

**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Eletrônica**

**Estabilidade e Controle Ótimo de Sistemas
com Dinâmica Sujeita a Variações Estocásticas**

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do
título de Prof. Livre-Docente na área de
Automação e Controle.

São Paulo, julho de 1993

'a Silvia e Debora

AGRADECIMENTOS

Aos companheiros do LAC, Laboratório de Automação e Controle, pelo incentivo e ajuda recebidos.

À Fany Kon e Guita Guinsburg pelas discussões, valiosas sugestões, e paciente trabalho de revisão deste texto.

À todos que colaboraram na elaboração deste trabalho.

Resumo

Este texto constitui uma sistematização e uma apreciação crítica dos trabalhos desenvolvidos pelo docente relativos ao período após a conclusão de seu doutoramento. Esses trabalhos, que abordam sistemas que em muitos casos modelam plantas cuja dinâmica está sujeita a variações estocásticas já foram publicados, em boa parte, sob a forma de artigos em vários periódicos internacionais. Outros artigos estão em vias de publicação ou submetidos, e muitos dos resultados das pesquisas a que os artigos se referem foram apresentados em congressos nacionais e internacionais.

As pesquisas envolvidas nestes trabalhos referem-se a três tipos de sistemas : 1. Processos de Markov determinísticos por partes; 2. Sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos markovianos e 3. Sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita.

O primeiro tipo é apropriado para modelar sistemas a tempo contínuo com dinâmica não-linear e trajetórias sujeitas a variações bruscas markovianas; o segundo e terceiro são apropriados para modelar sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a variações bruscas markovianas e sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a variações estocásticas regulares e permanentes, respectivamente. Vários aspectos relativos à estabilidade e ao controle ótimo de tais modelos são discutidos.

Índice

Cap. 1- Introdução	01
Cap. 2- Processos de Markov Determinísticos por Partes	10
2.1. Introdução	10
2.2. Definições e hipóteses gerais	12
2.3. Distribuições estacionárias de probabilidade	14
2.3.1. O operador \mathcal{T} de Π_{PDP} para Π_{MC}	14
2.3.2. O operador \mathcal{P} de Π_{MC} para Π_{PDP}	19
2.3.3. A inversa do operador \mathcal{P}	21
2.3.4. Condições suficientes para a existência e unicidade de uma distribuição estacionária	23
2.3.5. Uma aplicação para expansão de capacidade	24
2.4. O problema de controle impulsional	26
2.5. Controle impulsional sem restrições	28
2.5.1. Preliminares	28
2.5.2. Condições de Doeblin	31
2.5.3. Técnica iterativa de melhoria de políticas	33
2.6. Controle impulsional com restrições	37
2.7. Conclusões	41
Cap. 3- Sistemas Lineares com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos	43
3.1. Introdução	43
3.2. Notação e resultados preliminares	46
3.3. Formulação do modelo	49
3.4. Estabilidade na média quadrática e com prob. um	50
3.4.1. Estabilidade na média quadrática	50
3.4.2. Estabilidade com prob. um	62
3.5. Filtro ótimo linear estacionário	67
3.6. Controle ótimo	69
3.6.1. Preliminares	69
3.6.2. Resultados auxiliares	71
3.6.3. Infinitas equações de Riccati acopladas entre si	74
3.6.4. Custo médio a longo prazo	82
3.7. Conclusões	86

Cap. 4- Sistemas Bilineares Estocásticos de Dimensão Infinita	88
4.1. Introdução	88
4.2. Notação	90
4.3. Preliminares	92
4.4. Descrição do modelo	93
4.5. Alguns resultados sobre estabilidade	94
4.6. Controle ótimo	99
4.7. Controle H_{∞}	103
4.7.1. Resultado principal	103
4.7.2. Condição suficiente	105
4.7.3. Condição necessária	110
4.8. Conclusões	123
Cap. 5- Conclusões Finais	125
Bibliografia	129

Capítulo 1 : Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um texto que sistematize criticamente parte dos trabalhos realizados pelo autor após a conclusão de seu doutoramento. Tais trabalhos correspondem às referências [17]-[29], [38],[39], e [60], listadas na bibliografia, e que tratam de vários aspectos relacionados à estabilidade e ao controle ótimo de sistemas com dinâmica sujeita a variações estocásticas. Diversos sistemas estão intrinsecamente sujeitos a variações estocásticas na sua dinâmica devido a mudanças repentinas no estado do sistema, a falhas que mudem bruscamente os parâmetros do modelo, a mudanças no ponto de operação da planta, a mudanças ambientais, a ruídos que atuem diretamente nos parâmetros do sistema, etc. Neste trabalho estudaremos separadamente e de forma independente nos Capítulos 2, 3 e 4 respectivamente, três tipos de modelos que, em muitos casos, podem representar as situações mencionadas acima.

Abordaremos no Capítulo 2, os processos de Markov determinísticos por partes (PDP's), que foram introduzidos na literatura por Davis [30] e que servem para modelar um grande número de problemas em pesquisa operacional. Tais modelos são caracterizados por três parâmetros locais: 1) o fluxo determinístico $\phi(t,x)$; 2) a taxa de saltos $\lambda(x)$; 3) a medida de transição $Q(.,.)$ que fornece a localização do processo após um salto. Desta forma o PDP segue o fluxo determinístico $\phi(t,x)$ até que um salto em um instante T_1 ocorra de forma espontânea, segundo uma distribuição tipo exponencial com taxa $\lambda(\phi(t,x))$, ou quando o fluxo atinge a fronteira do espaço de estado. A localização do processo após o salto é determinada pela medida de transição $Q(.,\phi(T_1,x))$ e o processo recomeça a partir deste ponto como antes. Portanto, tais modelos são convenientes para modelar sistemas a tempo contínuo com dinâmica não linear, representada pelo fluxo $\phi(t,x)$, porém sujeitos a variações bruscas em sua trajetória de tipo markoviana, representadas pela taxa de salto $\lambda(t,x)$, fronteira do espaço de estado, e medida de transição $Q(.,.)$.

Associados aos PDP's encontram-se os assim conhecidos "Markov decision drift processes" [32], estudados em [49],[50] por aproximações a tempo discreto e também em [97],[98], por dedução direta

das condições de otimalidade. A vantagem em se adotar a formulação dos PDP's frente aos "Markovian decision drift processes" é que no primeiro caso uma análise mais direta e geral pode ser feita para vários problemas de controle. De fato, ela é mais direta porque os PDP's possuem uma teoria desenvolvida (vide [30],[31]) análoga ao caso dos processos de difusão (isto é, caracterização do gerador forte e estendido, desenvolvimento do cálculo estocástico, etc) que podem ser utilizados como informação a priori à análise dos problemas. Por outro lado, o enfoque dos "Markovian decision drift processes" se assemelha ao seu similar a tempo discreto, conhecido como "Markovian Decision Processes", que já incluem o problema de controle com a definição do processo, não permitindo assim o desenvolvimento de uma teoria geral somente para o processo. É mais geral por admitir, na definição do processo, saltos quando o fluxo $\phi(t,x)$ atinge a fronteira do estado, o que permite modelar um número maior de problemas. Um exemplo da aplicação dos PDP's para a manutenção ótima de sistemas foi considerado pelo autor em sua tese de doutoramento e apresentado em [16]. Trata-se de um sistema composto por duas máquinas diferentes, sujeitas a falhas, interligadas entre si através de uma única central de reparos e manutenção. O envio de uma das máquinas para manutenção muito cedo poderia ocasionar uma indesejável fila de reparos, em caso de quebra da outra máquina.

O conceito de estabilidade que adotaremos para o modelo do Capítulo 2, será o da existência (e unicidade) de uma distribuição estacionária para o PDP, de modo que, com probabilidade um, o processo não "exploda" com o tempo. O Teorema que será apresentado (publicado em [21] e também apresentado em [31]) prova uma equivalência entre os problemas da existência e unicidade de uma distribuição estacionária para o PDP e para uma cadeia de Markov (tempo discreto) associada ao PDP (que é a localização do PDP logo após um instante de salto). Este Teorema também permite usar os vários resultados para existência e unicidade de distribuições estacionárias para cadeias de Markov disponíveis na literatura internacional (veja por exemplo, [90]), facilitando, em geral, a sua aplicação em relação aos resultados para distribuição estacionária de processos de Markov a tempo contínuo. Uma aplicação para expansão ótima de capacidade é apresentada. Neste caso, considera-se a construção de projetos que, uma vez completados, satisfazem uma determinada demanda. Como a construção dos

projetos leva um tempo fixo e novas chegadas da demanda ocorrem de acordo com uma taxa exponencial, pode-se obter condições nos parâmetros do processo que garantam a existência e unicidade de uma distribuição estacionária, de modo que o processo não “exploda” com o tempo.

O problema de controle ótimo que consideraremos no Capítulo 2 será o do controle ótimo impulsional, isto é, o controle feito por intervenções, de modo que a decisão de agir é tomada em instantes discretos do tempo, em resposta à evolução aleatória do sistema, de modo que o processo é levado a um novo ponto no espaço de estado. Uma grande variedade de exemplos mostram a importância de problemas de controle impulsional na teoria de processos estocásticos. Problemas de controle de estoque, alocação de recursos e manutenção ótima de sistemas (acima comentado) são alguns dos exemplos. Problemas desse tipo foram estudados inicialmente por Bensoussan and Lions [3], no contexto de processos de difusão, como uma aplicação de desigualdades variacionais e quase-variacionais e, mais tarde, revistos em [4], [5]. Os problemas relativos à parada ótima podem ser considerados como uma particularização do problema de controle impulsional, já que neste caso busca-se apenas uma intervenção, fato que representaria o instante de parada do processo. Por serem mais simples, analisam-se primeiro os problemas de parada ótima e mostra-se que, em alguns casos, o problema de controle impulsional pode ser escrito como uma sequência de problemas de parada ótima, fornecendo assim métodos numéricos de aproximação. Este tópico foi explorado pelo autor na sua tese de doutorado (com os resultados apresentados em [15] e [16]) e posteriormente ampliado em [17]-[21]. Apresentaremos aqui alguns resultados obtidos em [18] e [19] e que, de certa forma, ilustram as técnicas utilizadas nos outros trabalhos. Abordaremos o problema do controle ótimo impulsional para PDP's com o critério de minimização sendo o custo médio a longo prazo. Assumiremos, de início, uma hipótese simplificadora de que o custo por impulso $c(x,y)$ pode ser escrito em uma forma separada do tipo $c(x) + d(y)$ e que não existam restrições para onde o processo possa ser enviado após um impulso. Tal hipótese implicará a possibilidade de nos restringir às estratégias que sempre voltam ao mesmo ponto após uma intervenção, e que sempre utilizam o mesmo tempo de parada (portanto o processo com intervenções será regenerativo). Obteremos uma técnica iterativa que reduz o problema a uma

sequência de problemas de parada ótima truncados no número de saltos (cf. [18]). O caso mais geral quando o custo por impulso é da forma $c(x,y)$, isto é, não pode ser separado, e quando temos restrições do tipo $\Gamma(x)$ para onde o processo pode ser enviado após um impulso, também é analisado e uma equação de otimalidade que caracteriza a função custo ótimo do problema é obtida ([19]). Entretanto, neste caso mais geral, condições para a existência de uma solução para esta equação de otimalidade são bem mais difíceis e restritivas de serem obtidas (cf. [19]).

Analisaremos no Capítulo 3 os sistemas lineares a tempo discreto com os parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Neste caso, considera-se um sistema linear usual em que as matrizes podem mudar ao longo do tempo, de acordo com uma cadeia de Markov, com matriz de transição de probabilidade conhecida. Modelos deste tipo foram analisados por vários autores e a literatura associada tem crescido rapidamente (veja, por exemplo, [8]-[10],[14],[16],[21]-[26],[38],[45],[52],[59],[64],[66]-[69],[73],[74],[80],[33]-[35],[94],[96]). Tais modelos, portanto, são convenientes para modelar sistemas com dinâmica linear mas que podem estar sujeitos a variações bruscas devido a falhas, mudanças ambientais, mudanças no ponto de operação da planta, etc. Por se tratar de sistemas lineares, serão derivados resultados mais explícitos do que os obtidos no Capítulo 2. A idéia básica adotada neste capítulo é generalizar para o caso linear com saltos markovianos os resultados conhecidos para sistemas lineares, utilizando o ferramental da teoria de operadores, enfoque este que distingue o nosso trabalho de outros anteriores e que permite não só obter resultados mais gerais, como uma visão mais unificadora da teoria. Os objetivos principais deste capítulo serão os de obter condições para estabilidade na média quadrática, com probabilidade um e existência de uma medida invariante para sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a variações bruscas modeladas por uma cadeia de Markov, e aplicar tais conceitos para a resolução do problema do regulador ótimo quadrático com horizonte infinito e filtragem ótima linear estacionária.

Em [8],[9],[52],[64],[66]-[69],[73],[74] foram analisadas várias questões relativas à estabilidade de sistemas lineares com parâmetros sujeitos a variações estocásticas. Em [64], [68] e [74] considerou-se o caso a tempo contínuo e foram obtidas condições necessárias e suficientes para a estabilidade na

média quadrática (MSS), expressas como a maior parte real dos autovalores de uma matriz aumentada sendo menor do que zero. MSS de sistemas a tempo discreto markovianos também foram obtidas em termos da existência de uma solução de uma equação de Lyapunov em [52]. Em relação à estabilidade com probabilidade um (ASC), em [8] considera-se o caso a tempo discreto sem ruído de entrada e assume-se que as matrizes estocásticas sejam ergódicas e estacionárias ou ϕ -mistas e não estacionárias (cf. [8]) e condições para ASC são obtidas via teoria de estabilidade de Lyapunov. Em [9] o caso a tempo contínuo sem ruído de entrada com matrizes estacionárias ergódicas foi considerado e condições suficientes para ASC são derivadas em termos do valor esperado de certas medidas das matrizes estocásticas no instante inicial. Neste capítulo analisamos o problema de MSS para sistemas lineares a tempo discreto markovianos [cf. 25]. Mostra-se que MSS é equivalente ao raio espectral menor do que um de uma matriz aumentada ou à existência da solução de uma equação de Lyapunov. É interessante notar que a estabilidade de todos os modos de operação não é nem necessário nem suficiente para a estabilidade global do sistema (veja [52]). O critério do raio espectral prova claramente a conexão entre MSS e a probabilidade de visitas a modos instáveis. Mostra-se, também, que a equação de Lyapunov pode ser escrita em quatro formas equivalentes, cada qual fornecendo uma condição suficiente mais fácil de ser verificada. Com relação ao problema da ASC, obtemos condições suficientes em termos das normas de certas matrizes e das probabilidades limites de uma cadeia de Markov construída a partir da cadeia de Markov original. Este resultado é ilustrado através de um exemplo, proveniente de uma adaptação de um algoritmo de filtro adaptativo apresentado em [8], onde obtemos, para este algoritmo, condições fáceis de serem verificadas para o caso ASC. Acreditamos que tais resultados dão uma visão bastante completa e geral do problema de MSS e ASC para sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos markovianos.

