

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



305M810T2689

# Teoria Quântica de Campos e Geometria do Espaço-Tempo

Jorge L. deLyra

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Livre-Docente.

Abril de 1997



## Resumo

Fazemos um estudo sobre a geração de geometria no espaço-tempo como consequência da introdução nele de campos quânticos de matéria. Utilizamos como definição de Teorias Quânticas de Campos sua representação na rede Euclideana. A introdução de fontes externas no modelo  $\lambda\phi^4$  quebra a invariância translacional do modelo na rede. Devido a isto o modelo passa a definir, através de sua massa renormalizada, uma escala física variável, dependente de posição. A interpretação desta escala física como a unidade física que define distâncias gera em redes finitas uma geometria métrica com curvatura intrínseca não-nula.

### Abstract

We study the generation of geometry in space-time as a consequence of the introduction in it of quantum matter fields. We use as definition of Quantum Field Theories their representation on the Euclidean lattice. The introduction of external sources in the  $\lambda\phi^4$  model breaks the translational invariance of the model on the lattice. Due to this the physical scale that the model defines through its renormalized mass becomes dependent on position. The interpretation of this physical scale as the physical unit which defines distances generates on finite lattices a metric geometry with non-zero intrinsic curvature.

## Dedicatória

Por ocasião da formulação desta tese, que espero seja a última que eu jamais venha a escrever, gostaria de deixar registradas as heranças intelectuais que recebi das pessoas que foram os meus principais mentores e professores, dentre os muitos bons professores com quem tive a felicidade de estudar. Assim, gostaria de dedicar este trabalho às pessoas que tiveram um papel particularmente importante em minha educação científica e que, mais do que isto, me guiaram pelos difíceis caminhos da ciência.

Dedico este esforço à memória de meu pai, o Professor Carlos B. de Lyra, que legou a mim não só as sementes da curiosidade e da honestidade intelectual, como a crença na redenção do ser humano através da ciência e da sabedoria; ao Professor Henrique Fleming, que me mostrou pela primeira vez, com extraordinário entusiasmo, as belezas da física, e que me iniciou em minha jornada pela ciência; ao Professor Lee Smolin, que me transmitiu a fascinação pelo estudo da gravitação; à memória do Professor Feza Gürsey, que me mostrou, mesmo nos poucos contatos que tivemos, uma visão profunda do relacionamento entre a física e a matemática; e ao Professor Bryce S. DeWitt, que me guiou à maturidade científica.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer de forma especial às pessoas que me acompanharam e ajudaram de uma forma constante durante todo o longo e difícil período de nossas vidas durante o qual este trabalho foi lentamente desenvolvido: minha esposa Maria Aparecida S. de Lyra e meus filhos Alexandre e Cassandra. Gostaria de agradecer também a todos os meus companheiros de trabalho, amigos, colaboradores e alunos, por todas as conversas, discussões, seminários e trocas de idéias que foram tão importantes para que todos aprendêssemos coisas novas, em especial ao Dr. Timothy E. Gallivan, ao Dr. See-Kit Foong, ao Prof. Carlos Eugênio I. Carneiro, ao Dr. André C. R. Martins e ao Prof. João Carlos A. Barata.

Eu gostaria de agradecer ao Departamento de Física Matemática e em particular ao Prof. H. Fleming pelo apoio constante em meu esforço para obter os insumos com os quais este trabalho foi realizado. O trabalho computacional envolvido na elaboração desta tese foi todo realizado em equipamentos da Universidade de São Paulo. A maior parte do trabalho básico das simulações foi realizado no computador paralelo IBM-SP2 do Laboratório de Computação Científica Avançada, ao qual devo muitos agradecimentos. O trabalho de simulação restante, bem como todo o trabalho de análise e elaboração dos resultados foi realizado nos equipamentos do Departamento de Física Matemática, com o uso extensivo de “free software”.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução e Revisão</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Campos Quânticos na Rede</b>	<b>5</b>
2.1	Definição da Teoria Clássica . . . . .	5
2.2	Definição da Teoria Quântica . . . . .	7
2.3	Simulações Estocásticas de Monte Carlo . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Alguns Fatos Relevantes</b>	<b>11</b>
3.1	Comportamento Crítico . . . . .	11
3.2	Descontinuidade das Configurações . . . . .	12
3.3	Trivialidade do Modelo . . . . .	13
3.4	Ação de Fontes Externas . . . . .	14
3.5	Invarianças Finitas . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Observáveis Locais para a Massa</b>	<b>17</b>
4.1	Teoria de Perturbações na Rede . . . . .	17
4.2	Observáveis Locais para $\alpha_R$ . . . . .	18
4.3	Testes dos Observáveis Locais . . . . .	20
4.4	Extrapolação para o Uso dos Observáveis . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Geometria Gerada na Rede</b>	<b>25</b>
5.1	Resultados Numéricos: Geometria da Secção . . . . .	25
5.2	Métodos Numéricos Utilizados . . . . .	33
5.3	Análise da Geometria da Secção . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>42</b>
<b>A</b>	<b>Gráficos</b>	<b>45</b>
A.1	Testes dos Observáveis . . . . .	46
A.2	Imersões da Secção . . . . .	49
A.3	Erros Residuais . . . . .	63

# Capítulo 1

## Introdução e Revisão

A física teórica contemporânea está baseada em duas grandes estruturas intelectuais fundamentais cuja descoberta constituiu a grande revolução ocorrida na primeira metade deste século: a Relatividade e a Mecânica Quântica. Mais do que teorias descritivas de um ou outro aspecto da estrutura da natureza, estas estruturas intelectuais constituem meta-teorias contendo os princípios fundamentais que regem toda a física. Dizemos que estas duas estruturas intelectuais são *teorias de princípio*, em contraste com as *teorias de substância* que descrevem cada aspecto da estrutura da natureza.

Dentre as teorias que descrevem as diversas formas fundamentais de interação entre as partículas que constituem a estrutura da matéria a mais bem conhecida e também aquela cujas aplicações são mais universais e familiares é, sem dúvida, a Eletrodinâmica. Berço da Relatividade, é também nela que se realizou a mais bem sucedida e completa aplicação dos princípios da Mecânica Quântica. Os princípios clássicos da Eletrodinâmica constituem uma das partes mais bem sucedidas da física e a aplicação a eles dos princípios da Mecânica Quântica levou à criação da Eletrodinâmica Quântica, a mais bem sucedida das Teorias Quânticas de Campos.

Os grandes sucessos da Eletrodinâmica Quântica levaram à formulação de generalizações dela, conhecidas como Teorias de Gauge, para a descrição das interações de curto alcance existentes na natureza. Em contraste com a Eletrodinâmica, que domina a estrutura da matéria ao nível do átomo e das moléculas, estas interações de curto alcance, chamadas de interações fortes e fracas, dominam a dinâmica da estrutura do núcleo atômico e de seus componentes. Estas são as interações cuja descoberta é mais recente, ocorrida neste século, sendo também as menos bem compreendidas.

As interações fracas são descritas e unificadas com a Eletrodinâmica por uma Teoria de Gauge de simetria  $U(1) \times SU(2)$ , enquanto as interações fortes são descritas pela Cromodinâmica Quântica, uma Teoria de Gauge com simetria  $SU(3)$ . Enquanto todas estas são teorias quânticas de campos vetoriais descrevendo diversos tipos de interação, os constituintes da matéria em si são partículas fermiônicas, descritas por campos espinoriais, que aparecem como *quarks* ou *leptons* segundo sejam ou não capazes de sofrer interações fortes. A este quadro todo chamamos de *modelo padrão* das partículas elementares.

Por outro lado, a forma de interação conhecida há mais tempo é sem dúvida a gravitação, cuja teoria clássica remonta às origens da Mecânica Clássica. De fato, a aplicação conjunta da Mecânica Clássica e da teoria da Gravitação Universal aos problemas de mecânica celeste foi um dos primeiros, grandes e duradouros sucessos da física clássica. Entretanto, a situação da teoria da gravitação na ordem das idéias da física sempre esteve envolta por uma certa nuvem de mistério.

Em sua inepção a teoria da gravitação não era sequer uma teoria de campos, no sentido que hoje damos a este conceito, mas sim uma teoria de ação à distância. A questão da origem desta força era uma que não se conseguia sequer definir com clareza. Por ocasião da descoberta da Relatividade a teoria da gravitação se constituiu no principal obstáculo, resistindo à aplicação direta dos princípios relativísticos. A compatibilização da teoria da gravitação com os princípios da Relatividade foi feita com a criação da Teoria da Relatividade Geral, hoje uma teoria bem estabelecida e uma das mais belas conquistas do intelecto humano. Com ela a gravitação passa definitivamente a ser uma teoria de campos, apesar de que as ondas gravitacionais por ela previstas não foram, até hoje, observadas diretamente. Além disso, a teoria apresenta uma elegante explicação da origem das interações gravitacionais em termos da curvatura da geometria do espaço-tempo.

Entretanto, o "status" a ser atribuído à teoria continuou um tanto obscuro. Seu caráter geométrico e profundamente não-linear a coloca em claro contraste com todas as outras teorias de campos de interação da física. Se, por um lado, a Relatividade Geral pode ser compreendida simplesmente como uma teoria relativística da gravitação, por outro lado ela também pode ser compreendida como um tipo de generalização da Relatividade. Enquanto a Relatividade contém em seu âmago o princípio da constância da velocidade da luz e a Mecânica Quântica o princípio da incerteza, a Relatividade Geral contém o princípio da equivalência, que está associado intimamente ao conceito de localidade que domina a teoria. Assim, a Relatividade Geral confunde os conceitos de teoria de princípio e teoria de substância.

Em nenhum aspecto a singularidade desta teoria se mostra de forma mais clara do que naquele relativo ao esforço de quantização. Desde o início a teoria resistiu consistentemente a todas as tentativas visando compatibilizá-la com os princípios da Mecânica Quântica, tentativas estas que foram muitas e variadas. É necessário que se diga que não existe nenhuma evidência experimental direta que leve de forma conclusiva à necessidade de se quantizar a Relatividade Geral. O que existe é um imperativo lógico de se compatibilizar a teoria da gravitação com os preceitos fundamentais da Mecânica Quântica, se queremos acreditar ser esta última uma teoria de princípio de validade real e completamente geral.

No esforço, até hoje sem sucesso, de trazer a gravitação relativística da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica a uma co-existência em um único esquema lógico, têm-se partido sempre do ponto de vista de que a Relatividade Geral é uma teoria de campos clássica que deve ser quantizada segundo algum esquema que siga as diretrizes básicas da quantização da Eletrodinâmica e das Teorias de Gauge. Desta forma, pre-



domina neste esforço a imagem da Relatividade Geral como uma teoria de substância, uma teoria clássica de interação, não como uma teoria de princípio. Entretanto, após um número enorme de tentativas das mais variadas para a quantização da Relatividade Geral, nas quais foram tentadas muitas técnicas diferentes e muitas modificações da teoria clássica, nenhum resultado definitivo foi obtido.

Paralelamente a isto a análise semi-clássica da teoria, na qual se estuda a quantização de outros campos na presença de um campo gravitacional clássico, ou seja a chamada Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos, apresenta alguns resultados interessantes e sugestivos. Estes resultados, associados aos horizontes existentes nas soluções da Relatividade Geral, estabelecem uma interessante conexão com a termodinâmica. É necessário observar, entretanto, que estes resultados não fornecem uma visão completa da física envolvida, apresentando mesmo alguns paradoxos.

De qualquer ângulo que se examine a natureza da teoria da gravitação, persiste uma certa nuvem de dúvida, em especial no que diz respeito ao seu relacionamento com a Mecânica Quântica. É possível identificar o próprio caráter geométrico da teoria clássica como a raiz das dificuldades. Observe-se que o princípio fundamental contido na teoria, o princípio da equivalência, encontra sua expressão exatamente neste caráter geométrico. Ao que tudo indica, o princípio fundamental de localidade da Relatividade Geral conflita de forma irreconciliável com o caráter não-local introduzido através da Mecânica Quântica pelo princípio da incerteza.

Uma das origens das dificuldades que encontramos no esforço de quantização da Relatividade Geral é o nosso conhecimento ainda limitado das Teorias Quânticas de Campos em geral. Uma boa parte destas dificuldades é de caráter técnico, entretanto, depois de tantas tentativas durante tanto tempo, não é mais possível acreditar que todas as dificuldades que nos confrontam na quantização da gravidade sejam de caráter técnico. Certamente deve existir uma dificuldade fundamental de caráter conceitual, mesmo se ainda não somos capazes de identificá-la claramente.

Não é surpreendente que nossa compreensão das Teorias Quânticas de Campos seja limitada, pois estas são teorias recentes, complexas e sofisticadas, sendo expressas por uma matemática sobre a qual nosso controle ainda é extremamente limitado. O extraordinário e até surpreendente sucesso das previsões da teoria de perturbações na Eletrodinâmica Quântica nos dá, talvez, uma idéia distorcida da profundidade de nossa compreensão de Teorias Quânticas de Campos em geral, mesmo em se tratando de teorias que são formalmente mais simples que a Eletrodinâmica Quântica, como os modelos polinomiais do tipo  $\lambda\phi^4$ .

Neste trabalho queremos examinar alguns aspectos desta questão, usando como laboratório o modelo  $\lambda\phi^4$ . Através da análise de algumas características básicas da estrutura deste modelo, seremos levados ao exame de um aspecto particularmente interessante, que relaciona diretamente a quantização do modelo com o conceito de geometria local do espaço-tempo. Apesar de que as idéias serão apresentadas no âmbito restrito deste modelo-laboratório com campos escalares, elas introduzem a análise de um novo aspecto da quantização de teorias de campos e sugerem a abertura de novas e interessantes

linhas de pesquisa para a exploração das possibilidades de extensão destas idéias para modelos mais realistas, envolvendo campos vetoriais e espinoriais.

É interessante registrar aqui a filosofia que adotamos em relação à definição de Teorias Quânticas de Campos. Há uma forma de se pensar segundo a qual uma Teoria Quântica de Campos é o que se consegue mediante a aplicação de algum “processo de quantização” a uma teoria de campos clássica dada. Não é esta a atitude que adotamos, pois o que se entende pelo “processo de quantização” não é um procedimento matemático único e bem definido. Ao contrário, adotamos desde o início uma definição determinada para a teoria quântica, enquanto a teoria clássica correspondente deve ser obtida a partir desta teoria quântica pela tomada de um limite clássico, que consiste de uma aproximação para comprimentos de onda longos.

Em princípio é possível que várias definições diferentes da teoria quântica tenham o mesmo limite clássico, ou que nenhuma teoria quântica tenha um determinado limite clássico. A determinação do limite clássico de uma teoria quântica faz parte da análise da natureza desta teoria quântica e não está determinada “a priori”. Se, por um lado, adotamos uma determinada definição para a teoria quântica com a intenção de que esta definição seja completa e consistente, por outro lado não assumimos nenhuma posição “a priori” sobre a unicidade ou relevância física desta definição. O acerto na escolha da definição detalhada de uma teoria quântica só pode ser julgado a partir das propriedades que a teoria resultante apresentar.

Neste trabalho estaremos utilizando um modelo-laboratório ao qual não se pretende dar uma relevância física fundamental, mas que acreditamos ser um bom laboratório para ilustrar o funcionamento da matemática envolvida na definição de uma Teoria Quântica de Campos. A definição que utilizamos para a teoria quântica neste modelo por meio da rede Euclideana é a definição que é utilizada universalmente pelos pesquisadores desta área para este modelo em particular. Entretanto, ela certamente não é a única definição possível.

# Capítulo 2

## Campos Quânticos na Rede

O primeiro passo para a definição de uma teoria quântica de campos dentro do formalismo da rede Euclideana é a definição de uma certa estrutura matemática em redes finitas. Esta estrutura conterá exclusivamente um certo número, possivelmente grande mas finito, de parâmetros e funções adimensionais. A teoria final será definida como o limite de uma sequência de redes finitas, de tamanho progressivamente maior, que satisfaçam a certos requisitos. Chamaremos a este limite de *limite do contínuo*.

Algumas quantidades físicas são definidas desde o princípio deste processo e permanecem inalteradas até o final dele. Uma quantidade deste tipo é o número inteiro  $d$  de dimensões do espaço-tempo Euclideano no qual definimos a teoria. Outra quantidade deste tipo é a ordem  $\mathcal{N}$  do grupo de simetria  $SO(\mathcal{N})$  que utilizamos para a definição do modelo. Outras quantidades serão parâmetros que, apesar de constantes em cada rede, deverão variar no limite do contínuo. Entre estas está o número  $N$  de sítios da rede em cada direção do espaço, que caracteriza o tamanho da rede. Outros parâmetros deste tipo serão o parâmetro de massa  $\alpha$  e a constante de acoplamento adimensional  $\lambda$ . Finalmente, teremos variáveis adimensionais aleatórias, que flutuam em cada rede finita de acordo com uma distribuição de probabilidades dada, ou seja, as variáveis dinâmicas adimensionais de campo, definidas num espaço interno de dimensão  $\mathcal{N}$ , que denotaremos por  $\vec{\varphi}$ , ou pelas componentes  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ .

### 2.1 Definição da Teoria Clássica

Inicialmente ilustraremos o processo considerando a definição da teoria de campos *clássica* na rede, usando como exemplo o modelo  $\lambda\phi^4$ . Posteriormente examinaremos em algum detalhe a definição da teoria quântica. Consideramos assim uma rede hiper-cúbica de tamanho  $N$  em  $d$  dimensões, ou seja, um conjunto de  $N^d$  pontos, a que chamamos de *sítios*, dispostos segundo um cubo  $d$ -dimensional com  $N$  pontos ao longo de cada lado. Associamos a estes pontos o conceito de vizinho próximo, simbolizado pela colocação de conexões ou "*links*" entre eles. Incluímos "*links*" ligando os sítios da borda do cubo com os sítios da borda oposta, de forma a implementar condições

periódicas de contorno. Observe-se que, neste ponto, não há uma noção de distância na rede.

Definimos agora a ação Euclideana do sistema como

$$S_N = \frac{1}{2} \sum_l^{dN^d} \Delta_l \vec{\varphi} \cdot \Delta_l \vec{\varphi} + \frac{\alpha}{2} \sum_s^{N^d} \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} + \frac{\lambda}{4} \sum_s^{N^d} (\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi})^2 - \sum_s^{N^d} \vec{j} \cdot \vec{\varphi}, \quad (2.1)$$

onde  $\sum_l^{dN^d}$  representa uma soma sobre todos os  $dN^d$  “links” da rede,  $\Delta_l \vec{\varphi}$  é a diferença entre os campos em cada uma das duas pontas de um “link”,  $\sum_s^{N^d}$  representa uma soma sobre todos os  $N^d$  sítios da rede, o ponto denota produto escalar sobre o espaço interno dos campos e  $\vec{j}$  é uma fonte externa. Observe-se que podemos separar esta ação em duas partes, da forma  $S_N = S_0 + S_V$ , onde  $S_0$  é a ação da teoria livre, que é quadrática e portanto exatamente solúvel,

$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_l^{dN^d} \Delta_l \vec{\varphi} \cdot \Delta_l \vec{\varphi} + \frac{\alpha}{2} \sum_s^{N^d} \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi} - \sum_s^{N^d} \vec{j} \cdot \vec{\varphi},$$

enquanto  $S_V$  é a parte envolvendo o termo quártico do potencial, que acopla as componentes do campo de forma não-linear,

$$S_V = \frac{\lambda}{4} \sum_s^{N^d} (\vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi})^2.$$

A solução clássica do modelo em uma rede finita é a configuração do campo  $\vec{\varphi}$  que minimiza a função  $S_N$ , a qual possui um limite inferior desde que  $\lambda > 0$  ou que  $\lambda = 0$  com  $\alpha \geq 0$ . Para tomarmos o limite do contínuo, é necessário que estabeleçamos uma *escala* no sistema, introduzindo um parâmetro dimensional, de tal forma que se possa definir o conceito de distância entre os pontos da rede. Classicamente, fazemos isto introduzindo uma *escala externa* no sistema.

Assumimos que, em algum sistema de unidades externo ao sistema, nossa rede cúbica tem lados de comprimento  $L$ . Definimos então o espaçamento da rede como  $a = L/N$ , a massa quadrada como  $m^2 = \alpha a^{-2}$ , a constante de acoplamento dimensional como  $\Lambda = \lambda a^{d-4}$ , o campo dimensional como  $\vec{\phi} = \vec{\varphi} a^{(2-d)/2}$  e a fonte externa dimensional como  $\vec{J} = \vec{j} a^{-(d+2)/2}$ . Além disso, podemos decompor a soma sobre “links”, convenientemente, da forma  $\sum_l^{dN^d} = \sum_s^{N^d} \sum_\mu^d$ , onde  $\sum_\mu^d$  é uma soma sobre as  $d$  direções positivas a partir de um determinado sítio. Com tudo isto, podemos escrever a ação como

$$S_N = \sum_s^{N^d} a^d \left[ \frac{1}{2} \sum_\mu^d \frac{\Delta_\mu \vec{\phi}}{a} \cdot \frac{\Delta_\mu \vec{\phi}}{a} + \frac{m^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + \frac{\Lambda}{4} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 - \vec{J} \cdot \vec{\phi} \right],$$

onde  $\Delta_\mu$  é a diferença entre vizinhos na direção  $\mu$ . Tomando-se agora o limite  $N \rightarrow \infty$  com  $L$  fixo e  $a \rightarrow 0$ , temos que a soma  $\sum_s^\mu a^d$  aproxima-se da integral  $\int d^d x$ , a razão  $\Delta_\mu/a$  aproxima-se da derivada parcial  $\partial_\mu$  e temos portanto que  $S_N \rightarrow S$  onde

$$S = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu} \partial_{\mu} \vec{\phi} \cdot \partial_{\mu} \vec{\phi} + \frac{m^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + \frac{\Lambda}{4} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 - \vec{J} \cdot \vec{\phi} \right]. \quad (2.2)$$

Recuperamos assim a teoria clássica de campos em sua forma usual. Observe-se que os parâmetros dimensionais são relativos à escala externa que foi introduzida para definir  $L$ . Observe-se também que, para que tenhamos  $m$  e  $\vec{J}$  finitos no limite, é necessário, respectivamente, que  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\vec{j} \rightarrow \vec{0}$ . Naturalmente, para fontes pontuais teremos que  $\vec{J}$  diverge em um certo ponto como uma função delta. Além disso, para termos  $\Lambda$  finito e não-nulo no limite, é necessário que  $\lambda \rightarrow 0$  (para  $d < 4$ ),  $\lambda \approx 1$  (para  $d = 4$ ) ou  $\lambda \rightarrow \infty$  (para  $d > 4$ ). Finalmente, para termos  $\phi_i$  finito e não-nulo no limite, devemos ter  $\varphi_i \rightarrow \infty$  (para  $d < 2$ ),  $\varphi_i \approx 1$  (para  $d = 2$ ) ou  $\varphi_i \rightarrow 0$  (para  $d > 2$ ).

Observe-se que a introdução de uma escala externa poderia, em princípio, ser evitada, pois a teoria contém o parâmetro dimensional interno  $m$  que pode, em princípio, ser usado como uma unidade de escala para medir os outros, como por exemplo o tamanho  $L$  da caixa. De fato, se quisermos encarar o nosso modelo como um laboratório para o universo e não como um modelo para apenas uma parte localizada dele, então não faz sentido a introdução de uma escala externa e somos forçados a utilizar esta escala interna. Entretanto, na teoria clássica não está claro qual é o procedimento associado a  $m$  que poderia ser utilizado para definir distâncias. Por outro lado, na teoria quântica existe um tal procedimento, como veremos. É precisamente este o ponto de vista que queremos explorar neste trabalho, no contexto da teoria quântica.

## 2.2 Definição da Teoria Quântica

Podemos utilizar a rede para definir a teoria quântica de uma forma parecida com o processo descrito acima. A diferença fundamental entre este procedimento e a abordagem tradicional é que, em vez de tirar primeiro o limite do contínuo e depois considerar a quantização da teoria contínua clássica que resulta, invertemos a ordem destas operações. Definimos primeiro uma versão da teoria quântica em cada rede finita e depois consideramos o limite da sequência destas teorias quânticas finitas quando aumentamos a rede indefinidamente, mantendo satisfeitas certas condições sobre alguns dos observáveis do modelo. Este limite produz a teoria quântica de campos Euclideana e, como passo final, define-se a teoria quântica de campos Lorentziana através da extensão analítica dos observáveis, tomando tempos Euclidianos imaginários.

Em cada rede finita, definimos a teoria quântica como um modelo estatístico com um número finito de graus de liberdade. As quantidades fisicamente relevantes da teoria são os valores médios sobre um certo “ensemble” de certas funções  $\mathcal{O}[\varphi]$  dos campos. O “ensemble” em questão é definido pela ação Euclideana. Os observáveis são definidos como

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int [d\varphi] \mathcal{O}[\varphi] e^{-S_N[\varphi]}}{\int [d\varphi] e^{-S_N[\varphi]}}, \quad (2.3)$$

onde  $[d\varphi] = \prod_s^{N^d} \prod_i^{\mathcal{N}} d\varphi_i(s)$  e as integrais múltiplas são sobre todas as componentes do campo em todos os sítios, tendo portanto dimensão  $N^d \mathcal{N}$ . De particular importância são os observáveis formados por simples produtos dos campos, a que chamamos de funções de correlação e que, por extensão analítica, produzem as funções de Green do sistema. Estaremos dando particular atenção às funções de um e dois pontos, relacionadas ao valor esperado do campo e à massa renormalizada, que por sua vez mede o inverso do comprimento de correlação do sistema,

$$\begin{aligned} g_{(1),i}(s) &= \langle \varphi_i(s) \rangle, \\ g_{(2),i}(s, s') &= \langle \varphi_i(s) \varphi_i(s') \rangle. \end{aligned}$$

Para a tomada do limite do contínuo consideramos algumas condições envolvendo estes observáveis. Por exemplo, para o caso  $\vec{j} = \vec{0}$ , podemos tomar um limite no qual impomos que a massa renormalizada  $m_R$  e o valor esperado do campo  $\vec{v}_R = \langle \vec{\varphi} \rangle$  sejam constantes dadas. O número máximo de condições que podemos impor é o número de parâmetros livres que temos no modelo, que nos permitem ajustar os valores destes observáveis em cada rede finita. Em nosso caso temos dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\lambda$ , logo poderemos impor no máximo duas condições, tais como as duas acima. Entretanto, é possível que a estrutura do modelo correlacione os valores dos observáveis de tal forma que não seja possível de fato dar a eles quaisquer valores que desejemos.

Como um exemplo de limite do contínuo podemos tomar a teoria livre, onde  $\lambda = 0$  e cujo único parâmetro livre é  $\alpha$ . Neste caso é necessário que tenhamos  $\alpha > 0$  para que a teoria seja bem definida. Assumindo também, por simplicidade, a ausência de fontes externas, ou seja que  $\vec{j} = \vec{0}$ , podemos tomar neste caso um limite no qual  $\vec{v}_R = \vec{0}$  e  $m_R \neq 0$ . Neste modelo resulta de cálculo direto que  $m_R^2 = \alpha a^{-2}$ , de forma que neste limite teremos necessariamente  $\alpha \rightarrow 0$ . Podemos também tomar um limite no qual  $m_R = 0$  e  $\vec{v}_R \neq \vec{0}$ , entretanto não é possível termos ambos  $\vec{v}_R$  e  $m_R$  não-nulos.

A massa renormalizada  $m_R$  é definida como a posição do polo da função de dois pontos. Em geral ela não estará relacionada com  $\alpha$  de forma tão simples quanto na teoria livre. Na maior parte dos modelos a massa renormalizada será uma função não-trivial tanto de  $\alpha$  quanto de  $\lambda$ . É conveniente definirmos uma versão renormalizada de  $\alpha$  através de  $\alpha_R = m_R^2 a^2$ . Vemos então que, em qualquer limite de interesse físico, deveremos ter  $\alpha_R \rightarrow 0$ , caso contrário a massa renormalizada será infinita e não haverá propagação de partículas na versão Lorentziana da teoria.

Na versão Euclideana o parâmetro  $\alpha_R$  está relacionado com o comprimento de correlação adimensional do modelo, que é medido em termos de números de sítios e “links” percorridos para que a correlação entre dois valores do campo caia por um certo fator e que pode ser obtido da função de correlação de dois pontos. Desta forma fica claro que ela pode ser utilizada para definir distâncias: para saber a distância entre dois pontos da rede basta contar o número de comprimentos de correlação que se pode encaixar entre os dois pontos.

De forma semelhante o valor esperado  $\vec{v}_R$  do campo pode ser obtido das funções de um ponto e a constante de acoplamento renormalizada  $\lambda_R$  das funções de dois e quatro

pontos. A resolução da teoria consiste da determinação, em cada rede finita, das funções  $\bar{v}_R(\alpha, \lambda)$ ,  $\alpha_R(\alpha, \lambda)$  e  $\lambda_R(\alpha, \lambda)$  que relacionam as quantidades renormalizadas com os parâmetros da teoria e da posterior tomada do limite do contínuo, no qual  $N \rightarrow \infty$  mediante condições sobre alguns dos observáveis.

## 2.3 Simulações Estocásticas de Monte Carlo

As simulações estocásticas são a principal técnica de exploração e cálculo nesta área de pesquisa. Elas nos permitem obter boas estimativas numéricas para os observáveis definidos em (2.3). Seus fundamentos são bem conhecidos e não serão repetidos aqui. Basta dizer que trata-se de uma técnica que nos permite avaliar, com uma precisão mensurável, as razões entre integrais multi-dimensionais de dimensão alta que aparecem na definição (2.3) para os observáveis. Isto é feito através da geração de uma sequência de configurações dos campos de tal forma que a distribuição estatística destas configurações convirja para a distribuição definida pela exponencial da ação Euclideana. Desta forma, as técnicas de simulação são idênticas àquelas utilizadas no estudo da Mecânica Estatística, exceto pelo fato das simulações serem realizadas com mais frequência em quatro do que em três dimensões.

