

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**ESCOLA POLITÉCNICA**

*CELSO PUPO PESCE*

**MECÂNICA DE CABOS E TUBOS**  
**SUBMERSOS LANÇADOS EM**  
**“CATENÁRIA”: UMA ABORDAGEM**  
**ANALÍTICA E EXPERIMENTAL**

Tese apresentada junto ao Departamento de Engenharia  
Mecânica da  
*Escola Politécnica*  
*da Universidade de São Paulo*

como parte dos requisitos para a obtenção do título de  
*Professor Livre Docente*

**São Paulo, 1997**

***CELSO PUPO PESCE***

Engenheiro Naval, EPUSP, 1978

Mestre em Engenharia Naval, EPUSP, 1984

Doutor em Engenharia, EPUSP, 1988

**MECÂNICA DE CABOS E TUBOS  
SUBMERSOS LANÇADOS EM  
“CATENÁRIA”: UMA ABORDAGEM  
ANALÍTICA E EXPERIMENTAL**

Tese apresentada junto ao Departamento de Engenharia

Mecânica da

***Escola Politécnica***

***da Universidade de São Paulo***

como parte dos requisitos para a obtenção do título de

***Professor Livre Docente***

**São Paulo, 1997**

*À Sandra,  
esposa e companheira tão amada.*

## AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar os mais profundos agradecimentos:

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio e suporte financeiros recebidos através de Bolsa de Pesquisa Individual, durante os biênios de 1993-95 e 1995-97; processo no. 304062-EM.

À FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo sempre presente apoio na divulgação de resultados de pesquisa, através de auxílios recebidos por ocasião de participação em conferências internacionais.

À PETROBRÁS Petróleo Brasileiro S.A, na figura do seu Departamento de Produção, pela oportunidade de participar de atividades de consultoria visando o estudo de viabilidade técnica da aplicação de "risers rígidos" (*Steel Catenary Risers*) para a Bacia de Campos e que motivaram muito do desenvolvimento analítico presente neste trabalho. Particularmente, pela gentileza de ceder resultados experimentais de valor inestimável à validação de diversos modelos teóricos aqui apresentados.

À PIRELLI CABOS S.A, pelo crédito depositado na equipe ao qual se vincula este autor através de tantos contratos de pesquisa e desenvolvimento, durante os últimos 5 anos, permitindo que um trabalho sistemático, dentro de linha autônoma, pudesse ser perseguido.

Ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, Divisão de Tecnologia de Transportes, pela realização dos experimentos e valiosíssima colaboração científica.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, pelo apoio recebido ao longo destes anos.

Ao Departamento de Engenharia Naval e Oceânica da Escola Politécnica, pela forma sempre carinhosa com que fomos acolhidos e pela oportunidade de engajamento real nas atividades de pesquisa desenvolvidas naquele departamento.

Ao Prof. Dr. José Augusto Penteado Aranha, pelo apoio no desenvolvimento do presente trabalho, pela sempre inestimável colaboração científica e a quem tantas, na realidade incontáveis, sugestões são devidas.

Ao Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins pela colaboração amigável e frutífera de tantos anos e a quem muito do presente desenvolvimento é devido.

Ao Prof. ME Marcos Mendes de Oliveira Pinto, pela amizade e colaboração intensa dos últimos anos.

Ao Prof. Dr. Otávio Gaspar de Souza Ricardo, mestre, com quem tivemos o privilégio de poder trabalhar e discutir os aspectos experimentais deste trabalho.

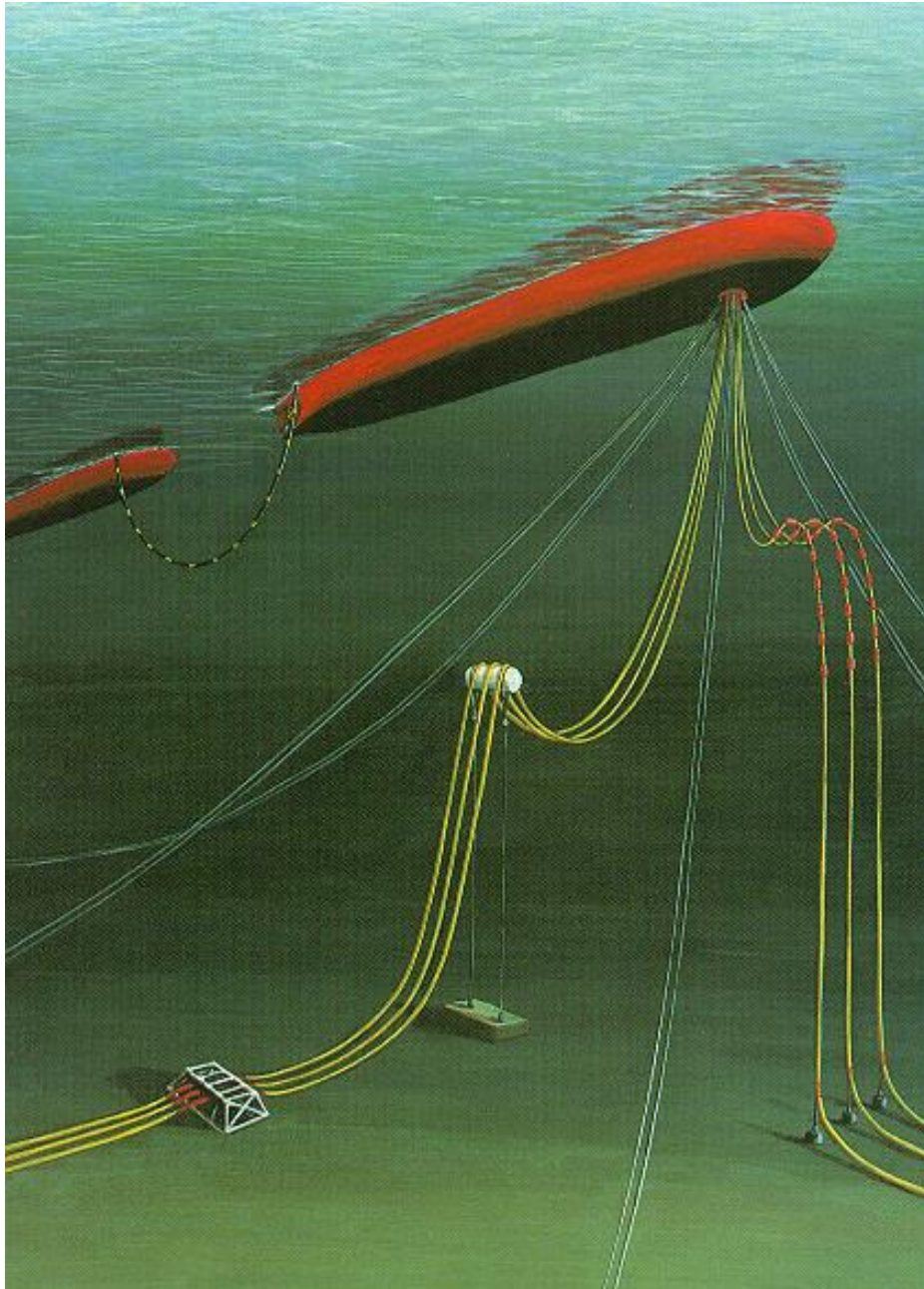
Ao Engo. Sérgio da Silva, do IPT, pela valiosa colaboração na análise experimental.

Aos Engos. Jairson de Lima e Kazuo Hirata, em nome de todos os amigos e companheiros do IPT, onde tive a felicidade de iniciar minha carreira profissional.

Aos Engos. Ivelton Scherer e Otávio Sertã, da PETROBRÁS, pela oportunidade de participar das atividades de pesquisa e desenvolvimento em tecnologia de *steel catenary risers* para águas profundas.

Aos Engos. Edvaldo Chaves Mendes, Carlos Alberto Godinho e Paulo Veronesi, da PIRELLI CABOS S.A, pelo apoio sempre presente.

A todos os colegas do Departamento de Engenharia Mecânica e do Departamento de Engenharia Naval e Oceânica.



Cortesia: Orcina

## RESUMO

Cabos e tubos submersos lançados em catenária são elementos de fundamental importância nas atividades de exploração de petróleo no mar, particularmente em águas de grandes profundidades. O comportamento mecânico-estrutural deste tipo de componente em resposta ao carregamento próprio, de natureza ambiental e decorrente dos movimentos a ele impostos pela unidade flutuante onde é suspenso, apresenta caráter inerentemente não-linear em vários aspectos, desde aqueles geométricos, caracterizados por vínculos uni-laterais no contato com o solo, até os de natureza hidrodinâmica.

O presente trabalho trata dos problemas de determinação da configuração estática de equilíbrio e da resposta dinâmica de linhas submersas em configuração de "catenária direta", com ênfase ao estudo da distribuição de curvatura nas extremidades do vão suspenso, junto ao ponto de contato e junto à unidade flutuante, e que se constituem em regiões críticas no que diz respeito ao projeto. A abordagem é analítica e experimental.

O problema estático geral, tridimensional, é formulado e discutido, sob a teoria de barras curvas em regime elástico de grandes deslocamentos e pequenas deformações. O problema plano é então adentrado e analisado em profundidade. Com base na solução de catenária, a solução sob correnteza é analisada. Mostra-se que o efeito da rigidez flexional da linha fica restrito às duas extremidades, caracterizando um *problema de perturbação singular* em matemática aplicada. O problema de curvatura junto ao ponto de contato com o fundo é analisado sob a *técnica da camada-limite*, construindo-se uma solução analítica local, dada na forma de uma expressão algébrica. O efeito de flexibilidade do solo é incorporado e discutido. *A solução analítica é confrontada com resultados de experimentos específicos e validada.* O problema de distribuição de curvatura junto à extremidade superior, na presença de uma terminação flexível, é formulado e resolvido através da técnica de camada-limite.



Diversos diagramas adimensionais são construídos, apresentados e discutidos à luz das atividades de engenharia de análise e projeto.

O problema dinâmico plano é então adentrado. A formulação geral é deduzida e discutida. O emprego da *técnica de camada-limite* mais uma vez leva à resolução analítica dos problemas de resposta dinâmica e distribuição de curvatura nas regiões das extremidades. Junto ao ponto de contato, o problema dinâmico é analisado em regime sub-crítico, ou seja quando da inexistência de choque da linha contra o fundo, cuja condição de ocorrência é estabelecida e analisada. *A solução analítica do problema dinâmico que rege a curvatura no interior da camada-limite junto ao ponto de contato com o fundo é confrontada com resultados de experimentos conduzidos especificamente, e plenamente validada.* Finalmente, a solução analítica junto à extremidade superior, na presença de terminações flexíveis, é construída de forma análoga e discutida. Inúmeros gráficos e diagramas que ilustram a aplicação das soluções analíticas alcançadas são apresentados e discutidos.

## ABSTRACT

Submerged cables and pipes, in 'catenary' configuration, are essential systems in offshore oil industry, particularly in deep-water exploration. The structural-mechanics behavior of this kind of system, in response to gravitational, hydrostatic, environmental loads and to motions imposed by the floating unit from which it is suspended, is inherently non-linear. Geometric non-linearities, as those represented by the one-side constraint at the touchdown point, as well as hydrodynamic ones, are just few examples of such non-linear characteristics.

This work treats the static configuration as well as the dynamic response problems. Emphasis is given to the study of curvature distribution in the extremities neighborhoods, either close to the touchdown point or to the suspension point, as those regions are critical, concerning design. The approach is analytical and experimental.

The static problem is formulated and discussed under the classical theory of thin rods. The two-dimensional problem is analysed in depth. The effect of flexural rigidity is shown to be confined to small regions, close to the extremities, since no other intermediate restraint is supposed to exist, and classified as a standard singular perturbation problem in applied mathematics. The curvature in the touch-down point region is treated under the *boundary-layer technique* approach. An analytical solution is then constructed. The soil flexibility effect is properly incorporated and discussed. *The analytical solution is compared to results of specifically conducted experiments, and validated.* The boundary-layer technique is then applied to the curvature distribution in the upper end region, in the presence of a flexible end-fitting, and an analytical local solution is derived as well. A number of non-dimensional diagrams are presented and discussed under a designer perspective.

The two-dimensional dynamic problem is addressed, the general formulation being constructed and discussed as a perturbation problem around the equilibrium configuration. The boundary-layer technique, once more, allows the construction of local curvature solutions, corresponding to the extremity regions. Close to the touch-down point the analysis is performed under a subcritical-regime hypothesis, defined as non-existence of shock of the line against the soil. The shock condition is fully discussed. *The boundary-layer solution is then compared to experimental results and fully validated.* Finally the upper-end curvature boundary-layer solution, in the presence of flexible end-fittings, is constructed and discussed. Examples are shown through graphics and diagrams, illustrating engineering applications.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>2. CABOS E TUBOS SUBMERSOS LANÇADOS EM “CATENÁRIA”.....</b>	<b>12</b>
2.1 considerações gerais .....	14
2.2 os problemas de análise de linhas submersas em “catenária” na situação de operação .....	22
2.2.1 Carregamento Estático e Configurações de Equilíbrio .....	23
2.2.1.1 Deriva Média da Plataforma ("offset" estático) .....	26
2.2.2 Movimentos Impostos ao Topo pela Unidade Flutuante .....	27
2.2.2.1 Resposta da plataforma às ondas em primeira ordem (alta frequência) .....	28
2.2.2.2 Resposta da plataforma às ondas em baixa frequência.....	31
2.2.2.3 Resposta da plataforma ao vento em baixa frequência.....	35
2.2.3 Ação Direta das Ondas .....	35
2.2.4 Ação Direta da Correnteza .....	36
2.2.5 Carregamento Associado ao Escoamento Interno.....	38
2.2.6 Carregamento Hidrostático .....	39
2.2.7 Restrições Geométricas, Vínculos e Condições de Contorno .....	40
2.2.7.1 Ponto de contato com o fundo (TDP) .....	40
2.2.7.2 Acessórios e terminações .....	44
2.3 Métodos de Análise .....	49
2.3.1 Resposta Estrutural Global: Estática e Dinâmica.....	49
2.3.1.1 Análise estática .....	50
2.3.1.2 Análise Dinâmica .....	54
2.3.2 Fadiga .....	65
2.4 PROCEDIMENTOS DE PROJETO.....	69
2.4.1 Fluxograma de Projeto.....	70
2.4.2 Espiral de projeto.....	79
<b>3. O PROBLEMA ESTÁTICO DE LINHAS SUBMERSAS .....</b>	<b>80</b>
3.1 O Conceito de Tração Efetiva .....	82

<b>3.2</b>	<b>Equações gerais de Equilíbrio Estático .....</b>	<b>87</b>
3.2.1	Equações gerais e fundamentos .....	88
3.2.2	Ausência de momentos distribuídos .....	98
<b>3.3</b>	<b>Configuração plana sob carregamento plano .....</b>	<b>99</b>
3.3.1	O problema da catenária .....	105
3.3.2	O problema plano sob ação de correnteza no plano .....	115
3.3.2.1	Carregamento hidrodinâmico associado à correnteza .....	115
3.3.2.2	Equacionamento e análise assintótica do problema plano com correnteza no plano	122
3.3.3	Efeito da rigidez flexional e análise assintótica local junto ao ponto de contato com o fundo	146
3.3.3.1	Solo plano e rígido .....	148
3.3.3.2	Efeito da deformabilidade do solo .....	152
3.3.3.3	Solução assintótica local e suporte experimental .....	165
3.3.4	O problema de curvatura junto ao topo .....	171
<b>4.</b>	<b>O PROBLEMA DINÂMICO PLANO DE LINHAS SUBMERSAS .....</b>	<b>182</b>
<b>4.1</b>	<b>Equação Geral no plano .....</b>	<b>185</b>
<b>4.2</b>	<b>O Modelo Assintótico no Plano .....</b>	<b>205</b>
4.2.1	Condições de contorno e de choque no ponto de contacto com o solo .....	206
4.2.2	Resposta dinâmica em curvatura. Solução assintótica local junto ao ponto de contacto com o solo	213
4.2.2.1	Curvatura dinâmica desconsiderando o efeito da rigidez flexional .....	213
4.2.2.2	Solução assintótica para a curvatura dinâmica considerando-se o efeito da rigidez flexional	216
4.2.2.3	Suporte Experimental .....	229
4.2.3	Resposta dinâmica em curvatura. Solução assintótica local junto ao topo .....	260
<b>5.</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>280</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>288</b>
	<b>APÊNDICE RESPOSTA DINÂMICA EM TRAÇÃO. SOLUÇÃO ASSINTÓTICA .....</b>	<b>297</b>

## LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 2-1 Configurações típicas de linhas flexíveis na função de risers</i> .....	16
<i>Figura 2-2 SCR de Auger (extraída de Phifer et alii, 1994)</i> .....	17
<i>Figura 2-3 Tubo Flexível típico</i> .....	19
<i>Figura 2-4 Configurações Estáticas "Far" e "Near" e "hot-spots".</i> .....	25
<i>Figura 2-5 Resposta em Frequência (RAO) em "Heave" de uma Plataforma Semi-submersível Típica.</i> .....	29
<i>Figura 2-6 Oscilações lentas de um sistema fundeado: (a) espectro de forças de deriva; (b) séries temporais de amplitude de onda e movimento de surge.</i> .....	32
<i>Figura 2-7 Sistema de risers e acessórios</i> .....	45
<i>Figura 2-8 Terminações flexíveis típicas: (a) junta flexível ("flexible joint"); (b) enrijecedores flexionais ("bending stiffners")</i> .....	46
<i>Figura 2-9 Configuração "lazy-wave" analisada por Larsen, 1992.</i> .....	58
<i>Figura 2-10 Fluxograma de Projeto de um Riser</i> .....	71
<i>Figura 2-11 Espiral de Projeto de um Riser em Catenária</i> .....	79
<i>Figura 3-1 Diagramas de Sistemas Equivalentes de Força</i> .....	84
<i>Figura 3-2 Sistemas Equivalentes de Força.</i> .....	85
<i>Figura 3-3 Esforços solicitantes em um elemento de linha</i> .....	90
<i>Figura 3-4 Ângulos de Euler em um elemento de linha</i> .....	91
<i>Figura 3-5 Caso plano. Bases e sistemas de referência.</i> .....	100
<i>Figura 3-6 Geometria, <math>\frac{y_c}{H} \times \frac{x_c}{H}</math>, curvatura <math>\chi_c(s_c/H)/\chi_{0c}</math> e ângulo <math>\theta(s_c/H)</math>, para três diferentes ângulos <math>\theta_{cL} = 1.0; 1.25; 1.5 \text{rad}</math>, no topo.</i> .....	110
<i>Figura 3-7 Tração adimensional ao longo da linha: (a) <math>T_c(s_c/H)/T_{0c}</math>; (b) <math>T_c(s_c/H)/qH</math>, para três diferentes ângulos no topo, <math>\theta_{cL} = 1.0; 1.25; 1.5 \text{rad}</math>; em (a) a curva superior correspondente ao maior ângulo; o inverso em (b).</i> .....	111
<i>Figura 3-8 Ação de correnteza no plano da linha e definições</i> .....	117
<i>Figura 3-9 Catenária. Curvatura no ponto de tangência, normalizada pela profundidade, <math>\chi_{0c}H</math>, em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i> .....	134

<i>Figura 3-10 Catenária. Curvatura no topo, normalizada pela profundidade, <math>\chi_{Lc}H</math>, em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	134
<i>Figura 3-11 Catenária. Comprimento suspenso, normalizado pela profundidade, <math>L_c/H</math>, em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	135
<i>Figura 3-12 Catenária. Projeção do comprimento suspenso, normalizado pela profundidade, <math>x_{Lc}/H</math>, em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	135
<i>Figura 3-13 Catenária. Abscissa do centro de gravidade, normalizado pela profundidade, <math>x_{Gc}/H</math>, em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	136
<i>Figura 3-14 Abscissa do centro da resultante vertical da força de correnteza, <math>Y_c</math>, normalizado pela profundidade, <math>x_{Yc}/H</math>, em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	136
<i>Figura 3-15 Ordenada do centro da resultante horizontal da força de correnteza, <math>X_c</math>, normalizada pela profundidade, <math>y_{Xc}/H</math>, em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	137
<i>Figura 3-16 <math>x_{Gc}/x_{Lc}</math> em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	137
<i>Figura 3-17 <math>x_{Yc}/x_{Lc}</math> em função do ângulo no topo <math>\theta_{cL}</math>.</i>	138
<i>Figura 3-18 Resultante das forças hidrodinâmicas horizontais, <math>X_c/T_{0c}</math>, normalizada pela tração horizontal de catenária, em função do ângulo no topo da catenária original <math>\theta_{cL}</math>. Curvas parametrizadas em <math>C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10</math>. <math>\eta = C_T/C_D = 10^{-3}</math>.</i>	138
<i>Figura 3-19 Resultante das forças hidrodinâmicas verticais, <math>Y_c/T_{0c}</math>, normalizada pela tração horizontal de catenária, em função do ângulo no topo da catenária original <math>\theta_{cL}</math>. Curvas parametrizadas em <math>C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10</math>. <math>\eta = C_T/C_D = 10^{-3}</math>.</i>	139
<i>Figura 3-20 Relação <math>Y_c/X_c</math>, em função do ângulo no topo da catenária original <math>\theta_{cL}</math>. <math>\eta = C_T/C_D = 10^{-3}</math>.</i>	139
<i>Figura 3-21 Variação angular no topo, <math>\tilde{\gamma}_L</math>, em função do ângulo no topo da catenária original <math>\theta_{cL}</math>. Curvas parametrizadas em <math>C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10</math>. <math>\eta = C_T/C_D = 10^{-3}</math>.</i>	140
<i>Figura 3-22. Ângulo no top, <math>\tilde{\theta}_L</math>, em função do ângulo no topo da catenária original <math>\theta_{cL}</math>. Curvas parametrizadas em <math>C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10</math>. <math>\eta = C_T/C_D = 10^{-3}</math>.</i>	140
<i>Figura 3-23 Curvatura normalizada no ponto de tangência, <math>\tilde{\chi}_0H</math>, em função do ângulo no topo da catenária original <math>\theta_{cL}</math>. Curvas parametrizadas em <math>C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10</math>. <math>\eta = C_T/C_D = 10^{-3}</math>.</i>	141

Figura 3-24 Curvatura normalizada no topo,  $\tilde{\chi}_L H$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ . \_\_\_ 141

Figura 3-25 Tração no ponto de tangência normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\tilde{T}_0/T_{0c}$ , (ou raio de curvatura  $\rho_0/\rho_{0c}$ ), em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ . \_\_\_\_\_ 142

Figura 3-26 Variação da tração no ponto de tangência normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\delta\tilde{T}_0/T_{0c}$ , (ou do raio de curvatura  $\delta\tilde{\rho}_0/\rho_{0c}$ ), em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ . \_\_\_ 142

Figura 3-27 Tração no topo normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\tilde{T}_L/T_{0c}$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ . \_\_\_\_\_ 143

Figura 3-28 Tração no ponto de tangência normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\tilde{T}_0/T_{0c}$ , em função de  $C_D \alpha/q = 1/2 C_D \rho_a D U_0^2 / q$ ;  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ ; ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL} = 65^\circ = 1.1346 \text{rad}$ . \_\_\_\_\_ 144

Figura 3-29 Raio de curvatura  $\rho_0/\rho_{0c}$  no ponto de tangência normalizado pela curvatura de catenária, em função de  $C_D \alpha/q = 1/2 C_D \rho_a D U_0^2 / q$ ;  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ ; ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL} = 65^\circ = 1.1346 \text{rad}$ . \_\_\_\_\_ 145

Figura 3-30 Solução estática local com efeito de rigidez flexional. Curvas adimensionais:  $\frac{\eta}{\chi_0 \lambda}$ ;  $\frac{\theta}{\chi_0 \lambda}$ ;  $\frac{\chi}{\chi_0}$ ;  $\frac{|Q|}{q \lambda}$ . \_\_\_\_\_ 152

Figura 3-31 Posição do ponto de contato  $x_f/\lambda$  em função do parâmetro de rigidez do solo  $K = \frac{k \lambda^2}{T_0} = \frac{k \lambda^4}{EJ}$ . \_\_\_\_\_ 158

Figura 3-32 Configuração geométrica adimensional da elástica local,  $\frac{\eta(\xi)}{\chi_0 \lambda} = \frac{y(x)}{\chi_0 \lambda^2}$ , referida à respectiva cota de recalque, parametrizada na rigidez do solo  $K = \frac{k \lambda^2}{T_0} = \frac{k \lambda^4}{EJ} = \chi_0 \lambda \frac{k \lambda}{q}$ . \_\_\_\_\_ 159

Figura 3-33 Ângulo da elástica local com a horizontal,  $\theta(\xi)/\chi_0 \lambda$  parametrizado na rigidez do solo  $K = \frac{k \lambda^2}{T_0} = \frac{k \lambda^4}{EJ} = \chi_0 \lambda \frac{k \lambda}{q}$ . \_\_\_\_\_ 160



Figura 3-34 Curvatura adimensional da elástica local,  $\chi(\xi)/\chi_0$  parametrizada na rigidez do solo

$$K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} = \chi_0\lambda \frac{k\lambda}{q}. \quad 161$$

Figura 3-35 Força cortante adimensional na elástica local,  $Q(\xi)/q\lambda$  parametrizada na rigidez do

$$\text{solo } K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} = \chi_0\lambda \frac{k\lambda}{q}. \quad 162$$

Figura 3-36 Ensaio estático de curvatura. 166

Figura 3-37 Comparação teórico-experimental. Curvatura junto ao contato. 170

Figura 3-38 Comparação teórico-experimental. Curvatura junto ao contato. 171

Figura 3-39 Curva de restauração típica de uma junta flexível 172

Figura 3-40 Curvatura adimensional  $\chi(\zeta)\lambda_L; \zeta = (s-L)/\lambda_L$  junto à extremidade superior

parametrizada em  $K_F = k_F\lambda_L/B$ .  $\theta_L = 70^\circ; \Phi = \theta_L = 70^\circ$ . Ausência de correnteza. 179

Figura 3-41 Curvatura adimensional  $\chi(\zeta)\lambda_L; \zeta = (s-L)/\lambda_L$  junto à extremidade superior

parametrizada em  $K_F = k_F\lambda_L/B$ .  $\theta_L = 70^\circ; \Phi = 65^\circ$ . Ausência de correnteza. 180

Figura 3-42 Curvatura adimensional  $\chi(\zeta)\lambda_L; \zeta = (s-L)/\lambda_L$  junto à extremidade superior

parametrizada em  $K_F = k_F\lambda_L/B$ .  $\theta_L = 70^\circ$ . Ausência de correnteza.

$$\Phi^* = \theta_L - \chi_L^c \lambda_L = 1.22027 \text{ rad} = 69.91633^\circ = \theta_L^b. \quad 181$$

Figura 4-1 O problema plano 186

Figura 4-2 Resposta dinâmica de um riser de aço de 10"3/4 em 910m de profundidade. Solução no domínio da frequência com o uso do código POLIFLEX. 204

Figura 4-3 Ponto de contato instantâneo(PCI) e analogia com cilindro de raio variável que rola sem escorregar. 210

Figura 4-4 Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0,2; a_0/\lambda = 1; \varphi = \pi; s/\lambda = -0,5; 0; +0,5 \quad 221$$

Figura 4-5 Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0,1; 0,2; 0,4; a_0/\lambda = 1; \varphi = \pi; s/\lambda = 0. \quad 222$$

Figura 4-6 Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0,1; 0,2; 0,4; a_0/\lambda = 1; \varphi = -\pi/2; s/\lambda = 0. \quad 223$$

Figura 4-7 Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0,1; 0,2; 0,4; a_0/\lambda = 1; \varphi = 0; s/\lambda = 0. \quad 224$$

Figura 4-8 Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0,2; a_0/\lambda = 1; 10; 100; \varphi = \pi; \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1. \quad 225$$

Figura 4-9 Excitação com dois harmônicos. 227

<i>Figura 4-10 Curvatura dinâmica. Resposta à excitação com dois harmônicos.</i>	228
<i>Figura 4-11 Ensaio dinâmico de curvatura.</i>	230
<i>Figura 4-12 Ensaio dinâmico. Força medida na extremidade superior.</i>	234
<i>Figura 4-13 Tração adimensional na região do ponto de contato, normalizada pela tração estática, e tração cossenoidal equivalente (i).</i>	236
<i>Figura 4-14 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math>. “Seção crítica”: 41.</i>	
(i) $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619$	
$s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,1619; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	237
<i>Figura 4-15 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math>. Seção 05. (i) <math>\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619</math></i>	
$s/\lambda = -1,7054; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	238
<i>Figura 4-16 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math>. Seção 07. (i) <math>\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619</math></i>	
$s/\lambda = -1,3942; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	239
<i>Figura 4-17 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math>. Seção 09. (i) <math>\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619</math></i>	
$s/\lambda = -1,0830; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	240
<i>Figura 4-18 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math>. Seção 17. (i) <math>\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619</math></i>	
$s/\lambda = -0,7718; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	241
<i>Figura 4-19 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math>. Seção 61. (i) <math>\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619</math></i>	
$s/\lambda = 1,4846; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	242
<i>Figura 4-20 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math>. Seção 81. (i) <math>\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619</math></i>	
$s/\lambda = 6,0491; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	243
<i>Figura 4-21 Valor eficaz da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math> ao longo da linha.</i>	
(i) $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	244
<i>Figura 4-22 Valor médio da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math> ao longo da linha.</i>	
(i) $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	245
<i>Figura 4-23 Valores máximo e mínimo da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\chi_0</math> ao longo da linha.</i>	
(i) $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	246
<i>Figura 4-24 Variação (pico-a-pico) da curvatura adimensional, <math>\chi(t)/\chi_0</math>, ao longo da linha.</i>	
(i) $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$	247
<i>Figura 4-25 Tração adimensional na região do ponto de contato, normalizada pela tração média (ii)</i>	248

<i>Figura 4-26 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math>. “Seção crítica”: 41.</i>	
(ii) $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903$ $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$	249
<i>Figura 4-27 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math>. Seção 17. (ii) <math>\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903</math></i>	
$s/\lambda = -0,7662; \varphi = \pi; M = 0,055$	250
<i>Figura 4-28 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math>. Seção 61. (ii) <math>\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903</math></i>	
$s/\lambda = -0,7662; \varphi = \pi; M = 0,055$	251
<i>Figura 4-29 Valor eficaz da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math> ao longo da linha.</i>	
(ii) $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$	252
<i>Figura 4-30 Valor médio da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math> ao longo da linha.</i>	
(ii) $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$	253
<i>Figura 4-31 Valores máximo e mínimo da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math> ao longo da linha. (ii)</i>	
$\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$	254
<i>Figura 4-32 Variação (pico-a-pico) da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math> ao longo da linha.</i>	
(ii) $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$	255
<i>Figura 4-33 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math>. “Seção crítica”: 41.</i>	
(ii) $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,2753$ $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,2753; \varphi = \pi; M = 0,058$	256
<i>Figura 4-34 Valor eficaz da curvatura adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math> ao longo da linha.</i>	
(ii) $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,2753$ $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,2753; \varphi = \pi; M = 0,058$	257
<i>Figura 4-35 Curvatura Adimensional <math>\chi(t)/\bar{\chi}_0</math>. “Seção crítica”: 41- erro de identificação: 2%.</i>	
(ii) $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,2753$ $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,2753; \varphi = \pi; M = 0,058$	258
<i>Figura 4-36 Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.</i>	270
<i>Figura 4-37 Ângulos na extremidade suspensa.</i>	271
<i>Figura .4-38 Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.</i>	272
<i>Figura 4-39 Ângulos na extremidade suspensa.</i>	273
<i>Figura 4-40 Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.</i>	274
<i>Figura 4-41 Ângulos na extremidade suspensa.</i>	275
<i>Figura 4-42 Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.</i>	276
<i>Figura 4-43 Ângulos na extremidade suspensa.</i>	277
<i>Figura .4-44 Deformação por flexão junto à extremidade suspensa, normalizada pela deformação de escoamento.</i>	278

*Figura 4-45 Deformação total junto à extremidade suspensa, normalizada pela deformação de escoamento.* \_\_\_\_\_ 279

## LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 2-1 Comparação entre configurações alternativas para risers flexíveis; (extraída de Tada et al., 1992)</i>	15
<i>Tabela 2-2 Offset e oscilações lentas para a plataforma PXIX fundeada em 770m de profundidade.</i>	33
<i>Tabela 2-3 Códigos Computacionais de Análise de Risers avaliados por aquele autor;(extraída de Larsen, 1992)</i>	57
<i>Tabela 2-4 Resultados de análise estática (extraída de Larsen, 1992)</i>	59
<i>Tabela 2-5 Resultados de análise estática (extraída de Larsen, 1992)</i>	60
<i>Tabela 2-6 Sequência Típica de Testes de Curta Duração Realizados com Tubos Flexíveis</i>	78
<i>Tabela 3-1 Características Principais de um tubo de 10"3/4</i>	163
<i>Tabela 3-2 Perfis de Correnteza Decenária Projetados no Plano da Catenária 10"3/4 - SCR; 910m</i>	164
<i>Tabela 3-3 Análise estática; correnteza decenária-(RISTAT)</i>	164
<i>Tabela 3-4 Valores típicos do parâmetro adimensional de rigidez; gasoduto de 10"3/4 em 910m de profundidade</i>	165
<i>Tabela 3-5 Dados gerais do corpo de prova.</i>	168
<i>Tabela 3-6 Condições dos experimentos</i>	168
<i>Tabela 3-7 Parâmetro adimensional de rigidez flexional da junta flexível para o gasoduto de 10"3/4 de diâmetro em 910m de profundidade.</i>	178
<i>Tabela 4-1 Ensaio dinâmico. Dados gerais e condições de ensaio.</i>	232
<i>Tabela 4-2 Ensaio dinâmico. Parâmetros de análise; alternativa (i).</i>	235
<i>Tabela 4-3 Ensaio dinâmico. Parâmetros de análise; (ii).</i>	248
<i>Tabela 4-4 Parâmetros do ensaio analisado comparados a valores típicos de risers de aço para a Bacia de Campos</i>	259
<i>Tabela 4-5 Parâmetros do caso-exemplo. Riser de 10"3/4.</i>	269

## NOMENCLATURA

### *Alfabeto Romano*

$A$	amplitude de movimento ou amplitude de onda
$\mathbf{b}$	versor binormal
$B_u$	rigidez torsional da seção
$B_v, B_w$	rigidez flexional da seção em torno de eixos $v, w$ (produto de rigidez)
$\mathbf{c}$	"vetor de curvatura"
$C_D$	coeficiente de arrasto hidrodinâmico normal à seção
$C_f$	coeficiente de arrasto hidrodinâmico de placa plana (" <i>skin friction</i> ")
$C_t$	coeficiente de arrasto hidrodinâmico tangencial à linha
$D$	diâmetro
$E$	módulo de Young
$EA$	produto de rigidez axial da seção
$f_{\text{int}}$	nível de pressurização interna; adimensional
$f_u, f_v, f_w$	forças por unidade de comprimento aplicadas à linha nas direções $u, v, w$
$\mathbf{f}$	vetor de força aplicada à linha, por unidade de comprimento
$F$	esforço normal solicitante ou tração solicitante
$g$	aceleração da gravidade
$G$	módulo de cisalhamento
$h_n(s), h_t(s)$	forças hidrodinâmicas por unidade de comprimento, associadas à correnteza constante, nas direções tangencial e normal à linha
$h_u(s), h_v(s)$	forças hidrodinâmicas por unidade de comprimento, associadas à correnteza constante, nas direções $u, v$
$\mathbf{h}(s)$	vetor de força hidrodinâmica
$H$	profundidade

$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$	base canônica
$J_v, J_w$	momento de inércia da seção em relação a eixos $v, w$
$J_u, J_t$	momento polar de inércia da seção
$k$	parâmetro de rigidez do solo
$K$	parâmetro adimensional de rigidez do solo
$k_F$	parâmetro de rigidez flexional de terminação flexível
$K_u, K_v, K_w$	momentos por unidade de comprimento aplicadas à linha em torno dos eixos orientados nas direções $u, v, w$
$l$	coordenada curvilínea
$L$	comprimento do trecho suspenso do <i>riser</i>
$m$	massa da linha por unidade de comprimento
$m_a$	massa adicional da linha (na direção normal) por unidade de comprimento
$M_u$	momento torsor
$M_v, M_w$	momentos fletores em torno dos eixos $v, w$
$\mathbf{M}$	vetor de esforços (momentos) solicitantes (torsor e fletores)
$\mathbf{n}$	versor normal
$p$	pressão
$p_{ext}$	pressão externa
$p_{int}$	pressão interna
$P$	peso
$P_{im}$	peso imerso
$q$	peso imerso da linha, por unidade de comprimento
$q_f$	deslocamento efetivo da linha por unidade de comprimento
$Q_v, Q_w$	forças cortantes nas direções dos eixos $v, w$
$Q_0$	esforço cortante no ponto de contato com o fundo, no problema estático plano

<b>Q</b>	vetor de esforços solicitantes (normal, e de cisalhamento) (ver eq. (3.3))
<i>r</i>	raio de giração da seção
<i>R</i>	raio externo da linha
<i>s</i>	coordenada curvilínea medida ao longo da linha
$\hat{s}$	coordenada curvilínea que identifica, junto ao TDP, a seção de maior variação de curvatura em uma dada situação
<i>s<sub>f</sub></i>	coordenada definidora do ponto de tangência no fundo, na presença da rigidez flexional da linha
<i>S<sub>i</sub>; S<sub>o</sub></i>	áreas externa e interna da seção transversal de um tubo.
<i>t</i>	tempo
<b>t</b>	versor tangente
<i>T</i>	tração estática (em geral significa tração efetiva)
<i>T<sub>0</sub></i>	tração estática efetiva no TDP
<i>T<sub>ef</sub></i>	tração estática efetiva
<i>T<sub>L</sub></i>	tração estática efetiva na extremidade superior
<b>T</b>	tração efetiva total
<i>u</i>	deslocamento tangencial à linha
<b>u</b>	versor na direção de <i>u</i>
<i>U</i>	velocidade (intensidade) da correnteza
<b>U</b>	vetor velocidade da correnteza
<i>U</i>	amplitude de movimento longitudinal imposto à extremidade superior da linha
<i>v</i>	deslocamento transversal à linha
<b>v</b>	versor na direção de <i>v</i>
<i>w</i>	deslocamento transversal à linha
<i>w</i>	componente normal de velocidade associada a ondas de superfície incidentes sobre a linha



$V$	amplitude de movimento transversal imposto à extremidade superior da linha
$\mathbf{w}$	versor na direção de $w$
$x$	coordenada cartesiana
$x_0(t)$	função descritiva da posição do ponto de contato instantâneo junto ao fundo
$y$	coordenada cartesiana
$z$	coordenada cartesiana

### *Alfabeto Grego*

$\alpha$	parâmetro relacionado à força proporcionada pela correnteza, por unidade de comprimento (ver equação (3.59))
$\beta(\xi, \xi_0(t))$	função adimensional que comparece na solução dinâmica de curvatura na camada limite do TDP (ver equação 4.65)
$\gamma$	peso específico da linha por unidade de comprimento (capítulo 3)
$\gamma(s, t)$	perturbação no ângulo da linha com horizontal em relação à configuração estática (capítulo 4)
$\delta$	indica variação
$\Delta$	indica variação ou diferença
$\varepsilon(s, t)$	deformação axial
$\varepsilon$	indica também parâmetro pequeno no âmbito de técnicas de perturbação
$\phi$	ângulo de Euler associado à precessão na analogia de Kirchoff; pode indicar também ângulo com a vertical
$\Phi(t)$	ângulo do eixo da terminação flexível com a horizontal

$\eta(\xi, \zeta)$	deslocamento transversal adimensional; se a equação tiver caráter local, o parâmetro de adimensionalização é o comprimento de flexão local; se global, o comprimento suspenso
$\theta(s)$	ângulo estático ao longo da linha elástica, em relação à horizontal; pode também indicar o ângulo associado à natação, na analogia cinemática de Kirchoff
$\mathcal{G}(s, t)$	parcela dinâmica do esforço cortante, no problema plano
$\Theta(s, t)$	ângulo ao longo da linha elástica, com a horizontal, em um dado instante
$\kappa_u, \kappa_v, \kappa_w$	componentes de torção e curvatura na equação de Love
$\lambda(s)$	indica comprimento de flexão ao longo da linha
$\lambda$	indica comprimento de flexão na região do ponto de contato com o fundo
$\lambda_L$	comprimento de flexão junto à extremidade superior
$\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$	comprimento de torção, e comprimentos de flexão, respectivamente, no problema geral tridimensional
$\Lambda$	indica comprimento de onda correspondente a modo natural de vibração da linha
$\mu$	parcela dinâmica do momento fletor (perturbação) com respeito ao correspondente diagrama estático, no problema plano
$\mu_k$	indica conjuntos de parâmetros geométricos e de rigidez
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\xi$	coordenada curvilínea adimensional, definida localmente, junto às extremidades onde o adimensionalizador é o comprimento de flexão; pode ser definida também globalmente, sendo então o comprimento suspenso $L$ o parâmetro de adimensionalização

$\hat{\xi}$	é a coordenada curvilínea adimensional indicativa da seção junto ao TDP onde ocorrem as maiores variações de curvatura em uma dada situação
$\xi_0(t)$	indica a função descritiva do movimento oscilatório do ponto de contato instantâneo, junto ao fundo, adimensionalizada pelo comprimento de flexão local
$\rho_a$	densidade de massa da água
$\rho_f$	densidade de massa de eventual fluido interno, no caso de tubos
$\rho(s)$	indica raio de curvatura da linha elástica
$\sigma$	tensão
$\tau(s, t)$	indica a parcela dinâmica (perturbação) da tração ao longo da linha em torno da solução estática correspondente
$\nu(\xi, \zeta)$	deslocamento longitudinal adimensional; se a equação tiver caráter local, o parâmetro de adimensionalização é comprimento de flexão local; se global, o comprimento suspenso
$\chi(s, t)$	curvatura ao longo da linha, em um dado instante
$\chi_0$	curvatura estática junto ao ponto de contato com o fundo
$\tilde{\chi}(s, t)$	parcela dinâmica (perturbação) da curvatura com respeito à curvatura estática
$\psi$	ângulo associada à rotação própria na analogia cinemática de Kirchoff
$\omega$	frequência angular associada à ação de ondas de gravidade ou a movimento harmônico
$\varpi_u(s, t), \varpi_v(s, t)$	parcelas dinâmicas das forças de natureza hidrodinâmica agentes ao longo da alinha, por unidade de comprimento
$\zeta$	tempo adimensional

## SIMBOLOGIA ESPECÍFICA

### *super e sub-escritos*

$a$	refere-se à água ou, quando assim definido, à seção da linha que tem a tangente da elástica correspondente à secante pelas extremidades
$b$	indica direção do versor binormal
$b$	quando super-escrito, indica que o efeito de rigidez flexional é incorporado
$c$	indica tratar-se de solução correspondente à respectiva equação de "cabo ideal", portanto desconsiderando o efeito da rigidez flexional
$e$	indica solução estática
$f$	indica fluido
$k$	indiciador
$L$	indica tratar-se da extremidade superior da linha
$n$	indica direção do versor normal
$t$	indica direção do versor tangente quando sub-escrito e topo quando super-escrito
$u$	indica direção do deslocamento longitudinal $u$
$v,w$	indica direção do deslocamento transversal $v,w$
$x,y,z$	indica direções $x,y,z$
*	valor especial de uma determinada variável

### *acentuações*

$\tilde{x}$	indica tratar-se de parcela dinâmica (perturbação) da variável genérica $x$
$\hat{x}$	a menos que explicitamente definido de outra forma, indica o adimensional correspondente à variável genérica $x$
$\bar{x}$	indica solução estática

## GLOSSÁRIO

<i>API</i>	American Petroleum Institute
<i>bending stiffner</i>	terminação do tipo enrijecedor de flexão;
<i>bending restrictor</i>	tipo de acessório (ver restritor de curvatura);
<i>catenária</i>	curva correspondente à elástica de um cabo ideal;
<i>cabo</i>	pode significar cabo ideal (ou cabo umbilical, quando especificado);
<i>cabo umbilical</i>	cabo armado, para alimentação ou transmissão de sinais de controle eletro-hidráulicos à cabeça de poço, no fundo do mar;
<i>DNV</i>	Det Norske Veritas
<i>end-fitting</i>	terminação;
<i>flexible-joint</i>	ver junta flexível;
<i>flexible-riser</i>	designa tubo flexível composto utilizado como riser na produção ou escoamento de hidrocarbonetos, no mar;
<i>FPSO</i>	"Floating Production, Storage and Offloading System": sistema de produção, armazenamento e descarga de petróleo composto por uma unidade flutuante, em geral um petroleiro convertido em planta de produção e separação, seu sistema de fundeio e demais sistemas de risers;
<i>free-hanging</i>	configuração de riser sem flutuadores intermediários.
<i>heave</i>	movimento vertical da unidade flutuante;
<i>junta flexível</i>	tipo de terminação utilizada para prover alguma flexibilidade às juntas de fixação de estruturas tubulares em engenharia oceânica;
<i>lazy-S</i>	configuração de instalação de tubos flexíveis e cabos umbilicais com a utilização de bóia intermediária;
<i>lazy-wave</i>	configuração de instalação de tubos flexíveis e cabos umbilicais com a utilização de flutuadores intermediários distribuídos;

<i>linha</i>	designa indistintamente cabos ou tubos;
<i>PCI</i>	Ponto de Contato Instantâneo: aqui definido como posição do ponto de contato do riser com o solo submarino, em um dado instante;
<i>pitch</i>	movimento de rotação da unidade flutuante em torno de um eixo transversal horizontal;
<i>restritor de curvatura</i>	acessório com características de um elemento vertebral que tem por função restringir a curvatura da linha a valores pré-especificados;
<i>riser</i>	trecho do tubo ou cabo umbilical que fica suspenso entre a unidade (fixa ou flutuante) de produção e o solo submarino;
<i>roll</i>	movimento de rotação da unidade flutuante, em torno do eixo longitudinal horizontal;
<i>SCR</i>	"Steel Catenary Riser" : riser composto por tubo de aço, lançado diretamente ao fundo do oceano e suspenso a uma unidade fixa ou flutuante;
<i>semi-submersível</i>	Plataforma semi-submersível: unidade flutuante de grandes proporções, utilizada na prospecção e produção de petróleo do mar, cuja estrutura é constituída por colunas que se apoiam em flutuadores (pontões) submersos;
<i>slow-drift motions</i>	movimentos de unidades flutuantes fundeadas, de baixíssimo período, cerca de 2 minutos, associados à resposta ressonante do sistema a termos de segunda-ordem presentes nas forças hidrodinâmicas provocadas pela interação hidromecânica do corpo com o campo ondulatório incidente (ondas de superfície);
<i>surge</i>	movimento longitudinal da unidade flutuante, no plano horizontal;
<i>sway</i>	movimento lateral da unidade flutuante, no plano horizontal;
<i>topo</i>	expressão utilizada para designar a extremidade superior do riser;

<i>TDP</i>	"Touch Down Point": ponto de contato do riser com o solo submarino;
<i>TLP</i>	"Tension Leg Platform": plataforma de pernas atirantadas; unidade flutuante que utiliza o empuxo e a pré-tensão dos tirantes verticais ancorados ao solo submarino como forma de a ela proporcionar grande estabilidade e baixo nível de resposta de movimentos no plano vertical.
<i>unidade flutuante</i>	plataforma flutuante ou navio que sirva à produção de petróleo no mar;
<i>yaw</i>	movimento de rotação da unidade flutuante em torno da vertical ("cabeceio")

# **1. INTRODUÇÃO**



**A** Engenharia Oceânica e mais especificamente a Engenharia *Offshore*, a qual abrange todos os aspectos atinentes à prospecção e exploração de petróleo no mar, tem-se constituído em área de desenvolvimento onde muito frequentemente os empreendimentos adiantam-se à fronteira do conhecimento e da tecnologia. Particularmente durante os últimos dez anos, com a descoberta de gigantescas jazidas de petróleo em águas de grande profundidade<sup>1</sup>, conceitos e técnicas até então tidos como seguros e convencionais tiveram que ser reavaliados, adaptados e mesmo inovados integralmente.

De plataformas fixas de produção, técnica e economicamente viáveis até profundidades de cerca de 500m, passou-se ao conceito de plataformas semi-submersíveis e plataformas de pernas atirantadas - ou *Tension Leg Platforms (TLP)* - e mais recentemente ao emprego de sistemas flutuantes de produção baseados em navios-tanque, transformados ou construídos especialmente para abrigar as instalações de separação de óleo e gás. Novos conceitos de posicionamento e fundeio foram desenvolvidos e outros tantos estão em pleno desenvolvimento como alternativa segura aos convencionais sistemas de posicionamento dinâmico, empregados com especial ênfase nas atividades de prospecção e perfuração.

Cabos umbilicais e tubos de escoamento de óleo e gás podem ser ditos elementos fundamentais na produção de petróleo no mar. Os primeiros tem a função de prover sinais de controle e alimentação aos sistemas de válvulas instalados no fundo do oceano, junto às cabeças dos poços, e conhecidos pelo nome de "árvores de Natal", dada sua aparente similaridade geométrica. Os tubos tanto podem servir à condução do petróleo desde o poço até a planta de separação instalada nas plataformas, como ao transporte ou mesmo ao transbordo do óleo e do gás já separados.

---

<sup>1</sup> 1000m na segunda metade da década de '80; atingindo os 2000m nos anos '90, apontando para os 3000m em futuro breve.

Tanto cabos umbilicais quanto tubos de produção e escoamento apresentam dois trechos bastante distintos. O primeiro trecho, fica assentado permanentemente sobre o leito do oceano; o segundo trecho, usualmente conhecido como "*riser*", caracteriza-se por apresentar um longo vão, suspenso desde a unidade de produção até o fundo. Sobre o trecho assentado as cargas atuantes são de natureza quase sempre estática. Carregamento dinâmico pode haver, quando em operação, se na presença de correntezas de fundo e durante as operações de resgate e instalação, quando então o trecho a ser instalado fica suspenso e sujeito a carregamentos dinâmicos associados à ação de ondas de superfície, da correnteza e da imposição de movimentos induzidos pela unidade flutuante de lançamento.

Já, sobre o trecho "*riser*" o carregamento tem, quase sempre, natureza dinâmica. À medida que a produção de petróleo alcançou maiores profundidades, e unidades flutuantes começaram a ser utilizadas, a parcela do carregamento dinâmico associada aos movimentos por elas impostos à extremidade suspensa passou a ser mais e mais relevante no dimensionamento mecânico de cabos umbilicais e tubos de produção.

O ambiente marítimo é, em geral, modelado como constituído por *ondas de superfície* (ou de gravidade) - no âmbito da teoria de ondas dispersivas -, pela *correnteza oceânica*, esta distribuída segundo um perfil vertical, podendo variar em intensidade e direção ao longo da profundidade e pelo *vento*. As ondas agem sobre o sistema dinâmico de duas maneiras distintas: uma diretamente, ao longo do comprimento do *riser* e outra indiretamente, através da alteração na posição da plataforma flutuante ou navio, que serve de apoio à extremidade superior da linha, e do movimento a ela(e) imposto. Já a correnteza além de agir sobre a unidade flutuante, aciona a linha ao longo de todo (ou boa parte de) seu comprimento, determinando a configuração de equilíbrio estático e induzindo tanto a excitação, com a possibilidade de vibrações por liberação de vórtices, quanto a resposta dinâmica. A ação do vento se dá de forma indireta, através do movimento proporcionado sobre a unidade flutuante. Há ainda o

carregamento associado ao fluxo interno de óleo/gás, que pode se tornar relevante para tubos flexíveis, ou mesmo tubos de aço.

Diversas escalas de tempo e comprimento estão presentes na dinâmica deste sistema complexo. A escala de tempo de variação da correnteza, por exemplo, é de cerca de dias ou de horas, em regiões influenciadas pela maré litorânea. As escalas de tempo características do vento são bem variadas, podendo ser bem pequenas - alguns segundos -, quando associadas às rajadas. A escala de tempo característica dos movimentos das unidades flutuantes no plano horizontal ("*surge, sway, yaw*"), por sua vez, é de cerca de 2 a 3 minutos, posto que se caracterizam por apresentar elevadíssima inércia e pequena restauração propiciada pelo sistema de fundeio. Já os movimentos nos planos verticais ("*heave, roll, pitch*")<sup>2</sup> ocorrem em períodos característicos de alguns segundos (cerca de 20 para plataformas semi-submersíveis, 10 para navios e 2 segundos para TLP's).

Por seu turno, as ondas de superfície caracterizam-se por espectros de energia contínuos de largura de banda relativamente estreita. Ondas de grande amplitude e comprimento apresentam períodos típicos da ordem de 12 a 15 segundos e ondas de pequenas amplitudes e pequenos comprimentos, períodos de cerca de 3 a 4 segundos. Como as unidades flutuantes tem escalas de comprimento comparável à escala dos comprimentos de onda, a interação hidromecânica mais característica é a difração. Dada a não-linearidade da condição de contorno do campo de escoamento ondulatório na superfície-livre e na superfície do corpo, esta difração é não-linear. Os termos lineares, ou de primeira-ordem, no âmbito da usual teoria de perturbações, são responsáveis pela excitação de movimentos das unidades flutuantes nos planos verticais. Se levada até segunda-ordem no entanto, a interação hidrodinâmica dará

---

<sup>2</sup> Esta nomenclatura é mundialmente adotada, em engenharia oceânica. "*Surge*" é o movimento longitudinal; "*sway*" o lateral; "*yaw*" o de rotação em torno da vertical; "*heave*" corresponde à oscilação vertical; "*roll*" à rotação em torno do eixo longitudinal e "*pitch*" a rotação em torno do eixo transversal.

origem a excitações sub-harmônicas quadráticas. Tomando a natureza estocástica do mar em consideração, à pequena largura de banda espectral, e que caracteriza um sinal modulado, estarão associadas variações lentas dos termos quadráticos do campo difratado, e que darão origem a forças de excitação<sup>3</sup>, conhecidas como "*slow-drift forces*". O período característico destas forças é o período dos denominados grupos de onda, ou período da modulação. Tem cerca de 100 a 200 segundos. Embora de segunda-ordem, tais forças acabam por excitar o comportamento ressonante da unidade flutuante fundeada no plano horizontal, provocando movimentos de amplitudes consideráveis ("*surge, sway, yaw*").

No que concerne às linhas elásticas submersas, sejam cabos ou tubos, três são as principais escalas de comprimento presentes. A primeira, o próprio comprimento suspenso, e que é diretamente proporcional à profundidade. A segunda, o diâmetro da linha, muito pequeno se comparado ao comprimento. A terceira escala é denominada "*comprimento de flexão*", e mede a distância característica dentro da qual o *comportamento de viga*, dominante junto às extremidades ou restrições geométricas intermediárias, é compatibilizado ao *comportamento de catenária*, que rege o comportamento global da linha. Mede, portanto, a relação entre rigidez flexional e rigidez geométrica, ou de catenária. Diversas escalas de tempo caracterizam a dinâmica das linhas lançadas. Os períodos naturais dos modos transversais "baixos", com semi-comprimento de onda da ordem da profundidade, são dominados pela rigidez geométrica. Dependem da raiz quadrada da profundidade. Para profundidades da ordem 1000m, por exemplo, caracterizam períodos naturais inferiores a cerca de 30 segundos, para linhas típicas. Os modos transversais "altos", com semi-comprimento de onda da ordem do comprimento de flexão, são dominados pela rigidez flexional, no entanto. Os modos longitudinais, associados à dinâmica de barra, são dominados pela rigidez axial, e tem períodos naturais inferiores a 2 segundos, no caso de umbilicais e tubos flexíveis e 0.5 segundo, no caso de tubos de aço, na

---

<sup>3</sup> (demodulação quadrática)

profundidade exemplificada. Existe ainda um terceiro período característico, associado ao fenômeno de liberação de vórtices e que depende portanto do diâmetro da linha e da intensidade da correnteza. Valores típicos podem ser encontrados na faixa abaixo de 20 segundos.

É evidente, portanto, que a diversidade e complexidade dos carregamentos ambientais, do sistema dinâmico, assim como a inerente não-linearidade de resposta da linha, tornam bastante laboriosas e de difícil interpretação tarefas que poderiam ser julgadas relativamente simples, a priori. A correta determinação das amplitudes dinâmicas de tração e momento fletor em um dado estado ambiental, particularmente junto ao ponto de contato com o fundo ("touch-down point") ou junto a terminações, e que constituem pontos críticos do sistema, são exemplos desta aparente trivialidade, como será visto em detalhes nos capítulos 3 e 4. Adicione-se a esta complexidade a natureza aleatória do ambiente marítimo, cuja caracterização estatística consistente é quase intangível.

A diversidade de escalas de tempo e comprimento presentes na dinâmica dos "*risers*", se por um lado tornam o tratamento numérico bastante difícil, de outro acabam por propiciar a aplicação de técnicas assintóticas e de perturbação, extremamente convenientes em situações desta natureza, porquanto tais técnicas tomam partido das mesmas discrepâncias de escala para promover simplificações consistentes. Além de elegantes e eficientes, tais técnicas acabam por conduzir a um entendimento mais aprofundado dos fenômenos em estudo, possibilitando resolver com segurança e facilidade problemas complexos e conduzindo a modelos comportamentais bastante simples em sua essência<sup>4</sup>. A simplicidade aliada à profundidade de compreensão conduzem, obviamente, a um melhor tratamento do problema, do ponto de vista da engenharia, seja nas atividades de análise ou de projeto.

---

<sup>4</sup> (infelizmente, no âmbito da engenharia convencional, o termo modelo simplificado é por vezes confundido com modelo simplista)

O presente trabalho aborda o particular espectro dos problemas atinentes à mecânica de linhas elásticas submersas, sejam tubos ou cabos, tanto do ponto de vista estático quanto dinâmico. Analisa o comportamento de "*risers*" lançados na configuração de "*catenária direta*", tendo como objetivo ulterior a determinação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento suspenso, em uma dada condição de carregamento dinâmico, com ênfase à caracterização da curvatura (momento fletor) em duas regiões críticas, no entorno do ponto de contato com o fundo e junto à extremidade suspensa. *A abordagem é totalmente analítica*, e desenvolvida dentro de técnicas usuais de matemática aplicada, no âmbito da teoria de perturbações. Dentro das hipóteses usuais em hidrodinâmica marítima e engenharia oceânica, o comportamento e resposta dinâmicos de *risers* (sejam cabos umbilicais, tubos flexíveis ou tubos de aço) são modelados frente à ação de ondas e correnteza e da unidade flutuante de suporte, admitindo-se como válidas as relações constitutivas oriundas da Teoria da Resistência dos Materiais, e consideradas conhecidas as propriedades seccionais da linha, como a rigidez axial e a rigidez flexional.

O capítulo 3 inicia com a definição e discussão do importante conceito de *tração efetiva*, aplicável a linhas elásticas submersas. O problema estático tridimensional geral é então formulado fazendo uso da Teoria de Barras Curvas, no âmbito das clássicas equações de Clebsch-Love. A relevância dos diversos termos que contribuem para a caracterização da *elástica* é discutida, e o conceito de comprimento de flexão é introduzido. As equações são então particularizadas para o problema plano, para o qual podem ser reduzidas de forma apropriada a uma única equação diferencial ordinária, não-linear, que rege a inclinação da linha com a horizontal. Esta equação é então reduzida ao célebre e básico problema da catenária, o qual é revisto. O caso de cabo com extensibilidade é também discutido. O problema plano de um cabo sem rigidez flexional, sob ação da correnteza é então abordado, elaborando-se um modelo aproximado para a avaliação dos principais parâmetros que regem o comportamento estático e dinâmico da linha: a tração e a curvatura. Diversos diagramas adimensionais são construídos e apresentados. A aproximação, conduzida em

primeira-ordem é confrontada com resultados numéricos com concordância bastante aceitável na faixa típica de velocidades de correnteza, usualmente encontrada no ambiente marítimo.

O problema de curvatura junto ao ponto de contato com o fundo é então tratado de forma consistente. Sob a regência da equação de cabo ideal, a função de curvatura é estritamente descontínua no ponto de tangência, sendo nula no trecho assentado sobre o fundo rígido e máxima imediatamente após, no trecho suspenso. Esta descontinuidade, obviamente irreal, decorre da impossibilidade de satisfazer as condições reais de contorno (de tangência com curvatura nula e de continuidade da força cortante), posto que ao desconsiderar-se a rigidez flexional, a equação diferencial reduz sua ordem de quatro para dois. Na realidade, no entorno do ponto de contato, o termo associado à rigidez flexional é dominante e deve ser considerado de forma apropriada. Este é um belo exemplo de *problema singular de perturbação*, do tipo *camada-limite*, no qual *no interior de uma região diminuta*, face à escala característica de comprimento do problema, o fenômeno em estudo é regido por efeitos que perdem sua relevância de forma gradual, à medida que dela nos afastamos. Reelaborando-se análise conduzida por Aranha, Martins & Pesce, 1995, a *técnica de camada-limite* é empregada, construindo-se uma *aproximação assintoticamente correta* e consistente, que descreve a variação da curvatura no entorno do ponto de contato sobre *solo suposto rígido*, na forma de uma *expressão analítica*. Mostra-se que o ponto de contato real é deslocado daquele correspondente à solução de cabo ideal de uma distância igual ao *comprimento de flexão local*. A expressão analítica é confrontada com resultados de experimentos estáticos<sup>5</sup>, mostrando-se, de forma original, sua completa adequação. *A influência da flexibilidade do solo na solução assintótica é investigada e incorporada*. Diversos diagramas adimensionais ilustram as soluções construídas.

---

<sup>5</sup> Os experimentos foram conduzidos no Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, dentro de um programa de pesquisa financiado pela PETROBRÁS.

O capítulo 3 é finalizado com o estudo da curvatura estática no entorno do ponto de suspensão, junto à unidade flutuante. A técnica de camada-limite é mais uma vez empregada, construindo-se uma solução assintótica e analítica que descreve a curvatura da linha neste entorno, incorporando-se os efeitos de rigidez flexional da própria linha elástica e de uma eventual terminação. Exemplos são apresentados na forma gráfica.

O capítulo 4 aborda o problema dinâmico, estritamente no plano vertical. Inicialmente, as equações que regem a dinâmica da linha submersa em torno da configuração de equilíbrio estático são deduzidas, no âmbito da teoria de pequenas perturbações. As diversas simplificações vão sendo gradualmente construídas e discutidas, culminando com reduzir o comportamento dinâmico global da linha à regência das equações de cabo inextensível. O problema dinâmico relativo à curvatura no entorno do ponto de contato é então abordado. Inicialmente, recuperando-se análise contida em Aranha, Martins & Pesce, 1995, a condição de choque contra o fundo é analisada para um cabo. Esta condição, inicialmente deduzida por Triantafyllou & Bliex, 1985, estabelece a existência de choque sempre que a velocidade de propagação do *ponto de contato instantâneo*<sup>6</sup> superar a velocidade local de propagação da onda transversal. A situação de ausência de choque é denominada *regime dinâmico sub-crítico*, em analogia ao clássico problema da dinâmica dos gases. Mostra-se então, que correto em primeira-ordem, o ponto de contato estático pode ser visto como uma articulação no que concerne ao problema dinâmico global. No entorno do ponto de contato a curvatura dinâmica para um cabo extensível é analisada, derivando-se uma expressão analítica de extrema simplicidade, embora não-linear, dependente da tração dinâmica, esta suposta conhecida e determinada a partir do problema dinâmico global linearizado e sob a regência das equações de cabo, ou seja na ausência dos efeitos de rigidez flexional.

---

<sup>6</sup> (assim definido em perfeita analogia ao Centro Instantâneo de Rotação, no contexto do estudo da cinemática plana de um corpo rígido)



Ainda em *regime dinâmico subcrítico*, o efeito da rigidez flexional na curvatura dinâmica é considerado. O emprego da técnica de camada-limite leva a um *resultado geral*, de natureza *quase-estática*, que permite escrever uma aproximação assintótica analítica e consistente, pela qual a curvatura total é expressa através de uma função não-linear, no tempo e no espaço, dependente da tração dinâmica, da função que descreve o movimento do *ponto de contato instantâneo* e do *comprimento local de flexão*. As funções descritivas da tração e do movimento do ponto de contato instantâneo são supostas oscilatórias, contínuas e de classe  $C^1$ ; no mais completamente arbitrárias. Daí a generalidade da solução alcançada, posto que possibilita analisar o comportamento não-linear em curvatura, decorrente da ação de um vínculo uni-lateral, de forma analítica. Basta que a solução dinâmica global tenha sido determinada, o que pode ser conseguido a partir de equações dinâmicas de cabo construídas em torno da correspondente solução estática, através da técnica de perturbações. Tal atributo permite que seja considerada a ação aleatória das ondas do mar sobre o sistema de forma imediata. Mostra-se, por outro lado, que a solução assintótica estática é um caso particular da solução dinâmica. Mostra-se também como calcular a posição da seção da linha que estará sujeita à maior variação de curvatura em uma dada condição ambiental, elemento essencial na avaliação de fadiga.

*A solução assintótica é então confrontada, de forma original, com resultados de experimentos dinâmicos, mostrando-se sua completa aderência com a realidade física, posto que é capaz de prever tanto qualitativa quanto quantitativamente o comportamento dinâmico em curvatura, no tempo e ao longo da linha.*

O problema dinâmico de curvatura no entorno da extremidade superior da linha é tratado na presença e sob o efeito de uma terminação flexível, cuja rigidez é modelada de forma linear. Para tanto, análise de ordem de magnitude dos termos envolvidos na equação dinâmica, mostra que são *localmente dominantes* os efeitos de rigidez geométrica e flexional, quando comparados aos termos de inércia ou de natureza

hidrodinâmica. Mais uma vez a técnica de camada-limite é empregada e a solução dinâmica de curvatura deduzida na forma de uma expressão analítica, função não-linear da tração dinâmica, da variação de inclinação da extremidade da linha, ambos determinados da solução de cabo, e do movimento angular do eixo da terminação.

Visando a completude da abordagem proposta, o Apêndice finaliza o presente trabalho apresentando uma sinopse de resultados anteriormente deduzidos por Aranha et al, 1993, relativos a um modelo assintótico analítico que permite determinar a resposta dinâmica da linha submersa em tração, portanto sem que sequer o problema dinâmico global tenha sido resolvido numericamente.

O capítulo 2 do presente trabalho traz uma abordagem descritiva de diversos aspectos intervenientes na análise e projeto de "*risers*", e atinentes à determinação dos esforços solicitantes na linha, em uma dada condição de operação. Alguma discussão é reservada aos métodos de análise e procedimentos de projeto comumente aplicados. O conteúdo do capítulo 2 deve assim ser entendido como elemento de apresentação e contextualização dos tópicos analisados nos capítulos 3 e 4, dentro da perspectiva de *situar o tema específico de que trata o presente trabalho no âmbito da engenharia*. O capítulo 2 pode, portanto, ser deixado de lado por um leitor já familiarizado com o tema em tela.

## **2. CABOS E TUBOS SUBMERSOS LANÇADOS EM “CATENÁRIA”**

**E**ste capítulo *tem como objetivo propiciar uma visão panorâmica acerca do problema de dimensionamento mecânico de cabos umbilicais e "risers" em catenária*, sejam constituídos por tubos de aço (SCR's - "steel catenary risers") ou tubos flexíveis ("flexible risers"), apresentando e discutindo diversos fatores intervenientes que condicionam o projeto e *permitindo situar com maior propriedade o tema específico de que trata o presente texto*. Seu caráter é descritivo, portanto, procurando apresentar um apanhado acerca do problema de projeto, com intuito preparatório ao desenvolvimento analítico da mecânica de linhas submersas. Este último, tema central do presente trabalho, é elemento fundamental à determinação dos esforços solicitantes seccionais e, portanto ao dimensionamento de linhas em configuração de catenária direta. Condizentemente, e por concisão, o foco deste capítulo estará centrado sobre o estudo dos aspectos de carregamento e resposta dinâmica, deixando assim de discutir importantes tópicos como, por exemplo, a distribuição interna de tensões em secções de tubos flexíveis (ver Pesce & Ramos, 1996 ou Pesce, Martins & Aranha, 1995a,b).

Muito embora existam diferenças de comportamento dos diferentes tubos e entre estes e cabos, muitas das considerações aqui tecidas são de caráter geral e aplicáveis, portanto, a todos estes casos. Quando pertinente será feita a necessária distinção.

## 2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

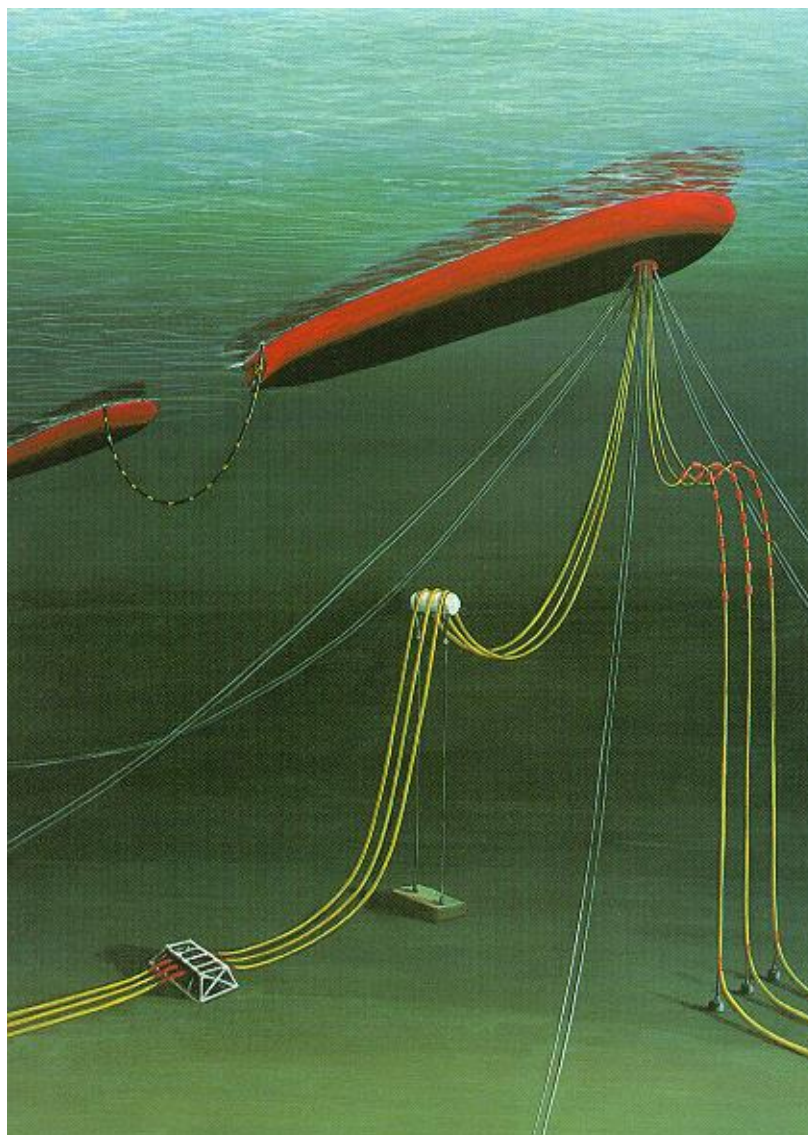
A introdução de tubos flexíveis, do tipo "unbounded", na função de *risers*, tem sido cada vez mais frequente, iniciando-se na década de 70 e sedimentando-se como alternativa usual e segura na década de 80. A configuração de "catenária direta" ("free-hanging") tem sido então adotada de forma crescente, à medida que a exploração se desloca para águas mais profundas. A tabela abaixo, extraída de Tada et alii (1992), apresenta, para *risers* compostos por tubos flexíveis, comparação qualitativa de desempenho entre seis diferentes configurações de instalação. Conforme pode ser observado, a configuração de catenária direta apresenta maiores vantagens e tem sido, portanto, mais adotada. A avaliação por parte daqueles autores tem, obviamente, caráter algo subjetiva, passível portanto de questionamento. Sua inclusão guarda muito desta finalidade.

Recentemente, na exploração em águas profundas e sob a motivação de custos substancialmente mais baixos, tem-se investido na utilização de tubos de aço em configuração de catenária ("*Steel Catenary Risers*"- SCR), ou ainda "*risers* rígidos". Neste caso, é evidente que a configuração catenária direta é a mais razoável, porquanto reduz a dois o número de pontos de alta curvatura (elevado momento fletor). Particularmente a PETROBRÁS, através de seu Departamento de Produção intensificou, com a colaboração da Escola Politécnica, a análise desta alternativa, a partir de estudos conduzidos pela SHELL, para o Golfo do México.

**Tabela 2-1 Comparação entre configurações alternativas para risers flexíveis; (extraída de Tada et al., 1992)**

**Avaliação: 1=excelente; 2=muito bom; 3=bom; 4=satisfatória; 5=limitada; 6=pobre**

	configuração					
	"chinese lantern"	"free-hanging"	"steep S"	"steep wave"	"lazy S"	"lazy wave"
	<b>Comportamento Estático</b>					
<i>em águas rasas</i>	5	5	3	3	2	1
<i>em águas profundas</i>	5	1	1	1	1	1
	<b>Comportamento Dinâmico</b>					
<i>tempestade; águas rasas</i>	5	6	5	4	3	4
<i>tempestade; águas profundas</i>	5	5	3	3	1	2
<i>tempo calmo; águas rasas</i>	3	5	4	3	2	3
<i>tempo calmo; águas profundas</i>	5	3	3	2	1	1
	<b>Facilidade de instalação</b>					
	1	1	5	4	3	1
	<b>Adaptabilidade</b>					
<b>Congestionamento do fundo</b>						
<i>template</i>	1	3	1	1	4	3
<i>poços satélites</i>	4	1	4	4	1	1
<b>Linhas Múltiplas</b>	5	1	1	5	1	5
	<b>Viabilidade econômica</b>					
<i>sistemas com linha única</i>	1	1	5	3	3	2
<i>sistemas multi-linhas</i>	1	1	4	5	2	5
	<b>Número de sistemas instalados</b>					
	0	11	2	0	2	1



*Figura 2-1 Configurações típicas de linhas flexíveis na função de risers<sup>7</sup>*

Phifer et alii, 1994, apresentam os resultados do projeto de utilização de SCR's na plataforma de Auger (TLP), em lâmina d'água de 2860 pés, para óleo e gás. Estes SCR's tem diâmetro externo de 12.75 polegadas e espessura de 0.688 polegadas, constituídos de aço API 5LX-52. O estudo indica a viabilidade técnica do projeto, resultando vida útil superior a 300 anos.

---

<sup>7</sup> Cortesia: Orcina Cable Protection Ltd.

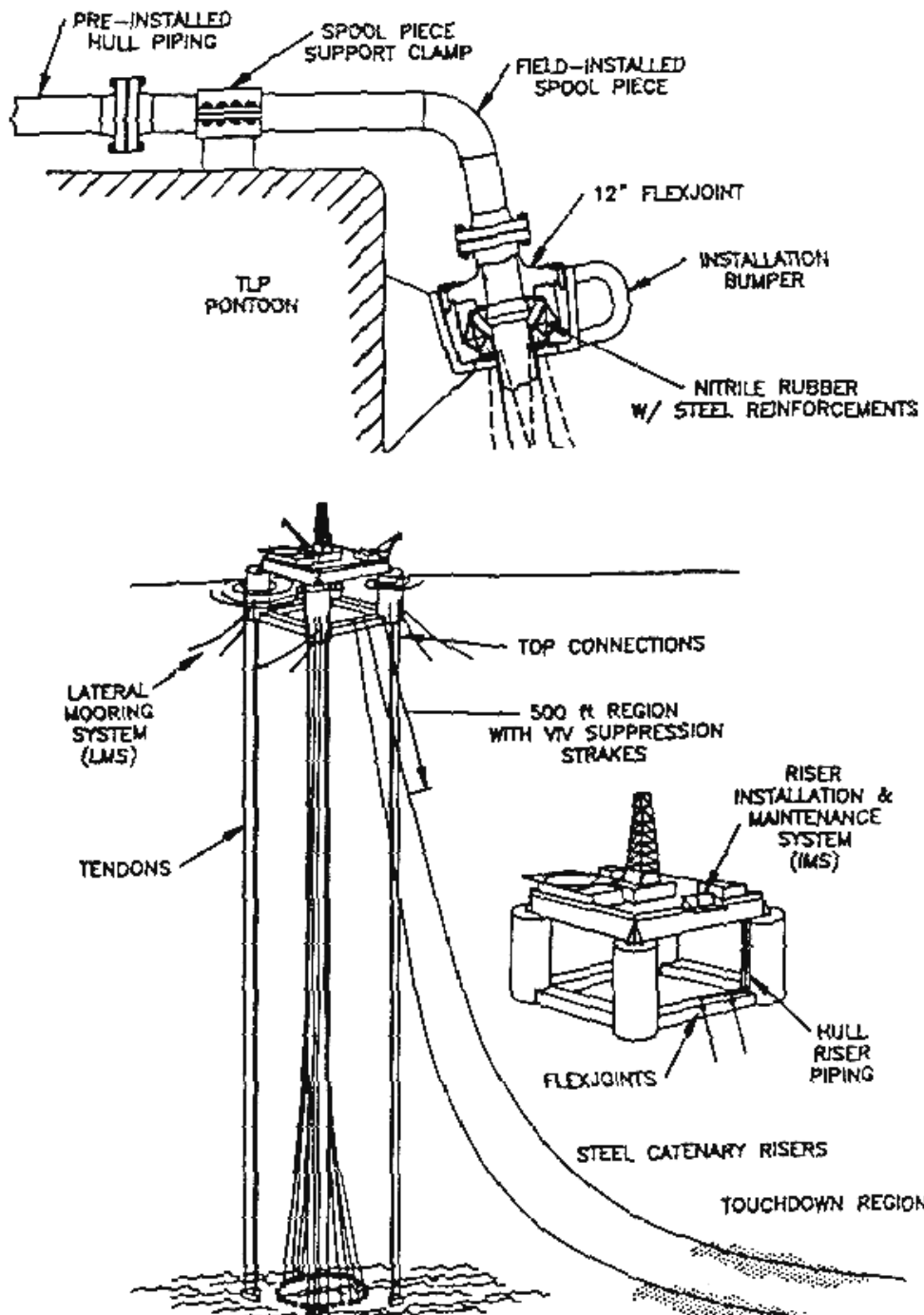


Figura 2-2 SCR de Auger (extraída de Phifer et alii, 1994)

O projeto, realizado segundo procedimento racional, utilizou ferramental de análise convencional, porém de forma estruturada, incorporando os principais carregamentos



(estáticos e dinâmicos) a que estarão sujeitos os SCR's. A Figura 2-2, extraída do trabalho mencionado, representa os principais aspectos do sistema.

Por seu turno, cabos umbilicais, cuja função é prover alimentação ou sinal de controle, elétricos ou hidráulicos, aos sistemas de válvula instaladas no fundo do oceano junto aos poços, tem tido larga utilização, quase sempre na configuração de "catenária direta". Tais linhas são estruturalmente similares aos tubos flexíveis, precedendo-os cronologicamente, na realidade.

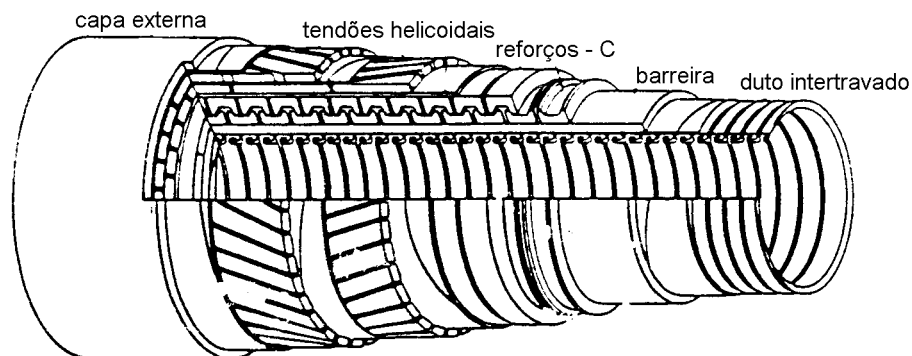
Linhas em catenária, sejam cabos umbilicais, tubos de aço ou flexíveis, podem vir a falhar devido a diversos fatores, dentre eles: sobrecarga, fadiga mecânica, dano localizado (impacto), colapso, corrosão, além de falhas nos pontos ou cordões de solda, falhas em juntas flexíveis, enrijecedores de flexão e conexões em geral. Particularmente, cabos umbilicais e tubos flexíveis podem ainda vir a falhar por ruptura por excesso de pressão interna ("burst"), envelhecimento dos materiais poliméricos que o compõem, desgaste por fricção interna ou abrasão externa, apenas citando alguns dos possíveis fatores. Requisitos de projeto não são, em geral, diferenciados no que diz respeito a possíveis falhas e suas consequências. Muito embora muito esforço de pesquisa e desenvolvimento tenha sido dedicado ao tema, pode-se dizer, no entanto, que inexiste, até o presente momento uma correlação segura entre critérios de projeto e realidade operacional.

A diversidade e complexidade dos carregamentos ambientais, assim como a inerente não-linearidade de resposta da linha, tornam bastante laboriosas e de difícil interpretação tarefas que poderiam ser julgadas simples, a priori. A correta determinação da amplitude dinâmica do momento fletor junto ao ponto de contato com o fundo ("touch-down point"), por exemplo, e que se constitui em um dos pontos críticos do sistema, não é trivial, como será visto em detalhes nos capítulos 3 e 4.

No caso do emprego de tubos de aço, dadas as conhecidas propriedades de isotropia do material e estabilidade de comportamento mecânico ao longo do tempo, a determinação do campo de tensões e deformações e mesmo a previsão de fadiga se faz de forma mais direta, quiçá mais confiável. O mesmo não pode ser dito a respeito de tubos flexíveis ou cabos umbilicais.

Tubos flexíveis e cabos umbilicais são elementos estruturais de construção composta, constituídos de materiais metálicos e poliméricos. A Figura 2-3 apresenta um exemplo típico de tubo flexível. As diferentes características destes materiais, suas propriedades mecânicas bem como seu comportamento sob carregamento, dificultam qualquer abordagem. Mesmo considerando materiais da mesma natureza, a modelagem resulta laboriosa, devido à própria concepção construtiva, em "camadas". De um modo geral, estes componentes podem ser classificados em:

- *componentes estruturais metálicos*, que suportam cargas de pressão, axiais, flexionais e de torção;
- *tubos e camisas poliméricos*, com o fim de conferir estanqueidade (prevenir vazamento) e alguma rigidez flexional à seção, no caso de tubos flexíveis;
- mangueiras e condutores, no caso de cabos umbilicais.



*Figura 2-3 Tubo Flexível típico*

Um tubo flexível ou cabo umbilical falhará, se um de seus componentes falhar. Tal fato pode ser consequência de (ver, por exemplo, Jiao, 1992; Claydon et al., 1992): ruptura dos tendões helicoidais - sob tensão axial e pressão interna -; colapso das carcaças internas - sob pressão externa (ou sob compressão interna entre as diversas armaduras tensionadas)-; desgaste ou fadiga dos diversos fios metálicos que compõem a armadura; vazamento nas camadas plásticas devido a corrosão e envelhecimento; fadiga e eventual ruptura dos condutores (no caso de umbilicais); situações de curvatura extrema (flexão), como a que pode ocorrer associada à instabilidade flexo-torcional ("laço") do tubo (cabo), durante uma operação de lançamento. Não apenas o tubo propriamente dito pode falhar, mas também as terminações e conexões. Expansão térmica diferencial e variação brusca de rigidez flexional, em regiões de grande curvatura, onde em geral se posicionam as terminações, podem ser responsáveis por perda de estanqueidade e fadiga mecânica. Fluência dos diversos materiais poliméricos pode vir a comprometer a pressão de selagem neste entorno.

No que diz respeito ao carregamento externo, associado à ação do ambiente (ondas e correnteza) e às condições de contorno nas extremidades (pontos de ancoragem) ou nas intermediárias (bóias ou flutuadores), os modelos de cálculo em geral adotados se, por um lado, pecam quanto à representatividade do caráter dinâmico do sistema e estocástico (de curto e longo-termo) do ambiente, por outro, são muitas vezes demasiadamente complexos, orientados de forma a considerar fatores muitas vezes de relevância questionável. Em outras palavras, os modelos adotados são em geral desbalanceados no que diz respeito à sua representatividade e confiabilidade.

