrevem o modelo mhd com viscosidade de giro, em termos das variáveis físicas M_s, ρ, B e β.

A dedução do colchete não-canônico a partir do canônico, conhecido em termos das variáveis de Clebsch, tem o objetivo de mostrar a relação existente entre os dois formalismos associados a esses colchetes. Entretanto, é sempre possível descobrir-se, diretamente, um colchete de Poisson não-canônico. Esta é a forma como o colchete apresentado neste item foi originalmente encontrado (Morrison, Caldas e Tasso, 1984). Convém lembrar que, assim sendo, pode-se estender a formulação Hamiltoniana para sistemas que não possuem um princípio variacional. Esta parece ser a conseqüência mais fundamental desses novos colchetes, além de suas aplicações a soluções de vários problemas, como o de equilíbrio e estabilidade (Hazeltine, Holm, Marsden e Morrison, 1984).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
703
INSTITUTO DE FÍSICA

Na dedução a ser apresentada será considerado que os funcionais F e G, em termos dos quais o colchete canônico {F,G} é definido, dependem das variáveis físicas M_s, ρ, B e β através das dependências dessas variáveis com as variáveis canônicas α, χ, ψ, π_α, π_χ e π_ψ. É preciso, então, conhecer as relações entre as derivadas funcionais de F (ou G), em relação aos dois tipos de variáveis considerados.

Para simplificar a exposição a seguir, é introduzida uma nova notação para as variáveis canônicas, definindo-se as variáveis q_j, p_j $(j = 1,2,3)$ como

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv -\pi_\alpha = \beta \quad , \quad p_1 = \alpha \\ q_2 &\equiv -\pi_\chi = \rho \quad , \quad p_2 = \chi \\ q_3 &\equiv -\pi_\psi = B \quad , \quad p_3 = \psi \quad . \end{aligned} \tag{IV.63}$$

Em termos dessas variáveis, o colchete canônico {F,G}, definido pela equação (IV.56), é escrito como

$$\{F,G\} = \int d\vec{r} \left(\frac{\delta F}{\delta q_j} \frac{\delta G}{\delta p_j} - \frac{\delta G}{\delta q_j} \frac{\delta F}{\delta p_j} \right) \quad . \tag{IV.64}$$

A partir da igualdade

$$A(q_j,p_j) = A(M_j,q_j) \quad , \tag{IV.65}$$

onde

$$M_j = q_i \, \partial_j p_i + \hat{\theta}_i \, \beta \tag{IV.66}$$

é a representação (IV.28), escrita em termos de q_i e p_i, pode

-se calcular as relações entre as diferentes derivadas funcionais:

$$\frac{\delta F(q_j,p_j)}{\delta q_j} = \frac{\delta F(M_j,q_j)}{\delta q_j} + (\partial_\ell p_j)\frac{\delta F(M_j,q_j)}{\delta M_\ell} +$$

$$+ \hat{\theta}^+_\ell \frac{\delta F(M_j,q_j)}{\delta M_\ell} \delta_{j1} \qquad \text{(IV.67)}$$

$$\frac{\delta F(q_j,p_j)}{\delta p_j} = -\partial_\ell \left[q_j \frac{\delta F(M_j,q_j)}{\delta M_\ell} \right] . \qquad \text{(IV.68)}$$

Substituindo-se essas duas últimas relações na equação (IV.64), tem-se

$$\{F,G\} = \int d\vec{r} \left\{ \left[F_{q_j} + (\partial_\ell p_j) F_\ell + \delta_{j3} \hat{\theta}^+_\ell F_\ell \right] \left[-\partial_t (q_j G_t) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\partial_t (q_j F_t) \right] \left[G_{q_j} + (\partial_\ell p_j) F_\ell + \hat{\theta}^+_\ell F_\ell \delta_{j3} \right] \right\} , \qquad \text{(IV.69)}$$

onde, por simplicidade, foi adotada a notação

$$F_t \equiv \frac{\delta F}{\delta M_t}$$

$$\text{(IV.70)}$$

$$F_{q_j} \equiv \frac{\delta F}{\delta q_j} .$$

A expressão (IV.69) pode ser transformada como será visto a seguir

$$\{F,G\} = \int d\vec{r} \left\{ q_j \left(G_t \partial_t F_{q_j} - F_t \partial_t G_{q_j} \right) + \right.$$

$$+ q_j G_t \left[(\partial_\ell \partial_t p_j) F_\ell + (\partial_\ell p_j) \partial_t A_\ell + \delta_{j3} \hat{\theta}_\ell^+ \partial_t F_\ell \right] +$$

$$- q_j F_t \left[(\partial_\ell \partial_t p_j) G_\ell + (\partial_\ell p_j) \partial_t G_\ell + \delta_{j3} \hat{\theta}_\ell^+ \partial_t G_\ell \right] \Big\} =$$

$$= \int d\vec{r} \Big\{ q_j (G_t \partial_t F_{q_j} - F_t \partial_t G_{q_j}) + q_j \partial_\ell p_j (G_t \partial_t F_\ell - F_t \partial_t G_\ell) +$$

$$+ \delta_{j3} (q_j G_t \hat{\theta}_\ell^+ \partial_t F_\ell - q_j F_t \hat{\theta}_\ell^+ \partial_t G_\ell) \Big\} \quad . \qquad \text{(IV.71)}$$

