

# Universidade de São Paulo

## Instituto de Física

SBI-IFUSP



305M810T3244

*Expansões Perturbativas para uma Classe de Sistemas Quânticos de  
Dois Níveis sob Interações Periodicamente e Quase-Periodicamente  
Dependentes do Tempo*

João Carlos Alves Barata



*Tese de Livre-Docência submetida ao  
Instituto de Física da Universidade de São Paulo*

São Paulo, abril de 1999

*Este trabalho é dedicado à minha mãe, Ilda Maria Costa Alves Barata, pela comemoração de seus 71 anos.*

*Este trabalho é também dedicado à memória de meu pai, João Joaquim Alves Barata (1926-1993), e à de meu avô, José da Costa Abrantes (1901-1997).*

*So sah ich denn, daß nichts besseres ist, als daß ein Mensch fröhlich sei in seiner Arbeit; denn das ist sein Teil. Denn wer will ihn dahin bringen, daß er sehe, was nach ihm geschehen wird?*

Prediger 3, 22.

Da tradução da bíblia por Martin Lutero.

*E eu vi § benesse alguma §*

*salvo o homem se aprazer § no seu fazer §§*

*eis aí § seu quinhão §§§*

*Pois quem o fará sobrevir § para ver §§*

*aquilo § que será no após-ele?*

Eclesiastes 3, 22.

Da tradução do Eclesiastes por Haroldo de Campos.

**Resumo.** Neste trabalho estudamos a equação de Schrödinger para uma classe de sistemas de dois níveis submetidos à ação de interações externas periodicamente e quase-periodicamente dependentes do tempo e na situação na qual diferença de energia entre os níveis não-perturbados,  $2\epsilon$ , é suficientemente pequena em comparação com a magnitude da interação externa.

Ao contrário de outros métodos de expansão, como a expansão de Dyson, o método que aqui apresentamos não sofre com a presença dos chamados “termos seculares”.

Sob condições especiais demonstramos no caso quase-periódico que a equação de Schrödinger tem soluções em termos de séries de potências formais em  $\epsilon$ , cujos coeficientes são funções quase-periódicas do tempo.

No caso periódico mostramos que a equação de Schrödinger tem soluções dadas em termos de séries de potências convergentes em  $\epsilon$ . Devido à ausência de temos seculares pudemos demonstrar convergência absoluta e uniforme das séries de Fourier associadas à função de onda e pudemos demonstrar convergência absoluta da série de potências em  $\epsilon$  que fornece a chamada “freqüência secular” e das séries de potência em  $\epsilon$  que fornecem os coeficientes das séries de Fourier das funções de onda.

## Abstract

**Abstract.** We study the Schrödinger equation of a class of two-level systems, under the action of periodic and quasi-periodic time-dependent external fields, in the situation where the energy difference  $2\epsilon$  between the free energy levels is sufficiently small with respect to the strength of the external interaction.

In contrast to other expansion methods, like in the Dyson expansion, the method we present is not plagued by the presence of “secular terms”.

Under suitable conditions we show in the quasi-periodic case that the Schrödinger equation has a solution in terms of a formal power series in  $\epsilon$ , with coefficients which are quasi-periodical functions of the time.

In the periodic case, we show that the Schrödinger equation has a solution in terms of converging power series expansions in  $\epsilon$ . Due to the absence of secular terms, we were able in the periodic case to prove absolute and uniform convergence of the Fourier series involved in the computation of the wave functions and to prove absolute convergence of the  $\epsilon$ -expansions leading to the “secular frequency” and to the coefficients of the Fourier expansion of the wave function.

**Agradecimentos.** Meus primeiros agradecimentos são dirigidos ao Prof. Walter Felipe Wreszinski, cujo apoio e amizade tive o privilégio de desfrutar ao longo de vários anos e cuja atitude científico-intelectual levou-me desde há muito a orientar meus interesses científicos à direção que tomaram, ou seja, à da Física-Matemática. Este trabalho deve sua existência a ele por múltiplas razões. Por ter sido através de suas propostas que me senti atraído pelo estudo dos problemas aqui tratados, por seu estímulo quando os primeiros resultados despontaram, sem o qual eu poderia tê-los desconsiderado como mera curiosidade, por várias sugestões técnicas e pela sugestão de referências e de conexões que em muito me estimularam.

Agradeço também aos colegas e amigos Domingos Humberto Urbano Marchetti, Carlos Moreira, César Rogério de Oliveira e Paulo Afonso Faria da Veiga por várias conversas sobre este trabalho que muito me ajudaram. Foi, por exemplo, graças às sempre inteligentes perguntas do César que senti-me compelido a tratar o caso de interações periódicas com o método que eu originalmente desenvolvera para o caso geral quase-periódico.

Por fim, agradeço à minha esposa, Maria de Fátima Carvalho, por tudo mais.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
1.1	Prólogo . . . . .	11
1.2	Descrição do Sistema e sua Relevância em Física . . . . .	12
1.2.1	Partícula de Spin 1/2 em Campo Magnético Externo. Oscilações de Rabi . .	14
1.2.2	Outro Exemplo. O Efeito Stark em Átomos de Dois Níveis . . . . .	19
1.3	Um Roteiro de Leitura . . . . .	20
1.4	Comentários sobre a-Notação Empregada . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Algumas Observações Gerais e Históricas</b>	<b>25</b>
2.1	As Equações de Riccati Generalizadas . . . . .	25
2.2	A Equação de Hill e o Teorema de Floquet . . . . .	28
2.3	Funções Quase-Periódicas e “Almost”-Periódicas . . . . .	32
<b>3</b>	<b>O Propagador e a Equação de Riccati Generalizada</b>	<b>36</b>
3.1	Demonstração do Teorema 3.1 . . . . .	38
3.2	O Teorema 3.1 e sua Interpretação . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Interações Quase-Periódicas. Eliminação dos Termos Seculares</b>	<b>42</b>
4.1	A Função $g$ como uma Série Formal de Potências . . . . .	42

4.2 A Solução Particular $g$ e sua Dependência em $\epsilon$ . . . . .	45
4.2.1 Uma Escolha Ingênua das Constantes $\alpha_n$ . Termos Seculares . . . . .	46
4.3 A Escolha das Constantes $\alpha_n$ . Eliminação dos Termos Seculares . . . . .	48
4.3.1 Eliminação dos Termos Seculares no Caso $M(q^2) \neq 0$ . . . . .	48
4.3.2 Eliminação dos Termos Seculares no Caso $M(q^2) = 0$ . . . . .	50
4.3.3 O Caso $f$ Constante. Uma Conjectura . . . . .	53
<b>5 Interações Quase-Periódicas. Séries de Fourier</b>	<b>56</b>
5.1 Quase-Periodicidade das Funções $c_n$ . . . . .	56
5.1.1 A Decomposição de Fourier das Funções $c_n$ . . . . .	57
5.1.2 Convoluçãoes de Exponenciais . . . . .	60
5.1.3 Uma Cota Superior para $ Q_{\underline{m}}^{(2)} $ . . . . .	62
5.1.4 Uma Cota Superior para $ C_{\underline{m}}^{(2)} $ . . . . .	63
5.1.5 Cotas Superiores Recursivas para $ C_{\underline{m}}^{(n)} $ com $n \geq 3$ . . . . .	64
5.1.6 O Problema da Convergência da Série de Potências em $\epsilon$ . . . . .	68
5.2 Quase-Periodicidade das Funções $e_n$ . . . . .	69
5.2.1 A Decomposição de Fourier de $e_n$ . . . . .	69
5.2.2 Uma Cota Superior para $ E_{\underline{m}}^{(1)} $ . . . . .	70
5.2.3 Cotas Superiores Recursivas para $ E_{\underline{m}}^{(n)} $ com $n \geq 2$ . . . . .	71
<b>6 Interações Periódicas com <math>F_0 = 0</math>. Convergência</b>	<b>74</b>
6.1 Introdução . . . . .	74
6.1.1 O Resultado Principal . . . . .	75
6.2 As Relações Recursivas no Caso Periódico . . . . .	78
6.3 Cotas Superiores Indutivas para os Coeficientes de Fourier . . . . .	82

6.3.1 Caso I . . . . .	83
6.3.2 Caso II . . . . .	84
6.4 A Expansão de Fourier para a Função de Onda . . . . .	85
6.4.1 A Forma de Floquet para a Função de Onda. A Decomposição de Fourier e a Freqüência Secular . . . . .	85
6.4.2 Observações sobre a Unitaridade do Propagador . . . . .	90
6.5 Discussão sobre as Classes de Soluções . . . . .	91
6.5.1 Um Exemplo Explícito . . . . .	92
6.5.2 Um Segundo Exemplo . . . . .	94
6.6 A Expansão Perturbativa para a Freqüência Secular . . . . .	95
6.7 O Efeito de Supressão de Tunelamento . . . . .	97
6.8 Alguns Gráficos . . . . .	99
<b>7 Interações Periódicas com <math>F_0 \neq 0</math></b>	<b>105</b>
7.1 A Estrutura dos Coeficientes $E_{\underline{m}}^{(n)}$ . . . . .	106
7.1.1 O Coeficiente $E_{\underline{m}}^{(1)}$ . . . . .	106
7.1.2 O Coeficiente $E_{\underline{m}}^{(2)}$ . . . . .	107
7.1.3 Os Coeficientes $E_{\underline{m}}^{(n)}$ , $n > 3$ . A Hipótese Indutiva . . . . .	108
7.2 Convergência. Cotas Superiores Indutivas . . . . .	110
7.2.1 A Função $g$ . . . . .	112
7.3 O Propagador, a Forma de Floquet e a Freqüência Secular . . . . .	113
<b>8 Conclusões</b>	<b>116</b>
<b>A A Função de Onda, a Equação de Hill e a Equação de Riccati Generalizada</b>	<b>119</b>
A.1 O Caso $\epsilon = 0$ . . . . .	120

A.2 O Caso $\epsilon \neq 0$ . . . . .	122
<b>B A Quase-Periodicidade de <math>q(t)</math></b>	<b>124</b>
<b>C A Relação entre <math>q</math> e <math>f</math></b>	<b>126</b>
<b>D A Função <math>\mathcal{Q}_1</math> e a Condição <math>M(\mathcal{Q}_1) \neq 0</math></b>	<b>130</b>
<b>E O Decaimento dos Coeficientes de Fourier de <math>q</math> e de <math>q^2</math></b>	<b>132</b>
E.1 O Caso Periódico. Demonstração da Proposição 6.1 . . . . .	134
<b>F Cotas Superiores para Convoluçãoes</b>	<b>136</b>
<b>G Números de Catalan. Cotas Superiores para as Constantes <math>K_n</math></b>	<b>138</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Prólogo

O estudo de sistemas de dois níveis sob interações externas dependentes do tempo é de relevância em várias áreas da Física, como na óptica quântica, na teoria de ressonância de spin ou em problemas de tunelamento. De particular importância são situações em que a interação externa é periodicamente ou quase-periodicamente dependente do tempo.

O problema de estudar a equação de Schrödinger de tais sistemas e determinar a natureza quase-periódica de suas soluções é relacionado a vários problemas clássicos da análise e da teoria das equações diferenciais ordinárias. Aplicações recentes à teoria do chamado “caos quântico” (vide [5] ou, para um texto de revisão com resultados recentes, [3]) ilustram também outra linha importante à qual aquele problema se associa.

No presente trabalho, que é baseado em [1] e [2], estudaremos a equação de Schrödinger e suas soluções em uma classe particular de sistemas de dois níveis sob interações dependentes do tempo.

Nossos resultados apontam para uma solução, possivelmente inédita, da mesma equação quando as interações externas são periodicamente dependentes do tempo. Nossos resultados nesse caso são não apenas exatos mas matematicamente rigorosos, pois demonstrações de convergência de todas as expansões em série serão apresentadas. Tão interessante quanto a solução encontrada é o método de solução desenvolvido, pois o mesmo utiliza-se de um procedimento original de eliminação de

termos seculares cuja relevância possivelmente não se limita às equações aqui tratadas.

Com os resultados aqui apresentados abre-se uma nova possibilidade de estudo matematicamente rigoroso de algumas propriedades de sistemas de dois níveis submetidos a interações periodicamente dependentes do tempo.

Acreditamos que as soluções obtidas, por serem expressas em termos de séries uniformemente convergentes, podem também prestar-se eficientemente ao estudo numérico de propriedades dos sistemas tratados, especialmente para tempos longos. De fato, estudos preliminares, brevemente discutidos na Seção 6.8, página 99, indicam que a solução encontrada é relativamente simples do ponto de vista algorítmico e pode ser usada em programas numéricos com erros controláveis.

## 1.2 Descrição do Sistema e sua Relevância em Física

Sistemas quânticos de dois níveis caracterizam-se por serem descritos em um espaço de Hilbert bidimensional, genericamente o espaço  $\mathbb{C}^2$ . Um operador Hamiltoniano dependente do tempo é, então, dado por uma família de matrizes auto-adjuntas agindo em  $\mathbb{C}^2$ , parametrizada pelo tempo  $t \in \mathbb{R}$ .

Iremos considerar neste trabalho sistemas de dois níveis descritos por um operador Hamiltoniano do seguinte tipo:

$$H_1(t) = H_0 + H_I(t) = \epsilon\sigma_3 - f(t)\sigma_1, \quad (1.1)$$

com  $t \in \mathbb{R}$ . Acima  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função do tempo  $t$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}$  é um parâmetro que representa metade da diferença entre os níveis de energia do Hamiltoniano “livre” (entenda-se, para  $f \equiv 0$ ) que aqui representamos em sua forma diagonal:  $H_0 := \epsilon\sigma_3$ . Os símbolos  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  denotam as matrizes de Pauli na sua representação usual:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O chamado “Hamiltoniano de interação”  $H_I(t) := -f(t)\sigma_1$  representa uma interação externa acoplada ao sistema, induzindo transições entre os dois auto-estados do Hamiltoniano livre  $H_0$ .

A equação de Schrödinger correspondente a (1.1) é<sup>1</sup>

$$i\partial_t \Psi(t) = H_1(t)\Psi(t), \quad (1.2)$$

com  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

Se efetuarmos uma transformação unitária independente do tempo representando uma rotação de  $\pi/2$  em torno do eixo 2 poderemos substituir o Hamiltoniano  $H_1(t)$  por

$$H_2(t) := (e^{-i\pi\sigma_2/4}) H_1(t) (e^{i\pi\sigma_2/4}) = \epsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3 \quad (1.3)$$

e a equação de Schrödinger torna-se

$$i\partial_t \Phi(t) = H_2(t)\Phi(t), \quad (1.4)$$

com

$$\Phi(t) := e^{-i\pi\sigma_2/4}\Psi(t). \quad (1.5)$$

É bem conhecido que funções de onda em instantes de tempo distintos estão conectadas entre si por uma transformação unitária. A saber, tem-se

$$\Phi(t) = U(t, s)\Phi(s), \quad (1.6)$$

onde o operador  $U(t, s)$ , denominado “*propagador*”, é um operador unitário para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Em particular,

$$\Phi(t) = U(t)\Phi(0) \quad (1.7)$$

conecta  $\Phi(t)$  com a “condição inicial” da equação de Schrödinger:  $\Phi(0)$ . Acima,  $U(t) := U(t, 0)$  e, com essa notação,

$$U(t, s) = U(t)U(s)^*, \quad (1.8)$$

para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Isso obviamente diz-nos que o conhecimento de  $U(t)$  é suficiente para o conhecimento de toda a evolução temporal.

O propagador  $U(t)$  pode ser expresso em termos de  $H_2(t)$  através da bem conhecida *expansão de Dyson*

$$U(t) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_0^t d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n H_2(\tau_1) \cdots H_2(\tau_n), \quad (1.9)$$

---

<sup>1</sup>Para simplificar adotaremos em todo este trabalho um sistema de unidades onde  $\hbar = 1$ .

que converge em norma uniformemente em qualquer intervalo compacto de tempo se  $H_2(t)$  for uma família uniformemente limitada de operadores, ou seja, se houver  $M \geq 0$ , constante, com  $\|H_2(t)\| \leq M$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Essa condição é automaticamente satisfeita em nosso caso se  $f$  for limitada. Para resultados ainda mais gerais sobre a série de Dyson, vide [26].

A unitaridade de  $U(t)$  para todo  $t$  é, portanto, de  $U(t, s)$ , segue também de (1.9). Vide [26].

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a equação (1.4) no regime em que  $|\epsilon|$  é pequeno em comparação com a interação externa representada pela função  $f$ . Para tal desenvolveremos um método especial de expansão em  $\epsilon$  que, no caso em que a função  $f$  é periódica, conduz a expressões para as funções de onda em termos de séries convergentes. Sendo este um trabalho de Física-Matemática enfatizamos aqui aspectos analíticos e demonstrações.

### 1.2.1 Partícula de Spin 1/2 em Campo Magnético Externo. Oscilações de Rabi

É interessante que apresentemos alguns exemplos concretos de sistemas físicos que se deixam descrever por um Hamiltoniano como (1.1). Com isso poderemos descrever algo sobre a origem histórica dentro da Física dos problemas que aqui tratamos.

Consideremos uma partícula de spin 1/2, digamos, um elétron, submetido a um campo magnético  $\mathbb{B}$ . Se designarmos por  $\Psi$  a parte spinorial de sua função de onda, já desacoplando sua dependência com as coordenadas espaciais,  $\Psi$  satisfará

$$i\partial_t \Psi = 2g\vec{s} \cdot \mathbb{B}(t)\Psi = g(B_1(t)\sigma_1 + B_2(t)\sigma_2 + B_3(t)\sigma_3)\Psi, \quad (1.10)$$

onde  $g$  é uma constante e  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  são as componentes de  $\mathbb{B}$ .

Vamos supor que  $\mathbb{B}$  seja composto por um campo magnético constante na direção 3 ao qual se sobrepõe um campo magnético dependente do tempo ortogonal à direção 3, por exemplo, o campo de uma onda eletromagnética monocromática de freqüência  $\omega$  que se propaga na mesma direção 3, e cujo comprimento de onda seja suficientemente maior que a região em que a partícula de spin 1/2 está localizada, de modo que possamos desprezar sua variação espacial.

Se a polarização dessa onda for *planar* ao longo do eixo 1, a equação de Schrödinger fica

$$i\partial_t\Psi = (gB_3\sigma_3 + gB_0 \cos(\omega t)\sigma_1)\Psi. \quad (1.11)$$

Esta última equação corresponde a um Hamiltoniano da forma (1.1).

Se a polarização dessa onda for *circular*, a equação de Schrödinger fica

$$i\partial_t\Psi = gB_3\sigma_3\Psi + gB_0 (\cos(\omega t)\sigma_1 + \sin(\omega t)\sigma_2)\Psi. \quad (1.12)$$

Definindo

$$\sigma_+ := \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad \text{e} \quad \sigma_- := \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2), \quad (1.13)$$

a equação (1.12) torna-se

$$i\partial_t\Psi = H_R(t)\Psi, \quad (1.14)$$

onde  $H_R(t)$  é o chamado *Hamiltoniano de Rabi*:

$$H_R(t) := \epsilon\sigma_3 + \beta(e^{-i\omega t}\sigma_+ + e^{i\omega t}\sigma_-) = \begin{pmatrix} \epsilon & \beta e^{-i\omega t} \\ \beta e^{i\omega t} & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

com  $\epsilon = gB_3$  e  $\beta := gB_0$ . Acima, usamos

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

A equação (1.14) foi resolvida por I. I. Rabi em [17]. Vamos descrever sua solução usando nossa notação.

Tomando a derivada temporal de ambos os lados de (1.14), teremos

$$\partial_t^2\Psi = -(H_R(t))^2\Psi - i(\partial_t H_R(t))\Psi. \quad (1.17)$$

Uma conta simples mostra que

$$(H_R(t))^2 = (\epsilon^2 + \beta^2)\mathbb{1}. \quad (1.18)$$

Além disso,

$$\partial_t H_R(t) = i\beta\omega \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Assim, podemos escrever

$$\partial_t^2 \Psi = -(\epsilon^2 + \beta^2) \mathbb{1} \Psi + \omega \begin{pmatrix} 0 & -\beta e^{-i\omega t} \\ \beta e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \Psi, \quad (1.20)$$

que, por conveniência, reescrevemos como

$$\partial_t^2 \Psi = -(\epsilon^2 + \beta^2 - \epsilon\omega) \mathbb{1} \Psi + \omega \begin{pmatrix} -\epsilon & -\beta e^{-i\omega t} \\ \beta e^{i\omega t} & -\epsilon \end{pmatrix} \Psi. \quad (1.21)$$

A relação (1.18) afirma que

$$(H_R(t))^{-1} = \frac{1}{\epsilon^2 + \beta^2} H_R(t). \quad (1.22)$$

Assim, (1.14) diz-nos que

$$\Psi = \frac{i}{\epsilon^2 + \beta^2} H_R(t) \partial_t \Psi. \quad (1.23)$$

Com isso, (1.21) fica

$$\partial_t^2 \Psi = -(\epsilon^2 + \beta^2 - \epsilon\omega) \mathbb{1} \Psi + \frac{i\omega}{\epsilon^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} -\epsilon & -\beta e^{-i\omega t} \\ \beta e^{i\omega t} & -\epsilon \end{pmatrix} H_R(t) \partial_t \Psi. \quad (1.24)$$

Uma conta simples mostra que

$$\begin{pmatrix} -\epsilon & -\beta e^{-i\omega t} \\ \beta e^{i\omega t} & -\epsilon \end{pmatrix} H_R(t) = \begin{pmatrix} -\epsilon & -\beta e^{-i\omega t} \\ \beta e^{i\omega t} & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & \beta e^{-i\omega t} \\ \beta e^{i\omega t} & -\epsilon \end{pmatrix} = -(\epsilon^2 + \beta^2) \sigma_3. \quad (1.25)$$

Com isso,

$$\partial_t^2 \Psi = -(\epsilon^2 + \beta^2 - \epsilon\omega) \mathbb{1} \Psi - i\omega \sigma_3 \partial_t \Psi, \quad (1.26)$$

que é uma equação diagonal, ou seja, separa as componentes de  $\Psi$ , a saber, da seguinte forma:

$$\partial_t^2 \psi_+ + i\omega \partial_t \psi_+ + (\epsilon^2 + \beta^2 - \epsilon\omega) \psi_+ = 0, \quad (1.27)$$

$$\partial_t^2 \psi_- - i\omega \partial_t \psi_- + (\epsilon^2 + \beta^2 - \epsilon\omega) \psi_- = 0. \quad (1.28)$$

Ambas as equações são resolvidas facilmente e a solução compatível com (1.14) é

$$\psi_+(t) = A e^{i\Omega_1 t} + B e^{i\Omega_2 t}, \quad (1.29)$$

$$\psi_-(t) = -e^{i\omega t} \left( A \frac{\epsilon + \Omega_1}{\beta} e^{i\Omega_1 t} + B \frac{\epsilon + \Omega_2}{\beta} e^{i\Omega_2 t} \right), \quad (1.30)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias a serem fixadas pelas condições iniciais e pela normalização da função de onda e

$$\Omega_1 := \frac{-\omega + \Omega_R}{2}, \quad (1.31)$$

$$\Omega_2 := \frac{-\omega - \Omega_R}{2}, \quad (1.32)$$

com

$$\Omega_R := \sqrt{(\omega - 2\epsilon)^2 + 4\beta^2}. \quad (1.33)$$

$\Omega_R$  é denominada *freqüência de Rabi*.

Para entender o significado físico de  $\Omega_R$  tomemos o caso em que  $\psi_+(0) = 1$  e  $\psi_-(0) = 0$  e calculemos

$$P(1/2 \rightarrow -1/2)(t) := |(\Psi(0), \sigma_1 \Psi(t))|^2 = |\psi_-(t)|^2 \quad (1.34)$$

que representa a probabilidade de transição entre o estado inicial de spin  $1/2$  e o estado com spin  $-1/2$  no instante  $t$ . Das condições iniciais segue facilmente que

$$A = -\frac{\epsilon + \Omega_2}{\Omega_R}, \quad B = \frac{\epsilon + \Omega_1}{\Omega_R}. \quad (1.35)$$

Daí, é imediato verificar que

$$|\psi_-(t)|^2 = \left( 2 \frac{(\epsilon + \Omega_1)(\epsilon + \Omega_2)}{\beta \Omega_R} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\Omega_R t}{2} \right). \quad (1.36)$$

Uma conta simples, usando as definições de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_R$ , mostra que

$$(\epsilon + \Omega_1)(\epsilon + \Omega_2) = -\beta^2. \quad (1.37)$$

Logo,

$$|\psi_-(t)|^2 = \left( \frac{2\beta}{\Omega_R} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\Omega_R t}{2} \right). \quad (1.38)$$

Isto mostra que a freqüência de Rabi é a freqüência com que o elétron “flutua” quanticamente entre seus dois auto-estados de spin em função da presença do campo magnético externo circularmente polarizado. Sem a componente circularmente polarizada teríamos  $B_0 = 0$  e, portanto,  $\beta = 0$  o que implicaria  $P(1/2 \rightarrow -1/2)(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$

Note-se que, pela definição (1.33),

$$\left( \frac{2\beta}{\Omega_R} \right)^2 \leq 1 \quad (1.39)$$

e só podemos ter a igualdade no caso “ressonante”  $\omega = 2\epsilon$ . Essa freqüência de “ressonância”  $2\epsilon = 2gB_3$  é denominada *freqüência de Larmor* e é igual à freqüência de precessão do spin do elétron quando submetido a um campo magnético constante na direção 3. O efeito de “ressonância” que mencionamos acima é denominado *princípio de ressonância magnética* e teve importância fundamental em inúmeras aplicações.

O caso de polarização planar leva à equação (1.11) e é, surpreendentemente, muito mais complexo. Todo o presente trabalho é dedicado ao tratamento do mesmo e suas generalizações.

O Hamiltoniano de (1.11) foi possivelmente tratado pela primeira vez em um trabalho notável de Bloch e Siegert [18]. Naquele trabalho os autores tratam do caso geral de polarização elíptica partindo da solução de Rabi (polarização circular) como primeira aproximação. Ainda que os autores não tenham tido preocupação quanto ao rigor matemático e à convergência do seu procedimento, o método que utilizam tem vários pontos em comum com o que desenvolvemos neste trabalho (e em [1] e [2]). Por exemplo, os autores também estudam uma equação de Riccati generalizada (mas distinta da que usaremos neste trabalho) que então tentam resolver com um Ansatz que os leva a uma equação diferencial transcendente (outro ponto que difere do nosso tratamento), que os mesmos transformam em uma equação integral, que tentam resolver perturbativamente (formalmente). Nessa solução perturbativa termos seculares também surgem e são eliminados ordem a ordem pela introdução de uma espécie de “contratermo”.

Dentre os trabalhos mais antigos sobre equações como (1.2) mencionamos também o importante trabalho de Autler e Townes [19], onde estes autores estudaram as soluções de (1.2) para o caso onde, em nossa notação,  $f(t) = -2\beta \cos(\omega t)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Seu trabalho é exato mas não-rigoroso e envolveu uma combinação do método de frações continuadas, para relacionar os coeficientes de Fourier das funções de onda e a freqüência secular, com análise numérica. Nenhuma prova é por eles oferecida que o método de frações continuadas converge e outras restrições não-justificadas são feitas de modo a transformar certas equações transcendentais que obtêm em equações algébricas de ordem baixas que, então, são resolvidas quer exatamente quer numericamente, este último caso, em especial, para campos fortes.

### 1.2.2 Outro Exemplo. O Efeito Stark em Átomos de Dois Níveis

Outro sistema físico onde o Hamiltoniano de (1.11) surge é aquele tratado por Autler e Townes em [19], a saber, o do efeito Stark em um átomo de dois níveis, que discutiremos informalmente aqui.

Consideremos um sistema quântico, digamos um elétron ligado a átomo, descrito por um Hamiltoniano dependente do tempo do tipo

$$H(t) = H_0 - \mathbb{E}(t) \cdot \vec{x} \quad (1.40)$$

onde  $\vec{x}$  é o operador de posição e  $\mathbb{E}(t)$  um campo elétrico externo aplicado dependente do tempo. Vamos supor que  $H_0$  tenha espectro discreto com autovetores  $\chi_i$  e autovalores  $\epsilon_i$ . Vamos supor também que  $[H_0, P] = 0$ , sendo  $P$  o operador de paridade, o que significa que os vetores  $\chi_i$  têm paridade bem definida. Esse fato implica  $(\chi_i, \vec{x} \chi_j) = 0$  para todo  $i$ . Vamos definir

$$\beta_{i,j}(t) := \mathbb{E}(t) \cdot (\chi_i, \vec{x} \chi_j). \quad (1.41)$$

É claro que  $\beta_{i,j} = \overline{\beta_{j,i}}$ , mas podemos sempre considerar  $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$  para um par  $\{i, j\}$  específico, bastando para tal multiplicar, digamos,  $\chi_j$  por uma fase conveniente.

Por fim vamos também supor que as quantidades  $\beta_{i,j}(t)$  sejam desprezíveis para todo  $t$  e para todo par  $\{i, j\}$  exceto para um par  $\{a, b\}$  e de forma também que os autovetores  $\chi_a$  e  $\chi_b$  não sejam degenerados.

Se nos restringirmos ao subespaço gerado por  $\chi_a$  e  $\chi_b$ , que pelas hipóteses acima é um subespaço invariante pela evolução temporal, e escrevermos os vetores desse subespaço na forma  $\Phi(t) = \psi_a(t)\chi_a + \psi_b(t)\chi_b$ , a equação de Schrödinger para vetores desse subespaço pode ser aproximada pelo par de equações

$$i\partial_t \psi_a = \epsilon_a \psi_a - \beta_{a,b}(t) \psi_b \quad (1.42)$$

$$i\partial_t \psi_b = -\beta_{a,b}(t) \psi_a + \epsilon_b \psi_b \quad (1.43)$$

onde escolhemos a fase de, digamos,  $\chi_b$  de modo a termos  $\beta_{a,b} = \beta_{b,a} \in \mathbb{R}$ , o que sempre é possível.

Normalizando os níveis de energia de modo que  $\epsilon_a = -\epsilon_b = \epsilon$  e redefinindo  $f(t) \equiv \beta_{a,b}(t)$ , o sistema de equações acima fica precisamente da forma (1.2), página 13.

Isto justifica a interpretação dada ao Hamiltoniano  $H_1$ , como sendo um operador diagonal perturbado com uma interação dependente do tempo que induz transições entre os dois auto-estados não perturbados.

\*

Os sistemas descritos acima continuaram a despertar interesse mesmo depois dos importantes trabalhos pioneiros que mencionamos. Vide [3] para um trabalho recente de revisão com novos resultados. Em [4] o caso de uma função  $f$  quase-periódica foi estudado e demonstrou-se para átomos de dois níveis sob um campo eletromagnético circularmente polarizado quase-periódico senoidal que o chamado operador de quase-energia generalizado do problema tem espectro puramente pontual, o que equivale a dizer que as funções de onda são quase-periódicas [5]-[12]. Para o caso de polarização planar resultados análogos são obtidos sob hipóteses adicionais sobre  $f$ .

### 1.3 Um Roteiro de Leitura

Permitimo-nos colocar aqui algumas recomendações quanto à leitura deste trabalho.

Na Seção 1.2, página 12, apresentamos o sistema que estaremos estudando e descrevemos alguns de seus exemplos básicos. Sua leitura é obviamente importante.

Na Seção 1.4, página 23, apresentamos um resumo eventualmente útil da notação e dos símbolos empregados e algumas poucas definições. O leitor poderá procurá-la quando a necessidade surgir.

No Capítulo 2, página 25, apresentamos para benefício do leitor algumas generalidades e breves notas históricas sobre equações de Bernoulli e Riccati, sobre a equação de Hill e o Teorema de Floquet e sobre as funções chamadas de “almost”-periódicas e quase-periódicas. Sua leitura é parcialmente dispensável para o que segue, mas de algumas definições lá contidas será feito uso posterior. O leitor poderá procurar esse capítulo assim que a necessidade surgir.

No Capítulo 3, página 36, iniciamos a exposição de nosso método e de nossos resultados. Um primeiro teorema importante é enunciado, provado e discutido. A leitura desse capítulo é importante para o que segue.

No Capítulo 4, página 42, apresentamos um dos pontos técnicos centrais desse trabalho, nomeadamente, o método de eliminação dos termos seculares. A leitura desse capítulo é importante para o que segue.

Na Seção 4.3.3, página 53, uma conjectura ainda não demonstrada é apresentada e discutida à luz de uma solução explícita.

No Capítulo 5, página 56, apresentamos a demonstração de quase-periodicidade de certos coeficientes perturbativos. Nas Seções 5.1.1, página 57, e 5.2, página 69, apresentamos relações de recorrência para os coeficientes de Fourier de certos coeficientes perturbativos, relações estas que desempenharão um papel importante no que segue. As demais seções deste capítulo são, porém, pesadamente técnicas e de leitura maçante. Cremos que sua leitura pode ser dispensada em uma primeira aproximação ao trabalho. Já aqueles que crêem que somente a assim chamada “hard analysis” enobrece o espírito matemático terão lá com que se divertir.

No Capítulo 6, página 74, apresentamos e demonstramos alguns de nossos principais resultados, a saber, a solução da equação de Schrödinger (1.4) no caso em que a interação externa é periódica. É, portanto, um dos capítulos centrais.

Após uma introdução e uma especialização de algumas expressões ao caso periódico os primeiros teoremas importantes sobre convergência surgem na Seção 6.3, página 82.

Na Seção 6.4, página 85, apresentamos a forma de Floquet da função de onda a partir do teorema demonstrado no Capítulo 3. Demonstrações de convergência adicionais são também apresentadas. É aqui que a solução perturbativa completa da equação de Schrödinger (1.4) é apresentada para o caso periódico.

Na Seção 6.5, página 91, discutimos algumas questões à luz de exemplos explícitos de interesse.

Na Seção 6.6, página 95, desenvolvemos com um pouco mais de detalhe a expansão perturbativa para a chamada freqüência secular,  $\Omega$ .

Na Seção 6.7, página 97, discutimos uma pequena aplicação da expansão para a freqüência secular em problemas de tunelamento.

Na Seção 6.8, página 99, apresentamos alguns gráficos que ilustram alguns pontos discutidos

na Seção 6.7 e ilustram a eficiência computacional da solução apresentada na Seção 6.4. Gráficos nada demonstram mas cremos que um olhar sobre aqueles lá apresentados pode ser instrutivo.

No Capítulo 7, página 105 estendemos os resultados do capítulo anterior para uma classe maior de interações periódicas, a saber, para funções  $f(t)$  com valor médio não-nulo. Este é igualmente um capítulo importante.

No Capítulo 8, página 116, apresentamos um resumo as principais conclusões.

No Apêndice A, página 119, apresentamos uma demonstração alternativa do teorema básico do Capítulo 3. Essa segunda demonstração é de interesse por tornar mais transparentes certos aspectos da primeira demonstração, que é mais elegante. Esse apêndice contem o tratamento original que levou ao teorema demonstrado no Capítulo 3. Apesar disso o conteúdo desse apêndice é um tanto redundante e sua leitura pode ser dispensada em uma primeira aproximação ao trabalho.

No Apêndice B, página 124, apresentamos uma curta demonstração de que a função  $q$ , definida como  $q(t) := \exp\left(i \int_0^t f(\tau)d\tau\right)$ , e que desempenha um papel importante nesse trabalho, é quase-periódica quando  $f$  também o é. Esse resultado é importante mas a demonstração é padrão e aparece aqui mais por culto ao espírito da completeza.

No Apêndice C, página 126, apresentamos algumas fórmulas importantes relacionando os coeficientes de Fourier da função  $f$  com os coeficientes de Fourier da função  $q$ . Ainda que esse capítulo tenha sido deslocado para um apêndice, sua leitura é importante pois faremos uso de seus resultados em vários lugares.

O Apêndice D discute propriedades de uma função,  $Q_1$ , que é de relevância para a formulação de dois teoremas, os Teoremas 4.1 e 6.2, às páginas 42 e 75, respectivamente.

No Apêndice E, página 132, demonstramos uma importante propriedade de decaimento dos coeficientes de Fourier da já mencionada função  $q$ . Aqui usamos os resultados do Apêndice C.

No Apêndice F, página 136, demonstramos alguns resultados importantes sobre estimativas de produtos de convolução de funções definidas em  $\mathbb{Z}$  e que decaem exponencialmente. Esse apêndice, ainda que técnico, contem resultados que desempenham um papel importantes em várias demonstrações.

Por fim, o uso feito dos números de Catalan no Apêndice G, página 138, para completar uma das mais importantes demonstrações desse trabalho, pode enternecer um coração combinatório.

## 1.4 Comentários sobre a Notação Empregada

Seja  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  e  $f$  real e quase-periódica,  $f$  sendo a função que surge em (1.1), página 12, e representa a interação externa acoplada ao nosso sistema de dois níveis. A representação de Fourier da função  $f$  será escrita como

$$f(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^B} F_{\underline{m}} e^{i \underline{m} \cdot \underline{\omega}_f t}, \quad (1.44)$$

onde  $\underline{\omega}_f = \beta(f) \in \mathbb{R}_+^B$ . Denotamos por  $\underline{\omega}$  o vetor de freqüências dado por

$$\underline{\omega} := \begin{cases} \underline{\omega}_f \in \mathbb{R}_+^B, & \text{se } F_0 = 0 \\ (\underline{\omega}_f, F_0) \in \mathbb{R}_+^{B+1}, & \text{se } F_0 \neq 0, \end{cases} \quad (1.45)$$

Como estamos supondo  $\underline{\omega}_f \in \mathbb{R}_+^B$ , a definição acima diz que as componentes de  $\underline{\omega}$  são todas estritamente positivas. Definimos também

$$A := \begin{cases} B, & \text{se } F_0 = 0 \\ B + 1, & \text{se } F_0 \neq 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

Denotaremos os vetores de  $\mathbb{Z}^B$  (ou de  $\mathbb{R}^B$ ) por  $\underline{v}$  e os vetores de  $\mathbb{Z}^A$  (ou de  $\mathbb{R}^A$ ) por  $\underline{v}$ . O símbolo  $|\underline{n}|$  designa a norma  $l^1(\mathbb{Z}^A)$  de um vetor  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_A) \in \mathbb{Z}^A$ :  $|\underline{n}| := |n_1| + \dots + |n_A|$ .

O coeficiente de Fourier  $F_0$  será também denotado por  $F_0$ .

Usaremos o símbolo  $\mathbb{I}$  para denotar a matriz identidade.  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  designa o conjunto de todas as matrizes  $n \times n$  com entradas complexas.

O símbolo  $\lfloor x \rfloor$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $x \in \mathbb{R}$  e o símbolo  $\lceil x \rceil$  denota o menor inteiro maior ou igual a  $x \in \mathbb{R}$ .

## Capítulo 1

Para  $m \in \mathbb{Z}$  o símbolo  $\ll m \gg$  representa a seguinte função:

$$\ll m \gg := \begin{cases} |m|, & \text{para } m \neq 0 \\ 1, & \text{para } m = 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

Para  $m \in \mathbb{Z}$  representamos a função de Bessel de primeiro tipo e ordem  $m$  por  $J_m$ .

$AP(\mathbb{R})$  designa o conjunto das funções “almost”-periódicas em  $\mathbb{R}$ .  $QP(\mathbb{R})$  designa o conjunto das funções quase-periódicas em  $\mathbb{R}$ .

Para uma função  $h \in AP(\mathbb{R})$  denotamos seu “valor médio” por  $M(h)$ , o qual é definido por

$$M(h) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t) dt. \quad (1.48)$$

Vide, por exemplo, [24].

Produtos escalares entre vetores  $\psi$  e  $\phi$  de um espaço de Hilbert são denotados aqui por  $(\psi, \phi)$ , sendo anti-lineares no primeiro argumento e lineares no segundo.

O símbolo  $:=$  indica uma *definição*. O símbolo  $\square$  indica fim de enunciado (em teoremas, proposições e lemas) e  $\blacksquare$  indica fim de demonstração.

=

# Capítulo 2

## Algumas Observações Gerais e Históricas

### 2.1 As Equações de Riccati Generalizadas

Para benefício do leitor recordaremos aqui de algumas propriedades elementares das chamadas equações de Riccati generalizadas e das chamadas equações de Bernoulli. Ambas as equações são freqüentemente tratadas em livros-texto introdutórios sobre equações diferenciais ordinárias.

Para  $a$  e  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , ambas contínuas, a equação diferencial ordinária não-linear homogênea de primeira ordem

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 = 0 \quad (2.1)$$

é denominada *equação de Bernoulli*. Apesar desta equação ser um dos representantes mais simples da classe das equações diferenciais não-lineares, a não-linearidade da mesma não acrescenta nenhuma dificuldade intransponível à sua solubilidade pois a simples substituição  $y(t) = 1/v(t)$  conduz à equação

$$v'(t) - a(t)v(t) - b(t) = 0 \quad (2.2)$$

que é linear e tem por solução

$$v(t) = \frac{1}{p(t)} \left( v(0) + \int_0^t b(\tau)p(\tau) d\tau \right) \quad (2.3)$$

onde

$$p(t) := \exp \left( - \int_0^t a(\tau) d\tau \right). \quad (2.4)$$

Portanto, a solução geral de (2.1) é

$$y(t) = \frac{p(t)}{\left(v(0) + \int_0^t b(\tau)p(\tau) d\tau\right)}. \quad (2.5)$$

As equações de Bernoulli são um caso particular de uma classe maior de equações diferenciais ordinárias não-lineares, as chamadas *equações de Riccati generalizadas*.

Para  $a, b$  e  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , contínuas, a equação diferencial ordinária não-linear não-homogênea de primeira ordem

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t)^2 + c(t) = 0 \quad (2.6)$$

é denominada *equação de Riccati generalizada*.

Ao contrário da equação de Bernoulli, a equação de Riccati generalizada não é, em geral, solúvel. Apenas em casos particulares há soluções mais ou menos explícitas para as mesmas, normalmente em termos de expansões em série, como expansões em série de potências. Um desses felizes casos particulares será apresentado neste trabalho.

Apesar de sua não-solubilidade genérica, indício de um natureza verdadeiramente “não-linear” (em contraposição com a equação de Bernoulli, que é também não-linear mas solúvel), é possível obter a solução geral de (2.6) se uma solução particular sua for conhecida. Esse fato será de utilidade na discussão do Apêndice A, página 119, o qual contém uma discussão das idéias que moveram este trabalho no seu início.

De fato, se  $u$  é uma solução particular conhecida de (2.6) então a solução geral é da forma

$$y(t) = u(t) + v(t), \quad (2.7)$$

onde  $v$  obedece à equação de Bernoulli

$$v'(t) + [a(t) + 2b(t)u(t)]v(t) + b(t)v(t)^2 = 0 \quad (2.8)$$

e assim

$$y(t) = u(t) + \frac{p_1(t)}{w_0 - \int_0^t b(\tau)p_1(\tau) d\tau}, \quad (2.9)$$

onde  $w_0 = 1/(y(0) - u(0))$ , para  $y(0) \neq u(0)$ , é uma constante e onde

$$p_1(t) := \exp \left( \int_0^t [a(\tau) + 2b(\tau)u(\tau)] d\tau \right). \quad (2.10)$$

Por fim, observemos que qualquer equação diferencial ordinária linear homogênea de segunda ordem associa-se naturalmente a uma equação de Riccati generalizada. De fato, dada a equação

$$w''(t) + a(t)w'(t) + b(t)w(t) = 0, \quad (2.11)$$

com  $a$  e  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  contínuas, o Ansatz  $w(x) = \exp \left( \int_0^t y(\tau) d\tau \right)$  conduz a

$$y'(t) + a(t)y(t) + y^2(t) + b(t) = 0. \quad (2.12)$$

Neste trabalho faremos uso dessa simples e bem conhecida transformação.

A equação de Riccati generalizada deve seu nome ao matemático e conde veneziano Iacopo Francesco Riccati (1676-1754), que estudou a equação diferencial

$$y'(x) = \alpha(y^2(x) + x^n), \quad (2.13)$$

com  $\alpha$  constante e  $n \in \mathbb{N}$ , em monografia publicada em 1724 sem, no entanto, resolvê-la.

**A equação**

$$y'(x) = y^2(x) + x^2 \quad (2.14)$$

fora previamente estudada por Johann Bernoulli (1667-1748) em trabalho de 1694, sem que este apresentasse solução para a mesma. Jacob Bernoulli (1654-1705), que honrou com seu nome a equação (2.1), resolvida por ele em 1696, também estudara (2.14) e encontrara em 1703 uma solução para a mesma em termos de uma razão de série de potências, que então expressou como uma série de potências simples. Somente em 1841 Joseph Liouville (1809-1882) demonstrou que a solução de (2.14) não pode ser expressa em termos de funções elementares. Em notação moderna a solução geral de (2.14) é

$$y(x) = x \left( \frac{AJ_{-3/4}\left(\frac{x^2}{2}\right) + J_{3/4}\left(\frac{x^2}{2}\right)}{J_{-1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right) - AJ_{1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right)} \right), \quad (2.15)$$

onde  $A$  é uma constante e  $J_\nu$  são funções de Bessel de primeiro tipo e ordem  $\nu$ .

Equações do tipo (2.13) são hoje denominadas simplesmente *equações de Riccati*. A associação do nome de Riccati a tais equações (e não dos nomes de Johann Bernoulli ou Jacob Bernoulli) é parcialmente devida ao fato de (2.13) ser ligeiramente mais geral que (2.14) e às referências ao trabalho de Riccati feitas por outro Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-1782), que estudou as equações (2.13) em trabalho datado de 1725. Daniel Bernoulli menciona que soluções de equações como (2.13) foram obtidas anteriormente por Johann Bernoulli, Nicolaus Bernoulli e Nicolaus Bernoulli II. A desconsideração de Daniel Bernoulli pela contribuição prévia de seu tio Jacob Bernoulli deve-se talvez à rivalidade deste com seu irmão Johann Bernoulli, pai de Daniel Bernoulli, mas talvez seja meramente consequência do fato de sua época não estar ainda preparada para aceitar soluções de equações diferenciais em termos de séries infinitas. De fato, em seu trabalho, Daniel Bernoulli preocupou-se em apontar casos em que (2.13) pode ser resolvida por séries finitas, a saber, quando  $n$  é a forma  $-4m/(2m \pm 1)$ , com  $m$  inteiro.

O método acima descrito de obter a solução geral da equação de Riccati generalizada a partir de uma solução particular é devido a Leonhard Euler (1707-1783) e publicado em 1764.

Para mais notas históricas sobre as equações (2.13) e (2.14) e sua relação com as funções de Bessel, vide por exemplo [32], Capítulo I.

## 2.2 A Equação de Hill e o Teorema de Floquet

Como muitos problemas da área de sistemas dinâmicos e da teoria das equações diferenciais, o estudo das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com coeficientes periódicos ou quase-periódicos foi fortemente motivado por problemas procedentes da Astronomia ou, mais precisamente, da dinâmica planetária.

Tal é o caso da classe de equações diferenciais conhecidas como *equações de Hill*, as quais foram encontradas pelo astrônomo norte-americano George William Hill (1838-1914) em célebre estudo [15] sobre as perturbações do Sol sobre a órbita lunar publicado em 1886 (mas realizado em 1877). A originalidade da contribuição de Hill a esse problema de três corpos, o qual é estudado desde Newton, consistiu em tratar os movimentos solar e lunar não-perturbados em torno da Terra como circulares, para então tratar das perturbações e estudar condições sob as quais as mesmas levam

em primeira aproximação a órbitas fechadas (eventualmente elípticas) para a Lua. Anteriormente esse problema fora atacado de outra forma, partindo-se de um movimento não-perturbado elíptico para a Lua para então introduzir o efeito da perturbação solar sobre o mesmo.

Em seu estudo, Hill chegou ao seguinte tipo de equação diferencial

$$y''(t) + (\lambda + P(t))y(t) = 0, \quad (2.16)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro real e  $P$  uma função periódica de período  $T$  e par:  $P(t) = P(-t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

A equação de Hill não foi a primeira equação linear homogênea de segunda ordem e coeficientes periódicos a despertar atenção. Anteriormente a Hill outra equação do tipo de (2.16) fora encontrada em 1868 por Emile-Léonard Mathieu (1835-1890) em um contexto importante. Estudando em coordenadas elípticas o movimento de membranas elípticas, Mathieu [14] foi levado à seguinte equação:

$$y''(x) + (\lambda + \mu \cos(2x))y(x) = 0. \quad (2.17)$$

No problema específico da membrana elíptica em coordenadas elípticas são procuradas soluções periódicas de período  $2\pi$  para a equação (2.17). Tal só é possível sob relações fixas entre  $\lambda$  e  $\mu$ .

No caso (2.16), se a condição de que a solução  $y$  é também periódica de período  $T$  tiver de ser imposta, restrições terão de ser feitas ao parâmetro  $\lambda$ , que passa a assumir o papel de um autovalor (como no problema de Sturm-Liouville). O problema básico passa a ser então determinar a relação entre  $\lambda$  e os parâmetros que definem  $P$  sob os quais a solução é periódica.

Uma pergunta natural que, portanto, se coloca aqui é a seguinte: qual é a forma da solução geral de uma equação diferencial como (2.16)? Pode a mesma possuir soluções periódicas e com o mesmo período dos coeficientes?

Para por em relevo a não-trivialidade dessas questões notemos o exemplo elementar (extraído de livros-texto) da equação diferencial

$$y'(t) + (1 + \sin(x))y(x) = 0$$

que, apesar de ter como coeficientes funções periódicas de período  $2\pi$ , tem por solução

$$y(x) = c_0 e^{-x+\cos(x)},$$

que sequer periódica é.

É nesse contexto que surge o importante trabalho de Gaston Floquet (1847-1920), publicado em 1883 [16]. Floquet decidiu-se por estudar equações diferenciais lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes contínuos e periódicos de mesmo período, ou seja, da forma

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (2.18)$$

onde  $a$  e  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  são contínuas e periódicas de período  $T$ . Uma equação diferencial desse tipo é denominada *equação de Floquet* e sobre as mesmas Floquet apresentou um importante teorema que faz afirmações sobre a forma geral das suas soluções.

Para benefício do leitor apresentamos abaixo sem demonstração o enunciado do Teorema de Floquet. Para demonstrações, vide [31] ou [30].

Dizer que duas funções linearmente independentes  $y_1$  e  $y_2$  formam um sistema fundamental de soluções de (2.18) significa que toda solução de (2.18) pode ser escrita como combinação linear de  $y_1$  e  $y_2$ . A existência de um tal sistema fundamental para (2.18) é garantida por teoremas gerais. Devido à periodicidade dos coeficientes é fácil constatar que  $y_1(t+T)$  e  $y_2(t+T)$  são também soluções de (2.18). Portanto,

$$\begin{pmatrix} y_1(t+T) \\ y_2(t+T) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

onde

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

é uma matriz independente do tempo. Seja a *equação fundamental*

$$\det(A - \mu \mathbf{I}) = 0 \quad (2.21)$$

e sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  suas raízes.

**Teorema de Floquet.** Seja a equação diferencial

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \quad (2.22)$$

onde  $a$  e  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  são contínuas e periódicas de período  $T$  e sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  as raízes da equação fundamental (2.21). Definamos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de forma que  $\mu_a = e^{\lambda_a T}$ ,  $a = 1, 2$ .

Caso  $\mu_1 \neq \mu_2$  então existem funções  $u_1$  e  $u_2$ , ambas periódicas de período  $T$ , tais que todas as soluções de (2.22) são nesse caso combinação linear das funções

$$v_1(t) := e^{\lambda_1 t} u_1(t) \quad \text{e} \quad v_2(t) := e^{\lambda_2 t} u_2(t), \quad (2.23)$$

sendo  $v_1$  e  $v_2$  linearmente independentes.

Caso  $\mu_1 = \mu_2 = \mu =: e^{\lambda T}$ , existem funções  $u_1$  e  $u_2$ , ambas periódicas de período  $T$ , e funções

$$v_1(t) := e^{\lambda t} u_1(t) \quad \text{e} \quad v_2(t) := e^{\lambda t} \left( \frac{A}{\mu T} t u_1(t) + u_2(t) \right), \quad (2.24)$$

com  $A \in \{0, 1\}$ , tais que  $v_1$  e  $v_2$  são linearmente independentes e todas as soluções de (2.22) são nesse caso combinações lineares de  $v_1$  e  $v_2$ .  $\square$

O Teorema de Floquet diz essencialmente que as soluções de uma equação de Floquet diferem de uma função periódica de mesmo período dos coeficientes por um fator exponencial.

Se soubermos a priori que as soluções de uma equação como (2.22) são limitadas, o Teorema de Floquet diz-nos que as mesmas devem ser da forma

$$\alpha_1 e^{i\Omega_1 t} u_1(t) + \alpha_2 e^{i\Omega_2 t} u_2(t) \quad (2.25)$$

$\Omega_j = -i\lambda_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ , com  $u_1$  e  $u_2$  periódicas de período  $T$  e com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  constantes.

Assim, nesse caso, a solução de (2.22) deve ser uma função quase-periódica (a definição de função quase-periódica será apresentada adiante na Seção 2.3), podendo ser periódica de período  $T$  se somente se

$$\Omega_j = \frac{2\pi n_j}{T}, \quad (2.26)$$

com  $n_j \in \mathbb{Z}$ ,  $j = 1, 2$ .

Portanto, procurar nesse caso por soluções periódicas de período  $T$  significa impor (2.26) como restrição aos parâmetros que comparecem à equação diferencial original, pois  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  dependem dos mesmos.

Para extensas notas históricas sobre as equações de Hill, Mathieu e Floquet vide [28] e também [29].

## 2.3 Funções Quase-Periódicas e “Almost”-Periódicas

Com o intuito de facilitar a leitura e fixar alguma notação apresentaremos nesta seção algumas das definições e resultados básicos da teoria das funções ditas “almost”-periódicas<sup>1</sup>. Para detalhes recomendamos a referência [24].

A teoria das funções “almost”-periódicas reais foi originalmente desenvolvida por Harald Bohr (1887-1951) em vários trabalhos, notadamente naqueles listados em [6]. Bohr, porém, menciona dois predecessores: Piers Bohl (1865-1921) em tese [8] publicada em 1893 (vide também [9]) e Ernest B. Esclangon (1876-1954) (vide [10] e [11]), os quais obtiveram anteriormente resultados semelhantes sobre as funções ditas “quase-periódicas”, denominação esta introduzida por Esclangon. H. Bohr distinguiu-se também pelo desenvolvimento da teoria das funções “almost”-periódicas complexas. O conceito foi posteriormente generalizado por von Neumann para funções definidas em grupos. Para definições e alguns resultados nesse caso vide [33].

Os trabalhos de Harald Bohr podem ser encontradas na maravilhosa edição em três volumes [7] de suas obras completas. Bohr não conhecia previamente os trabalhos anteriores de Bohl e Esclangon sobre as funções quase-periódicas e menciona no primeiro dos trabalhos de [6] ter sido chamado à atenção sobre existência dos mesmos por Jacques S. Hadamard (1865-1963).

Listemos algumas definições e resultados básicos de Bohr. Faremos uso desses resultados para o caso menos geral de funções quase-periódicas.

No intuito de generalizar o conceito de função periódica, H. Bohr introduziu o importante conceito de função “almost”-periódica real, que tentaremos definir agora.

Se  $\epsilon$  é um número real com  $\epsilon \geq 0$ , um número  $T \geq 0$  é dito ser um  $\epsilon$ -quase-período de uma

<sup>1</sup>Infelizmente, por falta de tradição e cultivo, não há na língua portuguesa modo padronizado de distinguir as funções que em língua inglesa são chamadas de “almost periodic functions” daquelas chamadas de “quasi-periodic functions”. Em francês as funções do tipo “almost periodic” são adjetivadas como “presque periodic” e em alemão as mesmas são chamadas de “fastperiodische Funktionen”. Para o português há propostas de chamá-las de “aproximadamente periódicas” ou “semi-periódicas”. Uma solução mais erudita, mas incomum, seria chamá-las de funções “peneperiódicas”, fazendo uso do prefixo latino “pene”, que significa “quase”, como em península, penumbra, penúltimo. Em não havendo solução unânime, optamos neste texto pelo barbarismo de chamá-las funções “almost”-periódicas.

função limitada  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se

$$|h(t+T) - h(t)| \leq \epsilon$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Uma função contínua  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é dita ser “almost”-periódica se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $\Lambda(\epsilon) > 0$  tal que todo intervalo fechado de  $\mathbb{R}$  de comprimento  $\Lambda(\epsilon)$  possui pelo menos um  $\epsilon$ -quase-período de  $h$ .

Uma outra definição equivalente de “almost”-periodicidade é a seguinte. Seja  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função limitada e defina-se  $h_a(x) := h(x - a)$ , a função  $h$  transladada por  $a \in \mathbb{R}$ . A função  $h$  é dita ser “almost”-periódica se for contínua e se o conjunto de seus transladados  $\{h_a, a \in \mathbb{R}\}$  for um conjunto pré-compacto na topologia uniforme.

Recordando, a topologia uniforme no conjunto das funções contínuas e limitadas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é a topologia métrica definida pela norma  $\|h\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$ . Em um espaço topológico um conjunto é dito ser *pré-compacto* se seu fecho for compacto.

A equivalência das duas definições de “almost”-periodicidade é uma consequência da chamada propriedade de limitação total de conjuntos pré-compactos em espaços métricos completos e pode ser encontrada, por exemplo, em [33].

É possível ver com relativa facilidade [24] que a combinação linear de duas funções “almost”-periódicas é também uma função “almost”-periódica e que o produto de duas funções “almost”-periódicas é também uma função “almost”-periódica. Portanto, o conjunto de todas as funções “almost”-periódicas forma uma álgebra abeliana, que contém uma unidade (a função constante igual a 1) e é invariante por conjugação complexa.

Um dos resultados básicos de Bohr refere-se à existência do chamado “valor médio” de uma função “almost”-periódica. Se  $h$  é “almost”-periódica, Bohr demonstrou que o limite

$$M(h) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t) dt \tag{2.27}$$

sempre existe e define o que se chama de *valor médio de  $h$* .

Bohr demonstrou também que para toda função “almost”-periódica  $h$  existem dois conjuntos

contáveis  $\{h_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$  e  $\{\omega_n \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$  tais que vale a “decomposição de Fourier”

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n e^{i\omega_n t},$$

onde a série da direita converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  a  $h$  no sentido de Cesaro (vide, por exemplo, [24] para afirmações precisas).

O conjunto de freqüências  $\{\omega_n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$  é denominado “espectro de  $h$ ” e é comumente denotado por  $\sigma(h)$ .

Se  $\omega_n \in \sigma(h)$  e se  $e_n(t) := e^{-i\omega_n t}$ , Bohr demonstrou que

$$h_n = M(he_n). \quad (2.28)$$

Assim, se convencionarmos que  $\omega_0 = 0$ , teremos

$$M(h) = h_0. \quad (2.29)$$

As funções “almost”-periódicas são classificadas de acordo com seu espectro. Uma função “almost”-periódica  $h$  é dita ser *quase-periódica* se existir  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d > 0$ , e um vetor  $d$ -dimensional  $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d)$  com  $\omega_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, d$ , tal que

$$\sigma(h) \subset \{\underline{\omega} \cdot \underline{n}, \underline{n} \in \mathbb{Z}^d\},$$

onde  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$  é um vetor de inteiros e  $\underline{\omega} \cdot \underline{n} = \omega_1 n_1 + \dots + \omega_d n_d$ . Obviamente interessa nessa definição que os números  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , sejam  $\mathbb{Z}$ -independentes, ou seja,  $\underline{\omega} \cdot \underline{n} = 0 \iff \underline{n} = \underline{0}$ , onde  $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ . Notemos também que o conjunto  $\{\underline{\omega} \cdot \underline{n}, \underline{n} \in \mathbb{Z}^d\}$  forma um grupo em relação a operação de soma usual.

Para uma função quase-periódica  $h$  denotaremos também por vezes o vetor  $\underline{\omega}$  pelo símbolo  $\beta(h)$ .

Denotaremos o conjunto das funções ditas “almost”-periódicas da reta real por  $AP(\mathbb{R})$  e por  $QP(\mathbb{R})$  o conjunto das funções ditas quase-periódicas. Obviamente  $QP(\mathbb{R}) \subset AP(\mathbb{R})$ .

Um teorema célebre de H. Bohr (vide, por exemplo, [24]) afirma que se  $h$  é “almost”-periódica uma condição necessária e suficiente para que a integral  $H(t) := \int_0^t h(\tau) d\tau$  seja também “almost”-periódica é  $H \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Esse teorema de Bohr generaliza um resultado prévio de P. Bohl para o caso quase-periódico [8]-[9].

Notemos que se  $h$  é tal que  $M(h) = h_0 = 0$  e  $\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \omega_n \neq 0}} \frac{|h_n|}{|\omega_n|} < \infty$  então  $H(t)$  é limitada e, portanto, “almost”-periódica.

Um outro resultado importante de H. Bohr afirma que  $AP(\mathbb{R})$  é fechada na topologia uniforme da reta real, ou seja, o limite uniforme de seqüências de funções “almost”-periódicas é também uma função “almost”-periódica. Mencionamos que isso não é, em geral, verdadeiro para seqüências de funções quase-periódicas.

Em verdade, vale o fato mais forte que  $AP(\mathbb{R})$  é uma álgebra  $C^*$  abeliana com a norma dada por  $\|\cdot\|_\infty$  e a operação  $*$  dada pela conjugação complexa usual.

Por fim, observamos que se engana quem acredita que funções “almost”-periódicas mas não quase-periódicas não surgem em problemas de Física. Os modos de vibração de uma membrana livre retangular de lados  $L_1$  e  $L_2$  sob condições de contorno de Dirichlet têm freqüências  $\omega_{n,m} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2}$ , com  $n, m \in \mathbb{N}$  e, portanto, quando todos os modos de vibração estão presentes, cada ponto da membrana descreve tipicamente um movimento “almost”-periódico não quase-periódico.

## Capítulo 3

# O Propagador e a Equação de Riccati Generalizada

Apresentaremos nesta seção um teorema que nos será importante pois, em um certo sentido, transforma o problema de encontrar soluções para a equação de Schrödinger (1.4), página 13, no problema de encontrar soluções particulares para uma equação de Riccati generalizada específica.

O teorema que apresentaremos expressa o propagador  $U(t)$ , definido em (1.7), página 13, em termos de uma solução particular arbitrária  $g$  da mencionada equação de Riccati generalizada.

