Universidade de São Paulo
Instituto de Física

ANALITICIDADE EM FERROMAGNETOS

E

GASES DE REDE

Domingos Humberto Urbano Marchetti

Tese de Livre–Docência submetida ao

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

São Paulo

Maio 2000

Agradecimentos

Ao Prof. João C. A. Barata pela sugestão do tema desta tese.

Aos Profs. Walter F. Wreszinski, Silvio R. Salinas, Nestor Caticha, Amélia I. Hamburger e Carla Godman pelos comentários e discussões pertinentes.

Aos meus estudantes de pós–graduação Leonardo Guidi, Cláudio Rodrigues e Roberto da Silva pela paciência.

Às bibliotecárias Fátima de Souza, Célia Vasselo e Virgínia Franceschelli por terem me poupado durante a realização desta tese.

Às secretária do Departamento de Física Geral, Dirce, Ivone e Silvana pela atenção e simpatia.

A todos os Docentes e Funcionários do IFUSP que direta e indiretamente contribuiram para esta tese. Especialmente aos Profs. Luis Carlos Gomes e Ana Regina Blak pela acomodação da carga didática.

Finalmente, ao Prof. Paulo Cordaro pelas referências sobre o Teorema de Ovsjannikov e seu acompanhamento na aplicação deste.

RESUMO A presente tese de Livre–Docência tem como escopo inserir de forma mais aprofundada o Teorema do Círculo no contexto da Teoria das Funções Analíticas desenvolvidas no final do século passado e começo deste por Laguerre, Hermite, Biehler, Phragmén, Lindelöf, Pólya, Nevanlinna e outros.
Charles M. Newman e Elliott H. Lieb e Alan D. Sokal examinaram as condições necessárias e suficientes para que uma classe de modelos de Ising generalizado satisfizesse a "propriedade de Lee–Yang". Os elementos desta classe possuem a propriedade que os zeros da função de partição, escrita na variável $h = \ln z$, distribuem–se sobre o eixo imaginário puro. Mostraremos que a subclasse P_n^* das funções inteiras de Hermite–Biehler confunde–se com as propriedades de Lee–Yang.
As conclusões a serem extraídas podem ser resumidas pela seguinte frase: se μ^n denota a medida de equilíbrio de um ferromagneto (ou gás de rede) generalizado, com n graus de liberdade, então a função característica Z^n de μ^n é um elemento da subclasse P_n^*.
A mais inovadora proposta desta tese está relacionada com a abordagem do Teorema de Lee–Yang por métodos aplicados às equações diferenciais.

Índice

1
Introdução

Em 1952, T. D. Lee e C. N. Yang reformularam, em dois artigos entitulados "Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions" [LY1, LY2], a teoria de condensação para fluídos. O primeiro, "Theory of Condensation", mostra como o conhecimento da distribuição dos zeros da função de partição grande canônica permite descrever corretamente a equação de estado em ambas as fases, líquida e gasosa, do fluído. No segundo, "Lattice Gas and Ising Model", a teoria de condensação é ilustrada por um gás de rede formalmente equivalente ao modelo de Ising ferromagnético. Neste último, os autores demonstraram com o rigor de um exímio matemático, que todos os zeros da função de partição Ξ na variavel z [1] localizam-se no círculo unitário do plano complexo.

O parâmetro z quantifica a energia necessária para introduzir uma partícula ao sistema de volume V e portanto, somente o eixo real positivo do plano complexo tem sentido Físico. A pressão p_V e a densidade ρ_V do sistema estão relacionados com a função de partição pelas expressões

$$\beta p_V = V^{-1} \ln \Xi_V$$

e

$$\rho_V = \frac{\partial}{\partial h} \left(V^{-1} \ln \Xi_V \right)$$

onde $\beta = 1/K_B T$ é o inverso da temperatura com $K_B = 1.3806568 \times 10^{-23} \mathrm{JK}^{-1}$ a constante de Boltzmann. No limite termodinâmico, $|V| \to \infty$, p_V converge para uma função p contínua e monotônica crescente em z.[2] Além disso, se $D \in \mathbb{C}$ for uma região contendo um segmento do eixo real positivo tal que $\Xi_V(z)$ não se anula para todo V

---

[1] $z = e^h$, onde h é proporcional ao campo magnético do modelo de Ising associado.

[2] Independentemente da forma de V contanto que sua superfície não cresça mais rápido que $|V|^{3/2}$.

finito, então p_V converge para uma função analítica, regular em D, e

$$\rho = \lim_{|V|\to\infty} \frac{\partial}{\partial h}\left(V^{-1}\ln \Xi_V\right) = \frac{\partial}{\partial h}\lim_{|V|\to\infty}\left(V^{-1}\ln \Xi_V\right) = \beta\frac{\partial p}{\partial h} \tag{1.1}$$

é uma função monotona decrescente em z no intervalo do eixo real contido em D. Equação (1.1) define a equação de estado de uma isoterma.

Em [LY1], Lee–Yang descrevem um cenário no qual os zeros de Ξ_V invadem, quando $|V| \to \infty$, o eixo real positivo em dois pontos z_1 e z_2, dividindo–o, desta forma, em três intervalos disjuntos, I_1, I_2 e I_3. Para cada intervalo I_j, existe uma vizinhança $D_j \in \mathbb{C}$ que o contém, tal que p_V converge para uma função analítica e regular em D_j, correspondendo a uma das fases puras do sistema: gasosa, líquida ou sólida. No eixo real, a pressão p é contínua nos pontos z_1 e z_2, mas sua derivada possue em geral uma descontinuidade. O gráfico de p como função de ρ (equação de estado) nesta situação, é, como de fato deveria ser, monotona crescente com dois intervalos constantes devido as descontinuidades de ρ nos referidos pontos.

O impacto causado por Lee–Yang foi em grande parte devido a simplicidade e generalidade de sua teoria de condensação. Porém o maior crédito coube ao famoso Teorema do Círculo. O fato da função de partição ter seus zeros distribuídos sobre o círculo unitário causou surpresa até mesmo aos próprios autores[LY2]. O interesse pelo o estudo da distribuição dos zeros da função de partição em ferromagnetos, e generalizações destes, mantem–se atual (veja [BBDKK] e referências neste) apesar da quantidade e variedade de trabalhos publicados sobre este tema.

A presente tese de Livre–Docência tem como escopo inserir de forma mais aprofundada o Teorema do Círculo no contexto da Teoria das Funções Analíticas desenvolvidas no final do século passado e começo deste por Laguerre, Hermite, Biehler, Phragmén, Lindelöf, Pólya, Nevanlinna e outros.

Dois trabalhos motivaram a presente tese. Inicialmente Charles M. Newman [N] e posteriormente Elliott H. Lieb e Alan D. Sokal [LS], examinaram as condições necessárias e suficientes para que uma classe de modelos de Ising generalizado satisfizesse a "propriedade de Lee–Yang". Os elementos desta classe possuem a propriedade que os zeros da função de partição, escrita na variável $h = \ln z$, distribuem–se sobre o eixo imaginário puro.

A conclusão destes autores pode ser resumida como segue. Se a "medida a priori" $\nu_j(s)$ do spins $s \in \mathbb{R}^3$, para cada sítio j, satisfaz a propriedade de Lee–Yang:

A. Para todo $b \geq 0$, temos $\displaystyle\int e^{bs^2}\, d|\nu_j(s)| < \infty$;

B.

$$E_j(h) = \int e^{hs}\, d\nu_j(s) \neq 0 \tag{1.2}$$

[3]Para o modelo de Ising, $\nu(s)$ é a distribuição de Bernoulli: $\nu(s) = 1/2$ se $s = \pm 1/2$ e $\nu(s) = 0$ de outra forma.

se $\Re e\, h \neq 0$;

e se $\mathcal{J} = [J_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ é uma matriz $n \times n$ simétrica, com entradas não negativas e diagonal nula, então a medida de Gibbs de n spins $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ acoplados,

$$\mu^n(\mathrm{s}) = \exp\left\{\frac{\beta}{2}(\mathrm{s}, \mathcal{J}\mathrm{s})\right\} \prod_{j=1}^{n} d\nu_j(s_j)\,, \tag{1.3}$$

com $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} z_j\, w_j$, retem a propriedade de Lee–Yang em $\mathbb{R}^n$:

A'. Para todo $b \geq 0$, temos $\int e^{b(\mathrm{s},\mathrm{s})}\, d|\mu^n(\mathrm{s})| < \infty$;

B'.

$$Z(\mathbf{h}) = \int e^{(\mathrm{s},\mathbf{h})} d\mu^n(\mathrm{s}) \neq 0 \tag{1.4}$$

se $\Re e\, h_j \neq 0$ para todo j.

Segundo este teorema, para que a função de partição $Z(h, \ldots, h)$ se anule é necessá rio que $\Re e\, h = 0$.[4]

O problema da localização dos zeros da função de partição é abordado de maneira mais natural se (1.4) for reescrita como

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{h}) &= \exp\left\{\frac{\beta}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}}\right)\right\} Z_0(\mathbf{h}) \\ &= \prod_{i<j} \Gamma_{ij} Z_0(\mathbf{h}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde $Z_0(\mathbf{h}) = \prod_{j=1}^{n} E_j(h_j)$ com E_j dado por (1.2) e $\Gamma_{ij} = \exp\{(\beta J_{ij} \partial/\partial h_i\, \partial/\partial h_j\}$.

Assim, o problema se reduz a estudar uma classe de funções analíticas em $\mathbb{C}^n$ fechada pela aplicação do operador Γ_{ij} e cuja transformada de Laplace inversa tem a propriedade de Lee–Yang . Para garantir o sucesso desta abordagem devemos examinar as seguintes afirmações:

1. O operador diferencial parcial Γ_{ij} é aplicável às funções inteiras em $\mathbb{C}^n$ que não excedem o mínimo tipo de ordem 2 em cada uma de suas variáveis;

[4] Note que $z = e^h$ mapeia e o eixo imaginário no círculo unitário. O Teorema de Lee–Yang clássico é recuperado quando $Z(h, \ldots, h)$ puder ser escrita como um polinômio em e^h.

2. A aplicação de Γ_{ij} deixa invariante uma subclasse destas funções inteiras que satisfaz a condição $\mathbf{B}'$.;

3. Por último, toda função inteira que não excede a ordem 2 de mínimo tipo em cada uma de suas variáveis pode ser escrita como uma transformada de Laplace

$$f(\mathbf{h}) = \int e^{(\mathbf{s},\mathbf{h})} d\mu^n(\mathbf{s}) \tag{1.6}$$

de uma medida $\mu^n(\mathbf{s})$ em $\mathbb{R}^n$ para a qual a propriedade A'. é satisfeita.

Para o item 1., o seguinte resultado sobre operadores diferencias de ordem infinita por P. C. Sikkema [S], Teorema 7, será útil para nossa análise: seja $y(z)$ uma função inteira de mínimo tipo da ordem σ e seja $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ com a_n não todos nulos e tais que $\sum_{n\geq 0} a_n (n!)^{-1/\sigma} z^n$ define uma função inteira que não excede o tipo normal de ordem 1. Então,

$$h(z) = F\left(\frac{d}{dz}\right) y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n y}{dz^n}(z) \tag{1.7}$$

é uma função inteira que não excede o mínimo tipo da ordem σ.

A abordagem feita para o item 2. nesta tese é inovadora. Faremos uso de resultados sobre a classe de funções $f(z) \in \overline{HB}$ de Hermite–Biehler que não possuem zeros no semi–plano inferior, , e satisfazem a condição $|f(z)/\overline{f}(z)| \leq 1$. Para aplicarmos esta teoria ao problema dos zeros de Lee–Yang, teremos, entretanto, que fazer uma rotação de $\pi/2$ para que o semi–plano $\Im m\, z < 0$ seja substituído por $\Re e\, z < 0$[5]. Um papel de suma importancia nesta tese é representado pela subclasse P^* de $\overline{HB}$ consistindo das funções inteiras f que satisfazem as seguintes propriedades:

a. os zeros de f localizam-se no semi–plano superior, $\Im m\, z \geq 0$;

b. f é o limite de uma seqüência $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de polinômios satisfazendo a propriedade **a.**, uniformemente convergente em compactos de $\mathbb{C}$;

c. se $y(z)$ e $F(-z)$ pertencem a classe P^*, então $h(z)$ dado por (1.7) pertence a P^*.

Excetuando a questão levantada no item 3., todo o material necessário para a compreenção dos resultados será desenvolvido em grande detalhe nos dois capítulos iniciais desta tese.

No Capítulo 2 apresentaremos de forma pedagógica a conexão entre a distribuição dos zeros, o crescimento do módulo máximo e o Teorema da fatorização de Hadamard

[5] Mais precisamente, substituiremos h por $2iw$ na expressão (1.4), e escreveremos $Z(w)$ em seu lugar.

para funções inteiras em $\mathbb{C}$. Embora haja excelentes textos sobre este assunto (veja por exemplo [B, K, H, L]) selecionamos aqui o material necessário para dar coerência e unidade à tese.

No Capítulo 3 introduziremos a classe $\overline{HB}$ das funções inteiras de Hermite–Biehler e estudaremos os operadores que preservam a localização dos zeros para tais funções. Esta análise, menos conhecida do público em geral, generaliza o Teorema de Rolle sobre a preservação dos zeros reais por diferenciação.

A discussão que apresentaremos tem a vantagem adicional de obter desigualdades majorantes para as funções em $\overline{HB}$. Estas desigualdades são, em particular, preservadas pela operação de diferenciação: se $\omega(z)$ pertence à subclasse P^* e se as desigualdades

$$|f(z)| \leq |\omega(z)| \qquad \text{e} \qquad |f(\bar{z})| \leq |\omega(z)| \tag{1.8}$$

forem satisfeitas para $\Im m\, z \leq 0$, então

$$|f^{(k)}(z)| \leq |\omega^{(k)}(z)| \qquad \text{e} \qquad |f^{(z)}(\bar{z})| \leq |\omega^{(k)}(z)|$$

é satisfeita para $\Im m\, z \leq 0$ e $k = 1, 2, \ldots$.

Por intermédio dessa noção estenderemos, ainda neste Capítulo, todos os resultados estabelecidos para funções inteiras em $\mathbb{C}$ para funções inteiras em $\mathbb{C}^n$.

No Capítulo 4 veremos como a descrição das funções de Hermite–Biehler $\overline{HB}_n$ em $\mathbb{C}^n$ se encaixa na Teoria geral dos zeros de Lee–Yang. Inicialmente, faremos uma breve excursão sobre as diversas versões do Teorema de Lee–Yang e, em seguida, demonstrarmos o Teorema de Lee–Yang Generalizado com os resultados do Capítulo 3. Discutiremos também as extensões deste Teorema para os modelos ferromagnéticos com N componentes de spin.

Ainda no Capítulo 4, veremos que há uma coincidência entre as noções de majorante em $\overline{HB}_n$ e o método majorante utilizado para garantir a existência e obter propriedades de soluções de equações diferenciais.

A relação entre o problema dos zeros de Lee–Yang e as equações diferenciais emerge da observação de que a função de partição (1.5) é a solução do problema de valor inicial

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}}\right) U = 0 \tag{1.9}$$

em $t = \beta$, com condição inicial $U(0, \mathbf{h}) = Z_0(\mathbf{h})$. Consideramos a abordagem do Teorema de Lee–Yang por métodos aplicados às equações diferenciais a mais inovadora proposta desta tese.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentaremos nossas conclusões.

2

Propriedades Gerais das Funções Inteiras

As funções inteiras compreendem a classe das funções analíticas regulares no plano complexo inteiro, com excessão do ponto no infinito. Incluem nessa classe o conjunto de todos os polinômios de ordem n

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \,, \tag{2.1}$$

$a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, bem como as funções transcedentais (ou não polinomiais) e^z, $\sin z$, $\cos z$, $1/\Gamma(z)$ e *etc.*.

Neste capítulo faremos uma introdução detalhada das propriedades gerais dessa classe de funções que são mais relevantes para a descrição dos zeros de Lee–Yang.

Nas duas seções a seguir, examinaremos como estender algumas propriedades das funções polinomiais para as funções transcendentais inteiras. Veremos que o Teorema fundamental da Álgebra, com os devidos cuidados, também se aplica às funções transcendentais.

O Teorema da Fatorização de Weierstrass é o ponto de partida para se estabelecer relações entre a distribuição dos zeros de uma função inteira e suas propriedades. Examinaremos nas seções subsequentes a relação entre tipo e ordem de uma função inteira f e os coeficientes a_j de sua série de potência. Também examinaremos a conecção entre a taxa de crescimento $M(r)$ do módulo máximo da função f e a distribuição de seus zeros. Concluiremos este capítulo com o Teorema de Hadamard.

2.1 Alguns Fatos Básicos

Afim de distinguir as funções inteiras das demais funções analíticas, começaremos com descrição de alguns fatos básicos .

O princípio da continuação analítica permite que uma função f seja estendida analiticamente além de seu domínio de definição. f_1 é dita ser a continuação analítica de uma função f_2, ambas regulares em D_1 e D_2, respectivamente, se coincidirem em uma região $G = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.[1] De acordo com o Teorema da Identidade, f_1 e f_2 determinam-se, uma a outra, univocamente e não pode haver outra função f_1, regular em D_1, que coincida com f_2 em G. Esta questão, de suma relevância na teoria geral das funções analíticas, produz algumas poucas implicações às funções inteiras que, em particular, assumem um único valor $f(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Devida a propriedade de regularidade que a caracteriza, a série de potência de uma função inteira $f(z)$, em torno de um ponto z_0 arbitrário, converge para todo z do plano complexo. Segue do Teorema da Indentidade que todas as possíveis representações de f são idênticas à série

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \,, \tag{2.2}$$

cuja expressão generaliza a função polinomial.

Um polinômio tem um número finito de coeficientes a_j não nulos. A série (2.2), nesse caso, é claramente convergente em todo plano. Uma função inteira transcendental possui uma infinidade de coeficientes $a_j \neq 0$ tais que

$$R^{-1} = \limsup_{j\to\infty} |a_j|^{1/j} = 0 \,, \tag{2.3}$$

onde R é o raio de convergência de f.[2] Como conseqüência dos Teoremas da Identidade e de Taylor, segue

$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{1}{j!} \frac{d^j f}{dz^j}(z_0) \ (z - z_0)^j \right|^{1/j} < 1 \tag{2.4}$$

uniformemente em z_0 e z no plano $\mathbb{C}$. Faremos uso de variações e refinamentos deste resultado ao longo deste texto.

De acordo com oTeorema de Liouville, a única função inteira $f(z)$ limitada para todo $z \in \mathbb{C}$ é a função constante $P_0(z) = a_0$. Com exceção desta função, podemos sempre encontrar constantes positivas M e R_0, arbitrariamente grandes, tais que $|f(z)| > M$ para algum z com $|z| > R_0$. Para isso, suponhamos o contrário, $|f(z)| \leq M$. Segue da fórmula integral de Cauchy

$$\begin{aligned} |a_j| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{\rho^j} \sup_{|\zeta|=\rho} |f(\zeta)| \leq \frac{M}{\rho^j} \,. \end{aligned}$$

[1] G pode ser um subconjunto próprio, uma curva ou até mesmo um conjunto de pontos que tenha ao menos um ponto de acumulação

[2] O limite superior $\limsup b_n$ de uma sequência $\{b_n\}_{n\geq 0}$ é o maior entre todos pontos de acumulaç ão desta. Analogamente, $\liminf b_n$ é o menor dos pontos de acumulação. Se a seqüência for convergente, então $\limsup b_n = \liminf b_n = \lim b_n$.

Se M é limitado, ρ pode ser escolhido tão grande quanto se queira de tal maneira que $a_j = 0$ para todo $j \neq 0$.

As funções inteiras podem ser classificadas de acordo com o crescimento do seu módulo máximo, $M(r) = M(r; f)$, definido por

$$M(r; f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right| . \tag{2.5}$$

Como conseqüência dos Teorema do Máximo e de Liouville, $M(r)$ é uma função monotona crescente tal que $M \to \infty$ quando $r \to \infty$.

O Teorema de Liouville não exclui a possibilidade de haver setores aos quais f mantêm–se limitada. De fato isto ocorre para as funções transcendentais (porém não para as polinomiais) e terá um papel relevante nesta tese.

O Teorema fundamental da Álgebra diz que qualquer polinômio (2.1) pode ser escrito como

$$P_n(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j) , \tag{2.6}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, são as raízes ou zeros do polinômio P_n, contando suas multiplicidades.

Conclui–se desta fatorização que,

(i) qualquer outro polinômio Q_n, de mesma ordem e que possua os mesmos zeros com a mesma multiplicidade, difere apenas por uma constante multiplicativa: $Q_n(z)/P_n(z) = c$;

(ii) dado um conjunto qualquer de números complexos $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, é sempre possivel escrever um polinômio P_n dado pela expressão (2.6) com $a_n = 1$. A função polinomial mais geral que se anula nos mesmos valores para os quais P_n se anula, é da forma cP_n.

O objetivo desta, e da seção a seguir, é extender os itens **(i)** e **(ii)** para as funções inteiras transcendentais.

Observemos que, se $h(z)$ é uma função inteira, $H(z) = e^{h(z)}$ é uma função inteira que não se anula no plano complexo. Esta última afirmação segue do fato que $e^z \neq 0$ e $|h(z)| < \infty$ se $z \in \mathbb{C}$ for finito. Segue também que H é regular em $\mathbb{C}$ pois, pela regra da cadeia, $H' = H\,h'$,[3] H é diferenciável em todo plano complexo.

Mais ainda,

Proposição 2.1 *$H(z) = e^{h(z)}$, com $h(z)$ uma função inteira arbitrária, é a função inteira mais geral sem zeros em todo plano complexo.*

[3]Quando não houver ambiguidade, denotaremos a derivada de uma função $f(z)$ com respeito a z por $f' = \dfrac{df}{dz}$.

Prova. Resta–nos mostrar que, se

$$H(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

é uma função inteira sem zeros, existe uma função inteira

$$h(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

tal que $H(z) = e^{h(z)}$.

Por hipótese, $a_0 = H(0) \neq 0$. Podemos escolher b_0 tal que $a_0 = e^{b_0}$. Além disso, H^{-1} existe e é regular em todo plano complexo, pela regra da cadeia. Como a classe das função inteiras é fechada pelas operações de derivação, integração e multiplicação por uma função inteira,

$$\frac{H'}{H} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

é também uma função inteira e, portanto, pode ser integrada termo a termo:

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{H'}{H}\, d\zeta &= c_0 z + \frac{1}{2} c_1 z^2 + \frac{1}{3} c_2 z^3 + \cdots \\ &= \ln H - b_0 \\ &= b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots . \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde na segunda igualdade usamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Suponha agora que $e^{h(z)} = H_1(z)$. Então

$$\frac{H_1'}{H_1} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \frac{H'}{H}$$

e, consequentemente,

$$\left(\frac{H_1}{H}\right)' = \frac{H H_1' - H' H_1}{H^2} = 0\,,$$

que implica em $H_1 = H$ em vista do fato que $H(0) = H_1(0) = e^{b_0}$.

□

Proposição 2.1 responde pela generalização do item (i). Seja $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ o conjunto de zeros de uma função inteira $G_0(z)$. Então a função inteira mais geral com zeros neste mesmo conjunto e com mesma multiplicidade é dada por

$$G(z) = e^{h(z)} G_0(z) \tag{2.8}$$

onde h é função inteira arbitrária.

A dificuldade em extender o item (ii) para uma função inteira transcedental G_0 reside no fato de que o produto infinito de fatores lineares associados às raízes de G_0 pode, em geral, não convergir. Na seção seguinte desenvolveremos esta questão.

2.2 Teorema da Fatorização de Weierstrass

Iremos a seguir enunciar e demonstrar um Teorema devido a Weierstrass pelo qual podemos associar a toda seqüência $\{\alpha_j\}$ de números complexos sem pontos de acumulação finitos, uma função inteira $G_0(z)$ cujos zeros coincidem com α_j e que admite ser representada como produto de fatores. Para isso, é necessário introduzir o *fator primário* de Weierstrass:

$$E(z;p) = (1-z)\exp\left\{z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{p}z^p\right\} \tag{2.9}$$

para $p \geq 1$ e

$$E(z;0) = 1 - z\,.$$

Teorema 2.2 *Seja $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ uma seqüência de números complexos sem pontos de acumulação finitos com $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_j \neq 0$, $j \geq 1$.*[4] *Seja $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ um conjunto de números inteiros com $0 \leq m_j < \infty$. Existe uma função inteira que possui zeros de multiplicidade m_j somente nos pontos $z = \alpha_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ e que pode ser representada por*

$$G_0(z) = z^{m_0} \prod_{j=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_j}; p_j\right)^{m_j} \tag{2.10}$$

contanto que os números inteiros positivos $\{p_j\}_{j=1}^{n}$ sejam escolhidos de forma que o produto seja uniformemente convergente em compactos. Uma escolha sempre possível é dada por

$$p_j > \frac{\ln j^2 m_j}{\ln 2}\,. \tag{2.11}$$

Para demonstrar este teorema alguns lemas serão necessários. Iniciaremos com a seguinte estimativa do fator primário.

Lema 2.3 *O fator primário de Weierstrass satisfaz*

$$|E(z;p) - 1| \leq |z|^{p+1}\,, \tag{2.12}$$

para todo $|z| \leq 1$.

Prova. Como $E(z;p)$ é uma função inteira em z com $E(0;p) = 1$, a série de potência

$$E(z;p) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, z^n\,, \tag{2.13}$$

[4] O ordenamento da seqüência é feito, usualmente, de forma a preservar a desigualdade $|\alpha_j| \leq |\alpha_{j+1}|$.

onde $A_n = A_n(p)$, converge em todo plano complexo. Note que (2.12) é trivialmente satisfeita se $p = 0$, pois $A_1(0) = 1$ e $A_j(0) = 0$ com $j > 1$. Derivaremos a seguir algumas propriedades de A_n para $p \geq 1$.

Diferenciando (2.9) e comparando com a derivada de (2.13)

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} &= -z^p \exp\left\{z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{p}z^p\right\} \\ &= -z^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{p}z^p\right)^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, A_n\, z^{n-1} \end{aligned}$$

concluímos que $A_1 = \cdots = A_p = 0$ e $A_n < 0$ para todo $n \geq p$. Por outro lado, usando a definição (2.9), $E(1;p) = 0$ e devido a (2.13), obtemos

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} |A_{n+p}| = 1 .$$

Por conseguinte, se $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |E(z;p) - 1| &\leq \sum_{n=p+1}^{\infty} |A_n|\, |z|^n \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} |A_{n+p}|\, |z|^n \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} |A_{n+p}| = |z|^{p+1} . \end{aligned}$$

□

As próximas estimativas e definições dizem respeito à Teoria de Produtos Infinitos. Dado um conjunto $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ de números complexos, vamos considerar produtos da forma

$$\Pi = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + w_j) . \tag{2.14}$$

Denotamos por Π_n o produto dos n primeiros fatores e por

$$\Pi_{m,n} = \prod_{j=m}^{n} (1 + w_j)$$

o produto dos fatores compreendidos entre o m–ésimo e o n-ésimo fator, de forma que $\Pi_n = \Pi_{1,n}$.

Definição 2.4 *O produto* Π *é dito ser convergente se, e somente se, existir* n_0 *tal que* $(1+w_j) \neq 0$ *para todo* $j > n_0$ *e se o limite*

$$U_{n_0} = \lim_{n\to\infty} \Pi_{n_0+1,n}$$

existir e for diferente de zero.

O cuidado com esta definição se justifica para evitar que $\lim_{n\to\infty} \Pi_n = 0$ devido a ocorrência de um fator nulo no produto.

Pelo princípio da convergência de Cauchy, o produto infinito Π converge se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existir $N = N(\varepsilon) > n_0$ tal que

$$|\Pi_{m,m+p} - 1| < \varepsilon$$

para todo $m > N$ e $p \geq 1$.

Definição 2.5 *O produto* Π *é dito ser absolutamente convergente se*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+|w_n|)$$

for convergente.

Obviamente, Π é convergente se Π for absolutamente convergente, porém o contrário nem sempre é verdade. Daremos a seguir um critério para a convergência do valor absoluto de um produto infinito.

Lema 2.6 *O produto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\gamma_n)$*, com* $\gamma_n \geq 0$*, é convergente se, e somente se,* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ *convergir.*

Prova. Usando a desigualdade $1+\gamma \leq e^{\gamma}$, válida para todo $\gamma \geq 0$, temos

$$1 + \sum_{n=m}^{m+p} \gamma_n \leq \prod_{n=m}^{m+p} (1+\gamma_n) \leq \exp\left\{\sum_{n=m}^{m+p} \gamma_n\right\} .$$

O resto do argumento segue pelo princípio da convergência de Cauchy.

$\square$

Conseqüentemente, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\gamma_n)$ converge absolutamente se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ convergir absolutamente.

Para uma seqüência $\{w_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ de funções analíticas definidas em um domínio $D \subset \mathbb{C}$, o produto infinito

$$\Pi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + w_j(z)) \ , \tag{2.15}$$

define uma função analítica no conjunto $\mathcal{D} \subset D$ dos valores z para os quais $\Pi(z)$ converge. O seguinte lema caracteriza a função limite.

Lema 2.7 *Se $\{w_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de funções regulares em um domínio D e se $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n(z)|$ for uniformemente convergente em cada região compacta $S \subset D$, então $\Pi(z)$ representa uma função regular em D. Além disso, $\Pi(z)$ se anula somente nos pontos para os quais algum fator $1 + w_j(z)$ se anula. A ordem de cada zero é dada pela soma dos fatores que se anulam neste valor.*

A demonstração deste resultado segue por argumentos usuais sobre convergência uniforme de seqüências de funções analíticas e será omitida nesta tese (veja, por exemplo, [K]).

Prova do Teorema 2.2. Em vista do Lema 2.7, basta mostrar que existe uma escolha de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que a soma

$$\Sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |w_n(z)| \ , \tag{2.16}$$

com

$$w_n(z) = E\left(\frac{z}{\alpha_n}; p_n\right)^{m_n} - 1 \, ,$$

converge uniformemente nos discos $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ de raio r arbitrário.

Dado r fixo, seja $N = N(r)$ suficientemente grande tal que

$$\left|\frac{r}{\alpha_n}\right| < \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad m_n \left|\frac{r}{\alpha_n}\right|^{p_n+1} < \frac{1}{2} \tag{2.17}$$

para todo $n > N$. Tal escolha sempre existe pois $\alpha_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, devido ao fato que a seqüência $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ não acumula no plano finito e se encontra ordenada de acordo com a desigualdade $|\alpha_j| \leq |\alpha_{j+1}|$.

Lemma 2.3, combinado com a desigualdade telescópica, resulta

$$\begin{aligned}
\left|E\left(\frac{z}{\alpha_n}; p_n\right)^{m_n} - 1\right| &\leq \left|E\left(\frac{z}{\alpha_n}; p_n\right) - 1\right| \sum_{k=0}^{m_n-1} \left|E\left(\frac{z}{\alpha_n}; p_n\right)\right|^k \\
&\leq \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{p_n+1} \sum_{k=0}^{m_n-1} \left(1 + \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{p_n+1}\right)^k \\
&\leq m_n \left(1 + \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{p_n+1}\right)^{m_n} \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{p_n+1} \\
&\leq e^{1/2} m_n \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{p_n+1}
\end{aligned}$$

para todo $z \in D_R$ e $n > N$. Note que as condições (2.17) foram usadas no Lema 2.3 e na estimativa do somatório.

Se p_j satisfaz (2.11), então pela condição (2.17) temos

$$m_n \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{p_n+1} \leq m_n e^{-p_n \ln 2} < \frac{1}{n^2},$$

que implica na convergência uniforme da série $\Sigma(z)$ em D_R , e completa a prova do Teorema *2.2*.

□

Observação 2.8 *A representação da função G_0 é mais simples se a distribuição dos zeros $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, contando multiplicidades, for tal que a série $\sum_n |\alpha_n|^{-\lambda}$ converge para algum λ positivo. Neste caso, seja p o menor inteiro para o qual $\sum_n |\alpha_n|^{-p-1}$ converge. Segue da demonstração acima que a série $\Sigma(z)$ dada por (2.16) converge uniformemente em compactos se $p_n = p \leq \lambda$ para todo $n \geq 1$. O produto infinito $z^{m_0} \prod_{j=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_j}; p\right)$ é uniformemente convergente e é denominado produto canônico de genus p.*

Antes de examinarmos outras propriedades associadas à distribuição dos zeros de uma função inteira, daremos alguns exemplos do Teorema da Fatorização.

Exemplo 2.9 *A função $\sin \pi z$ se anula em $z = \alpha_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$ e seus zeros são simples. Como a série $\sum_n \left|\frac{z}{n}\right|^2 = |z|^2 \sum_n n^{-2}$ converge uniformemente, podemos escolher $p_n = 1$ para todo n. Então o produto canônico*

$$\begin{aligned} G_0 &= z \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{n}; 1\right) \cdot E\left(-\frac{z}{n}; 1\right) \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \end{aligned}$$

e em vista de (2.8),

$$\sin \pi z = e^{h_0(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{2.18}$$

para alguma função inteira h_0 cuja determinação depende de outras informações sobre a função. Derivando ambos os lados da equação (2.18) e dividindo pela própria equação, temos

$$\pi \cot \pi z = h_0' + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - n}. \tag{2.19}$$

Derivando novamente, obtemos

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = -h_0'' + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} . \tag{2.20}$$

Agora, h_0'' *é uma função inteira, periódica de período* 1, *devido a (2.20), e mantêm-se limitada quando* $|z| \to \infty$.[5] *Pelo Teorema de Liouville,* $h_0'' = 0$. *Além disso,* $h_0' = 0$ *pois (2.19) troca de sinal pela transformação* $z \to -z$, *resultado em* $e^{h_0(z)} = \pi$ *uma vez que* $\lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi$.

Exemplo 2.10 *A reciproca da função Gama de Euler* $\Gamma^{-1}(z)$ *é uma função inteira com zeros simples nos inteiros negativos. Analogamente ao exemplo anterior,*

$$\Gamma^{-1}(z) = e^{h(z)}\, z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} . \tag{2.21}$$

Por outro lado, usando-se repetidamente a relação funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *obtêm-se a definição de Gauss*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\cdots(z+n)}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(z) &= \lim_{n\to\infty} e^{-z\ln n}\, z \prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{z}{j}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{z(1+1/2+\cdots+1/n-\ln n)}\, z \prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{z}{j}\right) e^{-z/j} \\ &= e^{\gamma z} z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{j}\right) e^{-z/j} \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772156649\ldots$$

é a constante de Euler Mascheroni. Comparando (2.21) e (2.22), concluímos $h(z) = \gamma z$.

[5] Vê-se, ecrevendo $z = x + iy$, que esta função não cresce quando $|x| \to \infty$ devido a periodicidade, e vai a zero quando $|y| \to \infty$.