A integral referente à soma dos termos dentro do último parênteses no integrando da equação (IV.71) pode ser escrita como

$$\int d\vec{r} \, (q_j G_t \hat{\theta}_\ell^+ \partial_t F_\ell - q_j F_t \hat{\theta}_\ell^+ \partial_t G_\ell) =$$

$$= \int d\vec{r} \left[\partial_t F_\ell \hat{\theta}_\ell (q_j G_t) - (\partial_t G_\ell) \hat{\theta}_\ell (q_j F_t) \right] =$$

$$= \int d\vec{r} \Big\{ \left[(\partial_t F_\ell) G_t - (\partial_t G_\ell) F_t \right] \hat{\theta}_\ell q_j + q_j \left[(\partial_t F_\ell) \hat{\theta}_\ell G_t - (\partial_t G_\ell) \hat{\theta}_\ell F_t \right] \Big\} .$$

$$\text{(IV.72)}$$

Combinando as equações (IV.71) e (IV.72), e usando a relação (IV.66), obtém-se

$$\{F,G\} = \int d\vec{r} \Big\{ q_j (G_t \partial_t F_{q_j} - F_t \partial_t G_{q_j}) + M_\ell (G_t \partial_t F_\ell - F_t \partial_t G_\ell) +$$

$$+ \beta \left[(\partial_t F_\ell)(\hat{\theta}_\ell G_t) - (\partial_t G_\ell) \hat{\theta}_\ell F_t \right] \Big\} \quad . \qquad \text{(IV.73)}$$

A integral referente à soma dos termos dentro do último colchete pode ser escrita como

$$\int d\vec{r}\ \beta\left[(\partial_t F_\ell)(\hat{\theta}_\ell G_t) - (\partial_t G_\ell)\hat{\theta}_\ell F_t\right] =$$

$$= \int d\vec{r}\ \frac{\beta}{2}\left[-(\partial_t F_\ell)\varepsilon_{k\ell}(\partial_k G_t) + (\partial_t G_\ell)\varepsilon_{k\ell}(\partial_k F_t)\right] =$$

$$= \int d\vec{r}\ \beta(\partial_s F_i)(\partial_t G_j)\ \frac{1}{2}\ (-\ \varepsilon_{ti}\ \delta_{sj} + \varepsilon_{sj}\ \delta_{ti}) =$$

$$= \int d\vec{r}\ \beta\, N_{ijst}\ (\partial_s F_i)(\partial_t G_j) \quad , \qquad \text{(IV.74)}$$

onde o tensor N_{ijst} é definido pela equação (IV.26). Combinando as equações (IV.73) e (IV.74), obtém-se, finalmente, a expressão desejada para o colchete de Poisson não-canônico

$$\{F,G\} = \int d\vec{r}\left[q_j(G_t\,\partial_t F_{q_j} - F_t\,\partial_t G_{q_j}) + M_\ell(G_t\,\partial_t F_\ell - F_t\,\partial_t G_\ell)\right] +$$

$$+ \int d\vec{r}\ \beta\, N_{ijst}\ (\partial_s F_i)(\partial_t G_j) \quad . \qquad \text{(IV.75)}$$

A expressão para o colchete de Poisson, que aparece na equação anterior, em termos das variáveis M_s, ρ, B e β é

$$\{F,G\} = -\int d\vec{r}\left[M_\ell\left(\frac{\delta F}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta G}{\delta M_\ell} - \frac{\delta G}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta F}{\delta M_\ell}\right) +\right.$$

$$+ \rho\left(\frac{\delta F}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta G}{\delta \rho} - \frac{\delta G}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta F}{\delta \rho}\right) +$$

$$+ B\left(\frac{\delta F}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta G}{\delta B} - \frac{\delta G}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta F}{\delta B}\right) +$$

$$\left. + \beta\left(\frac{\delta F}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta G}{\delta \beta} - \frac{\delta G}{\delta M_t}\ \partial_t\ \frac{\delta F}{\delta \beta}\right)\right] +$$

$$+ \int d\vec{r}\ \beta\, N_{ijst}\left(\partial_s\ \frac{\delta F}{\delta M_i}\right)\left(\partial_t\ \frac{\delta G}{\delta M_j}\right) \quad . \qquad \text{(IV.76)}$$

A primeira integral desta equação coincide com a expressão do colchete de Poisson para o modelo mhd sem viscosidade de giro, em configurações bidimensionais (Morrison e Greene, 1980). A segunda integral depende da viscosidade de giro e é determinada pelo divergente do tensor de viscosidade ($\partial_i \pi_{is}$) que aparece na equação (IV.21). Assim sendo, pode-se escrever a equação (VI.76) na forma

$$\{F,G\} = \{F,G\}_{mhd} + \{F,G\}_v \quad , \tag{IV.77}$$

onde o primeiro colchete do lado direito desta equação corresponde ao colchete obtido por Morrison e Greene (1980) para o modelo mhd , e o segundo corresponde ao termo adicional obtido considerando-se a viscosidade de giro.