Ainda neste capítulo estudaremos o problema de filtragem ótima estacionária para sistemas lineares markovianos a tempo discreto com ruídos na dinâmica da planta e na saída [24]. Assume-se no caso, que a cada instante k , se conhece a variável de saída e o modo de operação do sistema. Deseja-se projetar um conjunto de filtros invariantes no tempo, cada qual associado a um modo de operação do

sistema, de modo a minimizar o valor esperado do erro médio quadrático estacionário. Mostra-se que a solução deste problema está associada à solução de um conjunto de equações de Riccati acopladas entre si. Condições para a existência e unicidade de uma solução não negativa definida são apresentadas e os resultados são escritos em termos dos conceitos aqui definidos de sistemas estabilizáveis e detectáveis na média quadrática. O Capítulo 3 é concluído analisando-se o problema do regulador ótimo quadrático [26] com dois tipos de critérios de otimalidade: o caso sem ruído e custo quadrático a horizonte infinito e o caso com ruído e custo médio a longo prazo. A novidade neste estudo é que assumiremos a cadeia de Markov, que modela os saltos do sistema, tomando valores em um estado de espaço contável infinito. Verificaremos que, de forma análoga ao caso linear, a solução deste problema estará associada a uma solução de um conjunto contável infinito de equações algébricas de Riccati acopladas entre si (que poderiam ser encaradas como duais às do problema de filtragem comentado acima). Condições para a existência e unicidade de uma solução única não negativa definida são apresentadas em termos dos conceitos de sistemas estocasticamente estabilizáveis (SS) e detectáveis (SD), conceitos estes que são equivalentes aos de sistemas estabilizáveis e detectáveis na média quadrática para o caso da cadeia de Markov tomando finitos valores (cf. [38]), mas, conforme veremos através de um contra-exemplo, não são equivalentes para o caso infinito. O problema do regulador ótimo quadrático para o caso da cadeia de Markov tomando valores em um estado de espaço finito havia sido analisado anteriormente por [51], utilizando o conceito de sistemas estocasticamente observáveis. Tal conceito, entretanto, não parece ser bastante intuitivo (cf. [51]) e a condição de observabilidade se afasta, aparentemente, da condição de detectabilidade conhecida para o caso linear tradicional. Mostra-se, também, no Capítulo 3, que para o caso do sistema com ruído, (SS) e (SD) garantem a existência e a unicidade de uma única medida de probabilidade para uma cadeia de Markov associada e conseqüentemente a existência de uma estratégia de controle ótimo estacionária.

Consideramos no Capítulo 4 os sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita. Neste caso, o sistema linear de dimensão infinita é corrompido não só por um ruído aditivo como também por um ruído que atua diretamente no estado do sistema de forma multiplicativa, vindo

daí, portanto, a denominação de bilinear estocástico. Ao considerarmos o problema com dimensão infinita incluímos na análise modelos com parâmetros distribuídos. Sistemas bilineares estocásticos têm sido analisados nas últimas duas décadas por diversos autores. Vários aspectos relacionados às propriedades estruturais de tais modelos vêm sendo estudados na literatura corrente onde podem ser encontradas não só questões fundamentais mas questões práticas e motivações teóricas para se considerar tal classe de sistema não-linear operando em um ambiente estocástico (veja por exemplo [13],[55],[71],[72]-para mais referências, vide [55]).

O Capítulo 4 discute o problema da estabilidade na média quadrática, o controle ótimo quadrático e o controle H_∞ de sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita. O problema da estabilidade de sistemas bilineares estocásticos de dimensão finita a tempo contínuo foram analisados em [9],[47],[48],[54] e [70] enquanto que o caso a tempo discreto foi estudado em [55] e [59]. Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos em [27] e [60], que generalizam os resultados de [55] e [59], para o caso de dimensão infinita. Condições necessárias e suficientes, em termos da existência de solução de uma equação tipo Lyapunov para que o raio espectral de um operador \mathcal{T} , associado à estabilidade na média quadrática do sistema, seja menor do que um, são obtidas, resultado este que se assemelha ao caso linear. Entretanto, para obter-se estabilidade na média quadrática, dois operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ precisam ter seus raios espectrais menores do que um, resultado este que mostra alguns dos cuidados que se devem tomar quando se faz a analogia entre os sistemas lineares e bilineares estocásticos de dimensão infinita. Para o caso de dimensão finita, pode-se mostrar que os raios espectrais dos dois operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ são iguais e, portanto, a analogia com os sistemas lineares é válida. Apresenta-se um contra-exemplo em dimensão infinita, onde estes dois operadores, de fato, não possuem o mesmo raio espectral e, portanto, a condição obtida não pode, em geral, ser simplificada. Cabe notar que esta discrepância entre os casos de dimensão finita e infinita é semelhante à encontrada no Capítulo 3 para a equivalência entre os conceitos de estabilidade estocástica e estabilidade na média quadrática para os casos da cadeia de Markov com dimensão finita e infinita.

O problema de controle ótimo quadrático de sistemas bilineares estocásticos de dimensão

infinita a tempo discreto foi analisado em [99],[100] e [101]. Baseado na teoria dos operadores \mathcal{F} e $\mathcal{F}^\#$ desenvolvida em [59] e [60], apresentamos no Capítulo 4 um resumo dos resultados obtidos em [28], onde se analisou este problema, e se obteve condições para a existência e unicidade de uma solução estabilizadora para uma equação tipo Riccati associada ao controle ótimo quadrático, em termos de hipóteses do sistema ser detectável e estabilizável, resultado similar ao caso linear. Note que a análise realizada em [99], [100] e [101] também obtém condições suficientes para a solução de uma equação algébrica tipo Riccati similar à analisada no Capítulo 4, mas estas condições são escritas em termos da invertibilidade de um operador associado aos parâmetros do modelo, portanto não se assemelham às condições usuais para o caso linear. O caso a tempo contínuo e dimensão finita foi analisado em [93]. Uma condição básica utilizada foi a de que o sistema era observável. Utilizando-se uma generalização dos conceitos de sistemas detectáveis na média quadrática e estabilizáveis na média quadrática para o caso bilinear estocástico conseguiu-se obter em [39] um enfraquecimento das hipóteses consideradas em [93]. Mostra-se, em particular, que o conceito de observabilidade pode ser substituído pelo de detectabilidade na média quadrática. Estes resultados, entretanto, não serão apresentados neste capítulo.

Um assunto que vem sendo amplamente explorado na última década desde o trabalho pioneiro de Zames [102] tem sido o de controle H_∞ . Apesar de o problema de H_∞ ter sido originalmente desenvolvido no domínio da frequência, recentemente tem se dado muita ênfase a métodos no domínio do tempo, baseados em equações algébricas de Riccati (cf. [2],[35],[84],[88]). O desenvolvimento teórico da técnica de jogos dinâmicos para o problema de projetos de controle ao pior caso de entrada possível, como alternativa às técnicas no domínio da frequência, possibilitou a solução do problema de atenuação de distúrbios para uma classe muito mais geral de sistemas. O problema de controle H_∞ de modelos lineares de dimensão infinita [53], de sistemas lineares de dimensão finita variantes no tempo com horizonte finito [2],[84],[88], e de sistemas não lineares [51] foi estudado através desta formulação. Este enfoque é utilizado no Capítulo 4 para o problema de controle H_∞ de sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita e se obteve uma solução para o problema em termos de uma

equação algébrica de operadores tipo Riccati, que generaliza o caso linear (cf. [2],[84]). Devido ao ambiente estocástico do sistema, faz-se necessário desenvolver uma formulação probabilística para o problema de H_∞ , o que é realizado neste capítulo.

Esta sistematização e apreciação crítica dos trabalhos é concluída no Capítulo 5, acrescidas de algumas considerações finais.

Capítulo 2 : Processos de Markov Determinísticos por Partes

2.1. Introdução

Os processos de Markov determinísticos por partes (PDP's) foram introduzidos na literatura internacional em [30] como uma classe geral de sistemas estocásticos não envolvendo difusão. Os PDP's formam uma família de processos de Markov que consistem de um movimento determinístico pontuado por saltos aleatórios. O seu movimento depende de três parâmetros locais que são o fluxo determinístico ϕ , a taxa de salto λ e a medida de transição Q , que especifica a localização do processo após o salto. Começando de um ponto x , o movimento do processo segue o fluxo determinístico $\phi(t,x)$ até que ocorra o primeiro instante de salto T_1 , de forma espontânea tipo exponencial com taxa $\lambda(\phi(t,x))$ ou quando o fluxo $\phi(t,x)$ atinge a fronteira do espaço de estado. Em ambos os casos a localização do processo no instante de salto T_1 é selecionada pela medida de transição $Q(\cdot; \phi(T_1,x))$ e o movimento recomeça a partir deste novo ponto, como antes. Portanto associado a um PDP temos uma cadeia de Markov a tempo discreto dada pela localização do processo após o salto. Uma escolha apropriada do espaço de estado e das características locais ϕ , λ e Q fornece modelos estocásticos que cobrem um grande número de problemas em pesquisa operacional (veja [30],[31]).

Grande variedade de exemplos mostram a importância dos problemas de controle impulsional na teoria de processos estocásticos; problemas de controle de estoque, alocação de recursos e manutenção ótima de sistemas são alguns exemplos. Em todos esses casos o controle é feito por intervenções, isto é, a decisão de agir é tomada em instantes discretos de tempo em resposta a evolução aleatória do sistema, e o processo é levado a um novo ponto no espaço de estado. Problemas desse tipo foram estudados inicialmente por Bensoussan and Lions [3], no contexto de processos de difusão, como uma aplicação de desigualdades variacionais e quase-variacionais, e mais tarde revistos em [4], [5]. Kushner [61],[62],[63] considerou problemas similares, aproximando a difusão por cadeias de Markov controladas. Em [65] Lepeltier e Marchal consideraram o problema de controle impulsional de "right

processes” sob condições bastante gerais, formulando o problema como uma sequência de problemas de parada ótima, um enfoque inicialmente proposto por Robin [77]. Controle impulsional para processos de Feller com o custo médio a longo prazo foram estudados em [78],[81]-[83]. Problemas envolvendo intervenções em “Markov decision drift processes” [32] podem ser vistos como controle impulsional e foram analisados em [49],[50] por aproximações a tempo discreto e em [97],[98] por dedução direta de condições de otimalidade.

Neste capítulo estudaremos o problema da existência e da unicidade de medidas estacionárias para PDP's e o problema de controle impulsional de PDP's com o critério do custo médio a longo prazo. Com relação às distribuições estacionárias, obteremos um mapeamento invertível que mostrará ser o problema da existência e da unicidade de uma medida estacionária para um PDP equivalente ao problema da existência e unicidade de uma medida estacionária de uma cadeia de Markov associada ao PDP (cf. [21]). A utilidade deste resultado é que poderemos usá-lo na obtenção de condições para a convergência de uma técnica iterativa de melhoria de políticas no problema de controle impulsional com o critério do custo médio a longo prazo (cf. [18]). Assumiremos uma hipótese simplificadora de que custo por impulso $c(x,y)$ pode ser escrito em uma forma separada do tipo $c(x) + d(y)$ e que não existam restrições para onde o processo pode ser enviado após um impulso. Esta hipótese implicará a possibilidade de nos concentrarmos apenas nas estratégias que sempre voltam ao mesmo ponto no espaço de estado após uma intervenção e que utilizam sempre o mesmo tempo de parada (portanto, o processo com intervenções será regenerativo). Finalmente, o capítulo será concluído estudando o caso mais geral do controle impulsional de PDP's com o critério do custo médio a longo prazo em que o custo por impulso é da forma geral $c(x,y)$ e existem restrições do tipo $\Gamma(x)$ para onde o processo pode ser enviado após um impulso ([19]). Métodos de discretização para ambos os casos, similares aos obtidos em [44],[16],[17], foram apresentados em [18],[20]. Entretanto, restringir-nos-emos aqui a apresentar resultados de caracterização da função custo e técnicas iterativas de melhoria de política de controle.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.2 apresentamos as definições e as

hipóteses mais gerais; na Seção 2.3 obtemos um mapeamento \mathcal{T} do conjunto de distribuições estacionárias para o PDP, denotado por Π_{PDP} , para o conjunto de distribuições estacionárias para uma cadeia de Markov associada ao PDP, denotada por Π_{MC} , bem como um mapeamento \mathcal{P} de Π_{MC} para Π_{PDP} . Além disto, mostramos que $\mathcal{P} = \mathcal{T}^{-1}$. Também apresentamos na Seção 2.3 condições suficientes para a existência de distribuições estacionárias para a cadeia de Markov a tempo discreto associada ao PDP e, portanto, para o PDP. Em geral, tais condições são mais fáceis de serem checadas do que aquelas para cadeias de Markov a tempo contínuo. Concluímos a Seção 2.3 apresentando uma aplicação para o problema de expansão de capacidade. Na Seção 2.4 colocamos o problema de controle impulsional de um PDP e na Seção 2.5 consideramos este problema com o critério do custo médio a longo prazo, assumindo que o custo por impulso $c(x,y)$ pode ser escrito na forma separada $c(x) + d(y)$ e que não haja restrições para onde o processo pode ser enviado após uma intervenção. Obtemos uma técnica iterativa que reduz o problema a uma sequência de problemas de parada ótima. O caso mais geral é analisado na Seção 2.6, onde o custo por impulso é da forma $c(x,y)$ e temos restrições do tipo $\Gamma(x)$ para onde o processo pode ser enviado após um impulso. São obtidos resultados que caracterizam a função custo. O capítulo é finalizado com a Seção 2.7, onde alguns comentários finais são apresentados.