Existem muitas formas diferentes de produzir uma sequência apropriada de configurações. Denominamos de *evolução estocástica* o processo de geração sucessiva de configurações. Para que a distribuição estatística gerada convirja para o limite correto, é suficiente que os algoritmos utilizados para gerar cada configuração a partir da anterior satisfaçam a uma condição que é conhecida pelo nome de *balanço detalhado*. Os algoritmos utilizados em nossos programas são de vários tipos. As variações estocásticas dos campos do modelo  $\lambda\phi^4$  são decompostas em partes radial e angular. Para a evolução estocástica da parte angular utilizamos o algoritmo de Wolff [1]. Para tal, foi necessário adaptá-lo para modelos com vetores de tamanho variável na presença de fontes externas. O algoritmo de Wolff é extremamente eficiente e melhora sensivelmente a qualidade numérica dos resultados.

Para a evolução da parte radial utilizamos o algoritmo de Metropolis [2]. Neste setor do código a parte da ação envolvendo o potencial, sendo estritamente local, é tratada de uma forma particular, através de uma mudança de variáveis e de uma interpolação do inverso da integral da exponencial do potencial. Esta abordagem para a parte radial é muito eficiente para o tratamento da teoria usual, sem fontes, mas revelou ter certas limitações na presença de fontes externas muito fortes, forçando-nos a limitar as simulações a valores da fonte externa abaixo de um certo limite máximo. Uma re-estruturação do código para eliminar estas limitações está atualmente em nossos planos, entretanto elas não chegaram a comprometer a utilidade do código atual para este trabalho.

É interessante registrar aqui a relação entre as condições de contorno e o comportamento crítico do modelo. Utilizamos nas simulações realizadas neste trabalho condições de contorno periódicas. Neste caso a simetria interna  $SO(\mathcal{N})$  dos modelos está sempre

quebrada em redes finitas e não existem transições de fase exceto no limite do contínuo. Entretanto, é possível definir representações dos modelos que apresentam transições de fase mesmo em redes finitas. Para tal é necessário utilizar nas redes finitas, em vez das condições de contorno periódicas, condições de contorno *fixas*. Neste tipo de representação, em vez de ligarmos cada borda da rede com a borda do lado oposto através de “links”, simplesmente fixamos o valor de algumas das quantidades da teoria, em geral o próprio campo, ao longo da borda.

Este tipo de condição de contorno poderá ser útil no futuro para o desenvolvimento do trabalho que apresentamos aqui, devido ao fato de que permitiria que examinássemos em maior detalhe a geometria de pequenas regiões do espaço. Entretanto, estas condições de contorno ainda são pouco desenvolvidas e as versões atuais provocam distorções nos expoentes críticos dos modelos. Existem idéias para melhorar este tipo de condição de contorno, que são atualmente tema de pesquisa em nosso grupo [3]. A idéia básica é que não devemos fixar os campos quânticos na borda da rede e sim os valores de alguns observáveis. Será necessário primeiro desenvolver estas idéias para que as condições de contorno fixas possam ser de real utilidade para este trabalho.



# Capítulo 3

## Alguns Fatos Relevantes

Descrevemos neste capítulo algumas das propriedades mais importantes da teoria segundo sua definição na rede Euclideana. Destas propriedades fundamentais induziremos a motivação básica para este trabalho.

### 3.1 Comportamento Crítico

Como vimos anteriormente, no limite do contínuo da teoria livre temos necessariamente que  $\alpha_R = \alpha \rightarrow 0$ , enquanto na teoria interagente temos  $\alpha_R(\alpha, \lambda) \rightarrow 0$ . Por outro lado, o sistema Euclideano que definimos em cada rede finita é um sistema estatístico que, no limite do contínuo, possui uma transição de fase de segunda ordem cujo parâmetro de ordem é o valor esperado do campo,  $v_R = |\vec{v}_R|$ . A região de transição, neste caso uma curva crítica no plano  $(\alpha, \lambda)$ , é a região onde  $\alpha_R \rightarrow 0$ , e portanto qualquer limite do contínuo de interesse físico deve convergir para esta curva crítica.

Esta é uma propriedade geral da definição de Teorias Quânticas de Campos na rede Euclideana. Se não pudermos achar uma representação nas redes finitas que leve a um sistema estatístico com uma transição de segunda ordem, não poderemos definir a teoria, pois em transições de primeira ordem, nas quais  $\alpha_R \not\rightarrow 0$  na região crítica, não é possível tomar limites do contínuo bem definidos, com massas renormalizadas finitas.

O diagrama crítico esquemático do modelo  $\lambda\phi^4$  pode ser encontrado na figura 3.1. Trata-se de um diagrama no espaço de parâmetros do modelo, em nosso caso o plano  $(\alpha, \lambda)$ . Os limites do contínuo podem ser representados por caminhos neste diagrama, que chamamos de “flows”. Todos os limites de interesse físico convergem para a curva crítica. O “ensemble” da teoria é Gaussiano no semi-eixo  $\alpha \geq 0, \lambda = 0$  e os limites da teoria livre percorrem este semi-eixo convergindo para o ponto Gaussiano  $\alpha = 0, \lambda = 0$ , onde começa a curva crítica. A teoria não existe no semi-eixo  $\alpha < 0, \lambda = 0$  e no semi-plano  $\lambda < 0$ .

A curva crítica divide o diagrama em duas regiões, que constituem as duas fases do modelo. A fase simétrica é caracterizada por ter  $\vec{v}_R \rightarrow \vec{0}$  no limite  $N \rightarrow \infty$ , enquanto na fase de simetria quebrada temos, para uma das componentes do campo,  $v_{R,i} \neq 0$

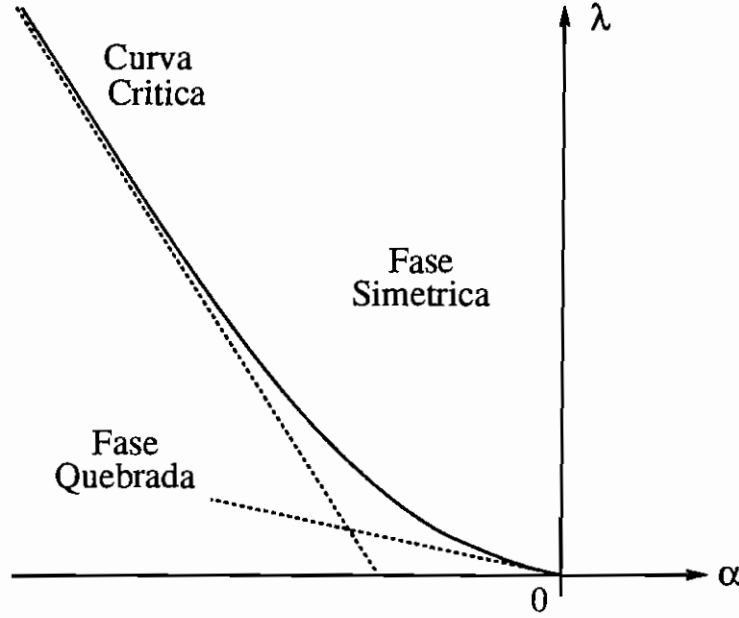


Figura 3.1: A curva crítica do modelo  $\lambda\phi^4$ .

mesmo no limite  $N \rightarrow \infty$ . Convencionamos escolher a componente na direção da qual a simetria é quebrada, que chamamos de componente *longitudinal*, como a  $\mathcal{N}$ -ésima componente do campo. Para as outras componentes, que chamamos de componentes *transversais*, temos sempre  $v_{R,i} = 0$ , mesmo em redes finitas. Com condições periódicas de contorno, teremos sempre  $v_{R,N} \neq 0$  para a componente longitudinal em redes finitas.

Nas imediações do ponto Gaussiano a curva crítica difere pouco de uma reta. Para o modelo com simetria  $SO(2)$  que utilizaremos nas simulações descritas mais adiante, ela se localiza a aproximadamente  $60^\circ$  do semi-eixo  $\alpha < 0$  em  $d = 4$  e a aproximadamente  $45^\circ$  em  $d = 3$ . Em  $d = 4$  a maior rede que utilizaremos, com  $N = 8$ , já tem um comportamento razoavelmente próximo do comportamento crítico do limite do contínuo. Em  $d = 3$  a rede de  $N = 8$  está relativamente mais distante do limite, de forma que examinaremos a situação crítica realizando a simulação a  $50^\circ$ . Isto se deve ao fato de que a proximidade com o limite do contínuo, em termos de comportamento crítico, é aproximadamente proporcional ao número total  $N^d$  de sítios da rede.

## 3.2 Descontinuidade das Configurações

Uma propriedade dos limites do contínuo do modelo  $\lambda\phi^4$  que nos interessa de forma particular é o fato de que as configurações típicas dos campos do modelo, que contribuem para os valores esperados de forma dominante, são funções descontínuas em todos os pontos. Pode-se mostrar, analiticamente no caso da teoria livre e numericamente para os modelos interagentes, que a quantidade  $\langle (\Delta_i \varphi_i)^2 \rangle$  em um “link” qualquer da rede

tem um limite finito e não-nulo [4].

Como a diferença  $\Delta_l$  é tomada entre dois vizinhos isto significa que, em média, valores dos campos  $\vec{\varphi}$  em pontos infinitesimalmente próximos diferem por uma quantidade finita no limite e que, portanto, os campos são tipicamente descontínuos em todos os pontos. Para  $d > 2$  isto implica que as descontinuidades do campo dimensional  $\vec{\phi}$  tornam-se infinitas no limite do contínuo. As mesmas conclusões podem ser deduzidas analiticamente no caso da eletrodinâmica aberta sem fontes [4] e observadas numericamente em outros casos como, por exemplo, os modelos Sigma Não-Lineares.

Este fato básico da estrutura da teoria coloca imediatamente em profunda dúvida a noção usual que temos sobre o que significa quantizar o campo gravitacional. A forma usual de se pensar no processo de quantização da Relatividade Geral envolve a concepção das configuração de campo na forma de uma geometria flutuante para o espaço-tempo. É extremamente artificial pensar no campo gravitacional quantizado como uma geometria flutuante se as configurações são tão profundamente descontínuas, impedindo de todo a introdução do conceito das configurações da teoria como objetos geométricos.

Esta propriedade das configurações dominantes dos campos quânticos tem consequências importantes para a análise da expansão perturbativa do modelo na rede Euclideana. Ela constitui o mecanismo básico responsável pelas divergências que aparecem na expansão perturbativa no limite do contínuo. Além disso, ela introduz imediatamente dúvidas sobre o papel que a topologia das configurações dos campos possa desempenhar na dinâmica do modelo.

### 3.3 Trivialidade do Modelo

Uma propriedade notável dos modelos  $\lambda\phi^4$  em quatro ou mais dimensões é o que se costuma chamar de *trivialidade* destes modelos. Esta trivialidade é uma característica da estrutura dos modelos e significa que, no limite do contínuo, as funções de correlação dos modelos são idênticas às correspondentes funções de correlação da teoria livre.

O aspecto mais importante deste fato é que as funções de quatro pontos são fatoráveis em produtos de funções de dois pontos. Isto, na interpretação da teoria Lorentziana, significa que as partículas dos modelos comportam-se como partículas livres e não interagem umas com as outras. Isto aparece nos observáveis como o fato de que a constante de acoplamento dimensional  $\Lambda_R$  se anula. Em  $d > 4$  isto significa simplesmente que  $\lambda_R$  é finita, enquanto em  $d = 4$  significa que  $\lambda_R \rightarrow 0$  no limite. Em  $d = 3$  sabe-se que a teoria não é trivial, tendo um limite finito e não-nulo para  $\Lambda_R$ , o que, mais uma vez, significa que  $\lambda_R \rightarrow 0$  no limite.

Tudo isto implica que devemos ter  $\lambda_R = 0$  sobre a curva crítica em  $d = 3$  e  $d = 4$ . Simulações que realizamos sob certas condições específicas parecem indicar que, de fato,  $\lambda_R = 0$  em todo o espaço de parâmetro destes modelos, mesmo em redes finitas. Entretanto, nossa estatística ainda é muito pobre e não podemos afirmar isto com certeza. Para tal será necessário aprimorar as técnicas numéricas e realizar um trabalho

computacional muito mais extenso.

Entretanto, no capítulo 4 mostraremos alguns fatos que parecem indicar a mesma conclusão. Na análise do observável local para a massa renormalizada, apresentada naquele capítulo, veremos que certas relações da teoria livre parecem ser satisfeitas pelo modelo interagente mesmo em redes finitas. Ainda não sabemos se é possível utilizar esta abordagem para realizar uma análise mais profunda da questão da trivialidade, coisa que pretendemos tentar fazer no futuro.

### 3.4 Ação de Fontes Externas

A introdução de fontes externas no modelo terá um papel fundamental neste trabalho. No tratamento usual da teoria esta introdução se dá primordialmente no âmbito do formalismo da ação efetiva e se limita a fontes infinitesimais. Naquele formalismo as fontes externas servem basicamente para permitir a geração das funções de correlação por meio de derivação funcional e, ao final do processo, as fontes são zeradas. Neste trabalho, em contraste com isto, estaremos introduzindo fontes externas fortes e examinando em mais detalhes sua ação sobre o sistema.

A interpretação física das fontes externas é que elas representam a introdução de objetos clássicos na teoria, que de forma genérica podem ser fontes de partículas, tais como aceleradores, ou absorvedores de partículas, tais como detetores. Por este motivo, elas são representadas na teoria como funções fixas dadas e não como variáveis aleatórias flutuantes. A idéia é que em uma representação mais completa as fontes estão relacionadas com algum outro sistema físico, que não estamos representando diretamente em nosso modelo. Para fins de estudar o seu efeito em nosso modelo trocamos as variáveis flutuantes dos objetos quânticos deste outro sistema por seus valores esperados, que tratamos como funções fixas dadas.

O efeito mais imediato da introdução de uma fonte externa em nosso modelo é a modificação do valor esperado do campo  $\vec{v}_R$ , que passa a ser diferente de zero em qualquer das fases. Além disso, se a fonte externa não for constante sobre a rede,  $\vec{v}_R$  passa a depender de posição. Estaremos examinando em particular o caso de uma fonte puntual orientada na direção de  $\varphi_N$ . No caso da teoria livre podemos apresentar uma solução geral para  $\vec{v}_R$ , dada uma fonte genérica:

$$\vec{v}_R(s) = \sum_{s'}^{N^d} \vec{j}(s') K(s, s'),$$

onde  $K$  é o propagador no espaço de coordenadas,

$$K(s, s') = \frac{1}{N^d} \sum_k \frac{\cos\left[\frac{2\pi}{N} k_\mu (n_\mu - n'_\mu)\right]}{\rho^2(k) + \alpha}$$

e onde  $n_\mu$  são as coordenadas inteiras de um sítio  $s$  da rede, em unidades de números de sítios. As coordenadas dimensionais  $x_\mu$  que descrevem as posições dos sítios são

dadas por  $x_\mu = a n_\mu$ , onde  $n_\mu = 1, \dots, N$  para  $\mu = 1, \dots, d$ . A soma  $\sum_k^{N^d}$  é sobre os  $N^d$  modos de Fourier da rede e  $k_\mu$  são variáveis inteiras que indexam estes modos. Em geral adotamos para elas o intervalo de valores  $k_\mu = k_m, \dots, 0, \dots, k_M$ , onde  $k_m = -N/2$  e  $k_M = 1 + N/2$  para redes com  $N$  par, enquanto  $k_m = -(N-1)/2$  e  $k_M = (N-1)/2$  para redes com  $N$  ímpar. As quantidades

$$\rho^2(k) = 4 \left[ \sin^2\left(\frac{\pi k_1}{N}\right) + \dots + \sin^2\left(\frac{\pi k_d}{N}\right) \right]$$

são os auto-valores do Laplaciano na rede. No limite do contínuo o quadrado do momento relaciona-se com estes auto-valores por  $p_\mu p^\mu = p^2 = \lim_{a \rightarrow 0} [\rho^2(k)/a^2]$ . As somas podem ser escritas explicitamente da forma

$$\begin{aligned} \sum_s^{N^d} &= \sum_{n_1=1}^N \dots \sum_{n_d=1}^N, \\ \sum_k^{N^d} &= \sum_{k_1=k_m}^{k_M} \dots \sum_{k_d=k_m}^{k_M}. \end{aligned}$$

Subtraindo do campo o seu valor esperado temos a variável de campo deslocada  $\vec{\varphi}' = \vec{\varphi} - \vec{v}_R$ , que tem valor esperado zero e todas as funções de correlação idênticas àquelas da teoria livre sem fontes externas. Isto é, claramente, uma consequência da linearidade da teoria livre. Para uma fonte puntual na origem temos, em particular, que  $\vec{j}(s') = \vec{j}_0 \delta_{0,s'}$  e então

$$\vec{v}_R(s) = \vec{j}_0 K(s, 0) = \frac{\vec{j}_0}{N^d} \sum_k^{N^d} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{N} k_\mu n_\mu\right)}{\rho^2(k) + \alpha}.$$

Observe-se que, na posição desta fonte singular,  $\vec{v}_R(s=0)$  tem um limite finito e não-nulo no limite do contínuo para  $d > 2$ , pois a quantidade  $K(0, 0) = f_0(N, d, \alpha)$ , onde

$$f_0(N, d, \alpha) = \frac{1}{N^d} \sum_k^{N^d} \frac{1}{\rho^2(k) + \alpha}, \quad (3.1)$$

tem um limite finito e não-nulo para  $d > 2$  [4]. Neste ponto o valor esperado do campo dimensional  $\vec{V}_R = \langle \vec{\phi} \rangle$  diverge para  $d > 2$ . Por outro lado, como teremos  $\vec{V}_R$  finito em todos os outros pontos, segue que em todo ponto exceto aquele onde se situa a fonte deveremos ter  $\vec{v}_R \rightarrow 0$  no limite, para  $d > 2$ .

### 3.5 Invarianças Finitas

Existem simetrias de vários tipos presentes no modelo. Todas estas simetrias são familiares e têm realizações completas e explícitas no limite do contínuo, se além disso

fizemos as dimensões da caixa que contém o modelo tender a infinito. Tanto a representação do modelo dentro de uma caixa finita quanto a sua realização numa rede discreta afetam algumas das simetrias. Entretanto, a representação na rede mantém remanescentes das simetrias completas, que nos permitem identificar que as simetrias serão restauradas no limite do contínuo de volume infinito.

Primeiramente temos a invariância interna com a qual definimos o modelo, em nosso caso uma invariância por transformações de  $SO(\mathcal{N})$  no espaço dos campos. Esta invariância é a única que permanece intacta no modelo clássico definido em uma rede finita. Ela não é afetada nem pela finitude da caixa nem pelo caráter discreto da rede e, para  $\mathcal{N} > 1$ , ela é uma simetria contínua. Esta simetria é quebrada, entretanto, pela dinâmica da teoria quântica, podendo ou não ser recuperada no limite do contínuo. É ela que define a estrutura de fases no diagrama crítico do modelo.

As simetrias espaciais de rotação são quebradas, é claro, pela introdução de uma rede discreta em uma caixa cúbica finita. Entretanto, a invariância por rotação continua encodificada no sistema de forma indireta. Por exemplo, temos o fato de que o propagador da teoria no espaço de momentos é uma função apenas de  $\rho^2(k)$  e não das várias componentes e valores de  $k_\mu$  independentemente. De fato, o propagador tem, como função de  $\rho^2(k)$ , exatamente a mesma forma que o propagador no limite do contínuo tem como função de  $p^2$ . Todas as quantidades que no contínuo são funções de  $p^2$  passam a ser, em redes finitas, funções de  $\rho^2(k)$ . Desta forma, as quantidades  $\rho^2(k)$  funcionam como uma espécie de filtro que nos permite compensar as distorções introduzidas pela finitude da caixa e pelo caráter discreto da rede. Além disso, permanece de forma explícita um remanescente discreto das simetrias de rotação, constituído pelas rotações de  $\pi/2$ .

As simetrias espaciais de translação também são modificadas pela introdução da caixa finita e da discretização. No caso da introdução da caixa finita a adoção de condições de contorno periódicas ainda nos permite manter estas simetrias na forma de simetrias periódicas de translação ao longo do toro definido por estas condições de contorno. A discretização na rede quebra o caráter contínuo destas simetrias, transformando-as em simetrias discretas, nas quais transladamos por um número inteiro de sítios em cada direção ao longo da rede. Desta forma, desde que não existam na ação do modelo fontes externas dependentes de posição, as simetrias de translação continuam válidas em uma forma discretizada.

As simetrias espaciais terão um papel importante neste trabalho. Na ausência de fontes externas dependentes de posição todas as quantidades físicas do modelo, em particular o comprimento de correlação, têm invariâncias discretas de translação e rotação. Com isto, é evidente que a geometria gerada na rede pela quantização do modelo será plana. É a quebra destas simetrias pela introdução de fontes externas localizadas que será a responsável pela geração de curvatura.

# Capítulo 4

## Observáveis Locais para a Massa

Mostramos aqui, por meios numéricos, que certas relações não-triviais entre observáveis no modelo  $\lambda\phi^4$  são satisfeitas com muita precisão, possivelmente de forma exata. Estas relações podem ser deduzidas por meio de métodos perturbativos e são idênticas em forma às relações correspondentes para a teoria livre, diferindo delas apenas pela troca da massa pela massa renormalizada.

### 4.1 Teoria de Perturbações na Rede

Consideremos o modelo  $\lambda\phi^4$  definido pela ação dada na equação (2.2) e quantizado na rede de acordo com o esquema descrito no capítulo 2, utilizando a ação na rede dada na equação (2.1). É possível desenvolver para este modelo um método perturbativo em redes finitas, da forma descrita na referência [5].

Esta abordagem é muito útil e, apesar de ser do tipo perturbativo, as aproximações resultantes são melhor descritas como aproximações Gaussianas para o modelo. Não se trata de uma expansão propriamente dita, mas de uma boa aproximação para alguns dos observáveis da teoria. A abordagem é útil para tratar as funções de um e dois pontos no modelo, mas não para a função de quatro pontos. Na fase simétrica a aproximação para a massa renormalizada é dada, em termos dos parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  do modelo, por

$$\alpha_R = \alpha + (\mathcal{N} + 2)\lambda f'_{0,i}(N, d, \alpha_R),$$

para cada componente  $i$  do campo, com

$$f'_{0,i}(N, d, \alpha_R) = f_0(N, d, \alpha_R) + \frac{\delta_{i\mathcal{N}} - 1}{N^d \alpha_R}, \quad (4.1)$$

onde  $f'_{0,i \neq \mathcal{N}}$  é a função  $f_0$  definida em (3.1) sem o termo do modo zero e  $f'_{0,\mathcal{N}} = f_0$ . Na fase de simetria quebrada temos

$$\alpha_R = -2\delta_{i\mathcal{N}} [\alpha + (\mathcal{N} + 2)\lambda f_0(N, d, \alpha_R)].$$

Observe-se que  $\alpha_R = 0$  para as componentes transversais, que são bosons de Goldstone.

Estas não são, de fato, soluções explícitas para  $\alpha_R$  e sim equações determinando  $\alpha_R$  em termos de  $\alpha$  e  $\lambda$ , pois os seus lados direitos dependem eles mesmos de  $\alpha_R$ . Uma comparação destas previsões para  $\alpha_R$  com estimativas numéricas, como apresentadas em [5], mostra que elas são aproximações muito boas, até mesmo surpreendentemente boas mas, ainda assim, elas não são exatas e as diferenças podem ser vistas claramente para grandes valores de  $\lambda$ .

Neste mesmo esquema perturbativo é possível deduzir resultados para outros observáveis da teoria, que não envolvem a constante de acoplamento renormalizada  $\lambda_R$ , por exemplo para o valor esperado do campo,  $\vec{v}_R = (0, \dots, 0, v_R)$ , para o qual resulta, no caso  $\vec{j} = \vec{0}$ ,  $v_R = 0$  na fase simétrica e, na fase de simetria quebrada,

$$v_R = \sqrt{\alpha_R/(2\lambda)}.$$

Para a largura das flutuações do campo em sítios temos

$$\begin{aligned} \langle (\varphi_i - v_{R,i})^2 \rangle &= \langle \varphi_i^2 \rangle - v_{R,i}^2 \\ &= f'_{0,i}(N, d, \alpha_R). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Finalmente, para as diferenças finitas na rede temos

$$\begin{aligned} \langle (\Delta_l \varphi_i)^2 \rangle &= \langle [\varphi_i(x + a_\mu) - \varphi_i(x)]^2 \rangle \\ &= \frac{1}{N^d} \sum_k \frac{4 \sin^2\left(\pi \frac{k_\mu}{N}\right)}{\rho^2(k) + \alpha_R} \\ &= f_1(N, d, \alpha_R), \\ \langle (\Delta_d \varphi_i)^2 \rangle &= \langle [\varphi_i(x + a_{\mu_1} + a_{\mu_2}) - \varphi_i(x)]^2 \rangle \\ &= \frac{1}{N^d} \sum_k \frac{4 \sin^2\left(\pi \frac{k_{\mu_1} + k_{\mu_2}}{N}\right)}{\rho^2(k) + \alpha_R} \\ &= f_2(N, d, \alpha_R), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $\Delta_l$  é a diferença entre os campos nas duas pontas de um “link”,  $\Delta_d$  é a diferença entre os campos nas duas pontas da diagonal de uma plaqueta e  $a_\mu$  é um deslocamento pelo espaçamento  $a$  da rede na direção  $\mu$ . Uma plaqueta é um conjunto de quatro sítios formando um quadrado em um dos planos da rede, ou seja é o elemento geométrico básico de dimensão dois, que tem um papel importante nas Teorias de Gauge.

## 4.2 Observáveis Locais para $\alpha_R$

Apesar de que os observáveis do modelo são, em geral, funções de  $N$ ,  $d$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$  independentemente, pode-se ver que todos estes resultados perturbativos podem, com a exceção daquele para  $v_R$ , ser escritos em termos de  $\alpha_R(\alpha, \lambda)$ , em vez de em termos de



$\alpha$  e  $\lambda$  separada e independentemente. Observe-se entretanto que a relação (4.2) envolve  $v_R$  em seu lado esquerdo e que, devido a isto,  $\langle \varphi^2 \rangle$  por si só não pode ser expresso apenas em termos de  $\alpha_R$ , a menos que  $v_R \equiv 0$ . Por outro lado, as relações (4.3) não dependem de  $v_R$  e conseqüentemente podem ser escritas exclusivamente em termos de  $\alpha_R$ . Além disso, as funções  $f'_{0,i}$ ,  $f_1$  e  $f_2$  têm exatamente a mesma forma que os resultados exatos correspondentes para a teoria livre, diferindo deles apenas pela troca do parâmetro  $\alpha$  da teoria livre por  $\alpha_R$ .

Também é possível calcular o propagador da teoria no espaço de momentos, resultando

$$\tilde{g}_{(2),i}(k) = \langle \tilde{\varphi}_i^*(k) \tilde{\varphi}_i(k) \rangle = \frac{1}{N^d} \frac{1}{\rho^2(k) + \alpha_R}$$

nas duas fases, desde que  $\alpha_R$  seja a expressão apropriada para cada fase e para cada componente do campo. Nesta expressão  $\tilde{\varphi}_i(k)$  é a transformada de Fourier finita do campo na rede [6], dada por

$$\tilde{\varphi}_i(k) = \frac{1}{N^d} \sum_k^{N^d} \varphi_i(s) e^{i \frac{2\pi}{N} k_\mu n^\mu}.$$

Além disso, de um ajuste do propagador numérico a uma expressão do tipo

$$\frac{1}{N^d} \frac{\mathcal{R}}{\rho^2(k) + \alpha_R},$$

semelhante à expressão anterior, pode-se estimar muito bem  $\alpha_R$ , como se mostra em [5]. Os ajustes realizados utilizam um número limitado mas suficiente de valores dos momentos. Em geral eles são muito bons e observa-se que o resíduo do propagador sai consistentemente como  $\mathcal{R} = 1$  dentro dos erros numéricos, o que acreditamos ser mais um indício da trivialidade dos modelos. O uso de um número limitado de valores dos momentos deve-se a questões históricas de caráter técnico no desenvolvimento de nossos códigos computacionais e temos planos de mudar esta estratégia, passando a calcular os observáveis para o conjunto completo de valores dos momentos. Existe a possibilidade de que o uso deste número limitado valores dos momentos tenha introduzido alguns pequenos erros sistemáticos que detectamos nos resultados numéricos.

Observe-se que, ao contrário do propagador no espaço de momentos, os observáveis definidos em (4.2) e (4.3) são objetos *locais* na rede, envolvendo no máximo dois sítios vizinhos. Observe-se também que a relação destes observáveis locais com a massa renormalizada é clara e intuitiva, uma vez que eles se relacionam diretamente com as flutuações dos campos em sítios e com as correlações entre os campos ao longo de “links” ou diagonais,

$$\langle (\Delta_l \varphi_i)^2 \rangle = 2\langle \varphi_i^2 \rangle - 2\langle \varphi_i(l_+) \varphi_i(l_-) \rangle,$$

onde  $\varphi_i(l_+)$  e  $\varphi_i(l_-)$  são os campos nas duas pontas do “link” ou diagonal, ao passo que a massa renormalizada  $\alpha_R$  está diretamente relacionada com o comprimento de correlação da teoria.

Estas considerações levam à possibilidade de se testar as relações perturbativas dadas em (4.2) e (4.3), verificando quão bem elas são satisfeitas se forem usadas para relacionar os valores numéricos de  $\alpha_R$  com os valores numéricos de  $\langle\varphi_i^2\rangle - v_{R,i}^2$ ,  $\langle(\Delta_l\varphi_i)^2\rangle$  e  $\langle(\Delta_d\varphi_i)^2\rangle$ . Observe-se que tudo se passa aqui em redes finitas de tamanho arbitrário.

