

TEORIAS NÃO ABELIANAS DE GAUGE
NUMA CLASSE GERAL DE GAUGES AXIAIS

SBI-IFUSP



305M810T0337

JOSIF FRENKEL

Tese apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de
São Paulo, para obtenção do
Título de LIVRE-DOCENTE.



S ã o P A U L O

1 9 7 7

À Marie-Luise

AGRADECIMENTOS

É um grande prazer agradecer ao Professor J.C.Taylor pela importante colaboração durante o estágio no Departamento de Física Teórica da Universidade de Oxford.

Além disso, sou grato à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro recebido durante este período.

Também desejo expressar meus agradecimentos ao Professor H.Fleming por sua ajuda e por ter lido o manuscrito.

Finalmente, quero agradecer à Srta. Alba Ruiz Garcia pelo trabalho de datilografia.

SUMÁRIO

Estudamos as teorias não abelianas em uma classe geral de gauges axiais. Analisamos a renormalização destas teorias nos gauges axiais onde as partículas de Faddeev-Popov são livres. Em seguida, estudamos o comportamento assintótico a altas energias e a causa da liberdade assintótica. Finalmente, analisamos a estrutura das divergências infravermelhas principais na Cromodinâmica Quântica, teoria não abeliana de gauge que tem a potencialidade de descrever as interações fortes das partículas elementares.

1. INTRODUÇÃO

Um dos desenvolvimentos mais importantes na teoria das interações fracas nos últimos anos, tem sido a construção de modelos renormalizáveis baseados na noção de quebra espontânea das simetrias de gauge^(1,2). A idéia básica apareceu pela primeira vez nos trabalhos de Weinberg⁽³⁾ e Salam⁽⁴⁾. Nestes trabalhos, as interações fracas e eletromagnéticas são unificadas numa só teoria do tipo Yang-Mills⁽⁵⁾, onde os bosons vetoriais intermediários W^\pm e os fótons determinam as propriedades destas interações. As diferenças observadas entre as interações fracas e eletromagnéticas resultam nestes modelos do fato dos bosons W^\pm serem massivos em consequência da quebra espontânea da simetria de gauge.

Em 1971, G't Hooft⁽⁶⁾ apresentou um trabalho fundamental sobre a renormalizabilidade das teorias de Yang-Mills massivas. Desde então, o interesse no assunto teve um grande impulso e em consequência as teorias de gauge tiveram um grande desenvolvimento. (Veja, por exemplo, referência (7)).

As teorias de gauge vieram a abranger também o campo das interações fortes através de uma teoria denominada por Gell-Mann de Cromodinâmica Quântica (QCD)⁽⁸⁾. Nesta teoria os campos fundamentais são representados pelos quarks e pelos gluons vetoriais. Pode-se mostrar⁽⁹⁾ que QCD é a única teoria que pode explicar o fenômeno da liberdade assintótica observado na região altamente inelástica do espalhamento de leptons por hadrons, onde a constante efetiva do acoplamento dos quarks tende a zero. Além disto, as divergências infravermelhas destas teorias têm a potencialidade de levar ao confinamento dos quarks e dos gluons⁽¹⁰⁾, possibilidade que explica-

ria o fato destas partículas não serem observadas diretamente como partículas livres.

O problema da quantização das teorias não-abelianas de gauge é bastante complexo em virtude do aparecimento das chamadas partículas de Faddeev-Popov⁽¹¹⁾. Estas são partículas fictícias que resultam da necessidade de realizar a quantização num determinado gauge e aparecem necessariamente se o gauge é covariante por transformações de Lorentz⁽¹²⁾. A renormalização das teorias de gauge na presença das partículas de Faddeev-Popov foi discutida detalhadamente por vários autores⁽¹³⁻¹⁷⁾. Paralelamente, foi também estudado o chamado gauge axial⁽¹⁸⁻²⁰⁾. Este gauge que é caracterizado pela condição $W_3 = 0$, não é covariante por transformações de Lorentz, mas tem a importante virtude de não levar ao aparecimento das partículas de Faddeev-Popov. Este fato produz notáveis simplificações no programa de provar a renormalizabilidade das teorias de gauge não-abelianas.

Neste trabalho, nos propusemos a generalizar a classe de condições de gauge na qual as partículas de Faddeev-Popov são livres e estudar, em alguns gauges convenientes desta classe, várias aplicações importantes das teorias não abelianas de gauge.

No capítulo 2, vamos estudar a renormalização das teorias não abelianas de gauge numa classe geral de condições de gauge nas quais as partículas de Faddeev-Popov são livres⁽²¹⁾. Usando o método da variação dos vértices próprios desenvolvido na referência (16), mostraremos que os elementos da matriz S são quantidades independentes do parâmetro de gauge. Na secção (2a) mostramos que em teorias abelianas caracterizadas pela condição de gauge $\bigwedge_{\mu} W_{\mu}^a = h^a$, onde \bigwedge_{μ} repre-

senta um vetor arbitrário e \tilde{h}^a denota um conjunto de funções arbitrárias, as partículas de Faddeev-Popov são livres (μ denota um índice de Lorentz e a um índice da simetria interna da teoria). Usando este fato, deduzimos um conjunto simples de identidades que refletem a simetria de gauge da teoria. Na secção (2b) estudamos as identidades de Lee⁽²²⁾ que são apropriadas para a discussão da estrutura dos controtermos.

Na secção (c) deste capítulo, deduzimos um conjunto de identidades para a variação de gauge dos vértices próprios, que são bastante simples devido a ausência das partículas de Faddeev-Popov. Usando estas identidades, estudamos na secção (d) a função de dois pontos e discutimos o significado dos estados físicos. Baseados nestes resultados, mostramos na secção (e) a independência de gauge da matriz S .

Na secção² do capítulo 3, consideramos a quantização da teoria de Yang-Mills em uma classe de gauges caracterizada pela condição $\lambda_\mu W_\mu = 0$ ⁽²³⁾. Usando estes resultados, discutimos na secção (b), a razão pela qual Z_3 , a constante de renormalização da função de onda é positiva em teorias não abelianas⁽²⁴⁾. Este fato leva, como mostramos na secção (c) à liberdade assintótica. Nesta secção, usando as equações do grupo de renormalização, deduzimos uma relação geral entre Z_3 e a constante efetiva do acoplamento da teoria.

No último capítulo, estudamos algumas propriedades das divergências infravermelhas da cromodinâmica quântica. Na secção (4a) estudamos processos nos quais as partículas externas têm massa zero⁽²⁵⁾. Mostramos que as divergências infravermelhas principais somam-se neste caso numa exponencial decrescente. Este comportamento é consequência do fato discutido no Apêndice, de que as divergências infravermelhas principais apa-

recem neste caso somente nas correções de auto-energia das linhas externas. Na secção (4b) apresentamos uma discussão mais detalhada destas divergências que determinam a exponencial que contém as divergências infravermelhas principais⁽²⁶⁾. Finalmente, na última secção, examinamos processos nos quais as partículas externas são massivas⁽²⁷⁾. Também neste caso, as divergências infravermelhas principais somam-se para uma exponencial, que é caracterizada pelo aparecimento da constante de acoplamento efetivo do grupo de renormalização.

2. RENORMALIZAÇÃO NUMA CLASSE GERAL DE GAUGES AXIAIS

Neste capítulo vamos considerar uma teoria de gauge que consiste de um conjunto de campos de Yang-Mills interagindo com fermions e também com campos escalares que permitem uma quebra espontânea da simetria.

Para introduzir a discussão vamos primeiramente considerar uma teoria de Yang-Mills contendo os campos vetoriais

W_μ^a , descrita pela Lagrangeana:

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (2.1a)$$

onde a função $F_{\mu\nu}^a$ é dada por:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.1b)$$

Nesta equação g é a constante de acoplamento e f^{abc} denota as constantes reais e antisimétricas que determinam a estrutura do grupo de simetria da Lagrangeana. (Na nossa métrica o quadrivector V_μ é dado por $V_\mu = (\vec{V}, iV_0)$ de forma que $V^2 = V_\mu V_\mu = \vec{V}^2 - V_0^2$. Nesta notação, índices repetidos implicam no somatório sobre os mesmos). Como se sabe, (2.1a) é invariante

por transformações infinitesimais de gauge dados por:

$$W_\mu^a \rightarrow W_\mu^a + (\partial_\mu \delta^{ab} + g f^{abc} W_\mu^c) \omega^b = \\ \equiv W_\mu^a + D_\mu^{ab} \omega^b$$

(2.2)

Devido a este fato, para definirmos o propagador dos campos ve toriais introduziremos a seguinte Lagrangeana que determina o gauge:

$$L_g = -\frac{1}{2} (\Lambda_\mu^a W_\mu^a)^2$$

(2.3)

onde Λ_μ é um quadrivetor com dimensão 1 e tal que $\Lambda^2 \neq 0$. Então obteremos para o propagador livre a expressão:

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \frac{1}{k^2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu \Lambda_\nu + k_\nu \Lambda_\mu}{k \cdot \Lambda} + \frac{k_\mu k_\nu \Lambda^2}{(k \cdot \Lambda)^2} \left(1 + \frac{k^2}{\Lambda^2} \right) \right]$$

(2.4)

Podemos notar que, ao contrário do último termo que é uma função de grau -2 no parâmetro de gauge, todos os outros termos são funções de grau zero neste parâmetro e têm um bom comportamento assintótico a altas energias. Se escrevermos $\Lambda_\mu \equiv \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{\beta}}$, fazendo $\beta \rightarrow 0$, notamos que o último termo desaparece, ao passo que todos os outros mantêm a mesma forma. Neste caso, já tinha sido observado anteriormente que as partículas de Faddeev-Popov são livres. Por outro lado, devido à invariança de gauge da teoria Yang-Mills, seria de se esperar que os termos de grau -2 no parâmetro de gauge, desacoplassem no cálculo de quantidades observáveis.

Mostraremos que, de fato, os elementos da matriz S são quantidades independentes de Λ . A prova disto será simplificada pelo fato a ser mostrado na próxima secção, de que as

partículas de Faddeev-Popov desacoplam para todos os valores do parâmetro Λ .

2.a Identidades de Green com partículas de Faddeev-Popov livres.

Consideraremos agora uma teoria consistindo de campos de Yang-Mills, descrita pela Lagrangeana (2.1) interagindo com fermions e partículas escalares.

Usaremos uma notação compacta⁽¹⁴⁾ onde todos os campos são indicados coletivamente por A_i , i representando todas as características dos campos. Índices repetidos implicam, a não ser que indicados diferentemente, somatório e integração. A Lagrangeana que descreve a teoria é invariante por transformações infinitesimais do tipo:

$$A_i \rightarrow A_i + (\partial_i^a + g t_{ij}^a A_j) \omega^a \quad (2.5)$$

onde ∂_i^a está presente somente para os campos vetoriais (veja equação (2.2)) e t^a denota o gerador do grupo na representação dos campos presentes na Lagrangeana. Em termos de uma base de campos reais A_i , as matrizes t^a serão também reais e antissimétricas. Poderemos escrever a Lagrangeana invariante na seguinte forma compacta:

$$L_{inv}^0 = \sum_{n=2}^4 \frac{1}{n!} T_{i_1 \dots i_n}^0 A_{i_1} \dots A_{i_n} \quad (2.6)$$

Nesta notação, a Lagrangeana que determina o gauge (2.3) tem a forma:

$$L_g = -\frac{1}{2} (\Lambda_i^a A_i)^2 \quad (2.7)$$

onde Λ_i^a é igual a $A_\mu \delta_{ab}$ para os campos vetoriais e é zero nos

outros casos.

Vamos incluir a quebra espontânea de simetrias supondo que o potencial dos campos escalares tem um mínimo no ponto $\epsilon_i^0 \neq 0$. Em ordens mais elevadas na teoria de perturbação, os valores esperados no vácuo dos campos escalares serão denotados por ϵ_i . Em função dos campos transladados

$$A_i' = A_i - \epsilon_i \quad (2.8)$$

as transformações de gauge (2.5) podem ser escritas como:

$$A_i' \rightarrow A_i' + (\Delta_i^a + g t_{ij}^a A_j') \omega^a \quad (2.9a)$$

onde

$$\Delta_i^a = \partial_i^a + g t_{ij}^a \epsilon_j \quad (2.9b)$$

Note que a Lagrangeana (2.7) não é modificada pela transformação (2.8), visto que somente os campos escalares podem ter valores esperados no vácuo diferentes de zero. (No que se segue omitiremos por simplicidade os índices " ' " nos campos A_i').

Com a finalidade de deduzir as identidades de Ward, consideraremos a funcional geratriz das funções de Green na presença de fontes externas J_i ⁽⁷⁾

$$W(J_i) = \int [dA] \det(\Lambda_i^{\tilde{a}} D_i^{\tilde{a}}) \exp i \left[L_{inv}^0 - \frac{1}{2} (\Lambda_i^{\tilde{a}} A_i^{\tilde{a}})^2 + J_i A_i \right] \quad (2.10a)$$

Estas são obtidas tomando-se as derivadas funcionais de com respeito às fontes externas J_i no ponto $J_i = 0$. Usualmente, o determinante é escrito em termos de campos de Faddeev-Popov \bar{c} e c na forma :

$$\det(\Lambda_i^{\tilde{a}} D_i^{\tilde{a}}) = \int [d\bar{c}][dc] \exp i (\bar{c} \Lambda_i^{\tilde{a}} D_i^{\tilde{a}} c) \quad (2.10b)$$

Vamos mostrar agora que, no nosso caso, estes campos desaco-
plam dos outros setores da teoria. Para ver isto escreveremos:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_i^a D_i^a) &= \det(\Lambda_\mu D_\mu) = \\ &= \det(\Lambda \cdot \partial) \det(1 - g G f^a W_\mu^a \Lambda_\mu) \end{aligned} \quad (2.11a)$$

onde a função G satisfaz a relação:

$$(\partial \cdot \Lambda) G(x-y) = \delta^4(x-y) \quad (2.11b)$$

Iremos agora expandir o segundo determinante em (2.11a)

$$\begin{aligned} \det(1 - g G f^a W_\mu^a \Lambda_\mu) &= \exp \text{Tr} \ln(1 - g G f^a W_\mu^a \Lambda_\mu) = \\ &= \exp \left\{ -\text{Tr} \sum_l \frac{g^l}{l} \Lambda_{\mu_1} G(x_1 - x_2) f^a W_{\mu_2}^a(x_2) \dots G(x_l - x_1) f^b W_{\mu_l}^b(x_1) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Um termo típico no expoente é representado graficamente pelo diagrama mostrado na Figura 1.

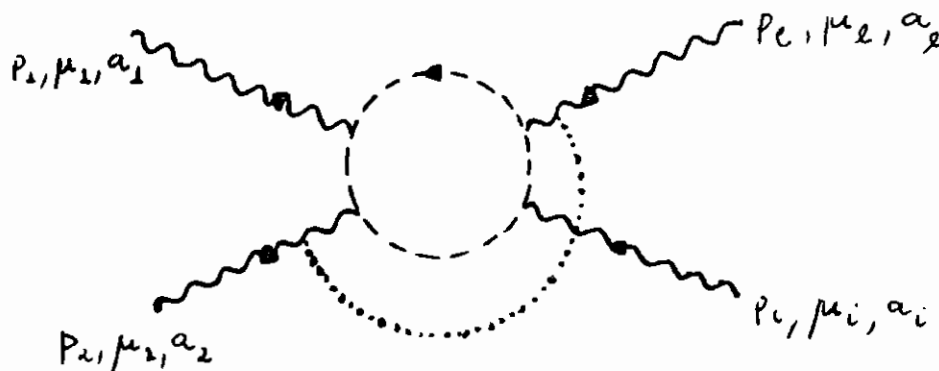


Fig. 1 - Diagrama de Feynman representando um loop geral con-
tendo partículas de Faddeev-Popov.

Nesta figura todos os momentos são orientados para
dentro do loop e temos: $\sum p_i = 0$. A linha descontínua re-
presenta o propagador das partículas de Faddeev-Popov, que no

espaço dos momentos é dado por:

$$g^{ab} = \delta^{ab} g = \delta^{ab} \frac{1}{\Lambda \cdot Q} \quad (2.13)$$

Com a finalidade de regularizar a teoria usaremos a regularização dimensional^(28,29). Neste esquema a integração dos loops que aparecem nos diagramas de Feynman é realizada em um espaço de n -dimensões, n sendo um número complexo arbitrário. Para n dentro de um dado domínio, a contribuição de qualquer gráfico de Feynman será finita. As divergências usuais se manifestam como polos na variável $\epsilon = n - 4$. Usando a parametrização de Feynman o diagrama acima dará a contribuição:

$$I_{\mu_1 \dots \mu_l}^{a_1 \dots a_l} = g^l \Lambda_{\mu_1} \dots \Lambda_{\mu_l} \text{Tr} \int^{a_1} \dots \int^{a_l} I \quad (2.14)$$

onde

$$I = \int \frac{d^n Q}{(\Lambda \cdot Q)^l} \quad (2.15)$$

Por outro lado, não é difícil mostrar que esta integral é igual a:

$$I = C(n, l) \frac{1}{\Lambda^l} \int \frac{d^n Q}{Q^l} \quad (2.16)$$

onde C é uma constante que depende em geral de n e l .