2.3 Conexão entre Ordem, Tipo e Coeficientes de Taylor

Nesta e na próxima seção, examinaremos a relação existente entre a distribuição dos zeros de uma função inteira f , o crescimento do máximo modulo $M(r;f)$ e o comportamento dos coeficientes a_n da série de potência.

Se P é um polinômio de ordem n, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln M(r;P)}{\ln r} < \infty\,.$$

Em contraposição, devido a infinidade de coeficientes não nulos em (2.2), o crescimento de uma função transcendental f deve ser comparado com uma função que cresça mais rápido que qualquer potência. Veremos nas definições e teoremas a seguir que é natural comparar o crescimento das funções f e $e^{\tau r^\rho}$ com $0 \leq \tau, \rho \leq \infty$.

Definição 2.11 *Uma função inteira $f(z)$ é de ordem ρ se*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln M(r;f)}{\ln r} = \rho\,. \tag{2.23}$$

Uma função constante tem, por convenção, ordem 0.

Definição 2.12 *Uma função inteira $f(z)$ de ordem positiva ρ $(0 < \rho < \infty)$ é do tipo τ se*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln M(r;f)}{r^\rho} = \tau\,. \tag{2.24}$$

A função f é dita ser de mínimo tipo, tipo normal ou máximo tipo se $\tau = 0$, $0 < \tau < \infty$ ou $\tau = \infty$, respectivamente.

De acordo com estas definições, $f(z)$ é de ordem finita ρ se, e somente se

$$M(r;f) = O\left(e^{r^{\rho-\varepsilon}}\right) \qquad \text{e} \qquad M(r;f) = o\left(e^{r^{\rho+\varepsilon}}\right)$$

para todo $\varepsilon > 0$.

A função e^{az^k}, com a, k positivos, é do tipo a de ordem k. Ao passo que a função $\exp\left(e^z\right)$ é de ordem infinita. A função $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n z)$, com $|q| \leq 1$, é de ordem 0 e as três seguintes funções

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n\,(\ln n)^2}\right), \qquad e^{az}, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\Gamma(z)}$$

são de ordem finita do tipo 0, a e ∞, respectivamente.

Existe uma íntima relação entre o crescimento de $f(z)$ e o comportamento da seqüência $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos coeficientes de sua série de potência. Isto é devido ao fato que $M(r;f)$ é essencialmente determinado pelo máximo termo da série (2.2) com $|z| = r$. Para cada $r > 0$, existe um índice $\nu = \nu(r)$, denominado *índice central*, tal que

$$\left|c_k z^k\right| \leq \left|c_\nu z^\nu\right|$$

sendo esta desigualdade estrita para $k > \nu$. O índice central é uma função monotona crescente com $\nu(r) \to \infty$, quando $r \to \infty$.

A dominância do ν-ésimo termo da série pode ser apreciada no seguinte exemplo de função de ordem ρ do tipo 1:

$$F_\rho(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\rho e}\right)^{-n/\rho} z^n . \tag{2.25}$$

Claramente F_ρ é uma função inteira[6] cujos termos da série (2.25), calculados em $z = r$, podem ser escritos como $\exp\{g(n,r)\}$, onde

$$g(u,r) = u \ln r - \frac{u}{\rho} \ln \frac{u}{\rho e} ,$$

é uma função estritamente crescente para $u < u_{\max}$ e estritamente decrescente para $n > u_{\max}$ atingindo o valor máximo

$$g(u_{\max}, r) = r^\rho,$$

em $u_{\max} = \rho r^\rho$.

Note que $g(u_{\max}, r)$, e consequentemente $\exp\{g(u_{\max}, r)\}$, é uma função monotona crescente em r. Note ainda que o índice central $\nu(r)$ satisfaz $u_{\max} - 1 < \nu(r) < u_{\max} + 1$.

É um exercício estimulante, porém demasiado longo para incluí–lo em todos detalhes, dominar inferior e superiormente $F_\rho(r)$ pela integral de Laplace $\displaystyle\int \exp\{g(u,r)\}\, du$. Observe que, desenvolvendo $g(u,r)$ em série de potência em torno de $u = u_{\max}$ até segunda ordem

$$g(u,r) = r^\rho - \frac{1}{2\rho^2 r^\rho} \left(\rho r^\rho - u\right)^2 + O\left(\frac{1}{r^{2\rho}}\right) ,$$

e substituindo na integral, obtemos a ordem dominante

$$\begin{aligned}
F_\rho(r) &\sim e^{r^\rho} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2\rho^2 r^\rho} \left(\rho r^\rho - u\right)^2\right\} du \\
&\sim e^{r^\rho} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2\rho^2 r^\rho} v^2\right\} dv \\
&= \rho\sqrt{2\pi} r^{\rho/2} e^{r^\rho} ,
\end{aligned}$$

[6] Veja (2.3) para definição de raio de convergência.

da fórmula assintótica

$$M\left(r;F_\rho\right) = F_\rho(r) = \rho\sqrt{2\pi}\, r^{\rho/2}\, e^{r^\rho}\left(1+o\left(1\right)\right) . \tag{2.26}$$

Notamos ainda que o crescimento de $F_\rho(z)$ pode ser extraído a partir da taxa com que seus coeficientes convergem para 0. Procedendo de forma analoga, vamos comparar a seqüência dos coeficientes $\{a_n\}$ da série de potência de uma função $f(z)$ inteira com a seqüência $\left\{n^{-n/\rho}\right\}$. Mais que um exemplo, (2.25) terá um papel instrumental na de monstração dos seguintes resultados.

Teorema 2.13 *A ordem ρ de uma função $f(z)$ definida pela série (2.2) é dada por*

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\left(1/\left|a_n\right|\right)} . \tag{2.27}$$

Prova. Iniciaremos mostrando que $\rho \leq \sigma$, com σ denotando o lado direito de (2.27). Suponhamos que σ é finito. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{n\ln n}{\ln\left(1/\left|a_n\right|\right)} < \sigma + \varepsilon$$

para todo $n > N$. Escrito de outra maneira,

$$|a_n| < n^{-n/(\sigma+\varepsilon)}, \qquad\qquad n > N ,$$

ou ainda,

$$|a_n| < C n^{-n/(\sigma+\varepsilon)} \tag{2.28}$$

para todo $n \geq 1$, onde $C = C(\varepsilon)$ é uma constante apropriada. Assim, pela definição de $M(r;f)$ e equações (2.2), (2.28) e (2.25),

$$\begin{aligned} M(r;f) &\leq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, r^n \\ &\leq |a_0| + C\, F_{\sigma_\varepsilon}\left(\left(\sigma_\varepsilon e\right)^{1/\sigma} r\right) , \end{aligned}$$

concluindo de (2.26) que $\rho \leq \sigma_\varepsilon$ com $\sigma_\varepsilon = \sigma + \varepsilon$. Como ε é arbitrário, temos $\rho \leq \sigma$. Note que se f é da ordem $\rho = \infty$, esta relação implica em (2.27).

Para mostrar a desigualdade contrária, $\rho \geq \sigma$, usaremos a fórmula integral de Cauchy

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| |dz| \leq \frac{M(r;f)}{r^n} . \tag{2.29}$$

Se $\rho = 0$, então $\rho \geq \sigma$ pois o lado direito de (2.27) é não negativo. Suponhamos que $0 < \rho < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, pela definição (2.23), existe $C_1 = C_1(\varepsilon)$ tal que

$$M(r;f) \leq C_1\, e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

para todo $r \geq 0$ que, combinando com (2.29), implica

$$|a_n| \leq C_1 \, e^{h_{\min}(n)} \leq C_1 \, e^{h(r,n)} \,, \tag{2.30}$$

onde

$$h_{\min}(n) = -\frac{n}{\rho_\varepsilon} \ln \frac{n}{e\rho_\varepsilon} \tag{2.31}$$

é o mínimo da função $h(r,n) = r^{\rho_\varepsilon} - n \ln r$ que é obtido calculando h no ponto $r_{\min} = \left(\dfrac{n}{\rho_\varepsilon}\right)^{1/\rho_\varepsilon}$. Substituindo (2.31) em (2.30), obtemos

$$|a_n| \leq C_1 \left(\frac{n}{e\rho_\varepsilon}\right)^{-n/\rho_\varepsilon} .$$

Por conseguinte,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln\left(1/|a_n|\right)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln\left(1/C_1\right) + (n/\rho_\varepsilon)\ln\left(n/e\rho_\varepsilon\right)} = \rho_\varepsilon$$

e $\sigma \leq \rho_\varepsilon = \rho + \varepsilon$, concluindo a prova do Teorema 2.13.

□

Teorema 2.14 *Se a ordem ρ de uma função $f(z)$ é finita, então o tipo de f é dado em termos de seus coeficientes pela seguinte expressão*

$$\tau = \frac{1}{e\rho} \limsup_{n\to\infty} n \, |a_n|^{\rho/n} . \tag{2.32}$$

Prova. A prova deste teorema segue de maneira analoga ao anterior. Suponhamos que o lado direito de (2.32), que denotamos por λ, é finito. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{n}{e\rho} \, |a_n|^{\rho/n} < \lambda + \varepsilon$$

para todo $n > N$. Escrevemos esta relação para todo $n \geq 1$ como

$$|a_n| < C \left(\frac{n}{e\rho\lambda_\varepsilon}\right)^{-n/\rho}$$

escolhendo a constante $C = C(\varepsilon)$ adequada. Assim, pelas equações (2.25) e (2.26),

$$M(r;f) \leq |a_0| + C \, F_\rho\left(\lambda_\varepsilon^{1/\rho} r\right) ,$$

concluindo que $\tau \leq \lambda_\varepsilon$, com $\lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon$.

Para mostrar a desigualdade contrária, $\tau \geq \lambda$, usaremos novamente (2.29). Se $\tau = 0$, então $\tau \geq \lambda$ é satisfeita por definição. Suponhamos que $0 < \tau < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, pela definição (2.24), existe $C_1 = C_1(\varepsilon)$ tal que

$$M(r; f) \leq C_1 \, e^{(\tau+\varepsilon)r^\rho}$$

para todo $r \geq 0$. Combinando este resultado com (2.29), temos

$$|a_n| \leq C_1 \, e^{k_{\min}(n)} \leq C_1 \, e^{k(r,n)}, \tag{2.33}$$

onde

$$k_{\min}(n) = -\frac{n}{\rho} \ln \frac{n}{e\rho\tau_\varepsilon} \tag{2.34}$$

é o mínimo da função $k(r, n) = \tau_\varepsilon r^\rho - n \ln r$, atingido no ponto $r = r_{\min} = \left(\dfrac{n}{\rho\tau_\varepsilon}\right)^{1/\rho}$. Substituindo (2.34) em (2.33), obtemos

$$|a_n| \leq C_1 \left(\frac{n}{e\rho\tau_\varepsilon}\right)^{-n/\rho}.$$

Segue desta expressão,

$$\frac{1}{e\rho} \limsup_{n\to\infty} n \, |a_n|^{\rho/n} \leq \tau_\varepsilon \lim_{n\to\infty} C_1^{\rho/n} = \tau_\varepsilon$$

e $\lambda \leq \tau_\varepsilon = \tau + \varepsilon$, concluindo a prova do Teorema 2.14.

□

2.4 Distribuição de Zeros do Produto Canônico

Para medir a densidade de um conjunto que não possui pontos de acumulação finitos, introduzimos a seguinte

Definição 2.15 *O expoente de convergência σ de uma seqüência $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ de números complexos, com $\alpha_j \neq 0$ e cujo único ponto de acumulação está no infinito, é o maior limite inferior dos números λ para os quais a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|^\lambda} \tag{2.35}$$

converge.

Quanto mais rápido for o crescimento de $|\alpha_j|$ tanto menor será seu expoente σ. Note que, se (2.35) convergir para todo $\lambda > 0$, então o expoente $\sigma = 0$. Se, por outro lado, (2.35) divergir para todo $\lambda > 0$, então $\sigma = \infty$.

O somatório (2.35) com $\lambda = \sigma$ pode divergir ou convergir, como pode ser visto nos exemplos, $\alpha_j = j^{1/\rho}$ e $\alpha_j = (j \ln j)^{1/\rho}$. Embora o expoente de convergência para ambas seqüências seja $\sigma = \rho$, o somatório (2.35) com $\lambda = \sigma$ diverge na primeira e converge na segunda. As seqüências $\{e^j\}$ e $\{\ln j\}$ tem expoentes de convergência 0 e ∞, respectivamente.

Antes de introduzir outras quantidades associadas à densidade de zeros, é oportuno estabelecer uma relação entre o expoente de convergência σ e o gênero p do produto canônico G_0. Da Observação 2.8 e Definição 2.15, temos

$$p \le \sigma \le p + 1 . \tag{2.36}$$

Quando σ é um inteiro, $\sigma = p$ se (2.35) divergir com $\lambda = \sigma$ e $\sigma = p+1$ se (2.35) convergir com $\lambda = \sigma$.

Uma descrição mais precisa que o expoente σ para densidada da seqüência $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ é dada pela função

$$n(r; f) = \# \{ j \in \mathbb{N}_+ : |\alpha_j| \le r \}$$

que conta o número de elementos da seqüência $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$de zeros da função f (contando multiplicidades) no disco $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$. Aqui, $\#A$ denota a cardinalidade do conjunto A. Note que $n(r) = n(r; f)$ é uma função monotona crescente e constante por pedaços.

A função $n(r)$ define uma medida em $\mathbb{R}_+$ formalmente dada por

$$dn(r) = \sum_{j:|\alpha_j| \le r} \delta(r - |\alpha_j|)\, dr ,$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac[7]. Podemos desta forma introduzir, para toda função continua g, a integral de Stieltjes

$$I(r; g) = \int_0^r g(s)\, dn(s) = \sum_{j:|\alpha_j| \le r} g(|\alpha_j|) . \tag{2.37}$$

Observe que a soma (2.35), que define o expoente de convergência σ, pode ser escrita como $I(\infty; g)$ com $g(s) = s^{-\lambda}$.

Definição 2.16 *A função $n(r)$ é dita ser da ordem ρ_1 se*

$$\rho_1 = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} .$$

[7] A funçao $n(r)$ e suas derivadas são definidas no sentido de distribuição, isto é, após serem integradas com uma função teste infinitamente suave com suporte compacto.

A densidade superior Δ *da seqüência* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ *é definida por*

$$\Delta = \limsup_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho_1}}. \tag{2.38}$$

Caso este limite exista (veja nota de rodapé 2), Δ *é denominada simplesmente densidade.*

Para ilustrar o uso da função $n(r)$, encerraremos esta seção com um resultado devido a Borel.

Teorema 2.17 *Se* ρ *é a ordem do produto canônico*

$$\Pi(z) = \prod_{j=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_j}; p\right), \tag{2.39}$$

então $\rho \leq \sigma$*, onde* σ *é o expoente de convergência da seqüência* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$.

A demonstração deste resultado requer a elaboração de dois lemas.

Lema 2.18 *A ordem* ρ_1 *da contagem dos zeros* $n(r)$*, coincide como o expoente de convergência* σ.

Prova. Em vista de (2.37), (2.35) converge se, e somente se, $I(\infty; s^{-\lambda})$ converge. Por integração por partes

$$I(r; s^{-\lambda}) = \int_0^r \frac{1}{s^\lambda} dn(s) = \frac{n(r)}{r^\lambda} + \lambda \int_0^r \frac{n(s)}{s^{\lambda+1}} ds\,. \tag{2.40}$$

Inicialmente, vamos assumir que (2.35) converge. Então, os dois termos positivos no lado direito de (2.40) convergem quando $r \to \infty$. Segue da convergência da segunda integral que, dado $\varepsilon > 0$, existe $r_0 = r_0(\varepsilon)$, tal que para todo $r > r_0$,

$$\varepsilon > \int_r^\infty \frac{n(s)}{s^{\lambda+1}} ds \geq n(r) \int_r^\infty \frac{1}{s^{\lambda+1}} ds = \frac{n(r)}{r^\lambda}\,,$$

pois $n(r)$ é monotono crescente. Como ε é arbitrário, temos

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^\lambda} = 0$$

implicando em $\rho_1 \leq \sigma$.

Para desigualdade no sentido contrário, $\rho_1 \geq \sigma$, temos que

$$n(r) \leq C r^{\rho_1 + \varepsilon/2}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $C = C(\varepsilon)$ conveniente. Segue desta desigualdade que o lado direito de (2.40) com $\lambda = \rho_1 + \varepsilon$ é convergente e, portanto, o lado esquerdo também converge. Novamente, com ε é arbitrário, o Lema 2.18 fica provado.

□

Lema 2.19 *O fator primário de Weierstrass $E(z;p)$ satisfaz a estimativa*

$$\ln|E(z;p)| \leq \kappa\,|z|^{p+1} \tag{2.41}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $\kappa = \kappa(p) \leq 1$, com $\kappa(0) = 1$ e sendo a desigualdade estrita para $p > 1$.

Observação 2.20 *Lema 2.19, na forma como enunciado, foi provado pelo presente autor [M]. Trata-se da mais acurada estimativa global para o fator de Weierstrass. Uma estimativa para o fator primário, devido a Nevanlinna [N], obtém a constante κ logarítmicamente crescente em p, $\kappa(p) = e\,(2 + \ln p)$, e todos os textos em análise complexa que conheço repetem sua dedução. Experimentos numéricos mostram que a estimativa obtida em [M] está próxima da saturação. Entretanto, quando $|z| > 1$, é conveniente substituir a estimativa (2.41) por uma com melhor comportamento em r, mesmo que κ se torne logaritmicamente crescente com p. Pela definição (2.9) e usando $\ln(1+x) < x$ se $x > 0$, temos*

$$\begin{aligned}
\ln|E(z;p)| &< \ln(1+|z|) + \sum_{k=1}^{p} \frac{|z|^k}{k} \\
&< |z| + |z|^p \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \\
&< \left(1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\right) |z|^p \\
&< \kappa'\,|z|^p\,,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

com $\kappa' = \kappa'(p) = (2 + \ln p)$.

Prova. Como a prova do Lema 2.19 é extensa, apresentaremos apenas um esboço (veja [M] para maiores detalhes). Definimos

$$\begin{aligned}
f_\kappa(r,\theta) &= \left|E\left(re^{i\theta};p\right)\right| e^{-2\kappa r^{p+1}} \\
&= \left(1 + r^2 - 2r\cos\theta\right) \exp\left\{2\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{r^k}{j}\cos k\theta - \kappa r^{p+1}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

para cada $\kappa > 0$ e $p \geq 2$. Estimativa 2.41 segue se existir algum $\kappa = \kappa(p) \leq 1$, tal que

$$f_\kappa(r,\theta) \leq 1$$

é satisfeita para todo $-\pi < \theta \leq \pi$ e $r \geq 0$.

Por inspecção, temos

1. $f_\kappa(0,0) = 1$,

2. $f_\kappa(r,\theta) \geq 0$,

3. $f_\kappa(r,\theta) \longrightarrow 0$, quando $r \to \infty$.

Além disso, para todo $-\pi < \theta \leq \pi$,

$$r_\pm(\theta) = \cos\theta + \frac{1}{2\,(p+1)\,\kappa}\cos p\theta \pm D$$

são extremos não–triviais de $f_\kappa(r,\theta)$ se $D \geq 0$, onde

$$D^2 = \left(\cos\theta - \frac{1}{2\,(p+1)\,\kappa}\cos p\theta\right)^2 + \frac{1}{2\,(p+1)\,\kappa}\cos(p-1)\theta - 1\,.$$

A análise em [M] conclui que, excluindo $(0,0)$ e tomando κ tal que satisfaça as relações $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ onde

$$\kappa_1 = \frac{1}{2(p+1)}\left(1 + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p+1}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad \kappa_2 = 1 - \frac{1}{p+1}\,,$$

o ponto $(r,\theta) = (r_+(0), 0)$, com

$$r_+(0) = 1 + \frac{1}{(p+1)\kappa}\,,$$

é o único máximo de f.

O Lema 2.19 fica provado se existir κ tal que

$$f_\kappa\left(r_+(0), 0\right) \leq 1\,,$$

que em vista de (2.43), é implicado pela relação

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{j}\left(1 + \frac{1}{(p+1)\kappa}\right)^k \leq \kappa\left(1 + \frac{1}{(p+1)\kappa}\right)^{p+1} + \ln\kappa\,(p+1)\,. \tag{2.44}$$

Após um pouco de massagem, é possível mostrar que existe

$$\kappa_3 = \frac{p}{p+1}\exp\left\{-\frac{p-1}{4\,(p+1)}\left[1 + \left(1 + 2\left(1 + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p+1}\right)\right)^{-1}\right)^p\right]^{-1}\right\}$$

satisfazendo $\kappa_1 < \kappa_3 < \kappa_2$, tal que (2.44) é válida para $\kappa = \kappa_3$. Como

$$\kappa(p) \leq \kappa(\infty) = \exp\left\{\frac{-1}{4\,(1+e^{2\pi})}\right\} < 1$$

o resultado fica demonstrado. Os casos $p = 0$ e 1 podem ser obtidos diretamente, com $\kappa(0) = 1$ e $\kappa(2) = 1/2$.

□

Prova do Teorem 2.17. Seja p o menor inteiro para o qual a série

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|^{p+1}} \tag{2.45}$$

converge. Trataremos apenas o caso $p > 0$ uma vez que para $p = 0$ a prova segue de maneira análoga, porém mais simples. Pela desigualdade (2.36) e Lema 2.18, temos

$$p \leq \rho_1 \leq p + 1.$$

Suponha que $\rho_1 < \lambda < p+1$. Então pela Definição 2.16, existe uma constante $C = C(\lambda)$ tal que

$$n(r) \leq C r^{\lambda}, \tag{2.46}$$

para todo $r \geq 0$.

Segue do Lema 2.19 e equação (2.42), que o produto infinito (2.39) satisfaz, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = r$, a desigualdade

$$\begin{aligned}
\ln|\Pi(z)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{z}{\alpha_j}; p\right)\right| \\
&\leq \kappa' r^p \sum_{j:|\alpha_j|\leq r} \frac{1}{|\alpha_j|^p} + \kappa\, r^{p+1} \sum_{j:|\alpha_j|>r} \frac{1}{|\alpha_j|^{p+1}} \\
&= \kappa' r^p \int_0^r \frac{n(s)}{s^p} ds + \kappa\, r^{p+1} \int_r^{\infty} \frac{n(s)}{s^{p+1}} ds\,.
\end{aligned}$$

Usando (2.46) seguido de (2.40), temos

$$\begin{aligned}
\ln|\Pi(z)| &\leq (\kappa+\kappa')n(r) + p\kappa' r^p \int_0^r \frac{n(s)}{s^{p+1}} ds + (p+1)\kappa\, r^{p+1} \int_r^{\infty} \frac{n(s)}{s^{p+2}} ds \\
&\leq (\kappa+\kappa')n(r) + \left(Cp\kappa' r^p \int_0^r s^{\lambda-p-1} ds + (p+1)\kappa\, r^{p+1} \int_r^{\infty} \frac{1}{s^{p+2-\lambda}} ds\right) \\
&\leq C\left(\kappa+\kappa' + \frac{(p+1)\kappa}{p+1-\lambda} + \frac{p\kappa'}{\lambda-p}\right) r^{\lambda}\,,
\end{aligned} \tag{2.47}$$

implicando que a ordem de $\Pi(z)$ não excede λ e, portanto, não excede $\rho_1 = \sigma$ (devido ao Lema 2.18). Lembre que λ é um numero arbitrário tal que $\rho_1 < \lambda < p+1$.

Para $\rho_1 = p+1$, Π é um produto canônico e a série (2.45) converge por definição, de forma que

$$\lim_{r\to 0} \frac{n(r)}{r^{p+1}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\infty} \frac{n(s)}{s^{p+2}} ds < \infty\,.$$

Em vista disso, usando o mesmo procedimento,

$$\begin{aligned}
\ln|\Pi(z)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left|E\left(\frac{z}{\alpha_j};p\right)\right| \\
&\leq (\kappa+\kappa')n(r) + C\left(p\kappa' r^p \int_0^r s^{-\varepsilon} ds + (p+1)\kappa r^{p+1}\int_r^{\infty} \frac{1}{s^{1+\varepsilon}} ds\right) \\
&\leq C\left(\kappa+\kappa' + \frac{(p+1)\kappa}{\varepsilon} + \frac{p\kappa'}{1-\varepsilon}\right) r^{p+1-\varepsilon},
\end{aligned}$$

implicando que Π é no máximo da ordem $p+1$ de mínimo tipo.

□

2.5 Teorema de Hadamard

Nesta seção apresentaremos a versão refinada do Teorema da fatorização de Weierstrass devido a Hadamard. O refinamento, que se aplica somente às funções inteiras de ordem finita, consiste no seguinte

Teorema 2.21 *Uma função inteira $f(z)$ de ordem ρ finita pode ser representada na forma*

$$f(z) = e^{P(z)} G_0(z)$$

onde P é um polinômio de grau $q \leq \rho$ e

$$G_0(z) = z^{m_0} \prod_{j=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_j};p\right) \tag{2.48}$$

é o produto canônico de f com $\{\alpha_j\}$ suas raizes não nulas, m_0 a multiplicidade da raiz $z=0$ e $p \leq \rho$. Se ρ não for um inteiro, então ρ é igual a ordem σ de G_0 e $q \leq [\rho]$.[8] *Se ρ for um inteiro, então pelo menos uma das duas quantidades, q ou σ, é igual ρ.*

Na seção anterior, vimos que o Teorema 2.17 estabelece que $\rho_1 = \sigma \geq \rho'$ onde ρ' é a ordem de G_0. Para demonstrar o Teorema 2.21 a desigualdade oposta $\sigma \leq \rho'$ deve ser estabelecida. Para isso precisamos de um resultado conhecido como Teorema de Jensen.

Além disso, notamos que a ordem ρ de uma função f fornece apenas um limite superior para a densidade dos zeros de f. Um exemplo crítico é a função $e^{P(z)}$ da ordem do grau do polinômio P mas que não se anula em parte alguma do plano complexo. Uma dificuldade relacionada a esta questão é encontrar uma limitação inferior para $\ln|\Pi(z)|$ na forma (2.47).

[8] Denotamos a parte inteira de um número $x \in \mathbb{R}$ por $[x]$.

Teorema 2.22 *Seja $f(z)$ uma função inteira com $f(0) \neq 0$ e raizes $\{\alpha_j\}$. Então,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = \ln|f(0)| + N(r;f) \tag{2.49}$$

onde

$$N(r;f) = \sum_{j:|\alpha_j|\leq r} \ln|\alpha_j| = \int_0^r n(s)\,\frac{ds}{s}\,.$$

Prova. O Teorema de Jensen é um caso especial do princípio do argumento, que, por sua vez, é uma aplicação do Teorema do resíduo.

Seja $\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ o conjunto das raízes de f (contando multiplicidades) em D_r e suponha que não haja raízes na fronteira Γ de D_r. Então, existe uma função $F(z)$, que é regular e não se anula em D_r, tal que

$$f(z) = \prod_{j=1}^{m}(z-\alpha_j)\,F(z)\ .$$

Usando o Teorema do resíduo para a derivada logarítmica de f

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(z-\alpha_j)} + \frac{F'(z)}{F(z)}\,,$$

encontramos para integral de contorno

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = n(r;f)\,. \tag{2.50}$$

Note que, se C for um trajeto de z_1 até z_2, então

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \ln f(z_2) - \ln f(z_1) \\ &= \arg f(z_2) - \arg f(z_1) \equiv \Delta_C \arg f(z)\,. \end{aligned}\tag{2.51}$$

Portanto a integral (2.50) mede a variação do argumento da função f ao longo do contorno fechado Γ.

Em geral, se $g(z)$ for regular em D_r, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_0^r g(s)\,dn(s)\,. \tag{2.52}$$

O Teorema de Jensen segue tomando $g(z) = \ln z$ com uma escolha apropriada de Γ. Nesse caso, note que, integrando por partes o lado direito da equação (2.52), temos

$$\int_0^r \ln s\,dn(s) = \ln r\,n(r) + \int_0^r n(s)\,\frac{ds}{s}\,. \tag{2.53}$$

Como $\ln z$ assume multiplos valores, o contorno do lado esquerdo de (2.52) deve ser substituído por $\Gamma' = \Gamma + \mathcal{U}$ onde $\mathcal{U}$ é um trajeto rente ao eixo real positivo de $r - i0$ até $r+i0$, contornando a origem. O logarítmo é determinado de maneira tal que $\ln(-1) = i\pi$. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{U}} \ln z \, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^r \ln x \, \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx - \frac{1}{2\pi i}\int_0^r (\ln x + 2\pi i)\, \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \\ &= \int_0^r \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(0) - \ln f(r), \end{aligned} \tag{2.54}$$

e, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \ln z \, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma (\ln z \, \ln f(z)) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \ln f(z)\, \frac{dz}{z} \\ &= \ln f(r) + m\,(\ln r + 2\pi i) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f(re^{i\theta})\, d\theta \end{aligned} \tag{2.55}$$

Juntando as equações (2.53), (2.54) e (2.55), com $n(r) = m$, e tomando a parte real, obtem-se (2.49).

□

Teorema 2.23 *A ordem do produto canônico $G_0(z)$ é dada pelo expoente de convergência σ da seqüência $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$.*

Prova. Em vista do Teorema 2.17, basta mostrar que a ordem ρ' do produto canônico (2.39), satisfaz a desiguladade $\rho' \geq \sigma$.

Tomando o supremo sobre θ do integrando em (2.49), obtemos a desigualdade

$$\ln M(r;\Pi) \geq \ln|f(0)| + N(r;\Pi) \ , \tag{2.56}$$

que por sua vez pode ser limitada usando o fato que $\Pi(z)$ é de ordem ρ'.

Como $n(r)$ é monotono crescente, pela definição de $N(r)$ temos

$$\begin{aligned} N(r;\Pi) &= \int_0^r n(s)\,\frac{ds}{s} \\ &\geq \int_{r/e}^r n(s)\,\frac{ds}{s} \\ &\geq n\,(r/e)\int_{r/e}^r \frac{ds}{s} = n\,(r/e) \ . \end{aligned} \tag{2.57}$$

Combinando (2.56) e (2.57) com a Definição 2.16, e usando Lema 2.18, temos

$$\sigma = \rho_1 = \limsup_{r\to\infty} \frac{n(r/e)}{\ln r/e} \leq \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r;\Pi)}{\ln r} = \rho' \ , \tag{2.58}$$

de onde segue o resultado.

□

A seguir obteremos uma estimativa inferior para $\ln|\Pi(z)|$ do mesmo tipo que a estimativa superior (2.47).

Teorema 2.24 *Dado $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ e um número $k > 0$, considere a seqüência de discos $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ centrados em α_j e de raio α_j^{-k}:*

$$D_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_j| \le \alpha_j^{-k} \right\} .$$

Se $\Pi(z)$ é o produto canônico de gênero p cujos zeros são dados pela seqüência $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ de expoente σ, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C = C(\varepsilon, p)$, tal que a estimativa inferior

$$\ln|\Pi(z)| > -C\, |z|^{\sigma+\varepsilon} \tag{2.59}$$

é satisfeita para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_j D_j$.

Prova. Precisamos de mais algumas estimativas para o fator primário de Weierstrass. Fixamos $\beta = 2^{-1/(p+1)}$. Lema 2.3 implica na desigualdade

$$\ln|E(z;p)| > \ln\left(1 - |z|^{p+1}\right) \tag{2.60}$$

para $|z| \le \beta < 1$. Para $|z| > \beta$, tendo em vista que $|z|^j < \beta^{j-p}|z|^p$, $j \le p$, e procedendo de forma análoga a (2.42), temos

$$\begin{aligned} \ln|E(z;p)| &> \ln|1-z| - \sum_{j=1}^{p} \frac{|z|^j}{j} \\ &> \ln|1-z| - \beta^{-p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\beta^j}{j}\, |z|^p \\ &> \ln|1-z| - \kappa''\, |z|^p \, , \end{aligned} \tag{2.61}$$

onde $\kappa'' = 2\,(1 + \ln p)$.

O que segue é muito semelhante ao que fizemos na prova do Teorema 2.17:

$$\begin{aligned} \ln|\Pi(z)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \ln\left| E\left(\frac{z}{\alpha_j}; p\right)\right| \\ &> \sum_{j:|\alpha_j|<r/\beta} \left[\ln\left|1 - \frac{|z|}{|\alpha_j|}\right| - \kappa'' \left(\frac{r}{|\alpha_j|}\right)^p \right] + \sum_{j:|\alpha_j|\ge r/\beta} \ln\left(1 - \left(\frac{r}{|\alpha_j|}\right)^{p+1}\right) \\ &= \sum_{j:|\alpha_j|<r/\beta} \ln\left|1 - \frac{|z|}{|\alpha_j|}\right| - \kappa'' r^p \int_0^{r/\beta} \frac{1}{s^p} dn(s) + \int_{r/\beta}^{\infty} \ln\left(1 - \left(\frac{r}{s}\right)^{p+1}\right) dn(s) \, , \end{aligned}$$

Integrando por partes as duas integral acima, e levando em conta que para $s > r/\beta$, temos

$$s^{p+1} - r^{p+1} > s^{p+1} - (\beta s)^{p+1} = \frac{s^{p+1}}{2},$$

devido a definição de β, podemos estimar a equação acima por

$$\ln|\Pi(z)| > \sum_{j:|\alpha_j|<r/\beta} \ln\left|1 - \frac{|z|}{|\alpha_j|}\right| - B(r/\beta) \tag{2.62}$$

onde $B(r)$ é o lado direito da primeira equação em (2.47) com $\kappa = 2$ e κ' substituído por $2\kappa''$. Na prova do Teorema 2.17, ficou estabelecido que, dado $\varepsilon > 0$,

$$B(r) \leq C\, r^{\sigma+\varepsilon} \tag{2.63}$$

para todo $r \geq 0$, contanto que a constante $C = C(\varepsilon, p)$ seja escolhida convenientemente.

Resta–nos, portanto, estimar o somatório em (2.62) . Para $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_j D_j$, temos

$$\begin{aligned} -\ln\left|1 - \frac{|z|}{|\alpha_j|}\right| &= -\ln\left||\alpha_j| - |z|\right| + \ln|\alpha_j| \\ &\leq (k+1)\ln|\alpha_j| \,, \end{aligned}$$

de onde segue

$$\begin{aligned} -\sum_{j:|\alpha_j|<r/\beta} \ln\left|1 - \frac{|z|}{|\alpha_j|}\right| &\leq (k+1)\int_0^{r/\beta} \ln s\, dn(s) \\ &= (k+1)\left\{n(r/\beta)\ln r/\beta - N(r/\beta)\right\} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Como ambos termos $n(r)$ e $N(r)$ satisfazem uma estimativa da forma (2.63), Teorema 2.24 segue das equações (2.62), (2.63) e (2.64).