No que tange a tubos flexíveis e cabos umbilicais, cumpre ainda notar que embora muitos testes com espécimens tenham sido realizados e apresentados (ver, p.ex. Mallen et alii (1989) e mais recentemente, Saevik & Berge, 1995 ou Witz & Tan., 1995), poucos são os que permitem reproduzir, ainda que aproximadamente, as condições reais de operação destes produtos. Evidentemente existe a necessidade de

um esforço experimental para o levantamento das características reais e do comportamento dinâmico de tubos flexíveis no ambiente de operação, particularmente, no que diz respeito à fadiga, posto que a construção destes produtos dificulta qualquer abordagem mais simples, como a de dano acumulado de Miner, por exemplo.

Este panorama explica, ao menos em boa parte, porque até o presente momento não está estabelecida, ao nível internacional, metodologia de projeto, completa e devidamente normatizada, que permita desenvolver projeto racional de *risers* em catenária (sejam compostos por tubos de aço ou flexíveis), tendo em vista seu dimensionamento mecânico e a previsão de sua vida útil com confiabilidade adequada. As normas vigentes atestam tal assertiva, corroboradas pelas publicações, algumas de fabricantes, outras de instituições independentes de pesquisa. A elaboração e posterior consolidação de metodologia abrangente, permitindo considerar, com grau de propriedade adequado, os diversos problemas que concorrem na previsão de vida útil de sistemas desta natureza, depende de estudos intensivos, tanto ao nível teórico (modelagem), quanto experimental. Consulta às publicações mais recentes, em revistas técnicas e conferências, mostram que este processo está em pleno curso.

As seções a seguir procurarão dar noções sobre o carregamento imposto ao sistema, configuração estática e resposta dinâmica, fadiga mecânica, critérios gerais de dimensionamento e pontos críticos ("hot-spots"), métodos de análise e cálculo usuais, procurando então descrever um possível procedimento geral para o projeto. Este capítulo pode, assim, ser visto como motivador do estudo a ser empreendido nos capítulos 3, 4.

## **2.2 OS PROBLEMAS DE ANÁLISE DE LINHAS SUBMERSAS EM “CATENÁRIA” NA SITUAÇÃO DE OPERAÇÃO**

Dentro das hipóteses usuais em hidrodinâmica marítima e engenharia oceânica, a resposta dinâmica de *risers* (sejam constituídos por tubos flexíveis ou por tubos de aço) é modelada frente à ação de ondas e correnteza, admitindo-se como válidas as relações constitutivas oriundas da Teoria da Resistência dos Materiais, considerando conhecidas as propriedades seccionais como a rigidez axial (EA) e flexional (EJ).

O ambiente marítimo é, em geral, modelado como constituído por ondas de superfície (ou de gravidade) - dentro da teoria linear de ondas dispersivas -, pela correnteza oceânica - esta distribuída segundo um perfil vertical, podendo variar em intensidade e direção ao longo da profundidade - e pelo vento. As ondas agem sobre o sistema dinâmico de duas maneiras distintas: uma diretamente, ao longo do comprimento do *riser* e outra indiretamente, através da alteração na posição da plataforma flutuante ou navio, que serve de apoio à extremidade superior da linha, e do movimento a ela imposto. Já a correnteza além de agir sobre a unidade flutuante, aciona a linha ao longo de todo o (ou, de boa parte do) seu comprimento, o carregamento hidrodinâmico decorrente sendo então calculado através das fórmulas usuais de Morison, que levam em consideração as forças hidrodinâmicas de natureza inercial e de arrasto viscoso. A ação do vento se dá de forma indireta, através de seu carregamento sobre a unidade flutuante.

Há ainda o carregamento associado ao fluxo interno de óleo/gás (Patel & Seyed,1989), que pode se tornar relevante para tubos flexíveis, ou mesmo tubos de aço.

### 2.2.1 Carregamento Estático e Configurações de Equilíbrio

A configuração de equilíbrio estático é imposta pelo próprio peso imerso do tubo, pelas coordenadas do ponto de suspensão ("*offset*" da plataforma), pelas cargas hidrodinâmicas estacionárias associadas à correnteza, e pelas condições de contorno apropriadas na extremidade superior (junta flexível ou "*bending stiffner*") e no fundo (tangência). Devido à baixa rigidez flexional da linha (mesmo de SCR's), as ações dos vínculos no topo acabam por se restringir a uma região bastante pequena no seu entorno, não afetando a configuração de equilíbrio do ponto de vista global, mas apenas gerando um campo localizado de flexão. Obviamente, quanto maior a rigidez flexional do elemento de conexão, maiores serão os momentos fletores nesta região.

Assim, a "aproximação de cabo", na qual a linha é considerada infinitamente flexível, acaba por apresentar resultados bastante satisfatórios na determinação da configuração de equilíbrio estático. Este fato será visto com detalhes no capítulo 3 e permite caracterizar o problema estático a partir de parâmetros geométricos (coordenadas do ponto de suspensão) e do peso imerso da linha, de maneira bastante simples. Este fato também acaba por justificar a adoção do termo *linha em catenária*.

Por outro lado, a equação de catenária prevê, junto ao ponto de tangência no fundo ("touch-down point" - TDP), descontinuidade na curvatura, o que efetivamente não ocorre (implicaria em descontinuidade do momento fletor). Há, na realidade, uma variação brusca da curvatura da linha, que passa de nula, no fundo, a um valor relativamente alto, logo após a perda do contato. Isto implica em forças cortantes relativamente elevadas nesta região, cuja "função" é harmonizar a estática de catenária (que é essencialmente válida ao longo do trecho suspenso) à condição de contorno de flexão nula no fundo. Este ponto ficará mais claro no capítulo 3.

Conforme pode ser antevisto, na configuração de "catenária direta", duas são as regiões críticas em termos de solicitações mecânicas: o *ponto de contato com o fundo (TDP)* e a *extremidade superior* ou *topo*. De fato, nestas regiões e, particularmente no TDP, ocorrerão os maiores níveis de solicitação mecânica. No TDP ocorrerá a maior flexão. No topo, a maior tração. A Figura 2-4, abaixo, procura ilustrar este fato, apresentando duas configurações de equilíbrio para a mesma linha: "*far*" e "*near*".<sup>8</sup> Na primeira ("*far*"), a plataforma está mais distante (maior "*offset*"), tensionando a linha, aumentando seu ângulo de saída junto ao topo e diminuindo a curvatura no TDP. Na segunda ("*near*"), a plataforma está mais próxima (menor "*offset*"), diminuindo a tração na linha, tornando mais próximo da vertical a saída do *riser* junto ao topo e aumentando substancialmente a curvatura no TDP. A cada configuração de equilíbrio estática corresponderão esforços diferentes. Quanto maior a tração tanto maior a rigidez geométrica ou de catenária. As mesmas cargas dinâmicas em torno destas diferentes situações resultarão, portanto, em respostas dinâmicas distintas, e que deverão ser quantificadas de forma apropriada. Conforme será visto adiante o TDP e a extremidade superior são também pontos de maior solicitação dinâmica. Fadiga, se ocorrer, acontecerá primeiramente nestes dois pontos.

---

<sup>8</sup> Esta terminologia é largamente utilizada em engenharia oceânica.

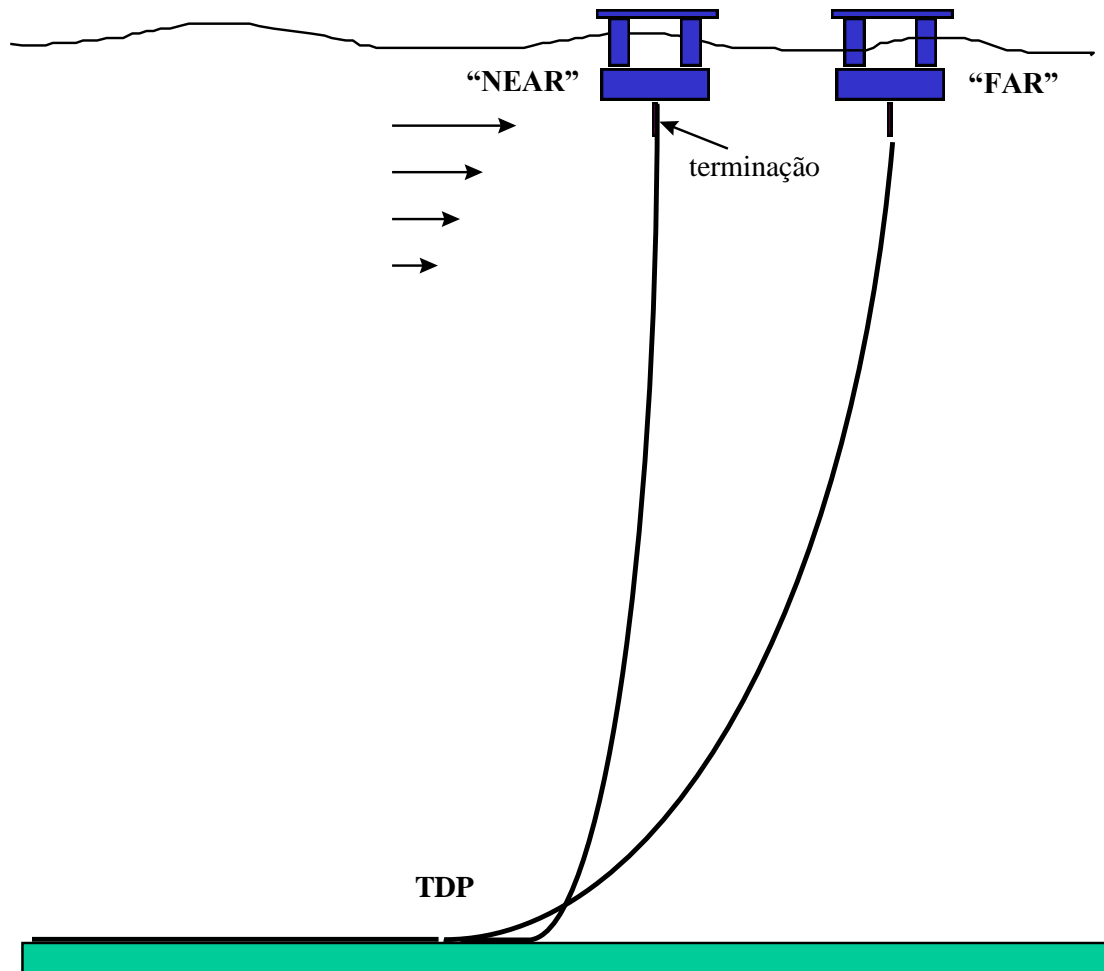


Figura 2-4 Configurações Estáticas "Far" e "Near" e "hot-spots".

O carregamento estático associado à correnteza é mais crítico se a direção do escoamento for coplanar à catenária. Se o sentido de escoamento for o de "offset" da plataforma, a correnteza tende a tensionar a linha, diminuindo o ângulo de saída com a vertical, diminuindo a curvatura no fundo, levantando linha e movendo o TDP no sentido oposto ao "offset". Se o sentido for o oposto ao de "offset", o ângulo de saída tende a aumentar, podendo ocorrer um ponto de inflexão, aumentando a curvatura junto ao TDP e movendo-o contra a plataforma. Note que este comportamento pode



ser alterado substancialmente se houver mudança de direção da correnteza ao longo do perfil, como ocorre na Baía de Campos. As forças associadas à ação da correnteza provocam alteração da tração ao longo da linha, modificando sua "rigidez geométrica" (ou de catenária) e provocando, portanto, alterações na resposta dinâmica.

### **2.2.1.1 Deriva Média da Plataforma ("offset" estático)**

A ação de vento, correnteza e ondas sobre a plataforma implica em alteração de seu "offset" e portanto do "offset" da extremidade do *riser*. Esta alteração será tanto maior quanto mais intensas forem as ondas e a correnteza e quanto menor for a rigidez do sistema de amarração. Note que se o ângulo de saída da linha com a vertical for muito grande, sua influência na rigidez do sistema de fundeio poderá ser não desprezível. Em outras palavras, o(s) "*riser*"(s) estará(ão) servindo como amarra(s). Por outro lado, embora não-linear, a resposta do sistema de amarração pode ser linearizada em torno da condição de equilíbrio estudada, particularmente em águas profundas.

A força média imposta pelas ondas é conhecida em hidrodinâmica marítima como "força de deriva" ("*wave drift force*") (ver por exemplo, Newman, 1974; Pesce, 1984). Tem a direção e sentido de propagação do trem de ondas. Ela é bastante pequena, de segunda-ordem se comparada às forças oscilatórias na faixa de frequência da onda. Seu valor é proporcional ao quadrado da amplitude média da onda incidente. O coeficiente de proporcionalidade depende da frequência média da onda (ou do espectro de mar) e da forma geométrica da parte submersa do casco. Seu cálculo não é trivial, exigindo o emprego de códigos computacionais bastante sofisticados.

A força de arrasto associada à correnteza superficial sobre a plataforma é proporcional à velocidade do escoamento ao quadrado e depende das formas do casco. Sua determinação depende, em geral, de ensaios hidrodinâmicos com modelos reduzidos. Embora varie no tempo, porquanto variam as condições ambientais, esta variação é tão lenta (superior a 2 horas) que, na escala de tempo que caracteriza a dinâmica do sistema fundeado, pode ser considerada constante.

As forças associadas à ação do vento são de variações muito mais rápidas, quando comparadas àquelas correspondentes à correnteza. A força média decorrente também acarretará alteração do "offset" da plataforma. Sua determinação é ainda mais empírica do que a de correnteza, posto que o escoamento é turbulento, apresentando inúmeros pontos de descolamento de vórtices junto à superestrutura da plataforma. Leis quadráticas na velocidade são em geral empregadas.

### **2.2.2 Movimentos Impostos ao Topo pela Unidade Flutuante**

A resposta dinâmica da linha é, em sua maior parte, devida aos movimentos impostos ao topo pela unidade flutuante. Assim, como regra geral, quanto mais "estacionária" for a unidade flutuante, tanto mais viável será a utilização de *risers* em catenária. Neste contexto, plataformas tipo TLP são, em princípio, mais adequadas do que semi-submersíveis, que por sua vez são por certo melhores do que navios.

Qualquer que seja o tipo de unidade flutuante, no entanto, esta será acionada pelas ondas de superfície, movimentando-se em duas faixas distintas de frequência. A resposta na primeira faixa de frequências, entre 0.04 e 1.0Hz (períodos de 25 a 1 s), que caracteriza o espectro das ondas presentes no oceano, será denominada *resposta em primeira-ordem* ou em "alta frequência". A resposta na segunda faixa de frequências, entre 0.003 e 0.04 Hz (períodos de 330 a 25 s), que caracteriza a resposta ressonante do sistema fundeado, será denominada *resposta em segunda-ordem* ou

"em baixa frequência" (*slow-drift oscillations*) (ver, p.ex, Newman, 1974; Pesce, 1984). Note que o termo "segunda-ordem" refere-se às forças hidrodinâmicas de baixa-frequência que ocasionam as oscilações. Estas forças são efetivamente de segunda-ordem e apenas ocorrem em mar real, e não em onda regular pura. No entanto as oscilações decorrentes, porquanto ressonantes, são em geral de amplitude comparável às oscilações em "*alta frequência*".

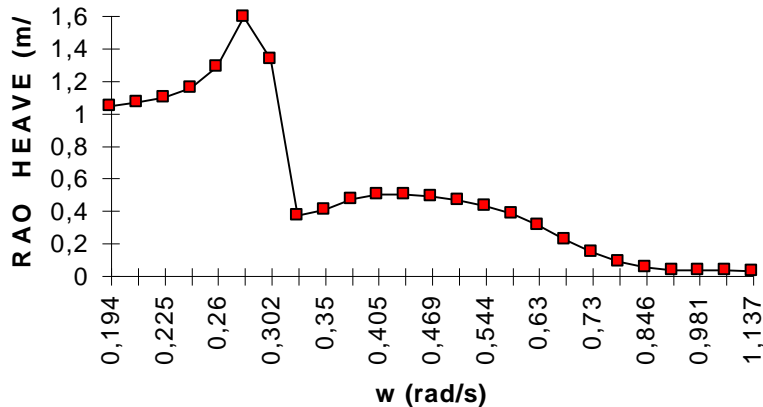
Outro fator de indução de movimento da plataforma, conforme mencionado, é o vento. Sua intensidade distribui-se segundo um espectro de energia tipo "marrom" ("brown-noise"), com componentes dentro da faixa de frequência de resposta dinâmica do sistema fundeado, nele provocando oscilações em baixa-frequência.

### ***2.2.2.1 Resposta da plataforma às ondas em primeira ordem (alta frequência)***

Plataformas semi-submersíveis e TLP's são projetadas para responder "fracamente" em primeira-ordem<sup>9</sup>. Esta resposta depende da frequência da onda incidente e do aproamento da plataforma em relação a ela. A Figura 2-5, abaixo, ilustra o ganho de uma curva de resposta em frequência típica para uma plataforma semi-submersível segundo o movimento vertical ("heave"), normalizado pela amplitude de onda incidente. Como pode ser observado, a resposta é bastante atenuada entre 5 e 15s, faixa de períodos que caracteriza a maioria dos estados de mar. Do ponto de vista de análise é necessário determinar-se o movimento do ponto de suspensão da linha em mar real, caracterizado por um espectro de energia (distribuição contínua de energia em uma dada faixa de frequências).

---

<sup>9</sup> O mesmo não é válido para navios, obviamente.



*Figura 2-5 Resposta em Frequência (RAO) em "Heave" de uma Plataforma Semi-submersível Típica.*

O procedimento usual é o seguinte:

- (1) de posse das curvas de resposta em frequência da plataforma, segundo seis graus de liberdade ("*surge, sway, heave, pitch, roll e yaw*"), calcula-se, via dinâmica de corpo rígido, as correspondentes curvas de resposta em frequência do ponto de suspensão da linha, segundo três graus de liberdade, em *surge, sway e heave*;
- (2) para cada espectro de energia de ondas definido para caracterizar a agitação marítima local, calcula-se, via teoria de resposta de sistemas lineares a excitações aleatórias, os espectros de movimentos do ponto de suspensão; deles determinam-se parâmetros estatísticos tais como amplitude média, valor RMS, período entre zeros, etc.

Estes valores servirão como "dados de entrada" para a análise dinâmica da linha. Note que os parâmetros estatísticos não carregam a informação de fase relativa entre os movimentos. Para preservá-la é necessário construir realizações temporais

simultâneas dos três movimentos, para um dado espectro de mar, o que é possível através de simulações no domínio do tempo. Alternativa mais simples, embora restritiva, é representar a ação de todo o espectro de mar através de movimentos harmônicos tendo como amplitudes os valores médios calculados, e como períodos os valores de período entre zeros determinados em (2).

Qualquer que seja o procedimento adotado, no entanto, decorrem oscilações de amplitude bem menores do que aquelas que seriam obtidas, erroneamente, se tomássemos simplesmente o valor proporcional à resposta na frequência de pico do espectro de mar.

Os movimentos, então determinados, serão impostos ao topo da linha e sua resposta dinâmica poderá ser calculada para cada situação de "*offset*", mar e correnteza. Estes movimentos tem frequências que se situam na faixa de frequências naturais das linhas; (na realidade mostra-se que estes períodos naturais são proporcionais à raiz quadrada de  $H/g$  onde  $H$  é a profundidade do mar; ver Aranha et al., 1993). Para profundidades típicas de 1000m os períodos naturais são, em geral, inferiores a 30s. Os movimentos de primeira-ordem excitarão, portanto, modos naturais da linha. Fortuitamente, devido ao acentuado amortecimento provocado pelas forças de arrasto, as amplitudes de oscilação da linha são relativamente pequenas, ocasionando oscilações de tração com amplitude quase constante ao longo do vão suspenso e pequenas amplitudes de oscilação da curvatura (momento fletor).

Resumindo, os carregamentos associados aos movimentos da extremidade superior, em primeira-ordem, serão extremamente relevantes em duas situações:

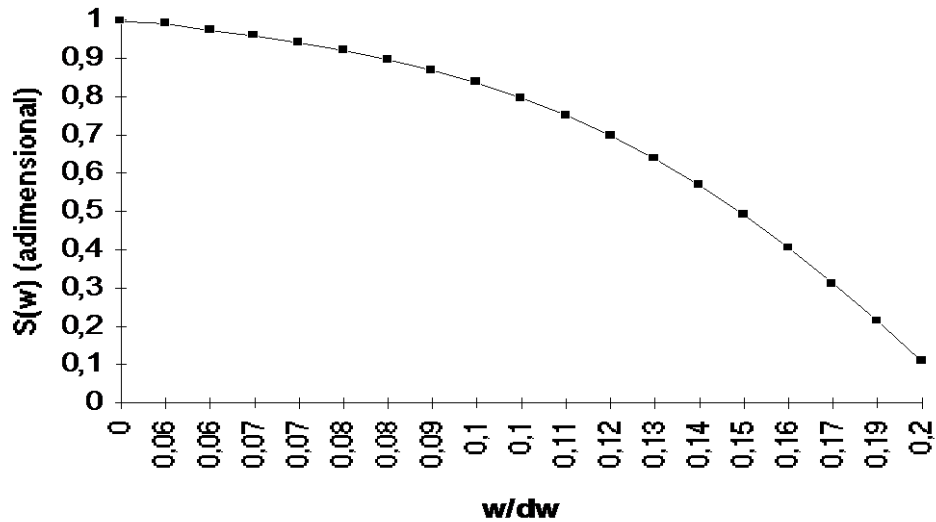
- (a) em condições extremas de agitação marítima (onda centenária), podendo provocar sobrecarga de tração ou flexão no topo, flexão no TDP, ou mesmo compressão, com eventual instabilidade cíclica da linha;
- (b) no cálculo do dano acumulado para avaliação de fadiga mecânica, na medida que, embora em geral pequenas, as solicitações se dão permanentemente e com períodos típicos da ordem de 6 a 10 s.

### **2.2.2.2      *Resposta da plataforma às ondas em baixa frequência***

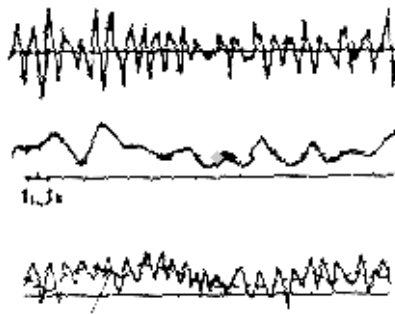
Este fenômeno é usualmente conhecido em engenharia oceânica como "*oscilações lentas*" (ou "slow drift oscillations"). Trata-se, em última análise, da resposta ressonante (portanto em frequências próximas à sua frequência natural) do sistema flutuante fundeado, à ação das ondas. Os movimentos de maior relevância se dão no plano horizontal. Esta resposta se deve à ação de componentes de baixa frequência da força hidrodinâmica de segunda-ordem e que decorrem da variação lenta da amplitude das ondas que caracteriza o mar real. Podem ser interpretadas, pelo menos em sua parte principal, como oscilações lenta das forças médias de deriva; ver, p.ex., Newman 1974; Pesce, 1984.

As frequências que caracterizam estas oscilações são as que definem os "grupos de onda", facilmente observáveis. Relacionam-se estas frequências com a "largura de banda do espectro de ondas incidentes". Ou seja, quanto mais "estreito" for o espectro de onda, tanto menores serão as frequências que caracterizam os grupos. Na realidade o espectro de potência das forças de deriva é plano, no limite assintótico quando  $\omega \rightarrow 0$ ; ver Pesce & Aranha, 1986 e, mais completo e recente, Aranha & Fernandes, 1995. Pode ser considerado praticamente constante até faixas de 0.02 HZ (acima de 50s). Como os sistemas flutuantes fundeados em águas profundas tem período natural de cerca de 200 s (0.005HZ), e são bastante sub-amortecidos (pico ressonante bem pronunciado) o espectro de forças de deriva pode ser aproximado como o de um ruído branco e a resposta do sistema fundeado em baixa frequência acaba por se dar praticamente em sua frequência natural. A Figura 2-6 apresenta, de forma

esquemática, as séries temporais de onda e oscilação lenta segundo o movimento de "surge", bem como o espectro de energia da força de deriva.



(a)



(b)

Figura 2-6 Oscilações lentas de um sistema fundeado: (a) espectro de forças de deriva; (b) séries temporais de amplitude de onda e movimento de surge.

Interessante é constatar que a amplitude de oscilação em baixa frequência de um sistema fundeado varia muito pouco com o estado de mar. Este fato se deve a dois fatores concorrentes, porém totalmente independentes entre si. De um lado a amplitude da força de deriva lenta é proporcional ao quadrado da amplitude média das ondas do mar. De outro é proporcional a um coeficiente (o próprio coeficiente de força média) que depende da frequência central  $\omega$  do espectro de mar, sendo nulo em

valores pequenos de  $\omega$ . Este coeficiente é função da geometria do corpo e do aproamento. A amplitude média das ondas é, por razões de estabilidade hidrodinâmica (Stokes), tanto menor quanto maior for sua frequência. Assim a força de deriva será produto de duas variáveis: a primeira (coeficiente de força) que cresce à medida que cresce  $\omega$ , a partir de zero. A segunda, proporcional ao quadrado da amplitude média de onda, que decresce à medida que cresce  $\omega$ . Como resultado, a magnitude das forças de deriva pouco varia com o estado de mar. Ainda, como o espectro de força de deriva é praticamente plano em frequências próximas de zero, não há como dessintonizar o sistema fundeado. A amplitude das oscilações lentas, por conseguinte, varia muito pouco com o estado de mar. A tabela 2.2 abaixo ilustra este fato. Veja que a coluna correspondente à amplitude de oscilação lenta apresenta valores que pouco variam, para os estados de mar entre 1 e 4. Esta situação não é generalizável, no entanto.

Os movimentos em baixa-frequência, embora relativamente pequenos, (cerca de 2.0m para a plataforma semi-submersível referida na Tabela 2.2), ocorrem permanentemente, com período de cerca de 150 segundos. No que tange à dinâmica do *riser*, as oscilações em baixa-frequência são "quase-estáticas". Seu efeito, portanto, pode ser quantificado de forma estática, considerando uma correspondente variação lenta de "offset", com período muito próximo ao período natural do sistema fundeado<sup>10</sup>. Na análise de condições extremas este "offset" deve ser adicionado ao "offset" médio correspondente. Na análise de fadiga, estas oscilações por certo contribuirão no dano acumulado total. Poderão mesmo ser determinantes em profundidades intermediárias, para tubos de diâmetro relativamente elevado; ver Pesce, 1994.

***Tabela 2.2-2 Offset e oscilações lentas para a plataforma PXIX fundeada em 770m de profundidade.***



Estado de Mar	Altura de Onda Significativa (m)	Período entre zeros (s)	Offset Estático (m)	Deriva lenta significativa (m)	Deriva lenta máxima (m)
1	0.75	5.24	5.97	1.84	2.73
2	1.25	5.27	6.06	1.86	2.77
3	1.75	5.77	6.15	1.92	2.85
4	2.25	6.26	6.23	1.99	2.95
5	2.75	6.89	6.28	2.04	3.03
6	3.25	7.72	6.29	2.04	3.08
7	3.75	7.89	6.37	2.13	3.17
8	4.25	8.20	6.44	2.21	3.29
9	4.75	9.00	6.39	2.15	3.20

Verifica-se também que a maior variação de tensão em deriva lenta se dá junto ao *TDP*, associada à flexão quase-estática, na parte externa superior do tubo (onde ocorre compressão na flexão). Na parte inferior do tubo, onde ocorre tração na flexão, a tração efetiva média na condição de maior raio de curvatura, durante a excursão em deriva lenta, se alivia, compensando parcialmente a tração associada à flexão adicional.

<sup>10</sup> Esta afirmação pode ser fundamentada através da aplicação da técnica conhecida como *de escalas múltiplas* (ver p.ex., *Bender & Orzag, capítulo 11*).

### **2.2.2.3 Resposta da plataforma ao vento em baixa frequência**

As oscilações em baixa frequência têm uma segunda causa, as rajadas de vento. Seu efeito deve ser quantificado, necessitando-se, para tanto, do espectro de energia do vento. Isto é usualmente feito de forma empírica, com ensaios em túneis de vento. Uma vez quantificado o movimento, seu efeito é, no que diz respeito à dinâmica do *riser*, o mesmo descrito no sub-item anterior.

### **2.2.3 Ação Direta das Ondas**

As ondas de superfície agem diretamente sobre a linha, carregando-a dinamicamente. Como é sabido, em águas profundas as ondas são dispersivas, e o campo de escoamento ondulatório decai exponencialmente com a profundidade, na taxa  $-2\pi z/\lambda$ , onde  $z$  é a cota de imersão e  $\lambda$  o comprimento da onda. Portanto o efeito direto das ondas sobre a linha fica restrito à camada superficial da lâmina d'água, decaindo para 2% quando  $z = 100\text{m}$ , e  $T = 10$  segundos, por exemplo.

Visto que o diâmetro dos tubos é muito menor do que o comprimento das ondas de gravidade, não ocorre o fenômeno de difração. As forças hidrodinâmicas agentes sobre a linha podem, portanto, ser modeladas com boa precisão através da usual Fórmula de Morison, que a separa em duas componentes. A primeira associada à aceleração relativa do meio fluido (forças de inércia), representada pelo coeficiente de inércia  $C_M$ . A segunda, associada ao arrasto viscoso, representada pelos coeficientes  $C_D$  (componente normal) e  $C_T$  (tangencial).

Se comparado ao efeito do movimento imposto ao *riser* pela unidade flutuante, pode-se afirmar que a ação direta das ondas é de menor relevância.

Embora de pequena monta, existe ainda um fenômeno não linear associado à ação direta das ondas sobre a linha que é, ao menos qualitativamente, importante. Trata-se de uma componente vertical de força, de média não nula, de segunda-ordem, que age ao longo da linha, e que acaba por "levantá-la ligeiramente", aliviando a tração estática. Este fenômeno é observado experimental e numericamente, quando do processamento de códigos computacionais que integram a equação dinâmica não-linear no domínio do tempo.

#### **2.2.4 Ação Direta da Correnteza**

A ação direta da correnteza sobre a linha é particularmente determinante na definição da configuração de equilíbrio. Seu efeito tende a aumentar ou diminuir a tração, alterando a posição do TDP e a rigidez de catenária (ou geométrica) da linha. Este comportamento afeta, obviamente, a resposta dinâmica.

No que tange à análise mecânica, o perfil de correnteza é considerado de intensidade constante no tempo, podendo no entanto variar em direção com a profundidade. Do ponto de vista estático seu efeito corresponde a considerar um carregamento adicional na equação de equilíbrio, carregamento este que varia com a geometria da linha, no entanto (daí uma das fontes de não-linearidade, na busca da solução). Do ponto de vista dinâmico, as forças associadas à ação da correnteza são, em parte, incorporadas na Fórmula de Morison, compondo o campo de velocidades relativas com o escoamento ondulatório.

A alusão "em parte", acima, reflete a incompletude do modelo de Morison no que diz respeito à ação da correnteza. De fato, é bastante conhecido o fenômeno de "*vortex-shedding*" que ocasiona forças hidrodinâmicas oscilatórias, de direção perpendicular ao escoamento principal. Quando a estrutura em questão é flexível, seus

deslocamentos não são desprezíveis e acabam por interagir com o campo de escoamento, interferindo no processo de liberação de vórtices. O que acaba por ocorrer é uma sintonia entre a frequência de liberação de vórtices e uma das frequências naturais de oscilação da linha. Esta sintonia tende por um lado a amplificar a oscilação da linha, oscilação esta que, por sua vez, tende a destruir o padrão do escoamento e portanto auto-limitar a amplitude dos movimentos (em cerca de 1 diâmetro). Este fenômeno hidroelástico é conhecido como "*lock-in*"; ver, p.ex., Martins, 1989. Por ser auto-limitado, de pequenas amplitudes de oscilação, gera, em princípio, pequenos esforços. No entanto ocorre permanentemente e pode ser relevante em termos de fadiga mecânica. De fato, em alguns casos este efeito tem sua importância e deve sempre ser considerado na análise. Note que quanto maior a intensidade da correnteza, maior a frequência de Strouhal e portanto modos de maior frequência natural estarão sendo excitados. Quanto maior a frequência, no entanto, maior o número de ciclos impostos no mesmo período de tempo e maior será a relação entre deflexão elástica e comprimento de semi-onda modal. Portanto maior a variação cíclica de tensão de flexão e maior o dano acumulado.

Em termos de projeto a adoção de supressores de vórtices tem sido prática usual em *risers* de aço, mesmo em SCR's (ver, p.ex., Phifer (1994)), porquanto tais acessórios destroem a coerência longitudinal do escoamento oscilatório, minimizando a excitação e aumentando o amortecimento, diminuindo assim a amplitude de movimento decorrente. Por outro lado, deve ser enfatizado que esta prática pode acarretar em aumento substancial nos coeficientes de arrasto da linha, amplificando as cargas estáticas e dinâmicas anteriormente descritas.

### 2.2.5 Carregamento Associado ao Escoamento Interno

Cabe por fim discutir, ainda que superficialmente, este tipo de carregamento, que pode vir a se tornar relevante para tubos flexíveis ou mesmo para tubos de aço. Pode ser separado em duas componentes: carga estacionária e carga dinâmica.

A primeira, está associada à variação de quantidade de movimento imposta ao fluido que escoar em regime (quase) permanente no interior de um tubo curvo. Esta carga tem o efeito de tracionar o tubo, aumentando o esforço solicitante de tração (ver Seyed & Patel, 1992a). Este efeito é, evidentemente, mais acentuado em tubos flexíveis e de baixa rigidez axial.

Outro efeito estacionário que pode ser mencionado, *eventualmente relevante para tubos flexíveis*, está associado ao nível de pressão interna. Variando, a pressão interna provoca maior ou menor compressão entre as camadas que constituem o tubo flexível, influenciando eventualmente em sua adesão e portanto na rigidez flexional da secção. Este efeito, no entanto, é usualmente desprezado.

Do ponto de vista dinâmico são importantes dois fatores. De um lado o acoplamento não linear que existe entre a variação geométrica da linha e o escoamento interno. De outro, este sim mais relevante em termos de solicitação mecânica, a eventual existência de transitórios em escoamento bifásico, também denominados "*slugs*".

Este último tópico não tem merecido atenção especial dos pesquisadores. Seyed & Patel (1992) analisam uma configuração *lazy-S*, em profundidade de 300 m. Além de análise não-linear "clássica", em que determinam a resposta da linha à ação de ondas e correnteza, estes autores tratam do efeito combinado com o fenômeno transitório associado à expansão de gás no escoamento interno. Concluem que o carregamento

associado ao escoamento interno, mais precisamente ao transitório, é comparável àquele associado à carga de projeto, sendo obviamente mais pronunciado nos trechos de grande curvatura. Cumpre notar que a variação de densidade associada ao escoamento bifásico altera a rigidez geométrica e implica em acoplamento fortemente não-linear gerando grandes amplitudes de movimento e curvatura.

Outros autores, como MacFarlane (1989), também mencionam a necessidade de se estudar com maior profundidade os efeitos de fluxo interno, notadamente de transitórios, e suas implicações em critérios de projeto. Recentemente, em artigo de revisão do tema, Patel & Seyed, 1995, registram pouco avanço sobre o assunto.

### **2.2.6 Carregamento Hidrostático**

Embora aparentemente trivial, esta *categoria* de carregamento suscitou dúvidas e mesmo erros conceituais importantes no início dos trabalhos de pesquisa, nos idos de '70, conforme apontado por Patel & Seyed, 1995. Não se tomando em conta a continuidade da linha e a existência de uma extremidade emersa, o princípio de Arquimedes, o qual é estritamente válido para corpos totalmente imersos, foi por vezes erroneamente empregado. Adicionando, ficticiamente no entanto, a resultante de um sistema de forças de pressão hidrostática que agiria na face da seção do elemento de tubo (cabo) considerado, se este fosse fechado, permite-se aplicar o princípio de Arquimedes, e definir o empuxo (vertical). Este sistema fictício que é adicionado deve, obviamente, ser subtraído, dentro dos princípios de sistemas de forças equivalentes. A percepção deste fato conduziu então ao (agora já clássico) conceito de *tração efetiva*, definida como a *soma da tração solicitante com a resultante do sistema hidrostático fictício que é subtraído*. Esta abordagem é reelaborada no capítulo 3 e as consequências da distinção entre tração solicitante e tração efetiva exploradas, sucintamente, no capítulo 4.

Diversas outras tentativas de definição do carregamento hidrostático a partir da integração direta das forças de pressão acabaram por incorrer em erros matemáticos ou em restrições quanto à curvatura do elemento considerado, conforme apontado em Patel & Seyed, 1995, que acabaram por demonstrar a equivalência da abordagem da "*tração efetiva*", com a de integração de pressão; ver Seyed & Patel, 1992a.<sup>11</sup>.

## **2.2.7 Restrições Geométricas, Vínculos e Condições de Contorno**

Após discussão, algo detalhada, do carregamento imposto à linha submersa pelo meio ambiente e plataforma, cabe descrever, ainda que qualitativa e sucintamente, sem preocupação de equacionamento (o que é deixado para os capítulos 3 e 4), as restrições geométricas, vínculos e condições de contorno impostos ao problema elasto-dinâmico. Para fins de clareza de exposição este tópico será apresentado em duas partes: a primeira associada ao contacto com o fundo, ou "*Touch-Down Point*", (TDP); a segunda correspondente a acessórios e terminações instaladas na extremidade superior (e, eventualmente, ao longo da linha).

### **2.2.7.1 *Ponto de contato com o fundo (TDP)***

O contacto da linha com o fundo do oceano constitui-se, do ponto de vista da Mecânica, em um vínculo uni-lateral e que confere ao sistema comportamento geometricamente não-linear. Este contacto se faz com atrito e com alguma elasticidade, conferida pelo solo. A modelagem dos fenômenos envolvidos é, evidentemente, bastante complexa. Não apenas as leis de atrito devem ser investigadas, como também a "elasticidade do solo" e sua histerese. Estes efeitos comparecem nos problemas estático e dinâmico.

---

<sup>11</sup> Esta demonstração constitui, do ponto de vista exclusivo de equilíbrio de sistemas de força, uma tautologia.

No que tange aos modelos usualmente empregados, o atrito é suposto sêco, representado através de coeficiente constante, definido experimentalmente. Escorregamento nas direções axial e transversal recebem tratamento análogo, permitindo-se, em alguns modelos, sua distinção através do valor adotado para o coeficiente de atrito. Importante é observar que a unicidade de solução não é garantida quando da ação de atrito sêco.

A restituição do solo é, em geral modelada como linear, negligenciando-se a histerese. O fenômeno de adesão sequer tem sido mencionado como relevante, na literatura especializada, e é totalmente desconsiderado (o que é particularmente válido quando o fundo é de areia ou rocha). Desta forma a modelagem dos efeitos do solo são bastante simplificados, no que diz respeito ao atrito e restituição. Cumpre observar que estes tópicos nem mesmo são explicitamente mencionados por Patel & Seyed, em seu artigo de revisão, de 1995.

Assim, na solução estática impõem-se condições de contorno apropriadas, seja em modelamento discreto, por elementos finitos, seja em modelos analíticos. Caso o problema analisado permita considerar a linha como infinitamente flexível, por exemplo, a equação representativa é a de catenária, e deve-se impor condição de tangência no fundo. Esta única condição implica em descontinuidade de curvatura e portanto de momento fletor junto ao TDP. Como mencionado (e visto no capítulo 3 com maior propriedade) a solução de catenária pode, então, ser corrigida localmente, introduzindo-se, através da técnica de "camada-limite", o efeito de rigidez flexional e da restituição elástica do solo, com resultados plenamente satisfatórios. Se, por outro lado, a rigidez flexional for incorporada a priori na solução, deve-se impor continuidade do momento fletor no TDP. Os dois caminhos levam a resultados bastante satisfatórios, *do ponto de vista estático*. Este fato se repete quando a intenção é determinar as amplitudes dinâmicas de tração ao longo da linha. Mesmo um modelo linearizado, no domínio da frequência, ou modelos assintóticos (ver Aranha et al.,



1993) conduzem a excelentes resultados, quando comparados às simulações não-lineares no domínio do tempo.

Da mesma forma, a capacidade de modelos linearizados, considerando-se o TDP como ponto articulado ao fundo, é bastante boa no que tange a prever acuradamente as frequências e os modos naturais de vibrar da linha. Em outras palavras, as incorreções de modelagem das condições de contorno pouco afetam a solução estática e dinâmica do ponto de vista global, como consequência da extrema flexibilidade da linha (seja flexível ou de aço). Este ponto específico é abordado analiticamente no capítulo 4, recuperando e reelaborando resultado de Aranha, Martins & Pesce, 1995, e demonstrando que, correto até segunda ordem em um parâmetro pequeno, o ponto de contato com o fundo pode, dinamicamente, ser considerado como uma articulação.

Por outro lado, para a determinação da resposta dinâmica local em flexão (junto ao TDP), e mesmo que se despreze o atrito e se considere o fundo como infinitamente rígido, a não-linearidade geométrica representada pelo vínculo uni-lateral de contato e a flexibilidade da linha acabam por induzir outros tipos de resposta.

O primeiro tipo, de natureza física, é a possibilidade de choque da linha contra o fundo e por conseguinte a indução de toda uma gama de frequências na resposta dinâmica de tração e flexão. No entanto, como será demonstrado no capítulo 4, à luz de desenvolvimento presente em Triantafyllou et al, 1985, este fato somente ocorre se a velocidade de variação do TDP for superior à velocidade de propagação da onda de catenária. Configurações com grande curvatura no TDP e baixa tração podem estar sujeitas a este fenômeno físico, assim como linhas extremamente tracionadas, como seria o caso de cabos de amarração. A *condição de inexistência de choque* será denominada neste trabalho *sub-crítica*, em analogia à clássica condição em dinâmica de gases.

O segundo tipo de resposta dinâmica peculiar, induzido pelo vínculo de contato unilateral, ocorre no processamento de modelos numéricos usuais, embora seja inexistente do ponto de vista físico. *Ou seja, modelos discretizados apresentam, em geral, um comportamento físico inconsistente com aquele apresentado pelo modelo contínuo, no que diz respeito à determinação da amplitude dinâmica do momento fletor na região do TDP.* Este ponto é elaborado com detalhes em Aranha, Martins & Pesce, 1995. Aqui basta ressaltar que, modelos usuais de discretização são incapazes de representar de forma apropriada o fenômeno dinâmico real que ocorre, quando a linha "se deita" (ou "se levanta") de forma gradual e contínua, com consequente variação de curvatura, sobre (ou do) solo submarino. A causa desta incapacidade foi identificada como a *ordem* do elemento-finito (em geral de terceira-ordem) usualmente considerado e acaba por provocar o aparecimento de um *momento espúrio*, associado à inerente indefinição da força dinâmica de contato nodal. Este momento espúrio não se anula com o refinamento da discretização. É, no entanto, de pequena amplitude, e tende a ser relativamente pequeno em condições de carregamento dinâmico severos, usuais nos procedimentos de projeto. Entretanto, quando a preocupação reside no fenômeno de fadiga, que ocorre permanentemente e em condições pouco severas de carregamento, a amplitude deste *momento espúrio* pode ser significativo, comparável à amplitude típica real, contaminando a sua avaliação<sup>(\*)</sup>. Posto que, segundo o modelo mais usual, a fadiga obedece lei exponencial de dano acumulado, esta incorreção torna completamente inacurada

---

(\*)em tempo As discrepâncias inicialmente atribuídas ao *momento espúrio* foram identificadas recentemente, ver Aranha, Martins e Pesce, 1997, como associadas ao sentido de rotação do movimento imposto ao topo do *riser*, e causadas por efeito não-linear correspondente ao amortecimento fluido quadrático. O efeito do momento espúrio, que havia sido analisado matematicamente apenas para o caso de rigidez flexional nula (cabo), embora existente, parece ser atenuado pela rigidez flexional. Este ponto merece investigação adicional, conforme ressaltado no capítulo 6.

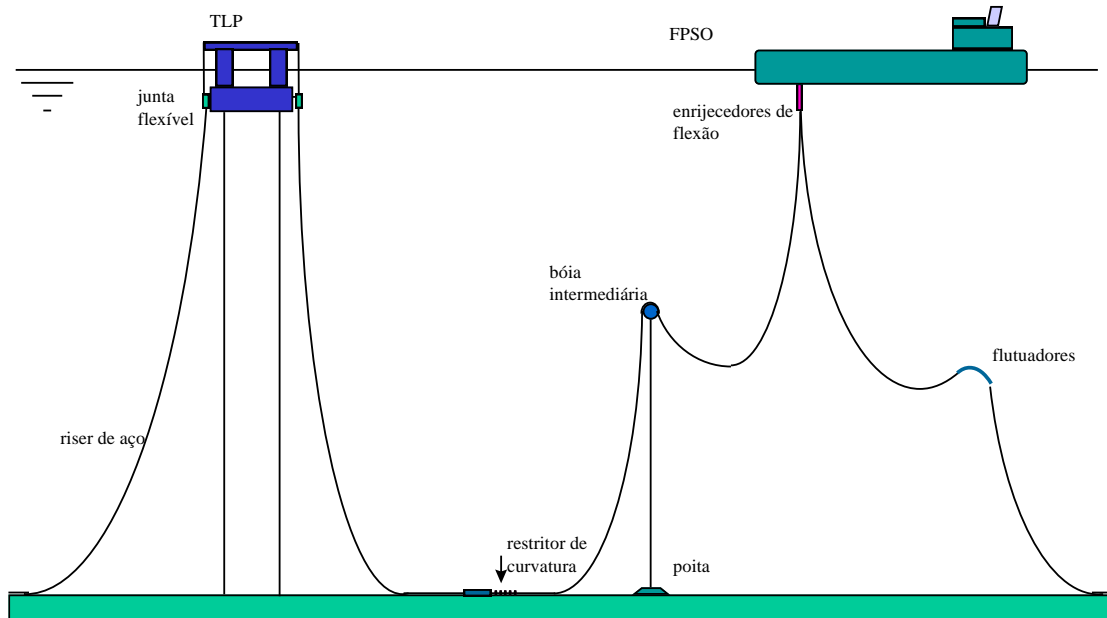
qualquer estimativa. Obviamente este fato deve ser considerado com a devida importância.

Na verdade, a constatação deste fato por Pesce, Aranha e Pinto, 1994, durante análise preliminar de viabilidade técnica do conceito de *riser de aço em catenária*, é que motivou o estudo aprofundado do comportamento dinâmico em curvatura na região de contato com o fundo, sob ótica analítica, induzindo o desenvolvimento de modelo analítico através da aplicação da técnica da camada-limite. Este modelo, reelaborado e sistematizado no capítulo 4, é aqui validado experimentalmente, propiciando que a amplitude dinâmica da curvatura junto ao TDP em regime sub-crítico seja calculada com excelente precisão. O modelo é tão somente dependente das funções temporais descritivas da tração efetiva local e do movimento do próprio TDP (*ponto de contato instantâneo*), funções estas que podem ser facilmente determinadas através da solução do problema linearizado de cabo ideal.

### **2.2.7.2      *Acessórios e terminações***

Diversos são os acessórios comumente utilizados em linhas lançadas em catenária. Dependendo do tipo e localização, sua presença implica em restrições geométricas, cinemáticas ou dinâmicas. O tipo empregado depende, obviamente da configuração escolhida.

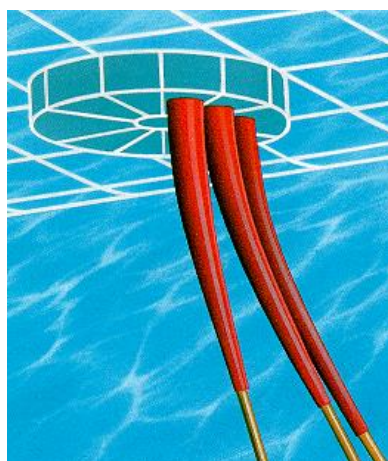
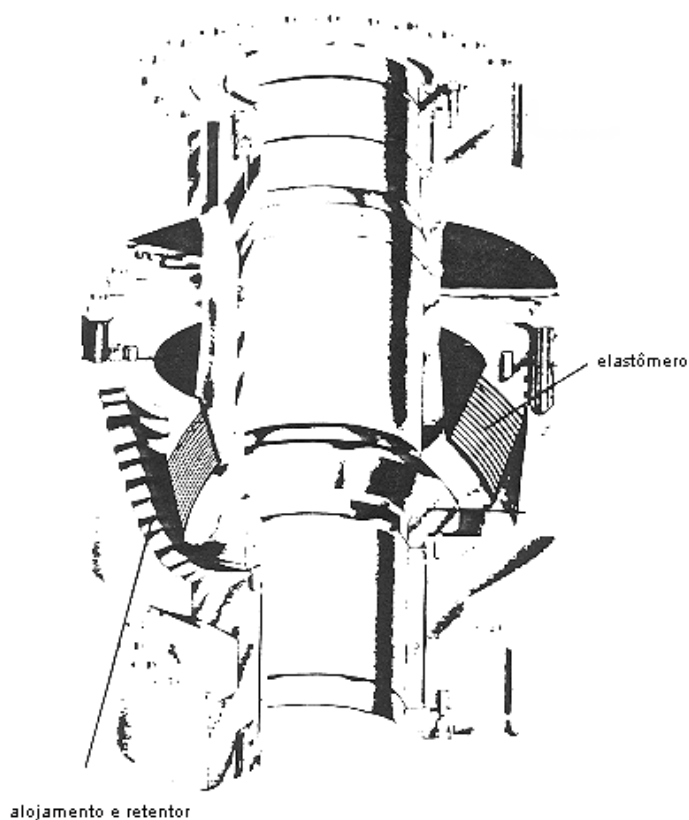
A Figura 2-7 apresenta um sistema de linhas em configurações "lazy-wave", "steep-S" e "free-hanging", demandando um bom número de acessórios.



**Figura 2-7 Sistema de risers e acessórios**

Os acessórios de maior interesse ao presente estudo são:

*Bend Stiffners (Enrijecedores de Flexão):* Tem como função amenizar o campo de concentração de tensões nas vizinhanças da terminação, servindo para manter a curvatura dentro de limites permissíveis. São *utilizados em risers flexíveis*. Em geral estes acessórios têm forma cônica, permitindo, através da variação sequencial do ângulo da geratriz e, conseqüentemente, do diâmetro na raiz, uma variação gradual da rigidez de flexão. Constituem-se de materiais termo-plásticos, em geral (como nylon). Além das cargas estáticas, ficarão sujeitos a carregamentos cíclicos, e portanto à fadiga. Sua resistência e vida útil não devem ser inferiores àquelas da linha. Quando instalados junto ao topo conferem um certo grau de rigidez flexional adicional, o que implica em alteração do campo de flexão local e da amplitude de rotação (ângulo de saída). A condição de contorno do problema elasto-dinâmico deve, portanto, ser devidamente modelada, ou ser corrigida a posteriori, através de modelos assintóticos simplificados.



**Figura 2-8 Terminações flexíveis típicas: (a) junta flexível ("flexible joint")<sup>12</sup>; (b) enrijecedores flexionais <sup>13</sup>("bending stiffners")**

Modelos numéricos usuais consideram, sua ação representada por uma mola flexional.

---

<sup>12</sup> Cortesia: *Oil State Industries*

<sup>13</sup> Cortesia: *Orcina Cable Protection Ltd.*

- “*Flexible Joints*” (*Juntas Flexíveis*): Empregadas fundamentalmente em tendões de TLP's e em *risers de aço*, tem como função prover alguma rigidez flexional à extremidade da linha onde está conectada, permitindo um certo grau de liberdade de rotação, limitado, contudo, a valores relativamente baixos (cêrca de 10 graus para *risers*). Consiste de duas partes: a primeira móvel, a segunda fixa. A peça móvel, ao qual se conecta a linha, por meio de flanges aparafusados e selados, é constituída por um tubo e uma articulação esférica. Esta última é contruída em aço, e se apoia em um menisco instalado no interior de um jazente cônico, que faz parte da peça fixa intalada na estrutura de suporte. O menisco é contruído por um "sanduíche" de chapas laminadas de aço e elastômero, semelhante aos apoios utilizados em grandes pontes, na engenharia civil. Como o enrijecedor, a junta flexível altera o campo local de flexão da linha, em suas imediações, e deve ser modelada adequadamente na condição de contorno do problema elasto-dinâmico. Em geral o modelamento é feito (ver, p.ex. Phifer, 1994) como uma mola de flexão não linear, na solução estática e, linearizada, na solução dinâmica. Há ainda a possibilidade de incorporar-se o seu efeito a posteriori, corrigindo, por meio de modelo apropriado os resultados de processamento conseguidos sob hipótese de articulação perfeita ("técnica de camada-limite"; ver capítulo 4). Obviamente, como o “*bending stiffner*”, este acessório deve apresentar resistência e limite de fadiga superiores aos da linha. A análise apresentada por Phifer mostra que estes fatores não têm constituído problema.
- “*Bend Restrictors*”: Limitam o raio de curvatura a um mínimo permissível. São utilizados em *risers flexíveis* nos pontos de ancoragem junto à cabeça de poço. São estruturas "vertebrais", feitas por peças anulares constituídas de material metálico, que lhe conferem grande resistência ao esmagamento. Se utilizados, devem ser apropriadamente modelados, o que se faz estabelecendo um "limite de saturação" para a curvatura do tubo no ponto

onde é instalado. Dado o caráter inerentemente não-linear no que diz respeito à condição de restrição que confere ao problema mecânico, posto que se trata de vínculo de contacto uni-lateral, sua modelagem deve ser feita em simulações no domínio do tempo.

- *Bóias*: Existem diversas configurações de bóias intermediárias (a meia água) - simples, distribuídas, etc. Sua função é aliviar o peso da linha e portanto a carga absorvida pela plataforma ou unidade de suporte. Do ponto de vista do problema mecânico, bóias significam carregamento dinâmico adicional, além de restrições geométricas (não-lineares) impostas à configuração da linha, propriamente dita. Sua modelagem, por conseguinte, é laboriosa e deve ser considerada nos códigos computacionais. Peso, empuxo, forças de inércia, além de arrasto hidrodinâmico são as cargas que devem ser consideradas. Restrições geométricas devem ser modeladas como vínculos (uni- ou bi-laterais).

No presente trabalho a curvatura junto à extremidade superior, suspensa em terminações do tipo 1 e 2 (enrijecedores e juntas flexíveis), é analisada através da técnica de camada-limite. Resulta uma expressão analítica que permite determinar a curvatura estática e dinâmica no entorno da terminação, dependente das funções temporais de tração e inclinação da linha decorrentes da solução do problema dinâmico global regido pela equação de cabo ideal, de forma similar ao modelo junto ao TDP. Este desenvolvimento também é apresentado nos capítulos 3 e 4.

## 2.3 MÉTODOS DE ANÁLISE

Não é intenção desta seção descrever com profundidade os métodos e técnicas de análise usualmente empregados no estudo do problema em questão, mas tão somente tentar situar o presente trabalho dentro do vastíssimo corpo de pesquisa publicada no tema. Dois aspectos merecem destaque especial: *resposta estrutural global (estática e dinâmica)* e *fadiga*.

O primeiro aspecto tem sido exaustivamente tratado, nos últimos 20 anos, culminando com um artigo de revisão publicado por M.H. Patel e F.B. Seyed, em matéria especial sobre *risers* flexíveis, na revista *Engineering Structures*, em seu volume 17, número 4, em maio de 1995.

O segundo aspecto, embora merecedor de atenção especial, não tem sido abordado de forma tão exaustiva. A produção científica que trata do assunto é bastante dispersa e relativamente específica, posto que alguma ênfase é dada ao estudo do problema de fadiga relacionado a tubos flexíveis. Não puderam ser encontrados na literatura pertinente, portanto, trabalhos de cunho revisional, ou de sistematização de procedimentos e técnicas.

### 2.3.1 Resposta Estrutural Global: Estática e Dinâmica

Este tema tem sido objeto de exaustivas e intensas investigações, conforme demonstra o mencionado artigo de Patel & Seyed, 1995, no qual 74 referências são citadas e comentadas. Muitas delas eram de conhecimento deste autor, quando em meados de 1996, teve acesso ao artigo acima referido, e são citadas explicitamente. Na realidade a leitura do artigo de revisão apenas foi realizada durante o processo final de redação deste trabalho, quando então todos os resultados apresentados já haviam se consubstanciado de forma definitiva



Vale ressaltar, no entanto, que muitas das observações e conclusões contidas neste artigo acabam por reforçar não apenas a validade como também a necessidade do tipo de abordagem analítica conduzida no presente trabalho. Cabe também salientar que os trabalhos de pesquisa que deram origem a esta monografia foram motivados e suscitados por problemas práticos reais vividos pela equipe do qual participa este autor, durante análise de casos de engenharia específicos e estudos de viabilidade de novas concepções, durante os anos de 1993, 1994 e 1995

Patel & Seyed, 1995, tratam dos métodos de *análise estática* e *dinâmica*, estes últimos subdivididos em *análise no domínio da frequência* e *análise no domínio do tempo*. Abordam também os problemas relacionados aos efeitos de *pressão externa e interna* e associados a eventual *fluxo interno*. O artigo de revisão traz uma análise crítica de diversos métodos e procedimentos adotados, ao nível mundial, discutindo artigos publicados desde 1978 até 1995.

### **2.3.1.1      *Análise estática***

As fontes de não-linearidade na busca da solução estática são essencialmente de natureza geométrica: *o carregamento associado à correnteza depende da posição da linha desconhecida, a priori*. Mostra-se, por outro lado, que o efeito de flexão é desprezível, tornando-se relevante apenas nas extremidades (TDP e superior) e em regiões de grande curvatura como nas regiões próximas a eventuais flutuadores intermediários.

No que tange aos métodos de *análise estática*, de equacionamento inerentemente não-linear, um número bastante grande de alternativas é abordado no artigo de Patel & Seyed. Desde aqueles mais simples e diretos que se baseiam na clássica equação de catenária, até formulações mais elaboradas, usualmente sob o enfoque de *elementos*

*finitos*, são discutidas e apresentadas. A ênfase recai, em geral, sobre o tratamento do problema bi-dimensional. Efeitos de rigidez flexional e extensibilidade são incluídos em muitos dos modelos. Em alguns poucos casos esquemas de *diferenças finitas* são empregados, ver por exemplo Langer, 1985 que inclui os efeitos de rigidez flexional através de uma relação não-linear entre curvatura e momento fletor, permitindo que as propriedades seccionais variem ao longo do comprimento.

Muito da análise recai sobre métodos de busca da solução não-linear, caracterizada por apresentar grandes deslocamentos. É evidente que tais buscas se tornam otimizadas quando iniciadas a partir de 'soluções próximas', das quais a de catenária é, visivelmente, a melhor candidata. Aliás esta "conclusão", certamente tautológica, é explicitamente apresentada em Patel & Seyed, 1995, página 296: "*Engseth demonstrated that the use of simple catenary formulation for computation of the initial configuration is quite accurate and compares very well with the more elaborate shift procedures. His work shows that the incremental shifting technique is only recommended for unusual riser geometries, where a simple solution would not be adequate*".

No que tange à importância da extensibilidade, citando trabalho de Bernitsas et al, 1985, Patel & Seyed observam que "*the first general conclusion is that ignoring deformation dependency of loading will, typically, lead to overestimation of loads and forces*". No entanto as discrepâncias são geralmente pequenas, não maiores que da ordem 5%, nas regiões de extremidade, em alguns casos.

Outra conclusão apresentada, de caráter bastante geral, que por diversas vezes aqui já fora enfatizada e que se constitui no principal fundamento das aproximações assintóticas elaboradas no presente trabalho, é relativa à pequena importância da rigidez flexional na solução estática, *restrita que é às extremidades*.

Patel & Seyed observam também que são bastante escassas na literatura abordagens assintóticas analíticas. Exemplifica com o artigo de Tikhonov & Fisher, 1986, que trata de um problema específico de reboque de um tubo de prospecção oceânica, com carga suspensa em sua extremidade inferior, sob enfoque das técnicas classificadas em matemática aplicada como *de perturbação singular*.

Os trabalhos de Macnamara, O'Brien & Gilroy, 1986 e O'Brien, Macnamara & Dunne, 1987, são citados como exemplos de procedimentos computacionais estruturados para a solução do problema estático. O método é formulado sob uma restrição Lagrangeana de inextensibilidade da linha, e a busca da solução se faz através de um procedimento de "convecção dos sistemas de coordenadas", a partir de uma configuração inicial. Para tanto um operador de integração implícito, no domínio do tempo, conhecido como Hilbert-Hughes-Taylor, é utilizado. Objetam Patel & Seyed, no entanto, que o método computacional assim construído é lento e seu emprego é justificável apenas em configurações complexas, com a presença de particulares arranjos de flutuadores.

O artigo de Patel & Seyed conclui o tópico *análise estática* da seguinte forma: "*Static analysis techniques for flexible risers started with the study of catenary equations for pipe-laying and mooring applications. Whilst the inextensible catenary equations have been by far the most widely used, attempts have also been made at considering the linear effects of axial elongations. With a rising interest in flexible riser application and the advent of new geometries such as 'S' and 'wave' configurations, the indeterminacy of the shape prompted investigators to consider shifting*

*procedures. Having discovered the computational cost of these procedures, this trend has reversed towards the use of catenary solutions with shifting techniques reserved for the more elaborated ones. The catenary solutions are simple in concept and are extremely fast and reliable. These are essentially based on a discretization of the pipe into connecting catenary segments and solving the resulting simultaneous nonlinear equations using a computer algorithm of one form or other. In this way buoyance modules can be modelled as inverted catenaries with negative self-weight connecting the adjacent positive catenary segments".*

As considerações e conclusões estabelecidas por Patel & Seyed reforçam com clareza a correte de encaminhamento que vem sendo conduzida na Escola Politécnica. Cumpre mencionar que o programa RISTAT, cujos algoritmos permanecem como base do atual program POLIFLEX, foi desenvolvido sob esta ótica, por Martins; ver Martins, Aranha & Pesce, 1992. A solução numérica se processa de forma iterativa, resolvendo a equação diferencial de uma catenária sob carregamento hidrodinâmico, com condições de contorno apropriadas, no topo e no fundo. A extensibilidade é desconsiderada, de forma consistente, e os efeitos de rigidez flexional podem ser incorporados junto às extremidades, conforme apresentado no presente texto. O método numérico utilizado é o de Runge-Kutta de quarta-ordem, com um algoritmo de discretização automática, que busca otimizar a solução de forma a manter homogêneo o erro de truncamento ao longo da linha de acordo com tolerância e precisão especificadas pelo usuário. Obviamente a discretização automática resulta heterogênea ao longo da linha o que, não obstante, não prejudica a apresentação dos resultados, posto que estes são interpolados pelo mesmo algoritmo de integração, em pontos cujo espaçamento fora previamente escolhido.

### 2.3.1.2 *Análise Dinâmica*

Os modelos que tratam da resposta global da linha podem ser classificados como:

- de duas naturezas quanto à formulação: linear e não-linear;
- de dois tipos quanto à representação geométrica: *bi* e *tri-dimensionais*;
- de dois tipos quanto ao domínio de solução: *domínio da frequência* e *domínio do tempo*.

Os métodos mais utilizados são os de discretização em *elementos finitos* e *diferenças finitas*.

O procedimento geral consiste em calcular a resposta dinâmica da linha à ação do ambiente e da unidade flutuante, após determinar a solução estática, para um "offset" conhecido, na presença de correnteza, solução esta necessariamente não-linear. Como foi visto, é suficiente o equacionamento do problema estático sob hipótese de "cabo ideal".

Diversos são os códigos computacionais específicos, desenvolvidos para o tratamento deste problema. A tabela 2.3, a seguir, extraída de Larsen (1992), descreve alguns destes códigos.<sup>14</sup>

Caso o modelo dinâmico utilizado seja baseado na teoria de perturbações, o problema é conseqüentemente linearizado em torno da configuração estática de equilíbrio, e a solução se processa rapidamente, em geral no domínio da frequência, permitindo

---

<sup>14</sup> O programa *POLIFLEX* desenvolvido por Martins, permite resolver com bastante eficiência o problema estático, sem que seja preciso definir o modelo de discretização espacial. O mesmo programa, permite analisar a dinâmica da linha no domínio da frequência de forma bastante ágil, a partir da solução estática anteriormente determinada.

também que se inclua análise modal. A experiência tem demonstrado claramente ao autor deste texto que, ao menos nas fases de concepção e dimensionamento preliminar, a adoção de modelos linearizados é sem dúvida satisfatória e vantajosa. Alguns dos códigos citados na tabela 2.3 apresentam esta opção de análise. À mesma conclusão chegam O'Brien & MacNamara, 1988, conforme relatado em Patel & Seyed, 1995, estabelecendo que o uso de modelos não-lineares são justificáveis em casos especiais de não-linearidades geométricas ou de comportamento de materiais.

Por outro lado, se o modelo dinâmico adotado for não-linear, a solução se processa no domínio do tempo. Nesta segunda situação, o tempo de processamento é enorme. Isto se deve à própria dinâmica da linha, posto que co-existem duas faixas bastante distintas de frequências típicas de resposta, uma mais baixa, ditada pela restauração de catenária e, outra mais alta, pela rigidez axial. Este fato, inerente à física do problema, implica em um sistema de equações diferenciais não-lineares denominado "rígido", em matemática aplicada, obrigando a adoção de métodos numéricos de integração sofisticados, tipo preditor-corretor, levando a tempos de processamento bastante longos. Este procedimento tem que ser repetido para um número bastante grande de situações ambientais. Para a integração no domínio do tempo, segundo Patel & Seyed, 1995, o método Newmark- $\beta$  tem sido o de maior popularidade, devido às suas características de estabilidade incondicional, não-dilatação de período, baixo decaimento de amplitude, boa precisão e facilidade de implementação. O método Wilson- $\theta$  tem sido por vezes utilizado, devido a sua habilidade de permitir a introdução de "amortecimento artificial", nos modos mais altos de vibração, propiciando assim o uso de intervalos de integração maiores. O'Brien & MacNamara, 1988, por outro lado enfatizam que a utilização do método de passo variável de Hilbert-Hughes-Taylor permite controlar de forma adaptativa a progressão do cálculo durante os transitórios iniciais, de forma a obter um intervalo otimizado.

Esta dificuldade, inerente à dinâmica do sistema, acaba ainda por provocar discrepâncias apreciáveis em resultados decorrentes do uso de programas alternativos.

As tabelas abaixo, extraídas de Larsen (1992), ilustram bastante bem este fato. Neste estudo comparativo, envolvendo 11 participantes, 10 diferentes programas de análise foram processados para casos selecionados, envolvendo *risers* flexíveis. Na Tabela 2-3, o número indica o participante. A coluna da direita traz, na primeira linha, informações acerca do procedimento de análise estática onde o termo 'incremental' significa que o processo de iteração é iniciado a partir de uma configuração sem tensão. Os outros procedimentos são iterados diretamente. A segunda linha traz informações acerca dos procedimentos e métodos relativos à análise dinâmica. A descrição detalhada dos diversos casos analisados pode ser encontrada no referido artigo e não será aqui reproduzida.

**Tabela 2-3 Códigos Computacionais de Análise de Risers avaliados por aquele autor;(extraída de Larsen, 1992)**

<b>Nº</b>	<b>Instituição</b>	<b>Programa</b>	<b>Palavras-chave sobre os métodos</b>
1	Danish Hydraulic Institute; Dinamarca	RISER	Iteração em Diferenças Finitas Integração no tempo
2	MCS International; República da Irlanda	FLEXCOM-3D	Iteração incremental em Elementos Finitos Integração no tempo; Hilbert-Hughes
3	Det Norsk veritas; Noruega	FENRIS	Iteração incremental em Elementos Finitos Integração no tempo; Newmark
4	Institute Française du Petrole; França	FLEXAN-F	Iteração em Elementos finitos Integração no tempo
5	Aker Engineering; Noruega	SEAPIPE	Iteração incremental em Elementos Finitos Integração no tempo; Newmark/Wilson
6	Orcina Ltd.; Reino Unido	ORCAFLEX	Iteração "3D-shooting" Integração no tempo
7	W.S. Atkins Ltd.; Reino Unido	AQWAFLEX	Iteração incremental em Elementos Finitos Integração no tempo; preditor-corretor de 2 est.
8	Marintek/Sintef; Noruega	RIFLEX	Iteração "3D-shooting" ou incremental em EF Integração no tempo; Newmark/Wilson
9	DynoMar AB; Suécia	MOBDEX	Elemento híbrido de viga; incremento quase-din Domínio do tempo; diferenças centradas
10	SeaFlex AS; Noruega	FENRIS	Iteração incremental em Elementos Finitos Integração no tempo; Newmark
11	University College London; Reino Unido	REFLEX	Iteração incremental em Elementos Finitos Integração no tempo; Newmark



A Tabela 2-4 apresenta resultados da análise estática de um dos casos analisados por aquele autor. Corresponde a um *riser* flexível em configuração "lazy-wave", submetido a correnteza no plano. Conforme pode ser observado, a concordância é satisfatória para a tração no topo, mas nada satisfatória para a tração junto ao ponto de contato com o fundo (TDP). Como consequência o valor do raio de curvatura neste ponto por certo será igualmente discrepante, posto que depende linearmente da tração, conforme será visto no capítulo 3. As discrepâncias são devidas às diferenças observadas nas coordenadas do ponto de máximo local intermediário, denominado F, e que por sua vez se devem, de acordo com Larsen, aos diferentes modelos de arrasto tangencial adotados nos diversos programas. No entanto observamos que, mesmo na ausência de correnteza, as diferenças encontradas são grandes. Contudo, os valores de curvatura calculada no ponto F são satisfatoriamente concordantes entre si.

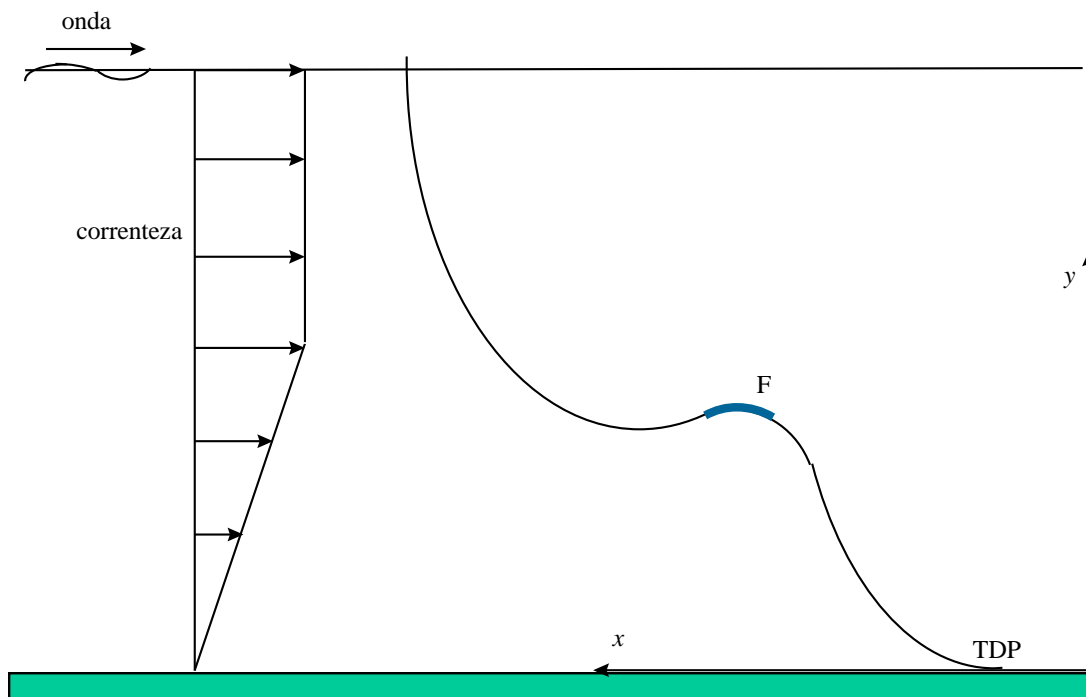


Figura 2-9 Configuração "lazy-wave" analisada por Larsen, 1992.

*Tabela 2-4 Resultados de análise estática (extraída de Larsen, 1992)*

**Riser 1: "Lazy Wave". Corrente no plano**

Ponto	Topo tração (kN)		TDP tração (kN)		TDP abscissa (m)		Ponto F (máximo local) coordenadas (m)				Ponto F Curvatura (m <sup>-1</sup> )	
	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0
Nº	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>x</i>	<i>x</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	$\chi$	$\chi$
<b>1</b>	178.5	174.9	12.3	8.0	145.0	145.0	226.4	82.8	212.3	91.0	0.0367	0.052
<b>2</b>	178.8	175.2	13.5	9.5	148.1	147.9	223.1	78.2	204.9	86.7	0.034	0.049
<b>3</b>	175.0	171.0	65.0	59.0	145.0	149.0	228.0	76.0	208.0	87.0	0.036	0.050
<b>4</b>	179.0	176.0	0.0	0.0	140.0	140.0	225.0	79.5	211.0	88.0	0.034	0.044
<b>5</b>	177.8	173.0	19.2	18.4	138.0	136.0	227.0	81.8	209.0	90.6	0.037	0.053
<b>6</b>	178.3	175.0	0.0	0.0	140.0	150.0	228.6	78.3	208.8	87.5	0.0359	0.0517
<b>7</b>	179.0	176.0	11.6	7.3	120.0	130.0	226.8	78.6	212.9	86.1	0.035	0.048
<b>8</b>	177.5	174.3	9.4	9.4	140.1	140.1	221.0	80.8	207.5	89.9	0.036	0.0499
<b>9</b>	168.0	165.0	12.0	8.0	140.2	140.1	227.0	80.7	214.5	88.9	0.0374	0.0486
<b>10</b>	175.0	171.0	54.0	50.0	138.5	138.5	223.7	78.5	206.7	87.4	0.035	0.051
<b>11</b>	178.2	179.1	12.0	5.8	145.4	145.4	223.0	77.5	205.9	87.5	0.036	0.051
<b>Média</b>	176.8	173.7	19.0	16.0	140.0	142.0	225.1	79.34	209.2	88.24	0.0357	0.0498
<b>Desvio</b> 15	3.26	3.69	20.9	19.8	7.42	6.10	2.26	2.01	3.08	1.64	0.0011	0.0024

Já a Tabela 2-5 mostra resultados da análise dinâmica e modal respectivamente. As discrepâncias são particularmente marcantes entre os valores dos períodos naturais.

<sup>15</sup> (Os valores dos desvios referentes à curvatura apresentados por Larsen nas duas últimas colunas estavam errados: 0.0112 e 0.0246, respectivamente)

*Tabela 2-5 Resultados de análise estática (extraída de Larsen, 1992)*

**Riser 1: "Lazy Wave". Correnteza no plano**

Nº	Análise Modal - Período (s)										Tração Dinâmica no Topo (kN)					
	Modo 1		Modo 2		Modo 3		Modo 4		Modo 5		Onda e Correnteza			Onda, correnteza, movimento		
	T(s)	I/O	T(s)	I/O	T(s)	I/O	T(s)	I/O	T(s)	I/O	Max	Min	$\Delta T$	Max	Min	$\Delta T$
<b>1</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>2</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	181	171	10	260	100	160
<b>3</b>	69.7	O	59.7	I	36.2	O	32.4	I	25.0	O	180	170	10	240	100	140
<b>4</b>	43.8	O	38.4	I	29.5	O	25.9	O	25.2	O	182	170	12	240	115	125
<b>5</b>	71	O	61.0	I	36.1	O	32.0	I	25.3	O	182	161	21	228	109	119
<b>6</b>	- 8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	190	166	24	260	110	150
<b>7</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	182	171	11	270	105	165
<b>8</b>	72	O	53.2	I	37.0	O	30.3	I	26.1	I	180	167	13	240	100	140
<b>9</b>	- 1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	190	145	45	275	80	195
<b>10</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	181	164	17	240	115	125
<b>11</b>	51.8	O	46.1	I	30.2	O	26.2	I	19.9	O	179	178	1	235	122	113
<b>M</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	182.7	166.3	16.4	249	106	143
<b>D</b>	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.97	8.80	11.9	16.0	11.7	25.1

Para a tração dinâmica, as variações são também bastante grandes. Larsen identifica duas fontes de incerteza: o modelamento da interação solo-estrutura e das forças de arrasto tangenciais. Cumpre notar que neste estudo o momento fletor dinâmico não foi analisado. Por razões que serão expostas nos capítulos subsequentes espera-se, para o momento, discrepâncias ainda maiores.

Patel & Seyed, 1995, comentando o artigo de Larsen, 1992, observam, ainda, a importância do tirocínio do projetista acerca da utilização de resultados de simulação numérica, posto que, conforme mostra a comparação, o mesmo programa utilizado por dois diferentes grupos de trabalho conduziu a resultados substancialmente diferentes.

Ponto a ser mencionado é que a simulação da ação de ondas aleatórias não é presente em muitos dos códigos computacionais. Pode-se neste caso, por exemplo, definir uma onda que provoque máxima resposta absoluta do *riser*, representativa do estado de mar considerado. Ressalte-se que, em se tratando de um problema dinâmico, em particular não-linear, nem sempre à máxima amplitude de onda corresponderá a máxima resposta. Assim, enquanto ferramenta de análise da resposta a condições extremas estes programas são de uso imediato. Porém, quando a intenção é a análise de fadiga, onde a caracterização estatística das variáveis é fundamental, a simulação não-linear no domínio do tempo em ondas monocromáticas deve ser realizada com muito critério.

De outro lado, nos modelos no *domínio da frequência*, os procedimentos utilizados na linearização do carregamento hidrodinâmico merecem atenção especial. A este assunto uma discussão relativamente extensa é dedicada por Patel & Seyed. Os trabalhos de Leira, 1985,87, que identificam e comparam os méritos de diferentes técnicas de linearização da força de arrasto, são comentados, incluindo uma reformulação do método proposto por Langley, 1984. Este método, aplicável a

excitações em mares irregulares, baseia-se em uma técnica de linearização estatística da força de arrasto ao longo do espectro em frequência, o que se consegue através da minimização do valor eficaz do erro que decorre da representação linearizada. A maior vantagem deste método é sua invariância com respeito aos sistemas de referência. Leira conclui que a propriedade de invariância apenas é violada se as componentes ortogonais da velocidade relativa forem linearizadas independentemente. Obviamente, como enfatizado por Patel & Seyed em sua discussão, este resultado é bastante intuitivo, pois corresponde a dizer que a velocidade relativa normal à linha deve ser calculada a priori e só então linearizada e decomposta.

Outro método de linearização, bastante empregado em engenharia naval e oceânica, consiste em determinar a matriz de amortecimento linear através da igualdade da dissipação de energia em um ciclo de movimento com aquela decorrente do processo quadrático. Obviamente este método deve ser implementado, necessariamente, de forma iterativa, posto que o coeficiente linearizado depende, linearmente, da própria amplitude de resposta; ver, p.ex., Pesce, 1984. Este método é utilizado no código RISDIN, de autoria de Martins, assim como por Patel et al., 1984.

No que tange à avaliação da tração, os programas oferecem resultados satisfatórios<sup>16</sup>, do ponto de vista de análise. No entanto, quando a tarefa é projetar, situação que implica em estudar comparativamente inúmeras (dezenas de) alternativas construtivas, o uso de modelos não-lineares no domínio do tempo eleva o grau de complexidade da tarefa a níveis elevadíssimos, mormente quando um número grande de linhas tem que ser analisado. Fazendo uso da disparidade de frequências típicas características deste tipo de sistema dinâmico, foi desenvolvido modelo analítico assintótico (ver Aranha et al. (1993)), que permite calcular de imediato a resposta de tração dinâmica da linha, sob a ação de ondas e de correnteza, apenas com o

---

<sup>16</sup> O mesmo não pode ser dito da avaliação da curvatura dinâmica junto ao ponto de contato com o fundo; ver Aranha, Martins & Pesce, 1995.

conhecimento da configuração estática, esta última de fácil determinação. Este modelo mostra que a amplitude dinâmica de tração é, essencialmente, constante ao longo da linha.

Mais recentemente, *sob o estímulo de discrepâncias observadas em resultados numéricos decorrentes do processamento de modelos não-lineares*, envolvendo a determinação do momento fletor na região do ponto de contato com o fundo, conforme anteriormente mencionado, no item 2.2.7.1, Aranha, Martins & Pesce, 1995 estenderam a análise assintótica para a avaliação da amplitude dinâmica de curvatura na região próxima ao TDP. Resultou expressão algébrica extremamente simples, relacionando a amplitude dinâmica da curvatura com o valor estático correspondente e com as funções temporais descritivas da amplitude de tração dinâmica e da amplitude de movimento do TDP, as quais podem ser determinadas a partir da solução do problema dinâmico global, no domínio da frequência. Esta expressão foi validada experimentalmente além de ter-se mostrada válida para toda uma série de condições ambientais, incluindo condições extremas de sobrevivência, conforme será visto no capítulo 4.

No contexto de projeto, trabalho digno de nota, porquanto se constitui em uma das poucas abordagens visando a otimização de comportamento dinâmico do sistema, é devido a Bernitsas et al, 1985. Nele uma técnica de perturbação inversa não-linear é empregada para re-projetar *risers* para os quais as frequências naturais calculadas estão em desacordo com o que seria desejável em termos de resposta dinâmica em um dado estado de mar. Escrevendo as frequências naturais desejadas como perturbações, em torno daquelas anteriormente obtidas, à variação de diversos parâmetros que caracterizam o sistema, como tração, peso imerso, diâmetros (tomados como multiplicadores), que implicam em perturbações das características de rigidez e distribuição de massa do sistema, busca-se uma solução otimizada, no sentido de mínimos quadrados.

Em sua revisão Patel & Seyed, 1995, tratam também dos aspectos relacionados aos carregamentos associados a escoamento interno, já descritos em 2.2.5. Conforme enfatizado, no entanto, nenhum avanço substancial tem sido registrado neste tópico, em que pese sua relevância, particularmente aplicável ao caso de tubos flexíveis.

O tópico de vibrações induzidas por vorticidade tem desempenhado papel secundário na análise de *risers* flexíveis e cabos umbilicais, conforme se depreende da exposição de Patel & Seyed, 1995, página 303: "*Other issues of lesser importance are the effects of vortex shedding...*". Esta afirmação é corroborada pela sistemática não-inclusão deste tipo de análise nos códigos computacionais existentes. A pouca importância deste tópico pode ser eventualmente verdadeira para *risers flexíveis* e cabos umbilicais. Esta afirmação é, contudo, no mínimo questionável se o *riser* em pauta for constituído por um tubo de aço. Neste sentido Phifer et al, 1994, dedicaram um grande esforço de investigação. Da mesma forma, o estudo de viabilidade da adoção de *risers* de aço na Bacia de Campos tem demonstrado que as vibrações induzidas por vorticidade podem representar importante contribuição na fadiga; ver Pesce et al, 1995. A confiabilidade dos métodos empregados neste tipo de análise está ainda a ser comprovada. Modelos relativamente sofisticados<sup>17</sup>, são utilizados na metodologia empregada por Phifer. Modelos hidroelásticos baseados nos trabalhos de Iwan & Blevins, 1974, e posteriormente incrementados por Lyons & Patel, 1986, tem sido objeto de investigação (Martins, 1989) e aplicados regularmente em projeto; Pesce et al, 1995. Segundo este modelo o fenômeno de *lock-in* é descrito por dois osciladores acoplados entre si. O primeiro representa a estrutura propriamente dita, em um determinado modo de vibrar. O segundo descreve a oscilação do meio fluido circundante e é regido por uma equação de Van der Pol, responsável pelo aparecimento do comportamento dinâmico do tipo ciclo-limite, que caracteriza o fenômeno de *lock-in*.