Usando a notação empregada na capítulo anterior para escrever o colchete não-canônico, dado pela equação (II.61), tem-se

$$\begin{aligned}\{F,G\} = -\int d\vec{r} \Bigg[& \vec{M} \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta \vec{M}} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta \vec{M}} \right) + \\ & + \rho \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta \rho} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta \rho} \right) + \\ & + B \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta B} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta B} \right) + \\ & + \beta \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta \beta} - \frac{\delta G}{\delta \vec{M}} \cdot \nabla \frac{\delta F}{\delta \beta} \right) \Bigg] + \{F,G\}_v \quad . \end{aligned} \tag{IV.78}$$

As equações que descrevem o modelo considerado neste capítulo podem ser deduzidas a partir do colchete definido pela equação (IV.76) e pela Hamiltoniana

$$H = \int d\vec{r} \left(\frac{M^2}{2\rho} + \beta|B| + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) , \qquad (IV.79)$$

usando-se as equações de Hamilton generalizadas, escritas na forma

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = \{M_s, H\} \qquad (IV.80)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{\rho, H\} \qquad (IV.81)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \{B, H\} \qquad (IV.82)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \{\beta, H\} \quad . \qquad (IV.83)$$

Para se obter as equações (IV.21) a (IV.24) a partir das equações anteriores, deve-se considerar as variáveis M_s, ρ, B e β como funcionais do tipo definido pela equação (IV.60). Assim, as equações (IV.22) a (IV.24) podem ser facilmente deduzidas das equações (IV.81) a (IV.83), respectivamente. Considerando-se a equação (IV.80), tem-se

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = \{M_s, H\} = \left[-\rho\, \partial_s \frac{\delta H}{\delta \rho} - B\, \partial_s \frac{\delta H}{\delta B} - \beta\, \partial_s \frac{\delta H}{\delta \beta} - \right.$$

$$\left. - \partial_t \left(M_s \frac{\delta H}{\delta M_t} \right) - M_t\, \partial_s \frac{\delta H}{\delta M_t} - \partial_i \left(\beta N_{sjit}\, \partial_t \frac{\delta H}{\delta M_j} \right) \right] \quad . \qquad (IV.84)$$

As derivadas funcionais de H em relação a M_t, ρ, B e β são

$$\frac{\delta H}{\delta M_t} = \frac{M_t}{\rho} \quad , \qquad \frac{\delta H}{\delta \rho} = -\frac{M^2}{2\rho^2}$$

$$\frac{\delta H}{\delta B} = (\text{sinal de } B)\beta + B \quad , \quad \frac{\delta H}{\delta \beta} = |B| \quad .$$

Substituindo-se essas derivadas na equação (IV.84), tem-se

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = -\beta\, \partial_s (|B|) - B\, \partial_s \left[(\text{sinal de } B)\beta + B \right] -$$

$$- \partial_t \left(\frac{M_s M_t}{\rho} \right) - \partial_i \left(\beta N_{sjit}\, \partial_t \frac{M_j}{\rho} \right)$$

ou

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = - \partial_t \left(\frac{M_s M_t}{\rho} \right) - \partial_i \left(\beta |B| + \frac{B^2}{2} \right) - \partial_i \pi_{is} \quad ,$$

que é a equação (IV.21).

Dessa forma as equações, que descrevem o modelo considerado, foram obtidas diretamente de equações de Hamilton expressas em termos de um colchete de Poisson não-canônico, independentemente da existência de um formalismo Lagrangiano.

O colchete de Poisson $\{F,G\}$, apresentado neste item, satisfaz às propriedades algébricas indicadas nas equações (III.55) a (III.58). A anti-simetria em relação à troca do funcional F pelo funcional G, a linearidade em F e G e a regra do produto pode ser demonstradas facilmente. A identidade de Jacobi, entretanto, costuma apresentar dificuldades para ser provada; a demonstração referente ao colchete de Poisson discutido pode ser encontrada no trabalho de Morrison, Caldas e Tasso (1984).

f. CONSTANTES DE MOVIMENTO

O sistema dinâmico descrito pelas equações (IV.21) a (IV.24) possui densidades C que satisfazem a equações do tipo