### 4.3 Testes dos Observáveis Locais

Nós levamos a cabo uma tal comparação, que mostrou que as relações (4.3) são satisfeitas, dentro de erros compatíveis com os limites de nossa precisão numérica, a despeito de sua origem perturbativa, para todos os valores dos parâmetros do modelo para os quais nós fomos capazes de realizar as comparações. No caso da relação (4.2) o mesmo é válido para as componentes transversais do campo, para as quais  $v_{R,i} = 0$ , mas uma pequena diferença aparece para a componente longitudinal, na direção da qual a simetria é quebrada e para a qual, portanto,  $v_{R,N} \neq 0$ .

Para melhor compreender estes resultados é importante observar que nosso tratamento do modo zero nas simulações computacionais é muito diferente para as componentes transversais e longitudinal: o modo zero das componentes transversais é eliminado da teoria através das transformações de simetria do modelo, o da componente longitudinal não. É através destas transformações que mantemos a direção da quebra de simetria fixa ao longo da componente  $\varphi_N$ .

Como se pode ver, ao contrário das fórmulas  $f'_{0,i \neq N}$ ,  $f_1$  e  $f_2$ , a fórmula  $f'_{0,N}$  contém uma divergência infra-vermelha envolvendo o modo zero, ou seja, um termo proporcional a  $1/\alpha_R$ , que diverge se  $\alpha_R \rightarrow 0$ . Observe-se que não há divergência neste termo no limite do contínuo, pois neste caso temos  $\alpha_R \rightarrow 0$  como  $N^{-2}$  quando  $N \rightarrow \infty$ , de forma que  $1/(N^d\alpha_R)$  vai de fato a zero para  $d > 2$ . Da mesma forma que este termo, a diferença observada para a componente longitudinal na relação (4.2) decresce com o tamanho da rede e deve desaparecer no limite do contínuo.

Fica claro que a diferença observada é devida ao efeito do modo zero. Para as componentes transversais, cujo modo zero foi eliminado, este termo está ausente da soma e a fórmula parece ser satisfeita com precisão. Para a componente longitudinal o termo do modo zero está presente e a fórmula não é exatamente satisfeita. A presença do modo zero em  $f'_{0,N}$  está relacionada com a sua dependência de  $v_R$  que, como vimos, não pode ser escrito exclusivamente em termos de  $\alpha_R$ . Observe-se que os observáveis  $\langle(\Delta_l\varphi_i)^2\rangle$  e  $\langle(\Delta_d\varphi_i)^2\rangle$ , cujas fórmulas parecem ser realizadas exatamente, não envolvem o modo zero de todo.

Para realizar os testes nós medimos  $\alpha_R$  através do ajuste ao propagador numérico no espaço de momentos e medimos independentemente os observáveis  $\vec{v}_R$ ,  $\langle\varphi_i^2\rangle$ ,  $\langle(\Delta_l\varphi_i)^2\rangle$  e  $\langle(\Delta_d\varphi_i)^2\rangle$ , para cada conjunto de valores dos parâmetros. Destes observáveis valores correspondentes para  $\alpha_R$  foram obtidos por inversão numérica das fórmulas  $f'_{0,i}$ ,  $f_1$  e  $f_2$

dadas em (4.1) e (4.3).

$SO(2), d=4, N=6, r=1, i=1, j=0$

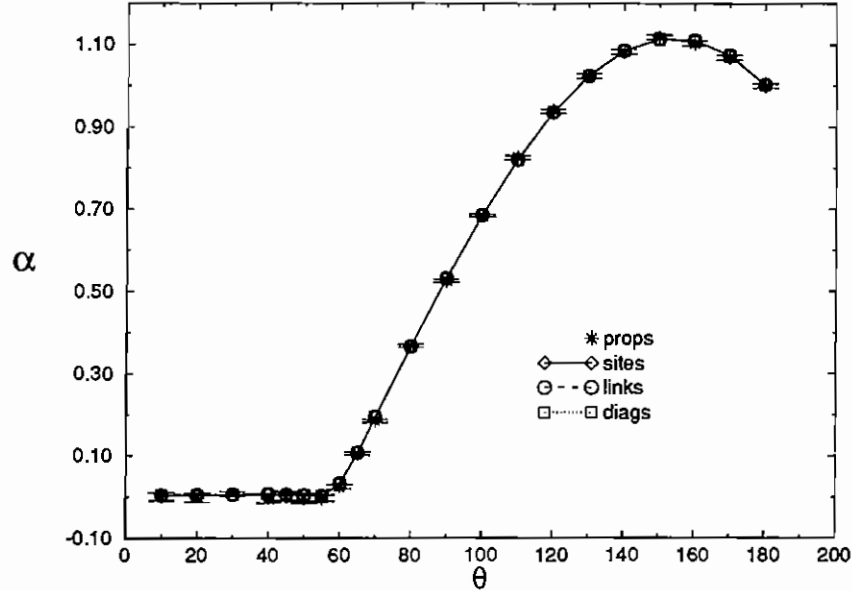


Figura 4.1: Teste para a componente transversal.

Uma amostragem dos resultados pode ser encontrada nas figuras 4.1 e 4.2, sendo que um conjunto mais completo pode ser encontrado no apêndice A.1. Os parâmetros  $r$  e  $\theta$  que aparecem nestes gráficos se relacionam com  $\alpha$  e  $\lambda$  através de

$$\begin{aligned}\alpha &= -r \cos(\theta), \\ \lambda &= r \sin(\theta).\end{aligned}$$

Como se pode ver nestas figuras, com a excessão de algumas flutuações estatísticas ocasionalmente grandes ou de uma ou outra possível imperfeição no ajuste usado para obter  $\alpha_R$  a partir do propagador no espaço de momentos, os resultados coincidem de forma essencialmente exata, mesmo para valores grandes da constante de acoplamento.

Pode-se ver que os observáveis locais constituem uma forma tecnicamente muito boa de se medir  $\alpha_R$  nestes modelos. A extrema regularidade e precisão destes resultados, bem como a sua notável consistência uns com os outros, levanta a conjectura de que as equações (4.2) para o caso das componentes transversais e (4.3) são de fato satisfeitas exatamente em redes finitas. Ademais, a seguinte conjectura mais geral é sugerida fortemente: que existe um par de funções  $h_1(\alpha, \lambda)$  e  $h_2(\alpha, \lambda)$  tal que, para todo observável  $\mathcal{O}$  da teoria, o valor esperado

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int [d\varphi] \mathcal{O}[\varphi] e^{-S_E(\alpha, \lambda)}}{\int [d\varphi] e^{-S_E(\alpha, \lambda)}}$$

$SO(2), d=4, N=6, r=1, i=2, j=0$

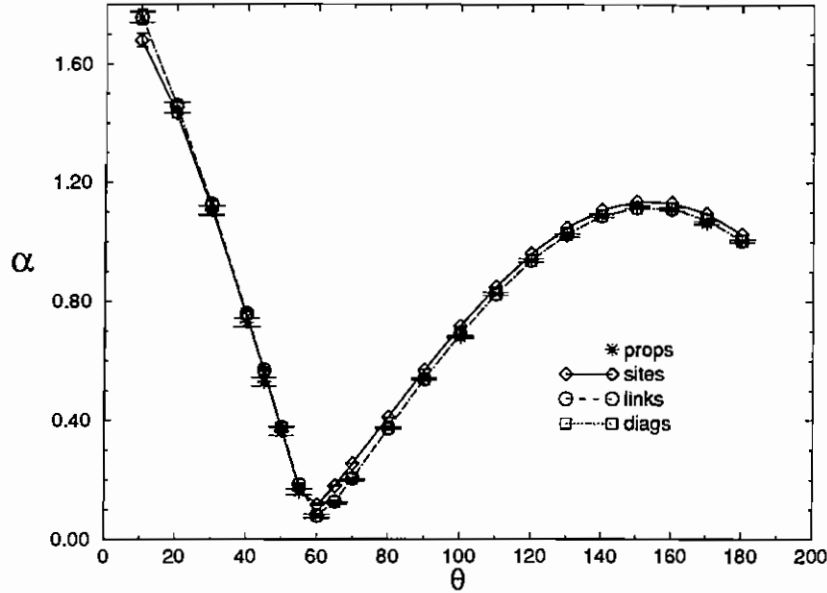


Figura 4.2: Teste para a componente longitudinal.

é igual ao valor esperado correspondente na teoria livre com parâmetro de massa  $\alpha_R = h_1(\alpha, \lambda)$  e valor esperado do campo  $v_R = h_2(\alpha, \lambda)$ , ou seja,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int [d\varphi] \mathcal{O}[\varphi] e^{-S_0(v_R, \alpha_R)}}{\int [d\varphi] e^{-S_0(v_R, \alpha_R)}}.$$

Se isto pudesse ser demonstrado implicaria imediatamente, é claro, a trivialidade da teoria. Talvez esta conjectura seja válida em redes finitas apenas para alguns observáveis mas, se a teoria é de fato trivial, ela deve ser verdadeira no limite do contínuo para *todos* os observáveis. De qualquer forma parece que a teoria, que pode ter no máximo dois parâmetros livres, é tal que  $h_1$  e  $h_2$  podem ser escolhidos como estes parâmetros.

## 4.4 Extrapolação para o Uso dos Observáveis

É importante observar que os observáveis do tipo (4.3) envolvendo  $\Delta_l$  e  $\Delta_d$  bastam para a definição da geometria na rede, pois eles nos permitem medir a massa renormalizada de forma local e, portanto, os comprimentos de correlação associados a “links” e diagonais. Estes elementos são suficientes para definir a rede como um complexo simplicial, ou seja, para definir completamente uma geometria métrica intrínseca sobre ela.

Os observáveis que utilizamos neste trabalho dizem respeito apenas aos “links” entre sítios e a sítios separados por uma diagonal bi-dimensional contida num dos planos da

rede. Entretanto, é possível definir observáveis que meçam  $\alpha_R$  para dois sítios vizinhos ao longo de qualquer direção de uma rede de dimensão mais alta:

$$\begin{aligned} \langle [\varphi_i(x + a_{\mu_1} + \dots + a_{\mu_3}) - \varphi_i(x)]^2 \rangle &= \frac{1}{N^d} \sum_k \frac{4 \sin^2\left(\pi \frac{k_{\mu_1} + \dots + k_{\mu_3}}{N}\right)}{\rho^2(k) + \alpha_R} \\ &= f_3(N, d, \alpha_R), \\ \langle [\varphi_i(x + a_{\mu_1} + \dots + a_{\mu_4}) - \varphi_i(x)]^2 \rangle &= \frac{1}{N^d} \sum_k \frac{4 \sin^2\left(\pi \frac{k_{\mu_1} + \dots + k_{\mu_4}}{N}\right)}{\rho^2(k) + \alpha_R} \\ &= f_4(N, d, \alpha_R). \end{aligned}$$

Com isto é possível, em princípio, obter a geometria intrínseca completa de uma rede em quatro dimensões. Nós nos limitamos aqui a examinar apenas os “links” e diagonais bi-dimensionais por motivos técnicos e devido ao fato de que isto é suficiente para, pelo menos, um primeiro exame da geometria gerada, através de suas secções bi-dimensionais.

Observe-se que, do ponto de vista deste trabalho, o uso destes observáveis locais é apenas uma técnica que nos permite medir  $\alpha_R$  de uma forma local em simulações de dimensões limitadas pela atual disponibilidade de recursos computacionais. Esta é uma técnica que talvez se aplique apenas aos modelos  $\lambda\phi^4$ , mas é possível formular, em princípio, uma forma de fazer isto em um modelo qualquer. Basta que imaginemos que temos uma rede muito grande, que possa ser dividida em um número grande de pequenas caixas, cada uma delas contendo ainda com um número suficientemente grande de sítios.

Dentro de cada uma destas caixas usamos transformadas de Fourier com momentos ao longo de cada direção, com comprimentos de onda suficientemente pequenos para caber dentro da caixa, para calcular a massa renormalizada associada a cada direção através de um ajuste ao propagador. Assumimos, é claro, que as caixas sejam muito menores que a distância típica na qual a massa renormalizada varia e que o número de modos disponíveis dentro de cada caixa seja muito grande, permitindo um bom ajuste ao propagador. Para que uma abordagem deste tipo tenha sucesso, é óbvio que seria necessária uma rede extremamente grande, que está atualmente fora de nosso alcance na prática.

Neste trabalho estaremos, portanto, utilizando os observáveis locais para medir a geometria métrica da rede. Entretanto, estaremos fazendo isto em condições diferentes daquelas nas quais é possível testá-los por comparação com os resultados conseguidos através das transformadas de Fourier, pois estaremos introduzindo fontes externas dependentes de posição, que quebram as simetrias de translação. É necessário, portanto, considerar os erros que podem estar sendo introduzidos por esta extrapolação, apesar de que os testes realizados cobrem uma considerável amplitude de situações sem que tenha sido observada nenhuma mudança importante nos resultados. Podemos argumentar de várias formas diferentes que esta abordagem está pelo menos qualitativamente correta, fornecendo pelo menos uma boa aproximação da situação real.

Uma primeira justificativa baseia-se na própria trivialidade da teoria: se a teoria é de fato trivial, como tudo leva a crer, então as correlações de dois pontos são as mesmas da teoria livre e portanto os observáveis locais devem produzir bons resultados, pelo menos no limite do contínuo, mesmo na presença de fontes externas arbitrárias. Observe-se que somente estamos interessados em usar os observáveis para medir  $\alpha_R$  e não  $v_R$  ou  $\lambda_R$ .

Para formular nossa segunda justificativa, observamos primeiro que, para o cálculo do comprimento de correlação, as funções de correlação de dois pontos devem sempre ser calculadas para o campo deslocado  $\vec{\varphi}'$ , cujo valor esperado se anula. Como foi discutido anteriormente, o funcionamento preciso dos observáveis (4.3) parece estar relacionado ao fato de que, sendo constante,  $\vec{v}_R$  não aparece nestes observáveis, que envolvem derivadas, de forma que eles podem ser escritos tanto em termos de  $\vec{\varphi}$  quanto de  $\vec{\varphi}'$ . Com a introdução de fontes externas dependentes de posição  $\vec{v}_R$  não será mais constante e portanto não será cancelado destes observáveis. Teremos agora para, por exemplo, o primeiro observável em (4.3)

$$\begin{aligned} & \langle [\varphi'_i(l_+) - \varphi'_i(l_-)]^2 \rangle \\ &= \langle \{[\varphi_i(l_+) - v_{R,i}(l_+)] - [\varphi_i(l_-) - v_{R,i}(l_-)]\}^2 \rangle \\ &= \langle (\Delta_l \varphi_i - \Delta_l v_{R,i})^2 \rangle. \end{aligned}$$

Observamos agora que, enquanto os campos quânticos são descontínuos no limite, os observáveis da teoria, como por exemplo  $\vec{v}_R$ , são, ao contrário, contínuos. Portanto, enquanto  $\Delta_l \varphi_i \approx 1$ ,  $\Delta_l v_{R,i} \rightarrow 0$  no limite. Com isto fica claro que estes observáveis são dominados pelo comportamento descontínuo do campo e que as diferenças entre os valores de  $v_R$  em sítios próximos podem introduzir, no máximo, pequenas alterações no valor do observável, que devem desaparecer no limite do contínuo.

Finalmente, observamos que as funções  $f'_{0,i \neq N}$ ,  $f_1$  e  $f_2$ , consideradas como funções de  $\alpha_R$  para  $N$  e  $d$  dados, têm como imagens intervalos finitos  $(0, f_M)$ , com  $f_M$  da ordem de um, enquanto  $\alpha_R$  varia no domínio  $(0, \infty)$ . Desta forma, dependendo do valor obtido numericamente para os observáveis, pode ou não ser possível inverter estas funções para obter os valores correspondentes de  $\alpha_R$ . De fato, para alguns “runs” de teste com estatística muito pobre, verificamos que esporadicamente a inversão falha devido aos erros numéricos grandes. Entretanto, ela nunca falha para  $f_1$  e  $f_2$  em “runs” de produção com grande estatística. Este fato indica que os observáveis estão de fato relacionados de perto com as fórmulas  $f_1$  e  $f_2$  e que os valores de  $\alpha_R$  obtidos através deles não devem conter erros excessivamente grandes.

# Capítulo 5

## Geometria Gerada na Rede

Para examinar o caráter da geometria gerada na rede realizamos simulações do modelo em quatro dimensões com uma fonte constante colocada ao longo de uma linha de sítios na direção  $\mu = 1$ , que escolhemos arbitrariamente como a direção temporal. Para obter as massas renormalizadas em cada “link” e diagonal medimos sobre eles os observáveis definidos em (4.3), mas usando as variáveis de campo deslocadas  $\tilde{\varphi}'$  em vez de  $\tilde{\varphi}$ . Escolhemos examinar as secções espaciais bi-dimensionais que contém a origem. Desta forma podemos examinar a geometria resultante através da construção de *immersões* para estas secções bi-dimensionais.

### 5.1 Resultados Numéricos: Geometria da Secção

Nas figuras 5.1 a 5.3 podemos observar o resultado deste processo em alguns casos interessantes. Um conjunto mais completo de gráficos pode ser encontrado no apêndice A.2. Para a construção das geometrias mostradas nestes gráficos foram utilizados a massa da componente longitudinal e o maior valor que pudemos rodar para a fonte externa,  $j_0 = 10$ . No gráfico 5.1, que corresponde mais claramente à fase simétrica, podemos ver que a geometria resultante tem uma curvatura muito localizada, com um alcance curto em torno da posição da fonte. No gráfico 5.2, que corresponde a estarmos mais profundamente na fase de simetria quebrada, vemos uma clara tendência à conicidade, ou seja, uma geometria de pouca curvatura local mas com uma singularidade cônica na posição da fonte. Nestes casos é frequente o aparecimento de uma dobra na imersão, ao longo da borda da rede. No gráfico 5.3, que corresponde a uma posição próxima da transição crítica no diagrama de fase, temos uma geometria claramente curva, que parece estar desenvolvendo um horizonte nas imediações da fonte. É muito interessante que este comportamento esteja relacionado à região de transição crítica, para onde devem tender os limites do contínuo.

Nas figuras 5.4 a 5.6 podemos ver gráficos semelhantes, para a construção dos quais foi utilizada a massa da componente transversal. Para esta componente temos, na fase simétrica, uma geometria essencialmente plana, com dobras da imersão provavelmente

Imersao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=120, i=2, j=10.

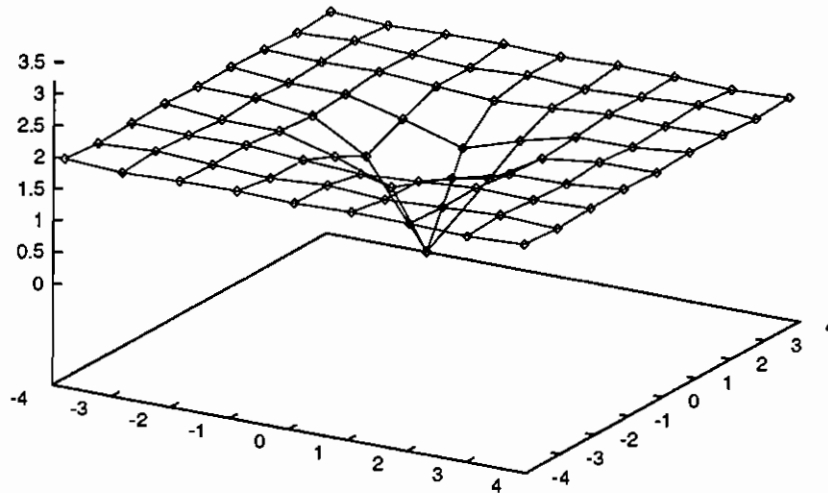


Figura 5.1: Imersão na fase simétrica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

Imersao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=30, i=2, j=10.

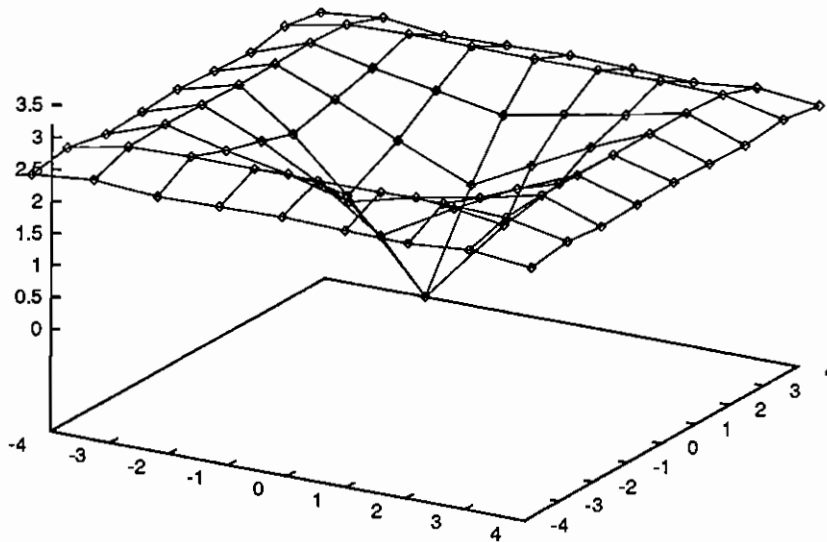


Figura 5.2: Imersão na fase de simetria quebrada, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.



Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=2$ ,  $j=10$ .

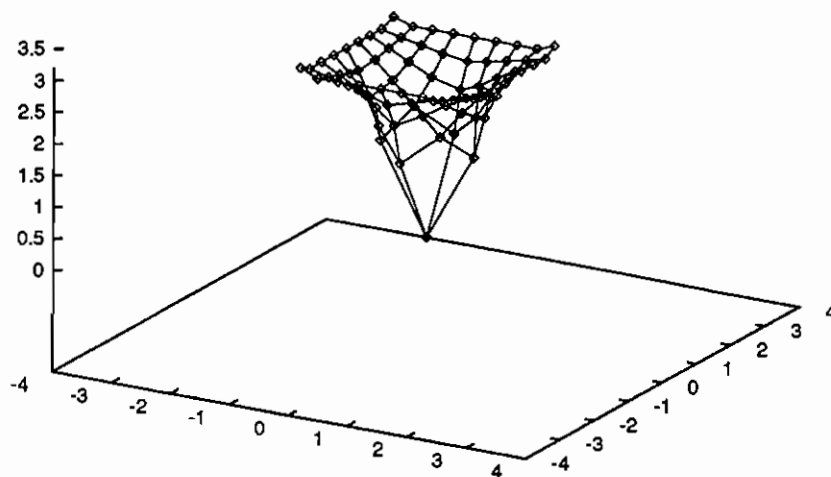


Figura 5.3: Imersão na região crítica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $i=1$ ,  $j=10$ .

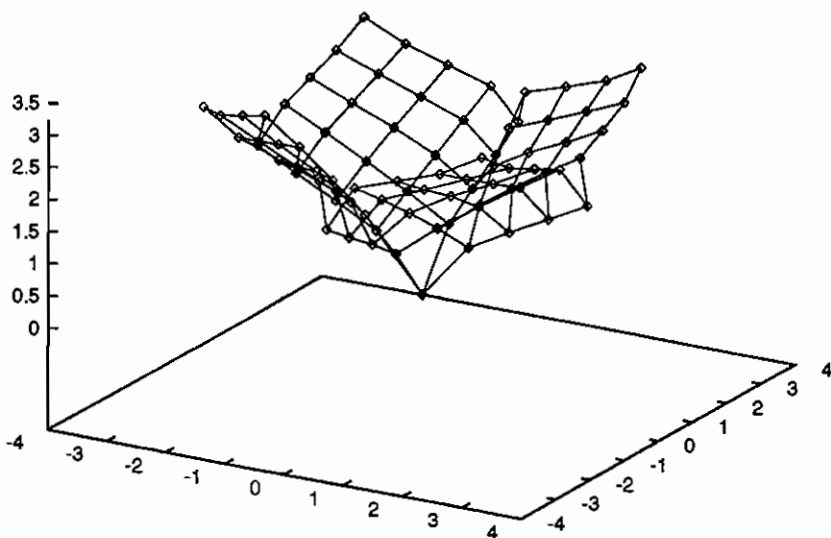


Figura 5.4: Imersão na fase simétrica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente transversal.

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $i=1$ ,  $j=10$ .

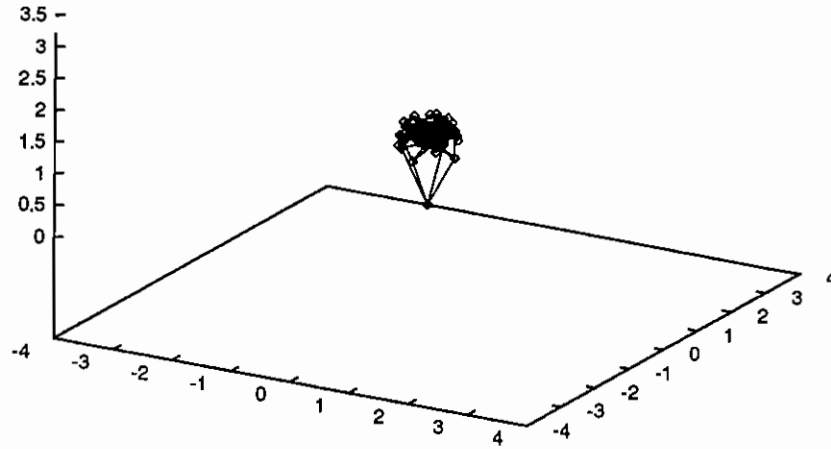


Figura 5.5: Imersão na fase de simetria quebrada, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente transversal.

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=1$ ,  $j=10$ .

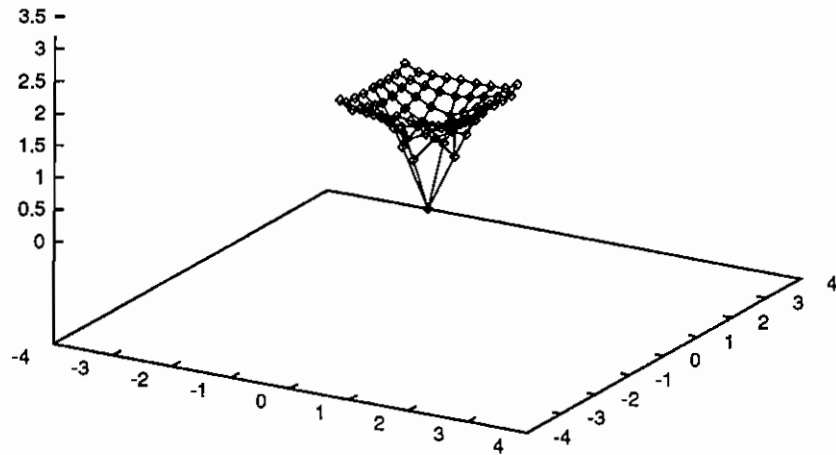


Figura 5.6: Imersão na região crítica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente transversal.

associadas a erros numéricos na origem, onde se localiza a fonte singular. Na fase de simetria quebrada a geometria colapsa, pois a massa desta componente vai a zero e ela não pode de fato definir uma geometria. É interessante que na região crítica, ao contrário do que acontece nas outras regiões, a massa da componente transversal define uma geometria extremamente parecida com aquela definida pela massa da componente longitudinal. A principal diferença parece ser uma mudança global de escala, provavelmente devida à reconstituição imperfeita da simetria na região de transição, o que é característico de redes relativamente pequenas com condições de contorno periódicas.

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $l=2$ ,  $j=10$ .

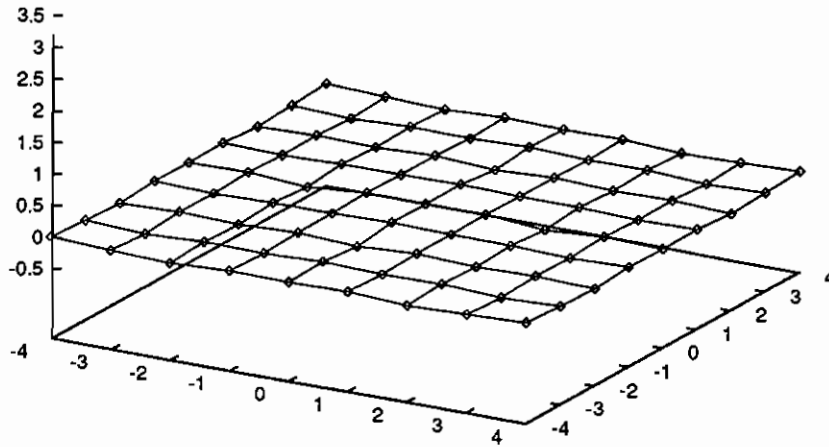


Figura 5.7: Imersão para a teoria livre, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

Nestas simulações  $\theta = 180^\circ$  corresponde à teoria livre, na qual a geometria deve ser plana, com ou sem fonte externa. Este ponto foi utilizado como referência para testes dos programas e um exemplo dos resultados pode ser visto na figura 5.7. Também verificamos que a geometria gerada é plana para a teoria interagente, desde que  $j_0$  seja constante ao longo de toda a rede.

Realizamos também algumas simulações com um valor um pouco menor para a fonte externa,  $j_0 = 5$ , com o objetivo de determinar o caráter da sua influência sobre a formação e posição do horizonte. Podemos ver alguns resultados nas figuras 5.8 a 5.10. Como vemos, a formação de um horizonte é menos visível neste caso, o que provavelmente indica que ele estaria se formando mais perto do centro, abaixo da resolução da rede. Presumivelmente, para podermos ver a formação de um horizonte neste caso será necessário utilizar redes maiores.

Imersao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=70, i=2, j=5.

