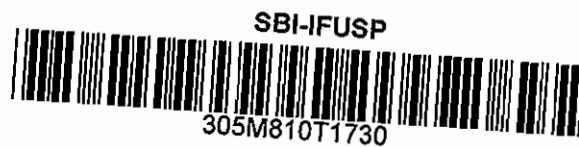


# **SOBRE A QUANTIZAÇÃO DOS FLUXOS ELETROMAGNÉTICOS**

**IVAN VENTURA**



**Tese de Livre Docência  
Universidade de São Paulo  
Instituto de Física**



1990

Esta tese é apresentada como um dos documentos exigidos, para minha inscrição ao concurso público para a obtenção do Título de Livre-  
Docente, junto ao Departamento de Física Matemática do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, na Disciplina de Introdução à Mecânica Quântica.

Ivan Ventura

maio de 1990.

Ao meu irmão Roberto

## ÍNDICE

	Introdução.....	1
I.	Orbitais quasi unidimensionais .....	5
II.	Orbitais abertos e polarização.....	12
III.	O efeito Hall quantizado.....	16
IV.	Os fluxos do elétron .....	35
V.	Conclusões.....	55

A tese analisa algumas aplicações do método canônico de quantização dos fluxos eletromagnéticos proposto recentemente<sup>1</sup>.

Inicialmente nós consideramos a extensão canônica<sup>1</sup> da regra de quantização de fluxo magnético devida a Dirac<sup>2,3</sup>, e que foi reintroduzida por London<sup>4</sup>.

A regra de Dirac, considerada por Byers e Yang<sup>5</sup> e por Onsager<sup>6</sup>, é o que explica a quantização de fluxo em tubos supercondutores, observada por Deaver e Fairbank<sup>7</sup> e Doll e Näbauer<sup>8</sup>. Sua justificativa provem do requerimento da continuidade da função de onda de um elétron, que se move num orbital fechado, enfeixando fluxo magnético.

O método canônico de quantização de fluxo<sup>1</sup> baseia-se na lei de comutação  $[\phi_E, \phi_B] = i$ , onde  $\phi_B$  é o fluxo magnético, e  $\phi_E$  o fluxo elétrico longitudinal de um condutor unidimensional fechado em si mesmo.

Num circuito contendo um elétron, o fluxo elétrico longitudinal estará no intervalo  $\left[-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}\right]$ , de forma que os auto-valores do fluxo magnético nesse circuito são dados por  $\frac{2\pi}{e} p$ , onde  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  etc. Esse resultado concorda com a predição da regra de Dirac.

O método canônico permite ainda tratar estados mistos de fluxo magnético, que podem ocorrer no sistema, pela ação de perturbações de natureza elétrica<sup>1</sup>. Esse assunto é discutido no Capítulo I.

No Capítulo II, introduzimos o fluxo de polarização, e adaptamos o método canônico para descrever sistemas de orbitais abertos. Quando a Hamiltoniana principal for a Hamiltoniana cinética do elétron, as observáveis relevantes são variáveis híbridas formadas de fluxos eletromagnéticos puros e variáveis eletrônicas<sup>1</sup>: o momento e o campo elétrico físicos.

No Capítulo III, apresentaremos uma teoria do efeito Hall quantizado<sup>9</sup>, que utiliza os desenvolvimentos teóricos dos capítulos anteriores.

O efeito Hall quantizado foi descoberto em 1980, por von Klitzing, Dorda e Pepper<sup>10</sup>, durante medidas da voltagem Hall e da voltagem longitudinal, num transistor do tipo MOSFET (metal-oxide-semiconductor-field-effect-transistor), operado na

temperatura do Hélio líquido, sob a ação de intenso campo magnético. Observou-se que quando da variação da voltagem de gate do dispositivo, e a valores particulares da concentração de portadores, a resistência Hall assumia valores fixos (formando plateaus) que dependiam apenas da constante de estrutura fina e da velocidade da luz, e que não eram sensíveis à geometria do dispositivo.

Em 1982, Tsui, Stormer e Gossard<sup>11</sup> descobriram o denominado efeito Hall anômalo ou fracionário, num dispositivo do tipo heterojunção Ga As (Al Ga) As.

Um passo significativo para o desenvolvimento e para a compreensão dos sistemas eletrônicos considerados quasi-bidimensionais, tinha sido dado quando Fowler, Fang, Howard e Stiles<sup>12</sup> em 1966, observaram o efeito Shubnikov-de-Haas<sup>13</sup>, durante medidas de condutância num dispositivo de efeito de campo, em que na presença de intenso campo magnético, e devido à voltagem de gate, formava-se um gás de elétrons na interface Silício/dióxido de Silício do sistema.

Em 1967, Stern e Howard<sup>14</sup> calcularam as sub-bandas do gás de elétrons, levando em conta o potencial médio devido aos centros de carga das vizinhanças, e também o efeito de screening. A formação das sub-bandas já tinha sido predita por Schrieffer<sup>15</sup>, em 1957.

Nossa teoria do efeito Hall quantizado<sup>9</sup> inicia-se com a observação de que, o campo magnético subdivide o dispositivo num número muito grande de orbitais semelhantes. O orbital é o sistema dinâmico elementar, onde poucos elétrons correlacionados interagem com o mesmo quantum de fluxo. Sobre cada orbital, atua uma voltagem de gate efetiva, que é praticamente proporcional à voltagem de gate do dispositivo global, e cuja variação faz alterar o número de elétrons de cada orbital. Mas, como esse número é quantizado, sua variação se dá aos saltos, produzindo a sequência de plateaus do efeito normal. O acoplamento do fluxo elétrico a uma fonte externa provoca a passagem de corrente no orbital. O fluxo elétrico também se acopla ao operador que descreve flutuações do número de elétrons. Estuda-se o comportamento de um dispositivo padrão a temperatura finita.

Obtem-se a voltagem Hall e a voltagem longitudinal como funções das variáveis voltagem de gate, campo magnético, temperatura, e corrente do dispositivo. Calcula-se o calor específico como função do campo magnético. Os resultados estão de acordo com o que se observa nas experiências sobre o efeito Hall quantizado. Discutimos ainda as consequências da repulsão eletrostática entre elétrons de um mesmo orbital, o papel das impurezas como fornecedoras de portadores nas heterojunções, o efeito anômalo, e o mecanismo de dissipação.

O Capítulo IV desta tese é dedicado ao estudo da quantização explícita do campo de Coulomb do elétron. Propomos também uma maneira de introduzir o campo magnético do elétron<sup>16</sup>, e analisamos as consequências que esses procedimentos podem eventualmente ter, na teoria das interações fracas<sup>17</sup>.

O problema do campo de Coulomb do elétron foi considerado já nos primeiros artigos sobre a Eletrodinâmica Quântica. No trabalho inaugural de Heisenberg e Pauli<sup>18</sup>, esse campo é introduzido através de um artifício muito elaborado, e muito elegante. Outros autores, como Fermi<sup>19</sup> e Weisskopf<sup>20</sup>, introduzem-no de maneira mais direta. Contudo, nesses primeiros trabalhos, a origem quântica do campo de Coulomb não fica explícita.

A formulação convencional da Eletrodinâmica Quântica, iniciada com os trabalhos de Schwinger<sup>21</sup>, Feynman<sup>22</sup> e Dyson<sup>23</sup>, é pragmática, e destina-se principalmente ao cálculo de processos de espalhamento. De forma que, nessa formulação, a questão do campo de Coulomb do elétron nunca é colocada explicitamente. Essa formulação também visa descrever efeitos de estrutura fina, como o momento magnético anômalo do elétron, porém dentro do mesmo formalismo apropriado ao tratamento dos processos de espalhamento.

É Dirac quem realiza a quantização explícita do campo de Coulomb do elétron<sup>24</sup>. E

ele ainda estabelece a ligação entre o fluxo de elétron, e a forma da interação local da Eletrodinâmica.

Dirac constrói o que ele denomina de elétron físico, multiplicando o campo do fermion original por um operador unitário, associado ao campo de Coulomb do elétron. Por derivação explícita desse operador de fluxo na Hamiltoniana cinética, surge então o acoplamento do vértice  $\bar{e}e\gamma, -e\vec{J}\cdot\vec{A}$ <sup>24</sup>.

Neste trabalho, os resultados de Dirac são reobtidos, através do método canônico de quantização de fluxo. Queremos crer que, no que se refere ao tratamento do modo de Coulomb do elétron, nossos procedimentos sejam um aperfeiçoamento formal daqueles de Dirac.

Num segundo passo, nós introduzimos o modo de fluxo que descreve o campo magnético produzido por elétron. Esse outro modo, que denominamos modo de Ampère, é construído com o auxílio do campo auxiliar  $\vec{T}$ , tal que  $\dot{\vec{T}} = \vec{B}$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{T} = \vec{E}$ .

A derivação explícita do modo de Ampère, na Hamiltoniana cinética, gera um outro tipo de acoplamento, com a mesma estrutura matemática das interações fracas. A partir desse resultado, nós então exploramos a possibilidade de construir uma teoria dos vértices das interações fracas, baseada originariamente no campo do elétron e no campo eletromagnético.

A teoria proposta é então comparada com a teoria de Weinberg–Salam<sup>25,26</sup>.

O último Capítulo da tese contém a consideração sucinta de outros tópicos de aplicação do método canônico de quantização de fluxo, cujo estudo está ainda em fase preliminar.



## I. ORBITAIS QUASI UNIDIMENSIONAIS

A figura 1 representa um orbital fechado que contem um elétron. Supomos que o suporte da função de onda do elétron localiza-se nas vizinhanças da linha fechada  $\Gamma_1$ , que delimita a superfície  $S_1$ . A segunda superfície  $S_2$ , circunscrita pela linha  $\Gamma_2$ , é perfurada por  $\Gamma_1$ .

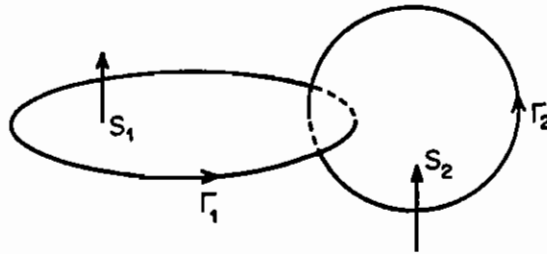


Figura 1: Superfícies abertas  $S_1$  e  $S_2$ , onde se define fluxos. Topologia apropriada para a quantização do fluxo magnético.

$\hat{\phi}_B = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}$  é o fluxo magnético do orbital, e  $\hat{\phi}_E = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$  seu fluxo elétrico

longitudinal.

Do comutador local do campo eletromagnético  $[E_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})] = i\delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y})$ , podemos deduzir a lei de comutação de fluxos<sup>1</sup>:

$$[\hat{\phi}_B, \hat{\phi}_E] = i \quad (1)$$

Como o fluxo elétrico produzido pelo elétron através de  $S_2$  pode variar entre  $-\frac{e}{2}$  e  $+\frac{e}{2}$ , nós então tomamos esse intervalo como sendo o domínio da função de onda de cada estado de fluxo, no espaço  $\hat{\phi}_E$ .

Um auto estado de fluxo magnético será portanto

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{ip \frac{2\pi}{e} \phi_E} \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2)$$

sendo  $p2\pi/e$  o auto-valor correspondente.

Esses auto valores são os mesmos valores de fluxo produzidos pela regra de quantização de fluxo de Dirac, utilizada na descrição do efeito Bohm-Aharonov<sup>27</sup>.

Para ilustrar a aplicação do método canônico de quantização de fluxo no orbital  $\Gamma_1$ , consideremos inicialmente uma Hamiltoniana  $H_B(\phi_B)$  que só contem o fluxo magnético

$$H_B(\phi_B) = \frac{1}{2L} \hat{\phi}_B^2 - b \hat{\phi}_B, \quad (3)$$

onde  $L$  é o comprimento característico do sistema, que pode ser o perímetro de  $\Gamma_1$ .  $b$ , por sua vez, é a fonte magnética externa: um campo magnético externo, por exemplo.

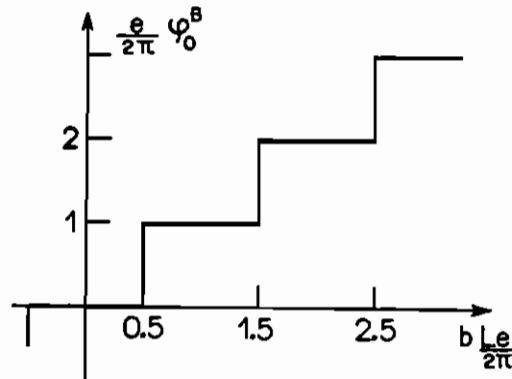
Na medida em que  $H_B$  comuta com  $\phi_B$ , seus auto-estados têm fluxo magnético bem definido.

Seja  $\varphi_0^B(b)$  o valor esperado do fluxo magnético no estado fundamental. A variação dessa grandeza com o campo magnético externo é mostrada na figura 2. Quando  $b$  cresce,  $\varphi_0^B(b)$  varia aos saltos formando uma seqüência de plateaus.

Nos pontos de transição entre plateaus, quando  $bL/2\pi$  é um número semi-inteiro,  $p + \frac{1}{2}$ , o estado fundamental de  $H_B$  é degenerado, e, com igual probabilidade, o sistema poderia estar num dentre os estados do tipo

$$|\theta, u\rangle = \cos\theta e^{iu} |p\rangle + \sin\theta e^{-iu} |p+1\rangle \quad (4)$$

onde  $\theta$  e  $u$  podem ter quaisquer valores no intervalo  $0 \leq \theta, u \leq \frac{\pi}{2}$ .



**Figura 2:** O fluxo magnético do estado fundamental, em função do campo magnético externo, no sistema descrito pela Hamiltoniana  $H_B$ .

Nesses pontos de transição, o valor esperado do fluxo elétrico no estado fundamental  $|\theta, u\rangle$  é

$$\varphi_{\theta, u}^E = \frac{e}{2\pi} \sin 2\theta \sin 2u \quad (5)$$

Fora dos pontos de transição, o valor esperado de  $\phi_E$  se anula, pelo fato do sistema estar num auto estado do fluxo magnético.

O método canônico de quantização de fluxo permite descrever naturalmente estados mistos de fluxo magnético. Com o propósito de explorar esse aspecto do método, nós então introduzimos na dinâmica do orbital uma Hamiltoniana de perturbação de natureza elétrica.

$$H_E = \frac{1}{2C} \hat{\phi}_E^2 - \epsilon \hat{\phi}_E \quad (6)$$

onde  $C$  é uma capacitância para o fluxo elétrico longitudinal, e  $\epsilon$  uma fonte externa desse fluxo.

$\epsilon$  pode em geral depender do tempo. Mas consideramos o caso mais simples em que não depende.

Esse sistema a  $\epsilon$  constante é estudado na referência (1), através de um tratamento variacional do estado fundamental. A função tentativa utilizada mistura dois estados de fluxo consecutivos, e, sendo agora  $\theta$  e  $u$  parâmetros variacionais, ela tem a forma do estado  $|\theta, u\rangle$  da Eq.(4).

Quando varia o campo magnético externo  $b$ , o sistema com Hamiltoniana elétrica se comporta como mostra a figura 3.

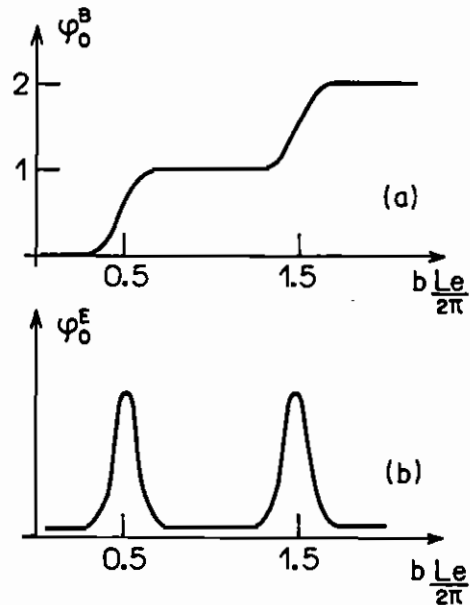


Figura 3: Variação (a) do fluxo magnético, e (b) do fluxo elétrico, com o campo magnético externo, para o sistema da Hamiltoniana  $H_B + H_E$ .