2.2. Definições e hipóteses gerais

Para qualquer espaço de Borel \mathfrak{X} denotamos por $\sigma(\mathfrak{X})$ o campo de Borel gerado por \mathfrak{X} e por $B(\mathfrak{X})$ ($C(\mathfrak{X})$ respectivamente) o espaço de todas funções de Borel (contínuas) em \mathfrak{X} limitadas tomando valores reais. Por simplicidade de notação consideraremos um PDP tomando valores em E , um aberto de \mathbf{R}^d com fronteira ∂E e campo de Borel E . Entretanto, todos os resultados poderiam ser facilmente estendidos para o caso geral em que, como em [30], o espaço de estado é uma possível união contável de conjuntos abertos com diferentes dimensões. Consideraremos um PDP tomando valores em E e determinado pelos seguintes parâmetros:

- a) o fluxo $\phi(t,x)$ de um campo vetorial Lipschitziano \mathcal{L} (cf. [30]),
- b) a taxa de salto $\lambda(\cdot) : E \rightarrow \mathbf{R}_+$,

c) a medida de transição $Q(\cdot, \cdot): Ex(E \cup \partial^*E) \rightarrow [0,1]$ onde

$$\partial^*E := \{ z \in \partial E; \phi(-t, z) \in E \text{ para todo } t \in (0, \epsilon) \text{ e algum } \epsilon > 0 \}.$$

Note que ∂^*E representa aqueles pontos na fronteira ∂E onde o fluxo ϕ sai de E . Definimos

$$t^*(x) := \inf \{ t > 0; \phi(t, x) \in \partial^*E \}$$

para todo $x \in E$. As hipóteses gerais sobre o PDP, que denotaremos por (X_t) , são como em Davis [30].

Além daquelas hipóteses também assumimos que λ é limitado. O movimento do processo (X_t) começando de x é construído da forma seguinte. Selecione uma variável aleatória T_1 tal que:

$$P(T_1 > t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(\phi(s, x)) ds\right) & , t < t^*(x) \\ 0 & , t \geq t^*(x) \end{cases}$$

Escolha agora independentemente uma variável aleatória tomando valores em E com função distribuição de probabilidade $Q(\cdot; \phi(T_1, x))$. A trajetória de X_t para $t \leq T_1$ é dada por

$$X_t = \begin{cases} \phi(t, x) & , t < T_1 \\ Z_1 & , t = T_1 \end{cases}$$

Começando de $X_{T_1} = Z_1$ selecionamos o próximo tempo de salto $T_2 - T_1$ e a próxima localização após salto $X_{T_2} = Z_2$ de forma similar. Isto nos fornece uma trajetória determinística por partes para o processo (X_t) com instantes de saltos T_1, T_2, \dots e posição após saltos Z_1, Z_2, \dots . É conveniente escrever $T_0 = 0$ e $Z_0 = x$ (o ponto inicial).

Seja Ω o espaço de todas as funções tomando valores em E , contínuas à direita, e com limite à esquerda em \mathbf{R}_+ , $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. Denotaremos por P_μ (P_x respectivamente) a lei de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) de um PDP com medida de probabilidade inicial μ (começando de x). Assumimos que a sequência de saltos T_1, T_2, \dots satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ P_μ - a.s. (almost surely).

Para $x \in E$ definimos:

i) $Qv(x) := \int_E v(y)Q(dy; x)$ onde $v \in B(E)$,

ii) $\Lambda(t, x) := \int_0^t \lambda(\phi(s, x)) ds$ onde $0 \leq t \leq t^*(x)$.

e assumimos que $\Lambda(t^*(x), x) = \infty$ sempre que $t^*(x) = \infty$.

Associado a um PDP temos uma cadeia de Markov $\{Z_i\}_{i=0}^{\infty}$, onde Z_0 é o ponto inicial, com medida de transição $\mathbb{Q}(\cdot; \cdot) : E \times E \cup \partial^*E \rightarrow [0,1]$ dada por:

$$\mathbb{Q}(A; x) = P_x(Z_1 \in A) = \int_0^{t^*(x)} \mathbb{Q}(A; \phi(s, x)) \lambda(\phi(s, x)) e^{-\Lambda(s, x)} ds + \mathbb{Q}(A; \phi(t^*(x), x)) e^{-\Lambda(t^*(x), x)}$$

Finalmente diremos que $f \in B^{ac}(E)$ ($B^c(E)$ respectivamente) se $f \in B(E)$ é tal que $f(\phi(\cdot, x)) : [0, t^*(x)] \rightarrow \mathbf{R}$ é absolutamente contínua (contínua) e $f(\phi(t^*(x), x)) = \lim_{t \rightarrow t^*(x)} f(\phi(t, x))$ existe sempre que $t^*(x) < \infty$.

2.3. Distribuições estacionárias de probabilidade

2.3.1. O operador \mathcal{T} de Π_{PDP} para Π_{MC}

Definiremos abaixo o operador \mathcal{T} de Π_{PDP} (o conjunto de todas as distribuições estacionárias para o PDP) para Π_{MC} (o conjunto de todas as medidas estacionárias para a cadeia de Markov associada ao PDP). Mas inicialmente apresentaremos algumas definições e resultados auxiliares matemáticos.

Definiremos $E_1 := \{x \in E; t^*(x) < \infty\}$ e $E_2 := \{x \in E; t^*(x) = \infty\}$. Da continuidade de $\phi(\cdot, \cdot)$ em $\mathbf{R}_+ \times E$ temos que para todo $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\begin{aligned} \{x \in E; t^*(x) > t\} &= \{x \in E; \phi(r, x) \in E \text{ for all } 0 \leq r \leq t\} \\ &= \bigcap_{\substack{r_i \text{ racional} \\ 0 \leq r_i \leq t}} \{x \in E; \phi(r_i, x) \in E\} \in E \end{aligned}$$

e é claro que $t^*(\cdot)$ é uma função de Borel em E ; portanto $E_i \in E$, $i = 1, 2$. Para $z \in \partial^*E$ definimos $s^*(z) = \inf \{t > 0; \phi(-t, z) \notin E\}$. Note que $s^*(z)$ representa o tempo que o fluxo leva para sair de E se começa de z e move-se para trás no tempo. Novamente pela continuidade de $\phi(\cdot, \cdot)$ temos que

$$\begin{aligned} \partial^*E &= \{z \in \partial E; \phi(-t, z) \in E \text{ para todo } t \in (0, \epsilon), \text{ algum } \epsilon > 0\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \{z \in \partial E; \phi(-\frac{1}{n}, z) \in E\} \in \sigma(\partial E) \end{aligned}$$

é um conjunto de Borel de \mathbf{R}^d e usando os mesmos argumentos como acima, podemos mostrar que $s^*(\cdot)$ é uma função de Borel em ∂^*E . Segue que $\mathcal{C} := \{(s, z); z \in \partial^*E, 0 \leq s < s^*(z)\}$ é um conjunto de Borel

em \mathbf{R}^{d+1} . Para qualquer medida de probabilidade μ_1 em $(E_1, \sigma(E_1))$ e função $F: E_1 \rightarrow \mathcal{C}$ dada por $F(x) = (t^*(x), \phi(t^*(x), x))$ podemos definir uma medida de probabilidade $\mu_1 F^{-1}$ em $(\mathcal{C}, \sigma(\mathcal{C}))$ da forma usual, isto é,

$$\mu_1 F^{-1}(C) = \mu_1(F^{-1}(C)) \quad , \quad C \in \sigma(\mathcal{C}) \quad .$$

Seja $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, $\mathcal{Y} \in \mathbf{R}_+$, $\mathcal{Z} \in \partial^* E$, uma variável aleatória em $(\mathcal{C}, \sigma(\mathcal{C}), \mu_1 F^{-1})$. Do Teorema 4.30 de Breiman [11] podemos encontrar $L_{\mu_1 F^{-1}}(s, \mathcal{Z})$ que seja uma distribuição condicional regular de \mathcal{Y} dado \mathcal{Z} . Definindo $\zeta_{\mu_1 F^{-1}}(\cdot)$ em $\sigma(\partial^* E)$ como a medida de probabilidade de \mathcal{Z} , é claro que para qualquer $f \in B(E_1)$,

$$\int_{E_1} f(x) \mu_1(dx) = \int_{\partial^* E} \int_0^{s^*(z)} f(F^{-1}(s, z)) L_{\mu_1 F^{-1}}(ds, z) \zeta_{\mu_1 F^{-1}}(dz) \quad (2.1)$$

Obteremos agora alguns resultados de convergência envolvendo o tempo local gasto pelo PDP perto da fronteira. Defina para $\omega \in \Omega$ (veja também Davis [30], p. 364)

$$p_t^*(\omega) = \sum_{T_i \leq t} 1_{\{\partial^* E\}}(X_{T_i}(\omega)) \quad (2.2)$$

Portanto $p_t^*(\omega)$ conta o número de saltos dados da fronteira. Para $h > 0$ defina $\partial_h^* E := \{x \in E; x = \phi(-s, z), z \in \partial^* E, 0 < s < h \wedge s^*(z)\}$. Temos os seguintes resultados.

Proposição 2.1 : Para todo $G \in B(E \cup \partial^* E)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_0^t \frac{1}{h} G(\phi(t^*(X_s), X_s)) 1_{\partial_h^* E}(X_s) ds \right\} = \int_0^t G(X_{s^-}) dp_s^* \quad P_\mu - \text{a.s.}$$

$$e \quad E_\mu \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_0^t \frac{1}{h} G(\phi(t^*(X_s), X_s)) 1_{\partial_h^* E}(X_s) ds \right\} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_0^t E_\mu \left(\frac{1}{h} G(\phi(t^*(X_s), X_s)) 1_{\partial_h^* E}(X_s) ds \right) \right\}. \quad (2.3)$$

Prova : A primeira parte é uma consequência imediata da hipótese de que existe no máximo um número finito de saltos P_μ -a.s. em qualquer intervalo finito. Para a segunda parte, note que

$$\int_0^t \frac{1}{h} 1_{\{\partial_h^* E\}}(X_s) ds \leq \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{[0, t]\}}(T_i) + 1$$

e por hipótese, $E_\mu \left(\sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{ [0,t] \}}(T_i) \right) < \infty$. Portanto de (2.3) segue do Teorema da Convergência Dominante e do Teorema de Fubini. \square

Se $\mu \in \Pi_{\text{PDP}}$ então, definindo $\mu_1(\cdot) = \frac{\mu(\cdot)}{\mu(E_1)}$ se $\mu(E_1) \neq 0$, 0 ao contrário, obtemos de (2.1) e (2.3) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{\partial^* E} \frac{1}{h} G(z) L_{\mu_1 F^{-1}}(h,z) \zeta_{\mu_1 F^{-1}}(dz) \right) \mu(E_1) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_E \frac{1}{h} G(\phi(t^*(x),x)) 1_{\partial^* E}(x) \mu(dx) \right\} = E_\mu \left(\frac{1}{t} \int_0^t G(X_{s^-}) dp_s^* \right), \forall t > 0 \quad (2.4)$$

A partir de agora omitiremos o subscrito $\mu_1 F^{-1}$ de $L_{\mu_1 F^{-1}}$ e $\zeta_{\mu_1 F^{-1}}$ por simplicidade notacional. Como (2.4) é verdade para todo $G \in B(E \cup \partial^* E)$, o seguinte resultado pode ser facilmente estabelecido pelo Teorema de Random-Nikodym.

Proposição 2.2 : Existe $l(\cdot) : \partial^* E \rightarrow \mathbf{R}_+$ Borel mensurável tal que para todo $G \in B(\partial^* E)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{\partial^* E} \frac{1}{h} G(z) L(h,z) \zeta(dz) \right) = \int_{\partial^* E} G(z) l(z) \zeta(dz) \quad (2.5.a)$$

e portanto

$$E_\mu \left(\frac{1}{t} \int_0^t G(X_{s^-}) dp_s^* \right) = \int_{\partial^* E} G(z) l(z) \zeta(dz) \mu(E_1) \quad \forall t > 0 \quad (2.5.b)$$

As próximas definições e Proposição 2.3 abaixo são de Davis [30]. Para $A \in E$, $t \in \mathbf{R}_+$, $g \in B(\mathbf{R}_+ \times E \times \Omega)$, $f \in B(E \cup \partial^* E)$ defina

$$p(t,A) := \sum_{T_i \leq t} 1_A(X_{T_i}) \quad (\text{conta o número de saltos em } A)$$

$$\tilde{p}(t,A) := \int_0^t Q(A; X_s) \lambda(X_s) ds + \int_0^t Q(A; X_{s^-}) dp_s^* \quad (\text{relembre definição de } p_s^* \text{ em (2.2)})$$

$$q(t,A) := p(t,A) - \tilde{p}(t,A)$$

$$M_t^g := \int_0^t \int_E g(s,z,\omega) q(ds,dz) = \int_0^t \int_E g(s,z,\omega) p(ds,dz) - \int_0^t \int_E g(s,z,\omega) \tilde{p}(ds,dz)$$

$$\beta f(s,z,\omega) := f(z) - f(X_{s^-})$$

Proposição 2.3 : M_t^β é um \mathcal{F}_t -martingale e se $f \in B^{ac}(E)$ então

$$M_t^{\beta f} = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_s) ds - \int_0^t \mathfrak{B}f(X_{s-}) dp_s^* \quad (2.6.a)$$

onde

$$\mathfrak{K}f(x) = \left. \frac{d f(\phi(s,x))}{ds} \right|_{s=0} \quad (\text{lembre-se que } f \in B^{ac}(E))$$

$$\mathcal{A}f(x) = \mathfrak{K}f(x) + \lambda(x) \int_E (f(y) - f(x)) Q(dy; x) \quad (2.6.b)$$

$$\mathfrak{B}f(z) = \int_E (f(y) - f(z)) Q(dy; z).$$

A partir dos resultados acima, obtemos a próxima proposição.