Na regularização dimensional, a integral acima é zero.⁽³⁰⁾ Segue-se, portanto, das equações (2.10-12), que as partículas de Faddeev-Popov desacoplam da teoria.

Podemos entender este fato também de uma forma diferente quando consideramos a dedução da equação (2.10a). Em geral, parte-se da funcional geratriz na ausência de fontes externas onde a condição de gauge é fixada pela função δ como se

segue:

$$W(0) = N \int [dA] \det(\Lambda_i^a D_i^a) \delta(\Lambda_i^a A_i - h^a) \exp i L_{inv}^0 \quad (2.17)$$

onde N é uma constante conveniente. Como se sabe, $W(0)$ é independente da função h^a . Devido a este fato, (2.17) é usualmente multiplicada por $G(h) = \exp -\frac{i}{2} h^a h^a$ e então é realizada a integração sobre h . Isto não modifica $W(0)$, exceto possivelmente por uma constante que é absorvida no fator de normalização N . Finalmente, depois de introduzidas as fontes externas, obteremos a equação (2.10a).

Por outro lado, sendo que $W(0)$ é independente de h , poderíamos da mesma forma ter multiplicado a equação (2.17) por $\tilde{G}(h) = G(h) \det^{-1}(\Lambda \cdot \partial - g f^a h^a)$. Então, em virtude da presença da função δ , vemos que os determinantes se cancelam e portanto, os campos de Faddeev-Popov desaparecem.

Em conclusão, a funcional geratriz pode ser escrita no nosso caso, como:

$$W(J_i) = \det(\Lambda \cdot \partial) \int [dA] \exp i \left\{ L_{inv}^0 - \frac{1}{2} (\Lambda_i^a A_i)^2 + J_i A_i \right\} \quad (2.18)$$

onde $\det(\Lambda \cdot \partial)$ é um fator conveniente de normalização.

Para deduzirmos as identidades satisfeitas pelas funções de Green, vamos efetuar uma transformação de gauge dada pela equação (2.5). Vemos que as únicas modificações vão aparecer em L_g e nos termos envolvendo as fontes J_i . Sendo que W é invariante por uma mudança de variáveis de integração, obteremos:

$$\Lambda_j^a \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_j} \right) W = g^{ab} D_j^b \left(\frac{\delta}{\delta J} \right) J_j W \quad (2.19a)$$

onde

$$D_J^b \left(\frac{\delta}{\delta J} \right) = \Delta_J^b + g t_{Jk}^b \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_k} \right) \quad (2.19b)$$

Para obtermos esta equação, usamos a antisimetria das matrizes t^a . Sucessivas derivadas funcionais levarão ao seguinte conjunto de identidades de Ward:

$$\Lambda_J^a W_{J_{i_1} \dots i_n} = g^{ab} \left\{ D_J^b J_J W_{i_1 \dots i_n} + \sum_P D_{i_1}^b W_{i_2 \dots i_n} \right\} \quad (2.20a)$$

onde

$$W_{i_1 \dots i_n} = \left(\frac{1}{i \delta J_{i_1}} \right) \dots \left(\frac{1}{i \delta J_{i_n}} \right) W(J) \quad (2.20b)$$

e \sum_P é tomado sobre todas as permutações dos índices i_1, \dots, i_n .

No caso $n=1$ teremos, em particular:

$$\Lambda_J^a W_{J_{i_1}} = g^{ab} (D_J^b J_J W_{i_1} + D_{i_1}^b W) \quad (2.21)$$

que será muito útil no estudo da dependência de gauge das funções de Green.

É interessante notar que, no caso especial mencionado anteriormente quando $\Lambda_\mu = \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{\beta}}$ com $\beta \rightarrow 0$, as equações (2-20,21) consideradas no ponto $J_c = 0$ mostram que as funções de Green envolvendo bosons vetoriais são transversais ao quadrivetor λ_μ .

2.b. Identidades de Lee e os contratermos

Com a finalidade de discutir a estrutura dos contratermos é útil deduzir as chamadas identidades de Lee⁽²²⁾ para os vértices próprios. Em termos da funcional geratriz das fun-

ções de Green conexas, $Z = \frac{1}{i} \ln W$, a funcional geratriz dos vértices próprios é dada por uma transformação de Legendre de Z :

$$\Gamma(A_i^c) = Z(J_i) - J_i A_i^c \quad (2.22)$$

onde os campos clássicos A_i^c são definidos por

$$A_i^c = \frac{\delta Z}{\delta J_i} \quad (2.23a)$$

de forma que temos:

$$J_i = - \frac{\delta \Gamma}{\delta A_i^c} \equiv - T_i \quad (2.23b)$$

Usando estas relações, juntamente com as propriedades de antisimetria das matrizes t^a , obteremos da equação (2.19) as identidades:

$$D_i^a(A^c) \frac{\delta}{\delta A_i^c} \left[\Gamma + \frac{1}{2} (\Lambda_j^a A_j^c)^2 \right] \equiv D_i^a(A_c) T_i' = 0 \quad (2.24)$$

que são muito simples em virtude do fato de que as partículas de Faddeev-Popov são livres. Na ordem mais baixa T_i' é igual a L_{inv}^0 , de forma que a equação (2.24) reflete a invariância da teoria por transformação de gauge na forma dada por (2.9).

No estudo dos contratermos, será contudo mais conveniente expressar as nossas quantidades em termos dos campos $\tilde{A}_i^{(16)}$, que são relacionados com os campos iniciais pela relação:

$$\tilde{A}_i = A_i - E_i^0 \quad (2.25)$$

que coincidem com os campos A_i' somente na aproximação da árvore. Em termos destes campos, obteremos uma relação análoga a (2.24), isto é,

$$\hat{D}_i^a (\tilde{A}_i^c) \hat{T}'_i (\tilde{A}^c) = 0 \quad (2.26a)$$

onde

$$\hat{D}_i^a (\tilde{A}_i^c) = \partial_i^a + g t_{ij}^a \varepsilon_j^p + g t_{ij}^a \tilde{A}_j^c \equiv \hat{\Delta}_i^a + g t_{ij}^a \tilde{A}_j^c \quad (26b)$$

Aplicando sucessivas diferenciações com respeito a \tilde{A}^c no ponto $\tilde{A}_c = 0$ obteremos o seguinte conjunto de identidades:

$$H^a \equiv \hat{\Delta}_i^a \hat{T}'_i = 0 \quad (2.27a)$$

$$H_{i_1}^a \equiv \hat{\Delta}_i^a \hat{T}'_{i i_1} + g t_{i i_1}^a \hat{T}'_i = 0 \quad (2.27b)$$

$$H_{i_1 i_2}^a \equiv \hat{\Delta}_i^a \hat{T}'_{i i_1 i_2} + g t_{i i_1}^a \hat{T}'_{i i_2} + g t_{i i_2}^a \hat{T}'_{i i_1} = 0 \quad (2.27c)$$

e.t.c. Note, por exemplo, que para o caso de uma teoria de Yang-Mills pura, eq. (2.27b) implica que a função própria de dois pontos dos campos vetoriais é transversal com respeito ao momento externo.

Os vértices próprios da equação (2.27), dependem em geral do parâmetro de gauge Λ , que é uma quantidade arbitrária. Devido a este fato, as identidades acima devem ser satisfeitas independentemente para cada conjunto de termos de um determinado grau em Λ . Na regularização dimensional, estes vértices desenvolvem polos quando $\varepsilon = n-4=0$. Em 1 loop, teremos:

$$\hat{T}'_{i_1 \dots i_n} = \hat{T}'_{i_1 \dots i_n}^0 + \frac{1}{\varepsilon} \hat{T}'_{i_1 \dots i_n}^1 \quad (2.28)$$

onde $\hat{T}'_{i_1 \dots i_n}^0$ são precisamente os termos que aparecem na equação (2.6) em L_{imv}^0 . Usando contagem de potências, podemos ver que a parte de $\hat{T}'_{i_1 \dots i_n}$ que tem grau zero em Λ , não con

têm polos em $\epsilon = 0$ se $n > 4$. Por outro lado, em virtude do comportamento assintótico da parte do propagador (2.4) que tem grau -2 em Λ , as partes correspondentes de $\hat{T}_{i_1 \dots i_n}^1$ irão conter polos também quando $n > 4$. Contudo, devemos lembrar que todos estes termos divergentes estão relacionados em virtude das identidades (2.27).

Na regularização dimensional é possível e também muito conveniente adicionar um conjunto de contratermos que tornam os vértices finitos, contendo somente polos puros em $\epsilon = 0$. Neste caso teremos:

$$\begin{aligned}
 L_{ct} &= - \frac{1}{\epsilon} \sum_k \frac{1}{k!} \hat{T}_{i_1 \dots i_k}^1 \tilde{A}_{i_1} \dots \tilde{A}_{i_k} = \\
 &= - \frac{1}{\epsilon} \left[\sum_{n=1}^4 \frac{1}{n!} \hat{T}_{0, i_1 \dots i_n}^1 \tilde{A}_{i_1} \dots \tilde{A}_{i_n} + \sum_m \frac{1}{m!} \hat{T}_{\neq 0, i_1 \dots i_m}^1 \tilde{A}_{i_1} \dots \tilde{A}_{i_m} \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

onde separamos explicitamente a parte de grau zero em Λ , que denotamos por $\hat{T}_{0, i_1 \dots i_n}^1$. Em virtude da estrutura do propagador dos bosons vetoriais, $\hat{T}_{\neq 0, i_1 \dots i_n}^1$ deve ser uma função de grau negativo em Λ , (claramente deve ser também invariante pela reflexão $\Lambda \rightarrow -\Lambda$). Portanto, na equação (2-29), não poderemos ter contratermos com estrutura de L_g (2.7) de onde concluímos que a Lagrangeana que define o gauge não é renormalizada.

Mostraremos agora que $L_{inv} = L_{inv}^0 + L_{ct}$ é invariante por transformações do tipo (2.9) (onde deveremos usar $\hat{\Delta}$ porque os campos usados são aqueles dados na eq. (2.25)). Sendo que L_{inv}^0 é invariante por esta transformação, obteremos:

$$\frac{\delta L_{inv}}{\delta \omega^a} = \frac{\delta L_{ct}}{\delta \tilde{A}_i} (\hat{\Delta}_i^a + g t_{ij}^a \tilde{A}_j) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon} \left[H^{ap} + H_{i_1}^{ap} \tilde{A}_{i_1} + \frac{1}{2} H_{i_1 i_2}^{ap} \tilde{A}_{i_1} \tilde{A}_{i_2} + \dots \right]$$

(2.30)

Nesta equação H^{ap} denota os resíduos dos polos $\varepsilon = 0$, das funções H^a na identidade (2.27). Portanto, elas devem se anular, de onde se segue, via eq. (2.30) que L_{inv} é realmente invariante pelas transformações de gauge (2.9) em 1 loop. Aplicando o mesmo tipo de raciocínio indutivamente⁽¹⁶⁾, podemos facilmente estabelecer em todas as ordens a invariança da Lagrangeana

$$L_{inv} = L_{inv}^0 + L_{ct}$$

(2.31)

pelas mesmas transformações do tipo dado na equação (2.9). Claramente, apesar dos contratermos que contêm somente polos puros tornarem finitas as funções de Green, elas não podem fazer com que, em particular, o valor esperado no vácuo dos campos escalares transladados seja exatamente zero. Esta é precisamente a razão pela qual usamos os campos (2.25), cujo valor esperado no vácuo é zero somente na aproximação da árvore. Contudo, podemos agora reexpressar, na teoria renormalizada, todas as quantidades em função dos campos A_i' que são transladados pelo valor total esperado no vácuo \mathcal{E}_i em relação aos campos iniciais A_i . Os \mathcal{E}_i são determinados explicitamente, ordem por ordem na teoria de perturbação, de forma que o valor esperado no

vácuo dos campos A_i' é zero. Então, a Lagrangeana renormalizada (2.31), expressa em termos dos campos A_i' , será invariante pelo mesmo conjunto de transformações dado pela equação (2.9). (É claro que neste caso, L_{ct} conterà, em adição a polos puros, também termos finitos). Devido a este fato, e também porque L_g não é renormalizada, todas as relações deduzidas previamente, continuarão a ser válidas em todas as ordens, desde que substituamos L_{inv}^v na funcional geratriz pela Lagrangeana total L_{inv} dada pela equação (2.31).

2.c. Variação de Gauge dos vértices próprios

Vamos considerar a funcional geratriz para as funções de Green renormalizadas:

$$W(J) = \det(\partial \cdot \Lambda) \int [dA] \exp i (L_{inv} + L_g + J \cdot A_i) \quad (2.32)$$

Através de uma variação de gauge no parâmetro $\Lambda_i^a \rightarrow \Lambda_i^a + \delta \Lambda_i^a$, a Lagrangeana L_g será modificada de forma que teremos:

$$\delta W(J) = \delta \Lambda_j^a \left[g^{ab} \Delta_j^b - \Lambda_k^a \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_k} \right) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_j} \right) \right] W \quad (2.33)$$

Usando a equação (2.21), poderemos escrever esta relação numa forma mais simples. Lembrando que as matrizes τ são antisimétricas teremos:

$$\delta W(J) = - \delta \Lambda_j^a g^{ab} D_k^b \left(\frac{\delta}{\delta J} \right) J_k W_j \quad (2.34)$$

Poderemos agora expressar (2.34) em termos da funcional geratriz das funções de Green conexas:

$$\delta Z(J) = -\delta \Lambda_j^a g^{ab} (D_k^b A_j + g t_{kel} Z_{ej}) J_k \quad (2.35)$$

Para obter finalmente a expressão para a variação de gauge da funcional geratriz das funções de Green irreduzíveis (1 P I), lembramos que (veja eq. (2.22)):

$$T^\wedge(A^c) = Z^\wedge(J^\wedge) - J^\wedge A^c \quad (2.36)$$

Substituindo no lado direito Λ por $\Lambda + \delta \Lambda$ obteremos uma relação para $T^{\wedge + \delta \Lambda}$.

Teremos então:

$$\begin{aligned} \delta T(A^c) &= T^{\wedge + \delta \Lambda}(A^c) - T^\wedge(A^c) = \\ &= -\delta \Lambda_j^a \Lambda_k^a A_j^c A_k^c + g \delta \Lambda_j^a g^{ab} t_{kel} Z_{ej} T_k \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde usamos as identidades (2.24). Note que o primeiro termo representa a contribuição que resulta da variação da Lagrangea na L_g . Finalmente, podemos escrever (2.37) na forma:

$$\delta T(A^c) = -\delta \Lambda_j^a \Lambda_k^a A_j^c A_k^c + M_k T_k \quad (2.38)$$

onde a quantidade M_k é definida por:

$$M_k = g \delta \Lambda_j^a g^{ab} t_{kel} Z_{ej} \quad (2.39)$$

e é representada graficamente na figura 2.

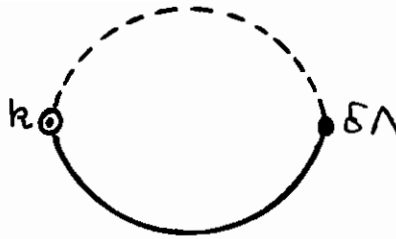


Fig. 2 - Representação gráfica da função M_k .

Nesta figura, o vértice representado por \odot é proporcional a $g t^k$ e a linha tracejada representa o propagador g . A linha contínua denota a função $Z_{\epsilon_j}(J)$ que no ponto $J=0$, nos dá a expressão para o propagador.

Para prosseguir, notemos que os campos A^c são determinados pela condição $T_i^{\wedge}(A^c=0) = 0$. Vamos agora definir a variação δA^c de forma que $T_i^{\wedge+\delta\Lambda}(\delta A^c) = 0$. Então, por definição, teremos que a quantidade:

$$\bar{\Delta} T(A^c) \equiv T^{\wedge+\delta\Lambda}(A^c + \delta A^c) - T^{\wedge}(A^c) \quad (2.40a)$$

é tal que $\bar{\Delta} T_i(A^c=0) = 0$. Usando (2.37) vemos que:

$$\bar{\Delta} T(A^c) = \delta T(A^c) + \delta A_j^c T_j^{\wedge+\delta\Lambda}(A^c) \quad (2.40b)$$

Podemos notar que em virtude da antisimetria das matrizes t^k , e usando o fato que g^{ab} é uma função simétrica nos índices a e b, teremos:

$$M_k(A^c=0) = 0 \quad (2.41)$$

Portanto, no ponto $A^c=0$ vemos de (2.38) que $\delta T(A^c)$ também se anula neste ponto. Conseqüentemente, usando (2.40), teremos que:

$$\delta A^c = 0 \quad (2.42)$$

Este resultado implica que no gauge $\Lambda + \delta\Lambda$, os valores esperados no vácuo dos campos são os mesmos que os valores esperados no vácuo no gauge inicial Λ :

$$\overline{T}_i^\Lambda(A^c=0) = \overline{T}_i^{\Lambda+\delta\Lambda}(A^c=0) = 0 \quad (2.43)$$

(Lembremos que equações deste tipo definem implicitamente os valores esperados no vácuo dos campos iniciais de forma que os campos transladados A^c tenham valores esperados igual a zero). Este resultado tem uma interpretação muito simples para a parte do valor esperado no vácuo que é função de grau zero em Λ . Para isto, notemos que a única maneira pela qual uma expressão de grau zero pode ser uma função do quadrivetor Λ é através de produtos escalares com os momentos externos. Mas, os valores esperados no vácuo são independentes dos momentos, de forma que o resultado acima segue facilmente neste caso. Tomando as derivadas funcionais da eq. (2.38) com respeito a A^c , no ponto $A^c = 0$, obteremos um conjunto de identidades para a variação dos vértices próprios.