A primeira vista essa passagem de um problema linear, como o das equações de Schrödinger, para um não-linear, como o das equações de Riccati generalizadas, não deveria apresentar vantagens. Como veremos, porém, tal impressão é ilusória pois será precisamente a não-linearidade de equação de Riccati generalizada que nos permitirá realizar um importante cancelamento sistemático dos assim chamados “termos seculares”, cancelamento esse de fundamental importância neste trabalho. A propriedade básica das equações diferenciais lineares homogêneas, a saber, o bem conhecido “princípio de sobreposição”, não é de valia no que concerne ao controle dos termos seculares.

Passemos então ao primeiro teorema de importância fundamental para este trabalho.

**3.1 Teorema.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , uma solução

particular da seguinte equação de Riccati generalizada:

$$G' - iG^2 - 2ifG + i\epsilon^2 = 0. \quad (3.1)$$

Então, a função  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix} = U(t)\Phi(0), \quad (3.2)$$

onde

$$U(t) := \begin{pmatrix} R(t)(1 + ig(0)S(t)) & -i\epsilon R(t)S(t) \\ -i\epsilon \overline{R(t)} \overline{S(t)} & \overline{R(t)} \left(1 - i \overline{g(0)} \overline{S(t)}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

com

$$R(t) := \exp \left( -i \int_0^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \right) \quad (3.4)$$

e

$$S(t) := \int_0^t R(\tau)^{-2} d\tau \quad (3.5)$$

é solução da equação de Schrödinger (1.4) com valor inicial  $\Phi(0) = \begin{pmatrix} \phi_+(0) \\ \phi_-(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ .  $\square$

Fazemos notar que a única condição requerida à função  $f$  no teorema acima é que a mesma seja contínua e uma vez diferenciável.

A demonstração do Teorema 3.1 será apresentada na Seção 3.1, página 38. Uma discussão posterior é apresentada na Seção 3.2 e no Apêndice A (páginas 39 e 119, respectivamente).

O Teorema 3.1 mostra-nos que o problema de encontrar soluções para (1.4) pode ser transformado no problema de encontrar soluções para a equação de Riccati generalizada (3.1). As vantagens desse procedimento serão apreciadas no devido momento. A principal reside no fato de ser possível, quando  $f$  é quase-periódica, eliminar ordem a ordem os termos seculares da expansão que fornece uma solução particular de (3.1).

Em função do Teorema 3.1 concentraremos nossa atenção em encontrar soluções particulares para a equação de Riccati generalizada (3.1).

### 3.1 Demonstração do Teorema 3.1

Seja  $\Phi(t) = V(t)\Phi(0)$  a solução da equação de Schrödinger (1.4) com valor inicial  $\Phi(0)$ , onde  $V : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ . Então  $V$  é solução de

$$iV'(t) = H_1(t)V(t) \quad (3.6)$$

com

$$V(0) = \mathbb{1}. \quad (3.7)$$

Assim,  $V$  satisfaz também

$$iV'(0) = H_1(0) \quad (3.8)$$

e

$$iV''(t) = D(t)V(t), \quad (3.9)$$

e  $D(t) := H_1'(t) - iH_1(t)^2$ . É elementar verificar que  $D(t)$  é a matriz *diagonal* dada por

$$D(t) = \begin{pmatrix} f'(t) - i(\epsilon^2 + f(t)^2) & 0 \\ 0 & -f'(t) - i(\epsilon^2 + f(t)^2) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Mostraremos agora que a matriz  $U(t)$  definida em (3.3) satisfaz os seguintes quesitos:

1.  $U(0) = \mathbb{1}$ ,
2.  $iU'(0) = H_1(0)$  e
3.  $iU''(t) = D(t)U(t)$ .

Por (3.7)-(3.9) e pelos bem conhecidos teoremas que garantem existência e *unicidade* de soluções de equações diferenciais ordinárias com coeficientes contínuos, segue daí que  $U(t) = V(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

A prova de 1. segue do fato que  $R(0) = 1$  e  $S(0) = 0$ . Para provar 2. notamos que,  $R'(t) = -i(f(t) + g(t))R(t)$  e que  $S'(t) = R(t)^{-2}$ , de onde conclui-se por um cálculo explícito que

$$iU'(t) = \begin{pmatrix} f(t) + g(t) & 0 \\ 0 & -(f(t) + \overline{g(t)}) \end{pmatrix} U(t) + \begin{pmatrix} R(t)^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{R(t)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g(0) & \epsilon \\ \epsilon & \overline{g(0)} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Como  $R(0) = 1$  e  $U(0) = \mathbb{1}$ , segue de (3.11) que

$$iU'(0) = \begin{pmatrix} f(0) & \epsilon \\ \epsilon & -f(0) \end{pmatrix} = H_1(0), \quad (3.12)$$

provando 2. De (3.11) tem-se  $iU''(t) = E(t)U(t)$ , onde

$$E(t) := \begin{pmatrix} f'(t) + g'(t) - i(f(t) + g(t))^2 & 0 \\ 0 & -f'(t) - \overline{g'(t)} - i(f(t) + \overline{g(t)})^2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Fazendo-se uso da hipótese que  $g$  satisfaz (3.1) é fácil verificar que  $E(t) = D(t)$ , completando a prova do Teorema 3.1. ■

## 3.2 O Teorema 3.1 e sua Interpretação

A demonstração formal (no sentido em que essa palavra é empregada por matemáticos) apresentada acima não permite vislumbrar a seqüência de idéias que levaram à solução representada pela expressão (3.3), podendo deixar a impressão de que a mesma foi apenas adivinhada. É, no entanto, instrutivo abordar a seqüência de idéias heurísticas que apontaram para a solução mencionada, o que faremos brevemente agora, deixando detalhes para o Apêndice A, página 119, onde uma segunda demonstração, mais construtiva, de (3.3) é apresentada. Lá discutiremos também a questão da relação entre a solução (3.3) e a solução *geral* da equação de Riccati generalizada.

Traduzida para as componentes  $\phi_{\pm}(t)$  da função de onda  $\Phi$  a relação  $iU''(t) = D(t)U(t)$  torna-se

$$\begin{aligned} \phi_+'' + (+if' + \epsilon^2 + f^2)\phi_+ &= 0 \\ \phi_-'' + (-if' + \epsilon^2 + f^2)\phi_- &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

É de fato elementar (vide Apêndice A, página 119) demonstrar diretamente da equação de Schrödinger (1.4), página 13, que tais relações são satisfeitas, indicando a independência dinâmica das duas componentes  $\phi_{\pm}$  quando a ordem da equação é aumentada.

Consideremos a equação (3.14) para a componente “+”:

$$\phi''(t) + (if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2) \phi(t) = 0. \quad (3.15)$$

Esta equação é uma versão complexa e quase-periódica da equação de Hill.

Há vários aspectos interessantes dessa equação que merecem ser discutidos. Em primeiro lugar notemos que no caso  $\epsilon \equiv 0$  há uma solução particular evidente da mesma, a saber,

$$\phi(t) = \exp\left(-i \int_0^t f(\tau) d\tau\right). \quad (3.16)$$

Afirmamos que essa é evidentemente uma solução pois é claro que, no caso  $\epsilon \equiv 0$ , a solução da equação de Schrödinger (1.4) é

$$\phi_{\pm}(t) = \phi_{\pm}(0) \exp\left(\mp i \int_0^t f(\tau) d\tau\right). \quad (3.17)$$

No caso  $\epsilon \neq 0$ , a idéia que seguimos foi a de tentar resolver (3.15) com o uso do Ansatz

$$\phi(t) = \exp\left(-i \int_0^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau\right). \quad (3.18)$$

Segue então facilmente que  $g$  deve satisfazer a equação-de Riccati generalizada (3.1). Comparando (3.18) com (3.16) deveríamos esperar que  $g$  se anule quando  $\epsilon = 0$ .

O passo natural seguinte é então procurar soluções particulares  $g$  da equação (3.1) em termos de uma expansão em séries em  $\epsilon$  que, por conveniência, escrevemos na forma

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n c_n(t), \quad (3.19)$$

onde, introduzindo aqui uma definição que nos será importante em todo este trabalho,

$$q(t) := \exp\left(i \int_0^t f(\tau) d\tau\right). \quad (3.20)$$

A idéia heurística por trás dos Ansätze (3.18) e (3.19) é a seguinte. Para  $\epsilon \equiv 0$  uma solução para (3.15) é dada por  $\exp\left(-i \int_0^t f(\tau) d\tau\right)$ . Assim, o que fazemos em (3.18) e (3.19) é procurar por soluções em termos de um “campo externo efetivo” da forma  $f + g$ , com  $g$  identicamente nula para  $\epsilon = 0$ . A função  $g$  representaria então o efeito do termo  $\epsilon \sigma_1$  nessa “interação efetiva”, desaparecendo quando  $\epsilon = 0$ .

Um comentário a parte é que as equações (3.14) são mais simples e mais convenientes que aquelas obtidas separando-se  $\psi_+$  e  $\psi_-$  de (1.2), a saber:

$$\begin{aligned}\psi''_+ - \left(\frac{f'}{f}\right)\psi'_+ + \left(\epsilon^2 + f^2 - i\epsilon\left(\frac{f'}{f}\right)\right)\psi_+ &= 0 \\ \psi''_- - \left(\frac{f'}{f}\right)\psi'_- + \left(\epsilon^2 + f^2 + i\epsilon\left(\frac{f'}{f}\right)\right)\psi_- &= 0\end{aligned}\tag{3.21}$$

Este par de equações é mencionado em [19], mas dele não foi feito uso naquele trabalho. A razão de estas últimas equações serem matematicamente menos convenientes reside no fato de  $f'/f$  ser, em muitos casos de interesse, descontínua e não-limitada, como no caso em que  $f(t) = -2\beta \cos(\omega t)$ , tratado em [19].

Comentemos por fim que a equação de Riccati generalizada (3.1), página 37, tem interesse por si só, pois a mesma é uma perturbação (em  $\epsilon$ ) da equação de Bernoulli  $G' - iG^2 - 2ifG = 0$ , que é solúvel (vide Apêndice A, página 119). Estudar (3.1) é, portanto, estudar perturbações de um problema solúvel, tema esse de importância fundamental em várias áreas e que na Mecânica Clássica, por exemplo, está relacionado ao célebre Teorema KAM.

## Capítulo 4

# Interações Quase-Periódicas. Eliminação dos Termos Seculares

Neste capítulo enunciaremos o principal resultado que possuímos no caso geral em que  $f$  é quase-periódica e iniciaremos sua demonstração, que será completada no Capítulo 5, página 56. O resultado que enunciaremos aqui, Teorema 4.1 abaixo, afirma que, sob certas condições, os coeficientes da série de potências em  $\epsilon$  (3.19), página 40, são todos funções quase-periódicas do tempo.

Do ponto de vista técnico o principal elemento do presente capítulo é o desenvolvimento do método de eliminação de termos seculares, de importância fundamental neste trabalho.

### 4.1 A Função $g$ como uma Série Formal de Potências

Vamos agora apresentar nosso principal resultado sobre a expansão (3.19) para o caso geral em que  $f$  é quase-periódica. Resultados mais fortes para o caso em que  $f$  é periódica serão apresentados nos Capítulos 6, página 74, e 7, página 105.

**4.1 Teorema.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função quase-periódica com*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^B} F_n e^{i\omega_f \cdot nt}, \quad (4.1)$$

*de tal forma que a soma acima contenha apenas um número finito de termos. Suponhamos que*

## Capítulo 4

o vetor de freqüências  $\underline{\omega}$  (definido em (1.45), página 23) satisfaça condições Diofantinas, ou seja, suponhamos que haja constantes  $\Delta > 0$  e  $\sigma > 0$  tais que, para todo  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^A$ ,  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ,

$$|\underline{n} \cdot \underline{\omega}| \geq \Delta^{-1} |\underline{n}|^{-\sigma}. \quad (4.2)$$

**I.** Suponhamos que  $f$  satisfaz a condição  $M(q^2) \neq 0$ . Então há uma série de potências formal

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \epsilon^n, \quad (4.3)$$

representando uma solução particular da equação de Riccati generalizada (3.1), página 37, tal que todos os coeficientes  $c_n$  são funções quase-periódicas e podem ser representadas pela série de Fourier uniformemente convergente

$$c_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (4.4)$$

onde, para seus coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , temos

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq K_n e^{-\chi_0 |\underline{m}|}, \quad (4.5)$$

onde  $\chi_0 > 0$  é uma constante e  $K_n \geq 0$ .

**II.** Suponhamos que  $f$  satisfaz as condições  $M(q^2) = 0$  e  $M(Q_1) \neq 0$ , onde

$$Q_1(t) := q(t)^2 \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Então há uma série de potências formal

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \epsilon^{2n}, \quad (4.7)$$

representando uma solução particular da equação de Riccati generalizada (3.1), página 37, tal que todos os coeficientes  $e_n$  são quase-periódicos e podem ser representados pela série de Fourier uniformemente convergente

$$e_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (4.8)$$

onde, para os coeficientes de Fourier  $E_{\underline{m}}^{(n)}$ , temos

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq L_n e^{-\chi_0 |\underline{m}|}, \quad (4.9)$$

onde  $\chi_0 > 0$  é uma constante e  $L_n \geq 0$ . □

**Comentários sobre o Teorema 4.1**

1. As Seções 4.2, 4.3.1 e 5.1 (páginas 45, 48 e 56, respectivamente) são dedicadas à demonstração da parte I deste teorema e as Seções 4.3.2 e 5.2 (páginas 50 e 69, respectivamente) à demonstração da parte II. A demonstração da parte I consiste em estabelecer *indutivamente* a seguinte cota superior:

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq K_n e^{-(x-\delta_n)|\underline{m}|}, \quad (4.10)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , sendo  $K_n$  e  $\chi$  estritamente positivos e onde a seqüência  $\delta_n$  é estritamente crescente e converge a algum  $\delta_\infty < \chi$ . Tomamos  $\chi_0 := \chi - \delta_\infty$ . A quase-periodicidade das funções  $c_n$  segue da cota superior (4.10). A demonstração da parte II é análoga.

2. Chamaremos a condição  $M(q^2) \neq 0$  de condição I e a condição  $M(q^2) = 0$  com  $M(Q_1) \neq 0$  será chamada de condição II.
3. É importante enfatizar que as condições I e II representam restrições à função  $f$  e não ao parâmetro  $\epsilon$ .
4. As afirmativas do Teorema 4.1 não são suficientes para garantir convergência das expansões em  $\epsilon$  para  $g$ . Teríamos garantida a quase-periodicidade de  $g$  se tais expansões convergissem uniformemente na reta real, mas tal não é o caso. Infelizmente, como discutido ao fim da Seção 5.1, o comportamento para  $n$  grande das constantes  $K_n$  e  $L_n$  é, ao que tudo indica, deveras ruim para permitir convergência absoluta das séries de potência formais em  $\epsilon$  para  $g$  no caso geral onde  $f$  é quase-periódica.
5. Esse mau comportamento tem possivelmente origem em uma possível natureza singular dos coeficientes de Fourier de  $g$  para um conjunto denso de valores de  $\epsilon$ . Tal pode ser o caso se os mesmos forem, por exemplo, da forma  $(\underline{m} \cdot \underline{\omega} + \epsilon)^{-1}$ , pois o conjunto  $\{\underline{m} \cdot \underline{\omega}, \underline{m} \in \mathbb{Z}^B\}$  é sabidamente denso em  $\mathbb{R}$ , sob as mencionadas hipóteses Diofantinas sobre as freqüências. Em tais casos não haveria conjunto aberto de valores de  $\epsilon$  onde  $g$  fosse analítica.
6. Apesar de não termos podido demonstrar convergência das expansões em  $\epsilon$  para o caso geral em que  $f$  é quase-periódica obtivemos sucesso em demonstrar convergência no caso em que

$f$  é periódica. Tais demonstrações serão apresentadas nos Capítulos 6 e 7 e constituem os resultados de maior importância deste trabalho.

7. A condição que a decomposição de Fourier de  $f$  contenha apenas um número finito de termos, que é ademais fisicamente razoável, pode ser enfraquecida pois faremos na demonstração uso apenas do rápido decaimento dos coeficientes de Fourier  $Q_{\underline{m}}$  da função  $q(t)$  (definida em (3.20), página 40) para quando  $|\underline{m}| \rightarrow \infty$ .
8. É interessante mencionar que encontraremos soluções baseadas tanto na condição I quanto na condição II apresentadas acima. A condição I é importante para a maioria das situações em que  $f$  é periódica com  $F_0 = 0$  enquanto que a condição II é importante para a maioria das situações em que  $f$  periódica com  $F_0 \neq 0$ . Há também situações de  $f$  periódica com  $F_0 = 0$  para as quais vale a condição I e situações de  $f$  periódica com  $F_0 \neq 0$  para as quais vale a condição II. Em exemplos veremos, porém, que tais casos são menos freqüentes.
9. Propriedades da função  $Q_1$  e de seu valor médio  $M(Q_1)$  são discutidas com mais detalhe no Apêndice D, página 130.
10. As condições I e II definem soluções em princípio distintas da equação de Riccati generalizada (3.1) e, conseqüentemente, da equação de Schrödinger (1.4). Essas soluções distintas serão chamadas “classes de soluções”.

## 4.2 A Solução Particular $g$ e sua Dependência em $\epsilon$

A solução apresentada em (3.3), página 37, está ainda incompleta pois nenhuma solução particular  $g$  da equação de Riccati generalizada (3.1), página 37, foi apresentada. Iniciaremos agora nossa análise da solução formal particular de (3.1) e a demonstração do Teorema 4.1.

Inserindo (3.19) em (3.1) tem-se formalmente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (qc_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 c_p c_{n-p} - 2if qc_n \right) \epsilon^n + i\epsilon^2 = 0. \quad (4.11)$$

Sob a hipótese que a série do lado esquerdo se anule termo a termo somos levados ao seguinte

conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para os coeficientes  $c_n$ :

$$(qc_1)' - 2ifqc_1 = 0, \quad (4.12)$$

$$(qc_2)' - iq^2c_1^2 - 2ifqc_2 + i = 0, \quad (4.13)$$

$$(qc_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 c_p c_{n-p} - 2ifqc_n = 0, \quad n \geq 3. \quad (4.14)$$

Um fato importante é que as equações acima podem ser resolvidas sucessivamente. As soluções de (4.12)-(4.13) são

$$c_1(t) = \alpha_1 q(t), \quad (4.15)$$

$$c_2(t) = q(t) \left[ i \int_0^t (\alpha_1^2 q(\tau)^2 - q(\tau)^{-2}) d\tau + \alpha_2 \right], \quad (4.16)$$

$$c_n(t) = q(t) \left[ i \left( \int_0^t \sum_{p=1}^{n-1} c_p(\tau) c_{n-p}(\tau) d\tau \right) + \alpha_n \right], \quad \text{para } n \geq 3, \quad (4.17)$$

onde os  $\alpha_n$ 's,  $n = 1, 2, \dots$ , são constantes de integração arbitrárias.

O aparecimento de tais constantes de integração desempenhará um papel crucial adiante pois faremos uso das mesmas para a eliminação dos termos seculares das expansões para  $g$ . É, portanto, no seu aparecimento que reside a vantagem de passarmos a tratar do problema não-linear representado por nossa equação de Riccati generalizada.

Para ilustrar a importância de uma escolha conveniente das constantes  $\alpha_n$  consideremos primeiramente o efeito de uma escolha ingênua das mesmas.

#### 4.2.1 Uma Escolha Ingênua das Constantes $\alpha_n$ . Termos Seculares

Apenas em caráter ilustrativo consideremos aqui o que teríamos caso escolhêssemos todas as constantes  $\alpha_n$  identicamente nulas. Tal escolha levar-nos-ia às seguintes expressões:

$$c_1(t) = 0, \quad (4.18)$$

$$c_2(t) = -iq(t) \int_0^t q(\tau)^{-2} d\tau, \quad (4.19)$$

$$c_n(t) = iq(t) \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t c_p(\tau) c_{n-p}(\tau) d\tau, \quad \text{para } n \geq 3. \quad (4.20)$$

A título de ilustração tomemos o caso em que  $f$  é periódica de período  $T = 2\pi/\omega$  com  $F_0 = 0$ . As funções  $q$  e  $q^2$  teriam uma decomposição em série de Fourier do tipo

$$q(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m e^{im\omega t} \quad \text{e} \quad q(t)^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m^{(2)} e^{im\omega t}. \quad (4.21)$$

A relação (4.19) diz-nos, então, que

$$c_2(t) = -iq(t) \left( Q_0^{(2)} t + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{Q_m^{(2)}}{im\omega} e^{im\omega t} - \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{Q_m^{(2)}}{im\omega} \right). \quad (4.22)$$

Como se vê, caso  $Q_0^{(2)} \neq 0$  dá-se o aparecimento em  $c_2$  de um termo do tipo  $t q(t)$  que envolve um fator polinomial em  $t$ , neste caso, de primeira ordem. Tais fatores são denominados *termos seculares*. Como veremos através de exemplos (Seção 6.5.1, página 92), a condição  $Q_0^{(2)} \neq 0$  não é de forma alguma excepcional, mas sim a mais freqüente. O que ocorre ao inserirmos (4.22) com seus termos seculares em (4.20)? É fácil constatar que, com as demais integrações, novos termos seculares de grau mais alto ocorrerão.

A presença de tais termos seculares nas funções  $c_n$  é um estorvo pois, em função de sua natureza polinomial, os mesmos impedem demonstrações de convergência uniforme para toda a reta real em  $t$  da série de potências em  $\epsilon$  de  $g$ . De um ponto de vista prático gostaríamos de truncar nossas expansões em uma certa ordem em  $\epsilon$  para então tratar de efetuar cálculos de interesse físico. Entretanto, a presença de tais termos seculares impede-nos de usar a série truncada para tempos longos, pois os polinômios divergem quando  $|t| \rightarrow \infty$ . Assim, se estivermos interessados em estudar efeitos de longo tempo, termos seculares seriam um obstáculo intransponível ao trabalho.

Notemos, porém, que mesmo com uma escolha ingênua das constantes  $\alpha_n$ , nossa série pode convergir uniformemente desde que os valores de  $t$  sejam restritos a um certo conjunto limitado. Como  $|q| = 1$ , temos com a escolha acima

$$|c_1(t)| = 0, \quad (4.23)$$

$$|c_2(t)| \leq \int_0^{|t|} d\tau = |t|. \quad (4.24)$$

Supondo  $|c_k(t)| \leq |t|^{k-1}$  para todo  $k$  com  $1 \leq k < n$ , temos

$$|c_n(t)| \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^{|t|} |\tau|^{p-1} |\tau|^{n-p-1} d\tau = |t|^{n-1}, \quad (4.25)$$

Provando assim, por indução que,

$$|c_n(t)| \leq |t|^{n-1}, \quad (4.26)$$

para todo  $n \geq 1$ . Portanto  $|g(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t|^{n-1} |\epsilon|^n$ , que converge desde que  $|t||\epsilon| < 1$ .

### 4.3 A Escolha das Constantes $\alpha_n$ . Eliminação dos Termos Seculares

Retornando a (4.15)-(4.17) vamos mostrar que há escolhas das constantes  $\alpha_n$  que nos permitem eliminar os termos seculares de todas as funções  $c_n$ .

De início fazemos notar que a função  $q$ , definida em (3.20), página 40, é quase-periódica, como demonstrado no Apêndice B, página 124, assim como quaisquer potências de  $q$  do tipo  $q^m$  com  $m \in \mathbb{Z}$ . Isso obviamente implica  $c_1$  ser quase-periódica.

#### 4.3.1 Eliminação dos Termos Seculares no Caso $M(q^2) \neq 0$

Vamos primeiramente admitir que  $f$  é tal que  $M(q^2) \neq 0$ . Uma condição suficiente para tal é discutida no Apêndice C, página 126, e um exemplo explícito é tratado na Seção 6.5.1, página 92. O caso  $M(q^2) = 0$  será tratado na Seção 4.3.2, página 50.

Comecemos com a função  $c_2$ . Para que não haja termos seculares em  $c_2$  devemos garantir que o integrando em (4.16) não contenha termos constantes, o que equivale a dizer que seu valor médio é zero. Assim, impomos

$$M(\alpha_1^2 q^2 - q^{-2}) = 0, \quad (4.27)$$

ou seja,

$$\alpha_1^2 = \frac{M(q^{-2})}{M(q^2)} = \frac{\overline{M(q^2)}}{\overline{M(q^2)}} = \frac{\overline{Q_0^{(2)}}}{\underline{Q_0^{(2)}}}. \quad (4.28)$$

## Capítulo 4

No caso geral, de modo a garantir que não haja termos seculares em  $c_n$ ,  $n \geq 3$  precisamos garantir que os integrandos em (4.17) não contenham termos constantes, o que equivale a dizer que seu valor médio é zero:

$$M \left( \sum_{p=1}^{n-1} c_p c_{n-p} \right) = 0. \quad (4.29)$$

Isso significa que, para o caso  $n = 3$

$$2M(c_1 c_2) = 2\alpha_1 M(q c_2) = 0 \quad (4.30)$$

e para o caso  $n \geq 4$

$$2\alpha_1 M(q c_{n-1}) = - \sum_{p=2}^{n-2} M(c_p c_{n-p}). \quad (4.31)$$

Note-se que para (4.30) fazer sentido é preciso já ter garantido que  $c_2$  seja quase-periódica (de modo a garantir que o produto  $c_1 c_2$  tenha um valor médio), ou seja, é preciso garantir que a escolha de  $\alpha_1$  leva a uma função  $c_2$  quase-periódica. A demonstração desse fato será apresentada na Seção 5.1.4. Analogamente, (4.31) só faz sentido se já tivermos demonstrado que todas as funções  $c_p$  com  $p = 2, \dots, n-2$  são quase-periódicas, o que será feito na Seção 5.1.5, página 64.

Para  $n \geq 2$  introduzimos a seguinte definição:

$$d_n(t) := q(t)(c_n(t) - \alpha_n q(t)) = \begin{cases} iq(t)^2 \int_0^t (\alpha_1^2 q(\tau)^2 - q(\tau)^{-2}) d\tau, & n = 2, \\ iq(t)^2 \int_0^t \left( \sum_{p=1}^{n-1} c_p(\tau) c_{n-p}(\tau) \right) d\tau, & n \geq 3. \end{cases} \quad (4.32)$$

De (4.30) extraímos que

$$\alpha_2 = -\frac{M(d_2)}{M(q^2)}, \quad (4.33)$$

o que fixa a constante  $\alpha_2$ . Note-se que o lado direito de (4.33) faz sentido se  $d_2$  for uma função quase-periódica e, portanto, possuir um valor médio  $M(d_2)$ . Todavia, observando o lado direito de (4.32) para  $n = 2$ , vemos que  $d_2$  é quase-periódica se  $c_2$  o for, e  $c_2$  é quase-periódica com a escolha de  $\alpha_1$  dada em (4.28), o que será provado na Seção 5.1.

Para  $n \geq 4$  temos

$$M(q c_{n-1}) = M(d_{n-1}) + \alpha_{n-1} M(q^2). \quad (4.34)$$

A condição (4.31) combinada com (4.34), diz-nos que

$$\alpha_{n-1} = -\frac{1}{M(q^2)} \left( M(d_{n-1}) + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{p=2}^{n-2} M(c_p c_{n-p}) \right). \quad (4.35)$$

para  $n \geq 4$ .

Faz-se novamente importante notar que o lado direito de (4.35) faz sentido pois  $d_{n-1}$  é quase-periódica (e, portanto, tem um valor médio  $M(d_{n-1})$ ). Esse fato segue de (4.32) se  $c_{n-1}$  for quase-periódica, o que será demonstrado indutivamente na Seção 5.1 para  $\alpha_1$  dado em (4.28),  $\alpha_2$  dado em (4.33) e  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}$  dados indutivamente em (4.35).

Notemos também que  $d_{n-1}$  depende somente de  $\{c_1, \dots, c_{n-2}\}$  e, assim, a relação (4.35) fixa  $\alpha_{n-1}$  se  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}\}$  forem dados. Juntar isso com (4.28) e (4.33) permite fixar recursivamente todas as constantes  $\alpha_*$  e garante a validade de (4.27) e de (4.29) para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

A eliminação dos termos seculares, tal como apresentada acima, é um passo importante para a demonstração de periodicidade das funções  $c_n$  que apresentaremos adiante, assim como para a demonstração da convergência da série perturbativa de  $g$ , que apresentaremos para o caso em que  $f$  é periódica (Capítulo 6).

Com a eliminação dos termos seculares estamos aptos a passar à demonstração de que todas as funções  $c_n$  são quase-periódicas, o que será feito estudando as relações recursivas que definem seus coeficientes de Fourier. Isso será feito na Seção 5.1. Antes disso devemos mostrar que também no caso  $M(q^2) = 0$  podemos proceder à eliminação dos termos seculares, desde que hipóteses adicionais sejam satisfeitas.

### 4.3.2 Eliminação dos Termos Seculares no Caso $M(q^2) = 0$

Trataremos aqui do procedimento de eliminação dos termos seculares para a situação em que  $M(q^2) = 0$ . Adiantamos que não há, no momento, solução completa para este caso, dado que uma condição adicional terá que ser adotada. Constatamos, contudo, que a condição  $M(q^2) = 0$  é relativamente rara, pelo menos na situação em que  $M(f) = F_0 = 0$ , como se pode observar em exemplos (vide Seção 6.5.1, página 92). Para o caso  $F_0 \neq 0$ , tratado especialmente no Capítulo 7, temos, pelo contrário, que a condição  $M(q^2) = 0$  é a mais freqüente.

Podemos aqui proceder de duas formas equivalentes. Na primeira adotamos o Ansatz (3.19), página 40, e escolhemos  $\alpha_1 = 0$ , o que nos leva a  $c_n \equiv 0$  para todo  $n$  ímpar, como facilmente se verifica.

Na segunda, que será a que seguiremos, adotamos diretamente o Ansatz

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \lambda^n, \quad (4.36)$$

com  $\lambda := \epsilon^2$ . Inserindo isso em (3.1), página 37, conduz a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (qe_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 e_p e_{n-p} - 2ifqe_n \right) \lambda^n + i\lambda = 0, \quad (4.37)$$

ou seja,

$$(qe_1)' - 2ifqe_1 + i = 0, \quad (4.38)$$

$$(qe_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 e_p e_{n-p} - 2ifqe_n = 0, \quad n \geq 2. \quad (4.39)$$

As soluções são

$$e_1(t) = q(t) \left( -i \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau + \beta_1 \right), \quad (4.40)$$

$$e_n(t) = q(t) \left[ i \left( \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t e_p(\tau) e_{n-p}(\tau) d\tau \right) + \beta_n \right], \quad \text{para } n \geq 2, \quad (4.41)$$

onde as constantes  $\beta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , são constantes de integração arbitrárias.

Como aqui temos  $M(q^2) = \overline{M(q^{-2})} = 0$ , segue que se  $e_1$  é limitada é quase-periódica. O fato que  $e_1$  é limitada será demonstrado na Seção 5.2.2, página 70. Para  $e_2$  temos

$$e_2(t) = q(t) \left[ i \int_0^t e_1(\tau)^2 d\tau + \beta_2 \right]. \quad (4.42)$$

Seguindo a mesma estratégia adotada no caso  $M(q^2) \neq 0$  temos aqui que requerer a condição  $M(e_1^2) = 0$ . Dado que

$$e_1(t)^2 = q(t)^2 \left( - \left( \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau \right)^2 - 2i\beta_1 \left( \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau \right) + \beta_1^2 \right), \quad (4.43)$$

devemos ter que

$$-2i\beta_1 M(Q_1) = M(Q_2), \quad (4.44)$$

com

$$\mathcal{Q}_1(t) := q(t)^2 \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad (4.45)$$

$$\mathcal{Q}_2(t) := q(t)^2 \left( \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau \right)^2. \quad (4.46)$$

Assim, podemos escolher

$$\beta_1 = \frac{i}{2} \frac{M(\mathcal{Q}_2)}{M(\mathcal{Q}_1)}, \quad (4.47)$$

desde que tenhamos  $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$ , ou seja.

$$M(\mathcal{Q}_1) = i \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{|\mathcal{Q}_{\underline{n}}^{(2)}|^2}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \neq 0, \quad (4.48)$$

condição esta que adotaremos aqui.

Fazemos notar que a relação (4.47) faz sentido, pois, pela condição  $M(q^2) = 0$  e por (5.35) (que garante que  $\mathcal{Q}_1$  e  $\mathcal{Q}_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$ ), tanto  $\mathcal{Q}_1$  quanto  $\mathcal{Q}_2$  são quase-periódicas e, portanto, possuem um valor médio bem definido.

Para todo  $n \geq 3$  impomos  $\sum_{p=1}^{n-1} M(e_p e_{n-p}) = 0$ , ou seja,

$$2M(e_1 e_{n-1}) + \sum_{p=2}^{n-2} M(e_p e_{n-p}) = 0, \quad (4.49)$$

convencionando que  $\sum_{p=2}^{n-2} M(e_p e_{n-p}) = 0$  para  $n = 3$ . Vamos definir,

$$j_n(t) := q(t)(e_n(t) - \beta_n q(t)) = iq(t)^2 \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t e_p(\tau) e_{n-p}(\tau) d\tau, \quad (4.50)$$

para  $n \geq 3$ . Teremos para  $n \geq 3$

$$\begin{aligned} M(e_1 e_{n-1}) &= M(q^{-1} e_1 j_{n-1}) + \beta_{n-1} M(e_1 q) \\ &= M(q^{-1} e_1 j_{n-1}) + \beta_{n-1} (-iM(\mathcal{Q}_1) + \beta_1 M(q^2)) \\ &= M(q^{-1} e_1 j_{n-1}) - i\beta_{n-1} M(\mathcal{Q}_1). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Assim, a condição (4.49) implica

$$\beta_{n-1} = -i \left[ \frac{M(q^{-1}e_1 j_{n-1}) + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n-2} M(e_p e_{n-p})}{M(Q_1)} \right], \quad n \geq 3. \quad (4.52)$$

Mais uma vez fazemos notar que esta expressão faz sentido desde que  $j_{n-1}$  seja quase-periódica e, portanto, tenha um valor médio bem definido. Isso, porém, é verdadeiro pois, por (4.50), isso segue do fato que  $e_{n-1}$  é quase-periódica, o que será demonstrado indutivamente na Seção 5.2 para o valor de  $\beta_1$  dado em (4.47) e para os valores de  $\beta_2, \dots, \beta_{n-2}$  dados indutivamente em (4.52).

Assim, com essas escolhas de (4.47) e (4.52), podemos garantir que nenhum termo secular aparecerá com as integrações de (4.40) e (4.41). Na Seção 5.2 mostraremos que as funções  $e_n$  são todas quase-periódicas.

### 4.3.3 O Caso $f$ Constante. Uma Conjectura

A título de ilustração, e com o propósito de dar base a uma conjectura, demonstraremos aqui que a expansão para a função  $g$  é convergente em um caso um tanto trivial, mas ainda interessante e instrutivo, a saber, naquele em que  $f$  é uma função constante. Um outro caso, este não trivial, em que a função  $f$  é periódica, será tratado no Capítulo 6, página 74.

No caso em que  $f(t) = F_0 \equiv F_0$ , constante, a equação de Riccati (3.1) tem  $g = -F_0 \pm \sqrt{F_0^2 + \epsilon^2}$  como soluções particulares. Temos também, para ambos os casos, usando diretamente (3.3), página 37,

$$U(t) = \frac{1}{\omega_0} \begin{pmatrix} \omega_0 \cos(\omega_0 t) - iF_0 \sin(\omega_0 t) & -\epsilon \sin(\omega_0 t) \\ -\epsilon \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) + iF_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

com  $\omega_0 := \sqrt{F_0^2 + \epsilon^2}$ . Essa expressão também pode ser obtida diretamente da equação de Schrödinger (1.4), página 13, por diagonalização do Hamiltoniano independente do tempo

$$H_2 = \epsilon \sigma_1 + F_0 \sigma_3 = \begin{pmatrix} \epsilon & F_0 \\ F_0 & -\epsilon \end{pmatrix}.$$

Neste ponto faz-se importante notar que, no caso em que  $f(t) = F_0 \equiv F_0$ , constante, com  $F_0 \neq 0$ , temos precisamente a situação tratada na Seção 4.3.2, a saber  $M(q^2) = 0$  mas com  $M(Q_1) = i(2F_0)^{-1} \neq 0$ . Esses dois fatos são facilmente verificáveis e omitiremos a demonstração. Assim, esperamos que a expansão em série de potências de (4.36) reproduza a solução  $g = -F_0 + \sqrt{F_0^2 + \epsilon^2}$  (aqui tomamos  $F_0 > 0$  sem perda de generalidade).

Provemos então convergência para  $|\epsilon| < |F_0|$  da série (4.36). Usando (4.41) e (4.52) provaremos por indução que

$$e_m(t) = l_m q(t)^{-1} \quad (4.54)$$

e que

$$\beta_m = l_m, \quad (4.55)$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ , onde

$$l_m := (-1)^{m-1} \frac{(2m-2)!}{m!(m-1)!} \frac{1}{(2F_0)^{2m-1}}. \quad (4.56)$$

Um cálculo explícito usando (4.47) e (4.40) mostra que  $e_1(t) = (2F_0)^{-1}q(t)^{-1} = l_1 q(t)^{-1}$  e que  $\beta_1 = (2F_0)^{-1} = l_1$ . Vamos admitir a validade de (4.54) e de (4.55) para  $1 \leq m \leq n-1$ . Por (4.52) temos

$$\beta_n = -(2F_0) \left[ M(q^{-1}e_1 j_n) + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n-1} M(e_p e_{n+1-p}) \right], \quad (4.57)$$

mas, por (4.54),  $M(e_p e_{n+1-p}) = l_p l_{n+1-p} \overline{M(q^2)} = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \beta_n &= -(2F_0) M(q^{-1}e_1 j_n) = -iM \left( \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t e_p(\tau) e_{n-p}(\tau) d\tau \right) \\ &= -\frac{1}{2F_0} \sum_{p=1}^{n-1} l_p l_{n-p} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2F_0)^{2n-1}} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(2p-2)! (2n-2p-2)!}{p!(p-1)!(n-p)!(n-p-1)!}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Usando a identidade

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{(2p-2)! (2n-2p-2)!}{p!(p-1)!(n-p)!(n-p-1)!} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}, \quad (4.59)$$

(vide relação (4.61) adiante) a prova de (4.55) para  $m = n$  fica agora completa. De (4.55) temos

$$\begin{aligned} e_n(t) &= q(t) \left[ i \int_0^t q(\tau)^{-2} d\tau \left( \sum_{p=1}^{n-1} l_p l_{n-p} \right) + l_n \right] \\ &= l_n q(t)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

usando novamente (4.41) e (4.59). Isso prova (4.54) e (4.55) por indução para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Com (4.54) pode-se facilmente verificar que (4.36) é exatamente a série de Taylor em  $\epsilon$  (em torno de  $\epsilon = 0$ ) da função  $-F_0 + \sqrt{F_0^2 + \epsilon^2}$ , que é uma solução particular de (3.1) para o caso  $f(t) = F_0$ . Neste caso a convergência de (4.36) é claramente restrita a  $|\epsilon| < |F_0|$ .

A interessante relação (4.59) é um caso particular de uma relação mais geral, a saber,

$$\sum_{k=0}^n \binom{tk+r}{k} \binom{tn-tk+s}{n-k} \frac{r}{tk+r} \frac{s}{tn-tk+s} = \binom{tn+r+s}{n} \frac{r+s}{tn+r+s}. \quad (4.61)$$

Isso pode ser visto tomando-se  $t = 2$ ,  $r = s = -1$  e movendo-se os termos com  $k = 0$  e  $k = n$  para o lado direito de (4.61). A relação (4.61) é uma das identidades sobre coeficientes binomiais que alguns autores denominam “identidades de convolução”. A mesma relação (4.61) é válida para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t, r, s \in \mathbb{R}$ . Sua demonstração é indicada no Capítulo 5 da referência [23].

Para a análise geral aprendemos deste exemplo que a convergência de (4.36), página 51, não pode ser esperada para todos os valores de  $\epsilon$ . Além disso vemos que na situação em que  $M(f) \neq 0$  e em que  $f$  tem pequenas oscilações em torno de seu valor médio, ou seja, quando a quantidade

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{f(t) - M(f)}{M(f)} \right|$$

for pequena, a série (4.36) deve presumivelmente convergir, pelo menos para valores pequenos de  $|\epsilon|$ . Nesse caso, a função  $g_0(t) = -f(t) + \sqrt{\epsilon^2 + f(t)^2}$  deve representar uma primeira aproximação à solução da equação de Riccati generalizada (3.1) e esta função  $g_0$  é analítica em  $\epsilon$  se  $|\epsilon|$  for pequeno, caso justamente  $(f(t) - M(f))/M(f)$  for uniformemente pequena.

Infelizmente a análise que apresentaremos adiante não permitirá demonstrar essa conjectura, que ainda permanece em aberto. Cremos, contudo, que a situação descrita nessa conjectura seja uma das poucas, se não a única, onde uma expansão em  $\epsilon$  convergente para o caso geral de  $f$  quase-periódica possa ser obtida.

# Capítulo 5

## Interações Quase-Periódicas. Séries de Fourier

Neste capítulo empenhamo-nos em demonstrar que as funções  $c_n$  e  $e_n$  são quase-periódicas. Faremos uso importante das relações de recorrência apresentadas no Capítulo 4, página 56, assim como da eliminação dos termos seculares obtida naquele capítulo.

### 5.1 Quase-Periodicidade das Funções $c_n$

Nesta seção demonstraremos para o caso  $M(q^2) \neq 0$  que as funções  $c_n$  são quase-periódicas quando adotamos para as constantes  $\alpha_n$  as escolhas expressas em (4.28), (4.33) e (4.35) (páginas 48 e 50). Como mencionado, essas escolhas eliminam completamente os termos seculares das funções  $c_n$ , restando ainda para a demonstração de quase-periodicidade provar que as funções  $c_n$  são todas limitadas, o que faremos provando que seus coeficientes de Fourier decaem rapidamente, de modo a serem absolutamente somáveis.

Antes de prosseguirmos tentaremos descrever a estratégia que seguiremos e os problemas que enfrentaremos. A estratégia e os problemas serão ademais os mesmos no caso  $M(q^2) = 0$ , tratado na Seção 5.2, página 69. Nossa primeiro passo será expressar formalmente as relações de recorrência (4.15)-(4.17) para as funções  $c_n$  (com as escolhas (4.28), (4.33) e (4.35)) em termos de seus coefi-

cientes de Fourier  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ ,  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ . As relações de recorrência assim obtidas para os coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$  envolvem convoluções e pequenos denominadores e ambos combinados representam dificuldades para as expansões. A presença de produtos de convolução é uma consequência do fato de a equação de Riccati generalizada (3.1) ser quadrática e ter coeficientes não-constantes.

Nosso objetivo é mostrar que os coeficientes de Fourier  $C_{\underline{m}}^{(n)}$  decaem rapidamente a zero quando  $|\underline{m}| \rightarrow \infty$ . Para tal procederemos da seguinte forma. Conforme demonstrado no Apêndice E, página 132, os coeficientes de Fourier  $Q_{\underline{m}}$  da função  $q$  decaem rapidamente a zero quando  $f$  é dado por uma série de Fourier finita, a saber, nesse caso temos uma cota superior do tipo

$$|Q_{\underline{m}}| \leq Q e^{-x|\underline{m}|}, \quad \forall \underline{m} \in \mathbb{Z}^A. \quad (5.1)$$

Usaremos então as relações de recorrência para os coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$  para demonstrar indutivamente cotas superiores do tipo

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq K_n e^{-(x-\delta_n)|\underline{m}|} \quad (5.2)$$

para os mesmos. Este decaimento exponencial, por um lado, serve para justificar a posteriori a própria dedução das relações de recorrência dos coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , por outro lado, estabelece também por indução a quase-periodicidade das funções  $c_n$ , pois com um decaimento rápido como esse é fácil demonstrar-se que as funções  $c_n$  são limitadas.

Devido à presença das convoluções e dos pequenos denominadores nas relações de recorrência dos coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , a seqüência  $\delta_n$  que surge em (5.2) é, como veremos, positiva e crescente. É possível, todavia, mantê-la limitada superiormente e menor que  $\chi$ , mas para tal paga-se um preço nas constantes  $K_n$ , que passam a crescer muito fortemente quando  $n \rightarrow \infty$ . Esse crescimento impossibilitará demonstrar a convergência da série formal (3.19), página 40, no caso genérico onde  $f$  é quase-periódica. No caso periódico, como veremos no Capítulo 6, página 74, as estimativas para  $|C_{\underline{m}}^{(n)}|$  podem ser muito melhoradas e o comportamento as constantes  $K_n$  é bem menos selvagem, permitindo demonstrar a convergência das séries de potências em  $\epsilon$  para  $|\epsilon|$  pequeno.

### 5.1.1 A Decomposição de Fourier das Funções $c_n$

A demonstração de quase-periodicidade das funções  $c_n$  será feita indutivamente, de modo que precisamos primeiramente provar em separado que  $c_1$  e  $c_2$  são quase-periódicas. Consideraremos

primeiramente o caso de  $c_1$ , que equivale obviamente a provar que  $q$  é quase-periódica.

Para provar que  $q$  é quase-periódica escrevemos

$$q(t) := e^{iF_0 t} \exp \left( i \int_0^t (f(\tau) - F_0) d\tau \right). \quad (5.3)$$

Supondo que

$$2 \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{|F_{\underline{n}}|}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f|} < \infty, \quad (5.4)$$

o que é trivialmente verdade se a série de Fourier de  $f$  tiver um número finito de termos, teremos

$$f_1(t) := \int_0^t (f(\tau) - F_0) d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad (5.5)$$

e pelo Teorema de Bohr segue que  $f_1$  é “almost”-periódica e, pela convergência uniforme da série de Fourier (veja [24]), segue que

$$f_1(t) = -i \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{F_{\underline{n}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f} (e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f t} - 1), \quad (5.6)$$

o que mostra que  $f_1$  é quase-periódica. Um argumento padrão mostra no Apêndice B, página 124, que  $\exp(if_1(t))$  é também quase-periódica e  $\beta(\exp(if_1(t))) = \beta(f_1) = \beta(f)$ , onde  $\beta$  está definida à página 34. Assim, estabelecemos que  $q$  é quase-periódica com  $\sigma(q) = \sigma(f) + F_0$ . Escrevemos

$$q(t) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{n}} e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (5.7)$$

onde  $\underline{\omega}$  e  $A$  são definidos em (1.45) e (1.46), respectivamente.

No Apêndice C, página 126, trataremos de estudar com detalhe a relação entre os coeficientes de Fourier de  $q$  e os de  $f$ . Esse estudo será importante para demonstrar o rápido decaimento dos coeficientes  $Q_{\underline{m}}$  com  $|\underline{m}| \rightarrow \infty$ , decaimento esse que será importante no que segue.

Como as expressões (4.15)-(4.17), página 46, envolvem integrais e produtos de integrais de polinômios nas funções  $q$  e  $q^{-1}$  e, em função da já mencionada eliminação dos termos seculares, segue que as funções  $c_n$  devem também possuir uma decomposição de Fourier com as mesmas freqüências da função  $q$ . Para  $n \geq 1$ , escrevemos

$$c_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (5.8)$$

o que define os coeficientes de Fourier  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ .

Vamos agora expressar as relações recursivas (4.15)-(4.17) em relações recursivas para os coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ .

Por (4.16) teremos para  $C_{\underline{m}}^{(2)}$ ,

$$C_{\underline{m}}^{(2)} = Q_{\underline{m}} \left[ \alpha_2 - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right] + \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{m}-\underline{n}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \left( \alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}} \right). \quad (5.9)$$

Acima,  $Q_{\underline{n}}^{(2)}$  são os coeficientes de Fourier de  $q^2$ , ou seja,

$$q(t)^2 = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{m}}^{(2)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (5.10)$$

com

$$Q_{\underline{m}}^{(2)} = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{n}} Q_{\underline{m}-\underline{n}}. \quad (5.11)$$

Para  $n \geq 3$  temos por (4.17):

$$\begin{aligned} C_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} + \\ &\quad Q_{\underline{m}} \left[ \alpha_n - \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para as constantes  $\alpha_n$  temos, de acordo com (4.28), (4.33) e (4.35) (páginas 48 e 50), as seguintes expressões:

$$\alpha_1^2 = Q_{\underline{0}}^{(2)} / \overline{Q_{\underline{0}}^{(2)}}, \quad (5.13)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{M(q^2)} \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\left( \alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}} \right)}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \left( Q_{-\underline{n}}^{(2)} - Q_{\underline{0}}^{(2)} \right), \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{1}{M(q^2)} \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \left( Q_{-(\underline{n}_1+\underline{n}_2)}^{(2)} - Q_{\underline{0}}^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{n}}^{(p)} C_{-\underline{n}}^{(n+1-p)} \right\}, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Inserindo essas expressões em (5.9) e (5.12) obtemos

$$C_{\underline{m}}^{(1)} = \alpha_1 Q_{\underline{m}}, \quad (5.16)$$

$$C_{\underline{m}}^{(2)} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\left(\alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q}_{-\underline{n}}^{(2)}\right)}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \left[ Q_{\underline{m}-\underline{n}} - \frac{Q_{\underline{m}} Q_{-\underline{n}}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right], \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} C_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \left[ Q_{\underline{m}-(\underline{n}_1+\underline{n}_2)} - \frac{Q_{\underline{m}} Q_{-\underline{n}_1-\underline{n}_2}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right] \\ &\quad - \frac{Q_{\underline{m}}}{2\alpha_1 Q_0^{(2)}} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \sum_{p=2}^{n-1} C_{\underline{n}}^{(p)} C_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Acima usamos  $M(q^2) = Q_0^{(2)}$ . Estas três últimas relações são as relações recursivas que procurávamos para os coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ . Faremos uso das mesmas para obter indutivamente cotas superiores para as quantidades  $|C_{\underline{m}}^{(n)}|$ , com o que completaremos a demonstração de quase-periodicidade das funções  $c_n$ . Faremos também uso dessas relações no caso periódico, onde melhores resultados serão obtidos.

### 5.1.2 Convolução de Exponenciais

Estaremos adiante calculando convoluções como

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) := \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-\alpha(|\underline{n}| + |\underline{m} - \underline{n}|)}, \quad (5.19)$$

para  $\alpha > 0$ . Para as mesmas temos a seguinte proposição:

**5.1 Proposição.** Seja  $\Xi_0(\alpha, \underline{m})$  como definido em (5.19) com  $\alpha > 0$  e  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ . Temos

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) = e^{-\alpha|\underline{m}|} \prod_{a=1}^A (|m_a| + (\tanh(\alpha))^{-1}) \quad (5.20)$$

e, então, para todo  $\delta > 0$  vale

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) \leq \left[ \left( \frac{A}{e\delta} \right)^A e^{\delta/\tanh(\alpha)} \right] e^{-(\alpha-\delta)|\underline{m}|}. \quad (5.21)$$

□

**Prova.** Temos que

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) = \prod_{a=1}^A \Xi_1(\alpha, m_a), \quad (5.22)$$

onde, para  $\alpha > 0$  e  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\Xi_1(\alpha, m) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(|n|+|m-n|)}. \quad (5.23)$$

Um cálculo explícito mostra que, para todo  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\Xi_1(\alpha, m) = e^{-\alpha|m|} (|m| + (\tanh(\alpha))^{-1}). \quad (5.24)$$

Demonstremos isso. Como  $\Xi_1(\alpha, m) = \Xi_1(\alpha, -m)$  e como (5.24) é trivialmente satisfeita para  $m = 0$ , é suficiente considerar  $m > 0$ . Agora, nesse caso, vale que

$$\begin{aligned} \Xi_1(\alpha, m) &= \sum_{n=-\infty}^0 e^{-\alpha(-n+m-n)} + \sum_{n=1}^m e^{-\alpha(n+m-n)} + \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-\alpha(n+n-m)} \\ &= e^{-\alpha m} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\alpha n} + m e^{-\alpha m} + e^{+\alpha m} \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-2\alpha n} \\ &= e^{-\alpha m} \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\alpha n} \right) (1 + e^{-2\alpha}) + m e^{-\alpha m} \\ &= e^{-\alpha m} (m + (\tanh(\alpha))^{-1}), \end{aligned} \quad (5.25)$$

completando a demonstração de (5.24).

Assim,

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) = \prod_{a=1}^A (e^{-\alpha|m_a|} (|m_a| + (\tanh(\alpha))^{-1})) \leq (|\underline{m}| + (\tanh(\alpha))^{-1})^A e^{-\alpha|\underline{m}|}. \quad (5.26)$$

Usando agora a desigualdade

$$|x|^\sigma \leq \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma e^{\delta|x|}, \quad (5.27)$$

valida para todo  $x \in \mathbb{C}$  e todo  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$ , chega-se a (5.21). ■

O que se aprende da relação (5.21) é que a convolução de duas funções exponenciais com taxa de decaimento  $\alpha$  leva a uma nova função que é limitada por uma função exponencial que tem taxa de decaimento um pouco menor que  $\alpha$ , ou seja  $\alpha - \delta$ , com  $\delta > 0$ , sendo que esse  $\delta$  pode, em princípio,

ser escolhido arbitrariamente pequeno. Contudo, a redução de  $\delta$  se dá em detrimento da constante que multiplica a função exponencial no lado direito de (5.21), constante essa que varia com  $\delta^{-A}$ .

Essa perda de decaimento exponencial terá consequências adiante e evidencia um problema gerado pela presença de convoluções nas nossas fórmulas recursivas para os coeficientes de Fourier das funções  $c_n$ . Esse efeito agrava-se ainda mais com a presença de pequenos denominadores, como veremos adiante.

Em verdade, só seremos capazes de controlar completamente essa combinação nociva no caso em que  $f$  é periódica.

### 5.1.3 Uma Cota Superior para $|Q_{\underline{m}}^{(2)}|$

Neste momento temos que introduzir algumas restrições que se refletem em restrições à função  $f$ . A primeira restrição refere-se ao vetor de freqüências  $\underline{\omega}$ . Suporemos que o vetor de freqüências  $\underline{\omega}$  satisfaz condições ditas Diofantinas, nomeadamente, suporemos que há constantes  $\Delta > 0$  e  $\sigma > 0$  tais que, para todo  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^A$ ,  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ,

$$|\underline{n} \cdot \underline{\omega}| \geq \Delta^{-1} |\underline{n}|^{-\sigma}. \quad (5.28)$$

A segunda restrição refere-se a propriedades de decaimento dos coeficientes de Fourier  $Q_{\underline{m}}$  para  $|\underline{m}| \rightarrow \infty$ . Suporemos a existência de constantes  $Q > 0$  e  $\chi > 0$  tais que, para todo  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ , tem-se

$$|Q_{\underline{m}}| \leq Q e^{-\chi |\underline{m}|}. \quad (5.29)$$

Isso será demonstrado no Apêndice E, página 132, para o caso em que  $f$  tem uma decomposição de Fourier dada por uma soma finita.

Dado que  $Q_{\underline{m}}^{(2)} = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{m}-\underline{n}} Q_{\underline{n}}$  temos por (5.29) que

$$|Q_{\underline{m}}^{(2)}| \leq Q^2 \Xi_0(\chi, \underline{m}), \quad (5.30)$$

onde  $\Xi_0$  foi definido em (5.19).

Definindo

$$Q^{(2)}(\delta) := Q^2 \left( \frac{A}{e\delta} \right)^A e^{\delta/\tanh(\chi)} \quad (5.31)$$

para  $\delta > 0$ , concluímos de (5.21) que para algum  $\delta_2$  positivo e pequeno o suficiente temos

$$|Q_{\underline{m}}^{(2)}| \leq Q^{(2)}(\delta_2/2)e^{-(x-\delta_2/2)|\underline{m}|}. \quad (5.32)$$

No que se segue denotaremos  $Q^{(2)} \equiv Q^{(2)}(\delta_2/2)$ .

#### 5.1.4 Uma Cota Superior para $|C_{\underline{m}}^{(2)}|$

Dado que  $c_2$  é expressa como o produto da função quase-periódica  $q$  com a integral de uma outra função quase-periódica temos, para demonstrar que  $c_2$  é quase-periódica, apenas que mostrar que

$$i \int_0^t (\alpha_1^2 q(\tau)^2 - q(\tau)^{-2}) d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (5.33)$$

Pelas hipóteses acima, e usando que  $|\alpha_1| = 1$ , temos

$$\left| i \int_0^t (\alpha_1^2 q(\tau)^2 - q(\tau)^{-2}) d\tau \right| \leq 2 \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \leq 2\Delta Q^{(2)} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} |\underline{n}|^\sigma e^{-(x-\delta_2/2)|\underline{n}|}. \quad (5.34)$$

Acima o termo que corresponde a  $\underline{n} = \underline{0}$  foi eliminado pela escolha de  $\alpha_1$ . Usando (5.27), obtemos

$$2 \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \leq 2\Delta Q^{(2)} \left( \frac{2\sigma}{e\delta_2} \right)^\sigma \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(x-\delta_2)|\underline{n}|} \leq \infty \quad (5.35)$$

onde, acima, escolhemos  $\delta_2 < \chi$ . Isto conclui a demonstração de (5.33) e mostra que  $c_2$  é quase-periódica.

A relação (5.17) fornece-nos a seguinte cota superior para  $|C_{\underline{m}}^{(2)}|$ :

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(2)}| &\leq 2\Delta Q^{(2)} Q \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} |\underline{n}|^\sigma e^{-(x-\delta_2/2)|\underline{n}|} \left[ e^{-x|\underline{m}-\underline{n}|} + \frac{Q^{(2)}}{|Q_{\underline{0}}^{(2)}|} e^{-x|\underline{m}|-(x-\delta_2/2)|\underline{n}|} \right] \\ &\leq 2\Delta Q^{(2)} Q \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \left( L_1(\underline{m}) + e^{-x|\underline{m}|} \frac{Q^{(2)}}{|Q_{\underline{0}}^{(2)}|} L_2(2\chi - \delta_2 - \delta), \right), \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde, acima, usamos novamente (5.27) e a condição Diofantina (5.28). Acima

$$L_1(\underline{m}) := \Xi(x - \delta_2/2 - \delta, \chi, \underline{m}), \quad (5.37)$$

onde, para  $\alpha, \beta > 0$ ,

$$\Xi(\alpha, \beta, \underline{m}) := \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-\alpha|\underline{n}| - \beta|\underline{m}-\underline{n}|} \quad \text{e} \quad L_2(\alpha) := \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-\alpha|\underline{n}|}. \quad (5.38)$$

Note-se que  $\Xi(\alpha, \beta, \underline{m}) = \Xi(\beta, \alpha, \underline{m})$  e que

$$\Xi(\alpha, \beta, \underline{m}) \leq \Xi_0(\min\{\alpha, \beta\}, \underline{m}). \quad (5.39)$$

Para prosseguir devemos determinar boas cotas superiores para  $L_1$  e  $L_2$ . Para  $L_2(\alpha)$  temos simplesmente

$$L_2(\alpha) = \left(1 + 2 \sum_{a=1}^{\infty} e^{-\alpha a}\right)^A = \left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right)^A \quad (5.40)$$

com  $\alpha > 0$ . Para  $L_1$  temos, usando (5.39),

$$L_1(\underline{m}) \leq \Xi_0(\chi - \delta_2/2 - \delta, \underline{m}) \leq e^{-(\chi - \delta_2/2 - 2\delta)|\underline{m}|} e^{\delta/\tanh(\chi - \delta_2/2 - \delta)} \left(\frac{A}{e\delta}\right)^A \quad (5.41)$$

por (5.21), para qualquer  $\delta > 0$  e pequeno o suficiente. Escolhendo  $\delta = \delta_2/4$  obtemos

$$L_1(\underline{m}) \leq e^{-(\chi - \delta_2)|\underline{m}|} e^{\delta_2/(4\tanh(\chi - 3\delta_2/4))} \left(\frac{4A}{e\delta_2}\right)^A. \quad (5.42)$$

Coletando as estimativas acima temos, para todo  $\delta_2 > 0$  suficientemente pequeno,

$$|C_{\underline{m}}^{(2)}| \leq \mathcal{K}_2 e^{-(\chi - \delta_2)|\underline{m}|}, \quad (5.43)$$

onde,

$$\mathcal{K}_2 := 2\Delta Q^{(2)} Q \left(\frac{4\sigma}{e\delta_2}\right)^\sigma \left(e^{\delta_2/\tanh(\chi - 3\delta_2/4)} \left(\frac{4A}{e\delta_2}\right)^A + \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} L_2(2\chi - 5\delta_2/4)\right). \quad (5.44)$$

Note-se que  $\mathcal{K}_2 \sim \delta_2^{-(2A+\sigma)}$  para  $\delta_2 \rightarrow 0$ .

### 5.1.5 Cotas Superiores Recursivas para $|C_{\underline{m}}^{(n)}|$ com $n \geq 3$

Para mostrar que todos os  $c_n$ 's,  $n \geq 3$ , são quase-periódicos notemos que o tipo de raciocínio usado acima pode ser aplicado indutivamente e mostra-nos ser suficiente provar que  $c_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Para tal é suficiente provar que

$$\sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} |C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \infty. \quad (5.45)$$

Usando a condição Diofantina (5.28) junto com (5.29) e (5.32) obtemos de (5.18)

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \Delta Q \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} |\underline{n}_1 + \underline{n}_2|^\sigma \left( \sum_{p=1}^{n-1} |C_{\underline{n}_1}^{(p)}| |C_{\underline{n}_2}^{(n-p)}| \right) \left[ e^{-\chi|\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2|} + \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} e^{-\chi|\underline{m}| - (\chi - \delta_2)|\underline{n}_1 + \underline{n}_2|} \right] \\ &+ e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \sum_{p=2}^{n-1} |C_{\underline{n}}^{(p)}| |C_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}|, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.46)$$

A estratégia que seguiremos será a de usar (5.46) para determinar recursivamente uma cota superior para o valor absoluto dos coeficientes de Fourier  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , a partir do que (5.45) segue.

Vamos então presumir que para todo  $a$  com  $1 \leq a \leq n - 1$  haja constantes positivas  $\mathcal{K}_a$  e  $\delta_a$ ,  $\delta_a < \chi$ , tais que para todo  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ ,

$$|C_{\underline{m}}^{(a)}| \leq \mathcal{K}_a e^{-(\chi - \delta_a)|\underline{m}|}. \quad (5.47)$$

Já vimos anteriormente que podemos adotar  $\mathcal{K}_1 := Q$ ,  $\delta_1 := 0$  e  $\mathcal{K}_2$  como em (5.44), com  $\delta_2$  arbitrário, porém pequeno.