---

<sup>17</sup> (desenvolvidos por Vandiver e seus colaboradores no MIT)

Por outro lado Patel & Seyed, 1995 observam que, afora tópicos especiais, como o *carregamento de arrasto hidrodinâmico*, *interação solo-estrutura* e modelos do *efeito do atrito no solo*, estes dois últimos de tratamento escasso ou mesmo quase inexistente na literatura especializada, poucos desafios permanecem na análise estática e dinâmica de *risers* em configurações-padrão. Em que pese a concordância com a necessidade de se investigar os temas mencionados, não é a opinião do presente autor que os desafios a eles possam ser reduzidos, mormente à luz dos resultados obtidos recentemente durante as pesquisas conduzidas na Escola Politécnica. Outros tantos tópicos podem ser ainda sugeridos, como por exemplo o *estudo de instabilidade dinâmica associada à compressão da linha*. Apesar da relevância deste tema, posto que situações de compressão frequentemente são encontradas pelos projetistas durante simulações no domínio do tempo, não existem modelos que permitam prever, *a priori*, o fenômeno de instabilidade tampouco critérios de projeto que regulem sua tolerabilidade. Este assunto tem sido objeto de algumas investigações, por ora ainda incipientes, no entanto.

### **2.3.2 Fadiga**

A análise de fadiga é um tópico de extrema relevância em estruturas oceânicas, particularmente no caso de *risers* em catenária. Diante deste tópico é necessário distinguir entre tubos flexíveis e de aço, posto que o fenômeno de fadiga mecânica se processará de formas evidentemente diferentes em ambos os casos. Nenhum deles, no entanto, prescinde de dados experimentais, extraídos de análises exaustivas. Uma discussão geral, de cunho preliminar, sobre os aspectos intervenientes na fadiga mecânica de *risers* em catenária, desde aqueles referentes ao carregamento, até outros específicos, que dizem respeito ao modelo de fadiga adotado, pode ser encontrada em Pesce, 1994. Os trabalhos publicados no assunto tratam, em geral, do problema de fadiga em tubos flexíveis e cabos umbilicais; ver, por exemplo, Féret & Bournazel, 1987; Fuku et al., 1992 e, mais recentemente, Saevik & Berge, 1995; Witz & Tan, 1995. Esta seção restringe seu escopo a uma apresentação extremamente sucinta (e



incompleta) do tema. Abordá-lo, com a atenção que merece, significaria um grande desvio em relação ao escopo do presente trabalho. O conteúdo deste item tem, portanto, o objetivo de fazer registrar tão importante tópico.

A análise de fadiga usual parte do pressuposto que de alguma forma é disponível ao projetista uma relação entre amplitude de tensão cíclica e número de ciclos até a ruptura, conhecida como curva S-N. Para tubos de aço, este modelo é bastante convencional. No entanto, no caso de tubos flexíveis este modelo parece, ao menos *a priori*, por demais grosseiro. Fuku et alii, 1992 sugerem, no entanto, que mesmo para estes elementos é possível modelar o fenômeno de fadiga mecânica desta forma. Diversas técnicas de ensaio para o estudo da fadiga de tubos flexíveis e cabos umbilicais tem sido objeto de investigação de publicações recentes, conforme pode ser observado na matéria especial da revista *Engineering structures*, vol. 17 no. 4, através dos artigos de Witz & Tan, 1995 e Saevik & Berge, 1995. Os modelos de previsão de fadiga baseiam-se, em geral, na avaliação da taxa de desgaste e na regra de dano acumulado de Miner, tendo como dado a curva S-N do fio que constitui o tendão helicoidal (ver, p.ex. Feret, Bournazel & Rigaud, 1986, ou Fuku et alii, 1992). De qualquer forma o estabelecimento de modelo consistente que permita a previsão de fadiga em *risers flexíveis* e *cabos umbilicais*, implica no estabelecimento de modelos analíticos de cálculo da distribuição de esforços neste tipo de estrutura, tarefa que foge do escopo do presente trabalho. Trabalhos relevantes neste tema são os relativos aos modelos heurísticos de Feret & Bournazel, 1986, 87. Analisados quanto à sua consistência (à luz das equações de Clebsh-Love) estes modelos foram estendidos por Pesce & Ramos, 1996. Também merecem ser citados os trabalhos de Witz & Tan, 1992a,b, entre outros.

A fadiga mecânica da linha pode ser associada a três causas distintas:

- às oscilações dinâmicas na faixa de frequência das ondas;
- às oscilações lentas (em baixa-frequência);
- ao fenômeno de vortex-shedding.

Nos dois primeiros casos resultam, em configurações de catenária direta (ou *free-hanging*), maior solicitação em dois pontos: *TDP* e *extremidade superior (topo)*. No terceiro caso o *topo* é certamente um ponto de solicitação intensa, muito embora o ponto de maior solicitação possa estar situado ao longo da linha, em uma posição intermediária.

Tendo, então, uma boa descrição estatística das condições ambientais da região é possível, ao menos em princípio, quantificar o nível de solicitação dinâmica em tensão, associado a cada uma das três causas acima mencionadas, a que estará sujeita a linha ao longo de sua vida de projeto. Estabelece-se uma relação entre estes níveis de solicitação, sua probabilidade de ocorrência e o número de ciclos anuais. Com base na curva S-N e utilizando-se do critério de Miner, calcula-se então o dano acumulado em um ano e, portanto a vida útil em anos.

Resta mencionar que, embora simples, este método é bastante trabalhoso, porquanto para a quantificação dos correspondentes níveis de tensão é necessário calcular, para cada estado de mar representativo da região, e ao qual está associado uma probabilidade de ocorrência, os seguintes parâmetros:

***relativos à plataforma (ou unidade flutuante):***

- "offset" médio em ondas, correnteza e vento;
- curvas de resposta em frequência dos movimentos da plataforma (muitas vezes considerando a influência da pré-tensão do sistema de amarração);
- espectro de amplitude de movimento do ponto de suspensão na faixa de frequência das ondas e correspondentes valores significativos (amplitudes médias, máxima, rms, período entre zeros, etc);
- amplitude significativa de deriva lenta do ponto de suspensão;

***relativos à linha submersa:***

- configuração estática de equilíbrio;
- frequências e modos naturais de vibrar;
- resposta dinâmica à ação das ondas em sua faixa de frequência;
- resposta quase-estática ao movimento de deriva-lenta;
- excitação em *vortex-shedding* e resposta dinâmica, considerando-se perfil de correnteza com intensidade variável ao longo da profundidade.

Cumpra observar que é usual a adoção de hipóteses simplificadoras no estabelecimento das condições de cálculo. As mais comumente adotadas são:

- independência entre as oscilações de "alta" e "baixa" frequências e vibrações induzidas por liberação de vórtices;
- distribuição de estados de mar considerada apenas na direção do plano do *riser*;
- deriva lenta apenas em um grau de liberdade no plano horizontal e no período natural do sistema fundeado;
- a ação interveniente e conjunta de vento e correnteza não é considerada do ponto de vista dinâmico, porquanto esta consideração depende de dados de distribuição conjunta de probabilidade, não conhecidos em geral;
- o período natural fundamental do *riser* (correspondente ao seu primeiro modo), é muito inferior ao período de oscilação lenta (este da ordem de 200 segundos), o que permite considerar resposta quase-estática do *riser*, neste tipo de excitação.

Técnicas outras, como de simulação de Monte-Carlo, usuais em engenharia de estruturas, poderiam ser aventadas. No entanto, a sofisticação da metodologia empregada deve estar de acordo com o nível de conhecimento que se tem dos fenômenos intervenientes. No caso, a variação dinâmica de curvatura, que comparece como elemento essencial da indução de fadiga, ainda carece de modelagem mais apropriada, particularmente nos pontos de maior sollicitação, as extremidades. *Não por acaso, este é o tópico central do presente trabalho.*

## 2.4 PROCEDIMENTOS DE PROJETO

Cabe a este item apresentar e discutir procedimentos racionais usualmente empregados para o dimensionamento de um *riser* em catenária. Admite-se que a opção pela catenária direta ou "free-hanging" seja a configuração previamente escolhida. Supõem-se conhecidos os seguintes dados de projeto:

- *características físicas e geográficas do problema*: posição, profundidade, "offset" da plataforma em relação ao poço, tipo de solo, topografia (batimetria), etc.;
- *características ambientais do campo*: descrição estatística de
  - *ondas*: distribuição de alturas significativas, períodos médios, direção de propagação e tipo de espectro de energia;
  - *vento*: distribuição de intensidades e direções de incidência;
  - *correnteza*: distribuição de perfis de correnteza (intensidade e direção de incidência ao longo da profundidade);
  - tabela de condições ambientais representativas da região, com respectivas probabilidades de ocorrência;
  - tabelas de condições extremas (de sobrevivência).
- *características funcionais da linha*: função básica, tipo de hidro-carboneto (óleo ou gás), pressão e vazão (diâmetro) nominais de projeto;
- *características da unidade flutuante e sistema de fundeio*: dimensões principais, deslocamento, arranjo geral, curvas de estabilidade, curvas de resposta em frequência às ondas, curvas de arrasto sob ação de vento e correnteza, curvas de restauração do sistema de fundeio, tabela de "offset"s estáticos e amplitudes de deriva lenta correspondentes a cada condição ambiental definida;

- *critérios gerais de projeto*:<sup>18</sup> valores-limite para tração suportada pela plataforma, ângulo de saída do *riser* com a vertical, amplitude dinâmica de deslocamento angular do *riser* junto ao topo, restrições geométricas e operacionais, margens de segurança estrutural, vida útil em fadiga a ser atendida, etc....;
- *condicionantes estratégicos e econômicos*.

Partiremos do pressuposto que sempre é possível definir os procedimentos de instalação de forma a atender normas de segurança e integridade completa da linha e seus acessórios.

### **2.4.1 Fluxograma de Projeto**

A Figura 2-10, abaixo, apresenta um possível fluxograma de projeto de um *riser* em configuração de catenária direta. Este diagrama traz tão somente as principais fases de projeto e seu interrelacionamento, aplicando-se com maior propriedade a *risers* compostos por tubos de aço e tubos flexíveis. No entanto, com algumas modificações, pode atender ao projeto de cabos umbilicais. Os diversos blocos serão detalhados a seguir.

---

<sup>18</sup> Discussão de critérios de projeto pode ser encontrada em Pesce, 1994.

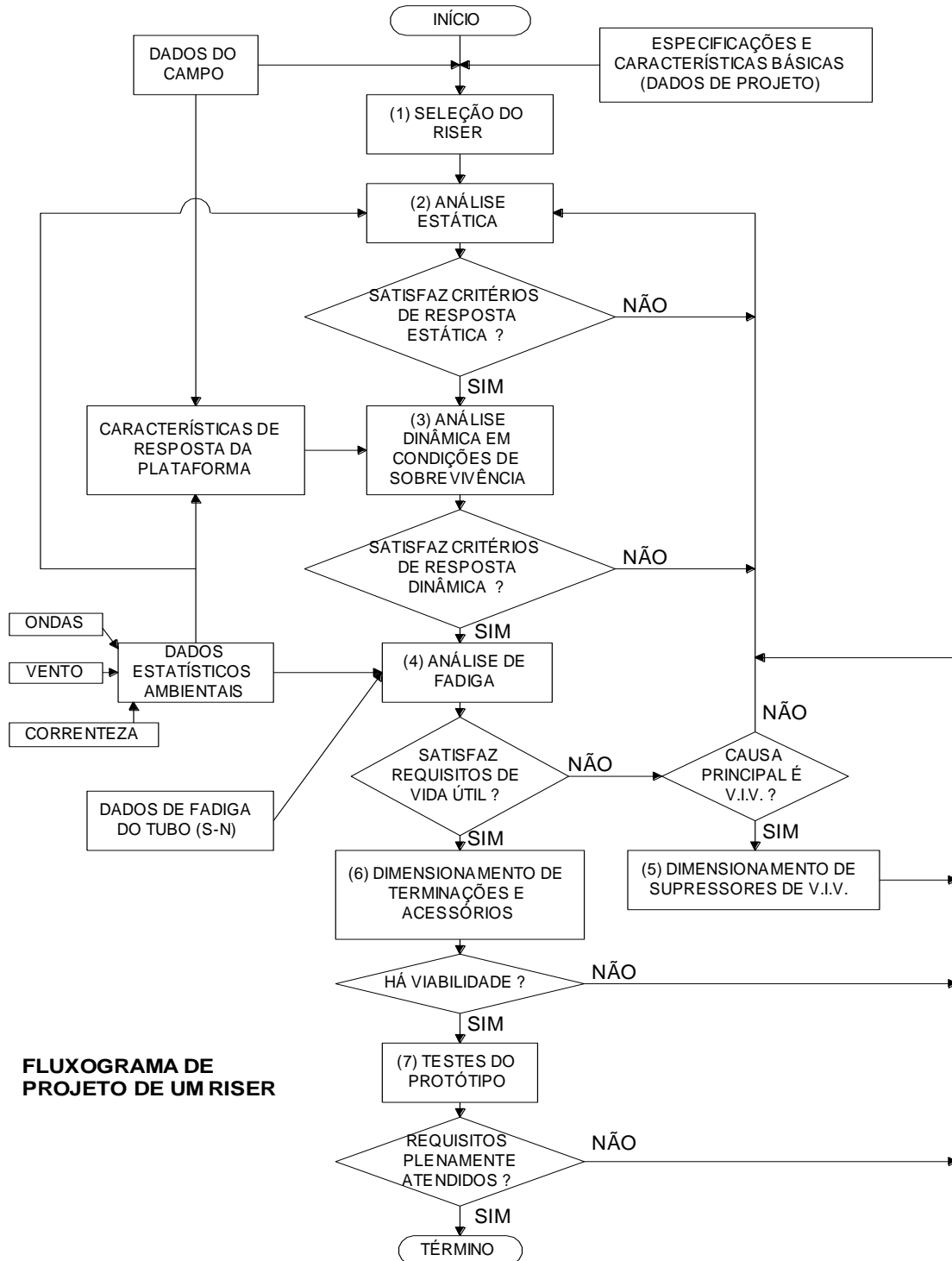


Figura 2-10 Fluxograma de Projeto de um Riser

Os passos de análise indicados fundamentam-se na discussão já realizada acerca do comportamento mecânico.

### **(1) Seleção do Riser**

Como se pode observar, a primeira tarefa consiste em selecionar o tipo de *riser* a ser utilizado, se flexível ou de aço e suas propriedades geométricas e de distribuição de massa, e portanto o peso imerso da linha. De um modo geral pode-se dizer que o emprego de *risers* de aço tende a se viabilizar para profundidades maiores e diâmetros menores. Obviamente, condicionantes econômicos, técnicos e estratégicos concorrem para a escolha. Nesta primeira tarefa cabe determinar o diâmetro externo do *riser*. Os principais requisitos técnicos, nesta fase são:

- a máxima tração que pode ser absorvida pela plataforma;
- o valor limite para o ângulo de saída com a vertical;
- a resistência ao colapso por pressão externa;
- a estabilidade hidrostática;
- no caso de flexíveis, a ruptura por pressão interna.

Os procedimentos de análise técnica, nesta fase de definição, são bastante simples, fundamentando-se em curvas de operação, fórmulas simplificadas e curvas de estabilidade estrutural para as alternativas em questão.

### **(2) Análise Estática**

A segunda tarefa visa a determinar a configuração de equilíbrio, ou *neutra*, de forma a atender os diversos requisitos de projeto. Em outras palavras, visa a determinar o comprimento total da linha especificada em (1). Consiste em repetir a análise estática, de forma iterativa, variando-se o comprimento da linha. Um procedimento relativamente simples e que é orientado no sentido de minimizar a tração estática transferida à plataforma pode ser construído da seguinte forma:

- estabelece-se uma margem de segurança estrutural para a máxima tensão na linha (por ex. 2); esta margem contempla, em princípio, a maior sobrecarga dinâmica;
- determina-se, de forma iterativa, utilizando-se de código computacional que faz a análise estática<sup>19</sup>, o maior comprimento total da linha de forma a que a tensão junto ao TDP, na situação "near" (i.e. de "offset" mínimo da plataforma <sup>20</sup>) não ultrapasse a margem de segurança estrutural; note que deve ser utilizado carregamento estático correspondente à condição ambiental extrema de maior solicitação, admitida como agindo no plano da catenária, por maior segurança;
- para o comprimento de linha determinado no passo anterior, analisa-se a situação "far" (máximo "offset", em geral +10% da profundidade), calculando-se a tração junto ao topo; se esta tração ultrapassar o limite permitido pela operação da plataforma é necessário voltar-se à tarefa anterior, redefinindo a linha.

### ***(3) Análise Dinâmica em Condições de Sobrevivência***

A terceira tarefa consiste em determinar, para o comprimento de linha estabelecido na tarefa anterior, nas duas situações de operação, "near" e "far", a resposta dinâmica em condições ambientais extremas. Usualmente estas condições são definidas como uma combinação de onda centenária e correnteza decenária, ou o inverso. Uma possível sequência de passos é dada a seguir:

- calculam-se as amplitudes de primeira-ordem (frequência das ondas) dos movimentos do ponto de suspensão na plataforma (topo da linha) nas condições ambientais em estudo; para tanto utilizam-se as curvas de resposta em frequência dos movimentos da plataforma e teoria espectral de sistemas lineares;

---

<sup>19</sup> Aqui é desejável o uso de programas que disponham de discretização espacial automática, como é o caso do **POLIFLEX**.

<sup>20</sup> É usual definir-se -10% da profundidade.



- determina-se a configuração quase-estática da linha correspondente às condições ambientais, considerando-se um "offset" adicional associado à deriva lenta da plataforma (daí o termo quase-estático); é usual, a favor da segurança, alinhar correnteza superficial e onda com o plano da catenária;
- em torno da configuração quase-estática determinada, calcula-se a resposta dinâmica do *riser*, impondo-se ao topo da linha o movimento de primeira-ordem calculado, conjuntamente ao carregamento direto de ondas e correnteza ao longo de seu comprimento; note que, nos primeiros ciclos de projeto, é bastante satisfatório o processamento de códigos que se baseiam em modelos linearizados de resposta dinâmica em torno da configuração estática correspondente, incorporados de modelos assintóticos de resposta dinâmica do momento fletor junto ao TDP e topo (capítulo 3 e 4);
- caso as tensões nos pontos críticos (TDP e topo) ultrapassem os valores admissíveis, ou ocorra compressão na linha, é necessário voltar à tarefa 2, redefinindo a configuração estática; note que é relevante distinguir se a eventual sobrecarga se deu em flexão, junto ao TDP, na situação "*near*", ou se ocorreu em tração, junto ao topo, na situação "*far*".

#### **(4) Análise de Fadiga**

Conforme discutido anteriormente, são três as principais causas de fadiga, enquanto carregamento ambiental permanente: oscilações na faixa de frequência das ondas, associadas aos movimento ditos de primeira-ordem; oscilações em baixa-frequência ("slow-drift oscillations") e vibrações por liberação de vórtices. Sob as hipóteses mencionadas no sub-item 2.4.2., acima, o seguinte procedimento pode ser estabelecido:

- para cada condição ambiental representativa da região (ondas, vento, correnteza), e portanto para cada "offset" estático correspondente da unidade flutuante calculam-se:
  - a configuração estática da linha;

- as configurações quase-estáticas da linha, quando, em torno da posição de equilíbrio, impõe-se a oscilação lenta;
  - a resposta dinâmica da linha às ondas e aos movimentos de primeira-ordem impostos ao topo;
  - as frequências naturais e os modos naturais de vibrar da linha;
  - os modos naturais excitados em "vortex-shedding" e seu fator de permanência ao longo da linha, através do modelo de Iwan-Blevins modificado,
- da curva "S-N" da linha, para o TDP e para o topo, calculam-se os números de ciclos até a fadiga, correspondentes às três causas de excitação;
  - conhecendo-se o número de ciclos por ano, associados à cada carregamento, determina-se então o dano acumulado por ano correspondente, supondo permanência integral da ação;
  - a partir da probabilidade de ocorrência de cada estado ambiental, calculam-se então os danos acumulados ponderados e, sob hipótese de concomitância, porém independência de efeitos, determinam-se os danos acumulados combinados em um ano e, por fim, a vida útil em anos.
  - se a vida útil resultante for inferior à estabelecida nos critérios gerais, retorna-se à tarefa 2.

#### ***(5) Dimensionamento de Supressores de VIV (Vibrações Induzidas por Vorticidade)***

Caso, durante as análises empreendidas nos primeiros ciclos de projeto, o fenômeno de VIV resulte importante na quantificação da vida útil da linha, este tópico passa a merecer atenção especial. Visto que, até o presente momento, não foi devidamente qualificada e muito menos quantificada a forma como estes supressores agem, a definição do tipo de supressor e de suas características geométricas depende de investigação experimental específica, que deve portanto ser empreendida apenas em ciclos avançados do projeto. Como exemplo, se o supressor for do tipo helicoidal ("*helical strakes*") é necessário determinar a

largura da fita e o passo que conferem maior eficiência de funcionamento para a excitação considerada.

**(6) Dimensionamento de Terminações ("*Bending Stiffeners e Flexible Joints*")**

Dois são os tipos de acessório que merecem atenção especial: enrijecedores de flexão ou *bending stiffeners* e juntas flexíveis ou *flexible joints*. O primeiro tem emprego em *risers* flexíveis, enquanto que o segundo se aplica a *risers* de aço. Ambos conferem alguma rigidez flexional na extremidade de suspensão. Conforme discutido anteriormente seu efeito tem caráter local e, embora não afete a dinâmica global da linha, modifica sensivelmente os valores médios e dinâmicos de curvatura (momento fletor) e ângulo de saída no entorno do acoplamento superior. Seu efeito deve ser incorporado, portanto, no cálculo estrutural junto ao topo. Duas são as formas: (a) considerando sua presença no processamento dos códigos computacionais aludidos, através da introdução de terminações flexionais (em geral com característica não-linear de resposta); (b) corrigindo o cálculo da variáveis afetadas naquele entorno, através de modelos assintóticos (ver capítulo 3 e 4). Note que, ao menos em princípio, sempre é possível dimensionar uma terminação que atenda aos requisitos de projeto. Como será visto no item a seguir, sob a ótica de *espiral de projeto*, a melhor forma de dimensionar estas terminações é através do refinamento do método de cálculo a cada ciclo do projeto, muito embora já no primeiro ciclo resultem valores (limites superiores) para o dimensionamento específico da terminação.

Em ambos os casos, além de análise via elementos finitos, são necessárias informações empíricas, advindas de experimentos com o *protótipo*. Estes experimentos devem contemplar toda a sorte de carregamentos impostos e, particularmente o processo de fadiga. São realizados nos últimos ciclos do projeto.

Um possível procedimento para o dimensionamento destes componentes é apresentado. Os passos a serem seguidos dependem do ciclo atual de projeto do sistema.

- estabelecem-se os valores limites de rotação (critérios geométricos e do fabricante) e de rigidez, seja flexional ou axial (de forma a que não sejam ultrapassados os limites de tensão da linha);
- determinam-se as características geométricas básicas do componente e especificam-se os materiais constituintes;
- realizam-se análises estruturais completas (estática e dinâmica); em ciclos posteriores os modelos devem ser sofisticados, considerando-se teoria de grandes deflexões e, no caso de juntas flexíveis, não-linearidades geométricas advindas do problema de contacto;
- realizam-se ensaios de carga estática e dinâmica com um protótipo;
- realizam-se ensaios de fadiga com o componente.

### **(7) Testes**

Cabe por fim a realização de testes com espécimens da tubulação, para fins de certificação. Podem ser classificados em duas categorias: de curta e longa duração. Os de curta duração buscam verificar a resistência estrutural e os parâmetros assumidos em projeto. Os de longa duração dizem respeito à fadiga. Os testes a serem executados dependem se o *riser* em estudo é composto por tubo flexível ou de aço (ou ainda cabo umbilical). No primeiro caso, dada a inerente complexidade construtiva deste elemento, os testes são bastante mais numerosos e abrangentes. No caso de *risers* de aço as maiores preocupações são: verificar se as juntas soldadas apresentam o mesmo nível de resistência estrutural do tubo, tanto estática quanto dinamicamente (fadiga); verificar se a excentricidade do tubo está dentro da tolerância permitida, tendo em vista o colapso. A Tabela 2-6 apresenta, a título de exemplo, uma sequência típica de testes de curta duração realizados com tubos flexíveis.

*Tabela 2-6 Sequência Típica de Testes de Curta Duração Realizados com Tubos Flexíveis<sup>21</sup>*

<b>Teste</b>	<b>Tipo</b>	<b>Variáveis medidas</b>
1	pressão interna	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , $\Delta \Phi$ , $\mu$
2	pressão interna cíclica	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , $\Delta \Phi$ , $\mu$
3	tração em roda de lanç	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , $\mu$ , Trup.
4	compressão radial em 2 pontos	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , $\mu$ , crushing strength
5	compressão radial em 3 pontos	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , "crushing strength"
6	tração e compressão em 3 pontos	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , $\Delta ID$ , $\mu$ "breaking strength"
7	pressão hidrostática externa	pressão de colapso
8	pressão interna	"burst strength"
9	pressão hidrostática externa	resistência de selagem das terminações
10	torção	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , $\Delta \Phi$
11	flexão	MBR
12	tração e pressão interna	$\Delta L$ , $\Delta OD$ , $\mu$ , "breaking strength"

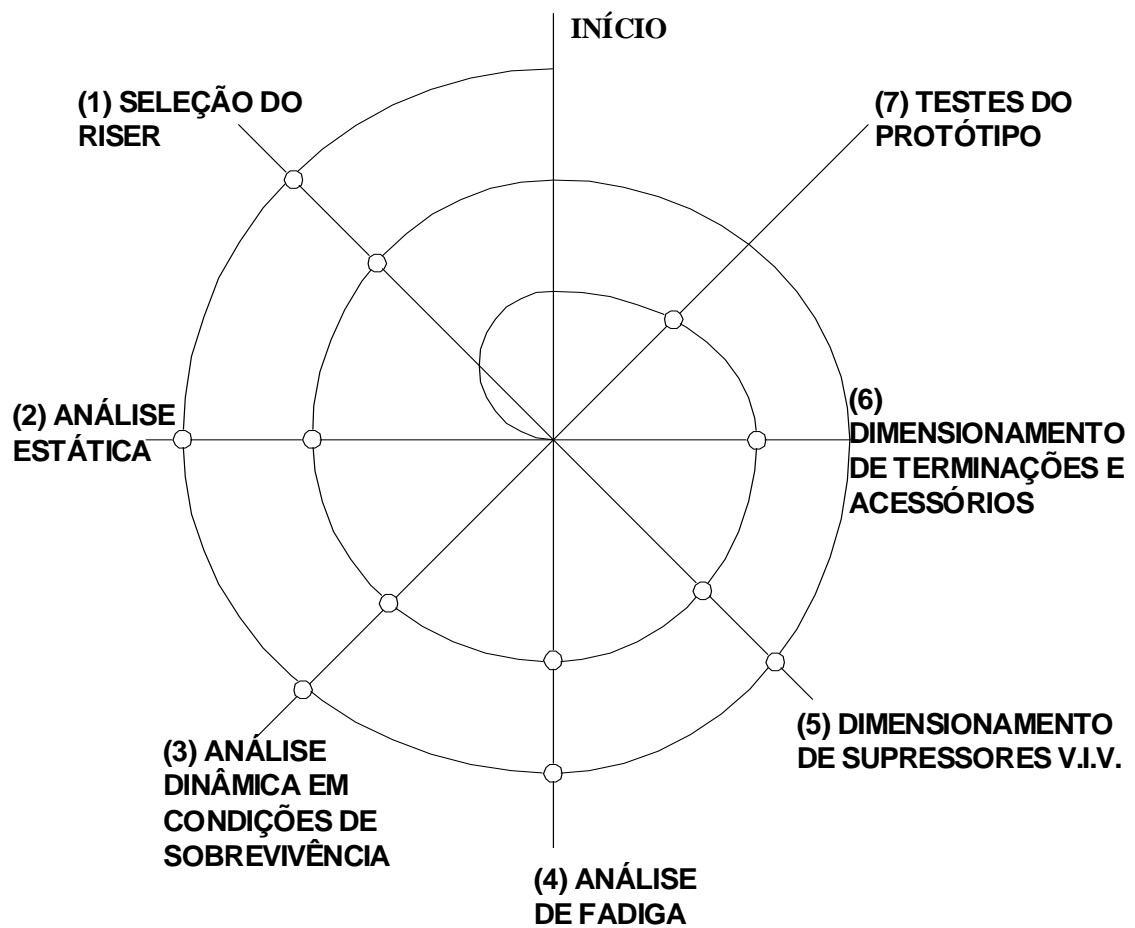
<sup>21</sup>  $\Delta L$ : alongação;  $\Delta \Phi$ : torção por unidade de comprimento;

$\Delta OD$ : variação de diâmetro externo;  $\Delta ID$ : variação do diâmetro interno;

$\mu$ : deformação do fio da camada externa ou interna.

## 2.4.2 Espiral de projeto

O fluxograma de projeto apresentado e discutido no item anterior é transformado em uma "espiral de projeto". Nesta nova forma fica mais fácil visualizar não apenas a pertinência da execução de uma dada tarefa durante um certo ciclo de projeto, como também a variação da técnica ou da complexidade do ferramental utilizado em uma determinada tarefa ao longo dos ciclos.



*Figura 2-11 Espiral de Projeto de um Riser em Catenária*

### **3. O PROBLEMA ESTÁTICO DE LINHAS SUBMERSAS**

O presente capítulo aborda o problema estático de linhas submersas lançadas em configuração de “catenária direta”, ou seja, lançadas de forma direta ao fundo do oceano. Inicialmente o conhecido conceito de tração efetiva é discutido. São então estabelecidas as equações gerais que regem o equilíbrio estático de linhas submersas sob ação de forças externas constantes no tempo, associadas à ação da correnteza e ondas. Embora o tratamento analítico do problema seja aprofundado apenas no caso plano, o equacionamento inicia-se a partir das clássicas equações de Clebsh-Love, que regem o equilíbrio tridimensional de barras curvas esbeltas em grande deslocamento, sob a hipótese de pequenas deformações. As diversas situações de particularização do problema vão sendo abordadas, até que os casos mais simples, no plano, de linha inextensível e de cabo inextensível e infinitamente flexível são discutidos.

O efeito localizado da rigidez flexional, no entorno de pontos onde são estabelecidas condições de contorno, é abordado, ocasião em que um parâmetro de comprimento, a que denominamos “*comprimento de flexão*” e que condiciona a solução nesta vizinhança, é introduzido e discutido.

A técnica da camada-limite é então empregada para construir soluções assintóticas no entorno do ponto de contato com o fundo. O efeito da rigidez do solo é incorporado. Para o primeiro caso são apresentadas, como suporte experimental, comparações com resultados de experimentos conduzidos recentemente, nos laboratórios do Instituto de Pesquisa Tecnológicas do Estado de São Paulo. A mesma técnica de camada-limite é utilizada na análise da curvatura local, junto à extremidade suspensa, na presença de uma terminação flexível.



### 3.1 O CONCEITO DE TRAÇÃO EFETIVA

O conceito, já clássico, de *tração efetiva* desempenha papel fundamental no estudo da mecânica de linhas submersas. Como será visto é a tração efetiva, e não a tração solicitante do ponto de vista estrutural, que determina a configuração de equilíbrio estática e rege a rigidez geométrica da linha a deslocamentos transversais, esta última a principal condicionante de sua resposta dinâmica.

A tração efetiva decorre da análise da condição de equilíbrio estático de um elemento diferencial da linha submersa quando são consideradas não apenas as forças gravitacionais mas também aquelas resultantes da ação do campo hidrostático de pressão. Este campo, agente sobre a superfície exposta da linha é, em última análise, o fator responsável por regular a estabilidade estrutural estática e aquele que rege o eventual fenômeno de instabilidade dinâmica, este último descrito de forma aproximada através de uma equação de Mathieu.

Abordagens um tanto mais construtivas podem ser encontradas, nas quais o campo de pressão hidrostático agente sobre a linha é integrado de forma a se determinar a resultante associada a este sistema de forças; ver, por exemplo, Seyed & Patel, 1992. A abordagem aqui apresentada, no entanto é bastante usual na literatura especializada.

Considere, então, um elemento da linha de comprimento  $\Delta s$ . Sobre ele age a resultante das forças gravitacionais, as resultantes das trações solicitantes nas extremidades e o campo externo de pressões hidrostáticas, este aplicado tão somente à superfície lateral do elemento<sup>22</sup>. As forças cortantes e momentos fletores e torsor não são considerados, por ora. Sejam

---

<sup>22</sup> Para fins de clareza de exposição, a linha será suposta não pressurizada internamente. O efeito de eventual pressurização interna pode ser incorporado com facilidade, no entanto.

$$\begin{aligned}x &= x(s) \\y &= y(s) \\z &= z(s)\end{aligned}\tag{3.1}$$

as equações paramétricas da *elastica*, expressas em coordenadas cartesianas, com  $y$  a cota vertical medida a partir do fundo e  $s$  a coordenada curvilínea medida ao longo do comprimento, cuja origem é, por ora, arbitrariamente escolhida. Seja também  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  o terno de versores de Frenet-Serret, orientando respectivamente as direções tangente, normal e bi-normal à curva descritiva da *elastica*. A vertical é orientada pelo versor  $\mathbf{j}$ , contrário ao sentido de ação do campo gravitacional.

O diagrama de equivalência de sistemas de força, apresentado abaixo, ilustra o balanço de equilíbrio. O sistema original das forças distribuídas consideradas, identificado por (a), é, como já mencionado, composto pelas resultantes das forças de tração solicitantes, aplicadas nas extremidades do elemento e escritas  $\mathbf{F}(s) = -F(s)\mathbf{t}$  e  $\mathbf{F}(s + \Delta s) = F(s + \Delta s)\mathbf{t}$ ; pela resultante das forças gravitacionais  $-\gamma\Delta s\mathbf{j} = -mg\Delta s\mathbf{j}$ , onde  $m$  é a massa por unidade de comprimento da linha e  $\gamma$  o peso específico linear correspondente, e pelo campo de pressões hidrostáticas agente tão somente sobre a superfície exposta (lateral) da linha. Este sistema pode ser substituído pela ação concomitante de dois outros:

- o sistema (b), por sua vez composto por:
  - I. um sistema de forças distribuídas associadas ao campo externo de pressão hidrostática - sistema este completado de forma a agir sobre todo o contorno do elemento, incluindo-se uma ação “virtual” sobre as faces não-expostas -,
  - II. e pelas forças gravitacionais;
- e o sistema (c), assim composto,
  - III. pelas trações solicitantes (do ponto de vista estrutural),
  - IV. e por forças diretamente opostas às resultantes das forças “virtuais” de pressão hidrostática, que foram supostas agentes sobre as superfícies não-expostas.

A resultante do sistema (b.I) de forças é, na realidade o empuxo equivalente  $\Delta E$ , que agiria sobre o elemento se este apresentasse todas as faces expostas, e não apenas as faces laterais, como no presente caso de uma linha contínua. Denominando  $\rho_a$  a densidade de massa do fluido no qual a linha é imersa, e  $\gamma_a = \rho_a S_o g$ , o “empuxo específico equivalente” por unidade de comprimento da linha, com  $S_o$  designando a área da secção transversal da linha, o sistema de forças (b) pode ser substituído pela resultante vertical

$$\Delta P_{im} = -(\gamma - \gamma_a)\Delta s \mathbf{j} = -(m - \rho_a S_o)g\Delta s \mathbf{j} \quad (3.2),$$

correspondente ao “peso-imerso equivalente do elemento”.

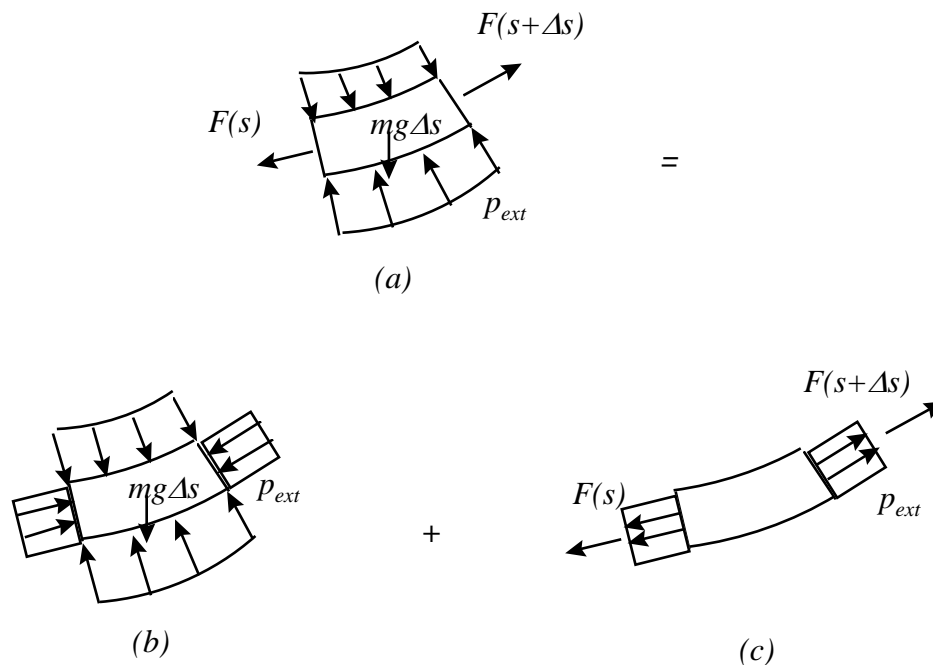


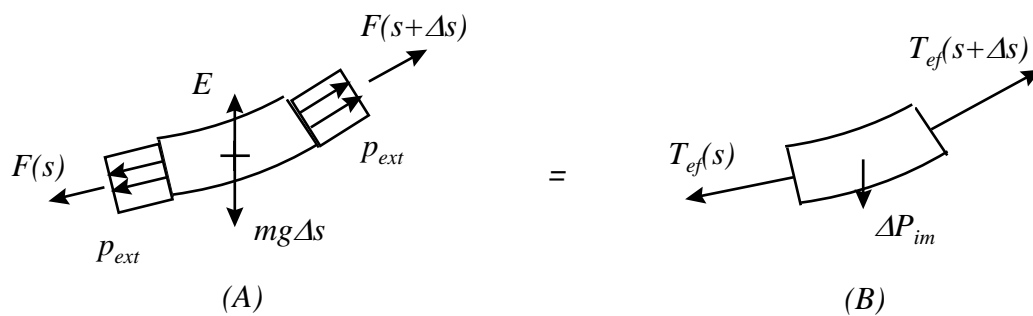
Figura 3-1 Diagramas de Sistemas Equivalentes de Força

Definindo agora a **tração efetiva** na seção como sendo a soma da tração solicitante com a resultante do campo externo de pressão hidrostática, que agiria sobre as superfícies das extremidades do elemento se estas fossem expostas e fechadas, de tal forma que

$$T_{ef}(s) = F(s) + p_{ext}(s)S_o(s) \tag{3.3},$$

$$p_{ext}(s) = \rho_a g(H - y(s))$$

onde  $H$  é a profundidade e  $y(s)$  é a cota vertical da seção considerada, medida a partir do fundo, os sistemas equivalentes de forças (b) + (c) ficam reduzidos às formas mais simples, (A) ou (B), apresentadas na figura abaixo.



**Figura 3-2 Sistemas Equivalentes de Força.**

Note que, estritamente, a tração efetiva na situação deformada dependerá dos valores da cota da seção e de sua área seccional que, por sua vez, dependerá do comportamento estrutural da linha sob carregamento externo. Este é um efeito geométrico não-linear usualmente desprezado.

Note também que, se for considerado um tubo submerso, com área de superfície seccional interna  $S_i$ , cheio de fluido, e eventualmente submetido à pressurização interna, de tal forma que a pressão interna total seja designada  $p_{\text{int}}(s)$ <sup>23</sup>, a tração efetiva deverá ser redefinida como

$$T_{ef}(s) = F(s) + p_{ext}(s)S_o(s) - p_{int}(s)S_i(s) \quad (3.4).$$

Por fim, vale observar que se a linha for considerada como infinitamente flexível a instabilidade estrutural<sup>24</sup> estará associada à ocorrência de tração efetiva nula e não à ocorrência de tração solicitante nula, como é o caso (assintoticamente correto) de um fio não imerso. Na realidade estas considerações seriam verdadeiras para *fios infinitos* suspensos em ar. O que se passa, neste último caso, é que a densidade do ar é de ordem muitas vezes inferior à densidade da linha e os efeitos associados ao campo de pressão estático podem ser desconsiderados. Nesta situação a tração efetiva é assintoticamente igual à tração solicitante.

Portanto, quando se trata de linhas contínuas, imersas em água, como é o caso das aplicações em engenharia oceânica, o efeito da pressão hidrostática é de “estabilização estrutural”.

Às variações temporais cíclicas da tração efetiva, que usualmente ocorrem no problema dinâmico, poderão estar associados comportamentos não-lineares bastante peculiares, envolvendo inclusive instabilidade dinâmica, comportamentos estes que podem ser modelados matematicamente pela clássica equação de Mathieu.

---

<sup>23</sup> (o efeito de fluxo estacionário interno é tratado por Seyed & Patel, 1992; em primeira-ordem independe do sentido e, para uma dada configuração estática, que define a tração efetiva portanto, o fluxo estacionário interno afeta o esforço de tração solicitante)

<sup>24</sup> (bifurcação de equilíbrio do tipo “forquilha supercrítica”)

### 3.2 EQUAÇÕES GERAIS DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

Embora o objetivo ulterior do presente trabalho seja dar um tratamento analítico mais aprofundado ao estudo da mecânica de linhas submersas lançadas ao fundo do oceano e suspensas de uma unidade flutuante, o que é conseguido com certa simplicidade no caso plano, é interessante que o equacionamento inicial seja estabelecido ao nível tridimensional, sob hipóteses relativamente gerais da Teoria Matemática da Elasticidade. Sob este ponto de vista a abordagem aqui realizada, embora baseada em equações clássicas, é pouco usual na literatura mais recente, especializada. Os fundamentos teóricos acompanhados de riquíssima discussão podem ser encontrados na soberba obra de A.E.H. Love, em sua quarta edição, particularmente nos capítulos XVIII, XIX, XX, à qual faremos referência de forma frequente. O desenvolvimento a seguir baseia-se, então, nas clássicas equações conhecidas na literatura como *equações de Love*, (ou de Clebsh-Love), as quais regem o equilíbrio estrutural estático de barras esbeltas em grandes deslocamentos, porém sob hipóteses, pouco restritivas, associadas à teoria de pequenas deformações. Estas equações formam o núcleo teórico fundamental da Resistência dos Materiais e foram originalmente deduzidas e analisadas no contexto de contribuição de diversos nomes fundamentais da física-matemática e, em particular da mecânica do meio contínuo, tais como Kelvin, Saint Venant, Clebsh, Kirchoff, Hess, Tait, Young, entre outros.

### 3.2.1 Equações gerais e fundamentos

Sob a hipótese de pequenas deformações as equações que regem o equilíbrio elástico de uma barra delgada, conhecidas como *equações de Love*, podem ser escritas na forma<sup>25</sup>

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} - Q_v \kappa_w + Q_w \kappa_v + f_u &= 0 \\
 \frac{dQ_v}{ds} - Q_v \kappa_u + T \kappa_w + f_v &= 0 \\
 \frac{dQ_w}{ds} - T \kappa_v + Q_w \kappa_u + f_w &= 0 \\
 \frac{dM_u}{ds} - M_v \kappa_w + M_w \kappa_v + K_u &= 0 \\
 \frac{dM_v}{ds} - M_w \kappa_u + M_u \kappa_w - Q_w + K_v &= 0 \\
 \frac{dM_w}{ds} - M_w \kappa_v + M_v \kappa_u + Q_v + K_w &= 0
 \end{aligned} \tag{3.5},$$

onde,

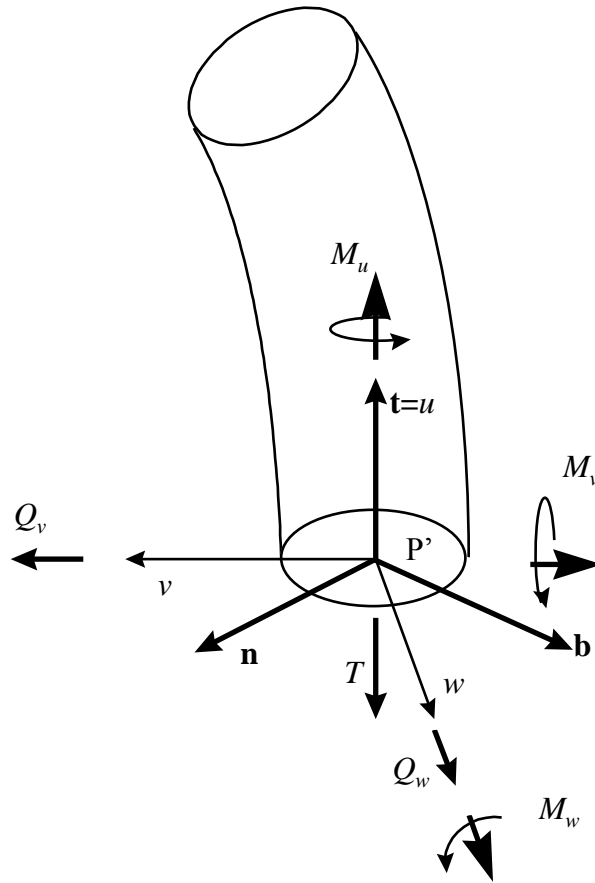
- $T$ : esforço normal à seção da linha;
- $Q_v, Q_w$ : esforços cortantes nas direções  $v$  e  $w$ , respectivamente;
- $M_u, M_v, M_w$ : momento torsor e componentes de momentos fletores em torno dos eixos  $u, v, w$ ;
- $f_u, f_v, f_w$ : forças aplicadas por unidade de comprimento nas direções  $u, v, w$ ;
- $K_u, K_v, K_w$ : momentos aplicados, por unidade de comprimento, em torno das direções  $u, v, w$ .

---

<sup>25</sup> (ver Love, 1929, art. 254, (10) e (11), onde nomenclatura algo diferente é utilizada e a ordem foi permutada ciclicamente)

As quantidades  $\kappa_v, \kappa_w$  são, respectivamente, as medidas de curvatura das projeções da linha central deformada sobre os planos  $(w, u)$  e  $(u, v)$ , correspondentemente associadas aos momentos fletores  $M_v, M_w$ , aplicados em torno dos eixos  $v$  e  $w$ . Os eixos  $(u, v, w)$ , orientados pelo terno de versores  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , são eixos locais, referidos a um ponto P' genérico, da linha central deformada, com  $u$  tangente à linha central deformada enquanto o plano  $(u, v)$  contém o elemento linear que, na condição indeformada, continha o *eixo principal*  $y$ , que partia do ponto P. Os eixos  $(u, v, w)$  são denominados por Love “eixos principais de torção-flexão”. Note que estes eixos não devem ser confundidos com aqueles orientados pelos versores de Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , muito embora, por definição,  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{t}$ . O versor binormal  $\mathbf{b}$  tem a direção da resultante dos momentos fletores e o versor normal  $\mathbf{n}$  (ou normal principal) aponta para o centro de curvatura da linha elástica. Em casos particulares, como o caso plano ou quando tratamos de elementos helicoidais naturalmente curvos, as duas bases coincidem, no entanto. O vetor resultante da combinação de  $\kappa_v, \kappa_w$  (na direção do versor bi-normal da linha-central, na condição deformada) tem módulo igual ao valor da curvatura  $\chi = 1/\rho$  desta curva. Por sua vez,  $\kappa_u = \tau$  é a torção, associada portanto ao momento torsor  $M_u$ , aplicado em torno do versor  $\mathbf{u}$ . A figura abaixo ilustra os esforços solicitantes.





*Figura 3-3 Esforços solicitantes em um elemento de linha*

Note que consistentemente à configuração desenhada o momento fletor  $M_v$  tem sinal negativo.

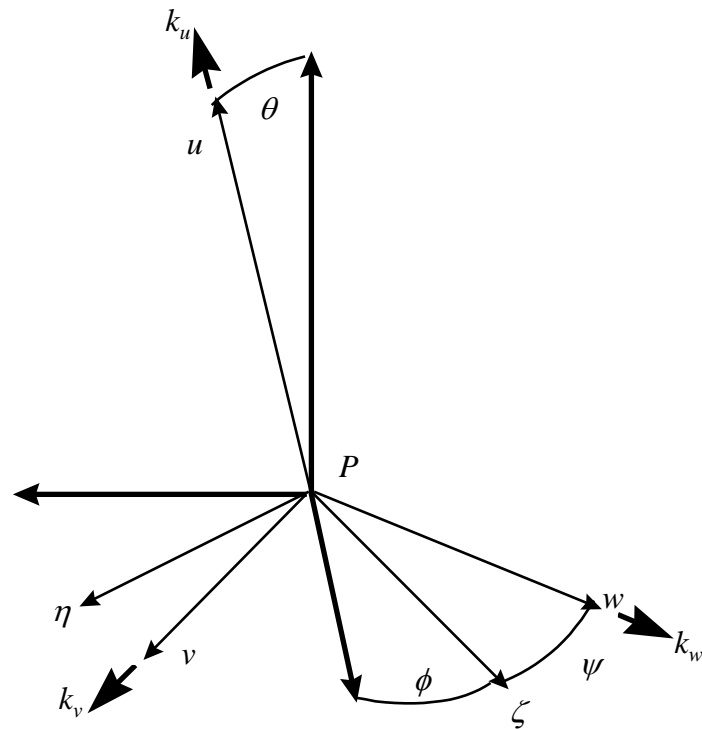


Figura 3-4 Ângulos de Euler em um elemento de linha

A Figura 3-4, por sua vez, mostra os ângulos de Euler associados. A analogia cinemática com o movimento de um corpo rígido é imediata de tal sorte que  $(\kappa_u, \kappa_v, \kappa_w)$  corresponde ao vetor de rotação  $(\omega_u, \omega_v, \omega_w)$ , com a base  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  solidária ao corpo. Valem, assim, as seguintes relações entre as componentes de curvatura e torção e os ângulos de Euler,

$$\begin{aligned}
 \kappa_u &= \frac{d\psi}{ds} + \frac{d\phi}{ds} \cos \theta \\
 \kappa_v &= \frac{d\theta}{ds} \sin \psi - \frac{d\phi}{ds} \sin \theta \cos \psi \\
 \kappa_w &= \frac{d\theta}{ds} \cos \psi + \frac{d\phi}{ds} \sin \theta \sin \psi
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

No análogo-cinemático a coordenada curvilínea  $s$  desempenha o papel do tempo  $t$  e as velocidades angulares  $(d\theta/ds; d\phi/ds; d\psi/ds)$  são conhecidas, no estudo do movimento giroscópico, como “nutação”, “precessão” e “rotação própria” ou “*spin*”. O eixo indicado por  $\zeta$  equivale ao “*eixo dos nós*”. Se forem, portanto, definidos os vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= (T, Q_u, Q_w) \\ \mathbf{M} &= (M_u, M_v, M_w) \\ \mathbf{f} &= (f_u, f_v, f_w) \\ \mathbf{K} &= (K_u, K_v, K_w)\end{aligned}\tag{3.7}$$

de esforços solicitantes e aplicados, respectivamente, (estes últimos, por unidade de comprimento) e o “vetor de curvatura”

$$\mathbf{c} = (\kappa_u, \kappa_v, \kappa_w)\tag{3.8},$$

as equações de Love podem ser escritas em forma vetorial,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{Q}}{ds} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{M} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{Q} + \mathbf{K} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.9}.$$

muito mais compacta<sup>26</sup>, portanto.

---

<sup>26</sup> A segunda equação, (3.9.b), acima, guarda similaridade surpreendente com a equação que rege a variação da quantidade de movimento angular de um corpo rígido, onde  $s$  desempenha o papel do tempo,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{M}$  são os matemático-análogos das variáveis *quantidade de movimento* e *momento da quantidade de movimento*, ou “momento angular”,  $\mathbf{c}$  faz o papel do *vetor de rotação*,  $\mathbf{K}$  corresponde, a

Note que de acordo com a equivalência dos sistemas de forças, admitida e discutida em (3.4), e que trata de uma linha contínua submersa,  $T$  deve ser interpretada como *a tração efetiva*. Aqui, por conveniência de notação, será denotada simplesmente  $T$ .

No que segue, assumiremos que a linha possa ser descrita por propriedades mecânicas homogêneas de rigidez torsional, flexionais e axial,  $(B_u, B_v, B_w, R)$  dadas ao nível seccional, que usualmente também são expressas pelos produtos  $(GJ, EJ_v, EJ_w, EA)$ . Admitiremos válidas também as usuais equações constitutivas da Resistência dos Materiais, que relacionam os momentos fletores e tursor às curvaturas e torção respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}M_u &= B_u \kappa_u \\M_v &= B_v \kappa_v \\M_w &= B_w \kappa_w\end{aligned}\tag{3.10}.$$

Com o uso de (3.10) as equações (3.5) ficam escritas então,

---

menos do sinal, ao momento das forças externas em relação a um polo arbitrário e  $\mathbf{u}$  é a velocidade deste polo (ver, p.ex., Pesce, 1996, eqs. (3.27) e (3.33)). Note que a derivada em  $s$  deve ser interpretada, nesta analogia, como a derivada temporal. No caso em que apenas cargas de extremidade são aplicadas, sendo nulas as forças e momento distribuídos por unidade de comprimento, a analogia é conhecida como de Kirchoff, ver Love, art. 260, e representa o análogo do movimento livre de um pião, não necessariamente simétrico, em torno de um ponto fixo.

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= Q_v \kappa_w - Q_w \kappa_u - f_u \\
 \frac{dQ_v}{ds} &= Q_w \kappa_u - T \kappa_w - f_v \\
 \frac{dQ_w}{ds} &= T \kappa_v - Q_v \kappa_u - f_w \\
 \frac{d}{ds} (B_u \kappa_u) - (B_v - B_w) \kappa_v \kappa_w + K_u &= 0 \\
 \frac{d}{ds} (B_v \kappa_v) - (B_w - B_u) \kappa_w \kappa_u - Q_w + K_v &= 0 \\
 \frac{d}{ds} (B_w \kappa_w) - (B_u - B_v) \kappa_u \kappa_v + Q_v + K_w &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}.$$

As equações (3.11) constituem um sistema de seis equações diferenciais ordinárias não-lineares, de primeira-ordem nas variáveis  $(T, Q_v, Q_w; \kappa_u, \kappa_v, \kappa_w)$ , que devem ser resolvidas estabelecendo-se seis correspondentes condições de contorno, que incluem a possibilidade de aplicação de cargas nas extremidades. Derivando as equações (3.5e,f) em relação a  $s$ , e nelas substituindo as derivadas de  $(Q_v, Q_w)$  dadas pelas equações (3.5b,c), vem

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= Q_v \kappa_w - Q_w \kappa_v - f_u \\
 \frac{d}{ds} (B_u \kappa_u) - (B_v - B_w) \kappa_v \kappa_w + K_u &= 0 \\
 \frac{d^2}{ds^2} (B_v \kappa_v) - \frac{d}{ds} ((B_w - B_u) \kappa_w \kappa_u) - T \kappa_v + Q_v \kappa_u + f_w + \frac{dK_v}{ds} &= 0 \\
 \frac{d^2}{ds^2} (B_w \kappa_w) - \frac{d}{ds} ((B_u - B_v) \kappa_u \kappa_v) + Q_w \kappa_u - T \kappa_w - f_w + \frac{dK_w}{ds} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.12}.$$

Se as propriedades mecânicas de rigidez flexionais e torsional forem consideradas independentes de  $s$ , isto é invariantes ao longo da linha, as equações simplificam-se<sup>27</sup>,

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= Q_v \kappa_w - Q_w \kappa_v - f_u \\
 B_u \frac{d\kappa_u}{ds} - (B_v - B_w) \kappa_v \kappa_w + K_u &= 0 \\
 B_v \frac{d^2 \kappa_v}{ds^2} - (B_w - B_u) \frac{d}{ds} (\kappa_w \kappa_u) - T \kappa_v + Q_v \kappa_u + f_w + \frac{dK_v}{ds} &= 0 \\
 B_w \frac{d^2 \kappa_w}{ds^2} - (B_u - B_v) \frac{d}{ds} (\kappa_u \kappa_v) + Q_w \kappa_u - T \kappa_w - f_v + \frac{dK_w}{ds} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.13}.$$

A segunda das equações (3.13) mostra ainda que *se a seção for simétrica*, como é o caso de tubos metálicos e tubos flexíveis compostos, em geral, de tal sorte que  $B_v = B_w$ , a torção poderá ser calculada, a menos de uma constante, digamos  $\kappa_u = \tau_0$ , a partir do momento tursor aplicado por unidade de comprimento.

Sejam, agora,  $T_0$  e  $L$  dimensões típicas de tração<sup>28</sup> e comprimento<sup>29</sup> do problema. As equações (3.13) podem ser adimensionalizadas, de forma consistente. De fato, definindo os parâmetros

<sup>27</sup> Vale ressaltar, no entanto, que em linhas flexíveis compostas a rigidez flexional (e mesmo a torsional) depende, em alguma monta, das pressões interfaciais entre camadas, estas dependentes do estrangulamento proporcionado pela tração dos tendões helicoidais e da pressão hidrostática externa bem como da pressão interna, ou seja, função da posição ao longo da linha. Um modelo mais completo deveria tomar conta deste fato.

<sup>28</sup>  $T_0$  é em geral tomado como a componente horizontal da tração da linha suspensa.

<sup>29</sup>  $L$  é o comprimento suspenso (indeformado) da linha,.

$$\begin{aligned}
 \lambda_u^2 &= \frac{B_u}{T_0} \\
 \lambda_v^2 &= \frac{B_v}{T_0} \\
 \lambda_w^2 &= \frac{B_w}{T_0}
 \end{aligned} \tag{3.14},$$

e os respectivos parâmetros adimensionais,

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_u &= \frac{\lambda_u}{L} \\
 \hat{\lambda}_v &= \frac{\lambda_v}{L} \\
 \hat{\lambda}_w &= \frac{\lambda_w}{L}
 \end{aligned} \tag{3.15},$$

as equações (3.12) ficam dadas, na forma adimensional,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{T}}{d\hat{s}} &= \hat{Q}_u \hat{\kappa}_v - \hat{Q}_v \hat{\kappa}_u - \hat{f}_w \\
 \hat{\lambda}_u^2 \frac{d\hat{\kappa}_u}{d\hat{s}} - (\hat{\lambda}_v^2 - \hat{\lambda}_w^2) \hat{\kappa}_v \hat{\kappa}_w + \hat{K}_u &= 0 \\
 \hat{\lambda}_v^2 \frac{d^2 \hat{\kappa}_v}{d\hat{s}^2} - (\hat{\lambda}_w^2 - \hat{\lambda}_u^2) \frac{d}{d\hat{s}} (\hat{\kappa}_w \hat{\kappa}_u) - \hat{T} \hat{\kappa}_v + \hat{Q}_w \hat{\kappa}_u + \hat{f}_w + \frac{d\hat{K}_v}{d\hat{s}} &= 0 \\
 \hat{\lambda}_w^2 \frac{d^2 \hat{\kappa}_w}{d\hat{s}^2} - (\hat{\lambda}_u^2 - \hat{\lambda}_v^2) \frac{d}{d\hat{s}} (\hat{\kappa}_u \hat{\kappa}_v) + \hat{Q}_w \hat{\kappa}_u - \hat{T} \hat{\kappa}_w - \hat{f}_v + \frac{d\hat{K}_w}{d\hat{s}} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16},$$

onde  $\hat{\cdot}$  indica tratar-se de uma variável adimensional. Os parâmetros de comprimento  $\lambda_u, \lambda_v$  e  $\lambda_w$ , a que denominaremos *comprimento de torção* e *comprimentos de flexão*, respectivamente, medem a importância dos efeitos das constantes de rigidez torsional e flexional quando comparados ao efeito da tração. Desempenham, como veremos mais adiante, papel fundamental no estudo da mecânica de linhas suspensas.

Note ainda que no caso em que  $\kappa_v = 0$ ;  $K_u = 0$ , a equação (3.13b) mostra que  $\kappa_u = \tau_0$ , constante, e assim, na ausência de cargas distribuídas,

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= Q_v \kappa_w \\ Q_v &= (B_w - B_u) \frac{d\kappa_w}{ds} \\ \kappa_u &= \tau_0 \\ B_w \frac{d^2 \kappa_w}{ds^2} + Q_w \tau_0 - T \kappa_w &= 0\end{aligned}$$

Se, além disso  $\kappa_w = \kappa_b = \chi_0$ , constante, que é, por exemplo, o caso de uma hélice cilíndrica de passo constante, naturalmente curva, teremos

$$\begin{aligned}T(s) &= T_0 \\ Q_v &= 0 \\ \kappa_u &= \tau_0 \\ Q_w \tau_0 &= T_0 \chi_0\end{aligned}$$

Este caso é extremamente importante na análise de distribuição de esforços nos tendões helicoidais de cabos umbilicais e tubos flexíveis (ver, p.ex., Witz & Tan, 1992a,b ou Pesce & Ramos, 1996) e mostra, de uma maneira simples, a inter-relação existente entre tração e curvatura. Adicionalmente, neste caso, de (3.11e),  $Q_w = -(B_w - B_u) \kappa_w \kappa_u = -(B_w - B_u) \chi_0 \tau_0$ , e portanto,  $(B_u - B_w) \tau_0^2 = T_0$ .



### 3.2.2 Ausência de momentos distribuídos

Referir-nos-emos agora a alguns casos particulares, assumindo, ainda, propriedades mecânicas de rigidez constantes. Objetivando tratar o caso plano, faz-se necessário, inicialmente, distinguir entre:

- (i) “ausência de momentos distribuídos” e
- (ii) “configuração plana plena” - i.e., sob carregamento plano.

Analisaremos, inicialmente, o caso particular em que não existam carregamentos associados a momentos distribuídos e aplicados ao longo da linha. Nesta situação,  $(K_u; K_v; K_w) = (0; 0; 0)$  e as equações de equilíbrio (3.13) ficam escritas,

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= Q_v \kappa_w - Q_w \kappa_v - f_u \\
 B_u \frac{d\kappa_u}{ds} - (B_v - B_w) \kappa_v \kappa_w &= 0 \\
 B_v \frac{d^2 \kappa_v}{ds^2} - (B_w - B_u) \frac{d}{ds} (\kappa_w \kappa_u) - T \kappa_v + Q_v \kappa_u + f_w &= 0 \\
 B_w \frac{d^2 \kappa_w}{ds^2} - (B_u - B_v) \frac{d}{ds} (\kappa_u \kappa_v) + Q_w \kappa_u - T \kappa_w - f_v &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Como anteriormente mencionado, se a seção da linha for simétrica, o que é o caso de tubos em geral, (mas pode, eventualmente, não ser verdadeiro para tubos flexíveis compostos), tem-se  $B_v = B_w = B_f$ , e segue de (3.17b) que a torção é uma constante, digamos  $\kappa_u = \tau_0$ . Nesta situação,

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= Q_v \kappa_w - Q_w \kappa_v - f_u \\
 \kappa_u &= \tau_0 \\
 B_f \frac{d^2 \kappa_v}{ds^2} - (B_f - B_u) \tau_0 \frac{d\kappa_w}{ds} - T \kappa_v + Q_v \tau_0 + f_w &= 0 \\
 B_f \frac{d^2 \kappa_w}{ds^2} - (B_u - B_f) \tau_0 \frac{d\kappa_v}{ds} + Q_w \tau_0 - T \kappa_w - f_v &= 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ainda para seções simétricas, uma condição necessária (porém não suficiente) para que a torção seja nula é o carregamento em torção, mesmo quando aplicado apenas às extremidades, ser nulo. Se a torção for nula, teremos,

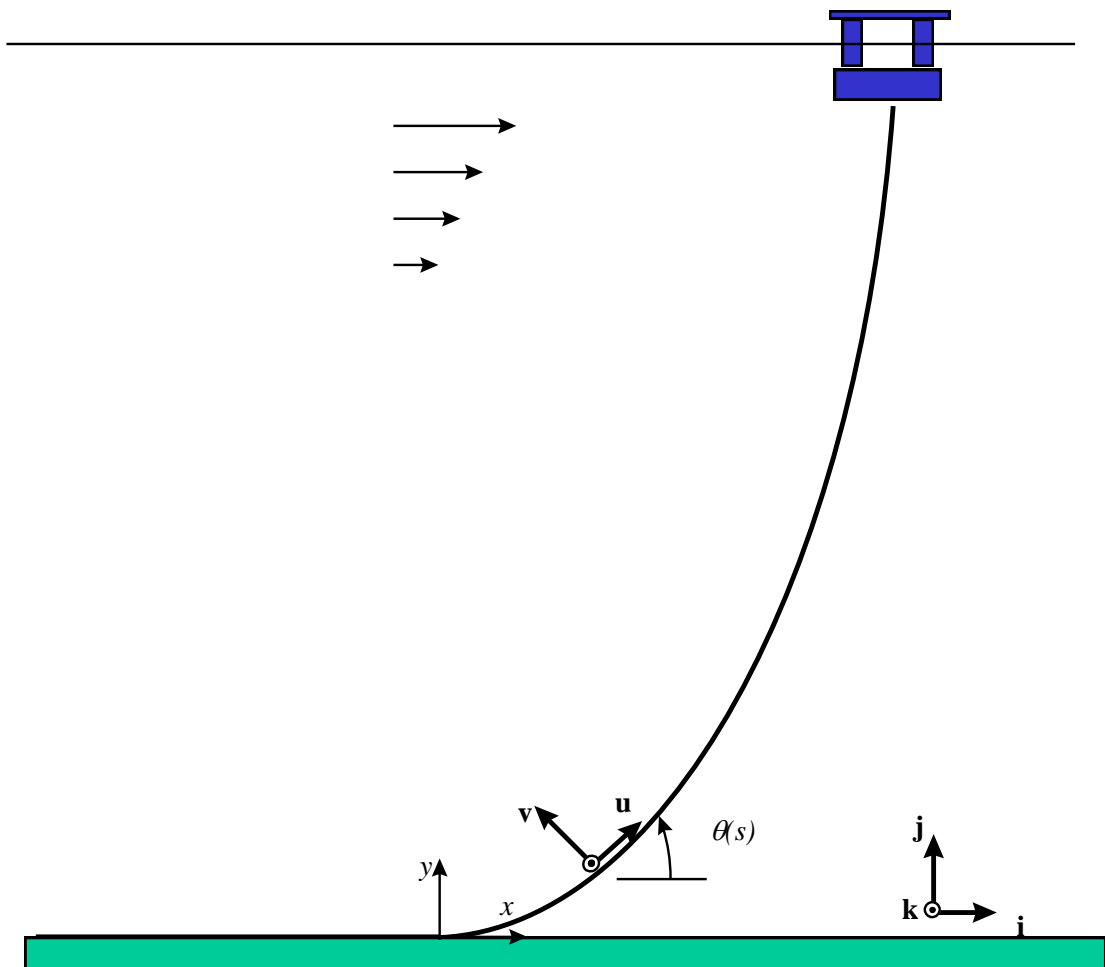
$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= Q_v \kappa_w - Q_w \kappa_v - f_u \\
 \kappa_u &= 0 \\
 B_f \frac{d^2 \kappa_v}{ds^2} - T \kappa_v + f_w &= 0 \\
 B_f \frac{d^2 \kappa_w}{ds^2} - T \kappa_w - f_v &= 0
 \end{aligned} \tag{3.19},$$

Embora relevante em algumas situações particulares, como por exemplo a análise de estabilidade flexo-torsional, o problema de torção será aqui abandonado.

### 3.3 CONFIGURAÇÃO PLANA SOB CARREGAMENTO PLANO

Este é um problema que desempenha papel especial no estudo da mecânica de linhas submersas, não apenas por se constituir em caso particular relativamente simples, mas sobretudo porque de sua análise mais extensiva é possível extrair um número bastante grande de informações e modelos comportamentais, tanto estático quanto dinâmicos.

Além disso, este caso, embora particular, representa de forma expressiva os fenômenos envolvidos, porquanto o principal carregamento, o “peso-imerso”, responsável não apenas pela configuração de equilíbrio, mas também pelos termos dominantes de restauração que governam a dinâmica da linha, age no plano vertical. A ele restringiremos os aspectos da análise que segue.



*Figura 3-5 Caso plano. Bases e sistemas de referência.*

O plano vertical considerado é representado por  $(x, y)$ , do sistema  $(x, y, z)$  de eixos coordenados cartesianos fixos, orientados pela base canônica  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , sendo  $\mathbf{k}$  o versor perpendicular ao plano e  $\mathbf{j}$  o versor que orienta a vertical, para cima. A origem

$O$ , é, usualmente, tomada como o ponto de contato com o fundo. Os eixos  $(u, v, w)$  orientados pela base  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  são locais, definidos para cada seção. O versor  $\mathbf{u}$  orienta a linha central e coincide portanto com o versor tangente  $\mathbf{t}$ . Se houver uma flexão em torno do versor  $\mathbf{k}$ , “positiva”, o versor normal  $\mathbf{n}$  coincidirá então com o versor  $\mathbf{v}$ , pois aponta sempre no sentido do centro de curvatura, e o versor bi-normal  $\mathbf{b}$  coincidirá com  $\mathbf{k}$ .

Considerando, ainda, como nulo o momento aplicado por unidade de comprimento, teremos então,

$$\begin{aligned}
 f_w &= f_b = 0 \\
 K_u &= K_t = 0 \\
 K_v &= K_n = 0 \\
 K_w &= K_b = 0 \\
 Q_v &= Q_n = Q(s) \\
 Q_w &= Q_b = 0 \\
 M_u &= M_t = 0 \\
 M_v &= M_n = 0 \\
 \kappa_u &= \kappa_t = 0 \\
 \kappa_v &= \kappa_n = 0 \\
 \kappa_w &= \kappa_b = \frac{d\theta}{ds} \\
 M_w &= M_b = M(s) = B\kappa = B \frac{d\theta}{ds}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde  $\theta(s)$  é o ângulo que a linha-central faz com a horizontal, ou seja o ângulo entre  $(\mathbf{t}, \mathbf{i})$  - ver também (3.6) com  $\psi = \phi = 0$ . Voltemos às equações (3.5) que sob (3.20) ficam reduzidas a

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} - Q \frac{d\theta}{ds} + f_t &= 0 \\ \frac{dQ}{ds} + T \frac{d\theta}{ds} + f_n &= 0 \\ B \frac{d^2\theta}{ds^2} + Q &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

É interessante separarmos as forças distribuídas em duas parcelas: a primeira, associada ao peso imerso<sup>30</sup>, a segunda às forças (constantes)<sup>31</sup> de natureza hidrodinâmicas devidas à ação da correnteza, cujo perfil é aqui (necessariamente) suposto no plano de estudo. Assim, sejam

$$\begin{aligned} f_v = f_n &= -q \cos \theta + h_n(s) \\ f_u = f_t &= -q \sin \theta + h_t(s) \end{aligned} \tag{3.22},$$

onde  $(t,n)$  indicam direções tangencial e normal,  $q$  é o “peso da linha imersa” por unidade de comprimento;  $h(s) = h(\theta(s))$  indica a força de natureza hidrodinâmica. Note que estas componentes de força dependem da configuração geométrica da linha, desconhecida *a priori*. O modelo usualmente adotado para representação desta força será discutido mais adiante.

É possível eliminar as forças de tração e de cisalhamento  $T(s)$  e  $Q(s) = Q_v(s) = Q_n(s)$  das equações (3.21) acima, resultando uma única equação diferencial ordinária não-linear e de segunda ordem em  $\theta(s)$ ; c.f. Love, art. 273<sup>A</sup>. O processo algébrico é algo tedioso. Deriva-se a equação de momento (3.21c) em relação a  $s$ , divide-se a equação resultante pela curvatura  $\chi(s) = d\theta/ds$ , derivando-a então novamente. Resulta

---

<sup>30</sup> (lembre que o efeito da pressão hidrostática já está devidamente considerado no conceito de tração efetiva)

$$B \frac{d}{ds} \left( \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \frac{d^3\theta}{ds^3} \right) + \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \frac{d^2Q}{ds^2} - \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-2} \frac{d\theta}{ds} \frac{dQ}{ds} = 0 \quad (\text{i}).$$

A equação (3.21b) se derivada leva, com o uso de (3.22) a,

$$\frac{d^2Q}{ds^2} = -T \frac{d^2\theta}{ds^2} - \frac{dT}{ds} \frac{d\theta}{ds} - q \operatorname{sen} \theta - \frac{dh_n}{ds} \quad (\text{ii}).$$

A equação (3.21c) fornece ainda

$$\frac{dQ}{ds} = -B \frac{d^3\theta}{ds^3} \quad (3.23).$$

Substituindo então (3.21c) em (3.21a), dela eliminando o termo  $-Q(s)$  em favor de  $B \frac{d^2\theta}{ds^2}$ , obtém-se,

$$\frac{dT}{ds} = -B \frac{d\theta}{ds} \frac{d^2\theta}{ds^2} + q \operatorname{sen} \theta - h_t(s) \quad (3.24).$$

Por outro lado, substituindo (3.23) em (3.21b) segue uma expressão para  $T(s)$  independente de  $Q(s)$ ,

$$T(s) = \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \left( B \frac{d^3\theta}{ds^3} + q \cos \theta - h_n(s) \right) \quad (3.25).$$

Com (3.24) e (3.25) em (ii) e substituindo a expressão então resultante, conjuntamente com (3.23), em (i) segue que,

---

<sup>31</sup> (forças periódicas associadas à emissão de vórtices não são consideradas, no problema estático)

$$\begin{aligned}
 & B \left\{ \frac{d}{ds} \left( \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \frac{d^3\theta}{ds^3} \right) + \frac{d\theta}{ds} \frac{d^2\theta}{ds^2} \right\} - q \left\{ 2 \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-2} \frac{d^2\theta}{ds^2} \right\} - \\
 & - \frac{d}{ds} \left( \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} h_n(\theta(s)) \right) + h_t(\theta(s)) = 0
 \end{aligned} \tag{iii}$$

Multiplicando-se agora (iii) por  $\cos \theta$ , adicionando e subtraindo o termo  $B \operatorname{sen} \theta d^3\theta/ds^3$  e integrando vem,

$$\begin{aligned}
 & B \left\{ \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \frac{d^3\theta}{ds^3} \cos \theta + \frac{d^2\theta}{ds^2} \operatorname{sen} \theta \right\} + q \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \cos^2 \theta - \\
 & - \left( \cos \theta \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} h_n(\theta(s)) + \int_s h_n \operatorname{sen} \theta d\xi \right) + \int_s h_t \cos \theta d\xi = T_0
 \end{aligned} \tag{iv}$$

onde foi imposto que  $T = T_0$  quando  $\theta(s) = 0; s = 0$ .

Multiplicando-se os termos da equação (iv) por  $(d\theta/ds)\sec^2 \theta$  e mais uma vez integrando, resulta, finalmente,

$$B \frac{d^2\theta}{ds^2} \sec \theta + qs - \int_s \left( h_n \sec \theta + \sec^2 \theta \left( \frac{d\theta}{ds} \right) \int_s (h_n \operatorname{sen} \theta - h_t \cos \theta) d\xi \right) ds = T_0 \tan \theta - Q_0 \tag{3.26}$$

A constante de integração emergente da última operação é a força cortante no ponto de contato com o solo e será nula, quando a rigidez flexional for nula - caso de cabo ideal - ou ainda se a derivada da curvatura for suposta nula, e compatibilizada com a condição que impera no fundo, onde a curvatura será identicamente nula se, por hipótese, o solo for suposto rígido. Esta discussão será retomada na seção 3.4. A equação (3.24) acima é uma equação diferencial ordinária não-linear e de segunda-ordem em  $\theta(s)$ , cuja solução depende do conhecimento das forças hidrodinâmicas, estas dependentes da própria configuração de equilíbrio. Esta não-linearidade, do tipo

geométrica, impede que, em geral, a solução analítica possa ser obtida. Voltaremos a analisar este problema após o item seguinte que trata de uma situação bastante particular, mas de essencial importância, podendo ser denominada *fundamental*.

### 3.3.1 O problema da catenária

Caso as forças hidrodinâmicas associadas à ação da correnteza sejam nulas, (3.26) reduz-se a

$$B \frac{d^2\theta}{ds^2} \sec \theta + qs = T_0 \tan \theta - Q_0 \quad (3.27),$$

que pode ser escrita na forma adimensional

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{L^2} \frac{d^2\theta}{d\hat{s}^2} \sec \theta + \hat{q}\hat{s} &= \tan \theta + \hat{Q}_0 \\ \lambda^2 &= \frac{B}{T_0} \end{aligned} \quad (3.28),$$

mostrando, mais uma vez o parâmetro  $\lambda$ , que mede a importância relativa da rigidez flexional quando comparada à rigidez geométrica, esta associada à tração. Voltaremos a este ponto específico mais adiante. Por ora o efeito da rigidez flexional será considerado desprezível face à rigidez geométrica, ou seja, tomaremos  $(\lambda/L)^2 \ll 1$  na equação (3.27), ou em sua forma adimensional, transformando-a na clássica equação de catenária. Nesta situação,  $Q_0 \equiv 0$ . De fato, teremos

$$\tan \theta_c(s_c) = \frac{qs_c}{T_{0c}} \quad (3.29),$$

que, se derivada em relação a  $s$ , conduz à equação de curvatura de uma catenária,



$$\chi_c(s_c) = \frac{d\theta_c}{ds_c} = \frac{q}{T_{0c}} \cos^2 \theta_c(s_c) = \frac{q}{T_{0c}} \frac{1}{1 + \left(\frac{qs_c}{T_{0c}}\right)^2} \quad (3.30).$$

$$\rho_c(s_c) = \frac{T_{0c}}{q} \sec^2 \theta_c(s_c) = \frac{T_{0c}}{q} \left(1 + \left(\frac{qs_c}{T_{0c}}\right)^2\right)$$

De (3.25), desconsiderando os termos de rigidez flexional e supondo a ausência de carregamento hidrodinâmico,

$$\frac{dT_c}{ds_c} = q \sen \theta_c \quad (3.31)$$

e, portanto a tração efetiva, na solução de catenária, fica escrita,

$$T_c(s_c) = T_{0c} \sec \theta_c \quad (3.32),$$

que leva ao conhecido resultado relativo à invariância da componente horizontal da tração,

$$T_x = T_c(s_c) \cos \theta_c = T_{0c}; \text{ constante} \quad (3.33a).$$

Posto ainda que a componente vertical da tração é dada por (ver 3.25 e 3.28),

$$T_y = T_c(s_c) \sen \theta_c = T_{0c} \tan \theta_c = qs_c \quad (3.33b),$$

e que, de (3.30) e (3.31),

$$\frac{d}{ds_c} (T_c(s_c) \sen \theta_c) = \frac{dT_c}{ds_c} \sen \theta_c + T_c(s_c) \cos \theta_c \frac{d\theta_c}{ds_c} = q \sen^2 \theta_c + q \cos^2 \theta_c = q$$

(i)

e tendo em vista as relações geométricas gerais,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos \theta \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \theta \\ \frac{dy}{dx} &= \tan \theta\end{aligned}\tag{ii}$$

segue,

$$\frac{d^2 y_c}{dx_c^2} - \frac{q}{T_{0c}} \left( 1 + \left( \frac{dy_c}{dx_c} \right)^2 \right)^{1/2} = 0\tag{3.34},$$

célebre equação diferencial que rege a “catenária”, cuja solução exata é,

$$y_c(x) = \frac{T_{0c}}{q} \cosh\left(\frac{q}{T_0} x_c + C_1\right) + C_2\tag{3.35}.$$

$C_1, C_2$  são constantes de integração a serem determinadas para um dado par de condições de contorno.

Particular, de interesse central ao presente trabalho, é o caso em que existe um ponto de tangência no fundo (TDP, ou “touch down point”), tal que  $y_c = dy_c/dx_c = 0$  em  $x_c = 0$ . Temos então,

$$y_c(x) = \frac{T_{0c}}{q} \left\{ \cosh\left(\frac{q}{T_0} x_c\right) - 1 \right\}\tag{3.36}.$$

Por outro lado, de (3.33ab),

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos \theta = \frac{T_0}{T_c(s)} = \frac{T_0}{(T_0^2 + (qs)^2)^{1/2}} \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \theta = \frac{qs}{T_c(s)} = \frac{qs}{(T_0^2 + (qs)^2)^{1/2}}\end{aligned}\quad (3.37),$$

que integrada com  $x_c(0) = y_c(0) = 0$ , fornece as equações paramétricas da catenária,

$$\begin{aligned}x_c(s) &= \frac{T_{0c}}{q} \operatorname{arcsenh} \left( \frac{qs_c}{T_0} \right) \\ y_c(s) &= \frac{T_{0c}}{q} \left( \left( 1 + \left( \frac{qs_c}{T_{0c}} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right)\end{aligned}\quad (3.38).$$

Note ainda, de (3.30), que a curvatura no TDP ( $s_c = 0$ ) é dada por

$$\chi_c(0) = \chi_{0c} = \frac{q}{T_{0c}} \quad (3.39)$$

de tal forma que (3.30) será algumas vezes referida na forma,

$$\chi_c(s) = \chi_{0c} \cos^2 \theta_c(s_c) = \chi_{0c} \frac{1}{1 + (\chi_{0c}s_c)^2} \quad (3.40).$$

Um resultado imediato e que será repetidamente utilizado, quando da discussão da variação local da curvatura junto ao TDP, é que, com erro quadrático de ordem  $(\chi_{0c}s_c)^2$ , vale

$$\chi_c(s) \cong \chi_{0c} \left( 1 - (\chi_{0c}s_c)^2 \right); \quad \chi_{0c}s_c \ll 1 \quad (3.41).$$

Um outro detalhe, que deve ser observado no caso de linha com parte assentada sobre o fundo, é a descontinuidade, no TDP, da função de curvatura obtida a partir de  $\chi_c(s_c)$ , posto que à esquerda ( $s_c \leq 0$ ), a função curvatura é nula, por definição. Assim a função de curvatura neste caso será dada por

$$\chi(s_c) = H(s)\chi_c(s_c) \quad (3.42),$$

onde  $H(\cdot)$  é a *função ressalto unitário* ou *função de Heaviside*. Veremos que o efeito da rigidez flexional é de caráter local, e sua função é remover esta descontinuidade, permitindo que haja uma transição suave entre a curvatura nula e a função de curvatura dominada à direita por  $\chi_c(s_c)$ , de forma que as condições de contorno  $\chi = \frac{d\chi}{ds} = 0$ ; no TDP, perdidas quando a rigidez flexional é desconsiderada, possam ser re-estabelecidas. Note que a primeira destas condições corresponde a impor-se como nulo o momento fletor, enquanto a segunda refere-se a anular-se a força cortante no ponto de tangência com o fundo. As figuras abaixo, ilustram as funções adimensionais,  $y_c/H$ ;  $T_c(s_c/H)/T_{0c}$ ;  $T_c(s_c/H)/qH$ ;  $\theta_c(s_c/H)$ ;  $\chi_c(s_c/H)/\chi_{c0}$ .