Os plateaus do fluxo magnético não são mais exatamente definidos nos valores  $p2\pi/e$ , como acontecia no caso ideal descrito pela Hamiltoniana  $H_B$ . Ocorre além disso um

estreitamento do plateau, que adquire um ombro na região de transição.

O valor esperado de  $\phi_E$  no estado fundamental é muito pequeno, na região central de cada plateau, onde  $\phi_B$  é razoavelmente bem definido, e exhibe picos pronunciados nas regiões de transição entre plateaus.

No limite em que a fonte elétrica externa é muito fraca, uma medida do quanto o sistema se afastou do caso ideal é dada pelo número  $A = 2(e/2\pi)^4 L/C$ . E, numa situação típica em que, sendo  $R$  o raio do orbital, e  $L \sim C \sim 2\pi R$ , resulta que  $A$  é muito pequeno ( $\sim 10^{-5}$ ), por depender do quadrado da constante de estrutura fina.

Esse número indica que, num orbital genérico a presença do modo de fluxo elétrico longitudinal, por um lado desloca o sistema do estado ideal de fluxo magnético bem definido. Mas ao mesmo tempo ele mostra que tal efeito será extremamente fraco, e difícil de ser observado.

A quantização de fluxos em valores múltiplos de  $2\pi/2e$  foi observada nas experiências de Deaver e Fairbank<sup>7</sup> e Doll e Näbauer<sup>8</sup>, feitas com pequenos tubos de material supercondutor, com diâmetro da ordem de  $10 \mu\text{m}$ , e comprimento de  $\sim 1,0 \text{ mm}$  e  $1,0 \text{ cm}$ .

Considera-se que nesse caso o quantum de fluxo é  $2\pi/2e$  porque os pares de Cooper<sup>28,29</sup> do supercondutor têm carga  $2e$ .

Um procedimento comum a ambas as experiências é o seguinte: resfria-se o sistema, na presença de um campo magnético ao longo do eixo do tubo, até a temperatura de supercondutividade. Em seguida desliga-se o campo externo, para então medir o fluxo magnético que permaneceu congelado no cilindro.

Na quantização de fluxo num tubo de seção  $S_1$  e altura  $h$ , a energia do primeiro modo do campo magnético ao longo do eixo do tubo é  $\frac{1}{2} \int \vec{B}^2 dV \approx \frac{h}{2S_1} \phi_B^2$ . E portanto, nesse caso o comprimento característico do sistema será  $L = S_1/h$ .

Nos tubos utilizados naquelas experiências a energia de um quantum de fluxo é da

ordem de  $10^3$  eV.

Podemos então considerar que o resfriamento na presença do campo  $b$  leva o sistema, já na temperatura de supercondutividade, para o estado fundamental da dinâmica do fluxo, onde o valor esperado do fluxo magnético é  $\varphi_0^B(b)$ .

Supondo em seguida que o desligamento do campo externo é adiabático, e não altera o estado de fluxo do tubo, concluímos que, na situação final, o sistema estará num estado excitado da dinâmica do fluxo; e que, a medida do fluxo remanescente no cilindro é uma medida indireta de  $\varphi_0^B(b)$ . Com essa interpretação a função  $\varphi_0^B(b)$  da figura 2 está em concordância com os resultados daqueles autores.

Deaver e Fairbank<sup>7</sup> fizeram também a medida direta da diferença entre o fluxo na seção do cilindro sob a ação do campo externo, e o fluxo que ali haveria se não houvesse o tubo. E aqui, essa diferença pode ser obtida subtraindo-se de  $\varphi_0^B(b)$  o fluxo do campo externo:  $\varphi_0^B(b) - bL$ . Ela tem a forma de dente de serra mostrada na figura 4. Descontado o efeito do volume do material supercondutor de que são feitos os tubos (onde nunca há fluxo) a função  $\varphi_0^B(b) - bL$  concorda com os resultados experimentais correspondentes apresentados na Referência (7).

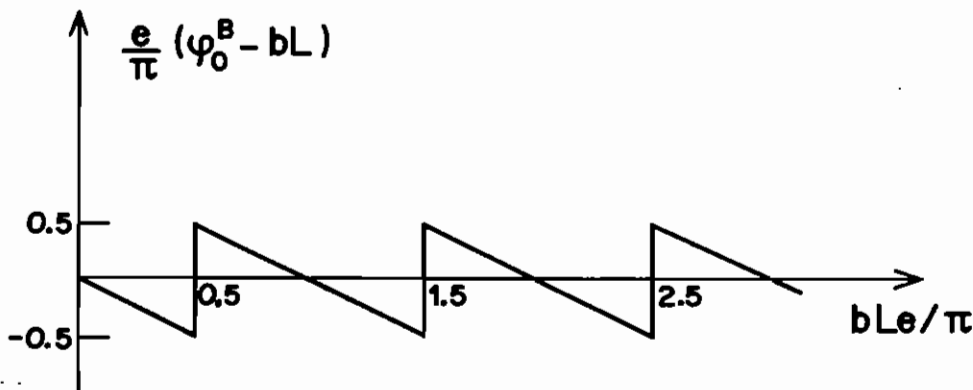


Figura 4: Diferença de fluxo através da seção do cilindro, entre a situação em que o tubo supercondutor está presente, e aquela em que não está.

A explicação da quantização de fluxo no tubo supercondutor também pode ser dada

pelo método de quantização de fluxo de Dirac. No entanto, achamos que a discussão desta seção pode ter servido como introdução ao método canônico de quantização de fluxo, feita através de um fenômeno simples e claro.

Em 1982, Imry<sup>30</sup> e Lindelof e Hansen<sup>31</sup> propuseram explicações para o efeito Hall quantizado, nas quais predominava a idéia da quantização de fluxo, em analogia com o efeito Josephson<sup>32</sup>.

O desenvolvimento do método canônico de quantização de fluxo se iniciou<sup>1</sup> com a tentativa de explicar o efeito Hall quantizado no dispositivo ideal de Laughlin<sup>33</sup>. Os procedimentos foram depois utilizados como parte de uma teoria completa sobre o efeito, aplicável aos transistores onde ele é observado, e que é apresentada no Capítulo III desta tese.

Pelo fato de incluir estados mistos de fluxo magnético, o método canônico permite considerar a ocorrência de flutuação no efeito Bohm–Aharonov<sup>27</sup>, nas vizinhanças dos pontos de transição entre estados de fluxo consecutivos. Flutuações de Bohm–Aharonov foram observadas nas experiências de Webb, Washburn, Umbach e Laibowitz<sup>34</sup>, feitas com anéis metálicos de dimensões da ordem de micron.

## II. ORBITAIS ABERTOS E POLARIZAÇÃO

A figura 5a representa uma seqüência de orbitais unidimensionais abertos, semelhantes entre si, e ligados em série. Assumimos condições de contorno periódicas nas paredes entre os orbitais, e supomos que cada um deles contem um elétron<sup>1</sup>.

O orbital é uma caixa de comprimento  $L$  e seção transversal  $S$ , como mostra a figura 5b. Por razões de simplicidade o modo de fluxo será tratado aqui como o primeiro modo longitudinal do campo eletromagnético na caixa.

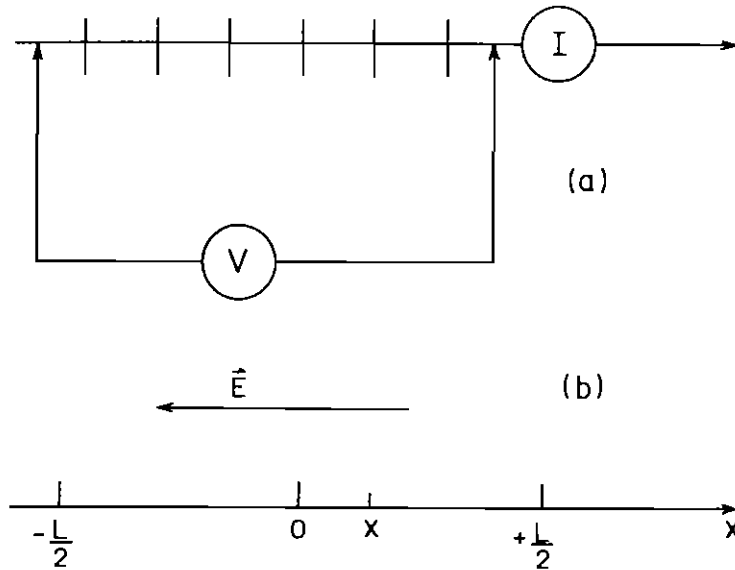


Figura 5: (a) ensemble de orbitais em série; (b) espaço ocupado por um orbital unidimensional.

Consideremos as componentes do campo eletromagnético na direção  $x$ ,  $E_x(\vec{x})$  e  $A_x(\vec{x})$ , e separemos o seu primeiro modo



$$\bar{E} = \frac{1}{\sqrt{\text{Vol}}} p \quad \text{e} \quad \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{\text{Vol}}} q \quad , \quad (7)$$

onde  $\text{Vol} = LS$  é o volume do orbital, e  $p$  e  $q$  formam um par canonicamente conjugado,  $[q,p] = i$ . De maneira que para o primeiro modo teremos  $[\bar{E},\bar{A}] \text{Vol} = i$ .

A  $E_x(\vec{x})$  nós denominamos o campo elétrico puramente eletromagnético.

Observando que os operadores  $\bar{E}$  e  $\bar{A}$  são respectivamente proporcionais ao fluxo elétrico  $\bar{\phi}_E$  (puramente eletromagnético) e a seu par canônico  $\theta_1$ ,

$$S\bar{E} \approx \int_S E_x dS = \bar{\phi}_E \quad (8a)$$

$$L\bar{A} \approx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A_x dx = \theta_1 \quad (8b)$$

nós obtemos o comutador  $[\bar{\phi}_E, \theta_1] = i$ .

$\theta_1$  é o operador que corresponde, no presente contexto do orbital aberto, ao operador fluxo magnético  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$  introduzido para o orbital fechado.

Polarização é o efeito que faz com que uma carga, sob a ação de campos externos, venha a ocupar uma posição diferente da sua posição natural num dado sistema.

Seja  $x$ , no intervalo  $[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}]$ , a posição do elétron no  $n^{\text{esimo}}$  orbital. Nós então utilizamos essa variável eletrônica, para construir o campo elétrico de polarização do orbital:  $E_p = -ex/SL$ .  $E_p$  está associado ao deslocamento do elétron de sua posição média natural  $x = 0$ .

O fluxo de polarização correspondente será portanto

$$\phi_E^P = SE_p = -\frac{ex}{L} \quad , \quad (9)$$

definido no intervalo  $\left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$ . O par canonicamente conjugado a  $\phi_E^P$ , que denominamos  $\theta_2$ , é por seu turno proporcional ao momento generalizado do elétron

$$\theta_2 = i \frac{L}{e} \partial_x \quad \text{e} \quad [\phi_E^P, \theta_2] = i \quad (10)$$

No eletromagnetismo dos meios materiais há o procedimento standard de definir o campo elétrico físico, através da soma do campo auxiliar  $\vec{D}$  com o campo de polarização  $-\vec{p}$ . Em analogia remota a esse procedimento, nós aqui também, no tratamento quântico do elétron no seu orbital, definimos o campo elétrico físico do orbital como sendo a soma do campo elétrico puramente eletromagnético, mais o campo elétrico de polarização.

Assim o fluxo elétrico físico do orbital será dado por<sup>1,9</sup>

$$\phi_E = \bar{\phi}_E + \phi_E^P = S\bar{E} - \frac{ex}{L} \quad (11)$$

Dados os intervalos de variação de  $\bar{\phi}_E$  e  $\phi_E^P$ , concluímos que o fluxo elétrico físico varia no intervalo  $(-e, +e)$ . O campo elétrico físico do orbital é  $E = \phi_E/S$ .

O momento canonicamente conjugado ao fluxo elétrico físico,  $\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$ , vem a ser proporcional ao momento físico do elétron,  $\hat{p}$ ,

$$\theta = -\frac{L}{2e}(-i\partial_x - e\bar{A}) = -\frac{L}{2e}\hat{p} \quad (12)$$

Dado o intervalo de variação de  $\phi_E$ , e dado que  $[\phi_E, \theta] = i$ , concluímos que os auto valores do momento físico serão  $\frac{2\pi}{L}m$  (onde  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

O procedimento de construir o campo elétrico físico, através da soma do campo elétrico puramente eletromagnético com o campo elétrico de polarização que depende da variável eletrônica  $x$ , está conforme os requerimentos da eletrodinâmica quântica tradicional. A eletrodinâmica tradicional pressupõe que as variáveis do campo

eletromagnético e as do elétron são completamente independentes, na medida em que os campos  $\vec{A}$  e  $\psi$  têm cada um a sua própria completeza.

As duas principais observáveis, no ensemble de orbitais em série, são a corrente e a voltagem longitudinal. E, na nossa construção teórica, essas duas observáveis acabam sendo respectivamente proporcionais aos valores médios dos elementos de um mesmo par canônico. A voltagem longitudinal é proporcional ao valor médio do fluxo elétrico  $\langle \phi_E \rangle$ , e a corrente é proporcional ao valor médio do momento físico  $\langle \hat{p} \rangle^{1,9}$ .

Poderíamos ter introduzido diretamente essas variáveis, sem considerações preliminares. No entanto, nós procuramos, na medida do possível, justificar a construção das variáveis, através de procedimentos extraídos da tradição.

Apenas alguns primeiros modos de fluxo, insensíveis à especificação da posição do elétron, são excitados no regime de baixa energia, em que o orbital opera. Através dos modos de longo alcance, não é possível distinguir se o fluxo elétrico é de polarização, ou puramente eletromagnético. Portanto, nesse regime, a variável elétrica importante deve ser o fluxo elétrico total, denominado físico.

O efeito de dissipação é discutido no capítulo seguinte, no contexto da teoria do efeito Hall quantizado.

A questão da invariância de gauge nos materiais não é nova. Outro problema relacionado é o da introdução adequada do potencial vetor, para o tratamento de efeitos específicos em materiais específicos. Anderson<sup>35</sup>, motivado por uma questão de Buckingham<sup>36</sup>, sobre a invariância de gauge na teoria de BCS<sup>29</sup>, aponta a dificuldade de se estabelecer as diferenças básicas entre materiais, através das características do campo eletromagnético dentro deles.

O método de variáveis híbridas<sup>1,9</sup> é uma proposta para resolver aquela problemática levantada por Anderson, no caso em que um sistema, a baixa temperatura, seja naturalmente subdividido em orbitais de poucos elétrons, e quando a Hamiltoniana cinética do elétron for predominante.

### III. O EFEITO HALL QUANTIZADO

Apresentamos aqui a teoria do efeito Hall quantizado proposta recentemente, que utiliza o método canônico de quantização de fluxo<sup>1</sup>.

O fenômeno descoberto por von Klitzing<sup>10</sup> em 1980, tem sido observado em essencialmente dois tipos de dispositivos: no MOSFET (metal-oxide-semiconductor-field-effect-transistor) e nas heterojunções.

A figura 6 mostra um MOSFET típico, como aqueles utilizados nessas experiências. Ele consiste de um material isolante de  $1,0 \mu\text{m}$  de espessura, crescido num corpo de material semi-condutor de espessura da ordem de  $30 \mu\text{m}$ . No topo do material isolante há um gate metálico de pequena espessura.

