

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

$\lambda \phi^4 - O(N)$ À TEMPERATURA FINITA

SBI-IFUSP



305M810T1046

ADILSON JOSÉ DA SILVA

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos à obtenção do título de Livre-Docente.



AGOSTO/87

AGRADECIMENTOS

Discuti com muita gente. Mas agradeço especialmente ao MARCELO GOMES (de quem sempre roubo umas sabedências de T.Q.C.) ao VALÉRIO KURAK (sapo não pula por boniteza, mas por causa dele) e ao GIL MARQUES (um nosso jogo de braço me levou a estudar o problema).

RESUMO

O modelo vetorial $\lambda \phi^4 - O(N)$ é estudado em aproximação dominante em $1/N$ à temperatura finita. Os comportamentos do **Potencial Efetivo**, da **Massa** e da **Constante de acoplamento** são analisados. A **catastrofe U.V.** observado na **Constante de acoplamento** λ para $T \rightarrow T_c$ é relacionado à **instabilidade do vácuo** para $T \geq T_c$.

ABSTRACT

The vectorial $\lambda \phi^4 - O(N)$ model is studied in leading $1/N$ approximation at finite temperature. The behaviors of the **Effective Potencial**, **Mass** and **Coupling Constant** are analysed. The observed **U.V. catastroph** of the **coupling constant** for $T \rightarrow T_c$ is related to the **vacuum instability** above this temperature.

I. Considerações Gerais

Tem se levantado a possibilidade de o $\lambda \phi^4$ ser trivial ou inconsistente em quatro dimensões. As provas são incompletas e a questão é ainda aberta. Apesar da discussão, a simplicidade do modelo continua sendo um forte atrativo e a literatura continua a apresentar grande número de trabalhos utilizando-o no estudo dos mais diversos efeitos. É assim comum o comportamento das *Teorias de Campos à Altas Temperaturas*. Entretanto, apesar da simplicidade do modelo, resultados diferentes têm sido obtidos por autores diferentes. A constante de acoplamento, por exemplo, calculada em 1 circuito (*loop*), indica *Liberdade Assintótica* para $T \rightarrow \infty$. Em 2 circuitos o resultado é totalmente diferente: uma catástrofe ultravioleta, *U.V.* - um *pólo de Landau* - em $T \rightarrow T_c$. É claro, que o número de circuitos ou a constante de acoplamento, não são bons parâmetros "ordenadores" de uma série aproximativa à altas temperaturas. De fato, é sabido que em temperaturas próximas de uma temperatura crítica (de transição de fase) é preciso lançar mão de rearranjos de série perturbativa incluindo gráficos de ordens mais altas: *as margaridas e supermargaridas*.

A temperaturas, ainda mais altas, ordens de grandeza maior que a temperatura crítica, nem estes rearranjos parecem bastar, e talvez uma série aproximativa só faça sentido com a introdução de algum outro parâmetro ordenador, ou alguma outra de aproximação. $1/N$ é o primeiro que nos ocorre. Outros são os métodos variacionais: *aproximação Hartree e aproximação Gaussiana*.

Nesta tese, discutiremos a aproximação $1/N$. Como veremos, ela revela em mais profundidade, que a expansão

em circuitos, o caráter não linear do modelo; o *Potencial Efe*
tivo é bivalente como função de *Fi-Quadrado*, não apresenta
Quebra Espontânea de Simetria, Q.E.S., e se escreve imediata-
 mente, numa forma invariante por renormalização. O espectro
 de massa apresenta um estado ligado e uma ressonância, além
 da massa usual do *quantum*. A aproximação nos revela ain-
 da, a conexão entre o *pólo de Landau* na constante de acopla-
 mento a altas temperaturas e a instabilidade de vácuo a essas
 temperaturas.

No restante desta seção, comentaremos rapidamente,
 sem um estudo aprofundado, a questão do parâmetro ordenador
 de série aproximativa.

Na seção II é apresentado o cálculo do modelo em
 ordem dominante de $1/N$. O resultado do trabalho é comparado
 com outros na literatura.

A introdução da temperatura altera o comportamento
 infravermelho, I.V., das *Integrais de Feynman*. Sem um estudo
 detalhado deste problema, vemos fazer algumas considerações
 sobre a validade das aproximações perturbativas.

Uma *Integral de Feynman* não fatorizável (*overlapping*)
 regularizada com um corte Λ no U.V., tem a seguinte forma
 à temperatura T :

$$I(\vec{p}, \omega, m, T, \Lambda) \sim \frac{L}{\pi} \left(T \sum_{n_i=-\infty}^{\infty} \int d^3k_i \right) \cdot \frac{N}{\pi} \left(\frac{1}{(\vec{p}_j + \vec{g}_j)^2 + (\omega_j + 2\pi T m_j)^2 + m^2} \right) \quad (11)$$

L e N são respectivamente o número de circuitos e o número
 de linhas internas.

$\bar{k}_i, 2\pi T n_i$: os 3 momentos e as energias (discretizadas por efeito de temperatura) dos circuitos.

\bar{p}_j, ω_j : sub-somas dos 3 momentos e energias externas, que atravessam a j -ésima linha.

$\bar{q}_j, 2\pi T m_j$: sub-soma dos 3 momentos e energias de circuito, que atravessam a linha j .

m : é a massa do quantum da Teoria.

O resultado da integral (amenos de logaritmos) é um polinômio de grau $D = 4L - 2N$ (divergência superficial I.V.) nos parâmetros: \bar{p}, ω, m, T e Λ .

No limite $T \rightarrow \infty$ esperamos um comportamento de I com ao menos uma potência T^L , vinda do modo zero, isto é, da contribuição $n_i = 0, i=1, L$ em (1.1). Entretanto, para um gráfico com as divergências superficiais I.V., $d = 3L - 2N$, todas positivas, podemos escalar todas as variáveis por T e obtemos:

$$I(\bar{p}, \omega, m, T, \Lambda) \sim T^D \left(\prod_{i=1}^L \int d^3 x_i \right)^{1/T} \prod_j \frac{1}{\left(\frac{\bar{p}_j}{T} + \bar{y}_j \right)^2 + \left(\frac{\omega_j}{T} + 2\pi m_j \right)^2 + \left(\frac{m}{T} \right)^2} \quad (1.2)$$

Isto é, uma contribuição : T^D .

Fi-quatro em quatro dimensões só tem 2 gráficos com $D > L$. Vejamos; se V é o número de vértices e N_{ext} o número de linhas externas do gráfico:

$$D = 4L - 2N$$

$$d = 3L - 2N = D - L$$

$$L = N - (V - 1)$$

$$N_{exc} + 2N = 2V \quad (7.3)$$

Com algumas manipulações, a condição $D - L > 0$, se escreve:

$$V + \frac{N_{exc}}{2} < 3$$

só temos dois gráficos que satisfazem essa condição:

$$1. \quad \text{[Diagrama 1]} \sim T^2$$

$$2. \quad \text{[Diagrama 2]} \sim T^3 \text{ ou } T^4$$

O gráfico 2 contém sub-gráficos com $d < c$ e precisaríamos uma análise mais detalhada para decidir se a potência é T^4 ou T^3 . Não precisaremos dele e não vamos tentar analisá-lo em mais detalhes.

Todos os outros gráfico de $\lambda \phi^y$ se comportam como T^4 .

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(\omega)} \text{ e } \tilde{\mathcal{F}}^{(\omega)} \text{ a altas temperaturas}$$

A seguir desenharemos as contribuições a $\tilde{\mathcal{F}}^{(\omega)}$ e $\tilde{\mathcal{F}}^{(\omega)}$ até 3 circuitos. Às potências de T são obtidas da análise das páginas anteriores e os fatores de massa são ajustados pela divergência superficial do gráfico. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, são fatores adimensionais.

$$\begin{aligned}
 M &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \\
 &+ \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \dots \\
 &= \alpha \lambda \tau^2 \left\{ 1 + x \left(\frac{\beta \lambda \tau}{m} \right) + y \left(\frac{\beta \lambda \tau}{m} \right)^2 + \right. \\
 &\left. + z \frac{\gamma \lambda \tau}{m^3} \alpha \lambda \tau^2 + \frac{\delta}{\alpha} \lambda + \frac{\epsilon \lambda^2 \tau^2}{m^2} + \frac{\eta \lambda^2 \tau}{\alpha m} + \dots \right\} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Definindo o adimensional $\epsilon = \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \tau$ podemos escrever (1.5) na forma:

$$\begin{aligned}
 M &= \alpha m^2 \epsilon^2 \left\{ 1 + x \beta \sqrt{\lambda} \epsilon + y \beta^2 \lambda \epsilon^2 + \right. \\
 &\left. + z \gamma \alpha \sqrt{\lambda} \epsilon^3 + \frac{\delta}{\alpha} \lambda + \epsilon \lambda \epsilon^2 + \frac{\alpha}{\alpha} \lambda \sqrt{\lambda} \epsilon + \dots \right\} \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

A temperatura na qual $M(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} m^2 \Sigma = 0$ é chamada: Crítica à aproximação de 1 circuito nos diz que ela corresponde à $\epsilon_c = O(1)$, isto é, $\tau_c = O\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Para $\lambda \ll 1$ as contribuições de mais de 1 circuito são de ordem ao menos $\sqrt{\lambda}$ menores, e justifica-se a hipótese de que $\epsilon_c = O(1)$.

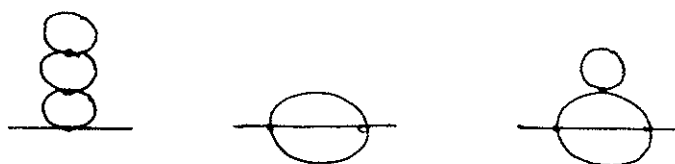
A baixas temperaturas, isto é, $\epsilon \ll 1$, 1 circuito é uma boa aproximação; as contribuições sub-dominantes são de ordem ao menos, $\sqrt{\lambda} \epsilon \ll 1$, menores que a contribuição de 1 circuito.

Próximo à temperatura crítica as coisas não são tão definidas. Existem infinitas contribuições sub-dominantes, de ordem $\sqrt{\lambda}$ menores que a contribuição de 1 circuito. São as chamadas *margaridas*:



Uma característica interessante das margaridas é serem somáveis, seu efeito podendo ser obtido até ordem infinita em número de circuitos.

Em ordem que chamaremos sub-sub-dominante, $(\sqrt{\lambda})^2$ vezes menor que a contribuição de 1 circuito, temos os gráficos:



Supermargaridas e diagramas com algum núcleo não fatorizável! Somá-los não sabemos, como não sabemos calcular exatamente o modelo. Mas se tomarmos só o sub-conjunto das supermargaridas, podemos somá-los até infinitos circuitos. E o que é melhor: margaridas, supermargaridas, super-supermargaridas, etc., são somáveis; resultam somente numa modificação da massa com a temperatura, que pode ser calculada da equação de autoconsistência;

$$\begin{aligned}
 \frac{1/p^2 + M^2}{\text{---}} &= \frac{1/p^2 + m^2}{\text{---}} + \text{---} \overset{\Sigma}{\text{---}} + \text{---} \overset{\Sigma}{\text{---}} \overset{\Sigma}{\text{---}} \dots \\
 \overset{\Sigma}{\text{---}} &= \text{---} \text{---} \\
 M^2(\tau) &= m^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{1}{p^2 + M^2(\tau)} \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Mas é bom salientarmos que essa aproximação não é sistemática no parâmetro pequeno $\sqrt{\lambda}$, pois já em ordem $(\sqrt{\lambda})^2$ só um sub-conjunto dos gráficos é considerado.

À temperaturas muito acima da crítica, $\sqrt{\lambda} t \gg 1$, o gráfico dominante em cada ordem no número de circuitos é a *margarida* correspondente. Como nas vizinhas da temperatura crítica, as contribuições sub-dominantes incluem *supermargaridas* e gráficos não fatorizáveis. A novidade em $T \gg T_c$, é que a contribuição dos gráficos de um mesmo tipo (digamos *supermargaridas*) cresce com o número de circuitos.


Como em $T \simeq T_c$, a soma de *margaridas* e *supermargaridas*, etc., ainda fazem mais sentido que uma ordem fixa no número de circuitos. Mas sua confiabilidade é difícil de analisar.



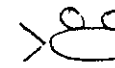
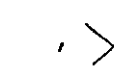
Para o $\chi^{(v)}$, em até 3 circuitos temos:

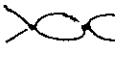
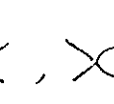

$$\begin{aligned} \chi^{(v)} = & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \\ & + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \\ & + \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + \dots \quad (7.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi^{(v)} = & \lambda \left\{ 1 + \frac{\beta \lambda T}{m} + a \left(\frac{\beta \lambda T}{m} \right)^2 + d \frac{\gamma \lambda T}{m^3} \alpha \lambda T^2 + \right. \\ & + c \left(\frac{\beta \lambda T}{m} \right)^3 + d' \frac{\gamma \lambda T}{m^3} \frac{\beta \lambda T}{m} \alpha \lambda T^2 + \frac{\psi \lambda T}{m^5} (\alpha \lambda T)^2 + \\ & \left. + e \frac{\gamma \lambda T}{m^3} \frac{\beta \lambda T}{m} \alpha \lambda T^2 + f \frac{\psi \lambda T}{m^5} (\alpha \lambda T)^2 + (\delta + \theta) \frac{\lambda^3 T^3}{m^3} \right\} \quad (7.9) \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} \chi^{(v)} = & \lambda \left\{ 1 + \beta \sqrt{\lambda} t + a \beta^2 \lambda t^2 + d \gamma \alpha \sqrt{\lambda} t^3 + \right. \\ & + c \beta^3 \lambda \sqrt{\lambda} t^3 + d' \gamma \beta \alpha \lambda t^2 + \psi \alpha^2 \sqrt{\lambda} t^5 + \\ & \left. + e \gamma \beta \alpha \lambda t^3 + f \psi \alpha^2 \sqrt{\lambda} t^5 + (\delta + \theta) \lambda \sqrt{\lambda} t^3 \right\} \quad (7.10) \end{aligned}$$

A baixa temperaturas vemos que a aproximação em ordens de circuitos é boa. O termo dominante é o gráfico de 1 circuito:  .