Proposição 2.4 : Se $\mu \in \Pi_{PDP}$ e $f \in B^{ac}(E)$ então

$$\int_E \mathcal{A}f(x) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} \mathfrak{B}f(z) l(z) \zeta(dz) \mu(E_1) = 0 \quad (2.7)$$

Prova : Como $M_t^{\beta f}$ é um martingale, $E_\mu(M_t^{\beta f}) = 0, \forall t \in \mathbf{R}_+$. Portanto (2.7) segue após pegarmos o valor esperado de (6.a) e usarmos a estacionariedade de X_t , Teorema de Fubini e (2.5.b). \square

Podemos agora partir para a principal parte desta sub-seção que é a construção do operador \mathcal{T} de Π_{PDP} para Π_{MC} . Primeiro mostraremos que:

Proposição 2.5 : Se $\mu \in \Pi_{PDP}$ então

$$\int_E \lambda(x) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) \zeta(dz) \mu(E_1) > 0 \quad (2.8)$$

Prova : Suponha que o lado esquerdo de (2.8) seja zero. Então da estacionariedade do processo, Teorema de Fubini e (2.5.b),

$$E_\mu \left(\int_0^\infty \lambda(X_s) ds + \int_0^\infty dp_s^* \right) = 0.$$

Logo

$$\int_0^\infty \lambda(X_s) ds = 0 \text{ e } \int_0^\infty dp_s^* = 0 \quad P_\mu \text{ a.s.}$$

e portanto com probabilidade 1 não haverá nenhum salto, o que contraria a hipótese de que $e^{-\Lambda(t^*(x),x)} = 0$ sempre que $t^*(x) = \infty$. \square

Defina $\Pi_{\text{PDP}}^* = \left\{ \mu \in \Pi_{\text{PDP}} ; \int_E \lambda(x) \mu(dx) < \infty \right\}$. Temos que:

Teorem 2.1 : Para todo $\mu \in \Pi_{\text{PDP}}^*$

$$\mathcal{T}\mu(\cdot) := \frac{\int_E \lambda(x) Q(\cdot; x) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) Q(\cdot; z) \zeta(dz) \mu(E_1)}{\int_E \lambda(x) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) \zeta(dz) \mu(E_1)} \quad (2.9)$$

pertence a Π_{MC} .

Prova : Para qualquer $A \in E$ é fácil verificar a partir da propriedade de semi-grupo do fluxo $\phi(t,x)$, que

$$Q(A; \phi(t,x)) = e^{\Lambda(t,x)} \left(Q(A; x) - \int_0^t Q(A; \phi(s,x)) \lambda(\phi(s,x)) e^{-\Lambda(s,x)} ds \right)$$

Portanto $Q(A; \cdot) \in B^{\text{ac}}(E)$, $\mathcal{K}Q(A; x) = \lambda(x) (Q(A;x) - Q(A;x))$, e

$$\mathcal{A}Q(A; x) = \lambda(x) \left(\int_E (Q(A; y) - Q(A; x)) Q(dy; x) \right)$$

De (2.7) temos que

$$\int_E \lambda(x) \left(\int_E Q(A; y) Q(dy; x) \right) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) \left(\int_E Q(A; y) Q(dy; z) \right) \zeta(dz) \mu(E_1) =$$

$$\int_E \lambda(x) Q(A; x) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) Q(A; z) \zeta(dz) \mu(E_1)$$

e como $Q(A;z) = Q(A;z)$ para todo $z \in \partial^* E$, é imediato verificar que

$$\int_E Q(A; x) \mathcal{T}\mu(dx) = \mathcal{T}\mu(A)$$

o que completa a prova. \square

Observação 2.1 : Se λ é limitada superiormente, é claro que $\Pi_{\text{PDP}}^* = \Pi_{\text{PDP}}$.

Exemplo 2.1 : Considere uma fila tipo M/M/1 com taxa de chegada λ e tempo de serviço β . O espaço de estado neste caso é $E = \{\Delta\} \cup (0, \infty)$ onde Δ denota a fila vazia e X_t é o tempo de espera virtual, isto é, o tempo que um cliente chegando no instante t teria de esperar pelo serviço. Sabe-se que se

$\frac{\lambda}{\beta} < 1$ então (cf. Asmussen [1] p. 96) $\mu(\{\Delta\}) = 1 - \frac{\lambda}{\beta}$, $\mu((0,a)) = \frac{\lambda}{\beta} (1 - e^{-(\beta - \lambda)a})$ para todo $a \in \mathbf{R}_+$. Portanto neste caso temos que $\zeta(x) = 1_{\{0\}}(x)$, $\mu(E_1) = \frac{\lambda}{\beta}$ e $l(0) = (1 - \frac{\lambda}{\beta})\beta$. Realizando os cálculos, temos que o denominador de (2.9) é igual a $\lambda + \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\beta}\right)$, o numerador para o conjunto $\{\Delta\}$ é igual a $\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\beta}\right)e$, para o conjunto $\{(0,a)\}$, é igual a $\lambda \left(1 - e^{-(\beta - \lambda)a}\right)$. Portanto obtemos que $\mathcal{T}\mu(\{\Delta\}) = \frac{\beta - \lambda}{2\beta - \lambda}$, $\mathcal{T}\mu((0,a)) = \frac{\beta}{2\beta - \lambda} (1 - e^{-(\beta - \lambda)a})$ para todo $a \in \mathbf{R}_+$.

2.3.2. O operador \mathcal{P} de Π_{MC} para Π_{PDP}

Defina

$$\Pi_{MC}^* = \left\{ \pi \in \Pi_{MC}; \int_E \int_0^{t^*(x)} e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi(dx) < \infty \right\}$$

e

$$\mathbf{B} = \left\{ (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times E; 0 \leq t < t^*(x), x \in E \right\} \in \sigma(\mathbf{R}^{d+1}).$$

Para $\pi \in \Pi_{MC}^*$ definimos uma medida ν_π em $\sigma(\mathbf{B})$ da seguinte forma; para qualquer conjunto $A \in E$ e funções de Borel $t_1(\cdot), t_2(\cdot)$ de E para $[0, \infty]$ com $t_1(x) < t_2(x) \leq t^*(x)$ para todo $x \in E$, defina

$$B_A^{t_1, t_2} = \left\{ (t,x) \in \mathbf{B}; t_1(x) \leq t < t_2(x), x \in A \right\} \quad (2.10)$$

$$\nu_\pi(B_A^{t_1, t_2}) = \frac{\int_A \int_{t_1(x)}^{t_2(x)} e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi(dx)}{\int_E \int_0^{t^*(x)} e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi(dx)}. \quad (2.11)$$

É fácil verificar que $\nu_\pi(\cdot)$ pode ser unicamente estendida para $\sigma(\mathbf{B})$ e portanto o mapeamento de Borel

$\phi(\cdot, \cdot) : (\mathbf{B}, \sigma(\mathbf{B})) \rightarrow (E, E)$ e a medida $\nu_\pi(\cdot)$ em $\sigma(\mathbf{B})$ define uma medida $\nu_\pi \phi^{-1}(\cdot)$ em E dada por:

$\nu_\pi \phi^{-1}(A) := \nu_\pi(\phi^{-1}(A))$ para todo $A \in E$. Destes fatos temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2 : Para todo $\pi \in \Pi_{MC}^*$, $\mathcal{P}\pi(\cdot) = \nu_\pi \phi^{-1}(\cdot)$ pertence a Π_{PDP} .

Prova : De (2.11) é fácil verificar que para qualquer $g \in B(E)$,

$$\int_E g(x) \mathcal{P}\pi(dx) = \frac{\int_E \int_0^{t^*(x)} g(\phi(t,x)) e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi(dx)}{\int_E \int_0^{t^*(x)} e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi(dx)}. \quad (2.12)$$

Em [30], Davis obteve uma caracterização para o gerador estendido de um PDP. A partir destes resultados temos que o gerador forte de um PDP é dado por $\mathcal{A}f(\cdot)$ definido por (2.6.b) acima onde f pertence ao domínio

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \{ f \in B^{ac}(E) ; f(z) = \int_E f(y) Q(dy ; z) , \forall z \in \partial^*E \}.$$

Se mostrarmos que

$$\int_E \mathcal{A}f(x) \mathfrak{P}\pi(dx) = 0 \text{ para todo } f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$$

então da Proposição 9.2 de Ethier e Kurtz [37] temos que $\mathfrak{P}\pi \in \Pi_{PDP}$. Portanto seja $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $x \in E$ e relembre a definição $Qf(x) = \int_E f(y) Q(dy;x)$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*(x)} \mathcal{A}f(\phi(t,x)) e^{-\Lambda(t,x)} dt &= \int_0^{t^*(x)} \left(\frac{d f(\phi(t,x))}{dt} - \lambda(\phi(t,x)) f(\phi(t,x)) \right) e^{-\Lambda(t,x)} dt + \\ &\int_0^{t^*(x)} Qf(\phi(t,x)) \lambda(\phi(t,x)) e^{-\Lambda(t,x)} dt = \\ f(\phi(t^*(x),x)) e^{-\Lambda(t^*(x),x)} - f(x) &+ \int_0^{t^*(x)} Qf(\phi(t,x)) \lambda(\phi(t,x)) e^{-\Lambda(t,x)} dt \end{aligned}$$

Mas como $f(\phi(t^*(x),x)) = Qf(\phi(t^*(x),x))$ é claro que

$$\int_0^{t^*(x)} \mathcal{A}f(\phi(t,x)) e^{-\Lambda(t,x)} dt = E_x(f(Z_1)) - f(x)$$

e de (2.12),

$$\int_E \mathcal{A}f(x) \mathfrak{P}\pi(dx) = \frac{\int_E \left(E_x(f(Z_1)) - f(x) \right) \pi(dx)}{\int_E \int_0^{t^*(x)} e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi(dx)} = 0$$

já que $\pi(\cdot)$ é uma distribuição estacionária para a cadeia de Markov $\{Z_i\}$. □

Observação 2.2 : Se $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x)$ para todo $x \in E_2$ e $t^*(x) \leq t_{\max}^*$ para todo $x \in E_1$ então pode-se mostrar facilmente que $\Pi_{MC}^* = \Pi_{MC}$.

Exemplo 2.2 : Seja $E = [0,1)$, $\lambda(x) = \lambda \geq 0$, $\phi(t,x) = x + t$ para todo $x \in E$, $t < 1 - x$ e $Q([0,a];x) = a$ para $x \in [0,1]$ e $0 \leq a \leq 1$. Neste caso é fácil verificar que $\pi([0,a]) = a$ é a única distribuição estacionária para a cadeia de Markov $\{Z_i\}$. Do Teorema 2.2 temos que

$$\mu([0,a]) = \begin{cases} \frac{\lambda a + e^{-\lambda a} - 1}{\lambda + e^{-\lambda} - 1} & , \text{ se } \lambda > 0 \\ a^2 & , \text{ se } \lambda = 0 \end{cases}$$

Observação 2.3 : Considere o exemplo acima com $\lambda = 0$ e $Q(\{0\};1) = 1$. Portanto começando de $\{0\}$ temos que a cadeia de Markov é estacionária ($Z_n = 0$ para todo n) mas o PDP não. Logo temos que, em geral, estacionariedade da cadeia de Markov não implica em estacionariedade do PDP. O reverso não é verdade também. Realmente considere exemplo 2.1 com distribuição inicial μ conforme definido acima. Então o PDP é estacionário mas é fácil verificar que a cadeia de Markov não o é.

2.3.3. A inversa do operador \mathcal{T}

Mostraremos nesta sub-seção que $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{P}$. Assumimos que $\lambda(x) \leq \lambda_{\max}$ para todo $x \in E$, $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(x)$ para todo $x \in E_2$ e $t^*(x) \leq t_{\max}^*$ para todo $x \in E_1$. Logo $\Pi_{\text{PDP}}^* = \Pi_{\text{PDP}}$ e $\Pi_{\text{MC}}^* = \Pi_{\text{MC}}$.

Teorema 2.3 : a) $\mathcal{P}\mathcal{T} = I$ (= identidade) e b) $\mathcal{T}\mathcal{P} = I$.