Inserindo (5.47) em (5.46) e tornando a usar a desigualdade (5.27), com algum  $\delta > 0$  pequeno o suficiente a ser escolhido, tem-se

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \Delta Q \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n-p} \left( L_3(p, \underline{m}) + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} L_4(p) \right) \\ &\quad + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n+1-p} L_5(p), \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde

$$L_3(p, \underline{m}) := L_3(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, \delta, \chi, \underline{m}), \quad (5.49)$$

$$L_4(p) := L_4(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, \chi - \delta_2 - \delta), \quad (5.50)$$

$$L_5(p) := L_2(2\chi - \delta_p - \delta_{n+1-p}), \quad (5.51)$$

com  $1 \leq p \leq n - 1$  para  $L_3$  e para  $L_4$  e  $2 \leq p \leq n - 1$  para  $L_5$ . Acima

$$L_3(\alpha, \beta, \mu, \nu, \underline{m}) := \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-\alpha|\underline{n}_1| - \beta|\underline{n}_2| + \mu|\underline{n}_1 + \underline{n}_2| - \nu|\underline{m} - \underline{n}_1 - \underline{n}_2|), \quad (5.52)$$

$$L_4(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-\alpha|\underline{n}_1| - \beta|\underline{n}_2| - \gamma|\underline{n}_1 + \underline{n}_2|), \quad (5.53)$$

com  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu > 0$  e  $\mu$  pequenos o suficiente.

Temos agora que determinar cotas superiores convenientes para as somas acima. Para  $L_5(p)$  temos

$$L_5(p) = L_2(2\chi - \delta_p - \delta_{n+1-p}) \leq L_2(2\chi - 2\delta[n]), \quad (5.54)$$

onde

$$\delta[n] := \max_{p' < n} \delta_{p'}.$$
 (5.55)

Para  $L_4(\alpha, \beta, \gamma)$  temos

$$L_4(\alpha, \beta, \gamma) \leq L_4(\alpha, \beta, 0) = L_2(\alpha)L_2(\beta).$$
 (5.56)

Assim,

$$L_4(p) \leq L_2(\chi - \delta_p)L_2(\chi - \delta_{n-p}) \leq L_2(\chi - \delta[n])^2.$$
 (5.57)

Vamos agora tratar de  $L_3(p, \underline{m})$ . Para uso futuro vamos primeiramente determinar cotas superiores para  $L_3(\alpha, \beta, \mu, \nu, \underline{m})$ . Temos para  $\delta > 0$  qualquer mas suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} L_3(\alpha, \beta, \mu, \nu, \underline{m}) &\leq \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-(|\alpha - \mu| |\underline{n}_1| - |\beta - \mu| |\underline{n}_2| - \nu |\underline{m} - \underline{n}_1 - \underline{n}_2|)) \\ &= \sum_{\underline{n}_1 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-(\alpha - \mu) |\underline{n}_1|) \Xi(\beta - \mu, \nu, \underline{m} - \underline{n}_1) \\ &\leq \sum_{\underline{n}_1 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-(\alpha - \mu) |\underline{n}_1|) \Xi_0(\kappa, \underline{m} - \underline{n}_1) \\ &\leq \left(\frac{A}{e\delta}\right)^A \exp\left(\frac{\delta}{\tanh(\kappa)}\right) \Xi(\alpha - \mu, \kappa - \delta, \underline{m}) \\ &\leq \left(\frac{A}{e\delta}\right)^A \exp\left(\frac{\delta}{\tanh(\kappa)}\right) \Xi_0(\zeta, \underline{m}) \\ &\leq \mathcal{S} e^{-(\zeta - \delta) |\underline{m}|}, \end{aligned}$$
 (5.58)

com

$$\mathcal{S} := \left(\frac{A}{e\delta}\right)^{2A} \exp\left(\frac{\delta}{\tanh(\kappa)} + \frac{\delta}{\tanh(\zeta)}\right),$$
 (5.59)

com

$$\kappa := \min\{\beta - \mu, \nu\}$$
 (5.60)

e com

$$\zeta := \min\{\alpha - \mu, \kappa - \delta\} = \min\{\alpha - \mu, \beta - \mu - \delta, \nu - \delta\}.$$
 (5.61)

Acima, em (5.58), fizemos uso da desigualdade (5.21) na terceira e na última desigualdades, assim como fizemos uso de (5.39). Após as devidas substituições concluímos que

$$L_3(p, \underline{m}) \leq \left[ \left( \frac{A}{e\delta} \right)^{2A} \exp \left( \frac{2\delta}{\tanh(\chi - \delta[n] - 2\delta)} \right) \right] \exp(-(\chi - \delta[n] - 3\delta)|\underline{m}|). \quad (5.62)$$

Note-se que as cotas superiores (5.54), (5.57) e (5.62) não dependem de  $p$ , mas sim de  $n$ .

Escolhemos a seqüência  $\delta_a$ ,  $a \geq 1$  como uma seqüência estritamente crescente e limitada, convergindo para algum  $\delta_\infty < \chi$ . Com isso tem-se  $\delta[n] = \delta_{n-1}$ . Escolhemos também  $\delta$  de tal forma que  $\delta_n = \delta_{n-1} + 3\delta$ . Essas escolhas conduzem a

$$L_3(p, \underline{m}) \leq \left[ \left( \frac{3A}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^{2A} \exp \left( \frac{2\delta_\infty}{3\tanh(\chi - \delta_\infty)} \right) \right] \exp(-(\chi - \delta_n)|\underline{m}|), \quad (5.63)$$

$$L_4(p) \leq L_2(\chi - \delta_\infty)^2, \quad (5.64)$$

$$L_5(p) \leq L_2(2\chi - 2\delta_\infty), \quad (5.65)$$

com  $1 \leq p \leq n-1$  para  $L_3$  para  $L_4$  e  $2 \leq p \leq n-1$  para  $L_5$ .

Retornando a (5.48) teremos

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \Delta Q \left( \frac{3\sigma}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^\sigma D_n (e^{-(\chi - \delta_n)|\underline{m}|} + e^{-\chi|\underline{m}|}) \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \\ &\quad + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} L_2(2\chi - 2\delta_\infty) \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

com

$$D_n := \max \left\{ \left( \frac{3A}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^{2A} \exp \left( \frac{2\delta_\infty}{3\tanh(\chi - \delta_\infty)} \right), L_2(\chi - \delta_\infty)^2 \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} \right\}. \quad (5.67)$$

Obtemos finalmente a seguinte cota superior:

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq K_n e^{-(\chi - \delta_n)|\underline{m}|}, \quad (5.68)$$

com

$$K_n := 2\Delta Q \left( \frac{3\sigma}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^\sigma D_n \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} + \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} L_2(2\chi - 2\delta_\infty) \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p}. \quad (5.69)$$

Por indução isso conduz à seguinte desigualdade

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{K}_n e^{-(x-\delta_\infty)|\underline{m}|} \quad (5.70)$$

válida para todo  $n \in \mathbb{N}$  e isso demonstra (5.45) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isso, por sua vez, estabelece que todas as funções  $c_n$  são quase-periódicas em  $\mathbb{R}$  pois implica  $\sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} |C_{\underline{m}}^{(n)}| < \infty$ , provando assim o Teorema 4.1 (página 42) para o caso I.

### 5.1.6 O Problema da Convergência da Série de Potências em $\epsilon$

Devemos agora tratar da questão da convergência da série de potências formal (3.19), página 40.

Como  $|c_n(t)| \leq \mathcal{K}_n \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(x-\delta_\infty)|\underline{m}|}$  temos que analisar a convergência da soma formal infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n |\epsilon|^n. \quad (5.71)$$

Como a seqüência estritamente crescente  $\delta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , introduzida na definição de  $\mathcal{K}_n$ , tem de convergir a algum  $\delta_\infty < \chi$ , as diferenças  $\delta_n - \delta_{n-1}$  que ocorrem em (5.69) tem de decair a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, o comportamento dominante, para  $n$  grande, no lado direito de (5.69) é essencialmente

$$\mathcal{K}_n \approx \frac{C}{(\delta_n - \delta_{n-1})^{\sigma+2A}} \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n-p}, \quad (5.72)$$

para alguma constante positiva  $C$ . Se escolhermos uma seqüência  $\delta_n$  que converja vagarosamente, por exemplo como  $\delta_n - \delta_{n-1} \simeq n^{-(1+\epsilon_0)}$ , com algum  $\epsilon_0 > 0$ , iríamos provavelmente encontrar  $\mathcal{K}_n$  comportando-se para  $n$  grande como  $\mathcal{K}_n \approx (n!)^{(1+\epsilon_0)(\sigma+2A)} c^n$ , para alguma constante  $c > 1$ .

Infelizmente, nossa conclusão nesse caso é que as cotas superiores para as constantes  $\mathcal{K}_n$  que podemos obter das relações de recorrência (5.69) são muito ruins, qualquer que seja a escolha da seqüência  $\delta_n$ , para garantir convergência absoluta da soma em (5.71) para algum  $\epsilon$  não nulo.

Esse fato limita o significado da expansão perturbativa em  $\epsilon$  no caso geral em que  $f$  é quase-periódica. Como veremos no Capítulo 6, a situação é, todavia, muito melhor no caso em que  $f$  é periódica.

## 5.2 Quase-Periodicidade das Funções $e_n$

Nesta seção demonstraremos a quase-periodicidade das funções  $e_n$ .

### 5.2.1 A Decomposição de Fourier de $e_n$

Para todo  $n \geq 1$  escrevemos,

$$e_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}. \quad (5.73)$$

Iremos estudar os coeficientes de Fourier  $E_{\underline{m}}^{(n)}$ . De (4.40), página 51, temos

$$E_{\underline{m}}^{(1)} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{m}-\underline{n}} \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} + Q_{\underline{m}} \left( \beta_1 - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right), \quad (5.74)$$

e, para  $n \geq 2$ , temos de (4.41), página 51, que

$$\begin{aligned} E_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2} \left( \sum_{p=1}^{n-1} E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} + \\ &= Q_{\underline{m}} \left[ \beta_n - \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \right], \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Para as constantes  $\beta_n$  temos também (vide (4.47) e (4.52), páginas 52 e 53, respectivamente)

$$\beta_1 = \frac{1}{2iM(Q_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq \underline{0}, \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q_{\underline{n}_1}^{(2)}} \overline{Q_{\underline{n}_2}^{(2)}}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})} + \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}}, \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{iM(Q_1)} \left[ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left( Q_{-\underline{n}_1-\underline{n}_2}^{(2)} \mathcal{R} - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}+\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right) \frac{E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{n}}^{(p)} E_{-\underline{n}}^{(n+1-p)} \right] + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}}, \quad \text{para } n \geq 2, \end{aligned} \quad (5.77)$$

onde

$$\mathcal{R} := \beta_1 + \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} = \frac{1}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq \underline{0}, \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q_{\underline{n}_1}^{(2)}} \overline{Q_{\underline{n}_2}^{(2)}}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})}. \quad (5.78)$$

Finalmente, para os coeficientes de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned} E_{\underline{m}}^{(1)} &= \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{m}+\underline{n}} Q_{\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq \underline{0}, \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q_{\underline{n}_1}^{(2)}} \overline{Q_{\underline{n}_2}^{(2)}}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})} \\ &= \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \left( Q_{\underline{m}+\underline{n}} + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}' \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}' \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}+\underline{n}'}^{(2)} \overline{Q_{\underline{n}'}^{(2)}}}{\underline{n}' \cdot \underline{\omega}} \right) \frac{\overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} E_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left[ Q_{\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2} + \frac{Q_{\underline{m}}}{iM(\mathcal{Q}_1)} \left( Q_{-\underline{n}_1-\underline{n}_2}^{(2)} \mathcal{R} - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}+\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right) \right] \frac{E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \\ &\quad + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{n}}^{(p)} E_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Nas duas próximas subseções seguiremos os mesmos passos que no caso  $M(q^2) \neq 0$  e tentaremos encontrar cotas superiores convenientes para os coeficientes de Fourier dados recursivamente em (5.79) e (5.80).

Como veremos no Capítulo 7, página 105, as relações recursivas acima para os coeficientes  $E_{\underline{m}}^{(n)}$  são deveras simplificadas quando  $F_0 \neq 0$ .

### 5.2.2 Uma Cota Superior para $|E_{\underline{m}}^{(1)}|$

Vamos novamente fazer uso de (5.29) e de (5.32) na forma  $|Q_{\underline{m}}^{(2)}| \leq \mathcal{Q}^{(2)}(\delta) e^{-(x-\delta)|\underline{m}|}$ , para  $\delta > 0$ , arbitrário mas convenientemente pequeno. De (5.79) temos, usando as mesmas desigualdades que no caso anterior,

$$\begin{aligned} |E_{\underline{m}}^{(1)}| &\leq \mathcal{Q} \mathcal{Q}^{(2)}(\delta) \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \left( e^{-x|\underline{m}+\underline{n}|} + e^{-x|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}^{(2)}(\delta)^2}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} \sum_{\substack{\underline{n}' \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}' \neq \underline{0}}} \frac{e^{-(x-\delta)(|\underline{n}+\underline{n}'|+|\underline{n}'|)}}{|\underline{n}' \cdot \underline{\omega}|} \right) \frac{e^{-(x-\delta)|\underline{n}|}}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \\ &\leq W_1 \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \left( e^{-x|\underline{m}+\underline{n}|} + W_2 e^{-x|\underline{m}|} \sum_{\underline{n}' \in \mathbb{Z}^A} e^{-(x-\delta)|\underline{n}+\underline{n}'|-(x-2\delta)|\underline{n}'|} \right) e^{-(x-2\delta)|\underline{n}|}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

com

$$W_1 := \Delta Q Q^{(2)}(\delta) \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \quad (5.82)$$

e

$$W_2 := \Delta \frac{Q^{(2)}(\delta)^2}{2|M(Q_1)|} \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma. \quad (5.83)$$

Usando a função  $\Xi_0$  definida em (5.19), a última desigualdade em (5.81) leva-nos a

$$|E_{\underline{m}}^{(1)}| \leq W_1 \Xi_0(\chi - 2\delta, \underline{m}) + W_2 e^{-\chi|\underline{m}|} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \Xi_0(\chi - 2\delta, \underline{n}) e^{-(\chi - 2\delta)|\underline{n}|}. \quad (5.84)$$

Usando (5.21) temos

$$|E_{\underline{m}}^{(1)}| \leq \mathcal{L}_1 e^{-(\chi - 3\delta)|\underline{m}|} \quad (5.85)$$

para alguma constante  $\mathcal{L}_1$  (dependente de  $\chi, \delta, \sigma$  etc.). Está claro então que escolhendo  $0 < \delta < \chi/3$  fica demonstrado que  $e_1$  é uma função limitada e, portanto, quase-periódica em  $\mathbb{R}$ .

### 5.2.3 Cotas Superiores Recursivas para $|E_{\underline{m}}^{(n)}|$ com $n \geq 2$

Vamos iniciar o tratamento do caso  $n \geq 2$  pela relação (5.80) e tentaremos encontrar cotas superiores recursivas para  $|E_{\underline{m}}^{(n)}|$ , com  $n \geq 2$ , como no caso dos coeficientes  $|C_{\underline{m}}^{(n)}|$ . Para  $1 \leq p \leq n-1$  suporemos válida a desigualdade

$$|E_{\underline{m}}^{(p)}| \leq \mathcal{L}_p e^{-(\chi - \delta_p)|\underline{m}|} \quad (5.86)$$

para  $\mathcal{L}_p \geq 0$  e  $\delta_p > 0$ , pequeno o suficiente. Essa hipótese foi provada acima para o caso  $p = 1$  (vide (5.85)). De (5.80) temos

$$\begin{aligned} |E_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq Q \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p} \left\{ \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left[ e^{-\chi|\underline{m} - \underline{n}_1 - \underline{n}_2|} + \frac{e^{-\chi|\underline{m}|} Q^{(2)}(\delta)}{|M(Q_1)|} \left( |\mathcal{R}| e^{-(\chi - \delta)|\underline{n}_1 + \underline{n}_2|} + \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. Q^{(2)}(\delta) \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{e^{-(\chi - \delta)(|\underline{n} + \underline{n}_1 + \underline{n}_2| + |\underline{n}|)}}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \right) \right] \frac{e^{-(\chi - \delta_p)|\underline{n}_1| - (\chi - \delta_{n-p})|\underline{n}_2|}}{(|\underline{n}_1 + \underline{n}_2| \cdot \underline{\omega}|)} \right\} + \\ &\quad e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q}{2|M(Q_1)|} \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n+1-p} \left\{ \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(2\chi - \delta_p - \delta_{n+1-p})|\underline{n}|} \right\}, \end{aligned}$$

para  $n \geq 2$ . Usando novamente (5.28), temos

$$\begin{aligned} |E_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \mathcal{Q}\Delta \left(\frac{\sigma}{e\delta}\right)^\sigma \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p} \left\{ L_3(p, \underline{m}) + e^{-x|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}^{(2)}(\delta)}{|M(\mathcal{Q}_1)|} \left[ |\mathcal{R}| L_4(x - \delta_p, x - \delta_{n-p}, x - 2\delta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta \left(\frac{\sigma}{e\delta}\right)^\sigma \left( \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(x-2\delta)|\underline{n}|} L_3(x - \delta_p, x - \delta_{n-p}, 0, x - \delta, \underline{n}) \right) \right] \right\} + \\ &\quad + e^{-x|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n+1-p} L_2(2x - \delta_p - \delta_{n+1-p}). \end{aligned}$$

Usando

$$L_3(x - \delta_p, x - \delta_{n-p}, 0, x - \delta, \underline{n}) \leq L_2(x - \delta[n])^2 L_2(x - \delta)$$

e

$$L_4(x - \delta_p, x - \delta_{n-p}, x - 2\delta) \leq L_2(x - \delta[n])^2$$

(vide (5.56) e (5.62)), obtemos

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{L}_n e^{-(x-\delta[n]-3\delta)|\underline{m}|}, \quad (5.87)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n &:= \mathcal{Q}\Delta \left(\frac{\sigma}{e\delta}\right)^\sigma \left( \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p} \right) \left\{ \left( \frac{A}{e\delta} \right)^{2A} \exp \left( \frac{2\delta}{\tanh(x - \delta[n] - 2\delta)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\mathcal{Q}^{(2)}(\delta)}{|M(\mathcal{Q}_1)|} \left( |\mathcal{R}| L_2(x - \delta[n])^2 + \Delta \left(\frac{\sigma}{e\delta}\right)^\sigma L_2(x - \delta[n])^2 L_2(x - \delta)^2 \right) \right\} + \\ &\quad \frac{\mathcal{Q}}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} L_2(2x - 2\delta[n]) \left( \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n+1-p} \right). \end{aligned} \quad (5.88)$$

Escolhendo  $\delta_n$  como uma seqüência estritamente crescente (convergindo a  $\delta_\infty < x$ ) teremos  $\delta[n] = \delta_{n-1}$  e, com a escolha  $\delta = (\delta_n - \delta_{n-1})/3$ , obtemos de (5.87),

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{L}_n e^{-(x-\delta_n)|\underline{m}|}, \quad (5.89)$$

provando assim indutivamente (5.86) para  $\mathcal{L}_n$  dados recorrentemente em (5.88). Como no caso das funções  $c_n$  que tratamos anteriormente, isso estabelece que as funções  $e_n$  são quase-periódicas em  $\mathbb{R}$ , para todo  $n \geq 1$ , pois isso implica  $\sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} |E_{\underline{m}}^{(n)}| < \infty$ .

## Capítulo 5

Note-se de (5.88) que o comportamento dominante de  $\mathcal{L}_n$  para  $n$  grande é presumivelmente tal como

$$\mathcal{L}_n \approx \frac{C}{(\delta_n - \delta_{n-1})^{\sigma+2A}} \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p}, \quad (5.90)$$

tal como no caso das constantes  $K_n$  tratado acima. Como naquele caso chegamos às mesmas conclusões negativas sobre a possibilidade de demonstrar convergência absoluta da série (4.36), página 51, com os métodos que empregamos.

# Capítulo 6

## Interações Periódicas com $F_0 = 0$ . Convergência

### 6.1 Introdução

Neste capítulo estaremos enunciando e demonstrando alguns dos resultados mais importantes deste trabalho, resultados esses que permitem apresentar uma solução para a equação de Schrödinger (1.4), página 13, no caso em que  $f$  é uma função periódica do tempo, sujeita a algumas restrições adicionais.

Trataremos da situação na qual  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $T_\omega$ -periódica do tempo ( $T_\omega := 2\pi/\omega$ ,  $\omega > 0$ ) que possui uma decomposição de Fourier

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n e^{int}, \quad (6.1)$$

com apenas um número finito de termos, ou seja, o conjunto de inteiros  $\{n \in \mathbb{Z} \mid F_n \neq 0\}$  é um conjunto finito. Além disso, consideraremos aqui também apenas o caso em que  $F_0 = 0$ .

Faremos uso da seguinte proposição sobre o decaimento dos coeficientes de Fourier  $Q_m$  e  $Q_m^{(2)}$  das funções  $q$  e  $q^2$ , respectivamente. A demonstração dessa proposição encontra-se no Apêndice E, página 132.

**6.1 Proposição.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica e representada por uma série de Fourier contendo um número finito de termos, como em (6.1). Então, para qualquer  $\chi > 0$  existe uma constante positiva  $Q \equiv Q(\chi)$  tal que

$$|Q_m| \leq Q \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.2)$$

e

$$|Q_m^{(2)}| \leq Q \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.3)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , onde  $\ll m \gg$  foi definido em (1.47), página 24.  $\square$

### 6.1.1 O Resultado Principal

Iniciemos nossa discussão apresentando ao leitor o resultado principal deste trabalho, o qual refere-se a soluções da equação de Schrödinger (1.4) para o caso em que a função  $f$  é uma função periódica do tempo. O presente capítulo é dedicado à sua demonstração.

**6.2 Teorema.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $T_\omega$ -periódica do tempo ( $T_\omega := 2\pi/\omega$ ,  $\omega > 0$ ) e que possua uma decomposição de Fourier

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n e^{int}, \quad (6.4)$$

com apenas um número finito de termos, ou seja, o conjunto de inteiros  $\{n \in \mathbb{Z} \mid F_n \neq 0\}$  é um conjunto finito. Além disso, seja também  $F_0 = 0$ .

Considere-se as duas condições seguintes sobre  $f$ , as quais são mutuamente exclusivas:

I)  $M(q^2) \neq 0$ .

II)  $M(q^2) = 0$  e  $M(Q_1) \neq 0$ , onde

$$Q_1(t) := q(t)^2 \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau. \quad (6.5)$$

Então, para cada  $f$  como acima, satisfazendo as condições I ou II, existe uma constante  $K > 0$ , a qual depende dos coeficientes de Fourier  $\{F_n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  e de  $\omega > 0$ , tal que se  $\epsilon$  satisfaz

$|\epsilon| < K^{-1}$  então existem  $\Omega \in \mathbb{R}$  e funções  $T_\omega$ -periódicas  $u_{11}^\pm$  e  $u_{12}^\pm$  tais que o propagador  $U(t)$  de (3.2), página 37, pode ser escrito como

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ -\overline{U_{12}(t)} & \overline{U_{11}(t)} \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

com

$$U_{11}(t) = e^{-i\Omega t} u_{11}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{11}^+(t), \quad (6.7)$$

$$U_{12}(t) = e^{-i\Omega t} u_{12}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{12}^+(t). \quad (6.8)$$

As funções  $u_{11}^\pm$  e  $u_{12}^\pm$  possuem decomposições de Fourier absolutamente e uniformemente convergentes

$$u_{11}^\pm(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{11}^\pm(n) e^{in\omega t}, \quad (6.9)$$

e

$$u_{12}^\pm(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{12}^\pm(n) e^{in\omega t}. \quad (6.10)$$

Além disso, sob as mesmas hipóteses,  $\Omega$  e os coeficientes de Fourier  $\mathcal{U}_{11}^\pm(n)$  e  $\mathcal{U}_{12}^\pm(n)$  podem ser expressos em termos de séries de potências em  $\epsilon$  que convergem absolutamente e uniformemente.

□

### Comentários sobre o Teorema 6.2:

1. As expressões (6.7) e (6.8) representam a “forma de Floquet” dos elementos de matriz  $U_{11}(t)$  e  $U_{12}(t)$ . A freqüência  $\Omega$  é a chamada “freqüência secular”.
2. Resultados sobre o caso em que  $F_0 \neq 0$  serão apresentadas no Capítulo 7.
3. A condição que a decomposição de Fourier de  $f$  contenha apenas um número finito de termos, que é ademais fisicamente razoável, pode ser enfraquecida pois faremos na demonstração uso apenas do rápido decaimento dos coeficientes de Fourier  $Q_m$  da função  $q(t)$  (definida em (3.20), página 40) para quando  $|m| \rightarrow \infty$ . Tal decaimento é demonstrado na Proposição 6.1, à página 74.

4. A segunda igualdade em (6.6) segue de (3.3), página 37.
5. É importante enfatizar que as condições I e II representam restrições à função  $f$  e não ao parâmetro  $\epsilon$ .
6. Além de I e II há possivelmente outras condições a serem consideradas, mas que não foram ainda exploradas. Tais condições podem ser relevantes em alguns casos. Em função de as condições I e II não cobrirem todo o conjunto de funções  $f$ , o Teorema 6.2, página 75, ainda não fornece a solução completa da equação de Schrödinger (1.4), página 13, para todas as funções periódicas  $f$ , mas exemplos e alguns argumentos qualitativos indicam que os casos não cobertos são algo excepcionais. Por exemplo, para  $f(t) = \varphi_1 \cos(\omega t) + \varphi_2 \sin(\omega t)$  a condição I é válida para todos os pares  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$ , exceto aqueles pertencentes à família contável de círculos centrados na origem com rádio  $x_a \omega / 2$ ,  $a = 1, 2, \dots$ , onde  $x_a$  é o  $a$ -ésimo zero de  $J_0$  em  $\mathbb{R}_+$  e onde  $J_0$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. Por outro lado a condição II não é satisfeita em parte alguma, o que mostra a necessidade de condições adicionais. Para mais detalhes sobre esse exemplo, vide Seção 6.5, página 91.
7. De um ponto de vista algorítmico-computacional a solução que obtivemos para a equação de Schrödinger (1.4) para o caso periódico pode ser facilmente implementada em programas numéricos e a mesma já foi testada com sucesso, fornecendo meios de estudar nossos sistemas de dois níveis mesmo para tempos longos com erros controláveis, devido à convergência uniforme.
8. Propriedades da função  $Q_1$  e de seu valor médio  $M(Q_1)$  são discutidas com mais detalhe no Apêndice D, página 130.
9. As condições I e II definem soluções em princípio distintas da equação de Riccati generalizada (3.1) e, consequentemente, da equação de Schrödinger (1.4). Essas soluções distintas serão chamadas “classes de soluções”.

## 6.2 As Relações Recursivas no Caso Periódico

As relações de recorrência para os coeficientes  $C_{\underline{m}}^{(n)}$  e  $E_{\underline{m}}^{(n)}$  que apresentamos nas Seções 5.1.1 e 5.2.1, páginas 57 e 69, respectivamente, foram utilizadas no Capítulo 5 para demonstrar que, no caso geral em que  $f$  é quase-periódica, as funções  $c_n$  e  $e_n$  são também quase-periódicas.

O que lá fizemos foi utilizar as relações de recorrência para obter indutivamente cotas superiores para os coeficientes de Fourier. Nessa empreitada duas dificuldades tiveram que ser enfrentadas: a presença de pequenos denominadores e os produtos de convolução nas relações de equivalência. Ambas são responsáveis pela redução da taxa de decaimento exponencial dos coeficientes quando a ordem  $n$  é aumentada a cada passo de indução.

Consideremos a origem do problema dos pequenos denominadores. Os mesmos surgem dos fatores do tipo  $(\underline{n} \cdot \underline{\omega})^{-1}$  (com  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ) que aparecem nas relações de recorrência. No caso em que  $f$  é uma função periódica com freqüência  $\omega$  e com  $F_0 \neq 0$ , teremos  $A = 2$ ,  $\underline{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$  e  $\underline{n} \cdot \underline{\omega} = n_1\omega + n_2F_0$  e pequenos denominadores podem, em princípio aparecer. Por outro lado, no caso em que  $f$  é periódica de freqüência  $\omega$  e com  $F_0 = 0$ , teremos  $A = 1$ ,  $\underline{n} = n \in \mathbb{Z}$  e  $\underline{n} \cdot \underline{\omega} = n\omega$ . Para evitar a situação quase-resonante onde  $n_1\omega + n_2F_0$  é pequeno, iremos considerar neste capítulo o caso  $F_0 = 0$ . Veremos que no caso  $F_0 \neq 0$ , tratado no Capítulo 7, os pequenos denominadores também não ocorrem. Mostrar isso requer uma análise mais fina que só faremos no Capítulo 7.

É bem claro que neste caso não surgem pequenos divisores pois agora  $|(\underline{n} \cdot \underline{\omega})^{-1}| \geq \omega^{-1}$  para  $\underline{n} \neq \underline{0}$ . Assim, os produtos de convolução são a única fonte de dificuldades remanescente que pode eventualmente causar redução da taxa de decaimento exponencial dos coeficientes de Fourier nos passos de indução.

Denotemos por  $Q_m$  os coeficientes da função  $q$ , definida em (3.20), página 40:

$$q(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m e^{im\omega t}. \quad (6.11)$$

Para os coeficientes de Fourier das funções  $c_n$  as relações de recorrência (5.16)-(5.18), página 60, ficam:

$$C_{\underline{m}}^{(1)} = \alpha_1 Q_m, \quad (6.12)$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} \frac{\left(\alpha_1^2 Q_{n_1}^{(2)} - \overline{Q_{-n_1}^{(2)}}\right)}{n_1 \omega} \left[ Q_{m-n_1} - \frac{Q_m Q_{-n_1}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right], \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} C_m^{(n)} &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 + n_2 \neq 0}} \frac{1}{(n_1 + n_2) \cdot \omega} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{n_2}^{(n-p)} \right) \left[ Q_{m-(n_1+n_2)} - \frac{Q_m Q_{-n_1-n_2}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right] \\ &\quad - \frac{Q_m}{2\alpha_1 Q_0^{(2)}} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{-n_1}^{(n+1-p)}, \quad \text{para } n \geq 3. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Acima,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Para os coeficientes de Fourier das funções  $e_n$  as relações de recorrência (5.79)-(5.80), página 70, ficam:

$$E_m^{(1)} = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} \frac{Q_{m+n_1} \overline{Q_{n_1}^{(2)}}}{n_1 \omega} + \frac{Q_m}{2iM(Q_1)} \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0, n_2 \neq 0}} \frac{Q_{n_1+n_2}^{(2)} \overline{Q_{n_1}^{(2)}} \overline{Q_{n_2}^{(2)}}}{(n_1 \omega)(n_2 \omega)}, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} E_m^{(n)} &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 + n_2 \neq 0}} \left[ Q_{m-n_1-n_2} + \frac{Q_m}{iM(Q_1)} \left( Q_{-n_1-n_2}^{(2)} \mathcal{R} - \sum_{\substack{n_3 \in \mathbb{Z} \\ n_3 \neq 0}} \frac{Q_{n_3+n_1+n_2}^{(2)} \overline{Q_{n_3}^{(2)}}}{n_3 \omega} \right) \right] \frac{\sum_{p=1}^{n-1} E_{n_1}^{(p)} E_{n_2}^{(n-p)}}{(n_1 + n_2) \omega} \\ &\quad + \frac{Q_m}{2iM(Q_1)} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} E_{n_1}^{(p)} E_{-n_1}^{(n+1-p)}, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Na Seção 6.3, página 82, iremos mostrar como o efeito das convoluções pode ser controlado. O resultado está expresso nos três teoremas que agora seguem.

**6.3 Teorema.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com uma decomposição de Fourier finita, como em (6.1) e com  $F_0 = 0$ .

**Caso I.** Considere os coeficientes de Fourier  $C_m^{(n)}$ , os quais satisfazem as relações de recorrência (6.12), (6.13) e (6.14). Sob a hipótese que  $M(q^2) \neq 0$  teremos

$$|C_m^{(n)}| \leq K_n \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \quad (6.17)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e todo  $m \in \mathbb{Z}$ , onde  $\chi > 0$  é constante e  $\ll m \gg$  foi definida em (1.47), página 24.

Acima os coeficientes  $K_n$  não dependem de  $m$  e satisfazem a relação de recorrência

$$K_n = \mathcal{C}_2 \left[ \left( \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right) + \left( \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} \right) \right], \quad (6.18)$$

com  $K_1 = K_2 = \mathcal{C}_1$ , onde  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  são constantes positivas que podem ser escolhidas maiores ou iguais a 1.

**Caso II.** Considere os coeficientes de Fourier  $E_m^{(n)}$ , os quais satisfazem as relações de recorrência (6.15) e (6.14). Sob a hipótese que  $M(q^2) \neq 0$  e  $M(Q_1) \neq 0$  teremos

$$|E_m^{(n)}| \leq K'_n \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \quad (6.19)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e todo  $m \in \mathbb{Z}$ , onde  $\chi > 0$  é constante e  $\ll m \gg$  foi definida em (1.47), página 24.

Acima os coeficientes  $K'_n$  não dependem de  $m$  e satisfazem a relação de recorrência

$$K'_n = \mathcal{E}_2 \left[ \left( \sum_{p=1}^{n-1} K'_p K'_{n-p} \right) + \left( \sum_{p=2}^{n-1} K'_p K'_{n+1-p} \right) \right], \quad (6.20)$$

com  $K'_1 = K'_2 = \mathcal{E}_1$ , onde  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  são constantes positivas que podem ser escolhidas maiores ou iguais a 1.  $\square$

O Teorema 6.3 será demonstrado na Seção 6.3, página 82. A importância das relações de recorrência das constantes  $K_n$  vistas em (6.18) ou em (6.20) manifesta-se no seguinte teorema, que afirma que as constantes  $K_n$  podem no máximo crescer exponencialmente com  $n$ , fato esse de importância crucial para a demonstração de convergência das séries de potências em  $\epsilon$  (Teorema 6.5).

**6.4 Teorema.** Sejam as constantes  $K_n$  definidas através das relações de recorrência (6.18) ou (6.20). Então existem constantes  $K > 0$  e  $K_0 > 0$  (que eventualmente dependem de  $f$ ) tais que  $K_n \leq K_0 K^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

A demonstração do Teorema 6.4 é apresentada no Apêndice G, página 138, e faz uso interessante de propriedades da chamada seqüência de Catalan. Os Teoremas 6.3 e 6.4 têm o seguinte importante corolário:

**6.5 Teorema.** As expansões em séries de potências de (4.3) e (4.7), página 43, são absolutamente convergentes para todo  $\epsilon \in \mathbb{C}$  com  $|\epsilon| < K^{-1}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e, portanto, (4.3) e (4.7) definem soluções particulares da equação de Riccati generalizada (3.1), página 37, nos casos I e II, respectivamente, do Teorema 6.3, página 79. A função  $g$  pode ser expressa em termos de uma série de Fourier que converge absolutamente e uniformemente e cujos coeficientes podem ser expressos em termos de séries de potências em  $\epsilon$ , as quais são absolutamente convergentes para todo  $\epsilon \in \mathbb{C}$  com  $|\epsilon| < K^{-1}$ .  $\square$

**Demonstração do Teorema 6.5.** Demonstraremos o teorema no caso I, sendo o caso II análogo. O primeiro passo é determinar a expansão de Fourier da função  $g$ , como dada em (3.19). página 40, e estudar algumas de suas propriedades. Temos claramente que

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m e^{im\omega t}, \quad (6.21)$$

com

$$G_m := \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n G_m^{(n)}, \quad (6.22)$$

onde

$$G_m^{(n)} := \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} C_l^{(n)}. \quad (6.23)$$

Aqui, e em várias outras demonstrações que apresentaremos adiante, faremos uso do seguinte e importante lema, cuja demonstração encontra-se no Apêndice F, página 136.

**6.6 Lema.** Para  $\chi > 0$  e  $m \in \mathbb{Z}$  defina-se

$$\mathcal{B}(m) \equiv \mathcal{B}(m, \chi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-n|+|n|)}}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2}. \quad (6.24)$$

Então temos

$$\mathcal{B}(m) \leq B_0 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.25)$$

para alguma constante  $B_0 \equiv B_0(\chi) > 0$  e para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Temos a seguinte proposição:

**6.7 Proposição.** Para todo  $\chi > 0$  existe uma constante  $C_g \equiv C_g(\chi) > 0$  tal que

$$|G_m^{(n)}| \leq C_g K_n \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.26)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ . Consequentemente, para  $|\epsilon| < K^{-1}$  tem-se

$$|G_m| \leq C'_g \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.27)$$

para alguma constante  $C'_g(\chi, \epsilon) > 0$  e para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . □

**Demonstração da Proposição 6.7.** Inserindo (6.17) e (6.2) em (6.23) temos, para qualquer  $\chi > 0$ ,

$$|G_m^{(n)}| \leq K_n Q \mathcal{B}(m, \chi), \quad (6.28)$$

onde  $\mathcal{B}(m, \chi)$  está definido em (6.24). A relação (6.26) segue agora do Lema 6.6, página 81. ■

Com isso a demonstração do Teorema 6.5 está completa. ■

Devido à (3.3), página 37, as soluções da equação de Riccati generalizada (3.1), página 37, mencionadas no Teorema 6.5 são o principal ingrediente para a solução da equação de Schrödinger (1.4), página 13. Isso será discutido com mais detalhes na Seção 6.4, página 85. Passemos agora à demonstração do Teorema 6.3.

### 6.3 Cotas Superiores Indutivas para os Coeficientes de Fourier

Nesta Seção demonstraremos o Teorema 6.3 nos casos I e II.

### 6.3.1 Caso I

Demonstraremos aqui o Teorema 6.3, página 79, no caso I. Usando a Proposição 6.1, página 74, e as relações (6.12), (6.13) e (6.14) é fácil obter as seguintes desigualdades:

$$|C_m^{(1)}| \leq Q \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \quad (6.29)$$

$$|C_m^{(2)}| \leq 2\omega^{-1}Q \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^2} \left[ \frac{e^{-\chi|m-n_1|}}{\ll m-n_1 \gg^2} + \frac{Q}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi(|m|+|n_1|)}}{\ll m \gg^2 \ll n_1 \gg^2} \right], \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} |C_m^{(n)}| &\leq \omega^{-1}Q \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} |C_{n_1}^{(p)}| |C_{n_2}^{(n-p)}| \right) \left[ \frac{e^{-\chi|m-(n_1+n_2)|}}{\ll m-(n_1+n_2) \gg^2} + \frac{Q}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi(|m|+|n_1+n_2|)}}{\ll m \gg^2 \ll n_1+n_2 \gg^2} \right] \\ &+ \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} |C_{n_1}^{(p)}| |C_{-n_1}^{(n+1-p)}|, \end{aligned} \quad \text{para } n \geq 3. \quad (6.31)$$

Segue de (6.30), da definição de  $\mathcal{B}(m)$  em (6.24) e do Lema 6.6, página 81, que

$$|C_m^{(2)}| \leq 2\omega^{-1}Q \left( \mathcal{B}(m) + \frac{Q}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4} \right) \leq K_2 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.32)$$

para alguma escolha conveniente da constante  $K_2$ .

Usaremos agora um argumento indutivo para estabelecer (6.17) para todo  $n \geq 3$ . Vamos supor que para um dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , tenhamos

$$|C_m^{(p)}| \leq K_p \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (6.33)$$

para todo  $p$  tal que  $1 \leq p \leq n-1$ , para constantes  $K_p$  convenientes. Mostraremos que isso implica o mesmo tipo de cota superior para  $p = n$ . Note-se que tomado-se  $K_1 \geq Q$  a relação (6.29) garante (6.33) para  $p = 1$  e que a relação (6.32) garante (6.33) para  $p = 2$ .

Da relação (6.31) e pela hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned} |C_m^{(n)}| &\leq \omega^{-1}Q \left( \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right) \left[ \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-(n_1+n_2)|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll m-(n_1+n_2) \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \right. \\ &+ \left. \frac{Q}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1+n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \right] \\ &+ \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \left( \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} \right) \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Agora, temos que

$$\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1 + n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4}$$

são apenas duas constantes finitas e

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-(n_1+n_2)|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll m - (n_1 + n_2) \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|(m-n_1)-n_2|+|n_2|)}}{\ll (m-n_1) - n_2 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \\ &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^2} \mathcal{B}(m - n_1) \\ &\leq B_0 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1|+|m-n_1|)}}{\ll n_1 \gg^2 \ll m - n_1 \gg^2} \\ &= B_0 \mathcal{B}(m) \\ &\leq (B_0)^2 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \end{aligned} \tag{6.35}$$

onde, acima, usamos novamente o Lema 6.6, página 81.

Concluímos assim que

$$|C_m^{(n)}| \leq \left[ \mathcal{C}_a \left( \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right) + \mathcal{C}_b \left( \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} \right) \right] \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \tag{6.36}$$

para duas constantes positivas  $\mathcal{C}_a$  e  $\mathcal{C}_b$ . Tomando-se  $\mathcal{C}_2 := \max\{\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, 1\}$  a relação (6.18) fica provada para  $\mathcal{C}_2 \geq 1$ .

Note-se que podemos escolher  $K_1 = K_2 \geq 1$ , tomado ambas iguais a  $\max\{K_1, K_2, 1\}$ . ■

### 6.3.2 Caso II

Nesta seção demonstraremos o Teorema 6.3, página 79, para o caso II. De (6.15) e (6.16) temos, pela Proposição 6.1, página 74, e pela hipótese (6.19),

$$\begin{aligned} |E_m^{(1)}| &\leq \frac{Q^2}{\omega} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m+n_1|+|n_1|)}}{\ll m + n_1 \gg^2 \ll n_1 \gg^2} \\ &+ \frac{Q^4 e^{-\chi|m|}}{2 \ll m \gg^2 \omega^2 |M(Q_1)|} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1 + n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2}, \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
E_m^{(n)} &= \frac{1}{\omega} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left[ Q \frac{e^{-\chi(|m-n_1-n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll m - n_1 - n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \right. \\
&\quad + \frac{Q^2 e^{-\chi|m|}}{|M(Q_1)| \ll m \gg^2} \left( \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)} |\mathcal{R}|}{\ll n_1 + n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{Q}{\omega} \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2+n_3|+|n_1|+|n_2|+|n_3|)}}{\ll n_1 + n_2 + n_3 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2 \ll n_3 \gg^2} \right) \right] \left( \sum_{p=1}^{n-1} K'_p K'_{n-p} \right) \\
&\quad + \frac{Q e^{-\chi|m|}}{2|M(Q_1)| \ll m \gg^2} \left( \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4} \right) \left( \sum_{p=2}^{n-1} K'_p K'_{n+1-p} \right), \quad \text{para } n \geq 2. \quad (6.38)
\end{aligned}$$

Somas como

$$\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1 + n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \text{ e } \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2+n_3|+|n_1|+|n_2|+|n_3|)}}{\ll n_1 + n_2 + n_3 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2 \ll n_3 \gg^2}$$

são apenas constantes finitas. Aplicando-se o Lema 6.6, página 81, teremos

$$|E_m^{(1)}| \leq \mathcal{E}_a \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.39)$$

$$|E_m^{(n)}| \leq \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \left[ \mathcal{E}_b \left( \sum_{p=1}^{n-1} K'_p K'_{n-p} \right) + \mathcal{E}_c \left( \sum_{p=2}^{n-1} K'_p K'_{n+1-p} \right) \right], \quad \text{para } n \geq 2, \quad (6.40)$$

onde  $\mathcal{E}_a$ ,  $\mathcal{E}_b$  e  $\mathcal{E}_c$  são constantes. O resto da prova é idêntico ao da prova do Teorema 6.3 no caso I. ■

## 6.4 A Expansão de Fourier para a Função de Onda

Retornemos agora à discussão sobre a solução (3.3), página 37, da equação de Schrödinger (1.4), página 13. Nossa intenção é encontrar a expansão de Fourier da função de onda  $\Phi(t)$ .

### 6.4.1 A Forma de Floquet para a Função de Onda. A Decomposição de Fourier e a Freqüência Secular

As relações (3.14) à página 39 dizem-nos que as componentes  $\phi_{\pm}$  da função de onda  $\Phi(t)$  são soluções de equações de Hill complexas. Para  $f$  periódica o clássico Teorema de Floquet (vide Seção 2.2, à

página 28, ou as referências [30] e [31]) afirma que as soluções particulares de equações como (3.14) têm a forma geral  $e^{i\Omega t}u(t)$ , onde  $u(t)$  é periódica com o mesmo período de  $f$ . A unitaridade da evolução temporal implica  $\Omega \in \mathbb{R}$ . Essa forma das soluções particulares é denominada “forma de Floquet” e as freqüências  $\Omega$  são denominadas “freqüências seculares”.

Nesta seção iremos recuperar explicitamente a forma de Floquet da função de onda em termos de expansões de Fourier e encontraremos para as freqüências seculares expressões em termos de expansões convergentes em séries de potências em  $\epsilon$ .

De acordo com a solução expressa na relações (3.2) e (3.3), página 37, temos em primeiro lugar que encontrar as expansões de Fourier das funções  $R$  e  $S$  definidas em (3.4) e (3.5), respectivamente.

Comecemos com a função  $R$ . A expansão de Fourier da função  $f + g$  é

$$f(t) + g(t) = \Omega + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (F_n + G_n(\epsilon)) e^{in\omega t}, \quad (6.41)$$

onde

$$\Omega \equiv \Omega(\epsilon) := G_0(\epsilon). \quad (6.42)$$

Temos então

$$R(t) = e^{-i\gamma_f(\epsilon)} e^{-i\Omega t} \exp \left( - \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n e^{in\omega t} \right) \quad (6.43)$$

com

$$H_n \equiv H_n(\epsilon) := \begin{cases} \frac{F_n + G_n(\epsilon)}{n\omega}, & \text{para } n \neq 0 \\ 0, & \text{para } n = 0 \end{cases}, \quad (6.44)$$

e

$$\gamma_f(\epsilon) := i \sum_{m \in \mathbb{Z}} H_m. \quad (6.45)$$

Note-se que  $\gamma_f(0) = \gamma_f$ , onde  $\gamma_f$  é definida em (E.11), página E.11.

Dado estarmos supondo que há apenas um número finito de coeficientes  $F_n$  que sejam não-nulos, a seguinte proposição é um corolário óbvio da Proposição 6.7:

**6.8 Proposição.** Para todo  $\chi > 0$  e para  $|\epsilon|$  pequeno o suficiente, existe uma constante  $C_H \equiv$

$\mathcal{C}_H(\chi, \epsilon) > 0$  tal que

$$|H_m| \leq \mathcal{C}_H \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.46)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Escrevendo a expansão de Fourier de  $R(t)$  na forma

$$R(t) = e^{-i\Omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n e^{inx} \quad (6.47)$$

e usando (6.43), encontramos

$$R_n \equiv R_n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-i\gamma_f(\epsilon)} \left( 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{-N_p} \right), & \text{para } n = 0, \\ e^{-i\gamma_f(\epsilon)} \left( -H_n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right), & \text{para } n \neq 0. \end{cases} \quad (6.48)$$

com

$$N_p := \sum_{a=1}^p n_a, \quad (6.49)$$

para  $p \geq 1$ .

Para calcular a expansão de Fourier de  $S$  temos que calcular primeiro a expansão de Fourier de  $R^{-2}$ . Essa tarefa é facilitada com a observação que a substituição  $R(t) \rightarrow R(t)^{-2}$  corresponde à substituição  $(f+g) \rightarrow -2(f+g)$  e, portanto, à substituição  $H_n \rightarrow -2H_n$ . Obtemos

$$R(t)^{-2} = e^{2i\Omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n^{(-2)} e^{inx}, \quad (6.50)$$

com

$$R_n^{(-2)} \equiv R_n^{(-2)}(\epsilon) := \begin{cases} e^{2i\gamma_f(\epsilon)} \left( 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{-N_p} \right), & \text{para } n = 0, \\ e^{2i\gamma_f(\epsilon)} \left( 2H_n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right), & \text{para } n \neq 0. \end{cases} \quad (6.51)$$

Usaremos no que segue a seguinte proposição:

**6.9 Proposição.** Para todo  $\chi > 0$  e  $|\epsilon|$  pequeno o suficiente, existem constantes  $C_R \equiv C_R(\chi, \epsilon) > 0$  e  $C_{R(-2)} \equiv C_{R(-2)}(\chi, \epsilon) > 0$  tais que

$$|R_m| \leq C_R \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.52)$$

e

$$|R_m^{(-2)}| \leq C_{R(-2)} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.53)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Demonstração da Proposição 6.9.** Usando a Proposição 6.8 teremos, para qualquer  $p \geq 1$ ,

$$\left| \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right| \leq (C_H)^{p+1} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} \frac{\exp(-\chi(|n_1| + \cdots + |n_p| + |n - n_1 - \cdots - n_p|))}{(\ll n_1 \gg \cdots \ll n_p \gg \ll n - n_1 - \cdots - n_p \gg)^2}. \quad (6.54)$$

Fazendo uso repetido do Lema 6.6, página 81, no lado direito de (6.54) obtemos

$$\left| \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right| \leq \frac{(C_H B_0)^{p+1}}{B_0} \frac{e^{-\chi|n|}}{\ll n \gg^2}. \quad (6.55)$$

Inserir isso em (6.48) fornece-nos

$$|R_n| \leq \left( \frac{e^{|\text{Im}(\gamma_f(\epsilon))| + C_H B_0}}{B_0} \right) \frac{e^{-\chi|n|}}{\ll n \gg^2} \quad (6.56)$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , como queríamos. Acima usou-se que  $B_0 > 1$ . Para  $R_n^{(-2)}$  a prova é análoga. ■

Vamos por um momento admitir sem prova que<sup>1</sup>

$$\pi\omega + 2\Omega \neq 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (6.57)$$

Teremos,

$$S(t) = \sigma_0 + e^{2i\Omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n e^{in\omega t}, \quad (6.58)$$

com

$$S_n = -i \frac{R_n^{(-2)}}{\pi\omega + 2\Omega} \quad \text{e} \quad \sigma_0 := - \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n. \quad (6.59)$$

<sup>1</sup>Para o caso  $n = 0$ , (6.57) diz-nos que  $\Omega \neq 0$ . Isso deve ser aceito como válido exceto para  $\epsilon = 0$  quando então certamente temos que  $\Omega = 0$ .

A hipótese (6.57) é, em verdade, uma consequência da unitaridade da evolução temporal, como será discutido na Seção 6.4.2, página 90.

A próxima proposição é um corolário elementar da Proposição 6.9. Omitiremos a prova.

**6.10 Proposição.** *Para todo  $\chi > 0$  e  $|\epsilon|$  pequeno o suficiente, existe constante  $C_S \equiv C_S(\chi, \epsilon) > 0$  tal que*

$$|S_m| \leq C_S \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.60)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . □

Escrevendo

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ -\overline{U_{12}(t)} & \overline{U_{11}(t)} \end{pmatrix}, \quad (6.61)$$

teremos para  $U_{11}$  e  $U_{12}$ :

$$U_{11}(t) = e^{-i\Omega t} u_{11}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{11}^+(t) \quad (6.62)$$

$$U_{12}(t) = e^{-i\Omega t} u_{12}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{12}^+(t) \quad (6.63)$$

com

$$\begin{aligned} u_{11}^-(t) &:= (1 + ig(0)\sigma_0) r(t), & u_{11}^+(t) &:= ig(0) v(t), \\ u_{12}^-(t) &:= -i\epsilon\sigma_0 r(t), & u_{12}^+(t) &:= -i\epsilon v(t), \end{aligned} \quad (6.64)$$

onde

$$r(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n e^{in\omega t} \quad \text{e} \quad v(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n e^{in\omega t}, \quad (6.65)$$

com

$$V_n := \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_{n-m} R_m. \quad (6.66)$$

Isso fornece a forma de Floquet que procurávamos para as componentes da função de onda  $\Phi(t)$ . Fazemos notar que as freqüências seculares das componentes da função de onda são então

$\pm \Omega$ . Para  $\Omega$  temos a seguinte expansão em  $\epsilon$ :

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n G_0^{(n)}. \quad (6.67)$$

e para  $g(0)$ ,

$$g(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m^{(n)}. \quad (6.68)$$

Ambas as expansões convergem absolutamente para  $|\epsilon| < K^{-1}$ , onde  $K$  é mencionada no Teorema 6.4, página 80.

Como antes, temos os seguintes corolários das Proposições 6.9, 6.10 e do Lema 6.6:

**6.11 Proposição.** Para todo  $\chi > 0$  e  $|\epsilon|$  pequeno o suficiente, existe uma constante  $C_V \equiv C_V(\chi, \epsilon) > 0$  tal que

$$|V_m| \leq C_V \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (6.69)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . □

Com essa última proposição completa-se a demonstração do Teorema 6.2, página 75. □

#### 6.4.2 Observações sobre a Unitaridade do Propagador

A unitaridade do propagador  $U(t)$  é a condição  $U(t)^* U(t) = \mathbf{1}$ . Usando-se (6.61) essa condição reduz-se a

$$|U_{11}(t)|^2 + |U_{12}(t)|^2 = 1. \quad (6.70)$$

Duas conclusões pode ser extraídas de (6.70) pela observação das relações (6.62) e (6.63). A primeira é a seguinte proposição:

**6.12 Proposição.** Para  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e sob as mesmas hipóteses que nos levaram a (6.62) e (6.63) tem-se que  $\Omega \in \mathbb{R}$ . □

A prova segue da observação óbvia que (6.70) seria violada para  $|t|$  grande o suficiente caso  $\Omega$  tivesse uma parte imaginária não nula.

Infelizmente não há no momento uma demonstração alternativa da Proposição 6.12 que use diretamente a expansão em  $\epsilon$  para  $\Omega$  dada em (6.67). É fácil ver no caso I, no entanto, que o termo de primeira ordem em  $\epsilon$  de (6.67) é real, pois  $c$  mesmo é igual a

$$\epsilon G_0^{(1)} = \epsilon \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{-l} C_l^{(1)} = \epsilon \alpha_1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{-l} Q_l = \epsilon \alpha_1 Q_0^{(2)} = \pm \epsilon |Q_0^{(2)}|, \quad (6.71)$$

pela escolha de  $\alpha_1$  feita em (4.28), página 48.

A segunda conclusão que extraímos da condição de unitaridade (6.70) é que a hipótese mencionada em (6.57) é, de fato, correta. Se assim não fosse teríamos um termo linear em  $t$  em (6.58), o que violaria (6.70) para  $|t|$  grande.

Como no caso da Proposição 6.12, nenhuma demonstração alternativa desse fato usando a expansão em  $\epsilon$  para  $\Omega$  dada em (6.67) foi encontrada ainda. O que, no entanto, deve presumivelmente ocorrer é que na região de validade daquela expansão  $|\Omega|$  deve ser sempre menor que  $2\omega$  pois  $\Omega$  é de ordem  $\epsilon$  e  $|\epsilon|$  tem de ser escolhido pequeno para garantir convergência. Analogamente devemos ter  $\Omega \neq 0$  pois  $\Omega$  é analítica em  $\epsilon$  e, portanto, tem zeros isolados. Se o domínio de analiticidade for pequeno nenhum outro zero deve ocorrer, além do zero trivial em  $\epsilon = 0$ .

## 6.5 Discussão sobre as Classes de Soluções

No caso em que a função  $f$  é periódica, vimos que resultados bastante explícitos podem ser obtidos. É particularmente interessante, portanto, discutir alguns aspectos do método que desenvolvemos nesse contexto particular. Aqui iremos discutir as condições I e II do Teorema 6.2, página 75.

Como em (C.2), vamos por conveniência escrever a decomposição de Fourier de  $f$  na forma

$$f(t) = \sum_{a=-1}^J f_a e^{i n_a \omega t}, \quad (6.72)$$

com  $n_a = -n_{2J-a+1}$  e  $\bar{f}_a = f_{2J-a+1}$  para todo  $a$  com  $1 \leq a \leq J$ , com  $F_0 = 0$ . Comparando-se com (6.1) tem-se que  $f_a \equiv F_{n_a}$ ,  $1 \leq a \leq J$ .

Assim, para  $F_0 = 0$  e para  $J$  e  $\omega$  fixados, há  $J$  coeficientes complexos independentes  $f_a$  e podemos identificar o espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^{2J}$  com o conjunto  $\mathfrak{F}_{J,\omega}$  de todos os possíveis  $f$ 's com  $J$  e  $\omega$  dados.

A condição  $M(q^2) = 0$  determina um subconjunto de dimensão  $(2J - 1)$  ou  $(2J - 2)$  de  $\mathfrak{F}_{J,\omega}$  e é nesse subconjunto que a condição II deve ser aplicada. É também nesse subconjunto que a condição mais restritiva  $M(q^2) = M(Q_1) = 0$  deve ser imposta, restringindo o espaço de parâmetros de  $f$  a um novo subconjunto de dimensão  $(2J - 2)$ ,  $(2J - 3)$  ou  $(2J - 4)$ . É de se supor, portanto, que condições adicionais sucessivas tais como I, II e eventualmente outras do mesmo tipo, esgotarão completamente o espaço de parâmetros  $\mathfrak{F}_{J,\omega}$ .

Condições que vão além de I e II ainda não puderam ser analisadas e muitas questões relativas às várias classes de soluções ainda estão em aberto, demandando pesquisa futura. Podemos, por exemplo, perguntar-nos se condições além de I e II irão realmente esgotar o espaço de parâmetros de  $f$  e, assim, conduzir a uma solução completa para o problema. Ou podemos perguntar-nos se o método de eliminação de termos seculares que desenvolvemos e as demonstrações de convergência irão de fato funcionar sob restrições mais fortes que I e II.

Mais interessantes são questões relativas à existência de eventuais distinções qualitativas entre as várias classes. Seriam as várias soluções continuações analíticas uma da outra no espaço dos parâmetros de  $f$ ?

Uma distinção entre as soluções sob I e sob II pode ser apontada no fato que no primeiro caso a função  $g$  é dada em termos de uma expansão em série em  $\epsilon$  enquanto que no segundo a expansão é em  $\epsilon^2$ . Compare-se para tal (4.3) e (4.7).

### 6.5.1 Um Exemplo Explícito

Para ilustrar essas idéias e apontar alguns problemas vamos considerar o exemplo simples e importante em que  $f$  é dada por

$$f(t) = \varphi_1 \cos(\omega t) + \varphi_2 \sin(\omega t), \quad (6.73)$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ . Temos  $f(t) = f_1 e^{-i\omega t} + f_2 e^{i\omega t}$  com  $f_1 = (\varphi_1 + i\varphi_2)/2$ ,  $f_2 = \overline{f_1}$ ,  $J = 1$ ,  $n_1 = -1$ ,  $n_2 = 1$ . Aplicando (C.13) para esse caso com  $m = 0$  teremos

$$M(q^2) = Q_0^{(2)} = e^{2i\gamma_f} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left( \frac{4|f_1|}{2\omega} \right)^{2p} = e^{2i\gamma_f} J_0 \left( \frac{2\varphi_0}{\omega} \right), \quad (6.74)$$

onde  $\varphi_0 := \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$  e onde  $J_0$  é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. Nesse caso tem-se também  $\gamma_f = \varphi_2/\omega$ .

A relação (6.74) mostra que a condição I é não-vazia e que o locus no espaço  $(\varphi_1, \varphi_2)$  da condição  $M(q^2) = 0$  (necessária para a condição II) é a família contável de círculos centrados na origem com raio  $x_a \omega / 2$ ,  $a = 1, 2, \dots$ , onde  $x_a$  é o  $a$ -ésimo zero de  $J_0$  em  $\mathbb{R}_+$ .

Pode-se mostrar analogamente que

$$Q_m = e^{i\gamma_f} \left( \frac{\overline{f_1}}{|f_1|} \right)^m J_m \left( \frac{2|f_1|}{\omega} \right) = e^{i\gamma_f} \left( \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\varphi_0} \right)^m J_m \left( \frac{\varphi_0}{\omega} \right) \quad (6.75)$$

e

$$Q_m^{(2)} = e^{2i\gamma_f} \left( \frac{\overline{f_1}}{|f_1|} \right)^m J_m \left( \frac{4|f_1|}{\omega} \right) = e^{2i\gamma_f} \left( \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\varphi_0} \right)^m J_m \left( \frac{2\varphi_0}{\omega} \right), \quad (6.76)$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .

Para  $Q_0^{(2)} = 0$  a função  $\mathcal{Q}_1$  é periódica e, em geral,

$$M(\mathcal{Q}_1) = \frac{i}{\omega} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{|Q_m^{(2)}|^2}{m} = \frac{i}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{|Q_m^{(2)}|^2 - |Q_{-m}^{(2)}|^2}{m} \right). \quad (6.77)$$

Vide (D.3), página 131.

Como  $|J_m(x)| = |J_{-m}(x)|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ , segue que  $|Q_m^{(2)}| = |Q_{-m}^{(2)}|$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ . Logo, para funções  $f$  como em (6.73) temos

$$M(\mathcal{Q}_1) = 0. \quad (6.78)$$

Portanto a condição II não pode ser satisfeita em nenhum lugar no espaço  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Para uma solução completa do problema para funções como (6.73) e que inclua os círculos mencionados acima, necessitamos de restrições mais fortes que aquelas implicadas por I e II. Apesar disso notemos que a condição I dá conta de quase todo o espaço  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , deixando apenas em aberto o conjunto de medida nula representado pelos círculos mencionados.