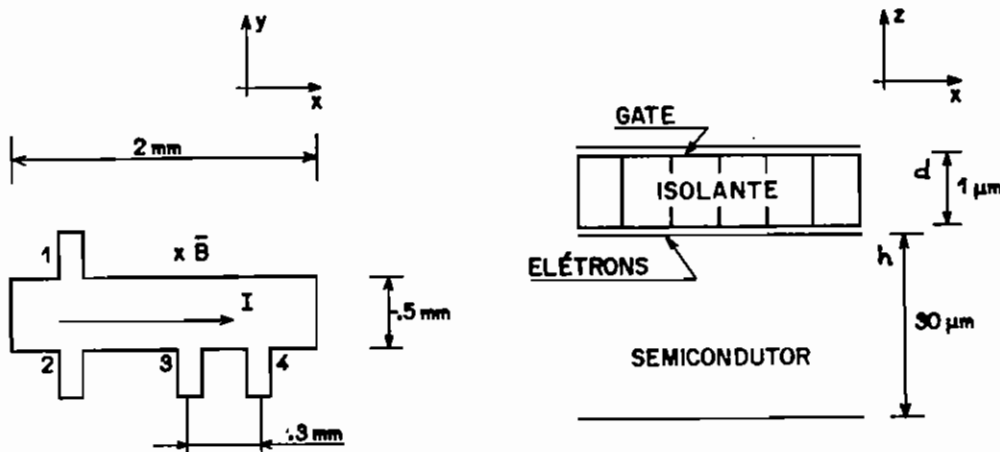


Figura 6: O MOSFET. O plano do gás de elétrons é o plano  $xy$ . O campo magnético aponta na direção  $z$ . 1 e 2 são pontos de medida da voltagem Hall, e 3 e 4, da voltagem longitudinal.

Os elétrons se localizam e se movem numa região estreita ( $\sim 20$  a  $50 \text{ \AA}$ ) em torno da

interface isolante/semicondutor, que é carregada por uma voltagem de gate da ordem de 1.0 Volt a dezenas de Volts. Essa interface pode ser por exemplo do tipo Si/SiO<sub>2</sub>.

Horizontalmente o MOSFET tem uma largura da ordem 10<sup>-2</sup>–10<sup>-1</sup>cm, e um comprimento que, dependendo do dispositivo varia entre ~ 1,0 mm e alguns centímetros.

Para observação do efeito Hall quantizado o MOSFET opera sob a ação de intenso campo magnético (~ 100 K Gauss) perpendicular ao plano do gás de elétrons.

A corrente atravessa o dispositivo ao longo da direção x, e pontos de medida de potencial permitem medir a voltagem Hall (1 e 2), assim como também a voltagem longitudinal (3 e 4).

A teoria será construída tendo por base o MOSFET. No entanto, ela pode ser estendida de forma natural à descrição do efeito Hall quantizado em dispositivos sem gate. Um comentário sucinto a respeito desses outros dispositivos foi incluído em outro ponto no final desta seção.

O movimento de um elétron num campo magnético uniforme  $\vec{B}$  é descrito pela equação de Schrödinger

$$i\partial_t \psi = \frac{1}{2M} \left[ \hat{p} - e\vec{A}^{\text{ext}} \right]^2 \psi, \text{ sendo } \vec{\nabla} \times \vec{A}^{\text{ext}} = \vec{B}, \quad (13)$$

onde  $M$  é a massa efetiva do elétron no material.

Como o campo  $\vec{B}$  tem a direção  $z$  e a corrente se desloca paralelamente ao eixo  $x$ , é conveniente tomarmos o potencial vetor  $\vec{A}^{\text{ext}}$  na forma  $By\vec{i}$ . A liberdade de escolha do potencial vetor mais apropriado para o nosso sistema decorre da simetria de gauge original da teoria.

Seja  $a(B) = 2\pi/eB$  a área elementar associada a um quantum de fluxo magnético,

e seja  $S$  a área do plano do gás de elétrons. O campo magnético então subdivide o gás de elétrons num ensemble de  $K$  orbitais semelhantes, onde  $K$  é dado pela relação  $K = S/a(B)$ .

No que se refere ao movimento ao longo da direção  $z$ , os elétrons estão todos no estado fundamental do potencial  $V(z)$ , que mantém o gás de elétrons nas vizinhanças da interface<sup>14</sup>. Supomos que, nas temperaturas consideradas, a probabilidade de ocupação do primeiro estado excitado desse potencial possa ser ignorada.

As auto soluções da Eq.(13) num orbital são da forma

$$\psi_{mn}(x,y) = e^{ik_m x} f_n(y-y_m) \quad ; \quad \text{onde } y_m = \frac{2\pi m}{eBL} \quad . \quad (14)$$

O número de onda  $k_m$  é  $2\pi m/L$ , e  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  é o índice de ordenação dos orbitais ao longo da direção transversal.  $L$  é, por sua vez, o comprimento dos orbitais ao longo da direção  $x$ .

A linha  $y = y_m$  é a linha central do orbital de número  $m$ ; e  $f_n(y-y_m)$  é a  $n^{\text{ésima}}$  auto solução do oscilador harmônico de frequência  $\omega_c = e B/M$ .

Supomos que os elétrons de cada orbital estão fortemente correlacionados e interagindo com um mesmo quantum de fluxo. Considerando além disso a descrição clássica, segundo a qual os elétrons giram na presença do campo magnético, nós concluímos que cada orbital deva ter uma forma aproximadamente quadrada. Como a área do quantum de fluxo é  $2\pi/eB$ , nós então adotamos o valor  $L = \sqrt{2\pi/eB}$  para o comprimento do orbital. Depois de apresentada a teoria justificaremos esse valor de  $L$  com outro argumento.

Na ausência de perturbações, o movimento eletrônico do orbital na direção  $x$  deve

ser coerente, pois as funções de onda de cada um dos seus elétrons têm o fator comum  $\varphi(x) = e^{ik_m x}$ . Acreditamos que essa seja a causa da correlação eletrônica no orbital.

O orbital opera no extremo limite quântico, em oposição a outros sistemas, susceptíveis de uma descrição clássica. Por isso é muito difícil visualizar o que ocorre nesse sistema. Mesmo assim, com a finalidade de fixar as idéias, nós descrevemos, na figura 7, um conjunto de orbitais de poucos elétrons em paralelo. A área  $m$  indica, no plano de gás de elétrons, a região preferencialmente ocupada pelos elétrons de  $m^{\text{esimo}}$  orbital. É a região onde a função de onda  $f_0(y-y_m)$  tem sua maior amplitude.

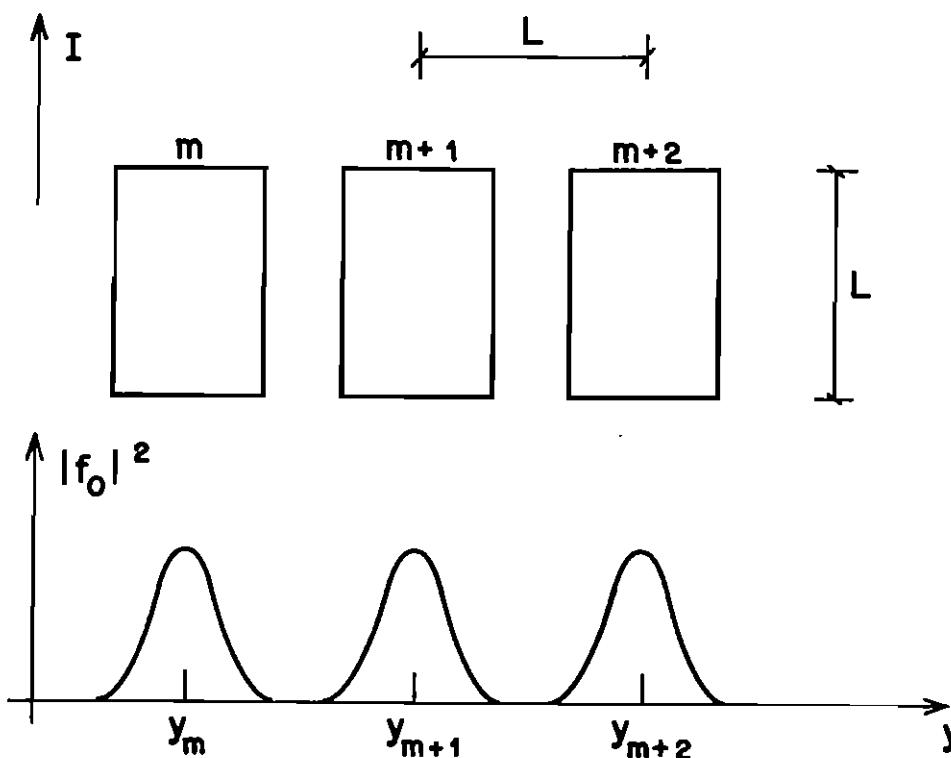


Figura 7: Orbitais paralelos. Ver explicação no texto.

Quando  $n$ , o número de elétrons de um dado orbital, for grande ( $n = 5, 6 \dots$  etc.), os elétrons passam a ocupar níveis de energia elevados, e a distribuição de carga do orbital se

estende na direção transversal, produzindo uma profunda interpenetração entre as funções de onda de orbitais vizinhos.

Nessas circunstâncias aqueles  $n$  elétrons ficam diluídos na distribuição de cargas dos orbitais vizinhos. No entanto, eles ainda permanecem correlacionados entre si, na medida em que ocupam níveis do mesmo orbital.

A situação é semelhante ao que ocorre na teoria do par de Cooper<sup>28,29,37</sup>. Na teoria da supercondutividade supõe-se que, o espaço entre dois elétrons de um determinado par de Cooper é continuamente percorrido por um número enorme de outros elétrons pertencentes a outros pares de Cooper. Muito embora aqueles dois elétrons permaneçam correlacionados.

Sendo  $V_g$  a voltagem de gate do sistema, e  $C$  a capacitância do dispositivo, então a área  $S$  do gás de elétrons estará carregada com um número  $N^{\text{total}} = C V_g / e$  de elétrons. Cabendo portanto a cada orbital um número médio de elétrons  $\bar{n}$ , dado por

$$\bar{n} = \frac{C}{2S} \frac{V_g}{B\alpha}, \quad (15)$$

sendo  $\alpha$  a constante de estrutura fina.

Cada orbital interage eletrostaticamente com as fontes externas ao dispositivo e com os demais orbitais. A ação eletrostática do resto do sistema sobre um dado orbital é dada por uma voltagem de gate efetiva  $\tilde{V}_g$ , correspondendo a uma energia eletrostática  $-e \tilde{V}_g n$ , onde  $n$  é o número de elétrons do orbital. O papel dessa interação é fazer com que o número médio de elétrons no orbital seja aquele determinado pela eletrostática global do dispositivo.

A considerção dos dois estados de spin do elétron não é essencial para que se compreenda o mecanismo do efeito Hall quantizado. Por isso, adotamos a simplificação de



introduzir apenas um elétron em cada nível de energia, e todos eles com spin para cima, por exemplo.

A energia de interação dos  $n$  elétrons do orbital com o campo magnético externo é dada por

$$\varepsilon_B(n) = \sum_{n'=1}^n \left[ n' - \frac{1}{2} \right] \frac{eB}{M} = \frac{1}{2} \frac{eB}{M} n^2 \quad (16)$$

Devemos incluir também a energia de repulsão eletrostática entre os  $n$  elétrons pertencentes a um determinado orbital. Para tanto é necessário analisar a forma da distribuição de carga do orbital, em função da variável transversal  $y$ .

O orbital é populado, com um elétron por estado, até o nível  $n-1$ . Para o elétron do nível  $k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ), o desvio quadrático médio de sua posição, com relação à linha central do orbital, é dado por  $(\Delta y)_k^2 = \left[ k + \frac{1}{2} \right] / eB$ . Como conseqüência, verificamos que a distribuição de carga do orbital é aproximadamente gaussiana com desvio quadrático médio  $(\Delta y)_0^2 = (n-1)/2eB$ . Isso já nos permite estimar a energia de repulsão eletrostática entre aqueles  $n$  elétrons:

$$\varepsilon_E \approx \frac{1}{2} \frac{\alpha n^2}{2(\Delta y)_0} \approx \frac{1}{4} \alpha \sqrt{eB} n^{3/2} \quad (17)$$

Um cálculo mais minucioso mostra que essa expressão da energia eletrostática é essencialmente correta, a menos de correções logarítmicas.

Em função do número de elétrons do orbital, sua energia será então

$$\frac{1}{2} \frac{eB}{M} n^2 + \frac{1}{4} \alpha \sqrt{eB} n^{3/2} - e \tilde{V}_g n \quad (18)$$

Minimizando a expressão acima no número de elétrons, e fazendo com que, no ponto

de mínimo, essa variável se iguale ao valor dado pela Eq.(15), que foi estabelecido pela eletrostática global do dispositivo, nós determinamos como a voltagem de gate efetiva do orbital dependerá da voltagem de gate do dispositivo:

$$e \tilde{V}_g = \alpha^2 M \left[ \rho + \frac{3}{8} \sqrt{\rho} \right] , \text{ sendo} \quad (19a)$$

$$\rho = \frac{C}{2\alpha^3 M^2 S} e V_g = \frac{k}{2\alpha^3 d M^2} e V_g , \quad (19b)$$

onde  $d$  é a espessura do material isolante do dispositivo, e  $k$  é a constante dielétrica desse isolante.

No entanto, o número de elétrons é uma variável discreta que será representada pelo operador  $\hat{N}$ , cujos autovalores são os inteiros não negativos. Introduzimos esse operador, e consideramos que a dinâmica do número de elétrons seja determinada pela Hamiltoniana  $H_{\text{carga}}(\hat{N})$ , que tem a forma da energia clássica da Eq.(18):

$$\frac{1}{2} \frac{eB}{M} \hat{N}^2 + \frac{1}{4} \alpha \sqrt{eB} (\hat{N})^{3/2} - e \tilde{V}_g \hat{N} \quad (20)$$

Minimizando a energia  $E(N)$  dos auto-estados de  $H_{\text{carga}}$ , para valores dados do campo magnético e da voltagem de gate, nós obtemos o valor inteiro  $N(B, V_g)$  do número de elétrons do estado fundamental do orbital, em função dessas variáveis externas. Quando da variação de  $B$  ou  $V_g$ ,  $N$  varia aos saltos. O orbital está em contato com um banho de elétrons; e ele recebe tantos elétrons quanto forem necessários para minimizar sua energia.

Esse resultado já nos permite explicar o surgimento de plateaus na resistência Hall, quando o ensemble de orbitais é percorrido por uma pequena corrente. A resistência Hall do dispositivo é dada por

$$R_{\text{Hall}} = \frac{V_{\text{Hall}}}{I} = \frac{BS}{e N^{\text{total}}} \quad (21)$$

BS é o fluxo magnético total através do plano de gás de elétrons  $\left[BS = \frac{2\pi}{e} K\right]$ , e  $N^{\text{total}}$  o número total de elétrons nesse mesmo gás ( $N^{\text{total}} = K N(B, V_g)$ ). Disto se conclui que

$$R_{\text{Hall}} = \frac{2\pi}{e^2 N(B, V_g)} \quad (22)$$

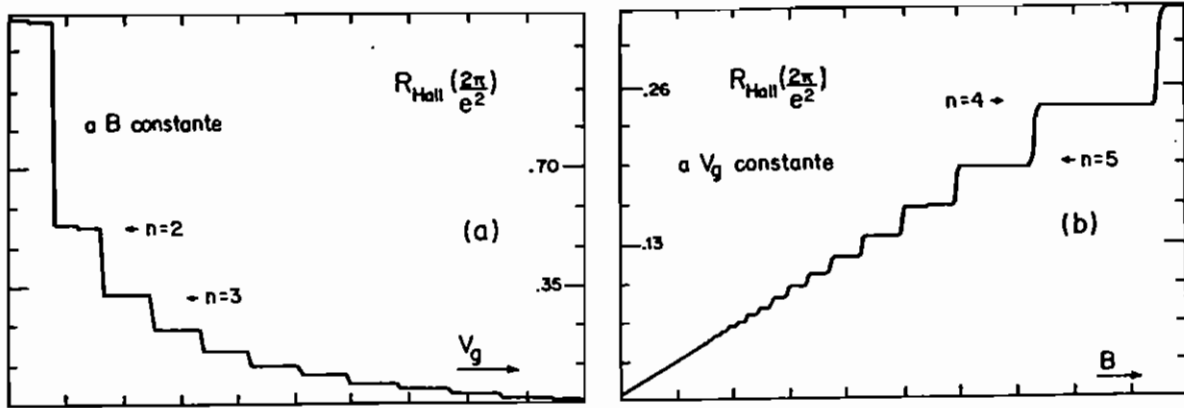


Figura 8: (a) variação da voltagem Hall com a voltagem de gate, a campo magnético constante; (b) variação da voltagem Hall com o campo magnético, a voltagem de gate constante.