Prova : a) Seja $\mu \in \Pi_{\text{PDP}}$ e $f \in B^{ac}(E)$. De (2.7) temos que

$$\int_E \lambda(x) \left(\int_E f(y) Q(dy; x) \right) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) \left(\int_E f(y) Q(dy; z) \right) \zeta(dz) \mu(E_1) =$$

$$\int_E \left(\lambda(x) f(x) - \mathfrak{K}f(x) \right) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) f(z) \zeta(dz) \mu(E_1)$$

ou, em outras palavras,

$$\int_E f(x) \mathcal{T} \mu(dx) = \left\{ \int_E \left(\lambda(x) f(x) - \mathfrak{K}f(x) \right) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) f(z) \zeta(dz) \mu(E_1) \right\} / c_1 \quad (2.13)$$

onde

$$c_1 = \int_E \lambda(x) \mu(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) \zeta(dz) \mu(E_1) .$$

Para qualquer função $g \in B(E)$ e todo $x \in E$, seja

$$f_g(x) := \int_0^{t^*(x)} g(\phi(t,x)) e^{-\Lambda(t,x)} dt$$

A partir das propriedades de semi-grupo de $\phi(.,.)$ segue que

$$f_g(\phi(t,x)) = e^{\Lambda(t,x)} \left(f_g(x) - \int_0^t g(\phi(s,x)) e^{-\Lambda(s,x)} ds \right)$$

e portanto $f_g \in B^{ac}(E)$. Mais ainda,

$$f_g(\phi(t^*(x),x)) = \lim_{t \rightarrow t^*(x)} f_g(\phi(t,x)) = 0 \text{ para todo } x \in E_1 \quad (2.14)$$

e

$$\mathfrak{K}f_g(x) = \lambda(x) f_g(x) - g(x). \quad (2.15)$$

Denotando por I a função $I(x) = 1$ para todo $x \in E$ temos de (2.12) que

$$\int_E g(x) \mathfrak{P}\mathfrak{T}\mu(dx) = \frac{\int_E f_g(x) \mathfrak{T}\mu(dx)}{\int_E f_I(x) \mathfrak{T}\mu(dx)}. \quad (2.16)$$

Portanto de (2.13) com $f = f_g$ ($f = f_I$ respectivamente), (2.14) e (2.15) tem-se que

$$\int_E f_g(x) \mathfrak{T}\mu(dx) = \left(\int_E g(x) \mu(dx) \right) / c_1$$

$$\int_E f_I(x) \mathfrak{T}\mu(dx) = \left(\int_E 1 \mu(dx) \right) / c_1 = 1 / c_1$$

e de (2.16), $\int_E g(x) \mathfrak{P}\mathfrak{T}\mu(dx) = \int_E g(x) \mu(dx)$ para todo $g \in B(E)$, o que prova a).

b) Vamos mostrar agora que $\mathfrak{T}\mathfrak{P} = I$. Seja $\pi \in \Pi_{MC}$ e defina

$$c_2 = \int_E \int_0^{t^*(x)} e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi(dx).$$

Para qualquer $G \in B(\partial^*E)$ temos de (2.5.a), (2.4) e (2.12) que

$$\int_{\partial^*E} I(z) G(z) \zeta(dz) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_E \frac{1}{h} G(\phi(t^*(x),x)) 1_{\partial_h^*E}(x) \mathfrak{P}\pi(dx) \right\} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{c_2} \left\{ \int_E \frac{1}{h} \left(\int_0^{t^*(x)} G(\phi(t^*(\phi(s,x)), \phi(s,x))) e^{-\Lambda(s,x)} 1_{\partial_h^* E}(\phi(s,x)) ds \right) \pi(dx) \right\} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{c_2} \left\{ \int_E \frac{1}{h} G(\phi(t^*(x), x)) \left(\int_{(t^*(x)-h)^+}^{t^*(x)} e^{-\Lambda(s,x)} ds \right) \pi(dx) \right\} =$$

$$\frac{1}{c_2} \left\{ \int_E G(\phi(t^*(x), x)) e^{-\Lambda(t^*(x), x)} \pi(dx) \right\} \quad (2.17)$$

onde a última igualdade segue do Teorema de Convergência Dominante. De (2.12), (2.17) e estacionariedade de π temos que para qualquer $A \in E$,

$$\int_E \lambda(x) Q(A; x) \mathcal{P}\pi(dx) + \int_{\partial^* E} l(z) Q(A; z) \zeta(dz) \mathcal{P}\pi(E_1) =$$

$$\frac{1}{c_2} \left\{ \int_E \left(\int_0^{t^*(x)} Q(A; \phi(s,x)) \lambda(\phi(s,x)) e^{-\Lambda(s,x)} ds + Q(A; \phi(t^*(x), x)) e^{-\Lambda(t^*(x), x)} \right) \pi(dx) \right\} =$$

$$\frac{1}{c_2} \left\{ \int_E Q(A; x) \pi(dx) \right\} = \frac{\pi(A)}{c_2}$$

e segue de (2.9) que $\mathcal{T}\mathcal{P}\pi(A) = \pi(A)$ para todo $A \in E$. \square

Observação 2.4 : Note que sob as condições enunciadas no começo desta sub-seção, segue do Teorema 2.3 que o problema da existência e unicidade de distribuição estacionária para um PDP é equivalente ao problema da existência e unicidade de distribuição estacionária para a cadeia de Markov associada ao PDP.

2.3.4. Condições suficientes para a existência e unicidade de uma distribuição estacionária

Em [90] Tweedie obteve algumas condições suficientes para a existência e unicidade de uma distribuição estacionária para cadeias de Markov em espaços de estado gerais. Reproduziremos abaixo o resultado que desejamos usar de [90]. Uma cadeia $\{Z_i\}$ é φ -irreduzível se para alguma medida não trivial σ -finita φ em E temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} P_x(Z_n \in A) > 0 \text{ para todo } x \in E \text{ sempre que } \varphi(A) > 0$$

e diremos que $Q(\cdot, \cdot)$ é fortemente contínuo se $Q(A; \cdot)$ é contínuo em E para todo $A \in E$.

Proposição 2.6 (Tweedie [90], Teorema 4.2) : Seja $\{Z_i\}$ uma cadeia de Markov φ -irreduzível em (E, E) .

Se $Q(\cdot, \cdot)$ é fortemente contínuo uma condição suficiente para a existência de uma distribuição estacionária para a cadeia de Markov é que exista um conjunto compacto $\Gamma \subset E$, $\varphi(\Gamma) > 0$, e uma função não negativa g em E tal que

$$\text{i) } \int_E g(y) Q(dy; x) \leq g(x) - \epsilon, \quad x \notin \Gamma, \text{ algum } \epsilon > 0.$$

$$\text{ii) } \int_E g(y) Q(dy; x) \leq B < \infty, \quad x \in \Gamma, \text{ algum } B > 0.$$

A próxima proposição fornece condições suficientes para a continuidade forte de $Q(\cdot, \cdot)$, e segue facilmente da definição de $Q(\cdot, \cdot)$.

Proposição 2.7 : Se

a) $t^*(\cdot) : E \rightarrow [0, \infty]$ é contínua,

b) $\lambda(\phi(\cdot, y)) \rightarrow \lambda(\phi(\cdot, x))$ quando $y \rightarrow x$ Lebesgue-a.s. em $[0, t^*(x))$

c) para todo $A \in E$

c.1) $Q(A; \phi(\cdot, y)) \rightarrow Q(A; \phi(\cdot, x))$ quando $y \rightarrow x$ Lebesgue-a.s. em $[0, t^*(x))$

c.2) $Q(A; y) \rightarrow Q(A; z)$ quando $y \rightarrow z$ para todo $z \in \partial^* E$

então $Q(\cdot, \cdot)$ é fortemente contínuo.

2.3.5. Uma aplicação para expansão de capacidade

Nesta sub-seção consideraremos o modelo de expansão de capacidade (cf. [32] para uma descrição mais completa e detalhada do modelo). O modelo de um determinado serviço é modelado como um processo pontual, isto é, cresce em uma unidade a instantes aleatórios. Esta demanda é satisfeita pela construção de projetos de expansão idênticos. Cada projeto satisfaz k unidades de demanda quando completado. Assumimos que se existe um excesso de demanda de pelo menos p

unidades então a construção de um novo projeto é iniciada a uma taxa de 1 por unidade de tempo e é completado após um tempo fixo L ; se o excesso de demanda é menor do que p então nenhuma construção é iniciada. Também assumimos que uma nova demanda ocorre com taxa $\lambda_i > 0$, onde i corresponde ao nível presente de excesso de demanda (veja a figura 2.1 abaixo). Este problema pode ser modelado como um PDP com espaço de estado $E = \{ \{p-k, \dots, p-1\} \times \{0\} \} \cup \{ \mathbb{N}_p \times [0, L] \}$ onde \mathbb{N}_j denota o conjunto de inteiros maiores ou iguais a j . Para $(i, x) \in E$ temos que

$$a) \lambda(i, x) = \lambda_i$$

$$b) \phi(t, (i, x)) = \begin{cases} (i, 0) & \text{se } i \in \{p-k, \dots, p-1\} \text{ e } x = 0 \\ (i, x+t) & \text{se } i \geq p, x < L, t < L-x \end{cases}$$

$$c) Q((i+1, x); (i, x)) = 1$$

$$Q((i-k, 0); (i, L)) = 1$$

É fácil verificar que para este modelo as condições da Proposição 2.7 são satisfeitas e que $\{Z_i\}$ é φ -irreduzível com φ a medida produto da medida de contagem com a medida de Lebesgue.

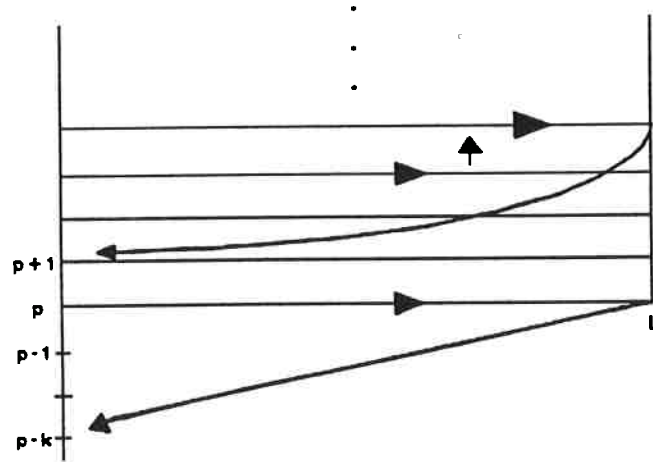


Figura 2.1 : Expansão de capacidade com $k = 3$

Proposição 2.8 : Se $\limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda_i < \frac{k}{L}$ então existe uma única distribuição estacionária para o modelo acima.

Prova : Se $\limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda_i < \frac{k}{L}$ então podemos achar $N \geq p$, $\epsilon' > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\lambda_i \leq \delta \leq \frac{k - \epsilon'}{L} \quad \text{para todo } i > N$$

Para $(i,x) \in \{p-k, \dots, p-1\} \times \{0\} \cup \mathbb{N}_p \times [0,L]$ defina $g(i,x) = i + \delta(L-x)$. Então notando que

$$\mathcal{Q}((i+1, [x, x+a]); (i, x)) = 1 - e^{-\lambda_i a}, \quad (i,x) \in \mathbb{N}_p \times [0,L], \quad a \leq L-x$$

$$\mathcal{Q}((i-k, 0); (i, x)) = e^{-\lambda_i(L-x)}, \quad (i,x) \in \mathbb{N}_p \times [0,L]$$

$$\mathcal{Q}((i+1, 0); (i, 0)) = 1, \quad i < p$$

é fácil verificar que

$$\int_E g(y) \mathcal{Q}(dy; (i,x)) \leq i+1 + \delta L \leq N+1 + \delta L$$

para todo (i,x) no compacto $\Gamma = \{\{p-k, \dots, p-1\} \times \{0\}\} \cup \{\{p, \dots, N\} \times [0,L]\}$. Agora para (i,x) em

$$\mathbb{N}_{N+1} \times [0,L] = \Gamma^c$$

$$\begin{aligned} \int_E (g(y) - g(i,x)) \mathcal{Q}(dy; (i,x)) &= \int_0^{L-x} (1 - \delta a) \lambda_i e^{-\lambda_i a} da + (\delta x - k) e^{-\lambda_i(L-x)} \\ &= \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_i}\right) (1 - e^{-\lambda_i(L-x)}) + (\delta L - k) e^{-\lambda_i(L-x)} \\ &\leq (\delta L - k) e^{-\lambda_i(L-x)} \leq -\epsilon' e^{-\lambda_i(L-x)} \leq -\epsilon' e^{-\lambda_{\max} L} \end{aligned}$$

onde $\lambda_{\max} < \infty$ é um limite superior para λ_i . Portanto as condições da Proposição 2.6 são satisfeitas com $\epsilon = \epsilon' e^{-\lambda_{\max} L}$. \square

2.4. O problema de controle impulsional

Descreveremos nesta seção a construção do espaço canônico que usaremos para a formulação do problema de controle impulsional geral para PDP's. Seja $\{\Delta\}$ um estado cemitério e seja $\hat{\Omega}$ o espaço de funções $\hat{\omega} : \mathbf{R}_+ \rightarrow E \cup \{\Delta\}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- $\hat{\omega} \in \Omega$; neste caso definimos $\eta(\hat{\omega}) = \infty$.

- para algum $a \in \mathbf{R}_+$, $\hat{\omega}_t$ é contínua a direita com limite a esquerda em $[0, a]$ e $\hat{\omega}_t = \Delta$ para $t \in (a, \infty)$; definimos neste caso $\eta(\hat{\omega}) = a$.

- $\hat{\omega}_t = \Delta$ para todo $t \in \mathbf{R}_+$; neste caso denotamos $\hat{\omega}$ por Δ e definimos $\eta(\Delta) = 0$.

Para $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ definimos $\hat{x}_t(\hat{\omega}) = \hat{\omega}_t$, $\hat{\mathcal{F}}_t^0 = \sigma\{\hat{x}_s; s \leq t\}$, $\hat{\mathcal{F}}^0 = \hat{\mathcal{F}}_\infty$ e $\hat{\mathcal{F}}$ o complemento universal de $\hat{\mathcal{F}}^0$. Seja $(\hat{\Omega}_i, \hat{\mathcal{F}}_i)$ uma cópia do espaço mensurável $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}})$. Defina $\mathcal{W} = \prod_{i=1}^{\infty} \hat{\Omega}_i$, $\mathcal{G}^0 = \sigma\{\prod_{i=1}^{\infty} \hat{\mathcal{F}}_i\}$ e \mathcal{G} o complemento universal de \mathcal{G}^0 . Denotaremos os elementos de \mathcal{W} por $w = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots)$. Seja $\mathcal{W}_k = \prod_{i=1}^k \hat{\Omega}_i$,

$\mathcal{G}_k^0 = \sigma\{\prod_{i=1}^k \hat{\mathcal{F}}_i\}$, \mathcal{G}_k o complemento universal de \mathcal{G}_k^0 e $w_k : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_k$ o mapeamento projeção $w_k(w) = (\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_k)$. Faça

$$\tau_k(w) = \tau_k(w_k) = \sum_{i=1}^k \eta(\hat{\omega}_i) \quad (\infty + \infty := \infty)$$

$$\tau_\infty(w) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(w)$$

e defina a realização $(Y_t(w))_{t \geq 0}$ por

$$Y_0(w) = \hat{x}_0(\hat{\omega}_1)$$

$$Y_t(w) = \begin{cases} \hat{x}_{t-\tau_i(w)}(\hat{\omega}_{i+1}) & \text{se } \tau_i(w) < t \leq \tau_{i+1}(w) \\ \Delta & \text{se } t > \tau_\infty(w) \end{cases}$$

Seja Γ um conjunto analítico de $E \times E$ e seja $\Gamma(x)$ a x -seção de Γ , $\Gamma(x) = \{y \in E: (x,y) \in \Gamma\}$.

Impomos as seguintes condições:

- i) $\{\Gamma(x)\}_{x \in E}$ é uma família de conjuntos não vazios de E .
- ii) para todo $x \in E$ e $y \in \Gamma(x)$, $\Gamma(y) \subset \Gamma(x)$.