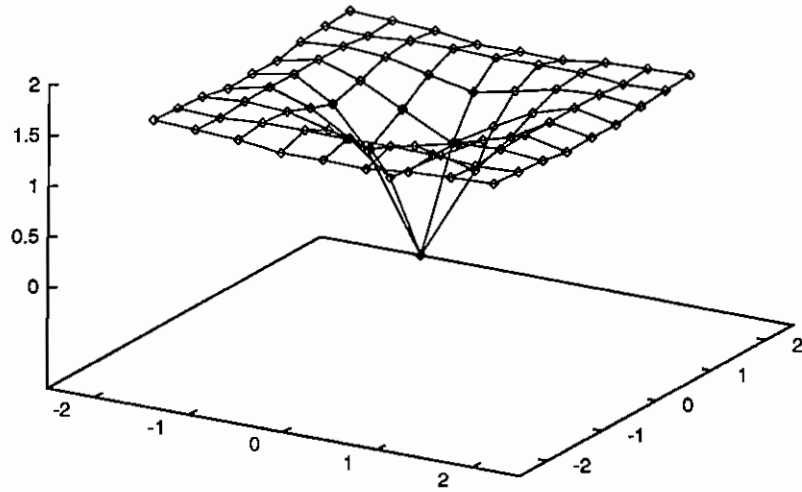


Figura 5.8: Imersão na fase simétrica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 5$ , componente longitudinal.

Imersao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=50, i=2, j=5.

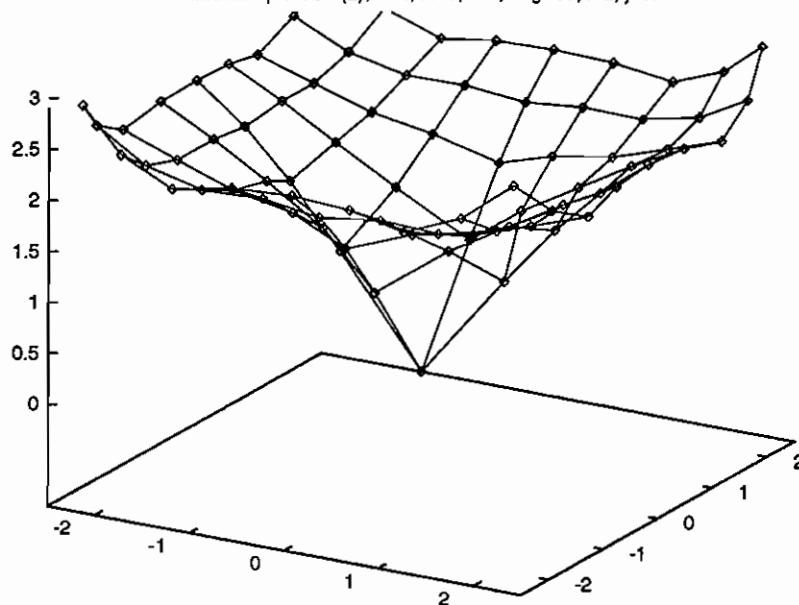


Figura 5.9: Imersão na fase de simetria quebrada, em quatro dimensões, com  $j_0 = 5$ , componente longitudinal.

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=2$ ,  $j=5$ .

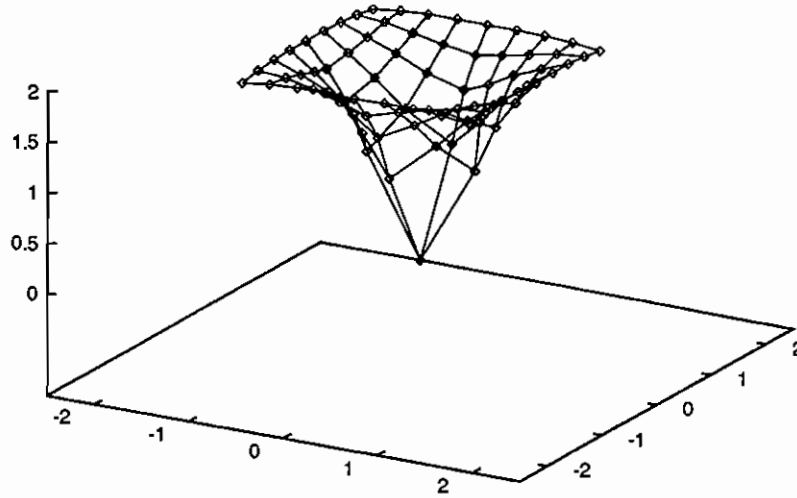


Figura 5.10: Imersão na região crítica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 5$ , componente longitudinal.

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $i=2$ ,  $j=10$ .

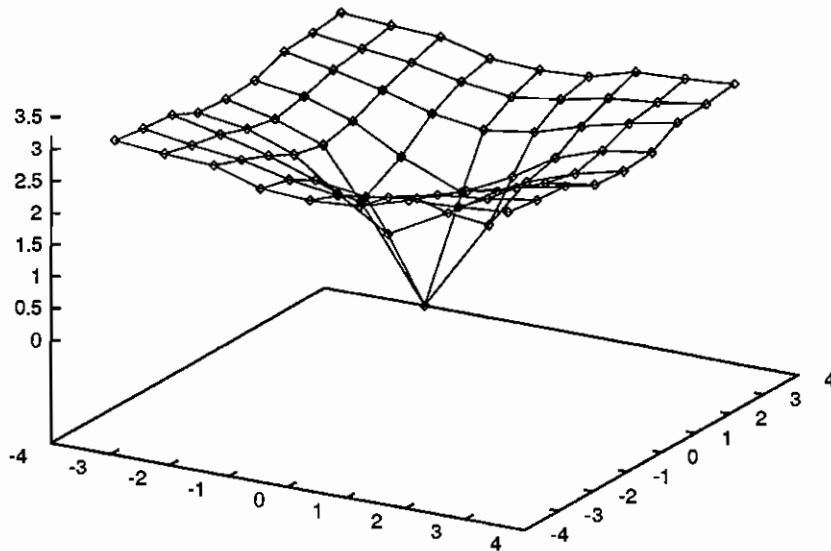


Figura 5.11: Imersão na fase simétrica, em três dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

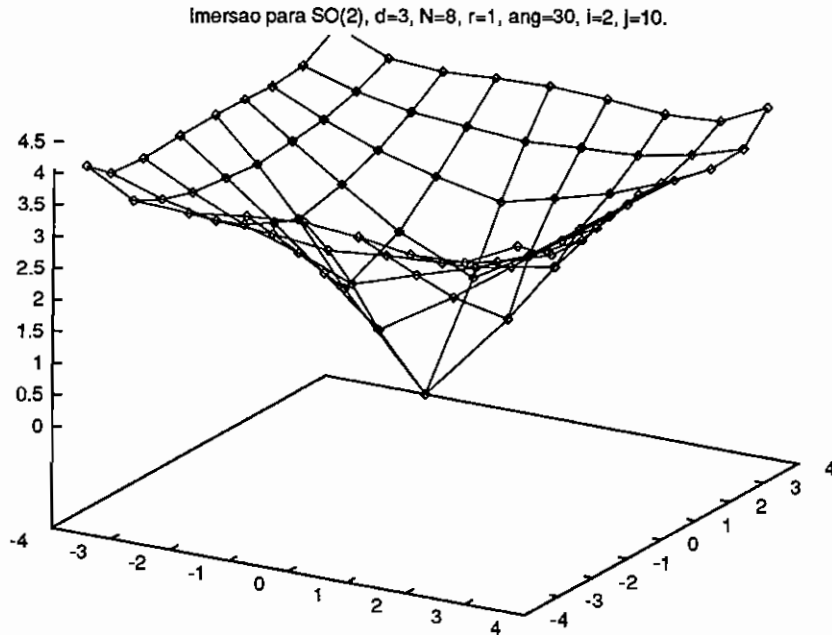


Figura 5.12: Imersão na fase de simetria quebrada, em três dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

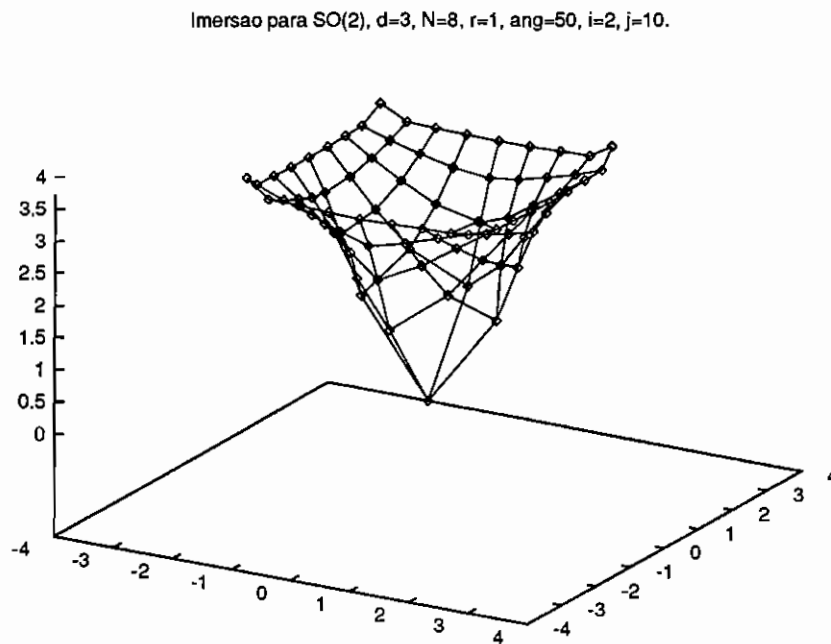


Figura 5.13: Imersão na região crítica, em três dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

Finalmente, realizamos algumas simulações do modelo em três dimensões, com o mesmo tipo e valor da fonte, com o objetivo de verificar o tipo de geometria que aparece neste caso. O principal ponto de interesse era verificar se a geometria gerada neste caso é localmente plana e, em particular, se existe uma singularidade cônica na origem. Gráficos com os resultados podem ser vistos nas figuras 5.11 a 5.13. Como se pode observar, em redes finitas a geometria em três dimensões é qualitativamente semelhante àquela que aparece em quatro dimensões. Naturalmente, devemos manter em mente que as variáveis dimensionais da teoria escalam de forma diferente em três e quatro dimensões e que, portanto, pode haver uma diferença significativa no limite do contínuo.

## 5.2 Métodos Numéricos Utilizados

As simulações revelaram-se bastante longas nos equipamentos que estiveram disponíveis para este trabalho. Para a maior rede que conseguimos rodar, com  $N = 8$ , alguns pontos chegaram a levar quase 1000 horas em um processador do computador mais rápido disponível para o nosso uso, para que pudéssemos gerar boa estatística. Para melhorar a estatística, considerando que a simetria de translação temporal não é quebrada pela fonte que introduzimos, fizemos uma média sobre as  $N$  secções espaciais perpendiculares ao eixo temporal. Ainda para melhorar a estatística fizemos, no caso do espaço-tempo quadri-dimensional, uma média sobre as três secções bi-dimensionais contendo a origem que existem na secção espacial de três dimensões.

Para a construção das imersões é necessário resolver um problema de imersão que consiste, neste caso, em achar uma superfície num espaço Euclideo de três dimensões que tenha a mesma geometria intrínseca da nossa secção. Este problema foi resolvido numericamente através de um processo de relaxação estocástica do tipo de um ajuste de  $\chi^2$ . Sejam  $\ell_i$  os comprimentos associados a cada um dos  $2dN^d$  "links" e diagonais, que resultam do processo de quantização e sejam  $\delta_i$  as distâncias entre os pontos nas duas pontas de cada "link" ou diagonal, medidas no espaço de imersão. Definimos  $\chi^2$  como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2dN^d} w_i (\delta_i - \ell_i)^2,$$

onde a soma corre sobre todos os  $2dN^d$  "links" e diagonais e  $w_i$  são pesos inversamente proporcionais aos erros estatísticos associadas a cada  $\ell_i$ . O processo de relaxação estocástica é iniciado com os  $N^d$  pontos da rede em posições escolhidas arbitrariamente no espaço de imersão e passa a fazer mudanças randômicas nestas posições com o objetivo de minimizar  $\chi^2$ . Cada vez que uma mudança diminui  $\chi^2$  ela é aceita, caso contrário ela é rejeitada e tenta-se de novo a partir da situação original. Desta forma nos aproximamos do mínimo global de  $\chi^2$ , que é zero e corresponde a uma imersão perfeita, com cada  $\delta_i$  igual ao  $\ell_i$  correspondente.

O processo de relaxação pode ser feito de muitas maneiras diferentes. Se forem feitas apenas variações locais independentes em cada ponto, ele é susceptível de ser muito lento

para se aproximar significativamente do mínimo global. Há também o risco de que o sistema fique preso em mínimos locais dos quais é difícil sair. Alguns destes mínimos locais podem ser vistos como dobras na imersão resultante. Sempre que possível é útil fazer mudanças correlacionadas de vários pontos ao mesmo tempo. Entretanto, se o número de pontos correlacionados em uma determinada mudança for muito grande a probabilidade de se rejeitar mudanças tentativas rápido.

O processo de imersão por relaxação estocástica tende a funcionar melhor quando a geometria intrínseca da secção é mais curva. Observe-se que o problema de imersão não tem necessariamente uma solução única. Isto é óbvio, por exemplo, no caso da geometria plana e pode ser facilmente demonstrado com o amassar-se de uma folha de papel. Há um “drift” dentro do conjunto das possíveis soluções que acontece junto com o processo de relaxação. Para minimizar o “drift” realizamos o relaxamento da imersão utilizando todos os vínculos de simetria que podemos impor.

Em nosso caso temos uma simetria de 8 elementos, compostos pelas quatro rotações de  $90^\circ$  e por uma reflexão da secção. Além disso, fixamos a posição do ponto central e a direção do eixo de simetria da secção. Entretanto, isto nem sempre basta para estabilizar completamente a imersão, que ainda fica sujeita a dobras de vários tipos, em especial para o caso da geometria plana. Pequenos erros nos comprimentos dos “links” e diagonais podem ter um efeito dramático na imersão. Isto acontece com frequência para os “links” e diagonais que se ligam ao ponto central onde está a singularidade da fonte, onde os erros numéricos tendem a ser maiores. Estes erros não são puramente estatísticos, incluindo também erros numéricos relacionados à representação do potencial da teoria na presença de fontes externas fortes.

O processo de relaxamento estocástico foi executado em cada caso até que os erros caíssem abaixo de um certo nível, escolhido de forma a ser compatível com os nossos erros numéricos e a não estender demasiadamente o tempo de execução dos programas. Gráficos típicos dos valores finais de  $\chi^2$  podem ser vistos nas figuras 5.14 a 5.16 e um conjunto mais completo pode ser encontrado no apêndice A.3. Nestes gráficos a escala de  $\chi^2$  é relativa ao comprimento médio dos “links” e diagonais que se ligam ao ponto no qual ele está definido. Desta forma, os valores apresentados correspondem ao deslocamento adicional que seria necessário realizar em cada ponto para que os erros fossem a zero, o que nos dá uma idéia intuitivamente útil da qualidade do ajuste. Tipicamente os erros não passam de alguns por cento nos piores casos, em geral no centro da rede, onde está a fonte singular.

### 5.3 Análise da Geometria da Secção

O principal resultado que temos a apresentar aqui sobre o relacionamento entre a quantização dos campos e a curvatura da geometria espacial é de caráter qualitativo, ou seja, o simples fato de que aparece uma geometria curva. As redes que foi possível utilizar até agora são muito pequenas para podermos fazer muito melhor do que avaliar visualmente os resultados. Entretanto, mesmo uma avaliação puramente visual dos re-



Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $i=2$ ,  $j=10$ .

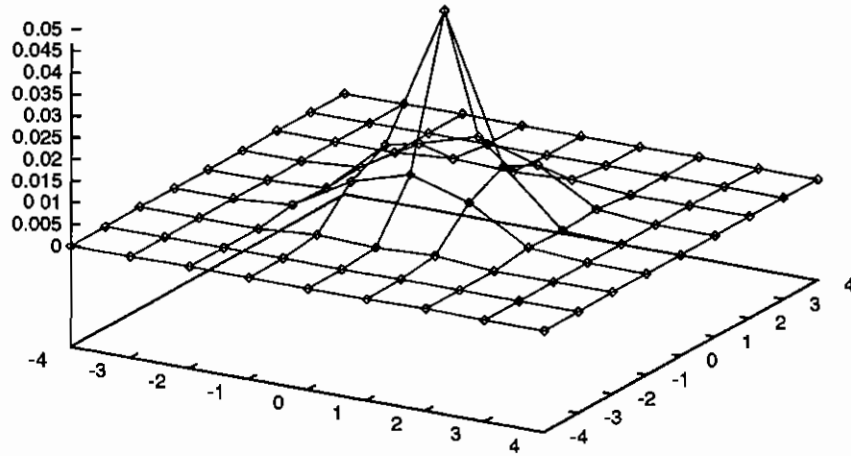


Figura 5.14: Erros residuais na fase simétrica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $i=2$ ,  $j=10$ .

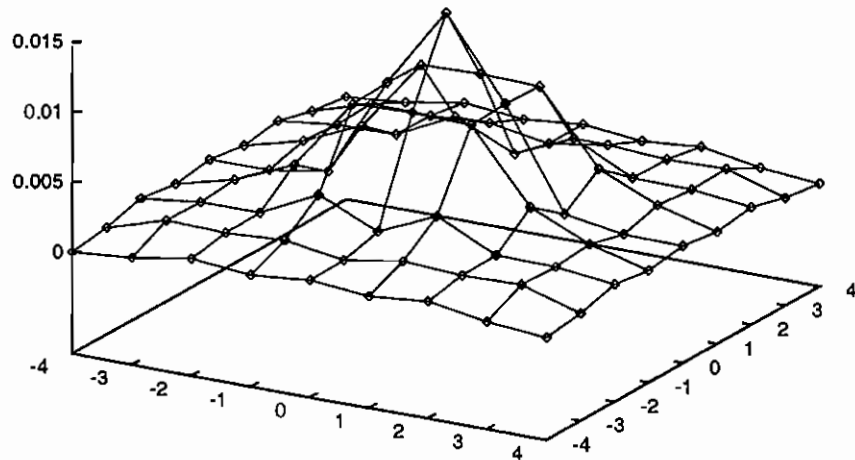


Figura 5.15: Erros residuais na fase de simetria quebrada, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

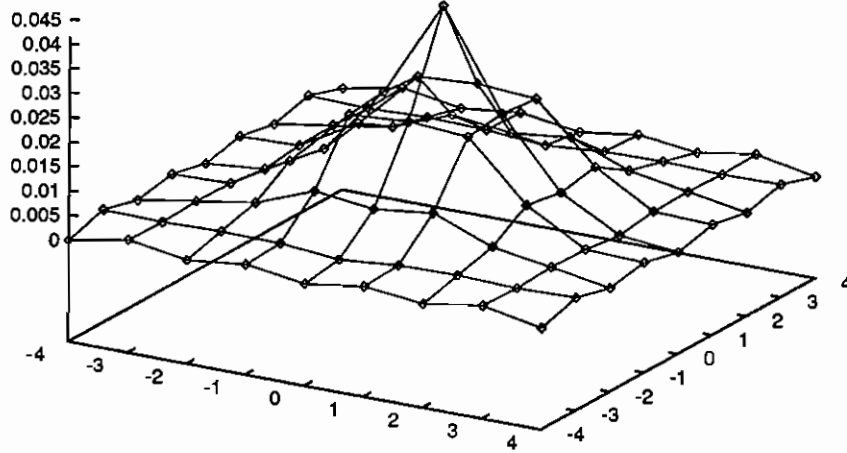


Figura 5.16: Erros residuais na região crítica, em quatro dimensões, com  $j_0 = 10$ , componente longitudinal.

sultados já pode nos dar uma idéia intuitivamente útil sobre a natureza da geometria. Basta comparar a imersão da figura 5.3, que corresponde à região crítica, com a imersão de uma secção bi-dimensional da geometria de Schwarzschild mostrada na figura 5.17, para verificar a semelhança qualitativa entre as duas. Nesta última figura incluímos, para comparação, uma versão ampliada da figura 5.3. Os dois gráficos da figura 5.17 estão desenhados na mesma escala e o raio de Schwarzschild foi escolhido para torna-los tão semelhantes quanto possível.

Há ainda dois aspectos da geometria gerada que podemos tentar examinar com mais atenção, mesmo sob estas condições limitadas do ponto de vista das explorações numéricas. O primeiro consiste de uma comparação da curvatura escalar da secção gerada com aquela da secção correspondente da métrica de Schwarzschild. É fácil calcular a curvatura intrínseca de uma secção bi-dimensional contendo a origem na geometria de Schwarzschild, fora do horizonte. A métrica completa da geometria é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2],$$

onde  $r_0$  é o raio de Schwarzschild. A secção é dada pela parte tri-dimensional da métrica, ou seja por  $dt = 0$ , se impusermos ainda que  $\theta = \pi/2$  com  $d\theta = 0$ . Como a métrica é estática fora do horizonte as secções Euclideana e Lorentziana são idênticas e obtemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 = A^2(r)dr^2 + r^2 d\phi^2,$$

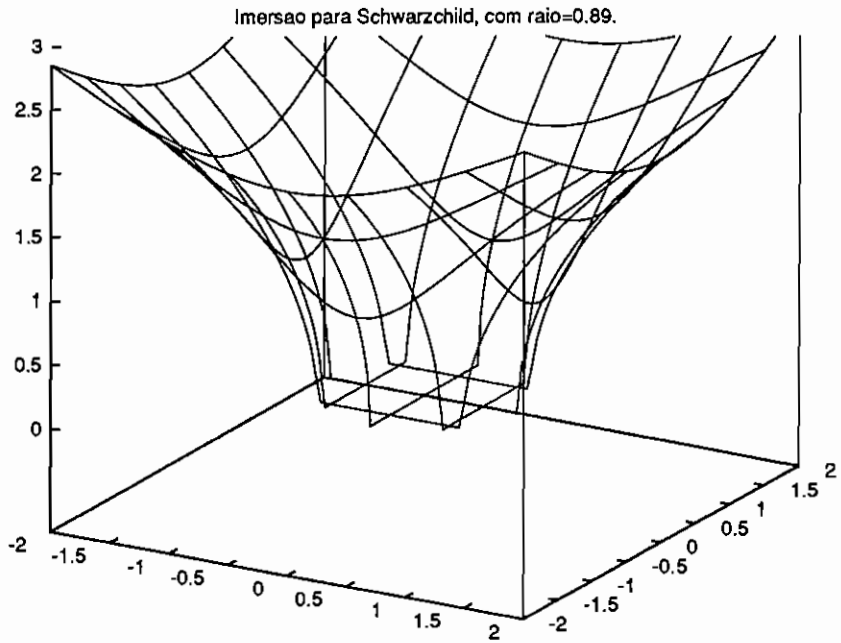
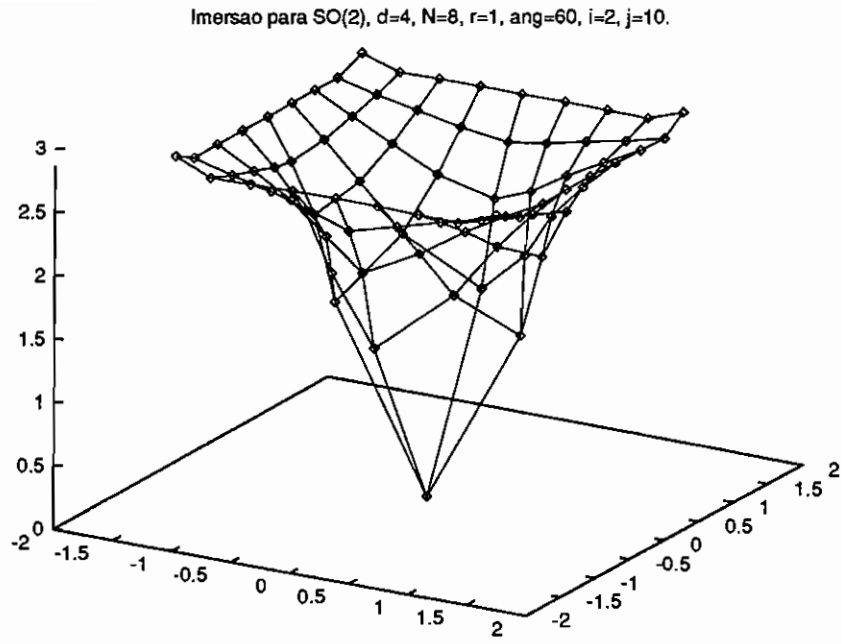


Figura 5.17: Comparação da imersão na região crítica com a imersão de uma secção da geometria de Schwarzschild fora do horizonte, mostrada com resolução compatível com a da rede.

onde  $A(r) = (1 - r_0/r)^{-1/2}$ . Usando a base de 1-formas  $\omega_\mu$  dada por

$$\begin{aligned}\omega_r &= A(r)dr, \\ \omega_\phi &= r d\phi,\end{aligned}$$

a métrica da secção pode ser escrita como

$$ds^2 = (\omega_r)^2 + (\omega_\phi)^2,$$

com  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , de forma que não é necessário diferenciar índices inferiores e superiores. A 1-forma de conexão  $\omega_{\mu\nu}$  é neste caso anti-simétrica e, resolvendo as equações

$$\begin{aligned}dg_{\mu\nu} &= \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} \\ , d\omega_\mu &= -\omega_{\mu\nu} \wedge \omega_\nu\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\omega_{rr} &= \omega_{\phi\phi} = 0, \\ \omega_{\phi r} &= -\omega_{r\phi} = \frac{1}{rA(r)}\omega_\phi.\end{aligned}$$

A 2-forma de curvatura  $\Omega_{\mu\nu}$  é obtida de

$$\Omega_{\mu\nu} = d\omega_{\mu\nu} + \omega_{\mu\alpha} \wedge \omega_{\alpha\nu},$$

de onde segue que as componentes não-nulas são todas iguais a menos de sinal, sendo dadas por

$$\Omega_{r\phi} = \frac{\dot{A}(r)}{rA^3(r)}\omega_r \wedge \omega_\phi,$$

onde  $\dot{A}(r) = dA(r)/dr$ . A partir disto obtemos o tensor de curvatura  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ , que se relaciona com  $\Omega_{\mu\nu}$  através de

$$\Omega_{\mu\nu} = R_{\mu\nu|\alpha>\beta|}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta,$$

de onde resulta que as componentes não-nulas têm todas a mesma magnitude, com

$$R_{r\phi r\phi} = \frac{\dot{A}(r)}{rA^3(r)},$$

as outras podendo ser obtidas por anti-simetria. Segue que as componentes não-nulas do tensor  $R_{\mu\nu}$  são

$$R_{rr} = R_{\phi\phi} = \frac{\dot{A}(r)}{rA^3(r)},$$

e que a curvatura escalar  $R$  é dada por

$$R = \frac{2\dot{A}(r)}{rA^3(r)} = -\frac{r_0}{r^3}.$$

Este resultado vale em qualquer ponto fora do horizonte, ou seja para  $r > r_0$ . O que nos interessa mais a respeito dele é que ele é negativo e que a sua magnitude cai quando nos afastamos do centro.

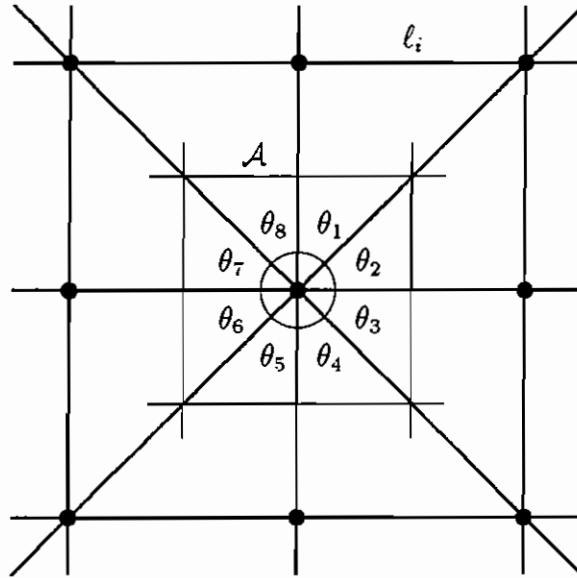


Figura 5.18: Uma célula do complexo simplicial.

Também é fácil calcular a curvatura escalar de nossa secção numérica através do cálculo de Regge. Para isto, utilizamos a interpretação de nossa rede como um complexo simplicial. Tomando todos os “links” e diagonais que partem de um ponto, bem como todos os vizinhos conectados por estes “links” e diagonais, podemos construir ao redor de cada ponto da secção uma parte do complexo, como mostra a figura 5.18. Ele é composto de 8 triângulos. Se ligarmos os pontos médios dos “links” e diagonais, construímos uma pequena região ou *célula* em torno de cada ponto. É fácil verificar que a secção pode ser dividida de tal forma que cada ponto tenha ao redor de si uma célula como esta, sendo que a união das células reconstitui a secção. Nestas condições podemos definir a curvatura escalar no ponto central da célula como

$$R = \frac{2\pi - \theta_T}{\mathcal{A}},$$

onde  $\mathcal{A}$  é a área da célula que está em torno do ponto e  $\theta_T = \sum_{i=1}^8 \theta_i$  é a soma dos 8 ângulos internos dos triângulos cujos vértices estão no ponto central da célula em questão. Tanto as áreas quanto os ângulos podem ser obtidos trigonometricamente a partir de nosso conhecimento dos comprimentos  $\ell_i$  dos “links” e diagonais. Com isto

podemos calcular  $R$  em cada ponto ao longo de nossa secção numérica. Como para  $d = 2$  a curvatura escalar basta para definir completamente a geometria intrínseca, isto permite uma comparação útil. É necessário registrar aqui que, como definido aqui, o complexo simplicial associado à secção bi-dimensional é, na realidade, tri-dimensional. Isto se deve ao fato de utilizarmos ambas as diagonais de cada quadrado da rede, o que efetivamente dá origem a tetraedros. Entretanto estes tetraedros são quase-degenerados em redes finitas e tornam-se planos no limite do contínuo.

Este cálculo foi levado a cabo e o resultado comparado qualitativamente com o resultado para a secção de Schwarzschild. Naturalmente, os números absolutos não são de muito interesse, pois estamos comparando uma rede relativamente pequena com o limite do contínuo. Mas o sinal resultante está correto, sendo negativo exceto no ponto central onde está a singularidade, nos pontos diretamente ligados a ele por um “link” ou diagonal e na borda da rede, na qual existem deformações devidas à condições de contorno periódicas. Naturalmente, pode-se perceber que, com a exclusão de tantos pontos em redes relativamente pequenas, não restam muitos pontos significativos para uma comparação quantitativa. Mesmo assim, na rede com  $N = 8$ , onde ainda existem dois pontos significativos ao longo da direção radial, pode-se ver que a magnitude de  $R$  decresce quando nos afastamos do centro, como é o caso para a geometria de Schwarzschild.