Na figura 8 apresentamos a dependência de  $R_{\text{Hall}}$  com a voltagem de gate, a campo magnético constante, e vice-versa, no zero absoluto. A figura mostra a seqüência de plateaus do efeito Hall quantizado, associados aos valores inteiros do número de elétrons do orbital. Em cada plateau a resistência Hall é uma fração da resistência fundamental  $2\pi/e^2$ , que equivale a  $25812.8 \Omega^{10}$ .

Uma vez que a teoria descreve os plateaus da resistência Hall, devemos então ampliá-la de forma a incluir outras variáveis, também importantes nas experiências onde se observa o efeito Hall quantizado. Temos também que calcular o efeito a temperatura finita.

O passo seguinte é considerar o movimento do centro de massa dos elétrons do orbital ao longo da direção  $x$ . E, conforme a teoria apresentada no capítulo anterior, esse movimento estará acoplado com os fluxos do orbital.

Assim nós definimos o fluxo  $\theta$ , através da integral  $\int A_x dx$  ao longo do comprimento  $L$  do orbital. Definimos o fluxo elétrico puramente eletromagnético, como sendo a integral  $\int E_x ds$  na superfície transversal  $\mathcal{A}$ , atribuída ao orbital.

Essa superfície  $\mathcal{A}$  é determinada pelo volume  $\text{Vol}$  atribuído ao orbital, no dispositivo. Considerando a figura 6, vemos que a fração do volume total do dispositivo atribuída ao orbital é o volume  $\text{Vol} = L \times L \times (h + d)$ . De maneira que a superfície transversal na qual definimos o fluxo elétrico do orbital será  $\mathcal{A} = L \times (h + d)$ .

Os elétrons se movem nas vizinhanças da interface isolante/semicondutor, numa região determinada pela função de onda eletrônica. A seção  $\mathcal{A}$  se estende para fora dessa região, através do dispositivo.

Sendo portanto  $x$  a posição do centro de massa dos elétrons do orbital, e  $N$  o número de elétrons, o momento físico  $\hat{p}$  desse sistema é o operador  $-i\partial_x - eN\bar{A}$ .

A variável canonicamente conjugada ao momento físico, que é proporcional ao campo elétrico físico do orbital,

$$X = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{L}{eN} S \bar{E} \right] , \text{ com } E = -\frac{Ne X}{\text{Vol}} , \quad (23)$$

é definida no intervalo  $-\frac{L}{2} \leq X \leq \frac{L}{2}$ .

E o movimento do centro de massa do orbital, conjugado com os fluxos, será então regido pela Hamiltoniana

$$H_{\text{cm}}(\hat{p}) = \frac{1}{2MN} \hat{p}^2, \quad (24)$$

cujos auto valores são  $2\pi^2 k^2 / MNL^2$ , com  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Quando, já sob a ação do campo magnético externo, mas ainda com o gerador de corrente desligado, o ensemble de orbitais estará no estado  $k = 0$ .

A passagem de corrente através de orbital é descrita de maneira auto-consistente, com a introdução de uma Hamiltoniana de perturbação  $H_I^1$ , representando a ação de uma fonte elétrica externa sobre o orbital

$$H_I^1 = -\text{Vol} E_{\text{ext}} E = -2|e|N E_{\text{ext}} X. \quad (25)$$

No regime de fonte elétrica fraca,  $H_I^1$  vai produzir misturas entre os estados  $k = 0$ , e, por exemplo,  $k = -1$ , permitindo assim a formação de estados de corrente não nula. Dada a corrente  $I$  que atravessa o dispositivo, nós determinamos a corrente  $i$  em cada orbital, e devemos ajustar o valor de  $E_{\text{ext}}$  para que resulte aquele valor de  $i$  desejado.  $E_{\text{ext}}$  representa então a ação do gerador de corrente, e dos outros orbitais, sobre um dado orbital, para que através dele passe uma determinada corrente.

Como é discutido na Referência (9), poderíamos ter optado pela introdução de uma fonte de corrente convencional;  $-\alpha \hat{p}$ , ao invés da fonte elétrica da Eq.(25). A adoção de uma fonte  $\alpha \hat{p}$  também produz resultados qualitativamente semelhantes aos que serão aqui apresentados, e sem introduzir mudança muito pronunciada na ordem de grandeza dos mesmos.

Sendo  $v$  a velocidade do elétron, a ação  $e \int dt A^{\text{ext}}_v$ , correspondente a uma fonte de corrente convencional  $\Gamma_x$  na eletrodinâmica clássica, pode ser integrada por partes, resultando numa ação do tipo  $e \int dt E^{\text{ext}}_x$ , semelhante ao acoplamento que adotamos. A escolha entre os dois tipos de fonte externa depende da natureza do sistema em consideração.

No caso presente, os orbitais são sistemas abertos, formados devido à existência de um campo magnético externo. Originariamente, tanto o momento, quanto o campo  $A$  do orbital eram bem definidos. De maneira que a nós nos parece que a fonte externa dada pela Eq.(25) seja a mais apropriada.

Como a dinâmica do orbital é dominada pela Hamiltoniana cinética do elétron, então as variáveis conjugadas momento físico/campo elétrico são de fato as variáveis principais do orbital. Na parte central dos plateaus do efeito Hall quantizado, quando a corrente é baixa, o estado do orbital é quase um auto estado puro do momento; e, como consequência, o valor médio do fluxo elétrico assume valores muito pequenos, nessa região. Esse resultado explica a diminuição pronunciada da voltagem longitudinal, que é observada, sempre que a resistência Hall está num plateau bem definido.

Se raciocinarmos em termos da eletrodinâmica clássica, somos levados a concluir que oscilações do campo elétrico longitudinal induzem flutuações de  $N$ . E, reciprocamente, quando o orbital recebe um novo elétron, mesmo que transitoriamente, o momento do orbital varia.

Outra causa possível de flutuações do número eletrônico pode ser a presença de impurezas. Um elétron fracamente ligado a uma impureza pode ter, no estado fundamental, uma pequena fração de sua função de onda na região do orbital. Por outro lado, num estado excitado, o elétron estará com maior probabilidade no volume do orbital. Flutuações de campo elétrico, podem novamente produzir oscilações entre esses dois estados, originando assim flutuações do número de elétrons no orbital.

Logo, deve haver um acoplamento entre o operador  $X$ , associado a flutuações do momento  $\hat{p}$ , e o operador canonicamente conjugado ao número de elétrons.

Consideramos os operadores de criação e destruição  $a^+$  e  $a$ , tais que  $[a, a^+] = 1$ , e  $a^+ a = \hat{N}$ . As flutuações da variável  $N$  podem ser introduzidas através do operador hermitiano  $a^+ + a$ , que não comuta com  $\hat{N}$ .

Portanto, para descrever o efeito mútuo de flutuações do número de partículas e do

momento, nós construímos a Hamiltoniana de perturbação fenomenológica

$$H_I^2 = \lambda X (a^\dagger + a) \quad , \quad (26)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro fenomenológico.

Na Hamiltoniana  $H_{\text{carga}}$ , a importância relativa entre a energia de interação com o campo magnético externo,  $\epsilon_B$ , e a energia de repulsão eletrostática dos elétrons do orbital,  $\epsilon_E$ , é dada em termos do parâmetro  $\rho$ , definido na Eq.(19b). Quando  $3/8 \sqrt{\rho} \ll 1$ , a energia de interação eletrostática pode ser ignorada em comparação com  $\epsilon_B$ . No caso oposto, quando  $3/8 \sqrt{\rho} \gg 1$ , ela é preponderante.

Num dispositivo, onde a espessura do isolante é da ordem de  $1,0 \mu\text{m}$ , e a massa efetiva do elétron no material é  $\sim 50$  vezes menor que a massa do elétron, e se a voltagem de gate for aproximadamente 20 Volts, então aquele número será da ordem de 1,0.

Nos cálculos, cujos resultados apresentamos aqui, adotamos a simplificação de não incluir a energia de repulsão eletrostática  $\epsilon_E$ . Na medida em que, tanto  $\epsilon_B$  quanto  $\epsilon_E$  crescem com  $B$  e com  $N$ , a não inclusão de  $\epsilon_E$  não produz alteração substancial nas características do sistema. A aproximação apenas desloca ligeiramente os pontos de transição entre plateaus vizinhos, e modifica um pouco os valores das energias de excitação de  $H_{\text{carga}}$ .

Na resolução da dinâmica do sistema, nós consideramos que  $H_{\text{carga}} + H_{\text{c.m.}}$  formam a Hamiltonian a principal  $H_0$ , e tratamos  $H_I^1 + H_I^2$  como perturbação.

Os auto-estados de  $H_0$  têm momento e número de elétrons bem definidos. Para valores de  $B$  e  $\tilde{V}_g$  o estado fundamental  $|k = 0, N\rangle$  é tal que

$$N - 1/2 < \frac{M}{B} \tilde{V}_g < N + 1/2 \quad .$$

Essa desigualdade define a região de um plateau.

Os procedimentos adotados para resolver o sistema estão relatados detalhadamente na Referência (9). Quando o ensemble está no  $N^{\text{esimo}}$  plateau, o estado quântico do orbital é descrito por uma mistura de quatro auto-estados de  $H_0$ :

$$\alpha_1^i |0,N\rangle + \alpha_2^i |0,N\pm 1\rangle + \alpha_3^i |-1,N\rangle + \alpha_4^i |-1,N\pm 1\rangle \quad , \quad (27)$$

onde predomina o estado  $|0,N\rangle$ .

Depois de diagonalizada a matriz  $4 \times 4$ , que nessa aproximação representa a Hamiltoniana do sistema, nós então construímos a mecânica estatística do ensemble de orbitais com os quatro níveis de energia. Obtemos assim os valores médios das várias variáveis que descrevem o sistema, a temperatura finita.

Com o valor médio do número de elétrons do orbital  $\langle N \rangle$ , nós obtemos a resistência Hall,  $2\pi/e^2 \langle N \rangle$ . Através do valor médio de  $X$ , nós calculamos o campo elétrico médio,  $\langle E \rangle$ ; com o valor médio de  $\hat{p}$ , a corrente média. Etc.

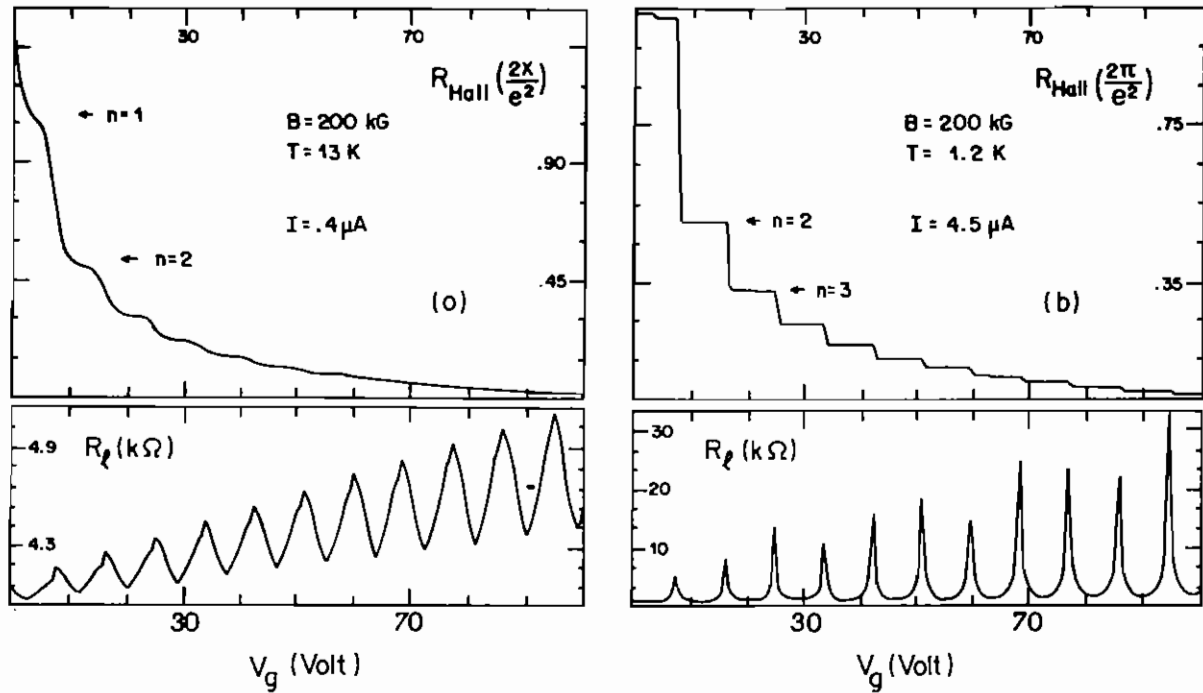
Nas experiências sobre o efeito Hall quantizado, a corrente no dispositivo é em geral mantida constante, enquanto se varia ou  $B$  ou  $V_g$ . Por isso, também nos cálculos que aqui relatamos, procurou-se variar a fonte elétrica externa  $E^{\text{ext}}$ , concomitantemente com a variação do campo magnético, de maneira a manter a corrente total aproximadamente constante.

Há muitas maneiras de se excitar os elétrons do orbital. Nas regiões de transição entre plateaus, a quasi-partícula no topo do orbital, no nível  $n$ , tem energia de ligação muito baixa, em comparação com as outras quasi-partículas. Nesse caso, pode-se supor que o efeito de polarização do orbital, seja devido principalmente ao deslocamento do elétron do topo. O efeito é então calculado construindo-se os operadores de fluxo com a posição  $\tilde{x}$  e o momento generalizado  $-i \partial_{\tilde{x}}$  dessa quasi-partícula



$$\tilde{X} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{x} - \frac{L}{e} S \tilde{E} \right] \text{ e } \hat{p}_{\tilde{x}} = -i \partial_{\tilde{x}} - e \tilde{A} ; \quad (28)$$

a Hamiltoniana  $H_{c.m.}$  sendo substituída pela Hamiltoniana cinética de uma quasi-partícula  $H_a = \hat{p}_{\tilde{x}}^2 / 2M$ .



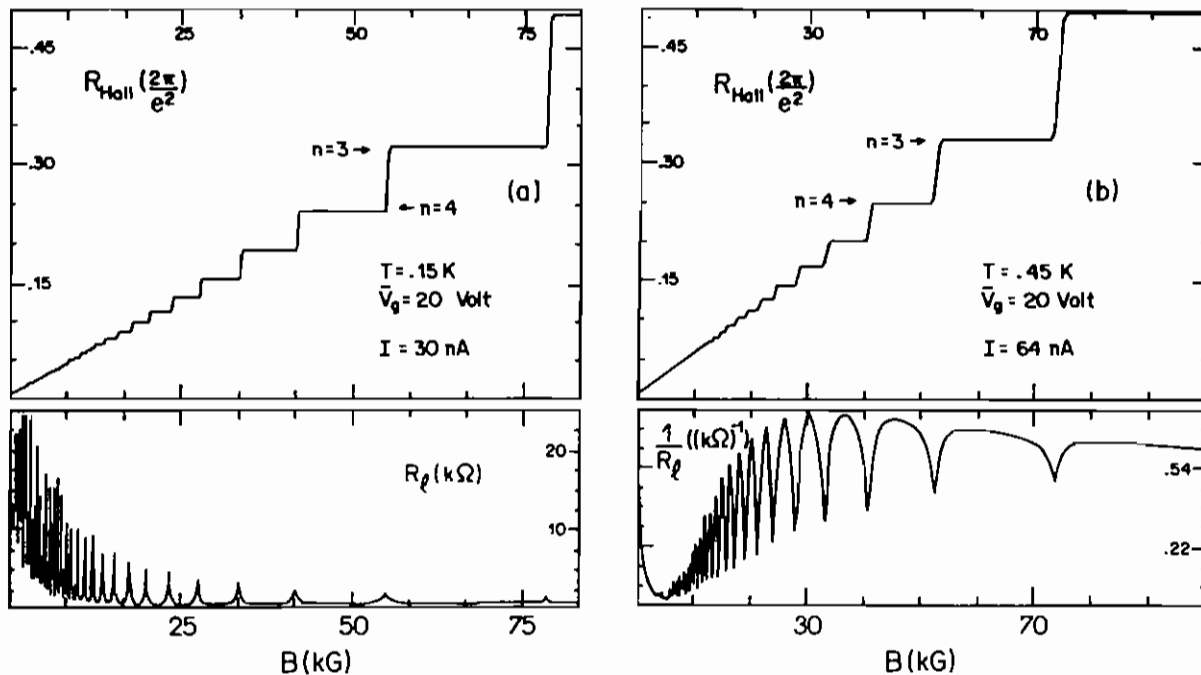
**Figura 9:** Variação da resistência Hall e da resistência longitudinal com a voltagem de gate, a campo magnético constante no dispositivo padrão, em duas situações distintas.