□

Prova do Teorema 2.21. Equação (2.8) é a forma mais geral de uma função inteira G. Se f é uma função da ordem ρ, podemos escrevê–la como

$$f(z) = e^{h(z)}\, G_0(z)\,,$$

com G_0 o produto canônico (2.48). Segue dos Teoremas 2.23 e 2.24 que G_0 é da ordem do expoente de convergência σ dos zeros de f e satisfaz (2.59) para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_j D_j$. Além disso, temos $\sigma \leq \rho$ em vista do fato que a estimativa (2.58) pode ser aplicada com f no lugar de Π.

Para provar o Teorema *2.21, resta–nos mostrar* que $h(z)$ é um polinômio de ordem $p \leq \rho$. Para isso vamos usar a estimativa inferior (2.59). Se no Teorema 2.24 k for tal que a soma

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|^k}$$

dos raios das regiões excluídas D_j é finita (basta tomar $k > \sigma$), então existe uma seqüência de números positivos $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{j\to\infty} R_j = \infty$ para os quais a estimativa (2.59) é válida para $|z| = R_j$. Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar constante $C_1 = C_1(\varepsilon)$ e $C_2 = C_2(\varepsilon)$ tais que

$$\begin{aligned} \Re e\ (h(z)) &= \ln|f(z)| - \ln|\Pi(z)| - m_0 \ln|z| \\ &< C_1\ |z|^{\rho+\varepsilon} + C_2\ |z|^{\sigma+\varepsilon} \end{aligned}$$

é satisfeita para todo z tal que $|z| = R_j$ com $j \geq 1$.

Agora, por um resultado análogo ao Teorema de Liouville, se a parte real de h não cresce mais rápido que um polinômio para uma seqüência de pontos que acumula no infinito, então h é um polinômio de grau $p \leq \max(\rho, \sigma) = \rho$, concluindo a prova do Teorema *2.21.*

□

Observação 2.25 *Segue do Teorema 2.21 que se ρ não for inteiro, então f é de mínimo, a ou máximo tipo conforme a densidade superior Δ dos zeros de f assume, respectivamente, os valores* 0, *a ou* ∞. *Esta conclusão não é válida se ρ for inteiro como pode ser visto pelos Exemplos 2.9 e 2.10. Em ambos exemplos $n(r) = O(r)$ implicando em Δ finito. Entretanto,* $\sin \pi z$ *é da ordem* 1 *de tipo normal e* $\Gamma^{-1}(z)$ *é da ordem* 1, *contudo, pela conhecida fórmula de Stirling,*

$$\ln \Gamma^{-1}(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

de máximo tipo.

3

Caracterização das Funções de Hermite–Biehler

Se as raízes de um polinômio P são reais, então, pelo Teorema de Rolle, todas as raízes do polinômio P' são reais e se entrelaçam com as raízes de P. O Teorema de Rolle também se aplica às funções inteiras reais[1] f de ordem finita exceto que o entrelaçamento entre as raízes de f e f' pode não ocorrer no intervalo contendo a origem (veja Teorema 14.3.1 em [H]).

O objetivo deste capítulo é caracterizar uma classe de funções inteiras com zeros no semi–plano $\Im m\, z \geq 0$ e cuja derivada pertence a esta mesma classe. Para isso introduziremos a classe de funções $\overline{HB}$ de Hermite–Biehler. As funções inteiras que são aproximadas uniformemente por polinômios tem um papel importante nesta caracterização. Seguiremos aqui a teoria desenvolvida em parte por Laguerre e posteriormente completada por Lindwart e Pólya.

Faremos uma descrição detalhada da subclasse P^* das funções de Hermite–Biehler que são obtidas como limite uniforme de polinômios com raízes no semi–plano superior. Veremos, em particular que as funções $f \in P^*$ preservam as relações de majoração e subordinação.

Praticamente todos estes resultados obtidos serão, em seguida, estendidos para a classe das funções inteiras $\overline{HB}_n$ de Hermite–Biehler de n variáveis. Descreveremos, em particular, as condições necessária e suficientes para que uma função inteira $f(\mathbf{z})$ pertença a subclasse P_n^* das funções de $\overline{HB}_n$ que são aproximadas uniformemente por polinômios nas n variáveis $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ e cujas raízes se encontram no poli–semi–plano superior $\Im m\, z_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Estudaremos também a forma geral dos Γ^*–operadores multilineares que preservam a relação de majoração em P_n^*.

[1] Uma função inteira f é dita ser real se $f(x)$ assumir valores reais para todo $x \in \mathbb{R}$. A série de potência de uma função real é formada com coeficientes reais.

3.1 Teorema de Hermite–Biehler

Um polinômio

$$W(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

com coeficientes complexos $c_j = a_j + ib_j$, pode sempre ser escrito na forma

$$W(z) = P(z) + iQ(z) \tag{3.1}$$

onde P e Q são polinômios reais com coeficientes a_j e b_j, $j = 1, \ldots, n$, respectivamente.

Para que $W(z)$ não tenha raízes no semi–plano inferior $\Im m\, z \leq 0$, é necessário e suficiente, segundo o Teorema de Hermite–Biehler, que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1. As raízes de P e Q são todas reais, simples e entrelaçadas.[2]

2. A relação

$$Q'(x_0)\, P(x_0) - Q(x_0)\, P'(x_0) > 0 \tag{3.2}$$

   seja satisfeita para algum número $x_0 \in \mathbb{R}$.

Observe que, devido ao entrelaçamento das raizes, se a relação (3.2) for satisfeita em x_0, então é satisfeita em todo eixo real. Para isso, seja $\{\alpha_j\}_{j=1}^{m}$ e $\{\beta_j\}_{j=1}^{m}$ as raízes dos polinômios P e Q, respectivamente, tais que

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \beta_m.$$

Como a diferença entre os números $x - \alpha_j$ e $x - \beta_j$ tem o mesmo sinal, $\beta_j - \alpha_j > 0$, qualquer que seja $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $x \in \mathbb{R}$, a diferença das recíprocas destes números $(x - \alpha_j)^{-1} - (x - \beta_j)^{-1}$ é sempre negativa.[3] Portanto,

$$\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{(x - \alpha_j)} - \frac{1}{(x - \beta_j)} \right) < 0, \tag{3.3}$$

implicando a desigualdade (3.2) para todo $x \in \mathbb{R}$.

Com a finalidade de estender o Teorema de Hermite–Biehler para as funções inteiras, a seguinte classe de funções é relevante.

[2] Dois polinômio têm raízes entrelaçadas se entre duas raízes sucessivas de um polinômio existe apenas uma raiz do outro.

[3] $b - a > 0 \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow b^{-1} < a^{-1} \Leftrightarrow b^{-1} - a^{-1} < 0$.

Definição 3.1 *Uma função inteira $f(z)$ é dita ser da classe HB se nenhuma de suas raízes estiver no semi-plano inferior $\Im m\, z \leq 0$, e se*

$$\left|\frac{f(z)}{\overline{f}(z)}\right| < 1 \tag{3.4}$$

para todo z tal que $\Im m\, z > 0$. Aqui $\overline{f}(z)$ é a função inteira obtida a partir da série de potência de $f(z)$ pela substituição dos coeficientes $c_n = a_n + ib_n$ de $f(z)$ por seu complexo conjugado $\overline{c}_n = a_n - ib_n$.

De maneira análoga a (3.1), escrevemos

$$f(z) = A(z) + iB(z)\,,$$

onde A e B são funções reais inteiras com série de potência formada pelos coeficientes a_n e b_n, respectivamente. Segue desta decomposição que $\overline{f}(z) = A(z) - iB(z)$. Além disso, se

$$h(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\,, \tag{3.5}$$

então a condição necessária e suficiente para que a função

$$w(z) = \frac{f(z)}{\overline{f}(z)} = \frac{1 + ih(z)}{1 - ih(z)}$$

mapeie o semi–plano superior $\Im m\, z > 0$ no interior do círculo unitário é que h mapeie o semi–plano superior $\Im m\, z > 0$ nele mesmo. Para isso, note que

$$\left|\frac{1 + ih}{1 - ih}\right|^2 = \frac{(1 - \Im m\, h)^2 + (\Re e\, h)^2}{(1 + \Im m\, h)^2 + (\Re e\, h)^2} < 1$$

se, e somente se $\Im m\, h > 0$.

Consequentemente, para que uma função $f = A + iB$ seja da classe HB, a condição necessária e suficiente é que a função meromórfica (3.5) seja representada como no seguinte teorema.

Teorema 3.2 *Uma função meromórfica $h(z)$ mapeia o semi-plano superior $\Im m\, z > 0$ nele mesmo se, e somente se, puder ser escrita na forma*

$$h(z) = c\frac{z - \alpha_0}{z - \beta_0} \prod_{j \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\beta_j}\right) \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right)^{-1}, \tag{3.6}$$

onde $c > 0$ e $\alpha_j < \beta_j < \alpha_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, com $\beta_{-1} < 0 < \alpha_1$.

Prova. Vamos inicialmente mostrar que a condição de entrelaçamento de α_j e β_j implica na convergência do produto infinito (3.6). De acordo com os Lemas 2.6 e 2.7, o produto converge uniformemente para uma função meromórfa se, e somente se, a série

$$\sum_{j\neq 0}\left\{\left(1-\frac{z}{\beta_j}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_j}\right)^{-1}-1\right\}=\sum_{j\neq 0}\left(1-\frac{z}{\alpha_j}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\alpha_j}-\frac{1}{\beta_j}\right)$$

convergir uniformemente em toda região fechada e limitada de $\mathbb{C}$ que não contenha os pontos $\{\alpha_j\}$. Para isso, pelo teste de Weierstrass, basta mostrar que a série numérica

$$s=\sum_{j\neq 0}\left(\frac{1}{\alpha_j}-\frac{1}{\beta_j}\right)$$

é convergente. Seja $\varepsilon_1=\min_j(\alpha_{j+1}-\alpha_j)$, $\varepsilon_2=\min_j(\beta_{j+1}-\beta_j)$ e $M=\max_j(\beta_j-\alpha_j)$. Se $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, temos $|\alpha_j\beta_j|\geq\varepsilon^2|j|^2$ e

$$s=\sum_{j\neq 0}\frac{\beta_j-\alpha_j}{\alpha_j\beta_j}\leq\frac{2M}{\varepsilon^2}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2M}{3\varepsilon^2}\,,$$

concluindo a demonstração da convergência.

Além disso, para cada j fixo, o argumento

$$\phi_j=\arg\frac{1-\dfrac{z}{\beta_j}}{1-\dfrac{z}{\alpha_j}}=\arg(z-\beta_j)-\arg(z-\alpha_j)$$

é igual ao ângulo subentendido pelo segmento $[\alpha_j,\beta_j]$ do eixo real que forma a base do triângulo com vértice em z. Da condição de entrelaçamento segue

$$0<\arg h(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi_j<\pi\,,$$

provando, desta forma, a condição suficiente do teorema.

Suponha agora que $h(z)$ mapeie o semi–plano superior $\Im m\, z>0$ nele mesmo. Então

$$0\leq\arg h(z)\leq\pi\,,$$

e pelo princípio do argumento, a função $h(z)$ não tem polos ou zeros nesse semi–plano pois, caso contrário, a variação do argumento $\Delta_{\mathcal{C}}\arg h(z)$ ao longo de um contorno fechado $\mathcal{C}$ contendo um polo ou zero de h causaria um acréscimo de 2π (veja equações (2.50) e (2.51)). A função $h(z)$ também não tem polos ou zeros no semi–plano inferior $\Im m\, z<0$, por simetria. Os polos e zeros de $h(z)$ se encontram, portanto, no eixo real.

Para $\Im m\, z < 0$, temos

$$-\pi < \arg h(z) < 0\,,$$

e a variação do argumento $\Delta_{\mathcal{C}} \arg h(z)$ ao longo de qualquer circuito fechado $\mathcal{C}$, incluindo segmentos do eixo real, não pode exceder 2π em valor absoluto. Como a contribuição para o argumento devido aos polos tem sinal contrário da contribuição devido aos zeros,

$$\Delta_{\mathcal{C}} \arg h(z) = 2\pi\,(n - m)\ ,$$

com n e m o número de zeros e de polos, respectivamente, segue que os zeros e os polos devem estar entrelaçados uns aos outros.

Considere agora o produto infinito

$$k(z) = \frac{z-\alpha_0}{z-\beta_0} \prod_{j\neq 0} \left(1 - \frac{z}{\beta_j}\right) \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right)^{-1}\,,$$

cujos zeros e polos coincidem com os de $h(z)$. O produto infinito converge para uma função meromórfica que mapeia o semi–plano superior $\Im m\, z > 0$ nele mesmo. A função

$$\chi(z) = \frac{h(z)}{k(z)}$$

é uma função inteira que não se anula em nenhuma região do plano complexo e satisfaz

$$|\arg \chi(z)| \leq |\arg h(z)| + |\arg k(z)| \leq 2\pi\,.$$

Por conseguinte, a função $u(z) = \ln \chi(z)$ mapeia o plano complexo na faixa contendo o eixo real $|\Im m\, u| \leq 2\pi$ e, pelo Teorema de Liouville, u é uma constante, concluindo a prova do Teorema 3.2.

□

Observação 3.3 *Segue do Teorema 3.2 e da argumentação que o antecede, que se $f \in HB$ e se A e B forem representadas em termos de seus produtos canônicos*

$$A(z) = a\, e^{P(z)}\,(z-\alpha_0) \prod_{j\neq 0} E\left(\frac{z}{\alpha_j}; p\right)$$

e

$$B(z) = b\, e^{Q(z)}\,(z-\beta_0) \prod_{j\neq 0} E\left(\frac{z}{\beta_j}; p\right)$$

com $P(0) = Q(0) = 0$, então $b/a = c > 0$ e

$$Q(z) - P(z) + \sum_{j\neq 0} \left\{ \frac{z}{\beta_j} + \cdots + \left(\frac{z}{\beta_j}\right)^p - \frac{z}{\alpha_j} - \cdots - \left(\frac{z}{\alpha_j}\right)^p \right\} = 0\,.$$

A classe de funções HB, de acordo com a Definição 3.1, exclui a possibilidade de ter zeros no eixo real. A seguinte definição permite essa possibilidade.

Definição 3.4 *Uma função inteira $f(z)$ é dita ser da classe $\overline{HB}$ se não tiver raízes no semi-plano inferior aberto $\Im m\, z < 0$ e satisfaz a condição*

$$\left|\frac{f(z)}{\overline{f}(z)}\right| \leq 1\,, \tag{3.7}$$

para $\Im m\, z > 0$

Note que a razão em (3.7) pode assumir valores na circunferência de raio unitário. Note também que as raízes comuns a $f(z)$ e $\overline{f}(z)$ são reais. Então, se $\Pi(z)$ é o produto canônico associado a estas raízes, $f(z) = \Pi(z)\, g(z)$ é da classe $\overline{HB}$ se, e somente se, $g(z) \in HB$. Convém notar ainda que, se $\{f_n\}$ for uma seqüência de funções da classe $\overline{HB}$ que converge uniformemente para f em cada região compacta de $\mathbb{C}$, então $f \in \overline{HB}$.

Antes de enunciaremos uma versão do Teorema de Hermite–Biehler para funções inteiras introduziremos a seguinte

Definição 3.5 *Duas funções reais inteiras $A(z)$ e $B(z)$ formam um* ***par real*** *de funções se*

1. *A e B não têm zeros comuns;*
2. *os zeros de qualquer combinação linear $\mu A(z) + \nu B(z)$, com coeficientes μ e ν reais, forem reais.*

$A(z)$ e $B(z)$ formam um ***par real generalizado*** *se somente a condição 2. for satisfeita.*

Teorema 3.6 *Para que uma função $f(z) = A(z) + iB(z)$ seja da classe HB ($\overline{HB}$) é necessário e suficiente que A e B formem um par real (generalizado) e que a relação*

$$B'(x_0)\, A(x_0) - B(x_0)\, A'(x_0) > 0 \tag{3.8}$$

seja satisfeita para algum $x_0 \in \mathbb{R}$.

Prova. Para provar o Theorema 3.6, basta notar que, se A e B formam um par real, $h(z) = B(z)/A(z)$ não assume valores reais se $\Im m\, z \neq 0$[4] e, em vista do fato que (3.8) implica $h'(z) > 0$, $h(z)$ mapeia o semi-plano superior nele mesmo (veja equação (3.3)). Assim $w(z) = (1 + ih(z))\,/\,(1 - ih(z))$ satisfaz (3.7) ou (3.4) dependendo se A e B não tenha ou tenha raízes reais comuns, respectivamente. Por conseguinte, $f(z) \in HB$ ($\overline{HB}$).

A condição necessária é provada revertendo os passos anteriores. Se $f(z) \in HB$ ($\overline{HB}$), então $f(z)$ e $\overline{f}(z)$ não têm zeros complexos em comum e satisfaz a desigualdade (3.4)

[4]Suponha o contrário, $h(z_0) = B(z_0)/A(z_0) = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\Im m\, z_0 \neq 0$. Então $\alpha A(z_0) - B(z_0) = 0$ e a hipótese de A e B serem pares reais é violada.

(ou (3.7)). Então, as funções reais $A(z)$ e $B(z)$ também não têm zeros complexos em comum e a razão $h(z) = B(z)/A(z)$ é uma função holomórfica no semi–plano superior com $\Im m\, h(z) > 0$ para $\Im m\, z > 0$. Assim, $h(z)$ toma valores reais apenas no eixo real e os zeros da combinação linear $\mu A(z) + \nu B(z)$, com μ, $\nu \in \mathbb{R}$, são reais, concluindo a prova do Teorema 3.6.

□

3.2 Funções Uniformemente Aproximadas por H–Polinômios

Uma classe especial de funções inteiras pode ser obtida considerando o limite de seqüências de polinômios, uniformemente convergente em todo domínio limitado e fechado de $\mathbb{C}$, e cujas raízes pertencem a um determinado conjunto. Os primeiros estudos nesta direção foram desenvolvidos por Laguerre. Os trabalhos de Laguerre e Pólya, caracterizaram completamente a classe de funções que são aproximadas uniformemente por polinômios com raízes reais. Posteriormente, Lindwart e Pólya mostraram que a convergência uniforme de polinômios em algum disco D_R implica na convergência uniforme em qualquer subconjunto limitado do plano complexo.

Iniciaremos com o seguinte

Lema 3.7 *O conjunto de polinômios*

$$\begin{aligned} P_m(z) &= \prod_{j=1}^{n_m} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{j,m}}\right) \\ &= 1 + c_{1,m} z + \cdots + c_{n_m,m} z^{n_m} \end{aligned} \tag{3.9}$$

satisfazendo as condições

$$\sum_{j=1}^{n_m} |\alpha_{j,m}|^{-\rho} < M \tag{3.10}$$

e $|c_{j,m}| < M$ *para todo* $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *com* $\rho - 1 \le p < \rho$, *forma uma família normal em* $\mathbb{C}$. [5]

Prova. Pelo Lemma 2.19 e equação (2.42), o fator primário de Weierstrass satisfaz a desigualdade global

$$E(w; p) \le e^{\kappa |w|^{\rho}}, \tag{3.11}$$

[5] Uma família $\{f_n\}$ de funções regulares em um domínio D é dita ser normal em D se a cada seqüência de funções desta família contiver uma subseqüência que converge uniformemente em cada região limitada e fechada de D.

com $\kappa = \kappa(\rho)$, para algum ρ tal que $p < \rho \leq p+1$. Segue das definições (2.9) e (3.9)

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n_m} E\left(\frac{z}{\alpha_{j,m}};p\right) &= P_m(z)\prod_{j=1}^{n_m}\exp\left\{\frac{z}{\alpha_{j,m}}+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{\alpha_{j,m}}\right)^p\right\} \\ &= P_m(z)\exp\left\{s_{1,m}z+\cdots+\frac{1}{p}s_{p,m}z^p\right\}, \qquad (3.12)\end{aligned}$$

onde

$$s_{k,m} = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_{j,m}^{-k} \qquad (3.13)$$

é a k-ésima soma de Newton. Aplicando a desigualdade (3.11) em (3.12), tendo em vista (3.10), resulta

$$P_m(z)\exp\left\{s_{1,m}z+\cdots+\frac{1}{p}s_{p,m}z^p\right\} \leq \exp\left\{\kappa M\,|\,z|^\rho\right\}. \qquad (3.14)$$

Usando recursivamente as fórmulas de Newton

$$kc_{k,m}+c_{k-1,m}s_{1,m}+\cdots+c_{1,m}s_{k-1,m}+s_{k,m}=0\,,$$

$k = 1,2,\ldots,n_m$, podemos expressar $s_{k,m}$ em termos dos coeficientes de P_m:

$$\begin{aligned} s_{1,m} &= -c_{1,m} \\ s_{2,m} &= -2c_{2,m}+c_{1,m}^2 \\ s_{3,m} &= -3c_{3,m}+3c_{1,m}c_{2,m}-c_{1,m}^3 \\ s_{4,m} &= -4c_{4,m}+4c_{1,m}c_{3,m}+2c_{2,m}^2-4c_{1,m}^2c_{2,m}+c_{1,m}^4\,, \end{aligned} \qquad (3.15)$$

e assim por diante. Como $c_{j,m}$ é uniformemente limitado por M, existe constantes σ_j, $j = 1,\ldots,p$, tais que

$$|s_{j,m}| < \sigma_j\,.$$

Substituindo esta limitação em (3.14), temos

$$|P_m(z)| \leq \exp\left\{\sigma_1\,|z|+\cdots+\frac{1}{p}\sigma_p\,|z|^p+\kappa M\;|z|^\rho\right\},$$

implicando que $\{P_m\}$ é um conjunto de polinômios limitados em cada região compacta do plano, constituindo, por sua vez, uma família normal em $\mathbb{C}$.

□

Observação 3.8 *Devido ao fato de $\{P_m(z)\}$ ser uma família normal, a convergência uniforme para $f(z)$ em alguma vizinhança da origem implica, por um Teorema de Stieltjes, na convergência uniforme em cada domínio limitado. Se ρ em (3.10) não for um* *inteiro, então o gênero p da função inteira limite $f(z)$ não excede a parte inteira $[\rho]$ de ρ. Se ρ for um inteiro, então*

$$f(z) = e^{-\gamma z^{\rho}}\Phi(z) \tag{3.16}$$

onde γ é uma constante e Φ é uma função inteira cujo gênero não excede $\rho - 1$.

Teorema 3.9 *Para que uma função inteira $f(z)$ seja uniformemente aproximada, em cada domínio limitado, por polinômios cujas raízes se encontram no setor $S(\theta_1, \theta_2) = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$, com $|\theta_2 - \theta_1| < \pi$, é necessário e suficiente que f seja representada por*

$$f(z) = cz^m e^{-\sigma z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) \tag{3.17}$$

onde $\{\alpha_j\}$ são os zeros de f em $S(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1 \leq -\arg\sigma \leq \theta_2$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_j|} < \infty\,.$$

Note que, devido a condição $|\theta_2 - \theta_1| < \pi$, o Teorema 3.9 não inclui o caso de maior interesse no qual as raízes dos aproximantes se encontram todas no eixo real. A inclusão deste resultado no texto ocorre por razões pedagógicas. O teorema pode ser colocado no contexto da classe HB das funções de Hermite–Biehler se o setor $S(\theta_1, \theta_2)$ estiver inteiramente contido no semi–plano superior $\Im m\, z > 0$. Note que a representação (3.17) é do tipo exponencial.[6] A seguir, demonstraremos o Teorema 3.9 brevemente.

Prova. Sem perda de generalidade, vamos assumir que os polinômios aproximantes

$$P_m(z) = 1 + c_{1,m}z + \cdots + c_{n_m,m}z^{n_m}\,,$$

não se anulam em uma vizinhança da origem e que $P_m(0) = 1$. Vamos ainda assumir que $\theta_1 = -\pi + \delta_1$ e $\theta_2 = \pi - \delta_1$ para algum $\delta_1 > 0$.

Segue da hipótese de convergência de P_m em algum disco D_R, que $\lim\limits_{m\to\infty} c_{k,m} = c_k$. Em particular, para $k = 1$ temos $|c_{1,m}| < M$, e em vista das formulas (3.15) e (3.13),

$$\sum_{k=1}^{n_m}\Im m\,\frac{1}{\alpha_{k,m}} \leq \left|\sum_{k=1}^{n_m}\frac{1}{\alpha_{k,m}}\right| < M\,.$$

Usando a desigualdade $|\alpha_{j,m}|^{-1}\sin\delta < \Im m\,\alpha_{j,m}^{-1}$, temos

$$\sum_{k=1}^{n_m}\frac{1}{|\alpha_{k,m}|} < \frac{M}{\sin\delta}\,.$$

[6] Uma função inteira $f(z)$ é do tipo exponencial se f não exceder o tipo normal da ordem 1.

Lema 3.7 e Observação 3.8 implicam que a seqüência $\{P_m\}$ converge uniformemente em cada região limitada e fechada do plano complexo para

$$f(z) = ce^{-\sigma z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right),$$

com os zeros α_j sendo limites das raízes de P_m e, por conseguinte, satisfazem $-\pi + \delta_1 \leq \arg \alpha_j \leq \pi - \delta_1$. Por uma argumento um pouco mais extenso, pode–se mostrar também que $-\pi + \delta_1 < -\sigma < \pi - \delta_1$, concluindo a prova do Teorema 3.9.

□

Consideremos agora o caso mais delicado, $|\theta_2 - \theta_1| \leq \pi$, porém mais importante.

Definição 3.10 *Um polinômio que tem o semi–plano inferior aberto $\Im m\, z < 0$ livre de raízes é denominado H–polinômio.*

Note que, se as raízes $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ de um polinômio $P(z)$ são tais que $\Im m\, \alpha_j \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \left|\frac{P(z)}{\overline{P}(z)}\right| &= \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z - \alpha_j}{z - \overline{\alpha_j}}\right| \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left\{\frac{[\Re e\,(z - \alpha_j)]^2 + [\Im m\,(z - \alpha_j)]^2}{[\Re e\,(z - \alpha_j)]^2 + [\Im m\,(z + \alpha_j)]^2}\right\}^{1/2} \leq 1\,, \end{aligned} \tag{3.18}$$

para $\Im m\, z > 0$. Assim, um H–polinômio $P(z)$ pertence a classe $\overline{HB}$.

Teorema 3.11 *Se uma seqüência $\{P_m(z)\}$ de H –polinômios converge uniformemente em alguma vizinhança D_δ da origem para uma função $f(z)$ não nula, então converge uniformemente em cada domínio limitado de $\mathbb{C}$. A função limite f pertence à classe $\overline{HB}$, e pode ser representada por*

$$f(z) = cz^m e^{-\gamma z^2 + \beta z} \prod_{j=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_j}; 1\right), \tag{3.19}$$

onde $\gamma \geq 0$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|^2} < \infty\,.$$

Além disso, se as raízes dos H–polinômios forem todas reais, então os zeros de $f(z)$ são reais e $\Im m\, \beta = 0$.

Prova. A seqüência de polinômios $\{Q_m(z)\}$ dada por

$$\begin{aligned} Q_m(z) &= \frac{P_m(z - ia)}{P_m(-ia)} \\ &= 1 + c_{1,m} z + \cdots + c_{n_m,m} z^{n_m}\,, \end{aligned}$$

com $0 < a < \delta$, converge uniformemente no disco $D_{\delta-a}$. Consequentemente, os coeficientes $c_{j,m}$ tendem a um limite quando $m \to \infty$ e existe $0 \leq M < \infty$ tal que $|c_{1,m}| < M$ para todo $m \in \mathbb{N}_+$.

Tomando a parte imaginária da primeira equação de (3.15) e considerando que as raízes de um H–polinômio localizam-se no semi–plano superior, temos

$$\begin{aligned}\Im m \sum_{j=1}^{n_m} \frac{1}{\alpha_{j,m} + ia} &= \Im m \sum_{j=1}^{n_m} \frac{\overline{\alpha}_{j,m} - ia}{|\alpha_{j,m}|^2 + a^2} \\ &= -\sum_{j=1}^{n_m} \frac{\Im m\, \alpha_{j,m} + a}{|\alpha_{j,m}|^2 + a^2} \\ &= -\Im m\, c_{1,m}\,,\end{aligned}$$

de onde se conclui

$$\sum_{j=1}^{n_m} \frac{a}{|\alpha_{j,m}|^2 + a^2} \leq \sum_{j=1}^{n_m} \frac{\Im m\, \alpha_{j,m} + a}{|\alpha_{j,m}|^2 + a^2} < M\,,$$

implicando que a seqüência de polinômios $\{Q_m(z)\}$ satisfaz a condição (3.10) do Lema 3.7 com $\rho = 2$. Pelo Lema 3.7 e Observação 3.8, esta seqüência converge uniformemente em cada região limitada e fechada do plano para a função $f(z - ia)/f(-ia)$ que admite ser representada por (3.16) com $\rho = 2$. Logo, $f(z)$ tem a forma (3.19).

Agora, $f(z) \in \overline{HB}$ pois é o limite uniforme de uma seqüência de H–polinômios, que por sua vez, pertencem a classe $\overline{HB}$. Resta, portanto, mostrar que $\gamma \geq 0$.

Inicialmente, suponhamos que as raízes de P_m são reais e, sem perda de generalidade, que $f(z)$ não se anule na origem ($m = 0$ em (3.19)). Usando a segunda equação de (3.15), temos

$$s_{2,m} = \frac{-P''_m(0)\, P_m(0) + P'^2_m(0)}{P^2_m(0)} = \sum_{j=1}^{n_m} \frac{1}{\alpha^2_{j,m}}$$

e, devido a (3.19),

$$s_2 = \frac{-f''(0)\, f(0) + f'^2(0)}{f^2(0)} = 2\gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2}\,. \tag{3.20}$$

Como os coeficientes da série de potência de P_m tendem a um limite, para todo inteiro positivo N, temos

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\alpha_j^2} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\alpha^2_{j,m}} \leq \lim_{m\to\infty} s_{2,m} = s_2\,,$$

que, comparando com (3.20), implica na desigualdade

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2} \leq 2\gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^2}$$

satisfeita somente se $\gamma \geq 0$.

Note que, no caso de raízes reais, $\beta + \sum_j \alpha_j^{-1} = \lim_{m\to\infty} \sum_j \alpha_{j,m}^{-1} = s_1$ é real.

No caso em que nem todas as raízes de P_m são reais, escrevemos

$$P_m(z) = R_m(z) + iS_m(z) \tag{3.21}$$

onde os polinômios reais R_m e S_m, convergem uniformemente em cada região limitada e fechada do plano complexo para R e S, que por sua vez, devido ao Teorema de Hermite–Biehler 3.6 e da Obeservação 3.3, possuem raízes reais entrelaçadas, e podem também serem representados na forma (3.19). A conclusão do Teorema 3.11 segue de maneira análoga ao caso anterior.

□

Observação 3.12 *O conjunto dos H-polinômios (3.21) tais que $|P_m(0)| \geq c_0$, $|P'_m(0)| \leq c_1$ e $|P''_m(0)| \leq c_2$, com c_0, c_1 e c_2 constantes positivas quaisquer, forma uma família normal. Note para isso que, uma entre as duas somas*

$$\sum_{j=1}^{n_m} \frac{1}{\xi_{j,m}^2} = \frac{-R''_m(0)\, R_m(0) + R'^2_m(0)}{R_m^2(0)}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n_m} \frac{1}{\eta_{j,m}^2} = \frac{-S''_m(0)\, S_m(0) + S'^2_m(0)}{S_m^2(0)}$$

é limitada por $M = 2\left(c_1^2 + c_0 c_2\right)/c_0^2$, onde $\alpha_{j,m} = \xi_{j,m} + i\eta_{j,m}$. Entretanto, devido ao entrelaçamento das raízes, ambas somas são limitadas.

Definição 3.13 *Denominamos por P^*, a subclasse de $\overline{HB}$ das funções inteiras $f(z)$ que são representadas na forma*

$$f(z) = e^{-\gamma z^2}\Phi(z)$$

com $\gamma \geq 0$ e $\Phi(z)$ uma função inteira de gênero não excedendo 1.

O resultado a seguir caracteriza completamente as funções inteiras que são limites uniformes de H–polinômios, e desempenham um papel de grande importância na generalização do Teorema de Lee–Yang.

Teorema 3.14 *Para que uma função inteira $f(z)$ seja o limite de uma seqüência de H–polinômios $\{P_m(z)\}$ uniformemente convergente, é necessário e suficiente que f pertença à classe P^*.*

Prova. O Teorema 3.11 fornece a condição necessária. Para a demonstração da condição suficiente vamos proceder da seguinte forma. Para cada $\varepsilon > 0$, $R > 0$ e $f \in P^*$ veremos que é possivel escolher um H–polinômio $P_n(z)$ tal que $|f(z) - P_n(z)| \leq \varepsilon$ para $|z| \leq R$ e todo n suficientemente grande.

Uma função inteira $f(z)$ da classe P^*, devido ao fato que (veja ref. [L], Teoremas 1 e 2, cap. V)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\eta_j|} < \infty ,$$

admite ser representada por

$$f(z) = cz^m e^{-\gamma z^2 + (\delta + i\nu)z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) e^{z/\xi_j} ,$$

onde $\delta \in \mathbb{R}$, $\gamma, \nu \geq 0$ e $\alpha_j = \xi_j + i\eta_j$. Segue desta representação que, para $|z| \leq R$,

$$f_n(z) = cz^m e^{-\gamma z^2 + (\delta + i\nu)z} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) e^{z/\xi_j} ,$$

satisfaz $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/2$ escolhendo n suficientemente grande.

Por outro lado, cada polinômio da forma

$$P_n(z) = cz^m \left(1 - \frac{\gamma z^2}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{\sigma_n z}{k_n}\right)^{k_n} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right) ,$$

é um H–polinômio e se k_n for suficientemente grande, temos $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/2$. Segue das duas desigualdades

$$|f(z) - P_n(z)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - P_n(z)| < \varepsilon ,$$

provando a afirmação e concluindo a prova do Teorema 3.14

□

Observação 3.15 *Em termos da decomposição $f(z) = R(z) + iS(z)$ o Teorema 3.14 pode ser refraseado da seguinte forma: $f \in P^*$ se, e somente se, f for da classe $\overline{HB}$ e R, S da classe P^*.*

3.3 Transformações de Funções Inteiras com Zeros Reais

O objetivo desta seção é introduzir as transformações Γ definidas sobre o conjunto dos H–polinômios. Para isso, estudaremos as seqüências de multiplicadores que as definem introduzidas por Laguerre, Pólya, Schur e outros. As transformações de interesse são aquelas que levam H–polinômios em H–polinômios. Tomando–se o limite, estas transformções são estendidas a operadores sobre a subclasse P^* das funções inteiras de Hermite–Biehler.

Iniciaremos com alguns resultados preparatórios.

Lema 3.16 *Seja*

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

um polinômio real com $c_0 \neq 0$. *Se todas as raízes* $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ *de* P_n *forem reais e se para algum* p, *com* $0 < p < n$, *tivermos* $c_p = 0$, *então*

$$c_{p-1}c_{p+1} < 0\,. \tag{3.22}$$

Prova. Da segunda equação de (3.15), temos

$$c_1^2 - 2c_0c_2 = c_0^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j^2}\,,$$

que implica, devido a condição $c_0 \neq 0$, em $c_1^2 - 2c_0c_2 > 0$ e prova o Lema 3.16 com $p = 1$.