O segundo aspecto que podemos tentar examinar está relacionado com a possibilidade de que a geometria gerada seja conformalmente plana. Como a geometria é gerada pela variação de um único parâmetro, a massa renormalizada, pode-se pensar a princípio que isto leva inevitavelmente a uma geometria conformalmente plana. Isto se deve ao fato de que uma geometria é conformalmente plana se o seu intervalo invariante  $ds^2$  for proporcional ao intervalo invariante da geometria plana. O fator de proporcionalidade pode depender de posição, de tal forma que a geometria não é de fato plana, mas ela pode ser planificada por uma simples mudança da escala feita de forma local, em cada ponto. O ponto crucial é que, para que a geometria seja conformalmente plana, o fator de proporcionalidade não pode depender de *direção*, mas apenas de posição.

Assim, podemos avaliar se a geometria gerada será ou não conformalmente plana examinando a magnitude da escala gerada através da massa renormalizada em cada direção através de um determinado ponto. Observe-se que a massa renormalizada, como a medimos neste trabalho, não está associada a sítios e sim a “links” e diagonais, o que é um reflexo do fato de que ela está relacionada a comprimentos de correlação. Assim, é possível que exista de fato uma dependência dela com a direção. Como as massas renormalizadas estão associadas aos “links” e diagonais e não diretamente aos sítios, é necessário definir em cada sítio parâmetros de massa, associados a cada direção, que interpolem os valores das massas nos “links” e diagonais que se conectam ao ponto de cada um dos dois lados em cada direção.

Em nossas secções bi-dimensionais temos 4 direções independentes disponíveis em cada sítio. Para cada uma destas direções fazemos uma média das massas associadas ao dois “links” ou diagonais correspondentes, um de cada lado do sítio, e associamos o

resultado ao sítio. Verificamos então se os valores obtidos em cada sítio dependem ou não da direção. O resultado é que nas geometrias mais curvas eles dependem claramente da direção, com diferenças significativamente maiores que os erros estatísticos. Segue, portanto, que a geometria gerada no espaço quadri-dimensional não é conformalmente plana, exceto quando é completamente plana. Isto indica que as correlações são afetadas de forma diferenciada pela fonte central, dependendo de serem medidas nas direções radial ou angular. É necessário que não se confunda esta afirmação sobre a geometria do espaço como um todo com qualquer afirmação sobre a geometria intrínseca da secção, que, por ser bi-dimensional, é sempre conformalmente plana.

## Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas

Acreditamos que as simulações realizadas deixam pouca dúvida sobre o fato de que a introdução de fontes externas localizadas fortes no modelo  $\lambda\phi^4$  gera na rede *alguma* forma de geometria métrica com curvatura intrínseca. Ficam em aberto duas importantes questões: primeiro, temos a questão de se a curvatura da geometria gerada em redes finitas pelo processo de quantização dos campos sobrevive ou não ao limite do contínuo; segundo, temos a questão de se a geometria resultante é aquela prevista pela equação de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$

Não tivemos, até o momento, acesso a capacidade computacional suficiente para responder a estas perguntas através de explorações numéricas. Tudo que podemos dizer no momento sobre a segunda questão é que a geometria gerada em uma rede finita por uma fonte puntual, avaliada através de secções espaciais bi-dimensionais passando pela origem, é qualitativamente semelhante à secção correspondente da solução de Schwarzschild. Entretanto, com o rápido avanço da tecnologia de computação, podemos esperar que as explorações numéricas venham a progredir muito em um tempo relativamente curto.

Quanto à questão do limite do contínuo, certamente que o tamanho das redes que pudemos usar até agora não é suficiente para que possamos tirar conclusões definitivas. Deve-se dizer que é possível que a curvatura da geometria não sobreviva ao limite do contínuo em condições que sejam fisicamente aceitáveis. O motivo é que a variação da massa com a posição aparentemente se deve, neste modelo-laboratório, ao deslocamento do mínimo do potencial, ou seja, ao aparecimento de um valor esperado não-nulo  $\vec{v}_R$ . Isto apenas reflete o fato de que o modelo parece ser incapaz de definir duas escalas dimensionais independentes. Em quatro dimensões, um limite com uma fonte representando uma carga puntual finita e fixa é tal que  $j_0$  é constante, enquanto  $J_0 \rightarrow \infty$  como  $1/a^3$ . Num tal limite teremos  $\vec{V}_R$  finito em todo ponto exceto a origem. Como vimos anteriormente, se quisermos ter  $\vec{V}_R$  finito no limite do contínuo, é necessário que  $\vec{v}_R$  se anule neste limite. Assim, deveremos ter no limite que  $\vec{v}_R \rightarrow 0$  para todo ponto exceto



a origem, onde se localiza a fonte externa e onde  $\vec{V}_R$  diverge. Não somos capazes no momento de decidir se é ou não suficiente ter  $\vec{V}_R \neq 0$  para gerar uma geometria curva. Por isso, é possível que no limite  $\alpha_R$  torne-se constante em toda a extensão da rede e que a geometria gerada torne-se localmente plana.

Observe-se que, caso este mecanismo de fato se realize no limite do contínuo, pode-se encará-lo como um segundo tipo de trivialidade do modelo, associado à trivialidade em seu sentido usual. Este possível resultado pode ser interpretado como o fato de que a geometria gerada é de curto alcance, assim como as funções de correlação da componente longitudinal massiva de nosso modelo. Com isto, a curvatura da geometria pode colapsar para a origem no limite. É verdade que existem correlações de longo alcance nas fases quebradas dos modelos com  $\mathcal{N} > 1$ , devidas às partículas de massa zero, os bosons de Goldstone associados às componentes transversais. Entretanto, a geometria é definida pela massa renormalizada finita e não-nula da componente longitudinal e, se as diversas partículas não interagem devido à trivialidade da teoria, não há como estes modos de longo alcance possam afetar a geometria. Existe ainda a possibilidade de que haja um remanescente de caráter topológico da geometria gerada, na forma de uma singularidade cônica na origem, resultante do colapso da curvatura da geometria para aquele ponto.

Isto nos leva à discussão de uma objeção formulada pelo Prof. H. B. Nielsen quanto à questão da geometria gerada ser a de Einstein. Como é necessário ter  $m_R \neq 0$  para poder definir uma escala e portanto a geometria, as correlações do campo serão de curto alcance. É portanto de se esperar que as variações  $\Delta m_R$  da massa decaiam exponencialmente e a geometria resultante delas deve ser localizada e não a geometria de longo alcance da equação de Einstein. Como já dissemos, é possível que, neste modelo-laboratório, a trivialidade da teoria impeça os bosons de Goldstone de transmitirem os efeitos de geração de curvatura para longas distâncias mas, num caso mais realista, por exemplo numa teoria de gauge, teremos uma situação parecida, com partículas vetoriais de massa zero e partículas espinoriais de massa finita, exceto que neste caso elas de fato interagem umas com as outras.

Uma outra objeção quanto à satisfação da equação de Einstein pela geometria gerada vem do estudo da geometria em três dimensões. Aparentemente o comportamento é qualitativamente o mesmo que se vê em quatro dimensões, ao contrário do que implica a equação de Einstein. Segundo ela, em três dimensões deveríamos ver apenas singularidades cônicas no local da fonte. Naturalmente, é possível que isto se realize no limite do contínuo, mas seria de se esperar que as diferenças entre as situações em três e quatro dimensões fosse claramente visível mesmo em redes finitas. Mais uma vez, para progredir neste tipo de análise é necessário que possamos usar redes maiores tanto em três quanto em quatro dimensões.

Naturalmente, uma tarefa muito importante que está pela frente consiste de descobrir e desenvolver idéias e técnicas que permitam realizar um programa como o que expusemos aqui no modelo padrão, incluindo os campos vetoriais e espinoriais. Seria muito interessante iniciar este programa com o estudo do caso da eletrodinâmica.

Finalizamos com uma observação sobre a possível origem do princípio da equivalência em um programa como o que apresentamos aqui. Numa teoria mais complexa, como o modelo-padrão, teremos várias escalas físicas dimensionais independentes, relacionadas com as massas renormalizadas das diversas partículas presentes no modelo. É natural que utilizemos uma delas, possivelmente a da partícula massiva mais leve, como unidade de escala, passando a medir todas as outras em termos dela. Além disso, podemos agora introduzir fontes externas de vários tipos, um para cada tipo de campo presente no modelo. Presumivelmente a introdução independente de qualquer destas fontes deve afetar os valores de todas as massas, uma vez que os campos interagem uns com os outros.

Entretanto, para que o princípio da equivalência seja válido, é necessário que as *razões entre as massas não dependam de posição ou direção*, de forma que a geometria gerada seja a mesma do ponto de vista de qualquer das massas, a menos da mudança global de escala devida à troca de unidades. Para isto, é necessário que, qualquer que seja o tipo de fonte externa presente, todas as massas variem *da mesma forma* com a posição e direção. Assim, o princípio da equivalência, no âmbito das idéias aqui apresentadas, toma a forma de um determinado tipo de *universalidade* do mecanismo de geração de curvatura na geometria, que deve valer, pelo menos, para os tipos de campos e partículas que de fato encontramos na natureza. A determinação da existência ou não desta universalidade é, certamente, uma das mais importantes tarefas que temos pela frente.

# Apêndice A

## Gráficos

Apresentamos neste apêndice uma amostragem razoavelmente completa das simulações e dos testes numéricos realizados. Mais do que simplesmente registrar os dados disponíveis, a intenção é a de dar uma idéia da extensão do trabalho numérico que foi possível realizar.

Foram realizados testes e simulações em três e quatro dimensões, para o modelo  $\lambda\phi^4$  com simetria  $SO(2)$ . Em relação às fontes externas, foram realizados testes examinando os casos  $\vec{j}_0 = \vec{0}$  e  $\vec{j}_0 = (0, \dots, 0, j_0)$ , onde  $j_0$  é uma constante ao longo da rede, com valores entre 1 e 10. Foram utilizadas redes com  $N$  par entre 2 e 8, valores do parâmetro  $r$  entre 0.1 e 10 e do parâmetro  $\theta$  entre  $10^\circ$  e  $180^\circ$ . O ângulo a que se referem algumas das figuras é sempre o ângulo  $\theta$ .

A estatística utilizada em cada “run” foi de 200 blocos de 50000 varreduras da rede cada. Foram registradas as médias parciais sobre cada bloco e a dispersão entre os blocos foi utilizada para a avaliação dos erros estatísticos. Medimos também a auto-correlação entre varreduras individuais consecutivas, sendo os comprimentos de correlação correspondentes levados em conta no cálculo final dos erros.

Sempre que permitido pelas simetrias existentes, foram realizadas médias sobre a rede para melhorar a estatística. O efeito das correlações existentes entre diferentes pontos da rede nos erros finais foi automaticamente levado em conta, pois os erros foram calculados através dos blocos de varreduras obtidos já com estas médias incluídas.

Sendo as coordenadas da rede  $i_1, \dots, i_d = 1, \dots, N$  escolhemos arbitrariamente  $i_1 = 1, \dots, N$  como a coordenada do eixo temporal para as simulações e colocamos a fonte externa ao longo deste eixo, na posição  $i_{\mu \neq 1} = N/2$ . Fazemos médias dos observáveis sobre todas as secções espaciais perpendiculares ao eixo temporal. Em  $d = 3$  resulta um espaço bi-dimensional descrito por  $i_2, i_3 = 1, \dots, N$ . Em  $d = 4$  resulta um espaço tri-dimensional descrito por  $i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, N$ . Neste caso fazemos médias sobre as três secções bi-dimensionais dadas por  $i_2 = N/2, i_3 = N/2$  e  $i_4 = N/2$ .

As escalas dos gráficos de imersão foram mantidas constantes para todos os valores de  $\theta$ , para cada tamanho de rede e coleção de valores para os demais parâmetros do modelo.

# A.1 Testes dos Observáveis

## Testes em $d = 4$ : (componente transversal)

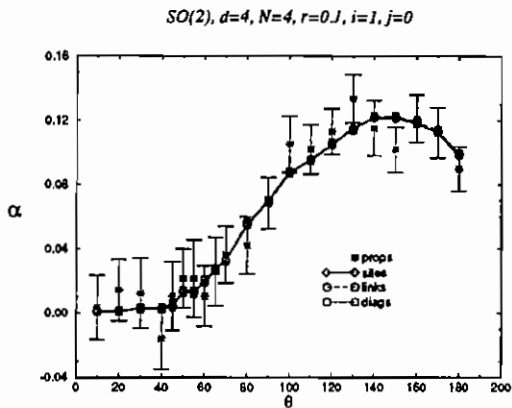


Fig. T-4-1.1

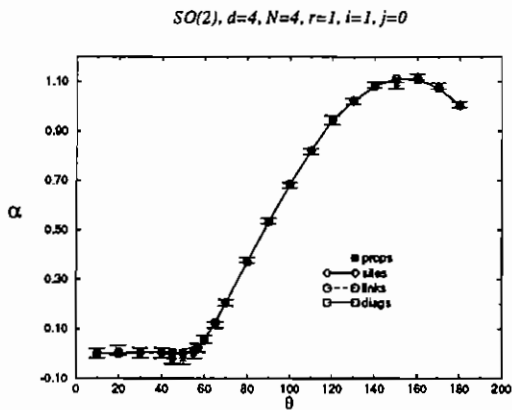


Fig. T-4-1.2

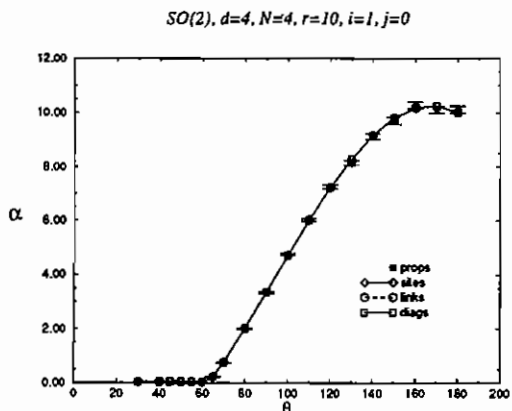


Fig. T-4-1.3

$SO(2), d=4, N=6, r=0, i=1, j=0$

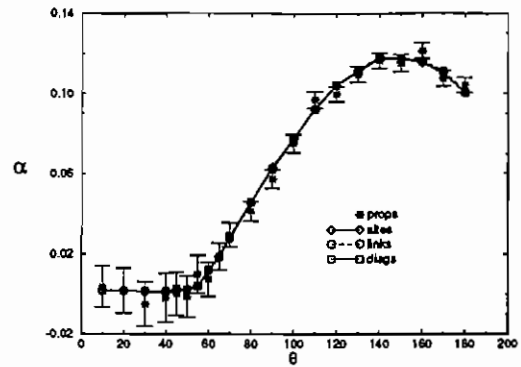


Fig. T-4-1.4

$SO(2), d=4, N=6, r=1, i=1, j=0$

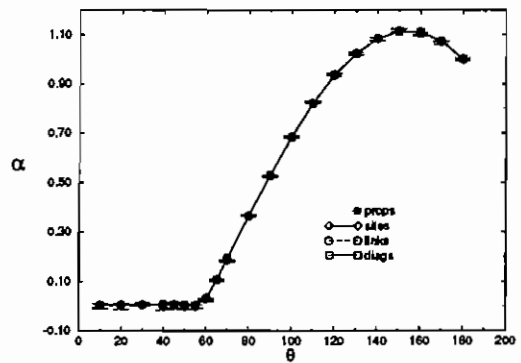


Fig. T-4-1.5

$SO(2), d=4, N=6, r=10, i=1, j=0$

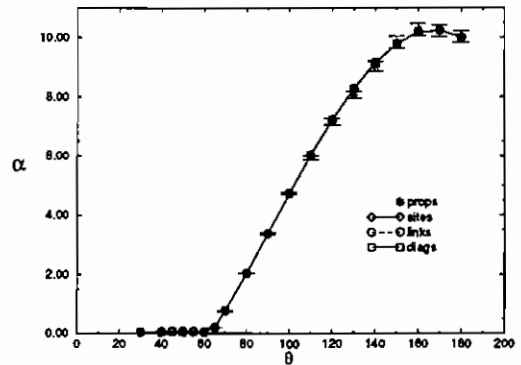


Fig. T-4-1.6

$SO(2), d=4, N=8, r=0.1, i=1, j=0$

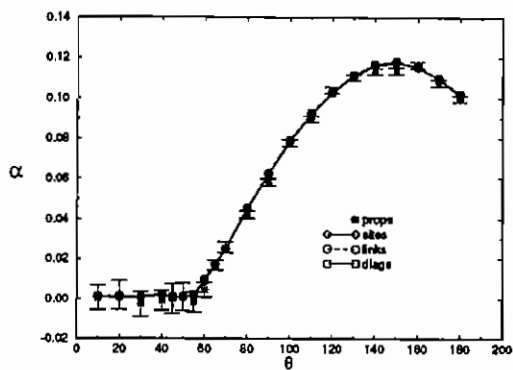


Fig. T-4-1.7

$SO(2), d=4, N=4, r=1, i=2, j=0$

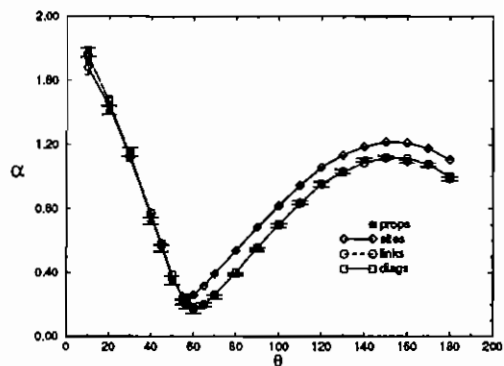


Fig. T-4-2.2

$SO(2), d=4, N=8, r=1, i=1, j=0$

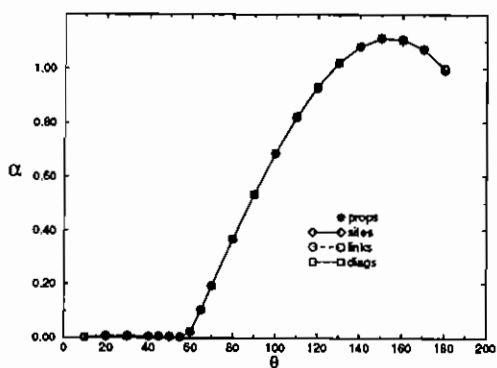


Fig. T-4-1.8

$SO(2), d=4, N=4, r=10, i=2, j=0$

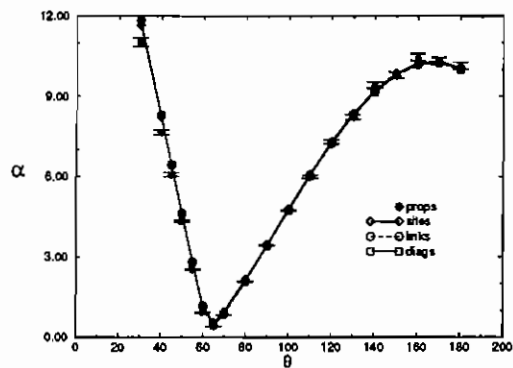


Fig. T-4-2.3

**Testes em  $d = 4$ :  
(componente longitudinal)**

$SO(2), d=4, N=4, r=0.1, i=2, j=0$

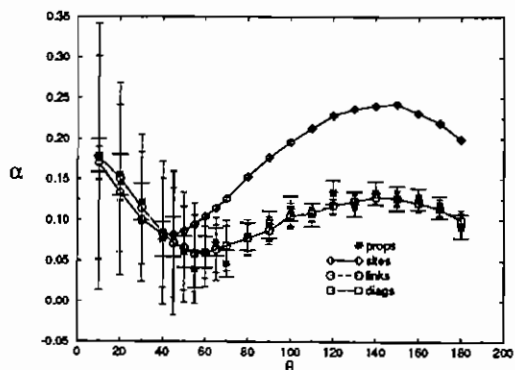


Fig. T-4-2.1

$SO(2), d=4, N=6, r=0.1, i=2, j=0$

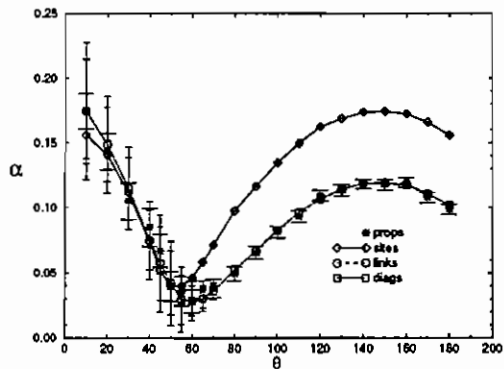


Fig. T-4-2.4

$SO(2), d=4, N=6, r=1, i=2, j=0$

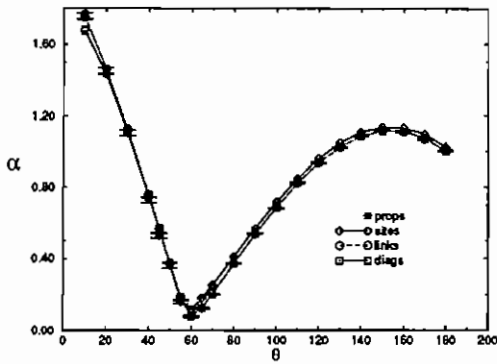


Fig. T-4-2.5

$SO(2), d=4, N=8, r=1, i=2, j=0$

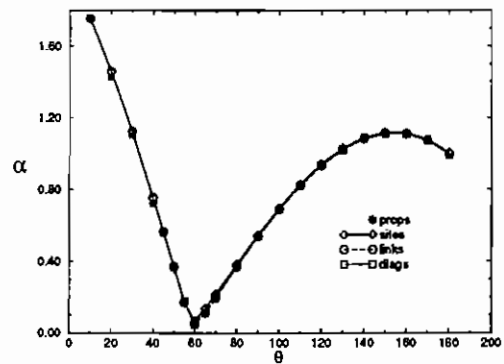


Fig. T-4-2.8

$SO(2), d=4, N=6, r=10, i=2, j=0$

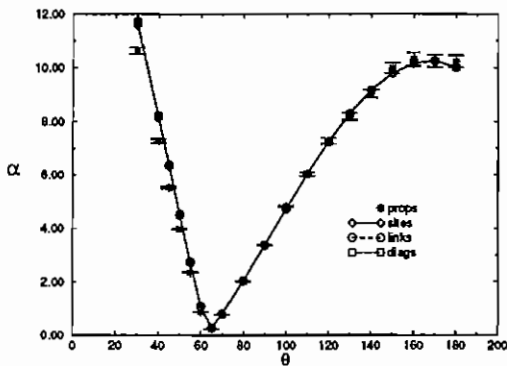


Fig. T-4-2.6

### Testes em $d = 3$ :

$SO(2), d=3, N=4, r=1, i=1, j=0$

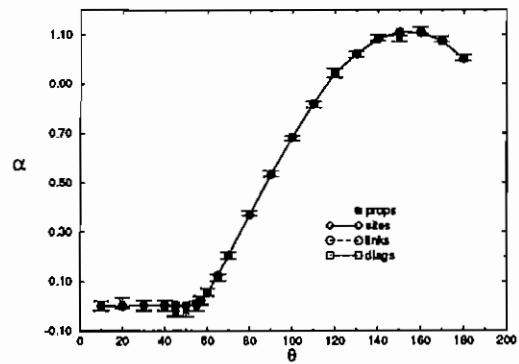


Fig. T-3.1

$SO(2), d=4, N=8, r=0.1, i=2, j=0$

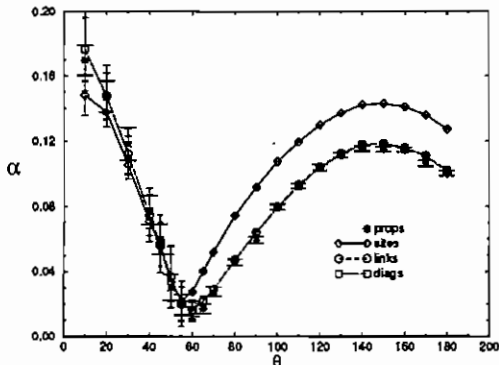


Fig. T-4-2.7

$SO(2), d=3, N=4, r=1, i=2, j=0$

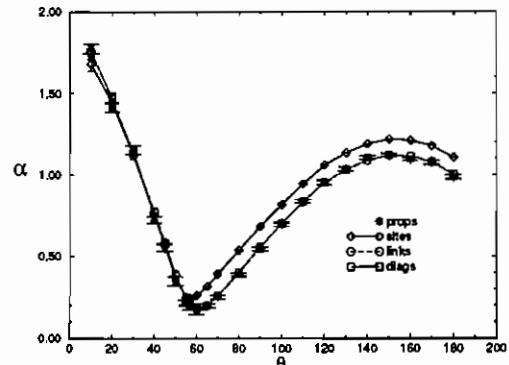


Fig. T-3.2

## A.2 Imersões da Secção

Imersões em  $d = 4$ :  
(componente longitudinal)