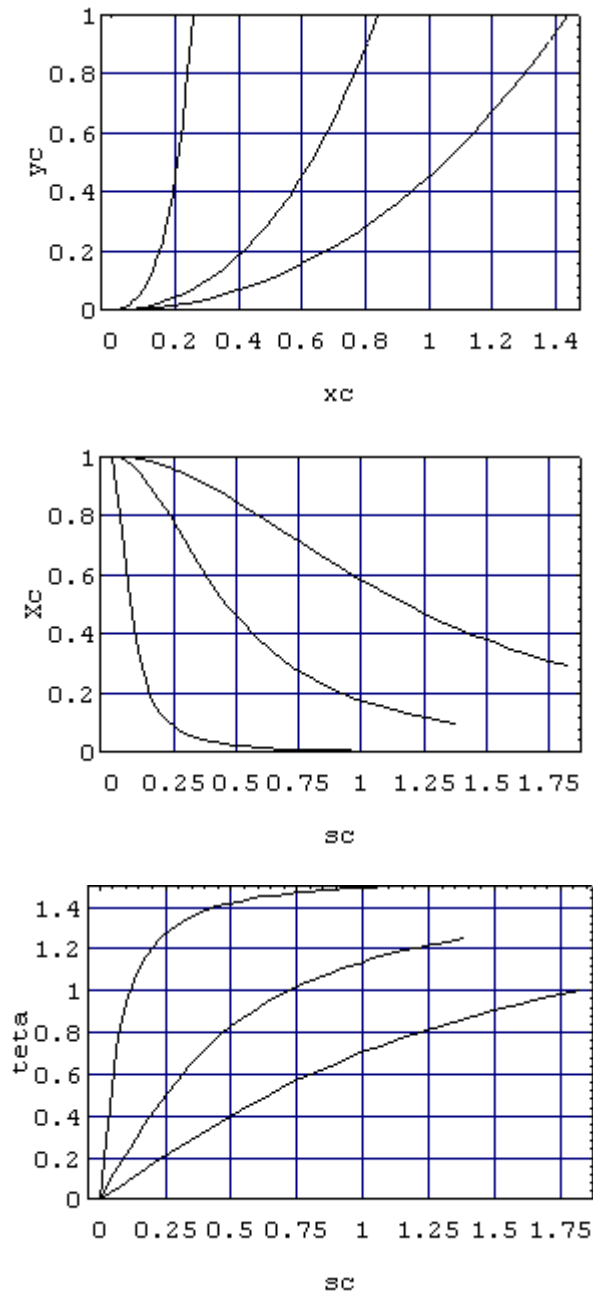
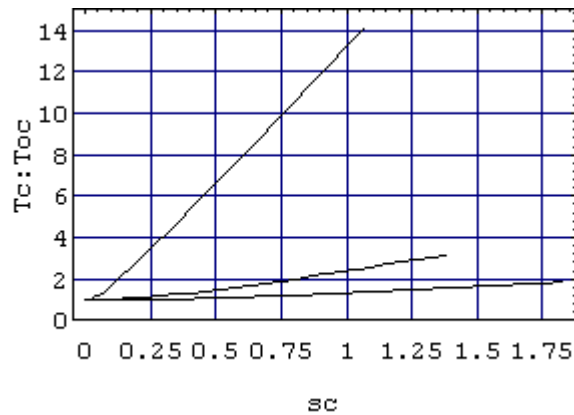
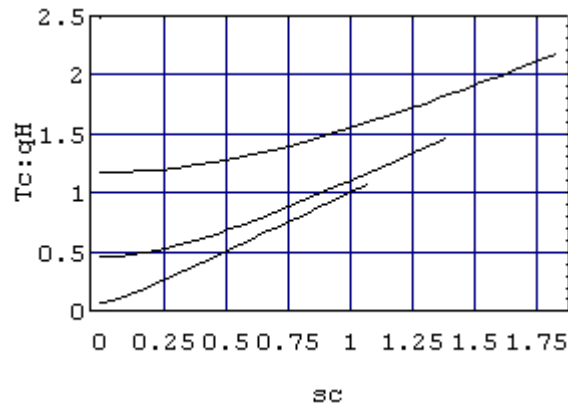


Figura 3-6 Geometria,  $\frac{y_c}{H} \times \frac{x_c}{H}$ , curvatura  $\chi_c(s_c/H)/\chi_{0c}$  e ângulo  $\theta(s_c/H)$ , para três diferentes ângulos  $\theta_{cL} = 1.0; 1.25; 1.5 \text{ rad}$ , no topo.



(a)



(b)

**Figura 3-7 Tração adimensional ao longo da linha: (a)  $T_c(s_c/H)/T_{0c}$ ; (b)  $T_c(s_c/H)/qH$ , para três diferentes ângulos no topo,  $\theta_{cL} = 1.0; 1.25; 1.5 \text{ rad}$ ; em (a) a curva superior correspondente ao maior ângulo; o inverso em (b).**

Notáveis são os fatos de a tração ser quase-linear com a coordenada ao longo da linha<sup>32</sup> e a curvatura decrescer de forma cada vez mais abrupta, ambos à medida que o ângulo no topo se aproxima de  $\pi/2$ .

Na solução de catenária, podemos finalmente escrever para o comprimento suspenso,

<sup>32</sup> Esta particularidade permite resolver assintoticamente o problema de auto-valor associado, escrevendo a equação auto-adjunta do problema de Sturm-Liouville como uma equação de Bessel modificada.

$$L_c = \frac{T_{0c}}{q} \tan \theta_c^t \quad (3.43a).$$

$$H = \int_0^H dy_c = \frac{T_{0c}}{q} \int_0^{\theta_c^t} \text{sen } \theta_c \sec^2 \theta_c d\theta_c = \frac{T_{0c}}{q} (\sec \theta_c^t - 1) \quad (3.43b),$$

de tal forma que,

$$\begin{aligned} \cos \theta_c^t &= \left( \frac{qH}{T_{0c}} + 1 \right)^{-1} \\ \text{sen } \theta_c^t &= \left( \left( 1 + \frac{qH}{T_{0c}} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \left( \frac{qH}{T_{0c}} + 1 \right)^{-1} \\ L_c &= \frac{T_{0c}}{q} \left( \left( 1 + \frac{qH}{T_{0c}} \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.43c).$$

Observamos, por fim, que as relações geométricas (ii) acima tem implícita a condição de inextensibilidade da linha, fazendo com que as equações (3.34-36) estejam restritas a esta hipótese. As demais soluções, no entanto, são gerais, no que se refere à extensibilidade.

Caso consideremos a extensibilidade da linha, com  $l$  designando a coordenada curvilínea na condição indeformada, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dl} &= (1 + \varepsilon) \\
 \frac{dx}{dl} &= \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dl} = (1 + \varepsilon) \cos \theta \\
 \frac{dy}{dl} &= \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dl} = (1 + \varepsilon) \sin \theta \\
 \varepsilon(s(l)) &= f(T(s(l)); y(s(l)); \mu_k)
 \end{aligned}
 \tag{3.44a},$$

onde a última equação indica uma relação constitutiva entre deformação axial, tração efetiva e pressão hidrostática (através da cota), e onde  $\mu_k$  indicam parâmetros descritivos das propriedades geométricas, construtivas e dos materiais que compõem a linha. Esta relação deve ser estabelecida com base na Teoria da Elasticidade, na geometria da linha (se cabo ou tubo) e nas características dos materiais que a compõem. Se o caso em estudo for de um tubo flexível ou cabo umbilical, por exemplo, uma 'matriz de rigidez' deve ser construída (ou medida) de forma apropriada; ver por exemplo Knapp, 1979. Se o caso tratado for, por exemplo, de um tubo de aço (isotrópico) de pequena espessura quando comparado ao raio e se as relações forem linearizadas de tal sorte a desprezar a variação geométrica da seção, e se a pressão for considerada uniforme ao longo de uma dada seção, pode-se mostrar da teoria da Elasticidade que a relação constitutiva correspondente será dada por

$$\varepsilon(s(l)) \cong \frac{1}{E} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \left( \frac{T(s(l))}{2\pi R t} - \frac{1}{2} \frac{R}{t} g(H - y(s(l))) (\rho_a - \rho_f) \right)$$

onde  $R$  é o raio externo da seção e  $t$  a espessura da parede e  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $\rho_f$  a densidade do fluido interno. No caso simples, de linha emersa, em que a tração efetiva corresponde à própria tração solicitante, as equações paramétricas da "catenária distendida", obtidas de forma análoga, serão dadas por; ver Martins, 1995, p.ex.,



$$\begin{aligned}x(l) &= \varepsilon_0 l + \frac{T_0}{q} \operatorname{arcsenh} \left( \frac{ql}{T_0} \right) \\y(l) &= \frac{1}{2} \frac{ql}{T_0} \varepsilon_0 l + \frac{T_0}{q} \left( \left( 1 + \left( \frac{ql}{T_0} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right) \\ \varepsilon_0 &= \frac{T_0}{EA}\end{aligned} \tag{3.44b}$$

Como pode ser observado, o efeito da extensibilidade será desprezível, em geral, ao menos no que tange à determinação da configuração de equilíbrio da elástica. Esta constatação é corroborada por diversos autores, conforme Patel & Seyed, 1995. É evidente que à medida que a rigidez axial decresce, cresce a importância da extensibilidade.

### 3.3.2 O problema plano sob ação de correnteza no plano

Voltaremos agora a discutir a questão do carregamento hidrodinâmico associado à ação da correnteza, suposta agindo paralela ao plano vertical que contém os pontos extremos da linha. Como vimos a equação diferencial que rege o problema plano é dada por (3.26) e aqui repetida por conveniência,

$$B \frac{d^2 \theta}{ds^2} \sec \theta + qs - \int_s \left( h_n \sec \theta + \sec^2 \theta \left( \frac{d\theta}{ds} \right) \int_s (h_n \sin \theta - h_t \cos \theta) d\xi \right) ds = T_0 \tan \theta - Q_0 \quad (3.26)*.$$

#### 3.3.2.1 Carregamento hidrodinâmico associado à correnteza

Cabe-nos discutir inicialmente, ainda que de forma superficial, o modelo adotado para as forças de natureza hidrodinâmica, associadas à correnteza. Lembramos que como tratamos do problema estático, forças dinâmicas associadas ao fenômeno de emissão de vórtices alternados, não serão por ora considerados<sup>33</sup>.

Os modelos usualmente encontrados na literatura e que estabelecem as forças de arrasto da linha quando submetida a um campo (perfil) de velocidades em seu plano, são quadráticos na velocidade. Quando a linha é perpendicular ao vetor de velocidade local a força hidrodinâmica por unidade de comprimento é dada pela clássica expressão,

$$h_D = \frac{1}{2} C_D \rho_a D U^2 \quad (3.45),$$

<sup>33</sup> (muito embora eventual vibração sincronizada induzida por este fenômeno possa vir a alterar os coeficientes “estáticos” de arrasto, na medida em que o escoamento local se modifica)

onde  $D$  é o diâmetro externo da linha e  $C_D$  é o coeficiente de arrasto da seção, dependente do número de Reynolds e do estado da superfície do tubo. Nesta situação a força tangencial por unidade de comprimento é, obviamente, nula. Quando a linha é paralela ao vetor de velocidade local, no entanto, o oposto ocorre, sendo a força tangencial de arrasto hidrodinâmico dada por expressão análoga a (3.45),

$$h_T = \frac{1}{2} C_T \rho_a D U^2 \quad (3.46)$$

com  $C_T = \frac{1}{\pi} C_f$ , onde  $C_f$  é o célebre coeficiente de arrasto de “placa plana”, dependente do regime de escoamento, se laminar ou turbulento, e do estado da superfície; ver por exemplo, White, página 261 . Usualmente, em regimes de escoamento de transição entre o laminar e o turbulento, tais que  $R_e \approx 10^5$ , teremos  $C_f \cong 3 \times 10^{-3}$ , de tal forma que  $C_T \cong 10^{-3}$ , valor bastante baixo, se comparado ao coeficiente de arrasto  $C_D \cong 1.0$ .

Quando a linha (tubo) é oblíqua ao campo de escoamento, no entanto, tem sido usual na literatura especializada considerar a decomposição do vetor velocidade segundo as direções normal e tangencial, calculando então as componentes de força de arrasto correspondentes de acordo com a aplicação de (3.45) e (3.46). Explicitamente, lembrando que, no caso plano,

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{n} &= (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \frac{\chi(s)}{|\chi(s)|} \\ \mathbf{b} &= \frac{\chi(s)}{|\chi(s)|} \mathbf{k} \\ \chi(s) &= \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \quad (3.47),$$

sejam  $\mathbf{U}(s) = U(s)\mathbf{i}$ , o vetor local de velocidade, do campo considerado, conforme mostra a Figura 3-8, e sejam portanto

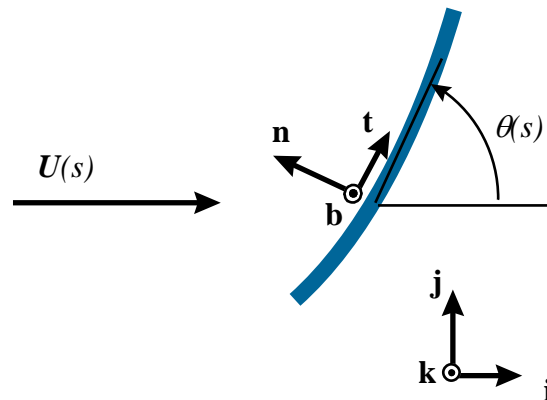


Figura 3-8 Ação de correnteza no plano da linha e definições

$$U_n(s) = \mathbf{U}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = U(s)\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}(s) = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k})U(s) \operatorname{sen} \theta(s) = -\frac{\chi(s)}{|\chi(s)|} U(s) \operatorname{sen} \theta(s)$$

$$U_t(s) = \mathbf{U}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = U(s)\mathbf{i} \cdot \mathbf{t}(s) = U(s) \cos \theta(s)$$

(3.48),

as componentes do vetor local de velocidade da correnteza nas direções normal e tangencial da linha considerada. Note que o produto escalar entre os versores binormal  $\mathbf{b}$  e o versor  $\mathbf{k}$  que orienta o eixo  $z$ , perpendicular ao plano da linha, compatibiliza o sinal com o sentido do versor normal  $\mathbf{n}$ , ou seja com a curvatura. De

fato, no caso plano,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = \chi(s)/|\chi(s)|$ . As componentes da força de arrasto nestas direções são então, em geral, calculadas a partir de (3.48) em (3.45) e (3.46), na forma

$$\begin{aligned} h_n(s) &= -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) \frac{1}{2} C_D \rho_a D U_n |U_n| = -\frac{1}{2} C_D \rho_a D \frac{\chi(s)}{|\chi(s)|} U(s) |U(s)| \text{sen}^2 \theta(s) \\ h_t(s) &= \frac{1}{2} C_T \rho_a D U_t |U_t| = \frac{1}{2} C_T \rho_a D U(s) |U(s)| \text{cos}^2 \theta(s) \end{aligned} \quad (3.49),$$

As expressões acima são gerais para o caso plano, com uma singularidade, no entanto: *em pontos de inflexão da linha*, ou seja quando  $\chi(s) = 0$ . Nesta situação peculiar, porém comum, o versor normal, e portanto o versor bi-normal, perdem a definição. Quando isso ocorrer, no entanto, e com o fim unicamente de completude definiremos,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= -\text{sen } \theta \mathbf{i} + \text{cos } \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{k} \\ &\text{quando } \chi(s) = 0 \end{aligned} \quad (3.50),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} h_n(s) &= -\frac{1}{2} C_D \rho_a D U(s) |U(s)| \text{sen}^2 \theta(s) \\ \chi(s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50a).$$

Este modelo de forças de arrasto tem resultante por unidade de comprimento, ao longo da linha, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(s) &= \frac{1}{2} \rho_a D U(s) |U(s)| \left( C_T \text{cos}^2 \theta(s) \mathbf{t} - \text{sinal}(\chi(s)) C_D \text{sen}^2 \theta(s) \mathbf{n} \right) \\ \text{sinal}(\chi) &= \begin{cases} -1; \chi < 0 \\ 1; \chi \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.51).$$

Na base fixa  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ,  $\mathbf{h}(s)$  fica escrita,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(s) &= \frac{1}{2} \rho_a D U(s) |U(s)| \left( \begin{aligned} & \left( C_T \cos^3 \theta(s) + C_D \sin^3 \theta(s) \right) \mathbf{i} + \\ & + \sin \theta \cos \theta \left( C_T \cos \theta(s) - C_D \sin \theta(s) \right) \mathbf{j} \end{aligned} \right) = \\ &= h_x \mathbf{i} + h_y \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.52),$$

o que mostra claramente que, segundo este modelo usual, a força hidrodinâmica por unidade de comprimento não terá, em geral, a direção da correnteza, orientada pelo versor  $\mathbf{i}$ . Apenas em três situações,

- (i)  $\frac{C_T}{C_D} = \tan \theta$ ;
- (ii)  $\theta = 0$ ,
- (iii)  $\theta = \pi/2$

a resultante da força hidrodinâmica terá a própria direção da correnteza<sup>34</sup>. As expressões (3.51) são claramente consistentes à realidade física nas situações (ii) e (iii), quando então, a componente normal (ii) ou a componente tangencial (iii) se anulam, excludentemente, e as leis quadráticas que regem a magnitude destas forças são recuperadas.

Este modelo, *embora usualmente aceito*, poderia ser questionado, no entanto. O principal foco de argumentação diz respeito, justamente, à direção da força resultante. Se admitirmos que esta resultante tenha a direção da correnteza, inexistindo assim forças de sustentação, por definição perpendicular à velocidade, o procedimento mais natural seria a decomposição desta força, e não da velocidade. Este modelo continua a preservar a hipótese que considera que o campo plano de escoamento não sofre desvio na direção vertical, ou seja os vetores de velocidade continuem horizontais. No entanto, equivale a considerar as seções (quase) elípticas, traços da superfície (na realidade toroidal) da linha com o plano horizontal, como as seções hidrodinâmicas

<sup>34</sup> Note que (ii) (iii) são mutuamente excludentes.

que oferecem resistência ao escoamento. Sob este modelo, a força hidrodinâmica decorrente da ação da correnteza seria sempre horizontal, e quadrática na velocidade, porém proporcional a um certo coeficiente de arrasto  $\check{C}(\theta)$  da seção quase-elíptica, correspondente à coordenada  $s$  medida ao longo da linha. Segundo este modelo, poderíamos então escrever,

$$\check{\mathbf{h}}(s) = \check{h} \mathbf{i} = \frac{1}{2} \check{C}(\theta(s)) \rho_a D U(s) |U(s)| \mathbf{i} \quad (3.53),$$

de tal sorte que, as componentes normal e tangencial seriam dadas por,

$$\begin{aligned} \check{h}_n &= -\text{sinal}(\chi(s)) \frac{1}{2} \check{C}(\theta(s)) \rho_a D U(s) |U(s)| \text{sen } \theta(s) \\ \check{h}_t &= \frac{1}{2} \check{C}(\theta(s)) \rho_a D U(s) |U(s)| \text{cos } \theta(s) \end{aligned} \quad (3.54).$$

Poderíamos então definir os coeficientes normal e tangencial

$$\begin{aligned} \check{C}_n(\theta) &= \check{C}(\theta) \text{sen } \theta \\ \check{C}_t(\theta) &= \check{C}(\theta) \text{cos } \theta \end{aligned} \quad (3.55),$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \check{h}_n &= -\text{sinal}(\chi(s)) \frac{1}{2} \check{C}_n(\theta(s)) \rho_a D U(s) |U(s)| \\ \check{h}_t &= \frac{1}{2} \check{C}_t(\theta(s)) \rho_a D U(s) |U(s)| \end{aligned} \quad (3.56).$$

A identidade deste modelo com o anterior, convencional, não é possível em geral. De fato, igualando-se termo a termo as equações (3.51) e (3.54) segue que,

$$\begin{aligned} C_T \cos \theta &= \check{C}(\theta) \\ C_D \sin \theta &= \check{C}(\theta) \end{aligned} \quad (*)$$

A equação (\*) acima apresenta solução para os dois limites correspondentes às condições excludentes (ii) e (iii),  $\theta = 0; \theta = \pi/2$ , levando a  $\check{C}(0) = C_T; \check{C}(\pi/2) = C_D$ . No entanto, apenas admite solução para um valor particular de  $\theta$  diferente de 0 ou de  $\pi/2$ , quando  $\frac{C_T}{C_D} = \tan \theta^*$ , ou seja quando a condição (i), anteriormente discutida, for satisfeita. Em outras palavras, os modelos serão equivalentes apenas nesta situações muito particulares.

É da opinião do presente autor que nenhum destes modelos é plenamente satisfatório. O primeiro, convencionado como correto, porque subjacente à decomposição do vetor velocidade está admitir que o escoamento possa ser decomposto em dois escoamentos planos, nas direções tangencial e normal, sem que qualquer discussão a respeito de como a interação tridimensional que por certo ocorreria, seja realizada<sup>35</sup>. Vale frizar, embora óbvio, que este primeiro modelo apresenta boa aderência experimental para ângulos de ataque muito próximos de 0, ou não tão distantes de  $\pi/2$ . O segundo porque não considera qualquer efeito tridimensional de deflexão do campo local de escoamento que possa ocorrer devido a interação com a linha. É bem verdade que este efeito será reduzido nas duas situações-limite acima mencionadas, tendendo a se pronunciar em ângulos de ataque intermediários<sup>36</sup>.

---

<sup>35</sup> Para o caso de curvatura nula este modelo é consistente posto que, a partir da hipótese de invariância do escoamento com a coordenada axial da linha, é possível mostrar que o campo de velocidades, regido pela equação de Navier-Stokes, pode ser decomposto em um escoamento transversal, que satisfaz a equação de Navier-Stokes bidimensional associada e em um escoamento axial, do primeiro independente.

<sup>36</sup> Lembre que o fenômeno de emissão de vórtices sequer tem sido abordado. Se em pauta, a tridimensionalidade do escoamento, quando então ocorre interação ao longo da linha, que em



Esta discussão é inconclusiva, portanto, ao menos dentro do escopo do presente trabalho. A adoção do modelo convencional decorre assim naturalmente, embora sob as observações acima elaboradas.

### 3.3.2.2 *Equacionamento e análise assintótica do problema plano com correnteza no plano*

Voltamos então à equação (3.26), assumindo que as forças hidrodinâmicas sejam modeladas pela equação (3.51) (ou (3.49)). O primeiro termo dependente das forças hidrodinâmicas em (3.26) e que comparece como uma integral, fica então escrito na forma,

$$-\int_s h_n \sec \theta ds = \frac{1}{2} C_D \rho_a D \int_s \text{sinal}(\chi(s)) U(s) |U(s)| \text{sen } \theta \tan \theta(s) ds \quad (3.57)$$

enquanto o segundo termo fica,

$$\begin{aligned} & -\int_s \sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} \int_s (h_n \text{sen } \theta - h_t \cos \theta) d\xi ds = \\ & = \frac{1}{2} \rho_a D \int_s \sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} \int_s U(\xi) |U(\xi)| (\text{sinal}(\chi(\xi)) C_D \text{sen}^3 \theta(\xi) + C_T \cos^3 \theta(\xi)) d\xi ds \end{aligned} \quad (3.58).$$

Para perfis de correnteza genéricos, muito embora planos, as integrais acima não podem em geral ser determinadas analiticamente. Há a necessidade, portanto, do

---

escoamentos em baixos números de Reynolds é regido pela equação de Ginsburg-Landau (Lewewke, 1994), seria um ponto a ser examinado.

emprego de métodos numéricos para a solução da equação diferencial ordinária (3.26), a qual deve ser determinada de forma iterativa, porquanto as integrais das forças hidrodinâmicas são função da própria solução. A solução básica, de partida, no processo iterativo é, obviamente, a solução de catenária.

No caso particular, em que o perfil de correnteza é constante, com  $U(y) = U_0 > 0$ , por exemplo, os termos dados nas equações (3.57,8) ficam simplificados à forma,

$$-\int_s h_n \sec \theta ds = \frac{1}{2} C_D \rho_a D U_0^2 \int_s \sin \theta \tan \theta ds \quad (3.59)$$

e

$$\begin{aligned} & -\int_s \sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} \int_s (h_n \sin \theta - h_t \cos \theta) d\xi ds = \\ & = \frac{1}{2} \rho_a D U_0^2 \int_s \sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} \int_s (C_D \sin^3 \theta(\xi) + C_T \cos^3 \theta(\xi)) d\xi ds \end{aligned} \quad (3.60).$$

Por conseguinte, a equação de equilíbrio fica,

$$\begin{aligned} & B \frac{d^2 \theta}{ds^2} \sec \theta + qs - T_0 \tan \theta + \\ & + \frac{1}{2} \rho_a D U_0^2 \left( C_D \int_s \sin \theta \tan \theta ds + \int_s \sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} \int_s (C_D \sin^3 \theta(\xi) + C_T \cos^3 \theta(\xi)) d\xi ds \right) = -Q_0 \end{aligned} \quad (3.61).$$

A equação de equilíbrio pode ser resolvida numericamente, através de um processo iterativo. Neste caso particular podemos analisar uma equação aproximada que rege o problema tendo por base a solução de catenária pura associada. Inicialmente reconhecemos que se  $(\lambda/L)^2 = B/(T_0 L^2) \ll 1$ , o efeito da rigidez flexional não é dominante, em geral, a não ser em pequenas regiões de comprimento de ordem  $\lambda$ ,

próximas às extremidades. Este ponto será discutido de forma bastante rigorosa na seção a seguir.

Assim, a equação (3.61) que rege o equilíbrio da linha sob perfil constante de correnteza pode, com erro de ordem  $(\lambda/L)^2$ , ser escrita ( $Q_0 \equiv 0$ ),

$$T_0 \tan \theta + \frac{1}{2} \rho_a D U_0^2 \left( C_D \int_s \sin \theta \tan \theta ds + \int_s \sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} \int_s (C_D \sin^3 \theta(\xi) + C_T \cos^3 \theta(\xi)) d\xi ds \right) = qs \quad (3.62).$$

Derivando a expressão acima em relação à coordenada curvilínea  $s$ , medida a partir do ponto de tangência com o fundo, onde  $\theta = 0$ , segue que

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} (T_0 - F_x(s)) = q + \alpha C_D \sin \theta \tan \theta \quad (3.63),$$

onde  $F_x(s)$  é a componente horizontal da resultante das forças hidrodinâmicas integradas até a coordenada  $s$ , tal que  $\mathbf{F}_h(s) = F_x \mathbf{i} - F_y \mathbf{j}$ , (ver (3.52)), e onde definimos  $\alpha = \frac{1}{2} \rho_a D U_0^2$ , como o parâmetro relacionado à força proporcionada pela correnteza. Portanto, a curvatura da linha (infinitamente flexível) sob carregamento hidrodinâmico é dada por,

$$\frac{d\theta}{ds} = \cos^2 \theta \left\{ \frac{q + \alpha C_D \sin \theta \tan \theta}{(T_0 - F_x(s))} \right\} \quad (3.64).$$

A curvatura no ponto de tangência será então,

$$\chi_0 = \left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s=0} = \frac{q}{T_0} \quad (3.65),$$

*expressão geral e exata, no contexto da teoria de cabos.* Note que o efeito da correnteza está implícito na tração  $T_0 = T(0)$ , calculada no ponto de tangência. O caso particular de catenária, na ausência de correnteza, é prontamente recuperado, bastando que seja imposto  $\alpha = 0$  e, correspondentemente,  $T_0 = T_{0c}$ . Se a tração  $T_0 = T(0)$  puder ser avaliada, a expressão (3.65) permite determinar, de forma aproximada, a curvatura da linha no ponto de tangência, portanto.

Suponhamos agora que a solução da equação (3.63) possa ser escrita, a partir da solução exata de catenária, como

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta_c(s) + \gamma(s) \\ T(s) &= T_c(s) + \delta T(s) \\ T_0 &= T_{0c} + \delta T_0 \end{aligned} \quad (3.66),$$

onde  $\gamma(s); \delta T(s)$  caracterizam uma perturbação, eventualmente não muito pequena da solução original de catenária.  $\delta T_0$  é o acréscimo de tração (horizontal) no novo ponto de tangência com o solo. Note que, necessariamente,  $\theta_c(s) \equiv 0, s \leq s^*$ , onde  $s^*$  define a seção correspondente ao ponto de tangência de catenária. É evidente que esta análise apenas tem validade quando o efeito da correnteza for relativamente pequeno, comparado ao efeito do peso imerso, ou seja, quando  $\left( \frac{1}{2} \rho_a C_D D U^2 \right) / q \ll 1$ , o que nem sempre é aplicável, mormente se a linha for muito leve. Para fins de avaliação, um gasoduto de aço, com diâmetro externo  $D=0.219\text{m}$ , e peso imerso por unidade de comprimento de  $q=648.6\text{N/m}$ , apresentaria  $\left( \frac{1}{2} \rho_a C_D D \right) / (q U^2) = 0.19 / (\text{m}^2 / \text{s}^2)$ . Ou seja, se a velocidade da correnteza fosse de  $0.5 \text{ m/s}$ , valor típico para correntezas

oceânicas fortes na Bacia de Campos, o coeficiente seria da ordem 0.05, valor relativamente baixo.

A curvatura no ponto de tangência fica então escrita,

$$\chi_0 = \frac{q}{T_{0c}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\delta T_0}{T_{0c}}} \right) = \chi_{0c} \left( \frac{1}{1 + \frac{\delta T_0}{T_{0c}}} \right) \quad (3.67),$$

que estabelece uma redução do valor da curvatura, relativamente àquela correspondente à catenária pura, que é inversamente proporcional ao acréscimo ocorrido na tração. Seja  $\gamma^* = \gamma(s^*)$  a variação de ângulo com a horizontal calculada na seção  $s^*$ . De razões puramente geométricas, segue que

$$s^* \cong \rho_0 \gamma^* \quad (3.68),$$

onde  $\rho_0 = 1/\chi_0$  é o raio de curvatura no ponto de tangência com o fundo. Esta relação pode ser demonstrada diretamente da equação (3.63), no entanto. De fato, desenvolvendo

$$\begin{aligned}
 F_x(s^*) &\cong \alpha C_D \int_0^{s^*} \text{sen}^3 \theta(s) ds + \alpha C_T \int_0^{s^*} \text{cos}^3 \theta(s) ds = \\
 &= \alpha C_D \int_0^{s^*} \text{sen}^3 \theta(s) ds + \alpha C_T \int_0^{s^*} \text{cos}^3 \theta(s) ds = \\
 &= \alpha C_D \int_0^{\gamma^*} \text{sen}^3 \theta \frac{ds}{d\theta} d\theta + \alpha C_T \int_0^{\gamma^*} \text{cos}^3 \theta \frac{ds}{d\theta} d\theta = \\
 &= \alpha C_D \int_0^{\gamma^*} \text{sen}^3 \gamma \rho(\gamma) d\gamma + \alpha C_T \int_0^{\gamma^*} \text{cos}^3 \gamma \rho(\gamma) d\gamma \cong \\
 &\cong \alpha \rho_0 \left[ C_D \left( 1 - \text{cos} \gamma^* - \frac{1}{3} (\text{cos}^3 \gamma^* - 1) \right) + C_T \left( \text{sen} \gamma^* - \frac{1}{3} \text{sen}^3 \gamma^* \right) \right] \cong \\
 &\cong \alpha \rho_0 \left[ C_D \left( \gamma^{*2} - \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2} \gamma^{*2} \right) \right) + C_T \gamma^* \right] = \alpha \rho_0 C_T \gamma^*
 \end{aligned}
 \tag{3.69}.$$

e lembrando que  $C_T \approx 10^{-3}$ , verificamos que, localmente, a força da correnteza pode ser desconsiderada, de tal sorte que, com erro da ordem  $\gamma^{*2}$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} \cong \chi_0 \text{cos}^2 \gamma; \quad s \leq s^* \tag{3.70},$$

expressão análoga a (3.30). Esta equação, integrada no intervalo  $(0, \gamma^*)$ , conduz à expressão (3.68), anteriormente apresentada.

Por completez, análise local da componente vertical da força de correnteza conduz, analogamente, a

$$F_y(s^*) \cong \frac{1}{2} \alpha C_T \rho_0 \gamma^{*2} \tag{3.71}.$$

Considerando ainda (3.66a), segue que, para  $s \geq s^*$

$$\frac{d\theta}{d\theta_c} = 1 + \frac{d\gamma}{d\theta_c} = \frac{\rho_c}{\rho} \quad (3.72)$$

e portanto,

$$\chi(s) = \frac{d\theta}{ds} = \left(1 + \frac{d\gamma}{d\theta_c}\right) \chi_c(s) \quad (3.73),$$

No entanto, para  $s \leq s^*$  vale (3.70) e, portanto, no ponto  $s^*$ ,

$$\left. \frac{d\gamma}{d\theta_c} \right|_{s=s^*} \cong \frac{\chi_0}{\chi_{0c}} - 1 = \frac{T_{0c}}{T_0} - 1 \quad (3.74),$$

valor necessariamente negativo.

Se o valor de  $T_0$  puder ser avaliado, a curvatura na região do ponto de tangência com o fundo poderá ser determinada. Sejam então  $X = F_x(L)$  e  $Y = F_y(L)$  as resultantes das componentes horizontais e verticais das forças da correnteza respectivamente. Sejam também:  $y = y_x$  e  $x = x_y$  as equações das linhas de ação destas forças, com a origem posicionada no ponto de tangência;  $\theta_L = \theta(L)$  o ângulo no topo da linha, com respeito à horizontal;  $x_L$  a projeção da linha sobre a horizontal e  $x_G$  a abscissa do centro de gravidade do trecho suspenso. Do equilíbrio estático segue então que

$$\tan \theta_L = \frac{qL + Y}{T_0 - X} \quad (3.75),$$

e

$$T_0 = \frac{1}{H} [(x_L - x_G)qL + (x_L - x_Y)Y + (H - y_X)X] \quad (3.76).$$

Sejam agora

$$\begin{aligned} F_x(s) &= F_{xc}(s) + \delta F_x(s) \\ F_y(s) &= F_{yc}(s) + \delta F_y(s) \end{aligned} \quad (3.77),$$

onde  $F_{xc}$  e  $F_{yc}$  designam parcelas correspondentes à integração das forças hidrodinâmicas sobre a configuração de catenária pura e as variações são associadas à mudança da geometria. Especificamente,

$$\begin{aligned} F_x(s) &= \alpha C_D \int_0^s \text{sen}^3 \theta ds + \alpha C_T \int_0^s \text{cos}^3 \theta ds = \\ &= \alpha C_D \int_0^\theta \text{sen}^3 \theta \rho(\theta) d\theta + \alpha C_T \int_0^\theta \text{cos}^3 \theta \rho(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.78)$$

e

$$\begin{aligned} F_y(s) &= -\alpha C_T \int_0^s \text{sen} \theta \text{cos}^2 \theta ds + \alpha C_D \int_0^s \text{sen}^2 \theta \text{cos} \theta ds = \\ &= -\alpha C_T \int_0^\theta \text{sen} \theta \text{cos}^2 \theta \rho(\theta) d\theta + \alpha C_D \int_0^\theta \text{sen}^2 \theta \text{cos} \theta \rho(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.79).$$

De (3.72), (3.73), (3.30) em (3.78) e (3.79) e utilizando as aproximações,

$$\begin{aligned} \text{sen} \theta &= \text{sen} \theta_c + \gamma \text{cos} \theta_c + O(\gamma^2) \\ \text{cos} \theta &= \text{cos} \theta_c - \gamma \text{sen} \theta_c + O(\gamma^2) \end{aligned} \quad (3.80)$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \theta &= \text{sen}^2 \theta_c + 2\gamma \text{sen} \theta_c \text{cos} \theta_c + O(\gamma^2) \\ \text{cos}^2 \theta &= \text{cos}^2 \theta_c - 2\gamma \text{sen} \theta_c \text{cos} \theta_c + O(\gamma^2) \\ \text{sen}^3 \theta &= \text{sen}^3 \theta_c + 3\gamma \text{sen}^2 \theta_c \text{cos} \theta_c + O(\gamma^2) \\ \text{cos}^3 \theta &= \text{cos}^3 \theta_c - 3\gamma \text{sen} \theta_c \text{cos}^2 \theta_c + O(\gamma^2) \end{aligned} \quad (3.81)$$

segue que,



$$\begin{aligned}
 F_{xc}(\theta_c) &= T_{0c} \frac{\alpha}{q} \left\{ C_D (\cos \theta_c + \sec \theta_c - 2) + C_T \sin \theta_c \right\} \\
 \delta F_x(\theta_c) &= T_{0c} \frac{\alpha}{q} \left\{ 3C_D \int_0^{\theta_c} \gamma \tan \theta_c \sin \theta_c d\theta_c - 3C_T \int_0^{\theta_c} \gamma \sin \theta_c d\theta_c + C_T \frac{T_0}{T_{0c}} \gamma^* \right\}
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

e

$$\begin{aligned}
 F_{yc}(\theta_c) &= T_{0c} \frac{\alpha}{q} \left\{ C_D (-\sin \theta_c + \ln(\tan \theta_c + \sec \theta_c)) - C_T (1 - \cos \theta_c) \right\} \\
 \delta F_y(\theta_c) &= T_{0c} \frac{\alpha}{q} \left\{ C_D \int_0^{\theta_c} \gamma (1 + \sec^2 \theta_c) \sin \theta_c d\theta_c + C_T \int_0^{\theta_c} \gamma (1 + \sec^2 \theta_c) \cos \theta_c d\theta_c \right\}
 \end{aligned} \tag{3.83}.$$

Em particular, portanto,

$$\begin{aligned}
 X_c &= F_{xc}(\theta_{cL}) \\
 \delta X &= \delta F_x(\theta_{cL}) \\
 Y_c &= F_{yc}(\theta_{cL}) \\
 \delta Y &= \delta F_y(\theta_{cL})
 \end{aligned} \tag{3.84}.$$

Substituindo (3.84) em (3.76) e (3.77) vem então, com o uso de (3.43a) e (3.68), que

$$\tan \theta_L = \frac{qL_c + qs^* + Y_c + \delta Y}{T_{0c} + \delta T_0 - X_c - \delta X} = \frac{\tan \theta_{cL} + (T_0/T_{0c})\gamma^* + Y_c/T_{0c} + \delta Y/T_{0c}}{T_0/T_{0c} - X_c/T_{0c} - \delta X/T_{0c}} \tag{3.85}$$

e

$$\frac{T_0}{T_{0c}} = \frac{1}{H} \left[ (x_L - x_G) \left( \tan \theta_{cL} + \frac{T_0}{T_{0c}} \gamma^* \right) + (x_L - x_Y) \left( \frac{Y_c}{T_{0c}} + \frac{\delta Y}{T_{0c}} \right) + (H - y_X) \left( \frac{X_c}{T_{0c}} + \frac{\delta X}{T_{0c}} \right) \right] \tag{3.86}.$$

Como primeira aproximação, desconsideraremos os termos em  $\gamma^*$ ,  $\delta X$  e  $\delta Y$ , escrevendo,

$$\tan \tilde{\theta}_L = \frac{\tan \theta_{cL} + Y_c/T_{0c}}{T_0/T_{0c} - X_c/T_{0c}} \quad (3.87),$$

e

$$\frac{\tilde{T}_0}{T_{0c}} = \frac{1}{H} \left[ (x_{Lc} - x_{Gc}) \tan \theta_{cL} + (x_{Lc} - x_{Yc}) \frac{Y_c}{T_{0c}} + (H - y_{Xc}) \frac{X_c}{T_{0c}} \right] \quad (3.88),$$

onde

$$\begin{aligned} x_{Gc} &= \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} x_c ds \\ x_{Yc} &= \frac{\alpha}{Y_c} \left\{ C_D \int_0^{L_c} x_c \sin^2 \theta_c \cos \theta_c ds - C_T \int_0^{L_c} x_c \sin \theta_c ds \right\} \\ y_{Xc} &= \frac{\alpha}{Y_c} \left\{ C_D \int_0^{L_c} x_c \sin^3 \theta_c ds + C_T \int_0^{L_c} x_c \cos^3 \theta_c ds \right\} \end{aligned} \quad (3.89).$$

Com o uso de (3.38a) na forma

$$x_c(\theta_c) = \frac{T_{0c}}{q} \operatorname{arcsenh}(\tan \theta_c) = \frac{T_{0c}}{q} \ln(\tan \theta_c + \sec \theta_c) \quad (3.90),$$

de tal sorte que

$$x_{Lc} = \frac{T_{0c}}{q} \ln(\tan \theta_{cL} + \sec \theta_{cL}) \quad (3.91),$$

seguem então, não sem algum trabalho algébrico, que

$$x_{Gc} = \frac{T_{0c}}{q} \cot \theta_{cL} \left\{ 1 - \sec \theta_{cL} + \tan \theta_{cL} \ln(\tan \theta_{cL} + \sec \theta_{cL}) \right\} \quad (3.92),$$

$$x_{Yc} = \frac{T_{0c}}{q} \left\{ \frac{a_Y(\theta_{cL}) + \eta b_Y(\theta_{cL})}{c_Y(\theta_{cL}) + \eta d_Y(\theta_{cL})} \right\}$$

$$\begin{aligned} a_Y(\theta) &= -(1/2)\ln^2(\sec\theta + \tan\theta) - \operatorname{sen}\theta \ln(\sec\theta + \tan\theta) - \ln(\cos\theta) \\ b_Y(\theta) &= \theta - \cos\theta \ln(\sec\theta + \tan\theta) \\ c_Y(\theta) &= \operatorname{sen}\theta - \ln(\sec\theta + \tan\theta) \\ d_Y(\theta) &= 1 - \cos\theta \\ \eta &= C_T/C_D \end{aligned} \quad (3.93),$$

e

$$y_{xc} = \frac{T_{0c}}{q} \left\{ \frac{a_X(\theta_{cL}) + \eta b_X(\theta_{cL})}{c_X(\theta_{cL}) + \eta d_X(\theta_{cL})} \right\}$$

$$\begin{aligned} a_X(\theta) &= 2 - \cos\theta - \sec\theta + \frac{1}{2}\tan^2\theta + \ln(\cos\theta) \\ b_X(\theta) &= \theta - \operatorname{sen}\theta \\ c_X(\theta) &= \cos\theta + \sec\theta - 2 \\ d_X(\theta) &= \operatorname{sen}\theta \\ \eta &= C_T/C_D \end{aligned} \quad (3.94).$$

Alternativamente, tomando (3.43b), as quatro últimas expressões acima podem ser postas na forma,

$$\frac{x_{Lc}}{H} = \frac{\ln(\tan\theta_{cL} + \sec\theta_{cL})}{\sec\theta_{cL} - 1} \quad (3.95);$$

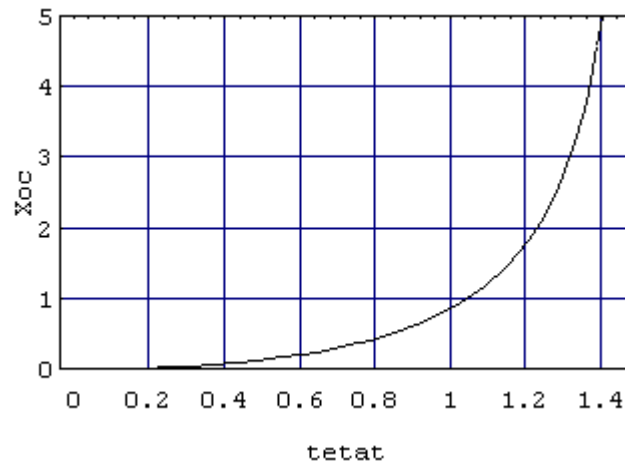
$$\frac{x_{Gc}}{H} = \frac{\cot\theta_{cL}}{\sec\theta_{cL} - 1} \left\{ 1 - \sec\theta_{cL} + \tan\theta_{cL} \ln(\tan\theta_{cL} + \sec\theta_{cL}) \right\} \quad (3.96);$$

$$\frac{x_{Yc}}{H} = \frac{1}{\sec\theta_{cL} - 1} \left\{ \frac{a_Y(\theta_{cL}) + \eta b_Y(\theta_{cL})}{c_Y(\theta_{cL}) + \eta d_Y(\theta_{cL})} \right\} \quad (3.97),$$

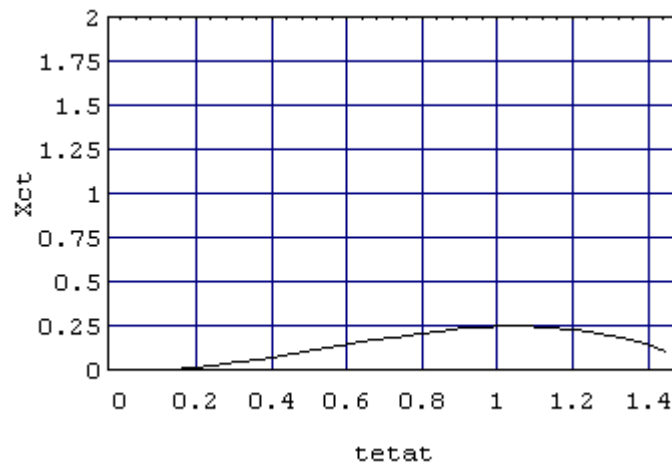
e

$$\frac{y_{xc}}{H} = \frac{1}{\sec \theta_{cL} - 1} \left\{ \frac{a_X(\theta_{cL}) + \eta b_X(\theta_{cL})}{c_X(\theta_{cL}) + \eta d_X(\theta_{cL})} \right\} \quad (3.98).$$

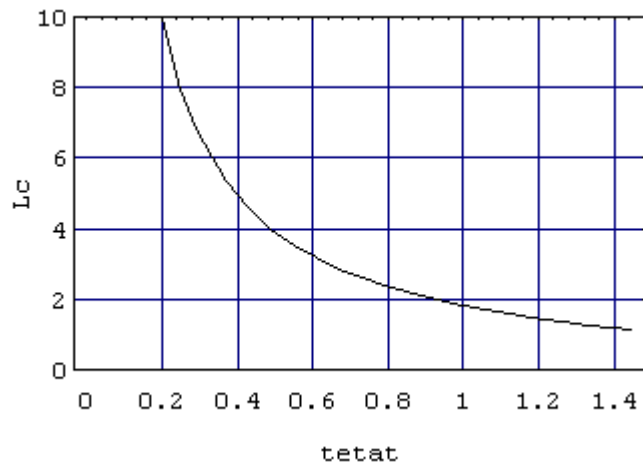
As figuras abaixo apresentam o resultado desta análise aproximada. As figuras 3.9-3.13 correspondem à solução de catenária pura, em função do ângulo no topo. As figuras 3.14-3.19, mostram a variação das abscissas  $x_{Lc}, x_{Gc}, x_{Yc}, y_{Xc}$ , normalizadas pela profundidade, segundo as expressões (3.95-98). As figuras 3.20-3.29, apresentam a solução aproximada.



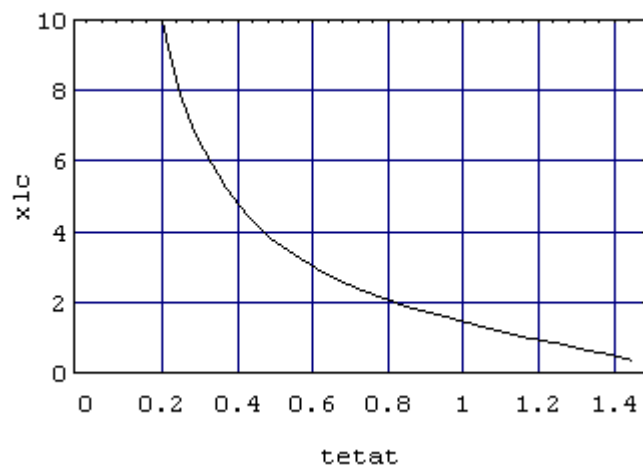
*Figura 3-9 Catenária. Curvatura no ponto de tangência, normalizada pela profundidade,  $\chi_{0c}H$ , em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .*



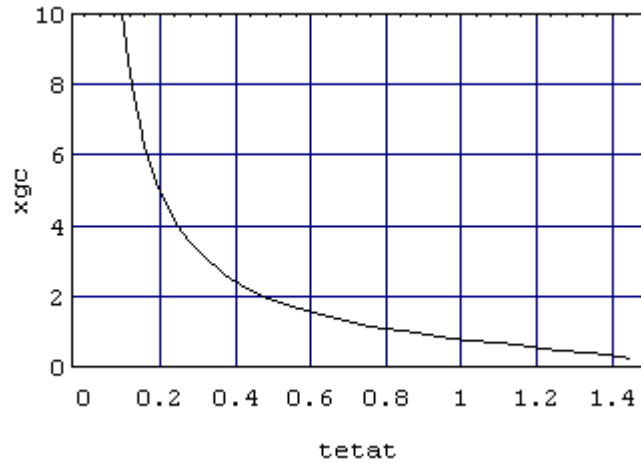
*Figura 3-10 Catenária. Curvatura no topo, normalizada pela profundidade,  $\chi_{Lc}H$ , em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .*



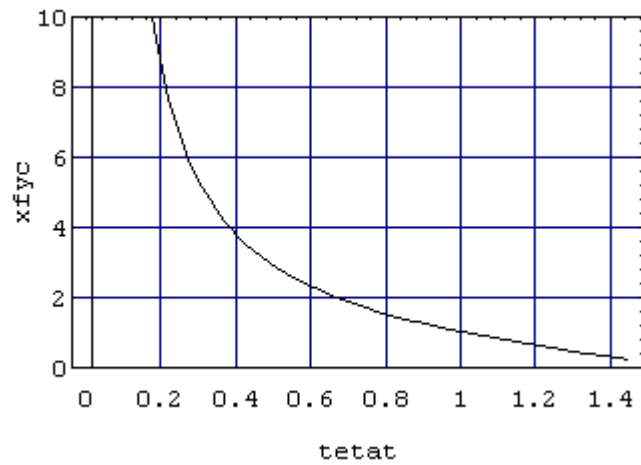
*Figura 3-11 Catenária. Comprimento suspenso, normalizado pela profundidade,  $L_c/H$ , em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .*



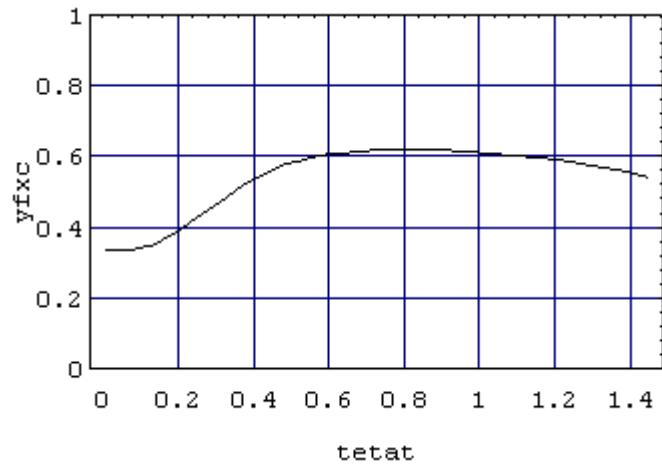
*Figura 3-12 Catenária. Projeção do comprimento suspenso, normalizado pela profundidade,  $x_{Lc}/H$ , em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .*



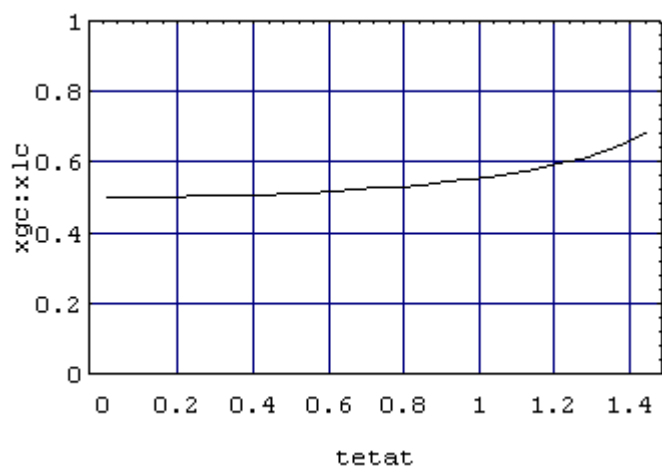
**Figura 3-13 Catenária. Abscissa do centro de gravidade, normalizado pela profundidade,  $x_{Gc}/H$ , em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .**



**Figura 3-14 Abscissa do centro da resultante vertical da força de correnteza,  $Y_c$ , normalizado pela profundidade,  $x_{Yc}/H$ , em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .**

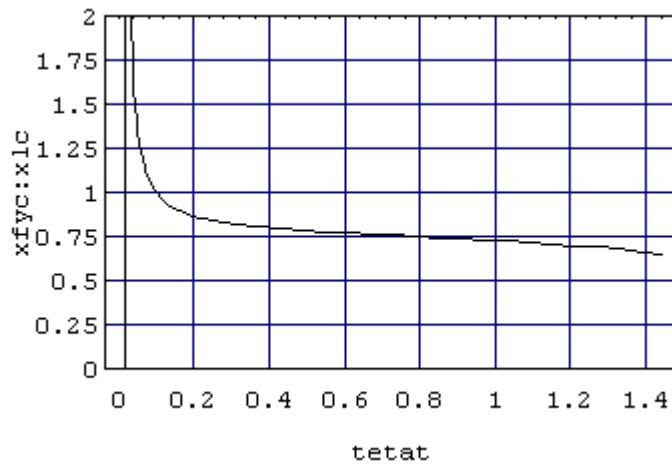


**Figura 3-15** Ordenada do centro da resultante horizontal da força de correnteza,  $X_c$ , normalizada pela profundidade,  $y_{Xc}/H$ , em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .

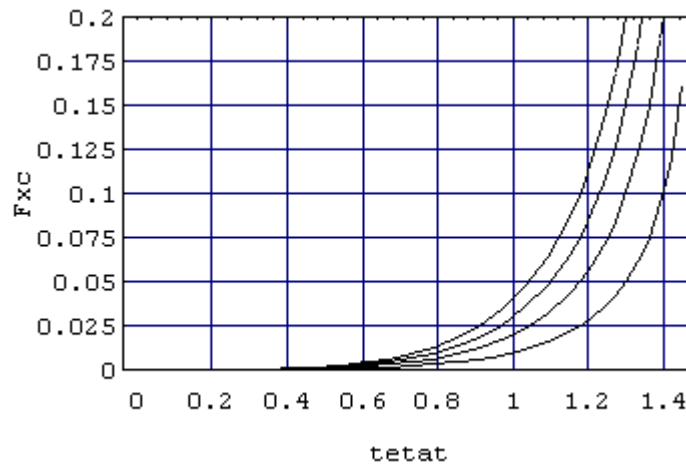


**Figura 3-16**  $x_{Gc}/x_{Lc}$  em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .

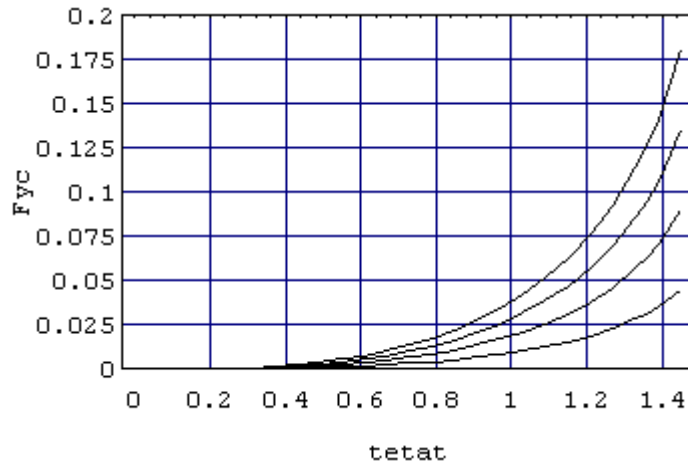




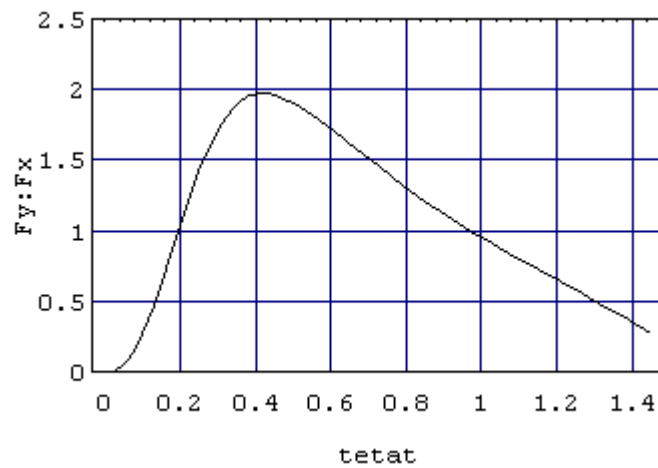
**Figura 3-17**  $x_{yc}/x_{Lc}$  em função do ângulo no topo  $\theta_{cL}$ .



**Figura 3-18** Resultante das forças hidrodinâmicas horizontais,  $X_c/T_{0c}$ , normalizada pela tração horizontal de catenária, em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha / q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T / C_D = 10^{-3}$ .



**Figura 3-19 Resultante das forças hidrodinâmicas verticais,  $Y_c/T_{0c}$ , normalizada pela tração horizontal de catenária, em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ .**



**Figura 3-20 Relação  $Y_c/X_c$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$**

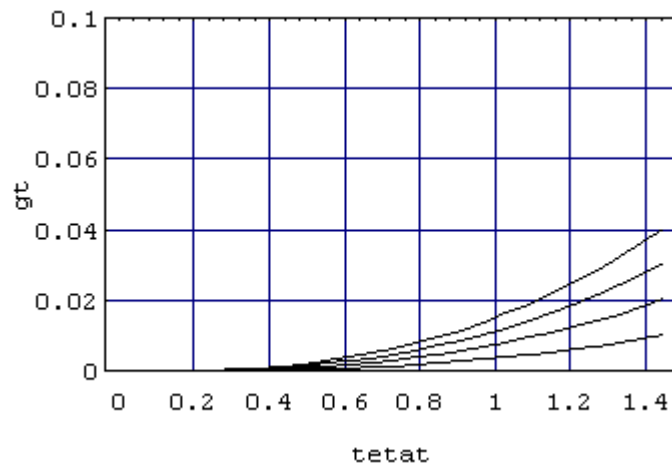


Figura 3-21 Variação angular no topo,  $\tilde{\gamma}_L$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ .  
 Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha / q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T / C_D = 10^{-3}$ .

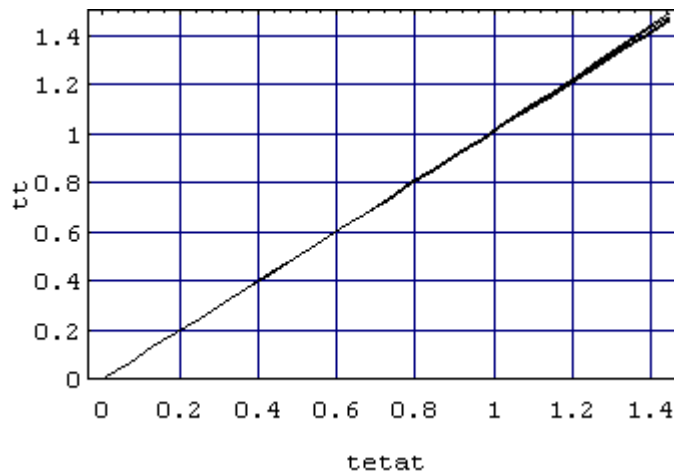


Figura 3-22. Ângulo no top,  $\tilde{\theta}_L$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha / q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T / C_D = 10^{-3}$ .

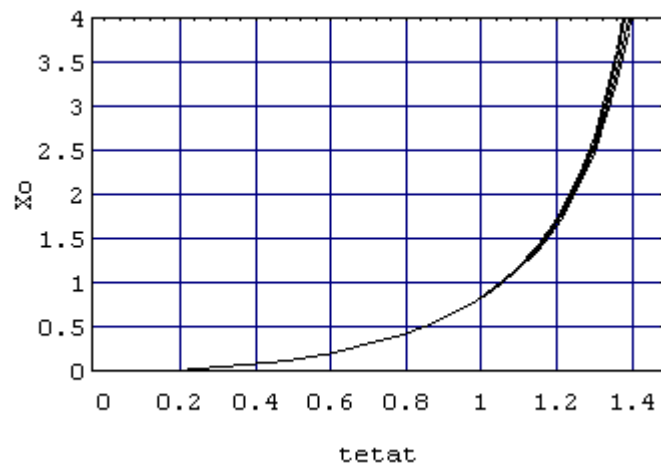


Figura 3-23 Curvatura normalizada no ponto de tangência,  $\tilde{\chi}_0 H$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cl}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .

$$\eta = C_T / C_D = 10^{-3}.$$

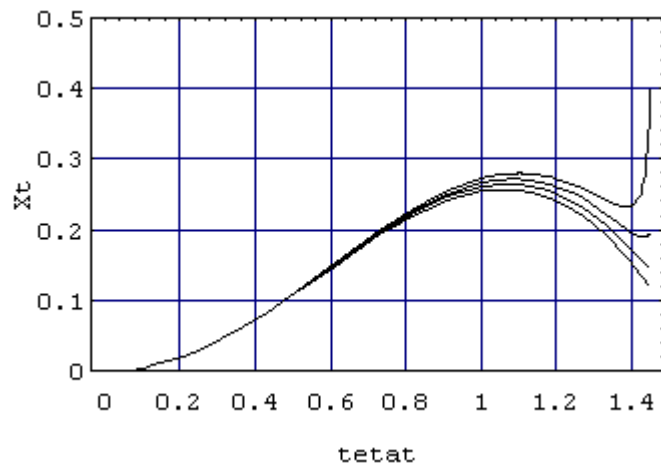
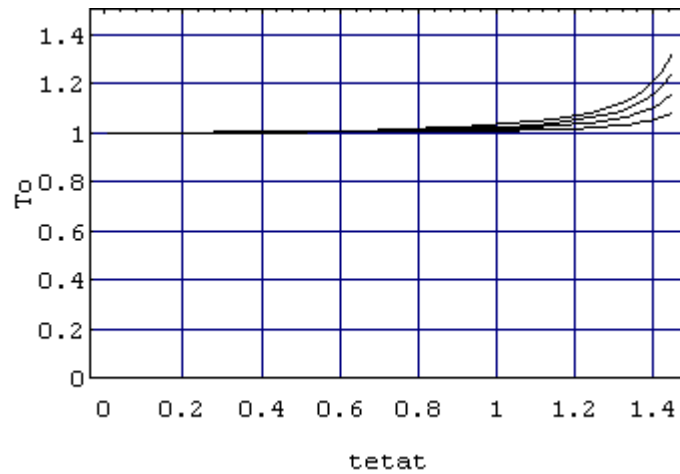
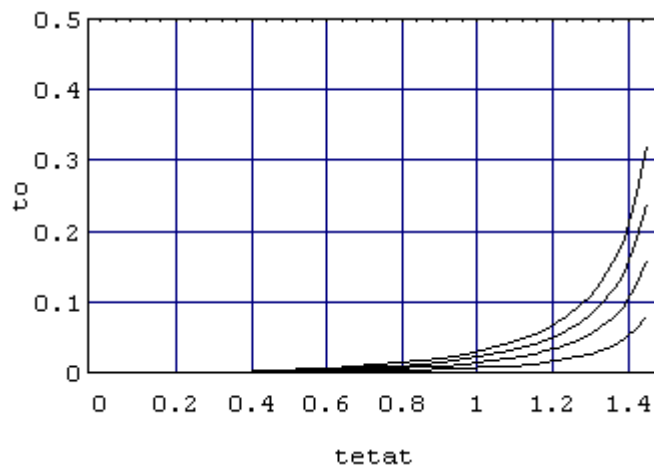


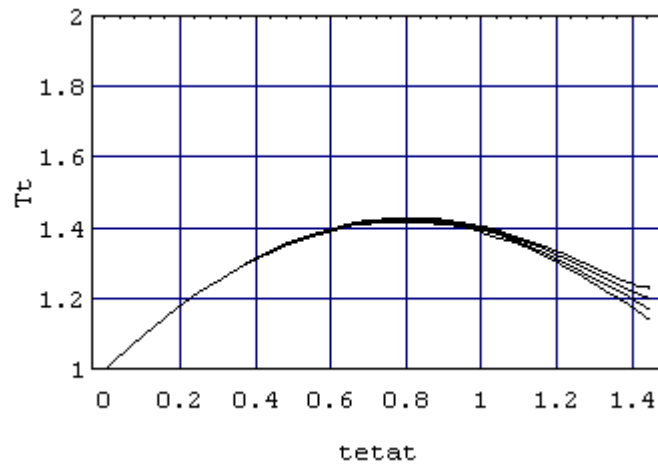
Figura 3-24 Curvatura normalizada no topo,  $\tilde{\chi}_L H$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cl}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T / C_D = 10^{-3}$ .



**Figura 3-25** Tração no ponto de tangência normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\tilde{T}_0/T_{0c}$ , (ou raio de curvatura  $\rho_0/\rho_{0c}$ ), em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ .  
 Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ .



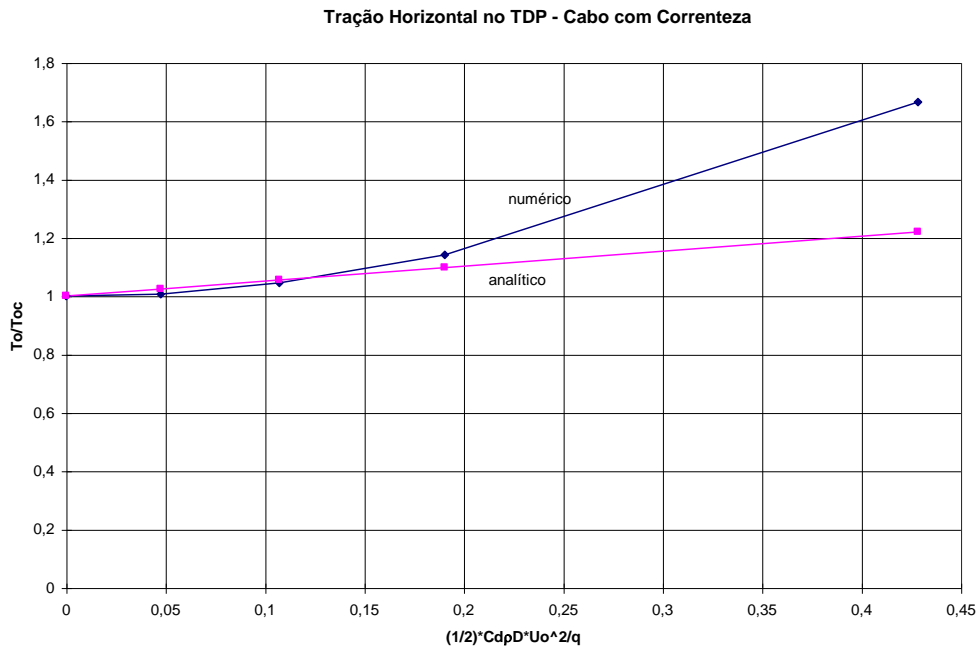
**Figura 3-26** Variação da tração no ponto de tangência normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\delta \tilde{T}_0/T_{0c}$ , (ou do raio de curvatura  $\delta \tilde{\rho}_0/\rho_{0c}$ ), em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em  $C_D \alpha/q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10$ .  $\eta = C_T/C_D = 10^{-3}$ .



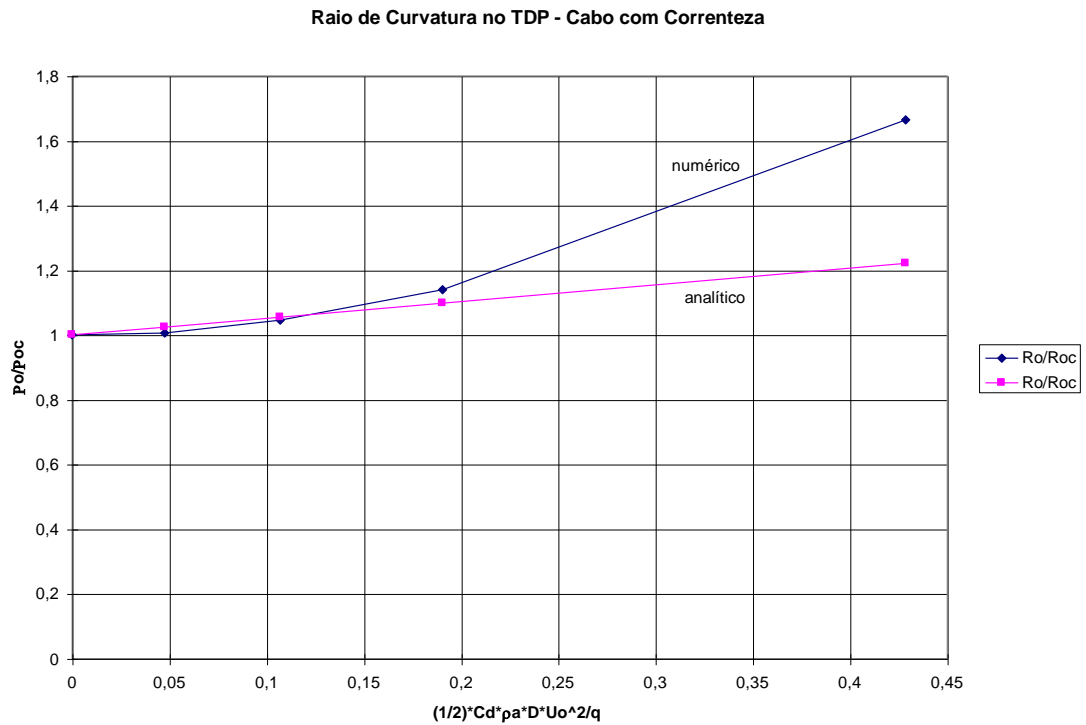
*Figura 3-27 Tração no topo normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\tilde{T}_L/T_{0c}$ , em função do ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL}$ . Curvas parametrizadas em*

$$C_D \alpha / q = 0.025; 0.05; 0.075; 0.10. \quad \eta = C_T / C_D = 10^{-3}.$$

Por fim, as figuras (3.30) e (3.31) apresentam uma comparação da presente solução analítica aproximada com resultados numéricos correspondentes à solução não-linear exata, obtida através do processamento do código computacional RISTAT. Os casos processados correspondem a um “riser” de aço, de de 10”3/4 de diâmetro externo, em lâmina d’água de 910 metros de profundidade. Note que devido à aproximação, a tração  $T_0$  resultou linear no coeficiente adimensional de intensidade de correnteza  $C_D \alpha / q = (1/2) C_D \rho_a D U_0^2 / q$ . As curvas aderem relativamente bem aos resultados numéricos até valores  $C_D \alpha / q \approx 0.15$ , que correspondem, no presente caso a uma intensidade de correnteza da ordem de 0.9 m/s, valor representativo de correntezas oceânicas com período de retorno anual.



**Figura 3-28** Tração no ponto de tangência normalizada pela tração horizontal de catenária,  $\tilde{T}_0 / T_{0c}$ , em função de  $C_D \alpha / q = 1/2 C_D \rho_a D U_0^2 / q$ ;  $\eta = C_T / C_D = 10^{-3}$ ; ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL} = 65^\circ = 1.1346 \text{ rad}$ .



**Figura 3-29** Raio de curvatura  $\rho_0 / \rho_{0c}$  no ponto de tangência normalizado pela curvatura de catenária, em função de  $C_D \alpha / q = 1/2 C_D \rho_a D U_0^2 / q$ ;  $\eta = C_T / C_D = 10^{-3}$ ; ângulo no topo da catenária original  $\theta_{cL} = 65^\circ = 1.1346 \text{ rad}$ .



### 3.3.3 Efeito da rigidez flexional e análise assintótica local junto ao ponto de contato com o fundo

Conforme discutido anteriormente, o efeito da rigidez flexional é, em geral, de pequena monta, no que diz respeito à determinação da configuração de equilíbrio estático da linha como um todo. Em outras palavras a rigidez geométrica, associada à tração é predominante, dada a enorme razão de esbeltez da estrutura. De fato, na seção 3.2, onde tratávamos do equacionamento tridimensional geral, foram definidos três parâmetros de comprimento,  $\lambda_u$ ,  $\lambda_v$  e  $\lambda_w$ , a que denominamos *comprimento de torção* e *comprimentos de flexão*, respectivamente, e que medem a importância dos efeitos das constantes de rigidez torsional e flexional quando comparados ao efeito da tração. Estes parâmetros são definidos como a razão entre as rigidezes de torção e flexão e a tração efetiva no ponto de contato com o fundo, conforme a equação (3.14), aqui repetida por praticidade,

$$\begin{aligned}\lambda_u^2 &= \frac{B_u}{T_0} \\ \lambda_v^2 &= \frac{B_v}{T_0} \\ \lambda_w^2 &= \frac{B_w}{T_0}\end{aligned}\tag{3.14}^*$$

Note que poderíamos definir parâmetros equivalentes ao longo da linha, que variariam com a tração efetiva. No entanto, posto que, para uma configuração de “catenária direta”, a tração é uma função monotônica, decrescendo com a profundidade, os valores destes parâmetros no ponto de tangência são máximos, para uma linha homogênea, onde são invariantes as constantes de rigidez. Os respectivos parâmetros adimensionais,

$$\begin{aligned}
 \widehat{\lambda}_u &= \frac{\lambda_u}{L} \\
 \widehat{\lambda}_v &= \frac{\lambda_v}{L} \\
 \widehat{\lambda}_w &= \frac{\lambda_w}{L}
 \end{aligned}
 \tag{3.15)*,$$

medem a importância do efeito das rigezas. Para efeito ilustrativo, o tubo exemplificado na seção anterior, tem rigidez flexional  $B_v = B_w = EJ = 25000\text{kNm}^2$ , o que conduz a um comprimento de flexão de  $\lambda_v = \lambda_w = 10\text{m}$ , que comparados ao comprimento suspenso da linha, da ordem de 1400m, leva a parâmetros adimensionais de comprimento de flexão da ordem típica  $10^{-2}$ . As equações tridimensionais foram então adimensionalizadas na forma (3.16). No caso particular do problema plano, a equação (3.26) que rege o equilíbrio estático fica dada por,

$$\lambda^2 \frac{d^2\theta}{ds^2} \sec\theta + \frac{qs}{T_0} - \frac{1}{T_0} \int_s \left( h_n \sec\theta + \sec^2\theta \left( \frac{d\theta}{ds} \right) \int_s (h_n \sin\theta - h_t \cos\theta) d\xi \right) ds = \tan\theta - \frac{Q_0}{T_0}$$

(3.99),

onde,

$$\lambda^2 = \frac{B_v}{T_0} = \frac{B_w}{T_0} = \frac{EJ}{T_0}$$

(3.100).

A contribuição do primeiro termo é, em geral, bastante pequena quando comparada a dos demais, exceto possivelmente em regiões de brusca variação de curvatura, que é medida pela taxa de variação  $\lambda^2 d\chi/ds = \lambda^2 d^2\theta/ds^2$ . Esta condição pode ocorrer em três situações básicas: na região de eventuais bóias intermediárias, junto à conexão do topo ou junto ao ponto de tangência no fundo. Em lançamento direto ao fundo do

oceano, apenas as duas últimas devem ser consideradas, obviamente. Estas duas situações serão analisadas a seguir.

### 3.3.3.1 *Solo plano e rígido*

Consideraremos uma linha lançada de forma direta ao fundo do oceano, ou seja, sem a presença de flutuadores intermediários. Desprezando o efeito da rigidez flexional, o que pode em geral ser admitido válido ao longo do comprimento suspenso da linha, a solução de cabo leva então a uma situação de descontinuidade de curvatura no ponto de tangência com o fundo. Do lado suspenso, a curvatura é máxima,  $\chi_0 = T_0/q$ , enquanto, do lado assentado sobre o fundo, é identicamente nula<sup>37</sup>. Ou seja, esta solução não apenas conduz a uma situação de descontinuidade de curvatura, esta descontinuidade seria a máxima que poderia ocorrer. Este modelo é *localmente* falho, com toda a certeza. Contudo, traduz de forma veemente uma situação de fato: *o valor máximo de curvatura, que ocorre certamente junto ao ponto de tangência, decresce de forma abrupta para o valor mínimo*. Como é fácil supor, esta variação ocorre em uma escala de comprimento comparável ao parâmetro  $\lambda$ . Em outras palavras, o papel desempenhado pela rigidez flexional é o de compatibilizar, de forma contínua, os dois comportamentos. Na linguagem própria da matemática aplicada portanto, trata-se de um *problema de camada-limite*, e assim será tratado<sup>38</sup>.

Em primeiro lugar lembramos que, como demonstrado na seção anterior, a magnitude das forças associadas à ação da correnteza são localmente de segunda ordem quando comparada à tração e seu efeito pode, consistentemente ser desprezado neste entorno. Obviamente o efeito global da correnteza é preservado, de forma implícita na tração  $T_0$ . Por uma questão de conveniência, e sem perda de generalidade, redefiniremos a

---

<sup>37</sup> (se o solo for suposto rígido, ou atingindo valores negativos de pequeno valor absoluto, caso o solo seja suposto deformável)

<sup>38</sup> O desenvolvimento elaborado a seguir consta, em sua essência, em Aranha, Martins & Pesce, 1995.

origem da coordenada curvilínea, de forma que coincida com o ponto que corresponderia ao ponto de tangência de cabo ideal. Assim a coordenda  $s = s_f$  define o novo ponto de contato com o fundo. A equação que localmente rege o equilíbrio é, portanto,

$$\lambda^2 \frac{d^2\theta}{ds^2} \sec \theta - \tan \theta = -\frac{q}{T_0} (s - s_f) - \frac{Q_0}{T_0} \quad (3.101).$$

ou em termos da curvatura,

$$\lambda^2 \frac{d\chi}{ds} \sec \theta - \tan \theta = -\frac{q}{T_0} (s - s_f) - \frac{Q_0}{T_0} \quad (3.102).$$

Na região do ponto de tangência com o fundo, no entanto,  $\theta \ll 1$  e assim, (3.101) pode ser escrita, com erro de segunda-ordem em  $\theta$ ,

$$\lambda^2 \frac{d^2\theta}{ds^2} - \theta = -\frac{q}{T_0} (s - s_f) - \frac{Q_0}{T_0} \quad (3.103).$$

Esta equação, derivada em relação a  $s$ , fornece

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} - \frac{1}{\lambda^2} \chi = -\frac{1}{\lambda^2} \chi_0 \quad (3.104)^{39},$$

onde  $\chi_0 = q/T_0$  é a curvatura no ponto de tangência correspondente à solução da equação de cabo ideal. A equação (3.104) pode ser integrada diretamente, dando origem à solução local,

---

<sup>39</sup> (3.104) é prontamente reconhecida como a equação da viga tracionada, da Teoria da Resistência dos Materiais.

$$\chi(s) = \chi_0 + C_1 e^{-(s-s_f)/\lambda} + C_2 e^{(s-s_f)/\lambda}$$

Condição de finitude de solução quando  $\xi = (s - s_f)/\lambda \rightarrow \infty$ , leva a  $C_2 = 0$ . Por outro lado, supondo solo plano e rígido e impondo-se curvatura nula no ponto de tangência real, i.e.,  $\chi(s_f) = 0$ , segue que  $C_1 = -\chi_0$ . Assim

$$\chi(s) = \chi_0 \left( 1 - e^{-(s-s_f)/\lambda} \right) \quad (3.105).$$

Esta equação pode mais uma vez ser integrada, fornecendo,

$$\theta(s) = \chi_0 \left( s + \lambda e^{-(s-s_f)/\lambda} \right) + C_3.$$

No entanto, conforme discutido na seção anterior, devemos ter  $s \cong \rho_0 \theta(s)$ , para  $(s - s_f)/\lambda$  suficientemente grande, de tal sorte que, necessariamente,  $C_3 \equiv 0$ . Por outro lado, da condição de tangência em solo plano e rígido,  $\theta(s_f) = 0$ , segue o importante resultado,

$$s_f = -\lambda \quad (3.106).$$

Ou seja, *o efeito da rigidez flexional faz com que o ponto de tangência com o fundo seja deslocado para a esquerda* (levantando linha do solo, em relação à solução de cabo ideal) *de uma distância igual a  $\lambda$* . Portanto,

$$\theta(s) = \chi_0 \left( s + \lambda e^{-(1+s/\lambda)} \right) \quad (3.107)$$

descreve a solução local, incorporando o efeito de rigidez flexional, com assentamento da linha em solo plano e rígido. Voltando à equação (3.103) vemos

então que a força cortante, à direita do ponto de tangência, ou seja  $s \rightarrow s_f^+$  fica dada por,

$$Q_0 = -q\lambda \quad (3.108)^{40}.$$

Esta última expressão enriquece a compreensão a respeito do parâmetro *comprimento de flexão*. Trata-se de uma escala de comprimento que indica a ordem de magnitude da distância dentro da qual as soluções de viga e de cabo se compatibilizam, permitindo que o esforço cortante decaia exponencialmente para zero.

Note, por fim, que a suposição de solo rígido implica em uma descontinuidade da força cortante no ponto de tangência. De fato, à esquerda, o esforço de cisalhamento deve ser nulo, posto que, por hipótese,  $\theta(s) = \chi(s) = 0$ ;  $s < s_f$ . Esta descontinuidade leva a expressar a função que descreve a força cortante na forma

$$\left| \frac{Q}{q\lambda} \right| = H((s - s_f)/\lambda) e^{-(1+s/\lambda)} \quad (3.109),$$

onde  $H(\cdot)$  é a função ressalto unitário, ou de Heaviside. A curvatura no entanto é uma função contínua,

$$\chi(s) = \begin{cases} \chi_0 \left( 1 - e^{-(1+s/\lambda)} \right); & \text{se } s \geq -\lambda \\ 0 & \text{se } s < -\lambda \end{cases} \quad (3.110),$$

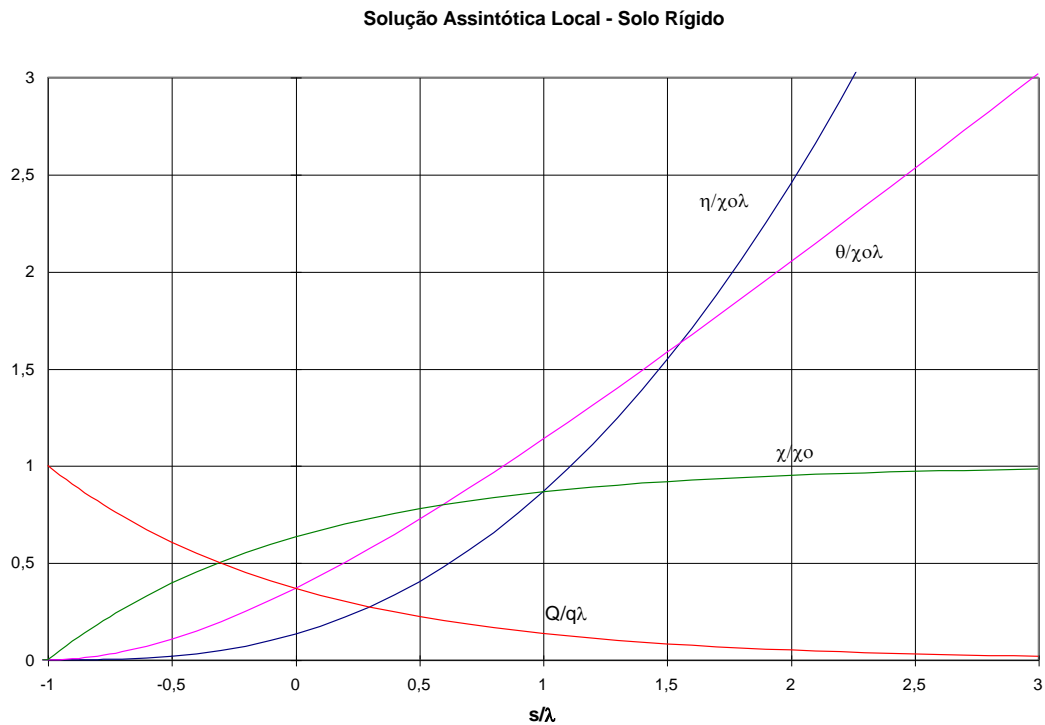
e, equivalentemente, o ângulo, é dado por

$$\theta(s) = \begin{cases} \chi_0 \lambda \left( \frac{s}{\lambda} + e^{-(1+s/\lambda)} \right); & \text{se } s \geq -\lambda \\ 0 & \text{se } s < -\lambda \end{cases} \quad (3.111),$$

---

<sup>40</sup> O sinal é consistente com as convenções implícitas nas equações de Love.

A Figura 3-30 ilustra a solução local. Note que o comprimento típico de decaimento ou compatibilização é cerca de 4 a  $5\lambda$ .