Próximo de temperatura crítica, os gráficos dominantes são: 1 circuito e margaridas construídas sobre 1 circuito  ,  ,  ,  ,

Em ordem sub-dominante temos:  ,  e 

Supermargaridas sobre 1 circuito e margaridas sobre salsichas.

Em ordem sub-sub-dominante teremos salsichas e diagramas não fatorizáveis:  ,  , 

A aproximação somável, das margaridas e supermargaridas nos daria: $\tilde{\chi}^{(2)} \sim \chi \otimes \text{circulo}$. Entretanto, para podemos fazer melhor. Podemos somar também as salsichas decoradas com margaridas:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(2)} &= \chi + \chi \otimes \text{circulo} + \chi \otimes \text{dois circulos} + \dots \\ &= \chi / (1 - \frac{\lambda}{2} \text{circulo}) \end{aligned} \tag{7.11}$$

Como no caso da soma das margaridas e supermargaridas para o $\tilde{\chi}^{(2)}$, essa soma de salsichas decoradas de margaridas e supermargaridas deve ser razoável até ordem sub-dominante (os diagramas não fatorizáveis aparecem em ordem sub-dominante), isto é, $(\sqrt{\lambda})^2$.

Entretanto, há uma classe (nova) de modelos *Fi-Quatro*, onde essa aproximação pode ser considerada tão boa quanto quizermos: os modelos *Fi-Quatro* - $O(N)$, envolvendo a

interação de N escalares. Considerando $1/N$ como o parâmetro pequeno do modelo, a ordem dominante de aproximação para $\tilde{\chi}^{(2)}$ e $\tilde{\chi}^{(4)}$ corresponde exatamente à (1.7) e (1.11): *margaridas* e *salsichas*.

Todos esses diagramas são de mesma ordem em $1/N$. Quanto aos diagramas não fatorizáveis (que em potências de $\sqrt{\lambda}$ são de mesma ordem que as *supermargaridas*), serão de ordem superior às *margaridas*, *supermargaridas* e *salsichas*, no parâmetro $1/N$. Portanto, *margaridas* e *salsichas* podem ser feitas tão boa aproximação quanto queiramos, mesmo à temperaturas muito acima de crítica, considerando modelos com N suficientemente grande (na verdade, isto é uma solução acadêmica na medida em que na natureza nos interessarão modelos com $N \approx 70$).

Passemos agora ao cálculo do $\chi^2 - O(N)$.

II. $\lambda \phi^4 - O(N)$ à temperatura finita

O modelo escalar com simetria $O(N)$ é descrito, no espaço tempo euclidiano, pela Ação:

$$A = \int d^4x \mathcal{L}(\vec{\phi})$$

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial_\mu \vec{\phi} + \frac{\mu_c^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + \frac{\lambda_c}{4N} (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 + F \quad (2.1)$$

onde $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ é o multiplete de campos renormalizados, Z o fator de renormalização de função de onda, F um contratermo de renormalização de fundo e μ_c^2 e λ_c respectivamente a massa e constante de acoplamento não renormalizadas.

Uma solução aproximada do modelo, em série de potências em $1/N$, pode ser mais facilmente obtida com o artifício de introduzirmos um "Campo Multiplicador de Lagrange" χ [1]

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}) \rightarrow \mathcal{L}(\vec{\phi}, \vec{\chi})$$

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}, \vec{\chi}) = \mathcal{L}(\vec{\phi}) - \frac{3N}{2\lambda_c} \left(\vec{\chi} - \frac{\lambda_c}{6N} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - \mu_c^2 \right)^2$$

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}, \vec{\chi}) = \frac{Z}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \partial_\mu \vec{\phi} - \frac{3N}{2\lambda_c} \vec{\chi}^2 + \frac{3N\mu_c^2}{\lambda_c} \vec{\chi} + \frac{1}{2} \vec{\chi} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + F \quad (2.2)$$

A equação de Euler Lagrange para χ é uma equação de vínculo. Classicamente (ϕ e χ números -c, Z e F nulas, μ_c^2 e λ_c finitas) essa equação é:

$$\frac{\delta A}{\delta \chi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \chi} \quad (2.3)$$

$$= - \frac{3N}{\lambda_c} \left(\chi - \frac{\lambda_c}{6N} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - \mu_c^2 \right) = 0$$

A teoria original é reobtida substituindo $\chi = \chi(\phi)$ solução de (2.3) em todas as grandezas de interesse.

Quanticamente a reobtenção da teoria original se faz de modo semelhante, resolvendo-se $\chi = \langle \hat{\chi} \rangle$ como função de $\phi = \langle \hat{\phi} \rangle$ na equação:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \chi} = \frac{\delta A}{\delta \chi} + \left\{ \begin{array}{l} \text{conexões} \\ \text{radiativas} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.4)$$

e substituindo-a nas grandezas de interesse.

O funcional $\Gamma(\phi, \chi)$ é a *Ação Efetiva* e substitue A para os campos clássicos ϕ e χ . É também a geratriz das funções de *Green 1PI* dos campos quantizados.

A expansão de Γ em números de circuitos (*loops*) é obtida pelo método da *Descida mais Íngreme* (*Steepest Descent*) [2]. Indicando por ψ o conjunto de campos, o resultado é:

$$\Gamma_0(\psi) = A(\psi) \quad (2.5a)$$

$$\Gamma_1(\psi) = - \ln \left\{ \text{Det}^{-1/2} \left[\frac{\delta^2 A}{\delta \psi \delta \psi_0}(\psi) \right] / \text{Det}^{-1/2} [\psi=0] \right\} \quad (2.5b)$$

$\Gamma_2(\psi)$ = Soma das *Bolhas de Vácuo 1PI* de 2 circuitos calculados a partir da *Langrangiana*

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\psi + \vec{\varphi}) - \mathcal{L}(\psi) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi}(\psi) \vec{\varphi} \quad (2.5c)$$

$\Gamma_3(\psi), \Gamma_4(\psi)$, etc. = semelhantes ao Γ_2 com respectivamente 3, 4, etc. circuitos. (2.5d)

Estudaremos transições de fase que não envolvem quebras de simetria translacional. Podemos, por tanto, nos res

tringir a campos clássicos $\psi = \langle \hat{\psi} \rangle$ constantes e nos restringir a estudar o termo de ordem zero de expansão de Γ em derivados de ψ :

$$\Gamma = \int d^4x \left\{ V(\psi) + (\partial_\mu \psi)^2 Z(\psi) + \dots \right\} \quad (2.6)$$

isto é, o *Potencial Efetivo* $V(\psi)$.

Consideremos os deslocamentos constantes nos campos:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_i(x) &= \hat{\phi}_i(x) & i=2,3,\dots,N \\ \hat{\phi}_1(x) &= \hat{\sigma}(x) + \sqrt{N} \phi \\ \hat{\chi}(x) &= \hat{\chi}(x) + \chi \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esta escolha simplifica o cálculo e não acarreta perda de informação em relação a deslocamentos mais gerais do tipo: $\hat{\phi}_a = \hat{\phi}_a + \sqrt{N} \phi_a$; $a=1, N$. O *Potencial Efetivo* dependerá de ϕ^2 que sempre poderá pensado como: $\phi^2 = \sum_a^N \phi_a \phi_a$.

A *Lagrangiana* \mathcal{L}' definida em (2.5c) será:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\phi, \chi, \hat{\phi}, \hat{\chi}) &= \sum \partial_\mu \hat{\phi}_i \partial_\mu \hat{\phi}_i + \\ &+ \sum \partial_\mu \hat{\sigma} \partial_\mu \hat{\sigma} - \frac{3N}{2\lambda_0} \hat{\chi}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \chi (\hat{\sigma}^2 + \hat{\phi}_i \hat{\phi}_i) + \sqrt{N} \phi \hat{\chi} \hat{\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2} \hat{\chi} (\hat{\sigma}^2 + \hat{\phi}_i \hat{\phi}_i) \end{aligned} \quad (2.8)$$

De acordo com (1.5a) o termo de zero circuitos é o *Potencial Clássico*.

$$V_N^0 = N \left\{ -\frac{3}{2\lambda_c} \chi^2 + \frac{3\mu_c^2}{\lambda_c} \chi + \frac{1}{2} \chi \phi^2 \right\} \quad (2.9)$$

Para o estudo das ordens seguintes vamos obter as regras de Feynman de \mathcal{L}'

Com a notação $\vec{\psi} = (\vec{\chi}, \vec{\sigma}, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_N)$, no ponto $\psi = (\chi, \phi, 0 \dots 0)$ temos:

$$\frac{\delta^2 A}{\delta\psi_a(x)\delta\psi_b(y)} \Big|_{\psi} = D_{ab}^{-1}(x-y) \quad (2.10)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3N}{\lambda_c} & \sqrt{N}\phi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{N} & -Z\partial^2 + X & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -Z\partial^2 + X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z\partial^2 + X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -Z\partial^2 + X \end{bmatrix}$$

Os propagadores $D_{ab}(x-y)$ são definidos por:

$$\sum_b \int dy \frac{\delta^2 A}{\delta\psi_a(x)\delta\psi_b(y)} D_{bc}(y-z) = \delta_{ac} f(x-y) \quad (2.11)$$

No espaço dos momentos, eles serão dados por:

$$\tilde{D}_{ab}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{\chi\chi} & \tilde{D}_{\chi\sigma} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{D}_{\sigma\chi} & \tilde{D}_{\sigma\sigma} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & D_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & D_{33} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & D_{NN} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\tilde{D}_{xx} = - \frac{\lambda_0}{3N} \frac{Zk^2 + X}{Zk^2 + X + \frac{\lambda_0 \phi^2}{3}} \quad \text{Notação}$$

(2.73c)

$$\tilde{D}_{\sigma\sigma} = \frac{1}{Zk^2 + X + \frac{\lambda_0 \phi^2}{3}} \quad \text{-----}$$

(2.73b)

$$\tilde{D}_{x\sigma} = \tilde{D}_{\sigma x} = - \frac{\lambda_0 \phi}{3\sqrt{N}} \frac{1}{Zk^2 + X + \frac{\lambda_0 \phi^2}{3}} \quad \text{-----}$$

(2.73c)

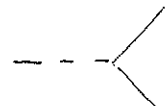
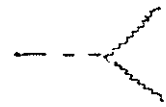
$$\tilde{D}_{ii} = \frac{1}{Zk^2 + X} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad \text{-----}$$

(2.73d)

Ainda no espaço dos momentos, os vértices de interação serão:

$$V_{x\sigma\sigma} = -1$$

$$V_{x\phi_i\phi_i} = -1$$



(2.74b)

De (2.5b), (2.10) e (2.13) temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\varphi) &= - \ln \text{Det}^{-1/2} \left\{ \left(1 + \frac{X}{-Z\partial^2} \right) \left(1 + \frac{X + \frac{\lambda_0 \phi^2}{3}}{-Z\partial^2} \right) \right\}^{N-1} \\ &= \frac{N-1}{2} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{X}{-Z\partial^2} \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{X + \frac{\lambda_0 \phi^2}{3}}{-Z\partial^2} \right) \\ &= \frac{N-1}{2} \int d^d x \int d^d p \ln \left(1 + \frac{X}{Zp^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d p \ln \left(1 + \frac{X + \frac{\lambda_0 \phi^2}{3}}{Zp^2} \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Usamos as notações: $\oint dx := \int_0^{\beta} dx_0 \int d^3x$,
 $\int (dp) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ e $\oint (dp) := T \sum_n f(dp)$,
 com: $f(dp) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$.

contem contribuições de ordem N e 1 , respectivamente:

$$V_1(N) = \frac{N}{2} \oint (dp) \ln \left(1 + \frac{\chi}{2p^2} \right) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} V_1(1) &= -\frac{1}{2} \oint (dp) \left\{ \ln \left(1 + \frac{\chi}{2p^2} \right) - \ln \left(1 + \frac{\chi + \frac{\chi^2}{2}}{2p^2} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \oint (dp) \ln \frac{2p^2 + \chi}{2p^2 + \chi + \frac{\chi^2}{2}} \quad (2.17) \end{aligned}$$

As contribuições para Γ_2 , Γ_3 , etc, são:

$$\Gamma_2 = \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \quad (2.18)$$


$$\Gamma_3 = \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \quad (2.19)$$


Circuitos de D_{ii} carregam um fator $(N-1)$; propagadores D_{xx} um fator $1/N$ e propagadores D_{xy} um fator $1/\sqrt{N}$. Assim, o primeiro gráfico de Γ_2 tem contribuições de ordem 1 e $1/N$. Os 2º e 3º gráficos de Γ_2 são de ordem $1/N$. Em Γ_3 , o primeiro diagrama contém contribuições de ordem 1 e $1/N$. Os demais diagramas tem contribuições de ordem $1/N$ e potenciais superiores de $1/N$.

Extendendo essa análise para um Γ com qualquer número de circuitos concluímos que: as contribuições multi-circuitos de ordem 1 vêm dos diagramas

$$\Gamma(N_c) = - \left\{ \text{---} \bigcirc \text{---} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \bigcirc \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \bigcirc \\ \vdots \\ \bigcirc \end{array} + \dots \right\} \quad (2.20)$$

que tem número maximal de circuitos de \mathcal{D}_{ii} e número minimal de propagadores \mathcal{D}_{xx} (isto é um circuito de \mathcal{D}_{ii} para cada propagador \mathcal{D}_{xx}).

Esta análise pode ser estendida para as ordens seguintes em $1/N$.