Nas figuras 9 e 10 apresentamos resultados sobre o comportamento da resistência Hall e da resistência longitudinal do dispositivo standard da figura 6. Os cálculos foram feitos na aproximação do elétron do topo, e utilizamos o valor  $M = 10 m_e$  para a massa efetiva do elétron no material, e  $K = 7,5$  para a constante dielétrica do isolante.

A figura 9a mostra o que ocorre, a uma temperatura relativamente alta ( $13^0\text{K}$ ),

quando varia-se a voltagem de gate, mantendo o campo magnético fixo em 200 kG, e a corrente fixa em  $0,4 \mu\text{A}$ . A temperatura nesse caso é tão alta, que ainda não existem plateaus na resistência Hall; muito embora já se observe uma tendência de formação de plateaus nas regiões indicadas. Vemos também as oscilações de Shubnikov-de Haas na resistência longitudinal.

Na figura 9b temos o comportamento do dispositivo, já numa temperatura uma ordem de grandeza menor. Ali observamos nitidamente os plateaus da resistência Hall, e, nas transições entre plateaus consecutivos, surgem os picos característicos da resistência longitudinal.



**Figura 10:** Variação da resistência Hall e da resistência longitudinal com o campo magnético, a voltagem de gate constante, no dispositivo padrão, em duas situações distintas.

Na figura 10 vemos o que ocorre quando, mantidas constantes a voltagem de gate e a corrente, varia-se o campo magnético. A figura 10a mostra o comportamento da resistência Hall e da resistência longitudinal a  $0,15^{\circ}\text{K}$  enquanto que na figura 10b temos o

comportamento da resistência Hall e o da condutância longitudinal a  $0,45^{\circ}\text{K}$ .

Tanto pela ordem de grandezas das grandezas físicas (campo magnético, voltagem de gate, resistência Hall, resistência longitudinal, temperatura e corrente), assim como também pela evolução geral dos resultados, os exemplos apresentados estão em bom acordo com os resultados experimentais<sup>10,38-40</sup>.

A figura 11 apresenta o calor específico do gás de elétrons calculado com o espectro da Hamiltoniana  $H_{\text{carga}}$ , para dois valores da temperatura, e em função do campo magnético. O resultado correspondente à temperatura maior compara razoavelmente bem com os cálculos fenomenológicos do calor específico eletrônico de Gornik et al.<sup>41</sup>, que foram utilizados para interpretar dados experimentais de alteração de temperatura, num dispositivo aquecido por pulsos de campo elétrico, na faixa de temperatura de  $1^{\circ}\text{K}$  a  $5^{\circ}\text{K}$ . Os cálculos desses autores, por sua vez, se baseiam no método de Zawadzki e Lassing<sup>42</sup>, que propõe uma densidade de estados fenomenológica em torno de cada nível de Landau.

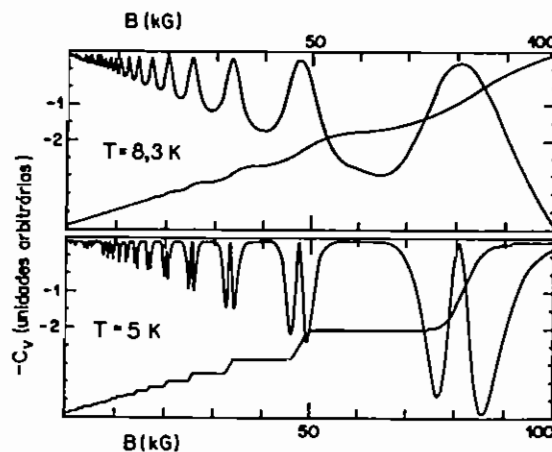


Figura 11: Calor específico calculado como o espectro da Hamiltoniana  $H_{\text{carga}}$ .

Quando o campo magnético é muito intenso, a relação  $N^{\text{total}}/BS$  passa a ser menor que o quantum de fluxo  $2\pi/e$ , e haverá mais do que um orbital de Landau por elétron do sistema. Formar-se-ão portanto orbitais maiores de fluxo magnético múltiplo  $2\pi/e$ , e os plateaus da resistência Hall poderão ser do tipo  $2\pi/e^2n$ ; o que caracteriza o efeito

anômalo ou fracionário.

Para valores dados da voltagem de gate e do campo magnético, há um valor clássico para a relação  $p/n$ :

$$\frac{p}{n} = \frac{e^2}{2\pi} \frac{S}{C} \frac{B}{V_g} \quad (29)$$

Na Referência (9) é apresentada uma análise preliminar do efeito anômalo. Os plateaus anômalos ocorrem nos valores inteiros de  $p$  e de  $n$ . E há dois tipos de transições entre plateaus: transições devidas à variação do número de elétrons, e aquelas devidas à variação do número de quanta de fluxo. Na maioria das experiências sobre o efeito Hall quantizado não aparecem plateaus onde  $p$  seja par e  $n$  ímpar, muito embora na Referência (43) apresente-se uma indicação de que esse tipo de plateau deva ocorrer também. Através da análise da Referência (9), não se encontrou nenhum argumento teórico que proibisse a existência de plateaus pares.

Constatou-se também que, para cada estado de plateau  $|p,n\rangle$ , há um grande número de outros estados quasi degenerados com  $|p,n\rangle$ . Isso indica que o efeito anômalo deva ser observado numa escala de temperaturas em geral menores que aquelas onde já se observa o efeito normal.

A energia de cada orbital é bem definida, logo, o efeito dissipativo ocorre fora da dinâmica do orbital, no banho de elétrons do sistema. Devido ao efeito de flutuação do número de elétrons do orbital, o banho fornece ao orbital elétrons de baixa energia, e os recebe de volta com velocidade maior, pois o elétron tende a ser acelerado dentro do orbital. É justamente o resfriamento no banho, daqueles elétrons que a ele retornam com energia maior, que é irreversível.

Os autores da Referência (38) observaram o sistema em regime Ohmico a baixa temperatura. Em vários cálculos, para temperatura e corrente muito baixas, também pudemos observar o comportamento Ohmico da voltagem Hall. No entanto, não foi

possível observar o comportamento Ohmico da voltagem longitudinal, que parece crescer com a raiz quadrada da corrente, quando corrente e temperatura são muito baixas, e na aproximação do elétron do topo.

Para valores pequenos da constante de acoplamento  $\lambda$ , da Hamiltoniana  $H_I^2$ , e valores razoáveis da temperatura, chegamos a observar, em alguns cálculos, a formação de dips no centro dos picos da voltagem longitudinal. Interpretamos esse efeito como sendo devido à concorrência térmica do primeiro estado excitado, onde o valor médio do fluxo elétrico tem sinal oposto ao do fluxo elétrico do estado fundamental.

Quando a corrente ou a resistência longitudinal forem exageradamente altas, e a temperatura muito baixa, a dissipação será relativamente intensa, e o orbital vai operar muito fora do equilíbrio térmico. Portanto, nesse caso, a teoria deve ser suplementada com um estudo das propriedades de transporte de calor do dispositivo.

No estado fundamental do sistema todos os orbitais estão cheios de elétrons até o nível  $n-1$ . O Princípio de Pauli proíbe que um elétron, num determinado nível, mude de orbital sem ganhar energia, visto que, nos outros orbitais, o nível correspondente já está ocupado. Para que um elétron de número de onda  $k_m$ , no topo do  $m^{\text{ésimo}}$  orbital, se transfira para o orbital vizinho, com número de onda  $k_m + \frac{2\pi}{L}$ , há portanto um gap, dado pela energia de excitação característica do sistema  $\epsilon \approx e B/M$ .

O orbital de comprimento  $L$  foi introduzido para permitir o acoplamento das variáveis de fluxo. No entanto, pelo que foi dito acima, se o número de onda do elétron no orbital variar de  $2\pi/L$ , então a variação de energia correspondente deverá ser aproximadamente igual ao gap natural do sistema  $2\pi^2/ML^2 \approx \epsilon$ .

Calculando dessa maneira o comprimento do orbital, obtemos  $L' \approx 1,73L$ , verificando assim que o valor de  $L$  adotado nos cálculos é essencialmente correto.

Há sistemas, como as heterojunções, onde o número de portadores é determinado pela concentração de impurezas. Nesse caso, uma condição necessária para a observação do efeito, é que a energia de excitação de origem magnética seja muito maior que a energia de

ligação dos portadores aos centros de impureza.

Seja  $\eta$  a concentração de impurezas na camada dopada de uma heteroestrutura, e seja  $r$  a espessura dessa camada. Supondo que o número de portadores seja aproximadamente proporcional à concentração de impurezas, a área por portador será dada por  $A \approx 1/r\eta$ .

Para observar o efeito Hall quantizado, também é necessário que a ordem de magnitude do campo magnético seja tal que  $B \approx 2\pi/eA \approx 2\pi\eta/e$ .

Além disso, dada a energia de excitação  $eB/2M$ , nós concluímos que a temperatura, onde o efeito começa a ser observado, deve ser tal que  $T \approx eB/10M \approx \pi\eta/5M$ .

Isso significa que variações na concentração de impurezas produzem alterações consideráveis nas características do efeito.

O método de subdividir o sistema num ensemble de orbitais, e então tratar a dinâmica de alguns modos em cada orbital, revelou-se ser a linguagem natural para descrever o efeito Hall quantizado e outros efeitos correlacionados.

Durante o trabalho que resultou nesta teoria do efeito Hall quantizado, interpretávamos nossos resultados através de comparação com os resultados experimentais de Paalanen, Tsui e Gossard<sup>38</sup>, e von Klitzing, Tausendfreund, Obloh e Herzog<sup>39</sup>, sobre o efeito normal; com aqueles de Chang, Berglund, Tsui, Stormer e Hwang<sup>40</sup>, sobre o efeito anômalo, e também com a análise de Gornik, Lassing, Strasser, Stormer, Gossard e Wiegman<sup>41</sup>, sobre o calor específico do sistema. Também utilizamos informações extraídas dos artigos de review de Ando, Fowler e Stern<sup>44</sup>, Souillard, Toulouse e Voss<sup>45</sup>, e Stormer<sup>46</sup>.

A teoria de Ohta<sup>47</sup>, Ando e Uemura<sup>48</sup>, e Ando<sup>49</sup>, tem motivado muitos estudos teóricos, e tem servido para interpretar alguns aspectos experimentais do fenômeno; muito embora seja uma teoria muito complexa. Além disso é difícil conciliar a surpreendente exatidão numérica dos plateaus da resistência de Hall, com a idéia de um sistema que seja, conforme a suposição daquela teoria, essencialmente desordenado.

#### IV. OS FLUXOS DO ELÉTRON

Na formulação usual do eletromagnetismo sem fontes, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são introduzidos com o auxílio do potencial vetor  $\vec{A}$ , tal que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  e  $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$ . Essa representação garante já de saída a validade da lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (31)$$

Uma segunda representação possível é aquela construída com o campo auxiliar  $\vec{T}$ , com as definições  $\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{T}$  e  $\vec{B} = \dot{\vec{T}}$ . Esse procedimento alternativo, por sua vez, leva imediatamente à equação de Maxwell sem fontes

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \quad (32)$$

No que se refere à descrição das ondas eletromagnéticas, ambas as representações são igualmente boas.

Dada a Hamiltoniana do campo eletromagnético

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) , \quad (33)$$

a quantização da onda eletromagnética pode ser implementada depois de introduzirmos as relações de comutação locais:

$$[E_i(\vec{x}) , A_j(\vec{y})] = i\delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) , \text{ na representação } \vec{A} , \quad (34a)$$

ou

$$[B_i(\vec{x}) , T_j(\vec{y})] = -i\delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) , \text{ na representação } \vec{T} , \quad (34b)$$

e manobramos para evitar as componentes longitudinais dos campos.

Supomos aqui que o campo eletromagnético é completo, no sentido em que os dois comutadores acima sejam obedecidos simultaneamente<sup>16</sup>.

O comutador de fluxos da fórmula (1),  $[\phi_E, \phi_B] = i$ , pertence a ambas as representações.

Dada a ampla generalidade das superfícies e linhas onde se define os fluxos, se partirmos dos comutadores locais da representação  $\vec{A}$ , e passando numa etapa intermediária pelos comutadores de fluxo, nós então podemos deduzir os comutadores da representação  $\vec{T}$ . Isso quer dizer que, o campo  $\vec{T}$  é um campo completo, que pode ser introduzido explicitamente na eletrodinâmica, quando for necessário.

Em várias oportunidades, nas seções anteriores, já tratamos o caso em que o fluxo elétrico é definido numa superfície aberta. Passaremos agora ao estudo de sistemas em que essa variável é definida em superfícies fechadas.

Consideramos então uma superfície fechada  $S$ , como aquela mostrada na figura 12, e uma linha  $\Gamma$ , que termina no ponto  $\vec{x}$ .

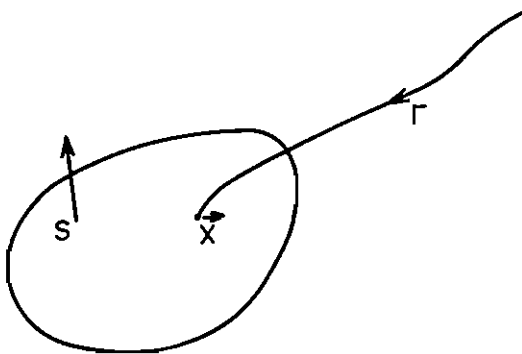


Figura 12: Superfície e linha aberta onde são definidos os fluxos. Topologia apropriada para a quantização do fluxo de Coulomb.



Definimos o fluxo elétrico através de  $S$

$$\phi_{E,S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad , \quad (35)$$

e um fluxo do tipo magnético ao longo de  $\Gamma$ ,

$$\theta_{\Gamma}(\vec{x}) = \int_{\Gamma}^{\vec{x}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad ; \quad (36)$$

e novamente, utilizando os comutadores locais da Eq.(34), podemos verificar que

$$[\phi_{E,S}(\vec{x}), \theta_{\Gamma}(\vec{x})] = -i \quad , \quad (37)$$

se  $\vec{x}$  estiver dentro de  $S$ . Mas o comutador se anula se  $\vec{x}$  estiver fora.

O campo de Coulomb é um único modo do campo elétrico, que pode ser criado centrado numa partícula. Com o comutador da Eq.(37), podemos verificar que, para qualquer superfície fechada  $S$  que contenha o ponto  $\vec{x}$  do lado de dentro, o funcional de campo<sup>16</sup>

$$C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) = \exp ie \int_{\Gamma}^{\vec{x}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (38)$$

é um auto estado do operador fluxo elétrico  $\phi_{E,S}$ , com auto valor  $e$ . No entanto, se  $\vec{x}$  estiver fora de  $S$ , então o auto valor do fluxo elétrico será nulo.

Tal procedimento implementa a quantização do campo de Coulomb. O estado  $C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x})$  descreve o campo de Coulomb de uma partícula localizada no ponto  $\vec{x}$ . A quantização foi realizada no gauge  $A_0 = 0$ .