Usando o Teorema de Rolle, a $(p-1)$–ésima derivada de P_n

$$P_n^{(p-1)}(z) = (p-1)!\, c_{p-1} + p!\, c_p z + \frac{(p+1)!}{2} c_{p+1} z^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-p+1)!} c_n z$$

é um polinômio cujas raízes $\{\beta_j\}_{j=1}^{n-p+1}$ são reais. Procedendo de maneira análoga, temos

$$p^2\, c_p^2 - p\,(p+1)\; c_{p-1}c_{p+1} = c_{p-1}^2 \sum_{j=1}^{n-p+1} \frac{1}{\beta_j^2}\,, \tag{3.23}$$

de onde se conclui o lema para um p qualquer.

Escrevendo a equação (3.23) para todos valores de p verifica–se que, se dois coeficientes consecutivos forem nulos, todos os demais coeficientes subseqüentes deverão ser igualmente nulos. Disto segue a desigualdade estrita (3.22) e conclui a prova do Lema 3.16.

□

Lema 3.17 *Seja*

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

e

$$Q_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

dois polinômios reais com c_0, $c_n \neq 0$. Se todas as raízes $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ e $\{\beta_j\}_{j=1}^n$de P_n e Q_n, respectivamente, forem reais, então todas a raízes do polinômio real

$$T(z) = P_n(D)Q_n(z) = c_0 Q_n(z) + c_1 Q_n^{(1)}(z) + \cdots + c_n Q_n^{(n)}(z) ,$$

onde $D = d/dz$, são reais. Além disso, cada raíz de $T(z)$ com multiplicida maior que 1 *é também uma raíz múltipla de $Q_n(z)$.*

Prova. Notamos os seguintes fatos: (i) o operador diferencial $P_n(D)$ pode ser escrito como

$$P_n(D) = c_n \prod_{j=1}^{n} (D - \alpha_j) \ ;$$

(ii) para cada polinômio real $Q_n(z)$ e $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), a função $e^{-\alpha x}Q_n(x)$ tende a zero quando $x \to \infty$ ($x \to -\infty$). Portanto, pelo Teorema de Rolle, o número de raízes do polinômio

$$\Phi_n(z) = (D - \alpha)\, Q_n(z) = e^{\alpha z} D\left(e^{-\alpha z} Q_n(z)\right) \ ,$$

de grau n, não é inferior ao do polinômio Q_n. Tal como $Q_n(z)$, a função real $e^{-\alpha z}Q_n(z)$ tem n raízes reais e $D\left(e^{-\alpha z}Q_n(z)\right)$ possui o mesmo número de zeros reais devido ao fator exponencial. Iterando n–vêzes este argumento, concluimos que $T(z)$ possui também n raízes reais.

Para concluir o teorema, basta mostrar que se ξ é uma raíz múltipla de $\Phi_n(z)$, então ξ é também uma raíz múltipla de $Q_n(z)$. Expandindo Φ_n e Q_n em série de potencia de $(z - \xi)$, temos

$$Q_n(z) = d_0 + d_1(z - \xi) + \cdots + d_n(z - \xi)^n$$

e

$$\Phi_n(z) = (d_1 - \alpha d_0) + (2d_2 - \alpha d_1)\,(z - \xi) + \ldots - \alpha d_n (z - \xi)^n .$$

Se ξ é uma raíz dupla de Φ_n, temos $d_1 - \alpha d_0 = 0$ e $2d_2 - \alpha d_1 = 0$. Multiplicando a segunda equação por d_0 e substituindo a primeira, obtemos

$$2d_0 d_2 - d_1^2 = 0$$

que, pelo Lema 3.16, não pode ser satisfeita para $d_0 \neq 0$. Substituindo nas equações anteriores, resulta em $d_0 = d_1 = d_2 = 0$, implicando que ξ é pelo menos uma raíz dupla de Q_n. Lema 3.16 controla o caso de multiplicidade p sem maiores detalhes. Com isso, fica concluida a prova do Lema 3.17.

□

Enunciaremos a seguir um resultado devido a Schur sobre composição de polinômios.

Teorema 3.18 *Seja*

$$Q_m(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$

e

$$R_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n\,, \tag{3.24}$$

dois polinômios reais com a_m, $b_n \neq 0$. Se todas as raízes de R_n forem reais e todas as raízes de Q_m forem reais e de mesmo sinal, então todas a raízes do polinômio real

$$P(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + 2a_2 b_2 z^2 + \cdots + k! a_k b_k z^k\,, \tag{3.25}$$

onde $k = \min(n, m)$, são reais. Se $n \leq m$ e $a_0 b_0 \neq 0$, então todas as raízes são, além disso, simples.

Prova. Trataremos apenas o caso com $n \leq m$ e $a_0 b_0 \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $b_n > 0$ e que todos os coeficientes $a_j > 0$, $j = 0, \ldots, m$. Definimos, para um número real x arbitrário, o polinômio

$$F_n(z) = a_0 R_n(z) + a_1 x R_n^{(1)}(z) + \cdots + a_n x^n R_n^{(n)}(z)\,, \tag{3.26}$$

que pode ser escrito como a seguinte série de potência

$$F_n(z) = P_0(x) + P_1(x) z + \cdots + \frac{1}{n!} P_n(x) z^n, \tag{3.27}$$

onde

$$P_j(x) = j! a_0 b_j + (j+1)! a_1 b_{j+1} x + \cdots + n! a_{n-j} b_n x^{n-j}\,, \tag{3.28}$$

$j = 0, 1, \ldots, n$. Note que $P_0(z) = P(z)$ dado por (3.25).

Aplicando o Lema 3.17 a (3.26), concluimos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, todas as raízes de F_n são reais. Além disso, os polinômios P_0 e P_1 não podem ter nenhuma raíz coincidente pois, caso contrário, $z = 0$ seria uma raíz dupla de (3.27) e, por conseguinte, em vista de (3.26) e Lema 3.17, uma raiz dupla de R_n ($b_0 = b_1 = b_2 = 0$), contrariando nossa hipótese de $b_0 \neq 0$.

Por um procedimento semelhante ao procedimento para obter (3.23), podemos ainda concluir que cada par consecutivo P_j e P_{j+1} não pode se anular para um mesmo x real o que, em outras palavras, significa que as raízes de P_j e P_{j+1} não podem coincidir. Finalmente, como conseqüência do Lema 3.16, se $P_j(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$ e $j = 1, \ldots n-1$, então $P_{j-1}(x)$ e $P_{j+1}(x)$ tem sinais opostos ($P_{j-1}(x)\, P_{j+1}(x) < 0$).

Assim, a seqüência de polinômios $\{P_j(x)\}_{j=0}^{n}$ forma uma seqüência generalizada de Sturm. Segue deste fato que o número de zeros reais r de P_0 satisfaz

$$r \geq v(-\infty) - v(\infty)\,,$$

onde $v(x)$ denota o número de mudanças de sinal da seqüência $\{P_j(x)\}_{j=0}^{n}$ para cada valor x.

Se $b_n > 0$ e $a_j > 0$, $j = 0, \ldots, m$, temos que $v(\infty) = 0$ e $v(-\infty) = n$ e todas as raizes do polinômio $P_0(z) = P(z)$ são reais. Para isso, note que o termo $n!a_{n-j}b_nx^{n-j}$ lidera a expressão de P_j quando $|x| \to \infty$. Logo, o sinal de P_j é determinado pelo sinal de x^{n-j}.

O número de mudanças de sinal $v(x)$ da seqüência de Sturm varia de acordo com a multiplicidade de cada raíz x_k de $P_0(x)$ que for atravessada. Como P_0 e P_1 não tem raízes em comum, o número de mudanças de sinal não pode variar mais de uma unidade. Isto implica que cada raiz de P_0 é simples, concluindo a prova do Teorema 3.18

□

Observação 3.19 *Seja R_n e Q_m como no Teorema 3.18. Então todas as raízes do polinômio (extraindo-se os fatoriais de P)*

$$P^1(z) = a_0b_0 + a_1b_1z + a_2b_2z^2 + \cdots + a_kb_kz^k \tag{3.29}$$

são reais. Este resultado é obtido da seguinte maneira. As raízes do polinômio

$$Q^1(z) = a_m + a_{m-1}z + \cdots + a_0z^m$$

obtido de Q_m pela substituição de z por $1/z$ seguida pela multiplicação de z^m, são reais. Compondo este polinômio com o binômio

$$(1+z)^m = 1 + \binom{m}{1}z + \binom{m}{2}z^2 + \cdots + z^m,$$

obtemos (veja expressão (3.25))

$$Q^2(z) = a_m + a_{m-1}mz + a_{m-2}m(m-1)z^2 + \cdots + a_0m!z^m, \tag{3.30}$$

cujas raízes são reais. Substituindo novamente z por $1/z$ e multiplicando por $z^m/m!$ obtemos o polinômio

$$Q^3(z) = a_0 + a_1z + \frac{1}{2}a_2z^2 \cdots + \frac{1}{m!}a_mz^m,$$

que tem somente raízes reais. Finalmente, compondo este polinômio com R_n obtemos (3.29) que, dada as operações realizadas, possui todas as suas raízes reais.

As seguintes noções de seqüências de multiplicadores foram introduzidas por Pólya e Schur.

Definição 3.20 *Dado uma seqüência de números reais $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$, seja Γ° a transformação que leva cada polinômio $P(z) = c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n$ no polinômio de mesma ordem*

$$\Gamma^\circ[P](z) = \gamma_0c_0 + \gamma_1c_1z + \cdots + \gamma_nc_nz^n.$$

A seqüência $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ é denominada uma seqüência de ***multiplicadores de primeira espécie*** *se a transformação Γ° correspondente levar polinômios com raízes reais em polinômios da mesma classe. É denominada uma seqüência de* ***multiplicadores de segunda espécie*** *se a transformação Γ° correspondente levar cada polinômio com raízes positivas em um polinômio com raízes reais.*

Antes de serem introduzidas esta noções, Laguerre já havia considerado seqüências de multiplicadores de primeira espécie tais como

$$1, \frac{1}{w}, \frac{1}{w\,(w+1)}, \dots, \frac{1}{w\cdots(w+n-1)}, \dots,$$

com $w > 0$ e

$$1, q, q^4, \dots, q^{n^2}, \dots,$$

com $|q| \leq 1$; e seqüências de multiplicadores de segunda espécie tal como

$$\cos\lambda, \cos(\lambda+\vartheta), \cos(\lambda+2\vartheta), \dots, \cos(\lambda+n\vartheta), \dots,$$

com λ, $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Note que, se $\gamma_n = n$, $n = 0, 1, \dots$, temos $\Gamma^{\circ}[P](z) = zP'(z)$. Assim, pelo Teorema de Rolle, $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüências de multiplicadores de primeira espécie.

Enunciaremos a seguir uma série de propriedades satisfeitas pelas seqüências de multiplicadores.

Proposição 3.21 *1. Se $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de multiplicadores de primeira ou segunda espécie, então $\{\gamma_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, para todo inteiro $k \geq 1$, é uma seqüência de multiplicadores de mesma espécie.*

2. Se algum elemento de uma seqüência de multiplicadores de primeira espécie é nulo, então todos os elementos subseqüêntes são igualmente nulos.

3. Os elementos de uma seqüência de multiplicadores de primeira espécie são todos do mesmo sinal ou de sinal alternado.

4. O operador Γ° correspondente a uma seqüência de multiplicadores de primeira espécie não negativa leva H-polinômios em H-polinômios.

Prova. Note para o item *1.* que, se as raízes do polinômio $P(z)$ forem reais as raízes de $z^k P(z)$ são reais. Logo, as raízes de

$$z^{-k}\Gamma^{\circ}[z^k P](z) = \gamma_k c_0 + \gamma_{k+1} c_1 z + \cdots + \gamma_{k+n} c_n z^n,$$

também são reais.

Como todos os zeros de

$$\Gamma^\circ[(1+z)^n] = \gamma_0 + \gamma_1 \binom{m}{1} z + \gamma_2 \binom{m}{2} z^2 + \cdots + \gamma_n z^m$$

são reais, segue do Lema 3.16 que, se $\gamma_n \neq 0$ e $\gamma_p = 0$ para algum p tal que $0 < p < n$, então $\gamma_{p-1}\gamma_{p+1} < 0$. Por outro lado, os zeros do polinômio

$$\Gamma^\circ[z^{p+1} - z^{p-1}] = \left(\gamma_{p+1} z^2 - \gamma_{p-1}\right) z^{p-1} \tag{3.31}$$

devem ser reais, porém isto é incompatível com a condição $\gamma_{p-1}\gamma_{p+1} < 0$. Logo, $\gamma_{p+1} = 0$ e, de acordo com o Lema 3.16, todos os γ_j com $j > p+1$ devem se anular tal como enunciado no item *2.*. Note ainda da equação (3.31), que γ_{p-1} e γ_{p+1} devem ter o mesmo sinal, provando item *3.*.

Uma seqüência de multiplicadores de primeira espécie não negativa é denominada Γ–seqüência e a correpondente transformação Γ–operador. De acordo com o Teorema de Hermite-Biehler (Teorema 3.6), $P(z) = A(z) + iB(z)$ é um H–polinômio se, e somente se, os polinômios reais

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

e

$$B(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$$

formarem um par real generalizado, e

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 > 0\,.$$

Um Γ–operador leva um par real generalizado em um par real generalizado

$$\Gamma[A](z) = \gamma_0 a_0 + \gamma_1 a_1 z + \cdots + \gamma_n a_n z^n$$

e

$$\Gamma[B](z) = \gamma_0 b_0 + \gamma_1 b_1 z + \cdots + \gamma_n b_n z^n\,,$$

onde $\gamma_0\gamma_1(a_0 b_1 - a_1 b_0) > 0$. Para isso, observe que as raízes da combinação linear $\mu A(z) + \nu B(z)$ são reais. Logo as raízes de $\Gamma[\mu A + \nu B](z)$ são reais qualquer que seja μ, $\nu \in \mathbb{R}$. Segue deste fato que $\Gamma[P](z)$ é um H–polinômio, demonstrando a afirmação do item *4.*.

□

Um Γ–operador pode ser aplicado a uma classe maior de funções. Veremos a seguir que um Γ–operador é definido para toda função inteira da classe P^* e leva funções desta classe nela mesma.

Seja $f(z)$ o limite de uma seqüência uniformemente convergente de H–polinômios

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{j,n}\, z^n \,,$$

$n = 0, 1, \ldots$. Logo $f \in P^*$. Aplicando um Γ–operador obtemos, de acordo com a Proposição 3.21, uma seqüência de H–polinômios

$$\Gamma[f_n](z) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j c_{j,n}\, z^n \,,$$

que por sua vez, converge uniformemente em $\mathbb{C}$ para $\Gamma[f](z) \in P^*$. Note que, em vista da Observação 3.12, $\{\Gamma[f_n]\}$ forma uma família normal.

Um exemplo importante de Γ–operador é definido a partir da seguinte Γ–seqüência

$$1,\ 1,\ 1 - \frac{1}{n},\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right),\ 0,\ 0,\ \ldots, \tag{3.32}$$

$n \in \mathbb{N}_+$. Proposta por Jensen, esta seqüência é construída compondo o polinômio $(1+z)^n$ com o polinômio $P(x) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m$ cujas raízes são reais (veja (3.30)),

$$P^1(z) = c_0 + c_1 n z + c_2 n(n-1) z^2 + \cdots + c_k n(n-1)\cdots(n-k+1) z^k \,,$$

seguido pela substituição de z por z/n

$$P^2(z) = c_0 + c_1 z + c_2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) z^2 + \cdots + c_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z^k \,,$$

onde $k = \min\,(n, m)$. Note que as raizes de $P^2(z)$ são reais.

É comum denotar a operação $\Gamma[f]$ de Jensen por $I_n[f]$. Note que I_n associa um polinômio de orden n a cada função inteira f com a propriedade

$$\lim_{n\to\infty} I_n[f](z) = f(z) \tag{3.33}$$

é uniformemente convergente. Assim, temos

Teorema 3.22 *Para que uma função $f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k$ pertença a classe P^*, é necessário e suficiente que a seqüência $\{I_n[f](z)\}_{n\geq 0}$, formada inteiramente de H-polinômios, convirja uniformemente para $f(z)$.*

Concluiremos esta seção com um resultado devido a Pólya e Schur.

Teorema 3.23 *Para que uma seqüência numérica $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ seja uma Γ–seqüência, é necessário e suficiente que a série*

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} z^k$$

convirja para uma função inteira que admite ser representada na forma

$$\varphi(z) = c\, e^{\sigma z} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \kappa_j z) \,, \tag{3.34}$$

com $\sigma \geq 0$, $\kappa_j > 0$ e $\sum_{j\geq 1} \kappa_j < \infty$.

Prova. Seja $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$, com $\gamma_0 \neq 0$, uma Γ–seqüência. Aplicando o Γ–operador correspondente em $(1+z)^n$ seguido da substituição de z por z/n, obtemos

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \binom{n}{j} \left(\frac{z}{n}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) z^j \,, \end{aligned}$$

cujas raízes, devido a $\gamma_j > 0$, localizam–se no eixo real negativo. Sendo os três primeiros coeficientes limitados (devido a $\gamma_0 \neq 0$), a seqüência de polinômios $\{Q_n(z)\}_{n\geq 0}$ forma uma família normal, que converge uniformemente para a função $\varphi(z)$. Tendo seus zeros negativos, a função de acordo com o Teorema 3.17, concluindo a necessidade da condição.

Assumindo que $\varphi(z)$ possa ser representada na forma (3.34), considere a seqüência de polinômios

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{k,n}}{k!} z^k \,,$$

cujas raízes são reais negativas e que converge uniformemente para $\varphi(z)$. Compondo R_n com um polinômio arbitrário $P(z) = \sum_{j=1}^{m} c_j z^j$ com raízes reais, obtemos o polinômio

$$S_k(z) = \sum_{j=0}^{k} c_j \gamma_{j,n} z^j \,,$$

com $k = \min(n, m)$, cujas raízes são reais devido ao Teorema 3.18. Tomando o limite, $\lim_{n\to\infty} S_k(z) = \Gamma[P](z)$ obtemos um polinômio cujas raízes são também reais, concluindo que $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ é uma Γ–seqüência e provando o Teorema 3.23.

□

3.4 Majorantes e Subordinantes de Funções da Classe P^*

Uma função φ é um majorante de uma função f se a seguinte desigualdade

$$|f(z)| \leq |\varphi(z)| \tag{3.35}$$

for satisfeita para um subconjunto de $\mathbb{C}$. Nesta seção examinaremos a classe de funções φ para as quais a desigualdade (3.35), satisfeita no semi–plano inferior $\Im m\, z \leq 0$, é preservada pela substituição de f e φ pelas respectivas derivadas

$$|f'(z)| \leq |\varphi'(z)| \,. \tag{3.36}$$

Se $\varphi(z)$ for da classe HB de Hermite–Biehler, então a relação (3.36) é satisfeita somente para $z \in \mathbb{R}$, restringindo a validade da desigualdade para derivadas de ordem superior.

Veremos que a subclasse P^* de $\overline{HB}$ é a mais ampla classe de majorantes, invariante pela multiplicação por $e^{\tau z}$, $\tau \in \mathbb{R}$, e que preserva a relação por diferenciação.

Iniciaremos com uma definção.

Definição 3.24 *Uma função $\varphi(z)$ é dita ser um $\overline{HB}$–majorante de uma função inteira $f(z)$, se $\varphi(z) \in \overline{HB}$ e as seguintes desigualdades*

$$|f(z)| \leq |\varphi(z)| \qquad \text{e} \qquad |f(\overline{z})| \leq |\varphi(z)| \,, \tag{3.37}$$

forem satisfeitas para $z \in \Im m\, z \leq 0$.

Se uma função $\varphi(z)$ satisfaz (3.37), pertence a uma subclasse $\mathcal{T}$ de $\overline{HB}$ que é invariante pela multiplicação por uma constante, então dizemos que $\varphi(z)$ é um $\mathcal{T}$–majorante.

Note que $v\,\varphi(z)$ é um $\mathcal{T}$–majorante se $\varphi(z)$ for um $\mathcal{T}$–majorante e $|v| \geq 1$.

Teorema 3.25 *Para que a função*

$$\varphi_v(z) = f(z) - v\varphi(z)$$

pertença a classe $\overline{HB}$ para todo $v \in \mathbb{C}$ tal que $|v| \geq 1$, é necessário e suficiente que $\varphi(z)$ seja um $\overline{HB}$–majorante da função $f(z)$.

Prova. Suponha que $\varphi_v(z) \in \overline{HB}$. Então $\varphi(z) = \lim\limits_{v \to \infty} v^{-1}\varphi_v(z)$ também pertence a $\overline{HB}$. Além disso, como $\varphi_v(z)$ não tem zeros no semi–plano inferior $\Im m\, z < 0$, então

$$\frac{\varphi_v(z)}{\varphi(z)} = \frac{f(z)}{\varphi(z)} - v \neq 0 \,,$$

para $\Im m\, z < 0$ e $|v| \geq 1$, implica

$$\left|\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right| \leq 1 \,, \tag{3.38}$$

e a primeira desigualdade de (3.37). Para obter a segunda condição de (3.37), temos por hipótese

$$|f(\overline{z}) - v\varphi(\overline{z})| \leq |f(z) - v\varphi(z)|$$

para $\Im m\, z \leq 0$ que, em vista de (3.38) e $\varphi(z) \in \overline{HB}$, implica

$$\left|\frac{\overline{f}(z)}{\varphi(z)}\right| = \left|\frac{f(\overline{z})}{\varphi(z)}\right| \leq 1 + 2|v| \tag{3.39}$$

para $\Im m\, z \leq 0$ e $|v| \geq 1$, devido a igualdade $|\overline{f}(z)| = |f(\overline{z})|$.

Equações (3.38) e (3.39) implicam $|\overline{f}(z)/\varphi(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$ e pelo Teorema de Phragmén–Lindelöf,[7]

$$\left|\frac{f(\overline{z})}{\varphi(z)}\right| = \left|\frac{\overline{f}(z)}{\varphi(z)}\right| \leq 1$$

para $\Im m\, z \leq 0$.

Suponha agora que $\varphi(z)$ é um $\overline{HB}$–majorante de $f(z)$. Então, para todo v com $|v| \geq 1$, $\varphi_v(z)$ não se anula no semi–plano inferior $\Im m\, z < 0$ e além disso,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\varphi_v(\overline{z})}{\varphi_v(z)}\right| &= \left|\frac{f(\overline{z}) - v\varphi(\overline{z})}{f(z) - v\varphi(z)}\right| \\ &= \frac{|f(\overline{z})/\varphi(z) - v\varphi(\overline{z})/\varphi(z)|}{|f(z)/\varphi(z) - v|} \\ &\leq \frac{1 + |v|}{1 - |v|}. \end{aligned}$$

Como esta razão é igual a 1 para $z \in \mathbb{R}$, segue do Princípio de Phragmén–Lindelöf aplicado à função $\overline{\varphi_v}(z)/\varphi_v(z)$,

$$\left|\frac{\varphi_v(\overline{z})}{\varphi_v(z)}\right| \leq 1$$

para $|v| \geq 1$ e $\Im m\, z \leq 0$, concluindo a prova do Teorema 3.25.

□

Definição 3.26 *Uma subclasse $\mathcal{T}$ da classe $\overline{HB}$ de funções de Hermite–Biehler é dita ser* ***admíssivel*** *se para todo $\mathcal{T}$–majorante φ de uma função inteira f, temos*

$$\varphi + f \in \mathcal{T}.$$

[7] Seja f uma função regular em uma região R tal que satisfaz $|f(z)| \leq M$ na fronteira Γ de R. Se Γcontêm o infinito e $f(z)$ é limitada em R, então pelo Teorema ou Princípio de Phragmén–Lindelöf $|f(z)| \leq M$ em R.

Note que, devido ao Teorema 3.25, a classe $\overline{HB}$ é admissível. Mostraremos a seguir que a subclasse P^* é também admissível. Para isso precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 3.27 *Se $\varphi(z)$ é uma função inteira tal que $(e^{\tau z}\varphi(z))' \in \overline{HB}$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$, então $\varphi(z) \in P^*$.*

Prova. Escrevendo $\varphi(z) = A(z) + iB(z)$, segue da hipótese do Lema 3.27 e do Teorema 3.6

$$A'(z) + \tau A(z) \qquad \text{e} \qquad B'(z) + \tau B(z)$$

formam um par real generalizado. Assim, todas as raízes da função real $A'(z)+\tau A(z)$ são reais, e consequentemente (veja prova do Teorema 3.6), $\Im m\ (A'(z)/A(z))$ tem sinal bem definido para $\Im m\, z > 0$. O sinal é negativo pois $\Im m\ (A'(z)/A(z)) < 0$ no semi–círculo superior de cada polo no eixo real.

Pode–se mostrar a partir do Teorema 3.2, equação (3.6), que a função meromórfa $-A'(z)/A(z)$ em $\Im m\, z > 0$, que mapeia semi–plano superior nele mesmo, admite ser representada como

$$\frac{A'(z)}{A(z)} = -2\gamma z + \beta + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\alpha_j} + \frac{1}{\alpha_j}\right), \tag{3.40}$$

onde $\gamma \geq 0$, β e α_j reais com $\sum_j |\alpha_j|^{-2} < \infty$. Uma função $A(z)$ satisfaz a equação (3.40) se, e somente se, puder ser representada por (3.19). Pela Definição 3.13, concluimos que $A \in P^*$ e, usando o mesmo argumento, $B \in P^*$.

Agora, para todo μ, ν e τ reais, as raízes da função

$$\frac{\mu}{\tau}\left(A'(z) + \tau A(z)\right) + \frac{\nu}{\tau}\left(B'(z) + \tau B(z)\right)$$

são reais. Tomando $\tau \to \infty$, concluímos que A e B formam um para real generalizado, $\varphi \in \overline{HB}$ e, como conseqüência da Observação 3.15, $\varphi \in P^*$.

□

Daremos a seguir uma outra caracterização da classe das funções P^*.

Lema 3.28 *Para que uma função inteira φ pertença à classe P^*, é necessário e suficiente que*

$$\varphi\,(z - i\sigma) \in \overline{HB} \tag{3.41}$$

para todo $\sigma > 0$.

Prova. Qualquer H–polinômio satisfaz (3.41) e esta propriedade é levada para as funções da classe P^* pelo procedimento de tomar limites de seqüências uniformemente convergentes de H–polinômios.

Para a condição suficiente, faremos uso do fato que $|\varphi(z-i\sigma)|$ é uma função monotônica crescente em σ. Note que, para todo $\Im m\,\alpha \geq 0$ e $\Im m\,z < 0$,

$$|z-\alpha-i\sigma|^2 = |z-\alpha|^2 + 2\Im m\,(\alpha - z)\,\sigma + \sigma^2 \leq |z-\alpha-i\sigma'|^2$$

se $\sigma \leq \sigma'$. Portanto $|P(z-i\sigma)|$ é uma função crescente de σ se P for um H–polinômio e, por um processo limite, esta propriedade é estendida a cada função da classe P^*.

Como conseqüência,

$$|\varphi(z-i\sigma)| \geq |\varphi(z)| \geq |\overline{\varphi}(z)| = |\varphi(\overline{z})|$$

e $\varphi(z-i\sigma)$ é um $\overline{HB}$–majorante de $\varphi(z)$. Usando o Teorema 3.25, temos

$$\frac{\varphi(z-i\sigma)-\varphi(z)}{i\sigma} \in \overline{HB},$$

e tomando o limite $\sigma \to 0$, segue que $\varphi'(z) \in \overline{HB}$. Se $\varphi(z)$ satisfaz a condição (3.41), então $e^{\tau z}\varphi(z)$ também satisfaz esta condição com $\tau \in \mathbb{R}$. Segue pelos mesmos argumentos que $(e^{\tau z}\varphi(z))' \in \overline{HB}$ e, devido ao Lema 3.27, $\varphi(z) \in P^*$, concluindo a prova do Teorema 3.28.

□

Teorema 3.29 *P^* é uma classe adimissível.*

Prova. Devemos mostrar que se $\varphi(z)$ é um P^*–majorante de uma função inteira $f(z)$, então $\varphi(z) + f(z) \in P^*$. Note que, para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ e $\Im m\,z \leq \sigma$ temos, por definição

$$|\varphi(z-i\sigma)| \geq |f(z-i\sigma)|\,. \tag{3.42}$$

Usando a monotonicidade de $|\varphi(z-i\sigma)|$ e a segunda desigualdade em (3.37), temos

$$|\varphi(z-i\sigma)| \geq |\varphi(z+i\sigma)| \geq |f(\overline{z}-i\sigma)| \tag{3.43}$$

para $\Im m\,z \leq -\sigma$. Para mostrar que (3.43) é válida para $-\sigma < \Im m\,z \leq 0$, novamente pela monotonicidade de $|\varphi(z-i\sigma)|$, temos

$$\begin{aligned} |\varphi(z-i\sigma)| &= |\varphi(\overline{z}-i(\sigma-2\Im m\,z))| \\ &\geq |\varphi(\overline{z}-i\sigma)| \\ &\geq |f(\overline{z}-i\sigma)| \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde na última linha usamos (3.42) para $\Im m\,\overline{z} \leq \sigma$.

Combinando (3.42), (3.43) e (3.44) concluímos que $\varphi(z-i\sigma)$ é um P^*–majorante da função $f(z-i\sigma)$, ambas como função de z, para todo $\sigma > 0$. Pelo Teorema 3.25, isto implica que $\varphi(z-i\sigma) + f(z-i\sigma) \in \overline{HB}$ e em vista do Lema 3.28 $\varphi(z) + f(z) \in P^*$, concluindo a prova do Teorema 3.29.

□

Se $P(x)$ é um H–polinômio, então segue da igualdade

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\Re e\ (z-\alpha_j)}{|z-\alpha_j|^2} - i\frac{\Im m\ (z-\alpha_j)}{|z-\alpha_j|^2} \right), \end{aligned} \tag{3.45}$$

que $\Im m\, P'(z)/P(z) > 0$ para $\Im m\, z < 0$. Note que $\Im m\, \alpha_j \geq 0$. Assim, $P'(z)$ não tem raízes no semi-plano inferior $\Im m\, z < 0$ e portanto é um H–polinômio. Este propriedade passa para a classe P^* de funções φ que são limites uniforme de seqüências de H–polinômios. Em vista do Teorema 3.29 e Lema 3.27, P^* é a subclasse mais ampla de $\overline{HB}$–majorantes, invariante pela multiplicação por $e^{\tau z}$, $\tau \in \mathbb{R}$, e pela operação de diferenciação.

Teorema 3.30 *Se $\varphi(z)$ é um P^*–majorante de uma função inteira $f(z)$ então $\varphi^{(k)}(z)$ é um P^*–majorante da função inteira $f^{(k)}(z)$, $k = 1, 2, \ldots$. Além disso, se $\varphi(z)$ não for um polinômio e se para algum k e z_0, com $\Im m\, z_0 \leq 0$, a igualdade*

$$\left|f^{(k)}(z_0)\right| = \left|\varphi^{(k)}(z_0)\right| \qquad \text{e} \qquad \left|f^{(k)}(\overline{z_0})\right| = \left|\varphi^{(k)}(z_0)\right|$$

for satisfeita, então existem números complexos c_1 e c_2 tais que

$$f(z) = c_1\varphi(z) + c_2\overline{\varphi}(z)$$

com $|c_1| + |c_2| = 1$.

Prova. Provaremos apenas a primeira parte do teorema neste texto. Para uma prova da segunda parte, veja Teorema 6, Cap. IX de [L].

Pela observação anterior, a operação de diferenciação mapeia a subclasse P^* nela mesma. Devido a linearidade, se $\varphi(z)$ for um P^*–majorante de $f(z)$, segue de

$$(\varphi(z) - vf(z))' = \varphi'(z) - vf'(z) \in P^*,$$

com $|v| \geq 1$, e do Teorema 3.25 que $\varphi'(z)$ é um P^*–majorante de $f'(z)$ e, consequentemente, $\varphi^{(k)}(z)$ é um P^*–majorante de $f^{(k)}(z)$ para cada $k \in \mathbb{N}_+$.

□

Observação 3.31 *Teorema 3.30 permanece válido se o operador de diferenciação D for substituído por*

$$(D + \tau I)\, f(z) = f'(z) + \tau f(z),$$

com $\tau \in \mathbb{R}$. Note para isso, se $\varphi(z)$ é um P^*–majorante de $f(z)$, então $e^{\tau z}\varphi(z)$ é um P^*–majorante de $e^{\tau z}f(z)$ e, em vista do Teorema 3.30,

$$e^{-\tau z}De^{\tau z}\varphi(z) = (D + \tau I)\, \varphi(z)$$

é um P^*–majorante de $(D+\tau I)\, f(z)$.

Pode–se estender esta propriedade para uma classe ainda maior de operadores. Se $\{P_n(z)\}$ for um seqüência uniformemente convergente de H–polinômios e $\Im m\, \alpha < 0$, então $e^{-\alpha z} P_n \in P^*$ e

$$(D-\alpha I)\, P_n(z) = e^{\alpha z} D e^{-\alpha z} P_n\,(z)\ ,$$

$n = 1, 2, \ldots$, forma uma seqüência uniformemente convergente de H–polinômios. Assim, Teorema 3.30 é válido se D for substituído por $D-\alpha I$, com $\Im m\, \alpha < 0$. Considere agora uma função inteira $F(z) = \sum_{j\geq 0} a_j z^j$, e defina $F(D)$ pela expressão

$$F(D) f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, f^{(j)}(z) \tag{3.46}$$

para cada f tal que a série convirja uniformemente. Se $F(z)$ for um H–polinômio, então os operadores

$$\overline{F}(D) f(z) = \prod_{j=1}^{n} (D - \overline{\alpha_j})\, f(z)$$

e $F(-D)$ preservam a propriedade de majoração. Um operador Γ que mapeia funções da classe P^* em funções da mesma classe preservando a relação de majoração é denominado Γ^*–operador. Note que, devido a Proposição 3.21, cada Γ–operador associados a seqüências de multiplicadores de primeira espécie $\{\gamma_j\}_{j\geq 0}$, $\gamma_j > 0$, é também um Γ^*–operador.

Com respeito a convergência dos operadores diferenciais abordados nesta observação, temos o seguinte

Teorema 3.32 *Seja $f(z)$ uma função inteira de tipo normal τ da ordem $\rho > 0$. Seja $F(D)$ dado por (3.46) tal que*

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!^{1/\rho}} z^n\ , \tag{3.47}$$

define uma função inteira que não excede o tipo normal $\gamma < (\rho\tau)^{-1/\rho}$ da ordem 1. Então $h(z) = F(D) f(z)$ é uma função inteira. Além disso,

1. *se $f(z)$ for do tipo exponencial então $h(z)$ é do tipo exponencial;*

2. *se $\rho > 1$ e $G(z)$ não exceder o mínimo tipo da ordem 1, então $h(z)$ é no máximo do mesmo tipo de $f(z)$;*

3. se $\rho > 1$ e $G(z)$ for do tipo normal $\gamma < (\rho\tau)^{-1/\rho}$ da ordem 1, então $h(z)$ não excede o tipo normal

$$\tau\left(1-\left(\gamma^{\rho}\rho\tau\right)^{1/(\rho-1)}\right)^{1-\rho} \tag{3.48}$$

da ordem ρ.