### 6.5.2 Um Segundo Exemplo

Para funções  $f$  com  $J > 1$  a situação que conduziu a (6.78) não é esperada e condições como I e II podem ser válidas em regiões não-vazias do espaço dos parâmetros de  $f$ . Isso pode ser visto no próximo exemplo com  $J = 2$ . Tomemos

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (6.79)$$

com

$$f_1(t) = f_1 e^{-i\omega t} + \overline{f_1} e^{i\omega t} \quad (6.80)$$

$$f_2(t) = f_2 e^{-i2\omega t} + \overline{f_2} e^{i2\omega t} \quad (6.81)$$

$f_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ . Temos  $q(t) = q_1(t)q_2(t)$ , onde

$$q_1(t) := e^{i\gamma_{f_1}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\zeta_1} J_n \left( \frac{2|f_1|}{\omega} \right) e^{in\omega t}, \quad (6.82)$$

$$q_2(t) := e^{i\gamma_{f_2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\zeta_2} J_n \left( \frac{|f_2|}{\omega} \right) e^{in2\omega t}, \quad (6.83)$$

com

$$e^{i\zeta_i} = \frac{\overline{f_i}}{|f_i|}, \quad i = 1, 2. \quad (6.84)$$

Segue que

$$Q_m = e^{i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i((m-2k)\zeta_1 + k\zeta_2)} J_{m-2k} \left( \frac{2|f_1|}{\omega} \right) J_k \left( \frac{|f_2|}{\omega} \right), \quad (6.85)$$

$$Q_m^{(2)} = e^{2i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i((m-2k)\zeta_1 + k\zeta_2)} J_{m-2k} \left( \frac{4|f_1|}{\omega} \right) J_k \left( \frac{2|f_2|}{\omega} \right). \quad (6.86)$$

Disso vemos (usando  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ) que

$$\overline{Q_{-m}^{(2)}} = (-1)^m e^{-4i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \left\{ e^{2i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i((m-2k)\zeta_1 + k\zeta_2)} J_{m-2k} \left( \frac{4|f_1|}{\omega} \right) J_k \left( \frac{2|f_2|}{\omega} \right) \right\}. \quad (6.87)$$

O fator entre colchetes difere de  $Q_m^{(2)}$  devido à presença do fator  $(-1)^k$  na soma sobre todos os  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo, devemos aqui esperar que  $|Q_m^{(2)}| \neq |Q_{-m}^{(2)}|$  nesse caso, o que quase certamente implicará  $M(Q_1) \neq 0$  para  $M(q^2) = 0$ , levando a uma condição II não vazia. Alguns cômputos numéricos simples parecem corroborar essas idéias.

## 6.6 A Expansão Perturbativa para a Freqüência Secular

Vamos agora retomar a discussão de propriedades da freqüência secular  $\Omega$  para funções  $f$  periódicas gerais (com uma série de Fourier finita).

Vamos olhar com um pouco mais de detalhe a expansão perturbativa para  $\Omega$  dada em (6.67), página 90, para o caso I. Para tal precisamos encontrar expressões para os coeficientes  $G_0^{(n)}$  em termos dos coeficientes  $Q_m$ ,  $Q_m^{(2)}$  e  $C_m^{(n)}$ .

Para  $G_m^{(1)}$  temos

$$G_m^{(1)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} C_l^{(1)} = \alpha_1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} Q_l = \alpha_1 Q_m. \quad (6.88)$$

Assim,

$$G_m^{(1)} = \alpha_1 Q_m = \pm |Q_m|. \quad (6.89)$$

Para calcular  $G_0^{(2)}$  fazemos a seguinte observação.

**6.13 Lema.** Para  $m, s \in \mathbb{Z}$ , seja  $T(m, s)$  definida por

$$T(m, s) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} \left( Q_{l-s} - Q_l \frac{Q_{-s}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right). \quad (6.90)$$

Então vale que

$$T(0, s) = 0 \quad (6.91)$$

para todo  $s \in \mathbb{Z}$ . □

A demonstração é simples. Pela definição e pelo fato que

$$Q_m^{(2)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} Q_l, \quad (6.92)$$

segue que

$$T(m, s) = Q_{m-s}^{(2)} - Q_m^{(2)} \frac{Q_{-s}^{(2)}}{Q_0^{(2)}}, \quad (6.93)$$

que obviamente se anula para  $m = 0$ . ■

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
 G_m^{(2)} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} C_l^{(2)} \\
 &= \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} \frac{\left(\alpha_1^2 Q_{n_1}^{(2)} - \overline{Q_{-n_1}^{(2)}}\right)}{n_1 \omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} \left[ Q_{l-n_1} - \frac{Q_l Q_{-n_1}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right] \\
 &= \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} \frac{\left(\alpha_1^2 Q_{n_1}^{(2)} - \overline{Q_{-n_1}^{(2)}}\right)}{n_1 \omega} T(m, n_1)
 \end{aligned} \tag{6.94}$$

e, portanto, pelo Lema 6.13,

$$G_0^{(2)} = 0. \tag{6.95}$$

Note-se que esse fato é bastante geral e válido para qualquer função  $f$  dentro das hipóteses assumidas até aqui. A contribuição de segunda ordem em  $\epsilon$  para  $\Omega$  é sempre nula.

Vamos agora tratar de  $G_0^{(n)}$  com  $n > 2$ . Temos,

$$\begin{aligned}
 G_m^{(n)} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} C_l^{(n)} \\
 &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1+n_2 \neq 0}} \frac{1}{(n_1 + n_2) \cdot \omega} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{n_2}^{(n-p)} \right) \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} \left[ Q_{l-(n_1+n_2)} - \frac{Q_l Q_{-n_1-n_2}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right] \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\alpha_1 Q_0^{(2)}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} Q_l \right) \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{-n_1}^{(n+1-p)} \\
 &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1+n_2 \neq 0}} \frac{1}{(n_1 + n_2) \cdot \omega} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{n_2}^{(n-p)} \right) T(m, n_1 + n_2) \\
 &\quad - \frac{Q_m^{(2)}}{2\alpha_1 Q_0^{(2)}} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{-n_1}^{(n+1-p)}. \tag{6.96}
 \end{aligned}$$

Assim, usando novamente o Lema 6.13, segue que

$$G_0^{(n)} = -\frac{1}{2\alpha_1} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{-n_1}^{(n+1-p)}, \tag{6.97}$$

para todo  $n \geq 3$ .

Resumindo, obtivemos

$$\Omega = \epsilon \alpha_1 Q_0^{(2)} + \epsilon^3 \Omega_3, \quad (6.98)$$

onde

$$\Omega_3 := -\frac{1}{2\alpha_1} \sum_{n=3}^{\infty} \epsilon^{n-3} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{-n_1}^{(n+1-p)}. \quad (6.99)$$

Para futuros propósitos mencionamos que o coeficiente de terceira ordem é

$$\begin{aligned} G_0^{(3)} = & -\frac{1}{2\alpha_1} \left\{ \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0, n_2 \neq 0}} \left( \frac{\alpha_1^2 Q_{n_1}^{(2)} - \overline{Q_{-n_1}^{(2)}}}{n_1 \omega} \right) \left( \frac{\alpha_1^2 Q_{n_2}^{(2)} - \overline{Q_{-n_2}^{(2)}}}{n_2 \omega} \right) Q_{-n_1-n_2}^{(2)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{Q_0^{(2)}} \left[ \sum_{n_1 > 0} \frac{1}{n_1 \omega} \left( |Q_{n_1}^{(2)}|^2 - |Q_{-n_1}^{(2)}|^2 \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.100)$$

## 6.7 O Efeito de Supressão de Tunelamento

Vamos agora discutir algumas consequências de interesse mais físico da expansão (6.98). Como é bem sabido, o modelo que descrevemos no presente trabalho, definido pelos Hamiltonianos (1.1) e (1.3) (páginas 12 e 13, respectivamente) é freqüentemente usado no estudo de efeitos de tunelamento, em sistemas para os quais a aproximação de dois níveis é uma boa aproximação, sob a ação de uma perturbação externa dependente do tempo. Expliquemos isso à luz de um exemplo bem conhecido.

Consideremos um sistema quântico constituído por uma partícula de massa  $m$  que se move em uma dimensão sob a ação de um potencial do tipo “poço duplo”. Seu Hamiltoniano é  $H_0 := p^2/2m + \lambda(x^2 - a^2)^2$ ,  $\lambda > 0$ . Para  $\lambda$  e  $a$  grandes os dois primeiros autovalores de  $H_0$  têm energias próximas que diferem por, digamos,  $2\epsilon$ . O menor autovalor,  $\psi_+(x)$ , é uma função par de  $x$  e o segundo,  $\psi_-(x)$ , uma função ímpar, sendo que os valores absolutos de ambas concentram-se próximos aos dois poços de potencial em  $\pm a$ . Para o estado  $\psi_d := (\psi_+ + \psi_-)/\sqrt{2}$  a função e onda é mais concentrada, digamos, no poço da direita, enquanto que para o estado  $\psi_e := (\psi_+ - \psi_-)/\sqrt{2}$  a função e onda é mais concentrada no poço da esquerda.

Falando-se pictoricamente, a transição entre  $\psi_d$  e  $\psi_e$  só pode se dar por um processo quântico de tunelamento, em função da presença da barreira de potencial separando os dois poços.

Se nos restringirmos ao subespaço gerado por  $\psi_+$  e  $\psi_-$  e representarmos o estado  $\psi_+$  pelo vetor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e o estado  $\psi_-$  pelo vetor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , teremos  $\psi_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\psi_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Notemos que  $\psi_e = \sigma_3 \psi_d$ .

Introduzindo um potencial dependente do tempo, e sendo a correspondente evolução temporal dada por um propagador  $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t, 0)$ , a probabilidade de transição do estado com função de onda concentrada no poço direito em  $t = 0$  ao estado com função de onda concentrada no poço esquerdo no instante de tempo  $t$  seria

$$P(t) := |(\psi_e, \mathcal{U}(t)\psi_d)|^2. \quad (6.101)$$

Se  $\mathcal{U}_0(t)$  representa o propagador associado ao Hamiltoniano livre  $H_0$ , a probabilidade de transição livre de  $\psi_d$  a  $\psi_e$  em um tempo  $t$  é dada por  $P_0(t) = \sin(\epsilon t)^2$ . Em outras palavras, o tempo de permanência média em um dos poços para a evolução livre é da ordem de  $\epsilon^{-1}$ .

Retornemos aos sistemas de dois níveis que discutimos no presente trabalho. Definindo como antes  $\phi_d := e^{-i\pi\sigma_2/4}\psi_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\phi_e := e^{-i\pi\sigma_2/4}\psi_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  teremos,

$$P(t) := |(\phi_e, U(t)\phi_d)|^2 = |U_{12}(t)|^2. \quad (6.102)$$

É possível demonstrar, mas não o faremos aqui (vide [20]), que na decomposição de Fourier de  $P(t) = |U_{12}(t)|^2$  a freqüência dominante é  $\Omega/2$ , de modo muito análogo, aliás, ao que ocorre com as oscilações de Rabi em (1.38), página 17. Com boa aproximação tem-se nesse caso  $P(t) \simeq \sin(\Omega t)^2$ . Esse comportamento pode, aliás, ser observado nos gráficos da Seção 6.8. O tempo de permanência média em um dos poços é, assim, da ordem de  $\Omega^{-1}$ , ou seja, a freqüência secular  $\Omega$  representa a freqüência típica de tunelamento de um sistema de dois níveis como os que tratamos neste trabalho.

Retornemos agora à equação (6.98). A mesma diz-nos que se a interação externa  $f$  for tal que  $Q_0^{(2)}$  for nula ou desprezível o período típico de tunelamento é da ordem de  $\epsilon^{-3}$ , podendo, portanto, ser muito longo caso  $\epsilon$  seja pequeno. Tal é o caso se, por exemplo, adotarmos  $f$  como em (6.73), página 92, com  $2\varphi_0/\omega$  igual a um dos zeros da função de Bessel  $J_0$ . Para tais parâmetros, portanto, o efeito de tunelamento pode ser violentamente suprimido, ainda que não totalmente, levando, no exemplo do potencial de poço duplo, funções de onda localizadas em um dos poços a permanecer no mesmo por um tempo muito mais longo que aquele da evolução livre, que é da ordem de  $\epsilon^{-1}$ .

Esse efeito de “destruição” de tunelamento fora já previsto semi-heuristicamente em primeira

ordem de perturbação por alguns autores. Da extensa literatura sobre o problema de tunelamento citamos aqui<sup>2</sup> apenas as referências [21] e [22] que nos dizem diretamente respeito. Nossos resultados descritos acima mostram, no entanto, alguns fatos que se encontravam fora do alcance dos métodos daqueles dois trabalhos. Em primeiro lugar, nossos resultados mostram que o efeito de destruição de tunelamento é não apenas um efeito de primeira ordem em  $\epsilon$  quando  $Q_0^{(2)} = 0$ , mas também de segunda ordem. Em segundo lugar, o efeito de “destruição de tunelamento” em primeira e segunda ordem não se dá apenas para uma função  $f(t) = \varphi_1 \cos(\omega t)$  (como em [22]), mas é sempre possível desde que  $Q_0^{(2)} = M(q^2)$  possa anular-se. Por fim, o efeito não é exato em todas as ordens pois o termo de terceira ordem é, em geral, não-nulo.

De fato, no caso de funções como  $f(t) = \varphi_1 \cos(\omega t)$  (que é o caso tratado em [22]), tem-se, usando (6.100) e (6.76), que o termo de terceira ordem de (6.98) é

$$G_0^{(3)} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0, n_2 \neq 0}} \left( \frac{J_{n_1}(y) - J_{-n_1}(y)}{n_1 \omega} \right) \left( \frac{J_{n_2}(y) - J_{-n_2}(y)}{n_2 \omega} \right) J_{-n_1-n_2}(y), \quad (6.103)$$

onde  $y := 2\varphi_1/\omega$ . Calculando numericamente a expressão acima para quando  $2\varphi_1/\omega$  é igual ao primeiro zero da função de Bessel  $J_0$ , situação em que o termo de ordem  $\epsilon$  em  $\Omega$  se anula, verificamos que  $G_0^{(3)} \approx -0,604/\omega^2$ . Isso mostra, então, que o termo de ordem  $\epsilon^3$  em  $\Omega$  pode ser não-nulo.

Em resumo, o efeito de tunelamento pode ser, de fato, violentamente suprimido escolhendo-se convenientemente os parâmetros da função  $f$ , mas limita-se às duas primeiras ordens de aproximação em  $\epsilon$ .

## 6.8 Alguns Gráficos

Para a apreciação do olhar apresentamos nesta seção alguns gráficos obtidos a partir das expressões do Teorema 6.2 e da Seção 6.4.1 através de uma combinação de programas escritos em Fortran 77 e Maple V.5. Não entraremos em detalhes sobre esses programas aqui mas os mesmos são apresentados sem comentários em anexo a este trabalho.

Em todos os gráficos apresentados abaixo usamos  $\epsilon = 0,01$ ,  $f(t) = \cos(\omega t)$  e  $\omega = 1$ . Para tais escolhas tem-se  $\Omega \approx 0,002238$ ,  $g(0) \approx 0,010251$ .

---

<sup>2</sup>Agradecemos ao Dr. A. Sacchetti (U. Modena) por nos apontar essas referências.

Na Figura 6.1, página 101, apresentamos um gráfico da probabilidade de transição  $P(t) = |U_{12}(t)|^2$  discutida na Seção 6.7, página 97, para o intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 2\pi/\Omega \simeq 2807$ . Podemos verificar com boa aproximação que  $P(t) \simeq (\sin(\Omega t))^2$ .

Na Figura 6.2, página 102, apresentamos um gráfico da mesma probabilidade de transição  $P(t) = |U_{12}(t)|^2$  para o intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 100$ . Observa-se aqui a presença de correções de freqüência  $\omega$  e de ordem  $\epsilon$  ao comportamento dominante  $P(t) \simeq (\sin(\Omega t))^2$ .

Na Figura 6.3, página 103, apresentamos um gráfico da mesma probabilidade de transição  $P(t) = |U_{12}(t)|^2$  agora para o intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 20$ . Aqui torna-se mais clara a presença de correções de freqüência  $\omega$  e de ordem  $\epsilon$  ao comportamento dominante  $P(t) \simeq (\sin(\Omega t))^2$ .

Na Figura 6.4, página 104, apresentamos um gráfico da quantidade  $|U_{11}(t)|^2 + |U_{12}(t)|^2$  que, pela unitariedade da evolução, deveria ser idêntica a 1. Ao longo do intervalo entre  $t = 0$  e  $t = 2\pi/\Omega \simeq 2807$  observamos flutuações da ordem de 1,5% abaixo do valor 1 (observe-se com atenção que o eixo vertical vai apenas de cerca de 0,985 a 1).

Para todos os gráficos usamos nos programas as expressões do Teorema 6.2 e da Seção 6.4.1. A função  $g$  foi calculada até a sétima ordem em  $\epsilon$ . Para os coeficientes de Fourier  $R_m$  usamos a expressão (6.48), página 87, mas a soma em  $p$  foi feita apenas até  $p = 5$ . Esse truncamento da soma em  $p$  introduz incorreções em todas as ordem de perturbação, pois repare-se que a expressão (6.48) envolve somas de produtos dos coeficientes  $H_m$ , os quais foram calculados, como dissemos, até sétima ordem em  $\epsilon$ . Essas incorreções são as responsáveis pela imprecisão de 1,5% observada. Para reduzi-la deveríamos truncar a série de (6.48) em valores de  $p$  maiores que  $p = 5$ . Isso demanda, porém, um esforço de tempo de CPU que está além das nossas modestas pretensões computacionais.

Fora isso, como nenhum tratamento especial de redução de erros numéricos foi adotado em nossos programas cremos que esse teste seja um indício da boa precisão de nossas expressões mesmo para tempos longos, envolvendo centenas de ciclos da interação externa descrita pela função  $f$ , cuja freqüência é  $\omega$ . Lembremo-nos que para os valores acima  $\omega/\Omega \simeq 447$ .

Note-se na Figura 6.4 que a amplitude dominante do erro oscila com freqüência da ordem de  $2\Omega$ , o que sugere que o mesmo deve ser afetado por erros numéricos no cômputo de  $\Omega$ .

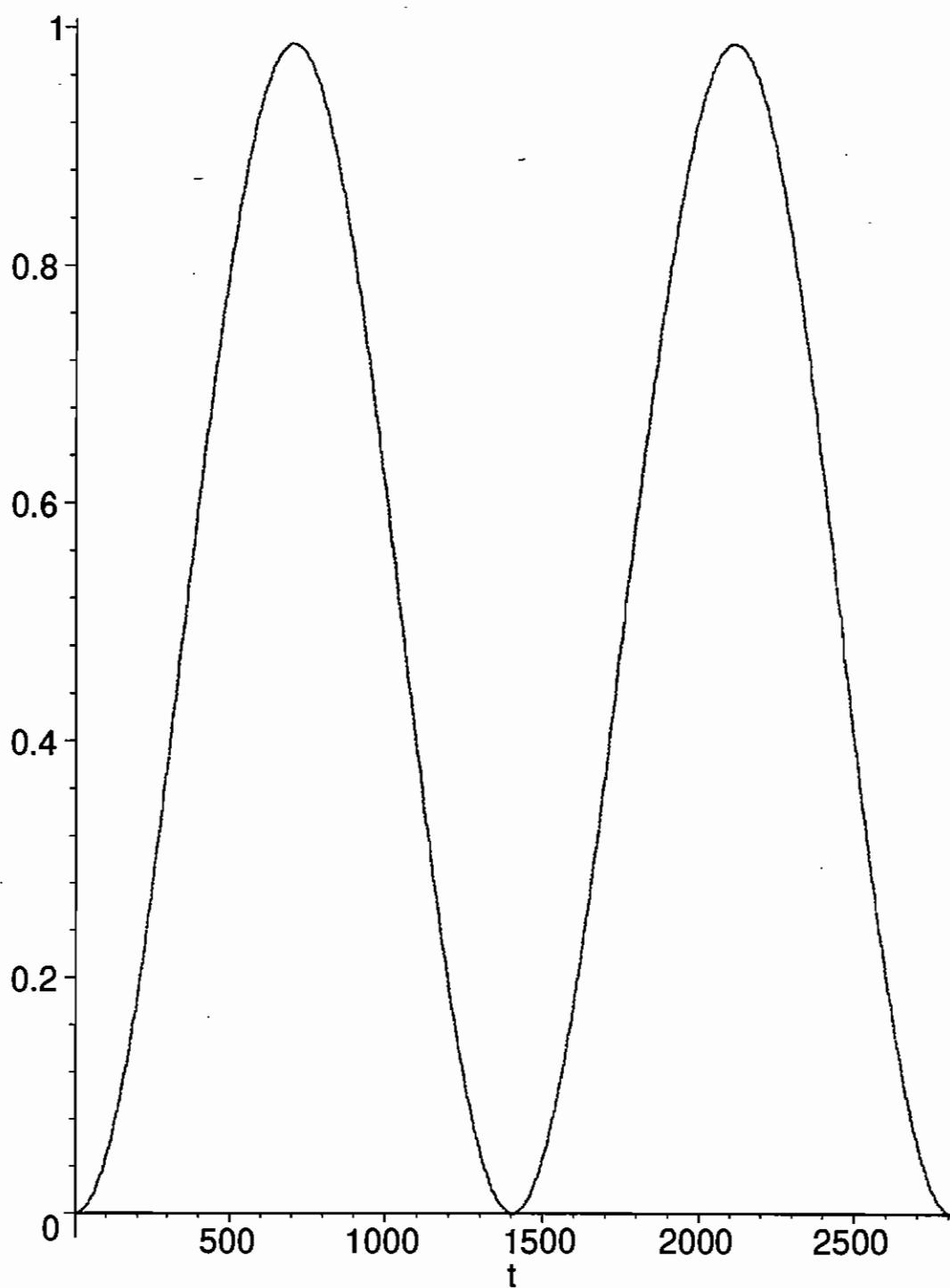


Figura 6.1: Gráfico da probabilidade de transição  $P(t) = |U_{12}(t)|^2$  para o intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 2\pi/\Omega \simeq 2807$ .

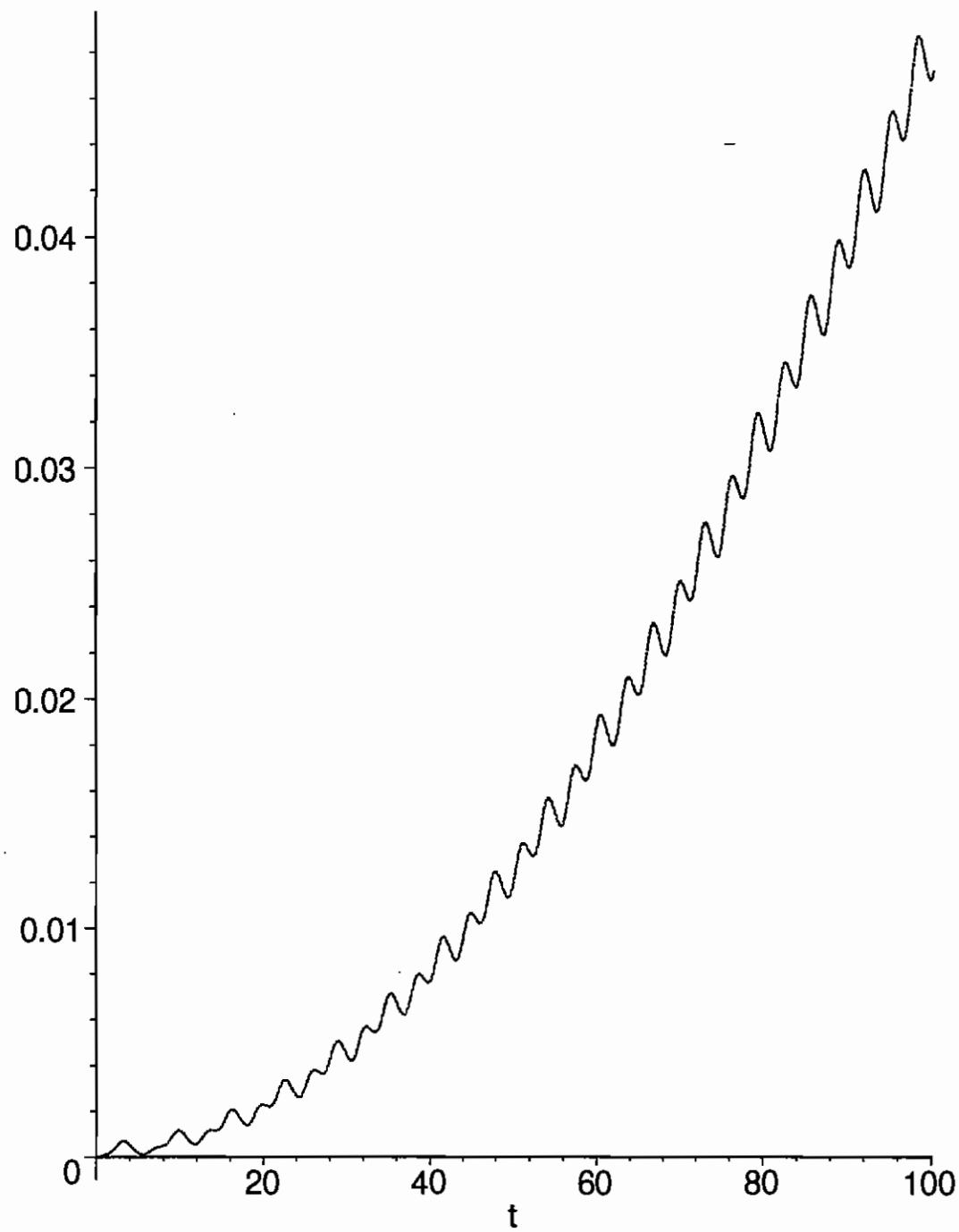


Figura 6.2: Gráfico da probabilidade de transição  $P(t) = |U_{12}(t)|^2$  para o intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 100$ .

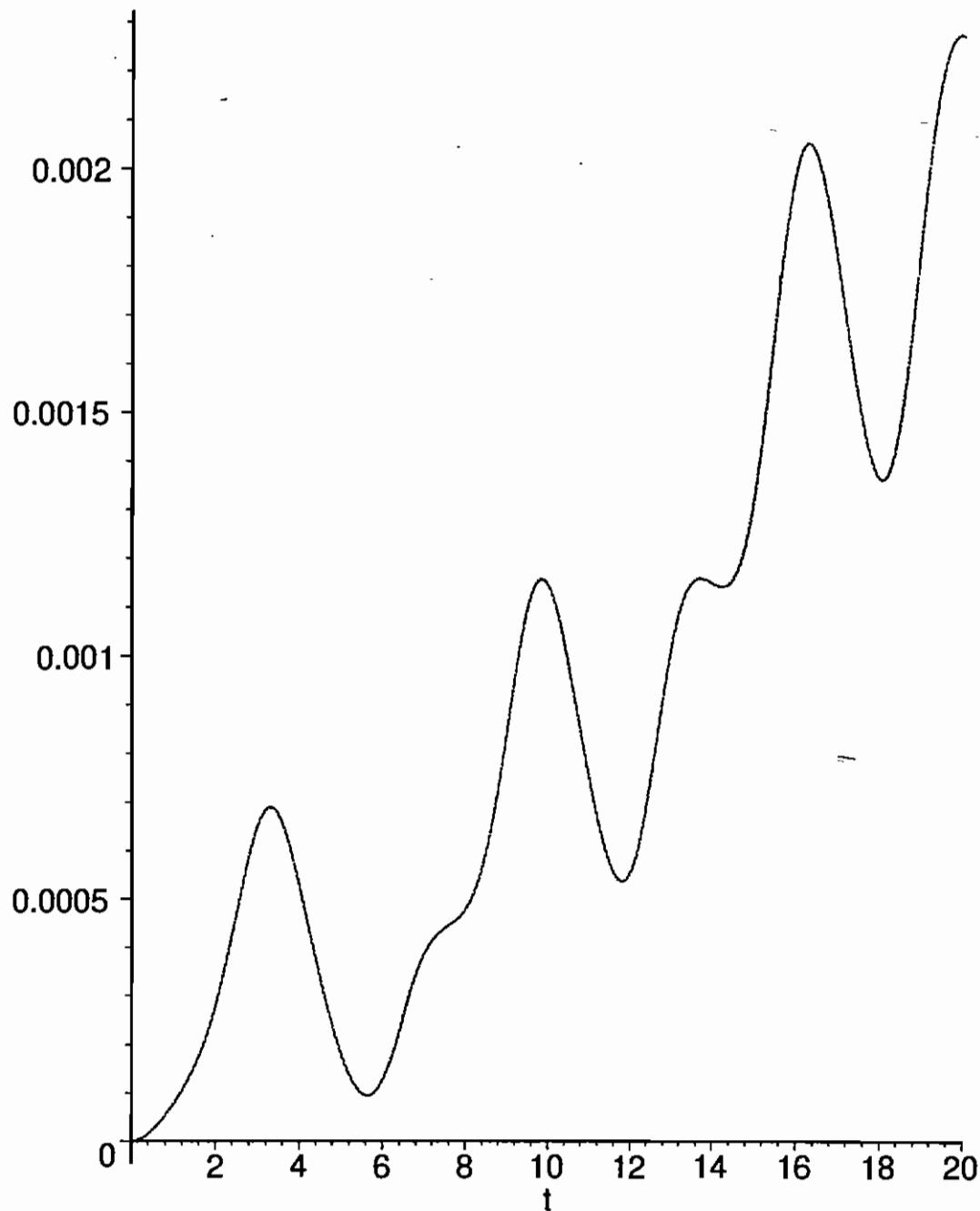


Figura 6.3: Gráfico da probabilidade de transição  $P(t) = |U_{12}(t)|^2$  para o intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = 20$ .

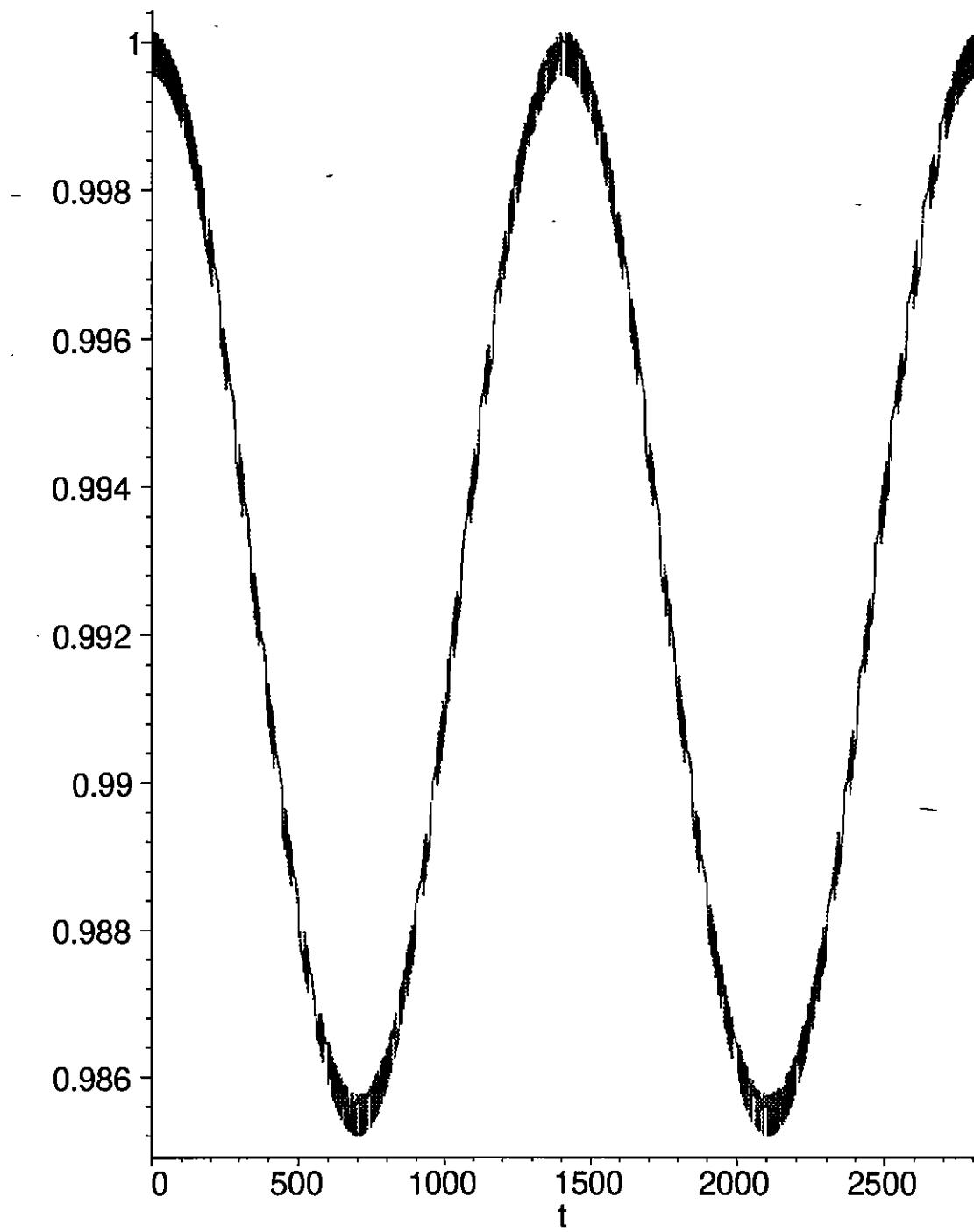


Figura 6.4: Gráfico da quantidade  $|U_{11}(t)|^2 + |U_{12}(t)|^2$ , que deveria ser idêntica a 1 pela unitaridade da evolução. Esse gráfico permite-nos avaliar os erros cometidos devido ao truncamento das séries e imprecisões numéricas. Como se vê, os mesmos são da ordem de 1,5%. Observe-se com atenção que o eixo vertical vai apenas de cerca de 0,985 a 1.

# Capítulo 7

## Interações Periódicas com $F_0 \neq 0$

Neste capítulo trataremos da situação onde  $f$  é periódica com uma série de Fourier finita mas com  $F_0 \neq 0$ .

Conforme observamos no Apêndice C, página 126, a menos que  $2F_0$  seja um múltiplo inteiro de  $\omega$ , situação que excluiremos, temos aqui que  $M(q^2) = 0$  e somos assim forçados a procurar soluções da classe II (Teorema 4.1, página 42). A condição  $M(Q_1) \neq 0$ , necessária à condição II, deve ser genericamente satisfeita nesse caso, conforme discutimos no Apêndice D, página 130.

O caso de  $f$  periódica e  $F_0 \neq 0$  é particularmente desafiante, pois uma observação superficial das relações de recorrência (5.79)-(5.80) faz-nos supor que aqui os pequenos denominadores estariam presentes, dado que agora temos  $A = 2$  e denominadores do tipo  $\underline{m} \cdot \underline{\omega}$ , com  $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ , são da forma  $m_1\omega + m_2F_0$ , que podem ser pequenos caso  $m_1$  e  $m_2$  possam ser arbitrariamente grandes. No entanto, uma análise fina mostra-nos que, em verdade, nenhum pequeno denominador ocorre nas relações de recorrência pois  $m_2$  não precisa assumir valor outro que não  $-1$ .

A observação chave que utilizaremos é a seguinte. Se escrevermos  $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ , então, conforme observamos no Apêndice C,  $Q_{\underline{m}}$  é identicamente igual a zero se  $m_2 \neq 1$  e  $Q_{\underline{m}}^{(2)}$  é identicamente igual a zero se  $m_2 \neq 2$ , ou seja, de acordo com (C.17) e (C.18),

$$Q_{\underline{m}} = Q_{m_1} \delta_{m_2, 1}, \quad (7.1)$$

$$Q_{\underline{m}}^{(2)} = Q_{m_1}^{(2)} \delta_{m_2, 2}. \quad (7.2)$$

Por outro lado, nas relações de recorrência (5.79)-(5.80), página 70, dos coeficientes  $E_{\underline{m}}^{(n)}$  surgem denominadores da forma  $m_1\omega + m_2F_0$ . Esses denominadores poder tornar-se pequenos caso  $m_1$  e  $m_2$  possam ser arbitrariamente grandes. Sucede, porém, que devido à propriedade supracitada dos coeficientes  $Q_{\underline{m}}$  e  $Q_{\underline{m}}^{(2)}$ , que comparecem nas convoluções de (5.79)-(5.80), os índices  $m_2$  não podem ser arbitrariamente grandes, ficando limitados ao valor  $-1$  nos coeficientes de Fourier  $E_{\underline{m}}^{(n)}$ .

O efeito dos pequenos denominadores é, portanto, inexistente e podemos tratar as relações de recorrência de modo idêntico ao do caso  $F_0 = 0$ .

Vamos no que segue implementar tecnicamente essas idéias.

## 7.1 A Estrutura dos Coeficientes $E_{\underline{m}}^{(n)}$

### 7.1.1 O Coeficiente $E_{\underline{m}}^{(1)}$

Vamos aqui demonstrar a seguinte proposição:

**7.1 Proposição.** Para  $f$  periódica com uma série de Fourier finita e  $F_0 \neq 0$  os coeficientes  $E_{\underline{m}}^{(1)}$  dados em (5.79), página 70, são da forma

$$E_{\underline{m}}^{(1)} = E_{m_1}^{(1)} \delta_{m_2, -1} \quad (7.3)$$

para todo  $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ . □

**Demonstração.** Para usar uma notação mais conveniente, vamos reescrever (5.79) como

$$E_{\underline{m}}^{(1)} = \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{m}+\underline{a}} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}}}{\underline{a} \cdot \underline{\omega}} + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(Q_1)} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} \neq \underline{0}, \underline{c} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{b}+\underline{c}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{b}}^{(2)}} \overline{Q_{\underline{c}}^{(2)}}}{(\underline{b} \cdot \underline{\omega})(\underline{c} \cdot \underline{\omega})}. \quad (7.4)$$

Escrevendo  $\underline{a}$  na forma  $\underline{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\underline{b}$  na forma  $\underline{b} = (b_1, b_2)$ ,  $\underline{c}$  na forma  $\underline{c} = (c_1, c_2)$  e usando (7.1) e (7.2) ficamos com

$$E_{\underline{m}}^{(1)} = \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{m}_1+a_1} \overline{Q_{a_1}^{(2)}}}{\underline{a} \cdot \underline{\omega}} (\delta_{m_2+a_2, 1} \delta_{a_2, 2}) + \frac{Q_{m_1} \delta_{m_2, 1}}{2iM(Q_1)} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} \neq \underline{0}, \underline{c} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{b_1+c_1}^{(2)} \overline{Q_{b_1}^{(2)}} \overline{Q_{c_1}^{(2)}}}{(\underline{b} \cdot \underline{\omega})(\underline{c} \cdot \underline{\omega})} (\delta_{b_2+c_2, 2} \delta_{b_2, 2} \delta_{c_2, 2})$$

$$= \left( \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m_1+a_1} \overline{Q_{a_1}^{(2)}}}{a_1 \omega + 2F_0} \right) \delta_{m_2, -1}, \quad (7.5)$$

pois  $\delta_{b_2+c_2, 2} \delta_{b_2, 2} \delta_{c_2, 2} = \delta_{4, 2} \delta_{b_2, 2} \delta_{c_2, 2} = 0$ . Isso completa a demonstração da Proposição 7.1. ■

### 7.1.2 O Coeficiente $E_{\underline{m}}^{(2)}$

Vamos aqui demonstrar a seguinte proposição:

**7.2 Proposição.** Para  $f$  periódica com uma série de Fourier finita e  $F_0 \neq 0$  os coeficientes  $E_{\underline{m}}^{(2)}$  dados em (5.80), página 70, são da forma

$$E_{\underline{m}}^{(2)} = E_{m_1}^{(2)} \delta_{m_2, -1} \quad (7.6)$$

para todo  $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ . □

**Demonstração.** Para a demonstração vamos usar a relação (5.80) para o caso  $n = 2$ . Faremos uso de (7.1) e (7.2), assim como da Proposição 7.1.

Para qualquer  $n \geq 2$  a relação (5.80) fica bastante simplificada com a observação que para  $F_0 \neq 0$  tem-se  $\mathcal{R} = 0$ . Para ver isso escrevemos  $\mathcal{R}$  segundo sua definição (5.78) e usamos (7.1) e (7.2) para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{1}{2iM(Q_1)} \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{a} \neq \underline{0}, \underline{b} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{a}+\underline{b}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}} \overline{Q_{\underline{b}}^{(2)}}}{(\underline{a} \cdot \underline{\omega})(\underline{b} \cdot \underline{\omega})} \\ &= \frac{1}{2iM(Q_1)} \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{a} \neq \underline{0}, \underline{b} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{a_1+b_1}^{(2)} \overline{Q_{a_1}^{(2)}} \overline{Q_{b_1}^{(2)}}}{(\underline{a} \cdot \underline{\omega})(\underline{b} \cdot \underline{\omega})} (\delta_{a_2+b_2, 2} \delta_{a_2, 2} \delta_{b_2, 2}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

pois  $\delta_{a_2+b_2, 2} \delta_{a_2, 2} \delta_{b_2, 2} = \delta_{4, 2} \delta_{a_2, 2} \delta_{b_2, 2} = 0$ .

Para  $E_{\underline{m}}^{(2)}$  temos então a seguinte expressão:

$$E_{\underline{m}}^{(2)} = A_{\underline{m}} - \frac{Q_{\underline{m}}}{iM(Q_1)} B, \quad (7.8)$$

onde

$$A_{\underline{m}} := \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} + \underline{b} \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m} - \underline{a} - \underline{b}} \frac{E_{\underline{a}}^{(1)} E_{\underline{b}}^{(1)}}{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{\omega}} \quad (7.9)$$

e

$$B := \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq \underline{0}}} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} + \underline{c} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}} E_{\underline{b}}^{(1)} E_{\underline{c}}^{(1)}}{(\underline{a} \cdot \underline{\omega}) ((\underline{b} + \underline{c}) \cdot \underline{\omega})}. \quad (7.10)$$

Temos por (7.1) e (7.2) e pela Proposição 7.1 que

$$\begin{aligned} A_{\underline{m}} &:= \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} + \underline{b} \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m} - \underline{a} - \underline{b}} \frac{E_{\underline{a}}^{(1)} E_{\underline{b}}^{(1)}}{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{\omega}} \\ &= \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} + \underline{b} \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m}_1 - \underline{a}_1 - \underline{b}_1} \frac{E_{\underline{a}_1}^{(1)} E_{\underline{b}_1}^{(1)}}{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{\omega}} (\delta_{\underline{m}_2 - \underline{a}_2 - \underline{b}_2, 1} \delta_{\underline{a}_2, -1} \delta_{\underline{b}_2, -1}) \\ &= \left( \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{\underline{m}_1 - \underline{a}_1 - \underline{b}_1} E_{a_1}^{(1)} E_{b_1}^{(1)}}{(a_1 + b_1)\omega - 2F_0} \right) \delta_{\underline{m}_2, -1}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} B &:= \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq \underline{0}}} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} + \underline{c} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}} E_{\underline{b}}^{(1)} E_{\underline{c}}^{(1)}}{(\underline{a} \cdot \underline{\omega}) ((\underline{b} + \underline{c}) \cdot \underline{\omega})} \\ &= \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq \underline{0}}} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} + \underline{c} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}} E_{\underline{b}}^{(1)} E_{\underline{c}}^{(1)}}{(\underline{a} \cdot \underline{\omega}) ((\underline{b} + \underline{c}) \cdot \underline{\omega})} (\delta_{\underline{a}_2 + \underline{b}_2 + \underline{c}_2, 2} \delta_{\underline{a}_2, 2} \delta_{\underline{b}_2, -1} \delta_{\underline{c}_2, -1}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

pois  $\delta_{\underline{a}_2 + \underline{b}_2 + \underline{c}_2, 2} \delta_{\underline{a}_2, 2} \delta_{\underline{b}_2, -1} \delta_{\underline{c}_2, -1} = \delta_{0, 2} \delta_{\underline{a}_2, 2} \delta_{\underline{b}_2, -1} \delta_{\underline{c}_2, -1} = 0$ .

Assim,

$$E_{\underline{m}}^{(2)} = A_{\underline{m}} = \left( \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{\underline{m}_1 - \underline{a}_1 - \underline{b}_1} E_{a_1}^{(1)} E_{b_1}^{(1)}}{(a_1 + b_1)\omega - 2F_0} \right) \delta_{\underline{m}_2, -1}, \quad (7.13)$$

completando a prova da Proposição 7.2. ■

### 7.1.3 Os Coeficientes $E_{\underline{m}}^{(n)}$ , $n > 3$ . A Hipótese Indutiva

Vamos aqui demonstrar a seguinte proposição, que generaliza as Proposições 7.1 e 7.2:

**7.3 Proposição.** Para  $f$  periódica com uma série de Fourier finita e  $F_0 \neq 0$  os coeficientes  $E_{\underline{m}}^{(n)}$ ,  $n > 2$ , dados em (5.80), página 70, são da forma

$$E_{\underline{m}}^{(n)} = E_{m_1}^{(n)} \delta_{m_2, -1} \quad (7.14)$$

para todo  $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ . □

**Demonstração.** Para a demonstração vamos usar a relação (5.80) para o caso  $n > 2$ . Faremos uso de (7.1) e (7.2), das Proposições 7.1 e 7.2 e do fato mostrado acima que  $\mathcal{R} = 0$  para  $F_0 = 0$ .

A demonstração será feita por indução. As Proposições 7.1 e 7.2 já nos garantem os casos  $n = 1$  e  $n = 2$ . Seja então  $n > 2$ .

Usaremos a hipótese indutiva que para todo  $p$  com  $1 \leq p \leq n-1$  vale

$$E_{\underline{m}}^{(p)} = E_{m_1}^{(p)} \delta_{m_2, -1} \quad (7.15)$$

para todo  $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$

De acordo com (5.80) temos

$$E_{\underline{m}}^{(n)} = \sum_{p=1}^{n-1} \left( A_{\underline{m}}^{(p)} - \frac{Q_{\underline{m}}}{iM(\mathcal{Q}_1)} B^{(p)} \right) + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{p=2}^{n-1} C^{(p)}, \quad (7.16)$$

onde

$$A_{\underline{m}}^{(p)} := \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} + \underline{b} \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m} - \underline{a} - \underline{b}} \frac{E_{\underline{a}}^{(p)} E_{\underline{b}}^{(n-p)}}{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{\omega}}, \quad (7.17)$$

$$B^{(p)} := \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq \underline{0}}} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} + \underline{c} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}} E_{\underline{b}}^{(p)} E_{\underline{c}}^{(n-p)}}{(\underline{a} \cdot \underline{\omega})(\underline{b} + \underline{c}) \cdot \underline{\omega}}, \quad (7.18)$$

e

$$C^{(p)} := \sum_{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2} E_{\underline{a}}^{(p)} E_{-\underline{a}}^{(n+1-p)}. \quad (7.19)$$

Temos por (7.1) e (7.2) e pela hipótese indutiva que

$$A_{\underline{m}}^{(p)} := \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} + \underline{b} \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m} - \underline{a} - \underline{b}} \frac{E_{\underline{a}}^{(p)} E_{\underline{b}}^{(n-p)}}{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{\omega}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} + \underline{b} \neq 0}} Q_{m_1 - a_1 - b_1} \frac{E_{a_1}^{(p)} E_{b_1}^{(n-p)}}{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \omega} (\delta_{m_2 - a_2 - b_2, 1} \delta_{a_2, -1} \delta_{b_2, -1}) \\
&= \left( \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m_1 - a_1 - b_1} E_{a_1}^{(p)} E_{b_1}^{(n-p)}}{(a_1 + b_1) \omega - 2F_0} \right) \delta_{m_2, -1}.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B^{(p)} &:= \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq 0}} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} + \underline{c} \neq 0}} \frac{Q_{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}} E_{\underline{b}}^{(p)} E_{\underline{c}}^{(n-p)}}{(\underline{a} \cdot \omega)((\underline{b} + \underline{c}) \cdot \omega)} \\
&= \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{a} \neq 0}} \sum_{\substack{\underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{Z}^2 \\ \underline{b} + \underline{c} \neq 0}} \frac{Q_{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}^{(2)} \overline{Q_{\underline{a}}^{(2)}} E_{\underline{b}}^{(p)} E_{\underline{c}}^{(n-p)}}{(\underline{a} \cdot \omega)((\underline{b} + \underline{c}) \cdot \omega)} (\delta_{a_2 + b_2 + c_2, 2} \delta_{a_2, 2} \delta_{b_2, -1} \delta_{c_2, -1}) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\text{pois } \delta_{a_2 + b_2 + c_2, 2} \delta_{a_2, 2} \delta_{b_2, -1} \delta_{c_2, -1} = \delta_{0, 2} \delta_{a_2, 2} \delta_{b_2, -1} \delta_{c_2, -1} = 0.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
C^{(p)} &:= \sum_{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2} E_{\underline{a}}^{(p)} E_{-\underline{a}}^{(n+1-p)} \\
&= \sum_{\underline{a} \in \mathbb{Z}^2} E_{\underline{a}}^{(p)} E_{-\underline{a}}^{(n+1-p)} \delta_{a_2, -1} \delta_{-a_2, -1} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Logo,

$$E_{\underline{m}}^{(n)} = \sum_{p=1}^{n-1} A_{\underline{m}}^{(p)} = \left( \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m_1 - a_1 - b_1} E_{a_1}^{(p)} E_{b_1}^{(n-p)}}{(a_1 + b_1) \omega - 2F_0} \right) \delta_{m_2, -1}, \tag{7.23}$$

completando a prova da Proposição 7.3. ■

## 7.2 Convergência. Cotas Superiores Indutivas

De acordo com (7.5), (7.13) e (7.23)

$$E_{\underline{m}}^{(1)} = \left( \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m_1 + a_1} \overline{Q_{a_1}^{(2)}}}{a_1 \omega + 2F_0} \right) \delta_{m_2, -1} \quad \text{e} \tag{7.24}$$

$$E_{\underline{m}}^{(n)} = \left( \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m_1-a_1-b_1} E_{a_1}^{(p)} E_{b_1}^{(n-p)}}{(a_1 + b_1)\omega - 2F_0} \right) \delta_{m_2, -1}, \quad n \geq 2. \quad (7.25)$$

É bastante óbvio que para os coeficientes  $Q_m$  e  $Q_m^{(2)}$  valem as mesmas estimativas expressas na Proposição 6.1, página 74. Ao mesmo tempo, temos que

$$|a_1\omega + 2F_0| \geq \min_{a \in \mathbb{Z}} | |a|\omega - 2|F_0| | =: \eta > 0. \quad (7.26)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} |E_{\underline{m}}^{(1)}| &= \left( \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m_1+a_1} \overline{Q_{a_1}^{(2)}}}{a_1\omega + 2F_0} \right) \delta_{m_2, -1} \\ &= \frac{\mathcal{Q}^2}{\eta} \mathcal{B}(m_1) \delta_{m_2, -1} \leq \frac{\mathcal{Q}^2 B_0}{\eta} \frac{e^{-\chi|m_1|}}{\ll m_1 \gg^2} \delta_{m_2, -1}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

onde  $\mathcal{B}(m)$  está definido em (6.24), página 81.

Se definirmos  $K''_1 := \mathcal{Q}^2 B_0 / \eta$ , tomarmos  $n \geq 2$  e assumirmos como hipótese indutiva que

$$|E_{\underline{m}}^{(p)}| \leq K''_p \frac{e^{-\chi|m_1|}}{\ll m_1 \gg^2} \delta_{m_2, -1} \quad (7.28)$$

para todo  $p$  com  $1 \leq p \leq n-1$ , onde  $K''_p$  são constantes independentes de  $\underline{m}$ , teremos por (7.25),

$$\begin{aligned} |E_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \frac{1}{\eta} \left( \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} |Q_{m_1-a_1-b_1}| |E_{a_1}^{(p)}| |E_{b_1}^{(n-p)}| \right) \delta_{m_2, -1} \\ &\leq \frac{\mathcal{Q}}{\eta} \left( \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m_1-a_1-b_1|+|a_1|+|b_1|)}}{\ll m_1 - a_1 - b_1 \gg^2 \ll a_1 \gg^2 \ll b_1 \gg^2} \right) \left( \sum_{p=1}^{n-1} K''_p K''_{n-p} \right) \delta_{m_2, -1} \\ &\leq \frac{\mathcal{Q} B_0^2}{\eta} \left( \sum_{p=1}^{n-1} K''_p K''_{n-p} \right) \frac{e^{-\chi|m_1|}}{\ll m_1 \gg^2} \delta_{m_2, -1}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

onde, acima, usamos mais uma vez o Lema 6.6, página 81.

Se então definirmos indutivamente

$$K''_n := \frac{\mathcal{Q} B_0^2}{\eta} \left( \sum_{p=1}^{n-1} K''_p K''_{n-p} \right) \quad (7.30)$$

estará provado que

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq K''_n \frac{e^{-\chi|m_1|}}{\ll m_1 \gg^2} \delta_{m_2, -1}, \quad (7.31)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $\underline{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

Com os mesmos métodos usados no Apêndice G podemos demonstrar sem dificuldades que  $K''_n \leq K''_0(K'')^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $K''_0$  e  $K''$  são constantes positivas.

Sem mais-delongas, estabelecemos com isso que as séries de Fourier das funções  $e_n$  são absoluta e uniformemente convergentes e, para  $|\epsilon|^2 < (K'')^{-1}$ , a série de potências (4.7), página 43, que define a função  $g$  é absolutamente convergente. A expansão em série de Fourier para  $g$  é também absoluta e uniformemente convergente. Esses fatos são análogos aos correspondentes encontrados quando  $F_0 = 0$ .

### 7.2.1 A Função $g$

Olhemos agora com mais detalhe expansão em série de Fourier para  $g$ .

A Proposição 7.3 diz-nos que as funções  $e_n$  têm a seguinte decomposição de Fourier:

$$e_n(t) = e^{-iF_0 t} \sum_{m \in \mathbb{Z}} E_m^{(n)} e^{im\omega t}. \quad (7.32)$$

Para  $q(t)$  temos também

$$q(t) = e^{iF_0 t} \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m e^{im\omega t}. \quad (7.33)$$

Logo, por (4.36),

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m e^{im\omega t} \quad (7.34)$$

onde

$$G_m = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n G_m^{(n)} \quad (7.35)$$

com  $\lambda = \epsilon^2$  e

$$G_m^{(n)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} E_l^{(n)}. \quad (7.36)$$

Note-se por (7.34) que  $F_0$  está presente em  $g$  apenas nos coeficientes de Fourier  $G_m$  e não nas freqüências.

Para os coeficientes  $G_m^{(n)}$  temos explicitamente as seguintes expressões:

$$G_m^{(1)} = \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m+a_1}^{(2)} \overline{Q_{a_1}^{(2)}}}{a_1 \omega + 2F_0} \quad (7.37)$$

e

$$G_m^{(n)} = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{m-a_1-b_1}^{(2)} E_{a_1}^{(p)} E_{b_1}^{(n-p)}}{(a_1 + b_1)\omega - 2F_0}, \quad n \geq 2. \quad (7.38)$$

### 7.3 O Propagador, a Forma de Floquet e a Freqüência Secular

Vamos agora retornar ao nosso Teorema 3.1, página 36, que fornece o propagador  $U(t)$  em termos de  $g$ .

Para a função  $R(t)$  temos

$$R(t) = e^{-i(F_0+G_0)t} \exp \left( -i \int_0^t (f_1(\tau) + g_1(\tau)) d\tau \right), \quad (7.39)$$

com  $f_1(t) := f(t) - F_0$  e  $g_1(t) := g(t) - G_0$ . É claro por essa relação que temos aqui algo muito semelhante ao caso  $F_0 = 0$ , exceto pelo fato que a freqüência secular passa a ser

$$\Omega = F_0 + G_0. \quad (7.40)$$

O Teorema 6.2, página 75, assume então a seguinte versão:

**7.4 Teorema.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $T_\omega$ -periódica do tempo ( $T_\omega := 2\pi/\omega$ ,  $\omega > 0$ ) e que possua uma decomposição de Fourier

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n e^{int}, \quad (7.41)$$

com apenas um número finito de termos, ou seja, o conjunto de inteiros  $\{n \in \mathbb{Z} \mid F_n \neq 0\}$  é um conjunto finito. Além disso, seja também  $F_0 \neq 0$  mas tal que  $2F_0$  não seja um múltiplo inteiro da freqüência  $\omega$ .

Considere-se a seguinte condição sobre  $f$ :  $M(q^2) = 0$  com  $M(Q_1) \neq 0$ , onde

$$Q_1(t) := q(t)^2 \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau. \quad (7.42)$$

Então, para cada  $f$  como acima existe uma constante  $K'' > 0$ , a qual depende dos coeficientes de Fourier  $\{F_n, n \in \mathbb{Z}\}$  e de  $\omega > 0$ , tal que se  $\epsilon$  satisfaz  $|\epsilon| < (K'')^{-1}$  então existem  $\Omega \in \mathbb{R}$  e funções

$T_\omega$ -periódicas  $u_{11}^\pm$  e  $u_{12}^\pm$  tais que o propagador  $U(t)$  de (3.2) pode ser escrito como

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ -\overline{U_{12}(t)} & \overline{U_{11}(t)} \end{pmatrix}, \quad (7.43)$$

com

$$U_{11}(t) = e^{-i\Omega t} u_{11}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{11}^+(t), \quad (7.44)$$

$$U_{12}(t) = e^{-i\Omega t} u_{12}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{12}^+(t). \quad (7.45)$$

As funções  $u_{11}^\pm$  e  $u_{12}^\pm$  possuem decomposições de Fourier absolutamente e uniformemente convergentes

$$u_{11}^\pm(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{11}^\pm(n) e^{in\omega t}, \quad (7.46)$$

e

$$u_{12}^\pm(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{12}^\pm(n) e^{in\omega t}. \quad (7.47)$$

Além disso, sob as mesmas hipóteses,  $\Omega$  e os coeficientes de Fourier  $\mathcal{U}_{11}^\pm(n)$  e  $\mathcal{U}_{12}^\pm(n)$  podem ser expressos em termos de séries de potências em  $\epsilon$  que convergem absolutamente e uniformemente.

□

A demonstração repete a demonstração do Teorema 6.2 e omitimo-la aqui. A condição que  $2F_0$  não seja um múltiplo inteiro da freqüência  $\omega$  não é crucial e pode ser trabalhada, mas para tal temos que considerar soluções da classe I, com  $M(q^2) \neq 0$ .

Das relações (7.37) e (7.38), página 112, temos que

$$\begin{aligned} \Omega &= F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n G_0^{(n)} \\ &= F_0 + \lambda \left( \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}} \frac{|Q_{a_1}^{(2)}|}{a_1 \omega + 2F_0} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n \left( \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{-a_1-b_1}^{(2)} E_{a_1}^{(p)} E_{b_1}^{(n-p)}}{(a_1 + b_1)\omega - 2F_0} \right). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Note-se que aqui geralmente o termo de segunda ordem em  $\epsilon$  se faz presente e o efeito de supressão de tunelamento, requer em ordem  $\epsilon^2$  a condição

$$F_0 + \lambda \left( \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}} \frac{|Q_{a_1}^{(2)}|}{a_1 \omega + 2F_0} \right) = 0, \quad (7.49)$$

que não é independente de  $\epsilon$ .

Notemos também que o limite  $F_0 \rightarrow 0$  de  $\Omega$  dado em (7.48) nada tem a ver com o valor de  $\Omega$  calculado sob a condição que  $F_0 = 0$ . Isso é assim pois em geral teremos  $Q_0^{(2)} \neq 0$  em  $F_0 = 0$  mas geralmente  $Q_0^{(2)} = 0$  para  $F_0 \neq 0$ .

# Capítulo 8

## Conclusões

O trabalho aqui apresentado é basicamente uma exposição reorganizada e por vezes estendida das referências [1] e [2] mas contém também material novo, a saber, o Capítulo 7, página 105, assim como as Seções 6.6, 6.7 e 6.8, às páginas 95, 97 e 99, respectivamente.

Aqui estudamos a solução da equação de Schrödinger de uma classe de sistemas quânticos de dois níveis, compostos por dois auto-estados de um Hamiltoniano livre  $H_0$ , com autovalores  $\pm\epsilon$ , submetidos a uma interação externa de um certo tipo dependente do tempo.

Apresentamos o propagador do sistema em termos de soluções particulares de uma equação de Riccati generalizada e, para o caso em que a interação externa é uma função quase-periódica do tempo, criamos um procedimento original de obtenção de soluções particulares perturbativas dessa equação de Riccati generalizada livres dos chamados “termos seculares”.

Tal fato representa um avanço em relação à teoria de perturbação padrão da equação de Schrödinger, baseada na série de Dyson, que vem usualmente acompanhada por termos seculares que normalmente impedem a análise da convergência.

No caso em que a interação externa é uma função periódica do tempo pudemos expressar o propagador em sua forma de Floquet e pudemos, na situação em que  $|\epsilon|$  é pequeno em relação à magnitude da interação externa, demonstrar rigorosamente a convergência das séries envolvidas. Particularmente importante foi a obtenção da série perturbativa em  $\epsilon$  para a chamada “freqüência secular”, da qual certas conclusões de interesse físico puderam ser inferidas.

Este trabalho representa uma das primeiras análises matematicamente rigorosas e completas de expansões perturbativas em  $\epsilon$  para os sistemas aqui tratados.

# **Apêndices**

# Apêndice A

## A Função de Onda, a Equação de Hill e a Equação de Riccati Generalizada

Pretendemos neste apêndice apresentar uma demonstração do Teorema 3.1, à página 36, alternativa àquela apresentada na Seção 3.1, página 38. Na demonstração abaixo ficará mais claro o papel da solução geral da equação de Riccati generalizada (3.1), página 37.

Seja  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix}$ , com  $\phi_{\pm} \in C^2(\mathbb{R})$ , uma solução da equação de Schrödinger (1.4):

$$i\Phi'(t) = (\epsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3)\Phi(t), \quad (\text{A.1})$$

para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , com condição inicial  $\begin{pmatrix} \phi_+(0) \\ \phi_-(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ .

Tomando a derivada temporal de ambos os lados de (A.1) temos

$$\begin{aligned} i\Phi''(t) &= f'(t)\sigma_3\Phi(t) - i(\epsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3)^2\Phi(t) \\ &= f'(t)\sigma_3\Phi(t) - i[(\epsilon^2 + f(t)^2)\mathbb{I} + \epsilon f(t)(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]\Phi(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Como as matrizes de Pauli anti-comutam,  $\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 0$ , temos

$$i\Phi''(t) = (f'(t)\sigma_3 - i(\epsilon^2 + f(t)^2)\mathbb{I})\Phi(t), \quad (\text{A.3})$$

que é uma equação diagonal para  $\Phi(t)$ . Para as componentes de  $\Phi$ , (A.3) significa

$$\phi''_+(t) + (+if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2) \phi_+(t) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\phi''_-(t) + (-if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2) \phi_-(t) = 0. \quad (\text{A.5})$$

As soluções de (A.1) podem ser recuperadas das soluções das equações diferenciais (A.4) e (A.5) com condições iniciais  $(\phi_+(0), \phi'_+(0))$  e  $(\phi_-(0), \phi'_-(0))$ , respectivamente, impondo-se

$$i\Phi'(0) = (\epsilon\sigma_1 + f(0)\sigma_3)\Phi(0), \quad (\text{A.6})$$

como uma restrição aos dados iniciais, ou seja, impondo-se

$$i\phi'_+(0) = f(0)\phi_+(0) + \epsilon\phi_-(0), \quad (\text{A.7})$$

$$i\phi'_-(0) = -f(0)\phi_-(0) + \epsilon\phi_+(0). \quad (\text{A.8})$$

Dado que (A.5) é obtida de (A.4) pela troca  $f \rightarrow -f$ , estudaremos

$$\phi''(t) + (if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2) \phi(t) = 0, \quad (\text{A.9})$$

com dados iniciais  $(\phi(0), \phi'(0))$ .