Formalmente o expoente  $ie \theta_{\Gamma}(\vec{x})$  pode ser escrito como

$$\text{ie } \theta_{\Gamma}(\vec{x}) = i \int d^3\vec{x} e \delta(\vec{x} - \vec{y}) \int_{\Gamma}^{\vec{y}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (39)$$

Seja então  $\vec{\epsilon}_c(\vec{y}, \vec{x})$  o campo elétrico clássico no ponto  $\vec{y}$ , produzido por uma partícula localizada no ponto  $\vec{x}$ ,

$$\vec{\epsilon}_c(\vec{y}, \vec{x}) = \frac{e}{4\pi} \frac{(\vec{y} - \vec{x})}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} . \quad (40)$$

Mas, na medida em que

$$e \delta(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{\nabla}_{\vec{y}} \cdot \vec{\epsilon}_c(\vec{y}, \vec{x}) , \quad (41)$$

com a integração por partes do lado direito da Eq.(39), nós obtemos

$$\text{ie } \theta_{\Gamma}(\vec{x}) = -i \int d^3\vec{y} \vec{\epsilon}_c(\vec{y}, \vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{y}) \quad (42)$$

Assim, nós verificamos que formalmente  $C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x})$  é um auto estado do próprio campo elétrico<sup>16</sup>,

$$\vec{E}(\vec{z}) C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) = \vec{\epsilon}_c(\vec{z}, \vec{x}) C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) . \quad (43)$$

Essa equação de auto-valores relaciona-se com os procedimentos adotados por Dirac<sup>24</sup>, ao introduzir o que ele próprio denominou de elétron físico.

O comutador entre a Hamiltoniana do campo eletromagnético, dada pela Eq.(33), e o modo de Coulomb  $C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x})$  é:

$$\left[ \mathcal{H}, C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) \right] = -e \int_{\Gamma}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l} C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) \quad (44)$$

Seja  $|a\rangle$  um estado de campos elétrico e magnético bem definidos, produzidos por fontes localizadas nas fronteiras do sistema. E seja  $\vec{\epsilon}_a(\vec{x})$  o campo elétrico do estado  $|a\rangle$ , e  $\Omega_a$  sua energia. Suponhamos que  $\vec{\epsilon}_a(\vec{x})$  seja um gradiente.

Para criarmos um elétron no ponto  $\vec{x}$ , construímos o estado  $C_{\Gamma}^{\dagger} |a\rangle$ . E, com a utilização da Eq.(44), decorre que

$$\mathcal{H} C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) |a\rangle = [\Omega_a + V_a(\vec{x})] C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) |a\rangle, \quad (45)$$

onde  $V_a(\vec{x})$  é o auto-valor do operador potencial  $V_{\Gamma}(\vec{x})$ ,

$$V_{\Gamma}(\vec{x}) = - \int_{\Gamma}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (46)$$

no estado  $|a\rangle$ . e  $V_a(\vec{x})$  é a energia potencial do novo elétron no campo eletrostático  $\vec{\epsilon}_a(\vec{x})$ .

Por outro lado, o fator  $C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x})$ , no estado  $C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) |a\rangle$ , descreve o campo eletrostático do elétron que ele cria. Se, repetindo a operação, criarmos um segundo elétron no ponto  $\vec{x}'$ , então o campo elétrico do primeiro elétron,  $\vec{\epsilon}_c(\vec{y}, \vec{x})$ , vai contribuir para a formação do potencial em  $\vec{x}'$ .

A dinâmica do sistema é dada pela equação de evolução

$$i \partial_t \psi = \mathcal{H} \psi. \quad (47)$$

Logo, com a evolução do estado  $C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) |a\rangle$ , surgirá um fator de fase com a

integração do potencial no tempo

$$C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) |a\rangle \longrightarrow R(\vec{x},t) C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) |a\rangle \quad (48a)$$

onde

$$R(\vec{x},t) = \exp -ie \int^t V_a(\vec{x},t') dt' \quad (48b)$$

Portanto, em muitos casos deverá ser conveniente introduzir o modo de Coulomb através do operador  $C^{\dagger}(\mathbf{x})$ , definido como

$$\tilde{C}^{\dagger}(\mathbf{x}) = \exp -ie \int^t V dt' C_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}) \quad (49a)$$

ou

$$\tilde{C}^{\dagger}(\mathbf{x}) = \exp -ie \int^x A_{\mu} dx^{\mu} \quad (49b)$$

O tratamento do modo de Coulomb deve ser completado com a consideração de um modo magnético. Sendo  $\vec{v}$  uma velocidade inicialmente clássica, nós então, com o auxílio do campo  $\vec{T}$  definimos o modo de Ampère<sup>16</sup>

$$a_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x},\vec{v}) = \exp ie \int_{\Gamma}^{\vec{x}} (\vec{v} \times \vec{T}) \cdot d\vec{l} \quad (50)$$

O operador no expoente da fórmula (50),

$$e \int_{\Gamma}^{\vec{x}} (\vec{v} \times \vec{T}) \cdot d\vec{l} = e\vec{v} \int_{\Gamma}^{\vec{x}} \vec{T} \times d\vec{l} \quad (51)$$

pode formalmente ser escrito como

$$e \int_{\Gamma}^{\vec{x}} (\vec{v} \times \vec{T}) \cdot d\vec{l} = \int d^3\vec{y} e \delta(\vec{x} - \vec{y}) \int^{\vec{y}} (\vec{v} \times \vec{T}) \cdot d\vec{l} \quad (52)$$

E, utilizando a fórmula (41) e integrando por partes, nós obtemos

$$e\epsilon_{\Gamma}(\vec{x}, \vec{v}) = \int d^3\vec{y} \vec{B}_c(\vec{y}, \vec{x}; \vec{v}) \cdot \vec{T}(\vec{y}) \quad , \quad (53)$$

onde  $\vec{B}_c(\vec{y}, \vec{x}; \vec{v})$  é o campo magnético clássico no ponto  $\vec{y}$ , produzido por uma partícula que se move com velocidade  $\vec{v}$ , no ponto  $\vec{x}$ :

$$\vec{B}_c(\vec{y}, \vec{x}; \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{\epsilon}_c(\vec{y}, \vec{x}) = \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{v} \times (\vec{y} - \vec{x})}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \quad (54)$$

No caso do modo de Ampère a equação formal de auto-valores é a seguinte:

$$\vec{B}(\vec{z}) a_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}, \vec{v}) = \vec{B}_c(\vec{z}, \vec{x}; \vec{v}) a_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}, \vec{v}) \quad . \quad (55)$$

O comutador entre o modo de Ampère e a Hamiltoniana do eletromagnetismo é, por sua vez, dado por

$$\left[ \mathcal{H}, a_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}, \vec{v}) \right] = e \int_{\Gamma}^{\vec{x}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} a_{\Gamma}^{\dagger}(\vec{x}, \vec{v}) \quad . \quad (56)$$

Verifica-se que, nos estados em que o campo magnético é rotacional, vale a substituição

$$\int_{\Gamma}^{\vec{x}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \vec{v} \cdot \int_{\Gamma}^{\vec{x}} \vec{B} \times d\vec{l} = \vec{v} \cdot \vec{A}_{\Gamma}(\vec{x}) \quad , \quad (57)$$

onde  $\vec{A}_{\Gamma}(\vec{x})$  é a parte transversal do potencial vetor.

De sorte que nesses casos o comutador da Eq.(56) pode ser posto na forma

$$\left[ \mathcal{X}, \mathbf{a}_\Gamma^\dagger(\vec{x}, \vec{v}) \right] = e \vec{v} \cdot \vec{A}_T(\vec{x}) \mathbf{a}_\Gamma^\dagger(\vec{x}, \vec{v}) . \quad (58)$$

Em analogia com a observação feita quando do tratamento do modo de Coulomb, e se for conveniente, podemos definir o modo de Ampère através do operador estendido  $\bar{\mathbf{a}}(\vec{x}, t)$ ,

$$\bar{\mathbf{a}}^\dagger(\vec{x}, t) = \exp -ie\vec{v} \int^t \vec{A}_T dt' \mathbf{a}_\Gamma^\dagger(\vec{x}, \vec{v}) , \quad (59)$$

o qual já introduz a evolução do sistema.

O primeiro passo para construir o campo do elétron com os modos de fluxo manifestos é tomar um campo de Fermi neutro  $\psi_0(\vec{x})$ , que comuta com o campo eletromagnético. A seguir o modo magnético deve ser estendido de forma a poder acoplar-se a uma partícula relativística. Introduzimos então o operador de Ampère generalizado<sup>16</sup>

$$\mathbf{A}_\Gamma^\dagger(\vec{x}) = \exp ie \int_\Gamma^{\vec{x}} (\vec{D} \times \vec{T}) \cdot d\vec{l} , \quad (60)$$

sendo

$$\vec{D} = \int d^3 \vec{x} \vec{J}_0 \quad (61)$$

$\vec{J}_0$  é uma corrente formada com todos os campos neutros capazes de receber fluxo. Em particular ela inclui a corrente fermiônica neutra  $:\psi_0^\dagger \vec{\alpha} \psi_0:$ , onde  $\vec{\alpha}$  é o operador formado com as matrizes de Dirac  $\alpha_i$ .

Notando que

$$\mathbf{A}_\Gamma^\dagger(\vec{x}) \psi_0^\dagger(\vec{x}) \mathbf{A}(\vec{x}) = \psi_0^\dagger(\vec{x}) \mathbf{a}^\dagger(\vec{x}, \vec{\alpha}) , \quad (62)$$

nós definimos o campo do elétron como sendo

$$\psi_e^\dagger = C^\dagger A^\dagger \psi_0^\dagger, \quad (63)$$

de maneira que o estado de um elétron,

$$|k\rangle = \int d^3\mathbf{x} \psi_e^\dagger f_R |\Omega\rangle = \int d^3\mathbf{x} \psi_0^\dagger(\mathbf{x}) C^\dagger(\mathbf{x}) \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{x}, \partial) f_R(\mathbf{x}) |\Omega\rangle \quad (64)$$

contém o registro dos campos elétrico e magnético do elétron. Na expressão acima  $f_R(\mathbf{x})$  é uma função teste normalizada.

Com a finalidade de obter o valor esperado do campo magnético nesse estado, consideremos que a componente  $j$  do campo  $\vec{B}(\mathbf{x})$  é o operador  $-i \frac{\partial}{\partial T_j(\mathbf{x})}$ . Fazendo

então a passagem formal

$$-i \frac{\partial}{\partial T_j(\mathbf{x})} \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{x}, \partial) = \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{x}, \partial) \frac{e}{4\pi} \left[ \frac{\partial \times (\vec{y} - \vec{x})}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} \right]_j -i \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{x}, \partial) \frac{\partial}{\partial T_j(\mathbf{x})}, \quad (65)$$

nós obtemos a fórmula de Biot-Savart:

$$\langle k | \vec{B}(\vec{y}) | k \rangle \approx \int d^3\mathbf{x} \frac{e}{4\pi} \vec{j}_k(\mathbf{x}) \times \frac{(\vec{y} - \vec{x})}{|\vec{y} - \vec{x}|^3}, \quad (66)$$

onde a corrente  $\vec{j}_k$  é dada por  $f_k^\dagger \partial f_k$ .

O campo de Coulomb da partícula no estado  $|k\rangle$  é, por seu turno,

$$\langle k | \vec{E}(\vec{y}) | k \rangle = \int d^3\mathbf{x} \rho_k(\mathbf{x}) \frac{e}{4\pi} \frac{(\vec{y} - \vec{x})}{|\vec{y} - \vec{x}|^3}, \quad (67)$$

sendo  $\rho_k = f_k^\dagger f_k$ .

À primeira vista, poder-se-ia supor que as expressões acima estivessem em contradição com o princípio da causalidade local, pois aqueles são os campos instantâneos produzidos pela partícula. No entanto, essa contradição é apenas aparente, na medida em que, cada uma das fórmulas se refere apenas a um único modo de campo, e a questão da causalidade só se coloca com a consideração do campo completo. Além disso, veremos que<sup>17,24</sup>, a derivação explícita dos modos de fluxo do campo do elétron, é na verdade geradora de acoplamentos locais, envolvendo o campo eletromagnético completo.

Dados os operadores potencial e potencial vetor, e o campo do elétron que construímos, verifica-se, em ordem  $0(e)$ , os seguintes comutadores

$$\left[ V(\vec{x}), \psi_e^\dagger(\vec{y}) \right] = \psi_e^\dagger(\vec{y}) \frac{e}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \quad e \quad (68a)$$

$$\left[ \vec{A}(\vec{x}), \psi_e^\dagger(\vec{y}) \right] = \psi_e^\dagger(\vec{y}) \frac{e}{4\pi} \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{y}-\vec{x}|}. \quad (68b)$$

O primeiro comutador já pertence à teoria de Dirac<sup>24,50</sup>. O outro é uma consequência da definição do campo do elétron com o modo de campo magnético explícito.

Nas reações das partículas elementares, o elétron e seu neutrino compartilham um mesmo número leptônico conservado, mas no entanto eles diferem no fato do neutrino não produzir fluxo eletromagnético e nos valores das massas. Logo, supondo que a diferença entre as massas dessas duas partículas seja de origem eletromagnética, é natural explorar a possibilidade de utilizar o campo  $\psi_0$  para descrever o neutrino do elétron.

Isso será feito na continuação da tese, quando discutirmos um mecanismo local de transferência de fluxo, que permite descrever a interação local entre o campo do elétron  $\psi_e$  e o fermion original  $\psi_0$ . E portanto, para que surjam vértices acoplando  $\psi_e^\dagger$  e  $\psi_0$ , é necessário construir um campo bosônico carregado, que possa receber o fluxo do elétron.



Com essa finalidade, nós introduzimos um campo vetorial complexo  $\vec{Y}(\vec{x})$ , como numa combinação linear complexa dos campos reais  $\vec{A}(\vec{x})$  e  $\vec{T}(\vec{x})$ :

$$\vec{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{A} - i\vec{T}) ; e \vec{Y}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{A} + i\vec{T}) , \quad (69a)$$

com as relações inversas

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{Y} + \vec{Y}^*) ; e \vec{T} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\vec{Y}^* - \vec{Y}) . \quad (69b)$$

Combinações complexas dos campos eletromagnéticos reais podem ter um papel na descrição dos efeitos físicos, na medida em que o espaço de Hilbert onde os campos físicos operam permite misturas complexas.

O campo complexo  $\vec{Y}$  ainda é um campo neutro, pois ele não contém os fatores de fluxo  $C$  e  $A$ .

Para que um campo bosônico seja capaz de receber fluxo, é necessário construir correntes conservadas com suas componentes. Logo, esse campo deve ser complexo.

Dadas as relações entre os campos  $\vec{A}, \vec{T}, \vec{E}$  e  $\vec{B}$ , a Hamiltoniana das componentes transversais do campo eletromagnético pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[ \dot{\vec{Y}}^* \dot{\vec{Y}} + (\vec{\nabla} \times \vec{Y}^*) (\vec{\nabla} \times \vec{Y}) \right] . \quad (70)$$

Os comutadores entre componentes dos campos completos  $\vec{Y}$  e  $\vec{Y}^*$  são dados por

$$\left[ Y_j(\vec{x}), Y_k^*(\vec{y}) \right] = i\delta_{jk} \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (71)$$

Como  $\vec{A}$  e  $\vec{T}$  não são variáveis independentes, então  $\vec{Y}$  e  $\vec{Y}^*$  também não o são. Contudo, dos comutadores acima, e da própria definição do campo  $\vec{Y}$ , nós concluímos que  $Y_j(\vec{x})$  é um campo completo de dimensão um, correspondendo a um grau de liberdade.

Incluindo as componentes longitudinais dos campos, e em analogia com a definição

do operador potencial do campo  $\vec{E}$ , podemos introduzir um par de operadores potenciais complexos:

$$U(\vec{x}) = - \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E} + i\vec{B}) \cdot d\vec{l} ; e U(\vec{x}) = - \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E} - i\vec{B}) \cdot d\vec{l} . \quad (72)$$

A Lagrangiana dos campos  $\vec{Y}$  e  $U$ , que é consistente com a Hamiltoniana transversal da Eq.(70), será então a seguinte:

$$\mathcal{L}(\vec{Y}, U) = \frac{1}{2} \left[ \dot{\vec{Y}}^* \dot{\vec{Y}} + \vec{Y}^* \nabla^2 \vec{Y} \right] - \frac{1}{2} \left[ \dot{U}^* \dot{U} + U^* \nabla^2 U \right] . \quad (73)$$

O procedimento seguinte é definir o campo vetorial carregado  $\vec{W}^{\mp}$ :

$$\vec{W}^{-} = A C \vec{Y} \quad e \quad \vec{W}^{+} = \vec{Y}^* C^{\dagger} A^{\dagger} . \quad (74)$$

Como mostraremos na sequência do trabalho, o campo  $\vec{W}$ , que contem fatores de fluxo, vai absorver os fluxos do elétron, nos vértices de interação onde surgem um elétron e um neutrino.