Prova. Vamos apenas provar algumas afirmações deste teorema. A demonstração dos detalhes mais finos pode ser vista no texto de Sikkema [S], Teorema 7 do Cap. *II*.

Expressão (3.47) é uma condição necessária e suficiente para que $F(D)$ seja um operador aplicável a uma função inteira de ordem finita ρ. Ela é suficiente pois de (2.32) e da defindção de G, temos

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty}\left(n!^{1-1/\rho}\,|a_n|\right)^{1/n} = \gamma < (\rho\tau)^{-1/\rho}\,. \tag{3.49}$$

Pelo Teorema 2.14 e Princípio da Identidade,

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^{1/\rho}\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|^{1/n} = (\rho\tau)^{1/\rho} \tag{3.50}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Combinando (3.49) e (3.50) e usando a fórmula de Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.51}$$

temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|a_n f^{(n)}(z)\right|^{1/n} < 1$$

e a série (3.46) converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso, se $f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, devido a estas mesmas equações, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K = K(\varepsilon)$ tal que as desigualdades

$$|a_n| \leq K\frac{(\gamma+\varepsilon)^n}{n!^{1-1/\rho}} \tag{3.52}$$

e

$$|b_n| \leq K\frac{(\tau_1+\varepsilon)^n}{n!^{1/\rho}}, \tag{3.53}$$

com $\tau_1 = (\rho\tau)^{1/\rho}$, são satisfeitas para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos a seguir que isto é suficiente para garantir que $h(z) = F(D)f(z)$ é uma função inteira.

De (3.46), temos

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} b_m\, m(m-1)\cdots(m-n+1) z^{m-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k} \frac{(n+k)!}{k!} z^k \end{aligned}$$

Assumindo que os somatórios desta série possam ser trocados de ordem, temos

$$|h(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!^{1/\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_{n+k}|\ (n+k)!\,,$$

que em vista de (3.52) e (3.53) é limitada superiormente pela seguinte série dupla

$$H(r) = K^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau_1+\varepsilon)^k r^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} c^n \binom{n+k}{k}^{1-1/\rho}, \tag{3.54}$$

onde $c = (\tau_1 + \varepsilon)(\gamma + \varepsilon) < 1$ se ε for escolhido suficientemente pequeno e $r = |z|$. Segue do teste de Weierstrass que $h(z)$ é uniformemente convergente em cada disco D_r se $H(r)$ for convergente para cada $r \geq 0$. Note que as somas em h podem ser trocadas de ordem sob esta condição. Note ainda que a hipótese sobre a convergência de H implica em $h(z)$ ser uma função inteira.

Substituindo a estimativa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n \binom{n+k}{k}^{1-1/\rho} \leq \sum_{n=0}^{\infty} c^n \binom{n+k}{k} = \frac{1}{(1-c)^{k+1}}$$

em (3.54), obtemos

$$\begin{aligned} H(r) &\leq \frac{K^2}{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^{1/\rho}} \left(\frac{(\tau_1+\varepsilon)}{1-c} r \right)^k \\ &= \frac{K^2}{1-c} F_\rho \left(\frac{(\tau_1+\varepsilon)}{\rho^{1/\rho}(1-c)} r \right) \end{aligned} \tag{3.55}$$

onde $F_\rho(z)$ é a função analítica definida em (2.25) de tipo 1 da ordem ρ.

A equação (3.55) é uma estimativa para o crescimento do módulo da função inteira $h(z)$. Portanto h não pode exceder o tipo normal

$$\frac{(\tau_1+\varepsilon)^\rho}{\rho(1-c)^\rho} = \tau \left(1 - \gamma (\tau\rho)^{1/\rho}\right)^{-\rho} (1 + O(\varepsilon))$$

da ordem ρ. É possivel melhorar a estimativa do tipo da função h, e obter (3.48), se fizermos uso em (3.54) do seguinte limite (veja Lema 16, pag. 91 de [S])

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n \binom{n+k}{k}^{1-1/\rho}\right)^{\rho/n} = \left(1 - c^{\rho/(\rho-1)}\right)^{1-\rho}.$$

Concluimos com isso a prova do Teorema 3.32.

□

Em particular, temos

Teorema 3.33 *Seja $F(z)$ e $\varphi(z)$ funções da classe P^* tais que*

$$F(z) = e^{\gamma_1 z^2} F_1(z) \qquad \text{e} \qquad \varphi(z) = e^{\gamma_2 z^2}\varphi_1(z)\,, \tag{3.56}$$

com F_1 e φ_1 funções inteiras de gênero 1 e $\gamma_1\gamma_2 < 1/4$. Então $F(D)$ é aplicável a $\varphi(z)$ com $h(z) = \overline{F}(D)\varphi(z)$ uma função inteira da classe P^*.

Prova. Sustituindo γ, τ e ρ no Teorema 3.32, item *3*, por $(2\gamma_1)^{1/2}$, γ_2 e 2, respectivamente, obtemos que, se $\gamma_1\gamma_2 < 1/4$, a função inteira $h(z)$ não excede o tipo normal $\gamma_2\,(1 - 4\gamma_1\gamma_2)$ da ordem 2.

Note que o tipo γ da função G é determinado pela dupla aplicação do Teorema 2.14. De (3.56), dado $\varepsilon > 0$, existem constantes $C_1 = C_1(\varepsilon)$ e $C_2 = C_2(\varepsilon)$, tais que

$$\frac{C_1}{(n/2)!}\,(\gamma_1 - \varepsilon)^{n/2} \le |a_n| \le \frac{C_2}{(n/2)!}\,(\gamma_1 + \varepsilon)^{n/2}$$

para n par. Substituindo em (3.47), obtemos o valor de γ pela equação (2.32),

$$\gamma = \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{e}\,|a_n|^{2/n} = (2\gamma_1)^{1/2}.$$

Para mostrar que $h(z) \in P^*$, devemos aproximar $F(z)$ por polinômios de Jensen

$$I_n[F](z) = a_0 + a_1 z + a_2\left(1 - \frac{1}{n}\right)z^2 + \cdots + a_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)z^n.$$

Claramente $I_n[\overline{F}]f \in P^*$, e devido ao fato que $\overline{F}(z)$ é aplicavel a $f(z) \in P^*$, segue que $I_n[\overline{F}]f$ e uniformemente convergente em cada região compacta, concluindo a prova do Teorema 3.33.

□

Observação 3.34 *Note que a condição $\gamma_1\gamma_2 < 1/4$ não pode ser melhorada. Escolhendo $F_1(z) = \varphi_1(z) = 1$ em (3.56), temos, pela fórmula de Rodrigues,*

$$\begin{aligned} h(z) &= e^{-\gamma_1 D^2} e^{-\gamma_2 z^2} \\ &= e^{-\gamma_2 z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\gamma_1\gamma_2)^n}{n!}H_{2n}(z)\,, \end{aligned}$$

onde $H_k(z)$ *é o* k*–ésimo polinômio de Hermite. Fazendo* $z = 0$*, e tendo em vista que* $H_{2n}(0) = (-1)^n(2n)!/n!$*, vemos que, devido a fórmula de Stirling (3.51),*

$$h(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (\gamma_1\gamma_2)^n$$

diverge se $\gamma_1\gamma_2 \geq 1/4$.

3.5 A Classe $\overline{HB}_n$ das Funções Inteiras de Hermite–Biehler

Nesta seção, praticamente todos os resultados obtidos nas seções anteriores serão estendidos para a classe das funções inteiras $\overline{HB}_n$ de Hermite–Biehler em $\mathbb{C}^n$.

Evitando aqui descrever as estruturas gerais das funções analíticas em $\mathbb{C}^n$, procuraremos sempre explorar as propriedades das funções inteiras a n variáveis que podem ser descritas fixando todas menos uma delas. Com isso, todas as noções introduzidas nas seções anteriores podem ser aproveitadas. Em particular, descreveremos as condições necessárias e suficientes para que uma função inteira $f(\mathbf{z})$ pertença a subclasse P_n^* das funções de $\overline{HB}_n$ que são aproximadas uniformemente por polinômios nas n variáveis $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ e cujas raízes se encontram no poli–semi–plano superior $\Im m\, z_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Estudaremos também as desigualdade majorantes e a preservação destas por certas transformações.

Notação. Um elemento $\mathbf{z}$ do n–espaço dos números complexos $\mathbb{C}^n$ é uma n–upla $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, onde $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$. Os elementos dos n–espaços $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{R}^n$ e etc., são denotados de maneira análoga. O produto interno de dois elementos de um n–espaço é dado por $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = w_1 z_1 + \cdots + w_n z_n$; $\Im m\, \mathbf{z} = (\Im m\, z_1, \ldots, \Im m\, z_n)$ indica o vetor com componentes formada pela parte imaginária das componentes de $\mathbf{z}$, com análoga definição para $\Re e\, \mathbf{z}$; por $\mathbf{w} > 0$ ($\mathbf{w} \geq 0$), queremos dizer que $w_j > 0$ ($w_j \geq 0$) para todo j; analogamente, se $\mathcal{J} = [J_{ij}]_{i,j=1}^n$ representa uma matriz com entradas J_{ij}, então $\mathcal{J} \geq 0$ denota uma matriz com todas entradas $J_{ij} \geq 0$. Uma função inteira $f(\mathbf{z})$ de n variaveis $z_1, \ldots, z_n$, pode ser representada pela série de potência

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{k}}\, z^{\mathbf{k}}, \tag{3.57}$$

onde, usando a notação em multi–índices,

$$z^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}.$$

A série (3.57) converge para cada $\mathbf{z}$ pertencente ao poli–disco

$$D_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leq R_j,\ j = 1, \ldots, n\},$$

cujos raios R_j's podem ser escolhidos arbitrariamente grandes. Um polinômios de ordem N é dado por

$$P_N(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}:\|\mathbf{k}\|=N} c_{\mathbf{k}}\, z^{\mathbf{k}}\,, \tag{3.58}$$

onde $\|\mathbf{k}\| = k_1 + \cdots + k_n$ indica a soma das componentes do vetor $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}$. O comprimento do vetor $\mathbf{z}$ é escrito simplesmente como $|\mathbf{z}| = (z_1^2 + \cdots + z_n^2)^{1/2}$ (norma Euclideana) e denotamos por $|\mathbf{z}|_1 = |z_1| + \cdots + |z_n|$ e por $|\mathbf{z}|_\infty = \sup_j |z_j|$ a norma 1 e norma sup em $\mathbb{C}^n$.

A seguinte definição estende as Definições 3.4 e 3.24.

Definição 3.35 *Uma função inteira $f(\mathbf{z})$ é dita ser da classe $\overline{HB}_n$ se não tiver zeros no poli-semi-plano aberto $\Im m\,\mathbf{z} < 0$ e satisfizer, para $\Im m\,\mathbf{z} < 0$,* [8] *a condição*

$$|f(\mathbf{z})| \geq |f(\mathbf{z}^c)|\,, \tag{3.59}$$

para cada vetor $\mathbf{z}^c$ do conjunto

$$\mathrm{Cpx}(\mathbf{z}) = \{(\overline{z_1}, z_2, \ldots, z_n), \ldots, (z_1, z_2, \ldots, \overline{z_n}), (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n})\}\,,$$

de $n+1$ vetores, obtido por conjugação complexa de uma componente ou de todas as componentes de $\mathbf{z}$.

Uma função $\varphi(\mathbf{z})$ é dita ser um $\overline{HB}_n$–majorante de uma função inteira $f(\mathbf{z})$ se $\varphi(\mathbf{z}) \in \overline{HB}_n$ e se forem satisfeitas as desigualdades

$$|\varphi(\mathbf{z})| \geq |f(\mathbf{z})| \qquad \text{e} \qquad |\varphi(\mathbf{z})| \geq |f(\mathbf{z}^c)| \tag{3.60}$$

para todo $\Im m\,\mathbf{z} < 0$ e $\mathbf{z}^c \in \mathrm{Cpx}(\mathbf{z})$.

Note que se $\varphi(\mathbf{z})$ é um $\overline{HB}_n$–majorante de $f(\mathbf{z})$, então $\varphi(\mathbf{z})$ é um $\overline{HB}$–majorante de $f(\mathbf{z})$ em cada variável z_j se $\Im m\, z_k < 0$ para $k \neq j$. A seguir estenderemos o Teorema 3.25.

Teorema 3.36 *Para que a função*

$$\varphi_\upsilon(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) - \upsilon\varphi(\mathbf{z})$$

pertença a classe $\overline{HB}_n$ com $\upsilon \in \mathbb{C}$ tal que $|\upsilon| \geq 1$, é necessário e suficiente que $\varphi(\mathbf{z})$ seja um $\overline{HB}_n$–majorante da função inteira $f(\mathbf{z})$.

---

[8] Note que a desigualdade $|f(z)| \leq \left|\overline{f}(z)\right|$ para $\Im m\, z > 0$ na Definição 3.4 é equivalente a desigualdade $|f(\overline{z})| \leq |f(z)|$ para $\Im m\, z > 0$. Para isso, lembre que $\overline{f}(z)$ é definida a partir da série de potência de $f(z)$ substituindo os coeficientes $c_n = a_n + ib_n$ de f por seus complexos conjugados $\overline{c_n} = a_n - ib_n$.

Prova. Suponha que $\varphi_v(\mathbf{z}) \in \overline{HB}_n$. Então $\varphi(\mathbf{z}) = \lim_{v\to\infty} v^{-1}\varphi_v(\mathbf{z})$ também pertence a $\overline{HB}_n$. Por definição, se $\Im m\, z_k < 0$ para todo $k \neq j$, então $\varphi_v(\mathbf{z})$ é da classe $\overline{HB}$ na variável z_j. Segue do Teorema 3.25 que $\varphi(\mathbf{z})$ é um $\overline{HB}$–majorante de $f(\mathbf{z})$ em cada uma variável z_j, $j = 1, \dots, n$:

$$|\varphi(z_1, \dots, z_n)| \geq |f(z_1, \dots, z_n)| \quad \text{e} \quad |\varphi(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)| \geq |f(z_1, \dots, \overline{z_j}, \dots, z_n)| \,. \tag{3.61}$$

Segue ainda da Definição 3.35

$$|f(\mathbf{z}) - v\varphi(\mathbf{z})| \geq \left|\overline{f}(\mathbf{z}) - \overline{v\varphi}(\mathbf{z})\right| \,,$$

para $\Im m\, \mathbf{z} < 0$, que implica que a função $\psi(\mathbf{z}) = \overline{f}(\mathbf{z})/\varphi(\mathbf{z})$ é limitada (veja prova do Teorema 3.25)

$$\left|\frac{\overline{f}(\mathbf{z})}{\varphi(\mathbf{z})}\right| \leq 1 + 2\,|v|$$

nesta região com $|\psi(\mathbf{z})| \leq 1$ para $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, devido a primeira equação de (3.61). Aplicando o Princípio de Phragmén–Lindelöf para $\psi(\mathbf{z})$ no semi–plano inferior $\Im m\, z_k \leq 0$ sucessivamente para cada k, mantendo fixa as demais componentes, obtemos

$$\left|\frac{\overline{f}(\mathbf{z})}{\varphi(\mathbf{z})}\right| \leq 1 \,, \tag{3.62}$$

para $\Im m\, \mathbf{z} \leq 0$. Segue de (3.61) e (3.62) que $\varphi(\mathbf{z})$ é um $\overline{HB}_n$–majorante de $f(\mathbf{z})$.

Suponha agora que $\varphi(\mathbf{z})$ é um $\overline{HB}_n$–majorante de $f(\mathbf{z})$. Então, para todo v, com $|v| \geq 1$, $\varphi_v(\mathbf{z})$ não se anula no semi–plano inferior $\Im m\, \mathbf{z} < 0$ e satisfaz a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\varphi_v(\overline{\mathbf{z}})}{\varphi_v(\mathbf{z})}\right| &= \left|\frac{f(\overline{\mathbf{z}}) - v\varphi(\overline{\mathbf{z}})}{f(\mathbf{z}) - v\varphi(\mathbf{z})}\right| \\
&\leq \frac{|f(\overline{\mathbf{z}})\,/\varphi(\mathbf{z}) - v\varphi(\overline{\mathbf{z}})\,/\varphi(\mathbf{z})|}{|f(\mathbf{z})\,/\varphi(\mathbf{z}) - v|} \\
&\leq \frac{|v| + 1}{|v| - 1}
\end{aligned}$$

(lembre que $\varphi(\mathbf{z}) \in \overline{HB}_n$). Além disso, em vista do Teorema 3.25, $\varphi_v(\mathbf{z}) \in \overline{HB}$ em cada variável z_j. Como conseqüência, $\overline{\varphi_v}(\mathbf{z})/\varphi_v(\mathbf{z})$ é limitada por $(|v| + 1)\,/\,(|v| - 1)$ para $\Im m\, \mathbf{z} < 0$ e por 1 para $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Segue do Teorema de Phragmén–Lindelöf aplicado à $\overline{\varphi_v}(\mathbf{z})/\varphi_v(\mathbf{z})$ como função de z_j, para cada j,

$$\left|\frac{\varphi_v(\overline{\mathbf{z}})}{\varphi_v(\mathbf{z})}\right| \leq 1$$

para $|v| \geq 1$ e $\Im m\, \mathbf{z} < 0$, concluindo a prova do Teorema 3.36.

$\square$

A conseqüência imediata mais importante deste teorema é a seguinte. Seja $\mathcal{T}$ uma subclasse de $\overline{HB}_n$ e Γ um operador que mapeia a subclasse $\mathcal{T}$ nela mesma. Se $\varphi(\mathbf{z})$ é um $\mathcal{T}$–majorante de $f(\mathbf{z})$, então $\Gamma\varphi(\mathbf{z})$ é um $\mathcal{T}$–majorante de $\Gamma f(\mathbf{z})$.

Introduziremos a seguir a subclasse P_n^* das funções de Hermite–Biehler $\overline{HB}_n$ aproximadas uniformemente por polinômios que não se anulam no poli–semi–plano $\Im m\, \mathbf{z} < 0$. Os assim denominados, daqui em diante, por H_n–polinômios desempenham um papel importante na elaboração da Teoria dos zeros de Lee–Yang.

Se $P(\mathbf{z})$ é um H_n–polinômio, então $P(\mathbf{z}) \in \overline{HB}_n$. É instrutivo verificar esta afirmação. Claramente $P(\mathbf{z})$ pertence a $\overline{HB}$ em cada uma de suas variáveis z_j se para as demais componentes com $k \neq j$, $\Im m\, z_k < 0$. Isto segue de maneira análoga a (3.18). Além disso, a função $\chi(\mathbf{z}) = \overline{P}(\mathbf{z})/P(\mathbf{z})$, para $\Im m\, z_j < 0$, tende para um valor finito quando as demais componentes tende para infinito, $|z_k| \to \infty$, $k \neq j$. Logo $\chi(\mathbf{z})$ é limitada em $\Im m\, \mathbf{z} < 0$ com $|\chi(\mathbf{z})| \leq 1$ para $\Im m\, z_j < 0$, $z_k = x_k \in \mathbb{R}$, $k \neq j$. Para isso, note que

$$\left|\frac{\overline{P}(\mathbf{z})}{P(\mathbf{z})}\right| = \left|\frac{P(x_1, \ldots, \overline{z_j}, \ldots, x_n)}{P(x_1, \ldots, z_j, \ldots, x_n)}\right| ,$$

$P(\mathbf{z})$ é um H–polinômio na variável z_j e portanto é da classe $\overline{HB}$. Aplicando o Teorema de Phragmén–Lindelöf como na prova do Teorema 3.36 concluimos que $|\chi(\mathbf{z})| \leq 1$ para $\Im m\, \mathbf{z} \leq 0$ e, por conseguinte, $P \in \overline{HB}_n$.

O produto de n H–polinômios $P(z_1)P(z_2)\cdots P(z_n)$ é evidentemente um H_n–polinômio. Suponha que k_1, k_2, ... , k_n sejam o grau mais alto de cada variável no polinômio (3.58). Então, a função racional

$$\frac{P_N(\mathbf{z})}{(z_1 - i\delta)^{k_1} \cdots (z_n - i\delta)^{k_n}} ,$$

com $\delta \geq 0$, é limitada para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Escolhendo M maior ou igual a $\sup_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n} |P_N(\mathbf{z})|$ e usando o Princípio de Phragmén–Lindelöf para cada semi–plano inferior $\Im m\, z_k \leq 0$, o polinômio $M\,(z_1 - i\delta)^{k_1} \cdots (z_n - i\delta)^{k_n}$ é um $\overline{HB}_n$–majorante de $P_N(\mathbf{z})$ e, devido ao Teorema 3.36,

$$Q_N(\mathbf{z}) = M\,(z_1 - i\delta)^{k_1} \cdots (z_n - i\delta)^{k_n} - P_N(\mathbf{z})$$

é um H_n–polinômio. Este procedimento de obtenção de um H_n–polinômio a partir de um majorante de um polinômios qualquer pode ser estendido para funções inteiras da classe $\overline{HB}_n$.

Uma última observação. Como um H_n–polinômios é também um H–polinômio em cada variável z_j, aplicando exatamente o mesmo procedimento que foi empregado em (3.45), conclui–se que a derivada parcial

$$\partial_j P(\mathbf{z}) = \frac{\partial P}{\partial z_j}(\mathbf{z})$$

de um H_n–polinômio é também um H_n–polinômio. Além disso, a classe de funções que são limites uniformes de uma seqüência de H_n–polinômios é invariante por diferenciação parcial.

Definição 3.37 *A função inteira $f(\mathbf{z})$ é dita pertencer a subclasse P_n^* de $\overline{HB}_n$ se $f(\mathbf{z}) \in P^*$ em cada z_j fixando as demais variáveis no semi–plano inferior $\Im m\, z_k < 0$, $k \neq j$.*

Observação 3.38 *Segue do Teorema 3.36 que se $\varphi(\mathbf{z})$ é um P_n^*–majorante de $f(\mathbf{z})$, então*

$$\varphi(\mathbf{z}) + f(\mathbf{z}) \in \overline{HB}_n\,.$$

Em particular, $\varphi(\mathbf{z})$ é um P^*–majorante de $f(\mathbf{z})$ em cada variável z_j contanto que $\Im m\, z_k < 0$, $k \neq j$, e conseqüentemente $\varphi(\mathbf{z}) + f(\mathbf{z}) \in P^*$ em cada variável. Das Definições 3.37 e 3.26, concluímos que $\varphi(\mathbf{z}) + f(\mathbf{z}) \in P_n^*$ e P_n^* é uma classe admissível.

A subclasse P_n^* tem as mesmas características de P^*. Pode–se mostrar, seguindo os mesmos passos do Lema 3.28, que a condição necessária e suficiente para $\varphi(\mathbf{z}) \in P_n^*$ é

$$\varphi(\mathbf{z} + i\mathbf{h}) \in \overline{HB}_n,$$

para todo $\mathbf{h} > 0$.

O seguinte generaliza o Teorema da Representaçao 3.11 para a classe P_n^*. Veja também Definição 3.13 e Teorema 3.14.

Teorema 3.39 *Para que uma função $f(\mathbf{z})$ a n variáveis pertença a classe P_n^*, é necessário e suficiente que f seja representável na forma*

$$f(\mathbf{z}) = e^{-(\gamma,\mathbf{z}^2)}\varphi(\mathbf{z})\,, \tag{3.63}$$

com $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \geq 0$ e $\varphi(\mathbf{z})$ uma função da classe $\overline{HB}_n$ de gênero 1 em cada variável z_j, mantendo fixas as demais z_k, $k \neq j$, no semi–plano inferior $\Im m\, z_k < 0$.

Prova. A condição suficiente segue da própria definição da classe P_n^*.

Para a prova da condição necessária, usando o fato que $f(\mathbf{z})$ é da classe P^* em cada variável z_j, com $\Im m\, z_k < 0$ se $k \neq j$, segue da representação de uma função da classe $\overline{HB}$ que $\omega_j(\mathbf{z}) = \partial_j f(z)/f(z)$ mapeia o semi–plano inferior $\Im m\, z_j < 0$ no semi–plano superior $\Im m\, z_j > 0$. Então o conjunto $\{\omega_j(\mathbf{z})\}$ visto como funções de z_j, para cada $\Im m\, z_k < 0$ se $k \neq j$, forma uma família normal que, por sua vez, admite a decomposição

$$\omega_j(\mathbf{z}) = -2\gamma_j\left(\widehat{\mathbf{z}}\right) z_j + \nu_j\left(\widehat{\mathbf{z}}\right) + A + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z_j - \alpha_j} + \Re e\frac{1}{\alpha_j}\right)$$

com $\gamma_j\left(\widehat{\mathbf{z}}\right) \geq 0$. Aqui, denotamos por $\widehat{\mathbf{z}} = (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ a $(n-1)$ –upla de números complexos. Além disso, os zeros de $f(\mathbf{z})$ como função de z_j, $\alpha_j = \alpha_j\left(\widehat{\mathbf{z}}\right)$, satisfazem $\sum_j |\alpha_j|^{-2} < \infty$.

Como $\left\{z_j^{-1}\omega_j(\mathbf{z})\right\}$ é uma família normal de funções de z_j, segue que

$$\lim_{z_j \to -i\infty} z_j^{-1}\omega_j(\mathbf{z}) = -2\gamma_j(\widehat{\mathbf{z}})$$

converge uniformemente em cada região compacta de $\Im m\, z_k < 0$, $k \neq j$, para uma função não–positiva e holomórfica no multi–semi–plano inferior. Segue disso que γ_j é uma constante concluindo a prova do Teorema 3.39.

□

Para finalizar esta seção, estenderemos o Teorema de Laguerre–Pólya para funções a n variáveis. Para isso, vamos introduzir a seguinte

Definição 3.40 *Um operador K é contínuo, se para cada seqüência $\{f_k(\mathbf{z})\}_{k=1}^{\infty}$ de funções inteiras, uniformemente convergente em compactos de $\mathbb{C}$, $\{Kf_k(\mathbf{z})\}_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência de funções inteiras convergente no mesmo sentido.*

Teorema 3.41 *Todo operador contínuo K sobre funções inteiras de uma variável, leva funções da classe P_n^* em funções da mesma classe.*

Prova. Inicialmente, notamos que $Kf(\mathbf{z})$, atuando na variável z_j, é uma função inteira em $\mathbb{C}^n$ se $f \in P_n^*$. Note para isso, que $f(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n)$ é um P^*–majorante de $f(z_1, \ldots, \overline{z_k}, \ldots, z_n)$ na variavel z_j para todo $k \neq j$. Portanto

$$f(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n) + f(z_1, \ldots, \overline{z_k}, \ldots, z_n) \in P^*,$$

por continuidade, $Kf(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n) + Kf(z_1, \ldots, \overline{z_k}, \ldots, z_n) \in P^*$ e isto implica que $Kf(\mathbf{z})$ é uma função inteira de z_j para $z_k \in \mathbb{C}$, $k \neq j$.

Segue da continuidade de K que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Kf}{\partial z_k}(\mathbf{z}) &= \lim_{|h| \to 0} \frac{Kf(z_1, \ldots, z_k + h, \ldots, z_n) - Kf(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n)}{h} \\
&= K\left(\lim_{|h| \to 0} \frac{f(z_1, \ldots, z_k + h, \ldots, z_n) - f(z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n)}{h}\right) \\
&= K\frac{\partial f}{\partial z_k}(\mathbf{z})
\end{aligned}$$

implicando que $Kf(\mathbf{z})$ é uma função inteira em cada variáveis. Como $f(\mathbf{z})$ é um P_n^*–majorante de $f(\mathbf{z}^c)$, segue da continuidade de K que $Kf(\mathbf{z})$ é um P_n^*–majorante de $Kf(\mathbf{z}^c)$ para todo $\mathbf{z}^c \in$ Cpx, concluindo a prova do Teorema 3.41.

□

Teorema 3.42 *Para que uma função $f(\mathbf{z})$ a n variáveis seja aproximada uniformemente por H_n–polinômios, é necessário e suficiente que $f(\mathbf{z})$ seja da classe P_n^* e, conseqüentemente, seja representável por (3.63).*

Prova. Vimos que um H_n–polinômio $P(\mathbf{z}) \in \overline{HB}_n$. Assim, se $f(\mathbf{z})$ é o limite de uma seqüência uniformemente convergente de H_n–polinômios, então $f(\mathbf{z}) \in \overline{HB}_n$ e, devido ao Teorema 3.14 e Definição 3.37, $f(\mathbf{z}) \in P_n^*$.

Suponha agora que

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n} c_{\mathbf{k}}\, z^{\mathbf{k}}$$

seja uma função da classe P_n^*. Aplicando o operador de Jensen $I_{\mathbf{m}} = I_{m_1} \cdots I_{m_n}$, com cada I_{m_j} atuando sobre a variável z_j, obtemos uma seqüência $\{I_{\mathbf{m}} f(\mathbf{z})\}$ de polinômios

$$I_{\mathbf{m}} f(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^n:\\ \mathbf{m}-\mathbf{k}\geq 0}} c_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k_1 - 1}{m_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k_n - 1}{m_n}\right) z^{\mathbf{k}}$$

de ordem $M = m_1 + \cdots + m_n$, que converge uniformemente em cada região limitada de $\mathbb{C}^n$ para $f(\mathbf{z})$. Isto conclui a prova do Teorema 3.42 pois, em vista do Teorema 3.41, esta seqüência é formada por H_n–polinômios.

$\square$

4

Teorema de Lee–Yang e suas Extensões

No Capítulo 3 vimos que a classe das funções inteiras $\overline{HB}_n$ de Hermite–Biehler desempenha um papel fundamental na caracterização das funções inteiras de n variáveis cujos zeros localizam–se no poli–semi–plano superior $\Im m\, \mathbf{z} \geq 0$. Examinamos, em particular, as condições necessária e suficientes para que uma função inteira $f(\mathbf{z})$ pertença a subclasse P_n^* das funções de $\overline{HB}_n$ que são aproximadas uniformemente por polinômios nas n variáveis $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ e cujas raízes se encontram em $\Im m\, \mathbf{z} \geq 0$.

No presente Capítulo, examinaremos como que esta descrição se encaixa na Teoria geral dos zeros de Lee-Yang. Veremos que uma subclasse de funções de P_n^* com zeros no eixo real podem ser escritas como a transformadas de Fourier $\int e^{i(\mathbf{s},\mathbf{z})} d\mu^n(\mathbf{s})$ de medidas finitas μ^n em $\mathbb{R}^n$, com paridade definida e que satisfazem a "propriedade de Lee–Yang".

Iniciaremos com uma breve revisão sobre o Teorema de Lee–Yang desde o trabalho original dos autores até a formulação geral do Teorema. Em seguida, usaremos os resultados do Capítilo anterior para provar um Teorema devido a Newman e outras extensões deste Teorema.

4.1 Breve Excursão ao Problema

Teorema de Lee–Yang descreve a ditribuição dos zeros da função de partição de ferromagnetos e gases de rede. Sua importância reside no fato que as regiões livres de zeros são regiões de analiticidade das funções energia livre, pressão, densidade e outras grandezas macroscópicas. É difícil, se não impossível, pensar o desenvolvimento da teoria das transições de fase nas últimas quatro décadas sem a análise realizada por Lee–Yang nos artigos [LY1, LY2].

Segundo a caracterização mais tradicional, uma transição de fase manifesta–se por uma singularidade em alguma função termodinámica que, de outra forma, seria real analítica. Assim, para que uma transição de fase ocorra, os zeros da função de partição, segundo Lee–Yang, devem invadir o eixo real Físico no limite termodinâmico. A região ocupada pelos zeros no plano complexo delimita as fases dos sistemas em questão.

Enunciaremos o Teorema para um sistemas de n variáveis de spins $\{s_j\}_{j=1}^n$, $s_j \in \{-1/2, 1/2\}$, acopladas aos pares por uma interação J_{ij} ferromagnética ($J_{ij} \geq 0$). A matriz de interação formada pelos acoplamentos será denotada por $\mathcal{J} = [J_{ij}]_{i,j=1}^n$.

Notamos que todas as características Físicas do sistema estão contidas em $\mathcal{J}$. Por exemplo, se o sistema consiste de uma estrutura regular cristalina, os átomos magnéticos que ocupam os sítios deste reticulado são indexados pelo conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ com J_{ij} a interação Física associada a cada par de átomos ($J_{ij} = 0$ se o par ij não interagir). As características desta estrutura atômica podem ser obtidas pela resposta do sistema à ação de um campo magnético externo $\mathrm{h} = \{h_i\}_{i=1}^n$.

De acordo com a prescrição de Boltzmann e Gibbs, as propriedades termodinâmicas de um sistema com um número de graus de liberdade da ordem do número de Avogadro ($10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$) são descritas pela distribuição de probabilidade

$$\mu^n = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_n}\,, \tag{4.1}$$

onde β é o inverso da temperatura, H_n a Hamiltoniana do sistema e Z a normalização. Associa–se a cada grandeza Física medida em laboratório a esperânça (média) com respeito a distribuição μ^n de uma função g associada a esta grandeza, a qual será denotada por $\langle g \rangle$ ou $\mathbb{E}g$.

O conjunto dos spins $\mathrm{s} = \{s_j\}_{j=1}^n$ são, deste ponto de vista, variáveis aleatórias distribuídas de acordo com a medida de Gibbs (4.1) cuja Hamiltoniana é dada por

$$H_n(\mathrm{s}; \mathcal{J}, \mathrm{h}) = -\sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}\, s_i s_j - \sum_{i=1}^{n} h_i\, s_i\,. \tag{4.2}$$

Note que o sinal negativo na Hamiltoniana faz com que a energia, com $h_i = 0$, seja mas baixa se os spins s estiverem alinhados uns com os outros. Note ainda que quanto menor é a energia, tanto maior é o valor da medida (4.1) associada a configuração s. Por favorecer o alinhamento dos spins, a Hamiltoniana (4.2) é dita ser ferromagnética.