De modo a motivar melhor o Ansatz que usaremos, consideremos em primeiro lugar um modo particular de resolver (A.9) para o caso  $\epsilon \equiv 0$ .

## A.1 O Caso $\epsilon = 0$

Nesse caso (A.9) reduz-se a

$$\phi''(t) + (if'(t) + f(t)^2) \phi(t) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Um Ansatz natural é dado por soluções da forma

$$\phi(t) = \phi_0 \exp \left( -i \int_0^t (G(\tau) + f(\tau)) d\tau \right),$$

onde  $\phi_0$  é uma constante arbitrária. Isso conduz à seguinte equação para  $G$ :

$$G' - iG^2 - 2ifG = 0. \quad (\text{A.11})$$

Essa é uma equação do tipo de Bernoulli e tem-se para ela a seguinte solução óbvia:  $g \equiv 0$ . Outra solução pode ser encontrada definindo-se  $v = 1/G$ , que, face à (A.11), nos conduz à seguinte equação:

$$v' + 2ifv + i = 0, \quad (\text{A.12})$$

cuja solução geral é

$$v(t) = \frac{1}{p_0(t)} \left( a_0 - i \int_0^t p_0(\tau) d\tau \right), \quad (\text{A.13})$$

onde  $a_0$  é uma constante arbitrária e

$$p_0(t) := \exp \left( 2i \int_0^t f(\tau) d\tau \right). \quad (\text{A.14})$$

Isto nos leva à seguinte expressão geral para a solução de (A.11):

$$G(t) = \frac{p_0(t)}{a_0 - i \int_0^t p_0(\tau) d\tau}. \quad (\text{A.15})$$

Como  $G \equiv 0$  é também solução de (A.11), permitimos formalmente  $a_0 \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ .

Logo, a solução geral de (A.10) é

$$\phi(t) = \phi_0 \exp \left( -i \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \exp \left( -i \int_0^t \frac{p_0(\tau)}{a_0 - i \int_0^\tau p_0(\tau') d\tau'} d\tau \right), \quad (\text{A.16})$$

para constantes arbitrárias  $\phi_0$  e  $a_0$ . Tem-se formalmente

$$\frac{p_0(t)}{a_0 - i \int_0^t p_0(\tau) d\tau} = i \left( \ln \left( a_0 - i \int_0^t p_0(\tau) d\tau \right) \right)'$$

e assim obtemos, finalmente, a solução geral de (A.10):

$$\phi(t) = \exp \left( -i \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \left[ \phi_1 + \phi_2 \int_0^t p_0(\tau) d\tau \right], \quad (\text{A.17})$$

com  $\phi_1 = \phi_0 a_0^2$  e  $\phi_2 = -i\phi_0 a_0$ , ou em termos dos dados iniciais,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi(0), \\ (\text{A.18}) \end{aligned}$$

$$\phi_2 = if(0)\phi(0) + \phi'(0).$$

É fácil confirmar por verificação explícita que (A.17) é de fato solução geral de (A.10).

Após impormos (A.7) e (A.8) (com  $\epsilon = 0$ ) obtemos, como esperado, as soluções.

$$\phi_+(t) = \phi_+(0) \exp \left( -i \int_0^t f(\tau) d\tau \right), \quad (\text{A.19})$$

$$\phi_-(t) = \phi_-(0) \exp \left( +i \int_0^t f(\tau) d\tau \right). \quad (\text{A.20})$$

## A.2 O Caso $\epsilon \neq 0$

Para  $\epsilon \neq 0$  seguiremos passos análogos aos do caso anterior, mas a situação aqui é mais complicada.

Para resolver (A.9) começaremos com o mesmo tipo de Ansatz, nomeadamente,

$$\phi(t) = \phi_0 \exp \left( -i \int_0^t (G(\tau) + f(\tau)) d\tau \right).$$

Isso leva à equação (3.1), página 37, para  $G$ .

A equação (3.1) é uma equação diferencial ordinária do tipo de Riccati generalizada. De acordo com a teoria das equações de Riccati generalizadas (vide Seção 2.1, página 25), dada uma solução particular  $g$  de (3.1), a solução geral pode ser escrita na forma  $G = g + u$ , onde  $u$  satisfaz a equação de Bernoulli

$$u' - 2i(f + g)u - iu^2 = 0. \quad (\text{A.21})$$

Esta equação, por sua vez, pode ser transformada em uma equação linear definindo-se  $v := 1/u$ , o que dá para  $v$

$$v' + 2i(f + g)v + i = 0. \quad (\text{A.22})$$

A solução geral de (A.22) é

$$v(t) = \frac{1}{p(t)} \left( a_0 - i \int_0^t p(\tau) d\tau \right), \quad (\text{A.23})$$

onde  $a_0$  é uma constante arbitrária e

$$p(t) := \exp \left( 2i \int_0^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \right). \quad (\text{A.24})$$

Assim, a solução geral de (3.1) é

$$G(t) = g(t) + \frac{p(t)}{a_0 - i \int_0^t p(\tau) d\tau}. \quad (\text{A.25})$$

Como  $u \equiv 0$  é, em princípio, também solução de (A.21), permitimos formalmente  $a_0 \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ .

Para (A.9) obtemos, em completa analogia com o caso  $\epsilon = 0$  a solução geral

$$\phi(t) = \exp \left( -i \int_0^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \right) \left[ \phi_1 + \phi_2 \int_0^t p(\tau) d\tau \right], \quad (\text{A.26})$$

com  $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}$ , constantes arbitrárias. Em termos dos dados iniciais é fácil conferir que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi(0), \\ \phi_2 &= i(f(0) + g(0))\phi(0) + \phi'(0). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

A expressão (A.26) indica a solução para  $\phi_+$ . A solução para  $\phi_-$  pode ser obtida, como já dissemos, pela troca  $f \rightarrow -f$ . Como  $g$  depende de  $f$ , devemos em primeiro lugar descobrir o que ocorre com  $g$  quando procedemos a uma troca de sinal em  $f$ . A equação de Riccati generalizada (3.1) indica que se  $g$  é solução para  $f$  então  $-\bar{g}$  é solução para  $-f$ . Logo, usando as restrições (A.7)-(A.8), obtemos finalmente as equações (3.2) e (3.3) que expressam  $\phi_{\pm}$  em termos de  $g$  e dos dados iniciais.

Fazemos aqui notar que toda a dependência em  $\epsilon$  em (A.21) está oculta na função  $g$ . Para  $\epsilon = 0$  a equação (3.1) reduz-se a (A.11). Comparando (A.21) com (A.11), (A.14) com (A.24) e (A.15) com (A.25) concluímos que devemos ter  $g \equiv 0$  para  $\epsilon = 0$ .

No caso  $f(t) = F_0$ , constante, a solução  $g = -F_0 + \text{sign}(F_0)\sqrt{F_0^2 + \epsilon^2}$  para  $F_0 \neq 0$  satisfaz essa condição. Para  $F_0 = 0$  tem-se  $g = \pm\epsilon$ .

# Apêndice B

## A Quase-Periodicidade de $q(t)$

Por completeza e por razões pedagógicas, apresentaremos aqui uma demonstração formal que a função  $q$  é quase-periódica para  $f$  quase-periódica.

É claro que  $\exp(if_1(t))$  é uma função “almost”-periódica pois  $f_1$  (definida em (5.5), página 58) é quase-periódica e o conjunto  $AP(\mathbb{R})$  é uma subálgebra fechada de  $L^\infty(\mathbb{R})$  (vide [24]).

Seja  $P_n$  o polinômio de Taylor de grau  $n$  da função exponencial:  $P_n(x) := \sum_{a=0}^n \frac{x^a}{a!}$ . Sabemos que

$$|\exp(x) - P_n(x)| \leq \left(1 - \frac{|x|}{n+2}\right)^{-1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (\text{B.1})$$

para  $n+2 > |x|$ ,  $x \in \mathbb{C}$ . Seja  $\mathcal{F}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dada por

$$\mathcal{F}_n(t) := -i \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B, \underline{n} \neq 0 \\ |\underline{n}|_\infty \leq n}} \frac{F_{\underline{n}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f} (e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f t} - 1), \quad (\text{B.2})$$

com  $|\underline{n}|_\infty := \max\{|n_1|, \dots, |n_B|\}$ , a norma  $l^\infty$  em  $\mathbb{Z}^B$ , e defina

$$\sigma_n(t) \equiv \sigma_n[f_1](t) := \frac{\mathcal{F}_1(t) + \cdots + \mathcal{F}_n(t)}{n}. \quad (\text{B.3})$$

Pelas hipóteses,  $\sigma_n$  converge a  $f_1$  uniformemente em  $\mathbb{R}$  (veja [24]). Sabemos também que  $|\mathcal{F}_n| \leq D$ , uniformemente em  $n$  e  $t$ , onde  $D$  é o lado esquerdo de (5.4), página 58. Portanto  $|\sigma_n(t)| \leq D$  uniformemente em  $n$  e  $t$ . Assim, para  $n$  grande o suficiente,

$$\begin{aligned} |\exp(if_1(t)) - P_n(i\sigma_n(t))| &\leq |\exp(if_1(t)) - \exp(i\sigma_n(t))| + |\exp(i\sigma_n(t)) - P_n(i\sigma_n(t))| \\ &\leq |\exp(if_1(t)) - \exp(i\sigma_n(t))| + \left(1 - \frac{|\sigma_n(t)|}{n+2}\right)^{-1} \frac{|\sigma_n(t)|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Do fato que  $|\sigma_n(t)|$  é uniformemente limitada em  $n$  e  $t$  e pela continuidade uniforme da função exponencial em compactos, concluímos que  $|\exp(if_1(t)) - P_n(i\sigma_n(t))|$  pode ser feito menor que qualquer  $\epsilon > 0$  prescrito, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , sendo para tal suficiente escolher  $n$  grande o suficiente.

Os coeficientes de Fourier  $W(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , da função “almost”-periódica  $\exp(if_1(t))$  são dadas por (vide (2.28) à página 34 ou vide [24])

$$W(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \exp(if_1(\tau)) e^{-i\xi\tau} d\tau. \quad (\text{B.4})$$

De acordo com o que observamos acima, temos

$$|W(\xi)| \leq \epsilon + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T P_n(i\sigma_n(\tau)) e^{-i\xi\tau} d\tau \right|, \quad (\text{B.5})$$

para qualquer  $\epsilon > 0$ , para  $n$  grande o suficiente. Agora, para cada  $n$  fixado,  $\int_{-T}^T P_n(i\sigma_n(\tau)) e^{-i\xi\tau} d\tau$  é limitada em  $T$  se  $\xi$  não for da forma  $\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f$ , com  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^B$ .

Logo, para um  $\xi \in \mathbb{R}$  que não seja da forma  $\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f$ , com  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^B$ , teremos  $W(\xi) = 0$ . Isso completa a prova que  $\exp(if_1(t))$  (e portanto  $q(t)$ ) é quase-periódica com  $\beta(\exp(if_1(t))) = \beta(f_1) = \beta(f)$ .

# Apêndice C

## A Relação entre $q$ e $f$

Como  $f$  é real e quase-periódica escrevemos

$$f(t) = F_0 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^B \\ n \neq 0}} F_n e^{in \cdot \omega_f t}, \quad (\text{C.1})$$

com  $F_0 = M(f) \in \mathbb{R}$  e  $\overline{F_n} = F_{-n}$ .

Para simplificar nossa análise consideraremos aqui o caso onde a soma acima é uma soma finita, uma situação ademais próxima à realidade física. Notamos, todavia, que essa restrição é apenas simplificadora e não é essencial, podendo ser eliminada com mais trabalho.

Por conveniência, escrevemos (C.1) na forma

$$f(t) = F_0 + \sum_{a=1}^{2J} f_a e^{in_a \cdot \omega_f t}, \quad (\text{C.2})$$

com a convenção  $n_a = -n_{2J-a+1} \neq 0$ ,  $1 \leq a \leq J$ , com  $f_a \equiv F_{n_a}$  e onde  $J \geq 1$ . Claramente  $\overline{f_a} = f_{2J-a+1}$ ,  $1 \leq a \leq J$ .

Obtemos

$$q(t) = e^{i\gamma_f} e^{iF_0 t} \prod_{a=1}^{2J} \exp \left( \frac{f_a}{n_a \cdot \omega_f} e^{in_a \cdot \omega_f t} \right), \quad (\text{C.3})$$

com

$$\gamma_f := i \sum_{a=1}^{2J} \frac{f_a}{n_a \cdot \omega_f}. \quad (\text{C.4})$$

Vê-se facilmente que  $\gamma_f \in \mathbb{R}$ .

## Apêndice C

Expandindo-se as funções exponenciais dentro do produto teremos

$$q(t) = e^{i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a} \right] \right\} \exp \left( i \left( F_0 + \omega_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b \right) t \right). \quad (\text{C.5})$$

A função  $q^2$  é obtida substituindo-se  $f \rightarrow 2f$ , o que dá

$$q(t)^2 = e^{i2\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a} \right] \right\} \exp \left( i \left( 2F_0 + \omega_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b \right) t \right). \quad (\text{C.6})$$

Assim,

$$\begin{aligned} M(q^2) &= e^{i2\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \prod_{a=1}^{2J} \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a}. \\ 2F_0 + \omega_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Dependendo dos valores de  $F_0$  e de  $n_a \cdot \omega_f$ ,  $1 \leq a \leq 2J$ , pode ser impossível encontrar soluções de

$$2F_0 + \omega_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b = 0 \quad (\text{C.8})$$

com  $p_1, \dots, p_{2J} \geq 0$ . Se isso ocorrer teremos  $M(q^2) = 0$ .

Note-se que (C.8) sempre tem soluções no caso  $F_0 = 0$  pois lá teremos

$$\omega_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b = \omega_f \cdot \sum_{b=1}^J (p_b - p_{2J-b+1}) n_b \quad (\text{C.9})$$

e isso pode ser feito igual a zero com  $p_b = p_{2J-b+1}$  para todo  $b$  com  $1 \leq b \leq J$ .

De (C.5) concluímos que  $q$  tem a decomposição de Fourier

$$q(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{m}} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}$$

com  $\underline{\omega}$  definida em (1.45), página 23, e com

$$Q_{\underline{m}} = e^{i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(\underline{P}, \underline{m}) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{C.10})$$

onde

$$\underline{P} \equiv \underline{P}(p_1, \dots, p_{2J}, n_1, \dots, n_{2J}) := \begin{cases} \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b \in \mathbb{Z}^B, & \text{se } F_0 = 0, \\ \left( \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b, 1 \right) \in \mathbb{Z}^{B+1}, & \text{se } F_0 \neq 0. \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

e onde  $\delta(\underline{P}, \underline{m})$  é o delta de Krönecker:

$$\delta(\underline{P}, \underline{m}) := \begin{cases} 1, & \text{se } \underline{P} = \underline{m}, \\ 0, & \text{de outra forma.} \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

A presença do fator  $\delta(\underline{P}, \underline{m})$  lembra-nos que  $Q_{\underline{m}}$  é trivialmente zero se  $\underline{P} = \underline{m}$  não tiver soluções para  $p_1, \dots, p_{2J} \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $Q_{\underline{m}}$  é *não-trivial* se  $\underline{P} = \underline{m}$  tem soluções para  $p_b$ 's em  $\mathbb{N}$ .

Dado que os coeficientes de Fourier  $Q_{\underline{m}}^{(2)}$  de  $q^2$  podem ser obtidos daqueles de  $q$  com a substituição  $f \rightarrow 2f$  temos<sup>1</sup>

$$Q_{\underline{m}}^{(2)} = e^{i2\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(\underline{P}^{(2)}, \underline{m}) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{C.13})$$

onde

$$\underline{P}^{(2)} \equiv \underline{P}^{(2)}(p_1, \dots, p_{2J}, n_1, \dots, n_{2J}) := \begin{cases} \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b \in \mathbb{Z}^B, & \text{se } F_0 = 0, \\ \left( \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b, 2 \right) \in \mathbb{Z}^{B+1}, & \text{se } F_0 \neq 0. \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Notemos que  $\underline{P}^{(2)}$  difere de  $\underline{P}$  apenas no caso  $F_0 \neq 0$ , pois a última componente de  $\underline{P}$  é 1, enquanto que a de  $\underline{P}^{(2)}$  é 2.

Vamos agora estudar a condição  $M(q^2) = Q_{\underline{0}}^{(2)} = 0$  no caso  $F_0 \neq 0$ . Temos de (C.13) que

$$M(q^2) = e^{i2\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(\underline{P}^{(2)}, \underline{0}) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a} \right] \quad (\text{C.15})$$

Note-se, porém que, pela definição de  $\underline{P}$  a condição  $\underline{P} = \underline{0}$  nunca pode ser satisfeita para  $F_0 \neq 0$ , pois nesse caso a última componente de  $\underline{P}^{(2)}$  é 2. Assim, se  $F_0 \neq 0$  e se (C.8) não tem soluções teremos que  $M(q^2) = 0$ . Para tais casos a condição I dos Teoremas 4.1 e 6.2 não é satisfeita e temos que nos fixar na condição II.

Notemos também que no caso de  $f$  periódica, onde  $B = 1$ , a condição (C.8) equivale a

$$2F_0 + \omega \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b = 0. \quad (\text{C.16})$$

<sup>1</sup>Aqui, com as expressões (C.13) e (C.14), corrigimos um pequeno erro de [1], onde, na expressão equivalente a (C.13) colocamos  $\underline{P}$  em lugar de  $\underline{P}^{(2)}$ .

Assim, no caso periódico podemos afirmar que se  $2F_0$  não é um múltiplo inteiro de  $\omega$  então  $M(q^2) = 0$ .

É bastante claro também das expressões (C.10) e (C.13) que, no caso  $F_0 \neq 0$ , se escrevermos  $\underline{m} = (\underline{m}, m_A)$ , então  $Q_{\underline{m}} = 0$  sempre que  $m_A \neq 1$  e  $Q_{\underline{m}}^{(2)} = 0$  sempre que  $m_A \neq 2$ , ou seja,

$$Q_{\underline{m}} = Q_{\underline{m}} \delta_{m_A, 1}, \quad (\text{C.17})$$

$$Q_{\underline{m}}^{(2)} = Q_{\underline{m}}^{(2)} \delta_{m_A, 2}, \quad (\text{C.18})$$

onde  $\delta$  é o delta de Krönecker usual e onde

$$Q_{\underline{m}} := e^{i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(\underline{P}, \underline{m}) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{C.19})$$

e

$$Q_{\underline{m}}^{(2)} := e^{2i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(\underline{P}, \underline{m}) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \cdot \omega_f} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{C.20})$$

com

$$\underline{P} := \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b \in \mathbb{Z}^B. \quad (\text{C.21})$$

Essas observações resumidas em (C.17) e (C.18) serão importantes no Capítulo 7, página 105.

## Apêndice D

### A Função $\mathcal{Q}_1$ e a Condição $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$

Aqui iremos estudar com um pouco mais de detalhe a função  $\mathcal{Q}_1$ , definida em (4.6), página 43, e a condição  $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$  importante para a condição que chamamos de condição II nos Teoremas 4.1 e 6.2, às páginas 42 e 75, respectivamente.

Vamos estar sempre assumindo que  $M(q^2) = Q_{\underline{0}}^{(2)} = 0$ , pois somente nesse caso  $\mathcal{Q}_1$  é quase-periódica. Temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_1(t) &= q(t)^2 \int_0^t q(d\tau)^{-2} d\tau \\
 &= q(t)^2 \int_0^t \left( \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} \overline{Q_{\underline{m}}^{(2)}} e^{-i\underline{m} \cdot \underline{\omega}\tau} \right) d\tau \\
 &= q(t)^2 \left( i \sum_{\substack{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{m} \neq \underline{0}}} \frac{\overline{Q_{\underline{m}}^{(2)}}}{\underline{m} \cdot \underline{\omega}} e^{-i\underline{m} \cdot \underline{\omega}t} - i \sum_{\substack{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{m} \neq \underline{0}}} \frac{\overline{Q_{\underline{m}}^{(2)}}}{\underline{m} \cdot \underline{\omega}} \right) \\
 &= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} i \left[ \left( \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}} Q_{\underline{m}+\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right) - Q_{\underline{m}}^{(2)} \left( \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right) \right] e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega}t}, \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

expressão esta que fornece a decomposição de Fourier de  $\mathcal{Q}_1$ . Daqui vê-se também claramente que

$$M(\mathcal{Q}_1) = i \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|^2}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}}. \tag{D.2}$$

No caso de  $f$  periódica com  $F_0 = 0$ , segue facilmente de (D.2) que

$$M(Q_1) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Q_n^{(2)}|^2 - |Q_{-n}^{(2)}|^2}{n\omega}. \quad (\text{D.3})$$

Na Seção 6.5.1, página 92, mostramos a partir desta última expressão que  $M(Q_1) = 0$  caso  $f$  seja, por exemplo, da forma  $f(t) = \cos(\omega t)$ . Na Seção 6.5.2, página 94, mostramos um exemplo onde  $M(Q_1) \neq 0$ .

Retornemos agora a (D.2). Usando (C.17) e (C.18), podemos reescrever-la como

$$M(Q_1) = i \sum_{\substack{(\underline{n}, \underline{n}_A) \in \mathbb{Z}^A \\ (\underline{n}, \underline{n}_A) \neq 0}} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|^2 \delta_{\underline{n}_A, 2}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}}, \quad (\text{D.4})$$

ou seja,

$$M(Q_1) = i \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|^2}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f + 2F_0}. \quad (\text{D.5})$$

No caso em que  $f$  é periódica com  $F_0 \neq 0$  temos simplesmente

$$M(Q_1) = i \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|^2}{n\omega + 2F_0}. \quad (\text{D.6})$$

Essas duas últimas expressões dizem-nos que a condição  $M(Q_1) \neq 0$  deve ser geralmente satisfeita se  $F_0 \neq 0$ .

## Apêndice E

# O Decaimento dos Coeficientes de Fourier de $q$ e de $q^2$

Após as observações do Apêndice C, página 126, estamos agora preparados para demonstrar a desigualdade (5.29), página 62, e a Proposição 6.1, página 74. Claramente temos que nos concentrar nos  $Q_{\underline{m}}$ 's não-triviais. Para os mesmos os vetores  $\underline{m}$  ou são da forma  $\underline{m} = (\underline{m}, 1) \in \mathbb{Z}^{B+1}$  para  $F_0 \neq 0$  ou da forma  $\underline{m} = \underline{m} \in \mathbb{Z}^B$  para  $F_0 = 0$ , onde  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^B$  satisfaz

$$\underline{m} = \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b \quad (\text{E.1})$$

para algum  $p_1, \dots, p_{2J} \in \mathbb{N}$ .

Denotemos por  $m^k$  (respectivamente, por  $n_b^k$ ) a  $k$ -ésima componente de  $\underline{m}$  (respectivamente, de  $\underline{n}_b$ ) com  $1 \leq k \leq B$ . A condição (E.1) diz-nos que

$$m^k = \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b^k \quad (\text{E.2})$$

com  $1 \leq k \leq B$ . Assim,

$$|m^k| \leq \left( \max_{1 \leq b \leq 2J} p_b \right) \sum_{b=1}^{2J} |n_b^k|$$

e, após somarmos sob todos os  $k$ 's, obtemos

$$\left( \max_{1 \leq b \leq 2J} p_b \right) \geq \mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|, \quad (\text{E.3})$$

onde  $|\underline{m}| = \|\underline{m}\|_1$  é a norma  $l_1$  de  $\underline{m}$  e onde

$$\mathcal{N} := \sum_{b=1}^{2J} |\underline{n}_b|. \quad (\text{E.4})$$

Note-se que como os  $\underline{n}_b$ 's são fixados pela escolha de  $f$ ,  $\mathcal{N}$  é não-nulo e não será modificado.

Vamos retornar a (C.10). Aquela relação diz-nos que para os  $Q_{\underline{m}}$ 's não-triviais temos

$$\begin{aligned} |Q_{\underline{m}}| &\leq \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2J}=0 \\ \max_{1 \leq b \leq 2J} p_b \geq \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}|}}^{\infty} \frac{\varphi^{p_1+\dots+p_{2J}}}{p_1! \cdots p_{2J}!} \\ &\leq 2J \sum_{p_1, \dots, p_{2J-1}=0}^{\infty} \sum_{p_{2J} \geq \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}|}^{\infty} \frac{\varphi^{p_1+\dots+p_{2J}}}{p_1! \cdots p_{2J}!} \\ &= 2J e^{(2J-1)\varphi} \sum_{n \geq \lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

onde

$$\varphi := \max_{1 \leq a \leq 2J} \left| \frac{f_a}{\underline{n}_a \cdot \omega_f} \right|. \quad (\text{E.6})$$

Concluímos que

$$|Q_{\underline{m}}| \leq (2J e^{(2J-1)\varphi}) \frac{\varphi^{\lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil}}{\lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil!} \left( 1 - \frac{\varphi}{\lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil + 1} \right)^{-1}, \quad (\text{E.7})$$

e

$$|Q_{\underline{m}}^{(2)}| \leq (2J e^{(2J-1)2\varphi}) \frac{(2\varphi)^{\lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil}}{\lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil!} \left( 1 - \frac{2\varphi}{\lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil + 1} \right)^{-1}, \quad (\text{E.8})$$

para  $\lceil \mathcal{N}^{-1}|\underline{m}| \rceil + 1 > \varphi$ . Acima  $\lceil x \rceil$  é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Com isso, e dado que  $|\underline{m}| \leq |\underline{m}| \leq 1 + |\underline{m}|$  para o tipo de vetores  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$  em consideração, a desigualdade (5.29), página 62, segue imediatamente, para uma escolha conveniente de  $Q$  e  $\chi > 0$ .

Note-se que (E.7) implica um decaimento mais forte em  $|\underline{m}|$  para  $Q_{\underline{m}}$  que aquele dado em (5.29). Para o tratamento do caso geral em que  $f$  é quase-periódica é suficiente considerar (5.29). Porém, para o caso em que  $f$  é periódica um pequeno refinamento se faz importante, a saber, aquele expresso pela Proposição 6.1, página 74.

## E.1 O Caso Periódico. Demonstração da Proposição 6.1

No caso periódico com  $F_0 = 0$  temos

$$Q_m = e^{i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(P, m) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{f_a}{n_a \omega} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{E.9})$$

onde

$$P \equiv P(p_1, \dots, p_{2J}, n_1, \dots, n_{2J}) := \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b \in \mathbb{Z}, \quad (\text{E.10})$$

e onde

$$\gamma_f := i \sum_{a=1}^{2J} \frac{f_a}{n_a \omega}. \quad (\text{E.11})$$

É fácil ver que  $\gamma_f \in \mathbb{R}$ . Acima  $\delta(P, m)$  é o delta de Krönecker:

$$\delta(P, m) := \begin{cases} 1, & \text{se } P = m, \\ 0, & \text{de outra forma.} \end{cases} \quad (\text{E.12})$$

Analogamente, temos para os coeficientes de Fourier de  $q^2$

$$Q_m^{(2)} = e^{2i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(P, m) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \omega} \right)^{p_a} \right]. \quad (\text{E.13})$$

Os coeficientes  $Q_m$  e  $Q_m^{(2)}$  podem também ser expressos em termos de funções de Bessel do primeiro tipo e ordem inteira. Vide Seção 6.5, página 91, para alguns exemplos.

No caso periódico com  $F_0 = 0$  as relações (E.7) e (E.8) ficam

$$|Q_m| \leq (2J e^{(2J-1)\varphi}) \frac{\varphi^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{[\mathcal{N}^{-1}|m|]!} \left( 1 - \frac{\varphi}{[\mathcal{N}^{-1}|m|] + 1} \right)^{-1}, \quad (\text{E.14})$$

e

$$|Q_m^{(2)}| \leq (2J e^{(2J-1)2\varphi}) \frac{(2\varphi)^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{[\mathcal{N}^{-1}|m|]!} \left( 1 - \frac{2\varphi}{[\mathcal{N}^{-1}|m|] + 1} \right)^{-1}, \quad (\text{E.15})$$

com  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Demonstração da Proposição 6.1.** Consideremos os coeficientes  $Q_m$ . Devido ao fator dominante  $[\mathcal{N}^{-1}|m|]!$  de (E.14), teremos

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{\ll m \gg^2 \varphi^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{e^{-x|m|} [\mathcal{N}^{-1}|m|]!} = 0.$$

para qualquer constante  $\chi > 0$ . Assim, poderemos escolher uma constante  $M_1 > 0$  dependendo de  $\chi$  tal que

$$\frac{\varphi^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{[\mathcal{N}^{-1}|m|]!} \leq M_1 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Portanto, existe constante positiva  $\mathcal{Q}_1 > 0$  (dependendo de  $\chi$ ) tal que  $|Q_m| \leq \mathcal{Q}_1 \ll m \gg^{-2} e^{-\chi|m|}$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Para  $Q_m^{(2)}$  procedemos da mesma forma e obtemos a cota superior  $|Q_m^{(2)}| \leq \mathcal{Q}_2 \ll m \gg^{-2} e^{-\chi|m|}$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Em (6.2) e (6.3) adotamos  $\mathcal{Q} = \max\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2\}$ . ■

*Comentário.* A demonstração da Proposição 6.1 dada acima mostra que temos também cotas superiores como

$$|Q_m| \leq \mathcal{Q}_k \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^k}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Para os propósitos deste trabalho é suficiente considerar apenas  $k = 2$ .

## Apêndice F

# Cotas Superiores para Convoluçãoes

Aqui demonstraremos o Lema 6.6, página 81. Consideremos para  $\chi > 0$  e  $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{B}(m) \equiv \mathcal{B}(m, \chi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-n|+|n|)}}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2}. \quad (\text{F.1})$$

Em primeiro lugar notemos que  $\mathcal{B}(m) = \mathcal{B}(-m)$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Escolhendo  $B_0$  tal que

$$B_0 \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n|}}{\ll n \gg^4}$$

a afirmativa do lema cai trivialmente satisfeita para  $m = 0$ . Assim, é suficiente considerar o caso em que  $m > 0$ , o que faremos.

Em (F.1), a soma sobre todo  $n \in \mathbb{N}$  pode ser quebrada em três somas:

$$\mathcal{B}(m) = e^{-\chi m} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e^{2\chi n}}{(m-n)^2 n^2} + e^{-\chi m} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} + e^{\chi m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{(m-n)^2 n^2} \quad (\text{F.2})$$

Na primeira soma realizamos a mudança de variáveis  $n \rightarrow -n$  e na terceira soma a mudança  $n \rightarrow n+m$ . O resultado é

$$\mathcal{B}(m) = e^{-\chi m} \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{(m+n)^2 n^2} + \sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} \right) \quad (\text{F.3})$$

Agora estudaremos separadamente cada uma das somas em (F.3). Como para  $n \geq 1$  temos  $m+n \geq \ll m \gg$ , temos então para a primeira soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{(m+n)^2 n^2} \leq \frac{B_1}{\ll m \gg^2}, \quad (\text{F.4})$$

onde  $B_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{n^2}$ .

A segunda soma em (F.3) é um pouco mais complicada. Temos

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} = \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} + \sum_{n=\lfloor m/2 \rfloor+1}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} \quad (\text{F.5})$$

Para a primeira soma no lado direito de (F.5) temos  $\ll m-n \gg \geq m-n \geq m - \lfloor m/2 \rfloor \geq m/2$ .

Para a segunda soma no lado direito de (F.5) temos  $n \geq \lfloor m/2 \rfloor + 1 \geq m/2$ . Logo, para  $m > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} &\leq \left(\frac{2}{m}\right)^2 \left[ \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{\ll n \gg^2} + \sum_{n=\lfloor m/2 \rfloor+1}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2} \right] \\ &\leq 2 \left(\frac{2}{\ll m \gg}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ll n \gg^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Portanto, escolhendo

$$B_0 = 2B_1 + 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ll n \gg^2}, \quad (\text{F.7})$$

o lema cai demonstrado. ■

A demonstração do lema tem a seguinte proposição como corolário, que apresentamos sem mais comentários:

**F.1 Proposição.** Para  $\chi > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , seja

$$\mathcal{B}_k(m) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-n|+|n|)}}{\ll m-n \gg^k \ll n \gg^k}. \quad (\text{F.8})$$

Então, existe constante  $B_{0,k}$ , eventualmente dependente de  $k$ , tal que

$$\mathcal{B}_k(m) \leq B_{0,k} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^k} \quad (\text{F.9})$$

para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . □

## Apêndice G

# Números de Catalan. Cotas Superiores para as Constantes $K_n$

Aqui será apresentada a demonstração do Teorema 6.4, página 80.

Comecemos lembrando que escolhemos  $K_1 = K_2 = \mathcal{C}_1$  para uma certa constante  $\mathcal{C}_1$ , a qual pode ser escolhida maior ou igual a 1. A demonstração do Teorema 6.4 será apresentada em quatro passos.

**Passo 1.** Neste passo mostraremos que a seqüência  $K_n$ , definida em (6.18), página 80, é uma seqüência crescente.

Em primeiro lugar note-se que  $K_3 = \mathcal{C}_2(2K_1K_2 + (K_2)^2) = 3\mathcal{C}_2(K_2)^2$ . Como  $K_1 = K_2 \geq 1$  e  $\mathcal{C}_2 \geq 1$ , temos  $K_1 = K_2 < K_3$ .

Vamos então supor que

$$K_1 = K_2 < K_3 < \cdots < K_n, \quad (\text{G.1})$$

para algum  $n \geq 3$ . Mostraremos que  $K_{n+1} > K_n$ . Temos,

$$\begin{aligned} K_{n+1} - K_n &= \mathcal{C}_2 \left[ \sum_{p=1}^n K_p K_{n-p+1} + \sum_{p=2}^n K_p K_{n-p+2} - \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} - \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1} \right] \\ &= \mathcal{C}_2 \left[ 2K_1 K_n + \sum_{p=2}^n K_p K_{n-p+2} - \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{C}_2 [2K_1 K_n + (K_2 K_n - K_{n-2} K_1) + (K_3 - K_1) K_{n-1} + \cdots + (K_n - K_{n-2}) K_2] \\
&= \mathcal{C}_2 [2K_1 K_n + (K_n - K_{n-2}) K_1 + (K_3 - K_1) K_{n-1} + \cdots + (K_n - K_{n-2}) K_2], \quad (G.2)
\end{aligned}$$

sendo que na última igualdade usamos  $K_1 = K_2$ . Agora, de (G.2) e da hipótese (G.1), concluímos que  $K_{n+1} > K_n$ , provando assim que  $K_n$  é uma seqüência crescente.

**Passo 2.** Aqui mostraremos que  $K_n$ , definida em (6.18) satisfaz

$$K_n \leq 3\mathcal{C}_2 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1} \quad (G.3)$$

para todo  $n \geq 3$ .

Já mostramos acima que  $K_3 = 3\mathcal{C}_2(K_2)^2$ . Assim (G.3) é obedecida para  $n = 3$ .

Vamos agora supor que (G.3) é satisfeita para todo  $K_p$  com  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ , para algum  $n \geq 4$ . Mostraremos que (G.3) é também satisfeita por  $K_n$ . De fato, temos por (6.18), página 6.18, que

$$K_n = \mathcal{C}_2 [K_1 K_{n-1} + K_2 (K_{n-2} + K_{n-1}) + K_3 (K_{n-3} + K_{n-2}) + \cdots + K_{n-1} (K_1 + K_2)]. \quad (G.4)$$

Disso e do fato provado no passo 1 que a seqüência  $K_n$  é crescente, segue que

$$K_n \leq \mathcal{C}_2 [K_1 K_{n-1} + 2(K_2 K_{n-1} + K_3 K_{n-2} + \cdots + K_{n-1} K_2)]. \quad (G.5)$$

Agora, usando o fato óbvio que

$$K_1 K_{n-1} = K_2 K_{n-1} \leq (K_2 K_{n-1} + K_3 K_{n-2} + \cdots + K_{n-1} K_2),$$

obtemos finalmente de (G.5) que

$$K_n \leq 3\mathcal{C}_2 [K_2 K_{n-1} + K_3 K_{n-2} + \cdots + K_{n-1} K_2] = 3\mathcal{C}_2 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1}, \quad (G.6)$$

o que demonstra (G.3).

**Passo 3.** Aqui demonstraremos a seguinte afirmativa. Seja  $L_n$  a seqüência definida de modo que  $L_1 = L_2 = K_1 = K_2 = \mathcal{C}_1$  e que

$$L_n = 3\mathcal{C}_2 \sum_{p=2}^{n-1} L_p L_{n-p+1}. \quad (G.7)$$

Então, temos

$$K_n \leq L_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{G.8})$$

Em primeiro lugar notemos que  $K_3 = 3C_2(K_1)^2 = 3C_2(L_1)^2 = L_3$ . Assim, (G.8) é válida para  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Agora suponha que  $K_p \leq L_p$  para todo  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  para algum  $n \geq 4$ . De (G.3) temos

$$K_n \leq 3C_2 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1} \leq 3C_2 \sum_{p=2}^{n-1} L_p L_{n-p+1} = L_n, \quad (\text{G.9})$$

provando assim (G.8).

**Passo 4.** Considere-se a seqüência  $c_n$  definida da seguinte forma:  $c_1 = c_2 = 1$  e

$$c_n = \sum_{p=2}^{n-1} c_p c_{n-p+1}, \quad (\text{G.10})$$

para  $n \geq 3$ . Os números  $c_n$  assim definidos são chamados de “números de Catalan”, em honra ao matemático belga Eugène C. Catalan (1814-1894)<sup>1</sup>. Os números de Catalan surgem em um sem-número de problemas combinatórios (para notas históricas acompanhadas de demonstrações, vide [27]) e podem ser expressos em forma fechada como

$$c_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}, \quad n \geq 2. \quad (\text{G.11})$$

(vide, por exemplo, [27] ou [23]). Usando a fórmula de Stirling obtemos o seguinte comportamento assintótico para os números de Catalan:

$$c_n \approx \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}, \quad n \text{ grande.} \quad (\text{G.12})$$

É evidente que deve haver uma conexão entre os números de Catalan e a seqüência  $L_n$  definida acima. Duas diferenças entre ambas, todavia, são o fator  $3C_2$  que surge em (G.7) e o fato que  $L_1 = L_2 = C_1$  não é necessariamente igual a 1.

Entretanto, usando a definição dos números de Catalan em (G.10), é fácil demonstrar a seguinte fórmula fechada para os números  $L_n$ :

$$L_n = (C_1)^{n-1} (3C_2)^{n-2} \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}, \quad n \geq 2. \quad (\text{G.13})$$

---

<sup>1</sup>Agradeço ao Prof. Walter F. Wreszinski por sugerir que os números de Catalan poderiam ser importantes para estimativas como as que apresentamos aqui. Como apontou-me o Prof. Wreszinski, os números de Catalan surgem também nas estimativas feitas em [13].

## Apêndice G

Omitiremos a prova aqui. Assim, provamos o seguinte comportamento assintótico:

$$L_n \approx \frac{1}{144C_1C_2^2\sqrt{\pi}} \frac{(12C_1C_2)^n}{n^{3/2}}, \quad n \text{ grande.} \quad (\text{G.14})$$

Da desigualdade  $K_n \leq L_n$ , demonstrada no passo 3, segue que  $K_n \leq K_0(12C_1C_2)^n$  para alguma constante  $K_0 > 0$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O Teorema 6.4 está assim demonstrado. ■

# Referências Bibliográficas

- [1] J. C. A. Barata. "On Formal Quasi-Periodic Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level System with a Hamiltonian Depending Quasi-Periodically on Time". Aceito para publicação em Rev. Math. Phys.
- [2] J. C. A. Barata. "Converging Perturbative Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level System with a Hamiltonian Depending Periodically on Time". Submetido à Commun. Math. Phys.
- [3] W. F. Wreszinski. "Atoms and Oscillators in Quasi-Periodic External Fields". Helv. Phys. Acta **70** (1997) 109-123.
- [4] W. F. Wreszinski and S. Casmeridis. "Models of Two Level Atoms in Quasi-periodic External Fields". J. Stat. Phys. **90**, 1061-1068 (1998).
- [5] H. Jauslin. "Stability and Chaos in Classical and Quantum Hamiltonian Systems" in II Granada Seminar on Computational Physics. Ed. by P. Garrido and J. Marro. World Scientific, Singapore. 1993.
- [6] H. Bohr. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I.". Acta Mathematica **45**, (1924) 29-127. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II.". Acta Mathematica **46**, (1925) 101-214. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III.". Acta Mathematica **47**, (1926) 237-281.
- [7] H. Bohr. Collected Mathematical Works. In Three Volumes. Dansk Matematisk Forening. Copenhagen. (1952).
- [8] P. Bohl. "Über die Darstellung von Funktionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variablen proportionalen Argumenten". Magisterdissertation, Dorpat (1893).

- [9] P. Bohl. "Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie". *Journal de Crelle* **131**, (1906) 268-321.
- [10] E. Esclangon. "Les Fonctions Quasi-Périodiques". *Thèse*, Paris (1904).
- [11] E. Esclangon. "Nouvelles Recherches sur les Fonctions Quasi-Périodiques". *Annales de l'Obser. de Bordeau*, 1919.
- [12] H. Jauslin and J. L. Lebowitz. "Spectral and Stability Aspects of Quantum Chaos". *Chaos* **1**, 114 (1991).
- [13] J. Feldman and E. Trubowitz. "Renormalization in Classical Mechanics and Many Body Quantum Field Theory". *Jornal D'Analyse Mathématique* **58**, 213 (1992).
- [14] Emile Mathieu. "Mémoire sur le Mouvement Vibratoire d'une Membrane de Forme Elliptique". *Journal de Liouville*. **13**, 137. (1868).
- [15] G. W. Hill. "Mean Motion of the Lunar Perigee". *Acta Math.* **8**, 1. (1886).
- [16] G. Floquet. "Sur les Équations Différentielles Linéaires à Coefficients Périodiques". *Ann. de l'École Normale Supérieure*. **12**, 47 (1883).
- [17] I. I. Rabi. "Space Quantization in a Gyrating Magnetic Field". *Phys. Rev.* **31**, 652-654 (1937).
- [18] F. Bloch and A. Siegert. "Magnetic Resonance for Nonrotating Fields". *Phys. Rev.* **57**, 522-527 (1940).
- [19] S. H. Autler and C. H. Townes. "Stark Effect in Rapidly Varying Fields". *Phys. Rev.* **100**, 703-722 (1955).
- [20] W. F. Wreszinski e J. C. A. Barata. Em preparação.
- [21] F Grossman, T Dittrich, P Jung, P Hänggi. "Coherent Destruction of Tunneling", *Phys. Rev. Lett.* **67**, 516-519 (1991).
- [22] Y Kayanuma. "Role of Phase Coherence in the Transition Dynamics of a Periodically Driven Two-level System", *Phys. Rev. A* **50**, 843-845 (1994).

- [23] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik. "Concrete Mathematics - A Foundation for Computer Science". Addison-Wesley Publishing Company. (1994).
- [24] Yitzhak Katznelson. "An Introduction to Harmonic Analysis". Dover Publications. 1978.
- [25] H. Bohr. "Über fastperiodische ebene Bewegungen". Comment. Math. Helv. 4, 51-64 (1932).
- [26] Michael Reed and Barry Simon. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 2. "Fourier Analysis , Self-Adjointness". Academic Press. New York. (1972-1979)
- [27] Heindrich Dörrie. "100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution". Dover Publications, Inc. (1965). Originalmente publicado em alemão com o título "Triumph der Mathematik. Hunderte berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur". Physica-Verlag, Würzburg (1958).
- [28] N. W. McLachlan. "Theory and Applications of Mathieu Functions". Dover Publications, Inc. (1964).
- [29] J. Meixner and F. W. Schäfke. "Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen". Springer Verlag. (1954).
- [30] Harro Heuser. "Gewöhnliche Differentialgleichungen". B. G. Teubner. Stuttgart (1991).
- [31] Harry Hochstadt. "The Functions of Mathematical Physics". Dover Publications, Inc. (1986).
- [32] G. N. Watson. "A Treatise on the Theory of Bessel Functions". Second Edition. Cambridge University Press. (1966).
- [33] Kôsaku Yosida. "Functional Analysis", Sexta Edição. Springer Verlag (1980).

# Universidade de São Paulo

## Instituto de Física

SBI-IFUSP



305M810T3246

### Anexos à Tese

João Carlos Alves Barata

*Anexos à Tese de Livre-Docência submetida ao  
Instituto de Física da Universidade de São Paulo*



São Paulo, abril de 1999

# On Formal Quasi-Periodic Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level System with a Hamiltonian Depending Quasi-Periodically on Time

João C. A. Barata<sup>1</sup>

Instituto de Física

Universidade de São Paulo

Caixa Postal 66 318

05315 970. São Paulo. SP. Brasil

**Abstract:** We consider the Schrödinger equation for a class of two-level atoms in a quasi-periodic external field for large coupling, i.e., for which the energy difference  $2\epsilon$  between the unperturbed levels is sufficiently small. We show that this equation has a solution in terms of a formal power series in  $\epsilon$ , with coefficients which are quasi-periodical functions of the time, in analogy to the Lindstedt-Poincaré series in classical mechanics.

---

<sup>1</sup>Partially supported by CNPq. E-mail: jbarata@fma.if.usp.br

# 1 Introduction and Summary

The problem of existence of quasi-periodic solutions of the Schrödinger equation with quasi-periodic coefficients is a classical problem in analysis, with recent applications to the theory of “quantum chaos” [1] (see also [2] for a review with recent results). In the scalar almost-periodic case, the solution is provided by a theorem of H. Bohr [3] (generalizing previous results by P. Bohl for the quasi-periodic case [4]). We now pass from the scalar case to the simplest non-commutative setting, i.e., the Schrödinger equation for two-level systems (e.g. atoms) in a quasi-periodic (external) field, with Hamiltonian

$$H(t) = \epsilon \sigma_3 - f(t) \sigma_1, \quad (1.1)$$

where  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  and  $\sigma_3$  denote the Pauli matrices, which satisfy the SU(2)-commutation relations  $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$  plus cyclic permutations.

In (1.1),  $f(t)$  is a quasi-periodic function of time  $t$

$$f(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^B} f_{\underline{m}} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega}_f t} \quad (1.2)$$

and  $\epsilon$  is a “small” parameter (half of the energy difference between the unperturbed levels), which characterizes the large coupling domain [5]. Above  $\underline{\omega}_f$  is a vector of frequencies  $\underline{\omega}_f = (\omega_f^1, \dots, \omega_f^B)$  for some  $B \geq 1$ , where we will assume  $\omega_f^j > 0$  for all  $1 \leq j \leq B$ . Moreover,  $\underline{m} \cdot \underline{\omega}_f$  denotes  $m_1 \omega_f^1 + \dots + m_B \omega_f^B$ .

We have chosen the regime where  $\epsilon$  is small because the result which is equivalent [1] to the existence of quasi-periodic solutions in this case – the pure point spectrum of the so-called generalized quasi-energy operator [6] – has not yet been proven in full generality [5].

The analogous problem in classical mechanics has been very nicely sketched in [7] – albeit just as a pedagogical introduction to perturbative renormalization in quantum field theory. The main theorem of [7] – existence of formal quasi-periodic solutions of a class of quasi-periodic Hamiltonian systems as a series in  $\epsilon$  – the Lindstedt-Poincaré series – has a counterpart – for (1.1) – in Theorem 2.2 of the present paper. In classical mechanics there is, however, a method, due to L. H. Eliasson [8], to isolate the divergent contributions to the Lindstedt-Poincaré series (see [7] for a simple but illuminating discussion on these terms) and introduce further renormalization counter-terms ensuring convergence. See [10] for a realization of this idea in a special model and [11] for a review of the models and method. Here we should perhaps remark that the resummation methods mentioned above may not generally lead to converging power expansions in  $\epsilon$ . Situations of this kind have been analysed by L. H. Eliasson in [9] and by G. Benfatto, G. Gentile and V. Mastropietro in [12]. Typically such situations involve series solutions with denominators like  $(\underline{n} \cdot \underline{\omega} + \epsilon^2)^{-1}$ , i.e., with dense lying singularities in the imaginary complex  $\epsilon$  axis that prevent analyticity in any open set containing  $\epsilon = 0$ .

The question now poses itself whether methods similar to those discussed above might yield the existence of a quasi-periodic solution to the Schrödinger equation

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H(t) \psi(t) \quad (1.3)$$

with  $H(t)$  given by (1.1). The natural guide is the (convergent) Dyson perturbation series, which

we describe now. By a rotation of  $\pi/2$  around the 2-axis, we may replace  $H(t)$  by

$$H_1(t) = e^{-i\pi\sigma_2/4} H(t) e^{i\pi\sigma_2/4} = \epsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3 \quad (1.4)$$

and the Schrödinger equation becomes

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = H_1(t)\Phi(t), \quad (1.5)$$

with

$$\Phi(t) := e^{-i\pi\sigma_2/4}\psi(t). \quad (1.6)$$

Defining now

$$\tilde{\Phi}(t) \equiv \exp(i\alpha(t)\sigma_3)\Phi(t), \quad (1.7)$$

where

$$\alpha(t) \equiv \int_0^t d\tau f(\tau) \quad (1.8)$$

the Schrödinger equation (1.5) becomes

$$i\frac{\partial\tilde{\Phi}(t)}{\partial t} = \epsilon\tilde{H}(t)\tilde{\Phi}(t), \quad (1.9)$$

where

$$\tilde{H}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\alpha(t)} \\ e^{-2i\alpha(t)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

The Dyson series solution to (1.10) is

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\epsilon)^n}{n!} \int_0^t d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \tilde{H}(\tau_1) \cdots \tilde{H}(\tau_n) \tilde{\Phi}(0). \quad (1.11)$$

Let, now,  $f$  be such that

$$q(t) := e^{i\alpha(t)} = \exp\left(i \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \quad (1.12)$$

is quasi-periodic (see Appendix B), and write

$$q(t)^2 = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} g_{\underline{n}} e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (1.13)$$

where  $\underline{\omega} \equiv (\omega_1, \dots, \omega_A)$  is a frequency vector satisfying some Diophantine conditions to be stated later on, and assume that (for the purpose of this introduction)

$$g_0 \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

Relation (1.14) is seen to hold explicitly, for instance, if  $f(t) = f(\omega_1 t, \dots, \omega_B t) = \sum_{i=1}^B \cos(\omega_i t)$ .

Then, explicit summation of all orders in (1.11) of the  $\underline{n} = \underline{0}$  term in (1.10), which is, by (1.13) and (1.14) of the form  $g_0\sigma_1$ , we find

$$\tilde{\Phi}(t) = [\cos(tg_0) - i \sin(tg_0)\sigma_1] \tilde{\Phi}(0), \quad (1.15)$$

which is quasi-periodic. This illustrates that non-uniform convergence of a sequence of non-quasi-periodic functions may yield a quasi-periodic function and, in fact, this does occur in the general solution (1.11). Coupled with the fact that the general  $n$ -th term in (1.11) grows as  $t^n$ , it is obvious that (1.11) is grossly unsuitable to show quasi-periodicity of the wave function. We therefore try to subtract (1.15) explicitly from the solution of (1.9) by writing

$$\epsilon \tilde{H}(t) = M_\epsilon + \tilde{H}_1(t), \quad (1.16)$$

where

$$M_\epsilon = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & g_0 \\ \bar{g}_0 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon g_0 \sigma_1. \quad (1.17)$$

under assumption (1.14). In correspondence to (1.16) we set

$$\tilde{\Phi}_1(t) = e^{iM_\epsilon t} \tilde{\Phi}(t). \quad (1.18)$$

The equation for  $\tilde{\Phi}_1$  is

$$i \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(t)}{\partial t} = \tilde{H}_{1,\epsilon}^{(I)}(t) \tilde{\Phi}_1(t), \quad (1.19)$$

where

$$\tilde{H}_{1,\epsilon}^{(I)}(t) \equiv e^{iM_\epsilon t} \tilde{H}_1(t) e^{-iM_\epsilon t}. \quad (1.20)$$

The Dyson series (1.11) for (1.20) has the first order term

$$\begin{aligned} -i\epsilon \int_0^t d\tau \tilde{H}_{1,\epsilon}^{(I)}(\tau) \tilde{\Phi}_1(0) = \\ -i\epsilon \int_0^t d\tau \begin{pmatrix} i \sin(\epsilon g_0 \tau) \cos(\epsilon g_0 \tau) (\overline{\lambda(\tau)} - \lambda(\tau)) & \sin^2(\epsilon g_0 \tau) \overline{\lambda(\tau)} + \cos^2(\epsilon g_0 \tau) \lambda(\tau) \\ \sin^2(\epsilon g_0 \tau) \lambda(\tau) + \cos^2(\epsilon g_0 \tau) \overline{\lambda(\tau)} & i \sin(\epsilon g_0 \tau) \cos(\epsilon g_0 \tau) (\lambda(\tau) - \overline{\lambda(\tau)}) \end{pmatrix} \tilde{\Phi}_1(0), \end{aligned} \quad (1.21)$$

where  $\lambda(t) := q(t)^2 - g_0$ .

Note, however, that, due to the  $\epsilon$ -dependence of  $M_\epsilon$  in (1.17), this Dyson series is not a power series in  $\epsilon$ : there has been a nonlinear in  $\epsilon$ , non-perturbative “renormalization” embodied in (1.20). Looking at the first matrix element in (1.21) (the discussion of the others is similar), we find

$$\begin{aligned} \epsilon \int_0^t \sin(\epsilon g_0 \tau) \cos(\epsilon g_0 \tau) (q(\tau)^{-2} - q(\tau)^2) d\tau &= \frac{i\epsilon}{2} \int_0^t \sin(2\epsilon g_0 \tau) \sum_{\underline{n} \neq 0} (\overline{g_{-\underline{n}}} - g_{\underline{n}}) e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega} \tau} d\tau \\ &= -\frac{i\epsilon}{4} \sum_{\underline{n} \neq 0} (\overline{g_{-\underline{n}}} - g_{\underline{n}}) \left[ \frac{e^{i(\underline{n} \cdot \underline{\omega} + 2\epsilon g_0)t}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega} + 2\epsilon g_0} - \frac{e^{i(\underline{n} \cdot \underline{\omega} - 2\epsilon g_0)t}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega} - 2\epsilon g_0} \right]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

In addition to the small denominators of the form  $\underline{n} \cdot \underline{\omega} \pm 2\epsilon g_0$  as found above, there occurs in (1.21) also small denominators of the form  $\underline{n} \cdot \underline{\omega}$  and it is necessary to require, for instance

$$|\underline{n} \cdot \underline{\omega} \pm 2\epsilon g_0| \geq \gamma_{\underline{n}} = \gamma(1 + |\underline{n}|^2)^{-\alpha}, \quad (1.23)$$

$$|\underline{n} \cdot \underline{\omega}| \geq \gamma'_{\underline{n}} = \gamma'(1 + |\underline{n}|^2)^{-\alpha'} \quad (1.24)$$

in order to ensure convergence in (1.22) with  $|g_{\underline{n}}| \leq c \exp(-d|\underline{n}|)$ , with  $d > 0$ , the exponential decay being a consequence of analyticity of  $f$  in a strip, (1.8) and (1.13). Above,  $|\underline{n}|$  is the  $l^1$  norm of the vector  $\underline{n}$ .

Assume now, for simplicity, that  $A = 2$  in (1.13), and set  $\alpha = \omega_1/\omega_2 \in (0, 1)$ . Suppose, now, that

$$g_0 \neq 0 \quad (1.25)$$

and consider (without loss, because  $\epsilon$  is supposed “small”)  $\epsilon$  such that  $\beta \equiv 2\epsilon g_0 \in (0, 1)$ . It is easy to show using Cassels theorem [13] that, if  $\alpha, \alpha' > 1$  in (1.23)-(1.24), the set of  $(\alpha, \beta)$  in the open unit square such that (1.23)-(1.24) are satisfied for all  $\gamma, \gamma' > 0$  is of full Lebesgue measure. The intersection of this set with the  $\epsilon$ -axis is thus, however, not an open set and, therefore, no convergence may be expected for  $\epsilon$  in any (small) open set around the origin. Hence, any power series in  $\epsilon$  cannot be expected to be analytic, or to converge uniformly in some open set containing the origin. Other strong indications of this fact (not a proof!) will appear later in the context of (pure) power series in  $\epsilon$  (see the heuristic discussion in Section 7).

Our discussion above relied on (1.25) (otherwise  $\epsilon$  does not appear in (1.23)). It is interesting to remark that (1.25) holds whenever  $f_0 = 0$ , (see Appendix C), which was the case left open in [5].

Is it possible to go further and analyze the whole Dyson series for (1.20)? The problem is that higher order terms require further subtractions and we were not able to show that they can be “renormalized” as in (1.20) (with a different  $M_\epsilon$ , of course). It seems that the natural way to obtain a formal (asymptotic) series in  $\epsilon$  with quasi-periodic coefficients is to write an Ansatz for (1.1) in exponential form and then to “renormalize” the exponential in an inductive way. This is the purpose of the present paper.

As we will see in Section 2.1 and in Appendix A, the solutions of the Schrödinger equation (1.5) can be studied in terms of the solutions of a complex and quasi-periodic version of Hill’s equation:

$$\phi''(t) + (\epsilon^2 + i f'(t) + f(t)^2) \phi(t) = 0. \quad (1.26)$$

We attempt to solve this last equation using the Ansatz  $\phi(t) = \exp\left(-i \int_0^t (g(\tau) + f(\tau)) d\tau\right)$ , where  $g$  satisfies a generalized Riccati equation, and we try to find solutions for  $g$  in terms of a (formal) power expansion in  $\epsilon$  like  $g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n c_n(t)$ .

As discussed above, perturbative solutions of quasi-periodically time-dependent systems are usually plagued by small denominators and by the presence of the so-called “secular terms”, i.e. polynomials in  $t$ , that spoil the analysis of convergence of the series and the proofs of quasi-periodicity of the perturbative terms. We discovered a particular way to eliminate completely the secular terms from the perturbative expansion of  $g$  and we were able, under some special assumptions, to show that the coefficients  $c_n(t)$  are all quasi-periodic functions.

We prove explicitly the convergence of our perturbative solution in the somewhat trivial case where  $f(t)$  is a non-zero constant function. Unfortunately, however, no conclusion could be drawn about the convergence of the perturbative expansion for  $g$  in the general case. We conjecture, however, that our expansion is uniformly convergent at least in the situation where  $f(t) - f_0$  is uniformly small.

**Remarks on the notation.** In this paper  $\mathbb{R}_+$  will denote the open interval  $(0, \infty)$ . Given the Fourier representation (1.2) of the quasi-periodic function  $f$ , we will denote by  $\underline{\omega}$  the vector of frequencies defined by

$$\underline{\omega} := \begin{cases} \underline{\omega}_f \in \mathbb{R}^B, & \text{if } f_0 = 0 \\ (\underline{\omega}_f, f_0) \in \mathbb{R}^{B+1}, & \text{if } f_0 \neq 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

Since we are assuming that  $\underline{\omega}_f \in \mathbb{R}_+^B$ , the definition above says that all components of  $\underline{\omega}$  are always non-zero. Moreover, we will denote

$$A := \begin{cases} B, & \text{if } f_0 = 0 \\ B + 1, & \text{if } f_0 \neq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

We will denote vectors in  $\mathbb{Z}^B$  (or  $\mathbb{R}^B$ ) by  $\underline{v}$  and vectors in  $\mathbb{Z}^A$  (or  $\mathbb{R}^A$ ) by  $\underline{v}$ . The symbol  $|\underline{n}|$  will denote the  $l^1(\mathbb{Z}^A)$  norm of a vector  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_A) \in \mathbb{Z}^A$ :  $|\underline{n}| := |n_1| + \dots + |n_A|$ .

We will use the symbol  $\mathbf{1}\mathbf{l}$  for the identity matrix.  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  is the set of all  $n \times n$  matrices with complex entries.

For an almost-periodic (in particular, quasi-periodic) function  $h$  we denote by  $M(h)$  the *mean value* of  $h$ , defined as

$$M(h) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t) dt. \quad (1.29)$$

**Acknowledgements.** I am very indebted to Walter F. Wreszinski for suggesting me to study the system considered here, for many conversations, for encouraging me to write these notes and for contributions to this manuscript.

I am also grateful to H. Jauslin, D. H. U. Marchetti, C. Moreira and T. Spencer for fruitful discussions and suggestions.

## 2 The Main Results

In this section we will state our two main results. The first one describes the solution of the Schrödinger equation (1.5) in terms of a particular solution of a generalized Riccati equation. The reason for considering the Schrödinger equation in the form (1.5) is that, as we will see below and in Appendix A, we will be able to decouple the two components of  $\Phi(t)$  by increasing the order of the equation.

**Theorem 2.1** *Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  and  $\epsilon \in \mathbb{R}$  and let  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$  be a particular solution of the generalized Riccati equation*

$$G' - iG^2 - 2ifG + i\epsilon^2 = 0. \quad (2.1)$$

*Then, the function  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  given by*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix} = U(t)\Phi(0), \quad (2.2)$$

*where*

$$U(t) := \begin{pmatrix} R(t)(1 + ig(0)S(t)) & -i\epsilon R(t)S(t) \\ -i\epsilon \overline{R(t)} \overline{S(t)} & \overline{R(t)} \left(1 - i \frac{g(0)}{\overline{S(t)}}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

*with*

$$R(t) := \exp \left( -i \int_0^t (f(t') + g(t')) dt' \right) \quad (2.4)$$

*and*

$$S(t) := \int_0^t R(t')^{-2} dt' \quad (2.5)$$

*is a solution of the Schrödinger equation (1.5) with initial value  $\Phi(0) = \begin{pmatrix} \phi_+(0) \\ \phi_-(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ . ■*

In Section 2.1 we will present a proof of Theorem 2.1. The proof and the solution will be further discussed in Appendix A.