Invertendo a relação da Eq.(74), nós obtemos  $\vec{Y}$  em termos de  $\vec{W}^{-}$ :  $\vec{Y} = C^{\dagger} A^{\dagger} \vec{W}^{-}$ . A substituição de  $\vec{Y}$  por  $C^{\dagger} A^{\dagger} \vec{W}^{-}$ , e de  $\vec{Y}^*$  por  $\vec{W}^{+} C A$ , na Lagrangiana (73), produz uma Lagrangiana efetiva  $\mathcal{L}(\vec{W})$  para descrever a dinâmica do campo  $\vec{W}$ .

$\mathcal{L}(\vec{W})$  é semelhante à Lagrangiana dos campos de gauge<sup>51,53</sup>, especialmente no fato de  $\mathcal{L}(\vec{W})$  também conter termos quárticos:  $A_1^2 \vec{W}^{+} \vec{W}^{-}$ ,  $V^2 \vec{W}^{+} \vec{W}^{-}$  etc.  $\mathcal{L}(\vec{W})$  deve ser estendida para que a dinâmica efetiva desse campo esteja conforme as exigências da invariância relativística.

Logo, o campo  $\vec{W}^{\mp}$  tem muitas das propriedades dos campos de gauge. No entanto o  $\vec{W}^{\mp}$  não é um campo de constituição nova, na medida em que ele é formado, através dos campos  $\vec{A}$  e  $\vec{T}$ , pelos próprios campos originais do eletromagnetismo  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Com a construção do campo  $\vec{W}$  não se introduziu nenhum grau de liberdade adicional na teoria.

Os valores esperados no vácuo de produtos de componentes dos campos  $\vec{A}$  e  $\vec{T}$ , a tempos diferentes, obedecem as seguintes relações:

$$G_{ij}(x_1-x_2) = \langle T_i(x_1) T_j(x_2) \rangle = \langle A_i(x_1) A_j(x_2) \rangle, \text{ e} \quad (75a)$$

$$K_{ij}(x_1-x_2) = \langle T_i(x_1) A_j(x_2) \rangle = - \langle A_i(x_1) T_j(x_2) \rangle. \quad (75b)$$

A inversão de sinal na última fórmula ocorre por que  $\langle B_i(x_1) A_j(x_2) \rangle = \langle E_i(x_1) T_j(x_2) \rangle$ , que é justamente o que obtemos se derivarmos a Eq.(75b) com respeito a  $t_1$ .

A partir deste ponto analisamos um conjunto de procedimentos e deduções, que permitem construir uma teoria dos vértices das interações fracas, baseada na quantização dos fluxos eletromagnéticos.

Tratamos a questão do ponto de vista da Hamiltoniana do sistema, considerando que sempre será possível escrever uma Lagrangiana correspondente. É somente na Lagrangiana que se manifestam explicitamente todas as simetrias do problema, em particular a invariância de Lorentz.

Nosso critério é que, a interação local é gerada através da derivação dos modos de fluxo do campo, no termo cinético da Hamiltoniana. Esse critério é consistente com o tratamento de Dirac do campo de Coulomb do elétron<sup>24</sup>.

Para ilustrar o procedimento de Dirac, consideremos primeiro que o campo do elétron fosse vestido apenas com o modo de Coulomb, mas sem o modo de Ampère:

$$\psi_e = \psi_0 C.$$

Observando então que

$$-i \partial \cdot \vec{\nabla} C(\vec{x}) = C(\vec{x}) (-e \partial \cdot \vec{A} - i \partial \cdot \vec{\nabla}) , \quad (76)$$

concluimos que o termo gradiente da Hamiltoniana do campo  $\psi_e$ , pode ser escrito como

$$\int d^3\vec{x} \psi_e^\dagger (-i \partial \cdot \vec{\nabla}) \psi_e = \int d^3\vec{x} \left\{ \psi_0^\dagger -i \partial \cdot \vec{\nabla} \psi_0 - e \psi_0^\dagger \partial \cdot \vec{A} \psi_0 \right\} , \quad (77)$$

onde vemos surgir a Hamiltoniana de interação da Eletrodinâmica Quântica,  $-e \vec{J} \cdot \vec{A}$ , correspondente ao gauge  $A_0 = \text{constante}$ .

Assim Dirac<sup>24</sup> estabeleceu a conexão entre o fluxo elétrico do elétron, e a forma da interação local da Eletrodinâmica Quântica.

E portanto, a interpretação é que<sup>24</sup>, na teoria de espalhamento, o movimento do elétron é descrito pela dinâmica do campo  $\psi_0$ , que descreve o núcleo da partícula, em torno da qual condensou o modo de Coulomb.

O passo seguinte será incluir o modo de Ampère. Introduzimos então um campo auxiliar  $\tilde{\psi}_0$ , subdividido em dois conjuntos de modos, fazendo  $\tilde{\psi}_0 = \psi_E + \psi_N$  com

$$\psi_E = \sum_{k_E} a_{k_E} f_{k_E} , \text{ e } \psi_N = \sum_{k_N} a_{k_N} f_{k_N} . \quad (78)$$

O conjunto  $\{k_E\} \oplus \{k_N\}$  é um conjunto completo de modos, e  $k_E \neq k_N$ . De maneira que, evidentemente, nem  $\psi_E$ , nem  $\psi_N$ , são campos completos.

A especificação do conjunto  $\{k_E\}$  ou  $\{k_N\}$ , ao qual pertence um determinado modo  $k_i$ , vai depender do particular processo que se queira tratar. Os modos constituintes de  $\psi_E$  descreverão o movimento dos elétrons do sistema, enquanto que aqueles de  $\psi_N$  descreverão o movimento dos neutrinos.

Para tratar as interações elétron–elétron, neutrino–neutrino, e elétron–neutrino, conjuntamente, nós então primeiro definimos um segundo campo auxiliar  $\psi^{17}$ :

$$\psi = \psi_E C A^{1/2} + \psi_N A^{-1/2} , \quad (79)$$

com as seguintes observações:

(i) A diferença de fluxo entre os estados aniquilados pelo produto  $\psi_E C A^{1/2}$ , e aqueles aniquilados por  $\psi_N A^{-1/2}$ , é justamente a diferença de fluxo entre os estados de um elétron e de um neutrino, ou seja,  $C^\dagger A^\dagger$ .

(ii) Por causa dos fatores de fluxo, a completeza do campo  $\psi$  é apenas aproximada,

$$\left\{ \psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y}) \right\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) + O(e) . \quad (80)$$

Isso, no entanto, não representa dificuldade, na medida em que, no presente contexto, estamos construindo a Hamiltoniana da teoria até a ordem  $O(e)$ . Buscamos formular uma teoria que permita calcular os processos principais de espalhamento na aproximação árvore.

(iii) A definição do campo dada pela Eq.(79) é uma particularização que corresponde ao ângulo  $\theta_w = 30^\circ$ . Mantendo sempre a mesma diferença de fluxo entre o elétron e o neutrino, poder-se-ia ainda construir o campo  $\psi$  de maneira diferente; o que produziria outro valor para o ângulo  $\theta_w$ .

Supomos então que a dinâmica do sistema elétron–neutrino seja determinada pela derivação dos modos de fluxo, no termo gradiente da Hamiltoniana do campo  $\psi$ .

$$-i \int d^3\vec{x} \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (81)$$

Os operadores que aparecem na definição de  $\psi$  são dados por

$$\mathbf{a}^{-1/2} = \exp \frac{ie}{2} \int^{\vec{x}} (\vec{\alpha} \times \vec{T}) \cdot d\vec{l} \quad , \quad e \quad (82)$$

$$C \mathbf{a}^{1/2} = \exp \left\{ \frac{ie}{2} \int^{\vec{x}} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \frac{ie}{2} \int^{\vec{x}} (\vec{\alpha} \times \vec{T}) \cdot d\vec{l} \right\} .$$

Da derivação desses operadores na expressão (81) resulta que

$$-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} (\mathbf{a}^{-1/2}) = \mathbf{a}^{-1/2} (ei \gamma^5 \vec{\alpha} \cdot \vec{T} - i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + O(e^2) \quad (83)$$

$$-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} (C \mathbf{a}^{-1/2}) = C \mathbf{a}^{-1/2} (-e \vec{\alpha} \cdot \vec{A} - ei \gamma^5 \vec{\alpha} \cdot \vec{T} - i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + O(e^2) .$$

Para obter as fórmulas acima utiliza-se a relação  $\dot{\vec{\alpha}} \times \vec{\alpha} = 2i \gamma^5 \vec{\alpha}$ . Combinando portanto as Eqs.(81) e (83) com a definição do campo vetorial carregado  $\vec{W}^{\mp}$ , dada pela Eq.(74), nós obtemos os termos de acoplamento local entre as partículas

$$\kappa_{ee} = -e \psi_E^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{A} \psi_E - ie \psi_E^\dagger \gamma^5 \vec{\alpha} \cdot \vec{T} \psi_E \quad , \quad (84)$$

$$\kappa_{\nu\nu} = ie \psi_N^\dagger \gamma^5 \vec{\alpha} \cdot \vec{T} \psi_N \quad , \quad e$$

$$\kappa_{\nu e} = \frac{e}{\sqrt{2}} \psi_E^\dagger (1-\gamma^5) \vec{\alpha} \cdot \vec{W}^- \psi_N + \text{h.c.}$$

Na derivação da Hamiltoniana de interação  $\kappa_{\nu e}$ , tivemos que supor que apenas componentes left-handed do campo original  $\vec{\psi}_0$ , entram na composição de  $\psi_N$ , i.e.,  $(1+\gamma^5)\psi_N = 0$ .

Na Hamiltoniana  $\kappa_{\nu e}$  reconhecemos o acoplamento da corrente carregada das interações fracas, com o ângulo  $\theta_w = 30^\circ$ .

$\chi_{\nu\nu}$ , por sua vez, corresponde a um acoplamento pseudo-vetorial, que não é simétrico por conjugação de carga, o mesmo ocorrendo com o segundo termo de  $\chi_{ee}$ . A natureza pseudo-vetorial dessas interações é consistente com o fato do campo  $\vec{T}$  ser formalmente um pseudo-vetor, na medida em que  $\dot{\vec{T}} = \vec{B}$ .

A quebra da conjugação de carga está em parte relacionada com a mistura de representações feita na definição do campo auxiliar  $\psi$ . Recorde-se a esse respeito que cada um dos conjuntos de modos,  $\{f_{k_E}\}$  ou  $\{f_{k_N}\}$ , é separadamente incompleto. E a interação pode transferir a partícula de um sub espaço para o outro, ou de uma representação, para outra. Isso produz uma forma amena de instabilidade, que explica a não hermiticidade formal da Hamiltoniana.

Notamos que, por causa da relação (75b), então, por exemplo, no espalhamento  $e\nu \rightarrow e\nu$ , não há contribuição de propagadores mistos do tipo  $\langle A_i(x_1) T_j(x_2) \rangle$ .

Dado o estado de um elétron,

$$\int d^3\vec{x} \psi_E^\dagger C^\dagger (A^\dagger)^{1/2} \tilde{f}_p |a\rangle = \int d^3\vec{x} \psi_e^\dagger \tilde{f}_p |a\rangle, \quad (85)$$

então, na teoria de espalhamento, e somente aqui, estamos interessados no movimento do campo auxiliar  $\psi_E^\dagger(\tilde{\psi}_0)$ , que descreve o núcleo da partícula onde condensa o modo de Coulomb.

No entanto, no tratamento do movimento de  $\psi_E^\dagger$ , o importante são os estados do tipo

$$\int d^3\vec{x} \psi_E^\dagger \tilde{f}_p |a\rangle. \quad (86)$$

Logo, os fatores de fluxo de  $\psi_E^\dagger$  devem ser absorvidos pela própria função de onda  $\tilde{f}_p$ , formando a função de onda  $f_p$ :

$$C^\dagger(A^\dagger)^{1/2} \tilde{f}_p = f_p, \text{ ou } \tilde{f}_p = C A^{1/2} f_p. \quad (87)$$

É por isso que, na definição do campo auxiliar  $\psi$ , na Eq.(79), surge o termo  $\psi_E C A^{1/2}$ . A interpretação é que, os fatores de fluxo  $C A^{1/2}$  estão vestindo de fluxo as funções de onda  $f_p$ , contidas em  $\psi_E$ .

A correção  $O(e^2)$  nas fórmulas (83) é devida à não comutatividade entre o modo de Ampère e as matrizes  $\alpha_i$ . O termo mais importante nessa correção contém duas potências do campo eletromagnético.

Na teoria de Weinberg–Salam<sup>25,26</sup>, o elétron e o neutrino se acoplam, com acoplamento pseudo–vetorial, ao boson vetorial neutro  $\vec{Z}^0$ . Portanto, devemos identificar o campo vetorial neutro  $\vec{T}$ , como sendo o campo da partícula  $Z^0$ .

Pode-se ter uma concordância razoável entre esta teoria e a teoria de Weinberg–Salam, no que se refere a predições de valores de seções de choque, tomando  $\theta_w \approx 27^\circ$ , e definindo os campos do elétron e do neutrino como sendo  $\psi_E C A^{1/2-\epsilon}$  e  $\psi_N A^{1/2-\epsilon}$  respectivamente, com  $\epsilon \approx 0,05$ . Essa alteração deve ser acompanhada de uma modificação correspondente na definição do campo  $\vec{Y}$ , onde o ângulo de mistura entre  $\vec{A}$  e  $\vec{T}$  deve ser ligeiramente diminuído.

Na referência (16), não se fazia a subdivisão a priori do campo fermiônico em modos do elétron e do neutrino. O procedimento lá consistia em reescrever a mesma forma Hamiltoniana, explicitando este ou aquele fator de fluxo, conforme o processo que se quisesse tratar. Naquela formulação também seria possível construir uma teoria dos vértices das interações fracas equivalente a esta que aqui discutimos, gerando os termos de acoplamento local através da derivação dos operadores de fluxo, e produzindo as mesmas amplitudes de espalhamento. Tal procedimento, muito embora fosse mais elegante, tem o inconveniente de gerar o acoplamento eletromagnético com sinal trocado – resultado que, mesmo não introduzindo alteração nos valores das amplitudes de espalhamento, nós



preferimos evitar, para ficarmos de acordo com a tradição.

Nosso método sugere que as formas de interação de uma dada partícula são determinadas em parte pelos seus fluxos. E isso é consistente com o ponto de vista da teoria da matriz-S<sup>54</sup>, e do método LSZ<sup>55,56</sup>, que enfatizam a precedência das propriedades dos estados, sobre a Hamiltoniana, na determinação da evolução do sistema. A Hamiltoniana nesse caso deveria ser considerada uma forma auxiliar.

Devemos escrever algumas palavras sobre a questão da geração de massa para os campos  $\vec{W}^\pm$  e  $\vec{Z}_0$ . Especulamos que, no regime de curta distância característico das interações fracas, algumas componentes do campo eletromagnético podem eventualmente adquirir um valor esperado diferente de zero, para a seguir, através dos termos quárticos da Lagrangiana efetiva do campo  $\vec{W}$ , fornecer uma massa para esse campo, de maneira análoga ao mecanismo de Higgs<sup>57</sup>.

A esse respeito ainda observamos que, nos auto-estados de fluxo da Eq.(2), o valor esperado de  $\vec{A}^2(x)$  não é nulo, e notamos que, em princípio, estados análogos podem ser excitados durante a interação de duas partículas elementares.

A lei de Faraday entra na Eletrodinâmica, não como uma equação de movimento, mas como uma relação estrutural:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_T$  e  $\vec{E}_T = -\dot{\vec{A}}_T$ .

Se na Eletrodinâmica Clássica, isso é conveniente, na Eletrodinâmica Quântica, na nossa opinião, esse fato passa a ser uma fonte de dificuldades.

Nas teorias quânticas, as equações de movimento são relações que aceitam flutuações. Mas, o mesmo não ocorre com as relações estruturais. De maneira que, a forma convencional de introduzir a lei de Faraday na Eletrodinâmica Quântica, acaba por produzir uma teoria excessivamente rígida.