A normalização $Z = Z(\mathcal{J}, \mathrm{h})$ da distribuição de probabilidade (4.1) para sistema de spins é denominada função de partição

$$Z(\mathcal{J}, \mathrm{h}) = \sum_{\mathrm{s}} e^{-\beta H_n(\mathrm{s}; \mathcal{J}, \mathrm{h})}\,. \tag{4.3}$$

A partir desta pode–se obter a energia livre tomando o logarítmo

$$f_n(\mathcal{J}, \mathrm{h}) = -\frac{1}{\beta n} \ln Z(\mathcal{J}, \mathrm{h})\,. \tag{4.4}$$

Note que os coeficientes $C_{\mathbf{k}}$ da série de Taylor de $\ln Z(\mathcal{J},\mathbf{h})$ em torno de $\mathbf{h}=\mathbf{0}$, são os cumulantes de (4.1)[1]. Esta conecção já justificaria o estudo das propriedades analíticas de $Z(\mathcal{J},\mathbf{h})$. Entretanto, como enfatizado por Lee–Yang, pode–se ir ainda além. É possível calcular a magnetização média do sistema

$$m_n(\mathcal{J},\mathbf{h}) = \left\langle \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j \right\rangle ,$$

e outras funções termodinâmicas, a partir da distribuição dos zeros da função de partição. Exceto para o modelo de Ising unidimensional com interação entre vizinhos mais próximos, este tipo de informação detalhada tem se mostrado inatingível. Porém, como veremos a seguir, a região de $\mathbb{C}$ onde os zeros de Z se localizam pode ser determinada com exatidão.

Substituindo s_j na equação (4.2) por $1/2 - s_j \in \{0,1\}$, a Hamiltoniana resultante

$$H_n^1(\mathbf{s};\mathcal{J},\mathbf{h}) = -\sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}\,(1/2-s_i)\,(1/2-s_j) - \sum_{i=1}^{n} h_i\,(1/2-s_i) \tag{4.5}$$

descreve um gás de rede com interação entre pares atrativa. Note que (4.2) difere de (4.5) apenas pela substituição de h_j por $h'_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(J_{ij}+J_{ji}) - h_j$ e por uma constante aditiva. Neste texto, faremos uso de ambas interpretações segundo a conveniência. O potencial químico h_j, usualmente denotado por μ_j, mede o custo energético de ocupar o sítio j por uma partícula.

A função de partição (4.3) pode ser escrita como

$$Z = \exp\left\{\beta\left(\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} J_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i\right)\right\} Q_n(\omega)\,, \tag{4.6}$$

onde

$$Q_n(\omega) = \sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} c_{A,A^c}\,\omega^A\,. \tag{4.7}$$

é um polinômio de ordem n em $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, linear em cada componente $\omega_j = e^{-\beta h_j}$. A soma em (4.7) percorre todos subconjuntos A de $\{1,\ldots,n\}$, $\omega^A = \prod_{j\in A}\omega_j$ e

$$c_{A,B} = \prod_{i\in A,\,j\in B} \rho_{ij}\,, \tag{4.8}$$

[1] O segundo cumulante, por exemplo, é dado por

$$\mathbb{E}\,(s_i - \mathbb{E}s_i)\,(s_j - \mathbb{E}s_j) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial h_i \partial h_j}(\mathcal{J},0)\,.$$

com A^c denotando o conjunto complementar de A com respeito a $\{1,\dots,n\}$ e $\rho_{ij} = e^{-\beta J_{ij}/2}$.

Note que, devido a forma (4.8), $Q_n(\omega)$ satisfaz a propriedade

$$Q_n(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{n} \omega_j\right) Q_n(1/\omega)\,, \tag{4.9}$$

se $\mathcal{J}$ for simétrica ($J_{ij} = J_{ji}$).

Em 1952, T. D. Lee e C. N. Yang formularam o seguinte

Teorema 4.1 *Seja $\rho = [\rho_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ uma matriz simétrica tal que $|\rho_{ij}| \le 1$, $i,j = 1,\dots,n$. Então todas as raízes do polinômio*

$$P_n(\omega) = Q_n(\omega,\dots,\omega)$$

estão sobre o círculo unitário do plano complexo.

A demonstração do Teorema de Lee–Yang segue imediatamente do seguinte

Lema 4.2 *Para que ω, com $|\omega_j| \ge 1$, $j \ne k$, seja uma raíz do polinômio (4.7), isto é $Q_n(\omega) = 0$, ω_k deve necessáriamente ser tal que $|\omega_k| \le 1$.*[2]

Prova. A prova do Lema 4.2 por Lee–Yang foi em seguida clarificada por Asano[A] com base no princípio da contração de polinômios (veja também [R]).

Considere dois polinômios $Q_r^1(\omega_1)$ e $Q_s^2(\omega_2)$ da forma (4.7) e suponha que o Lema 4.2 seja satisfeito para ambos. Então o produto $Q_{r+s}^{1,2}(\omega_1,\omega_2) = Q_r^1(\omega_1)\cdot Q_s^2(\omega_2)$ é um polinômio da forma (4.7) satisfazendo o Lema 4.2.

Temos

$$\begin{aligned} Q_{r+s}^{1,2}(\omega_1,\omega_2) &= (a + b\omega_k)\,(c + d\omega_k') \\ &= A + B\omega_k + C\omega_k' + D\omega_k\omega_k'\,, \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde ω_k e ω_k' são respectivamente componentes de ω_1 e ω_2 e A, B, C e D são polinômios da forma (4.7) nas demais variáveis ω.

Por hipótese, tomando todas as componentes de ω tais que $|\omega_j| \ge 1$, $Q_{r+s}^{1,2} \ne 0$ implica em

$$\left|\frac{a}{b}\right| > 1 \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{c}{d}\right| > 1\,. \tag{4.11}$$

Seja

$$Q_{r+s-1}(\omega,\omega_k) = A + D\omega_k \tag{4.12}$$

[2] Devido a propriedade (4.9), o Lema é válido se ω for substituído por $1/\omega$.

a contração dos polinômios Q_r^1 e Q_s^2 e verifiquemos que Q_{r+s-1} é da forma (4.7) e satisfaz o Lema 4.2. De fato, $Q_{r+s-1}(\omega,\omega_k) \neq 0$ com ω_j tal que $|\omega_j| \geq 1$ para toda componente de ω implica, em vista de (4.10) e (4.11),

$$\left|\frac{A}{D}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| \left|\frac{c}{d}\right| > 1 .$$

Portanto $Q_{r+s-1}(\omega,\omega_k) = 0$ somente se $|\omega_k| = |A/D| \leq 1$.

Lema 4.2 é provado construtivamente. Qualquer polinômio da forma (4.7) pode ser obtido contraindo os polinômios de grau 2, $Q_2(\omega_i,\omega_j) = 1 + \rho_{ij}\omega_i + \rho_{ji}\omega_j + \omega_i\omega_j$, com ij variando sobre todos os pares. Por contração entendemos sempre a operação entre dois polinômios definidas pelas equações (4.10) e (4.12). Note que, $Q_2(\omega_i,\omega_j) = 0$ estabelece uma transformação homográfica involutiva $(\rho_{ij} = \rho_{ji} = \rho)$

$$\omega_j = -\frac{1+\rho\omega_i}{\rho+\omega_i}$$

cujos pontos fixos $-\rho \pm i\sqrt{1-\rho^2}$ se encontram no círculo unitário se $|\rho| \leq 1$. Escrevendo $\omega_i = re^{i\varphi}$, temos

$$|\omega_j|^2 = \frac{1+\rho^2 r^2 + 2\rho r\cos\varphi}{\rho^2 + r^2 + 2\rho r\cos\varphi} .$$

que é uma função monotona decrescente em r com $|\omega_j|^2 = 1$ se $r = |\omega_i| = 1$. Logo $Q_2(\omega_i,\omega_j) = 0$ e $|\omega_i| \geq 1$ implica $|\omega_j| \leq 1$ e, portanto, satisfaz o Lema 4.2.

Para finalizar, ilustraremos o procedimento de contração para $n = 3$. A contração dos polinômios

$$Q_2(\omega_1,\omega_2) = 1 + \rho_{12}\omega_1 + (\rho_{21} + \omega_1)\,\omega_2$$

e

$$Q_2(\omega_2',\omega_3) = 1 + \rho_{32}\omega_3 + (\rho_{23} + \omega_3)\,\omega_2'$$

é dada por

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) &= (1+\rho_{12}\omega_1)(1+\rho_{32}\omega_3) + (\rho_{21}+\omega_1)(\rho_{23}+\omega_3)\,\omega_2 \\
&= (1+\rho_{21}\rho_{23}\omega_2) + (\rho_{12}+\rho_{23}\omega_2)\,\omega_1 \\
&\qquad + \{(\rho_{32}+\rho_{21}\omega_2) + (\rho_{32}\rho_{12}+\omega_2)\,\omega_1\}\,\omega_3 .
\end{aligned}$$

Contraindo este polinômio com

$$Q_2(\omega_1',\omega_3') = 1 + \rho_{13}\omega_1' + (\rho_{31} + \omega_1')\,\omega_3' ,$$

primeiramente na variável ω_3, seguida da contração dos polinômios interiores na variável ω_1, obtemos

$$\begin{aligned} Q_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3) &= (1+\rho_{21}\rho_{23}\omega_2)+\rho_{13}(\rho_{12}+\rho_{23}\omega_2)\,\omega_1 \\ &\quad + \{\rho_{31}(\rho_{32}+\rho_{21}\omega_2)+(\rho_{32}\rho_{12}+\omega_2)\,\omega_1\}\,\omega_3 \end{aligned}$$

que coincide com Q_3 em (4.7). Omitiremos nesta tese a prova indutiva do caso geral. □

Observação 4.3 *A condição $|\rho_{ij}| \leq 1$ é satisfeita se $J_{ij} \geq 0$. O Teorema 4.1 implica que a energia livre $f(\mathcal{J},h,\ldots,h)$ é uma função analítica do campo magnético externo h. A função é regular em $\Re e\, h \neq 0$, passando esta propriedade no limite termodinâmico $n \to \infty$, caso este exista. Uma singularidade Física (transição de fase) somente pode ocorrer se $h = 0$.*

Observação 4.4 *Afim de aplicar a análise desenvolvida nos Capítulos anteriores, tomaremos $z_j = -i\beta h_j/2$ ou, equivalentemente,*

$$\omega_j = e^{-2iz_j}.$$

Em termos destas variáveis, as raízes do polinômio ficam sobre o eixo real. Note que $w_n(\mathbf{z}) = Q_n(e^{-2iz_1},\ldots,e^{-2iz_n})$ é uma função inteira, periódica em cada variável $x_j = \Re e\, z_j$. Note ainda que o Lemma 4.2 é equivalente a afirmação de que a função $w_n(\mathbf{z})$ não se anula no multi-semi-plano $\Im m\, \mathbf{z} > 0$. A função $w_n(\mathbf{z})$ também não se anula no multi-semi-plano inferior $\Im m\, \mathbf{z} < 0$, pela simetria (4.9) desta função. Logo os zeros de $w_n(\mathbf{z})$ se encontram sobre o eixo real. Como w_n é uma função inteira do tipo exponencial em cada variável z_j, segue que $w_n(\mathbf{z})$ pertence a classe $\overline{HB}$ de Hermite–Biehler em z_j e, consequentemente, $w_n(\mathbf{z})$ é da classe P_n^*.

Com vistas em generalizar o Teorema 4.1 para uma classe mais ampla de modelos ferromagnéticos, é conveniente reescrever a função de partição Z, dada por (4.6), na forma

$$W_n(\zeta) = \sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} \left(\frac{c_{A,A^c}}{c_A\, c_{A^c}}\right)^{1/2} \zeta^A \zeta^{-A^c}. \tag{4.13}$$

onde $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, $\zeta_j = e^{\beta h_j/2} = e^{iz_j}$, com $\zeta^{-B} = \prod_{j\in B}\zeta_j^{-1}$, $c_{A,B}$ como em (4.8) e $c_B = c_{B,B}$.

Denotando por

$$\vartheta_j = \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z_j} \tag{4.14}$$

o operador de derivação parcial em ζ_j seguido da multiplicação por ζ_j, e usando a relação

$$\vartheta_j \zeta_j^\alpha = \alpha \zeta_j^\alpha\,,$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} e^{K_{ij}\vartheta_i\vartheta_j}\,\zeta_i\,\zeta_j^{-1} &= \left\{1 + K_{ij}\vartheta_i\vartheta_j + \cdots + \frac{1}{n!}K_{ij}^n\vartheta_i^n\vartheta_j^n + \cdots\right\}\zeta_i\,\zeta_j^{-1} \\ &= \left\{1 - K_{ij} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}K_{ij}^n + \cdots\right\}\zeta_i\,\zeta_j^{-1} \\ &= e^{-K_{ij}}\,\zeta_i\,\zeta_j^{-1} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\zeta_i^{-1}\zeta_j^{-1}e^{K_{ij}\vartheta_i\vartheta_j}\,\zeta_i\,\zeta_j = \zeta_i\,\zeta_j e^{K_{ij}\vartheta_i\vartheta_j}\,\zeta_i^{-1}\zeta_j^{-1} = e^{K_{ij}}\ .$$

De onde segue

$$\begin{aligned} W_n(\zeta) &= \sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}}\ \prod_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \exp\left\{\frac{\beta}{4}J_{ij}\vartheta_i\vartheta_j\right\}\zeta^A\,\zeta^{-A^c} \\ &= \prod_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \exp\left\{\frac{\beta}{4}J_{ij}\vartheta_i\vartheta_j\right\}\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}}\zeta^A\,\zeta^{-A^c} \\ &= \exp\left\{\frac{\beta}{4}(\vartheta, \mathcal{J}\vartheta)\right\}\prod_{j=1}^{n}\left(\zeta_j + \zeta_j^{-1}\right) \end{aligned}$$

com $(\vartheta, \varphi) = \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\varphi_j$.

Finalmente, em termos das variáveis z_j, a função de partição Z pode ser escrita como

$$Z_\beta(\mathbf{z}) = \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\right)\right\}Z_0(\mathbf{z})\,, \tag{4.15}$$

onde Z_0 é o produto de funções características da distribuição de Bernoulli $d\nu_0(u) = [\delta(u-1) + \delta(u+1)]\,du$:[3]

$$Z_0(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^{n}\int e^{iuz_j}\,d\nu_0(u)\,. \tag{4.16}$$

No final dos anos 60 e começo dos 70, apareceram as primeiras extensões do Teorema de Lee-Yang. Ferromagnetos de spin semi–inteiro $s_j \in \{-S/2, \dots, S/2-1, S/2\}$, com $S \leq 3$, foram tratados por Suzuki [Su] e, com S arbitrário, por Griffiths [G]. Em seguida, Suzuki e Fisher [SF] estenderam o Teorema de maneira a incluir interação de quatro

[3] A "função" delta de Dirac $\delta(x)$ é definida como funcional linear δ que associa a cada função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente suave, de suporte compacto, o valor $\int \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$.

corpos, modelos com spin quântico de Heisenberg, modelos de gêlo e ferroelétricos. Inicia–se, a partir de então, o interesse em classificar os polinômios para os quais a propriedade enunciada no Lema 4.2 é satisfeita, denominada em [SF] *Classe de Lee-Yang*. Modelos de Heisenberg foram igualmente tratados por Asano [A], Ruelle [R], e muitos outros. É interessante notar que nenhum destes menciona a classificação de Hermite–Biehler apresentada no Capítulo anterior.

Nesta tese, serão consideradas essencialmente dois tipos de extensões. A primeira inclui os modelos de Ising generalizados definidos a partir de um conjunto $\mathcal{P}$ de medidas ν em $\mathbb{R}$ tais que sua função característica

$$\varphi_\nu(z) = \int e^{iuz} d\nu(u) \tag{4.17}$$

seja uma função inteira da classe P^*. Note que a distribuição de Bernoulli ν_0, assim como a distribuição "a priori" dos ferromagnetos com spin semi–inteiro, satisfaz este requisito. Medidas absolutamente contínuas tais que

$$\int e^{bu^2} d\,|\nu(u)| < \infty\,,$$

para todo $b \geq 0$, estão também incluídas neste conjunto. Daremos uma definição mais precisa de $\mathcal{P}$ na seção seguinte.

A segunda extensão desta tese, consiste em considerar ferromagnetos com spin $\mathrm{s} = \left(s^1, \ldots, s^N\right)$ com N componentes. Exemplos desta família incluem o rotor plano $N = 2$ e modelo de Heisenberg clássico $N = 3$. A medida "a priori" de ambos é da forma

$$d\nu\,(\mathbf{u}) = \delta\,(|\mathbf{u}| - 1)\; d^N u\,,$$

isto é, a medida uniforme sobre a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Vamos aqui considerar uma família de modelos N–vetoriais cuja função característica da medida "a priori" ν em $\mathbb{R}^N$ pertença, após uma mudança de variáveis seguida de uma continuação analítica, a classe P_N^*. Note que na função de partição (4.15) para esta família $\mathcal{J}$ deve ser substituída pelo produto de Kronecker $\mathcal{J} \otimes K$ de $\mathcal{J}$ por uma matriz $N \times N$, K, a ser especificada na Seção 4.4. Da mesma forma, o produto escalar é apropriadamente modificado[4]

$$\begin{aligned}(\vartheta, (\mathcal{J} \otimes K)\,\vartheta) &= \sum_{i,j=1}^{n} J_{ij}\,\vartheta_i \cdot K\vartheta_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{N} J_{ij}\,K^{kl}\vartheta_i^k \vartheta_j^l\end{aligned}$$

onde $\vartheta_i = \left(\vartheta_i^1, \ldots, \vartheta_i^N\right)$ e $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ denotam um vetor em $\mathbb{C}^N$ e em $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^N$, respectivamente.

---

[4]Denotamos o produto interno em $\mathbb{R}^N$ por $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N} x^i y^j$.

Para finalizar a lista das extensões, serão consideradas também cadeias de Heisenberg já que estas podem ser representadas, usando a fórmula de Trotter (veja, por exemplo, [RS]), por um ferromagneto com spin semi–inteiro. A extensão do Teorema de Lee–Yang desenvolvida nesta tese pode ainda ser aplicada à sistemas de spin quântico em geral se estes forem dominados por modelos N–vetoriais como é feito no Teorema devido a Lieb[Li] (para uma aplicação deste Teorema aos zeros de Lee–Yang, veja [DN]).

4.2 Teorema de Lee–Yang Generalizado

O Teorema de Lee–Yang foi estendido por Griffiths [G] para modelos com spin arbitrário. Em seguida, sob a influência da Teoria Construtiva Quântica de Campos, Simon e Griffiths [SG] o estenderam para a distribuição "a priori" de spin ν da forma $e^{-ax^4+bx^2+c}$, com $a > 0$. Na decada de 70, métodos desenvolvidos em Mecânica Estatística eram aplicados à Teoria de Campos e o mesmo acontecendo na direção reversa. O intercâmbio entre estas duas áreas foi muito profícuo para a Física–Matemática praticada naqueles anos.

É desta época a formulação mais intrigante do Teorema de Lee–Yang. Segundo Newman [N], a condição necessária e suficiente para que o Teorema de Lee–Yang seja válido para a função de partição (4.15) com $\beta > 0$ e $\mathcal{J} \geq 0$, é que seja válido para função de partição (4.16) com $\beta = 0$ (ou $\mathcal{J} \equiv 0$).

Na linguagem do Capítulo 3, o conteúdo do Teorema de Newman pode ser expresso pela seguinte frase: $\exp\left\{-\frac{\beta}{4}(\vartheta, \mathcal{J}\vartheta)\right\}$ é um Γ^*–operador em P_n^* (veja Observação 3.31).

As seguintes definições foram introduzidas por Newman.

Definição 4.5 *Dizemos que um conjunto $\mathcal{L}$ de medidas ν em $\mathbb{R}$ tem a Propriedade de Lee–Yang se, para cada inteiro n, cada escolha de medidas $\nu_1, \dots, \nu_n$ em $\mathcal{L}$, e para cada escolha da matriz $\mathcal{J} \geq 0$, as seguintes condições são satisfeitas:*

1.

$$\mu^n(\mathbf{u}) = \exp\{(\mathbf{u}, \mathcal{J}\mathbf{u})\} \prod_{j=1}^{n} \nu_j(u_j) \tag{4.18}$$

é uma medida totalmente finita;

2.

$$Z^n(\mathbf{z}) = \exp\{(\vartheta, \mathcal{J}\vartheta)\} \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\nu_j}(z_j) \neq 0$$

se $\Im m\, \mathbf{z} < 0$, onde φ_{ν_j} é a função característica de ν_j e $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$, com $\vartheta_j = -i\,(\partial/\partial z_j)$.

Uma única medida ν tem a propriedade de Lee–Yang se ν pertencer ao conjunto $\mathcal{L}$ que a tem.

A seguir, vamos reservar $\mathcal{L}$ para denotar o conjunto de todas as medidas com a propriedade de Lee–Yang.

Definição 4.6 *Denotamos por $\mathcal{N}$ o conjunto de medidas em $\mathbb{R}$, com paridade definida ($\nu(-u) = \nu(u)$ ou $\nu(-u) = -\nu(u)$) satisfazendo:*

A.

$$\int e^{bu^2} d\,|\nu(u)| < \infty\,, \tag{4.19}$$

para todo $b \geq 0$;

B. *a função característica de ν, $\varphi_\nu \neq 0$ se $\Im m\,\mathbf{z} < 0$.*

Note que para aceitar medidas com paridade impar, a propriedade de Lee–Yang não requer que ν seja positiva.

Observação 4.7 *A condição (4.19) implica em que φ_ν é uma função inteira real (ou imaginária) de mínimo tipo da ordem 2. Note para isso,*

$$\begin{aligned} |\varphi_\nu(z)| &\leq \int e^{-u\Im m\, z} e^{-bu^2} e^{bu^2} d\,|\nu(u)| \\ &\leq C \int e^{-u\Im m\, z} e^{-bu^2} du \\ &\leq C' e^{|z|^2/4b}\,, \end{aligned} \tag{4.20}$$

com $1/b$ podendo ser tomado tão pequeno quanto se queira.

Devido a simetria de ν,

$$\overline{\varphi_\nu}(z) = \varphi_\nu(-z) = \int e^{-iuz} d\nu(u) = \int e^{iuz} d\nu(-u) = \pm\varphi_\nu(z)\,,$$

*e $\varphi_\nu(z) \neq 0$ para $\Im m\,\mathbf{z} < 0$ se a condição **B**. for satisfeita. Os zeros desta função estão sobre o eixo real e, pelo teorema da representação,*

$$\left|\frac{\varphi_\nu(z)}{\overline{\varphi_\nu}(z)}\right| = 1\,.$$

Logo, $\varphi_\nu(z) \in \overline{HB}$. Devido a definição (3.13) e equação (4.20), $\varphi_\nu(z)$ é uma função inteira da subclasse P^* que não excede o mínimo tipo da ordem 2.[5]

[5]Se na definição de $\mathcal{N}$ a equação (4.19) for válida para algum $b > 0$, $\varphi_\nu(z)$ é uma função inteira do tipo normal da ordem 2, pertencente a subclasse P^*, pela Definição (3.13).

Em termos destas definições, o Teorema de Lee–Yang resume-se ao seguinte enunciado:

Teorema 4.8 *a medida de Bernoulli ν_0, tem a propriedade de Lee–Yang ($\nu_0 \in \mathcal{L}$).*

Note que ν_0 também pertence à família $\mathcal{N}$. A generalização de Newman consiste em

Teorema 4.9 *A família de medidas $\mathcal{N}$ tem a propriedade de Lee-Yang ($\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$).*

Os itens **A.** e **B.** da Definição 4.6 são necessários para que uma medida ν tenha a propriedade de Lee–Yang, bastando para isso tomar $n = 1$ na Definição 4.5. Por conseguinte, a demosntração do Teorema de Newman se reduz a provar que estas condições são também suficientes. Newman [N] mostrou a suficiência destas condições supondo a paridade da medida ν. Seu método consiste em usar aproximantes de tipo Ising para os modelos de Ising generalizados.

Provaremos este teorema usando os resultados dos capítulos anteriores. Para isso vamos estender a definição de $\mathcal{N}$.

Definição 4.10 *Dizemos que uma medida ν em $\mathbb{R}$ pertence à família $\mathcal{P}$ se sua função característica $\varphi_\nu(z) \in P^*$.*

Note que $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}$, de acordo com a Observação 4.7. Desta forma, para provar o Teorema 4.9, basta mostrar que $\exp\{(\vartheta, \mathcal{J}\vartheta)\}$ é um Γ–operador. Mais precisamente,

Teorema 4.11 *Para cada inteiro n, cada escolha de funções inteiras $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ da classe P^*, e para cada escolha da matriz $\mathcal{J} \geq 0$ tal que*

$$\|\mathcal{D}\mathcal{J}\| < \frac{1}{4}\,, \tag{4.21}$$

onde $\mathcal{D} = \mathrm{diag}\,\{\tau_j\}$ com τ_j o tipo da função φ_j, temos

$$Z^n(\mathrm{z}) = \exp\{(\vartheta, \mathcal{J}\vartheta)\} \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(z_j) \in P_n^*\,. \tag{4.22}$$

Esta maneira de interpretar o Teorema de Newman na forma diferencial foi proposta por Lieb e Sokal em [LS]. Curiosamente, neste texto não há menção da classe das funções inteiras de Hermite–Biehler, muito embora conste em sua lista de referências o excelente livro de Levin [L] que trata sobre este assunto. Por este motivo, sendo a Proposição 2.1 e 2.2, a qual se baseiam para generalizar o Teorema de Newman, mais rudimentar que a Teoria desenvolvida no Capítulo 3, a versão do Teorema de Lee–Yang apresentada por estes autores é, nesta tese, generalizada ainda mais.

Prova do Teorema 4.11. A prova que daremos é baseada no Apêndice **A** da referência [LS] e usa indução matemática. Sem perda de generalidade, consideremos $\mathcal{J}$ uma matriz com diagonal nula ($J_{ii} = 0$, $\forall i$)[6]. Vamos ainda assumir que φ_j seja de mínimo tipo da ordem 2 ($\gamma = 0$ na Definição 3.13 e expoente de convergência do produto canônico $\sigma < 2$). Tanto o Teorema de Newman como o Teorema de Lee–Yang clássico admitem esta condição que, posteriormente, será removida.

Por hipótese, para $n = 1$, $\varphi_1(z) \in P^*$. Vamos agora assumir que a equação (*4.22*) seja verdadeira para $n - 1$. Então, usando sucessivamente a identidade

$$e^{cd/dz} g(z) = g(z + c)\,,$$

temos

$$\begin{aligned} Z^n(z_1, \dots, z_n) &= \exp\left\{ 2 \sum_{i=1}^{n-1} J_{in} \vartheta_n \vartheta_i \right\} Z^{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})\, \varphi_n(z_n) \\ &= W^{n-1}(i\vartheta_n)\, \varphi_n(z_n) \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde, para cada $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$,

$$W^{n-1}(z) = Z^{n-1}(z_1 - K_1 z, \dots, z_{n-1} - K_{n-1} z)$$

é uma função inteira de mínimo tipo da ordem 2 e $K_j = 2J_{jn}$. Note para isso que, devido as Definições 3.13 e 3.37, $Z^{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})$ é uma função de gênero 1 em cada variável.

Logo, pelo Teorema 3.32, $W^{n-1}(i\vartheta_n) = W^{n-1}(\partial/\partial z_n)$ é um operador aplicavel e $Z^n(z_1, \dots, z_n)$ é uma função inteira em z_n que não excede o mínimo tipo da ordem 2.

Resta ainda mostrar que $Z^n(z_1, \dots, z_n)$ é da classe P_n^* que não excede o mínimo tipo da ordem 2 em cada variável.

Primeiramente, observemos que $W^{n-1}(-z) = Z^{n-1}(z_1 + K_1 z, \dots, z_{n-1} + K_{n-1} z)$ é uma função da classe P^* na variável z para cada $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tal que $\Im m\, z_j < 0$ e $K_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n-1$, . Note para isso que $W^{n-1}(-z)$ não se anula em $\Im m\, z < 0$ pois $\Im m\, (z_j + K_j z) < 0$ para $j = 1, \dots, n-1$, sob estas condições, e $Z^{n-1}(\omega)$ não se anula para $\Im m\, \omega < 0$, por hipótese. Note ainda

$$\left| \frac{W^{n-1}(-\bar{z})}{W^{n-1}(-z)} \right| \leq 1\,,$$

devido a monotonicidade em $\Im m\, z$ da função $|W^{n-1}(-z)|$ (veja prova do Teorema 3.28):

$$\left| Z^{n-1}(z_1 + K_1 z, \dots, z_{n-1} + K_{n-1} z) \right| \geq \left| Z^{n-1}(z_1 + K_1 \bar{z}, \dots, z_{n-1} + K_{n-1} \bar{z}) \right| .$$

Segue que $W^{n-1}(-z) \in \overline{HB}$ e, por conseguinte, $W^{n-1}(-z) \in P^*$.

[6] O termo diagonal pode ser absorvido na medida ν:

$$e^{-J\partial^2/\partial z^2} \varphi_{\tilde{\nu}}(z) = \varphi_\nu(z)\,,$$

onde $\nu(x) = e^{Jx^2} \tilde{\nu}(x)$, devido a hipótese (4.19).

Convém enfatizar que estas propriedades são válidas somente se $K_j = 2J_{jn} \geq 0$, $j = 1, \ldots, n-1$. Conseqüentemente, por indução em n e por simetria, é essencial para demonstração do teorema que $\mathcal{J} \geq 0$.

Como $W^{n-1}(-z) \in P^*$ segue da Observação 3.31 que $Z^n = W^{n-1}(\partial/\partial z_n)\varphi_n(z_n) \in P^*$ se $\Im m\, z_j < 0$, $j \neq n$. Além disso, $Z^n(\mathbf{z})$ não se anula em $\Im m\, \mathbf{z} < 0$. Para demonstrar que $Z^n(\mathbf{z})$ é da classe P_n^* e, portanto, da classe P^* nas variáveis z_i com $i \neq n$, basta usar o Teorema 3.41.

Isso conclui a demonstração do Teorema 4.11 no caso em que φ_j é uma função inteira da classe P^* que não excede o mínimo tipo da ordem 2.

Para estender este resultado para funções $\varphi_j \in P^*$ quaisquer, devemos aplicar um resultado análogo ao Teorema 3.33 nos lugares correspondentes. Se τ_j denota o tipo da função φ_j de ordem 2, então o Teorema 4.11 é válido somente se $\mathcal{J}$ for tal que $\mathcal{J} \geq 0$ e (4.21) for satisfeita. A demonstração desta última relação será postergada para a próxima seção.

$\square$

Observação 4.12

1. *Na Seção 4.5 a seguir, provaremos o Teorema 4.11 de forma mais elegante usando o fato que P_n^* é a mais ampla classe de majorantes que preserva a relação por diferenciação parcial. Veremos que o majorante formado pelo modelo de campo médio associado a cada Ising generalizado garante a existência da solução da equação a derivadas parciais correpondente. Este fato será estendido para os modelos de Ising generalizados a N componentes.*

2. *A condição (4.21) é o refinamento que generaliza o Teorema* 3.2 *e o Corolário* 3.3 *de Lieb–Sokal [LS]. Os autores consideram a classe de funções inteiras $\mathcal{A}_{a+}^n$ que não excedem o tipo a da ordem* 2 *em cada componente. Isso elimina toda possibilidade de distinguir o crescimento em cada variável como fizemos ao considerar a classe P_n^*.*

Para estabelecer a relação do Teorema 4.11 com os modelos de Ising generalizados, e estender o Teorema de Newman 4.9, resta mostrar que cada medida $\nu \in \mathcal{P}$ satisfaz (4.19) para algum $b > 0$. Isto é, a condição **A.** na Definição 4.6 além de suficiente é necessária para que $\nu \in \mathcal{P}$.

Resta ainda examinar se a relação entre $\mathcal{P}$ e P^* estabelecida pela transformada de Fourier é um–para–um. Ambas questões permanecerão sem resposta na presente tese. Observamos que Lema 2.8 em [LS] responde parcialmente esta última questão (veja também [T]).

4.3 Função de Partição Majorante e Desigualdades de Correlação

O Teorema de Newman, demonstrado na Seção 4.2 em sua forma mais geral, insere o Teorema de Lee–Yang em um contexto mais amplo. Nesta seção, o Teorema forte de Lee–Yang demonstrado por Newman [N] para modelos de Ising generalizados será revisitado no contexto das funções inteiras da classe P_n^*. O Teorema forte de Lee–Yang permite estender para o plano complexo algumas desigualdades de correlaçao válidas para ferromagnetos.

Nesta seção ainda obteremos explicitamente um majorante para a função de partição dos modelos de Ising generalizados cuja transformada de Fourier é uma medida Gaussiana. Este fato tem um papel importante na *dominação Gaussiana* das mediadas de equilíbrio de ferromagnetos e gases de rede, também conhecida por *desigualdades de Campo Médio.*

O desenvolvimento a seguir insere a análise dos zeros da função de partição no contexto das equações diferencias parciais do tipo parabólico em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^n$.

Seja $\nu_1, \ldots, \nu_n$ um conjunto de medidas em $\mathcal{L}$ com função característica φ_j, $j = 1, \ldots, n$, e seja μ_t^n a medida de equilíbrio (4.18) de um sistema de spin com matrix de acoplamento $\mathcal{J}$ substituída por $t\mathcal{J}/4$. Denote por

$$Z_t(\mathbf{z}) = \int e^{i(\mathbf{z},\mathbf{s})} d\mu_t^n(\mathbf{s})$$

sua função de partição (função característica de μ_t^n).

De acordo com o Teorema de Newman 4.9,

$$Z_t(\mathbf{z}) \neq 0$$

para $\Im m\, \mathbf{z} < 0$ e todo $t \geq 0$. Da condição que μ_t^n é uma medida finita, segue

$$Z_t(\mathbf{z}) = \exp\left\{-\frac{t}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)\right\} Z_0(\mathbf{z}) \tag{4.24}$$

onde $Z_0(\mathbf{z}) = \prod_j \varphi_j(z_j)$ é a função de partição do sistema desacoplado.

Teorema 4.11 estende este resultado para classe das funções inteiras de Hermite–Biehler: $Z_t(\mathbf{z})$ dado por (4.24) pertence a classe P_n^* para todo $t \geq 0$ se $\varphi_j \in P^*$ for uma função inteira de mínimo tipo da ordem 2 para cada j.

Em outras palavras, o problema de valores inicial dado pela equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial Z_t}{\partial t} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) Z_t = 0 \tag{4.25}$$

possui uma solução Z_t em P_n^* para todo $t \geq 0$ se a condição inicial $Z_0(\mathbf{z}) = \prod_j \varphi_j(z_j)$ satisfizer as condições anteriores.

Nosso objetivo agora será obter um Majorante da função de partição Z_t no caso em que cada $\varphi_j \in P^*$ for representado por

$$\varphi_j(z) = e^{-\gamma_j z^2} \Phi_j(z)$$

com $\gamma_j \geq 0$ e $\Phi_j(z)$ uma função inteira de gênero 1. Lembre que, pela Definição 3.13 e Teorema 3.14, esta é a condição necessária e suficiente para que $\varphi_j(z)$ seja uma função inteira da classe P^*.

Considere a seqüência de Gaussinas $\psi_j(z) = e^{-\sigma_j z^2}$ com $\sigma_j > \gamma_j$ para cada j tal que

$$|\varphi_j(z)| \leq |\psi_j(z)| \qquad \text{e} \qquad |\varphi_j(\bar{z})| \leq |\psi_j(z)| \,, \tag{4.26}$$

e seja $G_0(\mathbf{z}) = \prod_j \psi_j(z_j)$.[7] Claramente, $G_0(\mathbf{z})$ é um P_n^*–majorante de Z_0 (veja Definição 3.35).