2.d. Funções próprias de 2 pontos e estados físicos

Vamos considerar agora, a variação de gauge das funções de 2 pontos.

Usando a eq. (2.41), obteremos:

$$\delta \overline{T}_{ij}(0) = -(\delta \Lambda_i^a \Lambda_j^a + \delta \Lambda_j^a \Lambda_i^a) + M_{k,i} \overline{T}_{kj} + M_{k,j} \overline{T}_{ki} \quad (2.44)$$

onde $M_{k,i}$ é dada por:

$$M_{k,i} = \delta \Lambda_j^a g \int g^{ab} t_{ke}^b G_{ee'} \overline{T}_{e'ij} G_{jj'} \quad (2.45)$$

Nesta expressão, $G_{ee'}$ e $T'_{e'ij}$ representam respectivamente o propagador e a função de vértice de 3 pontos. Eq. (2.45) é representada graficamente na figura 3.

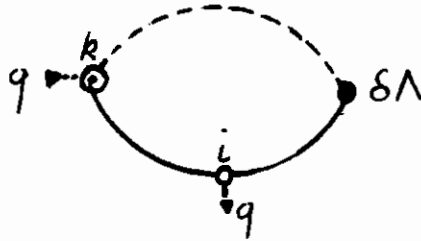


Fig. 3 - Representação gráfica da função $M_{k,i}$.

onde q denota o momento externo que atravessa o diagrama.

Para definirmos os estados físicos, vamos primeiramente considerar a diagonalização das funções próprias de 2 pontos. Denotaremos por E_i^r e \bar{E}_i^s um conjunto completo de vetores ortonormais que diagonalizam T'_{ij} :

$$T'_{ij} = \sum_r E_i^r T_r E_j^r + \sum_s \bar{E}_i^s T_s E_j^s \quad (2.46)$$

Em virtude da ortonormalidade dos vetores E_i^r e \bar{E}_i^s , teremos a seguinte equação de autovalores:

$$T'_{ij} E_j^r = T_r E_j^r \quad (2.47)$$

e uma equação similar para \bar{E}_i^s . (Nesta equação, índices repetidos não implicam no somatório sobre os mesmos).

Para definir os estados físicos, vamos requerer que os vetores E_j^r que correspondem a estes estados sejam autovetores da equação (2.47) com autovalor:

$$T_r = (k^2 + m_r^2) Z_r^{-1} \quad (2.48)$$

que se anula quando o momento k está na camada de massa. Z_r é uma constante de renormalização finita determinada pela condição de que os resíduos dos propagadores (renormalizados) nos polos físicos sejam iguais a 1.

Com a finalidade de obtermos as propriedades que os autovetores E^r devem ter para que a eq. (2.47) esteja satisfeita, aplicaremos nos dois lados desta equação o operador D_j^c . Usando a identidade (2.24) teremos que :

$$\Lambda_j^a E_j^r = -T_r G^{ab} \Delta_j^b E_j^r \quad (2.49)$$

É natural definir as partículas físicas como aquelas correspondentes aos autovetores que satisfazem:

$$\Delta_j^b E_j^r = 0 \quad (2.50)$$

(Por exemplo, no caso de uma teoria de Yang-Mills pura, esta relação implica na transversalidade das partículas com respeito ao momento das mesmas).

Em virtude das equações (2.49) , (2.50) implicará que:

$$\Lambda_j^a E_j^r = 0 \quad (2.51)$$

para os autovetores correspondentes aos estados físicos.

Considerando então (2.44) entre estados físicos e usando (2.51), obteremos:

$$E_i^r \delta T_{ij} E_j^r = 2 T_r E_i^r M_{ij} E_j^r \quad (2.52)$$

Por outro lado, podemos calcular também δT_{ij} da equação (2.46). No gauge $\Lambda + \delta\Lambda$ os autovetores apropriados serão:

$$\tilde{E}_i^r = E_i^r + \delta E_i^r \quad (2.53a)$$

que sendo também ortonormais, satisfazem a equação

$$E_i^r \delta E_i^r = 0 \quad (2.53b)$$

Usando a equação (2.48) obteremos então a relação:

$$E_i^r \delta T_{ij} E_j^r = Z_r^{-1} (\delta m_r^2 - \delta Z_r T_r) \quad (2.54)$$

Podemos agora comparar as equações (2.52) e (2.54). Para isto, notemos que $M_{i,j}$ (eq.45) não tem polos nas massas físicas. Portanto, na camada de massa, $E_i^r \delta T_{ij} E_j^r$ se anula (eq.52) de forma que de (2.54) teremos que

$$\delta m_r^2 = 0 \quad (2.55)$$

isto é, as massas das partículas físicas são independentes de gauge.

Além disto, perto da camada de massa as relações (2.52) e (2.54) implicam

$$E_i^r M_{ij} E_j^r = -\frac{1}{2} (Z^{-1} \delta Z)_r \quad (2.56)$$

Esta equação será importante no estudo dos elementos da matriz S que estudaremos na próxima secção. Além disto, ela tem várias implicações importantes⁽²¹⁾ entre as quais mencionamos o fato de que as partes divergentes dos resíduos dos propagadores nos polos físicos são quantidades independentes do gauge.

2.e. A matriz S

Para analisar a matriz S , lembremos que, dada a função de Green conexa de n pontos ($n \geq 3$), os elementos da matriz S entre estados físicos são dados por :

$$S_{r_1 \dots r_n}^{\Lambda} = \prod_{k=1}^n Z_{r_k}^{-1/2} (k^2 + m_{r_k}^2) E_{i_k}^r G_{i_1 \dots i_n}^{\Lambda} \Big|_{k^2 = -m_{r_k}^2} \quad (2.57)$$

Analogamente, usando o fato de que as massas físicas são independentes de gauge (veja eq. (2.55)), obteremos para os elementos da matriz S no gauge $\Lambda + \delta\Lambda$ a expressão:

$$S_{r_1 \dots r_n}^{\Lambda + \delta\Lambda} = \prod_{k=1}^n (Z_{r_k} + \delta Z_{r_k})^{-1/2} (k^2 + m_{r_k}^2) \times \\ \times (E_{i_k}^{r_k} + \delta E_{i_k}^{r_k}) G_{i_1 \dots i_n}^{\Lambda + \delta\Lambda} \Big|_{k^2 = -m_{r_k}^2} \quad (2.58)$$

Para uma variação infinitesimal obteremos então:

$$\delta S_{r_1 \dots r_n} = \sum_s Z_{r_s}^{-1/2} (k^2 + m_{r_s}^2) \left[-\frac{1}{2} (Z^{-1} \delta Z)_{r_s} E_{i_s}^{r_s} + \right. \\ \left. + \delta E_{i_s}^{r_s} \right] \prod_{k \neq s} Z_{r_k}^{-1/2} (k^2 + m_{r_k}^2) E_{i_k}^{r_k} G_{i_1 \dots i_n}^{\Lambda} \Big|_{k^2 = -m_{r_k}^2} + \\ + \prod_{k=1}^n Z_{r_k}^{-1/2} (k^2 + m_{r_k}^2) E_{i_k}^{r_k} \delta G_{i_1 \dots i_n} \Big|_{k^2 = -m_{r_k}^2} \quad (2.59)$$

Vamos concentrar nossa atenção num dado índice i_s na função de Green $G_{i_1 \dots i_n}^{\Lambda}$. Temos que:

$$G_{i_1 \dots i_n}^{\Lambda} = G_{i_s j} G_{i_1 \dots j \dots i_n}^a \quad (2.60)$$

onde na expressão $G_{i_1 \dots j \dots i_n}^a$ a linha externa é amputada. Sendo que $G_{i_s j}$ é a inversa da função $\overline{T}_{i_s j}$ obtemos perto da camada de massa usando a eq. (2.46) que

$$G_{i_s j} \approx -E_{i_s}^{r_s} T_{r_s}^{-1} E_j^{r_s} \quad (2.61)$$

Assim, em virtude da relação (2.53b), vemos que quando (2.61) é multiplicada pelo fator $\delta E_{i_1 \dots i_n}^{r_k}$ que aparece em (2.59), o resultado se anula. Assim, usando (2.56) juntamente com (2.60) e (2.61), poderemos reescrever o primeiro termo no lado direito da equação (2.59) de forma que $\delta S_{i_1 \dots i_n}$ se reduza a:

$$\delta S_{i_1 \dots i_n} = \prod_{k=1}^n z_{r_k}^{-1/2} (k^2 + m_{r_k}^2) E_{i_k}^{r_k} \times \\ \times \left[\sum_P M_{i_1, j_1, j_2} G_{j_1, i_2, \dots, i_n} + \delta G_{i_1, \dots, i_n} \right] \quad (2.62)$$

onde \sum_P estende-se sobre todas as permutações não triviais dos índices i_1, \dots, i_n . Consideremos primeiramente o termo contendo $\delta G_{i_1, \dots, i_n}$. Usando as equações (2.35, 36 e 38), teremos que:

$$\delta Z = -\delta \Lambda_j^a \Lambda_k^a A_j^c A_k^c + M_k T_k \equiv \\ \equiv -\delta \Lambda_j^a \Lambda_k^a A_j^c A_k^c + \Delta Z \quad (2.63)$$

As variações $\delta G_{i_1, \dots, i_n}$ são obtidas tomando as derivadas funcionais desta equação com respeito a J , no ponto $J=0$. Para o primeiro termo no lado direito da eq. (2.63) teremos:

$$\frac{\delta}{\delta J_{i_1}} \dots \frac{\delta}{\delta J_{i_n}} \delta \Lambda_j^a \Lambda_k^a A_j^c A_k^c \Big|_{J=0} = \\ = \frac{1}{2} (\delta \Lambda_j^a \Lambda_k^a + \delta \Lambda_k^a \Lambda_j^a) \sum_P \sum_S G_{j i_1 \dots i_s} G_{k i_{s+1} \dots i_n} \quad (2.64)$$

onde usamos a relação (2.23a). O somatório sobre S estende-se sobre todas as maneiras possíveis de distribuir os n índices entre as duas funções de Green e \sum_P contém todas as permutações

tações não triviais destes índices.

Usando a equação (2.20) podemos notar que a expressão acima contém, para $1 < S < n-1$, somente $(n-1)$ polos nas massas físicas. Portanto, esta parte não contribuirá para o lado direito de (2.62), na camada de massa. Por outro lado, para $S=1$ ou $n-1$ vemos, usando (2.21), que a expressão (2.64) poderá conter n polos.

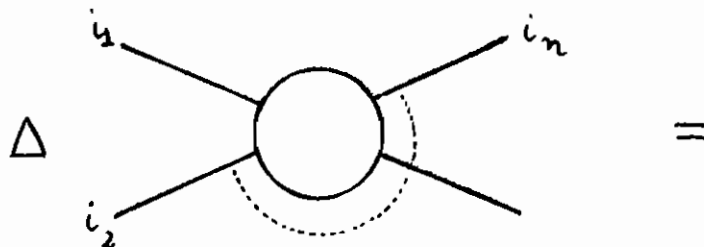
Contudo, esta contribuição será proporcional a $\Delta_{i_k}^{\alpha k}$, para algum índice k , de forma que esta contribuição na equação (2.62) se anulará em virtude da condição (2.50) que caracteriza os estados físicos.

Consideremos agora o segundo termo do lado direito da equação (2.63).

Tomando as derivadas funcionais com respeito a J teremos que:

$$\Delta G_{i_1 \dots i_n} = - \sum_p \sum_{S=1}^{n-1} M_{i_1, j_1 \dots j_S} G_{j_1 \dots j_2} \dots G_{j_S \dots j_n} \quad (2.65)$$

Os índices $i_1 \dots i_n$ representam uma dada permutação do conjunto $i_1 \dots i_n$. O somatório sobre S é tomado sobre todas as maneiras possíveis de distribuir estes índices entre as funções de Green e a soma sobre p estende-se sobre todas as permutações não triviais destes índices. A equação (2.65), é representada na figura 4.



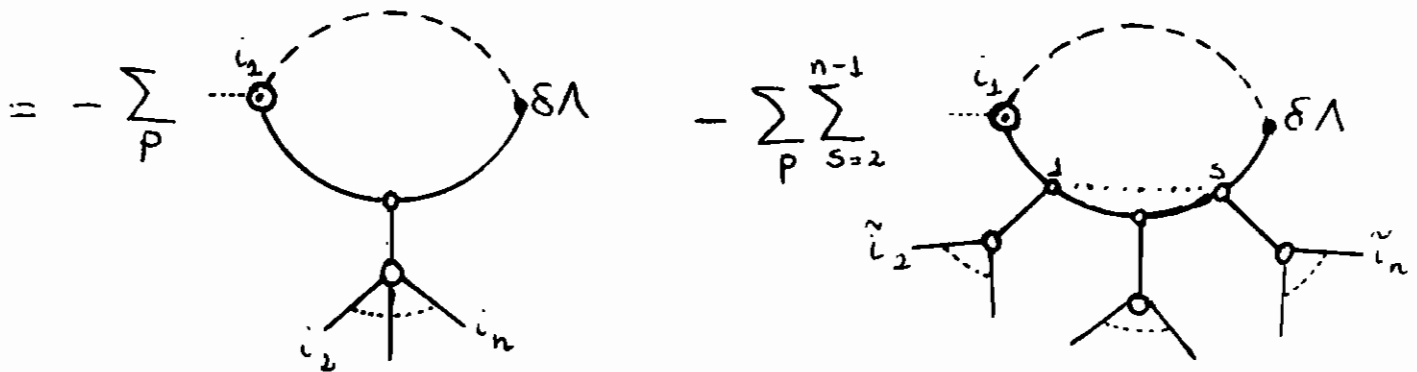


Fig. 4 - Diagrama representando a variação $\Delta G_{i_1 \dots i_n}$.

Nesta figura, isolamos o termo correspondente a $S=1$, que contém um polo na variável i_1 , exibindo assim um total de n polos na camada de massa. Porém, a contribuição desta expressão é cancelada exatamente pelo primeiro termo no lado direito da equação (2.62). Por outro lado, todos os outros termos da equação (2.65) não terão polos na variável i_1 , de modo que terão no máximo $n-1$ polos na camada de massa. Assim, substituindo a equação (2.65) na relação (2.62), teremos que a variação

$$\Delta S_{r_1 \dots r_n} = - \prod_{k=1}^n Z_{r_k}^{-1/2} (k^2 + m_{r_k}^2) E_{i_k}^{r_k} \times$$

$$\times \sum_p \sum_{s=2}^{n-1} M_{i_1, j_1} \dots G_{j_1 \dots i_2} \dots G_{j_s \dots i_n} \quad (2.66)$$

se anula na camada de massa. Podemos portanto, concluir que os elementos da matriz S entre estados físicos considerados na camada de massa são quantidades independentes do gauge.

Dado este fato, a unitariedade da matriz S pode ser provada mostrando que, em algum gauge conveniente, a funcional geratriz pode ser deduzida a partir de um formalismo Hamiltoniano. Isto, contudo, foi mostrado por Coleman⁽³¹⁾ no chamado gauge axial caracterizado por $W_3^a = 0$. Este gauge corresponde ao caso particular quando $\Lambda_\mu = \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{\beta}}$ com $\beta \rightarrow 0$ e $\lambda_\mu = (0, 0, 1; 0)$ na equação (2.17).

3. COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO A ALTAS ENERGIAS

Com a finalidade de estudar o problema da liberdade assintótica nas teorias de Yang-Mills, consideraremos na próxima seção, o formalismo Hamiltoniano desta teoria.

Antes disso, será conveniente lembrar, usando os resultados deduzidos no capítulo 2, algumas propriedades da renormalização desta teoria.

Vimos que a Lagrangeana (2.31) é invariante pelas transformações dadas pela equação (2.9). Para uma teoria de Yang-Mills pura, isto implica em particular que a Lagrangeana total será invariante pelas transformações de gauge (2.2). Resulta daí que esta Lagrangeana pode ser escrita como:

$$L_{inv} = L_{YM} + L_{ct} = Z_3 \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \right) \quad (3.1)$$

Vamos definir os campos não renormalizados pela relação:

$$W_\mu^{aB} = Z_3^{1/2} W_\mu^a \quad (3.2)$$

Então, usando (3.1) e (2.1b) vemos que teremos para a constante de acoplamento não renormalizada g^B :

$$g^B = Z_3^{-1/2} g \quad (3.3)$$

de forma que L_{inv} pode ser escrita como:

$$L_{inv} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{aB} F_{\mu\nu}^{aB} \quad (3.4a)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^{aB} = \partial_\mu W_\nu^{aB} - \partial_\nu W_\mu^{aB} + g^B f^{abc} W_\mu^{bB} W_\nu^{cB} \quad (3.4b)$$

Em adiçãõ, vimos que a Lagrangeana L_g não é renormalizada. Juntamente com (3.2) isto implica que o parâmetro de gauge não renormalizado Λ_μ^B é dado por:

$$\Lambda_\mu^B = Z_3^{-1/2} \Lambda_\mu \quad (3.5)$$

Na próxima secção estudaremos o formalismo Hamiltoniano baseado na Lagrangeana (3.4a). (Para simplificar a notação, omitiremos nesta secção o índice B na Lagrangeana).