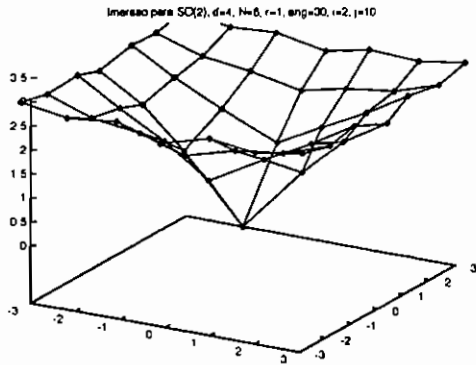


Fig. I-4-2.1

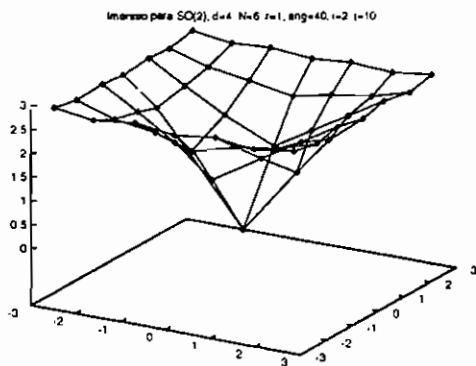


Fig. I-4-2.2

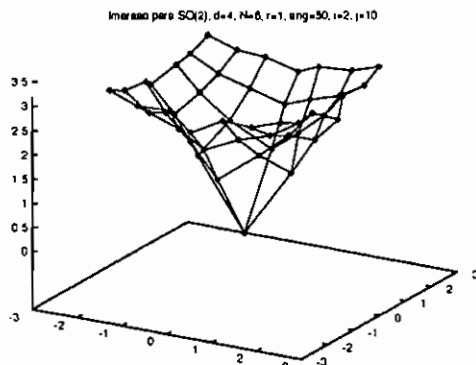


Fig. I-4-2.3

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

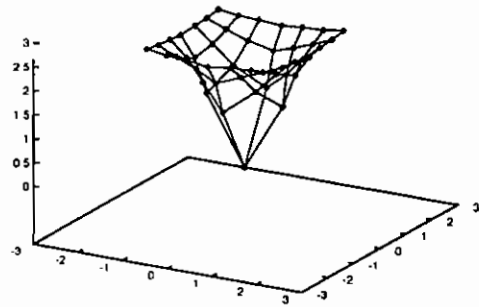


Fig. I-4-2.4

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

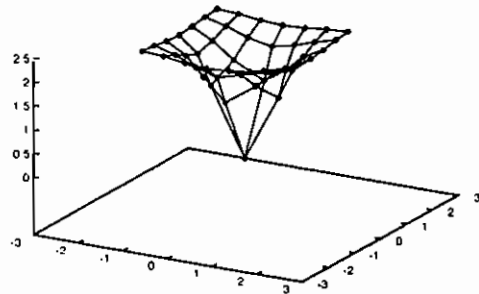


Fig. I-4-2.5

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

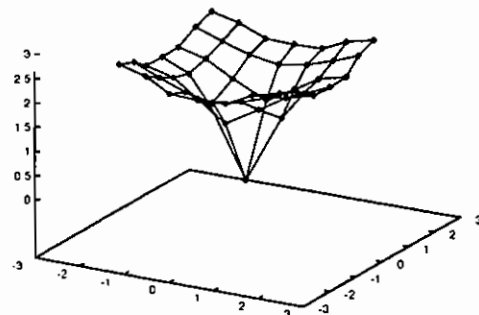


Fig. I-4-2.6

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $\nu=2$ ,  $\mu=10$

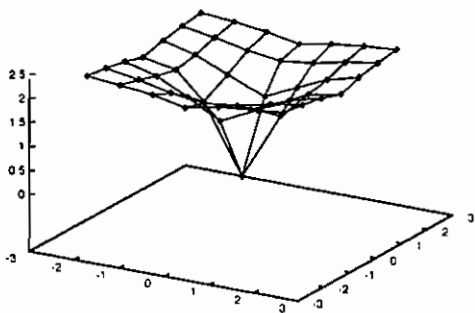


Fig. I-4-2.7

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $\nu=2$ ,  $\mu=10$

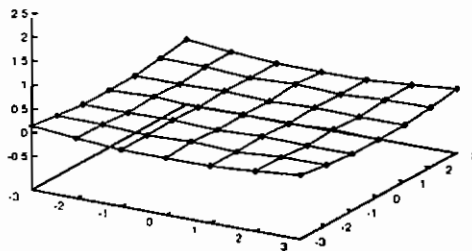


Fig. I-4-2.10

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $\nu=2$ ,  $\mu=10$

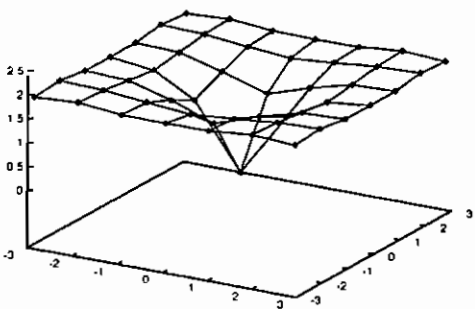


Fig. I-4-2.8

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $\nu=2$ ,  $\mu=10$

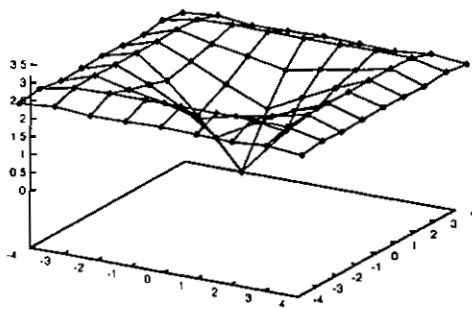


Fig. I-4-2.11

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $\nu=2$ ,  $\mu=10$

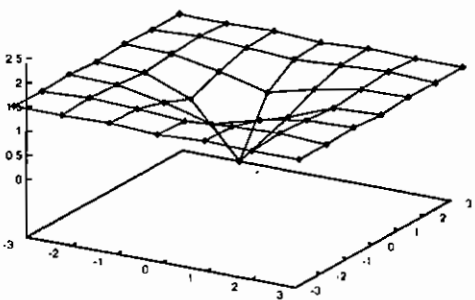


Fig. I-4-2.9

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $\nu=2$ ,  $\mu=10$

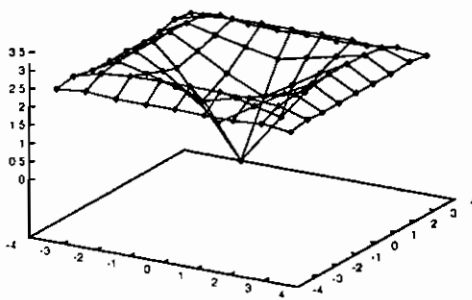


Fig. I-4-2.12





Inversao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=50, i=2, j=10

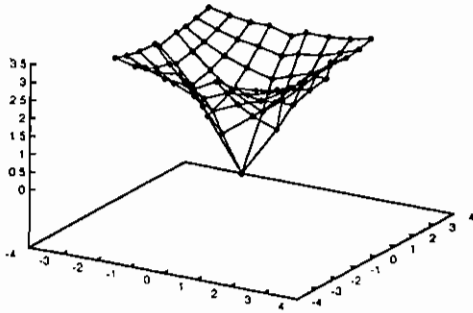


Fig. I-4-2.13

Inversao para SO(2) d=4 N=8, r=1, ang=90, i=2, j=10

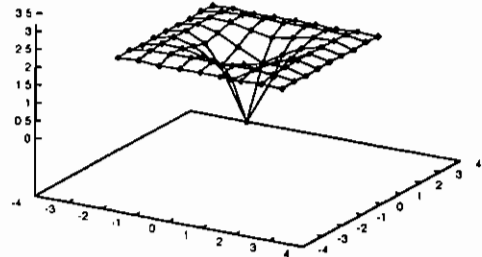


Fig. I-4-2.16

Inversao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=60, i=2, j=10

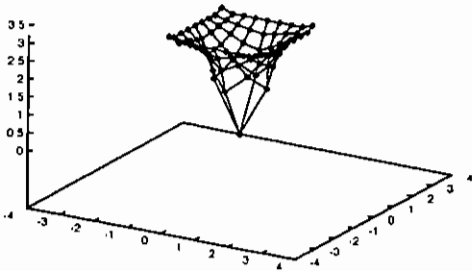


Fig. I-4-2.14

Inversao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=90, i=2, j=10

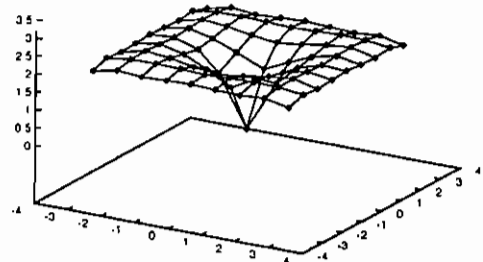


Fig. I-4-2.17

Inversao para SO(2), d=4, N=8, r=1, ang=70, i=2, j=10

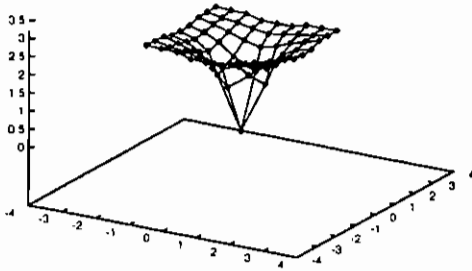


Fig. I-4-2.15

Inversao para SO(2) d=4 N=8, r=1, ang=120, i=2, j=10

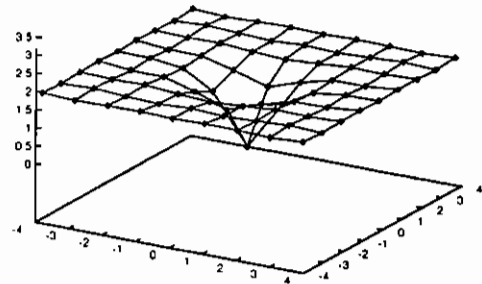


Fig. I-4-2.18

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

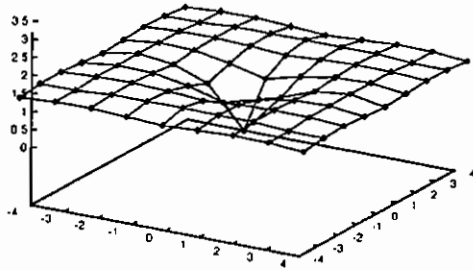


Fig. I-4-2.19

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

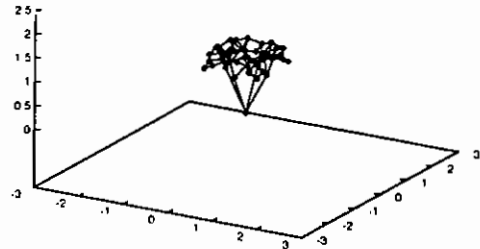


Fig. I-4-1.2

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

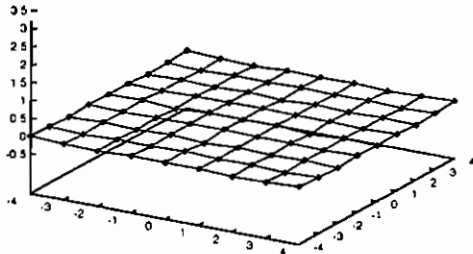


Fig. I-4-2.20

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

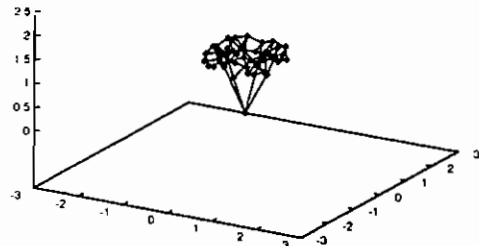


Fig. I-4-1.3

### Imersões em $d = 4$ : (componente transversal)

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

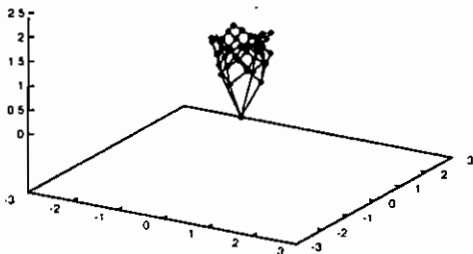


Fig. I-4-1.1

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

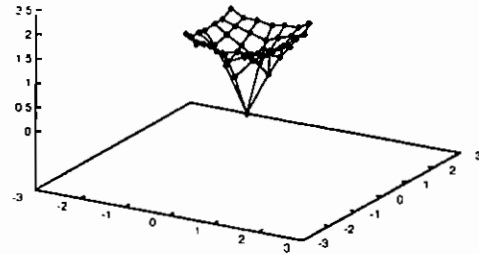


Fig. I-4-1.4

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

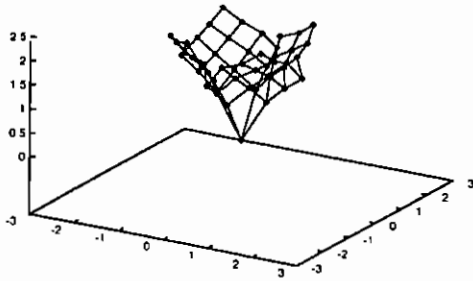


Fig. I-4-1.5

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

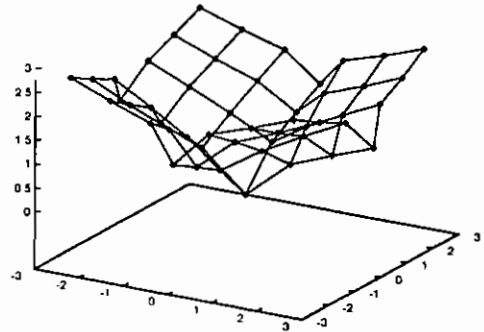


Fig. I-4-1.8

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

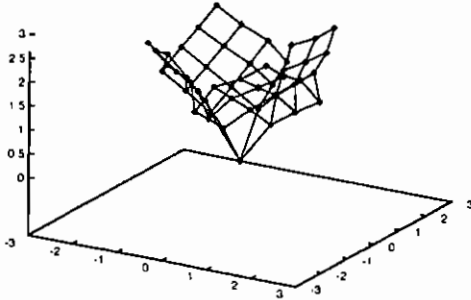


Fig. I-4-1.6

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

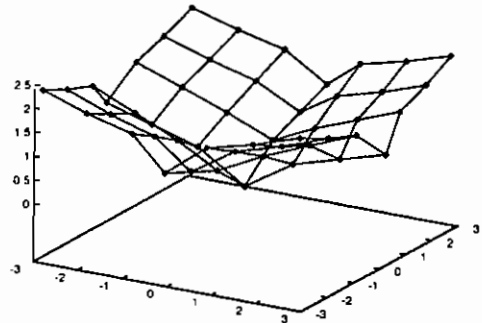


Fig. I-4-1.9

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

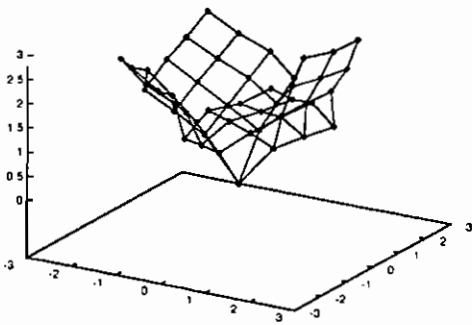


Fig. I-4-1.7

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

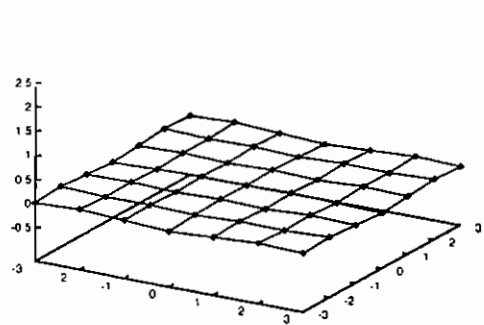


Fig. I-4-1.10

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

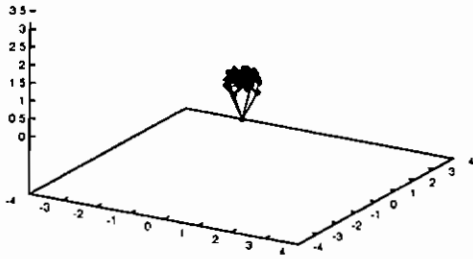


Fig. I-4-1.11

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

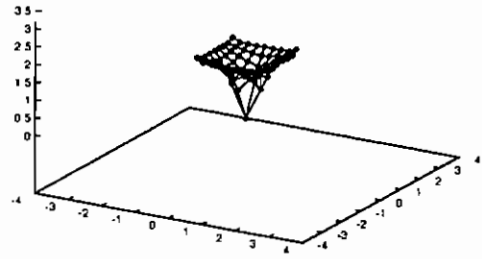


Fig. I-4-1.14

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

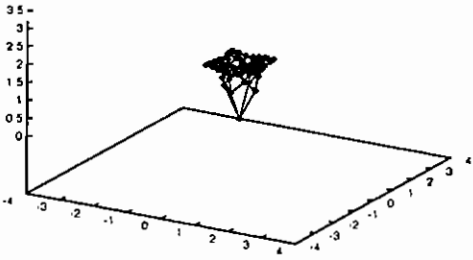


Fig. I-4-1.12

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

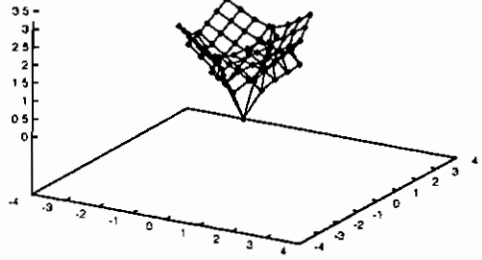


Fig. I-4-1.15

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

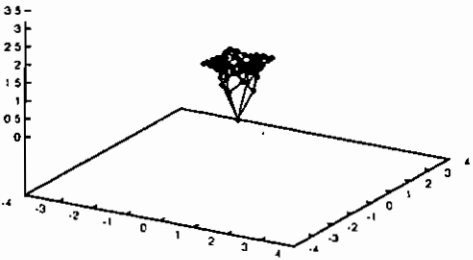


Fig. I-4-1.13

Imersao para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

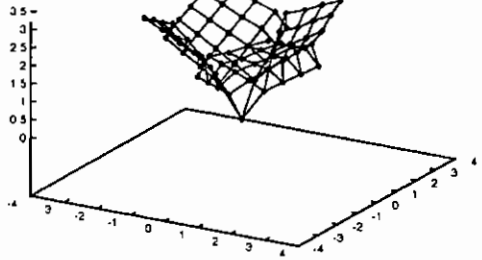


Fig. I-4-1.16

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

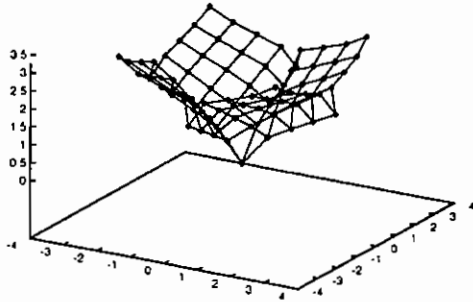


Fig. I-4-1.17

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

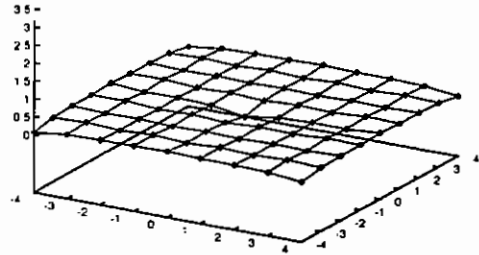


Fig. I-4-1.20

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

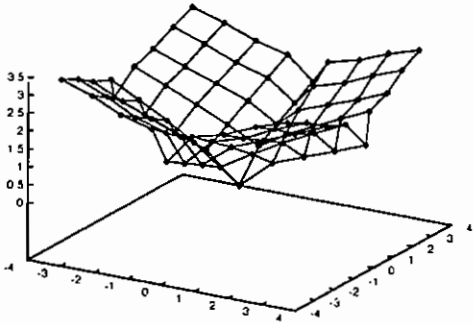


Fig. I-4-1.18

### Imersões em $d = 3$ : (componente longitudinal)

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

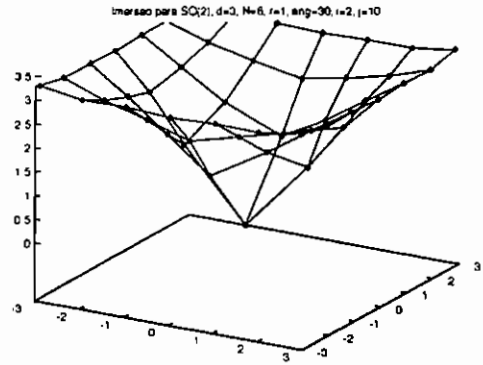


Fig. I-3-2.1

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

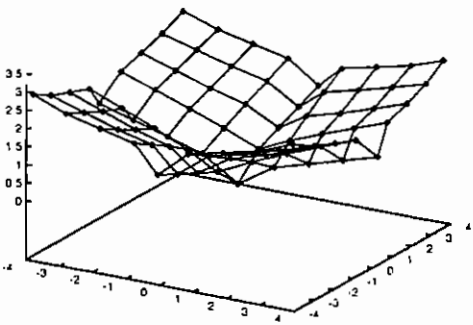


Fig. I-4-1.19

Imersão para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

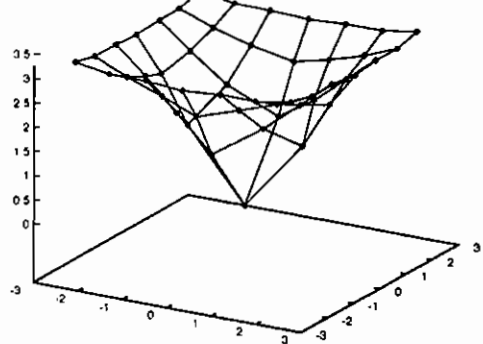


Fig. I-3-2.2

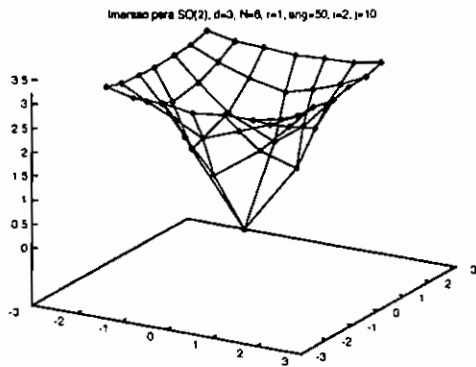


Fig. I-3-2.3

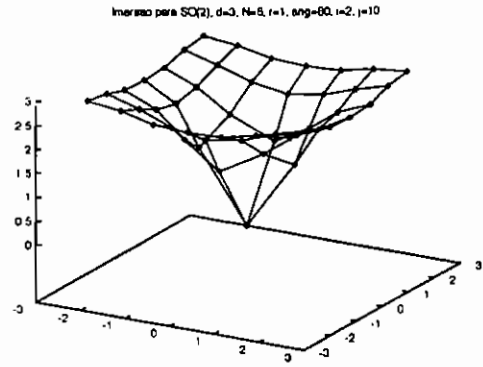


Fig. I-3-2.6

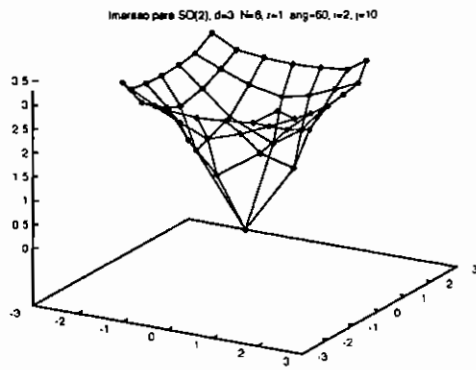


Fig. I-3-2.4

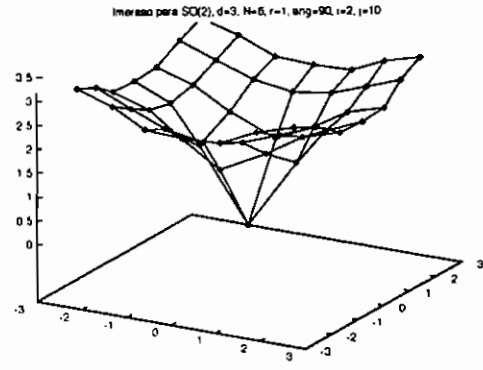


Fig. I-3-2.7

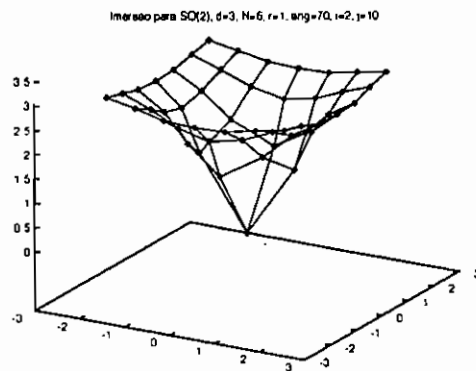


Fig. I-3-2.5

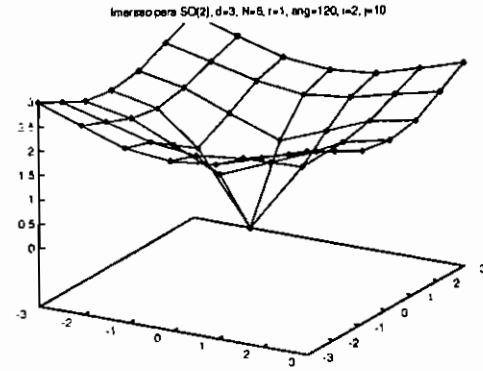


Fig. I-3-2.8

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $ang=150$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

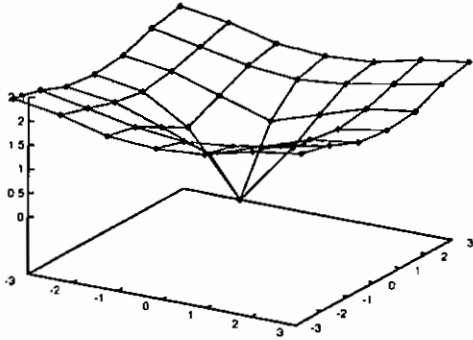


Fig. I-3-2.9

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $ang=40$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

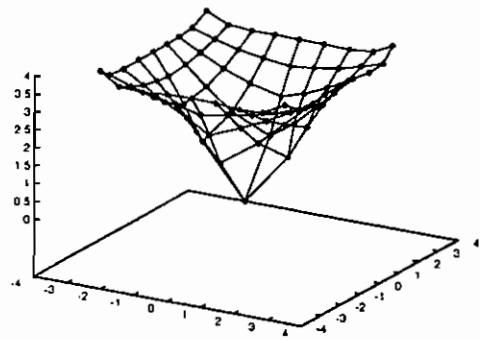


Fig. I-3-2.12

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $ang=180$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

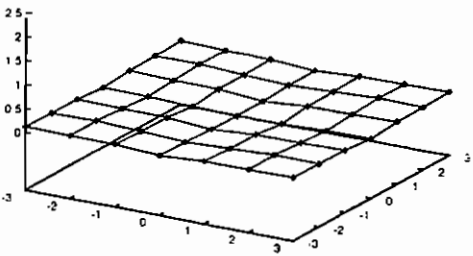


Fig. I-3-2.10

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $ang=50$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

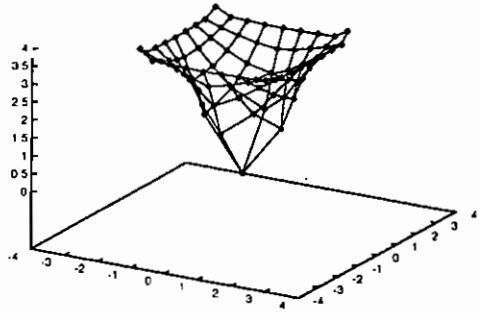


Fig. I-3-2.13

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $ang=30$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

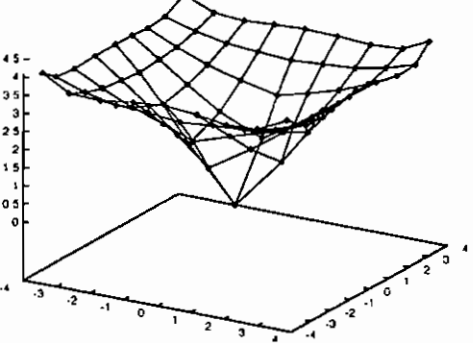


Fig. I-3-2.11

Imersao para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $ang=60$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

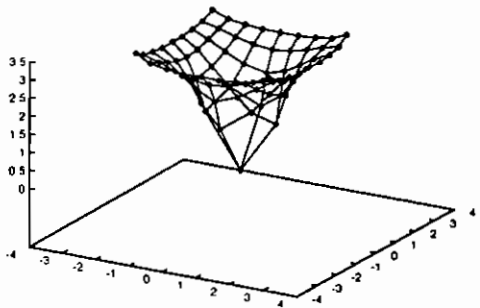


Fig. I-3-2.14

Imersao para SQ(2), d=3, N=8, r=1, ang=70, i=2, p=10

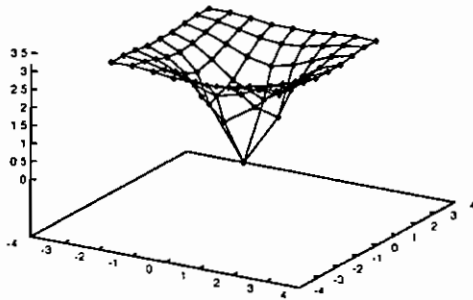


Fig. I-3-2.15

Imersao para SQ(2), d=3, N=8, r=1, ang=120, i=2, p=10

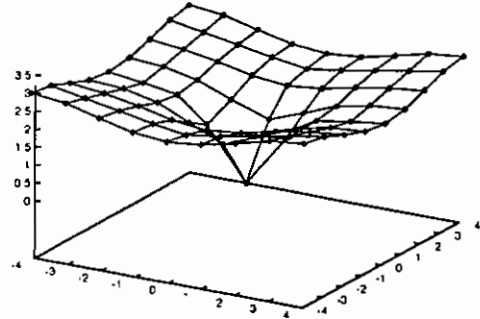


Fig. I-3-2.18

Imersao para SQ(2), d=3, N=8, r=1, ang=80, i=2, p=10

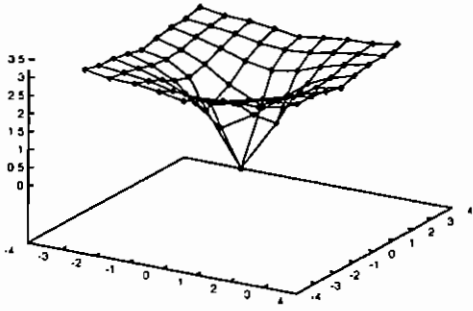


Fig. I-3-2.16

Imersao para SQ(2), d=3, N=8, r=1, ang=150, i=2, p=10

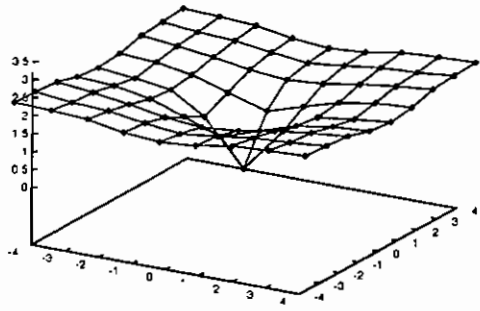


Fig. I-3-2.19

Imersao para SQ(2), d=3, N=8, r=1, ang=90, i=2, p=10

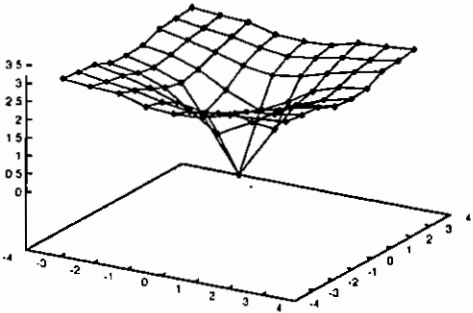


Fig. I-3-2.17

Imersao para SQ(2), d=3, N=8, r=1, ang=180, i=2, p=10

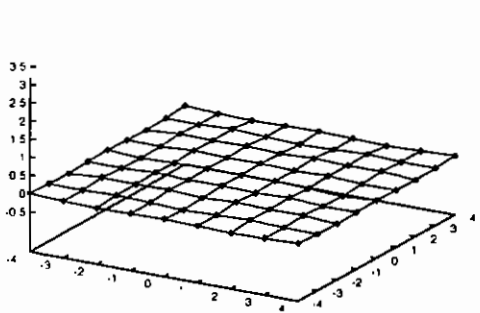


Fig. I-3-2.20



# Imersões em $d = 3$ : (componente transversal)

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=5$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

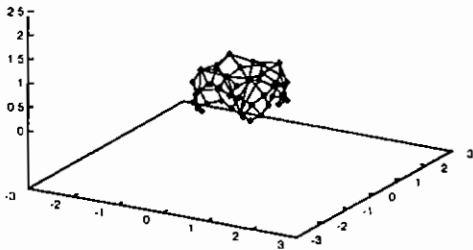


Fig. I-3-1.1

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=5$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

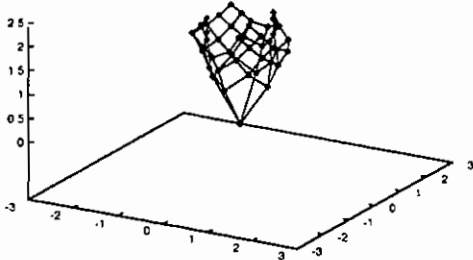


Fig. I-3-1.2

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=5$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

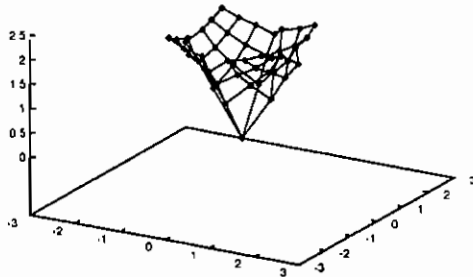


Fig. I-3-1.3

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=5$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

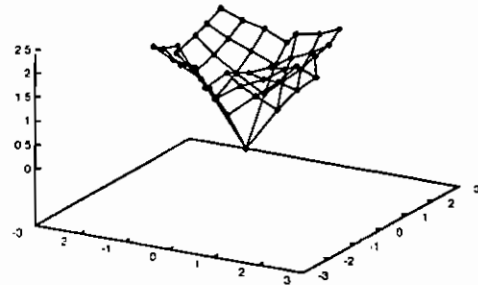


Fig. I-3-1.4

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=5$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