A solução $G_t(\mathbf{z})$ da equação (4.25) sujeita a condição inicial $G_0(\mathbf{z})$ pode ser obtida por uma integração Gaussiana. Note que $\psi_j(z)$ é a função característica da medida de probabilidade Gaussiana $\rho_j(s) = (4\pi\sigma_j)^{-1/2}\, e^{-s^2/(4\sigma_j)}$. Se $\mathcal{D} = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ denota a matriz diagonal $n \times n$ com entradas σ_j, então

$$\begin{aligned} G_t(\mathbf{z}) &= \exp\left\{-\frac{t}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)\right\} G_0(\mathbf{z}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{z},\mathbf{s})}\, e^{-\left(\mathbf{s},\left(\mathcal{D}^{-1}-t\mathcal{J}\right)\mathbf{s}\right)/4} \prod_{j=1}^{n} \frac{ds_j}{\sqrt{4\pi\sigma_j}} \\ &= \frac{1}{\det^{1/2}\left(\mathcal{I} - t\mathcal{D}\mathcal{J}\right)} \exp\left\{-\left(\mathbf{z}, \mathcal{D}\left(\mathcal{I} - t\mathcal{D}\mathcal{J}\right)^{-1}\mathbf{z}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.27}$$

para todo t tal que

$$t\,\|\mathcal{D}\mathcal{J}\| < 1. \tag{4.28}$$

Se $\mathcal{A}$ for uma matriz real $n\times n$ e $\sigma(\mathcal{A})$ denotar o conjunto de seus autovalores (espéctro de $\mathcal{A}$), a norma de $\mathcal{A}$ é dada por uma das seguintes definições equivalentes

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \\ &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{(\mathbf{x},\mathcal{A}\mathbf{x})}{(\mathbf{x},\mathbf{x})} \\ &= \sup_{\lambda\in\sigma(\mathcal{A})} |\lambda|\,. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Note que, pelo Teorema de Gersgorin [LT], o espéctro de uma matriz $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ se encontra no interior da região formada pelos discos de Gersgorin

$$D_{r_i}(a_{ii}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

[7]Equação (4.26) é sempre satisfeita a menos de um fator constante que pode ser absorvido na definição de Z_0^n. Sem perda de generalidade, vamos assumir esta constante igual a 1.

centrados em a_{ii} e com raio $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$:

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \bigcup_i D_{r_i}(a_{ii}) .$$

Usando este resultado e a definição (4.29),

$$t \sup_i \sigma_i \sum_j J_{ij} < 1 , \tag{4.30}$$

é uma condição suficiente para que (4.28) seja satisfeita. Mais adiante identificaremos t com o inverso da temperatura β do sistema de spin. Como veremos, equação (4.30) determina uma estimativa de campo médio para a temperatura crítica do sistema de spin.

Teorema 4.13 *A função inteira $G_t(\mathbf{z})$ dada por (4.27) é um P_n^*–majorante da função de partição $Z_t(\mathbf{z})$ para todo t satisfazendo (4.28):*

$$|G_t(\mathbf{z})| \geq |Z_t(\mathbf{z})| \qquad \text{e} \qquad |G_t(\mathbf{z})| \geq |Z_t(\mathbf{z}^c)| \tag{4.31}$$

para todo $\Im m\, \mathbf{z} < 0$ e $\mathbf{z}^c \in \mathrm{Cpx}(\mathbf{z})$.

Prova. Como $G_0(\mathbf{z})$ é um P_n^* –majorante de $Z_0(\mathbf{z})$, basta provar que o operador $\exp\left\{-\frac{t}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)\right\}$ é um Γ^*–operador em P_n^* , isto é, preserva a relação de majoração (4.31) por sua aplicação.

Vimos no Teorema 3.42 que a condição necessária e suficiente para que uma função pertença a P_n^* é que seja aproximada por H_n–polinômios. Isto é feito aplicando operador de Jensen $I_{\mathbf{m}} = I_{m_1} \cdots I_{m_n}$ para cada componente (veja prova do Teorema 3.42). Vimos também que a classe P_n^* é a mais ampla classe de $\overline{HB}_n$ –majorantes invariante pela multiplicação de exponenciais $e^{(\tau,\mathbf{z})}$ com $\tau \in \mathbb{R}^n$ e por derivação parcial. Esta afirmação segue da extensão que fizemos da classe $\overline{HB}$ para n componentes na Seção 3.5 e da Observação 3.31. Segue ainda desta Observação que um operador $F(-d/dz)$ é um Γ^*–operador se $F \in P^*$.

Retornando as equações (4.23) na prova do Teorema 4.11, $W(\partial/\partial z_n)$ preserva a relação de majoração. Logo, por indução em n, $\exp\left\{-\frac{t}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)\right\}$ é um Γ^*–operador, concluindo a prova do Teorema 4.13.

□

Para enunciar o Teorema forte de Lee–Yang faremos uso do multi–índice $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ denotando por $(\partial/\partial z)^{\mathbf{m}} = (\partial/\partial z_1)^{m_1} \cdots (\partial/\partial z_n)^{m_n}$ o operador a derivadas parciais de ordem $\|\mathbf{m}\| = m_1 + \cdots + m_n$. Vamos ainda denotar por $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ um número em $\mathbb{C}^n$ com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.14 *Seja $Z^n(\mathbf{z})$ a função de partição de um sistema de spin generalizado (4.22). Então*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\mathbf{m}} |Z(\mathbf{x}-i\mathbf{y})|^2 > 0 \tag{4.32}$$

para cada $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} > 0$.[8]

Prova. Teorema 4.14 será provado para qualquer função $Z^n(\mathbf{z}) \in P_n^*$. Usaremos para isso um procedimento devido Lieb–Sokal em [LS] que tornou o Teorema forte de Lee–Yang mais claro. Nossa prova, em contraposição, baseia–se integralmente na Teoria desenvolvida no Capítulo 3 sobre as funções de Hermite–Biehler.

Se $Z^n(\mathbf{z})$ é uma função inteira da classe P_n^*, então

$$R(\mathbf{z},\mathbf{z}') = Z^n(\mathbf{z}-i\mathbf{z}')\,\overline{Z^n}(\overline{\mathbf{z}}+i\mathbf{z}')$$

uma função inteira em $\mathbb{C}^{2n}$ que não se anula para $\Im m\,\mathbf{z} \le 0$ e $\Re e\,\mathbf{z}' > 0$. Note para isso que $Z^n(\omega) \neq 0$ se $\Im m\,\omega < 0$ e, devido ao fato que os zeros de $\overline{Z^n}$ passarem para o semi–plano inferior[9], $\overline{Z^n}(\omega) \neq 0$ se $\Im m\,\omega > 0$.

Além disso, devido a P_n^* ser invariante por derivação parcial, $(\partial/\partial\omega)^{\mathbf{m}}\, Z^n(\omega) \neq 0$ se $\Im m\,\omega < 0$ e, portanto,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^{\mathbf{m}} R(\mathbf{z},\mathbf{z}') \neq 0\,, \tag{4.33}$$

se $\Im m\,\mathbf{z} < 0$ e $\Re e\,\mathbf{z}' > 0$. Como $R(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |Z(\mathbf{x}-i\mathbf{y})|^2$ para $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, fazendo $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{z}' = \mathbf{y}$ em (4.33) concluímos que (4.32) não se anula para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} > 0$. Resta ainda determinar o sinal da expressão (4.32). Vamos provar o sinal positivo por indução.

Claramente (4.32) é verdadeiro para $\mathbf{m} = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Assumindo ser também verdadeiro para $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, com algum $m_j \neq 0$, vamos provar que também o é para $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + (1, 0, \dots, 0)$.[10] Considere para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $y_j > 0$, com $j \neq 1$, a seguinte função real

$$G(y_1) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\mathbf{m}} |Z^n(\mathbf{x}-i\mathbf{y})|^2$$

na variável y_1 e seja $G_k(y_1) = I_k G(y_1)$ a aproximação polinomial de ordem k de G, onde I_k é o operador de Jensen definido pela seqüência Γ em (3.32). Escrevendo

$$G_k(y_1) = \sum_{j=0}^{k} c_j\, y_1^j\,,$$

[8] O enunciado do presente teorema é análogo ao enunciado do Teorema 3.1 em Newman [N] e da Proposição 2.10 em Lieb–Sokal [LS]. Note que a função de partição nos referidos trabalhos é a transformada de Laplace da medida de equilíbrio μ^n ao passo que aqui $Z^n(\mathbf{z})$ é a transformada de Fourier de μ^n.

[9] Seja $f(z)$ é uma função inteira e $\sum_n c_n z^n$ sua série de potência. Então, pela Definição 3.1, $\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ denota a função inteira cuja série de potência tem coeficientes $\overline{c_n}$. Segue deste fato que os zeros de $\overline{f}$ são o complexo conjugado dos zeros de f. Note que, se α é tal que $f(\alpha) = 0$, então $\overline{f(\alpha)} = \overline{f}(\overline{\alpha}) = 0$.

[10] A escolha da primeira direção para o acréscimo ao multi–índice é irrelevante para a argumentação a seguir.

com $c_k \neq 0$, pela hipótese $G_k(y_1) > 0$ se $y_1 > 0$, temos $c_k > 0$ tomando $y_1 \to \infty$. Disso, e em vista de

$$G'_k(y_1) = \sum_{j=1}^{k} j c_j y_1^{j-1} , \tag{4.34}$$

concluímos, tomando $y_1 \to \infty$, que $G'_k(y_1) > 0$ para todo $y_1 > 0$ pois esta quantidade não pode se anular devido a (4.33).

Isto conclui o Teorema 4.14 uma vez que $G'_k(y_1)$ converge, quando $k \to \infty$, para $(\partial/\partial y)^{\mathrm{m}'} |Z^n(\mathrm{x} - i\mathrm{y})|^2$uniformemente em compactos devido a (3.33).

□

Observação 4.15

1. *Teorema 4.14 é também verdadeiro se as derivadas parciais com respeito a y_j forem substituídas por derivadas com respeito a x_j, contanto que cada componentes m_j do multi-índice $\mathbf{m}$ seja par. Caso contrário, substituindo y_1 por x_1 em (4.34) com k par, teríamos $G'_k(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in \mathbb{R}$ pois $G'_k(x_1) > 0$ ou < 0 de acordo com o limite $x_1 \to \infty$ ou $-\infty$. E isso contradiz a equação (4.33).*

2. *Considere o seguinte caso especial de (4.32)*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Z^n(\overline{\mathrm{z}})|^2}\frac{\partial}{\partial y_j}|Z^n(\overline{\mathrm{z}})|^2 &= \frac{1}{Z^n(\overline{\mathrm{z}})}\frac{\partial Z}{\partial y_j}(\overline{\mathrm{z}}) + \frac{1}{\overline{Z^n}(\mathrm{z})}\frac{\partial \overline{Z}}{\partial y_j}(\mathrm{z}) \\
&= \Re e\left(\frac{1}{Z^n(\overline{\mathrm{z}})}\frac{\partial Z^n}{\partial y_j}(\overline{\mathrm{z}})\right) \\
&= \Re e \left\langle s_j \right\rangle_{\mu^n}(\overline{\mathrm{z}}) > 0
\end{aligned}$$

para $\mathrm{z} = \mathrm{x} + i\mathrm{y}$ com $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{y} > 0$, onde

$$\left\langle f \right\rangle_{\mu^n}(\mathrm{z}) = \frac{1}{Z^n(\mathrm{z})}\int f(\mathrm{s})\, e^{i(\mathrm{z},\mathrm{s})} d\mu^n(\mathrm{s})$$

denota a esperânça com respeito a medida do modelo de Ising generalizado $\mu^n(\mathrm{s})$. Esta desigualdade generaliza a tendência de alinhamento de ferromagnetos devido a presença de um campo externo $\mathrm{h} = 2\beta^{-1}\mathrm{y} > \mathbf{0}$ (veja Observação 4.4) mesmo quando o fator complexo $e^{i(\mathrm{x},\mathrm{s})}$ é acrescentado a medida $\mu^n(\mathrm{s})$. Como $\ln Z^n(\mathrm{z})$ é uma função analítica em $\Im m\, \mathrm{z} < 0$, segue

$$\begin{aligned}
-\Re e \left\langle s_j \right\rangle_{\mu^n}(\mathrm{x} - i\mathrm{y}) &= -\Re e \frac{\partial \ln Z^n}{\partial y_j}(\mathrm{x} - i\mathrm{y}) \\
&= \Im m \frac{\partial \ln Z^n}{\partial x_j}(\mathrm{x} - i\mathrm{y}) \\
&= \frac{\partial \arg Z^n}{\partial x_j}(\mathrm{x} - i\mathrm{y}) < 0\,.
\end{aligned}$$

Teorema 4.14 é útil também para estender a desigualdade de correlação devido a Griffiths [G1]. Combinando a desigualdade (4.32) com $m_k = 1$ se $k = i, j$ e $m_k = 0$ de outra forma,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Z^n(\overline{\mathbf{z}})|^2}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}|Z^n(\overline{\mathbf{z}})|^2 &= \Re e\left\{\frac{1}{Z^n(\overline{\mathbf{z}})}\frac{\partial^2 Z}{\partial y_i \partial y_j}(\overline{\mathbf{z}}) + \frac{1}{Z^n(\overline{\mathbf{z}})}\frac{\partial Z}{\partial y_i}(\overline{\mathbf{z}})\frac{1}{\overline{Z^n}(\mathbf{z})}\frac{\partial \overline{Z}}{\partial y_j}(\mathbf{z})\right\} \\ &= \Re e\left\{\langle s_i\, s_j\rangle_{\mu^n}(\overline{\mathbf{z}}) + \langle s_i\rangle_{\mu^n}(\overline{\mathbf{z}})\,\overline{\langle s_j\rangle_{\mu^n}}(\mathbf{z})\right\} > 0\,,\end{aligned}$$

com a igualdade $\overline{\langle s_j\rangle_{\mu^n}}(\mathbf{x}) = -\langle s_j\rangle_{\mu^n}(\mathbf{x})$, válida para medidas de equilíbrio com paridade definida, $\mu^n(-\mathbf{s}) = \pm\mu^n(\mathbf{s})$, no limite em que $\mathbf{y} \to \mathbf{0}$ temos

$$\Re e\left\{\langle s_i\, s_j\rangle_{\mu^n}(\mathbf{x}) - \langle s_i\rangle_{\mu^n}(\mathbf{x})\,\langle s_j\rangle_{\mu^n}(\mathbf{x})\right\} \geq 0\;.$$

Note que a desigualdade estrita somente é garantida para $\mathbf{y} > 0$.

4.4 Ferromagnetos Vetoriais com N Componentes

Nesta seção estenderemos o Teorema de Lee–Yang generalizado para os modelos de Ising com interação ferromagnética ($\mathcal{J} \geq 0$) e com spin $\mathbf{s} = (s^1, \ldots, s^N)$ de N componentes. O modelo de Ising ($N = 1$), o rotor plano ($N = 2$) e o modelo de Heisenberg clássico ($N = 3$) são conhecidos exemplos cuja medida "a priori" é dada pela distribuição uniforme sobre a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.

A família de modelos N–vetoriais a ser considerada deve incluir aqueles cuja medida "a priori" ν em $\mathbb{R}^N$ seja invariante por rotações (ν é uma função de $|\mathbf{s}|^2 = (s^1)^2 + \cdots + (s^N)^2$) e tenha função característica pertencente a classe P_N^*. Veremos a seguir que estas duas condições são incompatíveis se não acompanhadas por uma transformação de variáveis seguida de uma continuação analítica.

Para diferenciar o índice de componente de spin do índice que distingue os spins entre si, denotamos um vetor em $\mathbb{C}^N$(ou $\mathbb{R}^N$ e *etc.)* por $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^N)$ e por $\gamma \cdot \zeta = \overline{\gamma^1}\zeta^1 + \ldots + \overline{\gamma^N}\zeta^N$ o produto interno no espaço correpondente. Para simplificar a notação, vamos algumas vezes denotar $\mathbf{x} = \Re e\,\zeta$ e $\mathbf{y} = \Im m\,\zeta$ para $\zeta \in \mathbb{C}^N$.

Seja R uma matriz $N \times N$ ortogonal de rotação $R^T = R^{-1}$, com $\det R = 1$. Então a função característica

$$\varphi_\nu(\zeta) = \int e^{i\,\mathbf{s}\cdot\zeta}\, d\nu(\mathbf{s})\,,$$

de uma medida ν invariante $d\nu(R\mathrm{s}) = d\nu(\mathrm{s})$, é tal que

$$\begin{aligned}\varphi_\nu(\zeta) &= \int e^{i\,\mathrm{s}\cdot\zeta}\, d\nu(R\mathrm{s}) \\ &= \int e^{i\,R^{-1}\mathrm{s}\cdot\zeta}\, d\nu(\mathrm{s}) \\ &= \int e^{i\,\mathrm{s}\cdot R\zeta}\, d\nu(\mathrm{s}) = \varphi_\nu(R\zeta)\,,\end{aligned}$$

e depende, devido a este fato, apenas da variável $\tau^2 = (\zeta^1)^2 + \cdots + (\zeta^N)^2$.

A dificuldade é que $f(\tau) = \varphi_\nu(\zeta)$ como função da variável $\tau \in \mathbb{C}$ não pode ser da classe P^* se $\varphi_\nu(\zeta)$ for da classe P_N^* pois a condição $\Im m\,\zeta < 0$ não determina o sinal de $\Im m\,\tau$. Por exemplo, tomando $\Im m\,\zeta < 0$ e $\Re e\,\zeta^2 = \cdots = \Re e\,\zeta^N = 0$, obtemos $\Im m\,\tau > 0$ se $2x^1y^1 > (x^1)^2 - \left\{(y^1)^2 + \cdots + (y^N)^2\right\}$ e $\Im m\,\tau < 0$ se a desigualdade for invertida. Note que $\varphi_\nu(\zeta) \in P_N^*$ implica, por definição, que $\varphi_\nu(\zeta)$ pertence a classe P^* em cada variável ζ_j que, por sua vez, coincide com $f(\tau)$ se $\zeta_k = 0$ para todo $k \neq j$. Isso mostra que é incompatível assumir que $\varphi_\nu(\zeta)$ seja da classe P_N^* ao mesmo tempo que $\nu(\mathrm{s})$ seja invariante por rotação.

Para remediar esta situação, é conveniente considerar matrizes $N \times N$ unitárias, $U^\dagger = U^{-1}$, de forma que U preserve o produto interno entre dois vetores $\gamma, \zeta \in \mathbb{C}^N$,

$$\gamma \cdot \zeta = \gamma \cdot U^{-1}U\zeta = U\gamma \cdot U\zeta\,.$$

Para entendermos melhor o problema geral, consideraremos inicialmente o caso $N = 2$. Seja

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

uma transformação unitária $U^\dagger = U^{-1}$ e considere a transformação de variável $\mathbf{z} = U\zeta$,

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta^1 + i\zeta^2 \\ \zeta^1 - i\zeta^2 \end{pmatrix}\,.$$

Note que $\Im m\,\mathbf{z} < 0$ (> 0) se, e somente se, $\Im m\,\zeta^1 < 0$ (> 0) e $|\Re e\,\zeta^2| < |\Im m\,\zeta^1|$. Isto é, se C^- e C^+ denotam os cones de luz [11] para traz e para frente

$$C^\mp = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \mp y\right\}\,,$$

então as regiões formadas pelos tubos $T^\mp = \{\zeta \in \mathbb{C}^2 : (\Re e\,\zeta^2, \Im m\,\zeta^1) \in C^\mp\}$ são mapeadas por U nos multi–semi–planos inferior ($\Im m\,\mathbf{z} < 0$) e superior ($\Im m\,\mathbf{z} > 0$).

Vamos então assumir que a função característica

$$\varphi_\nu(\mathbf{z}) = \int e^{i\,\mathbf{w}\cdot\mathbf{z}}\, d\nu(U^\dagger\mathbf{w}) \tag{4.36}$$

[11] Em unidades onde a velocidade $c = 1$.

seja da classe P_2^*, onde a integração é feita sobre a superfície $\{U\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ em $\mathbb{C}^2$. Note que $d\nu(U^\dagger \mathbf{w}) = i\, d\nu(\mathbf{w})$ no caso em que $\nu(\mathbf{w}) = g(|\mathbf{w}|) = g(\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})$ dependa apenas de $|\mathbf{w}|$ e ν continua assumindo valores reais.

Como conseqüência da mudança de variável, hipótese (4.36) e do Teorema 4.11 a função inteira

$$\exp\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}, K\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right\}\varphi_\nu(\zeta) = \exp\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}, U^T K U\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\right)\right\}\varphi_\nu(\mathbf{z}), \tag{4.37}$$

pertence a classe P_2^* para toda matriz K tal que

$$\widehat{K} = UKU^T \geq 0 \tag{4.38}$$

e satisfaz (4.21).

Cabe aqui alguns comentários e observações.

Observação 4.16

1. *Concluímos da equação (4.37) que o operador* $\exp\{-(\partial/\partial\zeta, K\partial/\partial\zeta)\}$ *leva as funções inteiras* $\varphi_\nu(\zeta)$ *que não se anulam no tubo* T^- *em funções inteiras da mesma espécie contanto que* K *satisfaça (4.38).*

2. *Mantemos em (4.37) a notação* $(\cdot,\cdot)$ *para indicar que o produto interno aqui não conjuga o vetor. Isto explica porque foi tomado o transposto de* U^T *em (4.38) mas não a conjugação.*

3. *A equação (4.37) se justifica, formalmente, pelas seguintes passagens. Definindo* $f(\mathbf{s}) = \exp\{(\mathbf{s}, \mathcal{K}\mathbf{s})\}$, *temos*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\varphi_\nu(\zeta) &= \int f(\mathbf{s})\, e^{i\mathbf{s}\cdot\zeta}\, d\nu(\mathbf{s}) \\ &= \int f(\mathbf{s})\, e^{iU\mathbf{s}\cdot U\zeta}\, d\nu(\mathbf{s}) \\ &= \int f(U^T\overline{\mathbf{w}})\, e^{i\mathbf{w}\cdot\mathbf{z}}\, d\nu(U^\dagger\mathbf{w}) \\ &= f\left(\frac{1}{i}U^T\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\right)\varphi_\nu(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Note que na terceira linha usamos $\mathbf{s} = U^\dagger\mathbf{w} = \overline{U^\dagger\mathbf{w}} = U^T\overline{\mathbf{w}}$ *pois, devido ao produto interno ser complexo,* $\mathbf{w}\cdot\mathbf{z} = \sum_i \overline{w}^i z^i$, *a correspondência com* $-i\partial/\partial\mathbf{z}$ *é feita através de* $\overline{\mathbf{w}}$.

4. *Calculando (4.38) para uma matriz real genérica*

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{pmatrix}$$

temos

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} K^{11} - K^{22} + i\,(K^{12} + K^{21}) & K^{11} + K^{22} - i\,(K^{12} - K^{21}) \\ K^{11} + K^{22} + i\,(K^{12} - K^{21}) & K^{11} - K^{22} - i\,(K^{12} + K^{21}) \end{pmatrix} .$$

Assim, para que $\widehat{K} \geq 0$ *devemos ter* $K^{12} = K^{21} = 0$ *e*

$$K^{11} \geq \left|K^{22}\right| . \tag{4.39}$$

Se permitirmos que K *seja uma matriz complexa, então* $\widehat{K} \geq 0$ *implica em* K^{11} *e* K^{22} *reais,* K^{12} *e* K^{21} *imaginários puros tais que as relações*

$$K^{11} + K^{22} \geq \left|K^{12} - K^{12}\right|$$

e

$$K^{11} - K^{22} \geq \left|K^{12} + K^{12}\right| .$$

sejam satisfeitas. Estas mesmas equações foram obtidas nas referências [D], Teorema 4, *e [LS], equação* 4.14, *sem a introdução do produto interno complexo.*

Tendo examinado que as condições sobre a medida "a priori" (4.36) e sobre os acoplamentos de um spin com $N = 2$ componentes (4.38) remetem às condições do Teorema de Lee–Yang generalizado na Seção 4.2, passemos agora a examinar o caso com n spins de N componentes.

Para que possamos aplicar a versão generalizada do Teorema de Lee–Yang, Teorema 4.11, aos modelos N–vetoriais vamos adotar a seguinte extensão da Definição 4.5:

Definição 4.17 *Um conjunto* $\mathcal{L}_N$ *de medidas* ν *em* $\mathbb{R}^N$ *tem a Propriedade de Lee–Yang se, para cada inteiro* n, *cada escolha de medidas* $\nu_1, \ldots, \nu_n$ *em* $\mathcal{L}_N$, *existirem matrizes unitárias* $U_1, \ldots, U_n$ *da ordem* N *tais que, para cada escolha da matriz* $\mathcal{K} = [K_{ij}]_{i,j=1}^n$ *com* K_{ij} *matrizes* $N \times N$ *satisfazendo*

$$\widehat{K}_{ij} = U_i K_{ij} U_j^T \geq 0 ,$$

as seguintes condições forem satisfeitas:

1.

$$\mu^n(\mathbf{u}) = \exp\left\{(\mathbf{u}, \mathcal{K}\,\mathbf{u})\right\} \prod_{j=1}^{n} \nu_j(\mathbf{u}_j) \tag{4.40}$$

é uma medida em $\mathbb{R}^{nN}$ *totalmente finita;*

2.

$$Z^n(\mathbf{z}) = \exp\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}, \widehat{\mathcal{K}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)\right\}\prod_{j=1}^{n}\varphi_{\nu_j}(\mathbf{z}_j) \neq 0 \tag{4.41}$$

se $\Im m\,\mathbf{z} < 0$, *onde* $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n)$, *com* $\mathbf{z}_j \in \mathbb{C}^N$, $\widehat{\mathcal{K}} = [\widehat{K}_{ij}]_{i,j=1}^n$ *e* φ_{ν_j} *é a função característica de* ν_j *definida em (4.36).*

Uma única medida ν *tem a propriedade de Lee-Yang se* ν *pertencer ao conjunto* $\mathcal{L}_N$ *que a tem.*

A adaptação do Teorema de Lee–Yang para os modelos N–vetoriais, com $N = 2$, 3 e com medida “a priori” uniforme na esfera em $\mathbb{R}^N$ (rotor plano e Heisenberg), foi realizada por Dunlop em uma série de trabalhos (veja [D]) baseados na versão generalizada do Teorema de Lee–Yang por Suzuki–Fisher [SF]. Estes resultados foram posteriormente estendidos por Lieb–Sokal para $N \geq 2$ e medida “a priori” $\nu(\mathbf{s})$ invariante por rotação. Os resultados de Lieb–Sokal para $N \geq 3$ são válidos sob a condição que a interação seja suficientemente anisotrópica. Para K diagonal esta condição é dada por

$$K^{11} \geq \sum_{k=2}^{N}\left|K^{kk}\right| ,$$

e embora coincida com (4.39) para $N = 2$ não é a melhor possivel. A conjectura para a condição ideal, segundo estes autores,

$$K^{11} \geq \sup_{2\leq k\leq N}\left|K^{kk}\right| ,$$

foi de fato verificada anteriormente na referência [D] para $N = 3$.

Enunciaremos agora a classe de modelos N–vetoriais aos quais o Teorema de Lee–Yang generalizado 4.11 pode ser aplicado.

Definição 4.18 *Dizemos que uma medida* ν *em* $\mathbb{R}^N$ *pertence à família* $\mathcal{P}_N$ *se existir uma matriz unitária* U *tal que sua função característica* $\varphi_\nu(\mathbf{z})$*, definida por (4.36), é uma função inteira da classe* P_N^**.*

O seguinte estende o Teorema 4.9 para modelos N–vetoriais.

Teorema 4.19 *A família de medidas* $\mathcal{P}_N$ *tem a propriedade de Lee-Yang* ($\mathcal{P}_N \subset \mathcal{L}_N$)*.*

Como $Z_0^n(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^{n}\varphi_{\nu_j}(\mathbf{z}_j) \in P_{nN}^*$ ($\mathcal{K} = 0$ em (4.41)) e, portanto, $Z_0^n(\mathbf{z}) \neq 0$ se $\Im m\,\mathbf{z} < 0$, basta mostrar que $\exp\left\{-\left(\partial/\partial\mathbf{z}, \widehat{\mathcal{K}}\partial/\partial\mathbf{z}\right)\right\}$, com $\widehat{\mathcal{K}} \geq 0$, leva funções inteiras da classe P_{nN}^* em funções inteiras da mesma classe. Isso pode ser demonstrado por indução em n como no Teorema 4.11. Omitiremos na presente tese esta demonstração.

Retornando às medidas "a priori" ν em $\mathbb{R}^N$ invariante por rotações, resta mostrar que é sempre possivel encontrar uma matrix unitária U tal que (4.36) define uma função característica $\varphi_v(\mathbf{z})$ pertencente a P_N^*. Em seguida, deve-se examinar as condições sobre a matriz diagonal $K = \operatorname{diag}\{K^1, \ldots, K^N\}$ para que $\widehat{K} = UKU^T \geq 0$. Devido a dificuldade encontrada para dar uma resposta satisfatória a estas questões, também não as incluiremos nesta tese.

4.5 Existência e Unicidade da Equação a Derivadas Parciais

O objetivo desta seção é garantir a existência de uma única solução da equação (4.25). Vamos inicialmente discutir brevemente as questões sobre a existência e unicidade da solução do problema de valor inicial pelo teorema abstrato de Ovsjannikov e pelo método de Picard. Trataremos em seguida o problema de valor inicial (4.25) pelo método majorante mostrando que de fato a solução majorante (4.27) garante a existência e unicidade das soluções para t satisfazendo (4.28) se Z_0 for de tipo normal da ordem 2 ou para todo $t \geq 0$ se Z_0 for de mínimo tipo da ordem 2 em cada componente. Verificaremos também se as propriedades sobre a distribuição dos zeros da fungã de partição inicial são preservadas pela equação. Concluiremos com um esboço de uma possível prova alternativa do Teorema de Lee–Yang generalizado.

Aqui e no que segue, é conveniente fazer a mudança de variável $\mathbf{w} = i\mathbf{z}$. Tendo em vista (4.25), $Y(t, \mathbf{w}) = Z_t(-i\mathbf{w})$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) Y = 0\,, \tag{4.42}$$

sujeita a condição inicial $Y(0, \mathbf{w}) = Y_0(\mathbf{w}) = \prod_j \varphi_j(-iw_j)$.

A equação diferencial (4.42) é equivalente a equação integral

$$Y(t, \mathbf{w}) = Y_0(\mathbf{w}) + \frac{1}{4}\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) Y(\tau, \mathbf{w})\, d\tau\,, \tag{4.43}$$

de forma que uma solução de (4.43), contínua em t, portanto diferenciável pelo Teorema Fundamental do Cálculo, é também uma solução do problema de valor inicial (4.42).

Para utilizarmos o método de Picard, vamos introduzir uma norma no espaço $\mathfrak{J}_\sigma^n$ das funções inteiras $f(\mathbf{w})$ em $\mathbb{C}^n$ que não excedem o tipo normal σ_j da ordem 2 em cada componente w_j:

$$\|f\|_\sigma = \sup_{\mathbf{w}\in\mathbb{C}^n} e_\sigma(\mathbf{w})\,|f(\mathbf{w})|\ , \tag{4.44}$$

onde

$$e_\sigma(\mathbf{w}) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \sigma_j\,|w_j|^2\right\}\,.$$

Note que $\lim_{|\mathbf{w}|\to\infty} e_\sigma(\mathbf{w})\,|f(\mathbf{w})| = 0$[12] e $\|f\|_\sigma < \infty$ se $f \in \mathfrak{J}^n_{\sigma'}$ com $\sigma'_j < \sigma_j$ para cada j. Esta condição será denotada a seguir simplismente por $\sigma' < \sigma$.

Equipado com a norma (4.44) o espaço $\mathfrak{J}^n_\sigma$ é completo. Uma seqüência $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ de funções inteiras em $\mathfrak{J}^n_\sigma$ converge para f na topologia induzida por (4.44) se, e somente se, $e_\sigma(\mathbf{w})f_j(\mathbf{w})$ convergir para $e_\sigma(\mathbf{w})f(\mathbf{w})$ uniformemente em $\mathbb{C}^n$.[13] Para cada $f \in \mathfrak{J}^n_\sigma$, a série parcial de Taylor de f converge para f nesta topologia e o conjunto dos polinômios em $\mathbb{C}^n$ é denso em $\mathfrak{J}^n_\sigma$.

Além disso, pela fórmula de Cauchy

$$\frac{\partial f}{\partial w_j}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\delta} \frac{f(\mathbf{w}+\zeta\mathbf{e}_j)}{\zeta^2}d\zeta\,, \tag{4.45}$$

com $(\mathbf{e}_j)_k = \delta_{jk}$, verifica-se a seguinte desigualdade para o máximo módulo

$$M\left(\mathbf{r}; \frac{\partial f}{\partial w_j}\right) \le \frac{1}{\delta}M(\mathbf{r}+\delta\mathbf{e}_j; f)\,. \tag{4.46}$$

Diferenciação parcial, translações e multiplicação por polinômios são alguns exemplos de mapeamento linear contínuo $T : \mathfrak{J}^n_\sigma \longrightarrow \mathfrak{J}^n_{\sigma'}$ definidos para todo $\sigma' > \sigma$.

Note que, devido a (4.46) e pela definição de máximo módulo,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial\mathbf{w}}\right) f\right\|_{\sigma'} &= \sup_{\mathbf{r}} e_{\sigma'}(\mathbf{r}) \sum_{k,l=1}^{n} J_{kl}\, M\left(\mathbf{r}; \frac{\partial^2 f}{\partial w_k \partial w_l}\right) \\
&\le \sum_{k,l=1}^{n} \frac{J_{kl}}{\delta_k\delta_l} \sup_{\mathbf{r}} e_{\sigma'}(\mathbf{r})\, M(\mathbf{r}+\delta_k\mathbf{e}_k+\delta_l\mathbf{e}_l; f) \\
&\le (\rho, \mathcal{J}\rho)\,\|f\|_\sigma\,,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde ρ é um vetor de componentes

$$\rho_j = \frac{1}{\delta_j}\sup_{r\ge 0} \exp\left\{\sigma_j(r+\delta_j)^2 - \sigma'_j r^2\right\} = \frac{1}{\delta_j}\exp\left\{\frac{\sigma_j\sigma'_j\delta_j^2}{\sigma'_j-\sigma_j}\right\}. \tag{4.48}$$

Escolhendo $\delta_j = \sqrt{(\sigma'_j-\sigma_j)/\sigma_j\sigma'_j}$ na estimativa de Cauchy (4.46), obtemos

$$(\rho, \mathcal{J}\rho) \le e\,\|\mathcal{J}\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j\sigma'_j}{\sigma'_j-\sigma_j} \tag{4.49}$$

que diverge como $|\sigma'-\sigma|^{-1}$ quando $\sigma' \searrow \sigma$. Esta é exatamente a situação na qual a existência de uma única solução do problema de Cauchy é garantida pelo Teorema

[12] Veja discussão sobre índice central na Seção 2.3.