3.a. Formalismo Hamiltoniano

Consideremos uma teoria de Yang-Mills descrita pela Lagrangeana (3.4a), com o gauge fixado pela condição

$$\lambda_\mu W_\mu^a = 0 \quad (3.6)$$

onde λ_μ foi definido no capítulo 2. Desta Lagrangeana, obteremos a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$D_\mu^{ab} F_{\mu\nu}^b = 0 \quad (3.7)$$

onde a derivada covariante D^{ab} foi definida na equação (2.2). Também, de (3.4) vemos que os momentos canônicos são dados por:

$$E_i^a \equiv \frac{\delta L_{inv}}{\delta \dot{W}_i^a} = F_{i0}^a \quad (3.8)$$

(Notemos que $L_{\mu\nu}$ é independente de \dot{W}_0^a). Usando esta equação, obteremos de (3.7) as equações de movimento:

$$\partial_0 W_i^a = \partial_i W_0^a - E_i^a + g f^{abc} W_i^b W_0^c \quad (3.8a)$$

$$\partial_0 E_i^a = \partial_j F_{ij}^a + g f^{abc} W_j^b F_{ji}^c + g f^{abc} W_0^b E_i^c \quad (3.8b)$$

Além disto, teremos as seguintes equações de vínculo:

$$\partial_i E_i^a + g f^{abc} A_i^b E_i^c = 0 \quad (3.9a)$$

Também vamos lembrar que, da equação (3.4b) resulta que:

$$F_{ij}^a = \partial_i W_j^a - \partial_j W_i^a + g f^{abc} W_i^b W_j^c \quad (3.9b)$$

Vamos considerar primeiramente a equação de movimento (3.8a). Multiplicando esta por λ_i e usando a condição de gauge (3.6) teremos:

$$(\lambda_i \partial_i \delta^{ac} + \lambda_0 g f^{abc} W_0^b) W_0^c = \lambda_i E_i^a \quad (3.10)$$

Sendo que $L_{\mu\nu}$ é independente de \dot{W}_0^c , W_0^c não é um campo dinâmico e deverá ser eliminado. Isto pode ser feito usando-se a equação acima. Estaremos interessados em encontrar uma solução explícita para W_0 , em todas as ordens de perturbação. Por esta razão, vamos escolher λ_μ como sendo um 4-vetor do tipo espacial, que no referencial de Lorentz, onde faremos a quantização, é dado por $\lambda_\mu = (\vec{\lambda}, 0)$. Neste caso, a condição de gauge (3.6) dará:

$$\lambda_i W_i^a = \vec{\lambda} \cdot \vec{W}^a = 0 \quad (3.11)$$

Note que esta condição é invariante por rotações no espaço 3-

dimensional, o que não acontece com o gauge axial usual caracterizado por $W_3^a = 0$.

Escolhendo, portanto, $\lambda_\mu = (\vec{\lambda}, 0)$, a equação (3.10) reduz-se a:

$$\lambda_i \partial_i W_0^a = \lambda_i E_i^a \quad (3.12)$$

equação que pode ser facilmente integrada. Para isto, introduziremos uma notação conveniente, que também será utilizada frequentemente no que se segue. Vamos decompor um 3-vetor geral, segundo as componentes transversais e longitudinais com respeito a $\vec{\lambda}$:

$$V_i = V_i^T + V_i^L = V_i^T + (\vec{V} \cdot \hat{\lambda}) \hat{\lambda}_i = V_i^T + V_L \hat{\lambda}_i \quad (3.13a)$$

com

$$\vec{V}^T \cdot \hat{\lambda} = 0 \quad ; \quad \hat{\lambda} = \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \quad (3.13b)$$

Por exemplo, a condição de gauge (3.11) nos diz que os campos vetoriais \vec{W}^a são puramente transversais: $W_i^a \equiv W_i^{Ta}$. Nesta notação, a solução da equação (3.12) será:

$$W_0^a(\vec{x}_T, x_L) = \int_{-\infty}^{x_L} dx'_L E_L^a(\vec{x}_T, x'_L) \quad (3.14)$$

Para achar E_L considere a equação de vínculo (3.9a) que pode ser escrita na forma:

$$\partial_L E_L^a = -(\partial_i^T E_i^{Ta} + g f^{abc} W_i^b E_i^{Tc}) \equiv D_i^{Tba} E_i^{Tb} \quad (3.15)$$

cuja solução é dada por:

$$E_L^a(\vec{x}_T, x_L) = - \int_{-\infty}^{x_L} dx'_L D_i^{Tba} E_i^{Tb}(\vec{x}_T, x'_L) \quad (3.16)$$

Em virtude da condição de gauge (3.11), vamos impor os seguintes comutadores canônicos a tempos iguais:

$$[W_i^a(\vec{x}, t), W_j^b(\vec{x}', t)] = [E_i^{Ta}(\vec{x}, t), E_j^{Tb}(\vec{x}', t)] = 0 \quad (3.17a)$$

$$[W_i^a(\vec{x}, t), E_j^{Tb}(\vec{x}', t)] = \lambda \delta^{ab} (\delta_{ij} - \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.17b)$$

Finalmente, examinaremos nesta seção, as equações de movimento de Heisenberg para as variáveis canônicas independentes

$$W_j^a \equiv W_j^{Ta} \quad \text{e} \quad E_j^{Ta} :$$

$$\lambda \partial_0 W_j^{Ta} = [W_j^{Ta}, H] \quad (3.18a)$$

$$i \partial_0 E_j^{Ta} = [E_j^{Ta}, H] \quad (3.18b)$$

A Hamiltoniana H é positiva e dada por:

$$H = E_i^{Ta} \dot{W}^{Ta} - L = \int d^3x \frac{1}{2} [E_i^{Ta} E_i^{Ta} + E^{La} E^{La} + \frac{1}{2} F_{ij}^a F_{ij}^a] \quad (3.19)$$

onde E^{La} e F_{ij}^a devem ser expressas em termos das variáveis canônicas com o auxílio das relações (3.9b, 3.14 e 3.16). Usando estas juntamente com as relações de comutadores canônicos, podemos mostrar que as equações (3.18a e 3.18b) são equivalentes às equações de movimento (3.8a) e à parte transversal da equação (3.8b), respectivamente.

3.b. Liberdade assintótica

As relações de renormalização (3.1) e (3.3) são aparentemente muito semelhantes àquelas que encontramos na Eletrodinâmica Quântica. Contudo, existe uma diferença muito importante. Na Eletrodinâmica Quântica, existe um argumento devido ao Källén⁽³²⁾, que mostra que $\tilde{Z}_3 < 1$. Por outro lado, para uma teoria de Yang-Mills, como veremos mais adiante, devemos ter $\tilde{Z}_3 > 1$ fato que implicará na liberdade assintótica da teoria. É portanto, interessante entender este resultado, estendendo o argumento de Källén para uma teoria de gauge não-abeliana.

Com esta finalidade, precisaremos considerar a representação espectral da função de dois pontos. Os argumentos usuais levam a representação espectral:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{ab} &\equiv -i \langle 0 | [W_{\mu}^{aB}(x), W_{\nu}^{bB}(0)] | 0 \rangle = \\ &= \int_0^{\infty} d\sigma^2 \int d^4k \rho_{\mu\nu}^{ab}(k, \lambda) \Delta(\sigma^2, k) e^{ikx} \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $\Delta(\sigma^2, k)$ é o valor esperado no vácuo para uma partícula livre de massa σ^2 no espaço dos momentos e

$$\rho_{\mu\nu}^{ab}(k, \lambda) = \sum_N \langle 0 | W_{\mu}^{aB}(0) | N \rangle \langle N | W_{\nu}^{bB}(0) | 0 \rangle \delta^4(P_N - k) \quad (3.21)$$

onde N representa um conjunto completo de estados intermediários. Em virtude da condição de gauge (3.6), a função $\rho_{\mu\nu}^{ab}$ terá a estrutura:

$$\rho_{\mu\nu}^{ab}(k, \lambda) = \delta^{ab} [\rho_1(k^2, k_L^2) P_{\mu\nu} + \rho_2(k^2, k_L^2) \delta_{\mu\nu}^T] \quad (3.22)$$

onde

$$P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu \lambda_\nu + k_\nu \lambda_\mu}{k \lambda} + \frac{k_\mu k_\nu \lambda^2}{(k \lambda)^2} \quad (3.23a)$$

$$\delta_{\mu\nu}^T = \delta_{\mu\nu} - \frac{\lambda_\mu \lambda_\nu}{\lambda^2} \quad (3.23b)$$

Sendo funções de grau zero em λ , ρ_1 e ρ_2 dependem de $\lambda k e \lambda^2$ somente através da combinação $k_L^2 = \frac{(\lambda \cdot k)^2}{\lambda^2}$. Usando (3.21), teremos que as contribuições de uma partícula para as funções ρ_1 e ρ_2 serão dados por:

$$(\rho_1)_1 = \tilde{Z}_3 \delta(k^2) \quad (\rho_2)_1 = 0 \quad (3.24)$$

A quantidade definida desta maneira é uma função de k_L^2 (e de um cut-off infravermelho). Neste capítulo, estaremos interessados apenas em \tilde{Z}_3 , que contém somente as divergências ultravioletas de \tilde{Z}_3 . Para que possamos tirar informações úteis da eq. (3.20) escolheremos, como fizemos na secção (3.a), o 4-vetor λ_μ como sendo $\lambda_\mu = (\vec{\lambda}, 0)$, isto é, puramente espacial. Então, definindo:

$$\rho_{ij}^{ab}(k, \lambda) = \rho_{ij}^{ab}(k^2, \vec{k}, \vec{\lambda}) \quad (3.25a)$$

poderemos escrever a equação (3.20), com $\mu = i$, $\nu = j$, na forma:

$$\tilde{\Delta}_{ij}^{ab}(x) = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho_{ij}^{ab}(\sigma^2, \vec{\sigma}, \vec{\lambda}) \Delta(\sigma^2, x) \quad (3.25b)$$

Vamos agora diferenciar a eq. (3.20) com respeito a x_ν . Usando (3.25) e pondo $x_\nu = 0$ obteremos a relação:

$$\begin{aligned}
& i^2 \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0 | [\dot{W}_i^{aB}(0), W_j^{bB}(0)] | 0 \rangle = \\
& = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho_{ij}^{ab}(\sigma^2, \vec{k}, \vec{\lambda})
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

Neste ponto, podemos já notar uma diferença importante entre o nosso caso e aquele da QED. Em uma teoria não abeliana, \dot{W}_i^a não é canônico com o campo W_0^a . De fato, usando (3.8) vemos que:

$$E_i^a = \dot{W}_i^a - \partial_i W_0^a + g f^{abc} W_0^b W_i^c
\tag{3.27}$$

Vimos que W_0^a não é um campo dinâmico. Ele pode ser expresso em termos dos campos canônicos usando a equação (3.14) e (3.16). Usando os comutadores a tempos iguais (3.17), pode-se mostrar que o lado esquerdo da equação (3.26) será:

$$\begin{aligned}
& i^2 \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0 | [\dot{W}_i^{aB}(\vec{x}, 0), W_j^{bB}(0)] | 0 \rangle = \\
& = \delta^{ab} P_{ij} + C_{YM}(g^2) \int_0^\infty dx_L e^{ik_L x_L} \langle 0 | W_L^{aB}(0, x_L) W_j^{bB}(0) | 0 \rangle
\end{aligned}
\tag{3.28}$$

onde P_{ij} é dado por (3.23a), e o operador quadrático de Casimir C_{YM} para os campos de Yang-Mills é definido por:

$$\delta^{aa'} C_{YM} = \sum_{b,c} f^{abc} f^{a'bc}
\tag{3.29}$$

Na equação (3.28), o segundo termo no lado direito tem sua origem no caráter não abeliano da teoria e representa uma expressão exata válida em todas as ordens da teoria de perturbação.

(Podemos contrastar este caso com o gauge de Coulomb⁽³³⁾, onde

uma solução explícita somente é praticável na ordem mais baixa). Em virtude da condição de gauge, este termo terá a forma:

$$C_{YM} (g^0)^2 \int_0^\infty dx_L e^{ik_L x_L} \langle 0 | W_i^{aB}(x_L) W_j^{bB}(0) | 0 \rangle = \delta_{ij}^T \delta^{ab} L \quad (3.30)$$

onde L é uma função adimensional.

Substituindo (3.28) e (3.30) em (3.26) vem que:

$$\delta^{ab} (P_{ij} + \delta_{ij}^T L) = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho_{ij}^{ab}(\sigma^2, \vec{k}, \vec{\lambda}) \quad (3.31)$$

Sendo que os operadores de projeção P_{ij} e δ_{ij}^T são independentes, obteremos desta equação, usando (3.22), duas regras de soma:

$$\int_0^\infty \rho_1(\sigma^2, k_L^2) d\sigma^2 = 1 \quad (3.32)$$

$$\int_0^\infty \rho_2(\sigma^2, k_L^2) d\sigma^2 = L \quad (3.33)$$

Esta última expressão relaciona ρ_2 com o comutador (3.28). Por outro lado, a eq. (3.32) representa uma regra de soma para \tilde{Z}_3 . De fato, usando (3.24), podemos escrevê-la na forma:

$$\tilde{Z}_3^{-1} - 1 = - \int_0^\infty \tilde{\rho}_1(\sigma^2, k_L^2) d\sigma^2 \quad (3.34)$$

onde $\tilde{\rho}_1$ denota a contribuição de estados de mais de uma partícula para ρ_1 .

O que podemos dizer a respeito da positividade de função espectral $\tilde{\rho}_1$? Para tentar responder a esta pergunta, tomaremos o traço sobre a parte espacial da eq. (3.22). Achamos que:

$$\delta^{ab} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\vec{k}^2}{k^2} \right) \rho_1 + \rho_2 \right] = \rho_{ii}^{ab} \quad (3.35)$$

À primeira vista, usando (3.21) poderia parecer que ρ_{ii}^{ab} é uma quantidade positiva, que então implicaria na positividade de ρ_1 , visto que (3.35) deve ser válida para todos os valores dos momentos. Contudo, uma análise cuidadosa da equação (3.21) revela que na soma sobre os estados intermediários aparecem singularidades quando $k \cdot \lambda = 0$ que podem modificar este argumento formal.

Para dar um significado a esta soma, devemos encontrar uma prescrição de como tratar os polos que aparecem quando $k \cdot \lambda = 0$. Este procedimento⁽³⁴⁾, que também garante a unitariedade da teoria, é dado pela prescrição do valor principal:

$$\mathcal{P} \left(\frac{1}{k \cdot \lambda} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k \cdot \lambda + i\epsilon} + \frac{1}{k \cdot \lambda - i\epsilon} \right) \quad (3.36)$$

Veremos que, em teoria de perturbação, esta prescrição invalida o argumento formal acima, resultando assim um valor negativo para $\tilde{\rho}_1$, e via (3.34) teremos que $Z_3 > 1$.

Vamos agora relacionar ρ_1 e ρ_2 com a função própria de dois pontos $\overline{\Pi}_{\mu\nu}$ dos campos vetoriais. Para isto, usaremos a representação espectral do propagador no espaço dos momentos:

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu, F}^{ab} = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho_{\mu\nu}^{ab} \frac{-i}{k^2 + \sigma^2 - i\epsilon} \quad (3.37)$$

juntamente com o fato de que $\overline{\Pi}_{\mu\nu}$ é dada pelo inverso de $\tilde{\Delta}_{\mu\nu, F}^{ab}$.

Com o auxílio de (3.24) teremos que:

$$\tilde{\rho}_{\mu\nu}^{ab}(\sigma^2, \lambda, k) = \tilde{Z}_3 \delta^{ab} P_{\mu\nu} \delta(\sigma^2) - \frac{\delta^{ab}}{\pi(\sigma^2)^2} P_{\mu\alpha} \text{Im}(\Pi_{\alpha\beta}) P_{\beta\nu} \quad (3.38)$$

Notemos agora que $\overline{\Pi}_{\mu\nu}$ satisfaz a identidade (veja eq. (2.27)):

$$k_\mu \overline{\Pi}_{\mu\nu}(k, \lambda) = 0 \quad (3.39)$$

A solução mais geral consistente com esta condição será:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\mu\nu} = & (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \Pi + \\ & + \left[k_\mu k_\nu - k^2 \frac{k_\mu \lambda_\nu + k_\nu \lambda_\mu}{\lambda \cdot k} + \frac{(k^2)^2}{(\lambda \cdot k)^2} \lambda_\mu \lambda_\nu \right] \Pi' \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde Π e Π' são funções adimensionais de k^2/k_L^2 .