O Potencial Efetivo, em ordem dominante, é a soma de (2.9) e (2.16):

$$\begin{aligned} V/N &= - \frac{3}{2\lambda_c} x^2 + \frac{3\mu_c^2}{\lambda_c} x + \frac{1}{2} x \phi^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \phi(d\rho) \ln \left(1 + \frac{x}{2\rho^2} \right) \quad (2.21) \end{aligned}$$

Em ordem sub-dominante ele é a soma das contribuições (2.17) e (2.20). Usando as notações:

$$\rho = (Z\rho^2 + x) / \left(Z\rho^2 + x + \frac{\lambda_c \phi^2}{3} \right) \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}(\rho) = \phi(dk) \frac{1}{(Zk^2 + x)(Z(k+\rho)^2 + x)} \quad (2.23)$$

temos:

$$\begin{aligned} V(N_c) &= - \frac{1}{2} \phi(d\rho) \left\{ \ln \rho + \left(-\frac{\lambda_c \rho \mathcal{L}}{6} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda_c \rho \mathcal{L}}{6} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{\lambda_c \rho \mathcal{L}}{6} \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\omega) &= -\frac{1}{2} \int (d\rho) \ln \frac{\rho}{1 + \frac{\lambda_c \rho L}{6}} \quad (2.24) \\
 &= \frac{1}{2} \int (d\rho) \ln \left\{ Z \rho^2 \left(1 + \frac{\lambda_c L(\omega)}{6} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\chi \left(1 + \frac{\lambda_c L(\omega^2)}{6} \right) + \frac{\lambda_c \phi^2}{3} \right] / (Z \rho^2 + \chi) \right\}
 \end{aligned}$$

A análise de $V(\omega)$ é difícil, já à temperatura zero. As integrações não tem expressões analíticas. As análises que se encontra na *Literatura* [3] lançam mão de hipóteses e analogias. Nada definitivo. À temperatura não nula a dificuldade técnica é ainda maior. Factível, resta a ordem dominante.

A integral que aparece em (2.21) se separa numa ^{so} da mesma integral à temperatura zero e de uma contribuição finita dependente da temperatura. (*Apêndice*) Resulta:

$$\begin{aligned}
 V(\omega)/N &= \frac{1}{2} \int (d\rho) \ln \left(1 + \frac{\chi}{Z \rho^2} \right) + \\
 &\quad + \int (d^3 \rho) \left\{ \ln \left(1 - e^{-\beta \sqrt{\rho^2 + \chi}} \right) - \ln \left(1 - e^{-\beta \rho} \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \frac{3 u c^2}{\lambda_c} \chi - \frac{3}{2 \lambda_c} \chi^2 \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Os primeiros termos da expansão de:

$\int \ln \left(1 + \frac{\chi}{Z \rho^2} \right)$ são respectivamente: *quadrática e logaritmicamente* divergentes. Podem ser absorvidos numa renormalização dos parâmetros: μ^2 e λ_c . Uma escolha conveniente dos parâmetros renormalizados μ^2 e g é:

$$Z = 1 \quad (2.26a)$$

$$\frac{\mu e^2}{\lambda_c} = \frac{\mu^2}{g} - \frac{1}{6} \int (d\rho) \frac{1}{\rho^2} \quad (2.26b)$$

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{g} - \frac{1}{6} \int (d\rho) \frac{1}{\rho^2 (\rho^2 + M^2)} \quad (2.26c)$$

A equação (2.26c) também pode ser escrita:

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{g} - \frac{1}{6} \int (d\rho) \frac{1}{(\rho^2 + M^2)^2} - \frac{1}{96\pi^2}$$

M^2 em (1.26c) é um parâmetro de escala, o correspondente ao ponto de renormalização no 4 momento, na condição de normalização do $\tilde{\Gamma}_{(\rho)}^{(4)}$.

Observe que (2.26c) implica em $\lambda_c \rightarrow 0_-$ com a retirada da regularização da integral, qualquer que seja o sinal de g . Voltaremos a isso nas discussões finais.

Substituindo (2.26) em (2.25) obtemos:

$$\begin{aligned} V/N &= -\frac{3g}{2} \frac{\chi^2}{g} + \frac{3\mu^2}{g} \chi + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \int (d\rho) \left\{ \ln\left(1 + \frac{\chi}{\rho^2}\right) - \frac{\chi}{\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\chi^2}{\rho^2(\rho^2 + M^2)} \right\} \\ &+ \mathcal{T} \int (d^3\rho) \left\{ \ln\left(1 - e^{-\beta\sqrt{\rho^2 + \chi}}\right) - \ln\left(1 - e^{-\beta\rho}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

A soma das integrais independentes de \mathcal{T} é finita e pode ser realizada regularizando-se cada uma e combinando os resultados antes da retirada da regularização. Esses cálculos, e a integração dependente de \mathcal{T} são feitos no Apêndice. O resultado é:

$$\begin{aligned}
 V/N &= -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{X}^2}{g} + \frac{3m^2}{g} \mathcal{X} + \frac{1}{2} \mathcal{X} \phi^2 + \\
 &+ \frac{1}{64\pi^2} \mathcal{X}^2 \left\{ \ln \frac{\mathcal{X}}{m^2} - \frac{1}{2} \right\} + \\
 &- \frac{\pi^2}{90} T^4 E\left(\frac{\mathcal{X}}{T^2}\right) + \frac{\pi^2}{90} T^4
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 E(x) &= -\frac{45}{\pi^4} \int_0^{\infty} dy y^2 \ln\left(1 - e^{-\sqrt{y^2+x}}\right) \\
 &= \frac{45}{\pi^4} x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(nx)}{n^2} \tag{2.29a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(x) &= 1 - \frac{75}{4} \frac{x}{\pi^2} + \frac{75}{2} \frac{x^{3/2}}{\pi^3} + \\
 &+ \frac{45}{16} \frac{x^2}{\pi^4} \left\{ \ln \frac{\sqrt{x}}{4\pi} + \gamma - \frac{5}{4} \right\} + \\
 &+ \frac{45}{8} \frac{x^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} C(n) x^n \quad (x \ll 1)
 \end{aligned}$$

$$E(x) = \frac{75}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\sqrt{x}} (x^{3/4} + \dots) \quad (x \gg 1)$$

é monotonicamente decrescente de $E(0) = 1$ a $E(\infty) = 0$.

Como na integral original o logaritmo era real e positivo para \mathcal{X} real e positivo, o ramo do logaritmo em (1.28) foi escolhido desse mesmo modo.

O Potencial Efetivo $U(\phi)$ da teoria ϕ^4 original se obtém de $V(\phi, \mathcal{X})$ substituindo-se: $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\phi)$ obtida como solução da equação de Euler Lagrange do \mathcal{X} (Equação de Lacuna (Gap)), isto é:

$$U(\phi) = V(\phi, X(\phi)) \quad (2.30)$$

$$X = X(\phi) \iff \frac{\partial V(\phi, X)}{\partial X} = 0$$

Derivando-se (1.28), obtemos em ordem dominante em \mathcal{N} , a equação de Lacuna:

$$\frac{\phi^2}{2} - \frac{3}{g} X + \frac{3u^2}{g} + \frac{1}{32\pi^2} X \ln \frac{X}{M^2} + \frac{T^2}{24} F\left(\frac{X}{T^2}\right) = 0$$

onde (Apêndice): (2.31)

$$F(x) = \frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 / \sqrt{y^2+x} \left(e^{\sqrt{y^2+x}} - 1 \right)$$

$$= -\frac{4\pi^2}{75} \frac{dE(x)}{dx} \quad (2.32)$$

$$F(x) = 1 - \frac{3}{\pi} \sqrt{x} - \frac{3x}{2\pi^2} \left\{ \ln \frac{\sqrt{x}}{4\pi} + \gamma - \frac{1}{2} \right\} \quad x \ll 1$$

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sqrt{x}} x^{1/2} \quad x \gg 1$$

$F(x)$ é uma função positiva, decrescente de $F(0) = 1$ a $F(\infty) = 0$.

Resumindo, o Potencial Efetivo do ϕ^4 em ordem dominante em \mathcal{N} é dado por:

$$U(\phi) = V(\phi, X(\phi)) \quad (2.33)$$

$$V(\phi, X)/N = \frac{X\phi^2}{2} - \frac{3}{2g} X^2 + \frac{3u^2}{g} X +$$

$$+ \frac{1}{64\pi^2} X^2 \left\{ \ln \frac{X}{M^2} - \frac{1}{2} \right\} - \frac{\pi^2}{90} T^4 E\left(\frac{X}{T^2}\right) + \frac{\pi^2}{90} T^4$$

$$- \frac{6}{g} X + \frac{6u^2}{g} + \frac{1}{26\pi^2} X \ln \frac{X}{M^2} + \frac{T^2}{72} F\left(\frac{X}{T^2}\right) + \phi^2 = 0$$

(2.35)

com $E(x)$ e $F(x)$ dados pelas expressões: (2.29) e (2.32).

Análise do Potencial Efetivo

Um grande trabalho pode ser economizado observando que μ^2 e g são função do ponto de renormalização M^2 (até os sinais de μ^2 ou g podem ser alterados por uma mudança de M^2). É possível descrever o modelo em termos só de dois parâmetros independentes, invariantes por uma mudança no ponto de renormalização.

Um invariante (veja 2.26b) pode ser escolhido como:

$$\phi_0^2 = - \frac{6\mu^2}{g} \quad (2.36)$$

O outro, que chamaremos χ_0 será obtido, observando, que a partir de (1.26c) temos:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{g'} - \frac{1}{6} \int (d^4p) \left\{ \frac{1}{p^2(p^2+M^2)} - \frac{1}{p^2(p^2+M'^2)} \right\} = 0$$

isto é:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{g'} - \frac{1}{96\pi^2} \ln \frac{M'^2}{M^2} = 0$$

E portanto:

$$M^2 \exp\left(\frac{96\pi^2}{g}\right) = M'^2 \exp\left(\frac{96\pi^2}{g'}\right) = \chi_0 \quad (2.37)$$

χ_0 será um parâmetro sempre positivo. Definindo o campo auxiliar ρ por:

$$\chi = \rho \chi_0 \quad (2.38)$$

podemos reescrever (1.33) - (1.35) como:

$$V/N = \chi_0 \left\{ \frac{1}{2} \rho \phi^2 - \frac{1}{2} \rho \phi_0^2 + \frac{1}{64\pi^2} \chi_0 \rho^2 \right. \\ \left. \cdot \ln \rho / \sqrt{e} \right\} - \frac{\pi^2 T^4}{90} E\left(\frac{\chi_0 \rho}{T^2}\right) + \frac{\pi^2 T^4}{90} \quad (2.39)$$

$$\phi^2 = -\frac{1}{16\pi^2} \chi_0 \rho \ln \rho - \frac{T^2}{72} F\left(\frac{\chi_0 \rho}{T^2}\right) + \phi_0^2 \quad (2.40)$$

$$C(\phi^2) = V(\phi^2, \rho(\phi^2)) \quad (2.41)$$

Assim, depois de renormalizada, a teoria é função de 2 parâmetros independentes: χ_0 sempre positivo, e ϕ_0^2 que pode ser de qualquer sinal.

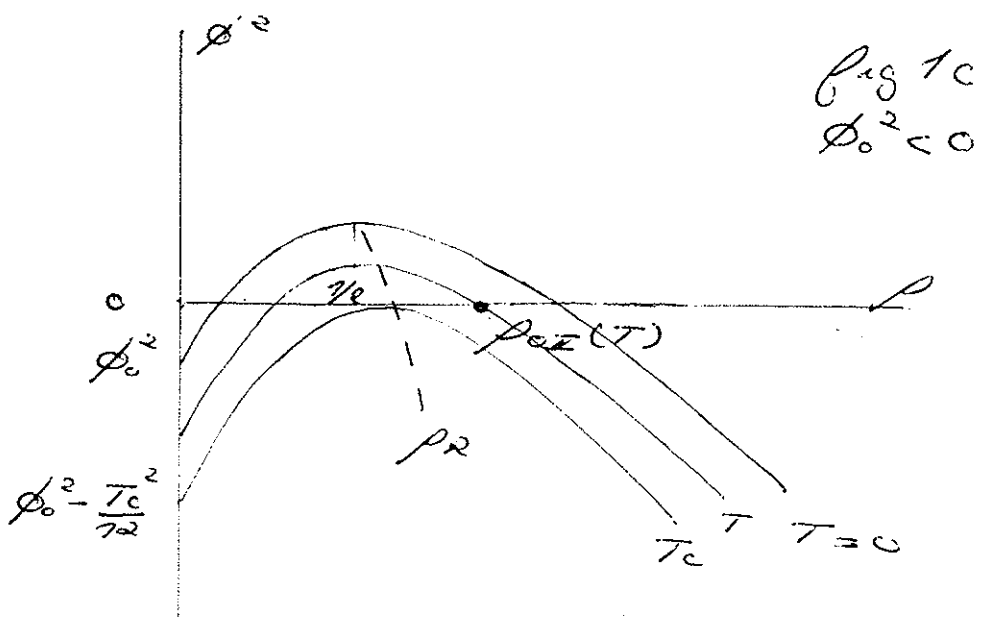
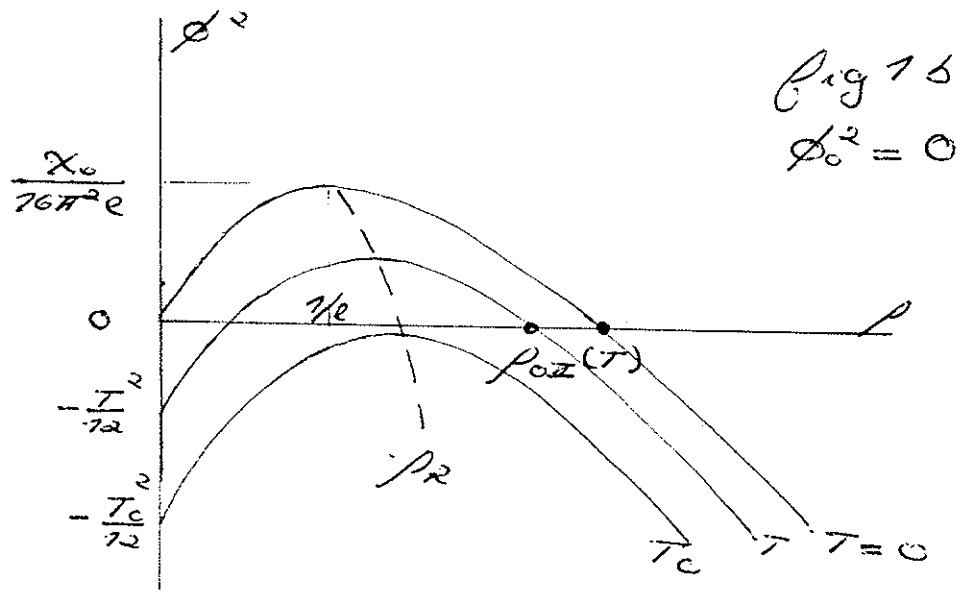
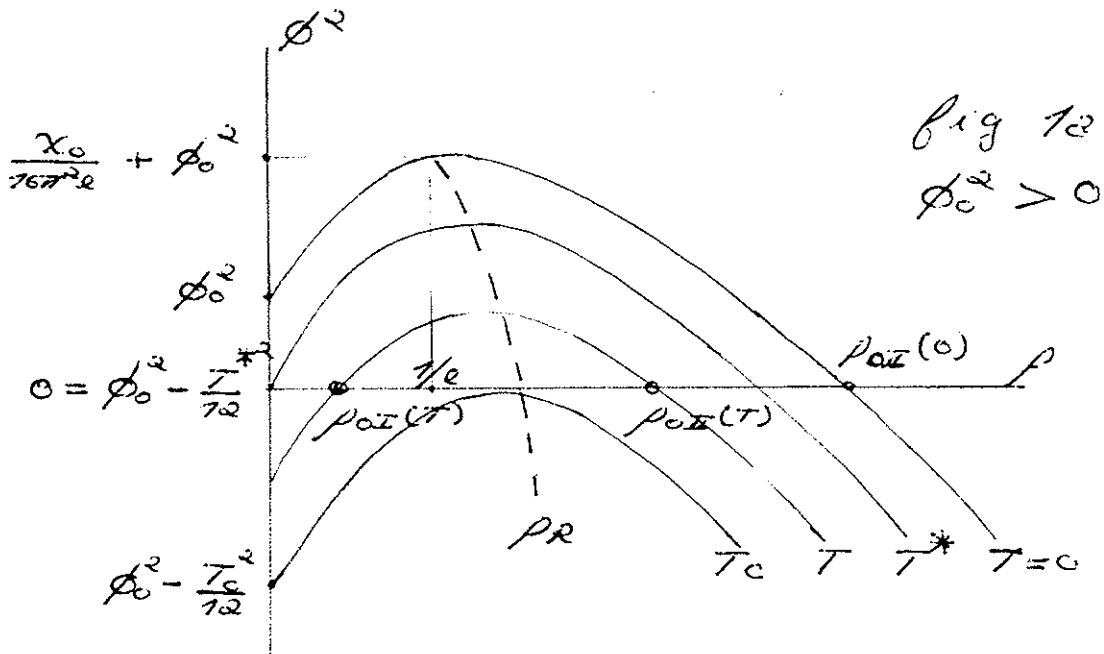
O modelo $O(N)$ é definido para ϕ_0 real e portanto $\phi_0^2 \geq 0$ real. A equação (2.40) nos diz que isso ocorre para intervalos de valores reais positivos de ρ e nessas regiões V é real (como discutiremos mais à frente, também ρ 's complexos, não reais negativos puros, nos dão $\phi^2 > 0$ real, embora com V complexo). Nas figuras 1 representamos a equação (2.40) para ϕ^2 e ρ reais nas três possibilidades de sinais do ϕ_0^2 .