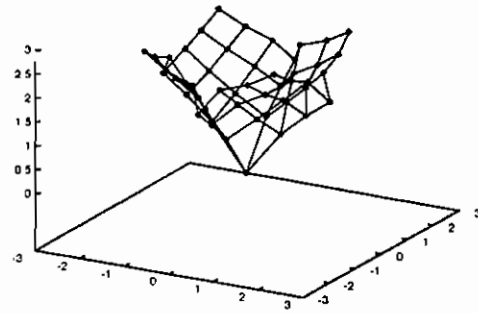


Fig. I-3-1.5

Imersão para  $SQ(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=5$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

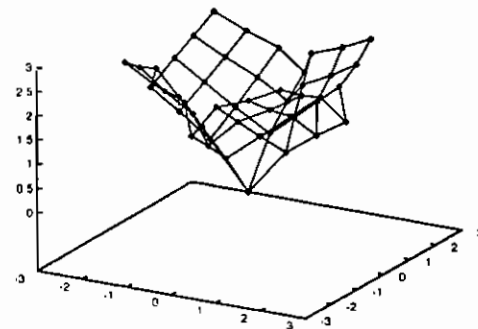


Fig. I-3-1.6

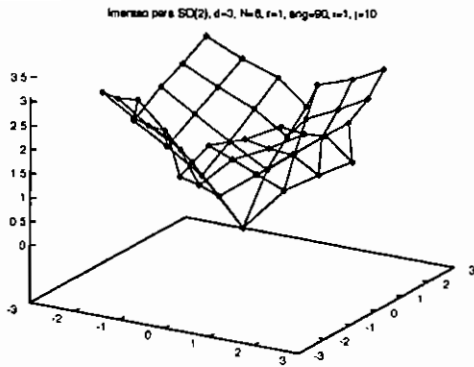


Fig. I-3-1.7

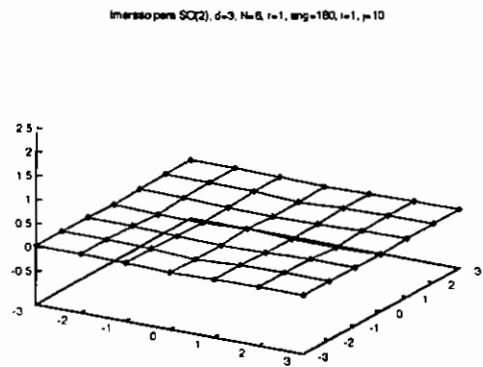


Fig. I-3-1.10

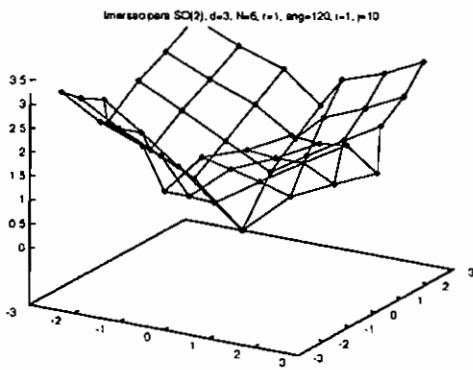


Fig. I-3-1.8

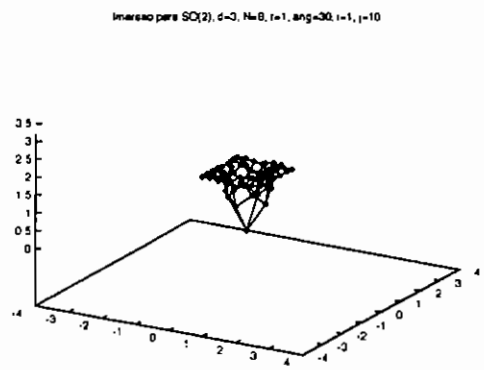


Fig. I-3-1.11

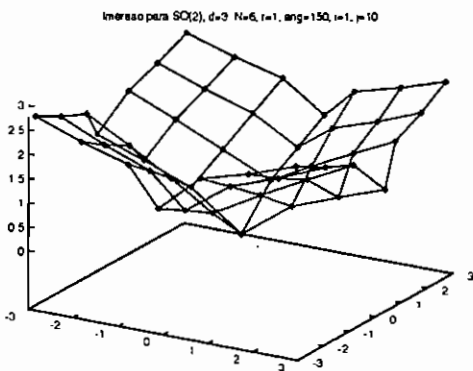


Fig. I-3-1.9

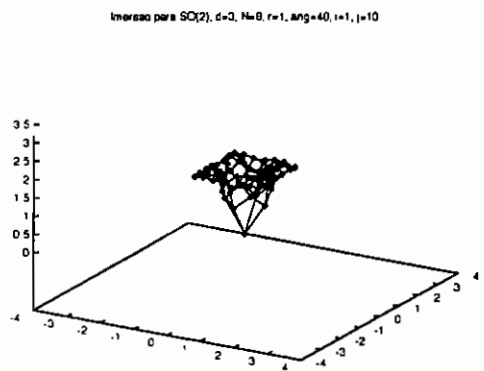


Fig. I-3-1.12

Inverso para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

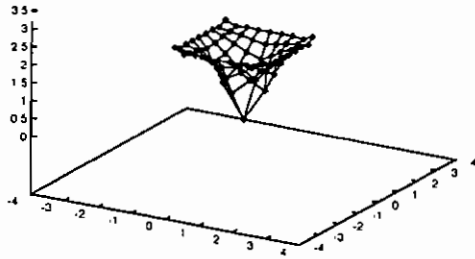


Fig. I-3-1.13

Inverso para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

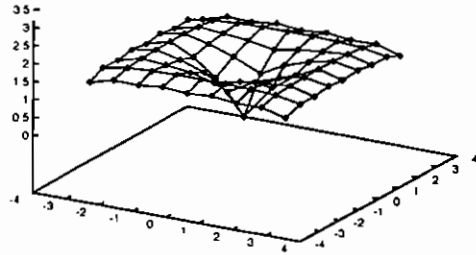


Fig. I-3-1.16

Inverso para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

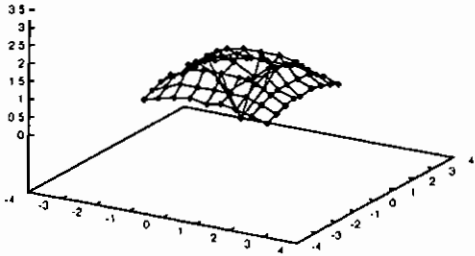


Fig. I-3-1.14

Inverso para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

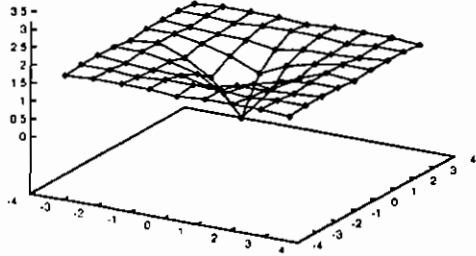


Fig. I-3-1.17

Inverso para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

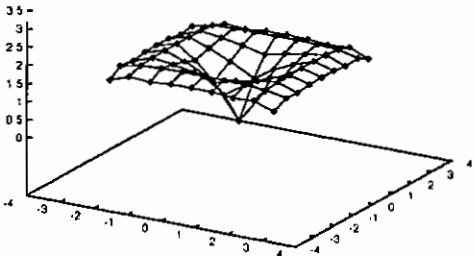


Fig. I-3-1.15

Inverso para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

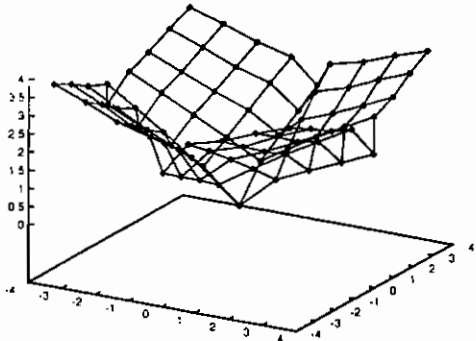


Fig. I-3-1.18

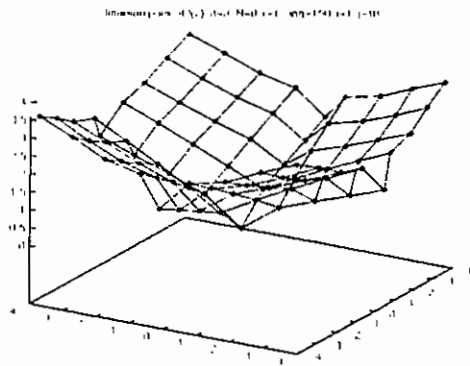


Fig. I-3-1.19

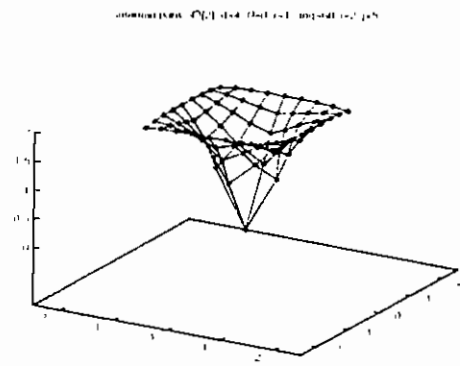


Fig. I-4-2-J.2

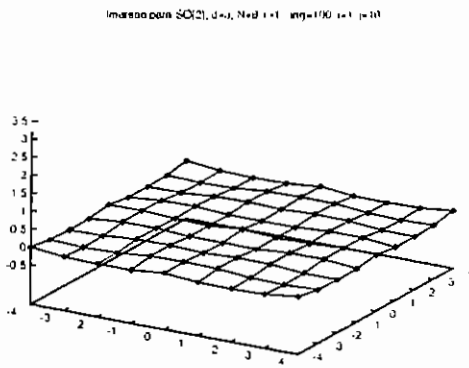


Fig. I-3-1.20

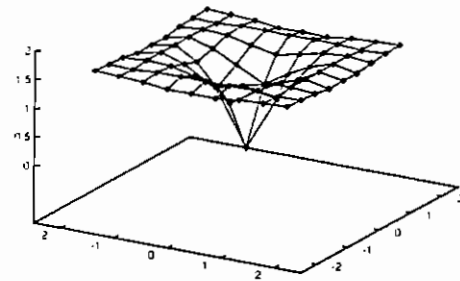


Fig. I-4-2-J.3

Imersões com  $j = 5$ :  
(componente longitudinal)

Imersões com  $j = 5$ :  
(componente transversal)

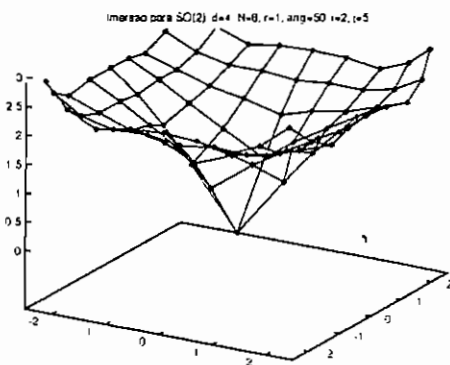


Fig. I-4-2-J.1

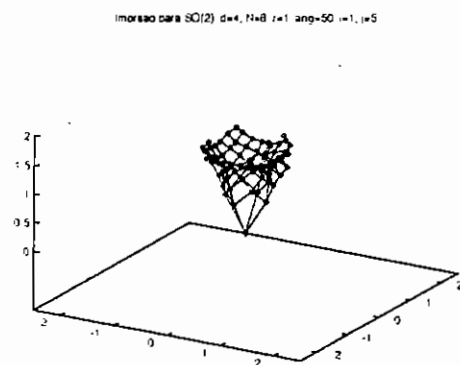


Fig. I-4-1-J.1

Imagem para SQ(2), d=4 N=6 r=1 ang=90 i=1 j=5

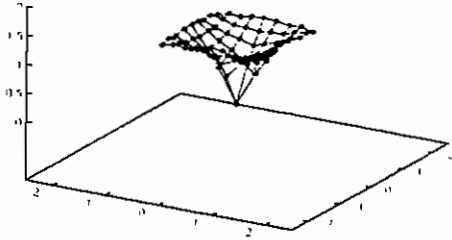


Fig. I-4-1-J.2

Chi-quadrado para SQ(2), d=4 N=6 r=1 ang=90 i=2 j=10

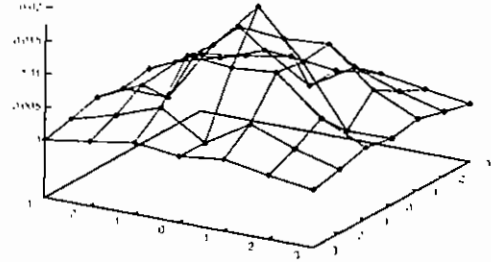


Fig. E-4-2.2

Imagem para SQ(2), d=4 N=6 r=1 ang=90 i=1 j=5

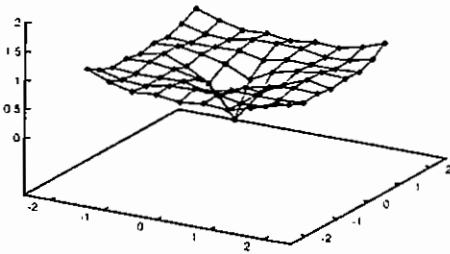


Fig. I-4-1-J.3

Chi-quadrado para SQ(2), d=4 N=6 r=1 ang=90 i=2 j=10

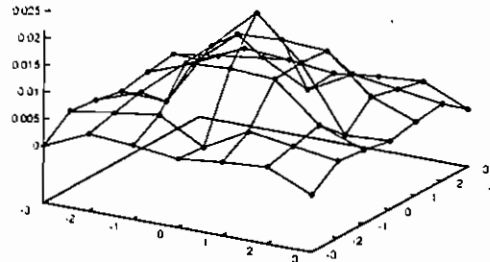


Fig. E-4-2.3

Chi-quadrado para SQ(2), d=4 N=6 r=1 ang=90 i=2 j=10

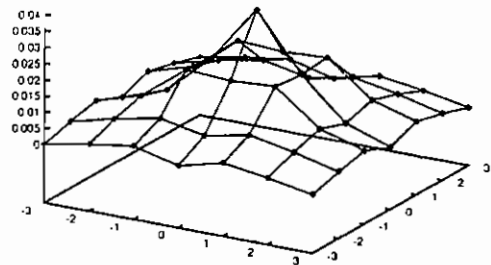


Fig. E-4-2.4

### A.3 Erros Residuais

Erros em  $d = 4$ :  
(componente longitudinal)

Chi-quadrado para SQ(2), d=4 N=6 r=1 ang=90 i=2 j=10

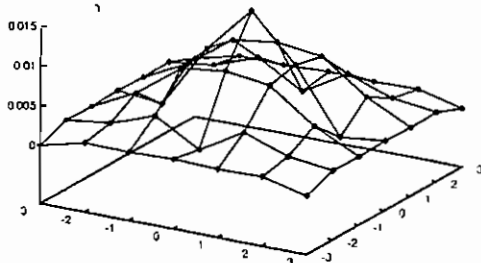


Fig. E-4-2.1

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=0^\circ$ ,  $r=2$ ,  $r=10$

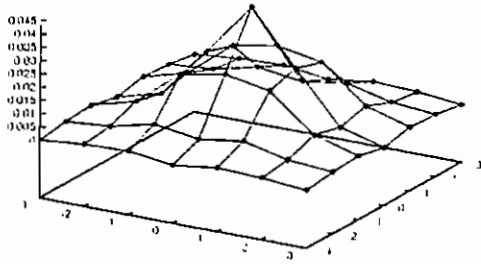


Fig. E-4-2.5

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150^\circ$ ,  $r=2$ ,  $r=10$

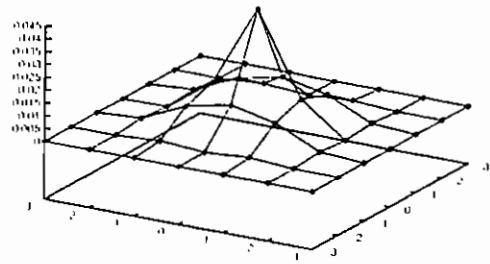


Fig. E-4-2.8

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90^\circ$ ,  $r=2$ ,  $r=10$

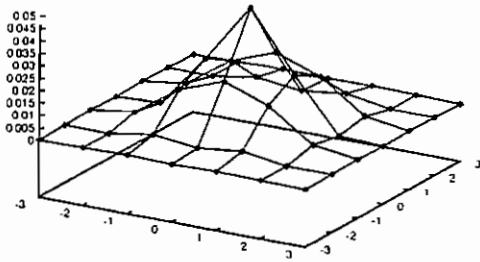


Fig. E-4-2.6

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150^\circ$ ,  $r=2$ ,  $r=10$

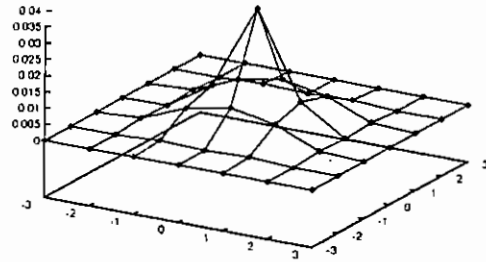


Fig. E-4-2.9

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90^\circ$ ,  $r=2$ ,  $r=10$

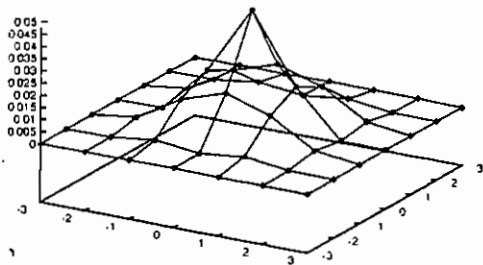


Fig. E-4-2.7

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180^\circ$ ,  $r=2$ ,  $r=10$

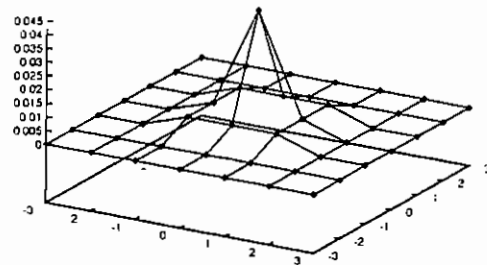


Fig. E-4-2.10

Chi-cuadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=30$   $\nu=2$   $j=10$

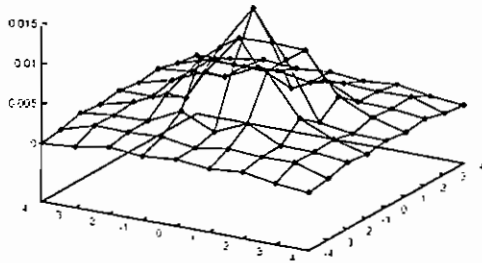


Fig. E-4-2.11

Chi-cuadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=50$   $\nu=2$   $j=10$

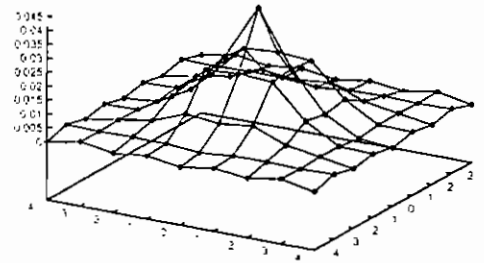


Fig. E-4-2.14

Chi-cuadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=40$   $\nu=2$   $j=10$

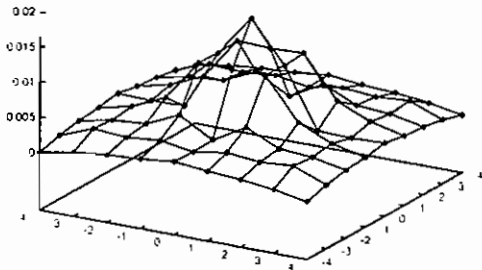


Fig. E-4-2.12

Chi-cuadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=70$   $\nu=2$   $j=10$

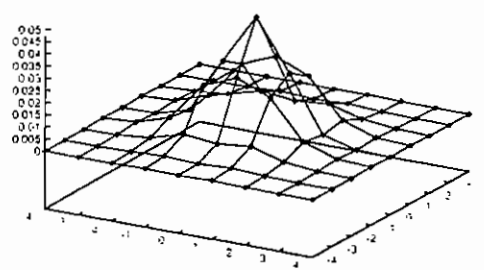


Fig. E-4-2.15

Chi-cuadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=50$   $\nu=2$   $j=10$

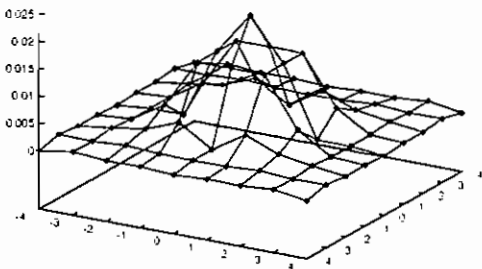


Fig. E-4-2.13

Chi-cuadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=80$   $\nu=2$   $j=10$

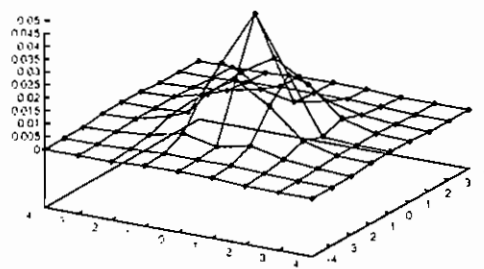


Fig. E-4-2.16

Chi-quadrado para SO(2)  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $\nu=2$ ,  $j=10$

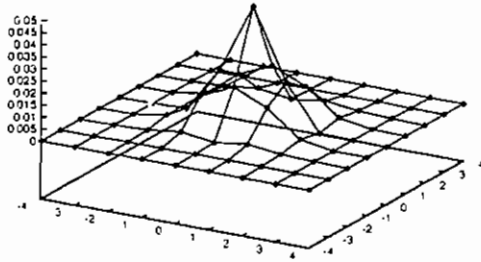


Fig. E-4-2.17

Chi-quadrado para SO(2)  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $\nu=2$ ,  $j=10$

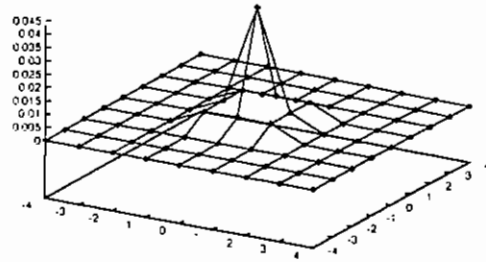


Fig. E-4-2.20

### Erros em $d = 4$ : (componente transversal)

Chi-quadrado para SO(2)  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $\nu=2$ ,  $j=10$

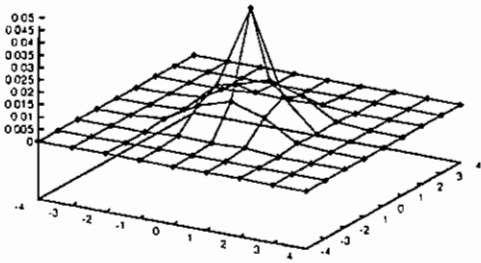


Fig. E-4-2.18

Chi-quadrado para SO(2)  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

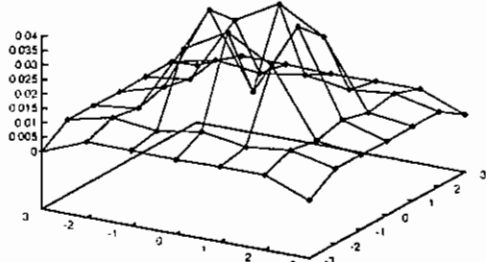


Fig. E-4-1.1

Chi-quadrado para SO(2)  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $\nu=2$ ,  $j=10$

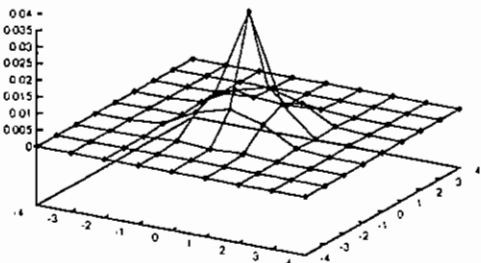


Fig. E-4-2.19

Chi-quadrado para SO(2)  $d=4$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

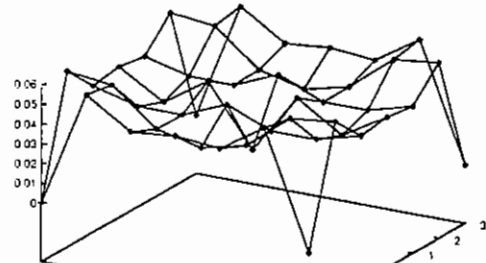


Fig. E-4-1.2



Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=5$   $r=1$   $\text{ang}=50$   $l=1$   $j=10$

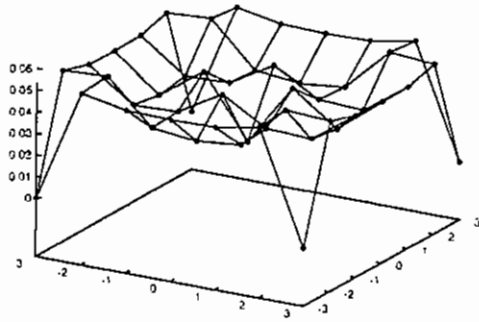


Fig. E-4-1.3

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=5$   $r=1$   $\text{ang}=80$   $l=1$   $j=10$

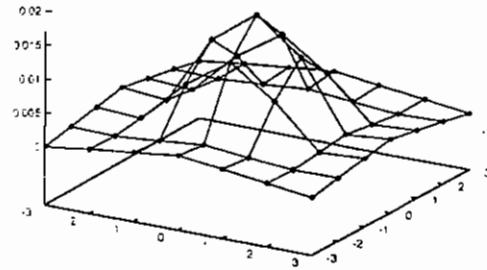


Fig. E-4-1.6

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=5$   $r=1$   $\text{ang}=50$   $l=1$   $j=10$

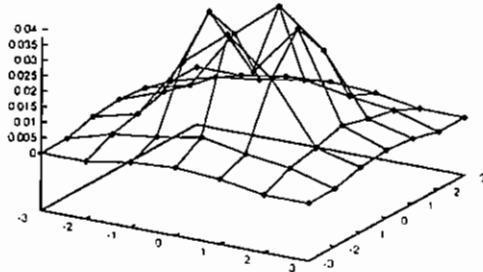


Fig. E-4-1.4

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=5$   $r=1$   $\text{ang}=90$   $l=1$   $j=10$

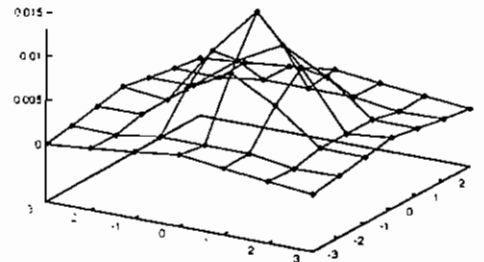


Fig. E-4-1.7

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=5$   $r=1$   $\text{ang}=70$   $l=1$   $j=10$

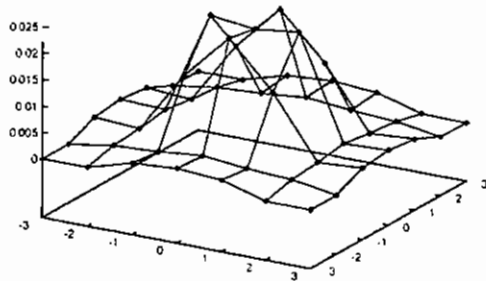


Fig. E-4-1.5

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=5$   $r=1$   $\text{ang}=120$   $l=1$   $j=10$

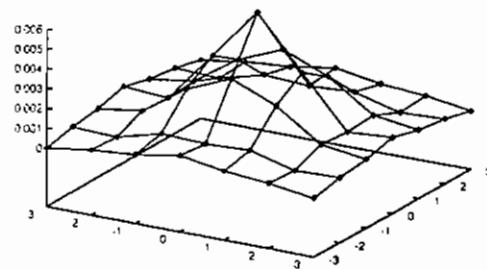


Fig. E-4-1.8

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=5$   $r=1$   $\text{ang}=150$   $i=1$   $j=10$

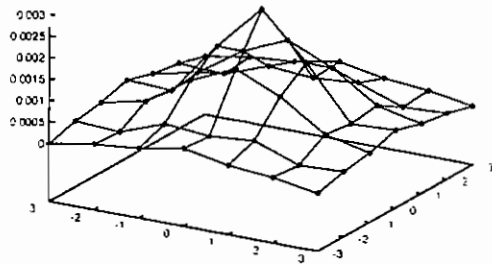


Fig. E-4-1.9

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=40$   $i=1$   $j=10$

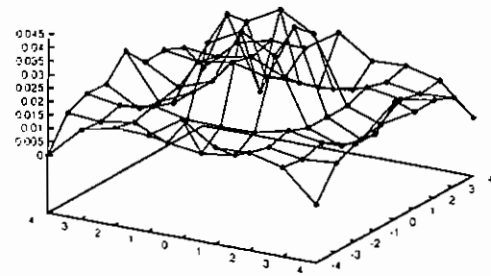


Fig. E-4-1.12

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=6$   $r=1$   $\text{ang}=180$   $i=1$   $j=10$