Comparando (3.38) com (3.22) obteremos, usando as equações acima que:

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{1}{\pi \sigma^2} \left(\text{Im} \Pi + \frac{a^2 - 1}{a^2} \text{Im} \Pi' \right) \quad (3.41a)$$

$$\tilde{\rho}_2 = \frac{1}{\pi \sigma^2} \frac{1 - a^2}{a^2} \text{Im} \Pi' \quad (3.41b)$$

onde o fator a^2 é dado por:

$$a^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{k_L^2}} \quad (3.41c)$$

Usando então estas relações juntamente com (3.33) e (3.34) vemos que:

$$\tilde{Z}_3 - 1 = - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma^2 \frac{1}{\sigma^2} \text{Im} \Pi + L$$

Sendo a teoria renormalizável, de (3.40) vem que

$Z_3^{div} = -\text{Re } \Pi^{div u.v}$, visto que de (3.1) os contratermos das funções de 2 pontos têm a estrutura dada somente pelo primeiro termo em (3.40). Assim de (3.42) resulta que:

$$\text{Re } \Pi^{div u.v} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\sigma^2}{\sigma^2} \text{Im } \Pi - L \right\}_{div u.v} \quad (3.43)$$

Esta equação mostra que, em contraste com o caso encontrado na QED, Π^{div} satisfaz uma relação de dispersão modificada pelo fator L que reflete o caráter não abeliano da teoria.

Finalmente, vamos agora calcular, em ordem mais baixa da teoria de perturbação a contribuição de duas partículas para a função espectral $\rho_{\mu\nu}^{ab}$ (3.21), que é representada graficamente na figura 5.

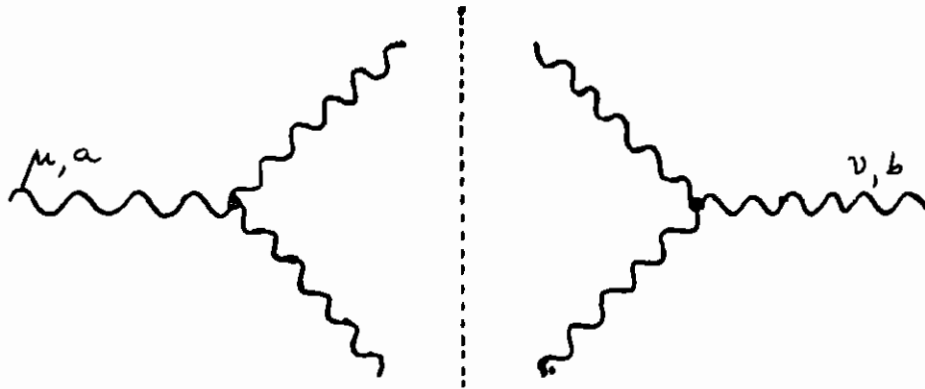


Fig. 5 - Diagrama representando a contribuição de duas partículas para $\rho_{\mu\nu}^{ab}$.

Com esta finalidade, calculamos primeiramente as seguintes combinações:

$$C_1 = \frac{1}{k^2} \text{Im } \Pi_{\mu\mu} \qquad C_2 = \frac{1}{k^2 \lambda^2} \lambda_{\mu\nu} \text{Im } \Pi_{\mu\nu} \quad (3.44)$$

Teremos que:

$$C_1 = \frac{C_{YM} g^2}{16\pi} \left\{ 1 + \frac{1-a^2}{a^2} \left[\frac{1+a^2}{2a} \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right) - 1 \right] + \right. \\ \left. + 8 \left[a \ln \frac{1+a}{1-a} - 2 \right] \right\} \quad (3.45)$$

$$C_2 = \frac{C_{YM} g^2}{16\pi} \left\{ \frac{a^2}{1-a^2} \left[1 + \frac{1-a^2}{a^2} \left(\frac{1+a^2}{2a} \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right) - 1 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{a^2-1}{a} \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right) + \frac{5-3a^2}{3(a^2-1)} \right\} \quad (3.46)$$

onde C_{YM} e a^2 são dados respectivamente pelas equações (3.29) e (3.41c). Comparando (3.40) e (3.46), podemos então expressar as partes imaginárias de Π e Π' em função de C_1 e C_2 .

$$\text{Im } \Pi = \frac{1}{2} [C_1 + (a^2 - 1) C_2] \quad (3.47a)$$

$$\text{Im } \Pi' = \frac{a^2}{2} [C_1 + 3(a^2 - 1) C_2] \quad (3.47b)$$

Estamos, de fato, interessados aqui somente no limite $\sigma^2 \rightarrow \infty$ ($a^2 \rightarrow 0$) que governa o comportamento assintótico de Z_3 na região ultravioleta. Nesta região, usando as equações acima, vem que:

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty} \text{Im } \Pi = -\frac{15}{48\pi} C_{YM} g^2 \quad (3.48a)$$

$$\lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty} \text{Im } \Pi' = -\frac{4}{48\pi} C_{YM} g^2 a^2 \quad (3.48b)$$

Com a ajuda destas equações teremos, usando também (3.41) que o comportamento assintótico de Z_3 , em virtude da eq. (3.34), é dado por:

$$\begin{aligned} (Z_3 - 1)^{\text{div}} &= - \left\{ \int_0^\infty d\sigma^2 \tilde{\beta}_1(\sigma^2, k_c^2) \right\}_{\text{div}} = \\ &= \frac{11}{48\pi^2} C_{YM} g^2 \ln \Lambda^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Este resultado é consequência de que $\tilde{\beta}_1$ é uma quantidade negativa, fato que pode ser entendido da seguinte forma; de acordo com a discussão anterior (veja eq. (3.35)) a expressão não regularizada, para β_1 seria positiva, mas singular em virtude dos polos que aparecem quando $k \cdot \lambda$ se anula na soma sobre os estados intermediários. Esta expressão positiva (mas divergente), consiste de um polo positivo e uma expressão finita negativa. Contudo, a prescrição do valor principal (3.36) elimina precisamente o polo, resultando daí o resultado finito expresso no integrando da equação (3.49).

3.c. Função de dois pontos e grupo de renormalização

Vimos na equação (3.49) que $Z_3 > 0$, fato que determina como veremos adiante a liberdade assintótica. Este comportamento é descrito, como se sabe, pela equação do grupo de renormalização^(35,36). No gauge axial, em virtude das identidades de Ward que levam às relações (3.2) e (3.3), os parâmetros que determinam esta equação são determinados diretamente por Z_3 , de forma que é conveniente analisar as propriedades de Z_3 antes de considerar a equação do grupo de renormalização.

Vamos determinar Z_3 usando o esquema de renormaliza-

ção mínima⁽³⁷⁾, onde Z_3 conterá somente os polos puros em $\xi = n - 4$, que são necessários para tornar as funções de Green finitas.

Vamos agora mostrar que neste esquema Z_3 é independente do parâmetro de gauge λ_μ . Para isto, lembremos que na classe de condições de gauge obtidas quando $\Lambda_\mu = \frac{\lambda_\mu}{\sqrt{\beta}}$, $\beta \rightarrow 0$ (veja eq. (3.6)), o propagador (2.4) se reduz a :

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k, \lambda) = \delta^{ab} \frac{1}{k^2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu \lambda_\nu + k_\nu \lambda_\mu}{k \lambda} + \frac{\lambda^2 k_\mu k_\nu}{(k \lambda)^2} \right] \quad (3.50)$$

sendo, portanto, uma função de grau zero de λ . Devido a este fato, Z_3 também deverá ser uma função de grau zero no parâmetro de gauge. Mas sendo a teoria renormalizável, Z_3 é independente dos momentos das partículas. Por outro lado, a única maneira de se obter uma função de grau zero em λ é via produtos escalares com momentos, de onde se segue que Z_3 deve ser independente do parâmetro de gauge λ .

Vamos agora considerar as equações do grupo de renormalização. Para deduzir estas, introduziremos um parâmetro arbitrário μ com dimensão de massa⁽³⁷⁾ que fixa uma escala na teoria. Por exemplo, no espaço n dimensional a constante de acoplamento renormalizada g tem dimensão $\mu^{(4-n)/2}$, e os campos W^a têm dimensão $\mu^{(n-2)/2}$. Estas propriedades resultam do fato de que a ação $S = \int d^n x L$ deve ser uma quantidade adimensional. Será conveniente, no que se segue, definir novos parâmetros renormalizados cujas dimensões físicas sejam independentes de n . Desta forma, estes parâmetros terão dimensões iguais àquelas exibidas pelos parâmetros físicos em 4 dimensões. Por exemplo, introduziremos uma cons-

tante de acoplamento renormalizada adimensional \hat{g} dada por:

$$g_0 = Z_3^{-1/2} g = Z_3^{-1/2} \mu^{\frac{4-n}{2}} \hat{g} \quad (3.51)$$

Para deduzir a equação do grupo de renormalização, basta notar que as funções de Green não renormalizadas, são independentes de μ (38)

$$\mu \frac{d}{d\mu} T_B^N \quad (3.52)$$

onde T_B^N denota a função de Green não renormalizada própria de N pontos. Sendo que a teoria é renormalizável, teremos para a função de Green renormalizada T^N :

$$T^N = (Z_3^{1/2})^N T_B^N \quad (3.53)$$

onde usamos (3.2) e o fato de que T^N representa a função de Green própria, tendo as linhas externas amputadas. De (3.52) e (3.53) obteremos, usando a regra de diferenciação em cadeia, duas equações:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \hat{g}} + \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial \lambda_\nu} + N\gamma \right) T^N = 0 \quad (3.54)$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial \hat{g}} + \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial \lambda_\nu} - 2\gamma \right) Z_3 = 0 \quad (3.55)$$

onde os parâmetros β , α e γ são dados respectivamente por:

$$\beta = \mu \frac{\partial \hat{g}}{\partial \mu} \Big|_{g^B, \lambda^B} ; \quad \alpha_\nu = \mu \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial \mu} \Big|_{g^B, \lambda^B} ; \quad \gamma = \mu \frac{\partial \ln Z_3^{1/2}}{\partial \mu} \Big|_{g^B, \lambda^B} \quad (3.56)$$

Usando as equações (3.2), (3.3) e (3.5), teremos que:

$$\beta = \hat{g} \gamma \quad \alpha_\nu = \lambda_\nu \gamma \quad (3.57)$$

Assim, usando (3.56) e o fato de que Z_3 é independente do parâmetro λ , vemos que γ e β serão funções independentes de gauge⁽³⁹⁾. Em virtude destas relações, e usando o fato de que T^N é também uma função de grau zero em λ vem que:

$$\lambda_\nu \frac{\partial T^N}{\partial \lambda_\nu} = 0 \quad (3.58)$$

Em consequência destas relações, as equações do grupo de renormalização se simplificam consideravelmente no gauge axial. Em particular, (3.54) e (3.55) reduzem-se respectivamente às equações:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \gamma \hat{g} \frac{\partial}{\partial \hat{g}} + N \gamma \right) T^N = 0 \quad (3.59)$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \gamma \hat{g} \frac{\partial}{\partial \hat{g}} - 2 \gamma \right) Z_3 = 0 \quad (3.60)$$

Para resolver a equação (3.59), introduziremos um parâmetro que escala simultaneamente todos os momentos externos que entram em T^N $P_i = P_{i,0} \bar{\xi}$. A solução, como se sabe⁽⁴⁰⁾, pode ser obtida em termos de uma constante de acoplamento efetiva $\bar{g}(t)$ onde $t = \ln \bar{\xi}$, que satisfaz a equação:

$$\frac{d}{dt} \bar{g}(t) = \beta[\bar{g}(t)] \quad (3.61)$$

onde $\bar{g}(t)$ satisfaz a condição de contorno $\bar{g}(0) = \hat{g}$.

Para obter β , notemos que (3.49) pode ser escrita, em termos do parâmetro $\bar{z} = \frac{1}{4-n}$ como:

$$Z_3 = 1 + \frac{11}{24} C_{YM} \hat{g}^2 \bar{z} \quad (3.62)$$

Assim, de (3.56) e (3.57) resulta que em ordem mais baixa teremos:

$$\beta(g) = -\frac{11}{48\pi^2} C_{YM} \hat{g}^2 \quad (3.63)$$

Note que o sinal menos na função β está diretamente relacionado com o fato de que o coeficiente de \bar{z} , em (3.62), é positivo. Este comportamento determina a liberdade assintótica, isto é, $\bar{g}(t)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. De fato, de (3.61) e (3.63) teremos;

$$\frac{\bar{g}^2(t)}{\hat{g}^2} = \frac{1}{1 + \frac{11}{24} C_{YM} \hat{g}^2 t} + O(\hat{g}^4 t) \quad (3.64)$$

Claramente, os resultados (3.63) e (3.64) são idênticos àqueles obtidos em gauges covariantes^(40,41), o que é de se esperar, pois estas quantidades são independentes de gauge. É interessante notar a relação entre (3.62) e (3.64) se fizermos nesta última $t \rightarrow \bar{z}$. Para entender esta relação, considere a solução da equação (3.60) que é dada por:

$$Z_3(\bar{z}, \hat{g}) = Z_3[1, \bar{g}(\bar{z})] \exp -2 \int_0^{\bar{z}} \gamma(t') dt' \quad (3.65)$$

Esta equação pode ser simplificada, observando que, em virtude da relação $\beta = \gamma \hat{g}$, a relação (3.61) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dz} \ln \bar{g}(z) = \gamma(z)$$

(3.66)

Usando esta equação, obteremos de (3.65) o resultado que:

$$Z_3(z, g) = Z_3[1, \bar{g}(z)] \frac{\hat{g}^2}{\bar{g}^2(z)}$$

(3.67)

Este resultado extremamente simples, é consequência direta das identidades de Ward no gauge axial e mostra que a constante de acoplamento efetiva é diretamente relacionada com a constante de renormalização da função de onda Z_3 . Veremos no próximo capítulo que esta relação também será útil no estudo do problema do comportamento infravermelho das teorias de gauge.

4. DIVERGÊNCIAS INFRAVERMELHAS EM TEORIAS NÃO-ABELIANAS

Vimos na secção precedente que a teoria de Yang-Mills pura é assintoticamente livre. Esta propriedade importante será mantida, se considerarmos uma teoria de gauge na qual os campos de Yang-Mills interagem com um multipletto de férmions $\Psi = (\Psi_1 \dots \Psi_s)$, via uma interação descrita pela seguinte Lagrangeana:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \bar{\Psi} (\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu + m) \Psi$$

(4.1)

onde a derivada covariante \mathcal{D}_μ é dada por:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig t^a w_\mu^a$$

(4.2)

Pode-se mostrar⁽⁴⁰⁾, que a teoria continua assintoticamente livre, mesmo quando há vários múltiplos fermionicos com os campos de Yang-Mills. Por exemplo, se o grupo de gauge é $SU(3)$ e os férmions formam a representação fundamental (i.e., $S=3$) podemos ter até 16 múltiplos ψ^r ($r=1 \dots 16$) de forma que a teoria continua sendo assintoticamente livre. Por outro lado, se quebrarmos a simetria de gauge via os campos escalares de Higgs, a teoria deixa de ter esta propriedade fundamental que, como sabemos, é exibida pelas interações fortes. Por este motivo, uma teoria do tipo descrito pela Lagrangeana acima, foi proposto por Gell-Mann como um candidato para uma teoria das interações fortes, recebendo o nome de Cromodinâmica Quântica (QCD).

Por outro lado, em virtude de termos uma teoria de gauge sem quebra espontânea de simetria, a teoria terá divergências infravermelhas devido ao fato dos bosons vetoriais terem massa zero. Existe a interessante possibilidade que não será discutida aqui, de que estas divergências modifiquem o potencial efetivo a grandes distâncias de forma a confinar os quarks e os gluons^(42,43). Para um estudo de vários outros aspectos relacionados com as divergências infravermelhas em Eletrodinâmica Quântica ou em Cromodinâmica Quântica referimos o leitor para as referências (44,45) e (46-49) respectivamente.

4.a. Exponenciação das divergências principais em processos envolvendo partículas externas de massa zero.

Vamos considerar processos contendo somente partículas de massa zero nas linhas externas. Estas partículas podem ser gluons ou então quarks se m for igual a zero na equação

(4.1). Sabemos que nos gráficos de Feynman com linhas internas representando partículas de massa zero, encontraremos em geral divergências infravermelhas. No nosso caso, as singularidades que resultam das partículas externas serem de massa zero sobrepõem-se às divergências infravermelhas. As singularidades resultantes terão o comportamento proporcional a $\ln^2 m'$ por loop, onde m' é uma massa fictícia dos gluons. Equivalentemente, na regularização dimensional, as singularidades serão proporcionais a $1/\epsilon^2$ onde $\epsilon = 4 - n$. Neste caso, chamaremos de divergências infravermelhas principais aquelas que em L loops serão proporcionais a $(g^2 \frac{1}{\epsilon^2})^L$. Mostraremos nesta seção que estas singularidades somam-se em uma exponencial decrescente. Para isto, usamos o fato, a ser provado no apêndice, de que no gauge axial (e também de Coulomb) as divergências principais aparecem somente nas partes de auto-energia das partículas externas. Usaremos a regularização dimensional como um cut-off infravermelho, devido ao fato de preservar a invariança de gauge.