Theorem 2.1 reduces the problem of solving (1.5) to the not necessarily easier question of finding solutions for (2.1). Somewhat surprisingly, however, some interesting results could be proven about the nature of some particular solutions of (2.1) for the case where  $f$  is a quasi-periodic function subjected to some additional restrictions. These results are described in Theorem 2.2.

**Theorem 2.2** *Let  $f$  be quasi-periodic with*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^B} f_n e^{i\omega_f \cdot nt},$$

and such that the sum above contains only a finite number of terms. Assume that the vector  $\omega$  (defined in (1.27)) satisfies Diophantine conditions, i.e., assume the existence of constants  $\Delta > 0$  and  $\sigma > 0$  such that, for all  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^A$ ,  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ,

$$|\underline{n} \cdot \omega| \geq \Delta^{-1} |\underline{n}|^{-\sigma}.$$

**I.** Assume that  $f$  satisfies the condition  $M(q^2) \neq 0$ . Then, there exists a formal power series

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \epsilon^n,$$

representing a particular solution of the generalized Riccati equation (2.1) such that all coefficients  $c_n$  can be chosen to be quasi-periodic and can be represented as

$$c_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \omega t},$$

where, for the Fourier coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , we have

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{K}_n e^{-\chi_0 |\underline{m}|},$$

where  $\chi_0 > 0$  is a constant and  $\mathcal{K}_n \geq 0$ .

**II.** Assume that  $f$  satisfies the conditions  $M(q^2) = 0$  and  $M(Q_1) \neq 0$ , where

$$Q_1(t) := q(t)^2 \int_0^t q^{-2}(t') dt'.$$

Then, there exists a formal power series

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \epsilon^{2n},$$

representing a particular solution of the generalized Riccati equation (2.1) such that all coefficients  $e_n$  can be chosen to be quasi-periodic and can be represented as

$$e_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \omega t},$$

where, for the Fourier coefficients  $E_{\underline{m}}^{(n)}$ , we have

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{L}_n e^{-\chi_0 |\underline{m}|},$$

where  $\chi_0 > 0$  is a constant and  $\mathcal{L}_n \geq 0$ . ■

Sections 3 and 5 are dedicated to the proof of part I of this theorem and Sections 4 and 6 to the proof of part II. The proof of part I consists in establishing inductively the bound

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{K}_n e^{-(\chi - \delta_n) |\underline{m}|}, \quad (2.6)$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ , with positive  $\mathcal{K}_n$  and  $\chi$  and with an increasing positive sequence  $\delta_n$  converging to some  $\delta_\infty < \chi$ . We set  $\chi_0 := \chi - \delta_\infty$ . Quasi-periodicity of the functions  $c_n$  follows from the bound (2.6). The proof of part II is analogous.

At this point we should stress that the conditions of this last theorem are not sufficient for proving the convergence of the power series expansions in  $\epsilon$  for  $g$ . Uniform convergence of those power series in  $\epsilon$  would imply quasi-periodicity of  $g$ . Unfortunately, as discussed at the end of Section 5, the behavior for large  $n$  of the constants  $\mathcal{K}_n$  and  $\mathcal{L}_n$  is apparently too bad to guarantee absolute convergence of the formal power series above. This bad behaviour may be explained if the Fourier coefficients of  $g$  are singular on a dense set of values of  $\epsilon$ . This is what happens if they are, for instance, of the form  $(\underline{m} \cdot \underline{\omega} + \epsilon)^{-1}$ , since the set  $\{\underline{m} \cdot \underline{\omega}, \underline{m} \in \mathbb{Z}^B\}$  is dense on  $\mathbb{R}$ , under the assumptions on the frequencies. In such cases there could be no open set of values of  $\epsilon$  where  $g$  is analytic. In Section 7 this and other problems related to our expansions are further discussed.

The hypothesis that the Fourier series of  $f$  contains only a finite number of terms is not really crucial and may be eliminated with more work. Actually this hypothesis is used only in Appendices C and D. This hypothesis is anyway closer to the physical reality, since  $f$  represents an external interaction coupled to the system.

## 2.1 Proof of Theorem 2.1

Let  $\Phi(t) = V(t)\Phi(0)$  be the solution of the Schrödinger equation (1.5) with initial value  $\Phi(0)$ , where  $V : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ . Then  $V$  is the solution of

$$iV'(t) = H_1(t)V(t) \quad (2.7)$$

with  $V(0) = \mathbf{1l}$ . Hence,  $V$  also satisfies  $iV'(0) = H_1(0)$  and

$$iV''(t) = D(t)V(t), \quad (2.8)$$

where  $D(t) := H'_1(t) - iH_1(t)^2$ . An explicit computation shows that  $D(t)$  is the diagonal matrix

$$D(t) = \begin{pmatrix} f'(t) - i(\epsilon^2 + f(t)^2) & 0 \\ 0 & -f'(t) - i(\epsilon^2 + f(t)^2) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

We will show that the matrix  $U(t)$  defined in (2.3) satisfies a)  $U(0) = \mathbf{1l}$ , b)  $iU'(0) = H_1(0)$  and c)  $iU''(t) = D(t)U(t)$ . By the uniqueness of solutions of systems of linear second order differential equations with continuous coefficients we conclude that  $U(t) = V(t)$ .

The proof of a) follows from the facts that  $R(0) = 1$  and  $S(0) = 0$ . To show b) we note that, since  $R'(t) = -i(f(t) + g(t))R(t)$  and  $S'(t) = R(t)^{-2}$ , an explicit computation gives

$$iU'(t) = \begin{pmatrix} f(t) + g(t) & 0 \\ 0 & -\left(f(t) + \overline{g(t)}\right) \end{pmatrix} U(t) + \begin{pmatrix} R(t)^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{R(t)^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g(0) & \epsilon \\ \epsilon & \overline{g(0)} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Since  $R(0) = 1$  and  $U(0) = \mathbb{1}$ , it follows from (2.10) that

$$iU'(0) = \begin{pmatrix} f(0) & \epsilon \\ \epsilon & -f(0) \end{pmatrix} = H_1(0), \quad (2.11)$$

proving b). From (2.10) we have  $iU''(t) = E(t)U(t)$  where

$$E(t) := \begin{pmatrix} f'(t) + g'(t) - i(f(t) + g(t))^2 & 0 \\ 0 & -f'(t) - \overline{g'(t)} - i(f(t) + \overline{g(t)})^2 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Now, under the assumption that  $g$  satisfies (2.1), we easily check that  $E(t) = D(t)$ , completing the proof of Theorem 2.1. ■

The solution (2.3) has not been guessed out of nothing. In Appendix A we present a more constructive proof of Theorem 2.1. There we also discuss some questions related to the solution (2.3), as its relation to the *general* solution of the generalized Riccati equation.

Our starting point in Appendix A will be the fact that, translated back to the components  $\phi_{\pm}(t)$  of the wave function, equation  $iU''(t) = D(t)U(t)$  becomes a complex and quasi-periodic version of Hill's equation:  $\phi_{\pm}''(t) + (\pm if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2)\phi_{\pm}(t) = 0$ .

### 3 The Solution $g$ and its Dependence on $\epsilon$

Now we will start our analysis of the formal particular solution of the generalized Riccati equation (2.1) and the proof of Theorem 2.2.

The solution presented in (2.3) is still incomplete, since no particular solution  $\tilde{g}$  of the generalized Riccati equation (2.1) has been presented. First we note that for the case  $\epsilon \equiv 0$ , the solution for  $U(t)$  is well known and is a diagonal matrix, whose diagonal elements are  $\exp\left(\mp i \int_0^t f(\tau)d\tau\right)$ . Comparing with (2.3), we see that for the case  $\epsilon \equiv 0$  we should consider the particular solution  $g(t) \equiv 0$ . For more about this, see the discussion of Appendix A. A natural proposal would be to express  $g$  as a formal power expansion on  $\epsilon$  which vanishes at  $\epsilon = 0$ . For convenience, we write this expansion as

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \epsilon^n, \quad (3.1)$$

where  $q(t)$  was defined in (1.12). This would give the desired solution, provided the infinite sum converges for all values of  $\epsilon$  and  $t$  contained in some open intervals. Inserting (3.1) into (2.1) leads to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (qc_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 c_p c_{n-p} - 2ifq c_n \right) \epsilon^n + i\epsilon^2 = 0. \quad (3.2)$$

Under the assumptions above, we conclude

$$(qc_1)' - 2ifqc_1 = 0, \quad (3.3)$$

$$(qc_2)' - iq^2c_1^2 - 2ifqc_2 + i = 0, \quad (3.4)$$

$$(qc_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 c_p c_{n-p} - 2ifqc_n = 0, \quad n \geq 3. \quad (3.5)$$

The solutions of (3.3)-(3.4) are

$$c_1(t) = \alpha_1 q(t), \quad (3.6)$$

$$c_2(t) = q(t) \left[ i \int_0^t (\alpha_1^2 q(t')^2 - q(t')^{-2}) dt' + \alpha_2 \right], \quad (3.7)$$

$$c_n(t) = q(t) \left[ i \left( \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t c_p(t') c_{n-p}(t') dt' \right) + \alpha_n \right], \quad \text{for } n \geq 3, \quad (3.8)$$

where the  $\alpha_n$ 's above,  $n = 1, 2, \dots$ , are arbitrary integration constants.

Since the differential equation (2.1) involves  $\epsilon^2$ , the reader may wonder why we try in (3.1) to find solutions given in terms of power series on  $\epsilon$  and not on  $\lambda \equiv \epsilon^2$ . One should note that, in the case  $f \equiv 0$ , a particular solution of (2.1) is given simply by  $g(t) = \epsilon$ , which leads to solutions of the form  $\mathcal{A} \cos(\epsilon t) + \mathcal{B} \sin(\epsilon t)$  for  $\phi_{\pm}$ , as expected. Therefore, solutions like (3.1) must also be considered, in principle. It is interesting to note, however, that we will meet in Section 4 a situation where the solution  $g$  involves a power expansion on  $\lambda$ .

In the next two subsections we analyze two different choices of the constants  $\alpha_n$ .

### 3.1 First Choice of the Constants $\alpha_n$

In order to illustrate some potential problems, we choose first  $\alpha_1 = 1$  and  $\alpha_n = 0$ ,  $\forall n \geq 2$ . We get

$$c_1(t) = q(t), \quad (3.9)$$

$$c_2(t) = iq(t) \int_0^t (q(t')^2 - q(t')^{-2}) dt', \quad (3.10)$$

$$c_n(t) = iq(t) \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t c_p(t') c_{n-p}(t') dt', \quad \text{for } n \geq 3. \quad (3.11)$$

In this case we can easily find a condition guaranteeing the convergence of the formal power expansion (3.1). We have

$$|c_1(t)| = 1, \quad (3.12)$$

$$|c_2(t)| \leq \int_0^{|t|} 2dt' = 2|t|. \quad (3.13)$$

Admitting that  $|c_k(t)| \leq (2|t|)^{k-1}$  for all  $k$  with  $1 \leq k < n$ , we have

$$\begin{aligned} |c_n(t)| &\leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^{|t|} (2|t'|)^{p-1} (2|t'|)^{n-p-1} dt' = 2^{n-2}|t|^{n-1} \\ &\leq (2|t|)^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

This proved by induction that

$$|c_n(t)| \leq (2|t|)^{n-1}, \quad (3.15)$$

for all  $n \geq 1$ . Hence,  $|g(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2|t|)^{n-1} |\epsilon|^n$ , which converges, provided  $2|t||\epsilon| < 1$ .

### 3.2 Second Choice of the Constants $\alpha_n$ . Elimination of Polynomial Terms on $t$

Let us return to (3.6)-(3.8). We will show that there is a choice of the  $\alpha_n$ 's for which all functions  $c_n$  are quasi-periodic functions of  $t$ . If this holds, there is a chance that  $g$  be also quasi-periodic, provided the sum (3.1) converges uniformly on  $\mathbb{R}$ .

To fix some ideas, let us start recalling some well-known facts about almost-periodic functions. For an almost-periodic function  $h$ , let us denote by  $\sigma(h)$  the spectrum of  $h$  (see, e.g. [14]). The function  $h$  has the Fourier decomposition  $h(t) = \sum_{\omega_i \in \sigma(h)} h_i e^{i\omega_i t}$  that converges uniformly on  $\mathbb{R}$  (see, e.g. [14] for a precise statement). According to a celebrated theorem by H. Bohr (see, e.g. [14]), a necessary and sufficient condition for  $H(t) := \int_0^t h(t') dt'$  being also almost-periodic is  $H \in L^\infty(\mathbb{R})$ . For this, it is sufficient that  $M(h) = 0$  and  $\sum_{\substack{\omega_i \in \sigma(h) \\ \omega_i \neq 0}} \frac{|h_i|}{|\omega_i|} < \infty$ . Bohr's theorem generalizes a previous result by P. Bohl on the quasi-periodic case [4].

A quasi-periodic function  $h$  is an almost-periodic function with the following property. There exists  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > 0$ , and a  $N$ -tuple  $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in (\mathbb{R}_+)^N$ , such that  $\sigma(h) \subset \{\underline{n} \cdot \underline{\omega}, \underline{n} \in \mathbb{Z}^N\}$ . For a given quasi-periodic function  $h$  we will denote the associated  $N$ -tuple  $\underline{\omega}$  by  $\beta(h)$ .

For the analysis below we will admit that  $f$  is such that  $M(q^2) \neq 0$ . A sufficient condition for this will be discussed in Appendix C. The case  $M(q^2) = 0$  will be considered in Section 4.

Let us start with  $c_2$ . In order to have  $c_2$  quasi-periodic one needs at least to guarantee that the integrand in (3.7) contains no constant term, i.e.,

$$M(\alpha_1^2 q^2 - q^{-2}) = 0, \quad (3.16)$$

that means,

$$\alpha_1^2 = \frac{M(q^{-2})}{M(q^2)} = \frac{\overline{M(q^2)}}{M(q^2)}. \quad (3.17)$$

More generally, in order to have  $c_n$  quasi-periodic,  $n \geq 3$ , one needs to guarantee at least that the integrand in (3.8) contains no constant term, i.e.,

$$\sum_{p=1}^{n-1} M(c_p c_{n-p}) = 0. \quad (3.18)$$

This means

$$2M(c_1 c_2) = 2\alpha_1 M(qc_2) = 0 \quad (3.19)$$

for  $n = 3$  and

$$2\alpha_1 M(qc_{n-1}) = - \sum_{p=2}^{n-2} M(c_p c_{n-p}). \quad (3.20)$$

for  $n \geq 4$ . Defining for  $n \geq 2$

$$d_n(t) := q(t)(c_n(t) - \alpha_n q(t)) = \begin{cases} iq(t)^2 \int_0^t (\alpha_1^2 q(t')^2 - q(t')^{-2}) dt', & n = 2, \\ iq(t)^2 \int_0^t \left( \sum_{p=1}^{n-1} c_p(t') c_{n-p}(t') \right) dt', & n \geq 3, \end{cases} \quad (3.21)$$

we get from (3.19)

$$\alpha_2 = -\frac{M(d_2)}{M(q^2)}, \quad (3.22)$$

which fixes  $\alpha_2$ . Note that the right hand side of (3.22) makes sense provided  $d_2$  is quasi-periodic (and, hence, has a mean value  $M(d_2)$ ). By (3.21) this is true provided  $c_2$  is quasi-periodic, what will be proven inductively in Section 5 for the value of  $\alpha_1$  given in (3.17).

For  $n \geq 4$  we have

$$M(qc_{n-1}) = M(\overline{d_{n-1}}) + \alpha_{n-1} M(q^2). \quad (3.23)$$

Condition (3.20), combined with (3.23), says that

$$\alpha_{n-1} = -\frac{1}{M(q^2)} \left( M(\overline{d_{n-1}}) + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{p=2}^{n-2} M(c_p c_{n-p}) \right). \quad (3.24)$$

for  $n \geq 4$ .

Note again that the right hand side of (3.24) makes sense provided  $d_{n-1}$  is quasi-periodic (and, hence, has a mean value  $M(d_{n-1})$ ). By (3.21) this is true provided  $c_{n-1}$  is quasi-periodic, what will be proven inductively in Section 5 for the values of  $\alpha_1$  given in (3.17),  $\alpha_2$  given in (3.22) and  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}$  given inductively in (3.24).

Now, note that  $d_{n-1}$  depends only on  $\{c_1, \dots, c_{n-2}\}$  and, therefore, relation (3.24) fixes  $\alpha_{n-1}$  for given  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}\}$ . This, together with (3.17) and (3.22), fixes recursively all constants  $\alpha_*$  and guarantees (3.16) and (3.18) for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Fixing the constants  $\alpha_n$  in the way described above is an important step towards the proof of quasi-periodicity of the functions  $c_n$  and, eventually, of  $g$ . With this choice for the  $\alpha_n$ 's no

polynomial terms on  $t$  will appear after performing the integrations found in (3.6)-(3.8). As a consequence, one should expect to get here better estimates for the behavior on  $t$  of the functions  $c_n$  than that found in (3.15) for our first choice of the  $\alpha_n$ 's. As a matter of fact we will be able to prove that all functions  $c_n$  are quasi-periodic by analyzing recursively their Fourier coefficients. This will be performed in Section 5. Now we will consider the case  $M(q^2) = 0$ .

## 4 A Solution $g$ in the Case $M(q^2) = 0$

In the case where  $M(q^2) = 0$  there are two equivalent procedures to start with. In the first we adopt the Ansatz (3.1) and choose  $\alpha_1 = 0$ , what implies  $c_n \equiv 0$  for all odd  $n$ . In the second, which we follow here, we adopt directly the Ansatz

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \lambda^n, \quad (4.1)$$

with  $\lambda := \epsilon^2$ . Inserting this into (2.1) leads to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (qe_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 e_p e_{n-p} - 2ifqe_n \right) \lambda^n + i\lambda = 0, \quad (4.2)$$

or

$$(qe_1)' - 2ifqe_1 + i = 0, \quad (4.3)$$

$$(qe_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 e_p e_{n-p} - 2ifqe_n = 0, \quad n \geq 2. \quad (4.4)$$

The solutions are

$$e_1(t) = q(t) \left( -i \int_0^t q^{-2}(t') dt' + \beta_1 \right), \quad (4.5)$$

$$e_n(t) = q(t) \left[ i \left( \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t e_p(t') e_{n-p}(t') dt' \right) + \beta_n \right], \quad \text{for } n \geq 2, \quad (4.6)$$

where the  $\beta_n$ 's above,  $n = 1, 2, \dots$ , are arbitrary integration constants.

Since now  $M(q^2) = \overline{M(q^{-2})} = 0$ ,  $e_1$  is bounded and, therefore, quasi-periodic. For  $e_2$  we have

$$e_2(t) = q(t) \left[ i \int_0^t e_1(t')^2 dt' + \beta_2 \right]. \quad (4.7)$$

Using the same strategy used in the case  $M(q^2) \neq 0$  above, we require  $M(e_1^2) = 0$ . Since

$$e_1(t)^2 = q(t)^2 \left( - \left( \int_0^t q^{-2}(t') dt' \right)^2 - 2i\beta_1 \left( \int_0^t q^{-2}(t') dt' \right) + \beta_1^2 \right), \quad (4.8)$$

we must have

$$-2i\beta_1 M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2), \quad (4.9)$$

with

$$\mathcal{Q}_1(t) := q(t)^2 \int_0^t q^{-2}(t') dt' \quad \text{and} \quad (4.10)$$

$$\mathcal{Q}_2(t) := q(t)^2 \left( \int_0^t q^{-2}(t') dt' \right)^2. \quad (4.11)$$

Hence we can choose

$$\beta_1 = \frac{i}{2} \frac{M(\mathcal{Q}_2)}{M(\mathcal{Q}_1)}, \quad (4.12)$$

provided  $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$ , i.e.

$$M(\mathcal{Q}_1) = i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^A \\ n \neq 0}} \frac{|Q_n^{(2)}|^2}{n \cdot \omega} \neq 0, \quad (4.13)$$

what we will assume here.

Note that (4.12) makes sense, since by the condition  $M(q^2) = 0$  and by the bound (5.30) (which guarantee the  $L^\infty$  condition for  $\mathcal{Q}_1$  and  $\mathcal{Q}_2$ ) both  $\mathcal{Q}_1$  and  $\mathcal{Q}_2$  are quasi-periodic and, hence, have a mean value.

For all  $n \geq 3$  we require  $\sum_{p=1}^{n-1} M(e_p e_{n-p}) = 0$ , that means,

$$2M(e_1 e_{n-1}) + \sum_{p=2}^{n-2} M(e_p e_{n-p}) = 0, \quad (4.14)$$

with the convention that  $\sum_{p=2}^{n-2} M(e_p e_{n-p}) = 0$  for  $n = 3$ . Define,

$$j_n(t) := q(t)(e_n(t) - \beta_n q(t)) = iq(t)^2 \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t e_p(t') e_{n-p}(t') dt', \quad (4.15)$$

for  $n \geq 2$ . We get for  $n \geq 3$

$$\begin{aligned} M(e_1 e_{n-1}) &= M(q^{-1} e_1 j_{n-1}) + \beta_{n-1} M(e_1 q) \\ &= M(q^{-1} e_1 j_{n-1}) + \beta_{n-1} (-i M(\mathcal{Q}_1) + \beta_1 M(q^2)) \\ &= M(q^{-1} e_1 j_{n-1}) - i \beta_{n-1} M(\mathcal{Q}_1). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hence, condition (4.14) implies

$$\beta_{n-1} = -i \left[ \frac{M(q^{-1} e_1 j_{n-1}) + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n-2} M(e_p e_{n-p})}{M(\mathcal{Q}_1)} \right], \quad n \geq 3. \quad (4.17)$$

Note again that this expression makes sense provided  $j_{n-1}$  is quasi-periodic (and, hence,  $q^{-1}e_1j_{n-1}$  has a mean value). By (4.15) this is true provided  $e_{n-1}$  is quasi-periodic, what will be proven inductively in Section 6 for the values of  $\beta_1$  given in (4.12) and  $\beta_2, \dots, \beta_{n-2}$  given inductively in (4.17).

With the choices (4.12) and (4.17) we guarantee that no polynomial terms on  $t$  will appear after performing the integrations in (4.5) and (4.6). In Section 6 we will establish that the functions  $e_n$  are all quasi-periodic.

## 4.1 The Power Series Solutions for the Case $f(t) = \text{Constant}$

Before we finish this section let us consider one particular but interesting situation.

For the case  $f(t) = f_0 \equiv f_0$ , constant, the Riccati equation (2.1) has  $g = -f_0 \pm \sqrt{f_0^2 + \epsilon^2}$  as particular solutions and for both  $U(t)$  becomes

$$U(t) = \frac{1}{\omega_0} \begin{pmatrix} \omega_0 \cos(\omega_0 t) - if_0 \sin(\omega_0 t) & -\epsilon \sin(\omega_0 t) \\ -\epsilon \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) + if_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

as expected, with  $\omega_0 := \sqrt{f_0^2 + \epsilon^2}$ .

It is important to take notice of the fact that, in the situation where  $f(t) = f_0 \equiv f_0$ , constant, with  $f_0 \neq 0$ , we have precisely the conditions described above, namely, we have  $M(q^2) = 0$  and  $M(Q_1) = i(2f_0)^{-1} \neq 0$ . We should therefore expect that the power series (4.1) reproduces the solution  $g = -f_0 + \sqrt{f_0^2 + \epsilon^2}$  (we take  $f_0 > 0$  without loss).

Let us prove that this is indeed the case, at least for  $|\epsilon| < |f_0|$ . We will show by induction, using (4.6) and (4.17), that

$$e_m(t) = l_m q(t)^{-1} \quad (4.19)$$

and

$$\beta_m = l_m, \quad (4.20)$$

for all  $m \in \mathbb{N}$ , where

$$l_m := (-1)^{m-1} \frac{(2m-2)!}{m!(m-1)!} \frac{1}{(2f_0)^{2m-1}}. \quad (4.21)$$

An explicit computation using (4.12) and (4.5) shows that  $e_1(t) = (2f_0)^{-1}q(t)^{-1} = l_1q(t)^{-1}$  and that  $\beta_1 = (2f_0)^{-1} = l_1$ . Let us assume (4.19) and (4.20) valid for  $1 \leq m \leq n-1$ . By (4.17) we have

$$\beta_n = -(2f_0) \left[ M(q^{-1}e_1j_n) + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n-1} M(e_p e_{n+1-p}) \right], \quad (4.22)$$

but, by (4.19),  $M(e_p e_{n+1-p}) = l_p l_{n+1-p} \overline{M(q^2)} = 0$  and, hence,

$$\beta_n = -(2f_0)M(q^{-1}e_1j_n) = -iM \left( \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t e_p(t') e_{n-p}(t') dt' \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2f_0} \sum_{p=1}^{n-1} l_p l_{n-p} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2f_0)^{2n-1}} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(2p-2)! (2n-2p-2)!}{p!(p-1)!(n-p)!(n-p-1)!}. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Using the identity

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{(2p-2)! (2n-2p-2)!}{p!(p-1)!(n-p)!(n-p-1)!} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}, \tag{4.24}$$

the proof of (4.20) for  $m = n$  is complete and from (4.20) we have

$$\begin{aligned}
e_n(t) &= q(t) \left[ i \int_0^t q(t')^{-2} dt' \left( \sum_{p=1}^{n-1} l_p l_{n-p} \right) + l_n \right] \\
&= l_n q(t)^{-1}, \tag{4.25}
\end{aligned}$$

using (4.6) and (4.24) again. This proves (4.19) and (4.20) by induction for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Relation (4.24) can be obtained from the more general identity

$$\sum_{k=0}^n \binom{tk+r}{k} \binom{tn-tk+s}{n-k} \frac{r}{tk+r} \frac{s}{tn-tk+s} = \binom{tn+r+s}{n} \frac{r+s}{tn+r+s} \tag{4.26}$$

by taking  $t = 2$ ,  $r = s = -1$  and by moving the terms with  $k = 0$  and  $k = n$  to the right hand side of (4.26). Relation (4.26) is one of the so-called “convolution identities” for binomial coefficients and is valid for  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t, r, s \in \mathbb{R}$ . Its proof is indicated in [15], Chapter 5.

With (4.19) one can easily check that the series (4.1) becomes exactly the Taylor series in  $\epsilon$  (about  $\epsilon = 0$ ) of the function  $-f_0 + \sqrt{f_0^2 + \epsilon^2}$ , which is a particular solution of (2.1) for the case  $f(t) = f_0$ . In this case the convergence of (4.1) is clearly restricted to  $|\epsilon| < |f_0|$ .

In the general case we learn from this example that one should not expect convergence of (4.1) for all values of  $\epsilon$ . Further, we see that, in the situation where  $M(f) \neq 0$  and  $f$  has small oscillations around its mean value, i.e., in the situation where  $f(t) - M(f)$  is small (in some sense to be precised), the series (4.1) should be expected to converge (at least for small values of  $\epsilon$ ). Unfortunately our analysis below was insufficient to provide a proof of this conjecture.

## 5 Quasi-Periodicity of the Functions $c_n$

In this section we will prove the quasi-periodicity of the functions  $c_n$  for our second choice of the constants  $\alpha_n$  and for the case  $M(q^2) \neq 0$ .

Let us describe briefly the general strategy we will follow and the problems we will face. The strategy and the problems will be the same in the case  $M(q^2) = 0$ , treated in Section 6. We first express formally the recursive relations (3.6)-(3.8) for the functions  $c_n$  (with the choices (3.17), (3.22) and (3.24)) in terms of its Fourier coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ ,  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ . The recursive relations for

the coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$  involve convolutions (a consequence, lately, of the quadratic character of the generalized Riccati equation) and, inevitably, small denominators.

Assuming an exponential decay of the form  $|Q_{\underline{m}}| \leq Q e^{-\chi|\underline{m}|}$  for the Fourier coefficients  $Q_{\underline{m}}$  of the function  $q$ , a fact that will be proven in Appendix D, we prove inductively bounds of the form  $|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq K_n e^{-(\chi-\delta_n)|\underline{m}|}$  for the Fourier coefficients of the functions  $c_n$ . This exponential decay justifies the formal expression of the functions  $c_n$  in terms of the coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$  and the corresponding recursion relations and is enough to establish the quasi-periodicity of all the functions  $c_n$  by induction.

Due to the convolutions and to the small denominators appearing in the recursive relations for the coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , the sequence  $\delta_n$  is positive and increasing. It is possible to keep the sequence  $\delta_n$  bounded and smaller than  $\chi$ , but this ruins the behavior in  $n$  of the constants  $K_n$  and obstructs the control of the absolute convergence of the formal power series (3.1).

## 5.1 The Fourier Decomposition of the Functions $c_n$

To prepare the proof that the functions  $c_n$  are all quasi-periodic, we will first prove that  $c_1$  is quasi-periodic. To prove that  $q$  is quasi-periodic we note that

$$q(t) := e^{if_0 t} \exp \left( i \int_0^t (f(t') - f_0) dt' \right). \quad (5.1)$$

Assuming now that

$$2 \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{|f_{\underline{n}}|}{|\underline{n} \cdot \omega_f|} < \infty \quad (5.2)$$

one has

$$F(t) := \int_0^t (f(t') - f_0) dt' \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad (5.3)$$

and we conclude, by Bohr's theorem, that  $F$  is almost-periodic and, by the uniform convergence of the Fourier series (see, e.g. [14]), that

$$F(t) = -i \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{f_{\underline{n}}}{\underline{n} \cdot \omega_f} (e^{i\underline{n} \cdot \omega_f t} - 1), \quad (5.4)$$

what shows that  $F$  is quasi-periodic. A standard argument (see Appendix B) shows that  $\exp(iF(t))$  is also quasi-periodic with  $\beta(\exp(iF(t))) = \beta(F) = \beta(f)$ . Therefore, we have established that  $q$  is quasi-periodic with  $\sigma(q) = \sigma(\exp(iF)) + f_0$ . We write

$$q(t) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{n}} e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (5.5)$$

where  $\underline{\omega}$  and  $A$  are defined in (1.27) and (1.28), respectively. See Appendix C for the relation between the Fourier coefficients of  $q$  and those of  $f$ .

For  $n \geq 1$ , let us write

$$c_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}. \quad (5.6)$$

In the next we will be concerned with the recursion relations for the Fourier coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ . For  $C_{\underline{m}}^{(2)}$  we have from (3.7)

$$C_{\underline{m}}^{(2)} = Q_{\underline{m}} \left[ \alpha_2 - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right] + \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{m}-\underline{n}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \left( \alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}} \right). \quad (5.7)$$

Above,  $Q_{\underline{n}}^{(2)}$  are the Fourier coefficients of  $q^2$ , namely

$$q(t)^2 = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{m}}^{(2)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (5.8)$$

with

$$Q_{\underline{m}}^{(2)} = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{n}} Q_{\underline{m}-\underline{n}}. \quad (5.9)$$

For  $n \geq 3$  we have from (3.8)

$$\begin{aligned} C_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} Q_{\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} + \\ &\quad Q_{\underline{m}} \left[ \alpha_n - \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

For the constants  $\alpha_n$  we have, according to (3.17), (3.22) and (3.24), the following expressions

$$\alpha_1^2 = Q_{\underline{0}}^{(2)} / \overline{Q_{\underline{0}}^{(2)}}, \quad (5.11)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{M(q^2)} \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\left( \alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}} \right)}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \left( Q_{-\underline{n}}^{(2)} - Q_{\underline{0}}^{(2)} \right), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{1}{M(q^2)} \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \left( Q_{-(\underline{n}_1+\underline{n}_2)}^{(2)} - Q_{\underline{0}}^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\alpha_1} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{n}}^{(p)} C_{-\underline{n}}^{(n+1-p)} \right\}, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Inserting these expressions into (5.7) and (5.10) we get

$$C_{\underline{m}}^{(1)} = \alpha_1 Q_{\underline{m}}, \quad (5.14)$$

$$C_{\underline{m}}^{(2)} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{\left(\alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}}\right)}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \left[ Q_{\underline{m}-\underline{n}} - \frac{Q_{\underline{m}} Q_{-\underline{n}}^{(2)}}{Q_{\underline{0}}^{(2)}} \right], \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} C_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \left[ Q_{\underline{m} - (\underline{n}_1 + \underline{n}_2)} - \frac{Q_{\underline{m}} Q_{-\underline{n}_1 - \underline{n}_2}^{(2)}}{Q_{\underline{0}}^{(2)}} \right] \\ &\quad - \frac{Q_{\underline{m}}}{2\alpha_1 Q_{\underline{0}}^{(2)}} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \sum_{p=2}^{n-1} C_{\underline{n}}^{(p)} C_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Above we used  $M(q^2) = Q_{\underline{0}}^{(2)}$ .

## 5.2 An Upper Bound for $|Q_{\underline{m}}^{(2)}|$

At this moment we have to introduce some restrictions, which ultimately reflect on restrictions on the function  $f$ . The first concerns the frequencies  $\underline{\omega}$ . We assume a so called Diophantine condition, namely, we assume the existence of constants  $\Delta > 0$  and  $\sigma > 0$  such that, for all  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^A$ ,  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ,

$$|\underline{n} \cdot \underline{\omega}| \geq \Delta^{-1} |\underline{n}|^{-\sigma}. \quad (5.17)$$

The second restriction concerns the decay properties of the Fourier coefficients  $Q_{\underline{m}}$  for  $|\underline{m}| \rightarrow \infty$ . We assume that there are constants  $\mathcal{Q} > 0$  and  $\chi > 0$  such that, for all  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ ,

$$|Q_{\underline{m}}| \leq \mathcal{Q} e^{-\chi |\underline{m}|}. \quad (5.18)$$

This will be proven in Appendix D for the case where  $f$  has a Fourier decomposition given by a finite sum. As a consequence of (5.18), we have

$$|Q_{\underline{m}}^{(2)}| \leq \mathcal{Q}^2 \Xi_0(\chi, \underline{m}) \quad (5.19)$$

where, for  $\alpha > 0$ ,

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) := \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-\alpha(|\underline{n}| + |\underline{m} - \underline{n}|)}. \quad (5.20)$$

One has

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) = \prod_{a=1}^A \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(|n| + |m_a - n|)}. \quad (5.21)$$

A simple computation shows that

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha(|n| + |m_a - n|)} = e^{-\alpha|m_a|} (|m_a| + (\tanh(\alpha))^{-1}). \quad (5.22)$$

Hence

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) \leq (|\underline{m}| + (\tanh(\alpha))^{-1})^A e^{-\alpha|\underline{m}|}. \quad (5.23)$$

Using now the inequality

$$|x|^\sigma \leq \left(\frac{\sigma}{e\delta}\right)^\sigma e^{\delta|x|}, \quad (5.24)$$

valid for all  $x \in \mathbb{C}$  and all  $\delta > 0, \sigma > 0$ , we arrive at

$$\Xi_0(\alpha, \underline{m}) \leq \left[ \left( \frac{A}{e\delta} \right)^A e^{\delta/\tanh(\alpha)} \right] e^{-(\alpha-\delta)|\underline{m}|}. \quad (5.25)$$

Defining

$$\mathcal{Q}^{(2)}(\delta) := \mathcal{Q}^2 \left( \frac{A}{e\delta} \right)^A e^{\delta/\tanh(\chi)} \quad (5.26)$$

for  $\delta > 0$ , we conclude that, for some  $\delta_2$  positive and small enough,

$$|Q_{\underline{m}}^{(2)}| \leq \mathcal{Q}^{(2)}(\delta_2/2) e^{-(\chi-\delta_2/2)|\underline{m}|}. \quad (5.27)$$

Below we will frequently denote  $\mathcal{Q}^{(2)} \equiv \mathcal{Q}^{(2)}(\delta_2/2)$ .

### 5.3 An Upper Bound for $|C_{\underline{m}}^{(2)}|$

Since  $c_2$  is expressed as the quasi-periodic function  $q$  times the integral of a quasi-periodic function, one has only to show, for proving that  $c_2$  is quasi-periodic, that

$$i \int_0^t (\alpha_1^2 q(t')^2 - q(t')^{-2}) dt' \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (5.28)$$

But, by the hypotheses above, and using the fact that  $|\alpha_1| = 1$ , we have

$$\left| i \int_0^t (\alpha_1^2 q(t')^2 - q(t')^{-2}) dt' \right| \leq 2 \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \leq 2\Delta \mathcal{Q}^{(2)} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} |\underline{n}|^\sigma e^{-(\chi-\delta_2/2)|\underline{n}|}. \quad (5.29)$$

Above the term corresponding to  $\underline{n} = \underline{0}$  has been eliminated by the choice of  $\alpha_1$ . Using (5.24) we get

$$2 \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{|Q_{\underline{n}}^{(2)}|}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \leq 2\Delta \mathcal{Q}^{(2)} \left( \frac{2\sigma}{e\delta_2} \right)^\sigma \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(\chi-\delta_2)|\underline{n}|} \leq \infty \quad (5.30)$$

by choosing  $\delta_2 < \chi$ . This concludes the proof of (5.28) and shows that  $c_2$  is quasi-periodic.

Relation (5.15) gives us the following upper bound for  $|C_{\underline{m}}^{(2)}|$ :

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(2)}| &\leq 2\Delta \mathcal{Q}^{(2)} \mathcal{Q} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} |\underline{n}|^\sigma e^{-(\chi-\delta_2/2)|\underline{n}|} \left[ e^{-\chi|\underline{m}-\underline{n}|} + \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{|Q_{\underline{0}}^{(2)}|} e^{-\chi|\underline{m}|-(\chi-\delta_2/2)|\underline{n}|} \right] \\ &\leq 2\Delta \mathcal{Q}^{(2)} \mathcal{Q} \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \left( L_1(\underline{m}) + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}^{(2)}}{|Q_{\underline{0}}^{(2)}|} L_2(2\chi - \delta_2 - \delta), \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

where we used again (5.24) and the Diophantine condition (5.17). Above

$$L_1(\underline{m}) = \Xi(\chi - \delta_2/2 - \delta, \chi, \underline{m}),$$

where, for  $\alpha, \beta > 0$ ,

$$\Xi(\alpha, \beta, \underline{m}) := \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-\alpha|\underline{n}| - \beta|\underline{m}-\underline{n}|} \quad \text{and} \quad L_2(\alpha) := \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-\alpha|\underline{n}|}.$$

Note that  $\Xi(\alpha, \beta, \underline{m}) = \Xi(\beta, \alpha, \underline{m})$  and that

$$\Xi(\alpha, \beta, \underline{m}) \leq \Xi_0(\min\{\alpha, \beta\}, \underline{m}). \quad (5.32)$$

To proceed we have to find upper bounds for  $L_1$  and  $L_2$ . We have for  $L_2(\alpha)$  simply

$$L_2(\alpha) = \left(1 + 2 \sum_{a=1}^{\infty} e^{-\alpha a}\right)^A = \left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}\right)^A \quad (5.33)$$

for  $\alpha > 0$ . For  $L_1$  we have, using (5.32),

$$L_1(\underline{m}) \leq \Xi_0(\chi - \delta_2/2 - \delta, \underline{m}) \leq e^{-(\chi-\delta_2/2-2\delta)|\underline{m}|} e^{\delta/\tanh(\chi-\delta_2/2-\delta)} \left(\frac{A}{e\delta}\right)^A \quad (5.34)$$

by (5.25), for any  $\delta > 0$ , small enough. Choosing  $\delta = \delta_2/4$  we get

$$L_1(\underline{m}) \leq e^{-(\chi-\delta_2)|\underline{m}|} e^{\delta_2/(4\tanh(\chi-3\delta_2/4))} \left(\frac{4A}{e\delta_2}\right)^A. \quad (5.35)$$

Putting the estimates above together we have for all  $\delta_2 > 0$  sufficiently small

$$|C_{\underline{m}}^{(2)}| \leq \mathcal{K}_2 e^{-(\chi-\delta_2)|\underline{m}|}, \quad (5.36)$$

where,

$$\mathcal{K}_2 := 2\Delta Q^{(2)} Q \left(\frac{4\sigma}{e\delta_2}\right)^\sigma \left(e^{\delta_2/(4\tanh(\chi-3\delta_2/4))} \left(\frac{4A}{e\delta_2}\right)^A + \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} L_2(2\chi - 5\delta_2/4)\right). \quad (5.37)$$

Note that  $\mathcal{K}_2 \sim \delta_2^{-(2A+\sigma)}$  for  $\delta_2 \rightarrow 0$ .

## 5.4 Recursive Upper Bounds for $|C_{\underline{m}}^{(n)}|$ with $n \geq 3$

In order to show that all  $c_n$ 's,  $n \geq 3$ , are quasi-periodic we note that the kind of reasoning used above can be applied inductively and indicates to be sufficient to show that  $c_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ . For this it is enough to establish that

$$\sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} |C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \infty. \quad (5.38)$$

Using the Diophantine condition (5.17) together with (5.18) and (5.27) we get from (5.16)

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \Delta Q \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} |\underline{n}_1 + \underline{n}_2|^\sigma \left( \sum_{p=1}^{n-1} |C_{\underline{n}_1}^{(p)}| |C_{\underline{n}_2}^{(n-p)}| \right) \left[ e^{-\chi|\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2|} + \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} e^{-\chi|\underline{m}|-(\chi-\delta_2)|\underline{n}_1+\underline{n}_2|} \right] \\ &+ e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \sum_{p=2}^{n-1} |C_{\underline{n}}^{(p)}| |C_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}|, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.39)$$

The strategy we will follow is to use (5.39) for recursively proving a bound on the absolute value of the Fourier coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , from which (5.38) should follow. We will assume that for  $1 \leq a \leq n-1$  there are positive constants  $\mathcal{K}_a$  and  $\delta_a$ ,  $\delta_a < \chi$ , such that, for all  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ ,

$$|C_{\underline{m}}^{(a)}| \leq \mathcal{K}_a e^{-(\chi-\delta_a)|\underline{m}|}. \quad (5.40)$$

We have already seen that we can adopt  $\mathcal{K}_1 := Q$ ,  $\delta_1 := 0$  and  $\mathcal{K}_2$  as in (5.37) with  $\delta_2$  arbitrary and small.

Inserting (5.40) into (5.39) and using once more the inequality (5.24), for some  $\delta > 0$  small enough to be chosen conveniently, gives

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \Delta Q \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n-p} \left( L_3(p, \underline{m}) + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} L_4(p) \right) \\ &+ e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n+1-p} L_5(p), \end{aligned} \quad (5.41)$$

where

$$L_3(p, \underline{m}) := L_3(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, \delta, \chi, \underline{m}), \quad (5.42)$$

$$L_4(p) := L_4(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, \chi - \delta_2 - \delta), \quad (5.43)$$

$$L_5(p) := L_2(2\chi - \delta_p - \delta_{n+1-p}), \quad (5.44)$$

with  $1 \leq p \leq n-1$  for  $L_3$  and for  $L_4$  and  $2 \leq p \leq n-1$  for  $L_5$ , where

$$L_3(\alpha, \beta, \mu, \nu, \underline{m}) := \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-\alpha|\underline{n}_1| - \beta|\underline{n}_2| + \mu|\underline{n}_1 + \underline{n}_2| - \nu|\underline{m} - \underline{n}_1 - \underline{n}_2|), \quad (5.45)$$

$$L_4(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-\alpha|\underline{n}_1| - \beta|\underline{n}_2| - \gamma|\underline{n}_1 + \underline{n}_2|), \quad (5.46)$$

with  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu > 0$  and  $\mu$  small enough.

We have to find convenient upper bounds for the sums above. For  $L_5(p)$  we have

$$L_5(p) = L_2(2\chi - \delta_p - \delta_{n+1-p}) \leq L_2(2\chi - 2\delta[n]), \quad (5.47)$$

where

$$\delta[n] := \max_{p' < n} \delta_{p'}.$$

For  $L_4(\alpha, \beta, \gamma)$  we have

$$L_4(\alpha, \beta, \gamma) \leq L_4(\alpha, \beta, 0) = L_2(\alpha)L_2(\beta). \quad (5.48)$$

Hence,

$$L_4(p) \leq L_2(\chi - \delta_p)L_2(\chi - \delta_{n-p}) \leq L_2(\chi - \delta[n])^2. \quad (5.49)$$

Let us now consider  $L_3(p, \underline{m})$ . For later use let us try to find bounds for  $L_3(\alpha, \beta, \mu, \nu, \underline{m})$ . We have, for any  $\delta > 0$  sufficiently small,

$$\begin{aligned} L_3(\alpha, \beta, \mu, \nu, \underline{m}) &\leq \sum_{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-(\alpha - \mu)|\underline{n}_1| - (\beta - \mu)|\underline{n}_2| - \nu|\underline{m} - \underline{n}_1 - \underline{n}_2|) \\ &= \sum_{\underline{n}_1 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-(\alpha - \mu)|\underline{n}_1|) \Xi(\beta - \mu, \nu, \underline{m} - \underline{n}_1) \\ &\leq \sum_{\underline{n}_1 \in \mathbb{Z}^A} \exp(-(\alpha - \mu)|\underline{n}_1|) \Xi_0(\kappa, \underline{m} - \underline{n}_1) \\ &\leq \left(\frac{A}{e\delta}\right)^A \exp\left(\frac{\delta}{\tanh(\kappa)}\right) \Xi(\alpha - \mu, \kappa - \delta, \underline{m}) \\ &\leq \left(\frac{A}{e\delta}\right)^A \exp\left(\frac{\delta}{\tanh(\kappa)}\right) \Xi_0(\zeta, \underline{m}) \\ &\leq \mathcal{S} e^{-(\zeta - \delta)|\underline{m}|}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \left(\frac{A}{e\delta}\right)^{2A} \exp\left(\frac{\delta}{\tanh(\kappa)} + \frac{\delta}{\tanh(\zeta)}\right), \\ \kappa &:= \min\{\beta - \mu, \nu\} \end{aligned}$$

and

$$\zeta := \min\{\alpha - \mu, \kappa - \delta\} = \min\{\alpha - \mu, \beta - \mu - \delta, \nu - \delta\}.$$

Above, we made use of inequality (5.25) in the third and in the last inequalities, as well as of (5.32). After the corresponding replacements we conclude that

$$L_3(p, \underline{m}) \leq \left[ \left(\frac{A}{e\delta}\right)^{2A} \exp\left(\frac{2\delta}{\tanh(\chi - \delta[n] - 2\delta)}\right) \right] \exp(-(\chi - \delta[n] - 3\delta)|\underline{m}|). \quad (5.51)$$

Note that the bounds (5.47), (5.49) and (5.51) do not depend on  $p$ , but depend on  $n$ .

We choose the sequence  $\delta_a$ ,  $a \geq 1$  as a strictly increasing bounded sequence converging to some  $\delta_\infty < \chi$ . This makes  $\delta[n] = \delta_{n-1}$ . We also choose  $\delta$  such that  $\delta_n = \delta_{n-1} + 3\delta$ . These choices give

$$L_3(p, \underline{m}) \leq \left[ \left( \frac{3A}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^{2A} \exp \left( \frac{2\delta_\infty}{3 \tanh(\chi - \delta_\infty)} \right) \right] \exp(-(\chi - \delta_n)|\underline{m}|), \quad (5.52)$$

$$L_4(p) \leq L_2(\chi - \delta_\infty)^2, \quad (5.53)$$

$$L_5(p) \leq L_2(2\chi - 2\delta_\infty), \quad (5.54)$$

with  $1 \leq p \leq n-1$  for  $L_3$  and for  $L_4$  and  $2 \leq p \leq n-1$  for  $L_5$ .

Returning to (5.41), we get

$$\begin{aligned} |C_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \Delta Q \left( \frac{3\sigma}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^\sigma D_n (e^{-(\chi - \delta_n)|\underline{m}|} + e^{-\chi|\underline{m}|}) \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n-p} \\ &\quad + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} L_2(2\chi - 2\delta_\infty) \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n+1-p}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

with

$$D_n := \max \left\{ \left( \frac{3A}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^{2A} \exp \left( \frac{2\delta_\infty}{3 \tanh(\chi - \delta_\infty)} \right), \quad L_2(\chi - \delta_\infty)^2 \frac{Q^{(2)}}{|Q_0^{(2)}|} \right\}. \quad (5.56)$$

We finally got the bound

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{K}_n e^{-(\chi - \delta_n)|\underline{m}|}, \quad (5.57)$$

with

$$\mathcal{K}_n := 2\Delta Q \left( \frac{3\sigma}{e(\delta_n - \delta_{n-1})} \right)^\sigma D_n \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n-p} + \frac{Q}{2|Q_0^{(2)}|} L_2(2\chi - 2\delta_\infty) \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n+1-p}. \quad (5.58)$$

By induction, this establishes the bound

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{K}_n e^{-(\chi - \delta_\infty)|\underline{m}|} \quad (5.59)$$

for all  $n \in \mathbb{N}$  and this proves (5.38) for all  $n \in \mathbb{N}$ . This, in turn, finally establishes that all functions  $c_n$  are quasi-periodic on  $\mathbb{R}$  since it implies that  $\sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} |C_{\underline{m}}^{(n)}| < \infty$ .

## 5.5 The Convergence of the Power Expansion on $\epsilon$

We have now to deal with the question of the absolute convergence of the formal power series in (3.1). Since  $|c_n(t)| \leq \mathcal{K}_n \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(\chi - \delta_\infty)|\underline{m}|}$  we have to analyze the convergence of the formal infinite sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n |\epsilon|^n. \quad (5.60)$$

Since the increasing sequence  $\delta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , introduced in the definition of  $\mathcal{K}_n$ , has to converge to some  $\delta_\infty < \chi$ , the difference  $\delta_n - \delta_{n-1}$  occurring in (5.58) has to decrease to zero for  $n \rightarrow \infty$ . Hence, the leading behavior for  $n$  large of the right hand side of (5.58) is governed by

$$\mathcal{K}_n \approx \frac{C}{(\delta_n - \delta_{n-1})^{\sigma+2A}} \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{K}_p \mathcal{K}_{n-p}, \quad (5.61)$$

for some positive constant  $C$ . Even choosing a slowly converging sequence  $\delta_n$ , for instance such that  $\delta_n - \delta_{n-1} \simeq n^{-(1+\epsilon_0)}$ , with some small  $\epsilon_0 > 0$ , we would probably find a large- $n$  behavior for  $\mathcal{K}_n$  like  $\mathcal{K}_n \approx (n!)^{(1+\epsilon_0)(\sigma+2A)} c^n$  for some constant  $c > 1$ .

Unfortunately we conclude that the upper bounds on the  $\mathcal{K}_n$  obtainable from the recursive definition (5.58) are too bad, for whatever choice of the converging sequence  $\delta_n$ , to guarantee the convergence of the sum in (5.60) for any finite  $\epsilon$  and, hence, analyticity on  $\epsilon$  cannot be established through the above analysis. Perhaps, analyticity around  $\epsilon = 0$  should not be generally expected in the system we considered. See Section 7 for some further discussion.

## 6 Quasi-Periodicity of the Functions $e_n$

In this section we will prove the quasi-periodicity of the functions  $e_n$ .

### 6.1 The Fourier Decomposition of the Functions $e_n$

For all  $n \geq 1$  we write,

$$e_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}. \quad (6.1)$$

We will study the Fourier coefficients  $E_{\underline{m}}^{(n)}$ . We have from (4.5)

$$E_{\underline{m}}^{(1)} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{Q_{\underline{m}-\underline{n}} \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} + Q_{\underline{m}} \left( \beta_1 - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{\overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right), \quad (6.2)$$

and, for  $n \geq 2$ , we have from (4.6)

$$\begin{aligned} E_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq 0}} Q_{\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2} \left( \sum_{p=1}^{n-1} E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} + \\ &\quad Q_{\underline{m}} \left[ \beta_n - \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq 0}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \right], \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

For the constants  $\beta_*$  we have (see (4.12) and (4.17))

$$\beta_1 = \frac{1}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq 0, \underline{n}_2 \neq 0}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_1}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_2}^{(2)}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})} + \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{\overline{Q}_{\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}}, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{iM(\mathcal{Q}_1)} \left[ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq 0}} \left( Q_{-\underline{n}_1-\underline{n}_2}^{(2)} \mathcal{R} - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{Q_{\underline{n}+\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right) \frac{E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{n}}^{(p)} E_{-\underline{n}}^{(n+1-p)} \right] + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq 0}} \frac{E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}}, \quad \text{for } n \geq 2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

where

$$\mathcal{R} := \beta_1 + \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{\overline{Q}_{-\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} = \frac{1}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq 0, \underline{n}_2 \neq 0}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_1}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_2}^{(2)}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})}. \quad (6.6)$$

Finally, for the Fourier coefficients we get,

$$\begin{aligned} E_{\underline{m}}^{(1)} &= \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{Q_{\underline{m}+\underline{n}} \overline{Q}_{\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq 0, \underline{n}_2 \neq 0}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_1}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_2}^{(2)}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})} \\ &= \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \left( Q_{\underline{m}+\underline{n}} + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}' \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}' \neq 0}} \frac{Q_{\underline{n}+\underline{n}'} \overline{Q}_{\underline{n}'}^{(2)}}{\underline{n}' \cdot \underline{\omega}} \right) \frac{\overline{Q}_{\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} E_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq 0}} \left[ Q_{\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2} + \frac{Q_{\underline{m}}}{iM(\mathcal{Q}_1)} \left( Q_{-\underline{n}_1-\underline{n}_2}^{(2)} \mathcal{R} - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq 0}} \frac{Q_{\underline{n}+\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right) \right] \frac{E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \\ &\quad + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{n}}^{(p)} E_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}, \quad \text{for } n \geq 2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

In the next two subsections we will follow the same steps of the case  $M(q^2) \neq 0$  and we will try to find convenient upper bounds for the Fourier coefficients given recursively in (6.7) and (6.8).

## 6.2 An Upper Bound for $|E_{\underline{m}}^{(1)}|$

We will make use again of (5.18) and of (5.27) in the form  $|Q_{\underline{m}}^{(2)}| \leq \mathcal{Q}^{(2)}(\delta) e^{-(x-\delta)|\underline{m}|}$ , for  $\delta > 0$  arbitrary but conveniently small. From (6.7) we have, using the same inequalities as in the previous

case,

$$\begin{aligned}
|E_{\underline{m}}^{(1)}| &\leq \mathcal{Q}\mathcal{Q}^{(2)}(\delta) \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \left( e^{-\chi|\underline{m}+\underline{n}|} + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}^{(2)}(\delta)^2}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} \sum_{\substack{\underline{n}' \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}' \neq \underline{0}}} \frac{e^{-(\chi-\delta)(|\underline{n}+\underline{n}'|+|\underline{n}'|)}}{|\underline{n}' \cdot \underline{\omega}|} \right) \frac{e^{-(\chi-\delta)|\underline{n}|}}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \\
&\leq W_1 \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \left( e^{-\chi|\underline{m}+\underline{n}|} + e^{-\chi|\underline{m}|} W_2 \sum_{\underline{n}' \in \mathbb{Z}^A} e^{-(\chi-\delta)|\underline{n}+\underline{n}'|-(\chi-2\delta)|\underline{n}'|} \right) e^{-(\chi-2\delta)|\underline{n}|}, \tag{6.9}
\end{aligned}$$

with  $W_1 := \Delta \mathcal{Q}\mathcal{Q}^{(2)}(\delta) \left(\frac{\sigma}{e\delta}\right)^\sigma$  and  $W_2 := \Delta \frac{\mathcal{Q}^{(2)}(\delta)^2}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} \left(\frac{\sigma}{e\delta}\right)^\sigma$ . Using the previously defined function  $\Xi_0$ , the last inequality in (6.9) leads to

$$|E_{\underline{m}}^{(1)}| \leq W_1 \Xi_0(\chi - 2\delta, \underline{m}) + e^{-\chi|\underline{m}|} W_2 \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \Xi_0(\chi - 2\delta, \underline{n}) e^{-(\chi-2\delta)|\underline{n}|} \tag{6.10}$$

and using (5.25) we get

$$|E_{\underline{m}}^{(1)}| \leq \mathcal{L}_1 e^{-(\chi-3\delta)|\underline{m}|} \tag{6.11}$$

for some constant  $\mathcal{L}_1$  (depending on  $\chi, \delta, \sigma$  etc.). Of course, one sees here that, choosing  $0 < \delta < \chi/3$ , we have proven that  $e_1$  is a quasi-periodic function on  $\mathbb{R}$ .

### 6.3 Recursive Upper Bounds for $|E_{\underline{m}}^{(n)}|$ with $n \geq 2$

We start now from relation (6.8) and try to find recursive bounds for  $|E_{\underline{m}}^{(n)}|$ , with  $n \geq 2$ , as in the case of the  $|C_{\underline{m}}^{(n)}|$ 's. For  $1 \leq p \leq n-1$  we assume the bound

$$|E_{\underline{m}}^{(p)}| \leq \mathcal{L}_p e^{-(\chi-\delta_p)|\underline{m}|} \tag{6.12}$$

for  $\mathcal{L}_p \geq 0$  and  $\delta_p > 0$ , small enough. This assumption has been proven above for the case  $p=1$  (see (6.11)). From (6.8) we have

$$\begin{aligned}
|E_{\underline{m}}^{(n)}| &\leq \mathcal{Q} \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p} \left\{ \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left[ e^{-\chi|\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2|} + \frac{e^{-\chi|\underline{m}|} \mathcal{Q}^{(2)}(\delta)}{|M(\mathcal{Q}_1)|} \left( |\mathcal{R}| e^{-(\chi-\delta)|\underline{n}_1+\underline{n}_2|} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \mathcal{Q}^{(2)}(\delta) \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{e^{-(\chi-\delta)(|\underline{n}+\underline{n}_1+\underline{n}_2|+|\underline{n}|)}}{|\underline{n} \cdot \underline{\omega}|} \right) \right] \frac{e^{-(\chi-\delta_p)|\underline{n}_1|-(\chi-\delta_{n-p})|\underline{n}_2|}}{(|\underline{n}_1 + \underline{n}_2| \cdot \underline{\omega})} \right\} + \\
&\quad e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n+1-p} \left\{ \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(2\chi-\delta_p-\delta_{n+1-p})|\underline{n}|} \right\},
\end{aligned}$$

for  $n \geq 2$ . Using once more (5.17) we have

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{Q} \Delta \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p} \left\{ L_3(p, \underline{m}) + e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}^{(2)}(\delta)}{|M(\mathcal{Q}_1)|} \left[ |\mathcal{R}| L_4(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, \chi - 2\delta) + \right. \right.$$

$$\Delta \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \left( \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} e^{-(\chi-2\delta)|\underline{n}|} L_3(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, 0, \chi - \delta, \underline{n}) \right) \Big] \Big\} +$$

$$e^{-\chi|\underline{m}|} \frac{\mathcal{Q}}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n+1-p} L_2(2\chi - \delta_p - \delta_{n+1-p}).$$

Using

$$L_3(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, 0, \chi - \delta, \underline{n}) \leq L_2(\chi - \delta[n])^2 L_2(\chi - \delta)$$

and

$$L_4(\chi - \delta_p, \chi - \delta_{n-p}, \chi - 2\delta) \leq L_2(\chi - \delta[n])^2$$

(see (5.48) and (5.51)), we get

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{L}_n e^{-(\chi-\delta[n]-3\delta)|\underline{m}|}, \quad (6.13)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n := & \mathcal{Q} \Delta \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma \left( \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p} \right) \left\{ \left( \frac{A}{e\delta} \right)^{2A} \exp \left( \frac{2\delta}{\tanh(\chi - \delta[n] - 2\delta)} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\mathcal{Q}^{(2)}(\delta)}{|M(\mathcal{Q}_1)|} \left( |\mathcal{R}| L_2(\chi - \delta[n])^2 + \Delta \left( \frac{\sigma}{e\delta} \right)^\sigma L_2(\chi - \delta[n])^2 L_2(\chi - \delta)^2 \right) \right\} + \\ & \frac{\mathcal{Q}}{2|M(\mathcal{Q}_1)|} L_2(2\chi - 2\delta[n]) \left( \sum_{p=2}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n+1-p} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Choosing  $\delta_n$  as an increasing sequence (converging to  $\delta_\infty < \chi$ ) one has  $\delta[n] = \delta_{n-1}$  and, with the choice  $\delta = (\delta_n - \delta_{n-1})/3$ , we get from (6.13)

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{L}_n e^{-(\chi-\delta_n)|\underline{m}|}, \quad (6.15)$$

thus proving inductively the bound (6.12) for  $\mathcal{L}_n$  given by the recurrence (6.14). As in the case of the functions  $c_n$  considered previously, this establishes that the functions  $e_n$  are, for all  $n \geq 1$ , quasi-periodic on  $\mathbb{R}$  since it implies that  $\sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} |E_{\underline{m}}^{(n)}| < \infty$ .

Note that from (6.14) the leading behavior of  $\mathcal{L}_n$  for large  $n$  is expected to be like

$$\mathcal{L}_n \approx \frac{C}{(\delta_n - \delta_{n-1})^{\sigma+2A}} \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}_p \mathcal{L}_{n-p}, \quad (6.16)$$

as in the case of  $\mathcal{K}_n$  above. As in that case, we draw the same negative conclusion about the possibility of proving absolute convergence of the infinite sum in (4.1) with the methods used in this paper.

## 7 Final Discussion

To finish these notes let us now briefly discuss in a non-rigorous way some problems involving our analysis and our results.

Our original intention was to prove quasi-periodicity of the solutions of the generalized Riccati equation (2.1) by analyzing its power series expansion in  $\epsilon$ . A step in this direction was the method of elimination of the secular terms, another was the proof of quasi-periodicity of the coefficients  $c_n$  and  $e_n$ . However, the series expansions for  $g$  in  $\epsilon$  could not be proven to be uniformly convergent for all  $t \in \mathbb{R}$  and  $\epsilon$  in some open set containing the point  $\epsilon = 0$ .

The question is, when should we expect that  $g$  is quasi-periodic? As discussed in Appendix A, the function  $g$  appeared through the Ansatz  $\phi(t) = \exp\left(-i \int_0^t (f(t') + g(t')) dt'\right)$  for one of the particular solutions of one of the components of the wave function  $\Phi$ , or more precisely, for a particular solution of the quasi-periodic Hill's equation (1.26). It is clear that  $g$  could not be expected to be quasi-periodic if  $\phi(t)$  becomes zero at some finite  $t$ , because quasi-periodic functions are bounded. A theorem by H. Bohr [16] asserts, up to technicalities, that if  $\phi(t)$  is bounded away from zero then  $g$  should be quasi-periodic. Hence, one of the questions would be to know whether there are particular solutions  $\phi$  of the quasi-periodic Hill's equation (1.26) such that  $|\phi(t)| > \delta$  for all  $t \in \mathbb{R}$  and some  $\delta > 0$ .