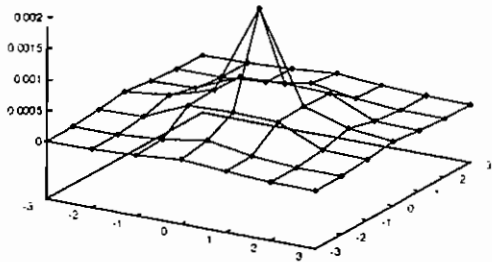


Fig. E-4-1.10

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=50$   $i=1$   $j=10$

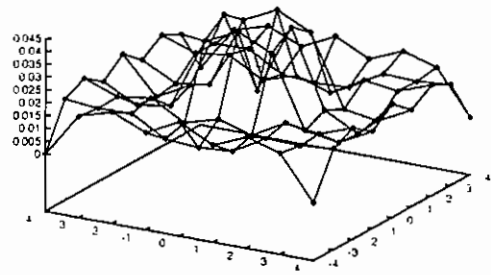


Fig. E-4-1.13

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=90$   $i=1$   $j=10$

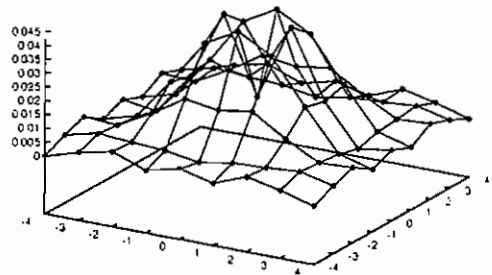


Fig. E-4-1.11

Chi-quadrado para  $SO(2)$   $d=4$   $N=8$   $r=1$   $\text{ang}=80$   $i=1$   $j=10$

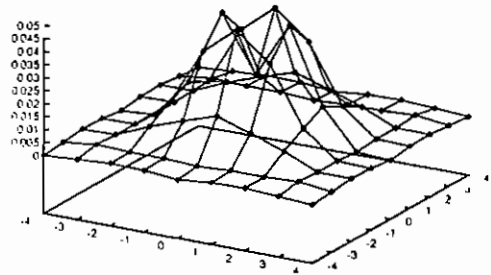


Fig. E-4-1.14

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

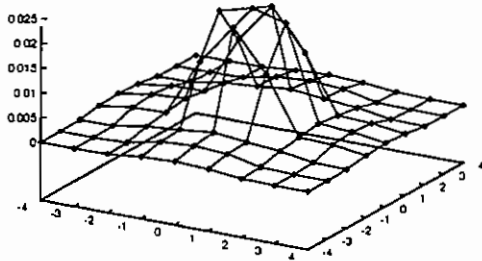


Fig. E-4-1.15

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

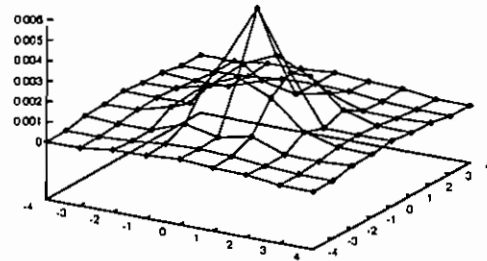


Fig. E-4-1.18

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

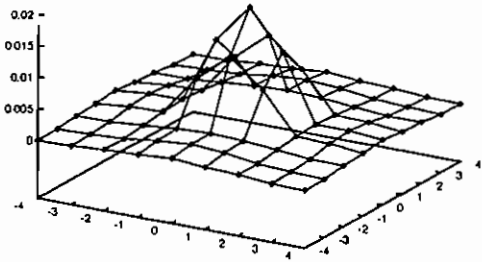


Fig. E-4-1.16

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

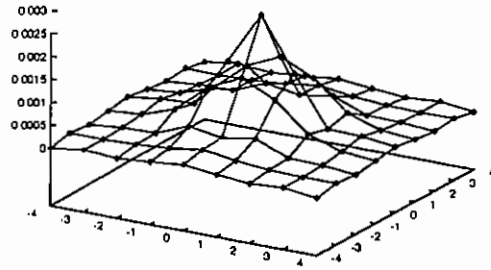


Fig. E-4-1.19

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

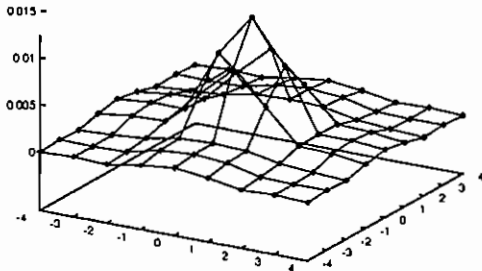


Fig. E-4-1.17

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

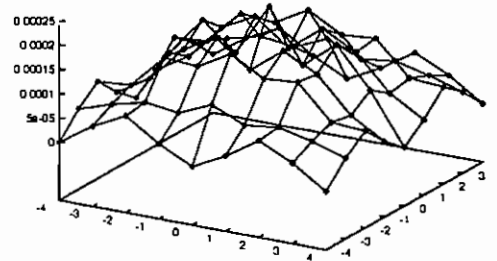


Fig. E-4-1.20

## Erros em $d = 3$ : (componente longitudinal)

Chi-quadrado para SO(2),  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

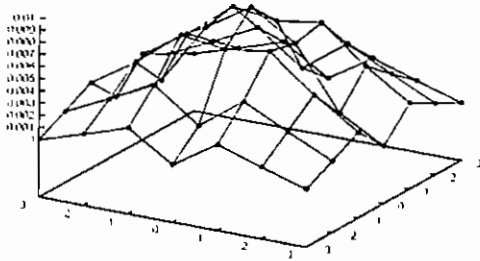


Fig. E-3-2.1

Chi-quadrado para SO(2),  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

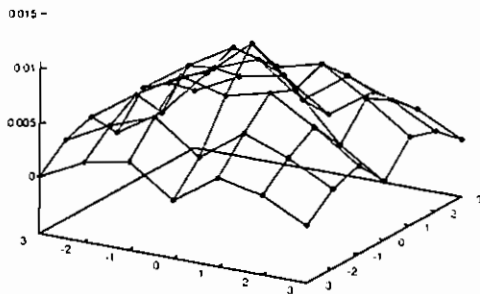


Fig. E-3-2.2

Chi-quadrado para SO(2),  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

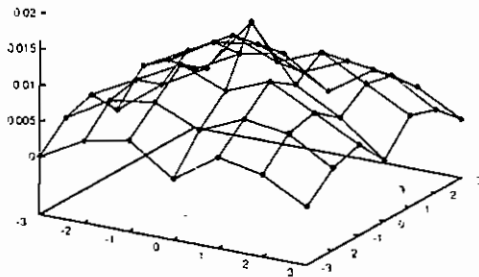


Fig. E-3-2.3

Chi-quadrado para SO(2),  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

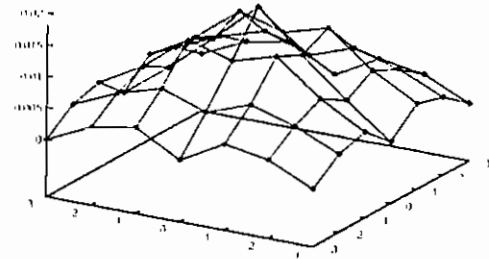


Fig. E-3-2.4

Chi-quadrado para SO(2),  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

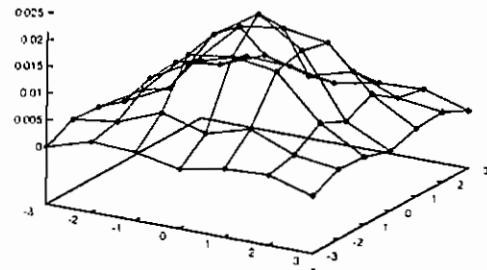


Fig. E-3-2.5

Chi-quadrado para SO(2),  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

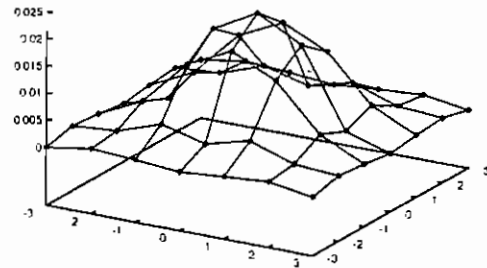


Fig. E-3-2.6

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=1$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

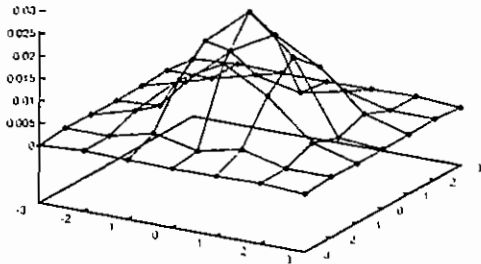


Fig. E-3-2.7

Chi-quadrado para  $SO(3)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

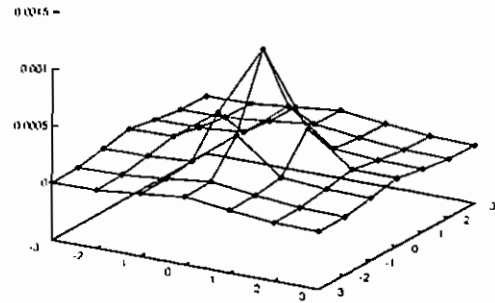


Fig. E-3-2.10

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

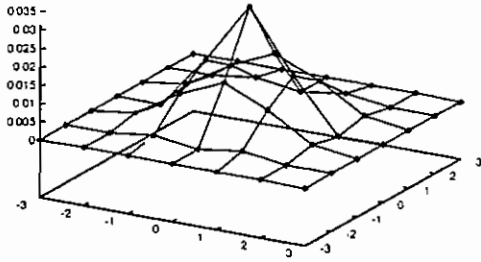


Fig. E-3-2.8

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

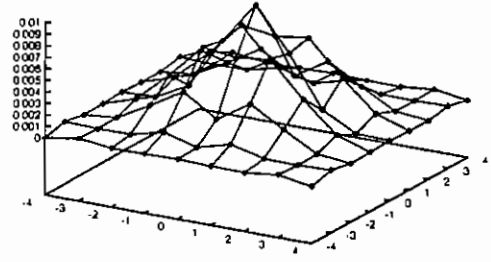


Fig. E-3-2.11

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

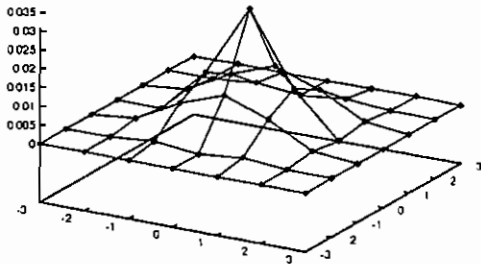


Fig. E-3-2.9

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $l=2$ ,  $j=10$

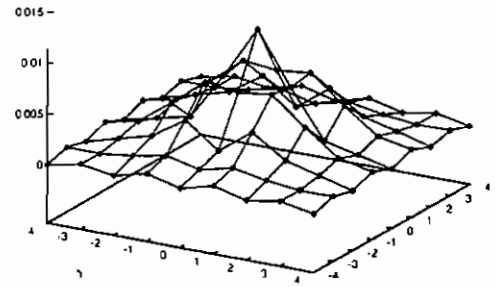


Fig. E-3-2.12

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=1$ ,  $N=0$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $w=2$ ,  $j=10$

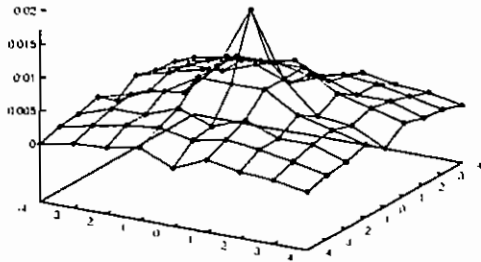


Fig. E-3-2.13

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=1$ ,  $N=0$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $w=2$ ,  $j=10$

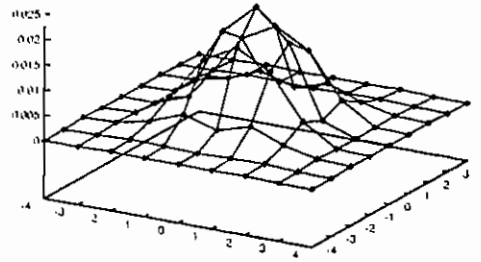


Fig. E-3-2.16

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $w=2$ ,  $j=10$

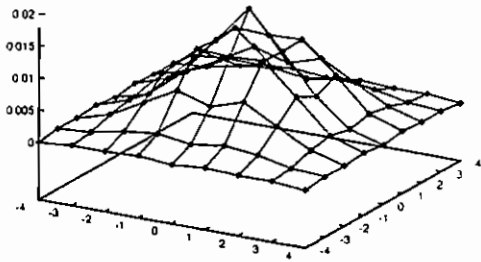


Fig. E-3-2.14

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $w=2$ ,  $j=10$

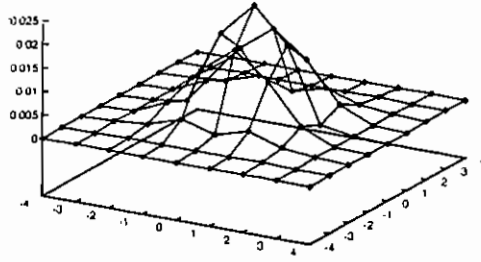


Fig. E-3-2.17

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $w=2$ ,  $j=10$

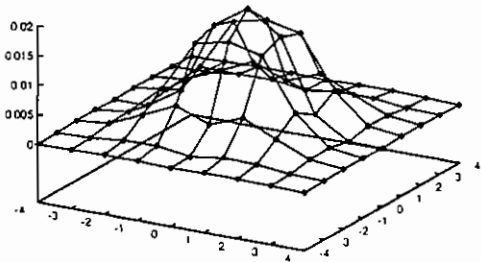


Fig. E-3-2.15

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $w=2$ ,  $j=10$

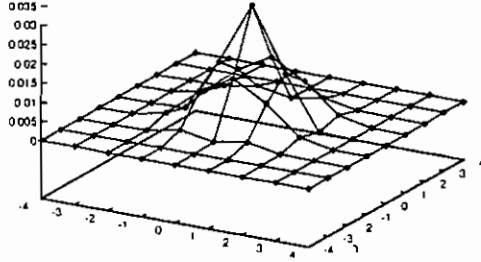


Fig. E-3-2.18

Chi-quadrado para  $SO(3)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

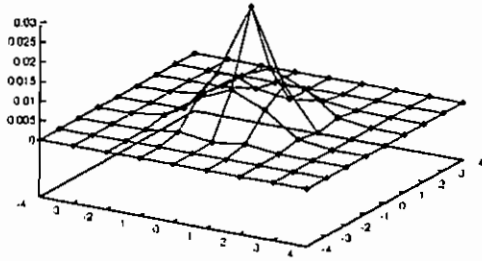


Fig. E-3-2.19

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=40$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

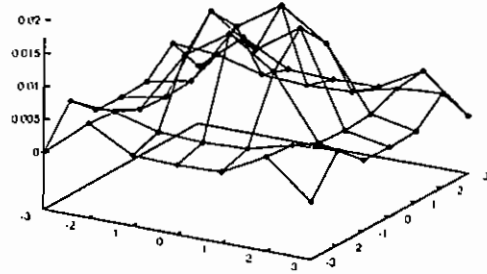


Fig. E-3-1.2

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180$ ,  $i=2$ ,  $j=10$

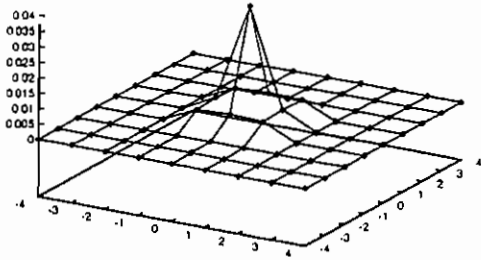


Fig. E-3-2.20

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

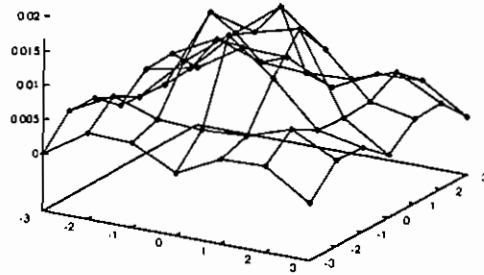


Fig. E-3-1.3

**Erros em  $d = 3$ :  
(componente transversal)**

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

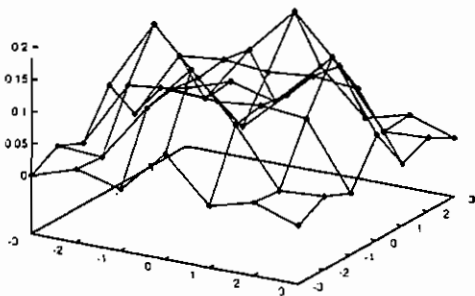


Fig. E-3-1.1

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=80$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

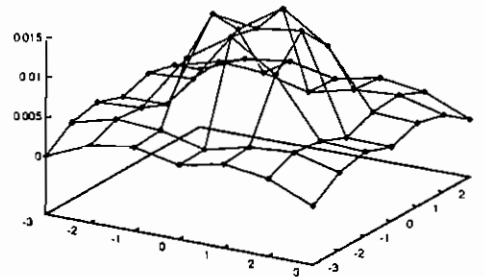


Fig. E-3-1.4

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=0^\circ$ ,  $r=1$ ,  $j=10$

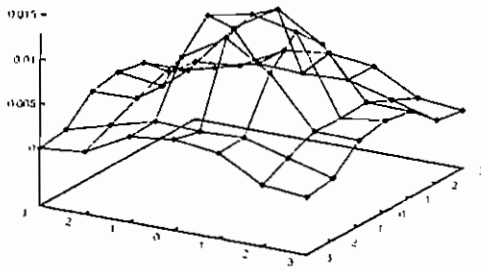


Fig. E-3-1.5

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120^\circ$ ,  $r=1$ ,  $j=10$

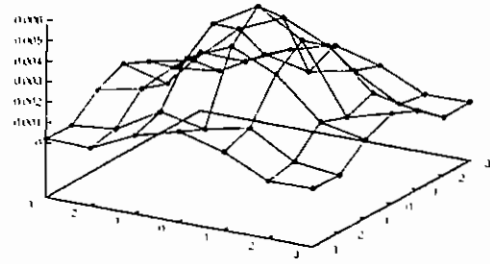


Fig. E-3-1.8

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=0^\circ$ ,  $r=1$ ,  $j=10$

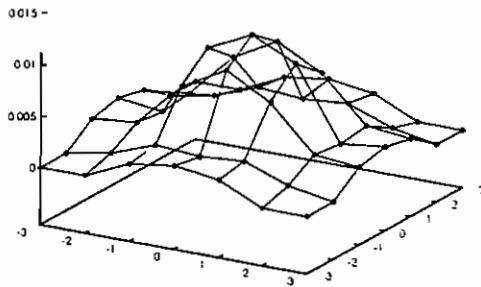


Fig. E-3-1.6

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150^\circ$ ,  $r=1$ ,  $j=10$

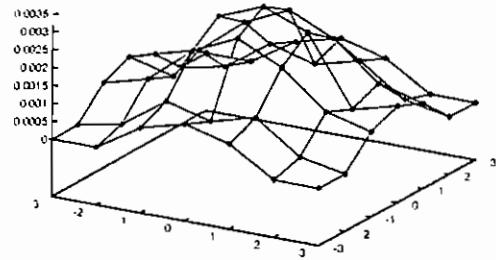


Fig. E-3-1.9

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90^\circ$ ,  $r=1$ ,  $j=10$

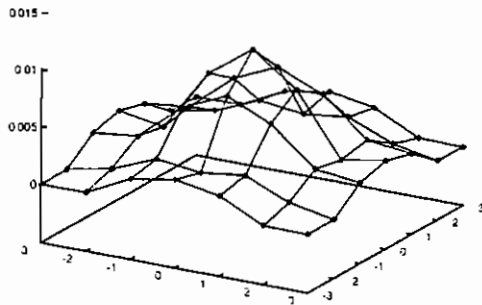


Fig. E-3-1.7

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=6$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=180^\circ$ ,  $r=1$ ,  $j=10$

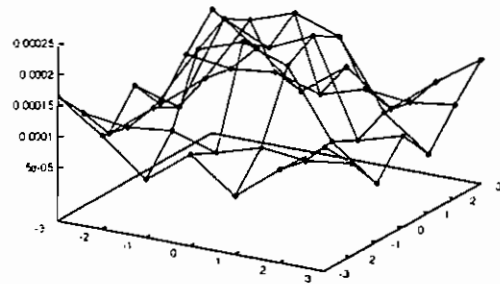


Fig. E-3-1.10



Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=0$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

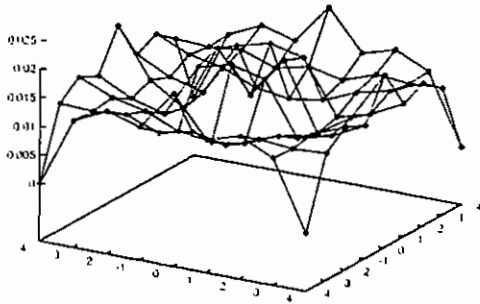


Fig. E-3-1.11

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

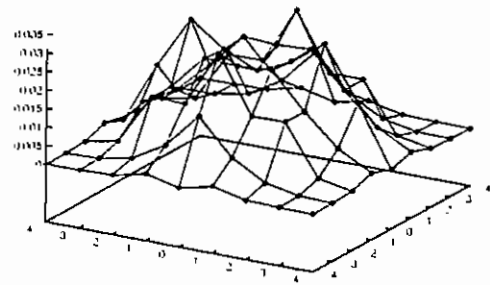


Fig. E-3-1.14

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=90$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

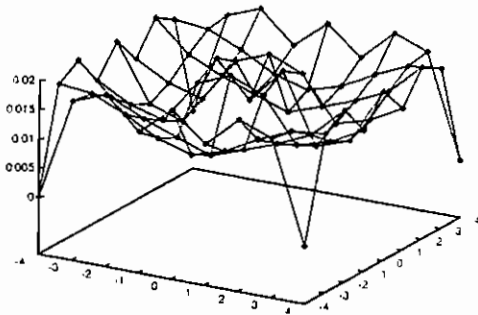


Fig. E-3-1.12

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

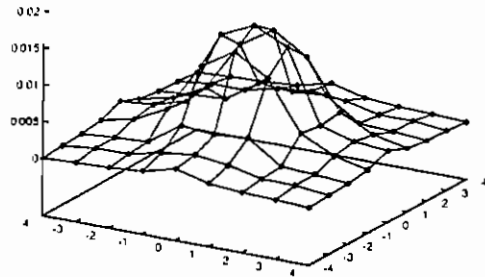


Fig. E-3-1.15

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

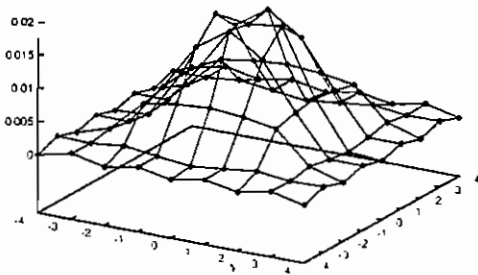


Fig. E-3-1.13

Chi-quadrado para  $SO(2)$ ,  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $\nu=1$ ,  $j=10$

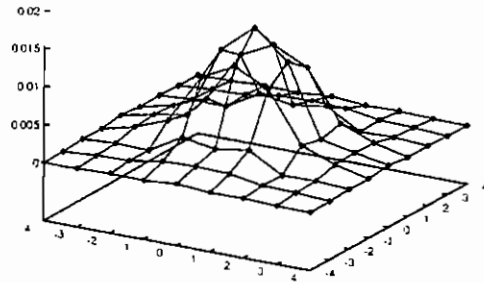


Fig. E-3-1.16

Chi-quadrado para SO(1),  $d=1$ ,  $N=0$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=00$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

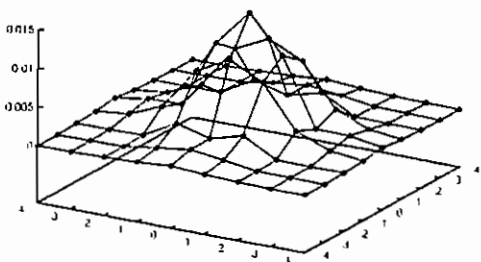


Fig. E-3-1.17

Chi-quadrado para SO(3),  $d=1$ ,  $N=0$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=100$ ,  $i=1$ ,  $j=11$

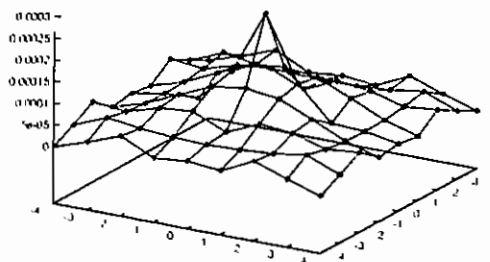


Fig. E-3-1.20

Chi-quadrado para SO(2),  $d=1$ ,  $N=0$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=120$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

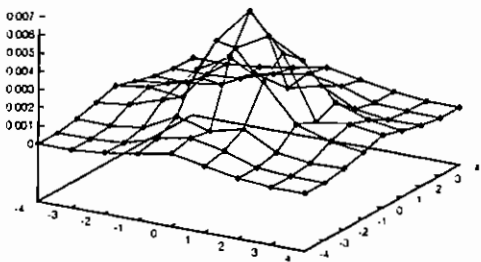


Fig. E-3-1.18

**Erros para  $j = 5$ :  
(componente longitudinal)**

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=30$ ,  $i=2$ ,  $j=5$

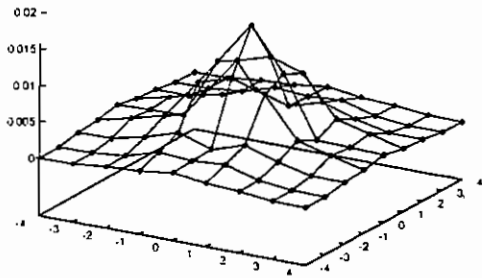


Fig. E-4-2-J.1

Chi-quadrado para SO(2),  $d=3$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=150$ ,  $i=1$ ,  $j=10$

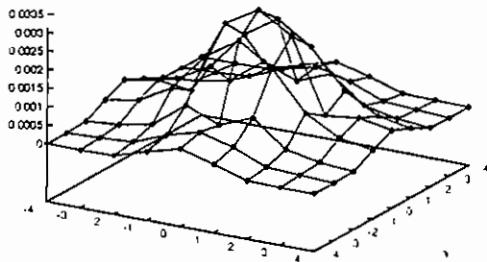


Fig. E-3-1.19

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $i=2$ ,  $j=5$

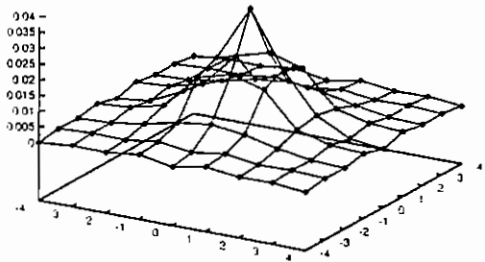


Fig. E-4-2-J.2

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $j=5$

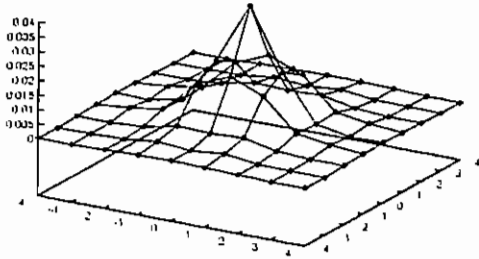


Fig. E-4-2-J.3

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=70$ ,  $j=5$

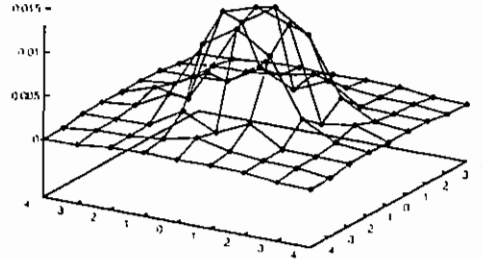


Fig. E-4-1-J.3

Erros para  $j = 5$ :  
(componente transversal)

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=50$ ,  $j=5$

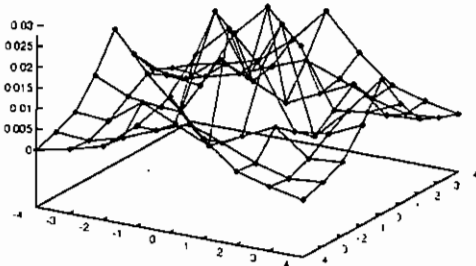


Fig. E-4-1-J.1

Chi-quadrado para SO(2),  $d=4$ ,  $N=8$ ,  $r=1$ ,  $\text{ang}=60$ ,  $j=5$

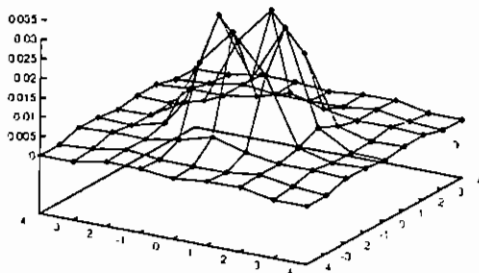


Fig. E-4-1-J.2

# Bibliografia

- [1] J.-S. Wang and R. H. Swendsen, *Physica A* **167**, (1990), 565; U. Wolff, *Phys. Rev. Lett.* **62**, (1989), 361; R. C. Brower e P. Tamaio, *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989), 1087.
- [2] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller and E. Teller, *J. Chem. Phys.* **21** (1953), 1087; J. M. Hammersley and D. C. Handscomb, "Monte Carlo Methods", Methuen (1964).
- [3] "Um Estudo sobre Quebra de Simetria e Comportamento Crítico em Teorias Quânticas de Campos na Rede", A. C. R. Martins, Tese de Doutorado submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 1996.
- [4] "Differentiability and continuity of quantum fields on a lattice", Jorge L. deLyra, Timothy E. Gallivan and See Kit Foong, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 476-484.
- [5] "Symmetry breaking on a finite euclidean lattice", J. L. deLyra and A. C. R. Martins, *Nucl. Phys.* **B432** (1994) 621-640.
- [6] "Finite lattice systems with true critical behavior", Jorge L. deLyra, Timothy E. Gallivan and See Kit Foong, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 1643-1657.