Seja $W_{\mu}^{aB}(x)$ o campo não-renormalizado de Yang-Mills e definiremos a quantidade N^B via a relação:

$$\langle 0 | W_{\mu}^{aB}(0) | \vec{p}^0, e \rangle = N^{aB} e_{\mu} (2p_0)^{-1/2} \quad (4.3)$$

onde o estado de uma partícula tem o vetor de polarização e_{μ} . No gauge axial N^B é função de λp , onde λ_{μ} é o vetor que define o gauge. Depois de subtrairmos as divergências ultravioletas usando a constante de renormalização Z_3 (veja eq. (3.1)), obteremos de (4.3) a relação:

$$\langle 0 | W_{\mu}^a | \vec{p}^0, e \rangle = Z_3^{-1/2} N^{aB} e_{\mu} (2p_0)^{-1/2} = N^a e_{\mu} (2p_0)^{-1/2} \quad (4.4)$$

No que se segue, vamos supor que as divergências ultravioletas já foram subtraídas de forma que a dimensão do espaço tempo n é escolhida maior que 4 para regularizar as divergências infravermelhas (maiores detalhes serão discutidos na próxima secção). Consideremos então um processo de espalhamento com momentos externos $p_1 \dots p_E$. Os elementos da matriz S terão a forma:

$$S(p_1, \dots, p_E; n) = F(\lambda; p_1, \dots, p_E; n) \prod_{r=1}^E N^r(\lambda p_r; n) \quad (4.5)$$

onde F é calculado dos diagramas próprios sem inserções de auto-energia nas linhas externas. Nesta equação usamos o fato importante de que a matriz S é independente do parâmetro de gauge λ .

O índice r na função N^r denota os vários tipos de partículas que participam da reação. Para discutir a estrutura destes fatores que são funções adimensionais, lembremos que temos na nossa teoria um parâmetro que define a escala desta teoria. Além disto, como já mencionamos, a constante de acoplamento g tem dimensão igual a $(4-n)/2$ unidades de massa $g = \mu^{(4-n)/2} \hat{g}$, que define a constante renormalizada adimensional \hat{g} (veja eq. (3.51)). Assim, por razões puramente dimensionais, a função N^r terá a forma:

$$N^r = N^r [g^2 (\lambda p)^{(n-4)}, n] = N^r \left[\hat{g}^2 \left(\frac{\lambda p}{\mu} \right)^{(n-4)}, n \right] \quad (4.5)$$

Nesta equação, usamos o fato de que, sendo o propagador dos campos vetoriais uma função de grau zero no parâmetro de gauge, podemos, sem perda de generalidade, escolher λ como

sendo um parâmetro adimensional com norma igual a 1, $\lambda^2 = 1$.
Expandindo em potenciais de \hat{g} e retendo somente as divergências principais, teremos:

$$N^r(\lambda, p_r, \mu, n) = 1 + \sum_{k \geq 1} a_k^r \left[\hat{g}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\lambda \cdot p_r}{\mu} \right)^{n-4} \right]^k \quad (4.6)$$

onde significam termos menores de pelo menos um fator ε .
Definindo agora:

$$-\frac{1}{\varepsilon} = \zeta \quad e \quad \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda p}{\mu} \equiv x \quad (4.7)$$

vemos de (4.6) que N^r será, neste caso, efetivamente uma função de uma só variável:

$$N^r = N^r(\hat{g}^2 \zeta^2 e^{-2x/\zeta}) \quad (4.8)$$

onde usamos a propriedade de que $a^u = e^{u \ln a}$. Em seguida, faremos uso da propriedade fundamental, justificada no apêndice, de que:

$$F = \hat{g}^{\varepsilon-2} \left[F_0(p_r, \lambda) + \hat{g}^2 \zeta F_1(p_r, \lambda) + \sum_{k \geq 2} \hat{g}^{2k} \zeta^{2k-2} F_k(p_r, \lambda) + \dots \right] \quad (4.9)$$

que traduz o fato de que F não contém divergências principais infravermelhas. Nesta equação $\hat{g}^{\varepsilon-2} F_0$ denota a contribuição para F na aproximação de Born.

Mostraremos agora, que (4.8) e (4.9) implica na exponenciação das divergências principais infravermelhas na matriz S definida em (4.5). Para isto, tomaremos o logaritmo

da equação (4.5), de forma que teremos:

$$\ln S = \ln F + \sum_{r=1}^E \ln N^r \quad (4.10)$$

Estes logaritmos terão formas similares às dadas pelas equações (4.6) e (4.9), isto é:

$$\ln F = \ln (\hat{g}^{E-2} F_0) + \hat{g}^2 \bar{c} G_1 + \sum_{k \geq 2} \hat{g}^{2k} \bar{c}^{2k-2} G_k + \quad (4.11)$$

$$\ln N^r = \sum_{k \geq 1} b_k^r (\hat{g}^2 \bar{c}^2 e^{2x_r/\bar{c}})^k + \dots \quad (4.12)$$

$$\ln S = \ln S_0 + \sum_{k \geq 1} \hat{g}^{2k} \bar{c}^{2k} S_k \quad (4.13)$$

Na equação (4.13) S_0 é a aproximação de Born e os coeficientes S_k são funções somente dos invariantes p_r, p_r' , mas não de λ . Por outro lado, em (4.11) os fatores G_k dependem em geral do parâmetro de gauge. Substituindo as relações acima na equação (4.10) teremos que:

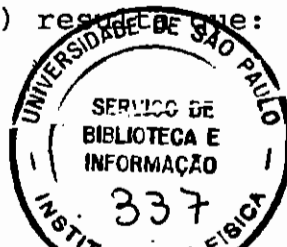
$$b_k^r = 0 \quad k \geq 2 \quad (4.14)$$

$$G_1 = -2 \sum_r b_1^r x_r + \text{constante} \quad (4.15)$$

$$S_1 = \sum_r b_1^r \quad ; \quad S_k = 0 \quad k \geq 2 \quad (4.16)$$

Comparando as equações (4.13) e (4.16) resulta que:

$$S = S_0 \exp \hat{g}^2 \bar{c}^2 \sum_r b_1^r \quad (4.17)$$



isto é, as divergências infravermelhas principais somam-se em uma função exponencial na matriz S . Esta exponencial é determinada pelos fatores b_3^r , que podem ser obtidos considerando as contribuições em um loop das funções N^r .

4.b. Comportamento infravermelho das funções de auto-energia

Nesta secção apresentaremos uma discussão das divergências infravermelhas das funções de auto-energia que determinam, como vimos acima, a exponencial das divergências principais em teorias de Yang-Mills. Como já mencionamos, usaremos a regularização dimensional para regularizar tanto as divergências ultravioletas quanto aquelas infravermelhas^(50, 51). Para isolar^{as} divergências infravermelhas de uma maneira sistemática, procederemos da seguinte forma. Primeiramente, a dimensão do espaço-tempo n é escolhida menor que 4 para regularizar as divergências ultravioletas, com o momento externo fora da camada de massa. Em virtude deste fato, não teremos neste caso, divergências infravermelhas. Subtraindo as divergências ultravioletas, obteremos uma função regular no ponto $n = 4$. Faremos então, uma continuação analítica para $n > 4$ com a finalidade de regularizar as divergências infravermelhas. Estas aparecem quando, finalmente, o momento externo é posto na camada de massa, sob forma de polos no ponto $n = 4$, as divergências principais tendo um polo duplo na ordem mais baixa de perturbação.

Para ilustrar estas propriedades e calcular b_1^w , vamos considerar a função própria de dois pontos dos bosons vetoriais $\overline{\Pi}_{\lambda\lambda}$, mostrada na figura 6:

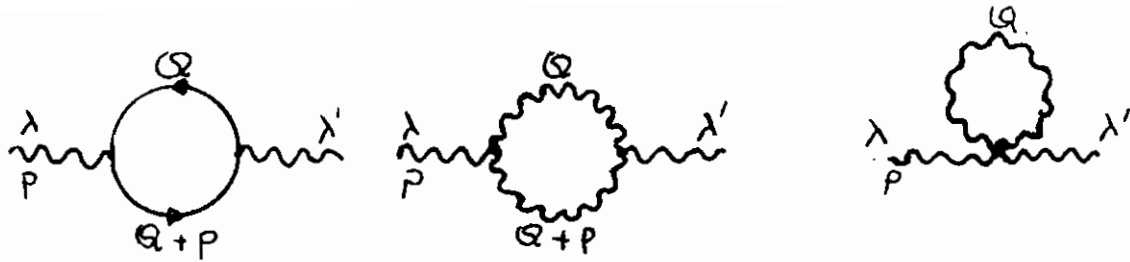


Fig. 6 - Diagrama de Feynman para a função de dois pontos $\overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}$

Claramente, sendo que as partículas de Faddeev-Popov são livres, estas não contribuem para a função $\overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}$, no gauge axial. As contribuições dos diagramas acima, serão dadas respectivamente por :

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}^a &= \hat{g}^2 T(R) \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n Q \text{Tr} \left\{ \gamma_\lambda (\not{p} + \not{Q}) \gamma_{\lambda'} \not{Q} \right\} \\ &\times \frac{1}{Q^2} \frac{1}{(p+Q)^2} \end{aligned} \quad (4.18a)$$

onde $T(R)$ é definido por:

$$T(R) \delta^{ab} = \text{Tr} (t^a t^b) \quad (4.18b)$$

com as matrizes t^a dadas pela relação (4.2)

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}^b &= \frac{1}{2} \hat{g}^2 C_{YM} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n Q V_{\lambda\mu\nu}(p, Q, p-Q) \times \\ &\times D_{\nu\nu'}(p-Q) V_{\lambda'\mu'v'}(p, Q, p-Q) D_{\mu'\mu}(Q) \end{aligned} \quad (4.19a)$$

Nesta equação, o operador de Casimir C_{YM} foi definido por (3.29) e o propagador $D_{\mu'\mu}$ na equação (3.50). $V_{\lambda\mu\nu}$ representa a função de três pontos dos campos vetoriais, sendo dada, usando a Lagrangeana (4.1), por:

$$V_{\lambda\mu\nu}(\rho, \Omega, \rho - \Omega) = (2\Omega + \rho)_\lambda \delta_{\mu\nu} + (\rho - \Omega)_\mu \delta_{\nu\lambda} - (2\rho + \Omega)_\nu \delta_{\lambda\mu} \quad (4.19b)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda\lambda'}^c &= \frac{1}{2} \hat{g}^2 C_{YM} (\delta_{\lambda\mu} \delta_{\lambda'\mu'} + \delta_{\lambda\mu'} \delta_{\lambda'\mu} - 2 \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}) \times \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \Omega D_{\mu\mu'}(\Omega) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Mantendo a linha externa ρ fora da camada de massa, isto é, $\rho^2 \neq 0$, obteremos para $\Pi_{\lambda\lambda'}^a$ com $n < 4$, a expressão:

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda\lambda'}^a &= - \frac{4i T(R)}{3} \frac{\hat{g}^2}{16\pi^2} \Gamma(2 - \frac{n}{2}) (\rho^2)^{\frac{n-4}{2}} (\delta_{\lambda\lambda'} \rho^2 + \\ &- \rho_\lambda \rho_{\lambda'}) + \dots \end{aligned} \quad (4.21a)$$

onde representa termos finitos quando $n \rightarrow 4$. Note que a função Gama $\Gamma(2 - \frac{n}{2})$ é regular quando $n < 4$.

Consideremos agora a equação (4.19a). O cálculo é bastante complicado por um lado, devido ao grande número de termos presentes nesta equação. O outro fator que leva a complicações é devido aos denominadores $\lambda \Omega$ presentes em $D_{\mu\mu'}$, de forma que teremos integrais com 4 propagadores diferentes na parametrização usual de Feynman.

Depois de um longo cálculo obteremos:

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}^b &= i \frac{\hat{g}^2}{16\pi^2} C_{YM} \left\{ \frac{1}{2} (p^2)^{\frac{n-4}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \times \right. \\
&\times \left[\frac{1}{3} B\left(\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{n-2} \delta_{\lambda\lambda'} p^2 + p_\lambda p_{\lambda'} \right) + \right. \\
&+ \left. B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) ([6n-5] \delta_{\lambda\lambda'} p^2 + [6-7n] p_\lambda p_{\lambda'}) \right] + \\
&+ 4 (p^2)^{\frac{n-4}{2}} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) B(2, 4-n) (\delta_{\lambda\lambda'} p^2 - p_\lambda p_{\lambda'}) + \dots
\end{aligned}$$

onde B representa a função Beta. (52) (4.21b)

Finalmente, considerando a equação (4.20), podemos reduzir todos os termos para integrais do tipo dado pela equação (2.16). Sendo que estas integrais dão uma contribuição nula na regularização dimensional, concluímos que o gráfico (c) da Fig. (6) não contribui de fato para a função $\overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}$.

Notemos das equações (4.21a) e (4.21b), que existe um domínio para $n < 4$ no qual estas expressões são funções bem definidas. Quando $n = 4$ teremos polos associados com as divergências ultravioletas. Das expressões acima, a contribuição contendo os polos será dada por:

$$\overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}^P = \frac{2\hat{g}^2}{24\pi^2} \frac{1}{n-4} (4T(R) - 11C_{YM}) (\delta_{\lambda\lambda'} p^2 - p_\lambda p_{\lambda'})$$

(4.22)

Podemos notar que a parte de polo que é proporcional a C_{YM} nesta equação, dará para a constante de renormalização da função de onda Z_3 , a mesma contribuição que aquela obtida anteriormente, usando relações de dispersão (veja, por exemplo eq. (3.62)). Em seguida, subtraindo as divergências ultravioletas das pela equação (4.22), obteremos, de (4.21a) e (4.21b):

$$\Pi_{\lambda\lambda'}^r = \Pi_{\lambda\lambda'}^a + \Pi_{\lambda\lambda'}^b - \Pi_{\lambda\lambda'}^p \quad (4.23)$$

para a função de dois pontos renormalizada.

Vamos agora fazer uma continuação analítica para $n > 4$ da função renormalizada de dois pontos $\Pi_{\lambda\lambda'}^r$. Pondo agora o momento externo na camada de massa (c.m.) obteremos, neste caso, usando as relações (4.18a), (4.19a) e (4.23) que a contribuição para a função $\Pi_{\lambda\lambda'}^r$ será dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda\lambda'}^{r,c.m.} = & \frac{i\hat{g}^2}{24\pi^2} \frac{1}{n-4} (5C_{YM} - 4T(R)) P_{\lambda\lambda'} + \\ & + \frac{i\hat{g}^2}{32\pi^2} C_{YM} (-1)^{\frac{n-4}{2}} \pi^{\frac{4-n}{2}} (\rho_L^2)^{\frac{n-4}{2}} \Gamma(3 - \frac{n}{2}) \times \\ & \times \left\{ 2B(\frac{n}{2} - 2, 5-n) \left[2B(2, n-4) - B(1, n-4) + \frac{1}{(n-6)(n-3)} \right] \times \right. \\ & \times \left[\lambda_\nu \rho_\lambda P_{\nu\lambda'} + \lambda_\nu \rho_{\lambda'} P_{\nu\lambda} \right] \frac{1}{\lambda \cdot p} + 2(-1)^{n-4} B(\frac{n}{2} - 2, 5-n) \times \\ & \times \frac{1}{\rho_L^2} P_{\lambda\mu} P_{\lambda'\mu} + 2[1 + (-1)^{n-4}] B(\frac{n}{2} - 2, 5-n) B(n-4, 1) \times \\ & \times \frac{\lambda_\mu \lambda_\nu}{(\lambda \cdot p)^2} P_{\lambda\mu} P_{\lambda'\nu} - 8 B(n-4, 1) B(\frac{n}{2} - 2, 5-n) P_{\lambda\lambda'} + \\ & + \text{termos finitos} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde a função $P_{\lambda\lambda'}$ é dada por:

$$P_{\lambda\lambda'} = p^2 \delta_{\lambda\lambda'} - p_\lambda p_{\lambda'} \quad (4.25)$$

Notemos que existe um domínio para $n > 4$ no qual todas as expressões acima são funções bem definidas. Os polos que se manifestam quando $n = 4$ são associados com as divergências infravermelhas. Podemos observar que, em geral, em contraste com os polos ultravioletas (4.22), as expressões contendo os polos infravermelhos dependem do parâmetro de gauge λ . Contudo, a contribuição dos polos duplos para a função

$$N^W = 1 + \frac{1}{2i} \left(\epsilon_\lambda \frac{1}{p^2} \Pi_{\lambda\lambda'}^r(p) \epsilon_{\lambda'} \right)_{p^2=0} \quad (4.26)$$

que determina a exponencial contendo as divergências infravermelhas principais, é independente do parâmetro λ , como é de se esperar, pois a matriz S deve ser uma quantidade independente de gauge. Usando (4.24) teremos que:

$$N^W - 1 = -\frac{\hat{g}^2}{4\pi^2} C_{YM} \frac{1}{(n-4)^4} \quad (4.27)$$

de onde vemos que b_1^W , definido em (4.12) será dado por:

$$b_1^W = -\frac{1}{4\pi^2} C_{YM} \quad (4.28)$$

Analogamente, podemos calcular a função b_1^F , que caracteriza as divergências infravermelhas principais da função de dois pontos dos campos fermiônicos de massa zero. Teremos que: (veja também a eq. (A.9))

$$b_1^F = -\frac{1}{4\pi^2} C_F \quad (4.29)$$

onde o operador de Casimir C_F é dado por:

$$\delta_{ij} C_F = (t^a t^a)_{ij} \quad (4.30)$$

É interessante notar que, a não ser pelo fator de Casimir C_F , b_1^F é uma função análoga à expressão (4.28) que caracteriza b_1^W .