Definimos a classe de estratégias admissíveis \mathcal{S} como o conjunto de seqüências $\mathcal{F} = (S_n, R_n)_{n=1}^\infty$

que satisfazem a:

a) para todo $n \geq 1$, $R_n(\cdot) : \mathcal{W}_n \rightarrow E \cup \{\Delta\}$ é uma variável aleatória universalmente mensurável tal que

$$R_n(w_n) \begin{cases} = \Delta & \text{se } \tau_n(w_n) = \infty \\ \in \Gamma(\hat{x}_{\eta(\hat{\omega}_n)}(\hat{\omega}_n)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

b) para todo $n \geq 2$, $S_n(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_{n-1} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ é tal que para $\omega \in \Omega$ fixo, $S_n(\cdot, \omega)$ é uma função universalmente mensurável e para $w_{n-1} \in \mathcal{W}_{n-1}$ fixo, $S_n(w_{n-1}, \cdot)$ é um \mathcal{F}_t -tempo de parada de um PDP (X_t) começando de $R_{n-1}(w_{n-1})$. Para $n=1$, S_1 é um \mathcal{F}_t -tempo de parada de um PDP (X_t) começando de x .

c) para todo $n \geq 2$, $S_n(w_{n-1}, \cdot)$ é zero se existe $k \leq n-1$ tal que $\eta(\hat{\omega}_k) = \infty$.

d) para todo $n \geq 2$, S_n é estritamente positivo exceto para o caso c).

Observação 2.5 : Note que dado $w_{n-1} \in \mathcal{W}_{n-1}$, $(R_{n-1}(w_{n-1}), S_{n-1}(w_{n-1}, \cdot))$ define um mapeamento \mathcal{V} de Ω em $\hat{\Omega}$ da seguinte forma. Se $R_{n-1}(w_{n-1}) = \Delta$ então $\mathcal{V}(\omega) = \Delta \in \hat{\Omega}$ para todo $\omega \in \Omega$. Considere agora $R_{n-1}(w_{n-1}) \neq \Delta$. Se $S_{n-1}(w_{n-1}, \omega) = \infty$ então $\mathcal{V}(\omega) = \omega \in \hat{\Omega}$; caso contrário

$$\hat{x}_t(\mathcal{V}(\omega)) = \begin{cases} x_t(\omega) & \text{se } t \leq S_n(w_{n-1}, \omega) \\ \Delta & \text{se } t > S_n(w_{n-1}, \omega) \end{cases}$$

e portanto $\mathcal{V}(\omega) \in \hat{\Omega}$. Da definição de \mathcal{V} temos que

$$\eta(\mathcal{V}(\omega)) = S_n(w_{n-1}, \omega) \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Suponha que $\mathcal{V} = (S_n, R_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaça as condições a), b), c) e d) acima. Então S_1 e P_x induzirão uma medida de probabilidade μ_x^1 em $(\hat{\Omega}_1, \hat{\mathcal{F}}_1)$. Dado w_{n-1} definimos $\mu_x^n(\{\Delta\}; w_{n-1}) = 1$ se $\tau_{n-1}(w_{n-1}) = \infty$; caso contrário $S_n(w_{n-1}, \cdot)$ e $P_{R_{n-1}(w_{n-1})}$ induzirão uma medida de probabilidade $\mu_x^n(\cdot, w_{n-1})$ em $(\hat{\Omega}_n, \hat{\mathcal{F}}_n)$. A família (μ_x^n) define uma medida de probabilidade $P_x^{\mathcal{V}}$ em $(\mathcal{W}, \mathcal{G})$. A última condição para \mathcal{V} ser admissível é a seguinte:

$$e) \tau_{\infty} = \infty \quad P_x^{\mathcal{V}} - \text{a.s.} .$$

Sejam $f : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ e $c : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}_+$ funções de Borel limitadas satisfazendo as seguintes condições:

$$C1) c(x, y) \geq c_0 > 0 \text{ para algum } c_0 \in \mathbf{R}_+ \text{ e todo } (x, y) \in \Gamma; c(x, \Delta) = 0, \forall x \in E.$$

$$C2) \text{ para todo } x \in E, y \in \Gamma(x) \text{ e } z \in \Gamma(y) \subset \Gamma(x), c(x, y) + c(y, z) \geq c(x, z).$$

Para cada estratégia admissível $\mathcal{V} \in \mathcal{S}$ associamos o seguinte custo médio a longo prazo

$$V^{\mathcal{V}}(x) := \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{E_x^{\mathcal{V}}(G_t)}{t}$$

onde

$$G_t := \int_0^t f(Y_s) ds + \sum_{i=0}^{\infty} 1_{\{\tau_i \leq t\}} c(Y_{\tau_i}, Y_{\tau_i}^+)$$

e o valor esperado é sobre \mathcal{W} com medida de probabilidade $P_x^{\mathcal{V}}$. A função valor do problema de controle impulsional com custo médio a longo prazo é:

$$\hat{\rho}(x) = \inf_{\mathcal{V} \in \mathcal{S}} V^{\mathcal{V}}(x).$$

2.5. Controle impulsional sem restrições

2.5.1. Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de caracterização da função valor para o problema do controle impulsional com custo médio a longo prazo de um PDP. Inicialmente consideramos o caso em que não há restrição para onde o processo pode ser enviado após um impulso e o custo por impulso $c(x, y)$ pode ser escrito da forma separada $c(x) + d(y)$. Estas hipóteses simplificam

consideravelmente o problema, de modo que podemos nos concentrar na classe de estratégias que sempre retornam para o mesmo ponto após uma intervenção e que usam sempre o mesmo tempo de parada (portanto o processo com intervenção é um processo regenerativo). Uma técnica iterativa que consiste em resolver uma sequência de problemas de parada ótima é obtida. O caso mais geral (com restrição para onde o processo pode ser enviado após um impulso e custo por impulso na forma $c(x,y)$) será estudado na próxima seção.

Assumimos que $\Gamma(x) = E$ para todo $x \in E$, $c(x,y) = c(x) + d(y)$ para qualquer $x,y \in E$, onde c é uma função estritamente positiva em $B^c(E)$ (portanto existe $c_0 > 0$ tal que $c(x) \geq c_0$ para todo $x \in E$) e d é uma função positiva em $B(E)$. Além destas hipóteses assumimos também que:

Hipótese A1 : Existe $\lambda_{\max} \geq 0$, $\lambda_{\min} > 0$, $t_{\max}^* > 0$ tal que

- i) $\lambda(x) \leq \lambda_{\max}$ para todo $x \in E$,
- ii) $\lambda(x) > \lambda_{\min}$ para todo $x \in A_2$ e $t^*(x) < t_{\max}^*$ para todo $x \in A_1$, onde $A_1 = \{ x \in E; t^*(x) < \infty \}$ e $A_2 = \{ x \in E; t^*(x) = \infty \}$.

Hipótese A2 (condição de Doeblin para a cadeia de Markov associada) : Existe uma medida finita não nula φ , um inteiro $m^* \geq 1$ e um ϵ^* positivo tal que para todo $A \in E$ e $x \in E$,

$$\varphi(A) \leq \epsilon^* \Rightarrow P_x(Z_{m^*} \in A) \leq 1 - \epsilon^*$$

Note que Hipótese A1.ii) implica que para algum $a_0 > 0$, $E_x(T_m) \leq ma_0$ para todo $x \in E$ e $m = 0,1,2,\dots$. Assumimos que f é uma função positiva em $B(E)$ e, para evitar trivialidades, $\|f\|$ (a norma sup) > 0 .

Defina

$$\beta^* = \inf_{x \in E} \inf_{\tau \in \mathcal{A}_{\infty}} \frac{E_x \left(\int_0^{\tau} f(X_s) ds + c(X_{\tau}) \right) + d(x)}{E_x(\tau)} \quad (2.18)$$

onde, se $E_x(\tau) = \infty$, então

$$\frac{E_x \left(\int_0^{\tau} f(X_s) ds + c(X_{\tau}) \right) + d(x)}{E_x(\tau)} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{E_x \left(\int_0^{\tau \wedge t} f(X_s) ds + c(X_{\tau \wedge t}) \right) + d(x)}{E_x(\tau \wedge t)} \quad (2.19)$$

Usando resultados gerais do problema de parada ótima para PDP's obtidos por Gugerli [46], a primeira parte do Teorema 1 (seção 2) de [83] pode ser modificada para mostrar o seguinte resultado:

Proposição 2.9 : $\hat{\rho}'(x) = \beta^*$ para todo $x \in E$.

Portanto para resolver o problema do controle impulsional de PDP's com o custo médio a longo prazo temos de encontrar uma solução para (2.18). Para $m = 1, 2, \dots$, $x \in E$ e $\beta \in \mathbf{R}_+$ defina

$$\psi_m(\beta, x) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\infty} E_x \left(\int_0^{\tau \wedge T_m} (f(X_s) - \beta) ds + c(X_{\tau \wedge T_m}) \right)$$

$$l_m(\beta) = \inf_{x \in E} \left(\psi_m(\beta, x) + d(x) \right)$$

$$\hat{\beta} = \sup \{ \beta \in \mathbf{R}_+; l_m(\beta) \geq 0 \text{ para todo } m=1, 2, \dots \}.$$

Temos os seguintes resultados.

Proposição 2.10 : Existe $\hat{\beta} \in \mathbf{R}_+$ tal que $l_m(\hat{\beta}) \geq 0$ para todo $m=1, 2, \dots$ e $\hat{\beta} = \sup \{ \beta \in \mathbf{R}_+; l_m(\beta) \geq 0 \text{ para todo } m=1, 2, \dots \}$

Prova : É fácil verificar que $0 \in \{ \beta \in \mathbf{R}_+; l_m(\beta) \geq 0 \text{ para todo } m=1, 2, \dots \} \neq \emptyset$ já que f , c e d são positivos. Fixando $x' \in E$ e notando que $0 < E_{x'}(T_1) \leq a_0$ obtemos, para todo $\beta > \|f\| + \frac{\|c\| + \|d\|}{E_{x'}(T_1)}$, que $l_1(\beta) < 0$ e, portanto,

$$\{ \beta \in \mathbf{R}_+; l_m(\beta) \geq 0 \text{ para todo } m=1, 2, \dots \} \subset [0, \|f\| + \frac{\|c\| + \|d\|}{E_{x'}(T_1)}].$$

Seja $\hat{\beta}_k \in \{ \beta \in \mathbf{R}_+; l_m(\beta) \geq 0 \text{ para todo } m=1, 2, \dots \}$ uma sequência crescente convergindo para $\hat{\beta} < \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Pela Hipótese A1 e do Teorema da Convergência Dominante,

$$l_m(\hat{\beta}) = l_m(\sup_k \hat{\beta}_k) = \inf_{x \in E} \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\infty} \left(\inf_k E_x \left(\int_0^{\tau \wedge T_m} (f(X_s) - \hat{\beta}_k) ds + c(X_{\tau \wedge T_m}) \right) + d(x) \right) =$$

$$\inf_k \inf_{x \in E} \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\infty} \left(E_x \left(\int_0^{\tau \wedge T_m} (f(X_s) - \hat{\beta}_k) ds + c(X_{\tau \wedge T_m}) \right) + d(x) \right) = \inf_k l_m(\hat{\beta}_k) \geq 0$$

para todo $m = 1, 2, \dots$ o que prova o resultado desejado. \square

Proposição 2.11 : $\hat{\beta} = \beta^*$

Prova : Para qualquer $x \in E$ e $\tau \in \mathcal{M}_\infty$ tal que $0 < E_x(\tau) < \infty$,

$$\hat{\beta} \leq \frac{E_x \left(\int_0^{\tau \wedge T_m} f(X_s) ds + c(X_{\tau \wedge T_m}) \right) + d(x)}{E_x(\tau \wedge T_m)} \quad \text{para todo } m = 1, 2, \dots$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos que, em virtude do Teorema da Convergência Dominante e $T_m \rightarrow \infty$ P_x a.s. que

$$\hat{\beta} \leq \frac{E_x \left(\int_0^{\tau} f(X_s) ds + c(X_{\tau}) \right) + d(x)}{E_x(\tau)}.$$

Da definição para o caso $E_x(\tau) = \infty$ (veja (2.19)) é fácil verificar que $\hat{\beta} \leq \beta^*$. Por outro lado para todo $m = 1, 2, \dots$

$$I_m(\beta^*) = \inf_{x \in E} \left\{ c(x) + d(x) \right\} \wedge \left\{ \inf_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_{b_\infty} \\ \tau > 0}} E_x(\tau \wedge T_m) \right.$$

$$\left. \left(\frac{E_x \left(\int_0^{\tau \wedge T_m} f(X_s) ds + c(X_{\tau \wedge T_m}) \right) + d(x)}{E_x(\tau \wedge T_m)} - \beta^* \right) \right\} \geq 0$$

e portanto $\beta^* \leq \hat{\beta}$, o que completa a prova. \square

2.5.2. Condições de Doeblin

Um conjunto não vazio $A \in E$ é dito ser invariante para a cadeia de Markov associada ao PDP (para o PDP respectivamente) se $P_x(Z_m \in A) = 1$ para todo $x \in A$ e $m=1,2,\dots$ ($P_x(X_t \in A)$ para todo $x \in A$ e $t \in \mathbf{R}_+$) e é mínimo se não contém outro conjunto invariante B tal que $\varphi(B) < \varphi(A)$. Hipótese A2 implica nos próximos 2 lemas (cf. [34], pp 191-215).

Lema 2.1 : Existe uma sequência maximal de conjuntos disjuntos invariantes mínimos E_1, \dots, E_r para a cadeia de Markov associada (Z_m) . Além disto, existe uma decomposição C_{j1}, \dots, C_{jd_j} , $C_{ik} \cap C_{ij} = \emptyset$ para $k \neq j$, de $E_i = \bigcup_{j=1}^{d_i} C_{ij}$ e uma família de medidas π_{ik} em E , constantes $b_1 \in \mathbf{R}_+$, $\nu_1 \in [0,1)$ tais que para todo $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, d_i$, $k = 0, \dots, d_i - 1$, $x \in C_{ij}$ e $A \in E$,

$$| P_x(Z_{nd_i+k} \in A) - \pi_{im}(A) | \leq b_1 \nu_1^n \quad (2.20)$$

onde $m = j + k \pmod{d_i}$. Mais ainda as medidas

$$\pi_i(\cdot) := \frac{1}{d_i} \sum_{k=1}^{d_i} \pi_{ik}(\cdot), \quad i = 1, \dots, r$$

são invariantes para a cadeia de Markov e qualquer medida invariante para a cadeia de Markov pertence à casca convexa gerada por π_j .