**Figura 3-30 Solução estática local com efeito de rigidez flexional. Curvas**

$$\text{adimensionais: } \frac{\eta}{\chi_0\lambda}; \frac{\theta}{\chi_0\lambda}; \frac{\chi}{\chi_0}; \frac{|Q|}{q\lambda}.$$

### 3.3.3.2 Efeito da deformabilidade do solo

A continuidade da função que descreve a força cortante pode ser satisfeita se o solo for considerado deformável. Nesta situação pode-se mostrar que o efeito da rigidez flexional altera ligeiramente o diagrama de curvatura, trazendo o ponto de toque no fundo para a frente, e causando uma inflexão da elástica sobre o apoio, de forma que a curvatura se inverta e venha a se anular assintoticamente. Para tanto vamos considerar, de forma simplificada, que a reação do solo sobre a linha seja caracterizada tão somente por um coeficiente de restauração linear  $k$ . Seja então  $y(s)$

a função definidora da elástica, localmente. O recalque ao longe do ponto de toque é dado por  $y_r = -q/k$ . Consideraremos também, e por simplicidade, que a linha não se destaque do solo se  $s \leq s_f$ , onde  $s_f$  indica a posição do ponto de *contato* ou de *toque* no fundo, que aqui será definido como o primeiro ponto, medido a partir do trecho suspenso, onde a cota da elástica se iguala à cota do fundo indeformado. A equação que rege a elástica é similar a (3.103), com o termo de restituição incorporado. Posto que na região de contato, com erro de segunda-ordem em  $\theta \cong dy/dx$  podemos escrever  $s \cong x$  e  $\chi(s) \cong \chi(x) \cong d^2y/dx^2$ , a equação em consideração pode ser mais convenientemente escrita na forma

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k}{EJ} y = -\frac{q}{EJ} \quad (3.112).$$

De forma adimensional, com  $\xi = x/\lambda$ ;  $\eta = y/\lambda$ , (3.112) fica,

$$\eta^{IV} - \eta'' + K\eta = -\frac{q\lambda}{T_0} = \frac{Q_0}{T_0} \quad (3.113).$$

onde o parâmetro adimensional de rigidez  $K$  é definido como

$$K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} \quad (3.114).$$

A equação acima tem solução bem determinada, dada em termos de funções harmônicas,

$$\eta(\xi) = \sum_{j=1}^4 A_j e^{\sigma_j(\xi - \xi_f)}; \quad \xi \leq \xi_f \quad (3.115),$$

com auto-valores



$$\varpi_j = \pm \left( \frac{1 \pm (1 - 4K)^{1/2}}{2} \right)^{1/2} \quad (3.116).$$

No entanto, para aplicações usuais,  $K \gg 1$ , de tal forma que a equação homogênea associada a (3.113) pode ser aproximada por,

$$\eta^{IV} + K\eta \cong -\chi_0\lambda \quad (3.117),$$

cuja solução que satisfaz as condições  $\eta(0) = 0$ ;  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \eta(\xi) = -\chi_0\lambda$  é

$$\eta(\xi) = C \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \quad (3.118).$$

A mesma expressão assintótica pode ser depreendida de (3.116), quando  $K \gg 1$ .

Para fins de compatibilização necessitaremos das derivadas, até terceira-ordem, calculadas em  $\xi = \xi_f$ . De (3.118) segue diretamente,

$$\begin{aligned} \eta'(\xi) &= C \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) + \cos\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \right\} \\ \eta''(\xi) &= CK^{1/2} \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \cos\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \\ \eta'''(\xi) &= C \frac{K^{3/4}}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \left\{ \cos\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \right\} \\ \eta^{IV}(\xi) &= -CK \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \end{aligned} \quad (3.119),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\eta'(\xi_f) &= C \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}} \\ \eta''(\xi_f) &= CK^{1/2} \\ \eta'''(\xi_f) &= C \frac{K^{3/4}}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{3.120}.$$

Por outro lado, no trecho suspenso, vem de (3.107),

$$\eta'(\xi) = \chi_0 \lambda \left( \xi + C_1 e^{-(\xi - \xi_f)} \right)\tag{3.121},$$

e assim,

$$\eta(\xi) = \chi_0 \lambda \left( \frac{\xi^2 - \xi_f^2}{2} - C_1 e^{-(\xi - \xi_f)} \right) + C_2\tag{3.122}.$$

Fazendo  $\eta(\xi_f) = 0$  segue que,

$$C_1 \chi_0 \lambda = C_2\tag{3.123}.$$

Das condições sobre as derivadas até a terceira-ordem, calculadas em  $\xi = \xi_f$  e igualadas a (3.120) seguem, também,

$$\begin{aligned}\chi_0 \lambda (\xi_f + C_1) &= C \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}} \\ \chi_0 \lambda (1 - C_1) &= CK^{1/2} \\ \chi_0 \lambda C_1 &= C \frac{K^{3/4}}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{3.124}.$$

A solução do sistema (3.123)-(3.124) conduz finalmente a

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \frac{\sqrt{2}}{K^{1/2}} \chi_0 \lambda \\
 C_1 &= \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \\
 C_2 &= \chi_0 \lambda \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2} + K^{1/4}}
 \end{aligned} \tag{3.125}$$

e

$$\xi_f = \frac{1}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \left( \frac{1}{K^{1/4}} - K^{1/4} \right) \tag{3.126}.$$

Note que quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\xi_f \rightarrow -1^+$ ;  $C \rightarrow 0^+$ ;  $C_1 \rightarrow 1^-$ ;  $C_2 \rightarrow \chi_0 \lambda^{(-)}$ , recuperando o limite correspondente a solo “rígido”. O efeito da deformabilidade do solo é levar para a direita o ponto de contato, aproximando-o do ponto de tangência correspondente à condição ideal de cabo, suavizando ainda mais a variação de curvatura e tornando contínuo o diagrama de força cortante. No entanto, neste novo ponto de contato a linha não é tangente à horizontal. A solução assintótica completa, referida a cota de recalque, será dada então por,

*elástica:*

$$\begin{aligned}
 \eta(\xi) &= \chi_0 \lambda \frac{\sqrt{2}}{K^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}} (\xi - \xi_f)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}} (\xi - \xi_f)\right); \text{ se } \xi < \xi_f \\
 \eta(\xi) &= \chi_0 \lambda \left( \frac{\xi^2 - \xi_a^2}{2} - \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \left( e^{-(\xi - \xi_f)} - 1 \right) \right); \text{ se } \xi > \xi_f
 \end{aligned} \tag{3.127},$$

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &\cong \eta'(\xi) = \\ &= \chi_0 \lambda \frac{1}{K^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \right\}; \\ &\quad \text{se } \xi < \xi_f \\ \theta(\xi) &\cong \eta'(\xi) = \chi_0 \lambda \left( \xi + \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2} + K^{1/4}} e^{-(\xi - \xi_f)} \right); \text{ se } \xi > \xi_f \end{aligned} \quad (3.128),$$

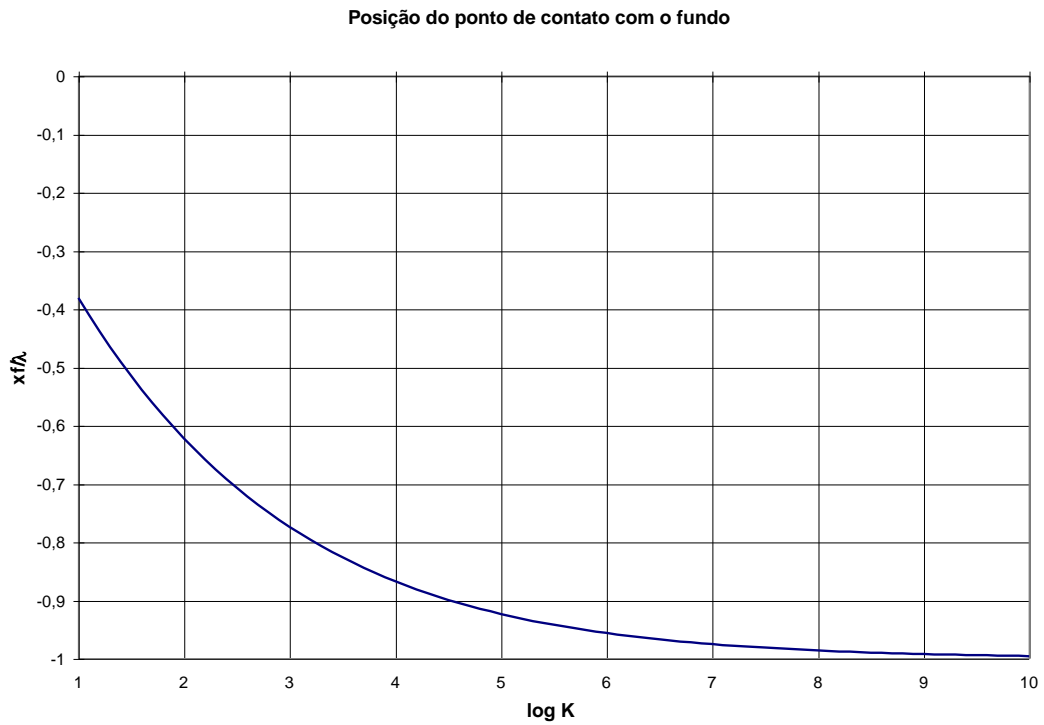
*curvatura:*

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &\cong \frac{1}{\lambda} \eta''(\xi) = \\ &= \chi_0 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \operatorname{cos}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right); \text{ se } \xi < \xi_f \\ \chi(\xi) &\cong \frac{1}{\lambda} \eta''(\xi) = \chi_0 \left( 1 - \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2} + K^{1/4}} e^{-(\xi - \xi_f)} \right); \text{ se } \xi > \xi_f \end{aligned} \quad (3.129),$$

e, para a *força cortante*,

$$\begin{aligned} \frac{Q}{q\rho_0} &= \eta'''(\xi) = \\ &= \chi_0 \lambda \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \exp\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \left\{ \operatorname{cos}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{K^{1/4}}{\sqrt{2}}(\xi - \xi_f)\right) \right\}; \xi < \xi_f \\ \frac{Q}{q\rho_0} &= \eta'''(\xi) = \chi_0 \lambda \frac{K^{1/4}}{\sqrt{2} + K^{1/4}} \exp(-(\xi - \xi_f)); \xi > \xi_f \end{aligned} \quad (3.130).$$

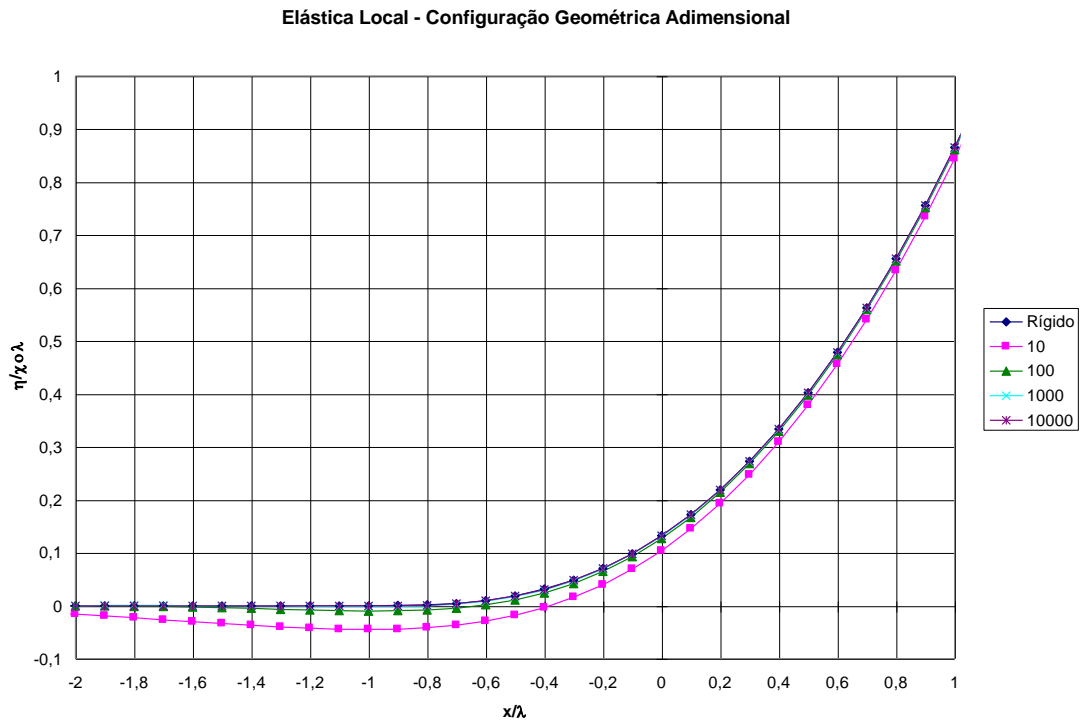
A Figura 3-31 apresenta a variação da posição do ponto de contato em função do parâmetro de rigidez do solo  $K$ . Os casos típicos apresentam, em geral,  $K > 10$ .



*Figura 3-31 Posição do ponto de contato  $x_f/\lambda$  em função do parâmetro de rigidez do solo*

$$K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ}.$$

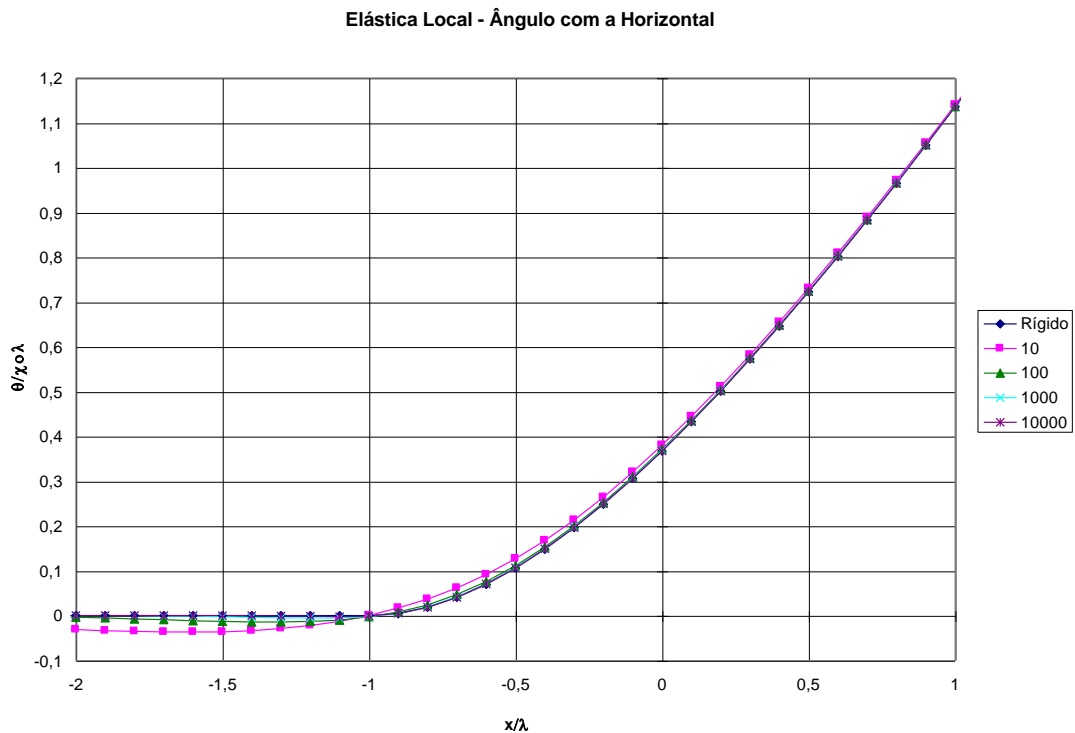
As figuras abaixo ilustram a solução assintótica para quatro diferentes valores do parâmetro adimensional de rigidez do solo  $K = 10; 10^2; 10^3; 10^4$ , comparada àquela referente a solo infinitamente rígido.



*Figura 3-32 Configuração geométrica adimensional da elástica local,  $\frac{\eta(\xi)}{\chi_0\lambda} = \frac{y(x)}{\chi_0\lambda^2}$ , referida à*

*respectiva cota de recalque, parametrizada na rigidez do solo  $K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} = \chi_0\lambda \frac{k\lambda}{q}$*

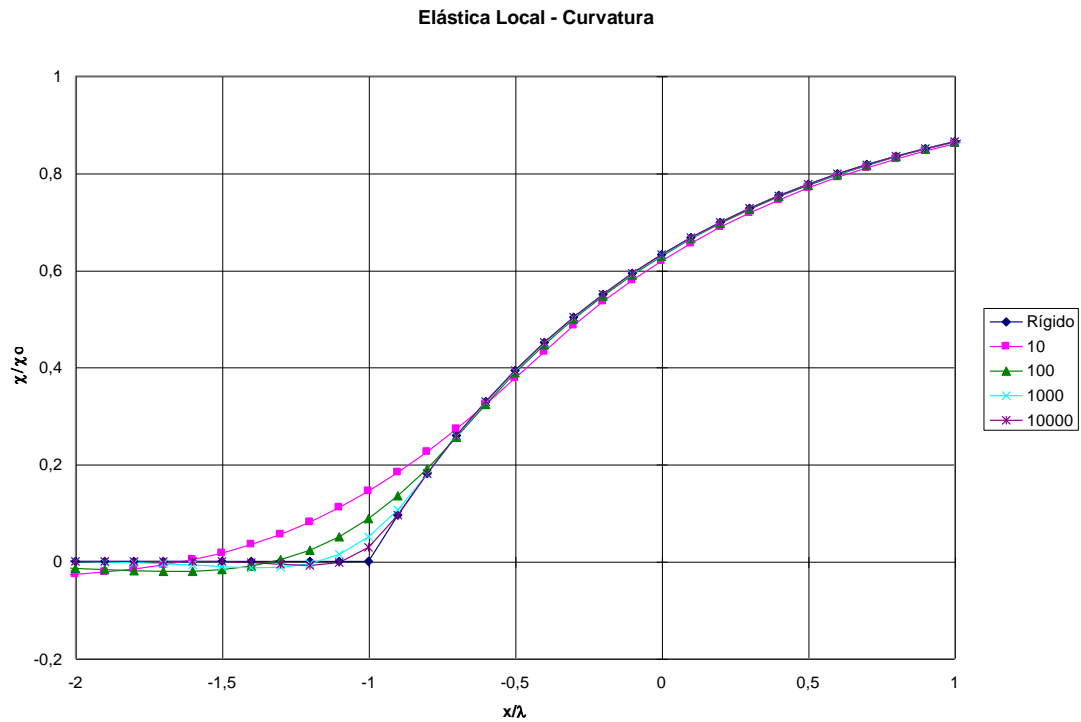
Note que o ponto de contato apenas tem tangência horizontal na situação de solo infinitamente rígido.



**Figura 3-33** Ângulo da elástica local com a horizontal,  $\theta(\xi)/\chi_0\lambda$  parametrizado na rigidez do solo

$$K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} = \chi_0\lambda \frac{k\lambda}{q}$$

Interessante é notar que o ângulo da elástica se anula sempre em  $x/\lambda = -1$ , independentemente do valor do parâmetro adimensional de rigidez do solo. Este é justamente o valor do deslocamento do ponto de contato real em relação ao de catenária, deduzido anteriormente sob a hipótese de solo infinitamente rígido. O parâmetro de comprimento de flexão pode ganhar, então, uma outra interpretação alternativa: *mede a posição da nova tangência com a horizontal em relação àquela correspondente à solução de cabo ideal.*



*Figura 3-34 Curvatura adimensional da elástica local,  $\chi(\xi)/\chi_0$  parametrizada na rigidez do solo*

$$K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} = \chi_0\lambda \frac{k\lambda}{q}.$$

A transição da curvatura estática é suavizada como resultado da ação da flexibilidade do solo. No entanto, o valor máximo atingido pela curvatura estática, no interior da camada-limite, permanece inalterado. Valores negativos de maior intensidade (embora pequena) ocorrem à medida que a flexibilidade do solo vai aumentando, conforme a expectativa.



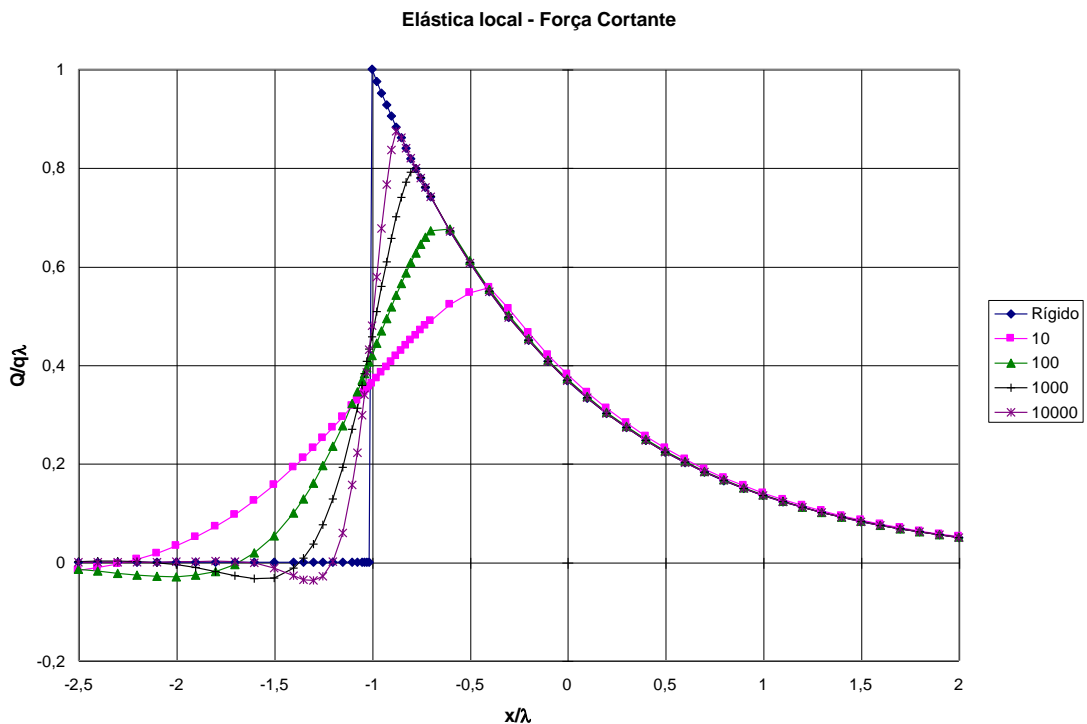


Figura 3-35 Força cortante adimensional na elástica local,  $Q(\xi)/q\lambda$  parametrizada na rigidez do

$$\text{solo } K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} = \chi_0\lambda \frac{k\lambda}{q}.$$

A incorporação do efeito de flexibilidade do solo remove a descontinuidade da força cortante, conforme pode ser observado. A transição é muito mais suave.

A título de exemplificação de valores típicos, as tabelas a seguir apresentam alguns resultados de análise e projeto preliminar referentes a um gasoduto de aço de 10”3/4 de diâmetro externo, lançado como “riser”, para escoamento de produção em 910m de profundidade; Pesce, Aranha & Pinto, 1995. As características e propriedades do tubo bem como os perfis de correnteza utilizados e as soluções estáticas correspondentes, provenientes do processamento do código RISTAT são também apresentadas. As situações de “offset” dizem respeito ao afastamento da plataforma semisubmersível em relação ao poço. A situação *neutra* é definida na ausência de correnteza. As situações “near” correspondem à incidência de correnteza no sentido de aproximar a

plataforma do poço; as situações “*far*”, ao inverso. Os valores 10% e 16% dizem respeito à relação com a profundidade.

**Tabela 3-1 Características Principais de um tubo de 10"3/4**

<b>Parâmetros</b>	<b>TUBO 10"3/4</b>
diâmetro externo (De) (m)	0,27305
diâmetro interno (m)	0,23653
espessura (t)(mm)	18,26
De/t	14.94
peso linear do aço (N/m)	1124,17
empuxo (N/m)	588,60
peso submerso (N/m)	535,57
Área da Seção ( $m^2$ )	0,01461615
Inércia Transversal ( $m^4$ )	0,119215E-03
Material	API5LX60
Rigidez Axial (kN)	3,069391E+06
Rigidez Flexional ( $kNm^2$ )	25,035E+03

**OBS:**  $g$  = aceleração de gravidade = 9,807  $m/s^2$

**Tabela 3-2 Perfis de Correnteza Decenária Projetados no Plano da Catenária 10''3/4 - SCR; 910m**

<b>PROF. (m)</b>	<b>NEAR (m/s)</b>	<b>FAR (m/s)</b>
0	-1.70	1.22
-20	-1.65	1.01
-80	-1.39	0.54
-150	-1.01	0.72
-200	-0.57	0.50
-400	-0.57	0.42
-600	-0.57	0.35
-890	-0.57	0.35
-910	0.0	0.0

**Tabela 3-3 Análise estática; correnteza decenária-(RISTAT)**

**Offset neutro:4531m. Comprimento total do tubo: 5000m.**

**Coefficiente de atrito com o Solo: 0.4. Inclinação do solo:0.0.**

<b>Situação de offset</b>	<b>offset rel ao TDP (m)</b>	<b>comp. suspenso (m)</b>	<b>Tração no Topo (kN)</b>	<b>Ângulo c/ horizontal (graus)</b>	<b>Tração no TDP (kN)</b>
<b>NEAR-16%</b>	<b>3916.8</b>	<b>1083.2</b>	<b>584.6</b>	<b>73.82</b>	<b>162.9</b>
<b>NEAR-10%</b>	<b>3845.0</b>	<b>1155.2</b>	<b>630.0</b>	<b>70.98</b>	<b>205.3</b>
<b>NEUTRA</b>	<b>3655.5</b>	<b>1344.5</b>	<b>779.0</b>	<b>68.71</b>	<b>282.8</b>
<b>FAR-10%</b>	<b>3386.6</b>	<b>1613.3</b>	<b>1017.3</b>	<b>60.49</b>	<b>501.1</b>
<b>FAR-16%</b>	<b>3152.7</b>	<b>1847.4</b>	<b>1253.7</b>	<b>53.77</b>	<b>740.97</b>

A Tabela 3-4 apresenta valores típicos do parâmetro adimensional de rigidez, para o caso considerado. Embora a variabilidade seja enorme, o efeito da rigidez do solo não será muito

pronunciado, conforme pode ser depreendido das curvas das figuras (3.35-3.37). O menor valor encontrado nas situações analisadas é  $K=4,56$ , correspondente ao maior tracionamento, e o maior valor é  $K=9,43E+05$ , correspondente ao menor tracionamento. Note que para as piores situações estruturais, de maior curvatura, correspondentes ao menor tracionamento, o solo pode ser considerado praticamente rígido.

**Tabela 3-4 Valores típicos do parâmetro adimensional de rigidez; gasoduto de 10"3/4 em 910m de profundidade**

Situação	To(kN)	$\lambda$ (m)	$\chi_0$ (m)	$k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$k$ (kN/m <sup>2</sup> )	$k$ (kN/m <sup>2</sup> )
				1,00E+02	1,00E+03	1,00E+04	1,00E+05	1,00E+06
NEAR-16%	162,9	12,40	3,29E-03	9,43E+01	9,43E+02	9,43E+03	9,43E+04	9,43E+05
NEAR-10%	205,3	11,04	2,61E-03	5,94E+01	5,94E+02	5,94E+03	5,94E+04	5,94E+05
NEUTRA	282,8	9,41	1,90E-03	3,13E+01	3,13E+02	3,13E+03	3,13E+04	3,13E+05
FAR-10%	501,1	7,07	1,07E-03	9,97E+00	9,97E+01	9,97E+02	9,97E+03	9,97E+04
FAR-16%	740,97	5,81	7,23E-04	4,56E+00	4,56E+01	4,56E+02	4,56E+03	4,56E+04

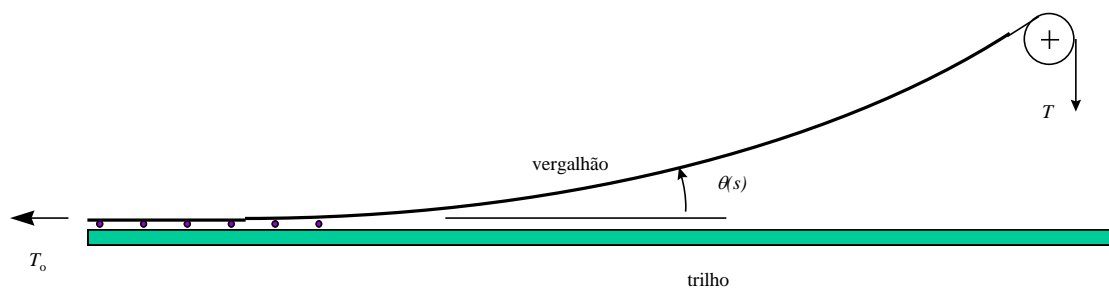
### 3.3.3.3 Solução assintótica local e suporte experimental

A solução assintótica elaborada nas seções anteriores revela um comportamento estrutural bastante peculiar, associado à ação do vínculo unilateral proporcionado pelo suporte contínuo do solo, suposto plano. Permite resolver analiticamente o problema plano no entorno da região de contato com o fundo, onde os efeitos de rigidez flexional são relevantes e necessários para prover a compatibilização da solução de catenária, que domina a quase totalidade da linha, com a condição de contorno assintótica relativa à curvatura sobre o solo. Permite também considerar o efeito da deformabilidade do solo.

Com o objetivo de confirmar o modelo teórico, foram conduzidos experimentos específicos, nos laboratórios da Divisão de Tecnologia de Transportes do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, dentro de um programa de pesquisa financiado pela PETROBRÁS. Os experimentos, de autoria da equipe técnica do IPT, são detalhadamente descritos nos relatórios técnicos (ver IPT, 1996ab), não apenas quanto à modelagem estrutural e aparato experimental, mas também quanto à

instrumentação eletrônica, procedimentos de calibração dos sensores e avaliação de erro.

Os experimentos estáticos consistiram em medir a deformação ao longo de um trecho de linha assentado sobre um plano horizontal e *suspenso por sua extremidade superior articulada* onde, através do nível da tração, impunha-se a variação da posição do ponto de toque com o plano. Das deformações, medidas através de extensômetros, é possível determinar a curvatura ao longo da linha, através da clássica equação constitutiva da Resistência dos Materiais. Os extensômetros, em número de 100, foram distribuídos ao longo da linha, em pares, e de forma diametralmente oposta à linha neutra. A Figura 3-36 ilustra o experimento, de forma esquemática.



**Figura 3-36** Ensaio estático de curvatura.

Entre diversos condicionantes dos experimentos, dois merecem destaque especial. O primeiro diz respeito à impossibilidade de simular um longo comprimento de linha. No entanto, os comprimentos dos espécimens foram especificados de forma que representassem um número suficientemente grande do parâmetro de *comprimento de*

*flexão*. O segundo diz respeito à preservação da integridade dos extensômetros e à minimização do efeito de atrito com o solo. Este último condicionante levou à substituição do apoio contínuo por uma sequência de roletes equi-espaçados e posicionados de forma intercalada aos pares de extensômetros. Este procedimento limita, ao menos em certa monta, o grau de validade do próprio experimento. No entanto, como será visto a seguir, a tendência geral prevista pelo modelo assintótico é preservada bastante bem, não apenas qualitativa mas também quantitativamente.

Dois modelos físico-estruturais foram experimentados. O primeiro, um tubo de PVC, de 2,5cm de diâmetro externo, inicialmente ensaiado, acabou por ser descartado pela razoável variabilidade que as medidas apresentavam ao longo da linha. Esta variabilidade foi atribuída à variação de espessura comumente existente em elementos desta natureza, decorrentes em geral do próprio processo de extrusão do tubo.

O segundo modelo físico-estrutural, um vergalhão de aço laminado de 12,8 mm de diâmetro, maciço portanto, e com circularidade melhor do que 0,1mm, mostrou-se mais adequado. Note que o modelo matemático desenvolvido é universalmente válido para linhas em geral, bastando que sejam conhecidos os parâmetros de peso e rigidez que o caracterizam. É válido indistintamente, portanto para tubos ou vergalhões. Note também que o modelo foi elaborado dentro da constatação de que as forças de natureza hidrodinâmica, associadas à ação da correnteza, são localmente de segunda ordem e podem ser consistentemente desconsideradas. Esta consideração justifica a realização dos experimentos “no ar”. O modelo assintótico, traduzido pela equação (3.110) (conjuntamente a (3.109) e (3.111), que dela podem ser derivadas) e pelas equações (3.127-130), é portanto redutível apenas a três parâmetros: a *curvatura de cabo*  $\chi_0 = q/T_0$ , o *comprimento de flexão*  $\lambda = EJ/T_0$  e a *rigidez do apoio*

$$K = \frac{k\lambda^2}{T_0} = \frac{k\lambda^4}{EJ} = \chi_0\lambda \frac{k\lambda}{q}.$$

As tabelas abaixo resumem as características do espécimen ensaiado e as condições gerais do experimento. Na Tabela 3-6 a identificação dos experimentos se faz através do número do extensômetro (“gage”), no trecho “assentado”, mais próximo do ponto de contato com o último rolete.

*Tabela 3-5 Dados gerais do corpo de prova.*

**ENSAIOS ESTÁTICOS DE CURVATURA JUNTO AO TDP - IPT - VERGALHÃO DE AÇO**

<b>Peso linear</b>	1,00 kgf/m	9,807	<i>N</i>
<b>E</b>	2,10E+06 kgf/cm <sup>2</sup>	205947	<i>MPa</i>
<b>Diâmetro</b>	12,8 mm	0,0128	<i>m</i>
<b>J</b>	1317,67946 mm <sup>4</sup>	1,3177E-09	<i>m<sup>4</sup></i>
<b>EJ</b>	2,77E+07 kgf*mm <sup>2</sup>	271,372132	<i>N*m<sup>2</sup></i>

*Tabela 3-6 Condições dos experimentos*

<b>GAGE -5</b>	<b>Experimento 1</b>		
<b>To</b>	44,71 kgf	438,47097	<i>N</i>
<b>Lambda</b>	786,705527 mm	0,78670553	<i>m</i>
<b>Xo</b>	0,02 1/m	0,02236636	<i>1/m</i>
<b>Ro</b>	44,71 m	44,71	<i>m</i>
<b>GAGE 25</b>	<b>Experimento 2</b>		
<b>To</b>	24,48 kgf	240,07536	<i>N</i>
<b>Lambda</b>	1063,18497 mm	1,06318497	<i>m</i>
<b>Xo</b>	0,04 1/m	0,04084967	<i>1/m</i>
<b>Ro</b>	24,48 m	24,48	<i>m</i>
<b>GAGE 5</b>	<b>Experimento 3</b>		
<b>To</b>	33,57 kgf	329,22099	<i>N</i>
<b>Lambda</b>	907,901775 mm	0,90790178	<i>m</i>
<b>Xo</b>	0,03 1/m	0,0297885	<i>1/m</i>
<b>Ro</b>	33,57 m	33,57	<i>m</i>

Não existe, obviamente, uma correspondência imediata com o modelo teórico, devido à presença dos roletes. Não é possível definir, o ponto de contato com o solo, e sim identificar a seção correspondente ao gage que mais próximo se localizava do ponto de contato com o último rolete. Unicamente para fins de identificação da situação analisada, este ponto foi arbitrado, a cada experimento, como o "ponto de contato".

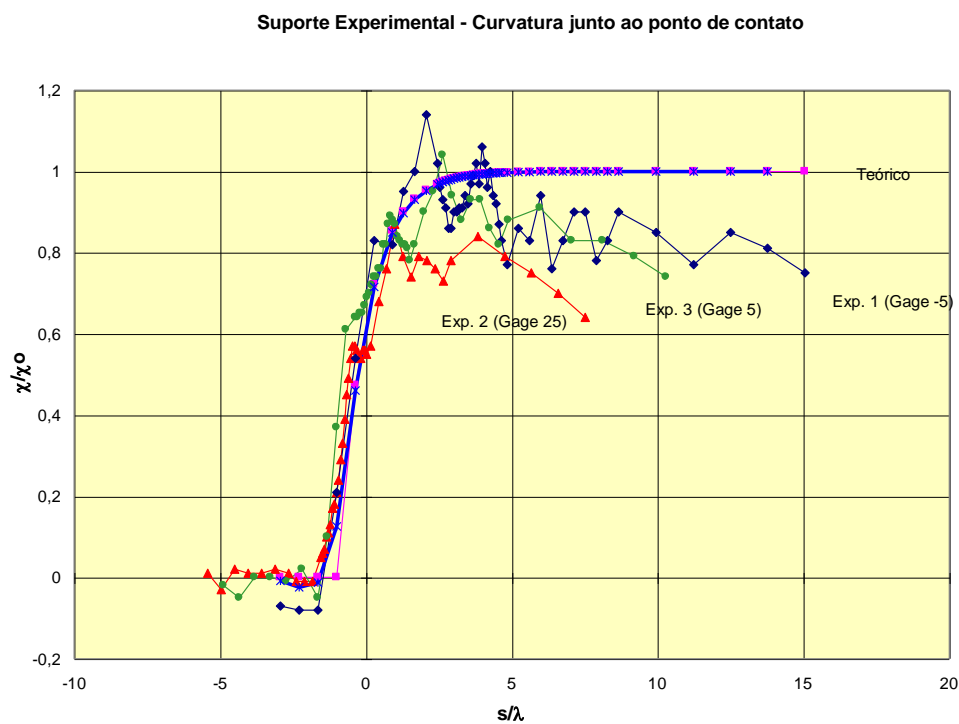
As figuras, a seguir apresentadas de forma adimensional, resumem uma sequência de três ensaios, onde o nível de tração imposta ao topo foi variado. Contrapostas aos diagramas experimentais de curvatura foi traçado o diagrama de curvatura teórico, decorrente da aplicação do modelo assintótico, sob hipótese de solo infinitamente rígido. Para fins de comparação, a curva teórica correspondente ao modelo que leva em consideração o efeito de *deformabilidade contínua do solo* é também apresentada. Na figura 3.39 foi tomado  $K=20$ , e na figura 3.40,  $K=100$ .

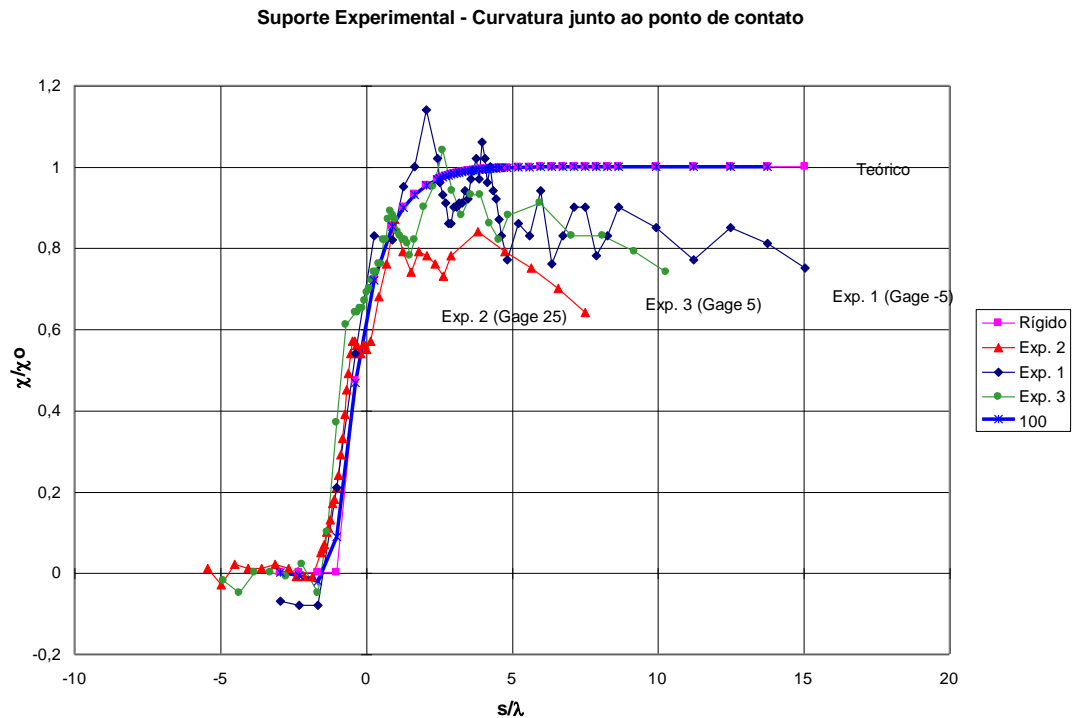
Como pode ser observado, em que pesem as restrições apontadas, ainda assim é bastante razoável a comparação teórico-experimental na região crescente do diagrama de curvatura. Devemos lembrar que o modelo teórico é de caráter local e construído de forma que a curvatura tenda, ao longe, àquela correspondente à “catenária”. É de se esperar, portanto que a comparação teórico-experimental perca o significado para valores  $s/\lambda \approx 3$  ou superiores. Posto que o corpo de prova é o mesmo, no entanto, quanto maior a tração imposta, tanto mais distante, relativamente a  $\lambda = \sqrt{EJ/T_0}$ , estará a articulação do ponto de contato. Tanto maior será, portanto, o trecho de “aderência teórico-experimental”. De fato, o experimento 1, correspondente à maior tração aplicada, tem maior trecho de aderência teórico-experimental.

Outro ponto que merece ser observado diz respeito a não serem monotônicos os diagramas de curvatura experimentais. No trecho assentado tal fato é esperado, visto que o apoio de viga contínua sobre os roletes permite inflexões da elástica. No entanto, mesmo no trecho suspenso permanece alguma oscilação. Particularmente, existe um primeiro “patamar” que se desloca para a direita à medida que a tração imposta ao topo é aumentada. Infere-se, a partir do modelo teórico apresentado na seção anterior, onde o caráter oscilatório da solução sobre o trecho assentado sobre apoio elástico foi compatibilizado ao comportamento exponencial que caracteriza o trecho suspenso, que panorama similar deva se estabelecer no caso experimental.



Neste caso, no entanto, a rigidez do apoio é “concentrada” nos roletes tão somente. Muito embora esta análise pudesse vir a ser empreendida, estendendo-se o modelo teórico, entendemos que os resultados apresentados sejam já bastante satisfatórios, ao menos no que tange ao problema de projeto, quando estes detalhes podem, por certo, ser considerados irrelevantes.





*Figura 3-38 Comparação teórico-experimental. Curvatura junto ao contato.*

### 3.3.4 O problema de curvatura junto ao topo

A técnica de camada-limite pode ser aplicada, de forma análoga, ao problema de curvatura no entorno do ponto de suspensão, permitindo então considerar o efeito local da rigidez flexional da linha, incorporar o efeito de uma eventual junta flexível, e corrigir assim a solução de cabo ideal. A Figura 3-39 apresenta uma curva de restauração típica de uma junta flexível, cuja ilustração pode ser encontrada no capítulo 2. Como pode ser observado existe um ciclo de histerese. Consideraremos, no entanto e por simplicidade, que a reação da junta flexível possa ser modelada através de uma *mola flexional linear*, de constante  $k_F$ . Definiremos como  $\Phi$  o ângulo de instalação do eixo da junta flexível com a horizontal, e  $\theta^b_L = \theta^b(L)$  o ângulo local da linha na extremidade superior, uma vez incorporado o efeito local de

rigidez flexional, e  $\theta_L = \theta(L)$  o ângulo correspondente à solução de “cabo ideal”, que domina a configuração global.

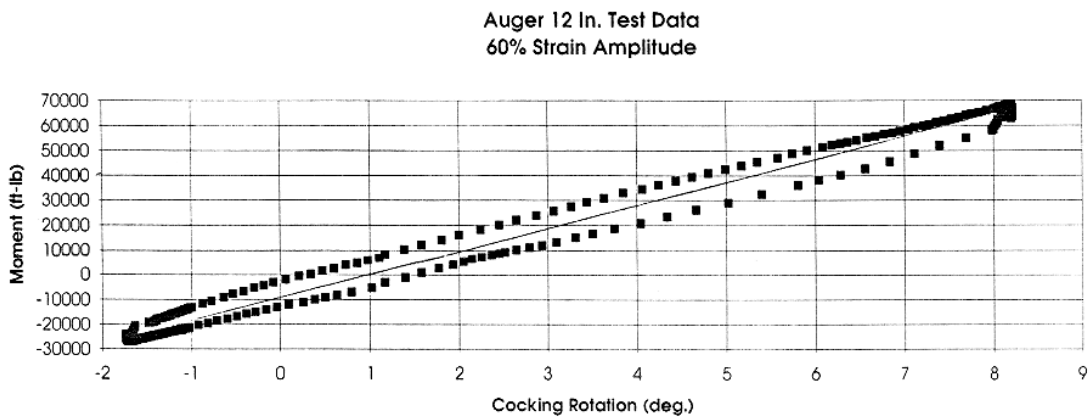


Figura 3-39 Curva de restauração típica de uma junta flexível<sup>41</sup>

Seja  $T_L$  a tração no topo, correspondente à solução de equilíbrio global, portanto sob a regência das equações de “cabo ideal”, e  $\lambda(s) = \sqrt{B/T(s)}$  o comprimento de flexão, tal que  $\lambda_L = \sqrt{B/T_L}$  define o parâmetro local. Analogamente ao estudo do efeito local de flexão junto ao ponto de contato com o fundo, a equação que rege o equilíbrio estático junto à extremidade superior pode ser escrita em termos da curvatura  $\chi(s) = d\theta^b/ds$ , na forma,

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} - \frac{1}{\lambda^2(s)}\chi = -\frac{1}{\lambda^2(s)}\chi^c(s) \quad (3.131)$$

onde  $\chi^c(s) = d\theta/ds$  corresponde à solução de cabo ideal e pode ser tomada como solução particular de (3.131). Pode-se mostrar facilmente que, na ausência de correnteza, por exemplo,

<sup>41</sup> Cortesia: Oil States Industry

$$\begin{aligned}
 \chi^c(s) &\cong \chi_L^c(1 - 2(1 - \cos \theta_L) \cos \theta_L (s - L)/H) \\
 T(s) &\cong T_L(1 + (1 - \cos \theta_L) \sin \theta_L (s - L)/H) \\
 \lambda(s) &\cong \lambda_L(1 - 1/2(1 - \cos \theta_L) \sin \theta_L (s - L)/H)
 \end{aligned} \tag{3.132}.$$

Resultado similar é obtido quando na presença de correnteza, mostrando que, com erro da ordem  $\lambda_L/H$ , a equação (3.131) pode ser aproximada por

$$\frac{d^2 \chi}{ds^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} \chi = -\frac{1}{\lambda_L^2} \chi_L^c \tag{3.133}.$$

A solução de (3.133) é imediata. De fato, tomando  $\chi_p(s) = \chi_L^c$  como solução particular vem,

$$\chi(s) = \chi_L^c + C_1 e^{(s-L)/\lambda_L} + C_2 e^{-(s-L)/\lambda_L}.$$

Condição de finitude de solução aplicada ao longe da extremidade, quando  $(s - L)/\lambda_L \rightarrow -\infty$ , conduz a  $C_2 \equiv 0$ , de forma que  $\chi(s) \rightarrow \chi_L^c$ . Por outro lado, na extremidade e devido à eventual presença de uma terminação flexível, a condição de contorno a ser satisfeita fica escrita,

$$\chi(L) = -\frac{k_F}{B}(\theta_L^b - \Phi) \tag{3.134}.$$

Assim,

$$C_1 = -\chi_L^c - \frac{k_F}{B}(\theta_L^b - \Phi)$$

e portanto, a solução local (camada-limite) é dada por,

$$\chi(s) \cong \chi_L^c - \left( \chi_L^c + \frac{k_F}{B}(\theta_L^b - \Phi) \right) e^{(s-L)/\lambda_L} \tag{3.135}.$$

Note que  $\chi(s) \rightarrow \chi_L^c$ ;  $(s-L)/\lambda_L \rightarrow -\infty$ . Podemos melhorar a aproximação, no entanto. Tomemos a equação (3.132) escrita, com erro da ordem  $\lambda_L/H$ , na forma

$$\frac{d^2 \chi}{ds^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} \chi = -\frac{1}{\lambda_L^2} \chi^c(s) \quad (3.136).$$

Da solução da catenária,

$$\frac{d^2 \chi^c}{ds^2} \approx -2\chi_0 (\chi^c(s))^2 (\cos^2 \theta(s) - 3\sin^2 \theta(s)) \quad (3.137),$$

e portanto, no interior da camada-limite,

$$\lambda_L^2 \frac{d^2 \chi^c}{ds^2} \cong -2\lambda_L^2 (\chi^c(s))^3 (1 - 3\tan^2 \theta(s)) \approx \chi^c(s) \left(1 - O\left(2\lambda_L^2 \chi_L^{c2} (1 - 3\tan^2 \theta_L)\right)\right).$$

Também, da solução de catenária,

$$\begin{aligned} \lambda_L^2 \chi_L^{c2} &\cong \varepsilon^2 \cos^2 \theta_L \\ \varepsilon^2 &= \frac{B}{qH^3} (1 - \cos \theta_L)^3 \end{aligned} \quad (3.138).$$

Assim,

$$\lambda_L^2 \frac{d^2 \chi^c}{ds^2} \approx \chi^c(s) \left(1 + O\left(2\varepsilon^2 (3\sin^2 \theta_L - \cos^2 \theta_L)\right)\right) \approx \chi^c(s) \left(1 + O(6\varepsilon^2)\right) \quad (3.139),$$

e portanto a solução particular de (3.136) pode ser escrita,

$$\chi_p(s) = \chi^c(s) \left(1 + O(6\varepsilon^2)\right) \quad (3.140).$$

Analogamente a (3.133), a solução geral de (3.136) fica então dada então por<sup>42</sup>

$$\chi(s) \cong \chi^c(s) + C_1 e^{(s-L)/\lambda_L} + C_2 e^{-(s-L)/\lambda_L}$$

e portanto, a solução local (camada-limite) é dada por,

$$\chi(s) \cong \chi^c(s) - \left( \chi_L^c + \frac{k_F}{B} (\theta_L^b - \Phi) \right) e^{(s-L)/\lambda_L} \quad (3.141).$$

A equação (3.141) permite ajustar a solução de cabo ideal àquela de viga, portanto. De (3.141), integrada, segue (localmente) que,

$$\theta^b(s) = \theta(s) - \left( \chi_L^c \lambda_L + \frac{k_F \lambda_L}{B} (\theta_L^b - \Phi) \right) e^{(s-L)/\lambda_L} + C.$$

Note que  $\frac{k_F \lambda_L}{B} = \frac{k_F}{\lambda_L T_L}$ , e assim,

$$\left( \chi_L^c \lambda_L + \frac{k_F \lambda_L}{B} (\theta_L^b - \Phi) \right) e^{(s-L)/\lambda_L} \approx \frac{k_F}{\lambda_L T_L} (\theta_L^b - \Phi) e^{(s-L)/\lambda_L} \quad \text{quando } B = \lambda_L^2 T_L \rightarrow 0 \quad (3.142).$$

Ou seja, quando a rigidez flexional da linha é nula, consistentemente  $\theta^b(s) \equiv \theta(s)$ , mostrando que  $C \equiv 0$ . Desta forma,

$$\theta^b(s) = \theta(s) - \left( \chi_L^c \lambda_L + \frac{k_F \lambda_L}{B} (\theta_L^b - \Phi) \right) e^{(s-L)/\lambda_L} \quad (3.143).$$

---

<sup>42</sup> Uma vez conhecida  $\lambda(s)$  é possível integrar (3.131) de forma geral, no entanto.

Tomando agora  $s = L$  vem então,

$$\theta_L^b = \frac{\theta_L + \frac{k_F \lambda_L}{B} \Phi - \chi_L^c \lambda_L}{1 + \frac{k_F \lambda_L}{B}} = \frac{\theta_L + \frac{k_F}{\lambda_L T_L} \Phi - \chi_L^c \lambda_L}{1 + \frac{k_F}{\lambda_L T_L}} \quad (3.144).$$

A expressão acima fornece o ângulo na extremidade superior, já corrigido do efeito da rigidez flexional e da ação da junta flexível. Note que a situação ideal de projeto é aquela em que, para uma dada condição ambiental impõe-se  $\chi_L = \chi(L) = 0$ , o que significa anular o desvio de ângulo entre a linha e o eixo da terminação, ou seja, fazer  $\theta_L^b = \Phi$ , conforme deduzido de (3.141). Esta condição, imposta em (3.144) implica em posicionar o eixo da terminação flexível de tal forma que

$$\Phi^* = \theta_L - \chi_L^c \lambda_L \quad (3.145).$$

Note também que se a extremidade superior estiver articulada de forma ideal ( $k_F \equiv 0$ ), a curvatura local será dada por,

$$\chi(s) \cong \chi^c(s) - \chi_L^c e^{(s-L)/\lambda_L} \quad (3.146),$$

e o ângulo correspondente por,

$$\theta^b(s) = \theta(s) - \chi_L^c \lambda_L e^{(s-L)/\lambda_L} \quad (3.147),$$

o ângulo na extremidade ficando então,

$$\theta_L^b = \theta_L - \chi_L^c \lambda_L \quad (3.148).$$

É importante ressaltar que,  $\chi_L^c \lambda_L \approx \varepsilon \ll 1$ <sup>43</sup>, tornando sua contribuição pouco relevante na prática, embora desempenhe papel fundamental do ponto de vista da consistência conceitual no desenvolvimento da solução local. Pode-se interpretar este parâmetro adimensional como a medida do erro cometido quando se afirma que o ângulo da linha na extremidade superior *articulada* é o próprio ângulo obtido da solução de cabo ideal.

O exemplo do gasoduto de 10”3/4 de diâmetro em 910m de profundidade, apresentado anteriormente, é útil no sentido de exemplificar valores típicos. A rigidez da junta flexível, neste caso particular, deve satisfazer  $k_f \leq 9,6kNm/^\circ$ , para que a máxima tensão na linha, considerando sua resposta dinâmica, não ultrapasse 72% do valor de escoamento, nas proximidades do topo; ver Pesce, 1994c. A tabela abaixo apresenta um resumo da análise estática, com os valores de parâmetros adimensionais de rigidez correspondentes às diversas situação de “offset”. Note que na situação “neutra”, na ausência de correnteza, a tabela mostra valores calculados numericamente, através do programa RISTAT, assim como valores calculados analiticamente. A pequena diferença deve-se aos efeitos de extensibilidade da linha e atrito com o solo, considerados na solução numérica.

---

<sup>43</sup> Na ausência de correnteza, por exemplo,  $\chi_L^c \lambda_L = \frac{(1 - \cos \theta_L) \cos \theta_L}{H} \left( \frac{B(1 - \cos \theta_L)}{qH} \right)^{1/2}$ .



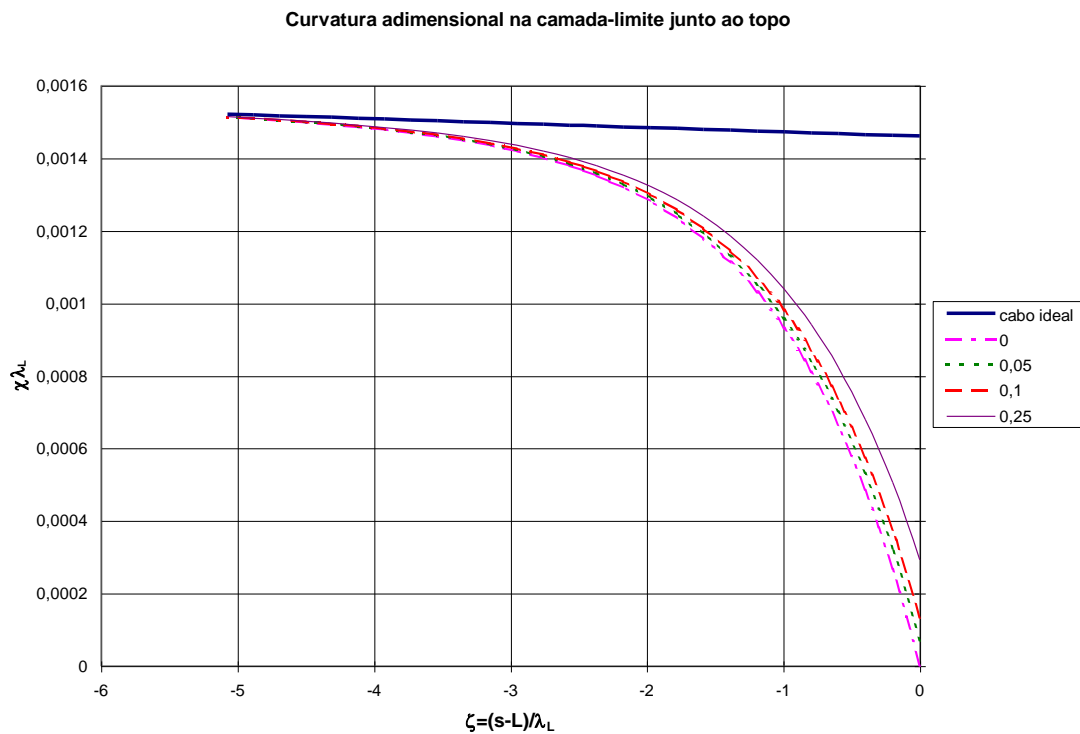
**Tabela 3-7 Parâmetro adimensional de rigidez flexional da junta flexível para o gasoduto de 10”3/4 de diâmetro em 910m de profundidade.**

				$k_F$ (kNm/o)	$k_F$ (kNm/o)	$k_F$ (kNm/o)	$k_F$ (kNm/o)	$k_F$ (kNm/o)
				1,00E+00	2,00E+00	5,00E+00	1,00E+01	2,00E+01
				1,64E-02	3,28E-02	8,20E-02	1,64E-01	3,28E-01
<b>RISTAT</b>								
<b>Situação</b>	<b>Tt(kN)</b>	<b><math>\lambda t</math> (m)</b>	<b><math>\theta t</math> (graus)</b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>
NEAR-16%	584,6	6,54	73,82	1,50E-02	3,00E-02	7,49E-02	1,50E-01	3,00E-01
NEAR-10%	630	6,30	70,98	1,44E-02	2,89E-02	7,21E-02	1,44E-01	2,89E-01
NEUTRA	779	5,67	68,71	1,30E-02	2,59E-02	6,49E-02	1,30E-01	2,59E-01
FAR-10%	1017,3	4,96	60,49	1,14E-02	2,27E-02	5,68E-02	1,14E-01	2,27E-01
FAR-16%	1253,7	4,47	53,77	1,02E-02	2,05E-02	5,11E-02	1,02E-01	2,05E-01
<b>Análítico s/correnteza</b>								
<b>Situação</b>	<b>Tt(kN)</b>	<b><math>\lambda t</math> (m)</b>	<b><math>\theta t</math> (graus)</b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>	<b><math>K_F</math></b>
NEUTRA	765,82	5,72	6,87E+01	1,31E-02	2,62E-02	6,54E-02	1,31E-01	2,62E-01

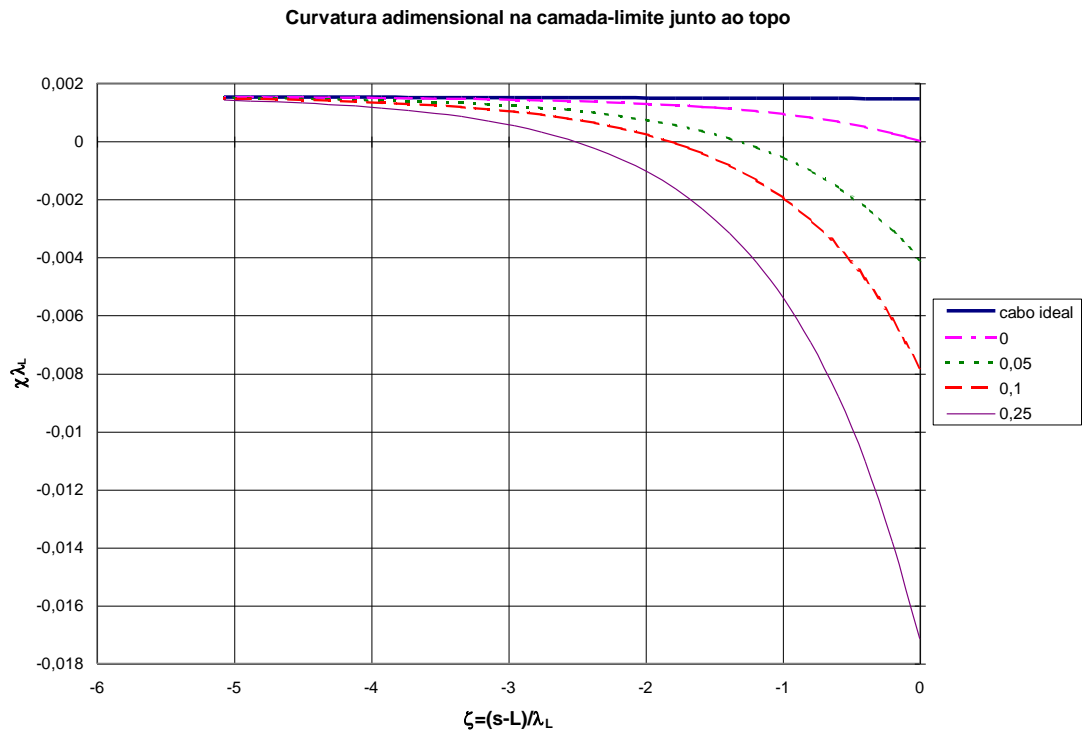
As figuras abaixo apresentam a função de curvatura adimensionalizada  $\chi(\zeta)\lambda_L$ ;  $\zeta = (s - L)/\lambda_L$ , parametrizada em função do adimensional de rigidez da terminação  $K_F = k_F \lambda_L / B$ , no caso de ausência de correnteza, quando a solução correspondente a cabo ideal pode ser determinada de forma analítica. Como exemplo considerou-se  $\theta_L = 70^\circ$ . A Figura 3-40 exemplifica o caso em que  $\Phi = \theta_L = 70^\circ$ , ou seja o eixo da terminação flexível é ajustado de forma a se alinhar com o ângulo correspondente à solução de cabo ideal. Conforme era de se esperar a curvatura na extremidade superior se anula quando a rigidez da terminação é nula. A Figura 3-41 corresponde a uma situação genérica, na qual foi arbitrariamente admitido  $\Phi = 65^\circ$ . Note que, confirmando a expectativa, a curvatura na extremidade tem sinal negativo quando a rigidez da terminação é diferente de zero, denotando a existência de inflexão na linha. Por fim, a Figura 3-42 corresponde ao caso ideal de projeto, para o qual  $\chi_L = \chi(L) = 0$  e  $\Phi^* = \theta_L - \chi_L^c \lambda_L = 1.22027 \text{ rad} = 69.91633^\circ$ , conforme estabelecido pela equação (3.145). Nesta última situação a função de curvatura é independente da rigidez da terminação, como pode ser constatado de (3.141).

Os exemplos apresentados mostram, claramente, que existem duas escalas de comprimento nas quais ocorrem as variações da curvatura. A primeira, associada à

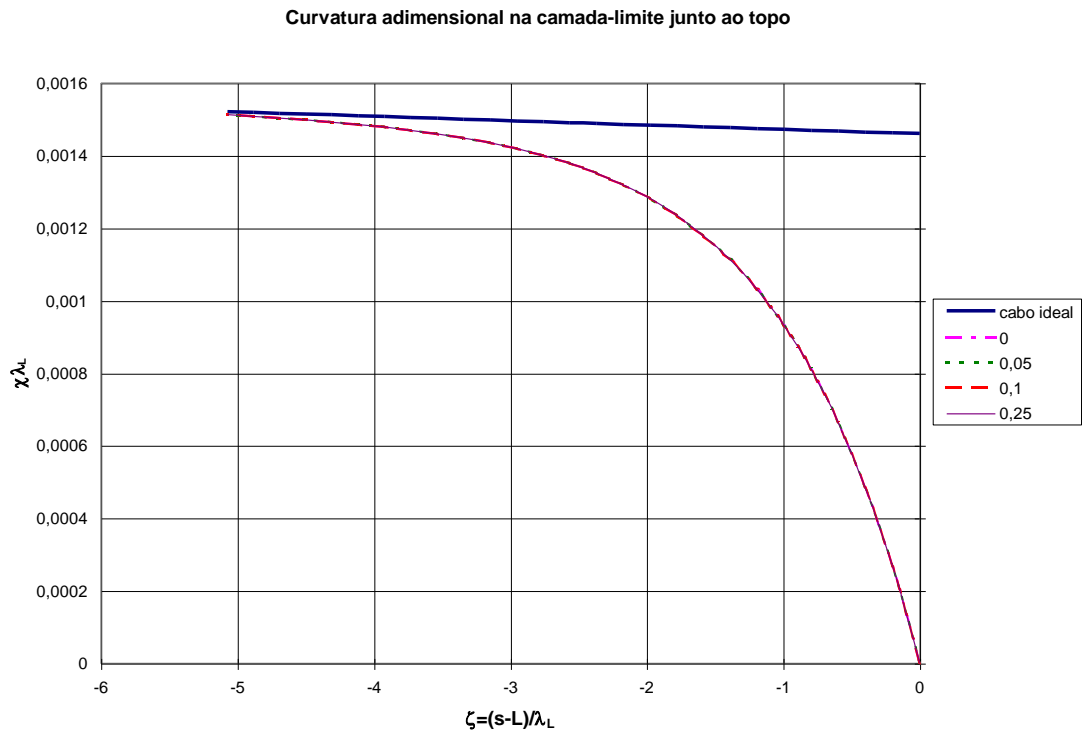
solução de cabo, bastante maior, da ordem do comprimento suspenso do cabo. A segunda, correspondente à "correção de camada-limite", da ordem do comprimento de flexão. Este fato é que permite que a solução particular da equação (3.136) possa ser tomada como a função de curvatura de cabo, conforme apresentado na discussão das equações (3.137)-(3.140). Na realidade, a existência de duas escalas de comprimento permite que a argumentação apresentada possa ser melhor formalizada à luz da técnica de "escalas múltiplas"; ver p.ex., Bender & Orzag, 1978, capítulo 11.



**Figura 3-40** Curvatura adimensional  $\chi(\zeta)\lambda_L$ ;  $\zeta = (s - L)/\lambda_L$  junto à extremidade superior parametrizada em  $K_F = k_F \lambda_L / B$ .  $\theta_L = 70^\circ$ ;  $\Phi = \theta_L = 70^\circ$ . Ausência de correnteza.



**Figura 3-41** Curvatura adimensional  $\chi(\zeta)\lambda_L$ ;  $\zeta = (s - L)/\lambda_L$  junto à extremidade superior parametrizada em  $K_F = k_F \lambda_L / B$ .  $\theta_L = 70^\circ$ ;  $\Phi = 65^\circ$ . Ausência de correnteza.



**Figura 3-42** Curvatura adimensional  $\chi(\zeta)\lambda_L$ ;  $\zeta = (s - L)/\lambda_L$  junto à extremidade superior parametrizada em  $K_F = k_F \lambda_L / B$ .  $\theta_L = 70^\circ$ . Ausência de correnteza.

$$\Phi^* = \theta_L - \chi_L^c \lambda_L = 1,22027 \text{ rad} = 69,91633^\circ = \theta_L^b.$$

## **4. O PROBLEMA DINÂMICO PLANO DE LINHAS SUBMERSAS**

Neste capítulo o problema plano da dinâmica de linhas submersas é abordado. Uma série de resultados, referentes à resposta dinâmica em curvatura e tração, são deduzidos através da elaboração sistemática de modelos assintóticos. O mais importante deles dá origem a uma solução analítica que permite representar a resposta dinâmica de curvatura junto ao ponto de contato com o solo. Este modelo, originalmente desenvolvido por Aranha, Martins & Pesce, 1995, é aqui reelaborado e plenamente validado através de sua confirmação experimental. Adicionalmente, outros resultados originais, referentes à curvatura junto à extremidade suspensa, na presença de terminações flexíveis, são também apresentados.

Como é usual no tratamento de problemas dinâmicos na engenharia, o equacionamento do comportamento dinâmico global da linha pode ser elaborado através da aplicação da técnica de perturbações em torno da configuração estática de equilíbrio, esta sim resultante de solução não-linear, conforme apresentado no capítulo 3. No entanto, a presença de um vínculo uni-lateral junto ao ponto de contato com o fundo introduz uma importante fonte de não-linearidade geométrica que deve ser analisada cuidadosamente. Esta condição de contorno não-linear evidencia-se através da variação da posição do ponto de contato. Da análise deste vínculo geométrico a condição de “choque” com o solo é recuperada, mostrando-se sua dependência com o número de Mach local que relaciona a velocidade de progressão do ponto de contato com a velocidade de propagação da onda elástica transversal. Em regimes subcríticos, ou seja, quando o número de Mach local é inferior a 1, o vínculo cinemático unilateral no fundo é então análogo ao movimento de um disco de raio variável que rola sem escorregamento. Nesta situação, o ponto de contato será denominado “*ponto de contato instantâneo*” (*PCI*), em analogia ao “*centro instantâneo de rotação no movimento plano de um corpo rígido*”.

Junto ao ponto de contato com o fundo, as forças de restauração geométrica e elástica são dominantes sobre as forças de inércia e de arrasto, que podem ser localmente desprezadas, com erro de segunda ordem no número de Mach. A resposta dinâmica sub-crítica é então elaborada e a resposta dinâmica não-linear de curvatura na região do ponto de contato é determinada analiticamente. O modelo é então confrontado com resultados de experimentos dinâmicos realizados nos laboratórios do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, quando sua validade é demonstrada de forma definitiva.

A resposta de curvatura local junto à extremidade suspensa, na presença de uma terminação flexível, é elaborada de forma análoga, através da técnica de camada-limite. A resposta dinâmica em tração, previamente elaborada em Aranha et alii, 1993, é apresentada de forma resumida no Anexo I, dando consistência à hipótese de invariância de amplitude da tração dinâmica ao longo do comprimento suspenso, fundamental aos modelos de curvatura.

## 4.1 EQUAÇÃO GERAL NO PLANO

Considere o problema plano, cuja configuração estática fora previamente determinada e é caracterizada pelas funções  $\theta(s)$ , o ângulo da linha em relação à horizontal, e  $T(s)$ , a tração efetiva. Sejam

$$\begin{aligned}\Theta(s, t) &= \theta(s) + \gamma(s, t) \\ T(s, t) &= T(s) + \tau(s, t)\end{aligned}\tag{4.1},$$

as funções correspondentes, no problema dinâmico, e

$$Q(s, t) = Q(s) + \mathcal{Q}(s, t)\tag{4.2}$$

o esforço cortante. Consideraremos  $\gamma(s, t) \ll 1$ , tratando portanto de pequenas perturbações geométricas em torno da configuração de equilíbrio estático.

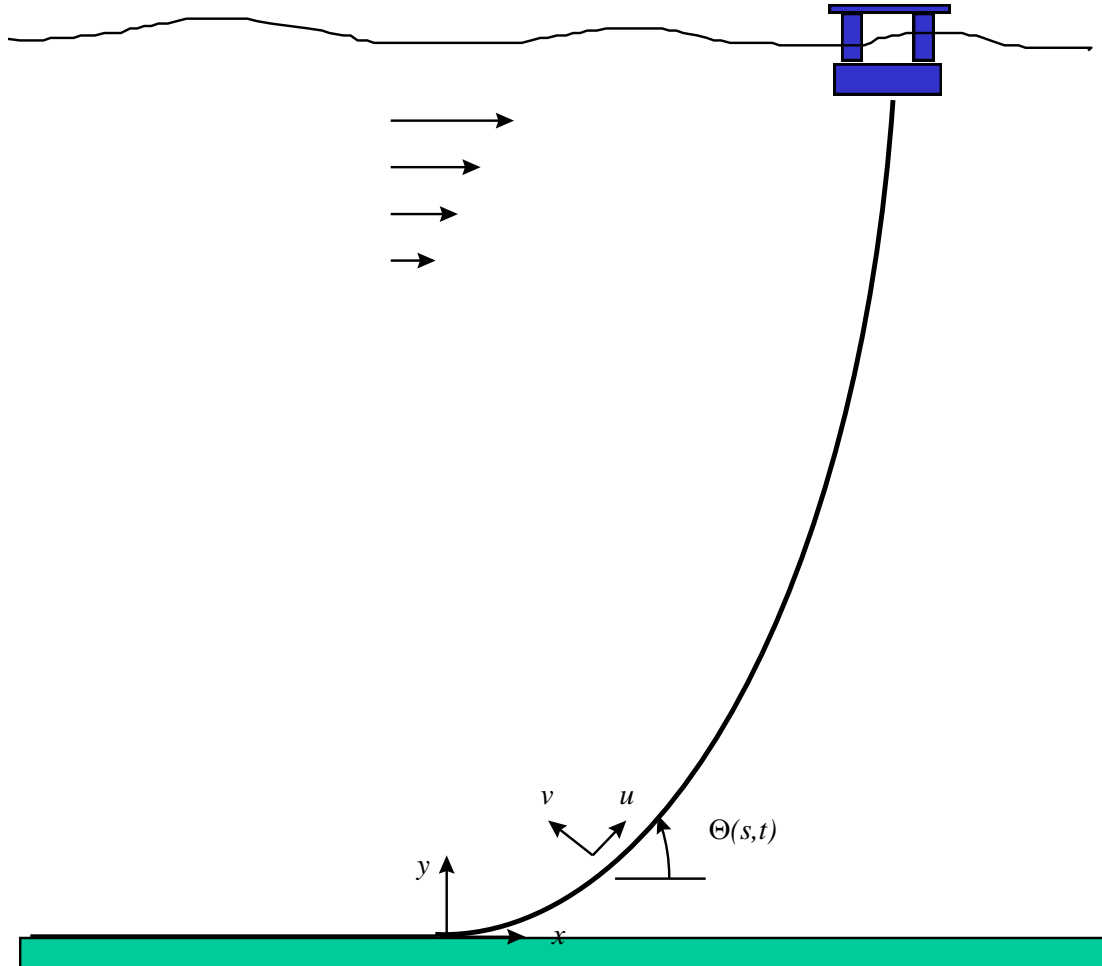
O plano vertical  $(x, y)$  é orientado pelos versores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e o versor  $\mathbf{k}$ , que completa a base ortonormal, é perpendicular ao plano. O triedro  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k})$  é a base de orientação ao longo da linha, com  $\mathbf{u}$  o versor na direção da tangente e  $\mathbf{v}$  o versor na direção normal<sup>44</sup>. Os pequenos deslocamentos nestas direções serão indicados pelas funções  $u(s, t)$  e  $v(s, t)$ , de tal sorte que em primeira ordem podemos escrever,

$$\gamma(s, t) = \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds}\tag{4.3}.$$

---

<sup>44</sup> Conforme exposto no capítulo 3 o versor  $\mathbf{v}$  coincide com o versor normal quando a curvatura estática é positiva.





**Figura 4-1 O problema plano**

Tomando um elemento de arco de comprimento  $\delta s$ , as forças de natureza elástica, sobre ele agentes nas direções tangente e normal, serão dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
 \delta F_u &= T(s + \delta s, t) \cos(\delta\theta + \gamma(s + \delta s, t)) - T(s, t) \cos \gamma(s, t) - \\
 &\quad - (Q(s + \delta s, t) \sin(\delta\theta + \gamma(s + \delta s, t)) - Q(s) \sin \gamma(s, t)) \\
 \delta F_v &= Q(s + \delta s, t) \cos(\delta\theta + \gamma(s + \delta s, t)) - Q(s) \cos \gamma(s, t) + \\
 &\quad + (T(s + \delta s, t) \sin(\delta\theta + \gamma(s + \delta s, t)) - T(s, t) \sin \gamma(s, t))
 \end{aligned}
 \tag{4.4}.$$

Se apenas termos de primeira-ordem forem retidos teremos,

$$\begin{aligned}
 \delta F_u &\cong T(s + \delta s, t)(1 - \gamma \delta \theta) - T(s, t) - \\
 &\quad - \left( Q(s + \delta s, t) \delta \theta + Q(s + \delta s, t) \gamma(s + \delta s, t) - Q(s, t) \gamma(s, t) \right) \\
 \delta F_v &\cong Q(s + \delta s, t)(1 - \gamma \delta \theta) - Q(s, t) + \\
 &\quad + \left( T(s + \delta s, t) \delta \theta + T(s + \delta s, t) \gamma(s + \delta s, t) - T(s, t) \gamma(s, t) \right)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

O equilíbrio dinâmico do elemento de arco leva então a

$$\begin{aligned}
 \delta F_u + h_u \delta s - q \operatorname{sen} \theta \delta s &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta s \\
 \delta F_v + h_v \delta s - q \operatorname{cos} \theta \delta s &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta s
 \end{aligned} \tag{4.6},$$

onde

$$\begin{aligned}
 h_u(s, t) &= h_u(s) + \varpi_u(s, t) \\
 h_v(s, t) &= h_v(s) + \varpi_v(s, t)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

referem-se às forças de natureza hidrodinâmica e  $q$  é o peso imerso da linha. Os termos  $h_{u,v}(s)$  dizem respeito às componentes estáticas de força associadas à correnteza. As parcelas  $\varpi_{u,v}(s, t)$  indicam o carregamento dinâmico associado ao movimento relativo ao campo de escoamento local, composto pelo perfil de correnteza e pelas ondas incidentes. Estas parcelas são usualmente modeladas pela clássica fórmula de Morison. Assim, tomando o limite de (4.6), quando  $\delta s \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial s} - (T\gamma + Q) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} (Q\gamma) + h_u + \varpi_u - q \operatorname{sen} \theta &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial Q}{\partial s} + (T - Q\gamma) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} (T\gamma) + h_v + \varpi_v - q \operatorname{cos} \theta &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{4.8},$$

ou, com o uso de (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial s} - \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) + Q \right) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} \left( Q \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + h_u + \varpi_u - q \sin \theta &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \left( T - Q \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + h_v + \varpi_v - q \cos \theta &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.8a).$$

Estas equações regem a dinâmica de linhas no plano. Devem ser integradas numericamente, em geral, sob condições de contorno que representem os vínculos geométricos, cinemáticos ou mesmo dinâmicos.

A terceira equação de Love, para o caso estático plano, que relaciona o momento fletor à força cortante, na ausência de momento externo é,

$$\frac{\partial M}{\partial s} + Q = 0 \quad (4.9).$$

Consistentemente, a terceira equação dinâmica diz respeito à rotação e pode ser escrita

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} + \mathcal{G} = \frac{\partial}{\partial s} \left( m r^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right) \quad (4.10),$$

onde  $\mu$  é o momento fletor dinâmico e  $r$  é o raio de giração da seção. Dada a esbeltez da linha é razoável desconsiderarmos a parcela associada à inércia rotacional da seção transversal, hipótese usual na Teoria de Viga de Euler, de tal forma que,

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} + \mathcal{G} \cong 0 \quad (4.11).$$

Assim, a relação entre momento fletor e força cortante totais fica dada por,

$$\frac{\partial M}{\partial s} + Q = 0 \quad (4.12).$$

Por outro lado, admitindo três hipóteses usuais da Resistência dos Materiais,

1. linearidade entre tensões e deformações;
2. pequenas deformações;
3. seções planas permanecem planas após a deformação,

a seguinte relação constitutiva é válida,

$$M = B \frac{\partial \Theta}{\partial s} = B \chi \quad (4.13),$$

de tal forma que podemos escrever,

$$\begin{aligned} M &= B \frac{d\theta}{ds} \\ \mu &= B \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cong B \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + B \frac{\partial}{\partial s} \left( u \frac{d\theta}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4.13a)$$

e de (4.9) e (4.10), vem

$$\begin{aligned} Q &= - \frac{\partial}{\partial s} \left( B \frac{d\theta}{ds} \right) \\ \mathcal{G} &= - \frac{\partial}{\partial s} \left( B \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + B \frac{\partial}{\partial s} \left( u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.14).$$

Em particular, substituindo (4.13) em (4.12) e esta na segunda das equações (4.8) obtemos,

$$-\frac{\partial^2}{\partial s^2}(B\chi) + \left( T - \frac{\partial}{\partial s}(B\chi)\gamma \right) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s}(T\gamma) + h_v + \varpi_v - q \cos\theta = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.15).$$

Se a propriedade de rigidez flexional for suposta invariante ao longo da linha, (4.15) reduz-se a

$$-B \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} - \gamma B \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial \chi}{\partial s} + T\chi + \gamma \frac{\partial T}{\partial s} + h_v + \varpi_v - q \cos\theta = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.15a)$$

A equação (4.15a) é fundamental à análise local, via técnica de *camada-limite*, a ser empreendida junto ao TDP e à extremidade superior, na seção 4.2.

O desenvolvimento a seguir, finalizando a presente seção, tem como objetivo completar a análise do problema de perturbação global. Para tanto as equações (4.8) são escritas,

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial s} - Q \frac{d\theta}{ds} + h_u - q \sin\theta \right\} + \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial s} - (T\gamma + \mathcal{G}) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s}(Q\gamma) + \varpi_u \right\} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial s} + T \frac{d\theta}{ds} + h_v - q \cos\theta \right\} + \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + (\tau - Q\gamma) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s}(T\gamma) + \varpi_v \right\} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.16),$$

ou ainda, de (4.3),

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\partial T}{\partial s} - Q \frac{d\theta}{ds} - q \operatorname{sen} \theta + h_u \right\} + \\
 & + \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial s} - \left[ T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) + \mathcal{G} \right] \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} \left( Q \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_u \right\} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 & \left\{ \frac{\partial Q}{\partial s} + T \frac{d\theta}{ds} - q \cos \theta + h_v \right\} + \\
 & + \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + \left[ \tau - Q \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right] \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_v \right\} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{4.16a}.$$

O primeiro colchete, em ambas as equações acima, representa a solução estática<sup>45</sup>, anulando-se identicamente, portanto. As equações que regem as variáveis dinâmicas são então escritas,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau}{\partial s} - ((T + \tau)\gamma + \mathcal{G}) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} ((Q + \mathcal{G})\gamma) + \varpi_u &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + (\tau - (Q + \mathcal{G})\gamma) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} ((T + \tau)\gamma) + \varpi_v &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{4.17}.$$

ou ainda, em termos dos deslocamentos,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau}{\partial s} - \left( (T + \tau) \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) + \mathcal{G} \right) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} \left( (Q + \mathcal{G}) \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_u &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + \left( \tau - (Q + \mathcal{G}) \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} \left( (T + \tau) \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_v &= m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{4.17a)}.$$

<sup>45</sup> Se levado até segunda-ordem, o carregamento associado às ondas apresentará uma parcela constante que modificará, em pequena monta, a configuração estática. Este efeito não será aqui considerado, no entanto.

Se for admitido que  $O(\tau/T) \ll 1$  e  $O(\mathcal{G}/Q) \ll 1$ , as equações (4.17) ficam simplificadas à forma

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} - (T\gamma + \mathcal{G}) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s}(Q\gamma) + \varpi_u = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + (\tau - Q\gamma) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s}(T\gamma) + \varpi_v = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

ou, em termos dos deslocamentos,

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} - \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) + \mathcal{G} \right) \frac{d\theta}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} \left( Q \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_u = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.18a).$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} + \left( \tau - Q \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_v = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Note que, em (4.17) o termo  $\frac{\partial(\tau\gamma)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \tau \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right)$ , desconsiderado em (4.18),

*pode vir a reger fenômenos de instabilidade do tipo que comparecem no estudo da clássica equação de Mathieu.* Desconsiderá-lo *a priori*, portanto, impossibilita tal tipo de análise.

No entanto, se a análise ficar restrita unicamente ao comportamento sob a hipótese de pequenas perturbações, seja quanto aos deslocamentos ou tração, as equações (4.18) são bastante convenientes. No que segue, até o final desta seção, este será o foco de nossa atenção.