Finalmente, de (4.17), (4.28) e (4.29), vemos que as divergências infravermelhas principais na matriz S , para processos envolvendo partículas de massa zero, somam-se em uma exponencial decrescente dada por:

$$S = S_0 \exp \left\{ - \frac{\hat{g}^2}{4\pi^2} \frac{1}{\epsilon^2} \sum_r C_r \right\} \quad (4.31)$$

onde o somatório é tomado sobre todas as partículas externas que têm massa zero.

4.c. Divergências infravermelhas principais em processos de espalhamento de partículas massivas.

Nesta secção, vamos estudar as mais importantes divergências infravermelhas num processo típico contendo somente partículas externas massivas: espalhamento de quarks de massa m por um potencial externo. Neste caso, as divergências infravermelhas em 1 loop darão uma contribuição proporcional a $\hat{g}^2 \epsilon$. Chamaremos então de divergências infravermelhas principais aquelas que em L -loops terão um comportamento proporcional a $(\hat{g}^2 \epsilon)^L$. O processo acima, foi estudado detalhadamente até a quarta ordem^(53,54) no gauge de Feynman. Foi mostrado que, nesta ordem, a amplitude de espalhamento satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{g}} S(q^2, \bar{g}) = C_F N\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \bar{g}^{-2}(\bar{g}) S(q^2, \bar{g}) \quad (4.32)$$

onde C_F foi definido em (4.30), $\bar{g} = \frac{1}{4-n}$ e $\bar{g}(\bar{g})$ é a constante efetiva de acoplamento definido pelo grupo de renormalização (veja, por exemplo, eq. (3.64)). Finalmente, a função $N\left(\frac{q^2}{m^2}\right)$ onde $q^2 = (p-p')^2$, é dada por:

$$N(q^2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1+r^2}{2r} \ln \frac{1+r}{1-r} - 1 \right) \quad r = \left(1 + \frac{4m^2}{q^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

Gráficos típicos contribuindo para esta amplitude na quarta ordem são mostrados na figura 7.

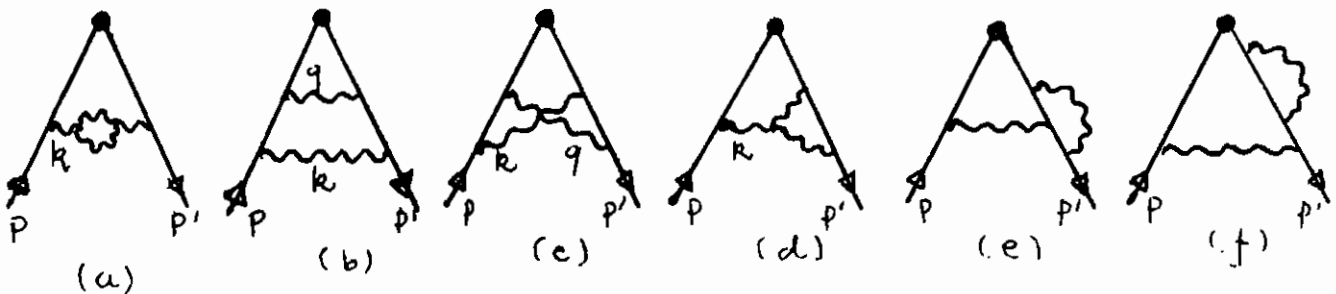


Fig. 7 - Diagramas de Feynman para a amplitude de espalhamento de quarks em quarta ordem.

Nesta figura, o vértice representa a ação do potencial externo cuja natureza exata é irrelevante para o nosso estudo.

Podemos notar que se a equação (4.32) fosse verdadeira em todas as ordens, ela implicaria então, na exponenciação das divergências infravermelhas principais. Sendo que no gauge axial, a constante efetiva de acoplamento \bar{g} é diretamente

te relacionada com a constante de renormalização (eq.(3.67)) é natural tentar entender esta equação no gauge axial.

Considere, por exemplo, a figura (7a), onde as divergências infravermelhas vêm da região onde os momenta tendem a zero. Usando, por exemplo, (4.21b), (4.22) e (4.23), vemos que a função renormalizada de dois pontos de bosons vetoriais é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\lambda\lambda'}^r &\equiv \overline{\Pi}_{\lambda\lambda'} - \Pi_{\lambda\lambda'}^p = \\
 &= -\frac{11}{24\pi^2} \frac{C_{YM}}{\epsilon} \hat{g}^2 \left[\left(\frac{k}{\mu}\right)^\epsilon - 1 \right] (\delta_{\lambda\lambda'} k^2 - k_\lambda k_{\lambda'}) \\
 &\equiv \Pi (\delta_{\lambda\lambda'} k^2 - k_\lambda k_{\lambda'})
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

Nesta equação $\overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}$ denota a função de dois pontos não renormalizada e $\Pi_{\lambda\lambda'}^p$ representa a parte contendo os polos ultravioletas. Os termos ... são regulares no limite $k \rightarrow 0$. Por outro lado, vemos que neste limite, que determina as divergências infravermelhas, a função Π torna-se singular. Quando $k \rightarrow 0$ teremos que $\overline{\Pi}_{\lambda\lambda'}^r(k \rightarrow 0) = -\Pi_{\lambda\lambda'}^p + \dots$ de forma que as divergências infravermelhas estão diretamente relacionadas com as ultravioletas.

Por outro lado, o diagrama (7b) contribuirá somente para a parte das divergências principais que é proporcional a $C_F^2 \hat{g}^4$. Em contraste, o gráfico (7c) não contribuirá para as divergências principais. A razão é que neste diagrama as divergências infravermelhas somente podem aparecer quando k e q tendem simultaneamente a zero, ao passo que na figura (7b) elas aparecem para qualquer valor de q desde que k tenda a zero.

Finalmente, vamos considerar os três últimos diagramas na figura (7). Os diagramas (d) e (e) representam as correções de vértice do acoplamento dos gluons aos férmions, ao passo que o diagrama (f) representa as correções de auto-energia dos férmions. Contudo, no gauge axial, em virtude da identidade (2.27c), as funções de vértice $t^a T_\mu(p, p+k)$ e a função de dois pontos dos férmions Σ são relacionadas pela equação:

$$k_\mu T_\mu(p, p+k) = \Sigma(p+k) - \Sigma(p) \quad (4.35)$$

exatamente como na Eletrodinâmica Quântica. Em virtude desta equação, estes diagramas não contribuirão para a equação (4.32). Estas contribuições, juntamente com aquelas do mesmo tipo que resultam das correções nas linhas externas cancelam-se, fato que pode também ser verificado explicitamente.

Vamos agora considerar os diagramas contendo as correções de auto-energia mostrados na figura 8 que contribuem em quarta ordem para a amplitude de espalhamento.

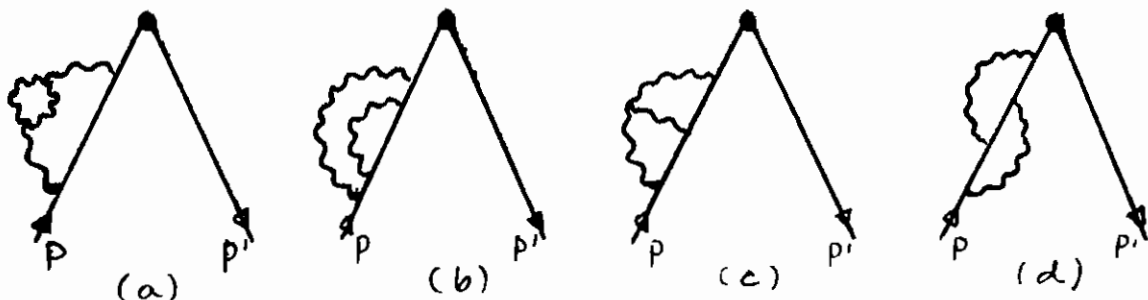


Fig. 8 - Diagramas de Feynman para a função irreduzível de auto-energia Σ^* .

É suficiente considerar a contribuição para a função irreduzível de auto-energia Σ^* . A razão é que a contribuição

total para a amplitude é dada em termos da inversa da função C que é determinada pelo comportamento de Σ^* perto da camada de massa:

$$\Sigma^*(p, \lambda) = i C(p, \lambda) (i\not{p} + m) \quad (4.36)$$

A função C pode ser obtida diferenciando-se esta relação com respeito ao momento externo e tomando, em seguida, os elementos de matriz da expressão resultante entre spinores na camada de massa. Procedendo desta maneira, a contribuição para $C(p, \lambda)$ será aquela mostrada na figura (9).

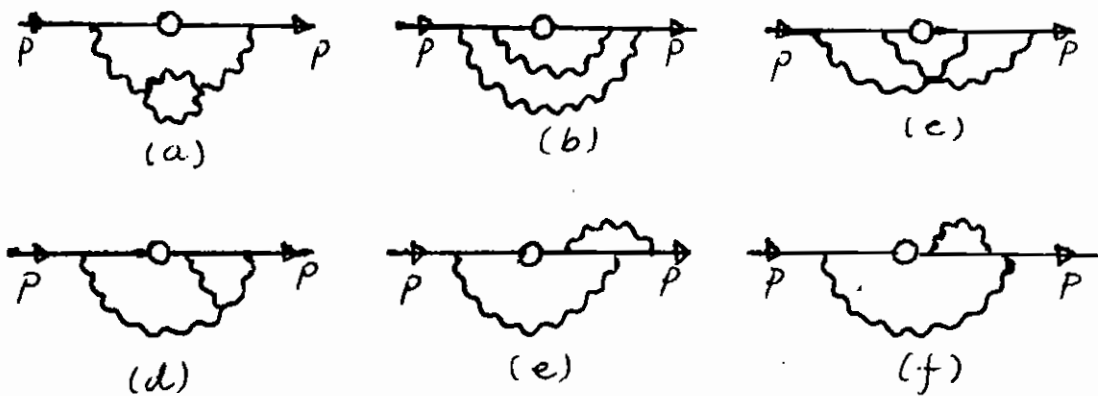


Fig. 9 - Diagramas de Feynman para a função $C(p, \lambda)$

Nesta figura, o vértice o representa o ponto onde é aplicada a diferenciação com respeito ao momento externo. (Devemos incluir também todos os gráficos simétricos). É importante notar que estes diagramas têm uma estrutura similar àquela mostrada na figura (7), de forma que podemos aplicar o mesmo raciocínio discutido anteriormente. Em particular, o diagrama (9c) não contribuirá para as divergências principais. Por outro lado, os três últimos diagramas também não contribuirão para as divergências infravermelhas principais em virtude do cancelamento que é consequência da identidade (4.35).

Em consequência da identidade (4.35) que é válida em todas as ordens de perturbação, este cancelamento deverá ocorrer também em todas as ordens.

Além disto, os gráficos contendo linhas cruzadas de bosons vetoriais não poderão contribuir para as divergências principais, de forma que um gráfico típico contribuindo para estas, deverá ter a estrutura mostrada na figura 10.

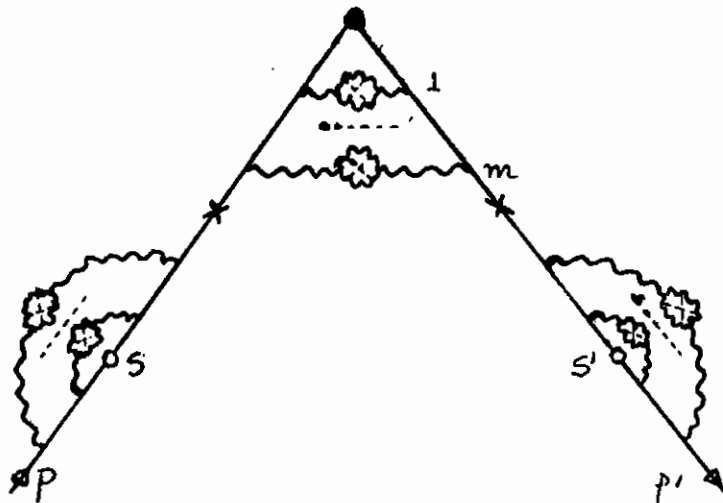


Fig. 10 - Representação de um diagrama geral de Feynman que contribui para as divergências infravermelhas principais. Os vértices \times denotam que as linhas estão amputadas.

Para calcular esta contribuição de uma maneira simples, usaremos o seguinte artifício. Em adição aos gráficos da figura (10), vamos considerar também todo o conjunto de gráficos obtidos deste, permutando-se de todas as maneiras possíveis as linhas dos bosons vetoriais (com a condição de que os vértices \bullet e \circ permaneçam sempre no centro dos gráficos). Como discutimos acima, isto não modificará o resultado para as divergências infravermelhas principais. Contudo, este procedimento permite-nos usar a importante fórmula:

$$\sum_p \frac{1}{a_1 (a_1 + a_2) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_n)} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n} \quad (4.37)$$

Para aplicar esta fórmula, onde $a_1, (a_1+a_2) \dots (a_1+a_2+\dots+a_n)$ representam os vários denominadores dos férmions, usaremos a aproximação eikonal⁽⁴³⁾ que, como sabemos, não modifica o comportamento das divergências infravermelhas principais. Esta aproximação consiste em escrever

$$\frac{-i(p+Q)+m}{(p+Q)^2+m^2} \gamma_\mu u(p) \approx \frac{-2i p_\mu}{2pQ} u(p) = -i \frac{p_\mu}{p \cdot Q} u(p) \quad (4.38)$$

igualdade que é válida aproximadamente quando o momento interno Q é muito menor do que os momentos externos, que é precisamente o caso no qual estamos interessados.

Assim, usando (4.37), (onde a_k é igual a $p \cdot Q_k$ ou a $p' \cdot Q_k$) obteremos na aproximação eikonal que a contribuição do gráfico mostrado na figura (10) é dada por:

$$G_{mss'} = \frac{1}{m!} \frac{1}{s!} \frac{1}{s'!} [I(p, p', \lambda)]^m \left[\frac{-1}{2} I(p, p, \lambda) \right]^s \times \left[\frac{-1}{2} I(p', p', \lambda) \right]^{s'} \quad (4.39)$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ aparece da forma usual na contribuição das funções de auto-energias nas linhas externas e a função $I(p, p', \lambda)$ é dada por:

$$I(p, p', \lambda) = \frac{i g^2 C_F}{(2\pi)^{4+\epsilon}} p_\lambda p'_\lambda \int d^{4+\epsilon} Q \tilde{D}_{\lambda\lambda'}(Q, \lambda) \times \frac{1}{(p \cdot Q)(p' \cdot Q)} \quad (4.40)$$

Nesta expressão, $\tilde{D}_{\lambda\lambda'}$ representa o propagador completo dos campos de bosons vetoriais renormalizados, sendo indicados pe

lo símbolo  na figura 10.

Somando sobre todos os valores de m, s e s' , obtemos para a contribuição total o resultado:

$$G = \sum_0^{\infty} G_{mss'} = \exp \left\{ I(\rho, \rho', \lambda) - \frac{1}{2} I(\rho, \rho, \lambda) - \frac{1}{2} I(\rho', \rho', \lambda) \right\} \quad (4.41)$$

Exceto para o fato de que $\tilde{D}_{\lambda\lambda'}$ representa o propagador completo, I tem a estrutura análoga a uma correção de um loop para o processo de espalhamento dos quarks (Veja, por exemplo, fig. (7a)). Apesar de que cada fator em (4.41) depende explicitamente de λ , esta dependência de gauge se cancelará, como veremos adiante, na soma destes fatores. A razão, obviamente, é que estamos calculando correções para a matriz S que deve ser uma quantidade independente de gauge.

Em seguida, vamos observar que, na verdade, estamos interessados somente na contribuição para as divergências infravermelhas principais do propagador $\tilde{D}_{\lambda\lambda'}$. Lembramos que estas são caracterizadas pelo fator $\hat{g}^2 \epsilon$ em cada loop. Por outro lado, o fator $\hat{g}^2 \epsilon$ está diretamente relacionado com o fator Π definido em (4.34) que é proporcional a $\hat{g}^2 \epsilon$ quando $Q=0$. Desta maneira, a contribuição das divergências infravermelhas principais para o propagador renormalizado $\tilde{D}_{\lambda\lambda'}$ será dada pela aproximação da cadeia:

$$\tilde{D}_{\lambda\lambda'} = D_{\lambda\lambda'} + D_{\lambda\alpha} \Pi_{\alpha\beta} D_{\beta\lambda'} + \dots = D_{\lambda\lambda'} (1 - \Pi)^{-1} \quad (4.42)$$

onde $D_{\lambda\lambda'}$ representa o propagador livre dos campos vetoriais. Note que a expressão $(1 - \Pi)^{-1}$ contém justamente as divergências

cias principais da função $\frac{1}{\bar{g}^2} \bar{g}^2(t)$ onde $t = \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{\mathcal{Q}}{\mu} \right)^\epsilon - 1 \right] \approx \ln \frac{\mathcal{Q}}{\mu}$ (veja, por exemplo, eq. (3.64)).