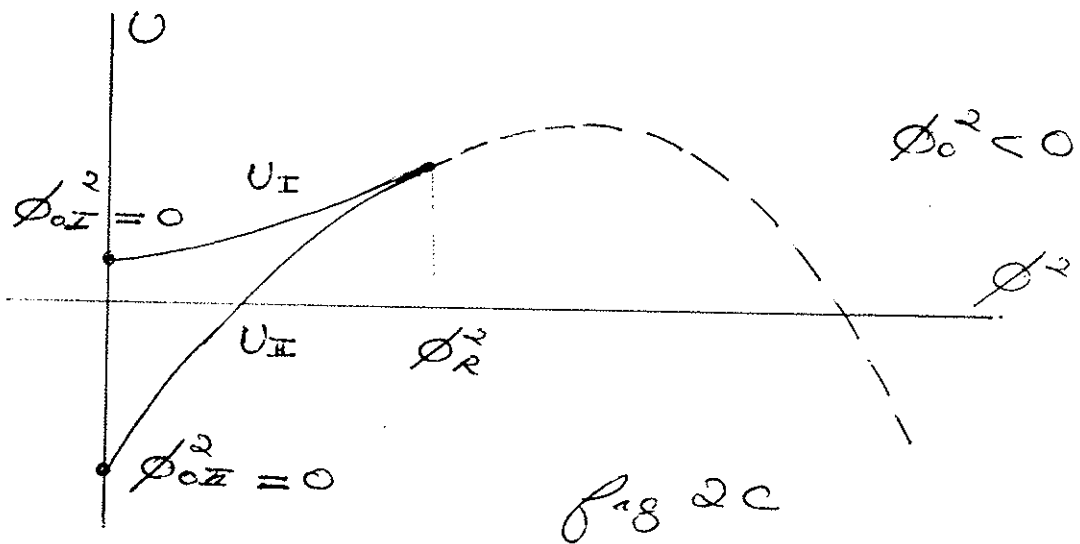
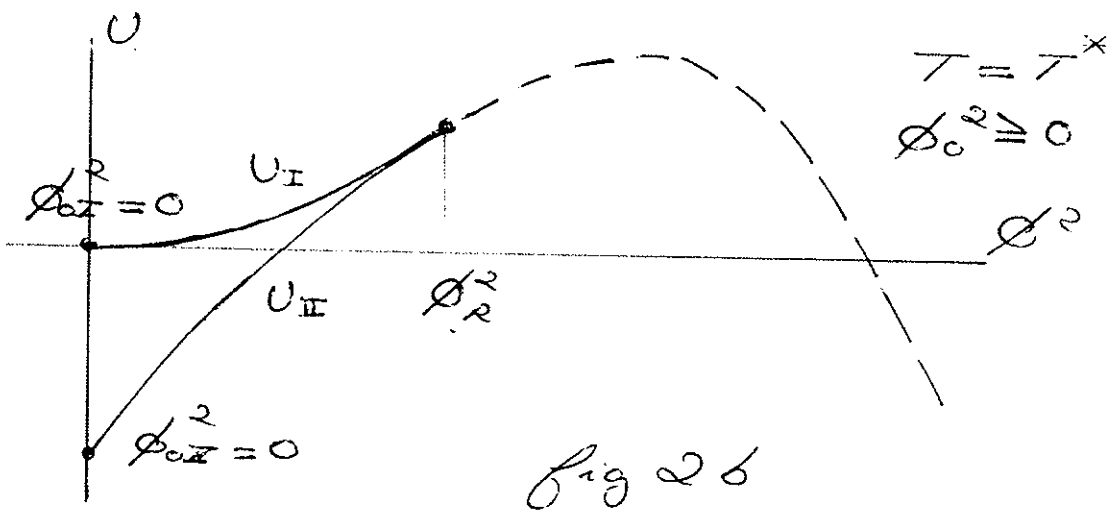
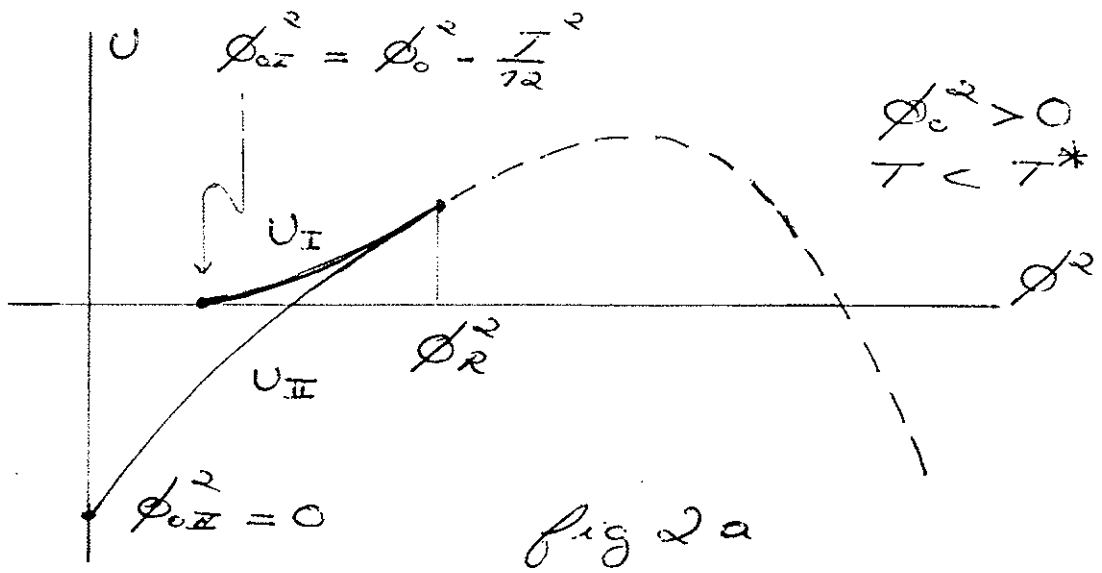
Para termos uma região de $\phi^2(\tau) > 0$, é necessário que $\phi_R^2(\tau=0) > 0$, e portanto, que:

$$\frac{16\pi^2 \phi_0^2}{\chi_0} > -1/e \quad (2.42)$$

A $\tau=0$ o ponto $\phi_R^2(0)$ é determinado por:

$$\left. \frac{d\phi^2}{d\rho}(\tau=0) \right|_{\rho_R} = -\frac{\chi_0}{16\pi^2} (1 + \ln \rho_R) = 0$$





isto é:

$$\phi_R^2(T=0) = \phi_0^2 + \frac{1}{e} \frac{\chi_0}{16\pi^2} \quad (2.43)$$

Além disso, uma análise rápida das figuras 1 nos diz que existe uma temperatura máxima T_c , para a qual temos uma região $\phi^2 > 0$. T_c é determinado pelo par de equações:

$$\phi_R^2 = - \frac{\chi_0}{16\pi^2} \left\{ \rho_R \ln \rho_R - \frac{16\pi^2 \phi_0^2}{\chi_0} + \frac{4\pi^2 T^2}{3\chi_0} F\left(\frac{\chi_0 \rho_R}{T^2}\right) \right\} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{d\phi^2}{d\rho} = - \frac{\chi_0}{16\pi^2} \left\{ 1 + \ln \rho_R - 2\pi G\left(\frac{\chi_0 \rho_R}{T^2}\right) \right\} = 0 \quad (2.45)$$

onde

$$G(x) = - \frac{2\pi}{3} \frac{dF(x)}{dx}$$

$$G(x) = 1/\sqrt{x} + \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\sqrt{x}}{4\pi} + \delta \right) \quad x \ll 1$$

$$G(x) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2} \cdot 3} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad x \gg 1$$

é uma função monotonicamente decrescente ($G(0) = \infty$, $G(\infty) = 0$) (mais detalhes no Apêndice C).

Além da característica de que valores reais positivos de ρ nos levam a uma região finita de $\phi^2 > 0$, temos o fato, da equação de Lacuna $\phi^2 = \phi^2(\rho)$ ser bivalente; a um mesmo $\phi^2 > 0$ correspondem 2 valores de ρ . Nós chamaremos de I e II respectivamente as soluções de menor e maior valor de ρ (veja a figura 1). O ponto de ramificação é $\rho_R(T)$ correspondente à $\phi_R^2(T) = \phi_{\text{máximo}}^2(T)$ (Para $T=0$, $\rho_R = 1/e$ e para $T > 0$, $\rho_R > 1/e$). Também o potencial U será bivalente, como função de ϕ^2 . Seu valor para cada ponto

ϕ^2 será sempre menor no ramo II. De fato, de (2.39)

$$\frac{dU}{d\phi^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial V}{\partial X} \frac{dX}{d\phi^2} = \frac{1}{2} \chi(\phi^2) \quad (2.47)$$

e portanto:

$$U(\phi^2) = U(\phi_R^2) - \int_{\phi^2 < \phi_R^2}^{\phi_R^2} \chi(\phi^2) d\phi^2 \quad (2.48)$$

O intervalo de integração e o integrando são positivos, sendo o integrando no ramo II, maior que no ramo I.

Logo:

$$U_{II}(\phi^2) < U_I(\phi^2) < U(\phi_R^2) \quad (2.49)$$

Os pontos estacionários de U são dados por (veja 2.39 e 2.41):

$$0 = \frac{\partial V}{\partial X} = \phi^2 - \phi_0^2 + \frac{\chi_0}{76\pi^2} \rho \mu \rho + \frac{T^2}{72} F\left(\frac{\chi_0 \rho}{T^2}\right)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dU}{d\phi_a} = 2\phi_a \frac{dU}{d\phi^2} = 2\phi_a \left\{ \frac{\partial V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial V}{\partial X} \frac{dX}{d\phi^2} \right\} \\ &= 2\phi_a \left\{ \frac{1}{2} \chi \right\} = \phi_a \chi \quad (2.50) \end{aligned}$$

e são de dois tipos: a) Com *Quebra Espontanea de Simetria* (Q.E.S) $\rho \neq 0$ e $\phi_a \neq 0$; e b) *Sem Quebra de Simetria* (S.Q.S) $\phi_a = 0$ e $\rho \geq 0$.

Com a ajuda das figuras 1 podemos classificar os mínimos possíveis de acordo com os valores dos parâmetros.

Para $\phi_0^2 > 0$ e $T < T^* = \sqrt{12} \phi_0^2$ temos uma solução com Q.E.S no ramo I e uma solução S.Q.S no ramo II correspondendo a um valor mais baixo de U .

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad \rho_{0I} &= 0 \\
 \phi_I^2 &= \phi_0^2 - \frac{T^2}{72} \quad (> 0) \\
 U_I &= 0 \quad \left(\frac{dU}{d\phi^2} \right)_I = 0 \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II.} \quad \phi_{II}^2 &= 0 \\
 \phi_0^2 - \frac{\chi_0}{16\pi^2} \rho_{0II} \ln \rho_{0II} - \frac{T^2}{72} F\left(\frac{\chi_0 \rho_{0II}}{T^2}\right) &= 0 \\
 \rho_{0II} > 1/e \quad U_{II} < 0 \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

Para $\phi_0^2 \geq 0$ e $T = T^* = \sqrt{72\phi_0^2}$ a solução I acima degenera numa solução S.Q.S.