Portanto, nós achamos que, a inclusão simultânea do campo  $\vec{T}$ , como um segundo campo auxiliar não independente, serve para contornar, pelo menos em parte, essas dificuldades.

Num artigo recente<sup>58</sup>, nós estudamos a covariância do propagador do fóton, na formulação das integrais de trajetória de Feynman.

Iniciando a teoria com apenas os três graus de liberdade que já são suficientes para construir os fluxos da teoria,  $(\vec{E}(\vec{x}), \vec{A}(\vec{x}))$ ; nós então apresentamos uma seqüência de procedimentos, que nos permitiram obter o propagador do fóton.

Observamos que a integração no campo longitudinal se desdobra em dois setores de fase estacionária. No primeiro deles é gerado o propagador longitudinal tipo espaço  $\langle \vec{A}_L(\vec{x}_1) \vec{A}_L(\vec{x}_2) \rangle$ . No outro setor de integração funcional surge o propagador tipo tempo  $\langle V(x_1) V(x_2) \rangle$ .

A covariância, que resultou do próprio processo de quantização, foi então verificada com a constatação da ocorrência de uma troca de sinal no propagador tipo tempo, relativamente ao sinal dos propagadores do tipo espaço.

## V. CONCLUSÕES

Nesta parte final queremos tecer algumas considerações sobre estudos teóricos preliminares, a respeito de outros aspectos da quantização de fluxo.

O primeiro deles se refere à construção de uma teoria dos operadores de fluxo definidos através de integrais de linha, como os operadores  $\theta_{\Gamma}(\vec{x})$  e  $V_{\Gamma}(\vec{x})$ , dados pelas Eqs. (36) e (46) respectivamente.

A linha  $\Gamma$ , na definição do operador  $\lambda_{\Gamma}(\vec{x}) = \int_{\Gamma}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ , é uma linha genérica; e a interpretação formal é que: (i) num estado onde o operador  $\vec{F}$  é um gradiente bem definido  $\vec{F}_c$ ,  $\lambda_{\Gamma}(\vec{x})$  terá como auto-valor a função  $f(\vec{x})$ , tal que  $\vec{\nabla} f = \vec{F}_c$ ; e (ii) num estado genérico, no entanto,  $\lambda_{\Gamma}(\vec{x})$  será sempre tal que  $\vec{\nabla} \lambda = \vec{F}$ .

Para possibilitar a realização de desenvolvimentos algébricos, é conveniente introduzir uma forma explícita  $\lambda(\vec{x})$ , para o operador de linha  $\lambda_{\Gamma}(\vec{x})$ . E essa forma é escolhida segundo o critério de que comutadores locais envolvendo  $\lambda(\vec{x})$  sejam consistentes com os comutadores de fluxo.

Dados um ponto  $\vec{x}$  e um campo  $\vec{F}(\vec{x})$ , então o símbolo de integração  $\int_{\Gamma_x}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$  representa uma integral de linha sobre um caminho paralelo ao eixo  $\vec{x}$ . Analogamente definimos as integrais  $\int_{\Gamma_y}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$  e  $\int_{\Gamma_z}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ .

O operador de ponto  $\theta(\vec{x})$ , associado a  $\theta_{\Gamma}(\vec{x})$ , é dado por

$$\theta(\vec{x}) = \frac{1}{3} \left[ \int_{\Gamma_x}^{\vec{x}} + \int_{\Gamma_y}^{\vec{x}} + \int_{\Gamma_z}^{\vec{x}} \right] \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad . \quad (88)$$

Partindo então dos comutadores locais da Eq.(34a) podemos deduzir o comutador

$$\left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}_1), \theta(\vec{x}_2) \right] = -i \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) , \quad (89)$$

que, após integração sobre o volume,  $\int d^3\vec{x}_1$ , reproduz o comutador de fluxo da Eq.(37).

Se, de maneira análoga, introduzirmos o operador de ponto do potencial  $V(\vec{x})$ , representando  $V_{\Gamma}(\vec{x})$ , podemos verificar o comutador

$$\left[ V(\vec{x}_1), \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}_2) \right] = i \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) . \quad (90)$$

A derivação dos operadores de fluxo assim representados deve ser feita de forma que, por exemplo,

$$\partial_x V(\vec{x}) = \frac{1}{3} \left[ E_x + \int_{\Gamma_y}^{\vec{x}} \partial_x E_y d_y + \int_{\Gamma_z}^{\vec{x}} \partial_x E_z d_z \right] . \quad (91)$$

Vejamos o que ocorre quando esse operador é aplicado num estado de campo eletrostático. Sendo  $\vec{\varepsilon}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} U$  um campo eletrostático clássico, e se na equação acima substituirmos  $\vec{E}$  por  $\vec{\varepsilon}$ , e  $V$  por  $U$ , então, consistentemente, a equação continua válida.

Com essa representação explícita dos operadores de ponto, o modo de Coulomb poderá ser escrito como

$$C^\dagger(\vec{x}) = \exp \frac{ie}{3} \left[ \int_{\Gamma_x}^{\vec{x}} + \int_{\Gamma_y}^{\vec{x}} + \int_{\Gamma_z}^{\vec{x}} \right] \vec{A} \cdot d\vec{l} . \quad (92)$$

Devido à completeza do campo eletromagnético, pode-se explorar a possibilidade de excitar outros modos de longo alcance, ortogonais ao modo de Coulomb, mas que também se comportam a longa distância como  $1/r^2$ , só que com dependência angular.

Tomemos as três funções de onda seguintes

$$f_i(r, x_i) = \begin{cases} \eta \frac{x_i}{R^3}, & \text{para } r < R \\ \eta \frac{x_i}{r^3}, & \text{para } r > R \end{cases} \quad (93)$$

onde  $i = 1, 2, 3$  e  $\eta = 5R/8\pi$  é uma constante de normalização.

Na região  $r \leq R$ , as funções  $f_i(r, x_i)$  poderiam ser diferentes daquelas dadas na Eq.(93). O importante, para nossos propósitos aqui, é o comportamento dessas funções para valores grandes de  $r$ .

Sendo  $\epsilon_k$ , onde também  $k = 1, 2, 3$ , o vetor unitário na direção  $k$ , e sendo  $\{a_{ik}\}$  um conjunto de nove variáveis dinâmicas, com as três funções  $f_i$  podemos então construir nove modos de longo alcance do par canônico potencial vetor-campo elétrico:

$$\vec{A}_{ik} = a_{ik} f_i \epsilon_k ; \text{ e } \vec{E}_{ik} = -\dot{a}_{ik} f_i \epsilon_k , \quad (94)$$

$a_{ik}$  e  $\dot{a}_{ik}$  sendo tais que  $[a_{ik}, \dot{a}_{mn}] = i \delta_{im} \delta_{kn}$ .

Introduzindo esses modos na Hamiltoniana do campo eletromagnético,

$$\frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[ (\dot{\vec{A}})^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right] , \quad (95)$$

é conveniente transformarmos as variáveis dinâmicas para que os nove modos desacoplem entre si. Uma representação apropriada é dada em termos das variáveis  $c$ ,  $b_r$ ,  $d_r$ , e  $\lambda_i$ , definidas como

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_{11} + a_{22} + a_{33}) , \quad (96a)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ a_{33} - \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right] ,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{11} - a_{22}) ,$$

e sendo  $k \neq i, j$ , e  $i \neq j$ , as variáveis  $b_R$  e  $d_R$  são as seguintes:

$$b_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{ij} + a_{ji}) \quad (96b)$$

$$d_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{ij} - a_{ji}) .$$

A variável  $\hat{c}$  corresponde ao modo de Coulomb,

$$\vec{E}_{\text{Coulomb}} = \sum_{i=1}^3 \hat{a}_{ii} f_i \epsilon_i \underset{(r>R)}{=} \eta \hat{c} \frac{\hat{x}}{r^3} , \quad (97)$$

e as outras correspondem a modos ortogonais ao campo de Coulomb.

Na Hamiltoniana do sistema de nove modos,

$$H = H_c^* + \sum_{k=1}^2 H_\lambda^k + \sum_{i=1}^3 H_b^i + \sum_{j=1}^3 H_\alpha^j , \quad (98)$$

$H_c^*$ , que é proporcional ao quadrado do campo elétrico, constante  $\times \hat{c}^2$ , corresponde ao modo de Coulomb.

As Hamiltonianas parciais de cada um dos outros oito modos são osciladores harmônicos, cujas frequências correspondentes são

$$\omega_\lambda = \omega_b = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{R} \quad ; \quad e \quad \omega_d = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{R} . \quad (99)$$

Para uma partícula de carga  $e$ , a energia do campo de Coulomb é da ordem de  $e^2/8\pi R$ ; e concluímos então que as energias necessárias para excitar os outros modos de longo alcance em torno dessa partícula seriam aproximadamente 200 a 300 vezes maiores que a energia do campo de Coulomb do sistema.

Ao classificar os estados, observamos que, na dinâmica dos nove modos, o campo de Coulomb comuta com o momento angular generalizado

$$\int d^3\vec{x} \left[ \vec{E} \times \vec{A} + \sum_i E_i (\vec{x} \times \vec{v}_i) A_i \right] . \quad (100)$$

Levando em conta que, modos de longo alcance podem ser introduzidos através de operadores de fluxo, ter-se-ia ainda que estudar em que circunstâncias esses outros oito modos poderiam eventualmente se acoplar a correntes de partículas.

Nesta tese, tanto o método de quantização de fluxo em orbitais quasi-unidimensionais, quanto à teoria do efeito Hall quantizado, foram, em determinados pontos, aperfeiçoados em comparação com o conteúdo das referências (1) e (9). Essas inovações também constam de um artigo recente do autor<sup>59</sup>.

## REFERÊNCIAS

1. I. Ventura, "*Macroscopic Theory of the Quantized Hall Effect*", preprint (1984); versão revisada (1985); versão expandida *Rev. Bras. Fis.* **19**, nº1, 45 (1989).
2. P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **A133**, 60 (1931); *Phys. Rev.* **74**, 817 (1948).
3. P.A.M. Dirac, "*Directions in Physics*", John Wiley & Sons (1978).
4. F. London, "*Superfluids*", Vol.I, Dover Publications, New York (1961).
5. N. Byers e C.N. Yang, *Phys. Rev. Letters* **7**, 46 (1961).
6. L. Onsager, *Phys. Rev. Letters* **7**, 50 (1961).
7. B.S. Deaver e W.M. Fairbank, *Phys. Rev. Letters* **7**, 43 (1961).
8. R. Doll e M. Näbauer, *Phys. Rev. Letters* **7**, 51 (1961).
9. M. Simões e I. Ventura, *Rev. Bras. Fis.* **19**, nº1, 58 (1989).
10. K. von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, *Phys. Rev. Letters* **45**, 494 (1980).
11. D.C. Tsui, H.L. Störmer e A.C. Gossard, *Phys. Rev. Letters* **48**, 1159 (1982).
12. A.B. Fowler, F.F. Fang, W.E. Howard, e P.J. Stiles, *Phys. Rev. Letters* **16**, 901 (1966).
13. L.V. Shubnikov e V. de Haas, *Leiden Comm. Kamerlingh Onnes Lab*, nº207, 207a, 210a, 210b (1930).
14. F. Stern e W.E. Howard, *Phys. Rev.* **163**, 816 (1967).
15. J.R. Schrieffer, in "*Semiconductor Surface Physics*", ed. R.H. Kingston, University of Pennsylvania Press, Philadelphia, p.55 (1957).
16. I. Ventura, "*On the Fluxes of the Electron*", preprint (1989), submetido ao comitê organizador da Conferência "Selected Topics in Statistical Mechanics", Dubna, URSS, agosto 1989.
17. I. Ventura, "*Theory of the weak interaction vertices*", *Rev. Bras. Fis.*, a ser publicado.



18. W. Heisenberg and W. Pauli, *Zs. f. Phys.* **56**, 1 (1929); **59**, 168 (1930).
19. E. Fermi, *A. Reale Accad. Naz. Lincei* **12**, 43 (1930).
20. V. Weisskopf, *Dqn. Mat. fys. Medd.* **14**, n°6 (1936); *Phys. Rev.* **56**, 72 (1939).
21. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948); **75**, 898; **76**, 790 (1949); **82**, 664 (1951).
22. R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 749; 769 (1949); **80**, 440 (1950).
23. F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486; 1736 (1949).
24. P.A.M. Dirac, "*The Principles of Quantum Mechanics*", Clarendon Press, Oxford (1958).
25. S. Weinberg, *Phys. Rev. Letters* **19**, 1264 (1967); *Phys. Rev.* **D7**, 1068 (1973).
26. A. Salam, em "*Elementary Particles Theory*", ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksell, Stokholm (1968).
27. Y Aharonov e D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
28. L.N. Cooper, *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956).
29. J. Bardeen, L.N. Cooper e J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
30. Y. Imry, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **15**, L221 (1982).
31. P.E. Lindelof e O.P. Hansen, em "*Application of High Magnetic Field in Semiconductor Physics*", ed. G. Landwehr, Springer-Verlag (1983).
32. B.D. Josephson, *Phys. Letters* **1**, 251 (1962).
33. R.B. Laughlin, *Phys. Rev.* **B23**, 5632 (1981).
34. R.A. Webb, S. Washburn, C.P. Umbach, e R.L. Laibowitz, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2696 (1985).
35. P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **110**, 827 (1958).
36. M.J. Buckingham, *Nuovo Cimento* **5**, 1763 (1957).
37. Z.M. Galasiewicz, "*Superconductivity and Quantum Fluids*", Pergamon Press (1970).
38. M.A. Paalanen, D.C. Tsui e A.C. Gossard, *Phys. Rev.* **B25**, 5566 (1982).

39. K. von Klitzing, B. Tausendfreund, H. Obloh e T. Herzog, em "*Application of High Magnetic Fields in Semiconductors Physics*", ed. G. Landwehr, Springer—Ve(1983).
40. A.M. Chang, P. Berglund, D.C. Tsui, H.L. Störmer e J.C. Hwang, *Phys. Rev. Letters* **53**, 997 (1984).
41. E. Gornik, R. Lassing, G. Strasser, H.L. Störmer, A.C. Goddard e W. Wiegmann, *Phys. Rev. Letters* **54**, 1820 (1985).
42. W. Zawadzki e R. Lassing, *Solid State Commum* **50**, 537 (1984).
43. R. Willet, J.P. Eisenstein, H.L. Störmer, D.C. Tsui, A.C. Gossard e J.H. English, *Phys. Rev. Letters* **59**, 1776 (1987).
44. T. Ando, A. Fowler e F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).
45. B. Souillard, G. Toulouse e M. Voos, "*L'Effect Hall en Quatre Actes*", preprint da École Polytechnique, Paliseau, França (1984).
46. H.L. Störmer, "*Pictures of the Fractional Quantized Hall Effect*", Proc. Escola de Verão J.A. Swieca, eds. A.J. da Silva e C.A. Aragão de Carvalho, SBF (1985).
47. K. Otha, *Japan J. Appl. Phys.* **10**, 850 (1971).
48. T. Ando e Y. Uemura, *J. Phys. Soc. Japan* **36**, 959 (1974).
49. T. Ando, *J. Phys. Soc. Japan* **36**, 1521; **37**, 662; 1233 (1974); **51**, 3215 (1982).
50. J.D. Bjorken e S.D. Drell, "*Relativistic Quantum Fields*", Mc Graw—Hill (1965).
51. C.N. Yang e R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
52. L.D. Faddeev e A.A. Slavnov, "*Gauge Fields — Introduction to Quantum Theory*", The Benjamin/Cummings Publishing Company (1980).
53. K. Huang, "*Quark, Leptons & Gauge Fields*", World Scientific (1982).
54. W. Heisenberg, *Zs. f. Physik* **120**, 513, 678 (1942—43).
55. H. Lehmann, *Nuovo Cimento* **11**, 416 (1954).

56. H. Lehmann, K. Symanzik e W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* XI, 205 (1955); VI, 319 (1957).
57. P.W. Higgs, *Phys. Rev.* 145, 1156 (1966).
58. I. Ventura, "*On the covariance of the photon propagator*", preprint (1990), submetido à *Rev. Bras. Fis.* .
59. I. Ventura, "Notes on flux quantization and on the quantized Hall effect", *Rev. Bras. Fis.*, a ser publicado.