Isto pode ser entendido também usando a equação (3.67), que mostra que nesta aproximação, \bar{Z}_3 é proporcional a \hat{g}^2/\bar{g}^2 . Mas \bar{Z}_3 é diretamente relacionada com a função própria $\Pi_{\lambda\lambda'}$. Assim, como o propagador $\tilde{D}_{\lambda\lambda'}$ é essencialmente o inverso de $\Pi_{\lambda\lambda'}$, segue-se que $\tilde{D}_{\lambda\lambda'}$ será proporcional, neste caso, a \bar{g}^2/\hat{g}^2 .

Usando então, (4.42), é possível verificar que a parte dependente de gauge na expressão (4.41) cancela, de forma que teremos:

$$G = \exp \left[J(p, p') - \frac{1}{2} J(p, p) - \frac{1}{2} J(p', p') \right] \quad (4.43a)$$

onde

$$J(p, p') = \frac{i C_F}{(2\pi)^{4+\epsilon}} (p, p') \int \frac{d^{4+\epsilon} \mathcal{Q}}{\mathcal{Q}^2} \bar{g}^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[\left(\frac{\mathcal{Q}}{\mu} \right)^\epsilon - 1 \right] \right\} \times \\ \times \frac{1}{(p, \mathcal{Q})(p', \mathcal{Q})} \quad (4.43b)$$

Finalmente, efetuando a integração, podemos mostrar que esta relação produz justamente a exponencial contendo as divergências infravermelhas principais que é obtida integrando-se a equação (4.32):

$$S(q^2, t) = S_0 \exp \left[C_F N(q^2) \int_0^t dt' \bar{g}^2(t') \right] \quad (4.44)$$

Podemos, portanto, concluir que a equação (4.32) é válida em todas as ordens de perturbação, para as divergências principais. Usando (3.63) e (3.64), poderemos ainda escrever esta equação na seguinte forma:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial z} + \beta(\hat{g}) \frac{\partial}{\partial \hat{g}} + \hat{g}^2 N\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \right] S\left(\frac{q^2}{m^2}, z, \hat{g}^2\right) = 0 \quad (4.45)$$

que tem uma estrutura similar às equações de renormalização.

O problema seguinte consiste em investigar o efeito das outras divergências infravermelhas nesta equação. Os resultados obtidos em ordens mais baixas da teoria de perturbação⁽⁵⁵⁾, indicam que o efeito destas divergências consiste em adicionar uma dimensão anômala infravermelha $\gamma_1(q^2/m^2)$, à função $N(q^2/m^2)$ na equação (4.45).

APÊNDICE

Vamos agora provar a equação (4.9) que, como vimos, é fundamental para a exponenciação das divergências infravermelhas principais.

No gauge axial é possível usar a formulação não-relativista da teoria de perturbação que pode ser deduzida diretamente do formalismo Hamiltoniano⁽¹⁹⁾. Nesta formulação, as singularidades resultam das degenerescências entre os estados intermediários e o estado inicial⁽⁵⁶⁾. Isto pode acontecer de duas maneiras. Partículas de baixa energia podem ser emitidas, processo que altera a energia inicial por quantidades arbitrariamente pequenas. Este fenômeno dá origem às verdadeiras divergências infravermelhas. Por outro lado, para partículas externas de massa zero, bosons vetoriais (de massa zero) emitidos quase paralelamente irão produzir também estados quase degenerados. Para o caso das divergências infravermelhas principais, estes dois efeitos operam conjuntamente. Os termos duplamente divergentes são obtidos quando cada denominador de energia tende a zero por estas duas razões.

Como um exemplo, vamos considerar a função de auto-energia dos férmions. Escolhendo por conveniência $\lambda = (0, i)$, a função Σ terá a forma:

$$\Sigma(p) = \gamma p \Sigma_1(p^2, p_0) + \gamma_0 p^2 \Sigma_2(p^2, p_0) \quad (\text{A.1})$$

Estaremos interessados em calcular a função $N_F - 1$ que, de acordo com a equação (4.12), determina o coeficiente b_F^1 que é relevante para a exponencial, contendo as divergências infravermelhas principais. Temos que:

$$(N_F - 1)u(\vec{p}^0) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p^2} \gamma \cdot p \sum u(\vec{p}^0) \right]_{p_0 = |\vec{p}^0|} \quad (\text{A.2})$$

Usando agora (A.1) obteremos:

$$N_F - 1 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{p_0} \bar{u} \frac{\partial \sum}{\partial p_0} u \right]_{p_0 = |\vec{p}^0|} \quad (\text{A.3})$$

Na teoria de perturbação não relativista, a contribuição mais singular para \sum será na ordem mais baixa dada por:

$$\sum \approx \frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \sum_{e, u'} \int d^{n-1} \vec{k} (\vec{e} \cdot \vec{\gamma} u' \bar{u}' \vec{e} \cdot \vec{\gamma}) \times$$

$$\times \frac{1}{4 |\vec{k}^0| |\vec{p}^0 - \vec{k}^0| (p_0 - |\vec{k}^0| - |\vec{p}^0 - \vec{k}^0|)} \quad (\text{A.4})$$

onde \vec{e} denota o vetor de polarização do boson vetorial e u' representa o spinor do fêrmion no estado intermediário. Substituindo (A.4) na equação (A.3) obteremos:

$$N_F - 1 \approx - \frac{g^2 C_F}{16 (2\pi)^3} \sum_{e, u'} \int d^{n-1} \vec{k} (\bar{u} \vec{e} \cdot \vec{\gamma} u' \bar{u}' \vec{e} \cdot \vec{\gamma} u) \times$$

$$\times \frac{1}{|\vec{k}^0| |\vec{p}^0| |\vec{p}^0 - \vec{k}^0| (|\vec{k}^0| + |\vec{p}^0 - \vec{k}^0| - |\vec{p}^0|)^2} \quad (\text{A.5})$$

Escolheremos agora os eixos de forma que:

$$\vec{p}^0 = (0, p) \quad \vec{k}^0 = k(\theta \hat{u}, 1) \quad \vec{e} = (\hat{e}_1 - \theta \hat{u} \cdot \hat{e}_2) \quad (\text{A.6})$$

onde \vec{u} e \vec{e} são vetores unitários no espaço de dimensão $(n-2)$ com $\theta \ll 1$, $k \ll p$ na região relevante de integração. Então teremos:

$$|\vec{k}| + |\vec{p} - \vec{k}| - |\vec{p}| \simeq \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{u}' \cdot \vec{e} \cdot \vec{p} u \simeq 2 \theta p \vec{u} \cdot \vec{e} \delta_{uu'} \quad (\text{A.8})$$

Usando estas aproximações, a equação (A.5) se reduz a:

$$N_F - 1 \simeq - \frac{g^2 C_F}{(2\pi)^3} \int d^{n-1} \vec{k} \frac{1}{k^3} \frac{1}{\theta^2}$$

$$\simeq - \frac{g^2 C_F}{4\pi^2} \frac{1}{(n-4)^2} + \dots \quad (\text{A.9})$$

onde mostramos explicitamente somente a contribuição dos polos duplos. Desta relação, poderemos então deduzir a expressão (4.29) para b_1^F .

Voltando agora para a linha principal do argumento, notemos que a teoria de perturbação é complicada em virtude da existência dos vértices de 4 pontos. Contudo, estes vértices diminuem o número de denominadores de energia para a dada ordem em g . Consequentemente, eles reduzirão o grau máximo das divergências numa dada ordem, de forma que poderemos desprezar a contribuição destes fatores no nosso caso. Um termo geral de ordem g^{E+2L-2} terá então $E+2L-3$ denominadores de energia (a aproximação de Born é da ordem g^{E-2} tendo

$E - 3$ denominadores) e $L - 3$ momentos de integração \vec{k}_s ($s = 1, 2, \dots, L$). Como exemplo, considere a figura mostrada no diagrama abaixo.

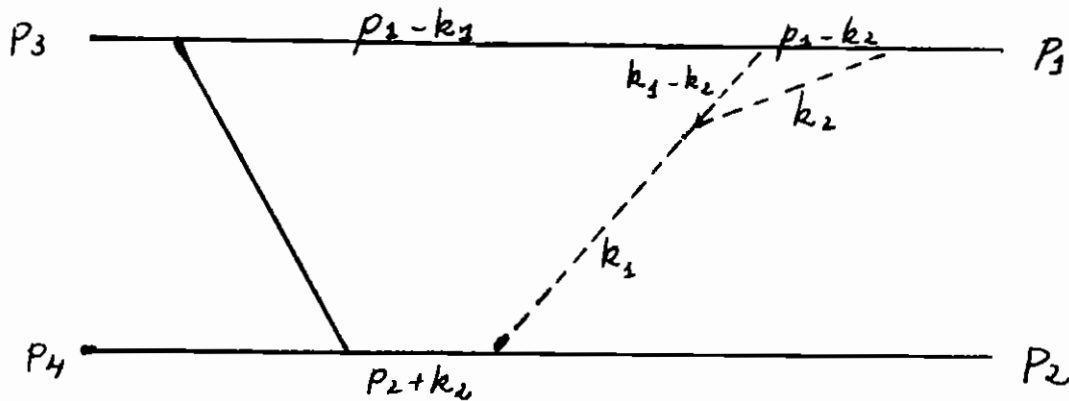


Figura 11

Nesta figura, as linhas contínuas representam o gráfico na aproximação de Born. As linhas tracejadas denotam partículas de baixa energia que são quase paralelas a um dos momentos externos.

Vamos nos concentrar nas singularidades que resultam das integrações angulares, de forma que manteremos os valores dos $|k_s|$ arbitrariamente pequenos, mas fixos. As singularidades de massa nas quais estamos interessados, resultam da região angular na qual alguns dos \vec{k}_s são quase paralelos a um dos momentos externos, por exemplo a P_1 . Uma divergência principal vai resultar somente se todos os \vec{k}_s forem quase paralelos a P_1 . Seja θ_s o ângulo entre \vec{k}_s e \vec{P}_1 e vamos tomar cada θ_s proporcional a uma quantidade pequena δ . O espaço de fase tenderá a zero como $\delta^{(n-2)L}$. Cada um dos $2L$ denominadores tenderá a zero no máximo como δ^2 (veja, por exemplo, eq. (A.7)). Por outro lado, cada um dos $2L$ vértices dará um fator δ , devido ao fato de que a amplitude tende a zero na configuração de partículas paralelas em virtude da conservação de helicidade (veja como exemplo, eq. (A.8)). Desta forma, os

fatores de δ serão dados por:

$$\delta^{(n-2)L} \delta^{-4L} \delta^{2L} = \delta^{(n-4)L}$$

Isto corresponde precisamente à possibilidade de que cada integral seja logaritmicamente divergente sobre os ângulos como também sobre os $|\vec{k}_s|$, resultando daí um comportamento proporcional a $(1/\epsilon)^{2L}$.

Contudo, a não ser no caso dos gráficos de auto-energia nas linhas externas discutidos acima, este grau de divergência máxima não poderá ser alcançado. A razão é que, uma das linhas internas, por exemplo \vec{k}_1^0 , deve ser juntada com uma outra linha externa, que no nosso exemplo tem momento p_2 .

(Supomos que as linhas do gráfico de Born não são paralelos entre si). Mas, isto diminuirá a grande divergência no denominador por um fator δ^2 , e no numerador por um fator δ que vem de uma configuração paralela. Assim teremos um total de

$\delta^{(n-4)L+1}$, que faz com que uma das integrações seja finita. Para $L=1$ isto implica na forma mostrada pelo termo proporcional à $\hat{g}^2 \tau$ na equação (4.9).

Para obter o resultado mais forte quando $L > 1$, vamos abrir temporariamente a linha \vec{k}_1^0 , e vamos efetuar o restante das integrações angulares. Teremos agora $(L-1)$ integrações e $2(L-1)$ denominadores de energia. O momento \vec{k}_1^0 entra em pelo menos um destes denominadores de forma que, mantendo θ_1 fixo, nem todos os denominadores se anularão quando $\theta_2 = \theta_L$ tendem a zero. Resulta que estas integrações angulares irão produzir uma divergência cujo grau máximo será τ^{L-2} . Esta função poderia, por exemplo, comportar-se como $\tau^{L-2} \ln \theta_1$. Mas a última integração, sendo convergente fará sempre com que a divergência máxima seja ainda proporcional a τ^{L-2} , de onde podemos concluir a validade da equação (4.9).

REFERÊNCIAS

1. P.W.Higgs, Phys. Rev. Lett. 12; 132 (1964).
2. F.Englert e R.Brout, Phys. Rev. Lett. 13:321 (1964).
3. S.Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19: 1264 (1967).
4. A. Salam, "Elementary Particle Theory", ed. N. Svartholm, (Almquist and Forlag) Stockholm, (1968).
5. C.N.Yang e R.Mills, Phys. Rev. 96: 191 (1954).
6. G.'t Hooft, Nucl. Phys. B33: 173 (1971).
7. E.S.Abers e B.W.Lee, Phys. Reports,9: N 1 (1973).
8. H.Fritzsch, M.Gell-Mann e H.Leutwyler, Phys. Lett. 47B: 365 (1973).
9. S.Coleman e D.Gross, Phys. Rev. Lett. 31, 851 (1973).
10. S.Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31: 494 (1973).
11. L.D.Faddeev e V.N.Popov, Phys. Lett. B25: 29 (1967).
12. J.Frenkel, Lett. Nuovo Cimento 13: 529 (1975).
13. G.t'Hooft, Nucl. Phys. 35B, 167 (1971).
14. B.W.Lee e J.Zinn-Justin, Phys. Rev. D5: 3121; 3137 e 3155 (1972).
15. J. Zinn-Justin, "Lecture Notes in Physics", 37 , eds. J.Ehlers et al, Springer Verlag, Berlin (1975).
16. G. Costa e M.Tonin, Nuovo Cimento 5; 29 (1975).
17. J.C.Taylor, "Gauge Theories of Weak Interactions", Cambridge University Press (1976).
18. R.L.Arnouitt e S.I.Fickler, Phys. Rev. 127: 1821 (1962).
19. R.N.Mohapatra, Phys. Rev. D8:2215 (1971).
20. W.Konetschny e W.Kummer, Nucl. Phys. B100:106 (1975).
21. J. Frenkel, Phys. Rev. D13: 2325 (1976).
22. B.W.Lee, Phys. Lett. 46B: 214 (1973).
23. J. Frenkel, Nuovo Cimento, 32A; 313 (1976).

24. J.Frenkel e J.C.Taylor, Nucl. Phys. B109: 439 (1976).
25. J.Frenkel e J.C.Taylor, Nucl. Phys. B116: 185 (1976).
26. J.Frenkel e R.Meuldermans, Phys. Lett. 65B: 64 (1976).
27. J.Frenkel, Phys. Lett. 65B: 383 (1976).
28. G.'tHooft e M.Veltman, Nucl. Phys. 44B: 189 (1972).
29. C.Bollini e J.Giambiagi, Nuovo Cimento 12B: 20 (1972).
30. G.Leibbrandt, Rev. Mod. Phys. 47: 849 (1975).
31. S.Coleman, "Laws of Hadronic Matter", Proceeding of the 1973 International Summer School "Ettore Majorana", Erice, Italy, ed. A.Zichichi, Academic Press, New York (1975).
32. G.Källén, "Quantum Electrodynamics", Allen and Unwin, London (1972), p.215.
33. A.Ali e J.Bernstein, Phys. Rev. D12: 503 (1975).
34. W.Konetschny e W.Kummer, Viena preprint (1976).
35. C.G.Callan, Phys. Rev. D5: 1670 (1972).
36. K.Symanzik, Commun. Math. Phys. 23: 49 (1972).
37. G.'tHooft, Nucl. Phys. B61: 455 (1973).
38. H.Fleming e J.Frenkel, Nuovo Cimento 30A: 93 (1975).
39. J.Frenkel, Phys. Lett. 60B: 74 (1975).
40. D.J.Gross e F.Wilczek, Phys. Rev. D8: 3633 (1973).
41. H.D.Politzer, Phys. Rev. Lett. 30: 1346 (1973).
42. J.M.Cornwall e G.Tiktopoulos, Phys. Rev. Lett. 35: 338 (1975).
43. J.M.Cornwall e G.Tiktopoulos, Phys. Rev. D13: 3370 (1976).
44. D.R.Yennie, S.C.Frautschi e H.Suura, Ann. Phys. 13: 379 (1961).
45. G.Grammer e D.R.Yennie, Phys. Rev. D8: 4332 (1973).
46. C.P.Korthals-Altes e E. de Rafael, Phys. Lett. 62B: 320 (1976).

47. T.Appelquist et al., Phys. Rev. Lett. 36: 768 (1976).
48. T.Kinoshita e A.Ukawa, Phys. Rev. D13: 1573 (1976).
49. E.Poggio e H.Quinn, Phys. Rev. D14: 578 (1976).
50. R.Gastmans e R.Meuldermans, Nucl. Phys. B63: 277 (1973).
51. W.J.Marciano e A.Sirlin, Nucl. Phys. B88: 86 (1975).
52. I.S.Gradshteyn e I.M.Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press (1965).
53. J.Frenkel, R.Meuldermans, I.Mohammad e J.C.Taylor, Phys. Lett. 64B: 211 (1976).
54. J.Frenkel, R.Meuldermans, I.Mohammad e J.C.Taylor, Oxford preprint 67 (1976).
55. J.Frenkel e J.C.Taylor, Oxford preprint 88 (1976).
56. T.D.Lee e M.Nauenberg, Phys. Rev. 133: 1549 (1964).