Para $\phi_0^2 > 0$ e $T^* < T < T_C$ e para $\phi_0^2 < 0$ e $T < T_C$ temos duas soluções S.Q.S, uma no ramo I e outra no ramo II:

$$\begin{aligned}
 \phi_x^2 &= 0 \quad x = I \text{ ou } II \\
 \phi_0^2 - \frac{\chi_0}{16\pi^2} \rho_{0x} \ln \rho_{0x} - \frac{T^2}{72} F\left(\frac{\chi_0 \rho_{0x}}{T^2}\right) &= 0 \\
 \rho_{0I} < 1/e \quad \rho_{0II} > 1/e \\
 U_I > U_{II} \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

Esses resultados são representados qualitativamente nas figuras 2.

Resumindo: A aproximação dominante em $1/N$ para o Potencial Efetivo é real para, valores dos parâmetros renormalizados compatíveis com: $\frac{16\pi^2\phi_0^2}{\chi_0} > -1/e$, sendo χ_0 positivo e ϕ_0^2

de qualquer sinal. Além disso a máxima temperatura é T_c , solução de (2.43) e (2.44), isto é, de $\phi_{max}^2 = 0$. Para os três sinais possíveis de ϕ_0^2 (compatível com a condição atrás) temos um vácuo S.Q.S (isto é, com $\phi^2=0$ correspondente a ρ no ramo II. Temos ainda um vácuo falso S.Q.S, exceto para a região $\phi_0^2 > 0$ e $T < T^* = \sqrt{12\phi_0^2}$ onde este vácuo falso tem Q.E.S na posição $\phi^2 = \phi_0^2 - \frac{T^2}{12}$.

Valores de $\phi^2(\tau) > \phi_2^2(\tau)$ não podem ser obtidos com ρ 's reais e devemos esperar que nessa região $U(\phi^2)$ se torne complexa.

Para ganharmos alguma familiaridade com o problema, vamos estudar $U(\phi^2)$ para $\phi^2 \rightarrow \infty$. Inicialmente, tomemos $\phi^2 \rightarrow \infty$ e $T=0$.

A equação de Lacuna (2.40), diz que $\rho \ln \rho \rightarrow -\infty$ e portanto ρ é complexo. Substituindo $\rho = \alpha e^{i\beta}$ ($\alpha > 0$, $0 \leq \beta < 2\pi$) na equação (2.40) e separando as partes real e imaginária, obtemos:

$$\beta / \sin \beta = \frac{1}{\alpha} \frac{16\pi^2}{\chi_0} (\phi^2 - \phi_0^2) \rightarrow 0 \leq \beta < \pi$$

$$\ln \alpha = -(\beta / \sin \beta) \cos \beta \rightarrow \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

Ainda dessas equações, para $\phi^2 \rightarrow \infty$ temos:

$$\beta \rightarrow \pi$$

$$\alpha \ln \alpha = \frac{16\pi^2 \phi^2}{\chi_0} \rightarrow \alpha \approx \frac{\frac{16\pi^2 \phi^2}{\chi_0}}{\ln \frac{16\pi^2 \phi^2}{\chi_0}}$$

isto é:

$$\rho \approx \frac{\frac{16\pi^2 \phi^2}{\chi_0}}{\ln \frac{16\pi^2 \phi^2}{\chi_0}} e^{i\pi} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Termos sub} \\ \text{dominantes} \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

e o potencial (2.39) se comportará como:

$$V(\phi^2 \rightarrow \infty) \cong -4\pi^2 \frac{\phi^4}{\ln \frac{16\pi^2 \phi^2}{x_0}} \cdot \quad (2.55)$$

$$\cdot \left\{ 1 - i \frac{\pi}{\ln \frac{16\pi^2 \phi^2}{x_0}} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Termos sub} \\ \text{dominantes} \end{array} \right\}$$

Esse comportamento não é qualitativamente alterado para $T \neq 0$.

De fato se considerarmos a extensão de (2.29c) e de (2.32c) para $x = R e^{i(\pi - 2\varepsilon)}$ ($R \rightarrow \infty$; $\varepsilon \rightarrow 0$) obtemos:

$$F(x) \rightarrow C R^{1/4} e^{-R^{1/2}(i+\varepsilon)} \rightarrow 0$$

$$E(x) \rightarrow C R^{3/4} e^{-R^{1/2}(i+\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad (2.56)$$

Concluimos que (2.54) é solução de equação de Lacuna (2.40) à temperatura não nula, e que o comportamento do potencial, a menos do termo de fundo, $\propto T^y$ irrelevante, é dado por (2.55).

Temos uma dificuldade: $\sqrt{}$ é complexo acima do ponto de ramificação, tende a $(-\infty)$ para $\phi^2 \rightarrow \infty$.

A primeira vista pensamos que a dificuldade está na aproximação $1/N$ e que as correções de ordem mais altas poderiam alterar esse resultado de forma radical. Entretanto, como a expansão $1/N$ é renormalizável, os coeficientes da expansão de $\sqrt{1/N} = \sqrt{V(\phi, x)}$, $\phi^2 = \phi^2(x)$, etc., em potências de $1/N$ são todos finitos. Assim por maior que seja ϕ^2 (independente de N), podemos sempre achar um N suficientemente grande tal que os termos superiores em $1/N$ (nas expan

sões de V e ϕ^2) sejam pequenos (comparados com o termo dominante) não alterando essencialmente o resultado do termo dominante [4]. Para ϕ^2 muito grande, mas ainda finito, V e ϕ^2 podem ser aproximados indefinidamente para \mathcal{N} suficientemente grande, mas finito. Intuitivamente, não temos porque esperar alguma mudança abrupta (transição de fase) nos resultados, para \mathcal{N} finito. Assim concluímos que o resultado da ordem dominante, (2.55), ao menos qualitativamente, faz sentido e evidência alguma característica essencial do modelo.

Como $\text{Re } V(\phi^2 \rightarrow \infty) \rightarrow -\infty$, o potencial é não limitado por baixo e a teoria é instável com respeito à geração espontânea de um vácuo clássico $\phi^2 \rightarrow \infty$. Entretanto, a parte imaginária de V , nessa região de ϕ^2 , nos diz também, que tais configurações de ϕ^2 induzem à criação de pares de partículas reais a partir do vácuo, destruindo a homogeneidade dessas configurações ϕ^2 grandes [5].

Essas considerações nos levam a concluir que os "vácuos" I e II podem ser instáveis. Nesse caso a física das excitações no seu entorno só faria sentido em processos envolvendo tempos de ordens de grandeza menores que o tempo de decaimento desses vácuos.

A seguir estudaremos a presença de excitações *taquônicas* nos propagadores de χ e ϕ_a entorno dos vácuos I e II . A conclusão é que I é *instável* mas II é *estável* até à temperatura \mathcal{T}_c , onde o potencial deixa de ser real para qualquer ϕ^2 . I é de energia mais alta que II (veja 2.49) e sua instabilidade era esperada, já com respeito a decair em II . A estabilidade de II , entretanto, é um resultado inesperado, dado o comportamento (2.55), do potencial para $\phi^2 \rightarrow \infty$.

Para estudar a estabilidade dos vácuos, vamos calcular as excitações nos seus entornos, estudando o espectro das funções de 2 pontos do χ e do ϕ_a . Elas podem ser obtidas da Ação Efetiva.

Refazendo os passos (2.5) a (2.15) considerando que χ e ϕ são não constantes (no fim das contas voltaremos a fazê-los constantes) obtemos:

$$\Gamma_0(\omega) = N \int \left\{ \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi_a \partial_\mu \phi_a - \frac{3}{2\lambda_0} \chi^2 + \frac{3\mu_0^2}{\lambda_0} \chi + \frac{1}{2} \chi \phi^2 \right\} d^4x \quad (2.57)$$

$$\Gamma_1(\omega) = \frac{N}{2} \left\{ \text{tr} \ln(-Z \partial^2 + \chi) - \text{tr}(-Z \partial^2) \right\} \quad (2.58)$$

isto é, em ordem dominante em N temos:

$$\begin{aligned} \Gamma/N &= \int d^4x \left\{ \frac{Z}{2} \partial_\mu \phi_a \partial_\mu \phi_a - \frac{3}{2\lambda_0} \chi^2 + \right. \\ &+ \frac{3\mu_0^2}{\lambda_0} \chi + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \quad (2.59) \\ &\left. + \frac{1}{2} \langle \pi | \ln \left(1 + \frac{1}{-Z \partial^2} \chi \right) | \pi \rangle \right\} \end{aligned}$$

Com a escolha (2.26) para os contratermos, $\sqrt{\quad}$ se escreve:

$$\begin{aligned} \Gamma/N &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial_\mu \phi_a - \frac{3}{2} \chi^2 + \right. \\ &+ \frac{3\mu^2}{g} \chi + \frac{1}{2} \chi \phi^2 + \quad (2.60) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\langle \pi | \ln \left(1 + \frac{1}{-\partial^2} \chi \right) | \pi \rangle + \right. \\ &\left. - \chi(x) \int \frac{(dp)}{p^2} + \frac{\chi^2(x)}{2} \int \frac{(dp)}{p^2(p^2+m^2)} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Como em (2.27), os dois termos infinitos dentro do colchete, cancelam os infinitos dos dois primeiros termos de expansão do logaritmo [6]. Um pouco mais detalhadamente:

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} \text{ termo} &= \frac{1}{2} \int dx \left\{ \langle x | \frac{1}{-D^2} | x \rangle - X(x) \int \frac{(dp)}{p^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int dx X(x) \left\{ \int - \int \right\} \frac{(dp)}{p^2} = \text{Finito} \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^{\circ} \text{ termo} &= - \frac{1}{4} \int dx \left\{ \langle x | \left(\frac{1}{-D^2} X \right)^2 | x \rangle - X(x) \int \frac{(dp)}{p^2(p^2+m^2)} \right\} \\
 &= - \frac{1}{4} \int dx dy X(x) X(y) \int (dk) e^{ik(x-y)} \\
 &\quad \left(\int \frac{(dp)}{p^2(p-k)^2} - \int \frac{(dp)}{p^2(p^2+m^2)} \right) = \text{Finito} \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

As funções de 2 pontos são obtidas calculando-se:

$$\delta^2 T / (\delta \phi_a(x) \delta \phi_b(y))$$

Para X e ϕ constantes, temos no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 T}{\delta \phi_a(x) \delta \phi_b(y)} / \int (dk) e^{ik(x-y)} &= D_{ab}(k) \\
 &= \begin{bmatrix} 3N \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{96\pi^2} - \frac{L}{6} \right) & \sqrt{N} \phi & 0 & \dots \\ \sqrt{N} \phi & (k^2 + X) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k + X^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & k^2 + X \end{bmatrix} \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

A constante $1/96\pi^2$ é a diferença das integrais:

$$\frac{1}{6} \int (dp) \frac{1}{p^2(p^2+m^2)} = \frac{1}{6} \int (dp) \frac{1}{(p^2+m^2)^2} \cdot L$$

é a expressão

$$L = \int (dp) \frac{1}{(p^2+x)(p-k)^2+x} - \int (dp) \frac{1}{(p^2+m^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{x}{m^2} + 2\beta(k^2, x) - 2\pi G(x, \bar{\pi}, \bar{k}_0) \right) \quad (2.64)$$

onde $\beta(k^2, x)$ é a função analítica em k^2 :

$$\beta(k^2, x) = \left(\frac{k^2+4x}{k^2} \right)^{1/2} \ln \left(\frac{\sqrt{k^2+4x} + \sqrt{k^2}}{\sqrt{4x}} \right) - 1. \quad (2.65)$$

que é nula para $k^2=0$ e monotonicamente crescente para $k^2>0$ crescente. Podemos estendê-la analiticamente para $k^2<0$. o resultado é:

$$\beta(k^2, x) = \sqrt{\frac{4x+k^2}{-k^2}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4x+k^2}{-k^2}} \right\} - 1 \quad 0 > k^2 > -4x \quad (2.66)$$

$$\beta(k^2, x) = \sqrt{\frac{-k^2-4x}{-k^2}} \left\{ -i\frac{\pi}{2} + \ln \left[\sqrt{\frac{-k^2-4x}{4x}} + \sqrt{\frac{-k^2}{4x}} \right] \right\} \quad k^2 < -4x$$

Na figura 3, abaixo, apresentamos $\beta(k^2, x)$. A região tracejada representa a parte real de β no trecho em que ela se torna complexa.