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla . \vec{D} = 0 \quad , \tag{IV.85}$$

onde C e $\vec{D}$ dependem das variáveis M_s , ρ , B e β . À cada densidade corresponde uma constante de movimento, pois

$$\frac{d}{dt} \int d\vec{r}\, C = - \int d\vec{r}\, \nabla . \vec{D} = 0 \quad , \tag{IV.86}$$

já que os termos de superfície se anulam. As constantes de movimento no modelo mhd com viscosidade de giro são

$$H = \int d\vec{r} \left(\frac{M^2}{2\rho} + \beta |B| + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \tag{IV.87}$$

$$\vec{P} = \int d\vec{r}\, \vec{M} \tag{IV.88}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{r}\, \vec{r} \times \vec{M} \tag{IV.89}$$

$$\vec{G} = \int d\vec{r}\, (\rho \vec{r} - t\vec{M}) \quad . \tag{IV.90}$$

A primeira constante de movimento (H) é a energia total do plasma e a Hamiltoniana considerada neste capítulo. A segunda e a terceira ($\vec{P}$ e $\vec{L}$) são, respectivamente, as quantidades de movimento linear e angular do plasma. A última constante $\vec{G}$ está relacionada, fisicamente, à uniformidade do movimento do centro de massa do plasma. Pode-se verificar que esses funcionais são cons

tantes, usando-se as equações (IV.21) a (IV.24), ou mostrando que eles comutam com a Hamiltoniana (IV.79) (com exceção do funcional G, que depende explicitamente do tempo).

Além dessas constantes de movimento, existem outras que comutam com qualquer funcional $F(M_s,\rho,B,\beta)$, ou seja,

$$\{R,F\} = 0 \quad , \tag{IV.91}$$

sendo $\{R,F\}$ o colchete definido pela equação (IV.76). Assim, R é uma constante, qualquer que seja a Hamiltoniana. Os funcionais R são denominados invariantes de Casimir e são uma propriedade do colchete de Poisson não-canônico envolvido (Sudarshan e Mukunda, 1983). Para o colchete considerado neste item foram encontrados os seguintes invariantes de Casimir

$$R = \sum_i \lambda_i \int d\vec{r}\, \rho^{a_i} B^{b_i} \beta^{c_i} \quad , \tag{IV.92}$$

onde λ_i são constantes arbitrárias e as constantes a_i, b_i e c_i estão relacionadas pela equação

$$a_i + b_i + c_i = 1 \quad . \tag{IV.93}$$

Uma expressão mais geral que (IV.92) é

$$R = \int d\vec{r}\, \rho\, f\left(\frac{B}{\rho}, \frac{\beta}{\rho}\right) \quad , \tag{IV.94}$$

onde f é uma função arbitrária. No integrando desta equação as variáveis B, β e ρ podem ser permutadas. Os invariantes de Casimir encontrados dependem apenas de ρ, B e β.

De uma maneira geral, os invariantes de Casimir podem ser usados no estudo da estabilidade das configurações inves

tigadas. Com eles podem ser encontrados princípios variacionais, que determinam as classes de equilíbrio possíveis e os critérios de estabilidade não linear (Hazeltine, Holm, Marsden e Morrison, 1984).

V. ESPECTRO DE FLUTUAÇÕES EM TOKAMAKS

a. INTRODUÇÃO

O formalismo Hamiltoniano para o modelo magneto-hidrodinâmico com viscosidade de giro será utilizado neste capítulo para analisar o espectro turbulento das ondas de deriva observadas em tokamaks (Surko e Slusher, 1980).

Como ainda não é conhecido um sistema de equações que descreva adequadamente essas ondas, justifica-se a procura de modelos simples, incluindo efeitos não-lineares e/ou dispersivos, que levem a resultados concordantes qualitativamente com as observações experimentais (Tasso, 1983).

Considerando a equação KdV na descrição das oscilações de deriva em tokamaks e a termodinâmica de meios contínuos, Tasso e Lerbinger (1983) calcularam o espectro ($\vec{k}$) dessas oscilações. O termo dispersivo da equação KdV foi associado ao efeito dispersivo da viscosidade de giro. A concordância qualitativa boa entre os resultados obtidos e os valores experimentais motivou a realização da investigação relatada neste capítulo (Caldas e Tasso, 1984b).

Para analisar as oscilações de deriva em tokamaks, será utilizado o modelo mhd bidimensional com viscosidade de giro, apresentado no capítulo anterior. No item b serão discutidos o equilíbrio e as oscilações considerados e serão deduzidas, do

modelo mencionado, as equações que os descrevem. Nesse mesmo item será apresentada uma formulação Hamiltoniana para a equação linearizada, obtida para descrever as oscilações mencionadas. No item c será calculado e discutido o comportamento qualitativo do espectro de flutuações, considerando-se o limite $k \to \infty$. As conseqüências dessa análise serão também discutidas nesse mesmo item.