Lembrando, agora, que  $\tau(s,t)$  é a variação da tração efetiva tem-se, da relação constitutiva de deformação axial, *válida apenas em estado uniaxial de tensão*,

$$\begin{aligned}
 \tau(s, t) &= EA\tilde{\varepsilon}(s, t) + q_f (u \sin \theta + v \cos \theta) \\
 \tilde{\varepsilon}(s, t) &= \left( \frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{d\theta}{ds} \right) \\
 q_f &= (\rho_a S_o - \rho_f S_i)g
 \end{aligned} \tag{4.19},$$

onde o primeiro termo corresponde à clássica equação constitutiva, o segundo termo está associado à variação de pressão hidrostática devida ao movimento, com  $\rho_a$  e  $\rho_f$ , respectivamente, as densidades de massa da água e do eventual fluido interno (no caso de tubos)<sup>46</sup>. Assim, substituindo (4.19) nas equações (4.18), e admitindo, por simplicidade, invariância das propriedades da seção ao longo do comprimento, vem

$$\begin{aligned}
 &EA \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial s} + q_f (\tilde{\varepsilon} \sin \theta + \gamma \cos \theta) - \\
 & - \left( T\gamma - B \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right) \frac{d\theta}{ds} - B \frac{d^3 \theta}{ds^3} \gamma - B \frac{d^2 \theta}{ds^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} + \varpi_u = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 & - B \frac{\partial^3 \gamma}{\partial s^3} + \left( EA\tilde{\varepsilon} + q_f (u \sin \theta + v \cos \theta) + B \frac{d^2 \theta}{ds^2} \gamma \right) \frac{d\theta}{ds} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial s} (T\gamma) + \varpi_v = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{4.20},$$

ou em termos apenas dos deslocamentos

<sup>46</sup> Obviamente esta relação fica muito mais complexa se estado triplo de tensão for considerado.



$$\begin{aligned}
 & EA \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{d\theta}{ds} \right) + q_f \left( \left( \frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{d\theta}{ds} \right) \sin \theta + \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \cos \theta \right) - \\
 & \quad - \left( \left( T - B \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) \frac{d\theta}{ds} - \\
 & \quad - B \frac{d^3 \theta}{ds^3} \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) - B \frac{d^2 \theta}{ds^2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) + \varpi_u = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 & \quad - B \frac{\partial^3}{\partial s^3} \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) + \\
 & \quad + \left( EA \left( \frac{\partial u}{\partial s} - v \frac{d\theta}{ds} \right) + q_f (u \sin \theta + v \cos \theta) + B \frac{d^2 \theta}{ds^2} \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) \frac{d\theta}{ds} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial s} \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_v = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.20a}$$

As equações (4.18) acoplam-se através da curvatura estática, das forças hidrodinâmicas e da extensibilidade. No caso particular de linha vertical este acoplamento é mais fraco, como pode ser facilmente verificado, restringindo-se a termos de segunda-ordem. Nesta situação, que apenas será válida na ausência de correnteza,  $\theta = \pi/2$ , e desconsiderando termos não-lineares, as equações ficam completamente desacopladas. De fato, de (4.20a) vem que

$$\begin{aligned}
 & EA \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + q_f \frac{\partial u}{\partial s} + \varpi_u = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 & - B \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \frac{\partial}{\partial s} \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right) + \varpi_v = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

válida para linha vertical na ausência de correnteza

Note que se, além de possuir propriedades invariantes ao longo do comprimento, a linha for considerada ideal, ou seja inextensível e infinitamente flexível, a equação dinâmica linear fica simplificada à forma,

$$\left( q_f \cos \theta - T \frac{d\theta}{ds} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) + \varpi_u = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.22).$$

$$q_f (u \sin \theta + v \cos \theta) \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s} \left( T \left( \frac{\partial v}{\partial s} + u \frac{d\theta}{ds} \right) \right) + \varpi_v = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Voltando à equação (4.20), seja agora  $T_a$  uma escala típica de tração, por exemplo o valor estático que ocorre na seção da linha que é definida pela tangente paralela à corda que une o ponto de contato à extremidade superior. Sejam, respectivamente,  $\lambda_a = \sqrt{B/T_a}$ ;  $c_a = T_a/m$  escalas típicas para comprimento de flexão e velocidade de propagação de ondas transversais. Seja, por outro lado,  $c_b = \sqrt{EA/m}$  a escala típica de velocidade de propagação de ondas longitudinais. Como pode ser depreendido, existem duas escalas de tempo muito distintas entre si. A primeira, está relacionada ao tempo de percurso das ondas transversais, mais lentas, dada por  $L/c_a$ ; a segunda, refere-se ao tempo de percurso das ondas longitudinais, muito mais rápidas, e tem o valor típico  $L/c_b$ . Esta segunda escala de tempo é muitas vezes inferior aos períodos típicos de excitação presentes no ambiente marítimo. Definindo então os adimensionais  $\xi = s/L$ ;  $v = u/L$ ;  $\eta = v/L$ ;  $\hat{T} = T/T_a$ , e utilizando a primeira escala de tempo, associada às ondas transversais, de tal forma que  $\zeta = t c_a/L$  seja o tempo adimensional, as equações (4.20) (ou (4.20a)) podem ser escritas na forma adimensional,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \xi} &= \frac{T_a}{EA} \left[ -\frac{q_f L}{T_a} (\tilde{\varepsilon} \sin \theta + \gamma \cos \theta) \right] + \\
 &+ \frac{T_a}{EA} \left[ \hat{T} \gamma \frac{d\theta}{d\xi} - \left( \frac{\lambda_a}{L} \right)^2 \left( \frac{d\theta}{d\xi} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2} - \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} - \frac{d^3 \theta}{d\xi^3} \gamma \right) - \frac{\varpi_u L}{T_a} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} \right] \\
 & - \left( \frac{\lambda_a}{L} \right)^2 \frac{\partial^3 \gamma}{\partial \xi^3} + \left( \frac{EA}{T_a} \tilde{\varepsilon} + \frac{q_f L}{T_a} (\nu \sin \theta + \eta \cos \theta) + \left( \frac{\lambda_a}{L} \right)^2 \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \gamma \right) \frac{d\theta}{d\xi} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{T} \gamma) + \frac{\varpi_v L}{T_a} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Para um "riser" de aço de 10"3/4 de diâmetro, em 910m de profundidade, por exemplo,  $T_a/EA \approx O(10^{-3})$  e  $(\lambda_a/L)^2 \approx O(10^{-6})$ . Para um tubo flexível típico, no entanto,  $T_a/EA \approx O(10^{-2})$  e  $(\lambda_a/L)^2 \approx O(10^{-6})$ . Portanto, o efeito da rigidez flexional da linha pode, em geral, ser considerado de pequena monta, quando a resposta dinâmica global é tratada. Em outras palavras, a rigidez geométrica, associada à catenária é dominante da resposta global. Não o é, no entanto junto às extremidades. Este é um belo exemplo de problemas de perturbação singular, do tipo "camada-limite", aqui definida como uma região de pequena extensão, se comparada ao comprimento suspenso da linha, no interior da qual os termos associados à rigidez flexional são relevantes. Um problema clássico análogo é o denominado "beam-string problem" (ver, p.ex., Kevorkian & Cole, 1981, art. 3.8) quando a solução estática de um cabo reto tensionando, de grande comprimento e pequena rigidez flexional, é equacionado sob a técnica de "camada-limite"<sup>47</sup>.

Desconsiderando então, *globalmente*, os termos de rigidez flexional, as equações (4.23) ficam simplificadas à forma,

<sup>47</sup> Ver também Love, 1934, art 273<sup>A</sup>

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \xi} = \frac{T_a}{EA} \left[ -\frac{q_f L}{T_a} (\tilde{\varepsilon} \sin \theta + \gamma \cos \theta) + \hat{T} \gamma \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{\varpi_u L}{T_a} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta^2} \right] \quad (4.24)$$

$$\left( \frac{EA}{T_a} \tilde{\varepsilon} + \frac{q_f L}{T_a} (\nu \sin \theta + \eta \cos \theta) \right) \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{T} \gamma) + \frac{\varpi_v L}{T_a} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2}$$

Finalmente, se a linha for considerada absolutamente inextensível e infinitamente flexível, a equação que rege o problema de perturbação de um cabo ideal pode ser escrita, em forma adimensional

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta^2} = \gamma \left( \frac{q_f L}{T_a} \cos \theta - \hat{T} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \frac{\varpi_u L}{T_a} \quad (4.25),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} = \frac{q_f L}{T_a} (\nu \sin \theta + \eta \cos \theta) \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{T} \gamma) + \frac{\varpi_v L}{T_a}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \zeta^2} = \left( \frac{q_f L}{T_a} \cos \theta - \hat{T} \frac{d\theta}{d\xi} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \nu \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \frac{\varpi_u L}{T_a}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} = \frac{q_f L}{T_a} (\nu \sin \theta + \eta \cos \theta) \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \hat{T} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \nu \frac{d\theta}{d\xi} \right) \right) + \frac{\varpi_v L}{T_a} \quad (4.25a).$$

Na ausência de correnteza, e admitindo o caso particular de linha vertical,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \zeta^2} = \frac{\overline{\omega}_u L}{T_a} \quad (4.25b).$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \hat{T} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \frac{\overline{\omega}_v L}{T_a}$$

Nesta situação bastante particular, a segunda expressão é a clássica equação dinâmica de fio sob tração variável e regerá a dinâmica global da linha.

Por sua vez, as parcelas estáticas das forças de natureza hidrodinâmica, de forma consistente ao modelo apresentado no capítulo 3, podem ser escritas

$$\begin{aligned} h_u(s) &= \frac{1}{2} \rho_a D U(s) |U(s)| C_T \cos^2 \theta(s) \mathbf{u} \\ h_v(s) &= -\frac{1}{2} \rho_a D U(s) |U(s)| C_T C_D \sin^2 \theta(s) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (4.26).$$

onde  $U(s)$  é a velocidade local da correnteza. As parcelas dinâmicas  $\overline{\omega}_u(s,t), \overline{\omega}_v(s,t)$ , por sua vez, podem ser separadas em dois termos, o primeiro de natureza viscosa e o segundo de natureza inercial. Estes termos são dependentes, respectivamente, da velocidade relativa e de sua derivada temporal com respeito à água, cujas componentes podem ser escritas

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{\partial u}{\partial t} - U \cos \Theta - w_u \\ v_v &= \frac{\partial v}{\partial t} + U \sin \Theta - w_v \end{aligned}$$

onde  $w_{u,v}(s,t)$  são as componentes de velocidade do campo ondulatório (ondas de superfície) nas direções  $u$  e  $v$ , respectivamente. É consistente tais componentes serem calculadas sobre a configuração estática, desconsiderando-se a variação dinâmica do

ângulo,  $\gamma(s,t)$ , que ocorre em  $\Theta(s,t) = \theta(s) + \gamma(s,t)$ . Modelo quadrático clássico leva, por exemplo, a

$$\begin{aligned}\varpi_u^{visc}(s,t) &= -\frac{1}{2} C_T \rho_a D \text{sinal}(v_u) \left( -2U(s) \cos \theta \left( \frac{\partial u}{\partial t} + U(s) \text{sen } \theta \frac{\partial v}{\partial s} - w_u \right) \right) \\ \varpi_v^{visc}(s,t) &= -\frac{1}{2} C_D \rho_a D \text{sinal}(v_v) \left( 2U(s) \text{sen } \theta \left( \frac{\partial v}{\partial t} + U(s) \cos \theta \frac{\partial v}{\partial s} - w_v \right) \right)\end{aligned}\tag{4.27}.$$

se termos de segunda-ordem em  $u, v, w$  forem desprezados. Tais termos devem ser considerados, no entanto, se a velocidade da correnteza for nula ou muito pequena. Outro modelo usual, e geral, consiste em considerar um coeficiente linearizado de dissipação viscosa, de tal sorte a igualar a energia dissipada em um ciclo de oscilação no caso não-linear<sup>48</sup>.

Tratando-se de um tubo de diâmetro externo constante, os termos de natureza inercial podem ser escritos

$$\begin{aligned}\varpi_u^i(s,t) &= 0 \\ \varpi_v^i(s,t) &= -m_a \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + U(s) \cos \theta \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial w_v}{\partial t} \right)\end{aligned}\tag{4.28}.$$

Qualquer que seja o modelo hidrodinâmico adotado, no entanto, as equações dinâmicas podem ser resolvidas numericamente, sob condições de contorno apropriadas. Se considerarmos apenas o sistema linear, as condições de contorno devem ser também linearizadas de forma apropriada. Em particular a solução pode ser obtida no domínio da frequência, através da discretização em elementos finitos, por exemplo, em resposta a carregamentos harmônicos, ou deslocamentos harmônicos impostos em pontos específicos. Este é o procedimento utilizado, por exemplo, por Martins, 1990, em seu código RISDIN, ou mais recentemente, no código POLIFLEX,

<sup>48</sup> Ver, p.ex., Pesce, 1984, onde este procedimento é aplicado ao problema de jogo de uma embarcação em ondas.

1996, também de sua autoria. Nestes códigos, além do carregamento associado à correnteza, são também considerados carregamentos harmônicos provocados pela ação direta das ondas sobre a linha e deslocamentos de mesma frequência impostos à extremidade superior. A condição de contorno no fundo é modelada como uma articulação, como será visto na seção seguinte, acoplada a uma mola linear horizontal que tem como função representar a distensão do trecho retilíneo apoiado sobre o fundo. Nesta situação a condição de contorno real no ponto de contato é perdida. No entanto seu efeito pode ser considerado *a posteriori*, permitindo corrigir a solução linearizada de forma consistente, através da aplicação de técnicas assintóticas, a exemplo do tratamento do problema estático.

Voltamos agora a primeira das equações (4.17), já desconsiderando os termos onde aparecem os esforços cortantes, ou seja desprezando o efeito da rigidez flexional na dinâmica global,

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} - ((T + \tau)\gamma) \frac{d\theta}{ds} + \varpi_u = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (*)$$

Definimos  $\omega_b = (\pi/L)\sqrt{EA/m}$  como uma frequência que caracteriza a dinâmica longitudinal de barra. Das primeiras das equações (4.27) e (4.28) segue então que

$$\frac{\varpi_u L}{EA} \approx O\left(C_T \frac{\rho_a DU}{\pi m \omega} \nu_0 \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2\right),$$

onde  $\nu_0$  designa a ordem de magnitude da amplitude adimensional de movimento longitudinal. Posto que, em geral,  $(\omega/\omega_b)^2 \ll 1$ , e que  $C_T \cong 10^{-3}$ , o termo de forças hidrodinâmicas longitudinais é bastante pequeno. De forma análoga, o termo inercial tem ordem de magnitude

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx O\left(\frac{EA}{L} \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^2 \nu_0\right).$$

equação (\*) acima, tem ordem de magnitude dada por  $(T + \tau)\gamma \frac{d\theta}{ds} \approx O(\gamma q)$ . Assim, a taxa de variação da tração dinâmica ao longo do comprimento tem ordem de magnitude,

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} \approx O\left(\frac{EA}{L} \max\left\{\nu_0 \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2; C_T \frac{\rho_a DU}{\pi m \omega} \nu_0 \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2; \gamma \frac{qL}{EA}\right\}\right).$$

Para um riser de 10"3/4 de diâmetro em 910m de profundidade, por exemplo, tal que

$$D \cong 0.3\text{m}; EA \cong 3 \times 10^6 \text{ KN}; m \cong 0.1\text{t} / \text{m}; q \cong 0.5\text{kN} / \text{m}; L \cong 1500\text{m},$$

segue que  $\omega_b \approx 10\text{rad} / \text{s}$ . A frequência de excitação típica, associada à ação das ondas é da ordem  $\omega \approx 1\text{rad} / \text{s}$ . Assim, se  $U \cong 1\text{m} / \text{s}$ , e  $C_T \cong 10^{-3}$ , então

$$\frac{\varpi_u L}{EA} \approx O\left(10^{-3} \nu_0 \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2\right). \text{ Também, } \gamma \frac{qL}{EA} \approx O(2.5 \times 10^{-4} \gamma). \text{ Como } \nu_0 \approx O(10^{-3}),$$

e  $\gamma \ll 1$ , temos  $\frac{L}{EA} \frac{\partial \tau}{\partial s} \approx O(10^{-5})$ . Por outro lado,

$$\frac{L}{EA} \frac{dT}{ds} \approx O\left(\frac{qL}{EA} \sin \theta\right) \leq O(2.5 \times 10^{-4}), \text{ neste caso típico.}$$

Como outro exemplo, aplicando as mesmas considerações para um tubo flexível, em 300m de profundidade, repleto de água em seu interior e com as seguintes características,

$$D \cong 0.1\text{m}; EA \cong 5 \times 10^3 \text{ KN}; m \cong 0.016\text{t} / \text{m}; q \cong 0.07\text{kN} / \text{m}; L \cong 322\text{m},$$



segue que  $\omega_b \approx 5.5 \text{ rad/s}$ ,  $\frac{\bar{\omega}_u L}{EA} \approx O\left(2 \times 10^{-3} \nu_0 \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2\right)$ ,  $\gamma \frac{qL}{EA} \approx O(4.5 \times 10^{-3} \gamma)$  e, com  $\nu_0 \approx O(10^{-3})$ , teremos  $\frac{L}{EA} \frac{\partial \tau}{\partial s} \approx O(3.3 \times 10^{-5})$  e  $\frac{L}{EA} \frac{dT}{ds} \approx O(4.5 \times 10^{-3})$ .

Estes dois exemplos mostram que a taxa de variação da amplitude dinâmica de tração ao longo do comprimento pode ser desconsiderada, em primeira aproximação.

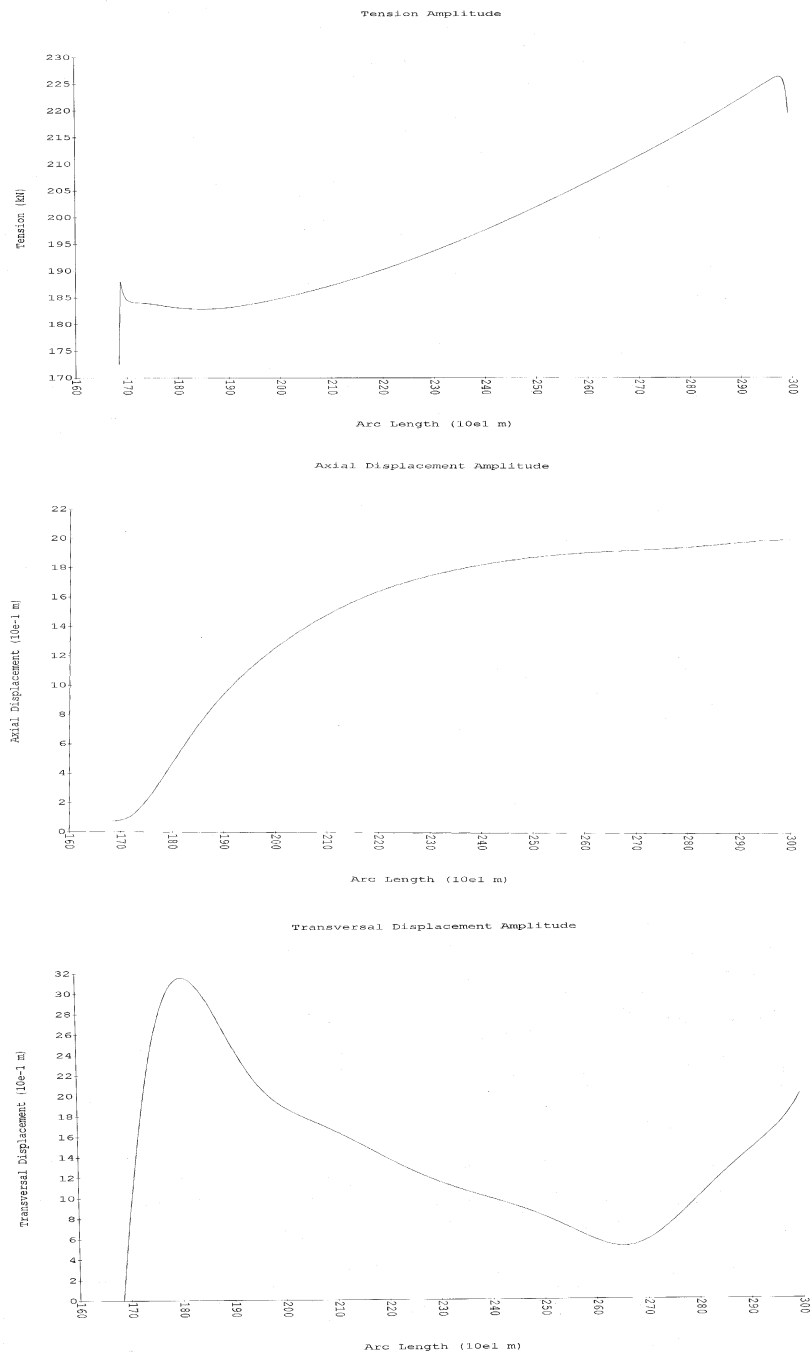
Em outras palavras *a tração dinâmica solicitante pode ser aproximadamente considerada como função tão somente do tempo e invariante ao longo da linha*. Este resultado é fundamental no desenvolvimento das soluções de "camada-limite", conforme será visto adiante, e permite resolver o problema de tração de forma analítica.

Quando a frequência de excitação é mais elevada, as forças transversais de amortecimento hidrodinâmico se tornam muito altas, e a linha pode ser considerada "congelada" em sua configuração estática. Nesta situação o trabalho realizado pela tração dinâmica é quase que totalmente acomodado por deformação elástica longitudinal e a variação da amplitude desta tração varia de forma cossenoidal, ao longo do comprimento; ver Aranha et al, 1993.

A abordagem seguida daqui em diante será puramente analítica, admitindo resolvido o problema global, deixando fora do escopo do presente trabalho seu tratamento numérico. A título ilustrativo, no entanto, apresentamos a resposta dinâmica de um *riser* de aço de 10"3/4 de diâmetro externo, de seção constante, lançado de forma direta ao fundo do oceano, em 910m de profundidade, conseguida através do processamento do código POLIFLEX.

As curvas da figura 4.2 correspondem às amplitudes de tração dinâmica e de deslocamentos axial e transversal, decorrentes da ação de ondas monocromáticas, com período de 10.0 segundos e amplitude de 2.0m. Os movimentos horizontal e vertical impostos à extremidade superior tem 2.0m de amplitude e estão em quadratura. Foi admitida ausência de correnteza. O tubo tem comprimento total de 3000m e comprimento suspenso de 1330m, de forma que a coordenada curvilínea de 1670m corresponde ao ponto de contato. A configuração estática é tal que, junto à extremidade superior, o ângulo com a horizontal é de  $68.3^\circ$  e a tração de 771kN; ver Tabela 4-5, à página 4-89. Note que a amplitude de deslocamento axial cresce de forma praticamente monotônica ao longo do comprimento da linha. Já a amplitude de deslocamento transversal apresenta um máximo local a cerca de 100m do TDP. A amplitude dinâmica de tração, por sua vez, cresce ao longo do comprimento, podendo ser considerada praticamente constante junto ao TDP. A variação total é de cerca de 40 kN, correspondente a 20% do valor médio da amplitude medida ao longo do comprimento, que é aproximadamente 200kN. Corresponde a cerca de 5% da tração efetiva estática na extremidade superior ou seja, a cerca de 14% da tração estática no TDP.

Existe ainda um número bastante grande de códigos computacionais que tratam o problema dinâmico não-linear no domínio do tempo, como é o caso dos programas ORCAFLEX, FLEXCOM, ANFLEX, RIFLEX. O primeiro utiliza discretização em diferenças finitas, enquanto que os demais abordam o problema através do método dos elementos finitos. Análise comparativa destes códigos tem sido objeto de investigações; ver Larsen, 1992, p.ex. Os diversos códigos exibem grande aderência, quando tratam do problema estático. No entanto, no problema dinâmico, podem conduzir a resultados algo diferentes, mormente na região de contato com o fundo, regida pela condição de contato uni-lateral, que introduz, localmente, uma importantíssima fonte de não-linearidade. Este assunto é tratado com profundidade em Aranha, Martins & Pesce, 1995.



**Figura 4-2** Resposta dinâmica de um riser de aço de 10”3/4 em 910m de profundidade. Solução no domínio da frequência com o uso do código POLIFLEX.

## 4.2 O MODELO ASSINTÓTICO NO PLANO

Admitindo conhecidas as soluções estática e dinâmica linearizada, a condição de contorno geométrica não-linear, representada pelo vínculo uni-lateral no contato com o solo, é tratada de forma consistente no que diz respeito à dinâmica local. Em regimes sub-críticos, mostra-se que as forças de natureza elástica dominam as forças de natureza viscosa ou inercial, possibilitando o emprego da técnica da camada-limite, de forma análoga ao apresentado no estudo do problema estático.

De forma similar, a resposta em curvatura junto à extremidade suspensa é tratada, admitindo a existência de uma terminação flexível de características lineares. Análise de ordem de magnitude permite mostrar, de forma consistente, que no interior da camada-limite superior as forças elásticas, associadas à rigidez flexional e à rigidez geométrica, são dominantes quando comparadas às forças de inércia e hidrodinâmicas, o que permite, uma vez mais desenvolver modelo assintótico analítico para o estudo da resposta em curvatura naquele entorno.

De outro lado, o modelo assintótico que representa a evolução dinâmica da tração, originalmente desenvolvido por Aranha, Pesce, Martins & Bernardes, 1993, é resumidamente apresentado e discutido no apêndice A do presente trabalho. Este modelo toma partido das discrepantes escalas de tempo associadas à rigidez axial e à rigidez geométrica de catenária, para desenvolver uma fórmula analítica que relaciona a amplitude da tração à amplitude do movimento imposto à extremidade superior da linha. Em regimes de excitação de alta frequência, a linha permanece “congelada” em sua configuração de equilíbrio e a energia é absorvida por deformação axial. Em “baixa-frequência” a rigidez “geométrica” domina a resposta, posto que a linha “tem tempo suficiente de se acomodar, de forma quase-estática”. Mostra-se que a tração dinâmica é aproximadamente invariante ao longo da linha,

hipótese fundamental à elaboração dos modelos assintóticos que cuidam da curvatura dinâmica.

#### 4.2.1 Condições de contorno e de choque no ponto de contacto com o solo

A derivação aqui apresentada é, essencialmente, aquela constante de Aranha, Martins & Pesce, 1995, que foi baseada, por sua vez em Triantafyllou, 1985. Vamos, por ora, desconsiderar o efeito local da rigidez flexional, junto ao ponto de contato com o fundo. Denominaremos  $\bar{y}_c(x)$  a solução estática de cabo nas vizinhanças do ponto de contato que será estabelecido como a origem  $O$ . Note que nesta vizinhança,  $s \cong x$ .

As condições de contorno apropriadas são

$$\begin{aligned}\bar{y}_c(0) &= 0 \\ \frac{d\bar{y}_c}{dx}(0) &= 0\end{aligned}\tag{4.29}.$$

Seja  $y_c(x, t)$  a configuração dinâmica nas vizinhanças de  $O$ , e  $x = x_0(t)$  a equação da trajetória do *ponto de contato instantâneo* da linha com o solo. Então, por definição,

$$y_c(x_0(t), t) \equiv 0\tag{4.30}.$$

A derivada total de  $y_c(x_0(t), t)$  em relação ao tempo permite então escrever,

$$\frac{d}{dt} y_c(x_0(t), t) = \frac{\partial y_c(x_0(t), t)}{\partial t} + \dot{x}_0(t) \frac{\partial y_c(x_0(t), t)}{\partial x} \equiv 0\tag{4.31}.$$

Tomemos um elemento de linha, de comprimento  $\delta x$  no entorno considerado, e vamos considerar a eventual ocorrência de uma força de impacto da linha contra o solo,  $F(t)$ . O equilíbrio dinâmico deste elemento traz então,

$$\frac{d}{dt} \left( (m + m_a) \delta x(t) \frac{\partial y_c}{\partial t} \Big|_{x_0(t) + \delta x(t)} \right) = F(t) + T_0 \frac{\partial y_c}{\partial x} \Big|_{x_0(t) + \delta x(t)} - q \delta x(t) \quad (4.32),$$

onde foram desconsideradas as variações espacial e temporal da tração, i.e.,

$T(x, t) = T(x) + \tau(x, t) \cong T_0$ . Mas,  $\frac{d\delta x}{dt} = -\dot{x}_0(t)$ , e assim,

$$\begin{aligned} - (m + m_a) \dot{x}_0(t) \frac{\partial y_c}{\partial t} \Big|_{x_0(t) + \delta x(t)} + (m + m_a) \delta x(t) \frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2} \Big|_{x_0(t) + \delta x(t)} &= \\ = F(t) + T_0 \frac{\partial y_c}{\partial x} \Big|_{x_0(t) + \delta x(t)} - q \delta x(t) & \end{aligned} \quad (4.33).$$

Tomando o limite de (4.33), quando  $\delta x(t) \rightarrow 0$ , vem

$$- (m + m_a) \dot{x}_0(t) \frac{\partial y_c}{\partial t} \Big|_{x_0(t)} = F(t) + T_0 \frac{\partial y_c}{\partial x} \Big|_{x_0(t)} \quad (4.34).$$

Substituindo (4.31) em (4.34) segue,

$$(m + m_a) \dot{x}_0^2(t) \frac{\partial y_c}{\partial x} \Big|_{x_0(t)} = F(t) + T_0 \frac{\partial y_c}{\partial x} \Big|_{x_0(t)} \quad (4.35),$$

que pode ser escrita,

$$\left( \dot{x}_0^2(t) - c_0^2 \right) \frac{\partial y_c}{\partial x} \Big|_{x_0(t)} = \frac{F(t)}{(m + m_a)} \quad (4.36),$$

onde

$$c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{m + m_a}} \quad (4.37)$$

é a velocidade local de propagação da onda transversal associada à rigidez geométrica. Note que (4.37) coincide com a clássica expressão de velocidade de propagação em fios tensionados. Definindo o “número de Mach” local como

$$M = \frac{\dot{x}_0}{c_0} \quad (4.38),$$

(4.36) pode ainda ser posta na forma

$$(1 - M^2) \left. \frac{\partial y_c}{\partial x} \right|_{x_0(t)} = -\frac{F(t)}{T_0} \quad (4.39).$$

A equação (4.39) propicia uma interpretação física imediata. De fato, como  $F(t)$  é uma eventual força de impacto contra o solo, será necessariamente positiva e, dada a condição de vínculo uni-lateral, teremos também,  $\left. \frac{\partial y_c}{\partial x} \right|_{x_0(t)} \geq 0$ . Assim a ocorrência de uma força de impacto implica, necessariamente, na condição  $M > 1$ . Em outras palavras, para que haja impacto contra o solo (aqui suposto rígido) é necessário que a velocidade de progressão do **ponto de contato instantâneo** seja superior à velocidade de propagação da onda, naquele entorno. Esta é, efetivamente, uma condição de choque, análoga, por exemplo, aos clássicos problemas *de onda de choque em escoamento compressível* na aerodinâmica, ou de *ressalto hidráulico*, em hidrodinâmica. Denominaremos *sub-crítico* o regime dinâmico na ausência de choque ( $M < 1$ ) e *trans-crítico* e *super-crítico* aqueles correspondentes à ocorrência de choque, ( $M \geq 1$ ).

Assim, se  $M < 1$ ,  $F(t) \equiv 0$ , e de (4.39) segue de imediato que

$$\left. \frac{\partial y_c}{\partial x} \right|_{x_0(t)} \equiv 0; \quad M < 1 \quad (4.40),$$

recuperando a condição de contorno do problema estático. No regime *sub-crítico*, podemos dizer portanto, que “a linha se deita sobre o solo de forma suave, pois tem tempo suficiente para ajustar sua curvatura”. Substituindo (4.40) em (4.31), vem também que

$$\left. \frac{\partial y_c}{\partial t} \right|_{x_0(t)} \equiv 0; \quad M < 1 \quad (4.41),$$

a qual significa que a velocidade vertical do *ponto de contato instantâneo* é sempre nula em regimes sub-críticos, isto é, quando da não-ocorrência de choque.

Prosseguindo, a derivada parcial de (4.31), em relação a  $x$ , fornece

$$\left( \frac{\partial^2 y_c}{\partial x \partial t} + \dot{x}_0(t) \frac{\partial^2 y_c}{\partial x^2} \right)_{x=x_0(t)} \equiv 0 \quad (4.42),$$

e sua derivada parcial em relação a  $t$  traz

$$\left( \frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2} + \dot{x}_0(t) \frac{\partial^2 y_c}{\partial t \partial x} \right)_{x=x_0(t)} \equiv 0 \quad (4.43).$$

Eliminando das expressões acima a derivada mista obtemos a componente vertical da aceleração do *ponto de contato instantâneo*,

$$\left. \frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2} \right|_{x_0(t)} = \dot{x}_0^2(t) \left. \frac{\partial^2 y_c}{\partial x^2} \right|_{x_0(t)} \quad (4.44).$$



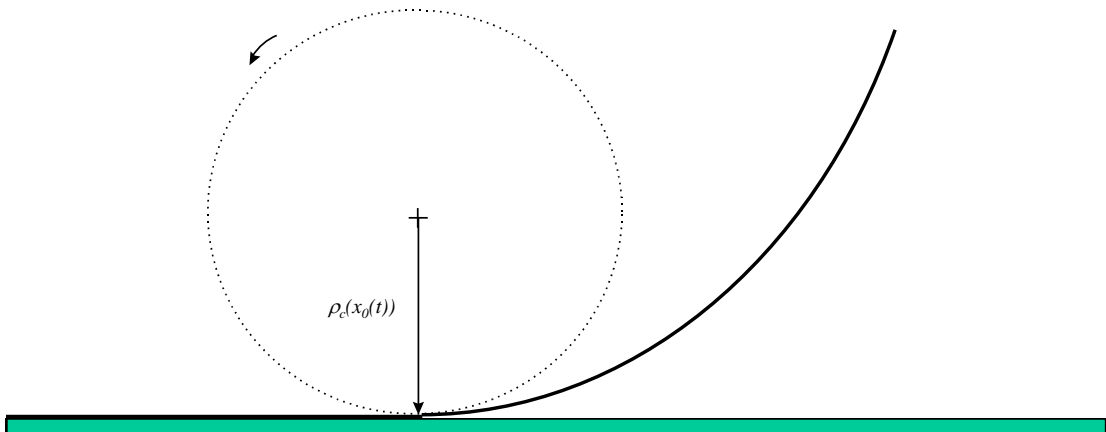
Lembrando agora que a curvatura pode ser localmente aproximada por

$\chi_c(x, t) \cong \frac{\partial^2 y_c}{\partial x^2}$  segue então que

$$\left. \frac{\partial^2 y_c}{\partial x^2} \right|_{x_0(t)} = \frac{\dot{x}_0^2(t)}{\rho_c(x_0(t))} \quad (4.45),$$

onde  $\rho_c(x_0(t)) = 1/\chi_c(x_0(t))$  é o raio de curvatura no *ponto de contato instantâneo*.

É imediata a analogia com o problema de um disco que rola, sem escorregamento, sobre uma superfície plana. Podemos então imaginar que a linha acompanha o movimento de um cilindro de raio variável, (ou de um carretel), que rola sem escorregar sobre o solo plano e rígido. Esta analogia, ilustrada na figura abaixo, permite visualizar, com grande facilidade, o movimento da linha nas vizinhanças do ponto de contato, em regime sub-crítico.



*Figura 4-3 Ponto de contato instantâneo(PCI) e analogia com cilindro de raio variável que rola sem escorregar.*

Note ainda que (4.45) é, essencialmente, uma relação quase-estática<sup>49</sup>. De fato, se tomássemos apenas a equação que rege a perturbação dinâmica  $v$  no entorno de  $O$ , obteríamos, desconsiderando o carregamento hidrodinâmico e lembrando que  $\partial v / \partial t \cong 0$ , nesta vizinhança,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \cong c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

que é a clássica equação linear de onda, unidimensional e não-dispersiva, que rege a dinâmica de um fio tracionado, sob tensão constante.

A escala de comprimento local é o raio de curvatura no ponto de contato  $\rho_{0c} = \rho_c(0) = T_0/q$ , correspondente à solução estática. Por razões de segurança estrutural, devemos ter  $\varepsilon = R/\rho_{0c} \leq 2 \times 10^{-3}$  para tubos de aço e  $R/\rho_{0c} \leq O(10^{-1})$  para tubos flexíveis e cabos umbilicais, onde  $R$  é o raio da linha. Por outro lado, a amplitude imposta ao topo é da ordem  $A \cong 10 \times R$  e, de considerações quase-estáticas, pode-se mostrar (ver Aranha, Martins & Pesce, 1995) que  $a_0/A \approx 6/\theta_t^2$ , onde  $a_0$  é uma amplitude típica de variação da posição do ponto de contato e  $\theta_t$  é o ângulo da linha na extremidade superior. Assim, em geral,  $a_0/\rho_{0c} \ll 1$  e o problema pode, em tese, ser linearizado com respeito a este parâmetro.

Assim, tomando as expansões em Série de Taylor das funções  $y_c(x_0(t), t)$  e  $\frac{\partial y_c}{\partial x}(x_0(t), t)$  em torno da origem  $O$ , segue das identidades (4.30) e (4.41) que,

---

<sup>49</sup> Pode ser interpretada como uma solução particular da equação geral.

$$\begin{aligned} \frac{y_c(x_0(t), t)}{\rho_{0c}} &= \frac{1}{\rho_{0c}} \left( y_c(0, t) + x_0(t) \frac{\partial y_c}{\partial x}(0, t) \right) + O\left(\frac{x_0^2(t)}{\rho_{0c}^2}\right) \equiv 0 \\ \frac{1}{\rho_{0c}} \frac{\partial y_c}{\partial x}(x_0(t), t) &= \frac{1}{\rho_{0c}} \left( \frac{\partial y_c}{\partial x}(0, t) + x_0(t) \frac{\partial^2 y_c}{\partial x^2}(0, t) \right) + O\left(\frac{x_0^2(t)}{\rho_{0c}^2}\right) \equiv 0 \end{aligned} \quad (4.46),$$

que podem ser combinadas, fornecendo

$$\frac{y_c(0, t)}{\rho_{0c}} \cong \frac{x_0^2(t)}{\rho_{0c}} \frac{\partial^2 y_c}{\partial x^2}(0, t) \cong O\left(\frac{a_0}{\rho_{0c}}\right)^2 \quad (4.47).$$

Podemos dizer então que, em primeira ordem em  $a_0/\rho_{0c}$ , o ponto de contato da solução estática pode ser tomado como uma articulação no problema dinâmico tornando consistente a hipótese adotada, por exemplo, nos códigos RISDIN e POLIFLEX, conforme mencionado na seção anterior. A solução dinâmica, obtida no domínio da frequência sob esta condição de contorno, deve ser corrigida localmente, no entanto.

Com este fim, de (4.46b), temos

$$\frac{x_0(t)}{\rho_{0c}} = -\frac{\partial y_c}{\partial x}(0, t) = -\gamma(0, t) \quad (4.48),$$

onde  $\gamma(0, t)$  é o desvio do ângulo, na articulação, proveniente da solução linearizada.

## 4.2.2 Resposta dinâmica em curvatura. Solução assintótica local junto ao ponto de contacto com o solo

Uma vez estabelecidas, de forma apropriada, as condições de contorno em regime sub-crítico, resta determinar a resposta dinâmica, em curvatura, nas vizinhanças do ponto de contato, o que será feito através da aplicação da técnica de perturbações e da camada-limite, quando então o efeito da rigidez flexional será incorporado.

### 4.2.2.1 *Curvatura dinâmica desconsiderando o efeito da rigidez flexional*

No entorno do ponto de contato, onde  $s \cong x; \theta \ll 1$ , os efeitos locais da correnteza e das forças de amortecimento podem ser desprezados, estes últimos porque  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial y_c}{\partial t} \approx 0$ . Tomando então a segunda das equações (4.17), e desprezando o efeito da rigidez flexional, a equação dinâmica que rege o deslocamento transversal para um cabo, pode ser reduzida a,

$$\tau \frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial}{\partial s}((T + \tau)\gamma) = (m + m_a) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.49).$$

No entanto, das considerações da seção 4.1, acerca da invariância da deformação axial ao longo da linha, e de (4.19), deduz-se que, próximo ao TDP, onde  $\theta \approx 0$ , temos  $\partial\tau/\partial s = O(q_f \gamma)$ . Além disso  $T'(s) \cong O(T_0 \theta(s) \frac{d\theta}{ds})$ , conforme pode ser verificado a

partir do exposto no capítulo 3, e portanto, correto em segunda-ordem, e utilizando

(4.45) na forma  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dot{x}_0^2 \chi \Big|_{PCI}$ , onde PCI designa ponto de contato instantâneo, vale

$$\left( \tau - (m + m_a) \dot{x}_0^2 \right) \chi^c \Big|_{PCI} + T \tilde{\chi}^c \Big|_{PCI} = 0 \quad (4.50),$$

onde

$$\begin{aligned} \chi^c(s, t) &= \frac{d\theta}{ds} + \tilde{\chi}^c(s, t) = \chi_e^c(s) + \tilde{\chi}^c(s, t) \\ \tilde{\chi}^c(s, t) &= \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.51),$$

onde o subscrito  $e$  indica solução estática e  $c$  tratar-se de "solução de cabo".

A equação (4.50) pode ser escrita na forma

$$\left( T + \tau - (m + m_a) \dot{x}_0^2 \right) \tilde{\chi}^c \Big|_{PCI} = - \left( \tau - (m + m_a) \dot{x}_0^2 \right) \chi_e^c(s) \Big|_{PCI} \quad (4.52).$$

Assim, utilizando o fato de que  $T(s) \cong T_0(1 + O(\theta \chi_{e0} \delta s))$  e de (4.37) e (4.38) vem,

$$\left( \left( 1 + \frac{\tau(t)}{T_0} \right) - \frac{\dot{x}_0^2}{c_0^2} \right) \tilde{\chi}^c \Big|_{PCI} = - \left( \frac{\tau(t)}{T_0} - \frac{\dot{x}_0^2}{c_0^2} \right) \chi_e^c \Big|_{PCI} \quad (4.53).$$

Resulta então, com erro da ordem  $M^2 = \dot{x}_0^2 / c_0^2$ ,

$$\tilde{\chi}^c(s, t) = - \frac{\tau(t)/T_0}{1 + \frac{\tau(t)}{T_0}} \chi_e^c(s) (1 + O(M^2)) \quad (4.54),$$

e assim,

$$\chi^c(s, t) = \frac{1}{1 + \frac{\tau(t)}{T_0}} \chi_e^c(s) (1 + O(M^2)) \quad (4.55)$$

A expressão (4.54) mostra que, para regimes sub-críticos, a resposta dinâmica em curvatura é linearmente proporcional à curvatura estática local e inversamente proporcional à tração dinâmica. Mostra também que, em primeira-ordem em  $\tau/T_0$ , a resposta é essencialmente quase-estática, pois a curvatura dinâmica está em oposição de fase com a tração dinâmica. De fato, em primeira-ordem,

$$\tilde{\chi}^c(s, t) = -\frac{\tau(t)}{T_0} \chi_e^c(s) \quad (4.56),$$

e portanto, também em primeira-ordem,

$$\chi^c(s, t) = \left(1 - \frac{\tau(t)}{T_0}\right) \chi_e^c(s) \quad (4.57).$$

Note que se a tração dinâmica for suficientemente alta pode ocorrer que, em certos instantes,  $\tau(t)/T_0 \leq -1$ , indicando a existência de compressão na linha. Esta é uma evidência de que se a compressão fosse atingida poderia ocorrer instabilidade, isto é a curvatura dinâmica prevista no modelo quase-estático tenderia a infinito. Nesta situação, na realidade, a dinâmica completa da linha deve ser considerada, esperando-se que ondas elásticas sejam formadas e propagadas.

#### 4.2.2.2 *Solução assintótica para a curvatura dinâmica considerando-se o efeito da rigidez flexional*

O efeito local da rigidez flexional será agora incorporado, de forma análoga ao realizado no problema estático, conforme apresentado no capítulo 3. De fato, em regimes sub-críticos a resposta em curvatura no entorno do ponto de contato pode ser dita quase-estática, porquanto os termos inerciais são dominados pelas forças de natureza restauradora, associadas à rigidez geométrica e à rigidez flexional.

Tomamos a equação (4.15a), no entorno do ponto de contato, tal que  $\theta \cong 0$ , desprezando as parcelas associadas às forças hidrodinâmicas de natureza viscosa, porém agora incorporando o termo associado à rigidez flexional, que, por simplicidade, será suposto invariante ao longo do comprimento da linha. Considerando  $T(s, t) \cong T(s) + \tau(t)$ , definindo a curvatura total de forma que

$$\chi(s, t) = \chi_e(s) + \tilde{\chi}(s, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial s} \quad (4.58),$$

$$\chi_e(s) = \frac{d\theta}{ds}; \quad \tilde{\chi}(s, t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

obtem-se,

$$-B \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + (T(s) + \tau(t))\chi + \gamma \left( \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s} - B \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial \chi}{\partial s} \right) - q \cos \theta = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.59).$$

Conforme visto anteriormente,  $\frac{\partial \tau}{\partial s} \approx O\left(\frac{EA}{L} \nu_0 \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2\right)$ ,  $T'(s) \cong O(T_0 \theta(s) \frac{d\theta}{ds})$  e

$T(s) \cong T_0 (1 + O(\theta \chi_0 \delta s))$ . Assim, (4.59), que pode ser escrita,

$$-B \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + (T(s) + \tau(t))\chi + \gamma \left( \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s} - B \frac{d\theta}{ds} \left( \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right) \right) - q \cos \theta = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

se for dividida por  $T_0$  fica aproximada, com erro da ordem  $\max\left\{\theta \chi_0 \gamma; \frac{q_f}{T_0} \gamma^2\right\}$ ,

por

$$-B \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + (T_0 + \tau(t))\chi - q \cos \theta = (m + m_a) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (*)$$

Utilizando agora a relação (4.44), válida em regime sub-crítico, dividindo-se (\*) por  $T_0$ , e lembrando que a curvatura estática junto ao ponto de contato, correspondente à solução de cabo, é  $\chi_0 = \chi^c(0) = (q/T_0)$ , vem

$$-\lambda^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + \left(1 + \frac{\tau(t)}{T_0}\right) \chi = \chi_0 + O(M)^2 \tilde{\chi} \quad (4.60),$$

$$\lambda^2 = \frac{B}{T_0}$$

onde  $\lambda$  é o "comprimento local de flexão". Portanto, em regimes sub-críticos, com erro da ordem  $M^2$ , podemos escrever,

$$-\lambda^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + \left(1 + \frac{\tau(t)}{T_0}\right) \chi = \chi_0 \quad (4.61).$$



A solução de (4.61) é análoga àquela obtida para o caso estático<sup>50</sup>. Pode ser escrita na forma geral

$$\chi(s, t) = \begin{cases} \frac{\chi_0}{1 + \tau(t)/T_0} + C_1(t)e^{-\left(\sqrt{1+\tau(t)/T_0}\right)(s-s_f(t))/\lambda} + C_2(t)e^{+\left(\sqrt{1+\tau(t)/T_0}\right)(s-s_f(t))/\lambda}; & s > s_f \\ 0; & s \leq s_f \end{cases} \quad (4.62),$$

onde a coordenada  $s$  é, por conveniência (e convenção), medida a partir do ponto de contato da solução estática correspondente ao problema de cabo ideal, e

$$s_f(t) = x_0(t) - \lambda \quad (4.63)$$

é a posição instantânea do ponto de tangência, considerando-se o efeito da rigidez flexional. Da condição de finitude de solução quando  $(s - s_f(t))/\lambda \rightarrow \infty$ , segue que  $C_2(t) \equiv 0$ . Finalmente, da condição de contorno no ponto de tangência com o solo (suposto rígido),  $\chi(s_f(t)) = 0$ , vem

$$C_1(t) = -\frac{\chi_0}{1 + \tau(t)/T_0} \quad (4.64),$$

e, portanto,

---

<sup>50</sup> Pode, também, ser interpretada como se houvesse uma variação temporal do “comprimento de flexão” em decorrência da variação da tração.

$$\frac{\chi(\xi, t)}{\chi_0} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \tau(t)/T_0} \left( 1 - e^{-(\sqrt{1 + \tau(t)/T_0})\beta(\xi, t)} \right); & \beta(\xi, t) > 0 \\ 0; & \beta(\xi, t) \leq 0 \end{cases}$$

com

$$\beta(\xi, t) = \xi - \xi_0(t) + 1 \quad (4.65).$$

$$\xi = s/\lambda$$

$$\xi_0(t) = x_0(t)/\lambda$$

A expressão acima constitui-se em *solução assintótica local, em regime dinâmico sub-crítico*. Note que além de pequenas perturbações geométricas, admitimos a hipótese de invariância da tração dinâmica ao longo da linha. Embora relativamente simples, a equação (4.65) é não-linear em  $\xi, t$ .

Dentre muitas, algumas observações merecem destaque:

- A dinâmica local é escrita como resposta à dinâmica global da linha, caracterizada pelas funções  $\xi_0(t) = x_0(t)/\lambda$  e  $\tau(t)/T_0$ , supostas oscilatórias mas que podem ter, eventualmente, uma estrutura policromática.
- A solução (4.65) contém implícita a solução estática deduzida no capítulo 3; basta que sejam consideradas nulas as funções  $\tau(t)$  e  $x_0(t)$ , para recuperar a mencionada solução assintótica.

De fato,

$$\frac{\chi(\xi)}{\chi_0} = \begin{cases} \left( 1 - e^{-\beta_e(\xi)} \right); & \beta_e(\xi) > 0 \\ 0; & \beta_e(\xi) \leq 0 \end{cases}$$

com

$$\beta_e(\xi) = \xi + 1$$

$$\xi = s/\lambda$$

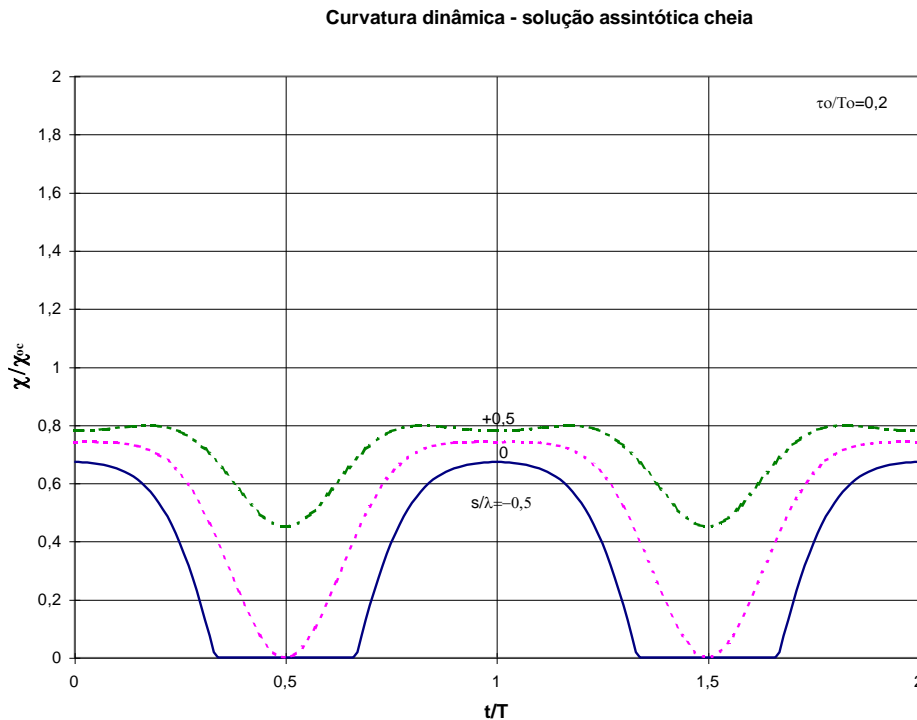
- A solução assintótica perde a validade quando,  $\tau(t)/T_0 = -1$  como é evidente, de (4.65); note que se  $\tau(t)/T_0 < -1$ , a equação diferencial (4.64) admitiria soluções periódicas perdendo-se a compatibilização assintótica.

- Para trações dinâmicas de baixa magnitude,  $|\tau(t)/T_0| < 1$ , a curvatura apenas se anulará em seções tais que  $\xi \leq \xi_0(t) - 1$ . Em particular, existe uma seção especial, a que denominaremos *crítica*, à qual corresponde  $\hat{\xi} = \xi_{0max} - 1$ , que define a posição limite, ao longo da linha, para uma dada solução dinâmica, à direita da qual a curvatura nunca se anula. Em outras palavras, a linha estará sempre suspensa se  $\xi > \hat{\xi}$ , nunca tocando o solo, portanto. A esta seção particular, conforme veremos adiante, corresponde a máxima variação de curvatura.

As figuras abaixo ilustram a função de curvatura, (4.65), em resposta não-linear a uma excitação monocromática, expressa em termos da tração e do movimento do ponto de contato. Para construí-las admitimos, por simplicidade, que as funções locais,

$$\begin{aligned} \frac{\tau(t)}{T_0} &= \frac{\tau_0}{T_0} \cos \omega t \\ \xi_0(t) &= \frac{x_0(t)}{\lambda} = \frac{a_0}{\lambda} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{4.66},$$

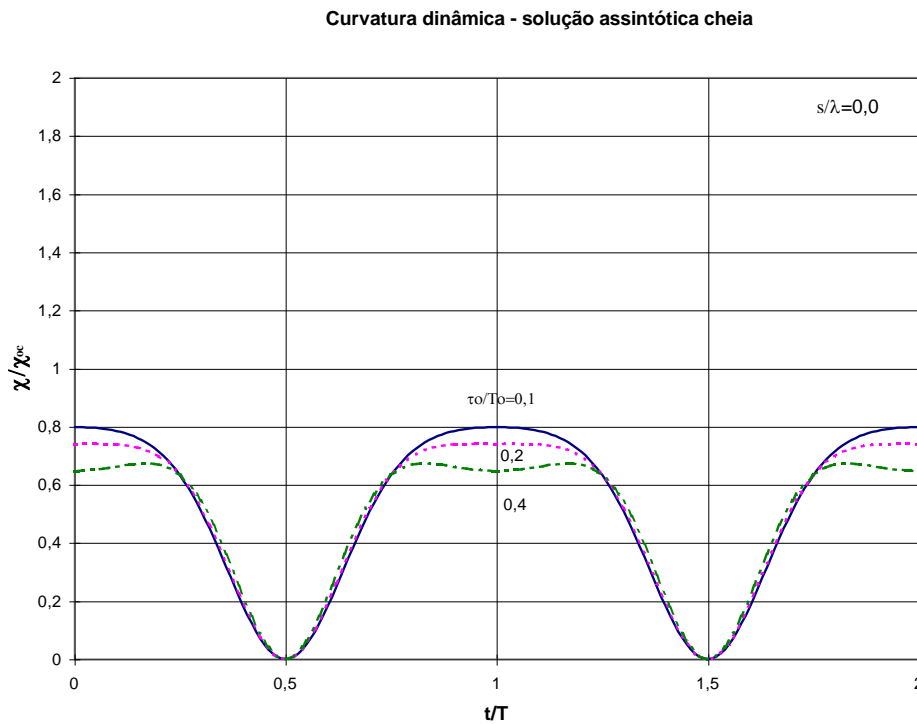
descrevam a solução dinâmica global a uma excitação harmônica, determinada previamente, por exemplo através do processamento de um código que resolva o problema no domínio da frequência.



**Figura 4-4** Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0,2; a_0/\lambda = 1; \varphi = \pi; s/\lambda = -0,5; 0; +0,5$$

A primeira, Figura 4-4, toma  $a_0/\lambda = 1; \tau_0/T_0 = 0,2$  e apresenta  $\chi(\xi, t)/\chi_{oc}$  para três diferentes seções. Como pode ser constatado neste caso, a cota que identifica a seção crítica é  $\hat{\xi} = 0$ , e assim tomamos,  $\xi = s/\lambda = -0,5; 0; +0,5$ . A primeira seção permanece periodicamente assentada sobre o fundo; a seção crítica,  $\xi = \hat{\xi} = a_0/\lambda - 1$ , apenas toca o fundo periodicamente; a terceira seção, por sua vez, jamais toca o solo, permanecendo sempre suspensa. Note que, embora a curvatura atingida pela terceira seção seja de maior valor, a maior variação de curvatura corresponde à seção crítica. Este ponto será abordado com maior profundidade mais adiante, quando da confirmação experimental. Como veremos naquele contexto, a identificação da seção crítica é que permite a comparação teórico-experimental de forma não ambígua e consistente.

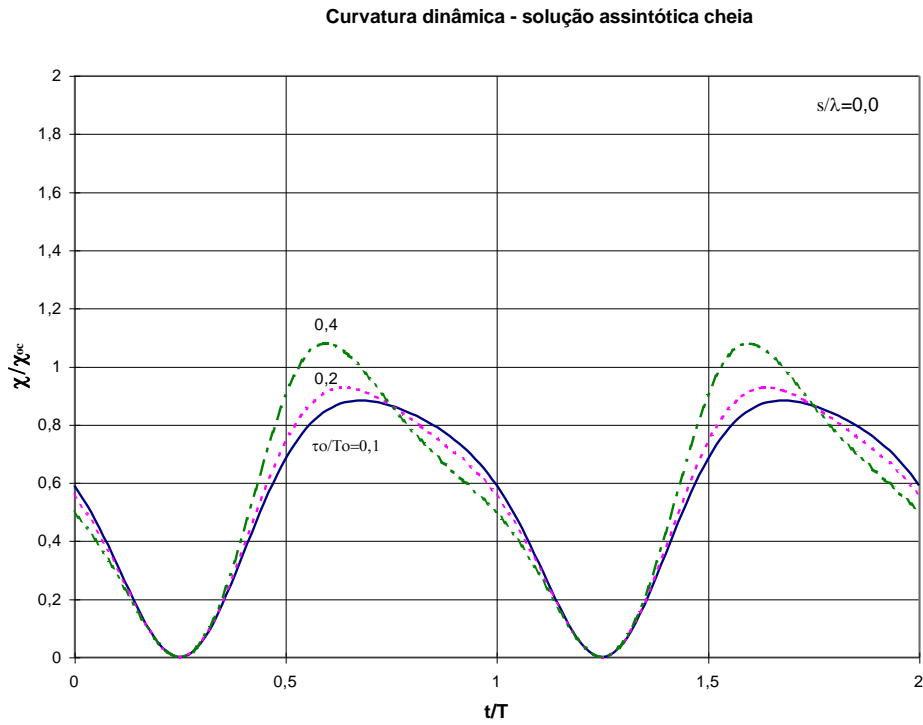


**Figura 4-5** Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0.1;0.2;0.4; a_0/\lambda = 1; \varphi = \pi; s/\lambda = 0.$$

Na Figura 4-5, as respostas são parametrizadas na amplitude de tração, para três valores  $\tau_0/T_0 = 0.1;0.2;0.4$ . Mantivemos a amplitude de movimento  $a_0/\lambda = 1$  e, agora, consideramos apenas a *seção crítica*,  $\xi = \hat{\xi} = a_0/\lambda - 1$ ; neste caso  $\hat{\xi} = 0$ . Note que quanto maior for a amplitude da tração dinâmica mais pronunciado será o “segundo-harmônico” presente na resposta. No presente caso, com  $\varphi = \pi$ , que corresponde ao um processo quase-estático, o efeito da tração dinâmica se contrapõe ao efeito da variação periódica do ponto de contato.

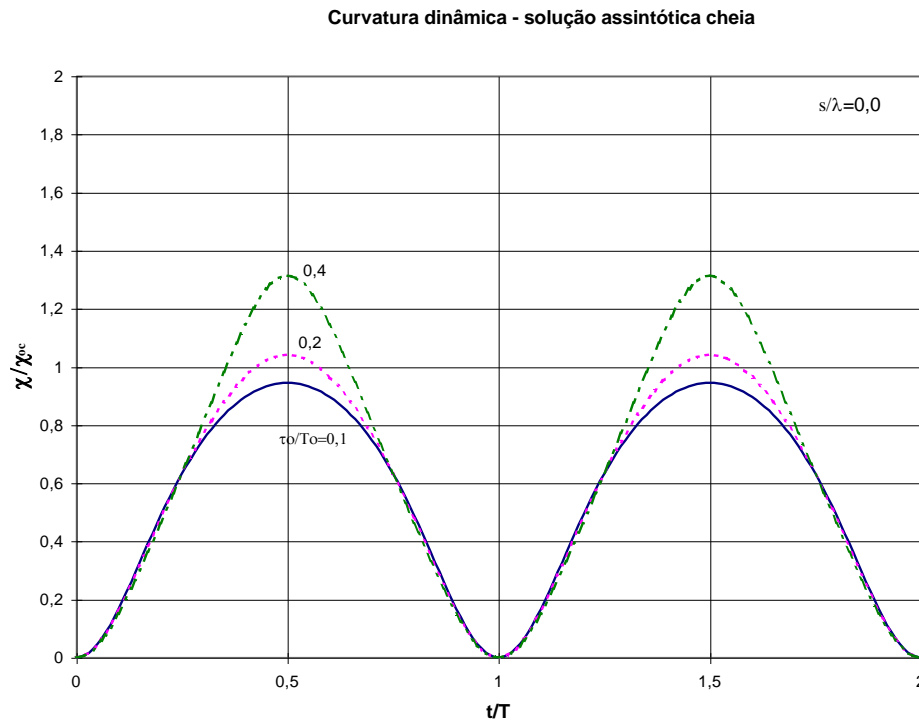
Este é um caso típico para “risers” de aço, conforme será ilustrado nas seções a seguir, através de comparações com resultados de experimentos específicos conduzidos em laboratório.



**Figura 4-6** Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0.1; 0.2; 0.4; a_0/\lambda = 1; \varphi = -\pi/2; s/\lambda = 0.$$

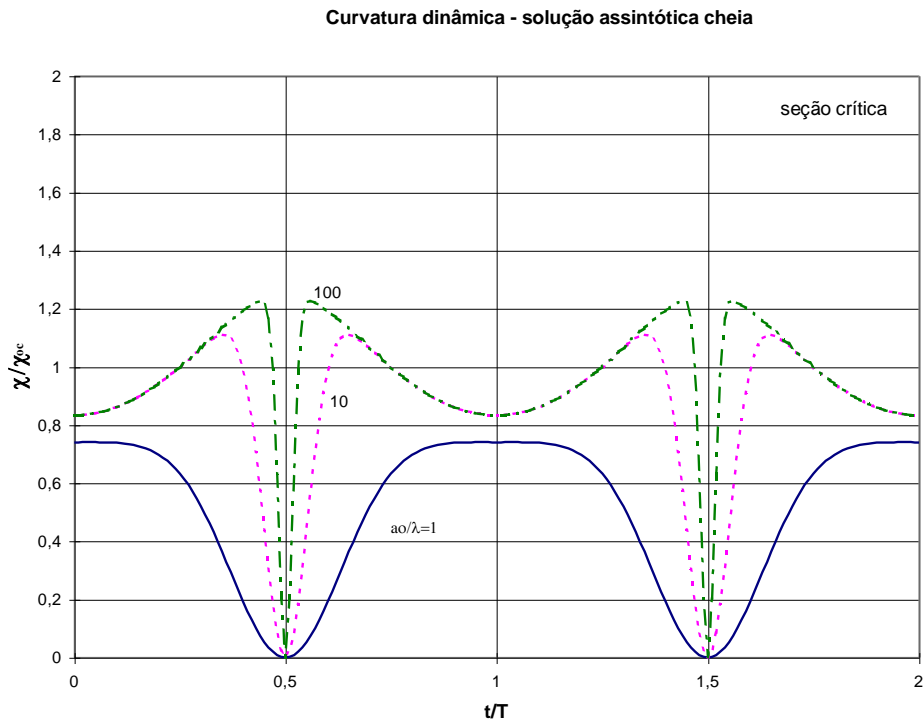
Na Figura 4-6, a parametrização é a mesma. Tomamos  $\varphi = -\pi/2$ , situação que pode eventualmente ocorrer para risers flexíveis, em condições de mar caracterizadas por baixas frequências de excitação. Aumenta sensivelmente a variação da curvatura.



**Figura 4-7** Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0.1; 0.2; 0.4; a_0/\lambda = 1; \varphi = 0; s/\lambda = 0.$$

Embora hipotética, posto que dificilmente ocorreria por razões físicas, mas útil em termos de projeto, visto que a variação de curvatura resultante é, por certo, um limite superior em uma dada situação de excitação harmônica, a condição correspondente a  $\varphi = 0$ , é apresentada na Figura 4-7. A variação de curvatura é de fato máxima.



**Figura 4-8** Curvatura adimensional segundo (4.65), em resposta à excitação monocromática.

$$\tau_0/T_0 = 0.2; a_0/\lambda = 1; 10; 100 \varphi = \pi; \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1.$$

Outro exercício interessante consiste em verificar o comportamento da solução assintótica à medida em que a linha se aproxima de um cabo ideal, ou seja, à medida em que a rigidez flexional diminui. Para tanto, tomamos a amplitude de tração dinâmica  $\tau_0/T_0 = 0.2$ , a fase  $\varphi = \pi$ , e três diferentes valores de  $a_0/\lambda = 1; 10; 100$ . Na Figura 4-8 as curvas são traçadas para *seções críticas* correspondentes a cada valor de rigidez, de forma que  $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1$ . Como pode ser observado, embora analítica, a função (4.65) apresenta comportamento bastante peculiar quando a rigidez flexional diminui. Uma brusca variação de curvatura aparece, quando a seção crítica toca o solo. Este instante corresponde ao mínimo valor da tração, ou seja à situação de máximo afrouxamento. Imediatamente depois deste instante a seção se levanta do solo, à medida em que a tração aumenta. Quando a tração atinge seu máximo a seção



crítica, ainda suspensa, experimenta um valor de mínimo local, proporcionado pelo tensionamento.

Este exercício torna claro porque não é difícil confundir o comportamento descrito, peculiar a linhas muito flexíveis, porém algo tracionadas, com instabilidades numéricas, quando códigos computacionais, que tomam em conta a dinâmica não-linear no domínio do tempo, são processados. O comportamento altamente não-linear, no entanto, tem natureza física e poderia nem ao menos se apresentar se um passo de integração relativamente grande fosse utilizado em tais processamentos. Mesmo que evidenciada a brusca variação, a tendência do projetista seria, em geral, desconsiderá-la, atribuindo-a a problemas numéricos de integração.

Para exemplificar o poder da solução (4.65), a Figura 4-10 apresenta a resposta não-linear de curvatura para um caso hipotético, de excitação com dois harmônicos. Tomamos, arbitrariamente,

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \tau_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \tau_2 \cos(2\omega t + \phi_2) \\ x_0(t) &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)\end{aligned}$$

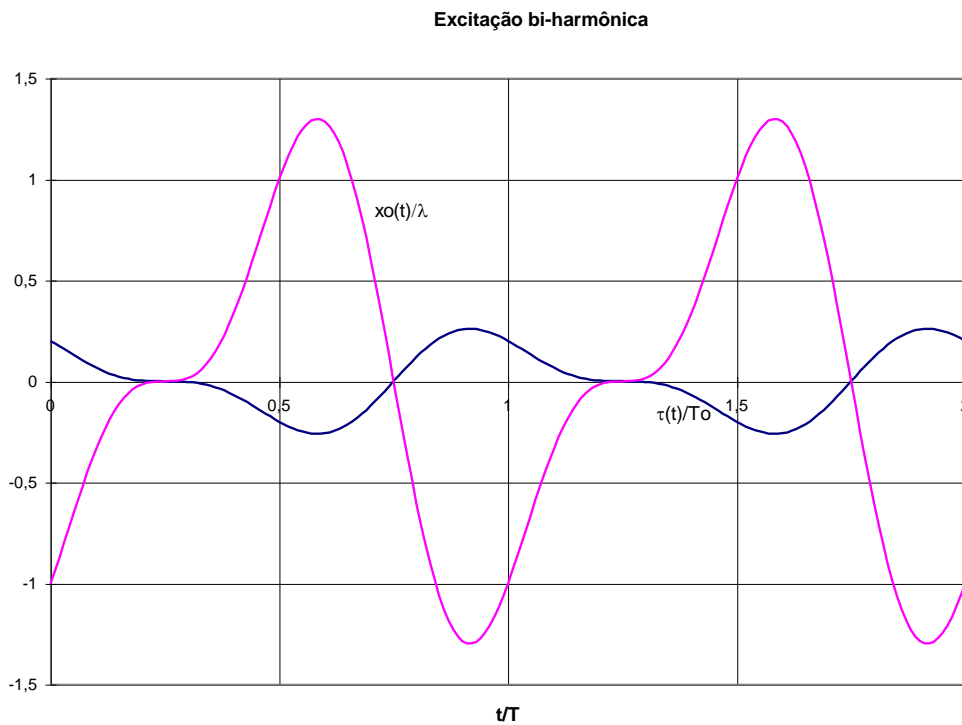
$$a_1/\lambda = 1; a_2/\lambda = 0.5; \varphi_1 = \pi; \varphi_2 = -\pi/2$$

$$\tau_1/T_0 = 0.2; \tau_2/T_0 = 0.1; \phi_1 = 0; \phi_2 = \pi/2$$

resultando as curvas apresentadas na Figura 4-9. A seção crítica é tal que  $\hat{s}/\lambda = \max(x_0(t/\lambda)) - 1 = 0.298$ , no caso exemplificado.

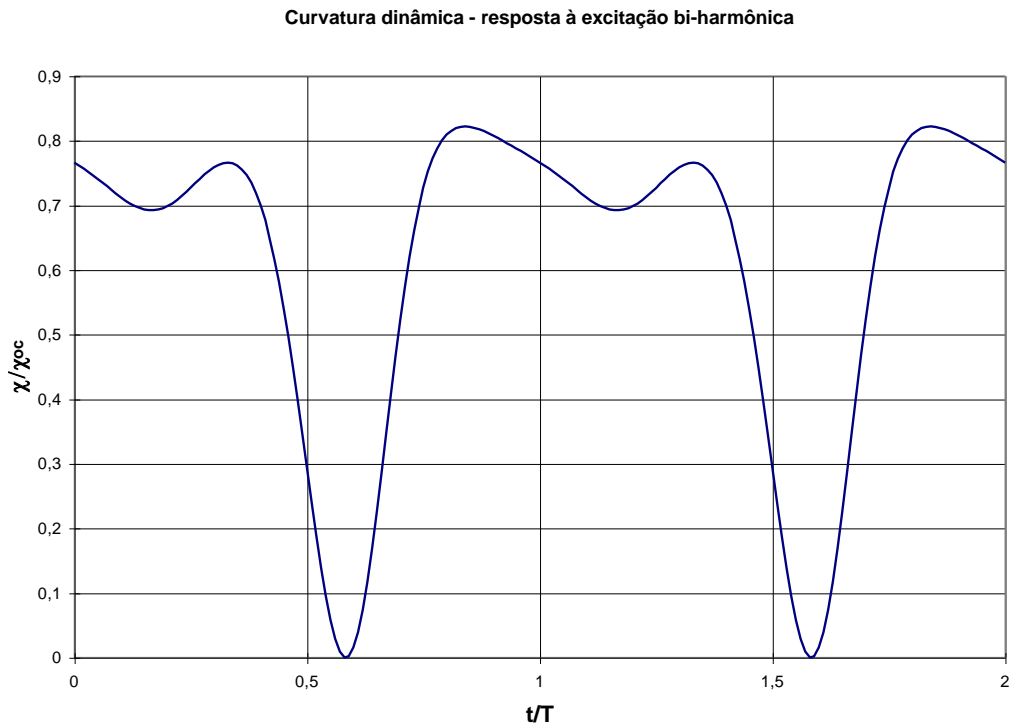
Sob a ação de um mar real, o sistema oceânico responde de forma aleatória e acaba por excitar a linha em uma infinidade de harmônicos. No entanto os movimentos são usualmente pequenos, o que permite tratar a dinâmica global do sistema de forma linear, determinando, para um dado espectro de mar, os espectros de tração e movimento do ponto de contato. A síntese numérica de séries temporais aleatórias

que representem estes dois processos estocásticos pode então ser realizada, de forma apropriada, e a resposta dinâmica não-linear em curvatura junto ao ponto de contato com o solo resulta determinada através da solução assintótica apresentada.



**Figura 4-9** Excitação com dois harmônicos.

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \tau_2 \cos(2\omega t + \phi_2) \\ x_0(t) &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) \\ a_1/\lambda &= 1; a_2/\lambda = 0.5; \varphi_1 = \pi; \varphi_2 = -\pi/2 \\ \tau_1/T_0 &= 0.2; \tau_2/T_0 = 0.1; \phi_1 = 0; \phi_2 = \pi/2 \end{aligned}$$



**Figura 4-10** Curvatura dinâmica. Resposta à excitação com dois harmônicos.

$$\tau(t) = \tau_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \tau_2 \cos(2\omega t + \phi_2)$$

$$x_0(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$$

$$a_1/\lambda = 1; a_2/\lambda = 0.5; \varphi_1 = \pi; \varphi_2 = -\pi/2$$

$$\tau_1/T_0 = 0.2; \tau_2/T_0 = 0.1; \phi_1 = 0; \phi_2 = \pi/2$$

A solução assintótica para a curvatura dinâmica é bastante geral, no que tange à natureza das funções de excitação de tração e movimento *do ponto de contato instantâneo*, bastando que estas sejam limitadas e “bem-comportadas”, como de fato seriam representações físicas reais do fenômeno em estudo.

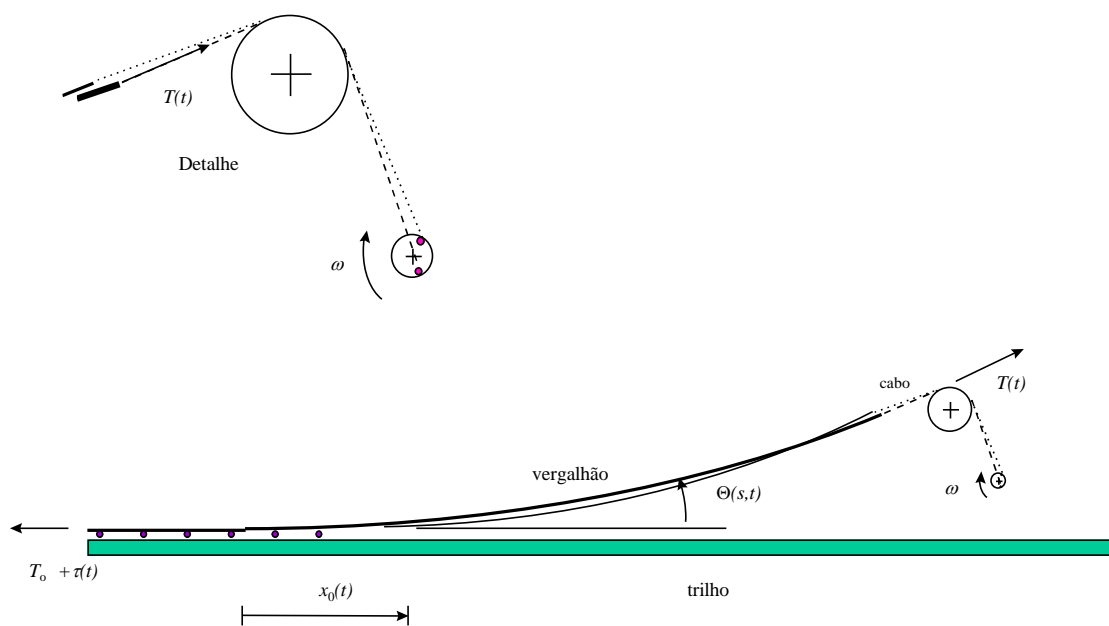
### 4.2.2.3 *Suporte Experimental*

Complementando os ensaios estáticos e com o objetivo de confirmar o modelo assintótico dinâmico, foram conduzidos experimentos específicos, nos laboratórios da Divisão de Tecnologia de Transportes do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, dentro de um programa de pesquisa financiado pela PETROBRÁS. Conforme mencionado no capítulo 3, os experimentos, realizados pela equipe técnica do IPT, são detalhadamente descritos nos relatórios IPT, no. 34.486 e 34.643, 1996, não apenas quanto à modelagem estrutural e aparato experimental, mas também quanto à instrumentação eletrônica, procedimentos de calibração dos sensores e avaliação de erro.

O modelo físico-estrutural é o mesmo vergalhão de aço utilizado nos ensaios estáticos, de 12,8 mm de diâmetro e com circularidade melhor do que 0,1mm. O vergalhão tem comprimento total de cerca de 18m e os experimentos foram conduzidos com um comprimento suspenso da ordem de 11 m, de forma a reproduzir, em escala, a dinâmica do trecho de um *riser* de aço junto ao TDP, em condições de operação; ver IPT 1996. Note mais uma vez que o ensaio aqui analisado foi conduzido dentro da constatação de que as forças de natureza hidrodinâmica, associadas à ação da correnteza, são localmente de segunda-ordem e podem ser consistentemente desconsideradas. Esta consideração justifica a realização dos experimentos “no ar”. Ensaio adicionais com o modelo imerso, foram no entanto conduzidos, ver Relatório IPT 34.643, 1996, e permitiram assegurar tais assertivas.

Os experimentos dinâmicos consistiram em medir a deformação ao longo de um trecho de linha assentado sobre um plano horizontal e suspenso, através de um cabo, por sua extremidade superior (articulada). Sobre este cabo aplicava-se uma função periódica de tração, ocasionando uma correspondente variação da posição do ponto de toque do vergalhão com o plano. Um dispositivo, composto por uma polia e um

rotor, acionava o cabo impondo à sua extremidade um movimento circular de raio pré-especificado e velocidade angular constante. A Figura 4-11 ilustra o arranjo experimental, de forma esquemática.



**Figura 4-11** Ensaio dinâmico de curvatura.

Mais uma vez, como já discutido no capítulo 3, entre diversos condicionantes dos experimentos, dois merecem destaque especial. O primeiro diz respeito à impossibilidade de simular um longo comprimento de linha. No entanto, os comprimentos dos espécimens foram especificados de forma que representassem um número suficientemente grande do parâmetro *comprimento de flexão*. O segundo diz respeito à preservação da integridade dos extensômetros e à minimização do efeito de atrito com o solo. Este último levou, no ensaio aqui analisado, à substituição do apoio contínuo por uma sequência de roletes equi-espaçados e posicionados de forma intercalada aos pares de extensômetros.

O modelo assintótico é traduzido pela equação (4.65). Uma vez definido o raio do movimento circular periódico imposto ao topo e portanto o nível de tração dinâmica, a amplitude de movimento do ponto de contato instantâneo estará estabelecida para uma dada configuração estática. Imaginando, para simplificar, que estas oscilações sejam cossenoidais, na forma (4.66), o modelo fica reduzido a:

- dois parâmetros estáticos: a *curvatura de cabo*  $\chi_0 = q/T_0$  e o *comprimento de flexão*  $\lambda = EJ/T_0$  ;
- quatro parâmetros dinâmicos: a frequência de oscilação  $\omega$ , a amplitude de tração  $\tau_0/T_0$  , a amplitude de movimento do ponto de contato instantâneo  $a_0/\lambda$  e a fase relativa entre este movimento e a tração  $\varphi$  .

Na realidade, como veremos adiante, o sinal de tração medido é quase-cossenoidal. A amplitude de movimento do ponto de contato instantâneo não foi medida diretamente, mas apenas observada, tendo como referência a posição dos roletes de apoio, espaçados de 0.50m. Pode-se dizer que a observação visual desta amplitude de movimento leva a um erro de cerca de 0.12m. A Tabela 4-1 abaixo resume as características do espécimen ensaiado e as condições gerais do experimento.

O IPT forneceu as séries temporais correspondentes aos extensômetros de número 05, 07, 09, 17, 41, 61 e 81. A numeração é crescente no sentido de percurso do vergalhão que vai do trecho apoiado até o ponto de suspensão. Como veremos, no ensaio analisado, o extensômetro 41 corresponde à seção crítica, tal que  $\hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1$ , posto que a série temporal de curvatura é periodicamente tangente ao valor nulo. Os extensômetros de número 05,07,09,17 correspondem a seções que periodicamente “repousam” sobre o apoio. Os de número 61 e 81 nunca tocam o solo. O de número 81, em particular, está bastante distante do ponto de contato estático, próximo à extremidade suspensa e onde esperamos perda de aderência do modelo assintótico com relação aos resultados experimentais.

**Tabela 4-1 Ensaio dinâmico. Dados gerais e condições de ensaio.**

**Dados importados de AqDados 3.0x: r21**  
**Ensaio : 17/1/06/1996 14:37:00:19**  
**Canais: 6 7 8 10 16 17 19 21**

**Condições de Ensaio**

<b>θ (na ext. suspensa)=</b>	<b>0,398 rad</b>
<b>EJ=</b>	<b>22,700 kgf*m<sup>2</sup></b>
<b>Peso linear (q)=</b>	<b>1,000 kgf/m</b>
<b>Fator de calibração (G)=</b>	<b>0,004</b>
<b>Período=</b>	<b>2,660 seg.</b>
<b>Test. topo=</b>	<b>26,500 kgf</b>

**Condições de Ensaio**

<b>θ (na ext. suspensa)=</b>	<b>22,8000 graus</b>
<b>EJ=</b>	<b>0,2226 kNm<sup>2</sup></b>
<b>Peso linear (q)=</b>	<b>9,8060 N/m</b>
<b>Fator de calibração (G)=</b>	<b>0,0042</b>
<b>Período=</b>	<b>2,6600 s</b>
<b>Test. topo=</b>	<b>0,2599 kN</b>
<b>raio de mov. ext. susp.=</b>	<b>40 mm</b>

O ensaio foi conduzido em condição de excitação quase-estática. De fato, observando que o comprimento suspenso do vergalhão é de cerca de 10,8 m, na situação de equilíbrio, a razão entre os quadrados da frequência imposta e da primeira frequência natural pode ser avaliada como  $(\omega/\omega_1)^2 \cong (\omega l/\pi c_0)^2 = (\omega l/\pi)^2 / (T_0/m) \cong 0.03$ , valor bastante pequeno. A natureza quase-estática da resposta implica em que o atraso de fase entre o movimento do ponto de contacto instantâneo e a tração dinâmica seja  $\varphi \approx \pi$ , conforme considerações anteriores.

O procedimento de análise consistiu nas seguintes etapas:

- A seção do extensômetro 41 foi identificada como a seção crítica, de maior variação de curvatura, caracterizada por  $s_{41}/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1$ , onde, por convenção,  $s_f/\lambda = -1$  determina a posição do ponto de contato na situação de equilíbrio.

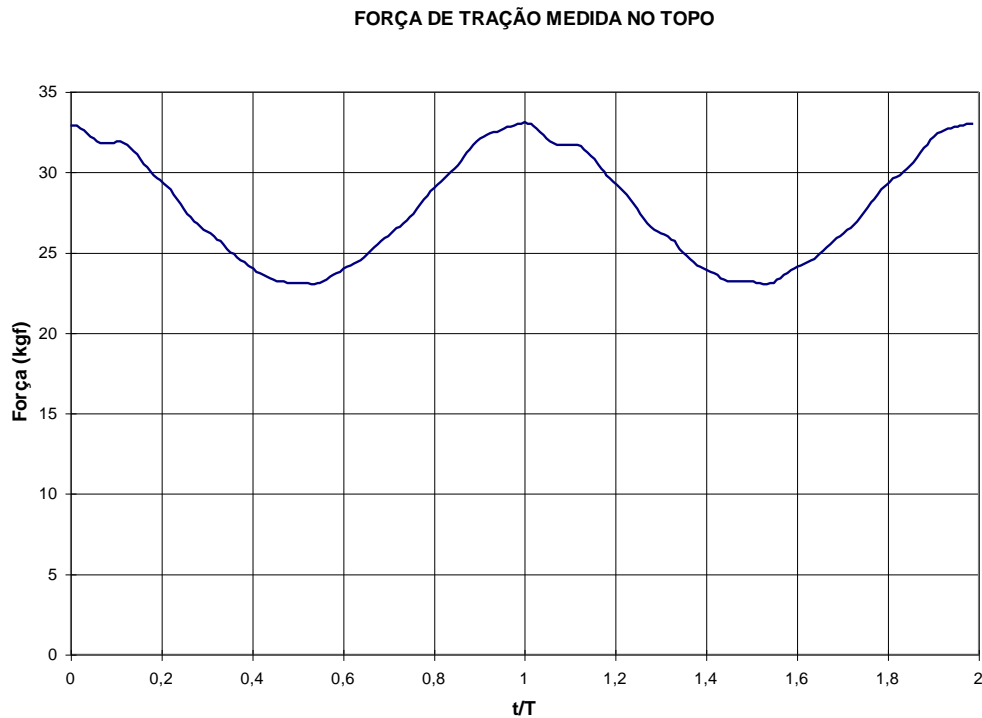
- Uma vez estabelecido o valor da amplitude de movimento do ponto de contato, a coordenada curvilínea  $s_k/\lambda$ , de cada uma das seções analisadas, fica univocamente determinada.
- A expressão analítica (4.65) é então empregada para cada uma das seções consideradas e as séries temporais resultantes são comparadas com as correspondentes experimentais.
- Os valores médio, eficaz, máximo, mínimo e de dupla-amplitude de variação são calculados, para cada seção experimental, e comparados aos respectivos analíticos.