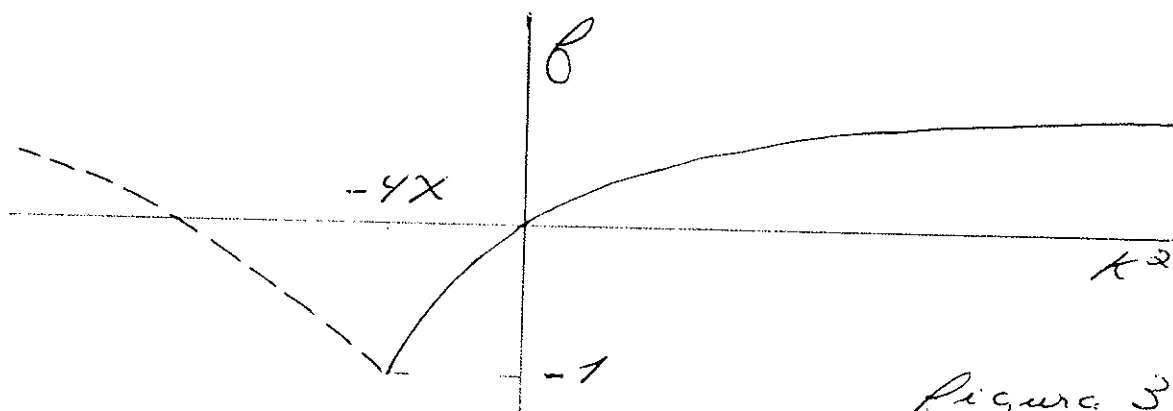


figura 3

A parte dependente de temperatura, $G(\bar{x}, \bar{p}_0, \bar{p})$ é a integral (Apêndice):

$$G(\bar{x}, \bar{p}_0, \bar{p}) = 8\pi \int (d^3x) \left\{ \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{e^{a-1}} \cdot \left[\frac{1}{(b^2 - (a + i\bar{p}_0)^2)} + (\bar{p}_0 \rightarrow -\bar{p}_0) \right] + \frac{1}{2b} \cdot \left[\frac{1}{e^{b+i\bar{p}_0} - 1} \cdot \frac{1}{a^2 - (b + i\bar{p}_0)^2} + (\bar{p}_0 \rightarrow -\bar{p}_0) \right] \right\} \quad (2.67)$$

onde \times é uma variável dimensional, e:

$$\begin{aligned} a &= (\times^2 + \bar{x})^{1/2} \\ b &= ((\times - \bar{p})^2 + \bar{x})^{1/2} \\ \bar{x} &= \times \beta^2 \\ \bar{p} &= p \beta \\ \bar{p}_0 &= p_0 \beta \end{aligned} \quad (2.68)$$

Essa integral aparece como subintegração no cálculo do *Potencial Efetivo* em ordem sub-dominante em $1/N$ (veja 2.23 e 2.24). Aparecerá também no cálculo da constante de acoplamento efetivo: $\lambda(p, T)$. Seu conhecimento seria interessante no estudo das diferenças ou semelhanças no escalonamento dos momentos ou da temperatura; ou ainda no cálculo da matriz S do modelo à temperatura não nula (ao menos a baixa temperatura, onde o conceito faz sentido). Entretanto até o momento, não consegui escrever o resultado numa forma útil. Seu comportamento assintótico, para $T \rightarrow \infty$ está estudado no Apêndice. O resultado é:

$$G(\bar{x}; \bar{p}_0; \bar{p} = 0) = 2 / (\sqrt{\bar{x}} + \sqrt{\bar{x} + \bar{p}_0^2}) \quad (2.69)$$

($G(\bar{x}, 0, 0) = G(\bar{x})$ é dada pela equação (2.46)).

Estabilidade dos Vácuos

Consideremos o propagador inverso do χ , isto é:

$$\frac{1}{3N} \tilde{D}_{xx} = -\frac{1}{g} + \frac{1}{96\pi^2} + \frac{1}{96\pi^2} \left\{ \ln \frac{\chi}{M^2} + 2\beta(\kappa^2, \chi) - 2\pi G(\bar{x}, \bar{\tau}_0, \bar{\tau}) \right\} \quad (2.70)$$

Usando (2.37) podemos escrevê-lo na forma:

$$\frac{1}{3N} \tilde{D}_{xx} = \frac{1}{96\pi^2} \left\{ 1 + \ln \rho + 2(\kappa^2, x_0 \rho) - 2\pi G(x_0 \rho, \bar{\tau}_0, \bar{\tau}) \right\} \quad (2.71)$$

Vamos inicialmente analisar esta expansão à temperatura zero ($g=0$). $\beta(\kappa^2, \chi)$ é positivo para $\kappa^2 > 0$ e só se anula em $\kappa^2=0$. A condição para não termos excitações taquiônicas é \tilde{D}_{xx}^{-1} não se anular para $\kappa^2 \geq 0$. (2.71) satisfará essa condição se [18]

$$1 + \ln \rho > 0 \quad (2.72)$$

A equação de *Lacuna*, (2.40) nos diz que (2.72) ocorre se:

$$\frac{d\phi^2}{d\rho} < 0 \quad (2.73)$$

isto é, no ramo II de $\phi^2 = \phi^2(\rho)$. Assim, o vácuo do ramo II, é estável. No ramo I, $1 + \ln \rho < 0$, teremos excitações taquiônicas, e portanto um vácuo instável (seria interessante calcular a taxa de decaimento de I, mas não faremos isso). Não conhecemos o $G(\bar{x}, \bar{\tau}_0, \bar{\tau})$, mas podemos calcular um limite superior para a temperatura além da qual o vácuo II se tor

na instável.

Temos *táquions* se para algum $\kappa^2 > 0$ o $\tilde{D}_{xx}^{-1} = 0$. A $\kappa^2 = 0$, a equação $\tilde{D}_{xx}^{-1} = 0$ é a própria equação (2.45) que determina \mathcal{T}_C (observe que (2.44) também é satisfeito, pois no *vácuo II*, $\phi^2 = 0$), além da qual não temos mais soluções $\phi^2 > 0$ com ρ e V reais.

Resumindo: Para a região (2.42) dos parâmetros e $\mathcal{T} < \mathcal{T}_C$ temos um *vácuo estável* que não apresenta *Quebra Exponencial de Simetria*.

Vamos agora estudar a massa e a constante de acoplamento do modelo entorno desse vácuo.

No *vácuo II*, $\phi_a = 0$, e a função de 2 pontos de ϕ_a pode ser lida diretamente de (2.63).

$$\tilde{f}_{aa}^{(2)} = \rho^2 + \chi_{II0}(\mathcal{T}) \quad (\alpha=1, \dots, N) \quad (2.74)$$

Portanto, a massa de ϕ_a é:

$$m_{II}^2(\mathcal{T}) = \chi_{II0}(\mathcal{T}) > \frac{\chi_c}{2} \quad (2.75)$$

dada pela solução ramo *II* da equação (2.40) de *Lacuna*:

$$\phi_0^2 - \frac{m_{II}^2(\mathcal{T})}{96\pi^2} \ln \frac{m_{II}^2(\mathcal{T})}{\chi_0} - \frac{\mathcal{T}^2}{72} F\left(\frac{m_{II}^2(\mathcal{T})}{\mathcal{T}^2}\right) = 0 \quad (2.76)$$

Se chamarmos de $m_{II}^2(0)$ a massa do ϕ_a a temperatura zero, isto é:

$$\frac{96\pi^2 \phi_0^2}{\chi_c} = \frac{m_{II}^2(0)}{\chi_c} \ln \frac{m_{II}^2(0)}{\chi_c} \quad (2.77)$$

Usando (2.81) podemos reescrever (2.76) na forma: (2.78)

$$\left(1 + \frac{96\pi^2}{\chi_{II}(0)}\right) (m_{II}^2 - m_{II}^2(0)) - m_{II}^2 \ln \frac{m_{II}^2}{m_{II}^2(0)} - \frac{4\pi^2}{3} \mathcal{T}^2 F\left(\frac{m_{II}^2}{\mathcal{T}^2}\right) = 0$$

Uma análise rápida da figura 1 nos mostra um com-

portamento de $m_{II}^2(\tau)$ da forma indicada na figura 4 (abaixo)

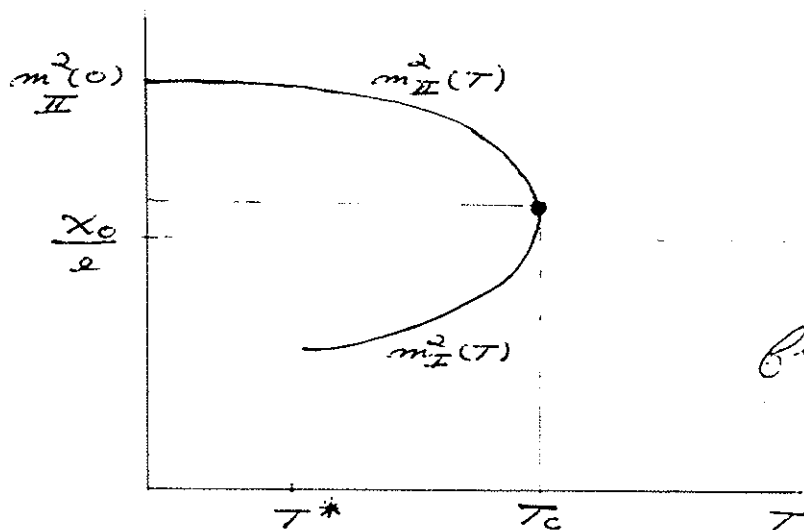


Figura - 4

Na mesma figura representamos a "massa" $m_{II}^2(\tau)$ de ϕ_a calculada em torno do vácuo I, na região simétrica: $\tau > \tau^*$ (veja a discussão que segue a fórmula 2.52).

A $\tau = \tau_c$ os dois vácuos e as duas massas coalescem. Acima de τ_c não temos mais solução real para m e para V . O vácuo se torna instável!

A função de 4 pontos $\tilde{\Gamma}_{aabb}^{(4)}(\phi, \tau)$ também pode ser obtida de (1.64). Para $a \neq b$ o único gráfico que contribue para $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ é:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{aabb}^{(4)}(\phi, \tau, X_{0II}(\tau)) &= \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \text{---} \Delta_{XX}(\phi) \text{---} \\ \diagup \\ b \end{array} \quad (2.78) \\ &= \frac{32\pi^2}{N} \left\{ 1 + \ln \frac{m_{II}^2}{X_0} + 2\beta(\rho^2, m_{II}^2) - 2\pi G(\overline{m}_{II}, \overline{\rho}) \right\} \end{aligned}$$

Definindo a constante de acoplamento efetivo $\lambda(\tau)$ em torno do vácuo II, por:

$$\begin{aligned} \lambda_{II}(\tau) &= 3N \left(d^4U / d^3\phi_a d^3\phi_b \right)_{X_{0II}(\tau)} \\ &= -3N \tilde{\Gamma}_{aabb}^{(4)}(\phi=0, \tau, X_{0II}(\tau)) \quad (2.79) \end{aligned}$$

obtemos:

$$\lambda_{II}(\tau) = \lambda_{II}(0) \left\{ 1 - \frac{\lambda_{II}(0)}{96\pi^2} \left[\ln \frac{m_{II}^2(\tau)}{m_{II}^2(0)} - 2\pi \mathcal{G} \left(\frac{m_{II}^2(\tau)}{\tau^2} \right) \right] \right\}$$

$$\lambda_{II}(0) = - \frac{96\pi^2}{1 + \ln \frac{m_{II}^2(0)}{\chi_0}} = - \frac{1}{\frac{\phi_0^2}{6m_{II}^2(0)} + \frac{1}{96\pi^2}} \quad (2.80)$$

De (2.77) e (2.80) podemos reescrever ϕ_0^2 e χ_0 em termos das observáveis:

$$\phi_0^2 = - \frac{m_{II}^2(0)}{96\pi^2} \left(1 + \frac{96\pi^2}{\lambda_{II}(0)} \right)$$

$$\chi_0 = m_{II}^2(0) \cdot \exp \left(1 + \frac{96\pi^2}{\lambda_{II}(0)} \right) \quad (2.80)$$

De (2.77) e (2.42) temos que: $m_{II}^2(0) > \frac{\chi_0}{2}$ e portanto $\lambda_{II}(0) < 0$.

Aliás, $\lambda_{II}(\tau) < 0$ para toda a região $\tau < \tau_c$. Isto é, a própria condição (2.72) de que o vácuo II não tem táquions, particularizado à $\kappa^2 = 0$.

Para τ tendendo à τ_c , $\lambda_{II}(\tau)$ tende à $-\infty$. (a menos do sinal, nosso resultado é semelhante ao de [8]). Acima de τ_c não temos um vácuo estável. A expressão de $\lambda_{II}(\tau)$ nessa região no daria um número complexo. O comportamento de $\lambda_{II}(\tau)$ está representado qualitativamente na figura 5, abaixo.

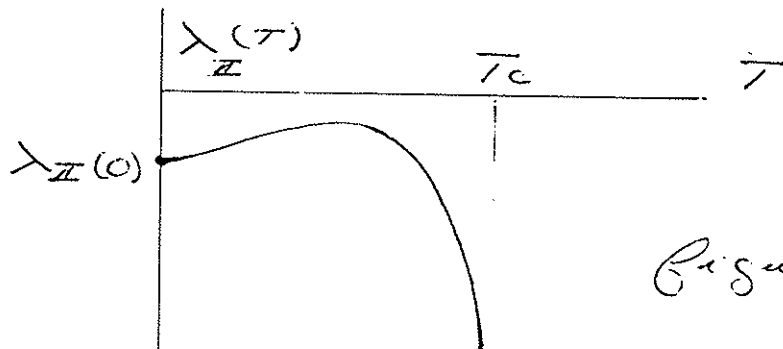


Figura - 5

Comparemos esses resultados com a literatura. A constante de acoplamento λ do $O(1)$ foi calculado [7] em 1 circuito e grupo de renormalização, com a conclusão de que $\lambda \rightarrow 0$ para $T \rightarrow \infty$. A aproximação: *margaridas+salsichas* (equivalente à $1/N$) foi considerada em [8], para o modelo $O(1)$, mas os autores não chegaram a estudá-la. Em [9], o cálculo de λ e M é feito em aproximação $1/N$ com a conclusão de que $\lambda \rightarrow \ln T$ e $M \rightarrow T$ para $T \rightarrow \infty$. O autor ainda prevê uma fase de simetria quebrada abaixo de uma certa temperatura T_c . A inexistência de Q.E.S., o sinal negativo de λ e o pólo de Landau, além do qual o modelo não faz sentido, não foram vistos pelo autor. Em [10] os autores mostram que o cálculo de λ e M via Grupo de Renormalização à Temperatura Finita, com γ_m e β calculados em até 2 circuitos fatorizáveis (sem *overlapping*), dão o mesmo resultado que o $1/N$. Nada é dito sobre quebra ou não de simetria e o sinal da constante de acoplamento.