O objetivo do trabalho apresentado neste capítulo é o de investigar a influência da viscosidade de giro no espectro das oscilações, deduzido numa aproximação linear.

b. EQUILÍBRIO E PERTURBAÇÕES

As equações básicas consideradas neste capítulo são as do modelo mhd com viscosidade de giro, já apresentadas no item b do capítulo anterior. Como naquele capítulo, as linhas de força do campo magnético são paralelas e sua direção é indicada pelo versor $\vec{e}_z$, ou seja,

$$\vec{B} = B\,\vec{e}_z \quad . \tag{V.1}$$

Assim, as equações básicas do modelo considerado são:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi} \tag{V.2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla B - B\nabla \cdot \vec{v} \tag{V.3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \rho - \rho\,\nabla \cdot \vec{v} \tag{V.4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla P - \gamma P \nabla \cdot \vec{v} \quad . \tag{V.5}$$

O equilíbrio a ser considerado a seguir é estático e uniforme, ou seja,

$$\vec{v}_0 = 0$$
$$\nabla P_0 = \nabla B_0 = \nabla \rho_0 = 0 \quad . \tag{V.6}$$

Na descrição de Euler, o movimento de um fluido é descrito em função das variáveis $(\vec{r},t)$. Na descrição de Lagrange considera-se a velocidade de um elemento de fluido como uma função do tempo t e da posição inicial $\vec{r}_0$ no instante inicial t=0. Na análise a ser feita a seguir é conveniente usar-se uma mistura destas descrições, isto é, o deslocamento infinitesimal de um elemento de fluido em torno de sua trajetória de equilíbrio, descrita pelo vetor $\vec{r}$, é representado pelo vetor $\vec{\xi}$ (Vuillemin, 1965), indicado na figura (1).

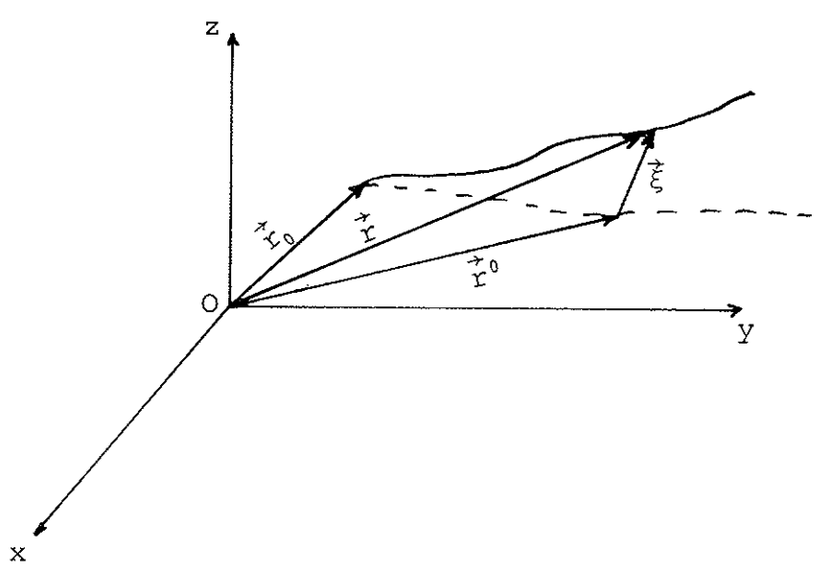

Fig. 1 - A linha cheia (——) indica a trajetória perturbada de um elemento de fluido e a linha pontilhada (----) sua trajetória em equilíbrio.

O deslocamento $\vec{\xi}$, definido como

$$\vec{\xi}\,(\vec{r}^{\,0}, t) = \vec{r} - \vec{r}^{\,0} \quad , \tag{V.7}$$

é uma função de t e das coordenadas de Euler do equilíbrio. A partir da equação anterior obtém-se

$$\delta\vec{v} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} \quad , \tag{V.8}$$

onde $\delta\vec{v}$ é a perturbação da velocidade de um elemento de fluido

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v} \quad . \tag{V.9}$$

Neste trabalho será usado $\vec{v}$ para indicar a velocidade perturbada, pois $v_0 = 0$.

Linearizando-se a equação (V.2), obtém-se

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} = -\nabla\left(\delta P + \frac{B_0\,\delta B}{\mu_0}\right) - \nabla\,.\,\delta\overleftrightarrow{\pi} \quad , \tag{V.10}$$

onde δP, δB e $\delta\overleftrightarrow{\pi}$ são as perturbações de P, B e $\overleftrightarrow{\pi}$ em torno do equilíbrio considerado. Derivando-se os termos dessa equação em relação a t, tem-se

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{v} = -\nabla\left(\frac{\partial\delta P}{\partial t} + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\partial\delta B}{\partial t}\right) - \nabla\,.\,\delta\frac{\partial\overleftrightarrow{\pi}}{\partial t} \quad . \tag{V.11}$$

As perturbações δP e δB podem ser calculadas usando-se as equações (V.3) e (V.5), respectivamente. Assim são obtidas as equações

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\delta P = -\gamma P_0\,\nabla\,.\,\vec{v} \tag{V.12}$$

$$\frac{\partial\,\delta B}{\partial t} = -B_0\,\nabla\,.\,\vec{v} \quad . \tag{V.13}$$

O último termo da equação (V.11) pode ser calculado a partir da equação (IV.14), obtendo-se

$$\nabla \cdot \delta \frac{\partial \overleftrightarrow{\pi}}{\partial t} = \frac{\beta}{2} \nabla^2 \left(\vec{e}_z \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \quad . \tag{V.14}$$