It is hard to prove this condition a priori. However, in the situation where  $f(t) = f_0$  is constant, we know that there are particular solutions of (1.26) of the form  $e^{\pm i\omega_0 t}$  with  $\omega_0 = \sqrt{\epsilon^2 + f_0^2}$ . These particular solutions do not vanish for  $t \in \mathbb{R}$ . In this case we have been able to show that the series expansion for  $g$  is convergent for  $|\epsilon| < |f_0|$ . This leads to the conjecture that  $g$  should be quasi-periodic at least for small perturbations of the case  $f(t) = \text{constant}$ , for instance if  $f(t) - M(f)$  is uniformly small. We have not been able to prove this conjecture.

There are other problems which have to be faced for a better understanding of the whole picture. Some are related to the unitarity condition  $U(t)U(t)^* = 1\mathbb{I}$ , which reduces to

$$|R(t)|^2 (1 - 2\text{Im}(g(0)S(t)) + (|g(0)|^2 + \epsilon^2) |S(t)|^2) = 1. \quad (7.1)$$

Relation (7.1) has implications which are not easy to verify by looking at our expansions.

First we note that, if we assume that a quasi-periodic solution  $g$  for the generalized Riccati equation (2.1) was found, then we must have  $M(g) \in \mathbb{R}$  for real  $\epsilon$ . For, if  $\text{Im}(M(g)) > 0$ ,  $R(t)$  diverges exponentially for  $t \rightarrow +\infty$  while  $S(t)$  stays bounded, violating (7.1) for large  $t$ . If, on the other hand,  $\text{Im}(M(g)) < 0$ ,  $R(t)$  will decay like  $\exp(-|\text{Im}(M(g))|t)$  for  $t \rightarrow +\infty$  while  $S(t)$  will behave as  $\exp(+2|\text{Im}(M(g))|t)$ . Hence, the product  $|R(t)|^2 |S(t)|^2$  will diverge for  $t \rightarrow +\infty$  making (7.1) impossible again. It is difficult to verify the condition  $M(g) \in \mathbb{R}$  for real  $\epsilon$  directly from our perturbative expansions for  $g$  but, from the unitarity of the time evolution, this must be true.

Moreover, the unitarity relation (7.1) imposes an additional condition which is hard to verify. Under the assumption that  $g$  is quasi-periodic with  $M(g) \in \mathbb{R}$  for real  $\epsilon$  it could still happen that  $M(R^{-2}) \neq 0$ . In this case the function  $S(t)$  would develop a term like  $M(R^{-2})t$ , which is linearly increasing in  $t$ , violating again (7.1) for large  $t$ . Hence, unitarity imposes the condition  $M(R^{-2}) = 0$ . If we assume that our perturbative expansions for  $g$  converge, the function  $R(t)^{-2}$

must presumably be of the form

$$R(t)^{-2} = e^{2i(M(f)+M(g))t} \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} h_{\underline{m}}(\epsilon) e^{-i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}.$$

To ensure that  $M(R^{-2}) = 0$  one should expect that  $h_{\underline{m}}(\epsilon)$  is of the form

$$h_{\underline{m}}(\epsilon) = (2M(f) + 2M(g) - \underline{m} \cdot \underline{\omega}) h_{\underline{m}}^0(\epsilon)$$

where  $h_{\underline{m}}^0(\epsilon)$  is a regular function of  $\epsilon$  in some eventually small neighborhood of  $\epsilon = 0$ . Again, it was not possible to verify this directly from the expansions.

Another possibility would be that the function  $g$  fails to be almost-periodic, due to some sort of resonance, for  $\epsilon$  in some eventually dense set  $\mathcal{E}_0 \subset \mathbb{R}$ . For such values of  $\epsilon$  the linearly increasing term  $M(R^{-2})t$  appearing in (7.1) would make no sense. Presumably,  $\mathcal{E}_0$  should be the set of solutions in  $\epsilon$  of  $2M(f) + 2M(g) - \underline{m} \cdot \underline{\omega}, \underline{m} \in \mathbb{Z}^B$ . This could explain the apparent impossibility of proving uniform convergence of our perturbative expansions for  $g$ .

If the Fourier coefficients of  $g$  are proportional to something like  $(\underline{m} \cdot \underline{\omega} + \epsilon)^{-1}$  one would not find an open neighborhood of  $\epsilon = 0$  where  $g$  is analytic, since the set  $\{\underline{m} \cdot \underline{\omega}, \underline{m} \in \mathbb{Z}^B\}$  is dense, under the assumptions on the frequencies. With the methods employed here it is not possible to rule out such cases. As we explained before, however, we conjecture that  $g$  is analytic on  $\epsilon$  at least for the situation where  $f(t) - M(f)$  is uniformly small.

It would be very interesting to investigate further the problems and conjectures discussed here and the mechanisms responsible for eventually breaking the analyticity of the function  $g$  as a function of  $\epsilon$ . This should involve a deeper analysis than that attempted here.

Finally we note that one should expect to have much better estimates in the case where  $f$  is a periodic function, since there no small denominators should be found in the perturbative expansions. Results in this direction will be found in a forthcoming publication.

## Appendices

---

### A The Wave Function, Hill's Equation and a Generalized Riccati Equation

Let  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix}$ , with  $\phi_{\pm} \in C^2(\mathbb{R})$ , be a solution of the Schrödinger equation (1.5) with Hamiltonian  $H_1$  above:

$$i\Phi'(t) = (\epsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3)\Phi(t), \quad (\text{A.1})$$

for  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  and  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , with initial data  $\begin{pmatrix} \phi_+(0) \\ \phi_-(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ . Above  $\sigma_i$  are the Pauli matrices in their usual representations.

Taking the time derivative of both sides of (A.1) we get

$$\begin{aligned} i\Phi''(t) &= f'(t)\sigma_3\Phi(t) - i(\epsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3)^2\Phi(t) \\ &= f'(t)\sigma_3\Phi(t) - i[(\epsilon^2 + f(t)^2)\mathbb{1} + \epsilon f(t)(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]\Phi(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Hence,

$$i\Phi''(t) = (f'(t)\sigma_3 - i(\epsilon^2 + f(t)^2)\mathbb{1})\Phi(t), \quad (\text{A.3})$$

which is a diagonal equation for  $\Phi(t)$ . For the components of  $\Phi$ , (A.3) means

$$\phi_+''(t) + (+if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2)\phi_+(t) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_-''(t) + (-if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2)\phi_-(t) = 0. \quad (\text{A.5})$$

The solutions of (A.1) can be recovered from the solutions of the differential equations (A.4) and (A.5) with initial data  $(\phi_+(0), \phi_+'(0))$  and  $(\phi_-(0), \phi_-'(0))$ , respectively, by imposing

$$i\Phi'(0) = (\epsilon\sigma_1 + f(0)\sigma_3)\Phi(0) \quad (\text{A.6})$$

as a restriction to the initial data, i.e., by imposing

$$i\phi_+'(0) = f(0)\phi_+(0) + \epsilon\phi_-(0), \quad (\text{A.7})$$

$$i\phi_-'(0) = -f(0)\phi_-(0) + \epsilon\phi_+(0). \quad (\text{A.8})$$

Since (A.5) is obtained from (A.4) by the change  $f \rightarrow -f$ , we will study only the equation

$$\phi''(t) + (if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2)\phi(t) = 0, \quad (\text{A.9})$$

with initial data  $(\phi(0), \phi'(0))$ .

In order to motivate the Ansatz we are going to use, let us consider first a particular way of solving (A.9) for the case  $\epsilon \equiv 0$ .

## A.1 The Case $\epsilon = 0$

In this case equation (A.9) reduces to

$$\phi''(t) + (if'(t) + f(t)^2) \phi(t) = 0. \quad (\text{A.10})$$

A natural Ansatz is given by solutions of the form

$$\phi(t) = \phi_0 \exp \left( -i \int_0^t (G(t') + f(t')) dt' \right),$$

where  $\phi_0$  is an arbitrary constant. This leads to the following equation for  $G$ :

$$G' - iG^2 - 2ifG = 0. \quad (\text{A.11})$$

This is an equation of the Bernoulli type, and has one obvious solution:  $g \equiv 0$ . Another solution can be found defining  $v = 1/G$ , which, in face of (A.11), leads to the linear equation

$$v' + 2ifv + i = 0, \quad (\text{A.12})$$

whose general solution is

$$v(t) = \frac{1}{p_0(t)} \left( a_0 - i \int_0^t p_0(t') dt' \right), \quad (\text{A.13})$$

where  $a_0$  is an arbitrary constant and

$$p_0(t) := \exp \left( 2i \int_0^t f(t') dt' \right). \quad (\text{A.14})$$

This leads to the following general expression for the solution of (A.11):

$$G(t) = \frac{p_0(t)}{a_0 - i \int_0^t p_0(t') dt'}. \quad (\text{A.15})$$

Since  $G \equiv 0$  is also a solution of (A.11), we allow formally  $a_0 \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ .

Hence, the general solution of (A.10) is

$$\phi(t) = \phi_0 \exp \left( -i \int_0^t f(t') dt' \right) \exp \left( -i \int_0^t \frac{p_0(t')}{a_0 - i \int_0^{t'} p_0(t'') dt''} dt' \right), \quad (\text{A.16})$$

for arbitrary constants  $\phi_0$  and  $a_0$ . Since

$$\frac{p_0(t)}{a_0 - i \int_0^t p_0(t') dt'} = i \left( \ln \left( a_0 - i \int_0^t p_0(t') dt' \right) \right)'$$

we get, finally, the general solution of (A.10),

$$\phi(t) = \exp\left(-i \int_0^t f(t') dt'\right) \left[ \phi_1 + \phi_2 \int_0^t p_0(t') dt' \right], \quad (\text{A.17})$$

with  $\phi_1 = \phi_0 a_0^2$  and  $\phi_2 = -i\phi_0 a_0$ , or in terms of the initial data,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi(0), \\ \phi_2 &= if(0)\phi(0) + \phi'(0). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

After imposing (A.7) and (A.8) (with  $\epsilon = 0$ , of course) we get, as expected, the solutions

$$\phi_+(t) = \phi_+(0) \exp\left(-i \int_0^t f(t') dt'\right), \quad (\text{A.19})$$

$$\phi_-(t) = \phi_-(0) \exp\left(+i \int_0^t f(t') dt'\right). \quad (\text{A.20})$$

## A.2 The Case $\epsilon \neq 0$

For  $\epsilon \neq 0$  we will follow steps analogous to the previous case, but the situation here is more complicated. For solving (A.9) we start with the same Ansatz, namely,

$$\phi(t) = \phi_0 \exp\left(-i \int_0^t (G(t') + f(t')) dt'\right).$$

This leads to equation (2.1) for  $G$ .

Equation (2.1) is a differential equation of the generalized Riccati type. According to the theory of the generalized Riccati equations, given a particular solution  $g$  of (2.1), a general solution is of the form  $G = g + u$ , where  $u$  satisfies the Bernoulli equation

$$u' - 2i(f + g)u - iu^2 = 0. \quad (\text{A.21})$$

This, in turn, can be transformed into a linear equation by defining  $v := 1/u$ , which gives for  $v$

$$v' + 2i(f + g)v + i = 0. \quad (\text{A.22})$$

The general solution of (A.22) is

$$v(t) = \frac{1}{p(t)} \left( a_0 - i \int_0^t p(t') dt' \right), \quad (\text{A.23})$$

where  $a_0$  is an arbitrary constant and

$$p(t) := \exp\left(2i \int_0^t (f(t') + g(t')) dt'\right). \quad (\text{A.24})$$

Hence, the general solution of (2.1) is

$$G(t) = g(t) + \frac{p(t)}{a_0 - i \int_0^t p(t') dt'}. \quad (\text{A.25})$$

Since  $u \equiv 0$  is, in principle, also a solution of (A.21), we allow formally  $a_0 \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ .

For (A.9) we get, in complete analogy with the  $\epsilon = 0$  case, the general solution

$$\phi(t) = \exp \left( -i \int_0^t (f(t') + g(t')) dt' \right) \left[ \phi_1 + \phi_2 \int_0^t p(t') dt' \right], \quad (\text{A.26})$$

with  $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}$ , arbitrary constants. In terms of the initial data one easily checks that

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi(0), \\ \phi_2 &= i(f(0) + g(0))\phi(0) + \phi'(0). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Expression (A.26) indicates the solution for  $\phi_+$ . The solution for  $\phi_-$  can be obtained, as we pointed before, by interchanging  $f \rightarrow -f$ . Since  $g$  depends on  $f$ , we must first discover what happens to  $g$  by changing the sign of  $f$ . The generalized Riccati equation (2.1) indicates that, if  $g$  is a solution for  $f$ , then  $-\bar{g}$  is a solution for  $-f$ . Hence, using the constraints (A.7)-(A.8), we get finally equations (2.2) and (2.3) which express  $\phi_{\pm}$  in terms of  $g$  and of the initial conditions.

In the general case it is interesting to note that the whole dependence on  $\epsilon$  in (A.21) is hidden in the still unknown function  $g$ . For  $\epsilon = 0$ , equation (2.1) reduces to (A.11). Comparing (A.21) with (A.11), (A.14) with (A.24) and (A.25) with (A.26) we conclude that we should have  $g \equiv 0$  for  $\epsilon = 0$ .

In the case where  $f(t) = f_0$  is a constant, the solution  $g = -f_0 + \text{sign}(f_0)\sqrt{f_0^2 + \epsilon^2}$  for  $f_0 \neq 0$  satisfies this condition. For  $f_0 = 0$  we have  $g = \pm\epsilon$ .

## B The Quasi-Periodicity of $q(t)$ and $\exp(iF(t))$

It is already clear that  $\exp(iF(t))$  is an almost-periodic function since  $F$  (defined in (5.3)) is quasi-periodic and since the set of all almost-periodic functions on  $\mathbb{R}$  is a closed sub-algebra of  $L^\infty(\mathbb{R})$  (see, e.g. [14]).

Let  $P_n$  be the Taylor polynomial of degree  $n$  of the exponential function:  $P_n(x) = \sum_{a=0}^n \frac{x^a}{a!}$ . We know that

$$|\exp(x) - P_n(x)| \leq \left(1 - \frac{|x|}{n+2}\right)^{-1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (\text{B.1})$$

for  $n+2 > |x|$ ,  $x \in \mathbb{C}$ . Let  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , be given by

$$F_n(t) := -i \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B, \underline{n} \neq 0 \\ |\underline{n}|_\infty \leq n}} \frac{f_{\underline{n}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f} (e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f t} - 1), \quad (\text{B.2})$$

with  $|\underline{n}|_\infty := \max\{|n_1|, \dots, |n_B|\}$ , the  $l^\infty$  norm on  $\mathbb{Z}^B$ , and define

$$\sigma_n(t) \equiv \sigma_n[F](t) := \frac{F_1(t) + \dots + F_n(t)}{n}. \quad (\text{B.3})$$

By the hypothesis,  $\sigma_n$  converges to  $F$  uniformly on  $\mathbb{R}$  (see e.g. [14]). We also know that  $|F_n| \leq D$ , uniformly on  $n$  and  $t$ , where  $D$  is the left hand side of (5.2). Therefore  $|\sigma_n(t)| \leq D$  uniformly on  $n$  and  $t$ . Hence, for  $n$  large enough,

$$\begin{aligned} |\exp(iF(t)) - P_n(i\sigma_n(t))| &\leq |\exp(iF(t)) - \exp(i\sigma_n(t))| + |\exp(i\sigma_n(t)) - P_n(i\sigma_n(t))| \\ &\leq |\exp(iF(t)) - \exp(i\sigma_n(t))| + \left(1 - \frac{|\sigma_n(t)|}{n+2}\right)^{-1} \frac{|\sigma_n(t)|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

From the fact that  $|\sigma_n(t)|$  is uniformly bounded on  $n$  and  $t$  and from the uniform continuity of the exponential function on compact sets we conclude that  $|\exp(iF(t)) - P_n(i\sigma_n(t))|$  can be made smaller than any prescribed  $\epsilon > 0$ , for all  $t \in \mathbb{R}$ , by choosing  $n$  large enough.

The Fourier coefficients  $W(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , of the almost-periodic function  $\exp(iF(t))$  are given by (see, e.g. [14])

$$W(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \exp(iF(\tau)) e^{-i\xi\tau} d\tau. \quad (\text{B.4})$$

According to our previous remark, we have

$$|W(\xi)| \leq \epsilon + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T P_n(i\sigma_n(\tau)) e^{-i\xi\tau} d\tau \right|, \quad (\text{B.5})$$

for any prescribed  $\epsilon > 0$ , for  $n$  large enough. Now, for each  $n$  fixed,  $\int_{-T}^T P_n(i\sigma_n(\tau)) e^{-i\xi\tau} d\tau$  is bounded in  $T$  if  $\xi$  is not of the form  $\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f$ , with  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^B$ .

Hence, for  $\xi$  not of the form  $\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f$ , with  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^B$ , we have  $W(\xi) = 0$ . This completes the proof that  $\exp(iF(t))$  (and hence  $q(t)$ ) is quasi-periodic with  $\beta(\exp(iF(t))) = \beta(F) = \beta(f)$ .

## C The Relation Between $q$ and $f$

Since  $f$  is real and quasi-periodic we write

$$f(t) = f_0 + \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} f_{\underline{n}} e^{i\underline{n} \cdot \underline{\omega}_f t},$$

with  $f_0 = M(f) \in \mathbb{R}$  and  $\overline{f_{\underline{n}}} = f_{-\underline{n}}$ .

To simplify our analysis we will consider here the case where the sum above is a finite sum. This situation is physically more realistic anyway.

To fix the notation we write

$$f(t) = f_0 + \sum_{a=1}^{2J} f_a e^{i n_a \cdot \underline{\omega}_f t}, \quad (\text{C.1})$$

with the convention  $\underline{n}_a = -\underline{n}_{2J-a+1} \neq 0$ ,  $1 \leq a \leq J$ , with  $f_a \equiv f_{\underline{n}_a}$  and where  $J \geq 1$ . Clearly  $\overline{f_a} = f_{2J-a+1}$ ,  $1 \leq a \leq J$ .

We get

$$q(t) = e^{i\gamma_f} e^{if_0 t} \prod_{a=1}^{2J} \exp \left( \frac{f_a}{\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f} e^{i\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f t} \right), \quad (\text{C.2})$$

with

$$\gamma_f := i \sum_{a=1}^{2J} \frac{f_a}{\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f}. \quad (\text{C.3})$$

As one easily sees,  $\gamma_f \in \mathbb{R}$

Expanding the exponential functions inside of the product we have

$$q(t) = e^{i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{f_a}{\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f} \right)^{p_a} \right] \right\} \exp \left( i \left( f_0 + \underline{\omega}_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b \right) t \right). \quad (\text{C.4})$$

The function  $q^2$  is obtained by replacing  $f \rightarrow 2f$ , what gives

$$q(t)^2 = e^{i2\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f} \right)^{p_a} \right] \right\} \exp \left( i \left( 2f_0 + \underline{\omega}_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b \right) t \right). \quad (\text{C.5})$$

Hence,

$$M(q^2) = e^{i2\gamma_f} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2J}=0 \\ 2f_0 + \underline{\omega}_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b = 0}}^{\infty} \prod_{a=1}^{2J} \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f} \right)^{p_a}. \quad (\text{C.6})$$

Depending on the values of  $f_0$  and of  $\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f$ ,  $1 \leq a \leq 2J$ , it may be impossible to find a solution for

$$2f_0 + \underline{\omega}_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b = 0 \quad (\text{C.7})$$

with  $p_1, \dots, p_{2J} \geq 0$ . If that happens we have  $M(q^2) = 0$ .

Note that (C.7) has always solutions in the case  $f_0 = 0$ . There we have

$$\underline{\omega}_f \cdot \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b = \underline{\omega}_f \cdot \sum_{b=1}^J (p_b - p_{2J-b+1}) \underline{n}_b \quad (\text{C.8})$$

and this can be made equal to zero by taking  $p_b = p_{2J-b+1}$  for all  $b$  with  $1 \leq b \leq J$ .

From (C.4) we conclude that  $q$  has a Fourier decomposition

$$q(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{m}} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}$$

with  $\underline{\omega}$  defined in (1.27) and with

$$Q_{\underline{m}} = e^{i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(\underline{P}, \underline{m}) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{f_a}{n_a \cdot \underline{\omega}_f} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{C.9})$$

where

$$\underline{P} \equiv \underline{P}(p_1, \dots, p_{2J}, n_1, \dots, n_{2J}) := \begin{cases} \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b \in \mathbb{Z}^B, & \text{if } f_0 = 0, \\ \left( \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b, 1 \right) \in \mathbb{Z}^{B+1}, & \text{if } f_0 \neq 0. \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

and where  $\delta(\underline{P}, \underline{m})$  is the Krönecker delta:

$$\delta(\underline{P}, \underline{m}) := \begin{cases} 1, & \text{if } \underline{P} = \underline{m}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

The presence of the factor  $\delta(\underline{P}, \underline{m})$  remembers the fact that  $Q_{\underline{m}}$  is trivially zero if  $\underline{P} = \underline{m}$  has no solutions for  $p_1, \dots, p_{2J} \in \mathbb{N}$ . We say that  $Q_{\underline{m}}$  is *non-trivial* if  $\underline{P} = \underline{m}$  has solutions for some  $p_b$ 's in  $\mathbb{N}$ .

Since the Fourier coefficients  $Q_{\underline{m}}^{(2)}$  of  $q^2$  can be obtained from those of  $q$  by replacing  $f \rightarrow 2f$  we have

$$Q_{\underline{m}}^{(2)} = e^{i2\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(\underline{P}, \underline{m}) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \cdot \underline{\omega}_f} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{C.11})$$

## D The Exponential Decay of $Q_{\underline{m}}$

After the remarks of Appendix C we are now prepared for the proof of inequality (5.18). Of course, we have to concentrate on the non-trivial  $Q_{\underline{m}}$ 's. In this case the vectors  $\underline{m}$  are either of the form  $\underline{m} = (\underline{m}, 1) \in \mathbb{Z}^{B+1}$  for  $f_0 \neq 0$  or of the form  $\underline{m} = \underline{m} \in \mathbb{Z}^B$  for  $f_0 = 0$ , where  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^B$  satisfies

$$\underline{m} = \sum_{b=1}^{2J} p_b \underline{n}_b \quad (\text{D.1})$$

for some  $p_1, \dots, p_{2J} \in \mathbb{N}$ .

Let us denote by  $m^k$  (respectively, by  $n_b^k$ ) the  $k$ -th component of  $\underline{m}$  (respectively, of  $\underline{n}_b$ ) with  $1 \leq k \leq B$ . The condition (D.1) says that

$$m^k = \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b^k$$

with  $1 \leq k \leq B$ . Hence,

$$|m^k| \leq \left( \max_{1 \leq b \leq 2J} p_b \right) \sum_{b=1}^{2J} |n_b^k|$$

and, after summing over all  $k$ , we get

$$\left( \max_{1 \leq b \leq 2J} p_b \right) \geq \mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|, \quad (\text{D.2})$$

where  $|\underline{m}| = \|\underline{m}\|_1$  is the  $l_1$  norm of  $\underline{m}$  and where

$$\mathcal{N} := \sum_{b=1}^{2J} |\underline{n}_b|.$$

Note that, since the  $\underline{n}_b$ 's are fixed by the choice of  $f$ ,  $\mathcal{N}$  is non-zero and will not be changed.

Let us now return to (C.9). It says that for the non-trivial  $Q_{\underline{m}}$ 's we have

$$\begin{aligned} |Q_{\underline{m}}| &\leq \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2J} = 0 \\ \max_{1 \leq b \leq 2J} p_b \geq \mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|}}^{\infty} \frac{\varphi^{p_1 + \dots + p_{2J}}}{p_1! \cdots p_{2J}!} \\ &\leq 2J \sum_{p_1, \dots, p_{2J-1}=0}^{\infty} \sum_{p_{2J} \geq \mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|}^{\infty} \frac{\varphi^{p_1 + \dots + p_{2J}}}{p_1! \cdots p_{2J}!} \\ &= 2J e^{(2J-1)\varphi} \sum_{n \geq [\mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|]}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

where

$$\varphi := \max_{1 \leq a \leq 2J} \left| \frac{f_a}{\underline{n}_a \cdot \underline{\omega}_f} \right|.$$

We conclude that

$$|Q_{\underline{m}}| \leq (2J e^{(2J-1)\varphi}) \frac{\varphi^{[\mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|]}}{[\mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|]!} \left( 1 - \frac{\varphi}{[\mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|] + 1} \right)^{-1}, \quad (\text{D.4})$$

for  $[\mathcal{N}^{-1} |\underline{m}|] + 1 > \varphi$ . Above  $[x]$  is the lowest integer larger or equal to  $x$ . From this, and since  $|\underline{m}| \leq |\underline{m}| \leq 1 + |\underline{m}|$  for the sort of vectors  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$  in consideration, the inequality (5.18) follows immediately, for convenient choices of  $\mathcal{Q}$  and  $\chi > 0$ .

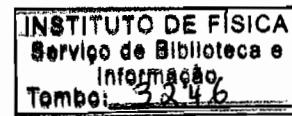
Note that (D.4) implies an actually even stronger decay in  $|\underline{m}|$  for  $Q_{\underline{m}}$  than that given in (5.18). Unfortunately, however, this does not seem to help to improve our estimates in a way to change the main results of this paper, specially those concerning the large- $n$  behavior of the constants  $\mathcal{K}_n$  and  $\mathcal{L}_n$ , important for the proof of quasi-periodicity of the solution  $g$ .

---

## References

- [1] H. Jauslin. "Stability and Chaos in Classical and Quantum Hamiltonian Systems" in II Granada Seminar on Computational Physics. Ed. by P. Garrido and J. Marro. World Scientific, Singapore. 1993.
- [2] W. F. Wreszinski. "Atoms and Oscillators in Quasi-Periodic External Fields". *Helv. Phys. Acta* **70** (1997) 109-123.
- [3] H. Bohr. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I.". *Acta Mathematica* **45**, (1924) 29-127. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II.". *Acta Mathematica* **46**, (1925) 101-214. "Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III.". *Acta Mathematica* **47**, (1926) 237-281.
- [4] P. Bohl. "Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie". *Journal de Crelle* **131**, (1906) 268-321.
- [5] W. F. Wreszinski and S. Casmeridis. "Models of Two Level Atoms in Quasiperiodic External Fields". *J. Stat. Phys.* February 1998. To appear.
- [6] H. Jauslin and J. L. Lebowitz. "Spectral and Stability Aspects of Quantum Chaos". *Chaos* **1**, 114 (1991).
- [7] J. Feldman and E. Trubowitz. "Renormalization in Classical Mechanics and Many Body Quantum Field Theory". *Jornal D'Analyse Mathématique* **58**, 213 (1992).
- [8] L. H. Eliasson. "Absolutely Convergent Series Expansions for Quasi Periodic Motions". *Mathematical Physics Electronic Journal* **2**, No. 4 (1996) (see the URL <http://www.ma.utexas.edu/mpej/MPEJ.html>)
- [9] L.H. Eliasson. "Floquet Solutions for the 1-Dimensional Quasi-Periodic Schrödinger Equation". *Comm. Math. Phys.* **146**, 447-482 (1992).
- [10] G. Gallavotti. "Twistless KAM Tori". *Commun. Math. Phys.* **164**, 145-156 (1994).
- [11] G. Gentile and V. Mastropiero. "Methods for the Analysis of the Lindstedt Series for KAM Tori and Renormalizability in Classical Mechanics. A Review with Some Applications". *Rev. Math. Phys.* **8** (1996) 393-444.
- [12] G. Benfatto, G. Gentile and V. Mastropietro. "Electrons in a Lattice with an Incommensurate Potential". *J. Stat. Phys.*, **89**, 655-708 (1997).
- [13] J. W. S. Cassels. "Some Metrical Theorems in Diophantine Approximation. I". *Proc. Camb. Phil. Soc.* **46**, 209 (1950).
- [14] Yitzhak Katznelson. "An Introduction to Harmonic Analysis". Dover Publications. 1978.
- [15] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik. "Concrete Mathematics - A Foundation for Computer Science". Addison-Wesley Publishing Company. 1994.

- [16] H. Bohr. "Über fastperiodische ebene Bewegungen". Comment. Math. Helv. **4**, (1932) 51-64.



v.2

# Converging Perturbative Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level System with a Hamiltonian Depending Periodically on Time

João C. A. Barata<sup>1</sup>

Instituto de Física  
Universidade de São Paulo  
Caixa Postal 66 318  
05315 970. São Paulo. SP. Brasil

E-mail: jbarata@fma.if.usp.br

**Abstract.** We study the Schrödinger equation of a class of two-level systems under the action of a periodic time-dependent external field in the situation where the energy difference  $2\epsilon$  between the free energy levels is sufficiently small with respect to the strength of the external interaction. Under suitable conditions we show that this equation has a solution in terms of converging power series expansions in  $\epsilon$ . In contrast to other expansion methods, like in the Dyson expansion, the method we present is not plagued by the presence of “secular terms”. Due to this feature we were able to prove absolute and uniform convergence of the Fourier series involved in the computation of the wave functions and to prove absolute convergence of the  $\epsilon$ -expansions leading to the “secular frequency” and to the coefficients of the Fourier expansion of the wave function.

**Keywords:** Time-dependent systems in Quantum Mechanics. Two-level systems. Hill’s equation. Riccati equations.

---

<sup>1</sup>Partially supported by CNPq.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	The Main Result . . . . .	6
1.2	Remarks on the Notation . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Some Previous Results</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>The Recursive Relations in the Periodic Case</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Inductive Bounds for the Fourier Coefficients</b>	<b>14</b>
4.1	Case I . . . . .	15
4.2	Case II . . . . .	17
<b>5</b>	<b>The Fourier Expansion for the Wave Function</b>	<b>17</b>
5.1	The Floquet Form of the Wave Function. The Fourier Decomposition and the Secular Frequency . . . . .	18
5.2	Remarks on the Unitarity of the Propagator . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Discussion on the Classes of Solutions</b>	<b>22</b>
6.1	An Explicit Example . . . . .	23
6.2	A Second Example . . . . .	23
<b>A</b>	<b>Short Description of the Strategy Followed in [1]</b>	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>The Decay of the Fourier Coefficients of <math>q</math> and <math>q^2</math></b>	<b>26</b>
<b>C</b>	<b>Bounds on Convolutions</b>	<b>28</b>
<b>D</b>	<b>Catalan Numbers. Bounds on the Constants <math>K_n</math></b>	<b>29</b>

# 1 Introduction

Let us consider the following Hamiltonian for a two-level system under the action of an external time-dependent field

$$H_1(t) = H_0 + H_I(t) = \epsilon\sigma_3 - f(t)\sigma_1 \quad (1.1)$$

and the corresponding Schrödinger equation<sup>2</sup>

$$i\partial_t\Psi(t) = H_1(t)\Psi(t), \quad (1.2)$$

with  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Here  $f(t)$  is a function of time  $t$  and  $\epsilon \in \mathbb{R}$  is a parameter representing half of the energy difference between the “free” (i.e., for  $f \equiv 0$ ) energy levels. The symbols  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  and  $\sigma_3$  denote the Pauli matrices in their usual representations:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

satisfying the commutation relations  $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$ , plus cyclic permutations.

The “interaction Hamiltonian”  $H_I(t) := -f(t)\sigma_1$  represents a time-dependent external interaction coupled to the system inducing transitions between the two eigen-states of the free Hamiltonian  $H_0 := \epsilon\sigma_3$ . The situation where  $\epsilon$  is “small” characterizes the “large coupling domain” [2]-[3].

The system described above is certainly one of the simplest non-trivial time-depending quantum systems and the study of the solutions of (1.2) is of basic importance for many physical applications as, e.g., in quantum optics or in problems of quantum tunnelling.

Equation (1.2) has been analysed by many authors in various approximations. In the wide literature on this subject we mention the pioneering work of Autler and Townes [4], where these authors studied the solutions of (1.2) for the case where, in our notation,  $f(t) = -2\beta \cos(\omega t)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Their work is exact but non-rigorous and involved a combination of the method of continued fractions, for relating the coefficients the Fourier decomposition of the wave functions, with numerical analysis. No proof has been obtained that the continued fractions converge and further unjustified restrictions have been made in order to transform some transcendental equations into low order algebraic equations, which are then solved either exactly or, specially for strong fields, numerically.

For a recent review on the mathematical theory of quantum systems submitted to time-depending periodic and quasi-periodic perturbations see [2]. For an introduction to the subject of “quantum chaos” and quantum stability, see [5]. See also [3] for a spectral analysis of the quasi-energy operator for two-level atoms in the quasi-periodic case.

In [1] we studied the system described by (1.2) in the situation where  $f$  is a quasi-periodic function of time and a special sort of perturbative expansion (power series expansion in  $\epsilon$ ) has been developed. Its main virtue is to be free of the so-called “secular terms”, i.e., polynomials in  $t$  that appear order by order in perturbation theory and that spoil the analysis of convergence of the series and the proofs of quasi-periodicity of the perturbative terms. Although we have not been able to prove convergence of our power series expansion in the general case where  $f$  is quasi-periodic it has been established that the coefficients of the expansion are indeed quasi-periodic functions of time.

---

<sup>2</sup>For simplicity we shall adopt here a system of units with  $\hbar = 1$ .

One of the obstacles found in the attempt to prove convergence of the series is the presence of "small denominators". This typical feature of perturbative approximations for solutions of differential equations with quasi-periodic coefficients is well known as one of the main sources of problems in the mathematically precise treatment of such equations.

On what concerns proofs of convergence it should, therefore, be expected that better results could be obtained if the function  $f$  were restricted to be periodic since, in this case, no problems with small denominators should afflict our expansions.

However, the problem with small denominators is not the only problem to be faced in the perturbative expansion of [1]. In this paper we show how to circumvent the additional sources of difficulties and to finally establish convergence of our perturbative expansion for periodic  $f$ .

By a time-independent unitary transformation, representing a rotation of  $\pi/2$  around the 2-axis, we may replace  $H_1(t)$  by

$$H_2(t) := (e^{-i\pi\sigma_2/4}) H_1(t) (e^{i\pi\sigma_2/4}) = \epsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3 \quad (1.3)$$

and the Schrödinger equation becomes

$$i\partial_t\Phi(t) = H_2(t)\Phi(t), \quad (1.4)$$

with

$$\Phi(t) := e^{-i\pi\sigma_2/4}\Psi(t). \quad (1.5)$$

The theorem below, proven in [1], presents the solution of the Schrödinger equation (1.4) in terms of particular solutions of a generalized Riccati equation.

**1.1 Theorem.** *Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  and  $\epsilon \in \mathbb{R}$  and let  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , be a particular solution of the generalized Riccati equation*

$$G' - iG^2 - 2ifG + i\epsilon^2 = 0. \quad (1.6)$$

*Then, the function  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  given by*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix} = U(t)\Phi(0) = U(t, 0)\Phi(0), \quad (1.7)$$

*where*

$$U(t) := \begin{pmatrix} R(t)(1 + ig(0)S(t)) & -i\epsilon R(t)S(t) \\ -i\epsilon \overline{R(t)} \overline{S(t)} & \overline{R(t)} \left(1 - i \overline{g(0)} \overline{S(t)}\right) \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

*with*

$$R(t) := \exp \left( -i \int_0^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \right) \quad (1.9)$$

*and*

$$S(t) := \int_0^t R(\tau)^{-2} d\tau \quad (1.10)$$

*is a solution of the Schrödinger equation (1.4) with initial value  $\Phi(0) = \begin{pmatrix} \phi_+(0) \\ \phi_-(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ .  $\square$*

For a proof of Theorem 1.1, see [1]. Let us briefly describe some of the ideas leading to Theorem 1.1 and to other results of [1]. As we saw in [1], the solutions of the Schrödinger equation (1.4) can be studied in terms of the solutions of a particular complex version of Hill's equation:

$$\phi''(t) + (if'(t) + \epsilon^2 + f(t)^2) \phi(t) = 0. \quad (1.11)$$

In fact, a simple computation (see [1]) shows that the components  $\phi_{\pm}$  of  $\Phi(t)$  satisfy precisely

$$\begin{aligned} \phi_+'' + (+if' + \epsilon^2 + f^2) \phi_+ &= 0 \\ \phi_-'' + (-if' + \epsilon^2 + f^2) \phi_- &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

As a side remark we note that equations (1.12) are simpler and more convenient than the equations obtained by separating  $\psi_+$  and  $\psi_-$  from (1.2):

$$\begin{aligned} \psi_+'' - \left(\frac{f'}{f}\right) \psi_+' + \left(\epsilon^2 + f^2 - i\epsilon \left(\frac{f'}{f}\right)\right) \psi_+ &= 0 \\ \psi_-'' - \left(\frac{f'}{f}\right) \psi_-' + \left(\epsilon^2 + f^2 + i\epsilon \left(\frac{f'}{f}\right)\right) \psi_- &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

This last pair of equations, mentioned (but not used) in [4], is mathematically less convenient because the coefficient  $f'/f$  can be discontinuous and unbounded in typical cases as, for instance when  $f(t) = -2\beta \cos(\omega t)$ , the case analysed in [4].

In [1] we attempted to solve (1.11) using the Ansatz

$$\phi(t) = \exp \left( -i \int_0^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau \right). \quad (1.14)$$

It follows that  $g$  has to satisfy the generalized Riccati equation (1.6) and we tried to find solutions for  $g$  in terms of a power expansion in  $\epsilon$  like

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n c_n(t), \quad (1.15)$$

where

$$q(t) := \exp \left( i \int_0^t f(\tau) d\tau \right). \quad (1.16)$$

The heuristic idea behind the Ansätze (1.14) and (1.15) is the following. For  $\epsilon \equiv 0$  a solution for (1.11) is given by  $\exp(-i \int_0^t f(\tau) d\tau)$ . Thus, in (1.14) and (1.15) we are searching for solutions in terms of an “effective external field” of the form  $f + g$ , with  $g$  vanishing for  $\epsilon = 0$ .

Notice that a solution of the form (1.14) leads to only one of the two independent solutions of the second order Hill's equation (1.11). The complete solution of the Schrödinger equation (1.4) in terms of solutions of the generalized Riccati equation (1.6) is that described in Theorem 1.1.

As mentioned above, perturbative solutions of quasi-periodically time-dependent systems are usually plagued by small denominators and by the presence of the so-called “secular terms”. In

[1] we discovered a particular way to eliminate completely the secular terms from the perturbative expansion of  $g$  (see Appendix A) and we were able to show, under some special assumptions, that the coefficients  $c_n(t)$  are all quasi-periodic functions. In [1] we proved convergence of our perturbative solution in the somewhat trivial case where  $f(t)$  is a non-zero constant function. Unfortunately no conclusion could be drawn about the convergence of the perturbative expansion for  $g$  in the general case of quasi-periodic  $f$ . We conjectured, however, that our expansion is uniformly convergent at least in the situation where  $f(t) - M(f)$  is uniformly small. Here  $M(h)$  is the so-called “mean value” of an *almost periodic* function  $h$ , defined as (see, e.g. [6])

$$M(h) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(t) dt. \quad (1.17)$$

The technically central result of the present paper is the proof that, under suitable assumptions, the series (1.15) converges absolutely and uniformly on  $\mathbb{R}$  as a function of time for  $|\epsilon|$  small enough and  $f$  periodic. This is the content of Theorem 3.1. Moreover, we show that the functions  $c_n$  and, hence,  $g$ , have uniformly converging Fourier series representations. We use this fact together with the solution (1.8) to find the Floquet representation of the components  $\phi_{\pm}$  of the wave function in terms of uniformly converging Fourier series representations. This is the content of Theorem 1.2. Absolutely converging power series in  $\epsilon$  for the Fourier coefficients and for the secular frequency are also presented.

We believe that the methods employed in this paper are also of importance for the general theory of Hill’s equation. It would be of great interest to know whether the ideas described in [1] and here can be generalized and applied to a larger class of Hill’s equations than those we studied so far.

## 1.1 The Main Result

On what concerns the solutions of the Schrödinger equation (1.4) the next theorem summarises our main results.

**1.2 Theorem.** *Let  $f$  be a real  $T_\omega$ -periodic function of time ( $T_\omega := 2\pi/\omega$ ) whose Fourier decomposition*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n e^{in\omega t}, \quad (1.18)$$

*with  $\omega > 0$ , contains only a finite number of terms, i.e., the set of integers  $\{n \in \mathbb{Z} \mid F_n \neq 0\}$  is a finite set. Moreover, assume that  $F_0 = 0$ .*

*Consider the two following mutually exclusive conditions on  $f$ :*

I)  $M(q^2) \neq 0$ .

II)  $M(q^2) = 0$  but  $M(Q_1) \neq 0$ , where

$$Q_1(t) := q(t)^2 \int_0^t q^{-2}(\tau) d\tau. \quad (1.19)$$

*Then, for each  $f$  as above, satisfying condition I or II, there exists a constant  $K > 0$  (depending on the Fourier coefficients  $\{F_n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  and on  $\omega > 0$ ) such that, for each  $\epsilon$  with  $|\epsilon| < K$ ,*

there exist  $\Omega \in \mathbb{R}$  and  $T_\omega$ -periodic functions  $u_{11}^\pm$  and  $u_{12}^\pm$  such that the propagator  $U(t)$  of (1.7) can be written as

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ -\overline{U_{12}(t)} & \overline{U_{11}(t)} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

with

$$U_{11}(t) = e^{-i\Omega t} u_{11}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{11}^+(t), \quad (1.21)$$

$$U_{12}(t) = e^{-i\Omega t} u_{12}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{12}^+(t). \quad (1.22)$$

The functions  $u_{11}^\pm$  and  $u_{12}^\pm$  have absolutely and uniformly converging Fourier expansions

$$u_{11}^\pm(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{11}^\pm(n) e^{in\omega t},$$

$$u_{12}^\pm(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{12}^\pm(n) e^{in\omega t}.$$

Moreover, under the same assumptions,  $\Omega$  and the Fourier coefficients  $\mathcal{U}_{11}^\pm(n)$  and  $\mathcal{U}_{12}^\pm(n)$  can be expressed in terms of absolutely converging power series on  $\epsilon$ .  $\square$

## Remarks on Theorem 1.2

1. Expressions (1.21) and (1.22) represent the so-called “Floquet form” of the matrix elements  $U_{11}(t)$  and  $U_{12}(t)$ . The frequency  $\Omega$  is called the “secular frequency”.
2. In this paper we will assume that  $F_0 = 0$ . Results on the almost resonant case  $F_0 \neq 0$ , with  $F_0/\omega$  satisfying some appropriated Diophantine conditions, will appear in a forthcoming publication [12].
3. The physically realistic condition that the Fourier decomposition of  $f$  contains only a finite number of terms can be weakened. The only condition we use is the fast decay for  $|m| \rightarrow \infty$  of the Fourier coefficients  $Q_m$  of the function  $q(t)$  (defined in (1.16)), as found in Proposition 4.1.
4. The second equality in (1.20) is due to (1.8).
5. It is important to stress that conditions I and II are restrictions on the function  $f$  and not on the parameter  $\epsilon$ .
6. Possibly there are other conditions beyond I and II which could be considered, but they have not been explored so far. They are relevant in some cases. Theorem 1.2 still does not provide a complete solution of (1.4) for all possible periodic functions  $f$ , but examples and some qualitative arguments show that the remaining cases are rather exceptional. For instance, for  $f(t) = \varphi_1 \cos(\omega t) + \varphi_2 \sin(\omega t)$  condition I covers all pairs  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$ , except only the countable family of circles centered at the origin with radius  $x_a \omega / 2$ ,  $a = 1, 2, \dots$ , where  $x_a$  is the  $a$ -th zero of  $J_0$  in  $\mathbb{R}_+$  ( $J_0$  is the Bessel function of order zero). However, in these circles condition II is nowhere fulfilled. See the discussion in Section 6.

7. From the computational point of view the solution given by our method can be easily implemented in numerical programs and has been successfully tested, providing ways to study our two-level system for large times with controllable errors (due to the uniform convergence). Results on these numerical studies will be published elsewhere.
8. Unitarity of  $U(t)$  for all  $t \in \mathbb{R}$  is a consequence of Dyson's expansion (see f.i. [7]).
9. Conditions I and II define, in principle, distinct solutions of the generalized Riccati equation (1.6) and, hence, of the Schrödinger equation (1.4). To fix a name we will call these solutions "classes" of solutions.

## 1.2 Remarks on the Notation

Let us make some remarks on the notation we use here and recall the notation used in [1]. Given the Fourier representation<sup>3</sup>

$$f(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^B} F_{\underline{m}} e^{i \underline{m} \cdot \underline{\omega}_f t} \quad (1.23)$$

of the quasi-periodic function  $f$ , we denote (as in [1]) by  $\underline{\omega}$  the vector of frequencies defined by

$$\underline{\omega} := \begin{cases} \underline{\omega}_f \in \mathbb{R}^B, & \text{if } F_0 = 0 \\ (\underline{\omega}_f, F_0) \in \mathbb{R}^{B+1}, & \text{if } F_0 \neq 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

Since we assume that  $\underline{\omega}_f \in \mathbb{R}_+^B$ , the definition above says that all components of  $\underline{\omega}$  are always non-zero. Moreover, we denote

$$A := \begin{cases} B, & \text{if } F_0 = 0 \\ B + 1, & \text{if } F_0 \neq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

We denote vectors in  $\mathbb{Z}^B$  (or  $\mathbb{R}^B$ ) by  $\underline{y}$  and vectors in  $\mathbb{Z}^A$  (or  $\mathbb{R}^A$ ) by  $\underline{v}$ . The symbol  $|\underline{n}|$  denotes the  $l^1(\mathbb{Z}^A)$  norm of a vector  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_A) \in \mathbb{Z}^A$ :  $|\underline{n}| := |n_1| + \dots + |n_A|$ . We use the symbol  $\mathbb{I}$  for the identity matrix.  $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$  is the set of all  $n \times n$  matrices with complex entries.

We denote by  $\lfloor x \rfloor$  the largest integer lower or equal to  $x \in \mathbb{R}$ .

For  $m \in \mathbb{Z}$  we denote by  $\ll m \gg$  the following function:

$$\ll m \gg := \begin{cases} |m|, & \text{for } m \neq 0 \\ 1, & \text{for } m = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

For  $m \in \mathbb{Z}$  we denote by  $J_m$  the Bessel function of first kind and order  $m$ .

The symbol  $\square$  denotes end of statement and the symbol  $\blacksquare$  denotes end of proof.

---

<sup>3</sup>For convenience we adopt here a different notation as that found in [1], where the Fourier decomposition of  $f$  was written as  $f(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^B} f_{\underline{m}} e^{i \underline{m} \cdot \underline{\omega}_f t}$ .

## 2 Some Previous Results

In [1] some results could be proven about the nature of some particular solutions of (1.6) for the case where  $f$  is a quasi-periodic function subjected to some additional restrictions. These results are described in Theorem 2.1.

**2.1 Theorem.** *Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be quasi-periodic with*

$$f(t) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^B} F_{\underline{n}} e^{i\omega_f \cdot \underline{n}t},$$

*and such that the sum above contains only a finite number of terms. Assume that the vector  $\omega$  (defined in (1.24)) satisfies Diophantine conditions, i.e., assume the existence of constants  $\Delta > 0$  and  $\sigma > 0$  such that, for all  $\underline{n} \in \mathbb{Z}^A$ ,  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ,*

$$|\underline{n} \cdot \omega| \geq \Delta^{-1} |\underline{n}|^{-\sigma}.$$

**I.** *Assume that  $f$  satisfies the condition  $M(q^2) \neq 0$ . Then, there exists a formal power series*

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \epsilon^n, \quad (2.1)$$

*representing a particular solution of the generalized Riccati equation (1.6) such that all coefficients  $c_n$  can be chosen to be quasi-periodic and can be represented as*

$$c_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (2.2)$$

*where, for the Fourier coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$ , we have*

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{K}_n e^{-\chi_0 |\underline{m}|},$$

*where  $\chi_0 > 0$  is a constant and  $\mathcal{K}_n \geq 0$ .*

**II.** *Assume that  $f$  satisfies the conditions  $M(q^2) = 0$  and  $M(Q_1) \neq 0$ , where  $Q_1$  is defined in (1.19). Then, there exists a formal power series*

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \epsilon^{2n}, \quad (2.3)$$

*representing a particular solution of the generalized Riccati equation (1.6) such that all coefficients  $e_n$  can be chosen to be quasi-periodic and can be represented as*

$$e_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} E_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t}, \quad (2.4)$$

*where, for the Fourier coefficients  $E_{\underline{m}}^{(n)}$ , we have*

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{L}_n e^{-\chi_0 |\underline{m}|},$$

*where  $\chi_0 > 0$  is a constant and  $\mathcal{L}_n \geq 0$ .* □

There are other conditions beyond *I* and *II* which could be considered, but they have not been explored so far. See the discussion in Section 6.

The statements of this last theorem are not sufficient for proving convergence of the power series expansions in  $\epsilon$  for  $g$ . Unfortunately, as discussed in [1], the behavior for large  $n$  of the constants  $K_n$  and  $L_n$  is apparently too bad to guarantee absolute convergence of the formal power series above.

For the restricted case where  $f$  is periodic we will prove in the present paper stronger results (Theorem 3.1 below) than that implied by Theorem 2.1. As we will see, these stronger results, in contrast, imply convergence of the  $\epsilon$ -power series for  $g$  (Theorem 3.3 below).

Some of the more technical results of [1] have been obtained through the analysis of the Fourier coefficients of the functions  $c_n$  and  $e_n$  defined in Theorem 2.1 above. Specially important for us are the recursion relations found in [1] for the Fourier coefficients  $C_{\underline{m}}^{(n)}$  and  $E_{\underline{m}}^{(n)}$  defined in (2.2) and (2.4), respectively. Those recursion relations follow by imposing the generalized Riccati equation (1.6) to the power expansions (2.1) and (2.3). In Appendix A we reproduce some of the main ideas of [1] leading to a power series expansion for  $g$  free of secular terms and leading to the recursion relations below.

It is important for our present purposes to reproduce those recursive relations here, what we shall do now.

As in [1], let us denote by  $Q_{\underline{m}}$  the Fourier coefficients of the function  $q$  (defined in (1.16))

$$q(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m e^{im\omega t} \quad (2.5)$$

and by  $Q_{\underline{m}}^{(2)}$  the Fourier coefficients of the function  $q^2$ . For the Fourier coefficients of the functions  $c_n$  we have found the following relations:

$$C_{\underline{m}}^{(1)} = \alpha_1 Q_{\underline{m}}, \quad (2.6)$$

$$C_{\underline{m}}^{(2)} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{(\alpha_1^2 Q_{\underline{n}}^{(2)} - \overline{Q_{-\underline{n}}^{(2)}})}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \left[ Q_{\underline{m}-\underline{n}} - \frac{Q_{\underline{m}} Q_{-\underline{n}}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right], \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} C_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{1}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{\underline{n}_1}^{(p)} C_{\underline{n}_2}^{(n-p)} \right) \left[ Q_{\underline{m}-(\underline{n}_1+\underline{n}_2)} - \frac{Q_{\underline{m}} Q_{-\underline{n}_1-\underline{n}_2}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right] \\ &\quad - \frac{Q_{\underline{m}}}{2\alpha_1 Q_0^{(2)}} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \sum_{p=2}^{n-1} C_{\underline{n}}^{(p)} C_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}, \quad \text{for } n \geq 3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Above  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ ,  $\alpha_1^2 = \frac{M(q^2)}{M(q)}$ . For the Fourier coefficients of the functions  $e_n$  we have found the following relations.

$$E_{\underline{m}}^{(1)} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{m}+\underline{n}} \overline{Q_{\underline{n}}^{(2)}}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} + \frac{Q_{\underline{m}}}{2i M(Q_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq \underline{0}, \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q_{\underline{n}_1}^{(2)}} \overline{Q_{\underline{n}_2}^{(2)}}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
E_{\underline{m}}^{(n)} &= \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 + \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \left[ Q_{\underline{m}-\underline{n}_1-\underline{n}_2} + \frac{Q_{\underline{m}}}{iM(\mathcal{Q}_1)} \left( Q_{-\underline{n}_1-\underline{n}_2}^{(2)} \mathcal{R} - \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n} \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}+\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}}^{(2)}}{\underline{n} \cdot \underline{\omega}} \right) \right] \frac{\sum_{p=1}^{n-1} E_{\underline{n}_1}^{(p)} E_{\underline{n}_2}^{(n-p)}}{(\underline{n}_1 + \underline{n}_2) \cdot \underline{\omega}} \\
&\quad + \frac{Q_{\underline{m}}}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^A} \sum_{p=2}^{n-1} E_{\underline{n}}^{(p)} E_{-\underline{n}}^{(n+1-p)}, \quad \text{for } n \geq 2. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Above  $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$ ,  $\mathcal{Q}_1$  is defined in (1.19) and

$$\mathcal{R} := \frac{1}{2iM(\mathcal{Q}_1)} \sum_{\substack{\underline{n}_1, \underline{n}_2 \in \mathbb{Z}^A \\ \underline{n}_1 \neq \underline{0}, \underline{n}_2 \neq \underline{0}}} \frac{Q_{\underline{n}_1+\underline{n}_2}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_1}^{(2)} \overline{Q}_{\underline{n}_2}^{(2)}}{(\underline{n}_1 \cdot \underline{\omega})(\underline{n}_2 \cdot \underline{\omega})}. \tag{2.11}$$

The above expressions for the Fourier coefficients are somewhat complex but two important features can be distinguished. The first is the inevitable presence of “small denominators”, represented by the various factors of the form  $(\underline{n} \cdot \underline{\omega})^{-1}$  (with  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ) appearing above. The second is the presence of convolution products (a consequence, lately, of the quadratic character of the generalized Riccati equation). The presence of the later is the additional source of complications mentioned before, for they also, together with the small denominators, contribute to spoil the decay of the Fourier coefficients needed to prove convergence of the  $\epsilon$ -expansions.

### 3 The Recursive Relations in the Periodic Case

In [1] the recursion relations presented above have been used to prove inductively exponential bounds for the Fourier coefficients. As mentioned before two main difficulties have to be faced in this enterprise: the presence of “small denominators” and of convolution products in the recursion relations. Both are independently responsible for reducing the rate of decay of the Fourier coefficients at each induction step.

Let us consider the origin of the “small denominators problem” in our recursion relations. It comes from the many factors of the form  $(\underline{n} \cdot \underline{\omega})^{-1}$  (with  $\underline{n} \neq \underline{0}$ ) appearing in the recursion relations. In the case where  $f$  is a periodic function with frequency  $\omega$  with  $F_0 \neq 0$ , we have  $A = 2$ ,  $\underline{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$  and  $\underline{n} \cdot \underline{\omega} = n_1\omega + n_2F_0$ . On the other hand, in the case where  $f$  is a periodic function with frequency  $\omega$  and with  $F_0 = 0$ , we have  $A = 1$ ,  $\underline{n} = n \in \mathbb{Z}$  and  $\underline{n} \cdot \underline{\omega} = n\omega$ . To avoid the quasi-resonant situation where  $n_1\omega + n_2F_0$  is small we will, as mentioned, consider in this paper the case where  $F_0 = 0$ .

For the Fourier coefficients of the functions  $c_n$ , the recursive relations become

$$C_m^{(1)} = \alpha_1 Q_m, \tag{3.1}$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} \frac{(\alpha_1^2 Q_{n_1}^{(2)} - \overline{Q_{-n_1}^{(2)}})}{n_1\omega} \left[ Q_{m-n_1} - \frac{Q_m Q_{-n_1}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right], \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
C_m^{(n)} &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 + n_2 \neq 0}} \frac{1}{(n_1 + n_2) \cdot \omega} \left( \sum_{p=1}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{n_2}^{(n-p)} \right) \left[ Q_{m-(n_1+n_2)} - \frac{Q_m Q_{-n_1-n_2}^{(2)}}{Q_0^{(2)}} \right] \\
&\quad - \frac{Q_m}{2\alpha_1 Q_0^{(2)}} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{-n_1}^{(n+1-p)}, \quad \text{for } n \geq 3.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Above  $m \in \mathbb{Z}$ .

For the Fourier coefficients of the functions  $e_n$  we have:

$$E_m^{(1)} = \sum_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0}} \frac{Q_{m+n_1} \overline{Q_{n_1}^{(2)}}}{n_1 \omega} + \frac{Q_m}{2iM(Q_1)} \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \neq 0, n_2 \neq 0}} \frac{Q_{n_1+n_2}^{(2)} \overline{Q_{n_1}^{(2)}} \overline{Q_{n_2}^{(2)}}}{(n_1 \omega)(n_2 \omega)} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
E_m^{(n)} &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_1 + n_2 \neq 0}} \left[ Q_{m-n_1-n_2} + \frac{Q_m}{iM(Q_1)} \left( Q_{-n_1-n_2}^{(2)} \mathcal{R} - \sum_{\substack{n_3 \in \mathbb{Z} \\ n_3 \neq 0}} \frac{Q_{n_3+n_1+n_2}^{(2)} \overline{Q_{n_3}^{(2)}}}{n_3 \omega} \right) \right] \frac{\sum_{p=1}^{n-1} E_{n_1}^{(p)} E_{n_2}^{(n-p)}}{(n_1 + n_2) \omega} \\
&\quad + \frac{Q_m}{2iM(Q_1)} \sum_{p=2}^{n-1} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} E_{n_1}^{(p)} E_{-n_1}^{(n+1-p)}, \quad \text{for } n \geq 2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

It is clear here that no “small divisors” appear in this case, since now  $|(\underline{n} \cdot \underline{\omega})^{-1}| \geq \omega^{-1}$  for  $\underline{n} \neq \underline{0}$ . Hence, the convolution products are the only remaining factors eventually forcing the reduction of the decay rate of the Fourier coefficients at the successive induction steps.

In the Section 4 we will show how the effect of the convolution products can be taken under control. The result is expressed in the following three theorems.

**3.1 Theorem.** Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be periodic with a finite Fourier decomposition as in (1.18) and with  $F_0 = 0$ .

**Case I.** Consider the Fourier coefficients  $C_m^{(n)}$  satisfying the recursion relations (3.1), (3.2) and (3.3). Under the hypothesis that  $M(q^2) \neq 0$  we have

$$|C_m^{(n)}| \leq K_n \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \tag{3.6}$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ , and all  $m \in \mathbb{Z}$ , where  $\chi > 0$  is a constant and  $\ll m \gg$  is defined in (1.26). Above, the coefficients  $K_n$  do not depend on  $m$  and satisfy the recursion relation

$$K_n = \mathcal{C}_2 \left[ \left( \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right) + \left( \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} \right) \right], \tag{3.7}$$

with  $K_1 = K_2 = \mathcal{C}_1$ , where  $\mathcal{C}_1$  and  $\mathcal{C}_2$  are positive constants which can be chosen larger than or equal to 1.

**Case II.** Consider the Fourier coefficients  $E_m^{(n)}$  satisfying the recursion relations (3.4) and (3.5). Under the hypothesis that  $M(q^2) = 0$  and  $M(Q_1) \neq 0$  we have

$$|E_m^{(n)}| \leq K'_n \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (3.8)$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ , and all  $m \in \mathbb{Z}$ , where  $\chi > 0$  is a constant. Above, the coefficients  $K'_n$  do not depend on  $m$  and satisfy the recursion relation

$$K'_n = \mathcal{E}_2 \left[ \left( \sum_{p=1}^{n-1} K'_p K'_{n-p} \right) + \left( \sum_{p=2}^{n-1} K'_p K'_{n+1-p} \right) \right], \quad (3.9)$$

with  $K'_1 = K'_2 = \mathcal{E}_1$ , where  $\mathcal{E}_1$  and  $\mathcal{E}_2$  are positive constants which can be chosen larger than or equal to 1.  $\square$

Theorem 3.1 will be proven in Section 4. The importance of the recursive definition of the constants  $K_n$  given in (3.7) or (3.9) is expressed in the following theorem, which says that the constants  $K_n$  grow at most exponentially with  $n$ .

**3.2 Theorem.** Let the constants  $K_n$  be defined through the recurrence relations (3.7) or (3.9). Then there exist constants  $K > 0$  and  $K_0 > 0$  (depending eventually on  $f$ ) such that  $K_n \leq K_0 K^n$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

The proof of Theorem 3.2 is found in Appendix D and makes interesting use of properties of the Catalan sequence. Theorems 3.1 and 3.2 have the following immediate corollary:

**3.3 Theorem.** The power series expansions in (2.1) and (2.3) are absolutely convergent for all  $\epsilon \in \mathbb{C}$  with  $|\epsilon| < K$  for all  $t \in \mathbb{R}$  and, hence, (2.1) and (2.3) define particular solutions of the generalized Riccati equation (1.6) in cases I and II, respectively, of Theorem 3.1. The function  $g$  can be expressed in terms of an absolutely and uniformly converging Fourier series whose coefficients can be expressed in terms of absolutely converging power series in  $\epsilon$  for all  $\epsilon \in \mathbb{C}$  with  $|\epsilon| < K$ .  $\square$

**Proof of Theorem 3.3** We prove the statement for case I. Case II is analogous. The first step is to determine the Fourier expansion of the function  $g$ , as given in (1.15), and to study some of their properties. One clearly has

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m e^{im\omega t}, \quad (3.10)$$

with

$$G_m := \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n G_m^{(n)}, \quad (3.11)$$

where

$$G_m^{(n)} := \sum_{l \in \mathbb{Z}} Q_{m-l} C_l^{(n)}. \quad (3.12)$$

Now and in future proofs we will make use of the following important lemma, whose proof is given in Appendix C.