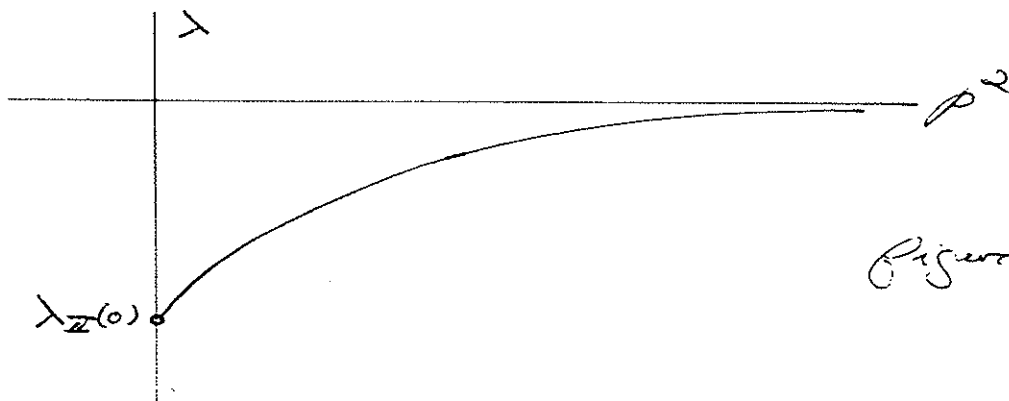
O comportamento do $|\lambda|$ é o mesmo que obtivemos: Pólo de Landau em T_c . Os autores ainda sugerem que isto deve ter a ver com a instabilidades do vácuo!

Uma análise da instabilidade, via o estudo do *Potencial Efetivo* do modelo $O(N)$ com método variacional e aproximação $1/N$ é realizado em [11] com conclusões semelhantes às nossas.

É interessante observar que $\lambda(p)$ definido por:

$$\begin{aligned} \lambda_{\underline{H}}(p) &= -3N \tilde{\Gamma}_{\text{aa ss}}^{(4)}(p^2, \mathcal{T}=\mathcal{O}, \chi_{\underline{H}}(c)) \\ &= \lambda_{\underline{H}}(0) / \left\{ 1 - \frac{\lambda_{\underline{H}}(c)}{48\pi^2} f(p^2, m_{\underline{H}}^2(c)) \right\} \quad (2.83) \end{aligned}$$

exibe *Liberdade Assintótica* [9]. Seu comportamento está representado qualitativamente na figura 6 (abaixo).



Argumentos intuitivos e equações de grupo de renormalização tipo *Weinberg-t'Hooft* para temperatura finita [13] prevêem comportamentos semelhantes para os $\tilde{\Gamma}_{\Sigma}^{(n)}$ a altos momentos ou temperaturas.

Embora nosso esquema de renormalização não seja a subtração mínima de *t'Hooft* e esteja mais para uma equação de *Callan-Symanzik*, isso não explica a drástica diferença de comportamento de λ em \mathcal{T} e p^2 . Observe que também a massa, como consequência da forma extremamente simples de $\tilde{\Gamma}^{(2)}$, não depende de p^2 , apesar de um comportamento muito complexo em \mathcal{T} , especialmente a partir de \mathcal{T}_c .

Essas questões ficarão abertas por enquanto. É claro que o entendimento delas à luz do grupo de renormalização é um problema muito interessante, e pretendemos retornar a isso no futuro. Mesmo o cálculo de $\lambda(p, \mathcal{T}) \doteq -3N \tilde{\Gamma}_{(p, \mathcal{T})}^{(4)}$, que envolve o conhecimento de $\mathcal{G}(\chi, \bar{\phi}_0, \bar{\phi})$, equação (2.57),

é um ponto ao qual pretendemos voltar.

Para o momento nos contentamos com algumas observações acerca do outro ponto delicado do resultado: a negatividade de λ . Costuma-se dizer que isto implica em a teoria ser *instável* (não ter vácuo).

Entretanto, é exatamente na situação que estamos encontrando, que o ϕ^4 em 4 dimensões tem chance de ser não trivial e consistente. Vejamos. As provas de trivialidade do ϕ^4 em 4 dimensões são para $N = 1, 2$ e para $Z = \infty$ [14]. Nós temos $N \gg 1$ e $Z = 1$.

Em aproximação *Gaussiana* (método variacional) o modelo é mostrado ser não trivial e não exibir *Q.E.S* para $Z=1$ e $\lambda_c \rightarrow 0_-$ [15]. $Z=1$, $\lambda_c \rightarrow 0_-$ e ausência de *Q.E.S* é o nosso caso.

Quanto aos argumentos [16] de inconsistência com respeito à positividade, para os modelos com $\lambda < 0$, *Symanzik* [12] observou que não se aplicam para o caso Z finito e $\lambda_c \rightarrow 0_-$. Posteriormente, *Coleman* [17] usando a *Liberdade Assintótica* do modelo $N=1$, mostrou que o *Potencial Efetivo* vai como: $V \rightarrow -\phi^4 / \ln \phi^2$ para $\phi^2 \rightarrow \infty$, ressuscitando a questão da instabilidade do vácuo. Como vimos atrás, em ordem dominante de $1/N$, o vácuo II é *estável* apesar de um comportamento semelhante ao de *Coleman* para a parte real do *Potencial Efetivo* em $\phi^2 \rightarrow \infty$. A diferença é que em $1/N$ temos também uma parte imaginária negativa. Isto é, um indício de que essas configurações ϕ^2 grandes não são, por sua vez, *estáveis* [5].

A conexão dessas duas características com a estabilidade do vácuo é um problema interessante, aberto para o mo-

mento.

Outras abordagens ao cálculo do *Potencial Efetivo* para $\phi^2 \rightarrow \infty$ corroboram a estabilidade do vácuo, mas por outras linhas. Nas aproximações *Gaussianas* [15] o *Potencial Efetivo* ($\tilde{\tau}=0$) apresenta a queda $V_{\tilde{\tau}} \rightarrow -\infty$ para $\phi^2 \rightarrow \infty$, enquanto regularizado. Com a retirada do regulador ultravioleta, $V_{(\infty)} \rightarrow cte$ para $\phi^2 \rightarrow \infty$. Um resultado semelhante ($\tilde{\tau}=0$) é obtido na referência [17], por uma análise baseada na simetria: $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + cte$ que o modelo (*Assintoticamente Livre*) apresenta (só) depois de renormalizado.

Outro resultado da mesma análise é a possibilidade de o modelo apresentar um estado ligado de massa nula (ele é necessário para que a série perturbativa seja *assintótica* em $\rho=0$).

É interessante observar, que na aproximação $1/N$, um estado ligado e uma ressonância aparecem, em $\tilde{\tau}=0$, na região de acoplamento "forte". [18]

$$-\frac{1}{2} < \frac{76\pi^2 \phi_0^2}{\chi_c} < 2$$

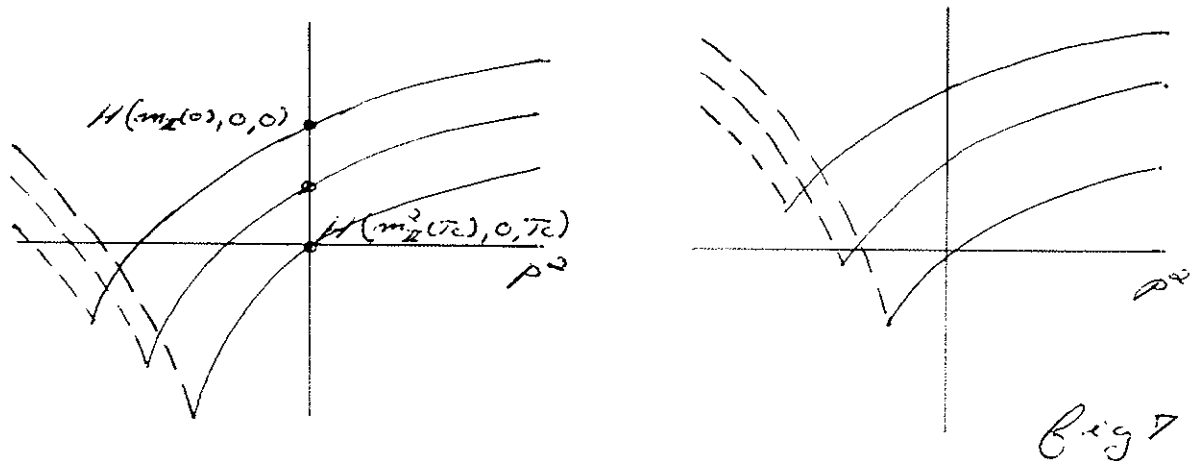
Com o aumento da temperatura eles aparecem, mesmo para acoplamento fraco: $\frac{76\pi^2 \phi_0^2}{\chi_c} > 2$. Vejamos. Como não conhecemos: $\mathcal{G}(\bar{m}, \bar{\rho}, \bar{\rho}_0)$ vamos escrever a (2.78) na forma:

$$\frac{32\pi^2}{N\tilde{\tau}(\rho, T)} = H(m_H(T), T, \rho) + \Delta(m_H(T), T, \rho)$$

$$H = 1 + \ln \frac{m_H^2}{\chi_0} + 2\beta(\rho^2, m_H^2) - 2\pi \mathcal{G}\left(\frac{m_H^2}{T^2}\right)$$

$$\Delta = 2\pi \left\{ \mathcal{G}\left(\frac{m_H^2}{T^2}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{m_H^2}{T^2}, \frac{\rho_0}{T}, \frac{\rho}{T}\right) \right\}$$

Dos resultados 2.65, 2.66 e da figura 3. para $\rho(\rho^2, m^2)$ e de (2.76) para $m_{II}^2(T)$, desenhamos nas figuras abaixo o comportamento qualitativo de $H(m, \rho, T)$ para as regiões de acoplamento forte e fraco.



Os resultados mostrados na figura 7 são não usuais. Se os pólos de $\tilde{Z}^{(4)}$ para $\rho^2 < 0$, realmente significam um estado ligado e uma ressonância, nós esperaríamos que eles desaparecessem com o aumento da temperatura. É claro que uma análise mais segura requer o conhecimento do $G(\bar{m}, \bar{\rho}, \bar{\rho}_0)$. Voltaremos a isso no futuro, que esperamos seja longo.

REFERÊNCIAS:

1. S. Coleman, R. Jackiw and H.D. Politzer. Phys.Rev. D10, 2491 (1974). L. Dolan and R. Jackiw Phys.Rev. D9, 3320 (1974). H.J. Schnitzer. Phys.Rev. D10, 1800 (1974).
2. R. Jackiw. Phys.Rev. D9, 1686 (1974). J. Iliopoulos, C. Itzykson and A. Martin. Rev.Mod.Phys. 47, 165 (1975).
3. R.G. Root. Phys.Rev. D10, 3322 (1974). L.F. Abbott, J.S. Kang and H.J. Schnitzer. Phys.Rev. D13, 2212 (1976). M. Kobayashi and T. Kugo. Progr.Theor. Phys. 54, 1537 (1975). F.R. Graziani. Ann.Phys. (N.Y.) 151, 265 (1983).
4. A.D. Linde. Nuc.Phys. B125, 369 (1977).
5. W. Heisenberg and H. Euler. Z.Phys. 98, 714 (1938). S. Coleman. Proc. of the 1973 Intern.Sum. School of Phys.: Ett. Majorana.
6. C.A.A. de Carvalho, G.C. Marques, A.J. da Silva and I. Ventura. Nuc.Phys. B265, 45 (1986). C.A.A. de Carvalho, D. Bazeia, O. Éboli, G.C. Marques, A. J. da Silva and I. Ventura. Phys.Rev. D31, 1411 (1985). D. Bazeia, O. Éboli, G.C. Marques and A. J. da Silva. IFUSP -preprint 1987 - to appear.

7. K. Babu Joseph, V.C. Kuriakose and M Sabir. Phys. Lett. B115, 120 (1982).
8. O. Éboli and G.C. Marques. Phys.Lett. B162, 189 (1985).
9. H.A. Weldon. Phys.Lett. B174, 427 (1986).
10. K. Funakubo and M. Sakamoto. Phys. Lett. B186, 205 (1987).
11. W.A. Bardeen and Moshe Moshe. Phys.Rev. D34, 1229 (1986) and Phys.Rev. D28, 1372 (1983).
12. K. Symanzik. Lett.Nuo.Cim. 6, 77 (1973).
13. M.B. Kislinguer and P.D. Morley. Phys.Rev. D13, 2771 (1976).
14. J. Frohlich. Nuc.Phys. B200, 281 (1982).
15. P.M. Stevenson, B. Allés and R. Tarrach. Phys.Rev. D35, 2407 (1987).
16. G. Baym. Phys.Rev. 117, 886 (1960).
17. R. Brandt. Phys.Rev. D14, 3381 (1976) - seção IV.
18. S. Abbott, J.S. Kang, H.J. Schitzer in ref. 3.