[13] Esta e as afirmações a seguir são, a rigor, verdadeiras na topologia induzida pela família de normas $\|\cdot\|_e$ indexadas pelas funções $e(\mathbf{w})$ em (4.44) pertencentes a um conjunto $\mathfrak{K}$. Veja o texto [T] para maiores detalhes.

de Ovsjannikov [O]. Vamos aqui seguir brevemente a excelente exposição de François Treves [Tr] (veja também [Tr1]).

Dado σ_0 e σ_1, $\sigma_1 < \sigma_0$, introduzimos uma família a um parâmetro $\{\mathfrak{J}_s^n : 0 \leq s < 1\}$ de espaços de funções inteiras do tipo normal $\sigma_s = s\sigma_1 + (1-s)\sigma_0$ da ordem 2, equipados com a norma $\|f\|_s = \|f\|_{\sigma_s}$ dada por (4.44). Note que $\mathfrak{J}_s^n \subset \mathfrak{J}_{s'}^n$ se $s' < s$, e a injeção natural $I : \mathfrak{J}_s^n \longrightarrow \mathfrak{J}_{s'}^n$ tem norma menor ou igual a unidade:

$$\begin{aligned} \|If\|_{s'} &= \sup_{\mathbf{w}\in\mathbb{C}^n} e_{\sigma_{s'}}(\mathbf{w})\,|f(\mathbf{w})| \\ &\leq \prod_j \sup_{r\geq 0} \exp\left\{(s'-s)(\sigma_{0,j}-\sigma_{1,j})r^2\right\} \|f\|_s \leq \|f\|_s \end{aligned}$$

(observe que $\sigma_{s'} - \sigma_s = (s'-s)(\sigma_1 - \sigma_0)$).

Proposição 4.20 *Se*

$$x_k(t) = \frac{1}{4}\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) x_{k-1}(\tau)\, d\tau\,, \tag{4.50}$$

$k = 1, 2, \ldots$, *é uma seqüência em* $\mathfrak{J}_s^n$ *com* $x_0(t) = Y_0 \in \mathfrak{J}_1^n$, *então a seguinte estimativa*

$$\|x_k(t)\|_s \leq K\left(\frac{eCt}{1-s}\right)^k \tag{4.51}$$

é válida para todo $k \in \mathbb{N}$ *e* $s \in [0,1)$, *com* $K \geq \|Y_0\|_1$ *e* $C = C(s) = (\rho, \mathcal{J}\rho)/4$, *onde* $\rho_j = \dfrac{\sigma_{s,j}}{\sqrt{\sigma_{0,j} - \sigma_{1,j}}}$.

Prova. Inicialmente, observe que $\|x_k(t)\|_s < \infty$ qualquer que seja s, pois o operador diferencial em (4.50) é contínuo de $\mathfrak{J}_s^n$ a $\mathfrak{J}_{s'}^n$ se $s' < s$, não importando quão próximo esteja s' de s. Claramente, (4.51) é válida com $k = 0$. Assumindo que (4.51) seja válida com $k = m - 1$, então, devido a (4.47),

$$\begin{aligned} \|x_m(t)\|_s &\leq \frac{C}{\varepsilon}\int_0^t \|x_{m-1}(\tau)\|_{s+\varepsilon}\, d\tau \\ &\leq K\frac{C}{\varepsilon}\left(\frac{eC}{1-s-\varepsilon}\right)^{m-1}\int_0^t \tau^{m-1}\, d\tau \\ &= K\frac{Ct}{m\varepsilon}\left(\frac{eCt}{1-s-\varepsilon}\right)^{m-1} \end{aligned} \tag{4.52}$$

Escolhendo $\varepsilon = \dfrac{1}{m}(1-s)$, a estimativa continua como

$$\begin{aligned}
\|x_m(t)\|_s &\le K\left(\frac{eCt}{1-s}\right)^m \frac{1}{e}\left(\frac{1}{1-1/m}\right)^{m-1} \\
&= K\left(\frac{eCt}{1-s}\right)^m \frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \\
&\le K\left(\frac{eCt}{1-s}\right)^m .
\end{aligned}$$

Portanto (4.51) é satisfeita com $k=m$ para todo s tal que

$$0 < 1-s-\varepsilon = 1-\frac{1}{m}-s\left(1-\frac{1}{m}\right) \le 1$$

e, consequentemente, para todo $s \in [0,1)$. Com isso verificamos por indução a estimativa (4.51), concluindo a prova da Proposição 4.20.

□

Segue da Proposição 4.20 que, para cada $s \in [0,1)$, a seqüência de séries parciais

$$Y_m(t) = \sum_{k=0}^{m} x_k(t)\,, \qquad m \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente em cada intervalo fechado de $|t| < (eC)^{-1}(1-s)$ para uma função $Y(t) \in \mathfrak{J}_s^n$ contínua em t que satisfaz (4.43). Note para isso que, somando (4.50) de 1 à m obtêm-se

$$Y_m(t) = Y_0 + \frac{1}{4}\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) Y_{m-1}(\tau)\, d\tau$$

e resgatando a equação (4.43) no limite quando $m \to \infty$.

Por um procedimento análogo pode-se mostrar [Tr] que esta é a única solução continuamente diferenciavel em $|t| < (eC)^{-1}(1-s)$ do problema de Cauchy (4.42).

Para o método de Picard, seguiremos a modificação do Teorema de Ovsjannikov por Nirenberg [Ni].

Seja $\mathfrak{S}_a$ o espaço de funções $Y(t)$ tais que, para cada $s \in [0,1)$ e $|t-t_0| < a(1-s)$, $Y(t) \in \mathfrak{J}_s^n$ é contínua em t e

$$\|Y\| := \sup_{\substack{|t-t_0|<a(1-s),\\ s\in[0,1)}} \left(a(1-s) - |t-t_0|\right) \|Y(t)\|_s < \infty\,. \tag{4.53}$$

Equipado com esta norma, $\mathfrak{S}_a$ é um espaço métrico completo.[14]

[14] O peso em (4.53) difere do peso na norma de Nirenberg por um fator $|t-t_0|$, removendo,desta forma, a singularidade em $t=t_0$. Na aplicação que faremos a seguir, a depende da escala s.

Teorema 4.21 *Para cada $s \in [0,1)$, $a \le (8C)^{-1}$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ e $Y_0 \in \mathfrak{J}_1^n$, existe um intervalo aberto $I = I(s) = \{t : |t - t_0| < a(1-s)\}$ e uma única função continuamente diferenciável $Y : I \to \mathfrak{J}_s^n$ que é solução do problema de valor inicial (4.42) com $Y(t_0) = Y_0$. Além disso, Y satisfaz $\|Y(t)\|_s \le 2\|Y_0\|_s$ para todo $|t - t_0| < a(1-s)$ e $s \in [0,1)$.*

Prova. Seja Φ o operador definido sobre o espaço de funções $Y(t)$ a valores em $\mathfrak{J}_s^n$, para cada $s \in [0,1)$, dada pelo lado direito da igualdade (4.43) (com o limite inferior na integral substituído por t_0):

$$\Phi[Y](t) = Y_0 + \frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) Y(\tau)\, d\tau\,. \tag{4.54}$$

Mostraremos que é sempre possivel escolher a e $\mathfrak{S}_{a,K} \subset \mathfrak{S}_a$ tal que $\Phi : \mathfrak{S}_{a,K} \to \mathfrak{S}_{a,K}$ é uma contração estrita.

Se Y, $W \in \mathfrak{S}_a$, procedendo como na primeira linha de (4.52) com $s + \varepsilon = s(\tau) < 1 - (\tau - t_0)/a$, temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi[Y](t) - \Phi[W](t)\|_s &\le C_0 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s(\tau) - s} \|Y(\tau) - W(\tau)\|_{s(\tau)}\, d\tau \\
&\le C_0 \|Y - W\| \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{(a(1 - s(\tau)) - \tau + t_0)(s(\tau) - s)}\,,
\end{aligned}$$

onde $C_0 = C(0)$, com $C(s)$ é uma constante como em (4.51). Escolhendo $s(\tau) = \dfrac{1}{2}\left(1 + s - \dfrac{\tau - t_0}{a}\right)$,[15] continuamos

$$\begin{aligned}
\|\Phi[Y](t) - \Phi[W](t)\|_s &\le \frac{4C}{a}\|Y - W\| \int_0^{t-t_0} \frac{d\tau'}{(1 - s - \tau'/a)^2} \\
&= 4C\|Y - W\| \left(\frac{1}{1 - s - (t - t_0)/a} - \frac{1}{1-s}\right) \\
&= \frac{4C}{a}\|Y - W\| \frac{t - t_0}{(1 - s - (t - t_0)/a)(1 - s)} \\
&\le 4Ca\|Y - W\| \frac{1}{a(1-s) - t + t_0}\,,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

onde a última linha segue da relação $t - t_0 < a(1-s)$. Concluímos de (4.53), (4.54) e (4.55) que Φ é uma contração,

$$\|\Phi[Y] - \Phi[W]\| \le \frac{1}{2}\|Y - W\|$$

se $a \le (8C)^{-1}$.

[15] Esta escolha maximiza o denominador do integrando, $(a(1 - s(\tau)) - \tau')(s(\tau) - s) \ge (a(1 - s') - \tau')(s' - s)$ para qualquer $s' < 1 - \tau'/a$

Para mostrar que $\Phi : \mathfrak{S}_{a,K} \to \mathfrak{S}_{a,K}$ notamos, repetindo a estimativa acima,

$$\|\Phi[Y] - Y_0\| \leq \frac{1}{2}\|Y\| \leq \frac{1}{2}(\|Y - Y_0\| + \|Y_0\|) \leq K$$

se $\mathfrak{S}_{a,K} = \{Y \in \mathfrak{S}_a : \|Y - Y_0\| \leq K\}$ onde $K \geq \|Y_0\|$. Logo, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, existe uma e somente uma função $Y \in \mathfrak{S}_{a,K}$ tal que $Y = \Phi[Y]$, satisfazendo, devido as últimas desigualdades, $\|Y(t)\|_s \leq 2\|Y_0\|_s$.

□

O método de solução de equações diferenciais pela variação dos coeficientes foi posto em base sólida pelo *cálculo de limites* de Cauchy. Por cálculo de limites, denominado por Poincaré de método majorante, entende-se o procedimento para determinar um limite superior da solução de uma equação diferencial por uma série de potência convergente com coeficientes positivos.

Uma função $g(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} C_{\mathbf{j}}\, w^{\mathbf{j}}$, convergente em um domímio D em $\mathbb{C}^n$, é dita ser um *majorante* da função $f(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n} c_{\mathbf{j}}\, w^{\mathbf{j}}$ em D se para cada $\mathbf{j}$ a desigualdade

$$|c_{\mathbf{j}}| \leq C_{\mathbf{j}}$$

for verificada. Denotamos a relação majorante por $f(\mathbf{w}) \trianglelefteq g(\mathbf{w})$.

Note que, se $f_i(\mathbf{w}) \trianglelefteq g_i(\mathbf{w})$ e $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, então

$$a_1 f_1(\mathbf{w}) + \cdots + a_m f_m(\mathbf{w}) \trianglelefteq a_1 g_1(\mathbf{w}) + \cdots + a_m g_m(\mathbf{w})\,. \tag{4.56}$$

Além disso, a relação é preservada por diferenciação parcial

$$f(\mathbf{w}) \trianglelefteq g(\mathbf{w}) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial w_j}(\mathbf{w}) \trianglelefteq \frac{\partial g}{\partial w_j}(\mathbf{w})\,, \tag{4.57}$$

e integração com respeito a t, ou a algum outro parâmetro,

$$f(t,\mathbf{w}) \trianglelefteq g(t,\mathbf{w}) \Longrightarrow \int f(\tau,\mathbf{w})d\tau \trianglelefteq \int g(\tau,\mathbf{w})d\tau\,. \tag{4.58}$$

A seguir o método majorante será aplicado à equação (4.42), com Y_0 em $\mathfrak{J}^n_\sigma$, para garantir a existência de uma solução para t satisfazendo (4.28).

Teorema 4.22 *Seja $Y_0 \in \mathfrak{J}^n_\sigma$, tal que*

$$Y_0(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{n} y_j(w_j)$$

com $y_j(w) \trianglelefteq \exp\{\sigma_j w^2\}$. *Então o problema de valor inicial (4.42) tem uma única solução* $Y(t, \mathrm{w})$ *em* $\mathfrak{J}^n_{\sigma(t)}$ *onde*

$$\sigma_j(t) = \left(\mathcal{D}^{-1} - t\mathcal{J}\right)^{-1}_{jj} ,$$

definida em $\left[0, \|\mathcal{D}\mathcal{J}\|^{-1}\right)$ *e majorada pela função de partição* $G_t(-i\mathrm{w})$ *dada por (4.27):*

$$Y(t, \mathrm{w}) \trianglelefteq \det{}^{-1/2}(\mathcal{I} - t\mathcal{D}\mathcal{J}) \exp\left\{\left(\mathrm{w}, \mathcal{D}(\mathcal{I} - t\mathcal{D}\mathcal{J})^{-1}\mathrm{w}\right)\right\} . \tag{4.59}$$

Prova. Para demonstrar o Teorema 4.22 basta notar que, em vista das propriedades (4.56), (4.57) e (4.58), se $Y \trianglelefteq W$ então

$$\Phi[Y] \trianglelefteq \Phi[W] ,$$

com Φ o mapa definido por (4.54) com $t_0 = 0$.

Note ainda que $W(t, \mathrm{w}) = G_t(-i\mathrm{w})$ dado pelo lado direito de (4.59) é a única solução da equação de ponto fixo $\Phi[W] = W$ tal que

$$W(0, \mathrm{w}) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{\sigma_j w_j^2\right\} .$$

Observe que é fundamental para estas afirmações que $\mathcal{J} \geq 0$. Observe ainda, que convergência da série de potência de $W(t, \mathrm{w})$ em $\mathbb{C}^n$ implica a convergência da série de potência de $Y(t, \mathrm{w})$ para uma função inteira que não excede o tipo normal

$$\begin{aligned} \sigma_j(t) &= \sigma_j\left(\mathcal{I} + t\mathcal{D}\mathcal{J} + t^2(\mathcal{D}\mathcal{J})^2 + \cdots\right)_{jj} \\ &= \sigma_j\left(1 + t^2\sigma_j \sum_{k=1}^{n} J_{jk}^2 \sigma_k + \cdots\right) \end{aligned} \tag{4.60}$$

da ordem 2 em cada variável w_j (veja conexão entre os coeficientes da série de potência e o tipo e a ordem de funções na Seção 2.3, especialmente Teoremas 2.13 e 2.14). Para isso, note que o tipo σ_j da função majorante (4.59) com respeito a variavel w_j é obtido pela entrada jj da matriz $\mathcal{D}(\mathcal{I} - t\mathcal{D}\mathcal{J})^{-1}$ cuja série de Neuman, convergente se $t\|\mathcal{D}\mathcal{J}\| < 1$, é dada por (4.60).

Isso conclui a prova do Teorema 4.22.

□

Observação 4.23 *Note que o método majorante garante a existência global de uma única solução* $Y(t)$ *do problema de valor inicial (4.42) para* $t \geq 0$ *se* Y_0 *for de mínimo tipo da ordem* 2 *em cada componente pois o domíno de definição,* $0 \leq t < \|\mathcal{D}\mathcal{J}\|^{-1}$, *se estende sobre a semi-reta quando* $\sigma \searrow 0$.

Para uma prova alternativa do Teorema de Lee–Yang Generalizado, Teorema 4.9, resta ainda provar que cada solução $Y(t, \mathrm{w})$ de (4.25) sujeita a condição inicial $Y_0(\mathrm{w}) = \prod_j \varphi_j(-iw_j)$ com $\varphi_j(z) \in P^*$, é tal que $Y(t, i\mathrm{z})$ pertence a classe P_n^*. O resultado a ser enunciado a seguir utiliza toda a teoria desenvolvida no Capítulo 3 ao mesmo tempo que desfruta da linearidade da equação (4.25).

Teorema 4.24 *Seja* $Y_0 \in \mathfrak{J}_\sigma^n$ *como no Teorema 4.22,* $Y(t, \mathbf{w})$ *a única solução do problema de valor inicial (4.42) e considere a solução majorante* $W(t, \mathbf{w}) = G_t(-i\mathbf{w})$ *de* $Y(t, \mathbf{w})$ *dada em (4.59) para todo* $t < \|\mathcal{DJ}\|^{-1}$*. Então, a única solução* $X(t, \mathbf{w}) = W(t, \mathbf{w}) + Y(t, \mathbf{w})$ *de (4.42) com condição inicial*

$$X(0, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{\sigma_j w_j^2\right\} + \prod_{j=1}^{n} y_j(w_j),$$

é tal que $X(t, i\mathbf{z})$ *pertence a subclasse* P_n^* *de Hermite-Biehler para* $t < \|\mathcal{DJ}\|^{-1}$ *e, conseqüentemente,*

$$X(t, \mathbf{w}) \neq 0$$

para $\Re e\, \mathbf{w} > 0$.

Prova. Teorema 4.24 é conseqüencia imediata do Teorema 3.36 e Observação 3.38.

□

Observação 4.25 *Do ponto de vista das grandezas Físicas, a restrição sobre os valores de t no Teorema 4.24 não o enfraquece comparado ao Teorema 4.9 de Lee-Yang generalizado. Note que podemos sempre fatorar uma constante* K^n *na função de partição de maneira tal que*

$$y_j(w) \trianglelefteq K \exp\left\{\sigma_j w^2\right\}$$

seja válido com σ_j *arbitrariamente pequeno, se* $y_j(w)$ *for uma função inteira de mínimo tipo da ordem 2, fazendo com que o Teorema 4.24 seja válido para qualquer* $t > 0$.

O ponto fraco no Teorema 4.24 é que a condição inicial não é da forma produto. A seguir, faremos um pequeno esboço de como abordar o problema de valor inicial (4.42) de tal forma que a condição de Lee-Yang $Y(t, \mathbf{w}) \neq 0$ para $\Re e\, \mathbf{w} > 0$, seja mantida para todo $t \geq 0$.

Pelos Teoremas 3.11 e 3.14, uma função $\varphi \in P^*$ pode ser representada por

$$\varphi(-iw) = c\,(-iw)^m\, e^{\gamma w^2 - i\beta w} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iw}{\alpha_j}\right) e^{-iw/\alpha_j}$$

com $\gamma \geq 0$, $\Im m\, \beta, \Im m\, \alpha_j \geq 0$ e $\sum_j |\alpha_j|^{-2} < \infty$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\varphi(0) = 1$. Em vista do Teorema 3.22, φ é o limite uniforme da seqüência de H -polinômios

$$\begin{aligned} f^{(m)}(w) &= I_m[\varphi](-iw) \\ &= \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \kappa_{j,m}^{-1} w\right) \end{aligned} \tag{4.61}$$

com $\Re e\, \kappa_{j,m} \geq 0$, onde I_m é o operador de Jensen. Portanto, cada fator em (4.61) satisfaz

$$\Re e\ (\kappa_{j,m} + w) > 0\,, \tag{4.62}$$

se $\Re e\, w > 0$.

O correspondente analogo a um H_n–polinômio é dado pela seguinte

Definição 4.26 *Um polinômio*

$$P_N(\mathbf{w}) = \sum_{\substack{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^n: \\ \mathbf{m}-\mathbf{j}\geq 0}} c_{\mathbf{j}}\, w^{\mathbf{j}} \tag{4.63}$$

da ordem $N = m_1 + \cdots + m_n$ em $\mathbb{C}^n$ é dito ser um R_n–polinômio se $P_N(\mathbf{w}) \neq 0$ para $\Re e\, \mathbf{w} > 0$.

O resultado a seguir tem como base a Proposição 2.2 e Lema 2.3 de [LS] podendo, contudo, ser também derivado em termos dos H_n–polinômios.

Lema 4.27 *Seja*

$$R(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{n},\mathbf{m}} c_{\mathbf{n},\mathbf{m}}\, v^{\mathbf{n}}\, w^{\mathbf{m}}\,, \tag{4.64}$$

um R_{2n}–polinômio, multilinear com respeito a variavel $\mathbf{v}$ (isto é, $c_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \neq 0$ somente se $\|\mathbf{n}\| \leq 1$). Se $Q(\mathbf{w}) = R(\partial/\partial\mathbf{w}, \mathbf{w})$ denota o polinômio obtido substituindo v por $\partial/\partial w$ em (4.64), então $Q(\mathbf{w})$ é um R_n–polinômio.

Prova. Inicialmente, se $\widehat{\mathbf{v}}$ denota o vetor formado pelas componentes v_k do vetor $\mathbf{v}$ com $k \neq j$, então o R_{2n}–polinômio (4.64) pode ser escrito, devido sua multilinearidade, como

$$R(\mathbf{v},\mathbf{w}) = Q_0(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w}) + v_j Q_1(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w})\,, \tag{4.65}$$

onde $Q_0(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w})$ e $Q_1(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w})$ são dois R_{2n-1}–polinômios nas variáveis complementares a v_j. Note para isso que, tomando $|v_j|$ para infinito ou próximo de zero, com $\Re e\, \mathbf{v}$, $\Re e\, \mathbf{w} > 0$, concluímos que $Q_1(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w}) \neq 0$ e $Q_0(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w}) \neq 0$. Além disso, devido a estas mesmas condições, $R(\mathbf{v},\mathbf{w}) \neq 0$ se, e somente se,

$$\Re e\, \frac{Q_0(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w})}{Q_1(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w})} > 0\,, \tag{4.66}$$

para $\Re e\, \widehat{\mathbf{v}}$, $\Re e\, \mathbf{w} > 0$.

Vamos agora mostrar, usando (4.66), que

$$T(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w}) = Q_0(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w}) + \frac{\partial}{\partial w_j} Q_1(\widehat{\mathbf{v}},\mathbf{w})$$

é também um R_{2n-1}–polinômio. O polinômio $q(w_j)$, dado por $Q_1(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})$ como função de w_j mantendo fixos $\Re e\widehat{\mathrm{v}} > 0$ e demais componentes de w, $\Re e\, w_k > 0$, $k \neq j$, é um R–polinômio, podendo ser representado como em (4.61)

$$q(w) = c\prod_{i=1}^{m_j}\left(1+\kappa_i^{-1}w\right) ,$$

onde c e κ_j funções das demais componentes com $\Re e\,\kappa_j \geq 0$. Disso segue

$$\frac{q'(w)}{q(w)} = \sum_{i=1}^{m_j}\frac{1}{\kappa_i + w}$$

e, em vista de (4.62), temos

$$\Re e\frac{\partial Q_1(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})/\partial w_j}{Q_1(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})} > 0 \tag{4.67}$$

se $\Re e\,\widehat{\mathrm{v}}$, $\Re e\,\mathrm{w} > 0$, concluindo

$$T(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w}) = Q_1(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})\left[\frac{Q_0(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})}{Q_1(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})} + \frac{\partial Q_1(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})/\partial w_j}{Q_1(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})}\right] \neq 0$$

sob as mesmas condições. Com $T(\widehat{\mathrm{v}},\mathrm{w})$ sendo um R_{2n-1}–polinômio, podemos repetir o procedimento a partir de (4.65) para uma outra variável de $\widehat{\mathrm{v}}$. Concluimos a prova do Lema 4.27 depois de n repetições.

□

Observação 4.28 *Lema 4.27 é válido também se a condição de multilinearidade for removida. A prova porém requer maior elaboração (veja Proposição* 2.2 *em [LS]).*

Afim de mostrarmos que o operador Φ, definido por (4.54) com $a = 0$, preserva a classe dos R_n–polinômios, devemos aplicar o Lema 4.27 ao polinômio $R(\mathrm{v},\mathrm{w}) = (\mathrm{v},\mathcal{J}\,\mathrm{v})\,Y(\mathrm{w})$ onde Y é um R_n–polinômios. Note que, se $\mathcal{J}$ for uma matriz não negativa com diagonal nula, então $(\mathrm{v},\mathcal{J}\,\mathrm{v})$ é multilinear em cada componente de v.

Vamos considerar a condição inicial

$$Y_{0,N}(\mathrm{w}) = \prod_{j=1}^{n} f_j(w_j)\,,$$

dada pelo produto de R–polinômios em cada componente w_k com $f_j = f_j^{(m_j)}$ como em (4.61)[16] e, no lugar de Φ, consideremos o operador aproximante

$$\Psi^p\left[Y_{0,N}\right] = \left\{I + \frac{t}{4p}\left(\frac{\partial}{\partial\mathrm{w}},\mathcal{J}\frac{\partial}{\partial\mathrm{w}}\right)\right\}^p Y_{0,N} \tag{4.68}$$

[16]Para simplificar a notação, vamos eliminar a dependência na ordem m da função $f^{(m)}$ e de seus respectivos zeros $\kappa_{j,m}$.

para p–ésima iterada $\Phi^{(p)}$ de Φ atuando sobre $Y_{0,N}$:

$$\begin{aligned}\Phi^{(p)}[Y_{0,N}] &= \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{p-\text{vêzes}}[Y_{0,N}] \\ &= \left\{ I + \frac{t}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) + \cdots + \frac{t^p}{4^p p!}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right)^p \right\} Y_{0,N} . \qquad (4.69)\end{aligned}$$

Note que, desenvolvendo o binômio de Newton, o j-ésimo termo em (4.68) contêm um fator $1\,(1-1/p)\cdots(1-(j-1)/p)$ multiplicando o termo correspondente em (4.69) que tende a 1 quando $p \to \infty$. Note ainda que o limite

$$\lim_{p\to\infty} \Phi^{(p)}[Y_{0,N}] = \lim_{p\to\infty} \Psi^p\,[Y_{0,N}] = \exp\left\{ \frac{t}{4}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \mathcal{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}\right) \right\} Y_{0,N}$$

converge para a solução da equação de ponto fixo $Y = \Phi[Y]$. Vamos usar que Φ (assim como Ψ) é um operador linear contínuo afim de tomar o limite em N (veja Definição 3.40)

$$\lim_{N\to\infty} \Phi[Y_N] = \Phi\left[\lim_{N\to\infty} Y_N\right] .$$

Aplicando cada termo do produto (4.68) sobre $Y_{0,N}$, e usando Lema 4.27, concluímos a solução de (4.42) satisfaz $Y\,(t, \mathbf{w}) \neq 0$ para $\Re e\, \mathbf{w} > 0$ e todo $t > 0$ se

$$1 + \frac{t}{4p}\,(\mathbf{h}, \mathcal{J}\mathbf{h}) \neq 0 \qquad (4.70)$$

para $\Re e\, \mathbf{h} > 0$, uniformemente em p, t e $\mathcal{J} \geq 0$. Esta questão algébrica ficará sem resposta na presente tese.

5
Conclusões

Mostramos como a Teoria das Funções Analíticas, desenvolvidas no final do século passado e início deste por vários autores, se encaixa na descrição dos zeros de Lee–Yang.

As conclusões a serem extraidas nesta tese, podem ser resumidas pela seguinte frase: se μ^n denota a medida de equilíbrio de um ferromagneto (ou gás de rede) generalizado, com n graus de liberdade, então a função característica Z^n de μ^n é um elemento da subclasse P_n^* das funções inteiras de Hermite–Biehler.

Nos dois capítulos iniciais após a introdução, apresentamos de maneira pedagógica os principais resultados sobre a Teoria das Funções Inteiras pertinentes ao Teorema do Círculo. No Capítulo 2 descrevemos a conexão entre a distribuição dos zeros, o crescimento do módulo máximo e o Teorema da fatorização de Hadamard para funções inteiras em $\mathbb{C}$. No Capítulo 3 introduzimos a classe $\overline{HB}$ das funções inteiras de Hermite–Biehler e descrevemos os operadores que preservam a localização dos zeros para tais funções. Esta análise generaliza o Teorema de Rolle sobre a preservação dos zeros reais por diferenciação.

A discussão apresentada teve a vantagem adicional de permitir obter desigualdades majorantes das funções em $\overline{HB}$, preservadas pela operação de diferenciação. Por intermédio dessa noção estendemos para as funções inteiras em $\mathbb{C}^n$ todos os resultados estabelecidos para funções inteiras em $\mathbb{C}$.

Nestes dois capítulos foram selecionados, dos livros textos e literatura especializada disponível, um material necessário para dar coerência e unidade às asserções desta tese. Convém salientar que embora tenha sido desenvolvido previamente ao Teorema de Lee–Yang, este material foi compilado em livros textos aproximadamente no mesmo período.

Na literatura consultada não há nenhuma menção explícita sobre a relação existente entre a distribuição dos zeros da função de partição de ferromagnetos e a classe das funções de Hermite–Biehler. Como demonstrado nesta tese, a caracterização das funções da subclasse P_n^* de $\overline{HB}_n$ se confunde com as assim denominadas *propriedades de Lee–Yang.*

No Capítulo 4 fizemos uma breve excursão sobre as diversas versões do Teorema de Lee–Yang e demonstramos o Teorema de Lee–Yang Generalizado com os resultados do Capítulo 3. Discutimos também as extensões deste Teorema para os modelos ferromagnéticos com N componentes de spin.

A mais inovadora proposta desta tese está relacionada com a abordagem, realizada ainda no Capítulo 4, do Teorema de Lee–Yang por métodos aplicados às equações diferenciais.

Apresentaremos a seguir os resultados obtidos nesta tese.

1. O Teorema de Newman foi generalizado para uma classe ainda maior de ferromagnetos (Teorema 4.11 e Observação após a demonstração deste).

2. Obtivemos majorantes Gaussianos para a função de partição de modelos de Ising generalizados, interpretados como limites superior de campo medio. A desigualdade 4.28 quando saturada, proporciona a melhor estimativa inferior de campo médio para o inverso da temperatura crítica β_c.

3. Demonstramos um Teorema de Lee–Yang Generalizado para sistemas de spin com N componentes (Teorema 4.19).

A presente tese de Livre–Docência deixa algumas questões previamente formuladas sem respostas e sugere novas questões.

1. Deixamos de estabelecer a relação do Teorema 4.11 com os modelos de Ising generalizados. Para isso, a condição **A.** na Definição 4.6 deve ser também necessária para que $\nu \in \mathcal{P}$.

2. Não foi possível examinar as condições sobre a matriz K de acoplamentos para que o Teorema de Lee–Yang (4.19) fosse aplicavel a sistemas de spin com N componentes.

3. Restou demonstrar a equação algébrica (4.70) para uma prova alternativa do Teorema de Newman via equações diferenciais.

Finalmente, devo acrescentar que há um grande potencial a ser explorado pela abordagem via equações diferenciais parciais no que diz respeito as propriedades de analiticidade de sistemas de spin que não satisfazem a condição $\mathcal{J} \geq 0$.

Referências

[A] T. Asano, *Theorems on the partition functions of the Heisenberg ferromagnets*, J. Phys. Soc. (Japan) **29**, 350-359 (1970).

[B] R. P. Boas Jr., *Entire functions*, Academic Press, New York (1954).

[BBDKK] M. Biskup, C. Borgs, J. T. Chayes, L. J. Kleinwaks e R. Kotecký, *A general theory of Lee–Yang zeros in models with first–order phase transitions*, Preprint, arXiv:math-ph/004003.

[D] François Dunlop, *Analyticity of the pressure for Heisenberg and plane rotator models*, Commun. Math. Phys. **69**, 81-88 (1979).

[DN] François Dunlop e Charles M. Newman, *Multicomponent field theories and classical rotators*, Commun. Math. Phys. **44**, 223-235 (1975).

[G] R. B. Griffiths, *Rigorous results for Ising ferromagnets of arbitrary spin*, J. Math. Phys **10**, 1559-1565 (1969)

[G1] R. B. Griffiths, *Correlations in Ising ferromagnets II, external magnetic fields*", J. Math. Phys **8**, 484-489 (1967).

[H] Einar Hille, *Analytic function theory*, Vol. 1 e 2, Chelsea Publishing Co., New York, 2a. edição (1982 e 1987)

[K] Konrad Knopp, *Theory of functions*, *Part I e II*, Dover, New York (1945 e 1947).

[L] B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, American Mathematical Society, Providence (1964).

[Li] E. H. Lieb, *The classical limit of quantum spin system*, Commun. math. Phys. **31**, 327-340 (1973).

[LS] Elliot H. Lieb e Alan D. Sokal, *A general Lee–Yang theorem for one-component and multicomponent ferromagnets*, Commun. Math. Phys. **80**, 153-179 (1981)

[LT] Peter Lancaster e Miron Tismenetsky, *Theory of matrices, with applications*, Academic Press, 2a. edição (1985).

[LY1] C. N. Yang e T. D. Lee, *Statistical theory of equations of state and phase transitions. I theory of condensation*, Phys. Rev. **87**, 404-409 (1952).

[LY2] T. D. Lee e C. N. Yang, *Statistical theory of equations of state and phase transitions. II Lattice gas and Ising model,* Phys. Rev. **87**, 410-419 (1952).

[M] Domingos H. U. Marchetti, *An alternative to Plemelj–Smithies formulas on infinite determinants*, Journ. Funct. Anal. **117**, 360-376 (1993).

[N] Charles M. Newman, *Zeros of the partition functions for generalized Ising systems*, Commun. P. Appl. Math. **XXVII**, 143-159 (1974).

[Ni] L. Nirenberg, *An abstract form of nonlinear Cauchy–Kowalewski theorem*, J. Differential Geometry **6**, 561-576 (1972).

[O] L. V. Ovsjannikov, *Singular operators in Banach scales,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR **163**, 819-822 (1965).

[R] D. Ruelle, *Quelques resultats rigoureux recents en mecanique statistique*, Seminário ministrado na Ecole Polytechnique e redigido por B. Souillard (1972).

[RS] Michael Reed e Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics, I: Functional analysis*, versão revisada e aumentada, Academic Press (1980).

[S] P. C. Sikkema, *Differential operators and differential equations of infinite order with constant coefficients*, Groningen (1953).

[SG] B. Simon e R. B. Griffiths, *The* $(\phi^4)_2$ *field theory as a classical Ising model,* Commun. Math. Phys. **33**, 145-164 (1973).

[SF] Masuo Suzuki e Michael E. Fisher, *Zeros of the partition function for the Heisenberg ferroelectric, and general Ising models* , Journ. Math. Phys. **12**, 235-246 (1971).

[Su] Masuo Suzuki, *Theorems on the Ising model with general spin and phase transition*, Journ. Math. Phys. **8**, 2064-2068 (1968).

[T] B. A. Taylor, *Some locally convex spaces of entire functions* in "Entire functions and related parts of analysis", Korevaar ed., American Mathematical Society, Providence (1968).

[Tr] François Treves, *Ovsjannikov theorem and hyperdifferential operators,* Notas de Matemática **46**, IMPA (1968).

[Tr1] François Treves, *Basic linear differential equations*, Academic Press (1975).