**3.4 Lemma.** *For  $\chi > 0$  and  $m \in \mathbb{Z}$  define*

$$\mathcal{B}(m) \equiv \mathcal{B}(m, \chi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-n|+|n|)}}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2}. \quad (3.13)$$

*Then one has*

$$\mathcal{B}(m) \leq B_0 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (3.14)$$

*for some constant  $B_0 \equiv B_0(\chi) > 0$  and for all  $m \in \mathbb{Z}$ .*  $\square$

We have the following proposition:

**3.5 Proposition.** *For all  $\chi > 0$  there exists a constant  $C_g \equiv C_g(\chi) > 0$  such that*

$$|G_m^{(n)}| \leq C_g K_n \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (3.15)$$

*for all  $m \in \mathbb{Z}$  and all  $n \in \mathbb{N}$ . Consequently, for  $|\epsilon| < K$  one has*

$$|G_m| \leq C'_g \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (3.16)$$

*for some constant  $C'_g(\chi, \epsilon) > 0$  and for all  $m \in \mathbb{Z}$ .*  $\square$

**Proof of Proposition 3.5.** Inserting (3.6) and (4.1) into (3.12) we have, for any  $\chi > 0$

$$|G_m^{(n)}| \leq K_n Q \mathcal{B}(m, \chi), \quad (3.17)$$

where  $\mathcal{B}(m, \chi)$  is defined in (3.13). Relation (3.15) follows now from Lemma 3.4.  $\blacksquare$

From this the rest of the proof of Theorem 3.3 follows immediately.  $\blacksquare$

The solutions for the generalized Riccati equation (1.6) mentioned in Theorem 3.3 are, through (1.8), the main ingredient for the solution of the Schrödinger equation (1.4). This will be further discussed in Section 5. Now we have to prove Theorem 3.1.

## 4 Inductive Bounds for the Fourier Coefficients

In this section we will prove Theorem 3.1 in cases I and II. We will make use of the following proposition on the decay of the Fourier coefficients  $Q_m$  and  $Q_m^{(2)}$  of the functions  $q$  and  $q^2$ , respectively. The proof of this proposition appears in Appendix B.

**4.1 Proposition.** Let  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be periodic and be represented by a finite Fourier series as in (1.18). Then, for any constant  $\chi > 0$  there is a positive constant  $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}(\chi)$  such that

$$|Q_m| \leq \mathcal{Q} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (4.1)$$

and

$$|Q_m^{(2)}| \leq \mathcal{Q} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (4.2)$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ , where  $\ll m \gg$  is defined in (1.26).  $\square$

## 4.1 Case I

In this section we will prove Theorem 3.1 in case I. Making use of Proposition 4.1 and of relations (3.1), (3.2) and (3.3) we easily derive the following estimates:

$$|C_m^{(1)}| \leq \mathcal{Q} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \quad (4.3)$$

$$|C_m^{(2)}| \leq 2\omega^{-1}\mathcal{Q} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^2} \left[ \frac{e^{-\chi|m-n_1|}}{\ll m - n_1 \gg^2} + \frac{\mathcal{Q}}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi(|m|+|n_1|)}}{\ll m \gg^2 \ll n_1 \gg^2} \right], \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} |C_m^{(n)}| &\leq \omega^{-1}\mathcal{Q} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{p=1}^{n-1} |C_{n_1}^{(p)}| |C_{n_2}^{(n-p)}| \right) \left[ \frac{e^{-\chi|m-(n_1+n_2)|}}{\ll m - (n_1 + n_2) \gg^2} + \frac{\mathcal{Q}}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi(|m|+|n_1+n_2|)}}{\ll m \gg^2 \ll n_1 + n_2 \gg^2} \right] \\ &\quad + \frac{\mathcal{Q}}{2|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=2}^{n-1} |C_{n_1}^{(p)}| |C_{-n_1}^{(n+1-p)}|, \quad \text{for } n \geq 3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

It follows from (4.4), from the definition of  $\mathcal{B}(m)$  in (3.13) and from Lemma 3.4 that

$$|C_m^{(2)}| \leq 2\omega^{-1}\mathcal{Q} \left( \mathcal{B}(m) + \frac{\mathcal{Q}}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4} \right) \leq K_2 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (4.6)$$

for some convenient choice of the constant  $K_2$ .

Now, we will use an induction argument to establish (3.6) for all  $n \geq 3$ . Let us assume that, for a given  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , one has

$$|C_m^{(p)}| \leq K_p \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (4.7)$$

for all  $p$  such that  $1 \leq p \leq n-1$ , for some convenient constants  $K_p$ . We will establish that this implies the same sort of bound for  $p = n$ . Notice, by taking  $K_1 \geq \mathcal{Q}$ , that relation (4.3) guarantees (4.7) for  $p = 1$  and that relation (4.6) guarantees the case  $p = 2$ .

From (4.5) and from the induction hypothesis,

$$\begin{aligned}
|C_m^{(n)}| &\leq \omega^{-1} \mathcal{Q} \left( \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right) \left[ \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-(n_1+n_2)|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll m - (n_1 + n_2) \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \right. \\
&+ \frac{\mathcal{Q}}{|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1 + n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \Big] \\
&+ \frac{\mathcal{Q}}{2|Q_0^{(2)}|} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \left( \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} \right) \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4}. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Now,

$$\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1 + n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4}$$

are just finite constants and

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-(n_1+n_2)|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll m - (n_1 + n_2) \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^2} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|(m-n_1)-n_2|+|n_2|)}}{\ll (m-n_1) - n_2 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \\
&= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^2} \mathcal{B}(m - n_1) \\
&\leq B_0 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1|+|m-n_1|)}}{\ll n_1 \gg^2 \ll m - n_1 \gg^2} \\
&= B_0 \mathcal{B}(m) \\
&\leq (B_0)^2 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

where we again used Lemma 3.4.

Therefore, we conclude

$$|C_m^{(n)}| \leq \left[ \mathcal{C}_a \left( \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right) + \mathcal{C}_b \left( \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} \right) \right] \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}. \tag{4.10}$$

for two positive constants  $\mathcal{C}_a$  and  $\mathcal{C}_b$ . Taking  $\mathcal{C}_2 := \max\{\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, 1\}$  relation (3.7) is proven with  $\mathcal{C}_2 \geq 1$ .

Notice that, without loss, we are allowed to choose  $K_1 = K_2 \geq 1$  by choosing both equal to  $\max\{K_1, K_2, 1\}$ .  $\blacksquare$

## 4.2 Case II

In this section we will prove Theorem 3.1 in case II. From (3.4) and (3.5), from Proposition 4.1 and from the assumption (3.8) we have

$$\begin{aligned} |E_m^{(1)}| &\leq \frac{Q^2}{\omega} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m+n_1|+|n_1|)}}{\ll m+n_1 \gg^2 \ll n_1 \gg^2} \\ &+ \frac{Q^4 e^{-\chi|m|}}{2 \ll m \gg^2 \omega^2 |M(Q_1)|} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1+n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} E_m^{(n)} &= \frac{1}{\omega} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left[ Q \frac{e^{-\chi(|m-n_1-n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll m-n_1-n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \right. \\ &+ \frac{Q^2 e^{-\chi|m|}}{|M(Q_1)| \ll m \gg^2} \left( \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)} |\mathcal{R}|}{\ll n_1+n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \right. \\ &+ \left. \left. \frac{Q}{\omega} \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2+n_3|+|n_1|+|n_2|+|n_3|)}}{\ll n_1+n_2+n_3 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2 \ll n_3 \gg^2} \right) \right] \left( \sum_{p=1}^{n-1} K'_p K'_{n-p} \right) \\ &+ \frac{Q e^{-\chi|m|}}{2|M(Q_1)| \ll m \gg^2} \left( \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n_1|}}{\ll n_1 \gg^4} \right) \left( \sum_{p=2}^{n-1} K'_p K'_{n+1-p} \right), \quad \text{for } n \geq 2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sums like

$$\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\ll n_1+n_2 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2} \text{ and } \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|n_1+n_2+n_3|+|n_1|+|n_2|+|n_3|)}}{\ll n_1+n_2+n_3 \gg^2 \ll n_1 \gg^2 \ll n_2 \gg^2 \ll n_3 \gg^2}$$

are just finite constants. By applying Lemma 3.4 we get

$$|E_m^{(1)}| \leq \mathcal{E}_a \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (4.13)$$

$$|E_m^{(n)}| \leq \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \left[ \mathcal{E}_b \left( \sum_{p=1}^{n-1} K'_p K'_{n-p} \right) + \mathcal{E}_c \left( \sum_{p=2}^{n-1} K'_p K'_{n+1-p} \right) \right], \quad \text{for } n \geq 2, \quad (4.14)$$

where  $\mathcal{E}_a$ ,  $\mathcal{E}_b$  and  $\mathcal{E}_c$  are constants. The rest of the proof follows the same steps of the proof of Theorem 3.1 in case I. ■

## 5 The Fourier Expansion for the Wave Function

Now we return to the discussion of the solution (1.8) of the Schrödinger equation (1.4). Our intention is to find the Fourier expansion of the wave function  $\Phi(t)$ .

## 5.1 The Floquet Form of the Wave Function. The Fourier Decomposition and the Secular Frequency

As explained in [1] and in Section 1, the components  $\phi_{\pm}$  of the wave function  $\Phi(t)$  are solutions of Hill's equation (1.12). For periodic  $f$  the classical theorem of Floquet (see e.g. [10] and [11]) claims that there are particular solutions of equations like (1.12) with the general form  $e^{i\Omega t}u(t)$ , where  $u(t)$  is periodic with the same period of  $f$ . In order to preserve unitarity we must have  $\Omega \in \mathbb{R}$ . This form of the particular solutions is called the "Floquet form" and the frequencies  $\Omega$  are called "secular frequencies".

In this section we will recover the Floquet form of the wave function in terms of Fourier expansions and we will find out expansions for the secular frequencies as converging power series expansions in  $\epsilon$ .

According to the solution expressed in relation (1.7) and (1.8), we have first to find out the Fourier expansion for the functions  $R$  and  $S$  defined in (1.9) and (1.10), respectively.

We begin with the function  $R$ . The Fourier expansion of the function  $f + g$  is

$$f(t) + g(t) = \Omega + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} (F_n + G_n(\epsilon)) e^{in\omega t}, \quad (5.1)$$

where

$$\Omega \equiv \Omega(\epsilon) := G_0(\epsilon). \quad (5.2)$$

One has,

$$R(t) = e^{-i\gamma_f(\epsilon)} e^{-i\Omega t} \exp \left( - \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n e^{in\omega t} \right) \quad (5.3)$$

with

$$H_n \equiv H_n(\epsilon) := \begin{cases} \frac{F_n + G_n(\epsilon)}{n\omega}, & \text{for } n \neq 0 \\ 0, & \text{for } n = 0 \end{cases}, \quad (5.4)$$

and

$$\gamma_f(\epsilon) := i \sum_{m \in \mathbb{Z}} H_m. \quad (5.5)$$

Notice that  $\gamma_f(0) = \gamma_f$ , where  $\gamma_f$  is defined in (B.4).

Since we are assuming that there are only finitely many non-vanishing coefficients  $F_n$ , we have the following proposition as an obvious corollary of Proposition 3.5:

**5.1 Proposition.** *For all  $\chi > 0$  and  $|\epsilon|$  small enough, there exists a constant  $C_H \equiv C_H(\chi, \epsilon) > 0$  such that*

$$|H_m| \leq C_H \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (5.6)$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ . □

Writing now the Fourier expansion of  $R(t)$  in the form

$$R(t) = e^{-i\Omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n e^{in\omega t} \quad (5.7)$$

we find from (5.3)

$$R_n \equiv R_n(\epsilon) = \begin{cases} e^{-i\gamma_f(\epsilon)} \left( 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{-N_p} \right), & \text{for } n = 0, \\ e^{-i\gamma_f(\epsilon)} \left( -H_n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right), & \text{for } n \neq 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

with

$$N_p := \sum_{a=1}^p n_a, \quad (5.9)$$

for  $p \geq 1$ .

In order to compute the Fourier expansion of  $S$  we have to compute first the Fourier expansion of  $R^{-2}$ . This is now an easy task, since the replacement  $R(t) \rightarrow R(t)^{-2}$  corresponds to the replacement  $(f+g) \rightarrow -2(f+g)$  and, hence, to  $H_n \rightarrow -2H_n$ . We get

$$R(t)^{-2} = e^{2i\Omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n^{(-2)} e^{in\omega t}, \quad (5.10)$$

with

$$R_n^{(-2)} \equiv R_n^{(-2)}(\epsilon) := \begin{cases} e^{2i\gamma_f(\epsilon)} \left( 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{-N_p} \right), & \text{for } n = 0, \\ e^{2i\gamma_f(\epsilon)} \left( 2H_n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right), & \text{for } n \neq 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

The following proposition will be used below.

**5.2 Proposition.** For all  $\chi > 0$  and  $|\epsilon|$  small enough, there exist constants  $\mathcal{C}_R \equiv \mathcal{C}_R(\chi, \epsilon) > 0$  and  $\mathcal{C}_{R^{(-2)}} \equiv \mathcal{C}_{R^{(-2)}}(\chi, \epsilon) > 0$  such that

$$|R_m| \leq \mathcal{C}_R \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (5.12)$$

$$|R_m^{(-2)}| \leq \mathcal{C}_{R^{(-2)}} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (5.13)$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ . □

**Proof of Proposition 5.2.** Using Proposition 5.1 we have, for any  $p \geq 1$ ,

$$\left| \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right| \leq (\mathcal{C}_H)^{p+1} \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} \frac{\exp(-\chi(|n_1| + \cdots + |n_p| + |n - n_1 - \cdots - n_p|))}{(\ll n_1 \gg \cdots \ll n_p \gg \ll n - n_1 - \cdots - n_p \gg)^2}. \quad (5.14)$$

Making repeated use of Lemma 3.4 on the right hand side of (5.14) we get

$$\left| \sum_{n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}} H_{n_1} \cdots H_{n_p} H_{n-N_p} \right| \leq \frac{(\mathcal{C}_H B_0)^{p+1}}{B_0} \frac{e^{-\chi|n|}}{\ll n \gg^2}. \quad (5.15)$$

Inserting this into (5.8) gives (since  $B_0 > 1$ )

$$|R_n| \leq \left( \frac{e^{|\text{Im}(\gamma_f(\epsilon))| + \mathcal{C}_H B_0}}{B_0} \right) \frac{e^{-\chi|n|}}{\ll n \gg^2} \quad (5.16)$$

for all  $n \in \mathbb{Z}$ , as desired. The proof for  $R_n^{(-2)}$  is analogous. ■

Assuming for a while

$$n\omega + 2\Omega \neq 0 \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}, \quad (5.17)$$

we have<sup>4</sup>

$$S(t) = \sigma_0 + e^{2i\Omega t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n e^{in\omega t} \quad (5.18)$$

with

$$S_n := -i \frac{R_n^{(-2)}}{n\omega + 2\Omega} \quad \text{and} \quad \sigma_0 := - \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n. \quad (5.19)$$

Assumption (5.17) is actually a consequence of unitarity, as will be discussed in Section 5.2.

The following proposition is an elementary corollary of Proposition 5.2:

**5.3 Proposition.** For all  $\chi > 0$  and  $|\epsilon|$  small enough, there exists a constant  $\mathcal{C}_S \equiv \mathcal{C}_S(\chi, \epsilon) > 0$  such that

$$|S_m| \leq \mathcal{C}_S \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (5.20)$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ . □

Writing

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ -\overline{U_{12}(t)} & \overline{U_{11}(t)} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

---

<sup>4</sup>For the case  $n = 0$ , (5.17) says that  $\Omega \neq 0$ . This must hold except for  $\epsilon = 0$  when  $\Omega = 0$ .

we have for  $U_{11}$  and  $U_{12}$ :

$$U_{11}(t) = e^{-i\Omega t} u_{11}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{11}^+(t) \quad (5.22)$$

$$U_{12}(t) = e^{-i\Omega t} u_{12}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{12}^+(t) \quad (5.23)$$

with

$$\begin{aligned} u_{11}^-(t) &:= (1 + ig(0)\sigma_0) r(t), & u_{11}^+(t) &:= ig(0) v(t), \\ u_{12}^-(t) &:= -i\epsilon\sigma_0 r(t), & u_{12}^+(t) &:= -i\epsilon v(t), \end{aligned} \quad (5.24)$$

for

$$r(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n e^{in\omega t} \quad \text{and} \quad v(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_n e^{in\omega t}, \quad (5.25)$$

with

$$V_n := \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_{n-m} R_m. \quad (5.26)$$

This provides the desired Floquet form for the components of the wave function  $\Phi(t)$ . We notice from the expressions above that the secular frequencies are  $\pm\Omega$ . For  $\Omega$  we have the  $\epsilon$ -expansion

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n G_0^{(n)}, \quad (5.27)$$

and for  $g(0)$ ,

$$g(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m^{(n)}. \quad (5.28)$$

Both converge absolutely for  $|\epsilon| < K$ , where  $K$  is mentioned in Theorem 3.2.

As before, we have the following corollary of Propositions 5.2, 5.3 and Lemma 3.4:

**5.4 Proposition.** For all  $\chi > 0$  and  $|\epsilon|$  small enough, there exists a constant  $C_V \equiv C_V(\chi, \epsilon) > 0$  such that

$$|V_m| \leq C_V \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2} \quad (5.29)$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ . □

This last proposition closed the proof of Theorem 1.2.

## 5.2 Remarks on the Unitarity of the Propagator

The unitarity of the propagator  $U(t)$  means  $U(t)^* U(t) = \mathbf{1l}$ . After (5.21), this means

$$|U_{11}(t)|^2 + |U_{12}(t)|^2 = 1. \quad (5.30)$$

Looking at relations (5.22) and (5.23) two conclusions can be drawn from (5.30). The first is the following proposition:

**5.5 Proposition.** For  $\epsilon \in \mathbb{R}$  and under the hypothesis leading to (5.22) and (5.23) one has  $\Omega \in \mathbb{R}$ .  $\square$

The proof follows from the obvious observation that (5.30) would be violated for  $|t|$  large enough if  $\Omega$  had a non-vanishing imaginary part. Unfortunately a proof of this fact using directly the  $\epsilon$ -expansion of  $\Omega$  (5.27) is difficult and has not been found yet.

The second conclusion is that (5.17) indeed holds. For, without this assumption there would be a term linear in  $t$  in (5.18), violating (5.30) for large  $|t|$ .

As in the case of Proposition 5.5, no direct proof of this fact out of the  $\epsilon$ -expansion for  $\Omega$  (5.27) has been found yet. The proof will probably follow the idea that  $|\Omega|$  is always smaller than  $2\omega$  because  $\Omega$  is of order  $\epsilon$  and  $|\epsilon|$  has to be chosen small in order to provide convergence for the expansions. Analogously  $\Omega \neq 0$  because  $\Omega$  is analytic in  $\epsilon$  and, hence, has isolated zeros. If the analyticity domain must be small enough no zeros occur, except at  $\epsilon = 0$ .

## 6 Discussion on the Classes of Solutions

Let us now discuss some aspects of conditions I and II of Theorem 1.2. It is important to stress that these conditions are restrictions on the function  $f$  and not on the parameter  $\epsilon$ .

As in (B.1), let us write the Fourier decomposition of  $f$  as

$$f(t) = \sum_{a=1}^{2J} f_a e^{i n_a \omega t}, \quad (6.1)$$

with  $n_a = -n_{2J-a+1}$  and  $\overline{f_a} = f_{2J-a+1}$  for all  $a$  with  $1 \leq a \leq J$ . Comparing with (1.18) one has  $f_a \equiv F_{n_a}$ ,  $1 \leq a \leq J$ .

Hence, for  $F_0 = 0$  and for fixed  $J$  and  $\omega$ , there are  $J$  independent complex coefficients  $f_a$  and we can identify the parameter space  $\mathbb{R}^{2J}$  with the set  $\mathfrak{F}_{J,\omega}$  of all possible functions  $f$  with a given  $J$  and  $\omega$ .

Condition  $M(q^2) = 0$  determines a  $(2J-1)$  or  $(2J-2)$ -dimensional subset of  $\mathfrak{F}_{J,\omega}$  and there condition II applies. It is also on this subset that the more restrictive condition  $M(q^2) = M(Q_1) = 0$  should hold, restricting the parameter space of  $f$  to a  $(2J-2)$ ,  $(2J-3)$  or  $(2J-4)$ -dimensional subset. Hence, successive conditions like I and II would eventually exhaust completely the parameter space  $\mathfrak{F}_{J,\omega}$ .

Conditions beyond I and II have not been yet analysed and many questions concerning the classes of solutions are still open. For instance, will further conditions like I and II really exhaust the parameter space of the functions  $f$ ? Will the subtraction method of [1] and the convergence proofs of the present paper also work under these further conditions? What are the physically qualitative distinctions between the classes? Are these classes of solutions in some sense analytic continuations of each other?

A distinction between class I and II may be pointed with the observation that in class I we have power expansions in  $\epsilon$  while in II we have power expansions in  $\epsilon^2$ . Compare relations (2.1) and (2.3) of Theorem 2.1.

## 6.1 An Explicit Example

To illustrate these ideas and point to some problems let us consider the important example where  $f$  is given by

$$f(t) = \varphi_1 \cos(\omega t) + \varphi_2 \sin(\omega t), \quad (6.2)$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$ . We have  $f(t) = f_1 e^{-i\omega t} + f_2 e^{i\omega t}$  with  $f_1 = (\varphi_1 + i\varphi_2)/2$ ,  $f_2 = \overline{f_1}$ ,  $J = 1$ ,  $n_1 = -1$ ,  $n_2 = 1$ . Applying now (B.5) for this case with  $m = 0$  we get

$$M(q^2) = Q_0^{(2)} = e^{2i\gamma_f} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left( \frac{4|f_1|}{2\omega} \right)^{2p} = e^{2i\gamma_f} J_0 \left( \frac{2\varphi_0}{\omega} \right), \quad (6.3)$$

where  $\varphi_0 := \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$  and where  $J_0$  is the Bessel function of first kind and order zero. In this case  $\gamma_f = \varphi_2/\omega$ .

Relation (6.3) shows that condition I is not empty and that the locus in the  $(\varphi_1, \varphi_2)$ -space of the condition  $M(q^2) = 0$  (necessary for condition II) is the countable family of circles centered at the origin with radius  $x_a \omega / 2$ ,  $a = 1, 2, \dots$ , where  $x_a$  is the  $a$ -th zero of  $J_0$  in  $\mathbb{R}_+$ .

One shows analogously that

$$Q_m = e^{i\gamma_f} \left( \frac{\overline{f_1}}{|f_1|} \right)^m J_m \left( \frac{2|f_1|}{\omega} \right) \quad (6.4)$$

and

$$Q_m^{(2)} = e^{2i\gamma_f} \left( \frac{\overline{f_1}}{|f_1|} \right)^m J_m \left( \frac{4|f_1|}{\omega} \right), \quad (6.5)$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ .

For  $Q_0^{(2)} = 0$  the function  $Q_1$  is periodic and we have in general

$$M(Q_1) = \frac{i}{\omega} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \frac{|Q_m^{(2)}|^2}{m} = \frac{i}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{|Q_m^{(2)}|^2 - |Q_{-m}^{(2)}|^2}{m} \right) \quad (6.6)$$

Since  $|J_m(x)| = |J_{-m}(x)|$  for all  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ , it follows that  $|Q_m^{(2)}| = |Q_{-m}^{(2)}|$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ . Hence, for functions  $f$  like (6.2)

$$M(Q_1) = 0. \quad (6.7)$$

Therefore, condition II is nowhere fulfilled. For a complete solution of the problem for functions like (6.2), including the circles mentioned above, higher restrictions than that implied by condition II are necessary.

## 6.2 A Second Example

For functions  $f$  with  $J > 1$  the situation leading to (6.7) is not expected in general and condition II, and eventually others, may hold in non-empty regions of the parameter space of  $f$ . This can be seen in the following example with  $J = 2$ . Let us take

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (6.8)$$

with

$$f_1(t) = f_1 e^{-i\omega t} + \overline{f_1} e^{i\omega t} \quad (6.9)$$

$$f_2(t) = f_2 e^{-i2\omega t} + \overline{f_2} e^{i2\omega t} \quad (6.10)$$

$f_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ . We have  $q(t) = q_1(t)q_2(t)$ , where

$$q_1(t) := e^{i\gamma_{f_1}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\zeta_1} J_n \left( \frac{2|f_1|}{\omega} \right) e^{in\omega t}, \quad (6.11)$$

$$q_2(t) := e^{i\gamma_{f_2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\zeta_2} J_n \left( \frac{|f_2|}{\omega} \right) e^{in2\omega t}, \quad (6.12)$$

with

$$e^{i\zeta_i} = \frac{\overline{f_i}}{|f_i|}, \quad i = 1, 2.$$

It follows that

$$Q_m = e^{i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i((m-2k)\zeta_1 + k\zeta_2)} J_{m-2k} \left( \frac{2|f_1|}{\omega} \right) J_k \left( \frac{|f_2|}{\omega} \right), \quad (6.13)$$

$$Q_m^{(2)} = e^{2i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i((m-2k)\zeta_1 + k\zeta_2)} J_{m-2k} \left( \frac{4|f_1|}{\omega} \right) J_k \left( \frac{2|f_2|}{\omega} \right). \quad (6.14)$$

From this we see (using  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ) that

$$\overline{Q_{-m}^{(2)}} = (-1)^m e^{-4i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \left\{ e^{2i(\gamma_{f_1} + \gamma_{f_2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{i((m-2k)\zeta_1 + k\zeta_2)} J_{m-2k} \left( \frac{4|f_1|}{\omega} \right) J_k \left( \frac{2|f_2|}{\omega} \right) \right\}. \quad (6.15)$$

The factor between brackets differs from  $Q_m^{(2)}$  due to the presence of the factor  $(-1)^k$  in the sum over  $k \in \mathbb{Z}$ . Hence, we should rather expect  $|Q_m^{(2)}| \neq |Q_{-m}^{(2)}|$  in this case, what most likely implies  $M(Q_1) \neq 0$  for  $M(q^2) = 0$ , leading to a non-empty condition II.

# Appendices

---

## A Short Description of the Strategy Followed in [1]

For convenience of the reader we reproduce the main steps of the strategy developed in [1] for finding a power series solution of the generalized Riccati equation (1.6) without secular terms.

As discussed in Section 1, a natural proposal is to express  $g$ , a particular solution of (1.6), as a formal power expansion on  $\epsilon$  which vanishes at  $\epsilon = 0$ . For convenience, we write this expansion as in (1.15) where  $q(t)$  is defined in (1.16). This would give the desired solution, provided the infinite sum converges. Inserting (1.15) into (1.6) leads to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( (qc_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 c_p c_{n-p} - 2ifqc_n \right) \epsilon^n + i\epsilon^2 = 0. \quad (\text{A.1})$$

Assuming that the coefficients vanish order by order we conclude

$$(qc_1)' - 2ifqc_1 = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$(qc_2)' - iq^2 c_1^2 - 2ifqc_2 + i = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$(qc_n)' - i \sum_{p=1}^{n-1} q^2 c_p c_{n-p} - 2ifqc_n = 0, \quad n \geq 3. \quad (\text{A.4})$$

The solutions of (A.2)-(A.3) are

$$c_1(t) = \alpha_1 q(t), \quad (\text{A.5})$$

$$c_2(t) = q(t) \left[ i \int_0^t (\alpha_1^2 q(t')^2 - q(t')^{-2}) dt' + \alpha_2 \right], \quad (\text{A.6})$$

$$c_n(t) = q(t) \left[ i \left( \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^t c_p(t') c_{n-p}(t') dt' \right) + \alpha_n \right], \quad \text{for } n \geq 3, \quad (\text{A.7})$$

where the  $\alpha_n$ 's above,  $n = 1, 2, \dots$ , are arbitrary integration constants.

The key idea is to fix the integration constants  $\alpha_i$  in such a way as to eliminate the constant terms from the integrands in (A.6) and (A.7). The remaining terms involve sums of exponentials like  $e^{int}$ ,  $n \neq 0$ , which do not develop secular terms when integrated, in contrast to the constant terms. For instance, fixing  $\alpha_1$  such that  $M(\alpha_1^2 q^2 - q^{-2}) = 0$ , that means,  $\alpha_1^2 = M(q^{-2})/M(q^2)$ , prevents secular terms in (A.6).

As shown in [1] this procedure can be implemented in all orders, fixing all constants  $\alpha_i$  and preventing secular terms in all functions  $c_n(t)$ . In case I, relations (2.6)-(2.8) represent precisely relations (A.5)-(A.7) in Fourier space with the integration constants fixed as explained above. Case II is analogous.

## B The Decay of the Fourier Coefficients of $q$ and $q^2$

To prove our main results on the Fourier coefficients of the functions  $c_n$  and  $e_n$  we have to establish some results on the decay of the Fourier coefficients of  $q$  and  $q^2$ .

We write the Fourier series (1.18) of  $f$  in the form<sup>5</sup>

$$f(t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} F_n e^{in\omega t},$$

with  $\overline{F_n} = F_{-n}$ , since  $f$  is real. In order to simplify our analysis we will consider here the case where the sum above is a finite sum. This situation is physically more realistic anyway.

By assumption, the set of integers  $\{n \in \mathbb{Z} \mid F_n \neq 0\}$  is a finite set and, by the condition that  $f$  is real and  $F_0 = 0$ , it contains an even number of elements, say  $2J$  with  $J \geq 1$ . Let us write this set of integers as  $\{n_1, \dots, n_{2J}\}$  and write

$$f(t) = \sum_{a=1}^{2J} f_a e^{in_a \omega t}, \quad (\text{B.1})$$

with the convention that  $n_a = -n_{2J-a+1}$ , for all  $1 \leq a \leq J$ , with  $f_a \equiv F_{n_a}$ . Clearly  $\overline{f_a} = f_{2J-a+1}$ ,  $1 \leq a \leq J$ .

A simple computation (see [1]) now shows that  $q$  has a Fourier decomposition as in (2.5) with

$$Q_m = e^{i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(P, m) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{f_a}{n_a \omega} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{B.2})$$

where

$$P \equiv P(p_1, \dots, p_{2J}, n_1, \dots, n_{2J}) := \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b \in \mathbb{Z}, \quad (\text{B.3})$$

and where

$$\gamma_f := i \sum_{a=1}^{2J} \frac{f_a}{n_a \omega}. \quad (\text{B.4})$$

As one easily sees,  $\gamma_f \in \mathbb{R}$ . Above  $\delta(P, m)$  is the Krönecker delta:

$$\delta(P, m) := \begin{cases} 1, & \text{if } P = m, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

---

<sup>5</sup>As above, here we adopt  $F_0 = 0$ .

Since the function  $q^2$  is obtained from  $q$  by replacing  $f \rightarrow 2f$  we have from (B.2)

$$Q_m^{(2)} = e^{2i\gamma_f} \sum_{p_1, \dots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(P, m) \prod_{a=1}^{2J} \left[ \frac{1}{p_a!} \left( \frac{2f_a}{n_a \omega} \right)^{p_a} \right], \quad (\text{B.5})$$

where  $Q_m^{(2)}$  are the Fourier coefficients of  $q^2$ . The coefficients  $Q_m$  and  $Q_m^{(2)}$  can also be expressed in terms of Bessel functions of the first kind and integer order. See Section 6 for some examples.

As in [1], define

$$\varphi := \max_{1 \leq a \leq 2J} \left| \frac{f_a}{n_a \omega} \right|.$$

and

$$\mathcal{N} := \sum_{b=1}^{2J} |n_b|.$$

Notice that, since the  $n_b$ 's are fixed by the choice of  $f$ ,  $\mathcal{N}$  is non-zero.

The following important bounds have been proven in [1], Appendix D:

$$|Q_m| \leq (2Je^{(2J-1)\varphi}) \frac{\varphi^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{[\mathcal{N}^{-1}|m|]!} \left( 1 - \frac{\varphi}{[\mathcal{N}^{-1}|m|] + 1} \right)^{-1}, \quad (\text{B.6})$$

and

$$|Q_m^{(2)}| \leq (2Je^{(2J-1)2\varphi}) \frac{(2\varphi)^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{[\mathcal{N}^{-1}|m|]!} \left( 1 - \frac{2\varphi}{[\mathcal{N}^{-1}|m|] + 1} \right)^{-1}, \quad (\text{B.7})$$

for all  $m$  with  $[\mathcal{N}^{-1}|m|] + 1 > 2\varphi$ . Above  $[x]$  is the lowest integer larger than or equal to  $x$ .

In [1] we derived from (B.6) a simple exponential bound for  $|Q_m|$ , namely,

$$|Q_m| \leq Q e^{-\chi|m|}, \quad (\text{B.8})$$

where  $Q$  and  $\chi$  are some positive constants. For the purposes of this paper a sharper bound than (B.8) is needed and we have to study relation (B.6) more carefully. The result is expressed in Proposition 4.1 whose proof we present now.

**Proof of Proposition 4.1.** Let us consider first the coefficients  $Q_m$ . Due to the dominating factor  $[\mathcal{N}^{-1}|m|]!$ , one has

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{\ll m \gg^2 \varphi^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{e^{-\chi|m|} [\mathcal{N}^{-1}|m|]!} = 0.$$

for any constant  $\chi > 0$ . Hence, one can choose a constant  $M_1 > 0$  depending on  $\chi$  such that

$$\frac{\varphi^{[\mathcal{N}^{-1}|m|]}}{[\mathcal{N}^{-1}|m|]!} \leq M_1 \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^2}$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ . Therefore, there exists a positive constant  $Q_1 > 0$  (depending on  $\chi$ ) such that  $|Q_m| \leq Q_1 \ll m \gg^{-2} e^{-\chi|m|}$  for all  $m \in \mathbb{Z}$ . For  $Q_m^{(2)}$  we proceed in the same way and get the bound  $|Q_m^{(2)}| \leq Q_2 \ll m \gg^{-2} e^{-\chi|m|}$  for all  $m \in \mathbb{Z}$ . In (4.1) and (4.2) we adopt  $Q = \max\{Q_1, Q_2\}$ . ■

*Remark.* The proof of Proposition 4.1 shows that we have also sharper bounds like

$$|Q_m| \leq Q_k \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^k}$$

for any  $k \in \mathbb{N}$ . For the purposes of the present paper it was enough to consider  $k = 2$ .

## C Bounds on Convolutions

Here we will prove Lemma 3.4. Consider for  $\chi > 0$  and  $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{B}(m) \equiv \mathcal{B}(m, \chi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-n|+|n|)}}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2}. \quad (\text{C.1})$$

First notice that  $\mathcal{B}(m) = \mathcal{B}(-m)$  for all  $m \in \mathbb{Z}$ . Choosing  $B_0$  to be such that

$$B_0 \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\chi|n|}}{\ll n \gg^4}$$

the statement of the lemma becomes trivially correct for  $m = 0$ . Hence, it is enough to consider the case where  $m > 0$ .

In (C.1), the sum over all  $n \in \mathbb{N}$  can be split into three sums:

$$\mathcal{B}(m) = e^{-\chi m} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e^{2\chi n}}{(m-n)^2 n^2} + e^{-\chi m} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} + e^{\chi m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{(m-n)^2 n^2} \quad (\text{C.2})$$

In the first sum above we perform the change of variables  $n \rightarrow -n$  and in the third sum we perform the change of variables  $n \rightarrow n+m$ . The result is

$$\mathcal{B}(m) = e^{-\chi m} \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{(m+n)^2 n^2} + \sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} \right) \quad (\text{C.3})$$

Now we will study separately each of the sums in (C.3). Since for  $n \geq 1$  one has  $m+n \geq \ll m \gg$  one has for the first sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{(m+n)^2 n^2} \leq \frac{B_1}{\ll m \gg^2} \quad (\text{C.4})$$

where  $B_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\chi n}}{n^2}$ .

The second sum in (C.3) is a little more involving. We have

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} = \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} + \sum_{n=\lfloor m/2 \rfloor+1}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} \quad (\text{C.5})$$

For the first sum in the right hand side of (C.5) we have  $\ll m-n \gg \geq m-n \geq m-\lfloor m/2 \rfloor \geq m/2$ . For the second sum in the right hand side of (C.5) we have  $n \geq \lfloor m/2 \rfloor + 1 \geq m/2$ . Hence, for  $m > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2 \ll n \gg^2} &\leq \left( \frac{2}{m} \right)^2 \left[ \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{1}{\ll n \gg^2} + \sum_{n=\lfloor m/2 \rfloor+1}^m \frac{1}{\ll m-n \gg^2} \right] \\ &\leq 2 \left( \frac{2}{\ll m \gg} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ll n \gg^2} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Therefore, choosing

$$B_0 = 2B_1 + 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ll n \gg^2} \quad (\text{C.7})$$

the lemma is proven. ■

The proof of this lemma has the following proposition as corollary, generalizing Lemma 3.4:

**C.1 Proposition.** For  $\chi > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , let

$$\mathcal{B}_k(m) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-n|+|n|)}}{\ll m-n \gg^k \ll n \gg^k}. \quad (\text{C.8})$$

Then, there exists a constant  $B_{0,k}$ , depending eventually on  $k$ , such that

$$\mathcal{B}_k(m) \leq B_{0,k} \frac{e^{-\chi|m|}}{\ll m \gg^k} \quad (\text{C.9})$$

for all  $m \in \mathbb{Z}$ . □

## D Catalan Numbers. Bounds on the Constants $K_n$

Here we will prove Theorem 3.2. Let us start recalling that we have chosen  $K_1 = K_2 = \mathcal{C}_1$  for some constant  $\mathcal{C}_1$  which, in turn, can be chosen without loss to be larger than or equal to 1. The proof of Theorem 3.2 will be presented on four steps.

**Step 1.** In this step we show that the sequence  $K_n$ , defined in (3.7), is an increasing sequence.

First notice that  $K_3 = \mathcal{C}_2(2K_1K_2 + (K_2)^2) = 3\mathcal{C}_2(K_2)^2$ . Since  $K_1 = K_2 \geq 1$  and  $\mathcal{C}_2 \geq 1$ , we have  $K_1 = K_2 < K_3$ .

Let us now suppose that

$$K_1 = K_2 < K_3 < \cdots < K_n \quad (\text{D.1})$$

for some  $n \geq 3$ . We will show that  $K_{n+1} > K_n$ . We have

$$\begin{aligned} K_{n+1} - K_n &= \mathcal{C}_2 \left[ \sum_{p=1}^n K_p K_{n-p+1} + \sum_{p=2}^n K_p K_{n-p+2} - \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} - \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1} \right] \\ &= \mathcal{C}_2 \left[ 2K_1 K_n + \sum_{p=2}^n K_p K_{n-p+2} - \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} \right] \\ &= \mathcal{C}_2 [2K_1 K_n + (K_2 K_n - K_{n-2} K_1) + (K_3 - K_1) K_{n-1} + \cdots + (K_n - K_{n-2}) K_2] \\ &= \mathcal{C}_2 [2K_1 K_n + (K_n - K_{n-2}) K_1 + (K_3 - K_1) K_{n-1} + \cdots + (K_n - K_{n-2}) K_2], \end{aligned}$$

where in the last equality we used  $K_1 = K_2$ . Now, from hypothesis (D.1) we conclude that  $K_{n+1} > K_n$ , thus proving that  $K_n$  is an increasing sequence.

**Step 2.** Here we show that the sequence  $K_n$  defined in (3.7) satisfies

$$K_n \leq 3C_2 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1} \quad (\text{D.2})$$

for all  $n \geq 3$ .

We have already shown that  $K_3 = 3C_2(K_2)^2$ . Hence, (D.2) is obeyed for  $n = 3$ .

Assume now that (D.2) is satisfied for all  $K_p$  with  $p \in \{1, \dots, n-1\}$ , for some  $n \geq 4$ . We will show that it is also satisfied for  $K_n$ . In fact, we have from (3.7)

$$K_n = C_2 [K_1 K_{n-1} + K_2 (K_{n-2} + K_{n-1}) + K_3 (K_{n-3} + K_{n-2}) + \dots + K_{n-1} (K_1 + K_2)]. \quad (\text{D.3})$$

From this and from the fact proven in step 1 that the sequence  $K_n$  is increasing, it follows that

$$K_n \leq C_2 [K_1 K_{n-1} + 2(K_2 K_{n-1} + K_3 K_{n-2} + \dots + K_{n-1} K_2)] \quad (\text{D.4})$$

Now, using the obvious relation

$$K_1 K_{n-1} = K_2 K_{n-1} \leq (K_2 K_{n-1} + K_3 K_{n-2} + \dots + K_{n-1} K_2)$$

we get finally from (D.4)

$$K_n \leq 3C_2 [K_2 K_{n-1} + K_3 K_{n-2} + \dots + K_{n-1} K_2] = 3C_2 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1}, \quad (\text{D.5})$$

thus proving (D.2).

**Step 3.** Here we will prove the following statement. Let  $L_n$  be defined as the sequence such that  $L_1 = L_2 = K_1 = K_2 = C_1$  and

$$L_n = 3C_2 \sum_{p=2}^{n-1} L_p L_{n-p+1}. \quad (\text{D.6})$$

Then, one has

$$K_n \leq L_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{D.7})$$

First notice that  $K_3 = 3C_2(K_1)^2 = 3C_2(L_1)^2 = L_3$ . Hence, (D.7) is valid for  $n \in \{1, 2, 3\}$ . Now suppose  $K_p \leq L_p$  for all  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  for some  $n \geq 4$ . One has from (D.2)

$$K_n \leq 3C_2 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n-p+1} \leq 3C_2 \sum_{p=2}^{n-1} L_p L_{n-p+1} = L_n, \quad (\text{D.8})$$

thus proving (D.7).

**Step 4.** Consider the sequence  $c_n$  defined as follows:  $c_1 = c_2 = 1$  and

$$c_n = \sum_{p=2}^{n-1} c_p c_{n-p+1} \quad (\text{D.9})$$

for  $n \geq 3$ . The so defined numbers  $c_n$  are called “Catalan numbers”, after the mathematician Eugène C. Catalan. The Catalan numbers arise in several combinatorial problems (for a historical account with proofs, see [8]) and can be expressed in a closed form as

$$c_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}, \quad n \geq 2. \quad (\text{D.10})$$

(see, f.i, [8] or [9]). Using Stirling’s formula we get the following asymptotic behaviour for the Catalan numbers:

$$c_n \approx \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}, \quad n \text{ large.} \quad (\text{D.11})$$

The existence of a connection between the Catalan numbers and the sequence  $L_n$  defined above is evident. Two distinctions are the factor  $3\mathcal{C}_2$  appearing in (D.6) and the fact that  $L_1 = L_2 = \mathcal{C}_1$  is not necessarily equal to 1. Nevertheless, using the definition of the Catalan numbers in (D.9), it is easy to prove the following closed expression for the numbers  $L_n$ :

$$L_n = (\mathcal{C}_1)^{n-1} (3\mathcal{C}_2)^{n-2} \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}, \quad n \geq 2. \quad (\text{D.12})$$

We omit the proof here. Hence, the following asymptotic behaviour can be established:

$$L_n \approx \frac{1}{144\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2^2\sqrt{\pi}} \frac{(12\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2)^n}{n^{3/2}}, \quad n \text{ large.} \quad (\text{D.13})$$

From the inequality  $K_n \leq L_n$ , proven in step 3, it follows that  $K_n \leq K_0(12\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2)^n$  for some constant  $K_0 > 0$ , for all  $n \in \mathbb{N}$ . Theorem 3.2 is now proven. ■

---

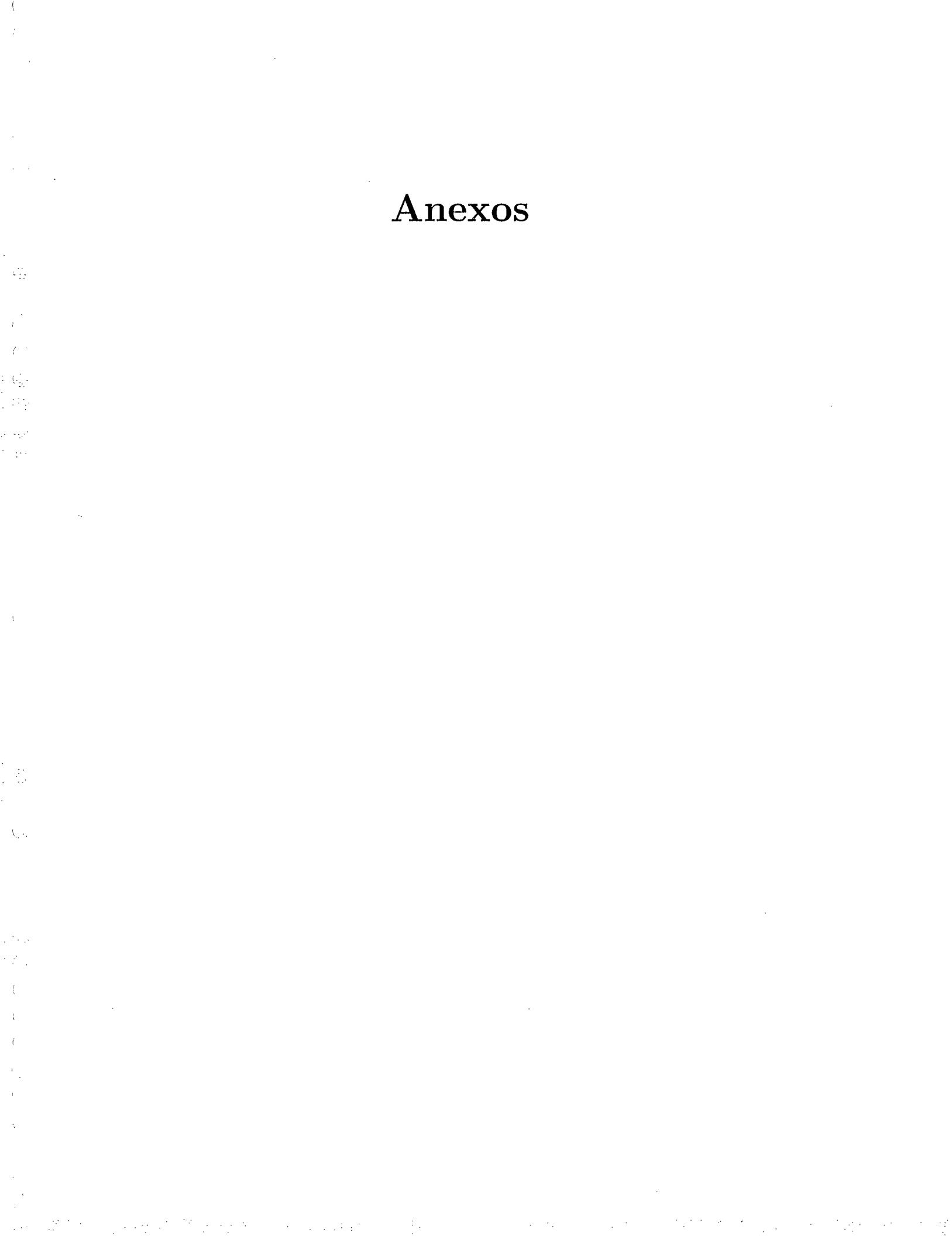
**Acknowledgements.** *I am very indebted to Walter F. Wreszinski for enthusiastically supporting this work and for many important suggestions. I am also grateful to César R. de Oliveira for asking the right questions.*

---

## References

- [1] J. C. A. Barata. "On Formal Quasi-Periodic Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level System with a Hamiltonian Depending Quasi-Periodically on Time". To appear in Rev. Math. Phys.
- [2] W. F. Wreszinski. "Atoms and Oscillators in Quasi-Periodic External Fields". Helv. Phys. Acta **70** 109-123 (1997).
- [3] W. F. Wreszinski and S. Casmeridis. "Models of Two Level Atoms in Quasi-periodic External Fields". J. Stat. Phys. **90**, 1061 (1998).
- [4] S. H. Autler and C. H. Townes. "Stark Effect in Rapidly Varying Fields". Phys. Rev. **100**, 703-722 (1955).
- [5] H. R. Jauslin. "Stability and Chaos in Classical and Quantum Hamiltonian Systems". P. Garrido and J. Marro (editors). II Granada Seminar on Computational Physics - World Scientific, Singapore, (1993).
- [6] Yitzhak Katznelson. "An Introduction to Harmonic Analysis". Dover Publications, Inc. (1978).
- [7] Michael Reed and Barry Simon. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 2. "Fourier Analysis , Self-Adjointness". Academic Press. New York. (1972-1979)
- [8] Heindrich Dörrie. "100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution". Dover Publications, Inc. (1965). Originally published in German under the title of "Triumph der Mathematik. Hunderte berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur". Physica-Verlag, Würzburg (1958).
- [9] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik. "Concrete Mathematics - A Foundation for Computer Science". Addison-Wesley Publishing Company. (1994).
- [10] Harro Heuser. "Gewöhnliche Differentialgleichungen". B. G. Teubner. Stuttgart (1991).
- [11] Harry Hochstadt. "The Functions of Mathematical Physics". Dover Publications, Inc. (1986).
- [12] J. C. A. Barata. In preparation.

# Anexos



```

!***** C Matrizes e vetores *****
!
! PP.f
!
! Este e' o programa principal. JCAB.
! Ultima versao: Sao Paulo, 20/02/1999.
!***** C Constantes *****
!
! Declaracoes
!
!***** C Parametros *****
integer N, MM, PP, PMAX, MMR, J
double precision I
double precision eps
double precision omega
C Variaveis auxiliares
integer a1, p1, p2, m1, m2, n1, n2, b1, b2
integer PescNN, somalp, Np
double complex soma, soma1, soma2, soma3, soma4
double complex somar, somas, SH, multH
double complex HQ1, HQ2
C Variaveis relevantes
double complex gammaf, gameps, alpha1, omega, g0
double complex sigma0
C Matrizes e vetores
c As dimensoes abaixo estao ajustadas para N = 7, MM = 30
c e J = 1. Para valores maiores as dimensoes devem ser
c corrigidas (embora isso nao seja necessario para valores
c menores).
c
double complex FFou(2)
double complex Fou(-60:60)
integer nn(2)
double complex H(-60:60)
double complex GG(1:7, -60:60)
double complex Q(-60:60), Q2(-60:60)
double complex R(-60:60)
double complex S(-60:60)
double complex V(-60:60)
C Funcoes
double precision rfactorial
integer corte
integer lista
double precision novainv
! Incluindo arquivo com os parametros basicos
include 'parametros.f'
!
! Imprimindo os valores de alguns dos parametros basicos

```

```

print *, 'Alguns parametros basicos',
print *, 'N =', N, 'MM =', MM, 'MMR =', MMR, 'PMAX =', PMAX,
print *, 'eps =', eps, 'omega =', omega

!***** Inicio do programa.
!***** Calculando gammaf
soma = 0.0d0
do 1 a1 = 1, 2*j
    soma = soma + FFou(a1)/( dble(mn(a1))*omega )
1 continue
gammaf = I*soma
print *, 'Valor de gammaf:'
print *, gammaf
2 continue
! Laco que calcula os Q(j)'s
! Laco que calcula os Q2(j)'s
! Laco que calcula os Q3(j)'s
! Laco que calcula os Q4(j)'s

CA versao desse laco esta adaptada para o caso j = 1.
C Para j's maiores mais lacos de p'j's sao necessarios, a saber,
C (2*j +1) deles.

print *, 'Valores de Q(m)',
```

```

do 5 m1 = -MM, MM
      |
      | Calculando os coeficientes C(n, m)
      |

do 6 p1 = 0, PP
do 7 p2 = 0, PP

PescNN = p1*nn(1) + p2*nn(2)

if (PescNN .eq. m1) then
      |
      soma = soma +
      % (( (2.0d0)*FFou(1))/( dble(nn(1))*omega ) )** (p1)*
      % (( (2.0d0)*FFou(2))/( dble(nn(2))*omega ) )** (p2)) /
      % ( rfactorial(p1)*rfactorial(p2) )
      |
      8   continue

end if

      |
      C Calculando C(2, m):
      |
      do 9 m1 = -MM, MM
            |
            soma = 0.0d0
            |
            do 10 m2 = -MM, MM
                  |
                  if (corte(m1-m2, MM) .eq. 1) then
                        HQ1 = Q(m1-m2)
                  else
                        HQ1 = 0.0d0
                  end if
                  |
                  soma = soma + novainv(m2)*( (1.0d0)/omega )*
                  % ( (alpha1**2)*Q2(m2) - conjg( Q2(-m2) ) ) *
                  % ( HQ1 - (Q(m1)*Q2(-m2))/(Q2(0)) )
                  |
                  10   continue
            |
            print *, 'Valor de alpha1,'
            print *, alpha1
      |

```

```

C(2, m1) = soma
print *, 2, m1, C(2, m1)

9      continue

C Calculando C(n, m) com n >= 3:

do 11 a1 = 3, N
do 12 m1 = -MM, MM
C =====
soma1 = 0.0d0

do 13 n1 = -MM, MM
do 14 n2 = -MM, MM
soma3 = 0.0d0

do 15 p1 = 1, (a1 - 1)
soma3 = soma3 + C(p1, n1)*C(a1-p1, n2)
continue
15

if (corte(m1-n1-n2, MM) .eq. 1) then
HQ1 = Q(m1-n1-n2)
else
HQ1 = 0.0d0
end if

if (corte(-n1-n2, MM) .eq. 1) then
HQ2 = Q2(-n1-n2)
else
HQ2 = 0.0d0
end if

soma1 = soma1 + soma3*novainv(n1+n2)*( (1.0d0)/omega )
*( ( HQ1 - ( Q(m1)*HQ2 )/(Q2(0)) ) )

14      continue
13      continue

C =====
soma2 = 0.0d0

do 17 n1 = -MM, MM
soma4 = 0.0d0

do 16 p2 = 2, (a1 - 1)
soma4 = soma4 + C(p2, n1)*C(a1-p2+1, -n1)
continue
16

soma2 = soma2 + soma4
17      continue

C =====
soma2 = - ( soma2*Q(m1) ) / ( (2.0d0)*alpha1*Q2(0) )

C =====
C(a1, m1) = soma1 + soma2
print *, a1, m1, C(a1, m1)
else

```



```

27    continue

!----- Calculando os coeficientes H(m) :
!----- Print *, 'Valores de H(m):'
      Print *, 'Valores de H(m):'
      do 26 m1 = -MM, MM
        H(m1) = novainv(m1)*( (1.0d0)/(omega) )*(Fou(m1) + G(m1))
        print *, m1, H(m1)

26    continue

!----- Calculando 0Omega :
!----- Print *, 'Valores de 0Omega:'
      Print *, 'Valores de 0Omega:'
      do 28 m1 = -MMR, MMR
        if (m1 .eq. 0) then
          somaR = 1.0d0
          somaS = 1.0d0
        else
          do 29 p1 = 1, PMAX
            SH = 0.0d0
            do 30 a1 = 1, (2*MMR + 1)**p1
              somaNP = 0
              do 31 b1 = 1, p1
                somaNP = somaNP + lista(a1, b1, MMR, p1)
              enddo
              somaR = somaR + somaNP
              somaS = somaS + somaNP
            enddo
            print *, 'Valor de 0Omega'
            print *, 0Omega
          endif
        enddo
      enddo
      0Omega = Fou(0) + G(0)

!----- Calculando gameps e g0
!----- Print *, 'Valores de gameps e g0'
      Print *, 'Valores de gameps e g0'
      soma1 = 0.0d0
      soma2 = 0.0d0
      do 27 m1 = -MM, MM
        soma1 = soma1 + H(m1)
        soma2 = soma2 + G(m1)
      enddo

```

```

Np = somaRp
if (corte(-Np, MMr) .ne. 0) then
  mulH = 1.0d0
  do 32 b2 = 1, p1
    mulH = mulH*H(lista(a1, b2, MMr, p1))
    continue
    mulH = mulH*H(-Np)
    SH = SH + mulH
  end if
  continue
  SH = ((-1.0d0)**(p1 + 1))*SH/(rfactorial(p1 + 1))
  somaR = somaR + SH
  somaS = somaS + ((-2.0d0)**(p1 + 1))*SH
  continue
  R(m1) = ( exp(-I*gameps) )*somaR
  S(m1) = -I*( exp( (2.0d0)*I*gameps ) *somaS /
  %   ( dble(m1)*omega + (2.0d0)*0Domega )
end if
else
  continue
end if
  mulH = mulH * H(m1 - Np)
  SH = SH + mulH
end if
continue
34
13
14

```



```

do 42 m2 = -MMr, MMr
  if (corte(m1-m2, MMr) .eq. 1) then
    HQ1 = S(m1-m2)
  else
    HQ1 = 0.0d0
  end if

  soma = soma + HQ1*R(m2)

  continue
end do
print *, m1, V(m1)

41      continue
! Escrevendo alguns dos resultados em arquivo.
open(unit=1, file='RV_7_30_dat')
write(1, *)'Parametros basicos: epsilon, omega, MM, MMr e PMAX'
write(1, *)eps, omega, MM, MMr, PMAX
write(1, *)'Valores de R(m):'
do 43 m1 = -MMr, MMr
  write(1, *)m1, realpart(R(m1)), imagpart(R(m1))
  write(1, *)'Valores de V(m):'
  do 44 m1 = -MMr, MMr
    write(1, *)realpart(V(m1)), imagpart(V(m1))
    write(1, *)realpart(g0), imagpart(g0)
    write(1, *)realpart(sigma0), imagpart(sigma0)
    write(1, *)realpart(g0), imagpart(g0)
    write(1, *)realpart(sigma0), imagpart(sigma0)
  end do
  close(unit=1)
44      continue
! Terminando o programa.
end
! Fim do programa.
! ****
!
```

```

! parametros.f
!
! Este arquivo contem as atribuicoes de alguns parametros globalmente
! usados.
!
! Constantes matematicas:
!
! I = (0.0d0, 1.0d0) ! Esta e' a representacao de sqrt(-1).
!
! Parametros gerais:
!
C Escolher sempre N <= 7, MM <= 30 e MMr <= MM.
C De outra forma os tamanhos das matrizes e vetores do
C programa principal (pp.f) terao de ser modificados.
!
N = 7
MM = 30
PP = 60
PMAX = 5 ! Recomenda-se escolher um valor baixo para isso.
MMr = 10 ! Recomenda-se escolher um valor baixo para isso.
!
eps = 1.0d-2
!
! Parametros da funcao f:
!
C A Escolha abaixo corresponde a f(t) = cos(t).
J = 1

```

```
! rfactorial.f
!
! Define a função rfactorial
!
double precision function rfactorial(x)
integer x
integer a1
double precision prod

if (x .eq. 0) then
  rfactorial = 1.0d0
else
  prod = 1.0d0
  do 1 a1 = 1, x
    prod = prod*a1
  1 continue
  rfactorial = prod
end if
return
end
```

!

```
| ! corte.f
| Define a funcao corte
|-----|
integer function corte(x, S)
integer x, S
if ( (x .le. S) .and. (x .ge. (-S)) ) then
    corte = 1
else
    corte = 0
end if
return
end
|-----|
| ! Fin.
|-----|
```

```

! lista.f
! Define a funcao lista
C Advertencia! A funcao mod de fortran nao e' como a versao em C !
C Por isso este programa difere de sua versao em C.

C Advertencia! Este programa nao e' muito seguro quando S e P sao grandes
C devido aos erros de arredondamento.

integer function lista(aa, b, S, P)
  integer aa, b, S, P
  integer a
  integer hmod
  integer h
  integer incceil

  if ( aa .eq. 1) then
    a = (2*S + 1)**P
  else
    a = aa - 1
  end if

  h = incceil( real(a)/( real( (2*S + 1)**(b-1) ) ) )
  hmod = mod( h, (2*S+1) )

  if ( hmod .eq. 0 ) then
    lista = S
  else
    lista = hmod - S - 1
  end if
end function

```

```
! novainv f
!
! Define a função novainv
!
double precision function novainv(x)
integer x

if ( x .eq. 0 ) then
    novainv = 0.0d0
else
    novainv = (1.0d0)/( dble(x) )
end if

return
end
```

```
!
! Fim.
```

```
!-----  
! inceil.f  
!  
! Define a function inceil  
!-----  
  
integer function inceil(AA)  
  
real AA  
  
inceil = int(AA) + 1  
  
return  
end  
  
!-----  
! Fim.  
!-----
```

```
! factorial.f
! Define a função factorial
!-----[

integer function factorial(x)
integer x
integer a1, prod

if (x .eq. 0) then
    factorial = 1
else
    prod = 1
    do 1 a1 = 1, x
        prod = prod*a1
    1 continue
    factorial = prod
end if
return
end

!-----]
```

**Le os coeficientes Rm e Vm de arquivo, calcula U11 e U12 e produz graficos.**

```

Lendo os coeficientes V:
> campos := readline(Leitura);
for contador from -MMr by 1 to MMr do
campos := fscanf(Leitura, "%d %e %e");
if (campos[1] <> contador) then
print("ERRO!");
break;
fi;

V[contador] := campos[2] + I*campos[3];
od;

Lendo Omega, g0 e sigma0:
> campos := readline(Leitura);

campos := fscanf(Leitura, "%e %e");
Omega := campos[1] + I*campos[2];
campos := fscanf(Leitura, "%e %e");
g0 := campos[1] + I*campos[2];
campos := fscanf(Leitura, "%e %e");
sigma0 := campos[1] + I*campos[2];
T2 := evalf( 2*Pi/Omega);

Definindo r(t) e v(t):
> r := proc(t) option forget;
evalf( Sum( 'R[m]*exp(I*m*omega*t)', 'm'=-MMC..MMC ) );
end;

> v := proc(t) option forget;
evalf( Sum( 'V[m]*exp(I*m*omega*t)', 'm'=-MMC..MMC ) );
end;

```

```
Definindo U11 e U12:
```

```
> U11 := proc(t) option forget ;  
  
evalf(  
    exp(-I*Omega*t)*( 1 + I*g0*sigma0 )*r(t) ) +  
exp(I*Omega*t)*( I*g0*v(t) )  
)  
end;  
  
> U12 := proc(t) option forget ;  
  
evalf(  
    exp(-I*Omega*t)*(-I*eps*sigma0*r(t) ) +  
exp(I*Omega*t)*( I*eps*v(t) )  
)  
end;  
  
> plotsetup(ps,plotoutput='plot_1.ps',plotoptions='portrait',nobord  
er');  
Trans1 := plot( abs( U12(t) )^2, t=0..TT , numpoints = 500) :  
Trans1;  
  
> plotsetup(ps,plotoutput='plot_2.ps',plotoptions='portrait',nobord  
er');  
Trans2 := plot( abs( U12(t) )^2, t=0..100 , numpoints = 500) :  
Trans2;  
  
> plotsetup(ps,plotoutput='plot_3.ps',plotoptions='portrait',nobord  
er');  
Trans3 := plot( abs( U12(t) )^2, t=0..20 , numpoints = 500) :  
Trans3;  
  
> plotsetup(ps,plotoutput='plot_4.ps',plotoptions='portrait',nobord  
er');  
Trans4 := plot( abs( U12(t) )^2 + abs( U11(t) )^2, t=0..TT ,  
numpoints = 500) :  
Trans4;
```

```
Fechando os arquivos abertos
```

```
> fclose('Leitura');
```

```
***** FIM *****
```