Dois observações merecem destaque:

- (a) O valor da amplitude de movimento do ponto de contato pôde ser observado com erro da ordem de um quarto de espaçamento entre roletes de apoio, ou seja de cerca de 0.12m.
- (b) A série temporal experimental da tração é medida na extremidade suspensa do modelo. Seja  $F(t) = \bar{F} + \tau(t)$  esta força medida. Se a parcela oscilatória  $\tau(t)$  da tração for considerada independente da seção, a tração na região do ponto de contato pode ser expressa como:
- (i) uma cossenóide,  $T(t) = T_0 + \tau_0 \cos \omega t$  de amplitude  $\tau_0 = \sqrt{2}RMS(\tau(t))$ , determinada a partir da série temporal experimental ;
- (ii)  $T(t) = T_0 + \tau(t) = T_0 + F(t) - \bar{F}$ , que normalizada por  $T_0$  fica  $T(t)/T_0 = 1 + \tau(t)/T_0 = 1 + (F(t) - \bar{F})/T_0$  podendo ser substituída diretamente em (4.65). Pode ainda ser representada por  $T(t) = \bar{T} + \tau(t) = F(t) - \bar{F}(1 - \cos \bar{\theta})$ , onde  $\tau(t) = F(t) - \bar{F}$  e  $\bar{T} = \bar{F} \cos \bar{\theta}$ .

A série temporal correspondente à força de tração medida na extremidade superior é apresentada na figura abaixo. Conforme pode ser observado o caráter cossenoidal é bastante forte, embora exista a presença de “patamares periódicos” no sinal, devidos, provavelmente, a uma pequena folga mecânica no dispositivo de acionamento.





*Figura 4-12 Ensaio dinâmico. Força medida na extremidade superior.*

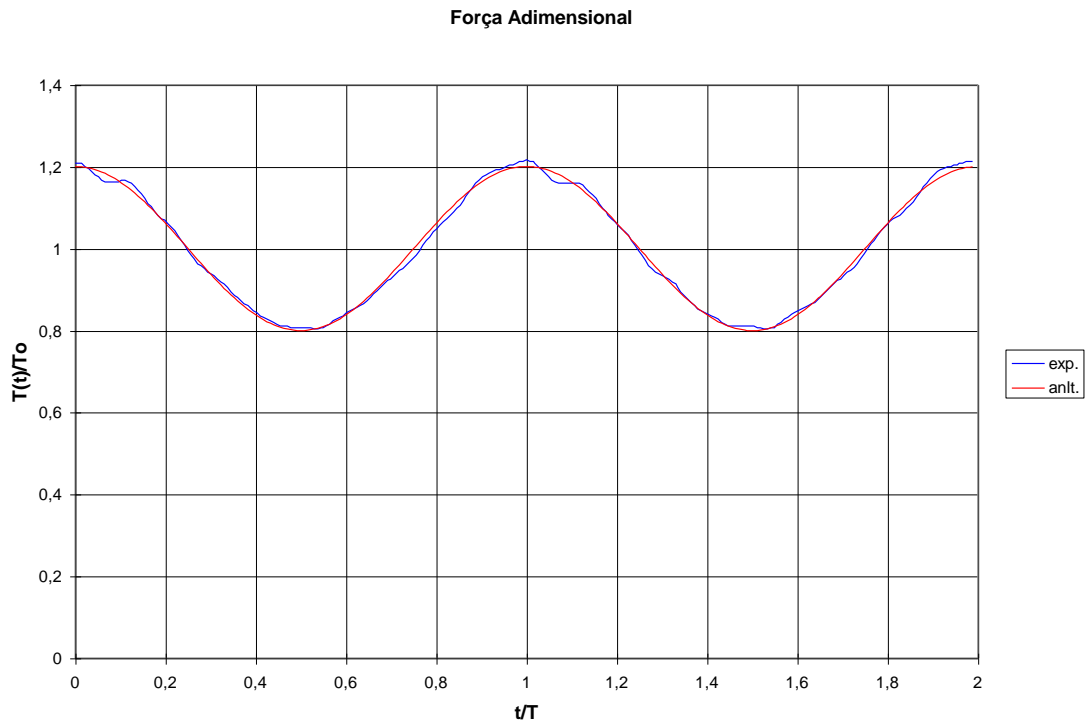
A Tabela 4-2 resume os principais parâmetros estáticos e dinâmicos para a análise do tipo (i), com a tração analítica e progressão do ponto de contato instantâneo, em (4.65), supostas cossenoidal, na forma  $x_0(t) = a_0 \cos(\omega t + \pi)$ ;  $T(t)/T_0 = 1 + \tau_0 \cos \omega t$ , portanto. A Figura 4-13 mostra a série temporal de força adimensional experimental comparada à cossenoidal.

Como pode ser observado na Tabela 4-2, o número de Mach é bastante pequeno,  $M = v_0/c_0 \cong 0,055$ . O erro da aproximação sub-crítica é, portanto, da ordem de  $M^2 \cong 0,3\%$ . O comprimento de flexão é 0,96m e a amplitude de movimento do “ponto de contato instantâneo” (observada experimentalmente como pouco superior a duas vezes o espaçamento entre os roletes de apoio, que é de 0,5 m), foi ajustada, (com erro de cerca de  $\frac{1}{4}$  deste espaçamento), ao valor 1,12m. Este ajuste teve por base

a aderência da série temporal produzida analiticamente àquela experimental correspondente à seção do extensômetro 41. A sensibilidade da resposta à amplitude do PCI será exemplificada posteriormente. O parâmetro “erro de identificação da seção  $\hat{s}$ ”, permite avaliar graficamente, através da observação das séries temporais de curvatura da seção 41, a sensibilidade dos resultados a um eventual erro de identificação da seção crítica. Esta sensibilidade será também exemplificada posteriormente.

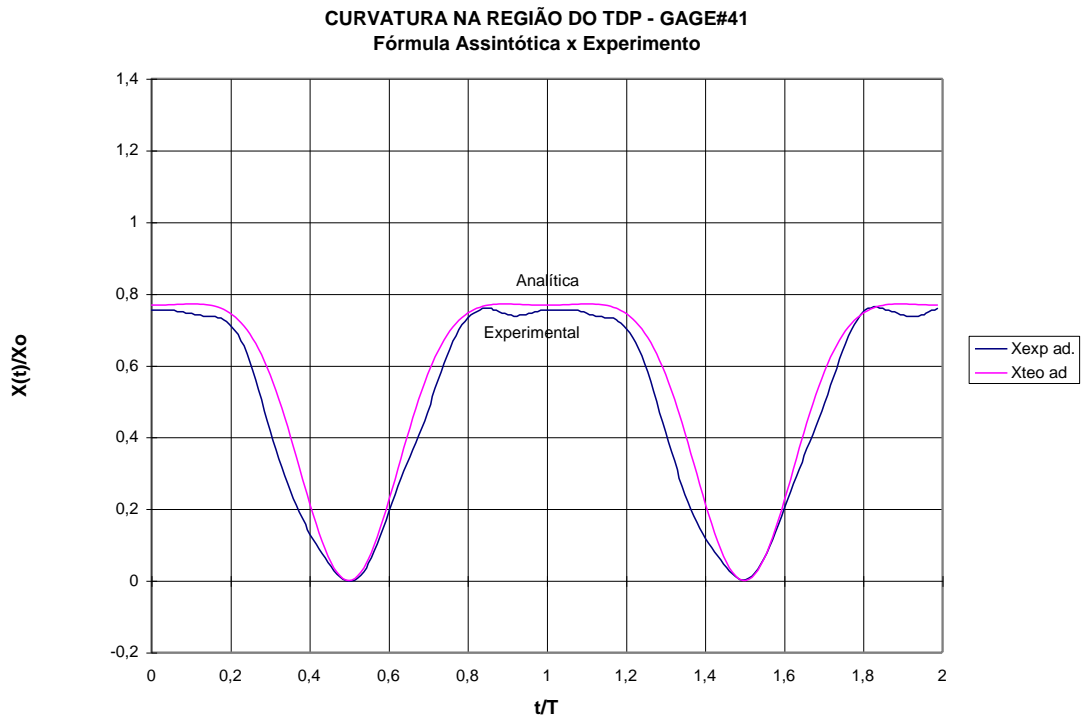
*Tabela 4-2 Ensaio dinâmico. Parâmetros de análise; alternativa (i).*

<b>Parâmetros Calculados</b>		<b>Parâmetros Ajustados</b>	
To=	0,2396 kN	Fase ao/tal=	180 graus
Xo=	0,0409 1/m	Fase ao/tal=	3,1416 rad
$\lambda$ =	0,9640 m		
Tmed. topo=	0,2727 kN	Fase força=	0 graus
$\tau_0/T_0$ =	0,2004	Fase força=	0 rad
ao/ $\lambda$ =	1,1619		
RMS Ttopo=	0,0340 kN	ao=	1,12 m
Tmed TDP=	0,2514 kN	Erro id. s^=	0
$\tau_0/T_{med}$ =	0,1910		
co=	48,4672 m/s		
vo=	2,6456 m/s		
vo/co=	0,0546		
(vo/co)^2=	0,0030		



**Figura 4-13** Tração adimensional na região do ponto de contato, normalizada pela tração estática, e tração cossenoidal equivalente (i).

A Figura 4-14, correspondente à “seção crítica” 41, mostra a comparação entre dois ciclos da série temporal experimental com a série temporal produzida analiticamente, impondo-se tração dinâmica cossenoidal pura. Conforme pode ser observado, a aderência é bastante satisfatória. A curvatura dinâmica decresce, atingindo o valor nulo no “instante de toque da seção no solo”. Note que este toque é instantâneo pois, imediatamente após sua ocorrência, a seção é levantada, com conseqüente aumento da curvatura. O pequeno desvio de simetria observado na série temporal experimental se deve, como será visto, às irregularidades presentes na série temporal da força.



**Figura 4-14 Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\chi_0$  . “Seção crítica”: 41.**

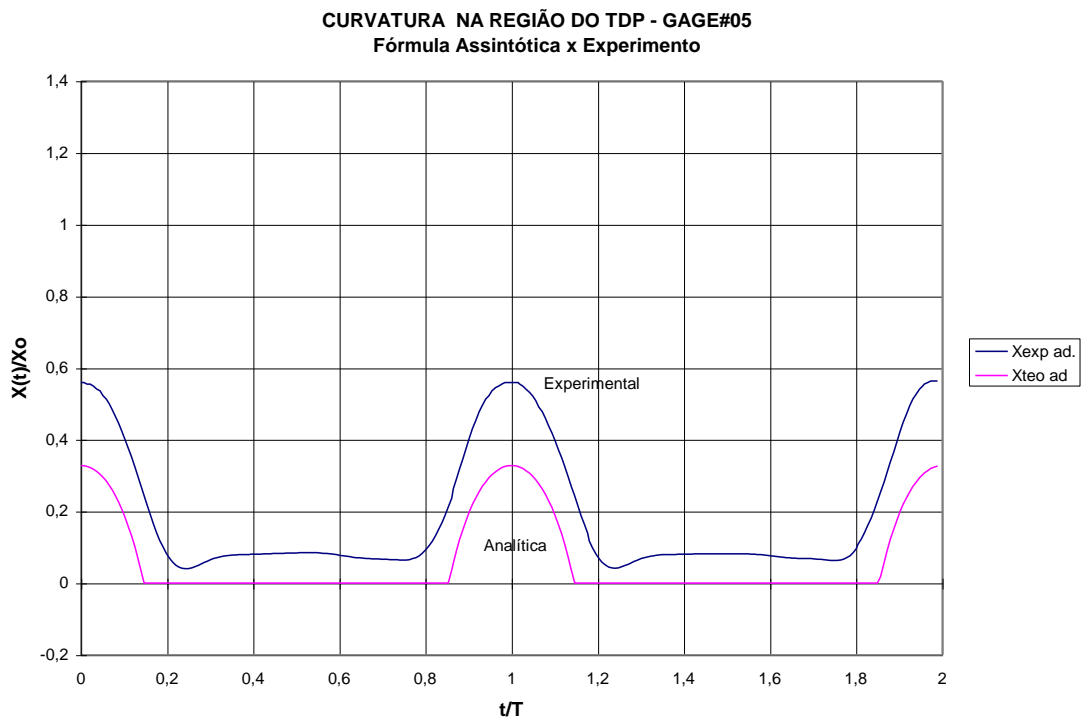
$$(i) \chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619$$

$$s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,1619; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$$

As figuras 4-15 a 4-20 correspondem às seções identificadas pelos extensômetros de número 05, 07, 09, 17, 61 e 81. As quatro primeiras seções encontram-se à esquerda da seção crítica, “repousando” periodicamente sobre o apoio, portanto. As seções 61 e 81 estão sempre suspensas, jamais tocando o apoio. Como pode ser observado a aderência qualitativa é muito boa e a quantitativa bastante satisfatória. Cumpre lembrar que uma vez identificada a “seção crítica” o posicionamento relativo das demais fica univocamente estabelecido. Pode-se afirmar, portanto, que a expressão analítica deduzida representa com fidedignidade o fenômeno em regime dinâmico

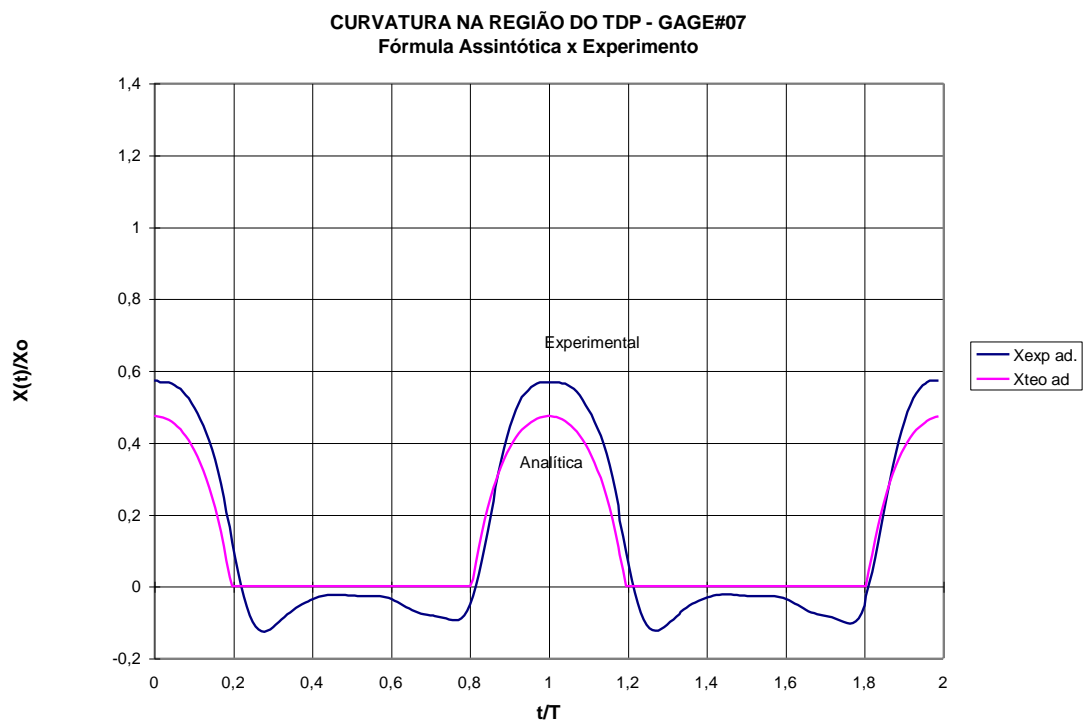
subcrítico, permitindo que a curvatura dinâmica seja recuperada no tempo e no espaço. Três observações merecem destaque:

- Nas seções 07, 09 e 17, a curvatura atinge valores negativos durante os períodos de “repouso sobre o solo”. Este comportamento pode ser atribuído aos apoios discretos utilizados, na forma de roletes.
- Na seção 05 a curvatura se aproxima do valor nulo, não o atingindo, no entanto. Tanto os apoios sobre os roletes equiespaçados como também uma eventual imperfeição inicial podem ser aventadas como causadoras deste comportamento.
- Na “seção suspensa” 61, existe algum desvio na média da curvatura, embora a amplitude dinâmica seja bem representada analiticamente, tanto na forma qualitativa quanto quantitativa.



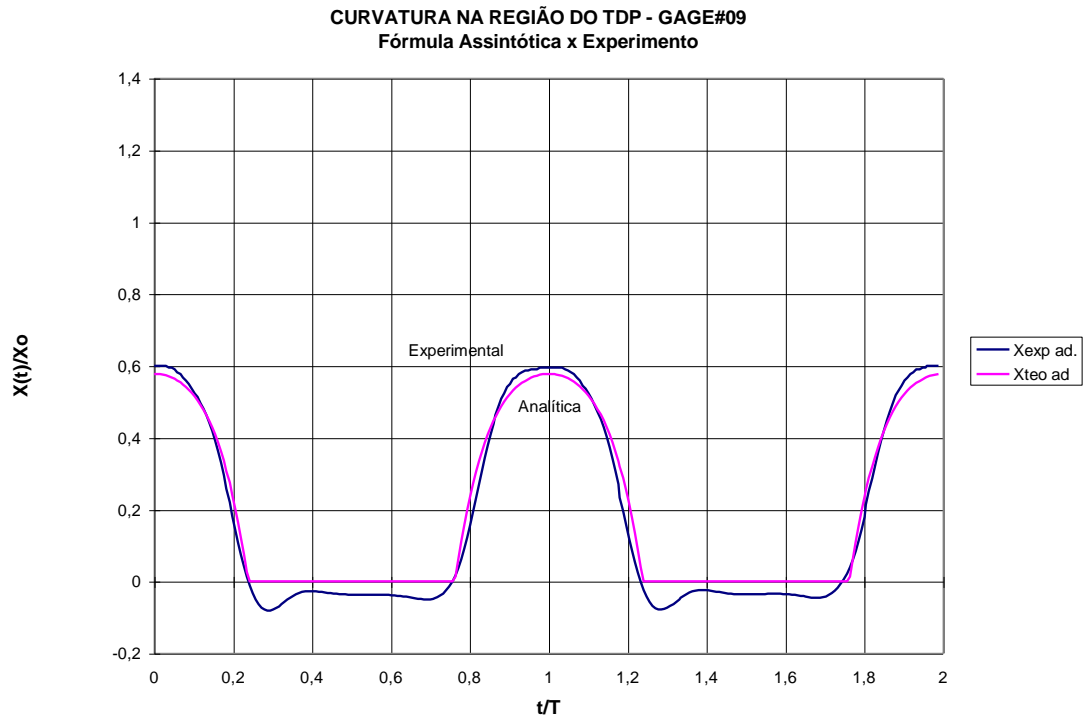
**Figura 4-15** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\chi_0$ . Seção 05. (i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$

$$s/\lambda = -1,7054; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$$



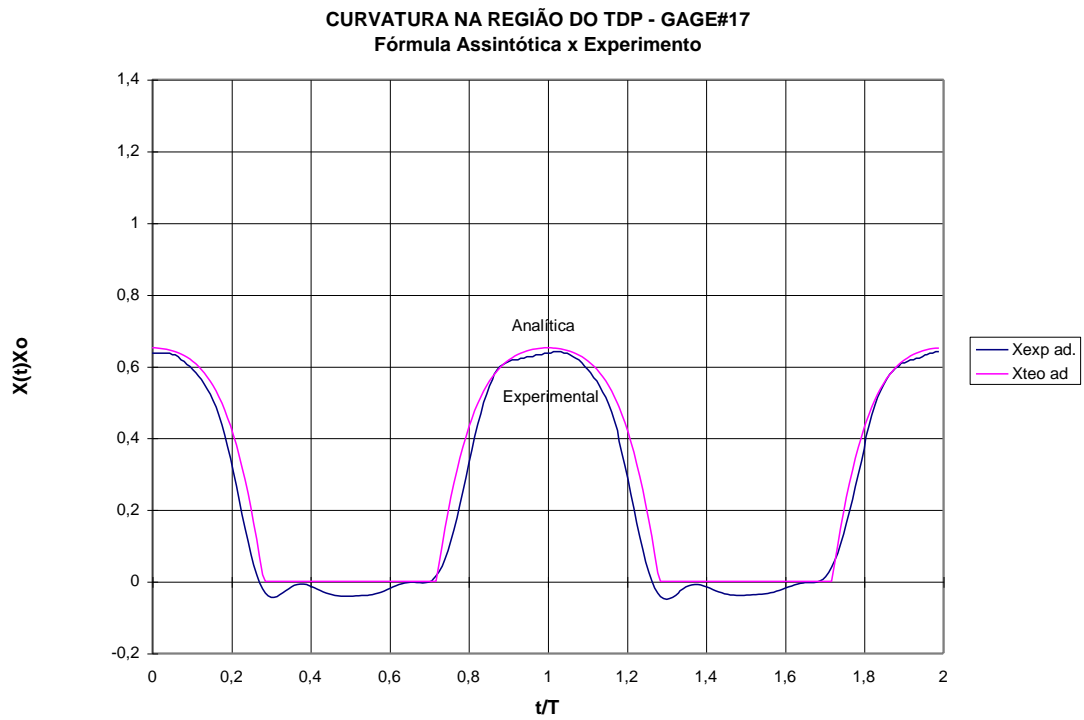
**Figura 4-16** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\chi_0$ . Seção 07. (i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$

$$s/\lambda = -1,3942; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$$



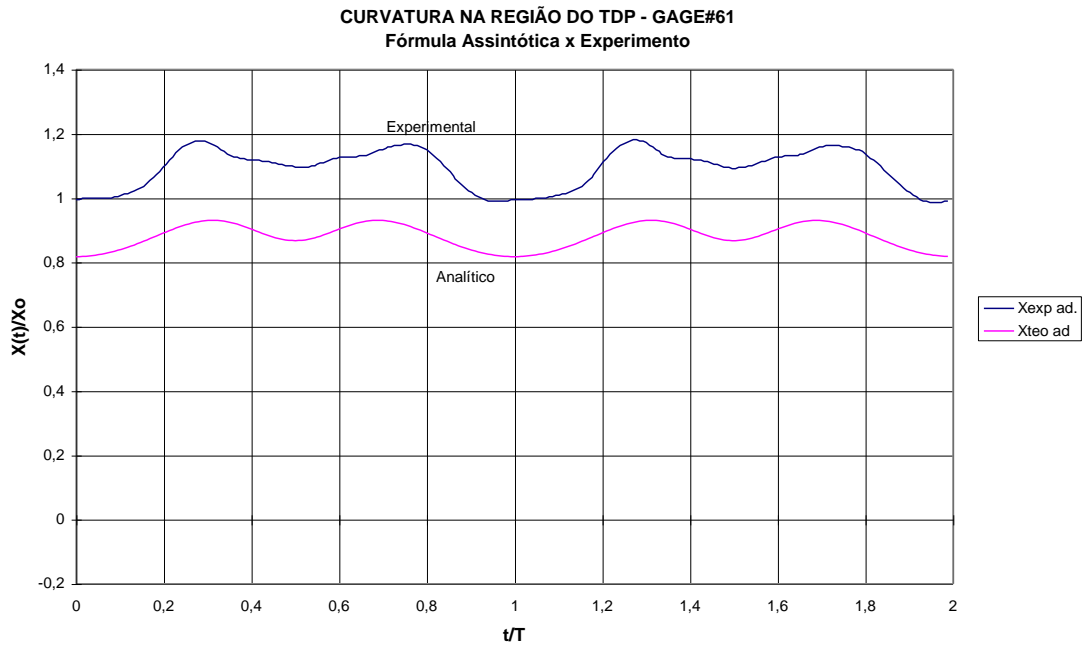
**Figura 4-17** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\chi_0$ . **Seção 09.** (i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$

$$s/\lambda = -1,0830; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$$

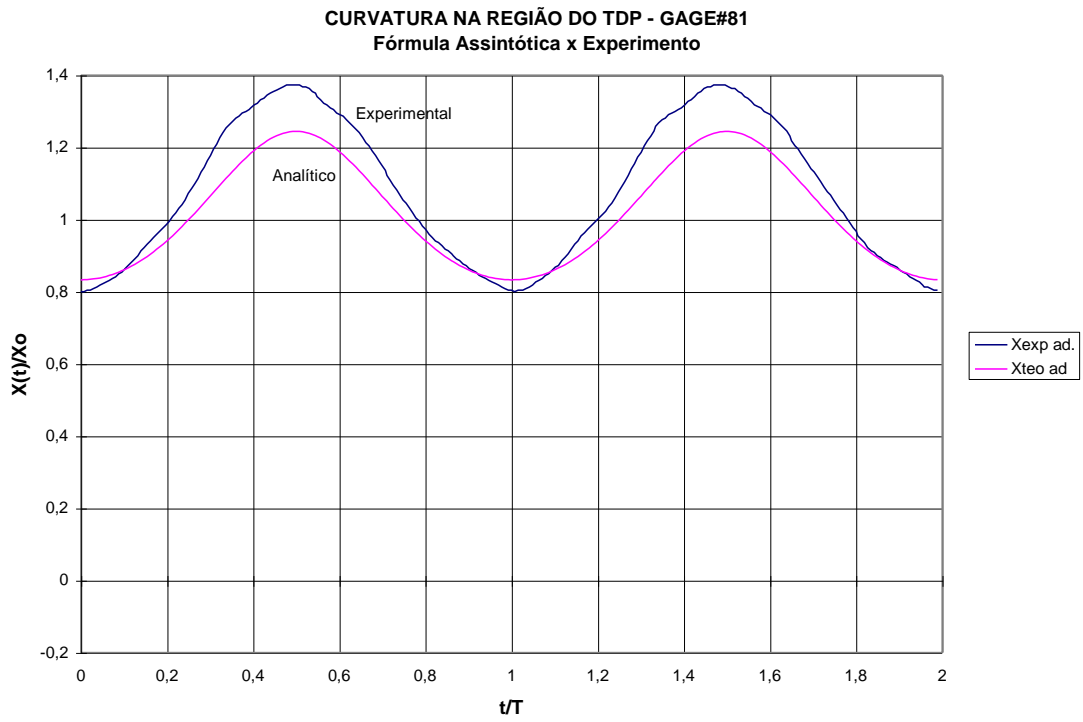


**Figura 4-18** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\chi_0$ . **Seção 17.** (i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$   
 $s/\lambda = -0,7718$ ;  $\tau_0/T_0 = 0,2004$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$



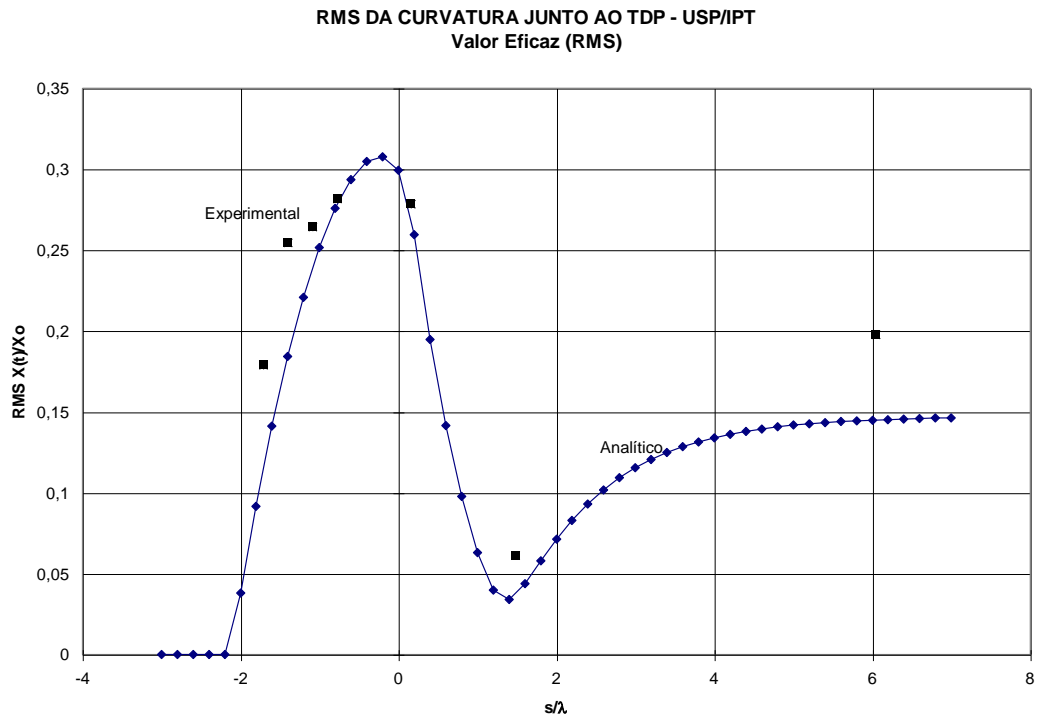


**Figura 4-19** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\chi_0$ . **Seção 61.** (i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$   
 $s/\lambda = 1,4846$ ;  $\tau_0/T_0 = 0,2004$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$



**Figura 4-20** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\chi_0$ . **Seção 81.** (i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$

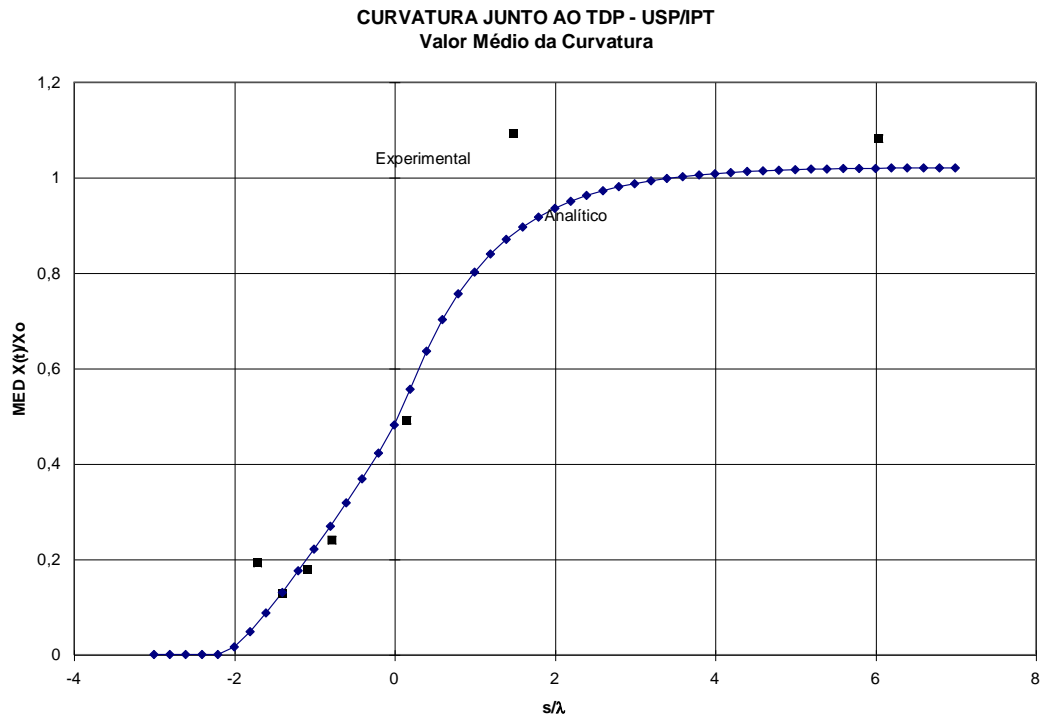
$$s/\lambda = 6,0491; \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$$



**Figura 4-21** Valor eficaz da curvatura adimensional  $\chi(t)/\chi_0$  ao longo da linha.

(i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$ ;  $\tau_0/T_0 = 0,2004$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$

A Figura 4-21 apresenta o valor eficaz, ou RMS, da curvatura, ao longo do comprimento, para o experimento analisado. A concordância da curva analítica com os resultados experimentais é notável, particularmente para as seções 41 (crítica;  $\hat{s}/\lambda = 0,1619$ ), 17 ( $s/\lambda = -0,7718$ ) e para a seção 61 ( $s/\lambda = 1,4846$ ). Esta última corresponde a uma região de mínimo local na curva.



**Figura 4-22** Valor médio da curvatura adimensional  $\chi(t)/\chi_0$  ao longo da linha.

(i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$ ;  $\tau_0/T_0 = 0,2004$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$

A Figura 4-22 mostra o valor médio da curvatura ao longo da linha. Note a excelente concordância de resultados para as seções da região do ponto de contato e a tendência bastante satisfatória para as seções suspensas, 61 e 81, esta última já bem distante da região de contato e próxima da extremidade suspensa. Deve ser lembrado que, no experimento, a curvatura é nula na extremidade suspensa, enquanto na expressão analítica, a curvatura tende a de catenária ideal ao longe da região de contato.

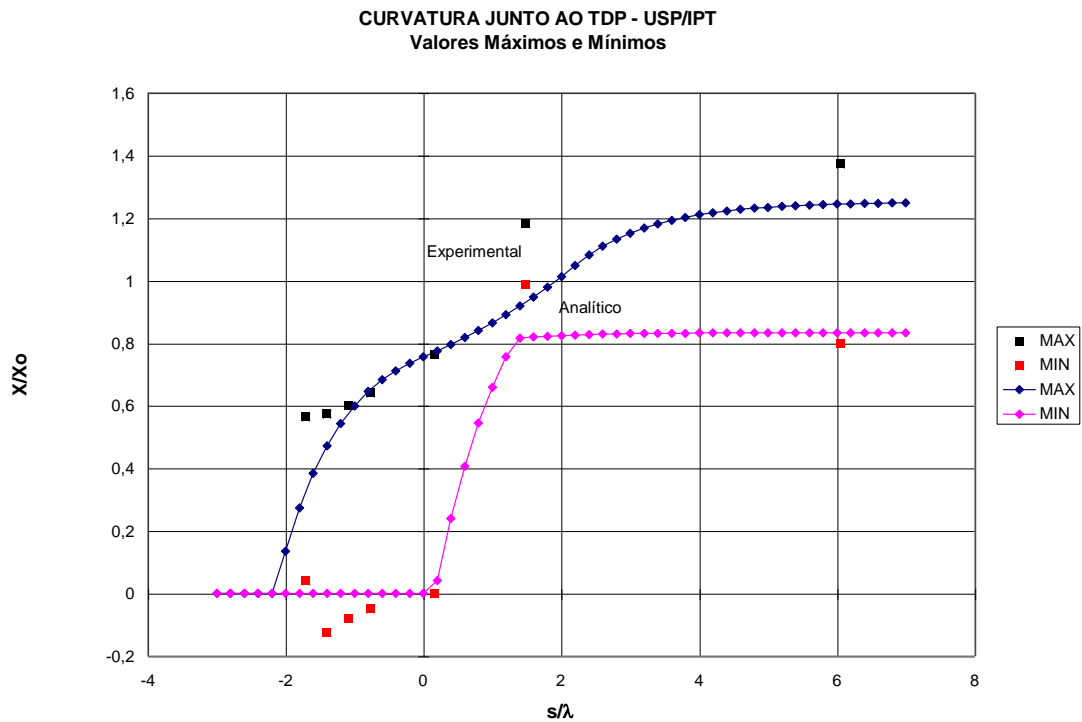
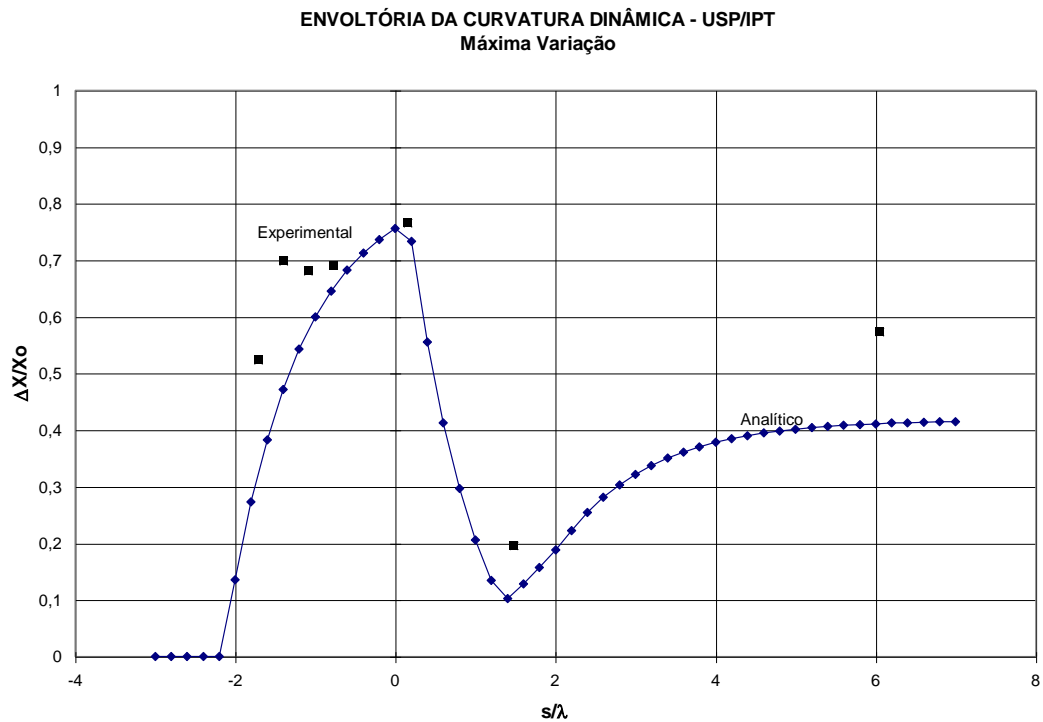


Figura 4-23 Valores máximo e mínimo da curvatura adimensional  $\chi(t)/\chi_0$  ao longo da linha.

$$(i) \chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1619 \quad \tau_0/T_0 = 0,2004; \varphi = \pi; M = 0,055$$

A Figura 4-23 apresenta os valores máximo e mínimo de curvatura atingidos ao longo dos dois ciclos analisados, ao longo do comprimento. O ponto de máxima variação de curvatura corresponde à seção crítica, cuja posição é dada, genericamente, por  $\hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1$ . Nela ocorreriam os maiores danos acumulados associados à flexão dinâmica, e correspondendo, portanto, à seção de pior situação no que diz respeito à fadiga mecânica. A Figura 4-24 mostra a envoltória correspondente à referida variação.

Pode-se dizer que os resultados mostram, de forma eloquente, a adequação da presente solução assintótica.



**Figura 4-24** Variação (pico-a-pico) da curvatura adimensional,  $\chi(t)/\chi_0$ , ao longo da linha.

(i)  $\chi_0 = q/T_0 = 0,0409m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1619$ ;  $\tau_0/T_0 = 0,2004$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$

Com o intuito de exemplificar o poder de recuperação da solução assintótica, no que tange aos aspectos qualitativos e quantitativos dos resultados experimentais, a Tabela 4-3 resume os principais parâmetros estáticos e dinâmicos para a análise do tipo (ii), onde a série temporal da tração experimental é substituída diretamente em (4.65), normalizada pela tração média calculada na região do ponto de contato, na forma  $T(t)/\bar{T} = 1 + \tau(t)/\bar{T}$ ;  $\tau(t) = F(t) - \bar{F}$ , onde  $F(t)$  é a tração medida na extremidade suspensa. O comprimento de flexão fica  $\lambda = \sqrt{EJ/\bar{T}}$ . A curvatura de referência é redefinida como  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T}$ . A progressão do ponto de contato instantâneo, em (4.65), permanece sendo suposta cossenoidal, na forma  $x_0(t) = a_0 \cos(\omega t + \pi)$ , portanto. A Figura 4-25 mostra a série temporal de força adimensional experimental.

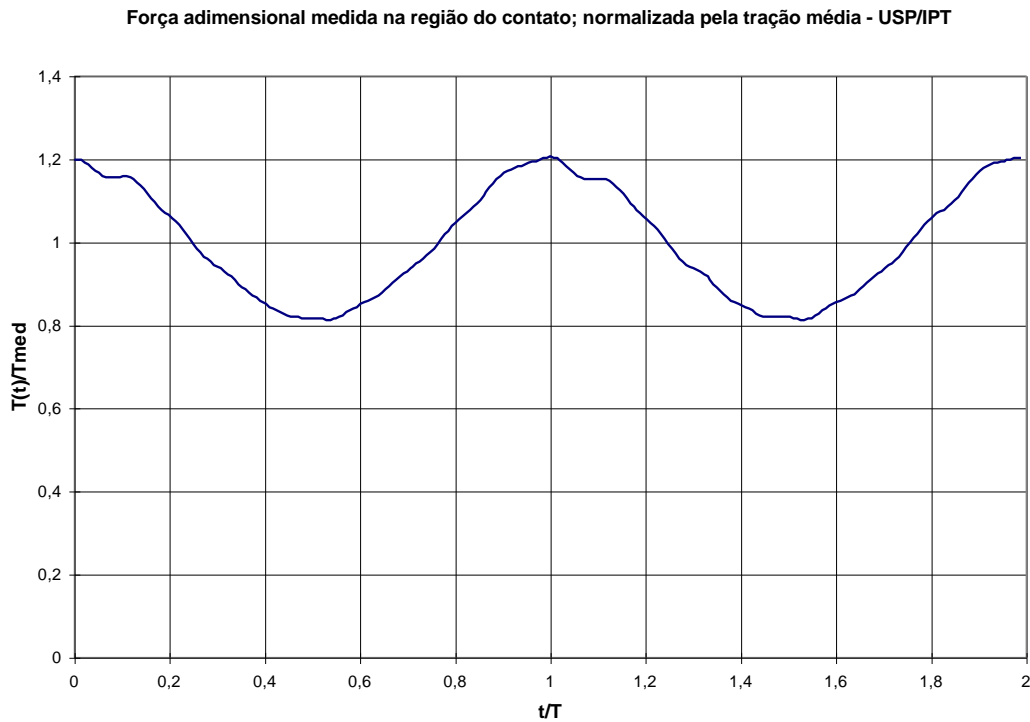


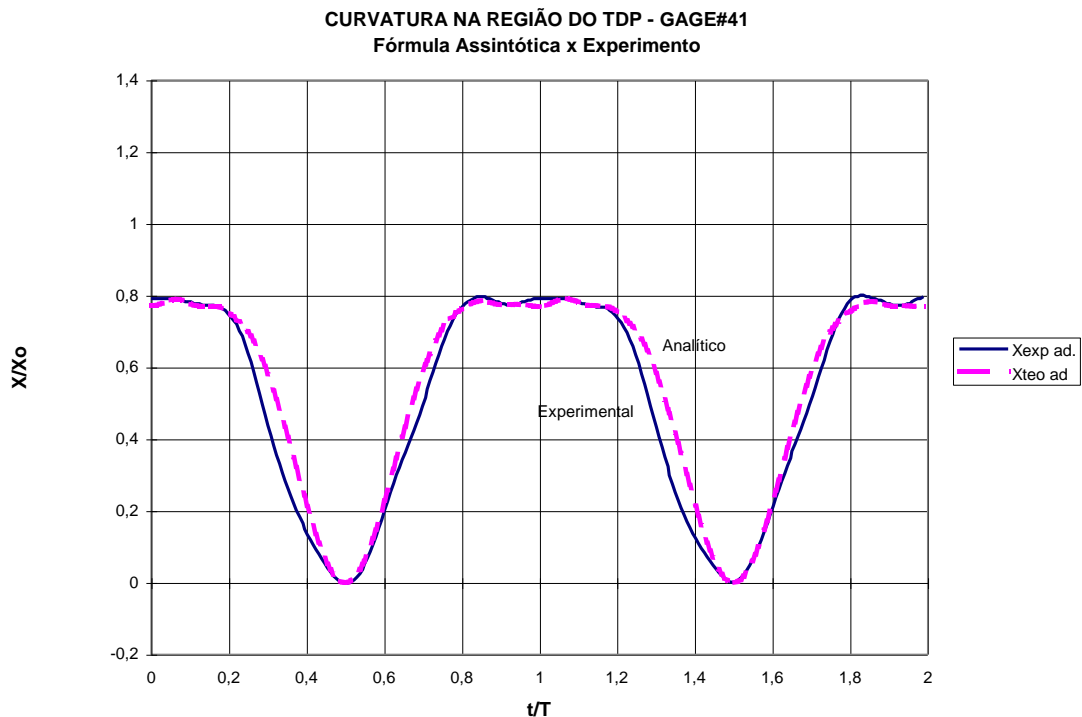
Figura 4-25 Tração adimensional na região do ponto de contato, normalizada pela tração média (ii)

Tabela 4-3 Ensaio dinâmico. Parâmetros de análise; (ii).

<b>Parâmetros Calculados</b>		<b>Parâmetros Ajustados</b>	
To=	0,2396 kN	Fase ao/tal=	180 graus
Xm=	0,0390 1/m	Fase ao/tal=	3,1416 rad
λ=	0,9410 m		
Tmed. topo=	0,2727 kN	Fase força=	0 graus
τo/To=	0,2004	Fase força=	0 rad
ao/λ=	1,1903		
		Erro id. s^=	0
RMS Ttopo=	0,0340 kN	ao=	1,12 m
Tmed TDP=	0,2514 kN		
co=	48,4672 m/s		
vo=	2,6456 m/s		
vo/co=	0,0546		
(vo/co)^2=	0,0030		

Note, comparando-se as tabelas 4-2 e 4-3, que existem alterações marginais nos parâmetros calculados, como por exemplo no comprimento de flexão ou na curvatura de referência. A Figura 4-26, por sua vez, apresenta as séries temporais experimental

e analítica correspondentes à curvatura na seção crítica. É notável a similaridade das curvas, particularmente nos trechos correspondentes aos “patamares”. Note, por exemplo que os patamares de tração ocorrentes próximos a  $t/T \cong 0,1$  e  $1,1$ , provenientes de pequenas folgas mecânicas no dispositivo de acionamento, ocasionam patamares correspondentes na resposta em curvatura. Como seria de se esperar, a um pequeno decréscimo na tração corresponde um pequeno acréscimo na curvatura. A série temporal (semi-)analítica reconstitui este comportamento bastante bem. A reconstituição só não é melhor porque a função que representa a oscilação do ponto de contato foi suposta uma cossenóide pura.



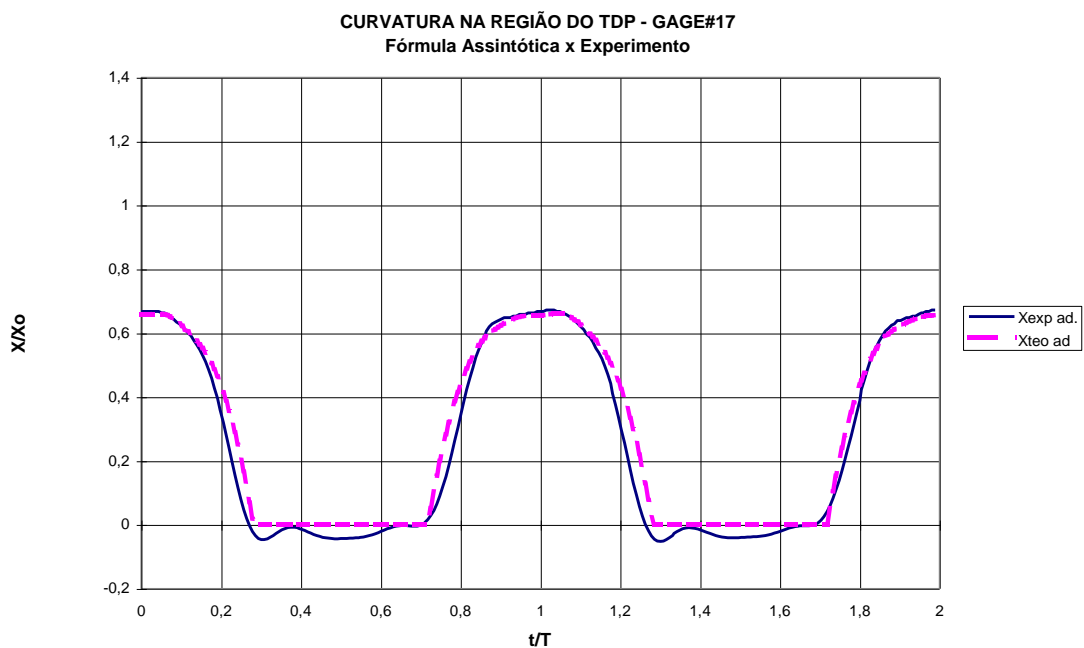
**Figura 4-26 Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$ . “Seção crítica”: 41.**

(ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1903$   $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,1903$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$

As figuras 4-27 e 4-28 apresentam exemplos de séries temporais de curvatura correspondentes à seções 17 e 61. As figuras 4-29 a 4-32 mostram as curvas

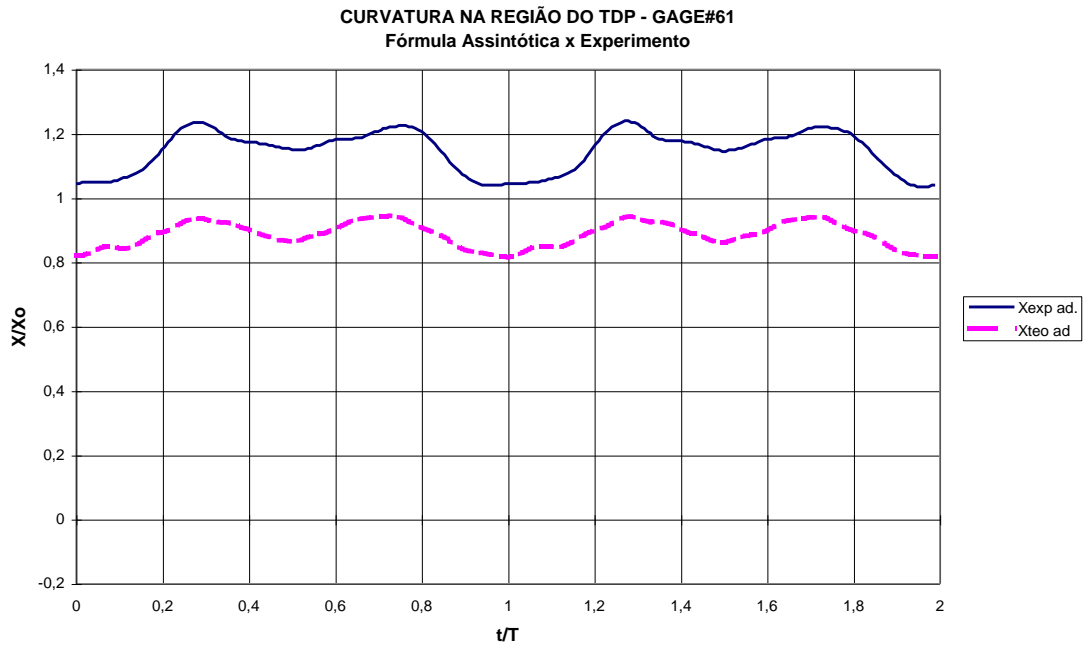


experimentais e analíticas dos valores eficaz, médio, máximo e mínimo e da variação pico-a-pico ao longo da linha para a análise do tipo (ii). Os resultados são praticamente os mesmos, se comparados aos correspondentes à análise (i), confirmando, mais uma vez, a adequabilidade da solução assintótica e seu poder de representação não-linear.

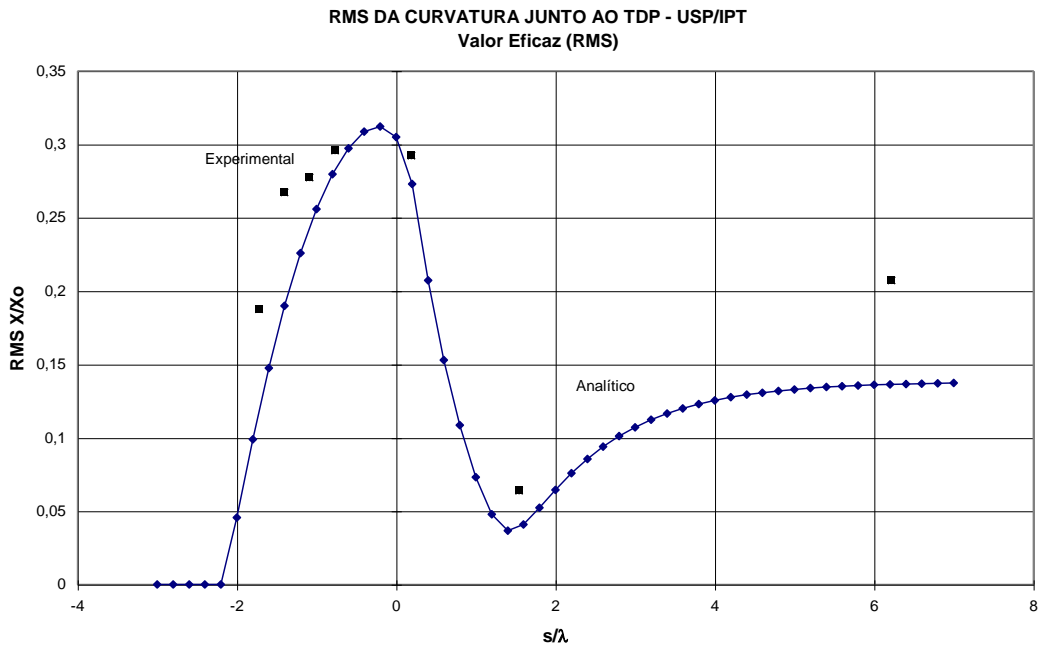


**Figura 4-27 Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$ . Seção 17. (ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1903$**

$$s/\lambda = -0,7662; \varphi = \pi; M = 0,055$$



**Figura 4-28** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$ . Seção 61. (ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1903$   
 $s/\lambda = -0,7662$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$



**Figura 4-29** Valor eficaz da curvatura adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$  ao longo da linha.

(ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$

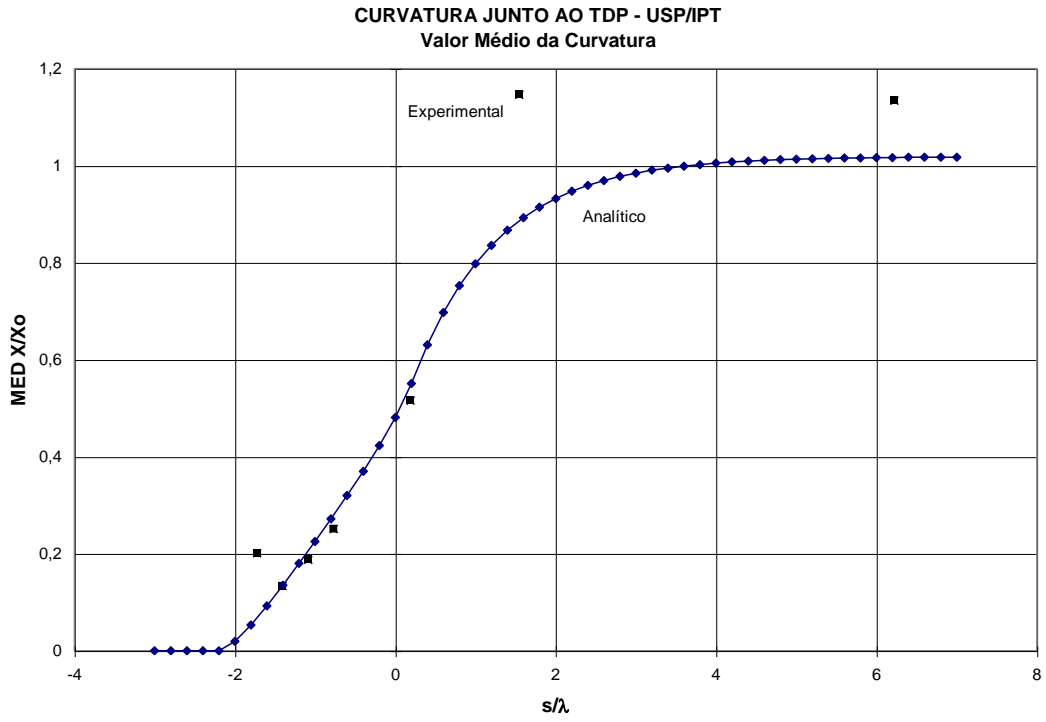


Figura 4-30 Valor médio da curvatura adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$  ao longo da linha.

(ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,1903$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,055$

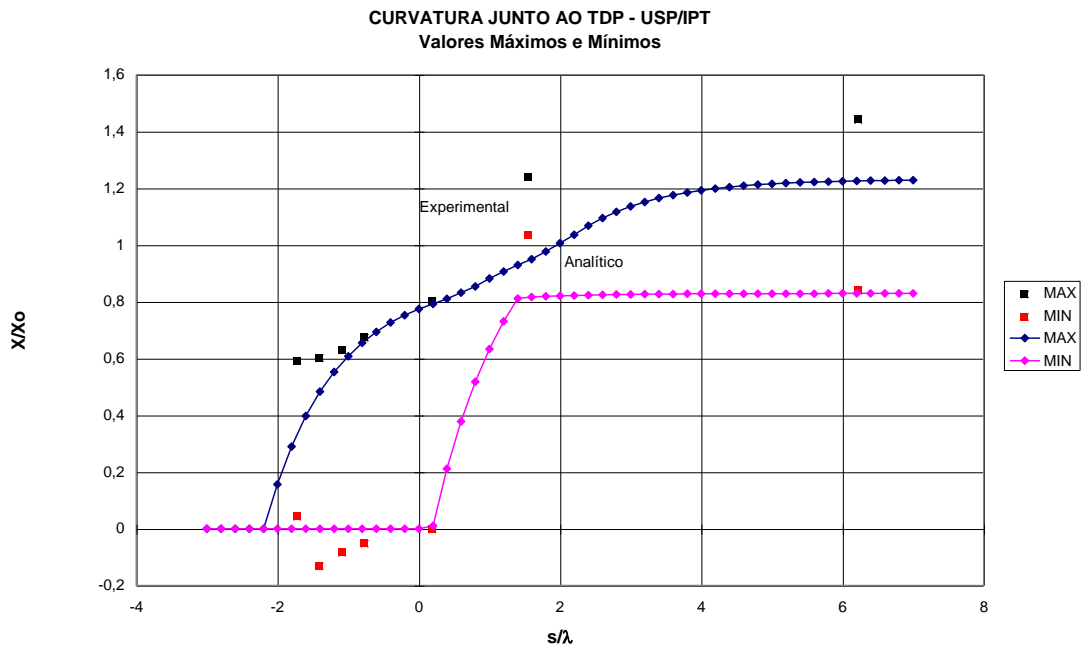
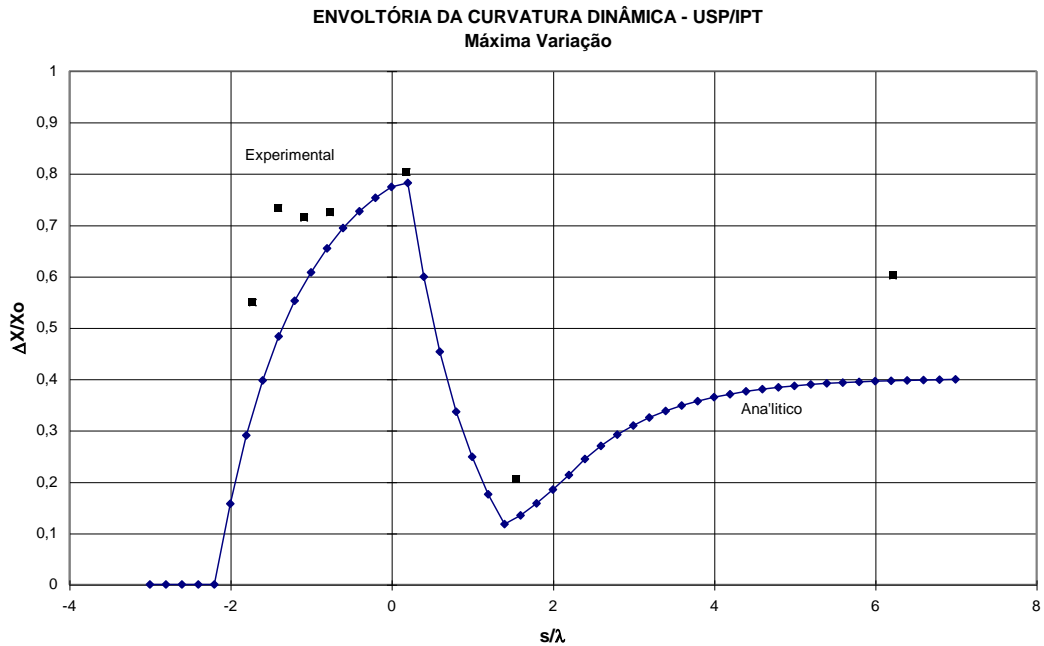


Figura 4-31 Valores máximo e mínimo da curvatura adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$  ao longo da linha. (ii)

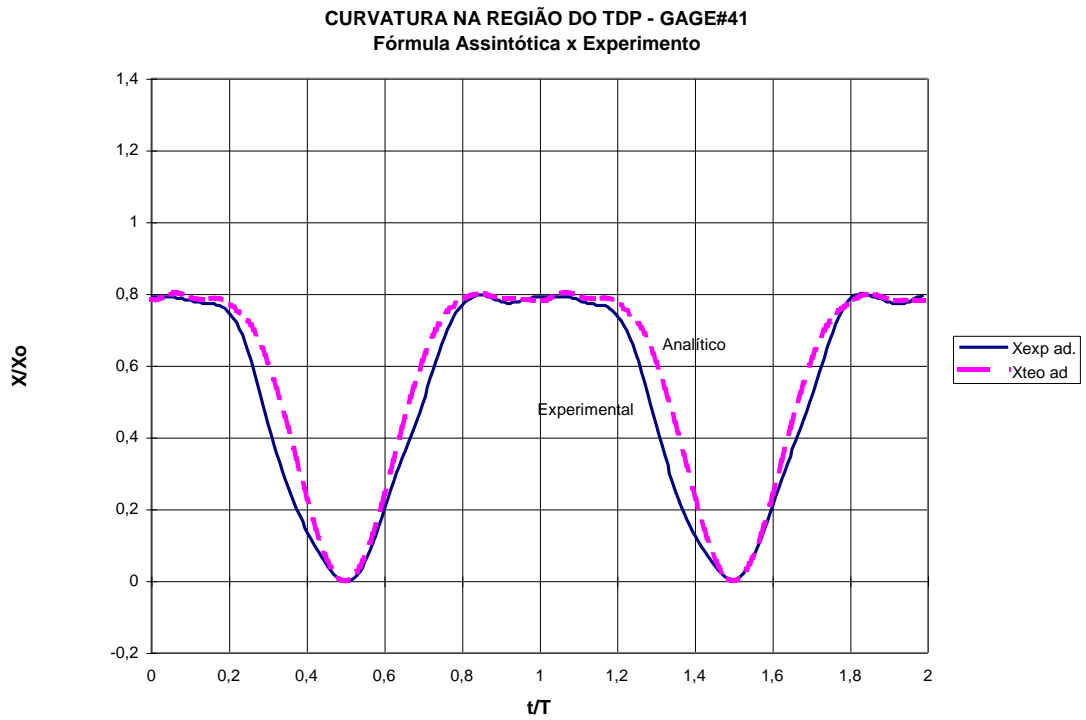
$$\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$$



**Figura 4-32** Variação (pico-a-pico) da curvatura adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$  ao longo da linha.

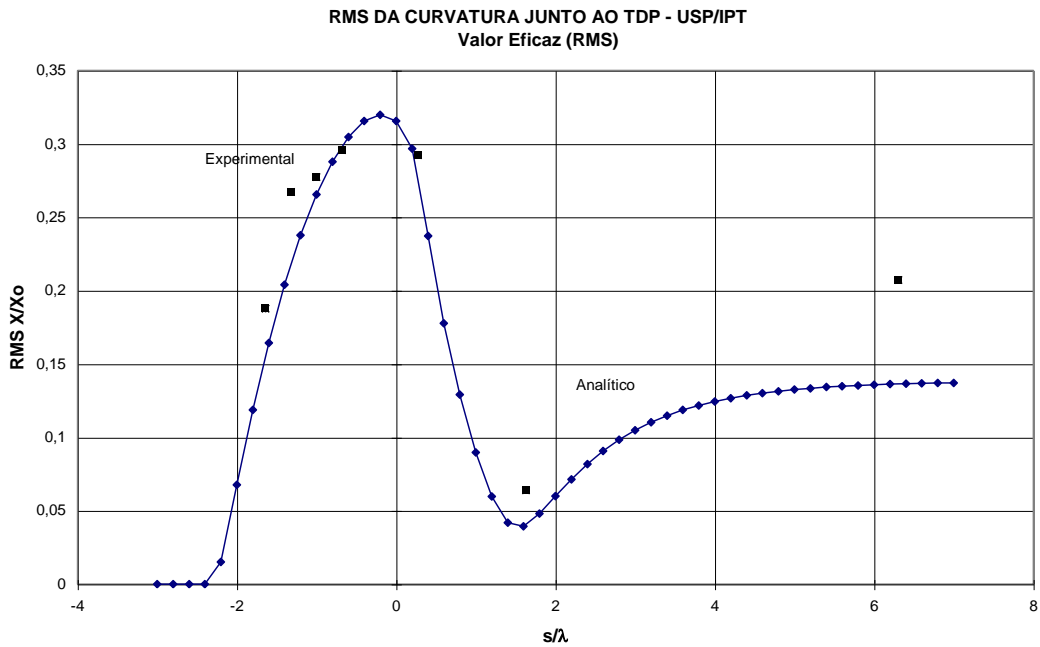
(ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,1903; \varphi = \pi; M = 0,055$

Para exemplificar a sensibilidade dos resultados à amplitude de oscilação do ponto de contato as figuras 4-33 e 4-34 apresentam, respectivamente, as séries temporais de curvatura da seção crítica e a curva de valor eficaz ao longo do comprimento para  $a_0/\lambda = 1,275$ , considerando a análise do tipo (ii). Resultados análogos podem ser obtidos para a análise do tipo (i).



**Figura 4-33** Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$  . “Seção crítica”: 41.

(ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,2753$   $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,2753$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,058$

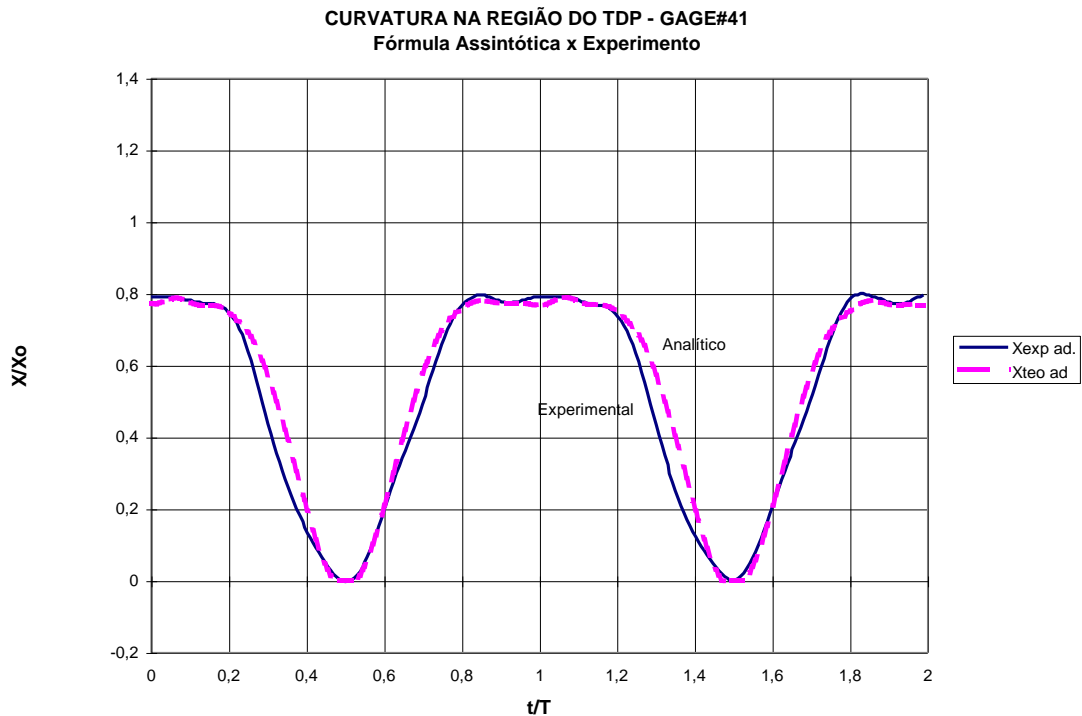


*Figura 4-34 Valor eficaz da curvatura adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$  ao longo da linha.*

(ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}$ ;  $a_0/\lambda = 1,2753$   $s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,2753$ ;  $\varphi = \pi$ ;  $M = 0,058$

Por fim, a Figura 4-35 ilustra a série temporal de curvatura obtida para a seção 41, se for admitido que sua identificação como seção crítica é de 2% do comprimento de flexão. Como pode ser observado o erro de identificação é certamente inferior a 2%.





**Figura 4-35 Curvatura Adimensional  $\chi(t)/\bar{\chi}_0$ . “Seção crítica”: 41- erro de identificação: 2%.**

(ii)  $\bar{\chi}_0 = q/\bar{T} = 0,039m^{-1}; a_0/\lambda = 1,2753 \quad s/\lambda = \hat{s}/\lambda = a_0/\lambda - 1 = 0,2753; \varphi = \pi; M = 0,058$

Deve ser ressaltado que os ensaios conduzidos no IPT foram planejados de forma que pudessem refletir problemas reais. A título de comparação, a Tabela 4-4 apresenta parâmetros adimensionais relativos a dois “risers” de aço de 8” e 16” de diâmetro, em estados de mar característicos da Bacia de Campos, usualmente denominados 3 e 4 pela PETROBRÁS. Note que o estado de mar 3 é o de maior probabilidade de ocorrência. Conforme pode ser observado, o parâmetro dinâmico de maior importância, o ‘número de Mach’, corresponde aproximadamente à média dos valores dos casos típicos apresentados. Os outros parâmetros dinâmicos, referentes às oscilações do ponto de contato e da tração, são cerca de 2 vezes superiores aos maiores valores correspondentes aos casos típicos. Longe de invalidar a representatividade dos ensaios, tais valores correspondem a uma excitação dinâmica mais exigente, de tal forma que, de um lado os erros de medida e de observação são

reduzidos e, de outro, acabam por permitir a verificação do modelo assintótico dentro de condição mais rigorosas.

**Tabela 4-4 Parâmetros do ensaio analisado comparados a valores típicos de risers de aço para a Bacia de Campos**

Riser/Mar	$a_0/\lambda$	$\tau_0/T_0$	$M = \omega a_0/c_0$
16" - Mar3	0,23	0,06	0,045
16" - Mar 4	0,55	0,08	0,099
8" - Mar 3	0,22	0,07	0,040
8" - Mar 4	0,39	0,10	0,064
Ensaio	~1,20	~0,20	~0,055

Conforme mencionado anteriormente, cumpre ainda observar que outros ensaios foram conduzidos com o vergalhão imerso, de forma a verificar, experimentalmente, a importância das forças locais de natureza hidrodinâmica, consistentemente desconsideradas na formulação assintótica. Estes ensaios<sup>51</sup> mostraram a adequação desta hipótese de forma inequívoca, posto que tanto a resposta em curvatura como em tração apresentaram alterações marginais se comparadas àquelas obtidas nos ensaios conduzidos “no ar”.

<sup>51</sup> Ver Relatório IPT 34.643, setembro, 1996.

### 4.2.3 Resposta dinâmica em curvatura. Solução assintótica local junto ao topo

No caso de cabos umbilicais e “risers” flexíveis é usual a adoção de terminações flexíveis (enrijecedores flexionais) ou restritores de curvatura na extremidade superior da linha. No caso de “risers” de aço os projetos atuais prevêm a utilização de juntas flexíveis, que proporcionam alguma rigidez flexional à articulação. O efeito destas terminações tem, obviamente, caráter exclusivamente local, ficando restrito a uma distância comparável ao comprimento de flexão local da linha.

Tanto enrijecedores flexionais, quanto juntas flexíveis são, em geral, caracterizados por curvas de restauração elástica não-linear. No caso de juntas flexíveis, ilustradas no capítulo 2, a restauração se faz com alguma histerese, conforme observado no capítulo 3. Obviamente, se plenamente considerada, a não-linearidade pode vir a ter alguma implicação na dinâmica local da linha. Em primeira aproximação, no entanto, a rigidez flexional conferida pelo dispositivo de terminação pode ser linearizada, tomando-se, por exemplo, a curva secante pelos pontos de máximo e mínimo ângulo que seriam atingidos sob a hipótese de articulação ideal.

Sejam  $\Phi$  a inclinação (estática) do eixo da junta flexível em relação ao plano horizontal e  $k_F$  a rigidez flexional linearizada em torno deste ângulo. Sejam também  $\theta_L$  o ângulo estático junto à extremidade superior e  $T_L$  a tração estática ambos correspondentes à solução de cabo (desprezada a rigidez flexional). O "comprimento de flexão local" será denotado  $\lambda_L = \sqrt{B/T_L}$ , de conformidade ao tratamento do problema estático, feito no capítulo 3. Lembrando que  $T(s,t) \cong T(s) + \tau(t)$ , a equação dinâmica que rege a curvatura pode ser escrita (ver (4.15a)),

$$-B \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + (T(s) + \tau(t))\chi + \gamma \left( \frac{dT}{ds} - B \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial \chi}{\partial s} \right) + h_v + \varpi_v - q \cos \theta = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.67).$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & -\lambda^2(s) \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} - \lambda^2(s) \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial \chi}{\partial s} \gamma + \left( 1 + \frac{\tau(t)}{T(s)} \right) \chi(s, t) = \\ & = \chi^c(s) - \frac{1}{T(s)} \frac{dT}{ds} \gamma + \frac{(m + m_a)}{T(s)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\varpi_v^r}{T(s)} \end{aligned} \quad (4.68).$$

onde  $\chi^c(s)$  representa a curvatura estática correspondente à solução de cabo ( $B=0$ ) e  $\varpi_v^r$  representa as forças hidrodinâmicas dadas, por exemplo, por (4.27) e pelo segundo termo da parcela inercial em (4.28).

No entanto, conforme visto no capítulo 3, equação (3.132), na ausência de correnteza,

$$\begin{aligned} \chi^c(s) &\cong \chi_L^c (1 - 2(1 - \cos \theta_L) \cos \theta_L (s - L)/H) \\ T(s) &\cong T_L (1 + (1 - \cos \theta_L) \sin \theta_L (s - L)/H) \\ \lambda(s) &\cong \lambda_L (1 - 1/2 (1 - \cos \theta_L) \sin \theta_L (s - L)/H) \\ dT/ds &\cong (dT/ds)_L \left( 1 + \frac{\cos^2 \theta_L}{\sin \theta_L} (1 - \cos \theta_L) \frac{(s - L)}{H} \right) \end{aligned} \quad (4.69).$$

de tal forma que, localmente, e com erro da ordem  $\lambda/H$ , tem-se

$$\begin{aligned} & -\lambda_L^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} + \left( 1 + \frac{\tau(t)}{T_L} \right) \chi(s, t) = \\ & = \chi_L^c + \left( \lambda_L^2 \frac{\partial \chi}{\partial s} \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T_L} \frac{dT}{ds} \right)_{s=L} \gamma + \frac{(m + m_a)}{T_L} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\varpi_v^r}{T_L} \end{aligned} \quad (4.70).$$

Por outro lado, definindo-se localmente os adimensionais

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{c_L}{\lambda_L} t; \quad \eta = \frac{v}{\lambda_L}; \quad \xi = \frac{s-L}{\lambda_L} \\ \hat{\tau} &= \frac{\tau}{T_L}; \quad \hat{T} = \frac{T}{T_L}; \quad \hat{\chi} = \chi \lambda_L \end{aligned} \quad (4.71),$$

onde  $c_L = \sqrt{T_L/(m+m_a)}$  é a velocidade local de propagação de onda correspondente à equação de cabo, a equação dinâmica local fica escrita,

$$-\frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \xi^2} + (1 + \hat{\tau}) \hat{\chi} = \hat{\chi}_L^c + \left( \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial \xi} \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{d\hat{T}}{d\xi} \right)_{\xi=0} \gamma + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} - \frac{\varpi_v(\zeta) \lambda_L}{T_L} \quad (4.72).$$

A equação (4.72) pode ser simplificada ainda mais, através da análise de ordem de magnitude dos termos. Para tanto tomar-se-á a solução global na ausência de correnteza. Nesta situação, conforme pode ser verificado a partir das equações de catenária,

$$\begin{aligned} T_L &\cong \frac{qH}{(1 - \cos \theta_L)} \\ \lambda_L &\cong \sqrt{\left( \frac{B}{qH} \right) (1 - \cos \theta_L)} \\ \chi_L^c &\cong (1 - \cos \theta_L) \operatorname{sen} \theta_L \cos \theta_L / H \\ c_L &\cong \sqrt{\frac{qH}{(1 - \cos \theta_L)(m + m_a)}} \end{aligned} ,$$

de tal forma que,

$$\left. \frac{d\hat{T}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \approx O\left( \frac{\lambda_L}{T_L} q \operatorname{sen} \theta_L \right) = O\left( \sqrt{\frac{B}{qH^3}} (1 - \cos \theta_L)^{3/2} \right) = O(\varepsilon) \quad (4.73),$$

e também,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} &\approx O\left(\frac{\lambda_L^2}{c_L^2} \omega^2 \frac{A}{\lambda_L}\right) \approx O\left(\frac{(m+m_a)g}{q} \frac{\omega^2 A}{g} \sqrt{\frac{B}{qH^3}} (1-\cos\theta_L)^{3/2}\right) = O(\varepsilon_1) \\
 \frac{\bar{\omega}_v^{visc} \lambda_L}{T_L} &\approx O\left(\frac{1}{2} \frac{C_D D \omega^2 A^2}{q} \sqrt{\frac{B}{qH^3}} (1-\cos\theta_L)^{3/2}\right) = O(\varepsilon_2) \\
 \frac{\bar{\omega}_v^{iner} \lambda_L}{T_L} &\approx O\left(\frac{m_a}{(m+m_a)^{1/2}} \frac{UA}{\sqrt{B}} (1+\varepsilon \sin\theta_L \cos\theta_L) + \frac{m_a \omega^2 A}{q} \varepsilon\right) = O(\varepsilon_3) \\
 \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} &= \hat{\chi}_L^c \approx O(\lambda_L \chi_L^c) \approx O\left(\sqrt{\frac{B}{qH^3}} (1-\cos\theta_L)^{3/2} \sin\theta_L \cos\theta_L\right) = O(\varepsilon_4) \\
 \varepsilon &= \sqrt{\frac{B}{qH^3}} (1-\cos\theta_L)^{3/2} \\
 \varepsilon_1 &= \varepsilon \frac{(m+m_a)g}{q} \frac{\omega^2 A}{g} \\
 \varepsilon_2 &= \varepsilon \frac{1}{2} \frac{C_D D \omega^2 A^2}{q} \\
 \varepsilon_3 &= \frac{m_a}{(m+m_a)^{1/2}} \frac{UA}{\sqrt{B}} (1+\varepsilon_4) + \frac{m_a \omega^2 A}{q} \varepsilon \\
 \varepsilon_4 &= \varepsilon \sin\theta_L \cos\theta_L
 \end{aligned} \tag{4.74},$$

onde  $A$  é a escala típica de movimento na extremidade superior, proporcionada pela unidade flutuante acionada pelo meio ambiente e  $\omega$  designa a escala de frequência considerada.

Com o intuito de avaliar as ordens de magnitude dos termos desconsiderados, tomamos como exemplo um "riser" de aço, de 10"3/4 de diâmetro externo, instalado em 1000m de profundidade, com as seguintes características básicas (ver Pesce, 1994c)

$$q = 0.5 \text{ kN/m}; m = 0.112 \text{ t/m}; m_a = 0.060 \text{ t/m};$$

$$B = 25 \times 10^3 \text{ kNm}^2; D = 0.27 \text{ m}; \theta_L = 70^\circ; C_D = 1.0.$$

Assumindo também  $\omega = 1,0 \text{ rad/s}$ ;  $A = 2.0 \text{ m}$ ;  $U = 2.0 \text{ m/s}$ , como valores típicos, tal que  $c_L \cong 70 \text{ m/s}$ , tem-se neste caso,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\cong 4 \times 10^{-3}; \varepsilon_1 \cong 2 \times 10^{-3}; \varepsilon_2 \cong 3 \times 10^{-3}; \\ \varepsilon_3 &\cong 5 \times 10^{-3}; \varepsilon_4 \cong 1.3 \times 10^{-3}; \lambda/H \cong 6 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Assim, com erro da ordem  $\delta = \max[\varepsilon; \varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3; \varepsilon_4; \lambda/H]$ , a equação dinâmica pode ser localmente aproximada (dentro da camada-limite), por

$$-\frac{\partial^2 \hat{\chi}}{\partial \xi^2} + (1 + \hat{\tau}) \hat{\chi} = \hat{\chi}_L^c (1 + O(\delta)) \quad (4.75),$$

ou ainda, de forma dimensional,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} \left( 1 + \frac{\tau}{T_L} \right) \chi = -\frac{1}{\lambda_L^2} \chi_L^c (1 + O(\delta)) \quad (4.76).$$

A equação (4.76) expressa o seguinte fato: *no interior da camada-limite as forças de natureza elástica, associadas à rigidez flexional e à rigidez geométrica, são dominantes e determinam a resposta em curvatura*. Os termos associados às forças de inércia e à parcela dinâmica das forças hidrodinâmicas de natureza viscosa podem ser desconsiderados, em uma primeira aproximação, assim como o termo diretamente proporcional ao produto entre o desvio angular e a variação da tração estática.