Após a substituição das expressões de δP, δB e $\delta \overleftrightarrow{\pi}$ na equação (V.11), esta pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \hat{E} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \hat{F} \vec{v} = 0 \quad . \tag{V.15}$$

$\hat{E}$ e $\hat{F}$ são respectivamente operadores anti-simétrico e simétrico definidos por

$$\hat{E} \equiv a \nabla^2 \vec{e}_z \times \ldots \tag{V.16}$$

$$\hat{F} \equiv - b \nabla (\nabla \cdot \ldots) \quad , \tag{V.17}$$

sendo a e b constantes dadas por

$$a = \frac{\beta}{2\rho_0} \quad , \quad b = \frac{1}{\rho_0} \frac{B_0^2}{\mu_0} + \gamma P_0) \quad . \tag{V.18}$$

Levando-se em conta as propriedades de simetria dos operadores $\hat{E}$ e $\hat{F}$, pode-se associar uma Lagrangiana e uma Hamiltoniana à equação (V.15) (Tasso, 1984). A Lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} , \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} (\vec{v} , \hat{E} \vec{v}) - \frac{1}{2} (\vec{v} , \hat{F} \vec{v}) \quad , \tag{V.19}$$

onde (,) indica o produto escalar num espaço funcional convenientemente definido. O momento $\vec{p}$ pode ser definido como

$$\vec{p} \equiv \frac{\delta L}{\delta\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\hat{E}\vec{v} \quad , \tag{V.20}$$

e a Hamiltoniana como

$$H = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\,,\,\vec{p}\right) - L \quad . \tag{V.21}$$

Usando-se as expressões (V.19) e (V.20),

$$H = \frac{1}{2}\left(\vec{p} - \frac{1}{2}\hat{E}\vec{v}\,,\,\vec{p} - \frac{1}{2}\hat{E}\vec{v}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{v}\,,\,\hat{F}\,\vec{v}\right) \quad . \tag{V.22}$$

A Hamiltoniana dada pela equação anterior pode também ser escrita na forma

$$H = \frac{1}{2}\left(Y\,,\,\hat{M}\,Y\right) \tag{V.23}$$

onde

$$Y \equiv \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \tag{V.24}$$

e

$$\hat{M} \equiv \begin{pmatrix} I & -\hat{E}/2 \\ \hat{E}/2 & \hat{F} - \hat{E}^2/4 \end{pmatrix} \quad . \tag{V.25}$$

Y pode ser decomposto em termos das autofunções do operador $\hat{M}$

$$Y = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, Y_j \quad , \tag{V.26}$$

onde as autofunções Y_j são

$$Y_j = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{C} \end{pmatrix} e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} \quad , \tag{V.27}$$

pois o equilíbrio considerado é uniforme. Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{C}$, como $\vec{p}$ e $\vec{v}$, são perpendiculares a $\vec{B}_0$. Os autovalores λ_j do operador $\hat{M}$ podem ser calculados a partir da equação

$$\hat{M}\, Y_j = \lambda_j\, Y_j \quad , \tag{V.28}$$

que, após as substituições das expressões de $\hat{M}$ e Y_j, leva à obtenção do sistema de equações

$$\begin{pmatrix} \vec{A} + a\, k_j^2\, \vec{e}_z \quad \vec{C} \\ -a\, k_j^2\, \vec{e}_z \times \vec{A} + (a^2 k_j^4 + b\, k_j^2)\vec{C} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{C} \end{pmatrix} \quad . \tag{V.29}$$

Deste sistema de equações, obtém-se (Caldas e Tasso, 1984b)

$$\lambda_j = \frac{1}{2}\left(1 + a^2 k_j^4 + b k_j^2 \pm \sqrt{(1 + a^2 k_j^4 + b k_j^2) - 4 b k_j^2} \right) \quad . \tag{V.30}$$

Para valores grandes de k_j, obtém-se

$$\lambda_j \approx a^2\, k_j^4 \tag{V.31}$$

e

$$\lambda_j \approx \frac{b}{a^2}\, k_j^{-2} \quad . \tag{V.32}$$

c. ESPECTRO DE FLUTUAÇÕES

Supondo que a estatística de Gibbs possa ser aplicado ao estudo das oscilações do sistema físico considerado, pode-se introduzir a função de partição Z como uma integral de funcionais, definida no espaço de fase dos campos considerados (Tasso, 1984),

$$Z = \int D(\vec{v})\, D(\vec{p})\, \exp(-\alpha H) \quad . \tag{V.33}$$

Usando-se a expressão de H, dada pela equação (V.22), obtém-se

$$Z = \int D(Y)\, \exp\left[-\frac{1}{2}\,\alpha(Y, \hat{M}\, Y)\right] \quad . \tag{V.34}$$

O produto escalar $(Y, \hat{M}\, Y)$ pode ser calculado, usando-se as equações (V.26) a (V.28)

$$(Y, \hat{M}\, Y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\, \lambda_j \quad . \tag{V.35}$$

Assim sendo, a função de partição é dada por

$$Z = \int \prod_{j=1}^{\infty} da_i\, \exp\left(-\frac{1}{2}\,\alpha \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\, \lambda_j\right) \quad . \tag{V.36}$$

A condição

$$\lambda_j > 0 \tag{V.37}$$

garante que H seja positivo e que o sistema considerado seja estável.