19. G. Arfken. Math.Meth. for Physicists - Acad.Press.
Intern. Ed. 1966 pg. 401.

20. H.W. Braden. Phys.Rev. D25, 1028 (1980). A.J.
Niemi and G.W. Semenoff Nuc.Phys. B230, 181 (1984).

21. P. Ramond - Field Theory - A Modern Primer -
Benjamin/Cummings Publ.Co., Inc. 1981.

A P Ê N D I C E

Notação

$$\oint(dk) = T \sum_a f(dk)$$

$$\int(dk) = \int \frac{dk_0}{2\pi} f(dk)$$

$$f(dk) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$\oint(dx) = \int_0^\beta dx_0 f(dx)$$

$$f(dx) = \int d^3x$$

$$\underline{k} = (k_0, \underline{k})$$

$$\omega^2 = (\underline{k}^2 + \chi)$$

$$\underline{k} = \left(\frac{2\pi a}{\beta}, \underline{k} \right)$$

$$\underline{I} = \oint \theta(\underline{k}) = \int \theta(\underline{k}) + \int g(\underline{k}, \beta) = \underline{I}_0 + \underline{I}_\beta$$

Cálculo de $\mathcal{I}(X) = \oint \ln(\kappa^2 + X)$

$$\mathcal{I}(X) = T \sum_a f \ln\left(\left(\frac{2\pi a}{\beta}\right)^2 + \omega^2\right) \quad A.1$$

$$\prod_{a=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right) = \frac{\text{sh } \pi z}{\pi z} \quad A.2$$

$$\sum_{a=-\infty}^{\infty} \ln(\alpha^2 a^2 + b^2) = 2 \sum_{a=1}^{\infty} \ln \alpha^2 a^2 + \ln b^2 + 2 \ln\left(\frac{\text{sh } \pi b}{\pi b}\right) \quad A.3$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X) &= 2T f \ln \text{sh}\left(\frac{\beta \omega}{2}\right) - 2T f \ln \frac{\beta}{2} \\ &+ 2T f \sum_{a=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2\pi a}{\beta}\right)^2 \quad A.4 \end{aligned}$$

$$= f\omega + 2T f \ln(1 - e^{-\beta\omega}) + C' \quad A.5$$

onde $C'(\tau)$ é uma constante infinita dependente de τ mas não de X . Integrando na componente κ_0 podemos verificar que:

$$\oint \ln(\kappa^2 + X) = f\omega + C'' \quad A.6$$

onde C'' é uma constante infinita independente de X . Logo:

$$\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}_c(X) + \mathcal{I}_\tau(X) + C(\tau)$$

onde $\mathcal{I}_c(X)$ é a própria integral $\mathcal{I}(X)$ calculada à $\tau = 0$ e $\mathcal{I}_\tau(X)$ é:

$$I_7(x) = 2T \int \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \quad A.8$$

$I_0(x)$ pode ser calculada facilmente, por exemplo com um "corte" U.V. no 3 momento:

$$I_0(x) = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \Lambda^4 \ln(\Lambda^2 + x) - \frac{\Lambda^4}{2} + \Lambda^2 x + x^2 \ln(\Lambda^2 + x) + x^2 \ln x \right\} \quad A.9$$

Cálculo de $I_7(x)$

$$I_7(x) = 2T \frac{4\pi}{8\pi^3} \int k^2 dk \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \quad A.10$$

$$x^2 = \beta^2 \omega^2 = \beta^2 k^2 + \bar{x} \quad A.11$$

$$\bar{x} = x \beta^2 \quad A.12$$

$$\begin{aligned} I_7(x) &= \frac{T^4}{\pi^2} \int_{\sqrt{\bar{x}}}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - \bar{x}} \ln(1 - e^{-x}) \\ &= - \frac{T^4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\sqrt{\bar{x}}}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - \bar{x}} e^{-nx} \quad A.13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mu}^{\infty} (x^2 - \mu^2)^{\nu-1} e^{-\mu x} dx \quad [19] \quad (\nu > 0) \\ &= \Gamma(\nu) 2^{\nu-1/2} \mu^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(\mu\mu) / (\mu\mu)^{\nu-1/2} \sqrt{\pi} \quad A.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_u^\infty (x^2 - u^2)^{\nu-1} x e^{-\mu x} dx &= \\
 &= - \frac{d}{d\mu} \int_u^\infty (x^2 - u^2)^{\nu-1/2} e^{-\mu x} dx \\
 &= - \frac{\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} 2^{\nu-1/2} u^{2\nu} \frac{d}{d(u\mu)} \left\{ (u\mu)^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(u\mu) \right\} \\
 &= 2^{\nu-1/2} \Gamma(\nu) u^{2\nu} (u\mu)^{\nu-1/2} K_{\nu+1/2}(u\mu) / \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

A.75

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_7(x) &= - \frac{T^{\nu}}{\pi^2} \bar{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\sqrt{\bar{x}})}{n^2} \\
 &= - \frac{T^{\nu}}{\pi^2} \bar{x} B_2(2, \sqrt{\bar{x}}) \quad \text{A.76}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_7(x) = - \frac{\pi^2}{45} T^{\nu} E(\bar{x}) \quad \text{A.77}$$

$$\begin{aligned}
 E(\bar{x}) &= - \frac{45}{\pi^4} \int_{\sqrt{\bar{x}}}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - \bar{x}} \ln(1 - e^{-x}) \\
 &= \frac{45}{\pi^4} \bar{x} B(2, \sqrt{\bar{x}}) \quad \text{A.78}
 \end{aligned}$$

$E(x)$ é uma função monotonicamente decrescente entre $x=0$, $E(0)=1$ e $x=\infty$, $E(\infty)=0$. Expansões assintóticas de E são:



$$\begin{aligned}
 E(x) &= 1 - \frac{75}{4\pi^2} x + \frac{75}{2\pi^3} x^{3/2} + \\
 &+ \frac{45}{76\pi^4} x^2 \ln \left(\frac{e^{5-3/4}}{4\pi} \sqrt{x} \right) + \\
 &+ \frac{45}{8\pi^4} x^2 \sum_{n=7}^{\infty} C(n) x^n + \dots \quad (x \ll 1)
 \end{aligned}$$

A.19

$$E(x) = \frac{75}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\sqrt{x}} x^{3/2} + \dots \quad (x \gg 1)$$

A.20.

Cálculo de $\bar{I}^{(1)}(x) = \oint 1/(k^2 + x)$

$$\bar{I}^{(1)}(x) = \oint 1/(k^2 + x) = \frac{d}{dx} \bar{I}(x)$$

A.22

Derivando-se A.9 e A.18 obtemos:

$$\bar{I}_0^{(1)}(x) = \frac{1}{76\pi^2} \left(\Lambda^2 + x \ln \frac{x}{x + \Lambda^2} \right)$$

A.23

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_T^{(1)}(x) &= \oint 1/\omega (e^{\beta\omega} - 1) \\
 &= -\frac{\pi^2}{45} T^2 \frac{d}{dx} F(\bar{x}) \\
 &= \frac{T^2}{72} F(\bar{x})
 \end{aligned}$$

A.24

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{6}{\pi^2} \int_0^{\infty} dy \, y^2 / \sqrt{y^2+x} \cdot \ln\left(e^{\sqrt{y^2+x}} - 1\right) \\
 &= -\frac{4\pi^2}{15} \frac{d}{dx} E(x) \quad A.25
 \end{aligned}$$

$F(x)$ é monotonicamente decrescente entre $x=0$ e $x=\infty$.
Assintoticamente:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 - \frac{3}{\pi} x^{1/2} - \frac{3}{2\pi^2} x \ln\left(\frac{e}{4\pi} \sqrt{x}\right) \\
 &\quad (x \ll 1) \quad A.26
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\sqrt{x}} x^{1/4} \\
 &\quad (x \gg 1) \quad A.27
 \end{aligned}$$

Cálculo de $I^{(2)}(x) = \int 1/(x^2+x)^2$

$$I^{(2)}(x) = -\frac{d}{dx} I^{(1)}(x) \quad A.28$$

$$\begin{aligned}
 I_0^{(2)}(x) &= -\frac{1}{16\pi^2} \left\{ \ln \frac{x}{x+1^2} + \frac{1^2}{x+1^2} \right\} \\
 &\quad A.29
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_T^{(2)}(x) &= - \int \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right) \\
&= \int \left\{ \frac{1}{2\omega^3} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} + \frac{\beta}{2\omega^2} \frac{e^{\beta\omega}}{(e^{\beta\omega} - 1)^2} \right\} \\
&= - \int \frac{d}{dk^2} \left(\frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dy \frac{1}{\sqrt{y^2 + \bar{x}}} \frac{1}{e^{\sqrt{y^2 + \bar{x}}} - 1} \\
&= \frac{1}{8\pi} g(\bar{x}) \quad \text{A. 30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= - \frac{2\pi}{3} \frac{d}{dx} F(x) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{1}{\sqrt{y^2 + x}} \left(e^{\sqrt{y^2 + x}} - 1 \right) \\
&\quad \text{A. 31}
\end{aligned}$$

Assintoticamente:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\pi} \sqrt{x} \right) \quad (x \ll 1) \quad \text{A. 32}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi^3}{78}} e^{-\sqrt{x}} x^{-1/4} \quad (x \gg 1) \quad \text{A. 33}$$

$$I^{(2)}(x, p^2) = \oint \frac{1}{(k^2 + x)((k-p)^2 + x)}$$

Vamos usar a representação (Kislinguer-Morley Phys. Rev. D13, 2771).

$$\frac{1}{\beta} \sum_a f(\omega_a = \frac{\omega \pi a}{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2\pi} f(z) + \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi} \frac{f(z)}{e^{\lambda \beta z} - 1} + \oint_{C_2} \frac{dz}{2\pi} \frac{f(z)}{e^{-\lambda \beta z} - 1}$$

onde:  A.35

Em $I^{(2)}(x, p^2)$ nós temos:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)((z-p)^2 + b^2)} \quad A.36$$

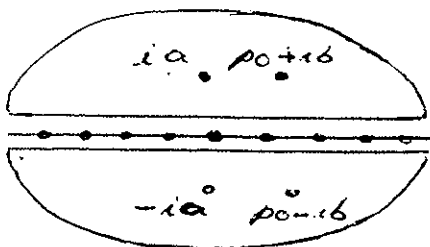
$$a^2 = k^2 + x \quad b^2 = (p-k)^2 + x$$

A parte independente de temperatura (primeira integral na representação A.35) dá [21]:

$$I_0^{(2)}(x, p^2) = \frac{1}{26\pi^2} \left\{ \ln \frac{x + \Lambda^2}{x} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + x} + 2 - 2 \left(\frac{p^2 + 4x}{p^2} \right)^{1/2} \ln \frac{(p^2 + 4x)^{1/2} + (p^2)^{1/2}}{(4x)^{1/2}} \right\}$$

Para $p^2 \rightarrow 0$ voltamos à expressão A.29 para $I_0^{(2)}(x)$. A.37

Para a parte dependente de T temos:



Polos de $(e^{\pm \lambda \beta z} - 1)$: $z_a = \frac{2\pi a}{\beta}$ A.38

Polos de $f(z)$ $\left\{ \begin{array}{l} z = \pm ia \\ z = \pm ib + p_0 \end{array} \right.$

A.39

$$\begin{aligned}
 I_T^{(2)}(X, \rho^2) = & \int \left\{ \frac{1}{2a} \frac{1}{e^{\beta a} - 1} \frac{1}{b^2 - (a + i\rho)^2} \right. \\
 & + \frac{1}{2b} \frac{1}{a^2 - (b + i\rho)^2} \frac{1}{e^{\beta(b + i\rho)} - 1} \\
 & \left. + (\rho_0 \rightarrow -\rho_0) \right\} \quad A.40
 \end{aligned}$$

Como teste podemos verificar que fazendo: $i\rho_0 = \varepsilon$
 e $b = a + \Delta$ e tomando $(\varepsilon, \Delta) \rightarrow 0$ (isto é: $(\rho_0, \rho) \rightarrow 0$)
 nós obtemos a expressão da 2ª linha de A.30.

Podemos definir variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned}
 x &= \beta \kappa & \bar{a} &= \beta a = \sqrt{x^2 + \bar{x}} \\
 \bar{\rho}_0 &= \beta \rho_0 & \bar{b} &= \beta b = \sqrt{(x - \bar{\rho})^2 + \bar{x}} \\
 \bar{\rho} &= \beta \rho & &
 \end{aligned} \quad A.41$$

e reescrever (A.40) como:

$$\begin{aligned}
 I_T^{(2)}(X, \rho^2) = & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\kappa \kappa^2 d\Omega \left\{ \frac{1}{2\bar{a}} \cdot \right. \\
 & \cdot \frac{1}{e^{\bar{a}} - 1} \frac{1}{\bar{b}^2 - (a + i\bar{\rho}_0)^2} + \frac{1}{2\bar{b}} \cdot \\
 & \left. \cdot \frac{1}{e^{\bar{b} + i\bar{\rho}_0} - 1} \frac{1}{\bar{c}^2 - (\bar{b} + i\bar{\rho}_0)^2} + (\rho_0 \rightarrow -\rho_0) \right\} \\
 & A.42
 \end{aligned}$$

Muito complicada! Mas podemos calcular o termo dominante para $T \rightarrow \infty$. Voltando à expressão original, A.34:

$$\begin{aligned}
 I^{(2)} &= T \sum_a \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad A.43 \\
 & \frac{1}{\left[\left(\frac{2\pi a}{\beta} \right)^2 + \kappa^2 + X \right]} \cdot \left[\left(\frac{2\pi a}{\beta} + \rho \right)^2 + (\kappa + \rho)^2 + X \right]
 \end{aligned}$$

O termo dominante para $T \rightarrow \infty$ vem do modo zero da somatória:

$$\begin{aligned}
 I_T^{(2)} &\sim T \int \frac{\alpha^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2+X)} \frac{1}{(p_0^2+X+(k+p)^2)} \\
 &\sim T \frac{1}{4\pi^2} \int k^2 dk \int d\cos\theta \frac{1}{(k^2+X)} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{(p_0^2+X+k^2+p^2+2pk\cos\theta)} \\
 &\sim \frac{T}{4\pi^2} \int \frac{dk k^2}{k^2+X} \frac{1}{2kp} \ln \frac{p_0^2+X+(k+p)^2}{p_0^2+X+(k-p)^2} \\
 &\hspace{15em} \text{A.44}
 \end{aligned}$$

Para $p_0 \neq 0$ e $p=0$ usando:

$$\frac{1}{b} \ln \frac{a+b}{a-b} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} \frac{2b}{a} = \frac{2}{a} \quad \text{A.45}$$

temos:

$$\begin{aligned}
 I^{(2)}(X, p_0, 0) &\sim \frac{T}{4\pi^2} \int \frac{2k^2 dk}{(k^2+X)(k^2+X+p_0^2)} \\
 &\sim \frac{T}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \left\{ \frac{1}{k^2+X+p_0^2} - \frac{X}{(k^2+X)(k^2+X+p_0^2)} \right\} \\
 &\sim \frac{T}{2\pi^2} \left\{ \frac{\pi}{2\sqrt{X+p_0^2}} - \frac{X\pi}{2\sqrt{X}\sqrt{X+p_0^2}(\sqrt{X+p_0^2}+\sqrt{X})} \right\} \\
 &= \frac{1}{8\pi} G(X, p_0, 0) \quad \text{(A.46)}
 \end{aligned}$$

$$G(X, p_0, 0) = 2 / (\sqrt{X} + \sqrt{X+p_0^2}) \quad \text{(A.47)}$$

(concorda com $G(\bar{X})$, equação A.32, para $p_0=0$).