Lema 2.2 : Defina $F = E - \bigcup_{i=1}^r E_i$. Existem $b_2 > 0$ e $\nu_2 \in [0,1)$ tais que para todo $x \in E$ e $m = 0,1,2,\dots$,

$$P_x(Z_m \in F) \leq b_2 \nu_2^m. \quad (2.21)$$

Da Hipótese A1 e dos resultados de equivalência estabelecidos na Seção 2.3, temos que existe um mapeamento um a um entre as medidas invariantes para o PDP e para a cadeia de Markov associada ao PDP. Portanto denotando por μ_j as medidas invariantes para o PDP associadas a π_j , $i = 1, \dots, r$, temos do Lema 2.1 que qualquer medida invariante para o PDP pertence à casca convexa gerada por μ_i . Da Seção 2.3, sabemos que para $h \in B(E)$,

$$\int_E h(y) \mu_i(dy) = \frac{\int_E \int_0^{t^*(x)} h(\phi(t,x)) e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi_i(dx)}{\int_E \int_0^{t^*(x)} e^{-\Lambda(t,x)} dt \pi_i(dx)} \quad (2.22)$$

Observação 2.6 : Apesar da Hipótese A2 implicar (2.20) e (2.21), não podemos dizer que $P_x(X_t \in A)$ convergirá quando $t \rightarrow \infty$. Realmente considere

$$E = [0,1), \lambda = 0, Q(\{0\};1) = 1 \text{ e } \phi(t,x) = x + t.$$

Então $\pi(\{0\}) = 1 = P_x(Z_m=0)$ para todo $m = 1,2, \dots$ e todo $x \in E$. Entretanto é fácil verificar que, de (2.22), $\mu([0,\zeta)) = \zeta$ para $\zeta \in [0,1)$ é a medida invariante para o PDP, mas $P_x(X_t \in [0,\zeta)) = 0$ ou 1 não converge para ζ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto podemos concluir que a condição de Doeblin para a cadeia de Markov associada ao PDP não implica na condição de Doeblin para o PDP (conforme definido em [34], p. 256). O reverso não é verdade em geral mas se para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_x(T_m \leq t) = 0 \text{ uniformemente em } E$$

então pode-se mostrar que a condição de Doeblin para o PDP implica na condição de Doeblin para a cadeia de Markov associada ao PDP. Em muitas aplicações práticas este resultado será verdadeiro. Outra razão para se usar as condições para cadeias de Markov a tempo discreto é que quando estudamos os problemas de discretização (veja [18]) é mais fácil e geral formular as hipóteses em termos da cadeia de Markov associada ao PDP do que diretamente ao PDP.

Defina para $i = 1, \dots, r$,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i &= \{x \in E; x = \phi(t, z), \text{ algum } z \in E_i, \text{ algum } t \in [0, t^*(z)]\} \cup \\ &\quad \{x \in \partial E_i; \phi(t, x) \in E_i \text{ para todo } t \in (0, \epsilon), \text{ algum } \epsilon > 0\} \\ \tilde{F} &= E - \bigcup_{i=1}^r \tilde{E}_i, \quad \tilde{f}_i := \int_E f(y) \mu_i(dy) \\ \tilde{f}(x) &= \sum_{i=1}^r \tilde{f}_i 1_{\tilde{E}_i}(x) + \|f\| 1_{\tilde{F}}(x). \end{aligned}$$

As próximas duas proposições são conseqüências dos Lemas 2.1 e 2.2, e as provas podem ser encontradas em [18].

Proposição 2.12 : Os conjuntos \tilde{E}_i , $i=1, \dots, r$ são invariantes para o PDP e $\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Proposição 2.13 : A função

$$v(x) := \sum_{m=0}^{\infty} E_x \left(\int_{T_m}^{T_{m+1}} (\tilde{f}(X_t) - f(X_t)) dt \right), \quad x \in E$$

é limitada em E . Além disto para qualquer $\tau \in \mathcal{M}_\infty$ tal que $E_x(\tau) < \infty$, temos que

$$v(x) = E_x \left(\int_0^\tau (\tilde{f}(X_t) - f(X_t)) dt + v(X_\tau) \right) \quad (2.23)$$

2.5.3. Técnica iterativa de melhoria de políticas

Descreveremos nesta sub-seção uma técnica iterativa de melhoria de políticas para obter o valor de β^* definido em (2.18). Esta técnica consiste em resolver uma seqüência de problemas de parada ótima truncados, onde a truncagem é no número de saltos permitidos para o PDP. A medida que m , o número máximo de saltos permitidos, vai para infinito, uma seqüência β_m de números positivos converge para β^* . Defina $\tilde{f}^* = \min\{\tilde{f}_i, i=1, \dots, r\}$. De (2.19) e Proposição 2.13 segue que $\beta^* \leq \tilde{f}^*$.

Algoritmo de melhoria de políticas :

- 1) comece com $\beta_0 = \tilde{f}^*$
- 2) para $m = 1, 2, \dots$ iteraja :
- 3) se $l_m(\beta_{m-1}) \geq 0$ então $\beta_m = \beta_{m-1}$ e vá para 2); caso contrário execute os passos 4), 5) e 6) abaixo.
- 4) para todo $\epsilon > 0$, obtenha $x_m^\epsilon \in E$ e $\tau_m^\epsilon \in \mathcal{M}_\infty$ tais que

$$E_{x_m^\epsilon} \left(\int_0^{\tau_m^\epsilon \wedge T_m} (f(X_s) - \beta_{m-1}) ds + c(X_{\tau_m^\epsilon \wedge T_m}) \right) + d(x_m^\epsilon) \leq l_m(\beta_{m-1}) + \epsilon \quad (2.24)$$

$$5) \text{ calcule } p_m = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} E_{x_m^\epsilon}(\tau_m^\epsilon \wedge T_m)$$

$$6) \beta_m = \beta_{m-1} + \frac{l_m(\beta_{m-1})}{p_m}; \text{ vá para 2).}$$

Definição auxiliar : Também definimos para todo $\epsilon > 0$, $m = 1, 2, \dots$ e x_m^ϵ , τ_m^ϵ como no passo 4) acima,

$$q_m = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_{x_m^\epsilon}(\tau_m^\epsilon \wedge T_m)$$

Observação 2.7 : No passo 4) acima temos de trabalhar com soluções ϵ -ótimas já que em geral não podemos garantir a existência de soluções exatas.

Proposição 2.14 : Para todo $m = 1, 2, \dots$

$$i) 0 \leq \beta_m \leq \beta_{m-1}$$

$$ii) \text{ se } l_m(\beta_{m-1}) \leq 0 \text{ então } q_m \geq \frac{c_0}{\|f\|} \text{ (lembre-se que } \|f\| > 0)$$

Prova : A prova segue utilizando indução em m . Mostraremos para o caso $m=1$ somente, já que a prova para o caso $(m \Rightarrow m+1)$ é idêntica. Suponha $l_1(\tilde{f}^*) \leq 0$. Então para todo $\epsilon > 0$,

$$- \|f\| E_{x_1^\epsilon}(\tau_1^\epsilon \wedge T_1) + c_0 \leq$$

$$E_{x_1^\epsilon} \left(\int_0^{\tau_1^\epsilon \wedge T_1} (f(X_s) - \tilde{f}^*) ds + c(X_{\tau_1^\epsilon \wedge T_1}) \right) + d(x_1^\epsilon) \leq l_1(\tilde{f}^*) + \epsilon \leq \epsilon \quad (2.25)$$

donde $E_{x_1^\epsilon}(\tau_1^\epsilon \wedge T_1) \geq \frac{c_0 - \epsilon}{\|f\|}$. Segue que $q_1 \geq \frac{c_0}{\|f\|}$. De (2.25) temos que

$$- \tilde{f}^* E_{x_1^\epsilon}(\tau_1^\epsilon \wedge T_1) \leq l_1(\tilde{f}^*) + \epsilon$$

e portanto

$$\beta_1 = \tilde{f}^* + \frac{l_1(\tilde{f}^*)}{p_1} \geq \tilde{f}^* - \tilde{f}^* \left(E_{x_1^\epsilon}(\tau_1^\epsilon \wedge T_1) + \epsilon \right) / p_1$$

Pegando o limite superior quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos que $\beta_1 \geq \tilde{f}^* (1 - q_1/p_1) \geq 0$. Finalmente, por definição, é imediato que $\beta_1 \leq \tilde{f}^*$. \square

Proposição 2.15 : Se para algum inteiro positivo m_0 , $l_{m_0}(\beta_{m_0-1}) \leq 0$ então $l_m(\beta_{m-1}) \leq 0$ para todo $m \geq m_0$.

Prova : Suponha que $l_{m_0}(\beta_{m_0-1}) \leq 0$ para algum inteiro positivo m_0 . Vamos mostrar o resultado por indução em m . Para $m = m_0$ o resultado é verdadeiro por hipótese. Suponha que $l_m(\beta_{m-1}) \leq 0$ para

$m > m_0$. Então para todo $\epsilon > 0$ e x_m^ϵ , τ_m^ϵ como em (2.24), temos que

$$l_{m+1}(\beta_m) = \inf_{x \in E} (\psi_{m+1}(\beta_m, x) + d(x)) \leq \inf_{x \in E} (\psi_m(\beta_m, x) + d(x)) \leq$$

$$E_{x_m^\epsilon} \left(\int_0^{\tau_m^\epsilon \wedge T_m} (f(X_s) - \beta_{m-1}) ds + c(X_{\tau_m^\epsilon \wedge T_m}) \right) + d(x_m^\epsilon) - l_m(\beta_{m-1}) E_{x_m^\epsilon} (\tau_m^\epsilon \wedge T_m) / p_m \leq$$

$$l_m(\beta_{m-1}) + \epsilon - l_m(\beta_{m-1}) E_{x_m^\epsilon} (\tau_m^\epsilon \wedge T_m) / p_m$$

Pegando o limite superior quando $\epsilon \rightarrow 0$ e lembrando que $-l_m(\beta_{m-1}) \geq 0$ pela hipótese de indução, obtemos que $l_{m+1}(\beta_m) \leq 0$. \square

A sequência β_m é decrescente e portanto $\beta' = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \inf_m \beta_m$ existe e $\beta' \geq 0$. Da última proposição podemos ter dois casos:

a) ou $l_m(\tilde{f}^*) \geq 0$ para todo $m = 1, 2, \dots$ e portanto

$$\beta' = \beta_m = \tilde{f}^* \text{ para todo } m = 1, 2, \dots,$$

b) ou para algum inteiro positivo m_0 , $l_{m_0}(\tilde{f}^*) < 0$ e da Proposição 2.15, $l_m(\beta_{m-1}) \leq 0$ para todo $m \geq m_0$ com $\beta' \leq \beta_{m_0} < \tilde{f}^*$.

Temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4 : $\beta' = \beta^*$

Proof : Suponha primeiro que o caso a) acima seja verdadeiro. Temos da Proposição 2.11 que $\beta^* \geq \beta' = \tilde{f}^*$, mas como $\beta^* \leq \tilde{f}^*$, é claro que $\beta^* = \tilde{f}^* = \beta'$. Suponha agora o caso b). Mostraremos os seguintes passos:

Passo 1 : $\beta^* \leq \beta'$

Passo 2 : p_m é uma sequência limitada

Passo 3 : $\beta^* \geq \beta'$

Prova do passo 1 : Para $m \geq m_0$, considere x_{m+1}^ϵ , τ_{m+1}^ϵ conforme definido em (2.24). Então

$$E_{x_{m+1}^\epsilon} \left(\int_0^{\tau_{m+1}^\epsilon \wedge T_{m+1}} (f(X_s) - \beta_m) ds + c(X_{\tau_{m+1}^\epsilon \wedge T_{m+1}}) \right) + d(x_{m+1}^\epsilon)$$

$$\leq l_{m+1}(\beta_m) + \epsilon \leq \epsilon \tag{2.26}$$

Pela prova da Proposição 2.14,

$$E_{x_{m+1}^\epsilon} (\tau_{m+1}^\epsilon \wedge T_{m+1}) \geq \frac{c_0 - \epsilon}{\|f\|},$$

e de (2.26) com $\epsilon < c_0$,

$$\beta^* \leq \frac{E_{x_{m+1}^\epsilon} \left(\int_0^{\tau_{m+1}^\epsilon \wedge T_{m+1}} f(X_s) ds + c(X_{\tau_{m+1}^\epsilon \wedge T_{m+1}}) \right) + d(x_{m+1}^\epsilon)}{E_{x_{m+1}^\epsilon} (\tau_{m+1}^\epsilon \wedge T_{m+1})} \leq \beta_m + \frac{\epsilon \|f\|}{c_0 - \epsilon} \quad (2.27)$$

Pegando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos que $\beta^* \leq \beta_m$ e como m é arbitrário, $\beta^* \leq \beta'$.

Prova do passo 2 : Por contradição, suponha que p_m é ilimitada. Então podemos encontrar uma subsequência $x_{m_i}^{\epsilon_i}$, $\tau_{m_i}^{\epsilon_i}$ de x_m^ϵ , τ_m^ϵ (conforme definida em (2.24)) tal que $\epsilon_i \downarrow 0$, $m_i \uparrow \infty$ e $E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} (\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}) \rightarrow \infty$ quando $i \uparrow \infty$. De (2.23),

$$E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} \left(\int_0^{\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}} f(X_s) ds \right) \geq \tilde{f}^* E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} (\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}) + E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} \left(v(X_{\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}}) - v(x_{m_i}^{\epsilon_i}) \right)$$

e de (2.27) com $\epsilon_i < c_0$,

$$\tilde{f}^* + \frac{E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} \left(v(X_{\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}}) + c(X_{\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}}) - v(x_{m_i}^{\epsilon_i}) + d(x_{m_i}^{\epsilon_i}) \right)}{E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} (\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i})} \leq \frac{E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} \left(\int_0^{\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}} f(X_s) ds + c(X_{\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i}}) \right) + d(x_{m_i}^{\epsilon_i})}{E_{x_{m_i}^{\epsilon_i}} (\tau_{m_i}^{\epsilon_i} \wedge T_{m_i})} \leq \beta_{m_i} + \epsilon_i \frac{\|f\|}{c_0 - \epsilon_i}.$$

Fazendo $i \rightarrow \infty$ e lembrando que v , d e c são limitados temos que $\tilde{f}^* \leq \beta'$, o que é um absurdo já que, do caso b), $\beta' < \tilde{f}^*$. Portanto p_m tem que ser limitado.