A partir da expressão de Z, dada pela equação (V.36),

pode-se calcular o valor esperado de a_j^2, em função dos auto-valores λ_j e do parâmetro α (Tasso, 1984)

$$\langle \alpha_j^2 \rangle = \frac{1}{\alpha \lambda_j} \quad . \tag{V.38}$$

O espectro das flutuações existentes no sistema considerado é, portanto, determinado pelos valores de λ_j e pelo parâmetro α.

A equação (V.38) é válida para oscilações descritas por equações do tipo da equação (V.15) (Tasso, 1984). No modelo considerado neste capítulo, tem-se, para $k_j \to \infty$,

$$\langle a_j^2 \rangle \approx k_j^{-4} \tag{V.39}$$

e

$$\langle a_j^2 \rangle \approx k_j^2 \quad . \tag{V.40}$$

Este último limite corresponde a uma divergência do tipo ultravioleta, não compatível com o espectro de oscilações observados em tokamaks. Um resultado também incorreto para esse limite é obtido quando se considera o modelo mhd sem viscosidade de giro, pois, para $k_j \to \infty$,

$$\langle a_j^2 \rangle \approx k_j^{-2} \tag{V.41}$$

e

$$\langle a_j \rangle \approx \text{constante} \quad . \tag{V.42}$$

Este último limite, embora não divergente, também é inaceitável fisicamente.

A equação (V.38) foi deduzida considerando-se uma dis

tribuição Gaussiana de probabilidades. Com essa distribuição e linearizando-se a equação que descreve as oscilações, obteve-se um limite divergente de $\langle a_j^2 \rangle$ para $k_j \to \infty$. Pode-se concluir, portanto, que pelo menos uma dessas hipóteses não pode ser utilizada no cálculo do espectro de tokamaks. O formalismo Hamiltoniano canônico para o modelo mhd não linearizado com viscosidade de giro, apresentado no capítulo anterior, pode ser utilizado para a dedução desse espectro. A dificuldade principal consiste no cálculo da função de partição para esse modelo (Scalapino, Sears e Ferrell, 1972). A importância do efeito dispersivo da viscosidade de giro, contido nesse modelo, para esse cálculo, foi demonstrada pelos resultados obtidos por Tasso e Lerbinger (1983).

VI. CONCLUSÕES

Neste capítulo é apresentado um resumo dos principais resultados deste trabalho e apontadas suas possívesi aplicações.

Uma classe de equações não-lineares com colchetes de Poisson não-canônicos e constantes de movimento foi apresentada no capítulo II (Caldas e Tasso, 1984a). Aplicando-se o teorema de Poisson, foi obtida uma relação geral entre as constantes de movimento cujas densidades não polinômios na variável considerada. Uma relação desse tipo pode ser utilizada para encontrar novas constantes de movimento (Miura, 1968).

Utilizando-se uma combinação da representação de Clebsch para as variáveis de fluido com os potenciais eletromagnéticos para os campos elétrico e magnético, foi obtido, no capítulo III, um princípio variacional, a partir do qual se pode deduzir as equações que descrevem o modelo de dois fluidos, levando-de em conta os movimentos térmicos dos fluidos. A partir desse princípio variacional foi desenvolvido um formalismo Hamiltoniano canônico em termos das variáveis mencionadas (Caldas e Tasso, 1984a).

No capítulo IV foi apresentado um princípio variacional para o modelo magneto-hidrodinâmico com viscosidade de giro. A generalização da representação de Clebsch introduzida inclui o efeito dessa viscosidade. Com essa representação, foi apresentado um formalismo Hamiltoniano canônico para esse modelo. Um colchete de Poisson não-canônico, que caracteriza um formalismo Ha-

miltoniano não-canônico para o modelo mhd com viscosidade de giro, foi obtido a partir do colchete canônico. Nesse capítulo foram ainda apresentadas as constantes de movimento do sistema e os invariantes de Casimir encontrados, associados ao colchete não-canônico (Morrison, Caldas e Tasso, 1984). As configurações bidimensionais consideradas permitem descrever vários aspectos das descargas elétricas em tokamaks (Hazeltine, Kotschenreuther e Morrison, 1984).

Com os formalismos Hamiltonianos não canônicos, apresentados nos capítulos III e IV, pode-se obter princípios variacionais que descrevam diferentes classes de equilíbrio e suas instabilidades lineares e não-lineares (Hazeltine e outros, 1984).