Note, também, que a equação (4.76) é absolutamente análoga à equação (3.133), seção 3.3.2, deduzida para o problema estático, a ela se reduzindo quando  $\tau(t) \equiv 0$ . Trata-se portanto de uma generalização de (3.133), de natureza "quase-estática". Adicionalmente, os mesmos argumentos apresentados através das equações (3.136)-

(3.140) são aqui válidos, de tal maneira que se a equação de curvatura for escrita na forma,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} \left(1 + \frac{\tau}{T_L}\right) \chi = -\frac{1}{\lambda_L^2} \chi^c(s) (1 + O(\delta)) \quad (4.77),$$

sua solução particular pode ser tomada como

$$\chi_p(s, t) = \left(1 + \frac{\tau}{T_L}\right)^{-1} \chi^c(s) (1 + O(6\varepsilon^2)) \quad (4.78).$$

Seguindo-se os passos apresentados em 3.3.2, a solução geral de (4.77), válida na camada-limite junto à extremidade superior, fica então dada por

$$\chi(s, t) = \frac{\chi^c(s)}{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}} - \frac{1}{\lambda_L} \left( \frac{\chi_L^c \lambda_L}{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}} + \frac{k_F \lambda_L}{B} (\Theta_L(t) - \Phi(t)) \right) \exp\left(\sqrt{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}} \frac{s - L}{\lambda_L}\right) \quad (4.79),$$

onde

$$\Theta_L(t) = \frac{\Theta_L^c(t) + \frac{1}{\sqrt{1 + \tau(t)/T_L}} \left( \frac{k_F \lambda_L}{B} \Phi(t) - \frac{\chi_L^c \lambda_L}{1 + \tau(t)/T_L} \right)}{1 + \frac{k_F \lambda_L}{B} \frac{1}{\sqrt{1 + \tau(t)/T_L}}} \quad (4.80),$$

é o ângulo dinâmico que a linha faz com a horizontal, em sua extremidade superior, já devidamente corrigido dos efeitos de rigidez flexional e da ação da terminação. Os "super-índices"  $c$  indicam a solução de cabo, tomada como base. A expressão (4.80)



foi deduzida fazendo  $s=L$  na integral de (4.79), a qual tem forma análoga a (3.143), e é escrita,

$$\Theta(s,t) = \Theta^c(s,t) - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}}} \left( \frac{\chi_L^c \lambda_L}{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}} + \frac{k_F \lambda_L}{B} (\Theta_L(t) - \Phi(t)) \right) \exp \left( \sqrt{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}} \frac{s-L}{\lambda_L} \right) \quad (4.81).$$

A equação (4.68) pode ser convenientemente reinterpretada. De fato, suponhamos que as equações (4.15) tenham sido resolvidas, *na ausência de rigidez flexional*, determinando-se assim as funções  $\tau(t); \chi^c(s,t); \gamma^c(s,t)$ . Entre estas funções vale portanto a relação (tomando  $B=0$  em (4.68)),

$$\left( 1 + \frac{\tau(t)}{T(s)} \right) \chi^c(s,t) = \chi^c(s) - \frac{1}{T(s)} \frac{dT}{ds} \gamma^c + \frac{(m + m_a)}{T(s)} \frac{\partial^2 v^c}{\partial t^2} - \frac{\bar{w}_v^{visc}}{T(s)} \quad (4.82).$$

Retornando à argumentação apresentada anteriormente, à luz da discussão das equações (4.69)-(4.74), e *desconsiderando tão somente os termos inerciais e hidrodinâmicos correspondentes à correção associada à rigidez flexional*, a equação (4.68) pode, *em uma segunda aproximação*, ser reduzida à forma,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial s^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} \left( 1 + \frac{\tau}{T_L} \right) \chi = - \frac{1}{\lambda_L^2} \left( 1 + \frac{\tau}{T_L} \right) \chi^c(s,t) (1 + O(\delta)) \quad (4.83).$$

onde  $\chi^c(s,t)$  é a 'solução de cabo'. Os argumentos apresentados no capítulo 3 (equações (3.137)-(3.140)) podem ser mais uma vez utilizados, de tal sorte que a solução particular de (4.83) será escrita

$$\chi_p(s,t) = \chi^c(s,t) \left( (1 + O(6\varepsilon^2)) \right) \quad (4.84)$$

e a solução de camada-limite, em uma segunda aproximação, ficará portanto,

$$\chi(s,t) = \chi^c(s,t) - \frac{1}{\lambda_L} \left( \chi_L^c(t) \lambda_L + \frac{k_F \lambda_L}{B} (\Theta_L(t) - \Phi(t)) \right) \exp \left( \sqrt{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}} \frac{s-L}{\lambda_L} \right) \quad (4.85),$$

com

$$\Theta_L(t) = \frac{\Theta_L^c(t) + \frac{1}{\sqrt{1 + \tau(t)/T_L}} \left( \frac{k_F \lambda_L}{B} \Phi(t) - \chi_L^c(t) \lambda_L \right)}{1 + \frac{k_F \lambda_L}{B} \frac{1}{\sqrt{1 + \tau(t)/T_L}}} \quad (4.86),$$

e,

$$\Theta(s,t) = \Theta^c(s,t) - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}}} \left( \chi_L^c(t) \lambda_L + \frac{k_F \lambda_L}{B} (\Theta_L(t) - \Phi(t)) \right) \exp \left( \sqrt{1 + \frac{\tau(t)}{T_L}} \frac{s-L}{\lambda_L} \right) \quad (4.87).$$

Algumas observações são dignas de nota:

- *O conhecimento das soluções estática e dinâmica das correspondentes "equações de cabo" conduz à solução completa para a curvatura, no interior da camada-limite, de forma analítica.*
- As equações (4.85)-(4.87) permitem recuperar os limites assintóticos, fora da camada-limite, de forma consistente;
- As equações (4.85)-(4.87) recuperam, coerentemente, a respectiva solução estática dadas por (3.141), (3.143) e (3.144).
- As equações (4.79)-(4.81) podem ser recuperadas prontamente de (4.85)-(4.87) bastando que nestas últimas tomemos,

$$\chi^c(s,t) = \frac{\chi^c(s)}{1 + \tau(t)/T_L} \quad (4.88).$$

Em outras palavras, a equação (4.88) fornece uma aproximação para a função de curvatura associada à equação de cabo, e permite afirmar que a oscilação da curvatura de cabo estará em oposição de fase relativamente à tração dinâmica, um resultado de natureza "quase-estática", consistente com a racionalidade que permitiu a dedução da primeira solução aproximada (4.79)-(4.81), e que permite recuperar a solução estática.

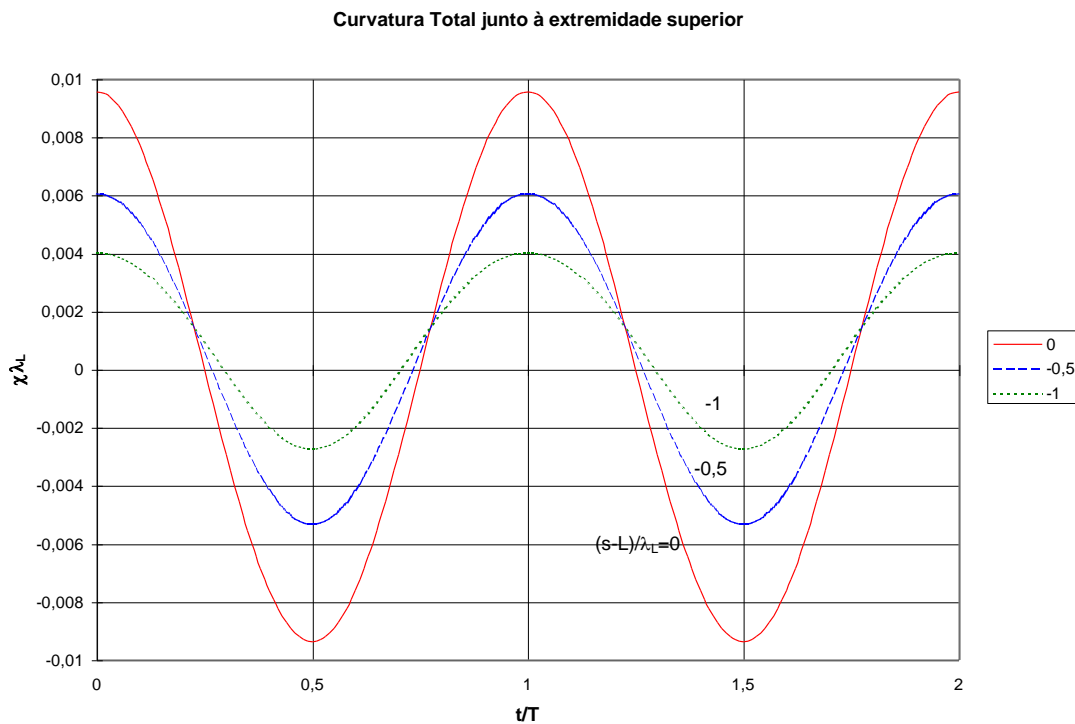
As figuras a seguir ilustram a solução de camada-limite acima desenvolvida. Como exemplo foi adotado o "riser" de 10"3/4 de diâmetro, em 910 m de profundidade, na *ausência de correnteza*, em condições típicas da Bacia de Campos; ver Pesce, 1994c.

Tabela 4-5 Parâmetros do caso-exemplo. Riser de 10"3/4.

Riser de 10"3/4 - Parâmetros				
$\theta_L$	68,3800 graus	1,1935 rad	$\Phi^*$	1,1920 rad
$\Phi$	68,2966 graus	1,1920 rad	$\Phi^*$	68,2966 graus
$B$	25035,0000 kNm <sup>2</sup>	$EA$	3,07E+06 kN	
$H$	910,0000 m	$\epsilon_y$	2,00E-03	
$De$	0,2731 m	$Di$	0,2365 m	
$q$	0,5356 kN/m	$T_L$	771,7014 kN	
$L$	1339,5272 m	$\lambda_L$	5,70 m	
$(B/qH^3)^{1/2}$	0,0079			
$\chi_o L$	2,5231			
$\chi^c_L L$	0,3425			
$\chi^c_L \lambda_L$	0,0015			
$\lambda_L/L$	0,0043	$\lambda_L/H$	0,0063	
$k_F \lambda_L/B$	0,1000			
$\theta_L - \Phi$	0,0834 graus	0,0015 rad		
$\theta_L^b$	68,2966 graus	1,1920 rad		
$\theta_L^b - \Phi$	0,0000 graus	0,0000 rad		
$\tau_o/T_L$	0,2		fase tração	0 graus
$\phi_o$	0 graus	0,0000 rad	fase ang. ter.	90 graus
$\gamma^c_o$	6 graus	0,1047 rad	fase ang. cat.	180 graus

As figuras 4.36 e 4.37 correspondem ao caso em que o eixo da terminação flexível é àquele correspondente à curvatura nula, portanto situação ideal de projeto, conforme apresentado no capítulo 3, equação (3.145). No presente caso  $\Phi^* = 68.3^\circ = 1.192\text{rad}$ . Adicionalmente, a terminação foi suposta fixa, como seria o caso de um "riser" suspenso em uma plataforma tipo TLP ("Tension Leg Platform"), que apresenta movimentos bastante reduzidos. A tabela acima resume as principais características do problema tratado. A rigidez da junta flexível é tal que  $K_F = k_F \lambda_L / B = 0.1$ , coerentemente aos valores apresentados na Tabela 3-7. A tração dinâmica foi representada de forma cossenoidal,  $\tau(t) = \tau_o \cos \omega t$ , muito embora a análise apresentada seja válida para funções temporais oscilatórias genéricas. Neste primeiro exemplo tomamos  $\tau_o / T_L = 0.2$ , valor inferior ao limite de compressão que ocorre junto ao ponto de contato com o fundo e que, na ausência de correnteza, vale  $\tau_o^* / T_L = T_o / T_L = \cos \theta_L = 0.368$ . Note que a amplitude do desvio angular associado

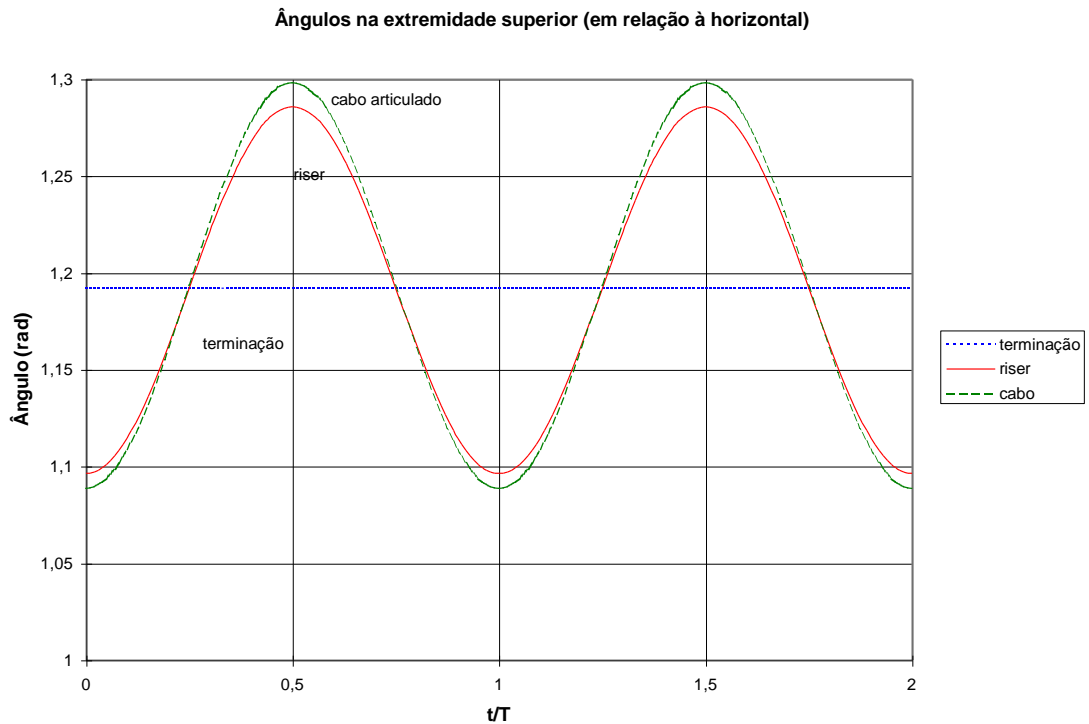
à solução de catenária é  $\gamma_0^c = 6^\circ$  e que foi tomado em oposição de fase com a tração dinâmica. Estas condições são típicas da ação de onda centenária, na Bacia de Campos. A Figura 4-36 apresenta a curvatura adimensional  $\chi(s,t)\lambda_L$ , calculada para dois períodos de oscilação, para três diferentes seções definidas pelas coordenadas  $\xi = (s - L)/\lambda_L = 0; -0.5; -1.0$ . A Figura 4-37 mostra a variação dos ângulos. O ângulo efetivo da linha tem menor amplitude do que o ângulo correspondente à solução de catenária. Note também, da Figura 4-36, que a curvatura é máxima quando o ângulo da linha atinge um mínimo e vice-versa.



**Figura 4-36 Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.**

$$\xi = (s - L)/\lambda_L = 0; -0.5; -1.0; \quad \tau_0/T_L = 0.2; \quad \theta_L = 68.4^\circ; \quad \Phi^* = 68.3^\circ = 1.192\text{rad} .$$

(movimento da terminação nulo).



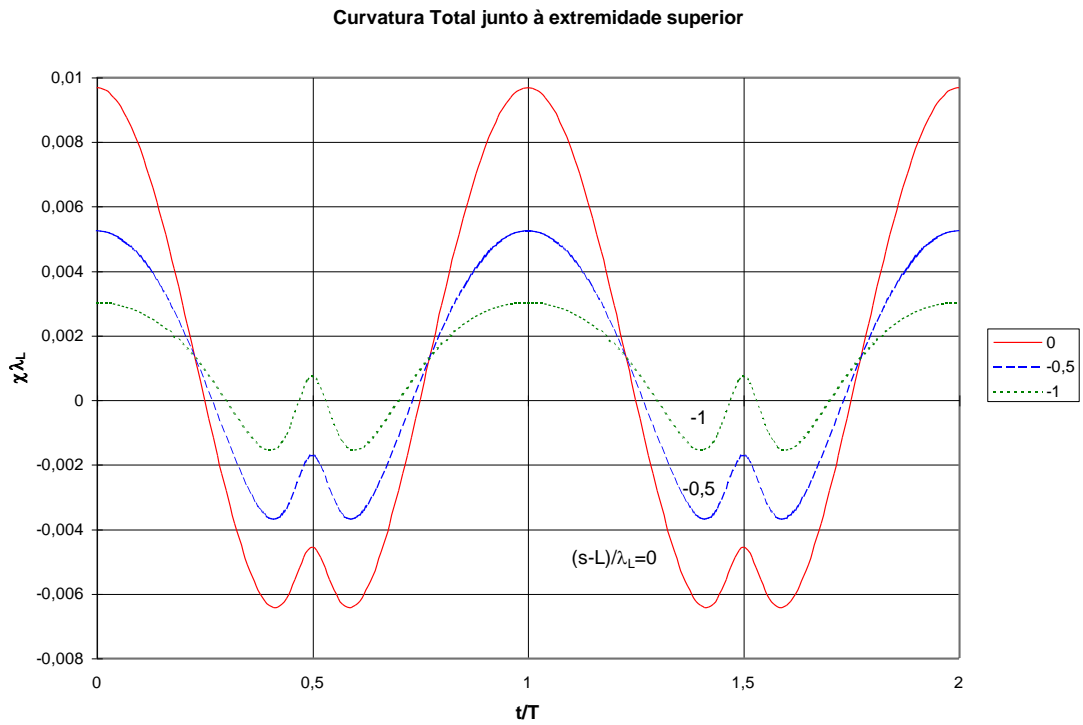
**Figura 4-37** Ângulos na extremidade suspensa.

$$\theta_L = 68.4^\circ ; \Phi^* = 68.3^\circ = 1.192\text{rad} ; \tau_0/T_L = 0.2 .$$

(movimento da terminação nulo).

As figuras 4-38 e 4-39 correspondem a uma situação em que a tração dinâmica é bastante elevada<sup>52</sup>,  $\tau_0/T_L = 0.90$ , mantendo-se os demais parâmetros com os mesmos valores . Notável é o comportamento não-linear, associado à tração dinâmica.

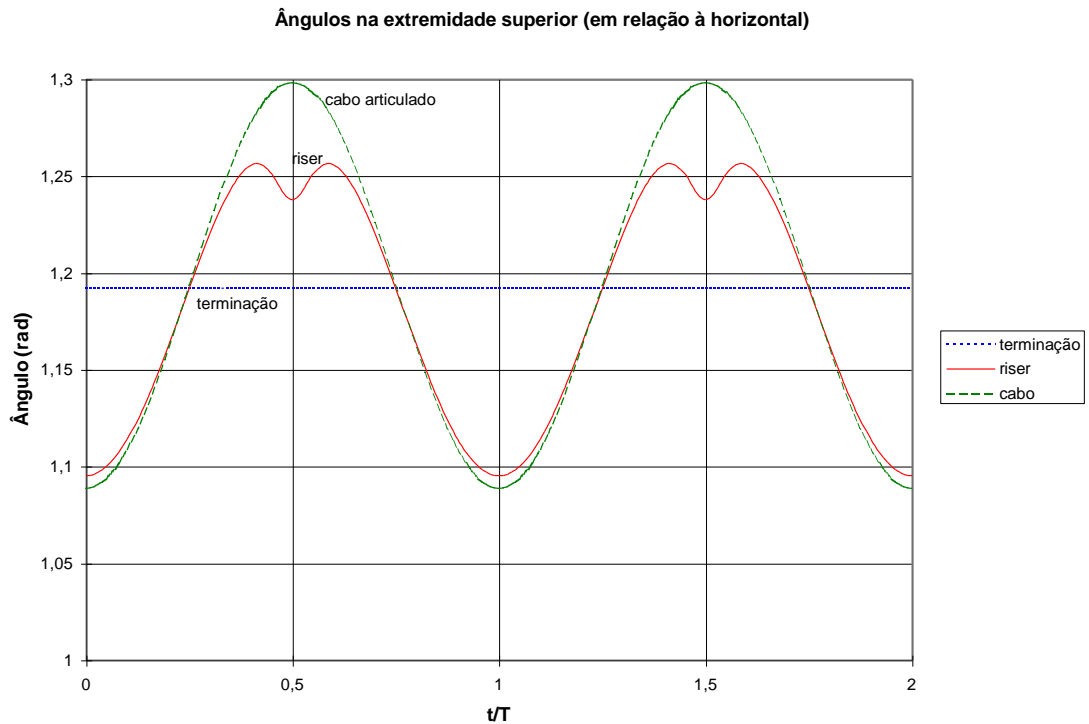
<sup>52</sup> Na realidade esta é uma situação hipotética, porquanto corresponderia à ocorrência de compressão dinâmica ao longo da linha.



**Figura .4-38 Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.**

$$\xi = (s - L) / \lambda_L = 0; -0.5; -1.0; \quad \tau_0 / T_L = 0.9; \quad \theta_L = 68.4^\circ; \quad \Phi^* = 68.3^\circ = 1.192 \text{ rad} .$$

(movimento da terminação nulo).



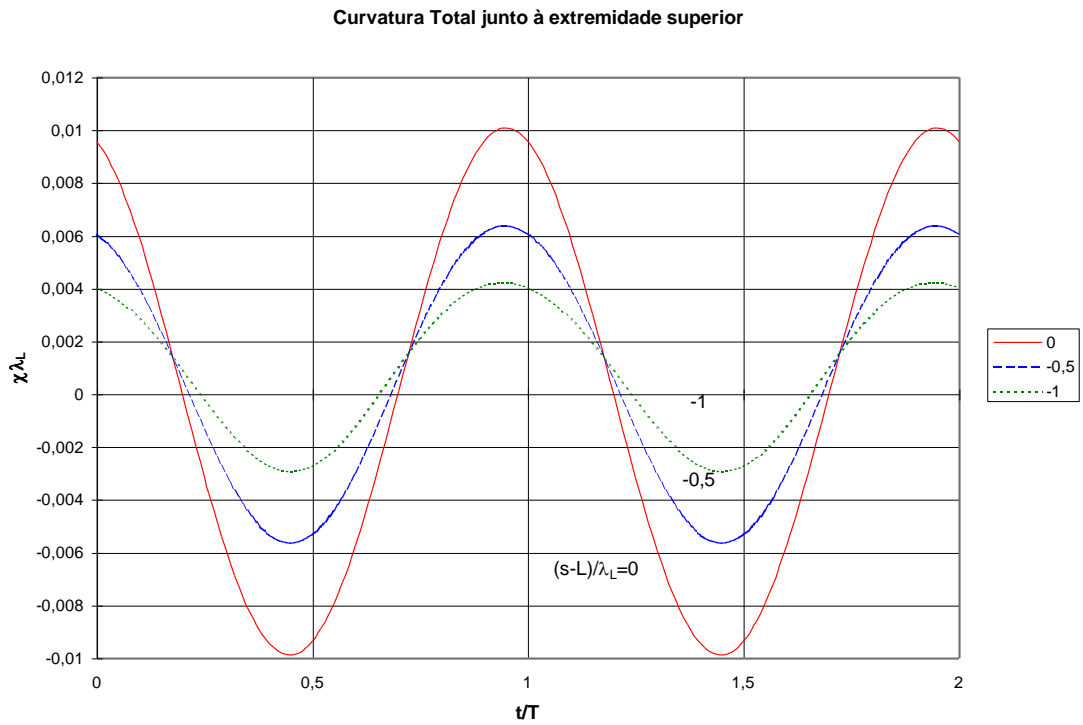
**Figura 4-39** Ângulos na extremidade suspensa.

$$\theta_L = 68.4^\circ ; \Phi^* = 68.3^\circ = 1.192\text{rad} ; \tau_0/T_L = 0.95$$

(movimento da terminação nulo).

As figuras 4-40 e 4-41 ilustram um caso em que existe movimento angular da terminação. Admitimos  $\Phi(t) = \Phi^* + \phi_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ;  $\phi_0 = 2^\circ$ ;  $\varphi = \pi/2$ . A amplitude de tração é  $\tau_0/T_L = 0.2$ .

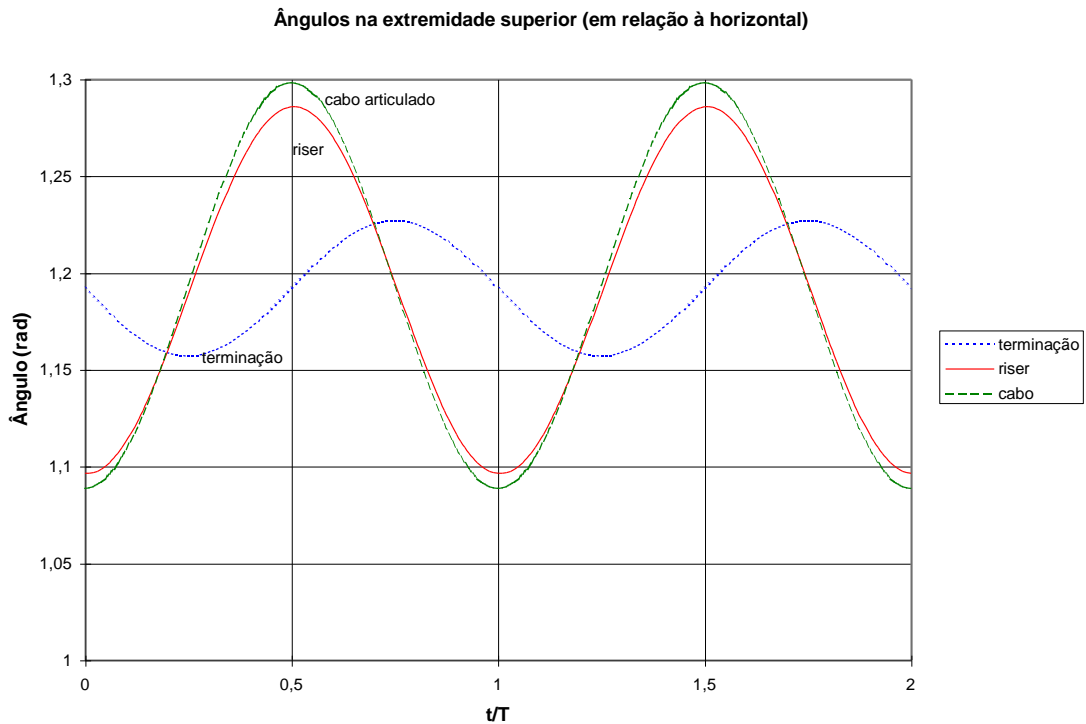




**Figura 4-40** Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.

$\xi = (s - L) / \lambda_L = 0; -0.5; -1.0$ ;  $\tau_0 / T_L = 0.2$ ;  $\theta_L = 68.4^\circ$ ;  $\Phi^* = 68.3^\circ = 1.192 \text{ rad}$ .

$$\Phi(t) = \Phi^* + \phi_0 \cos(\omega t + \varphi); \phi_0 = 2^\circ; \varphi = \pi/2.$$

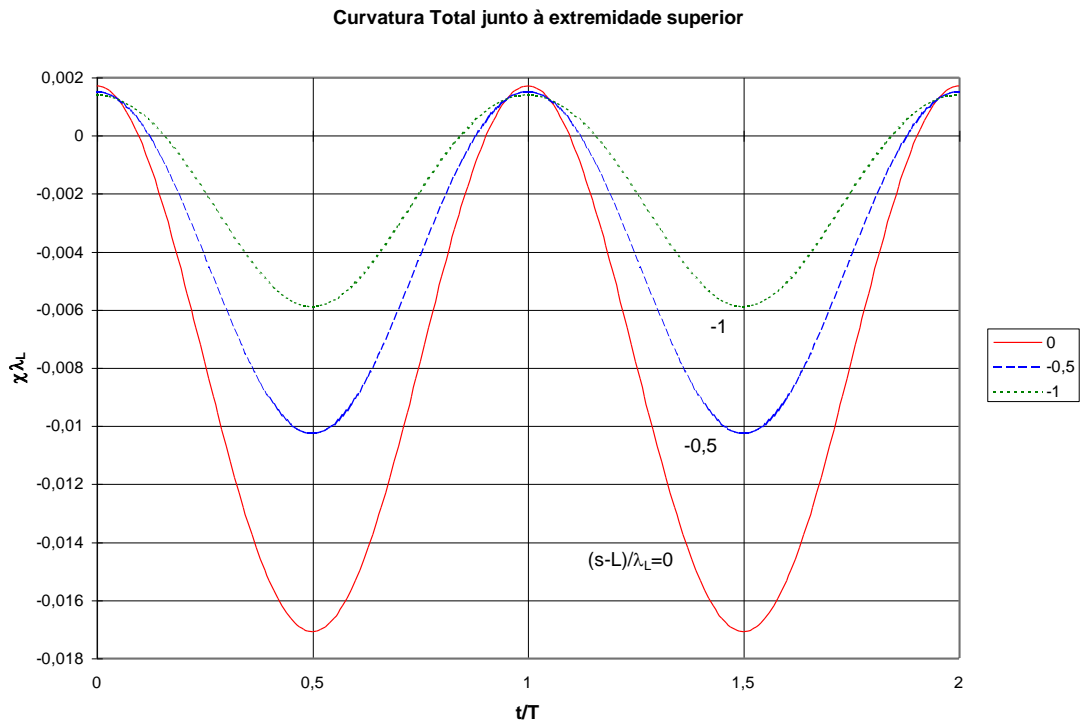


**Figura 4-41** Ângulos na extremidade suspensa.

$$\theta_L = 68.4^\circ; \Phi^* = 68.3^\circ = 1.192\text{rad}; \tau_0/T_L = 0.2$$

$$\Phi(t) = \Phi^* + \phi_0 \cos(\omega t + \varphi); \phi_0 = 2^\circ; \varphi = \pi/2.$$

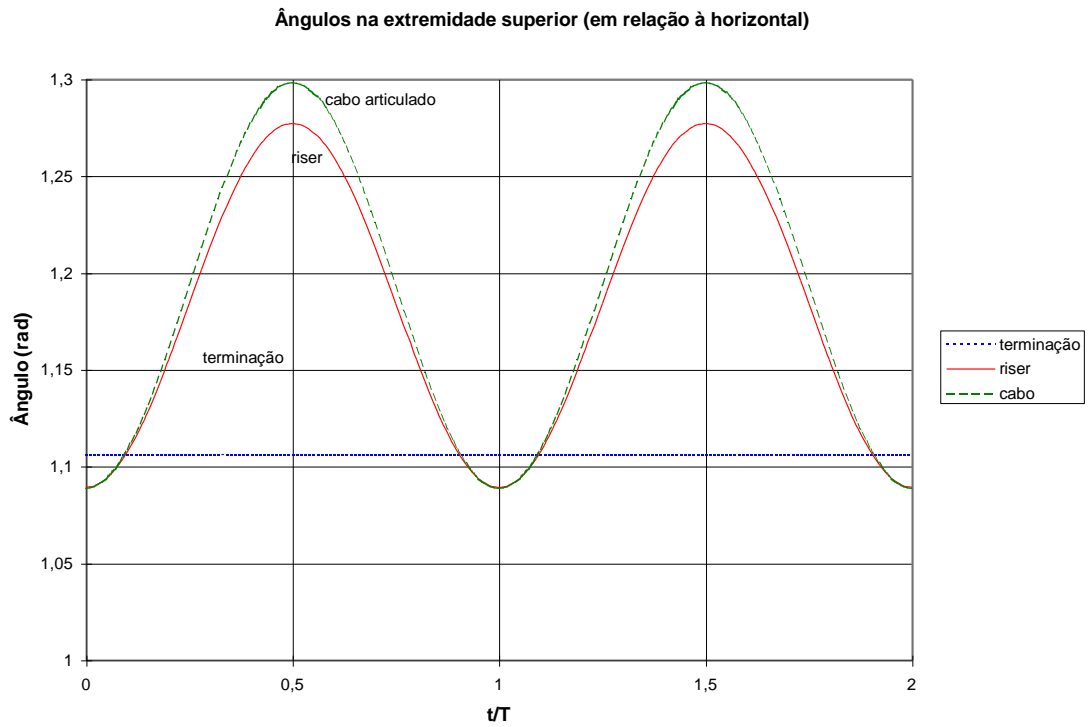
As figuras 4-42 e 4-43 correspondem à situação em que o eixo da terminação é instalado com um desvio de  $-5^\circ$  em relação ao ângulo correspondente à catenária. O movimento da terminação é novamente suposto nulo e a amplitude da tração dinâmica,  $\tau_0/T_L = 0.2$ . Note que a curvatura apresenta valores negativos relativamente acentuados. As séries temporais de deformação por flexão, e deformação total, calculadas na parte inferior do "riser", normalizadas pela deformação no escoamento são apresentadas nas figuras 4.44 e 4.45.



**Figura 4-42** Curvatura total adimensional junto à extremidade suspensa.

$$\xi = (s - L)/\lambda_L = 0; -0.5; -1.0; \tau_0/T_L = 0.2; \theta_L = 68.4^\circ; \Phi^* = 63.4^\circ.$$

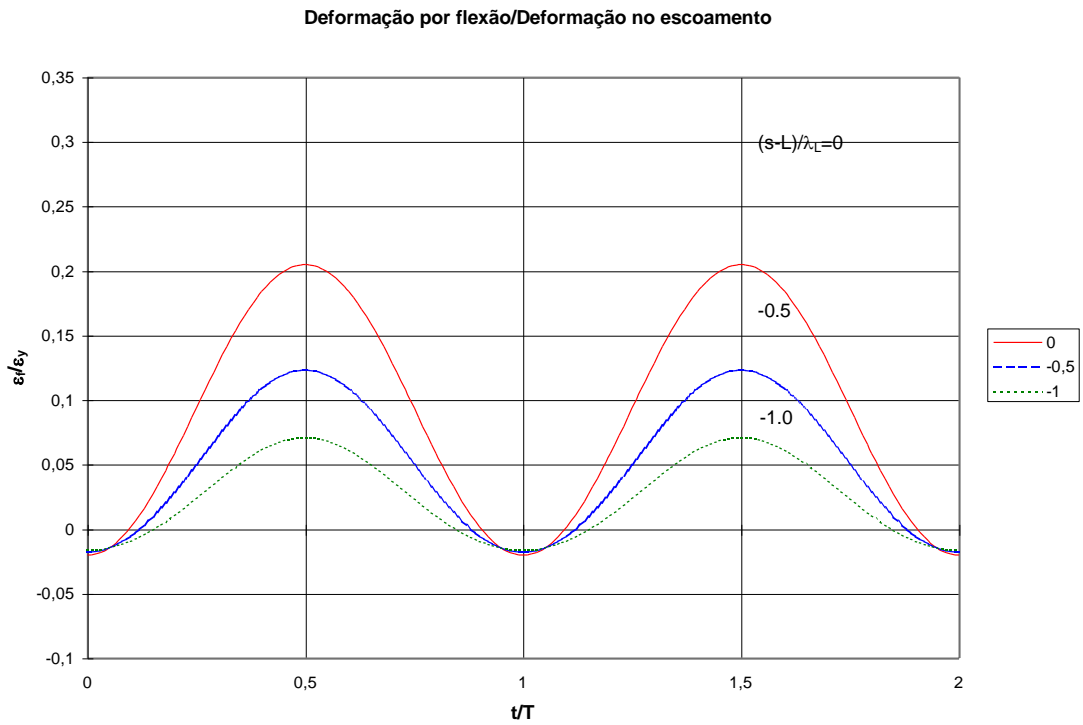
(movimento da terminação nulo).



**Figura 4-43** Ângulos na extremidade suspensa.

$$\tau_0/T_L = 0.2; \theta_L = 68.4^\circ; \Phi^* = 63.4^\circ$$

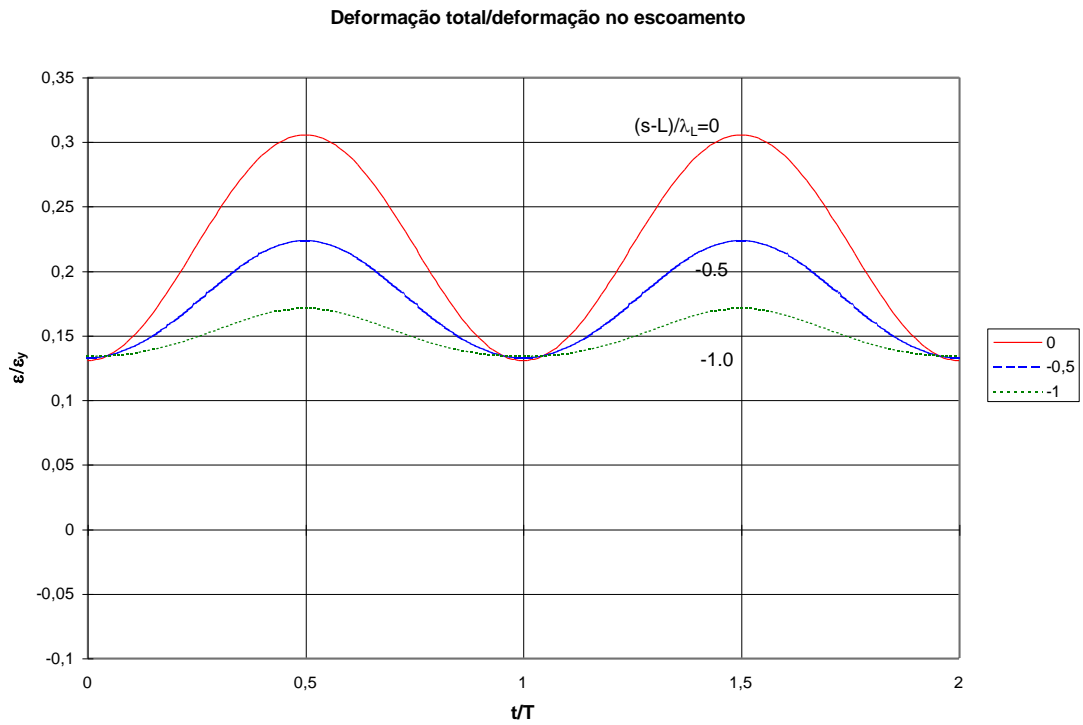
(movimento da terminação nulo).



**Figura .4-44 Deformação por flexão junto à extremidade suspensa, normalizada pela deformação de escoamento.**

$$\xi = (s-L)/\lambda_L = 0; -0.5; -1.0; \tau_0/T_L = 0.2; \theta_L = 68.4^\circ; \Phi^* = 63.4^\circ .$$

(movimento da terminação nulo).



**Figura 4-45** Deformação total junto à extremidade suspensa, normalizada pela deformação de escoamento.

$$\xi = (s - L)/\lambda_L = 0; -0,5; -1,0; \tau_0/T_L = 0,2; \theta_L = 68,4^\circ; \Phi^* = 63,4^\circ.$$

(movimento da terminação nulo).

## **5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Sob o estímulo da proposição de uma série de problemas reais recentemente emergentes na engenharia *offshore* nacional, em seu esforço de exploração de petróleo no mar em grandes profundidades, uma série de trabalhos de pesquisa tem sido conduzidos na Escola Politécnica, desde 1992. Dentre eles, ocupa lugar de destaque o estudo da mecânica de *cabos e tubos submersos lançados ao fundo do oceano*, a partir de uma unidade flutuante de produção, *em configuração de catenária*, ou *risers em catenária*.

O reconhecimento da existência de uma diversidade de escalas de tempo e comprimento na dinâmica de "*risers*", se por um lado explica a dificuldade encontrada por diversos autores no tratamento numérico do problema, por outro propicia a aplicação de técnicas da matemática aplicada conhecidas como assintóticas e de perturbação singular. Não obstante, abordagens desta natureza são praticamente inexistentes na literatura científica especializada, restringindo-se a casos bastante particulares, conforme ressaltam Patel & Seyed, 1995, em seu artigo de revisão de métodos de modelagem e análise.

As técnicas assintóticas e de perturbação são extremamente convenientes, porquanto tomam partido das mesmas discrepâncias de escala para promover simplificações consistentes. Além de elegantes e eficientes, acabam por conduzir a um entendimento mais aprofundado dos fenômenos em estudo, possibilitando resolver com segurança e facilidade problemas complexos e conduzindo a modelos comportamentais bastante simples em sua essência. A simplicidade, aliada à profundidade de compreensão leva, do ponto de vista da engenharia, a um melhor tratamento do problema, seja nas atividades de análise ou de projeto.

Esta tem sido a ótica sob a qual o particular espectro dos problemas atinentes à mecânica global de linhas elásticas submersas, sejam tubos ou cabos, tem sido abordado.



O presente trabalho trata do comportamento de "risers" lançados na configuração de "catenária direta", tendo como objetivo a determinação dos esforços solicitantes ao longo do comprimento suspenso, em uma dada condição de carregamento dinâmico, com ênfase à caracterização da curvatura (momento fletor) em duas regiões críticas, no entorno do ponto de contato com o fundo e junto à extremidade suspensa. A *abordagem analítica*, é desenvolvida dentro de técnicas usuais de matemática aplicada, no âmbito da teoria de perturbações, sistematizando, recuperando e generalizando, de forma consistente, uma série de resultados previamente alcançados por Aranha, Martins & Pesce, 1995. *Avança quando, através da análise de experimentos específicos, valida modelos assintóticos analíticos que permitem descrever a resposta estática e dinâmica da linha em curvatura, na região do ponto de contato com o fundo. Avança também na análise do problema estático sob correnteza, na influência da flexibilidade do solo na solução local do ponto de contato e no tratamento assintótico que é dado ao problema de curvatura dinâmica no entorno da extremidade superior da linha, na presença de terminações flexíveis e de seu movimento.*

O problema estático tridimensional geral é formulado fazendo uso da Teoria de Barras Curvas, no âmbito das clássicas equações de Clebsch-Love. A relevância dos diversos termos que contribuem para a caracterização da *elastica* é discutida, e o conceito de comprimento de flexão introduzido. As equações particularizadas para o problema plano, e transformadas de forma apropriada a uma única equação diferencial ordinária, não-linear, que rege a inclinação da linha com a horizontal, são utilizadas como base de análise. Esta equação é então reduzida ao célebre e básico problema da catenária, o qual é revisto. O problema plano de um cabo sem rigidez flexional, sob ação da correnteza é abordado, elaborando-se um modelo aproximado para a avaliação dos principais parâmetros que regem o comportamento estático e dinâmico da linha: a tração e a curvatura. A aproximação, conduzida em primeira-ordem, é confrontada com resultados numéricos com concordância bastante aceitável

dentro da faixa típica de velocidades de correnteza usualmente encontrada no ambiente marítimo.

O problema estático de curvatura junto ao ponto de contato com o fundo é tratado de forma consistente, incorporando-se o efeito local da rigidez flexional, o que remove a descontinuidade de curvatura presente na solução de cabo ideal. Para tanto a *técnica de camada-limite* é empregada, construindo-se uma *aproximação assintoticamente correta* que descreve a variação da curvatura no entorno do ponto de contato sobre *solo suposto rígido*, na forma de uma *expressão analítica*. Mostra-se que o ponto de contato real é deslocado daquele correspondente à solução de cabo ideal de uma distância igual ao *comprimento de flexão local*. A expressão analítica é confrontada com resultados de experimentos estáticos, mostrando-se, **de forma original**, sua completa adequação. A *influência da flexibilidade do solo na solução assintótica é investigada e incorporada* à solução assintótica. O estudo da curvatura estática no entorno do ponto de suspensão, junto à unidade flutuante, é realizado, sob a técnica de camada-limite, construindo-se uma solução assintótica e analítica que descreve a curvatura da linha neste entorno, onde os efeitos de rigidez flexional da própria linha elástica e de uma eventual terminação são incorporados.

O problema dinâmico plano é abordado. Inicialmente, as equações que regem a dinâmica da linha submersa em torno da configuração de equilíbrio estático são deduzidas, no âmbito da teoria de pequenas perturbações geométricas. O problema dinâmico relativo à curvatura no entorno do ponto de contato é então tratado. Inicialmente, recuperando-se análise contida em Aranha, Martins & Pesce, 1995, a condição de choque contra o fundo é analisada para um cabo. Esta condição, inicialmente deduzida por Triantafyllou & Bliks, 1985, estabelece a existência de choque sempre que a velocidade de propagação do *ponto de contato instantâneo* superar a velocidade local de propagação da onda transversal. Em *regime dinâmico sub-crítico* – situação de ausência de choque, assim denominada em analogia ao clássico problema da dinâmica dos gases - e correto até segunda-ordem no número de

Mach local, *o ponto de contato estático pode ser visto como uma articulação no que concerne ao problema dinâmico global*. No entorno do ponto de contato a *curvatura* dinâmica para um cabo é analisada, derivando-se uma *expressão analítica* que, embora *não-linear*, é de extrema simplicidade, *dependente da tração dinâmica*, suposta conhecida e determinada a partir do problema dinâmico global linearizado e sob a regência das equações de cabo.

Ainda em *regime subcrítico*, o efeito da rigidez flexional na curvatura dinâmica é considerado. O emprego da técnica de camada-limite leva a um *resultado geral*, de natureza *quase-estática*, que permite escrever uma aproximação assintótica analítica e consistente, pela qual a curvatura total é expressa através de uma função não-linear, no tempo e no espaço. *A função de curvatura é dependente da tração dinâmica, da função que descreve o movimento do ponto de contato instantâneo e do comprimento local de flexão*. As funções descritivas da tração e do movimento do ponto de contato instantâneo são supostas oscilatórias, contínuas e de classe  $C^1$ ; no mais completamente arbitrárias. Daí a generalidade da solução alcançada, posto que possibilita analisar o comportamento não-linear em curvatura, decorrente da ação de um vínculo de contato (uni-lateral), de forma analítica. Basta que a solução dinâmica global tenha sido determinada, esta essencialmente linear. Tal atributo permite que a ação aleatória das ondas do mar sobre o sistema seja considerada de forma imediata. Mostra-se ainda que, consistentemente, a solução assintótica estática é um caso particular da solução dinâmica. Um resultado particular, porém bastante interessante, diz respeito à interpretação de fenômenos de variação brusca de curvatura na região do TDP, eventualmente ocorrentes em linhas de baixíssima rigidez flexional. Tais fenômenos podem ser erroneamente interpretados como sendo de origem puramente numérica, durante o processamento de códigos de simulação não-linear no domínio do tempo.

*A solução assintótica local é então confrontada, de forma original, com resultados de experimentos dinâmicos, mostrando-se sua completa aderência com a realidade física, no tempo e no espaço.*

O problema dinâmico de curvatura no entorno da extremidade superior da linha é tratado na presença e sob o efeito de uma terminação flexível, cuja rigidez é modelada de forma linear. Análise de ordem de magnitude dos termos envolvidos na equação dinâmica mostra que são *localmente dominantes* os efeitos de rigidez geométrica e flexional, quando comparados aos termos de inércia ou de natureza hidrodinâmica. A técnica de camada-limite é empregada e a solução dinâmica de curvatura deduzida na forma de uma expressão analítica, função não-linear da tração dinâmica, da variação de inclinação da extremidade da linha, e do movimento angular do eixo da terminação. Esta expressão permite que o dimensionamento da terminação seja realizado tendo em conta a variação dinâmica das tensões ocorrentes na linha. Consistentemente, a solução assintótica do problema estático é um caso particular desta última expressão.

Como principal conclusão pode-se afirmar, portanto, que *a abordagem empregada permite construir a solução assintótica do problema plano de forma analítica, tendo apenas o conhecimento da solução do problema de cabo ideal associado.*<sup>53</sup>

Em que pese a extensão da análise empreendida, muitos dos resultados alcançados restringem-se ao problema plano, em configuração de "*catenária direta*". Outros no entanto, como por exemplo a importância da rigidez flexional na mecânica global, são de natureza geral. Por outro lado, uma série bastante grande de tópicos permanece carente de investigações mais aprofundadas. Finalizando o presente texto, uma lista parcial destes tópicos é apresentada a título de sugestão para trabalhos futuros:

---

<sup>53</sup> (na ausência de correnteza, em particular, esta solução é obviamente analítica)

*(1) de aplicação geral:*

- tratamento estatístico não-linear das funções de curvatura representadas pelas soluções de camada-limite;
- extensão da análise assintótica local, para problemas que envolvem camadas-limite interiores ao vão suspenso, correspondentes à ocorrência de flutuadores e restritores intermediários;
- extensão da solução de camada-limite junto a terminações flexíveis, considerando características não-lineares de rigidez destes componentes;
- ampliação da modelagem do problema de contato com o fundo, investigando o efeito de outros fenômenos, como os que descrevem a natureza do atrito e não-linearidades presentes nas características de flexibilidade do solo;
- tratamento do problema de vibrações induzidas por vorticidade em tubos com curvatura;
- tratamento do problema de instabilidade dinâmica por compressão efetiva, modelando-o por uma equação do tipo de Mathieu;
- efeitos transitórios de escoamentos internos, no caso de tubos;
- problemas de instabilidade flexo-torsional;
- extensão da análise assintótica ao caso tridimensional;

*(2) de aplicação específica a cabos umbilicais e/ou tubos flexíveis:*

- inclusão de efeitos não-lineares de histerese presentes nas curvas de rigidez axial e rigidez flexional de tubos flexíveis e cabos umbilicais;
- desenvolvimento de modelos analíticos para a caracterização da distribuição de esforços nas seções estruturais;
- desenvolvimento de modelos de representação da fadiga.

Alguns destes tópicos são pertinentes à extensão da presente abordagem assintótica, propriamente dita. Outros constituem, na realidade, verdadeiros temas de pesquisa, alguns dos quais vem sendo já tratados de forma intensiva na Escola Politécnica,

como por exemplo problemas de *vibrações induzidas por vorticidade* (Martins, 1989, Aranha & Parra, 1996; Pesce et al., 1997), problemas de *distribuição de esforços solicitantes nas seções estruturais de cabos umbilicais e tubos flexíveis* (Pesce & Ramos, 1996) e problemas de *modelagem do fenômeno de fadiga*. Este último foge às fronteiras da mecânica aplicada, adentrando as áreas que tratam das propriedades e comportamento dos materiais, particularmente dos fenômenos de desgaste e corrosão (ver Pesce et al, 1993).

Outro tópico que merece especial atenção, do ponto de vista de investigação numérica, e cuja importância foi destacada em Aranha et al, 1995, diz respeito ao denominado *momento espúrio no TDP*. Este fenômeno, de natureza puramente numérica, apenas se evidencia quando do processamento de simulações no domínio do tempo. Decorre da incapacidade que as formulações usualmente adotadas nos códigos em elementos finitos têm de representar, adequadamente, a força dinâmica de contato nodal. Infere-se (ver Aranha, Martins & Pesce, 1995) que a adoção de formulações que se utilizem de elementos-finitos de ordem-superior pode ser adequada para a solução deste problema específico.

Nenhum dos tópicos e temas aludidos prescinde, obviamente, de trabalhos de cunho experimental que visem sua validação e o enriquecimento da observação dos fenômenos estudados. Em particular, são emergentes ensaios que possibilitem atestar a validade dos modelos de distribuição de esforços e de representação da fadiga em cabos umbilicais e tubos flexíveis. Experimentos em escala real são sempre, por seu turno, de grande utilidade, embora em geral envolvam custos operacionais elevados, o que acaba por inviabilizá-los, em certas oportunidades.

Um grande esforço de pesquisa deve ser investido, por fim, no que tange à revisão crítica dos critérios de projeto atualmente adotados, tendo em vista o estabelecimento de normas e procedimentos que permitam levar em consideração, dentre outros, diversos aspectos discutidos no presente texto.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Aranha, J.A.P. & Fernandes, A.C. On the Second-order Slow Drift Force Spectrum on a Floating Body, 1994, 12 pp.
- Aranha, J.A.P., Martins, C.A. & Pesce, C.P. *Dynamic Bending Moment at the Touch Down Point of a Steel Catenary Riser*; 1995; Original Manuscript.
- Aranha, J.A.P., Martins, C.A. & Pesce, C.P. *Analytical Approximation for the Dynamic Bending Moment at the Touch Down Point of a Catenary Riser*; 1997, International Journal of Offshore and Polar Engineering, (to appear).
- Aranha, J.A.P. & Parra, P. *Vibrações Induzidas por Emissão de Vórtices: modelo fenomenológico e experimentos*. EPUSP, Monografia, 1996, 46 pp.
- Aranha, J.A.P., Pesce, C.P. & Martins, C.A. *Mecânica de Cabos Submersos. I - Comportamento Estrutural Estático*. EPUSP, Monografia no 75/92, Dep. e Eng. Mecânica; jun. 1992, 28 pp.
- Aranha, J.A.P., Pesce, C.P. & Martins, C.A. *Mecânica de Cabos Submersos. II - Comportamento Dinâmico*. EPUSP, Monografia no 76/92, Dep. e Eng. Mecânica; jun. 1992, 60 pp.
- Aranha, J.A.P., Pesce, C.P. & Martins, C.A. *Mecânica de Cabos Submersos. III - Efeito Local de Flexão via Teoria de Camada Limite*. EPUSP, Monografia no 77/92, Dep. e Eng. Mecânica; jun. 1992, 23 pp.
- Aranha, J.A.P., Pesce, C.P., Martins, C.A. & Pinto, M.O. *Riser Rígido em Catenária; 16"- Albacora, Plataforma PXXV*. EPUSP, Relatório Técnico. Convênio USP/PETROBRÁS S.A.; 1994, 2 vols.; 38 pp. e anexos.
- Aranha, J.A.P., Pesce, C.P., Martins, C.A. & Andrade, B.L.R. *Mechanics of Submerged Cables: Asymptotic Solution and Dynamic Tension*. 3<sup>rd</sup> International Offshore & Polar Engineering Conference, Singapore, Jun. 6-11, 1993; vol. II, pp.345-356.
- Aranha, J.A.P., Pesce, C.P., Martins, C.A. & Pinto, M.O. *Riser Rígido em Catenária; 16"- Albacora, Plataforma PXXV*. EPUSP, Relatório Técnico. Convênio USP/PETROBRÁS S.A.; 1994, 2 vols.; 38 pp. e anexos.



- Arnold, V. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Editora Mir, 1985, tradução para o português, 1985, 327 pp.
- Bender, C.M. & Orszag, S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill Book Co., 1978, 593 pp.
- Bowman, F., *Introduction to Bessel Functions*. Dover Publications Inc., 1958, 135 pp.
- Bernitsas, M.M., Hoff, C.J. & Kokarakis, J.E. *Non-linear Inverse Perturbation in Structural Dynamics Redesign of Risers*. OMAE, 1985, Houston, TX.
- Bernitsas, M.M. & Korakakis, J.E. *Importance of Nonlinearities in Static riser Analysis*. Applied Ocean Research, 10 (1), 1988, pp. 2-9.
- Bronshstein, I. & Semendiaev, K. *Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes*. 2ª Ed., Editorial Mir, Moscou, 1973.
- Burgess, J.J. *Equations of Motions of a Submerged Cable with bending Stiffness*. OMAE, 1992. Vol. I-, Offshore Technology, pp. 283-289.
- Carrier, G.F, Krook, M. & Pearson, C. E. *Functions of a Complex Variable. Theory and Technique*. Hod Books, Ithaca, N.Y., 1983, 438 p.
- Claydon, P., Cook, G., Brown, P.A. & Chandwani, R. *A Theoretical Approach to Prediction of Service Life of Unbonded Flexible Pipes under Dynamic Loading Conditions*. Marine Structures, Design, Construction & Safety. Vol. 5, no. 5, 1992; Special Issue on Flexible Risers (Part II), pp. 399-429.
- COFLEXIP, *Coflexip Flexible Pipe Design Description. Fatigue*. Report., 1987, 37 pp.
- Féret, J.J., Bournazel, C.L. & Rigaud, J. *Evaluation of Flexible Pipes' Life Expectancy under Dynamic Conditions*. Offshore Technology Conference, 18th, Houston, Texas, May 5-8, 1986; pp 83-90.
- Féret, J.J. & Bournazel, C.L. *Calculation of Stresses and Slip in Structural Layers of Unbonded Flexible Pipe*. 1986, OMAE Specialty Symposium "Offshore and Arctic Frontiers".
- Féret, J.J. & Bournazel, C.L. *Calculation of Stresses and Slip in Structural Layers of Unbonded Flexible Pipes*. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, August, 1987, vol 109, pp 263-269.

- Fuku, T, Ishii, K, Tada, H. & Matsui, Y. *Fatigue Properties and Analysis of Flexible Risers*. Offshore Technology Conference, 24th, Houston, Texas, May 4-7, 1992; pp. 35-44.
- Giacaglia, G.E.O, *Vibrações Não-lineares*. Monografia do Departamento de Engenharia Mecânica; no. 44/89. EPUSP, 1989, 902 pp.
- Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo. *Ensaio com Modelo de Riser Rígido*. Rel. no. 34486, 1996.
- Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo. *Ensaio Complementares com Modelo Truncado de Riser Rígido*. Rel. no. 34643, 1996.
- Irvine, M. *Local Bending Stress in Cables*. Second International Offshore and Polar Engineering Conference, San Francisco, 1-19 June, 1992, Proceedings, Vol. 2, pp. 342-345.
- Iwan, W.D. & Blevins, R.D.A *A Model for Vortex Induced Oscillations of Structures*. Journal of Applied Mechanics, Sep. 1974, pp. 581-586.
- Jiao, G. *Limit State Design for Flexible Pipes*. Marine Structures, Design, Construction & Safety. Vol. 5, no. 5, 1992; Special Issue on Flexible Risers (Part II), pp. 431-454.
- Kevorkian, J. & Cole, J.D. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Applied Mathematical Sciences, v.34. Springer-Verlag, New York, 1981, 558 pp.
- Knapp, R.H. *Derivation of a new Stiffness Matrix for Helically Armoured Cables considering Tension and Torsion*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, vol. 14 515-529.
- Langer, C.G. *Relationships for Deep Water Suspended Pipe Spans*. OMAE, 1985, Houston, TX.
- Langley, R.S. *The Linearisation of Three-dimensional Drag Force in Random Seas with Current*. Applied Ocean Research, 1980, 2 (4), pp 63-69.
- Larsen, C.M. *Flexible Riser Analysis - Comparison of Results from Computer Programs*. Marine Structures, Design, Construction & Safety. Vol. 5, no. 5, 1992; Special Issue on Flexible Risers (Part I), pp. 103-119.

- Leira, B.J. & Remseth, S.N. *A Comparison of Linear and Non-linear Methods for Dynamic Analysis of marine Risers*. Behavior of Offshore structures Symposium, BOSS 1985, Amsterdam, The Netherlands.
- Leira, B.J. *Multidimensional Stochastic Linearisation of Drag Forces*. Applied Ocean Research, 1987, 9 (3), pp. 150-162.
- Leissa, A.W. & Saad, A.M., *Large Amplitude Vibrations of Strings*. ASME Transactions, vo. 61, June, 1994. Pp 296-301.
- Leweke, T. *Étude Expérimentale et Modélisation du Sillage d'un Tore à bas Nombre de Reynolds*. Tese de Doutorado. Université de Provence. 1994. 163pp.
- Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th (1927) edition, Dover Pub., N.Y., 1944, 643 pp.
- Lyons, G.J. & Patel, M.H. *A Prediction Technique for Vortex Induced Transverse Response of Marine Risers and Tethers*. Journal of Sound and Vibration, 1986, 111 (3), pp. 467-487.
- Martins, C.A *Amortecimento Ativo para Reduzir vibrações Induzidas por Vórtices e Risers*. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1989, 309 p.
- Martins, C.A, Aranha, J.A P., Pesce, C.P. *Programa RISTAT 1.4. Manual do Usuário*. EPUSP, 1992.
- Martins, C.A *Notas sobre o problema de equilíbrio estático de um cabo*. 1994. (Comunicação pessoal).
- McFarlane, C.J. *Flexible Riser Pipes: problems and unknowns*. Eng. Struct. 1989, Vol.11, October, pp. 281-289.
- McNamara, J.F. O'Brien, P.J. & Gilroy, S.G. *Non-linear Analysis of flexible Risers using Hybrid Finite Elements*. OMAE, 1986, Tokyo, Japan.
- Mallen, J., Estrier, P. & Amilhau, S. *The Quality and Reliability of Flexible Steel Pipes*. Meeting of The Institute of Marine Engineers and Royal Institution of Naval Architects, Joint Offshore Group, Jan. 1989.
- O'Brien, P.J. & McNamara, J.F. *Three-dimensional Non-linear Motions of Risers and Offshore Loading Towers*. OMAE 1987, Houston, TX.

- Patel, M.H., Sarohia, S. & Ng, K.F. *Finite Element Analysis of the Marine Riser*. Engineering Structures, 1984 6, pp. 175-184.
- Patel, M.H. & Seyed, F.B. *Internal Flow-induced Behaviour of Flexible Risers*. Eng. Struct., vol.11, October, 1989; pp. 266-280.
- Patel, M.H. & Seyed, F.B. *Review of Flexible Riser modelling and Analysis Techniques*. Eng. Structures, vol. 17 (4), 1995, pp. 293-304.
- Pesce, C.P. *Cálculo da Força de Deriva Sobre Corpos Cilíndricos Flutuantes Sujeitos à Ação de Ondas Aleatórias*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984, 480 pp.
- Pesce, C.P. *Complementos de Matemática para Engenharia Mecânica*. Notas de Aula (manuscrito), 2 vols., Escola Politécnica, USP. São Paulo, 1992, vol 1, 207 p., vol 2. , 145 p.
- Pesce, C.P. *Cabos e Tubos Sumersos em Configuração de Catenária: elementos de análise e dimensionamento na situação de operação*. Monografia, EPUSP, 1994, 51 pp.
- Pesce, C.P. *Cabos e Tubos Sumersos em Configuração de Catenária: elementos de análise e dimensionamento; fadiga*. Monografia, EPUSP, 1994, 42 pp.
- Pesce, C.P. *Cabos e Tubos Sumersos em Configuração de Catenária: elementos de análise e dimensionamento; exemplos de aplicação em risers de aço*. Monografia, EPUSP, 1994, 32 pp. e anexos.
- Pesce, C.P. *Dinâmica do Corpo Rígido*. Monografia. EPUSP, 1996, 132 pp.
- Pesce, C.P. & Aranha, J.A.P. *O Espectro de Potência das Forças de Deriva sobre Corpos Cilíndricos Flutuantes em Ondas Aleatórias*. Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Naval, 2(2), pp. 43-79, 1985.
- Pesce, C.P., Aranha, J.A.P., Martins, C.A., Tanaka, D., Taniguchi, C. *Estudos Preliminares Visando o Desenvolvimento de Métodos de Previsão de Vida Útil de Cabos Umbilicais e Tubos Flexíveis para Operação Offshore*. Programa Básico de Pesquisa e Desenvolvimento. Relatório Técnico 02, EPUSP, out., 1993. Convênio USP/PIRELLI; 50 pp.; diversos anexos; contém 100 referências.

- Pesce, C.P., Aranha, J.A.P & Pinto, M.O. *Análise Preliminar de Viabilidade de Utilização de 3 Tubos "Rígidos" como Risers em Catenária para Operação na Bacia de Campos*. EPUSP. Relatório Técnico. Convênio USP/PETROBRÁS S.A., 1994, 2 vols.; 33 pp e anexos.
- Pesce, C.P., Aranha, J.A.P & Pinto, M.O. *Análise Preliminar de Viabilidade de um Riser "Rígido" em Catenária com 10"3/4 de diâmetro para Operação na Bacia de Campos*. Revisão. EPUSP. Relatório Técnico. Convênio USP/PETROBRÁS S.A., 1995, 1 vol.; 35 pp e anexos.
- Pesce, C.P., Aranha, J.A.P., Martins, C.A. & Pinto, M.M.O. *Steel Catenary Risers for Deep Water Applications*. 5th International Offshore & Polar Engineering Conference, The Hague, Jun. 11-16, vol. 2, pp. 190-202, 1995.
- Pesce, C.P., Fajarra, A C., Simos, A N., Franciss, R. *An Analytical Investigation on the Dynamics of Vertical Submerged Tubes subjected to Vortex Induced Vibrations*. DINAME'97, Angra dos Reis, R.J., 1997; (a ser publicado).
- Pesce, C.P., Martins, C.A. & Aranha, J.A.P. *Tubo Flexível de Produção. Modelo Simplificado de Comportamento Estrutural sob Carregamento Localizado pela Ação de Lagartas de Tração durante o Lançamento. Parte I - "Crunching"*. Convênio EPUSP/PIRELLI: Desenvolvimento de Produtos da Linha Petróleo-Offshore; relatório técnico, 1995.
- Pesce, C.P., Martins, C.A. & Aranha, J.A.P. *Tubo Flexível de Produção. Modelo Simplificado de Comportamento Estrutural sob Carregamento Localizado pela Ação de Lagartas de Tração durante o Lançamento. Parte II - Efeito do "squeezing" e carregamento ao longo da linha*. Convênio EPUSP/PIRELLI: Desenvolvimento de Produtos da Linha Petróleo-Offshore; relatório técnico, 1995.
- Pesce, C.P., Martins, C.A. & Mendes, E.C. *Dimensionamento Mecânico de Cabos Umbilicais para Operação Offshore*. 14 Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval, SOBENA'92. R.J., out., 1992; pp 325-353.

- Pesce, C.P., & Pinto, M.M.O. *First-order Dynamic Variation of Curvature and tension in Catenary Risers*. 6th International Offshore & Polar Engineering Conference, Los Angeles, May 26-31, 1996, Proceedings, vol. 2, pp 163-175.
- Pesce, C.P., Ramos Jr., Roberto, *Distribuição de Esforços Solicitantes na Secção*. Vol. I. Modelo Analítico. Convênio EPUSP/PIRELLI: Desenvolvimento de Produtos da Linha Petróleo-Offshore; Rel. FI-RT-1.3.01, 1996, 75pp.
- Phifer, E.H., Kopp, F., Swanson, R.C., Allen, D.W. & Langner, C.G. *Design and Installation of Auger Steel Catenary Riser*. Offshore Technology Conference, 26th, Houston, Texas, May 2-5, 1994; pp. 399-408.
- Price, W.G. & Bishop, R.E.D. *Probabilistic Theory of Ship Dynamics*. London, Chapman and Hall, 1974, 311 pp.
- Pontriaguine, L., *Équations Différentielles Ordinaires*. Éditions de Moscou (Mir), 1969, 347 pp.
- Rékatch, V., *Problèmes de la Théorie de l'Élasticité*. Éditions de Moscou (Mir), 1997, tradução para o francês, 1980; 264 pp.
- Roark, R.J. & Young, W.C, *Formulas for Stress and Strain*. McGraw-Hill, 5th ed., 1975, 613 pp.
- Saevik, S. & Berge, S. *Fatigue Testing and Theoretical Studies of two 4-in Flexible Pipes*. Engineering Structures, 17 (4), 1995, pp. 276-292.
- Seyed, F.B. & Patel, M.H. *Mathematics of Flexible Risers Including pressure and Internal Flow Effects*. Marine Structures, 5, 121-150, 1992.
- Tada, H., Matsui, Y., Fuku, T. & Ishii, K. *Design Technology for a Flexible Risers System*. Furukawa Review no. 10, 1992, pp.71-79.
- Tikhonov, V.S., Fisher, A S. *An Efficient Procedure of Static Analysis of Long Ocean Mining Pipe*. OMAE, 1986, Tokyo, Japan.
- Triantafyllou, M.S & Blied, A. & Shin, H: "Dynamic Analysis as a Tool for Open Sea Mooring System Design", Anual Meeting of The Society of Naval Architects and Marine Eng., November 1985, N.Y.
- VanDyke, M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, 1975, 271 pp.

- White, F. M. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill Inc., 1974, 725 p.
- Whitham, G.B., *Linear and Non-linear Waves*. Pure & Applied mathematics. Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts. 1974, 636 pp.
- Witz, J.A. & Tan, Z. *On the Axial-torsional Structural Behaviour of flexible Pipes, Umbilicals and Marine Cables*. Marine Structures, 5 (1992), 205-228.
- Witz, J.A. & Tan, Z. *On the Flexural Structural Behaviour of flexible Pipes, Umbilicals and Marine Cables*. Marine Structures, 5 (1992), 229-249.
- Witz, J.A. & Tan, Z. *Rotary Bending of marine Cables and Umbilicals*. Engineering Structures, 17 (4), 1995, pp. 267-275.

**APÊNDICE RESPOSTA DINÂMICA EM  
TRAÇÃO. SOLUÇÃO ASSINTÓTICA**



Neste apêndice, modelo assintótico que representa a evolução dinâmica da tração em uma linha, originalmente desenvolvido por Aranha, Pesce, Martins & Bernardes, 1993, é apresentado e discutido. O intuito é conferir completude ao presente texto, sem a pretensão de reelaborar o modelo. O modelo é bidimensional e considera a ação de correnteza e ondas agentes no plano. A linha é suposta lançada em "catenária direta" ao fundo do oceano.

Conforme já mencionado, duas são as principais particularidades do problema dinâmico:

- *A co-existência de duas faixas bastante distintas de auto-valores do problema.* A primeira, correspondente à rigidez axial conduz a frequências naturais bastante elevadas; a segunda, associada à rigidez geométrica, se caracteriza por frequências naturais bem mais baixas. Este fato implica em equações dinâmicas bastante "rígidas", do ponto de vista de solução numérica. Implica também, no entanto, em podermos simplificar o problema, considerando a tração dinâmica invariante ao longo do comprimento da linha; *a ação de amortecimento hidrodinâmico (transversal) proporcionado pelo meio fluido circundante.* Este efeito é quadrático na velocidade relativa, ou seja na amplitude e na frequência consideradas. Assim, à medida que aumenta a frequência, a dissipação viscosa cresce quadraticamente, fazendo com que a linha possa ser considerada "congelada" em sua posição de equilíbrio estático e a energia mecânica de deformação, em regime permanente, representada, quase que totalmente, por deformação axial. Em baixa frequência, ao contrário, a dissipação viscosa é relativamente pequena e a energia é representada, fundamentalmente, pelo trabalho das forças associadas à rigidez geométrica.

Tais constatações permitiram elaborar (ver Aranha, Pesce, Martins & Bernardes, 1993) modelo assintótico que representa com bastante fidedignidade a resposta dinâmica da tração ocorrente em uma linha suspensa em "catenária direta", submetida a um movimento monocromático imposto à sua extremidade suspensa. A reapresentação da dedução deste modelo seria por demais extensa e, posto que

nenhuma extensão ou complementação foram elaboradas, retringir-nos-emos a reproduzir, de forma sucinta, os principais resultados alcançados.

A amplitude dinâmica de tração, sob excitação harmônica pode ser escrita, (Aranha et al, 1993):

$$\tau_0 = \nu EA \frac{U}{L + L_c} \quad (\text{I.1})$$

onde

$$\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\} \quad (\text{I.2})$$

$EA$  é a rigidez axial;  $U$  é a componente tangencial do movimento imposto à extremidade suspensa;  $L$  é o comprimento suspenso da linha na condição de equilíbrio;  $L_e$  é o comprimento efetivo de comprimento da linha apoiado sobre o solo<sup>54</sup>.

Note que  $\tau_e = EA \frac{U}{L + L_c}$  é um valor de referência da tração, correspondente à deformação axial-elástica da linha. E que, portanto,  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são amplificações dinâmicas de tração. O primeiro coeficiente corresponde ao regime “quase-estático” e o segundo ao regime dinâmico, propriamente dito. Ambos, porém, são invariantes ao longo da linha, ou seja com respeito à posição da seção considerada<sup>55</sup>.

Em frequências de excitação moderadamente baixas, a resposta será denominada quase-estática. Pode-se mostrar que o coeficiente de amplificação quase-estático é dado por,

---

<sup>54</sup> Modelo clássico de atrito Coulombiano foi adotado.

<sup>55</sup> Esta assertiva é, evidentemente, decorrente das hipóteses simplificadoras adotadas em Aranha et al., 1993. Na realidade, a amplitude de tração dinâmica apresenta pequena variação ao longo do comprimento da linha.

$$v_1 = \frac{1 - \frac{V}{U} \left[ \theta_L - \frac{qL}{T_a} \cos \theta_a \frac{J_1}{J_2} \right]}{1 + J} \quad . \quad (\text{I.3}),$$

com  $\theta_a = \theta(s_a)$ , onde  $s_a$  identifica a seção onde a linha é paralela à corda definida entre a extremidade suspensa e o ponto de contato com o solo e  $V$  é a amplitude da componente transversal do movimento imposto à extremidade suspensa.

O parâmetro  $J$ , que desempenha papel fundamental na caracterização da resposta em tração, fornece a relação entre a rigidez elástica e a rigidez geométrica da linha. É definido pela expressão

$$J = \frac{K_e}{K_g} = \left( J_2 - \frac{J_1^2}{J_0} \right) \frac{\Gamma^2}{I_2} \quad . \quad (\text{I.4})$$

onde

$$\Gamma = I_2^{1/2} \left( \frac{EA}{T_0} \right)^{1/2} \left( \frac{L}{L + L_e} \right)^{1/2} ; \quad (\text{I.5})$$

é um parâmetro elástico, e os coeficientes de forma,

$$J_n = \frac{T_0}{L} \int_0^L \frac{\theta^n(s)}{T(s)} ds ; \quad n = 0, 1, 2 ; \quad (\text{I.6})$$

$$I_n = \frac{1}{L} \int_0^L \left( L \frac{d\theta}{ds} \right)^n ds ; \quad n = 2, 3 \quad (\text{I.7})$$

são calculados a partir da solução de equilíbrio estático.

Para frequências de excitação intermediárias e moderadamente altas, o coeficiente de amplificação da resposta dinâmica pode ser escrito na forma,

$$v_2 = (V_0 \Omega)^2 \left[ 1 + 1 / (\zeta V_0)^2 \right]^{1/2} . \quad (\text{I.8})$$

onde o coeficiente de ganho adimensional

$$V_0 = \frac{1}{\Omega^2} \left[ \frac{\sqrt{(1 - \Omega^2 / \zeta)^4 + 4\Omega^4} - (1 - \Omega^2 / \zeta)^2}{2} \right]^{1/2} , \quad (\text{I.9})$$

é definido a partir da *frequência reduzida*

$$\Omega = \pi \frac{\zeta^{1/2}}{\Gamma} \frac{\omega}{\omega_a} , \quad (\text{I.10})$$

com  $\omega$  como a frequência de excitação, e  $\omega_a$  correspondendo à frequência de propagação de ondas transversais dominadas pela rigidez geométrica, tal que

$$\omega_a = \frac{\pi}{l} c_a , \quad (\text{I.11})$$

A celeridade  $c_a$  é, conforme definido, dada por  $c_a = \sqrt{T_a / (m + m_a)}$ , onde  $m_a$  é a massa adicional por unidade de comprimento. O coeficiente de amortecimento linearizado é aproximado pelo clássico critério de igualdade de energia dissipada durante um ciclo completo de oscilação, que permite escrevê-lo como,

$$\zeta = \frac{8}{3\pi} \frac{2C_D}{\pi} \frac{m_a}{m + m_a} \frac{U}{D} \frac{I_3}{I_2^2} . \quad (\text{I.12})$$

onde  $D$  é o diâmetro externo da linha.

Note que, como o coeficiente de amortecimento é linear na amplitude de movimento imposto à extremidade suspensa, a tração dinâmica é função não-linear do movimento. Assim a solução deve ser determinada de forma iterativa.

Em particular, para movimentos impostos muito pequenos, pode-se construir a seguinte aproximação linearizada; Pesce & Pinto, 1996,

$$v_2 \cong \frac{\psi^2}{(1-\psi^2)} [1 + O(\mathcal{D}U)^2]; \quad \psi < 1 \quad (\text{I.13})$$

onde

$$\psi^2 = \frac{\pi^2}{\Gamma^2} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 < 1 \quad (\text{I.14})$$

$$\mathcal{D} = \frac{8}{3\pi} \frac{2C_d}{\pi} \left( \frac{m_a}{m+m_a} \right) \frac{I_3}{I_2^2} \frac{T_a}{\cos \theta_a qL} \frac{1}{D} \quad (\text{I.15})$$

Esta aproximação é válida apenas em frequências moderadamente baixas e apenas quando  $(\mathcal{D}U)^2 \ll 1$ .

Na ausência de correnteza a solução estática é analítica e os coeficientes de forma podem ser calculados explicitamente. De fato, lembrando que, na ausência de correnteza, a solução de catenária fornece,

$$\theta_c(s) = \tan^{-1} \left( \frac{qs}{T_0} \right);$$

de tal forma que a curvatura estática é dada por,

$$\frac{d\theta_c}{ds} = \frac{q}{T_0} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{qs}{T_0} \right)^2}$$

os coeficientes de forma podem ser calculados explicitamente apenas como função do ângulo na extremidade suspensa,

$$\begin{aligned}
 I_{2c} &= \left(\frac{qL}{T_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\theta_L + \frac{1}{4}\text{sen}(2\theta_L)\right) \\
 I_{3c} &= \left(\frac{qL}{T_0}\right)^2 \cdot \left\{\frac{3}{8}\theta_L + \frac{1}{4}\text{sen}(2\theta_L) + \frac{1}{32}\text{sen}(4\theta_L)\right\} \\
 J_{1c} &= \left(\frac{qL}{T_0}\right) \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(1)} \theta_L^{2j+2}; & a_j^{(1)} &= \frac{1}{2}; \frac{1}{8}; 0.03472; 0.01059; 0.003435; \dots \\
 J_{2c} &= \left(\frac{qL}{T_0}\right) \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(2)} \theta_L^{2j+3}; & a_j^{(2)} &= \frac{1}{3}; \frac{1}{10}; 0.02976; 0.00941; 0.003122; \dots
 \end{aligned}$$

(I.16),

Notável é o fato de que, na ausência de correnteza, a solução dinâmica para o problema bidimensional pode ser determinada de forma totalmente analítica, posto que de posse da resposta dinâmica de tração, a resposta de curvatura ao longo da linha é imediata. Mesmo a resposta dinâmica não-linear de curvatura, junto ao ponto de contato e à extremidade superior, fica determinada analiticamente, através das soluções assintóticas apresentadas nas seções precedentes.

As tabelas I-1 e I-2, abaixo, extraídas de Aranha, Martins & Pesce, 1996, mostram, para dois risers de aço distintos, comparações relativas à tração dinâmica, entre soluções obtidas: (i) através do presente modelo assintótico; (ii) através do código RISDIN, no domínio da frequência; (iii) pelo programa ORCAFLEX, no domínio do tempo; (iv) pelo programa ANFLEX, também no domínio do tempo. A penúltima coluna apresenta a razão entre a amplitude de movimento do ponto de contato no fundo e a amplitude de movimento circular, imposto à extremidade suspensa. A última coluna refere-se ao número de Mach, que relaciona a amplitude da velocidade de progressão do ponto de contato instantâneo, com a velocidade de propagação da onda elástica transversal. Este parâmetro constitui-se em uma das medidas de erro da teoria assintótica e é vital no modelamento, porquanto estabelece se o processo

dinâmico que descreve a curvatura junto ao ponto de contato é sub- ou super-crítico. A Tabela I-3 resume as características dos problemas exemplificados. A Tabela I-4 apresenta as respectivas condições de excitação, correspondentes a ondas regulares e a amplitudes de deslocamento circulares equivalentes impostos à extremidade suspensa, correspondentes a máximos (1/10) de movimento e período associado, que foram determinados, para um sistema flutuante típico, utilizando-se à clássica teoria de estados de mar caracterizados por espectros de densidade de energia de banda estreita, do tipo Pierson-Moskowitz (ver, p.ex., Bishop & Price, 1974). Os dois risers tem 5000m de comprimento total. O solo foi suposto rígido, caracterizado por um coeficiente de atrito 0,4. Os coeficientes de arrasto são  $C_D = 1,1$ ;  $C_T = 0,01$ . Os valores eficazes da tração dinâmica apresentados foram obtidos junto ao ponto de contato da configuração estática. A aderência dos resultados ilustrados, entre modelos lineares e não-lineares, é em geral bastante boa. As pequenas discrepâncias dos resultados observadas entre os modelos não-lineares são de mesma ordem de magnitude daquelas relativas aos modelos lineares entres si e destes em confronto com os modelos não-lineares. Tanto a tração estática quanto o momento fletor estático no ponto de contato foram calculados pelos diversos códigos com concordância bastante boa.

*Tabela I-1 Valor eficaz de tração dinâmica em um "riser" de aço de 8"5/8 de diâmetro externo em 910m de lâmina d'água (Aranha, Martins & Pesce, 1996)*

<b>Mar</b>	<b>Asintótica</b>	<b>Risdin</b>	<b>Orcaflex</b>	<b>Anflex</b>	$a_0/A$	<b>M</b>
<b>1</b>	2.2	2.0	1.9	1.5	15.7	0.023
<b>2</b>	3.7	3.3	3.5	2.6	14.2	0.035
<b>3</b>	5.2	4.6	5.1	4.0	10.5	0.040
<b>4</b>	7.3	6.8	7.4	5.4	11.6	0.064
<b>5</b>	9.3	8.9	9.9	7.2	10.8	0.080
<b>6</b>	12.6	12.8	13.9	11.1	10.6	0.126
<b>7</b>	15.6	16.2	17.3	14.5	10.8	0.151
<b>8</b>	19.5	20.6	21.8	18.9	11.2	0.188
<b>9</b>	25.0	25.0	28.4	27.3	11.3	0.302

*Tabela I-2 Valor eficaz de tração dinâmica em um "riser" de aço de 16" de diâmetro externo em 575m de lâmina d'água (Aranha, Martins & Pesce, 1996)*

<b>Mar</b>	<b>Asintótica</b>	<b>Risdin</b>	<b>Orcaflex</b>	<b>Anflex</b>	$a_0/A$	<b>M</b>
<b>1</b>	14.4	13.9	11.9	10.5	15.7	0.023
<b>2</b>	24.5	23.0	18.9	18.6	12.5	0.031
<b>3</b>	33.8	28.0	30.2	29.3	12.0	0.045
<b>4</b>	45.2	40.9	43.0	37.0	17.8	0.099
<b>5</b>	55.1	53.2	55.0	43.6	15.3	0.114
<b>6</b>	69.2	68.1	73.0	59.8	12.4	0.125
<b>7</b>	82.6	81.9	88.9	72.8	12.3	0.146
<b>8</b>	98.1	98.4	108.0	90.0	12.1	0.169
<b>9</b>	116.8	119.4	132.5	117.9	11.8	0.198
<b>Centenário</b>	223.5	234.7	253.3	-	12.9	0.344



**Tabela I-3 Características e parâmetros relativos à solução estática para dois risers de 8" e 16" de diâmetro (Aranha, Martins & Pesce, 1995)**

	<i>Riser de 8"5/8</i>	<i>Riser de 16"</i>
$H$ (m)	910	575
$D$ (m)	0.2191	0.4064
$q$ (kN/m)	0.26	1.19
$EJ$ (kN m <sup>2</sup> )	9241	78000
$EA$ (kN)	2000000	4000000
$x_L$ (m)	4500	781
$y_L$ (m)	900	590
$L$ (m)	1233	1025
$\theta_L$ (o)	72.2	58.0
$T_L$ (kN)	332	1440
$T_0$ (kN)	102	714
$c_0$ (m/s)	44	43
$\lambda$ (m)	9.5	10.4

Por fim, as figuras abaixo, extraídas de Aranha et al., 1993, mostram a comparação da solução assintótica com resultados provenientes do processamento de um código computacional (ORCAFLEX) onde as equações dinâmicas não-lineares são resolvidas no domínio do tempo. Os casos analisados correspondem a dois cabos umbilicais em diferentes sítios da Bacia de Campos: *Marlim* (1000m de profundidade) e *Marimbá* (500m). A Tabela I.5 apresenta as particularidades dos problemas tratados. O movimento imposto à extremidade superior é circular e de 3m de amplitude, de tal forma a resultarem trações dinâmicas de amplitude comparável à tração estática. Os resultados do programa ORCAFLEX referem-se à extremidade superior. A concordância para os dois casos é bastante satisfatória, em toda a faixa de frequências estudada.

**Tabela I-4 Estados de mar, períodos e amplitudes de movimento impostos à extremidade superior dos “risers”.**

<i>Mar</i>	$H_s$ (m)	$T_z$ (s)	A (m)	$T$ (s)	$p$ (%)
1	0,75	5,24	0,07	7,08	2,3
2	1,25	5,27	0,12	7,11	25,6
3	1,75	5,77	0,20	7,74	38,9
4	2,25	6,26	0,32	8,41	19,6
5	2,75	6,89	0,47	9,23	8,8
6	3,25	7,72	0,70	10,16	3,2
7	3,75	7,89	0,84	10,33	0,8
8	4,25	8,20	1,02	10,64	0,6
9	4,75	9,00	1,31	11,41	0,2

**Tabela I-5 Cabos umbilicais. Particularidades dos casos exemplificados.**

	MARLIM	MARIMBÁ
$H$ (m)	1000	500
$L + L_e$ (m)	1500	850
$D$ (m)	0.102	0.102
$x(L)$	800	470
$y(L)$	1020	508.3
$EA$ (kN)	149000	158000
$q$ (kN/m)	0.208	0.200

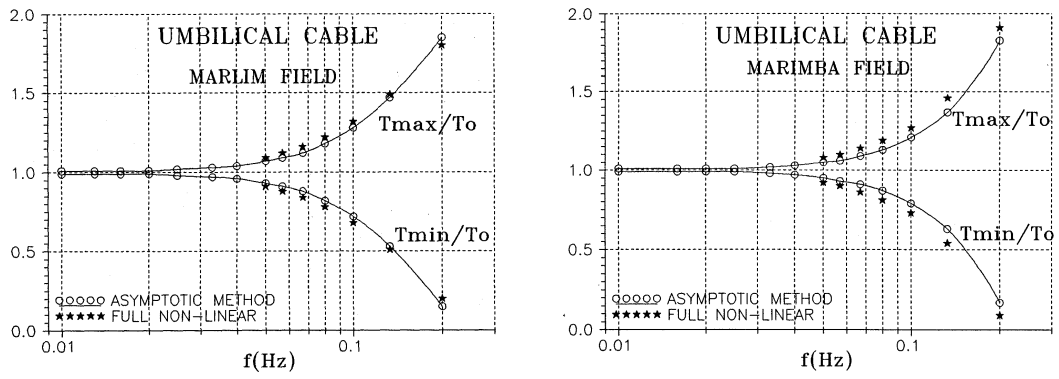


Figura I.1 Valores máximos e mínimos de tração em dois cabos umbilicais.