O espectro de ondas de deriva, observadas em tokamaks, foi discutido no capítulo V. Para isso foi considerado o modelo mhd linearizado com viscosidade de giro. Alguns métodos da mecânica estatística foram utilizados para se examinar a influência dessa viscosidade no espectro mencionado. Os resultados obtidos mostraram a existência de uma divergência do tipo ultravioleta no espectro $(\vec{k})$ dessas ondas (Caldas e Tasso, 1984b). Pode-se concluir, então, que essa discussão deve ser feita considerando-se uma equação não-linear na descrição das oscilações de deriva. O formalismo Hamiltoniano apresentado no capítulo IV pode ser utilizado, apesar das dificuldades que aparecem no cálculo da função de partição, no estudo dessas oscilações (Tasso, 1983.

REFERÊNCIAS

Atherton R W e Homsy G M 1975, *Stud. Appl. Math.* **54**, 31.

Born M e Infeld L 1935, *Proc. Roy. Soc.* **A150**, 141.

Caldas I L e Tasso H 1979, *Lett. Nuovo Cimento* **24**, 500.

Caldas I L e Tasso H 1984a, *Z. Naturf.* **39a**, 9.

——— 1984b, Report IPP 6/237. Aceito para publicação em *Phys. Lett.*.

Cary J 1984, *Stellerator Magnetic Surfaces without Islands, Proc. Internat. Conf. Plasma Phys.*, CRPP, Lausanne.

Chapman S e Cowling T 1953, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press.

Clebsch A 1859, *J. reine angew. Math.* **56**, 1.

Freidberg J P 1982, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 801.

Galvão R M O 1983, *Estabilidade Magnetohidrodinâmica de Configurações de Confinamento Magnético de Plasmas com Simetria Axial*, tese de Livre-Docência, IFUSP.

Gardner C S 1971, *J. Math. Phys.* **12**, 1548.

Goldstein H 1980, *Classical Mechanics*, 2nd Edition, Addison-Wesley.

Hain K, Lüst R e A Schlüter 1957, *Z. Naturf.* **12a**, 833.

Hazeltine R D, Holm D D, Marsdern J E e Morrison P J 1984, *Proc. Int. Conf. Plasma Phys.*, 204.

Hazeltine R D, Kotschenreuther M e Morrison P J 1984, trabalho em desenvolvimento.

Kaufman A N 1960, *Phys. Fluids* **3** .

Karpman V T 1975, *Non-Linear Waves in Dispersive Media*, Pergamon Press.

Lundqvist S 1951, *Phys. Rev.* **83**, 307.

——— 1952, *Ark. Mat. Ast. Fys.* **5**, 297.

Marsden J E e Morrison P J 1984, *Contemporary Math.* **28** .

Miura R M, Gardner C S e Kruskal M D 1968, *J. Math. Phys.* **9**, 1204.

Morrison P J, Caldas I L e Tasso H 1978, Report IPP 6/329, a ser publicado.

Morrison P J e Greene J M 1980, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 790.

Nascimento I C 1979, *Fusão Termonuclear Controlada*, em *Física de Plasma*, editada por A L Chian e M Reusch, Universidade Federal Fluminense.

Newcomb W A 1966, *Dynamics of a Gyroviscous Plasma*, em *Dynamics of Fluids and Plasmas*, editado por S I Pai, Academic Press.

Pauli W 1933, *General Principles of Quantum Mechanics*, (reimpresso por Springer-Verlag).

Robinson D C 1982, *Revista Brasileira de Física*, Volume Especial I, 69.

Saarloos W V 1981, *Physica* **108A**, 557.

Sakanaka P H 1981, *Macroscopic Plasma Properties and Stability Theory*, em *Modern Plasma Physics*, IAEA, p. 3 .

Scalapino D J, Sears M e Ferrell R A 1972, *Phys. Rev.* **B6**, 3409.

Scott A C, Chu F Y F e McLaughlin D W 1973, *Proc. IEEE* **61**, 1443.

Seliger R L e Whitham F R S 1968, *Proc. Roy. Soc.* **A305**, 1.

Spencer R G 1982, *The Hamiltonian Structure of Multi-Species Fluid Electrodynamics*, em *Mathematical Methods in Hydrodynamics and Integrability in Related Dynamical Systems*, editado por M Tabor e Y M Treve.

Spitzer Jr L 1962, *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience Publishers.

Sudarshan E C e Mukunda N 1974, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, John Wiley and Sons.

Surko C M e Slusher R E 1980, *Phys. Fluids* **23**, 2425.

Tasso H 1979a, *Lett. Nuovo Cimento* **24**, 136.

——— 1979b, *Lett. Nuovo Cimento* **23**, 192.

——— 1983, *Phys. Lett.* **96A**, 33.

——— 1984, *Phys. Lett.* **103A**, 200.

Tasso H e Lerbinger K 1983, *Phys. Lett.* **97A**, 384.

Tasso H e Schram P P J M 1966, *N.F.* **6**, 284.

Vainberg M M 1964, *Variational Methods for the Study of Non-Linear Operators*, Holden-Day, Inc.

Vuillemin M 1965, Rapport C.E.A R2608.