Prova do passo 3 : Do passo 2 existe $p \in \mathbf{R}_+$ tal que $p_m \leq p$ para todo $m = 1, 2, \dots$. Então para todo $m \geq m_0$, $0 \leq -l_m(\beta_{m-1}) = p_m(\beta_{m-1} - \beta_m) \leq p(\beta_{m-1} - \beta_m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, e isto significa que para qualquer sequência $\epsilon_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$ podemos encontrar $m_i \rightarrow \infty$ tal que $l_{m_i+1}(\beta_{m_i}) + \epsilon_i \geq 0$.

Para qualquer $x \in E$, $\tau \in \mathcal{M}_\infty$, $0 < E_x(\tau) < \infty$, temos que

$$0 \leq l_{m_i+1}(\beta_{m_i}) + \epsilon_i \leq E_x \left(\int_0^{\tau \wedge T_{m_i+1}} (f(X_s) - \beta_{m_i}) ds + c(X_{\tau \wedge T_{m_i+1}}) \right) + d(x) + \epsilon_i$$

donde

$$\beta' \leq \beta_{m_i} \leq \frac{E_x \left(\int_0^{\tau \wedge T_{m_i+1}} f(X_s) ds + c(X_{\tau \wedge T_{m_i+1}}) \right) + d(x) + \epsilon_i}{E_x(\tau \wedge T_{m_i+1})}.$$

Pegando o limite quando $i \rightarrow \infty$ temos do Teorema da Convergência Dominante e $T_{m_i} \rightarrow \infty$ P_x -a.s. que

$$\beta' \leq \frac{E_x \left(\int_0^{\tau} f(X_s) ds + c(X_{\tau}) \right) + d(x)}{E_x(\tau)}$$

e da definição para o caso $E_x(\tau) = \infty$ (veja (2.19)) segue que $\beta' \leq \beta^*$. \square

2.6. Controle impulsional com restrições

Nesta seção consideraremos o problema de controle impulsional conforme definido na Seção 2.4.

Assumiremos que \bar{E} , o fecho de E , é compacto, e as seguintes hipóteses, além das hipóteses gerais da Seção 2.2, são satisfeitas:

- 1) $t^*(\cdot) : \bar{E} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{ \infty \}$ é contínuo ($t^*(x) = 0$ para $x \in \partial^*E$).
- 2) $\lambda(\phi(\cdot, y)) \rightarrow \lambda(\phi(\cdot, x))$ quando $y \rightarrow x$ Lebesgue a. s. em $[0, t^*(x))$ para todo $x \in E$.
- 3) Para todo $v \in C(E)$
 - 3.i) $Qv(\cdot) : E \rightarrow \mathbf{R}$ é contínuo.
 - 3.ii) $Qv(\cdot) : \partial^*E \rightarrow \mathbf{R}$ é contínuo.
- 4) $c(\cdot, \cdot) : \bar{E} \times \bar{E} \rightarrow \mathbf{R}_+$ é limitada (por a_4) e contínua.
- 5) $f(\cdot) : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ é limitada (por a_3) e contínua.

Seja $2^{\bar{E}}$ a coleção de todos os conjuntos compactos de \bar{E} . A métrica de Hausdorff $d(\cdot, \cdot)$ é definida em $2^{\bar{E}}$ da seguinte forma (veja Bertsekas-Shreve [6] apêndice C): para A, B , em $2^{\bar{E}}$ e x em \bar{E} ,

$$d(x, A) = \min_{a \in A} |x - a|, \quad d(A, B) := \max \left\{ \max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A) \right\}.$$

Nossa última hipótese é a seguinte:

- 6) $\bar{\Gamma}(\cdot)$ é um mapeamento contínuo de \bar{E} em $2^{\bar{E}}$ com respeito à métrica de Hausdorff em $2^{\bar{E}}$.

Definimos os operadores J, K e L da seguinte maneira. Para v_0, v_1, v_2, v_3 em $C(\bar{E})$, $x \in \bar{E}$ e

$0 \leq t \leq t^*(x)$ define

$$\mathfrak{B}(v_0, v_2)(x) = v_0(x) + \lambda(x)Qv_2(x)$$

$$J(v_0, v_1, v_2)(t, x) = \int_0^t e^{-\Lambda(s, x)} \mathfrak{B}(v_0, v_2)(\phi(s, x)) ds + e^{-\alpha t - \Lambda(t, x)} v_1(\phi(t, x))$$

$$K(v_0, v_2)(x) = \int_0^{t^*(x)} e^{-\alpha s - \Lambda(s, x)} \mathfrak{B}(v_0, v_2)(\phi(s, x)) ds + e^{-\alpha t^*(x) - \Lambda(t^*(x), x)} Qv_2(\phi(t^*(x), x))$$

$$L(v_0, v_1, v_2)(x) = \inf_{0 \leq t < t^*(x)} J_\alpha(v_0, v_1, v_2)(t, x) \wedge K_\alpha(v_0, v_2)(x)$$

$$Mv_2(x) = \inf_{y \in \Gamma(x)} \{c(x, y) + v_2(y)\}$$

O seguinte teorema caracterizará a equação de otimalidade para o problema de controle impulsional para PDP's com o critério do custo ótimo a longo prazo.

Teorema 2.5 : Se existe $\psi \in C(\bar{E})$ e $\beta^* \geq 0$ tal que para todo $x \in \bar{E}$

$$\psi(x) = L(f - \beta^*, M\psi, \psi)(x)$$

então $\beta^* = \hat{\rho}'(x)$ para todo $x \in E$.

Este teorema será uma consequência dos seguintes lemas.

Lema 2.3 : O processo

$$\int_0^t (f(X_s) - \beta^*) ds + \psi(X_t)$$

é um \mathcal{F}_t -submartingale.

Prova : Vamos provar primeiramente o seguinte resultado aplicando indução em m ;

$$\mathfrak{E}_m(t, x) = E_x \left(\int_0^{t \wedge T_m} (f(X_s) - \beta^*) ds + \psi(X_{t \wedge T_m}) \right) \geq \psi(x)$$

para todo $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in \bar{E}$ e $m = 0, 1, \dots$. Para $m = 0$ o resultado é imediato. Suponha que $\psi(y) \leq \mathfrak{E}_m(t, y)$ para todo $y \in \bar{E}$ e $t \in \mathbf{R}_+$. Então

$$\mathfrak{E}_{m+1}(t, x) = E_x \left(\int_0^{t \wedge T_1} (f(\phi(s, x)) - \beta^*) ds + \psi(\phi(t, x)) 1_{\{T_1 > t\}} + \mathfrak{E}_m(T_1 - t, Z_1) 1_{\{T_1 \leq t\}} \right) \geq$$

$$E_x \left(\int_0^{t \wedge T_1} (f(\phi(s, x)) - \beta^*) ds + \psi(\phi(t, x)) 1_{\{T_1 > t\}} + \psi(Z_1) 1_{\{T_1 \leq t\}} \right) \geq L(f - \beta^*, \psi, \psi)(x) = \psi(x)$$

onde a última igualdade segue do Corolário 1 de [46]. Portanto mostramos que $\psi(x) \leq \xi_m(t, x)$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominante e lembrando que $T_m \rightarrow \infty$ quando $m \rightarrow \infty$ P_x -a.s. obtemos que

$$\psi(x) \leq E_x \left(\int_0^t (f(X_s) - \beta^*) ds + \psi(X_t) \right)$$

para todo $t \in \mathbf{R}_+$ e $x \in \bar{E}$. O lema segue pela homogeneidade temporal e da propriedade forte de Markov de (X_t) . \square

Lema 2.4 : Para qualquer $\mathcal{J} \in \mathbf{S}$ e $x \in E$, $\beta^* \leq V^{\mathcal{J}}(x)$.

Prova : Do Lema 2.3 e usando argumentos similares a aqueles na prova do Lema 2.7 abaixo temos que

$$\psi(x) \leq E_x^{\mathcal{J}} \left(\int_0^t (f(Y_s) - \beta^*) ds + \sum_{i=0}^{\infty} c(Y_{\tau_i}, Y_{\tau_i+}) 1_{\{\tau_i \leq t\}} + \psi(Y_t) \right)$$

Pegando o liminf quando $t \rightarrow \infty$ e do fato de ψ ser limitado obtemos o resultado desejado. \square

Problemas de parada ótima para PDP's podem não ter um tempo de parada ótimo (cf [46]).

Logo precisamos de soluções ϵ -ótimas, dadas pelos próximos dois lemas.

Lema 2.5 : Seja κ um inteiro tal que $\kappa c_0 > 2 \|\psi\|$ (the sup norm). Para $0 < \epsilon < (\kappa c_0 - 2 \|\psi\|) / \kappa$ podemos achar um seletor Borel mensurável $R_\epsilon(\cdot) : E \rightarrow E$ tal que $R_\epsilon(x) \in \Gamma(x)$, $c(x, R_\epsilon(x)) + \psi(R_\epsilon(x)) \leq M\psi(x) + (\kappa-1)\epsilon$ e $M\psi(R_\epsilon(x)) > \psi(R_\epsilon(x)) + \epsilon$ para todo $x \in E$.

Proof : Veja [19].

Lema 2.6 : Defina $U_\epsilon = \inf \{ t \geq 0, M\psi(X_t) \leq \psi(X_t) + \epsilon \}$ para $\epsilon > 0$. Então o processo,

$$\int_0^{t \wedge U_\epsilon} (f(X_s) - \beta^*) ds + \psi(X_{t \wedge U_\epsilon})$$

é um \mathcal{F}_t -martingale.

Prova : Lema 2 em [46] é facilmente modificado para mostrar que

$$E_x \left(\int_0^{t \wedge U_\epsilon \wedge T_m} (f(X_s) - \beta^*) ds + \psi(X_{t \wedge U_\epsilon \wedge T_m}) \right) = \psi(x)$$

para todo $m = 0, 1, \dots, t \geq 0$ e $x \in E$. O restante da prova segue como no Lema 2.3 acima. \square

Para ϵ como no Lema 2.5 seja $\epsilon_i = \epsilon/2^i$, $i = 1, 2, \dots$ e defina a estratégia \mathcal{Y}^* por:

$$S_1^*(\omega_1) = U_{\epsilon_1}(\omega_1), \omega_1 \in \Omega,$$

$$R_1^*(w_1) = \begin{cases} R_{\epsilon_2}(\hat{x}_{\eta}(\hat{\omega}_1)(\hat{\omega}_1)) & \text{se } \eta(\hat{\omega}_1) < \infty, \\ \Delta & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$w_1 = (\hat{\omega}_1) \in \mathcal{W}_1, \text{ e para } i = 2, 3, \dots,$$

$$S_i^*(w_{i-1}, \omega_i) = \begin{cases} U_{\epsilon_i}(\omega_i) & \text{se } R_{i-1}^*(w_{i-1}) \neq \Delta, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\omega_i \in \Omega, \text{ e}$$

$$R_i^*(w_i) = \begin{cases} R_{\epsilon_{i+1}}(\hat{x}_{\eta}(\hat{\omega}_i)(\hat{\omega}_i)) & \text{se } \eta(\hat{\omega}_i) < \infty \text{ e } R_{i-1}^*(w_{i-1}) \neq \Delta, \\ \Delta & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$w_i = (\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_i) \in \mathcal{W}_i$, onde R_{ϵ_i} , U_{ϵ_i} são como nos Lemas 2.5 e 2.6 respectivamente, trocando ϵ por ϵ_i .

Lemas 2.4 e 2.7 abaixo completam a prova do Teorema 2.5.

Lema 2.7 : Para todo $x \in E$, $\beta^* \geq V^{\mathcal{Y}^*}(x)$.

Prova : Para todo $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in E$ e $i = 1, 2, \dots$ defina

$$c_i(t, x) = E_x \left(\int_0^{t \wedge U_{\epsilon_i}} (f(X_s) - \beta^*) ds + \left(c(X_{U_{\epsilon_i}}, R_{\epsilon_{i+1}}(X_{U_{\epsilon_i}})) + \psi(R_{\epsilon_{i+1}}(X_{U_{\epsilon_i}})) \right) 1_{\{U_{\epsilon_i} \leq t\}} + \psi(X_t) 1_{\{U_{\epsilon_i} > t\}} \right) \leq \psi(x) + \kappa \epsilon_i$$

onde a última desigualdade acima segue dos Lemas 2.5 e 2.6. Temos que

$$\begin{aligned} E_x^{\mathcal{Y}^*} \left(\int_0^{t \wedge \tau_i} (f(Y_s) - \beta^*) ds + \sum_{j=1}^i \left(c(Y_{\tau_j}, Y_{\tau_j+}) 1_{\{\tau_j \leq t\}} + \psi(Y_{\tau_j+ \wedge t}) \right) \right) &= \\ E_x^{\mathcal{Y}^*} \left(\sum_{j=1}^i \left(\int_{t \wedge \tau_{j-1}}^{t \wedge \tau_j} (f(Y_s) - \beta^*) ds + \left(c(Y_{\tau_j}, Y_{\tau_j+}) + \psi(Y_{\tau_j+}) \right) 1_{\{\tau_j \leq t\}} + \right. \right. & \\ \left. \left. \psi(Y_t) 1_{\{\tau_j > t\}} \right) 1_{\{\tau_{j-1} \leq t\}} + \psi(Y_t) 1_{\{\tau_{j-1} > t\}} \right) &= \\ E_x^{\mathcal{Y}^*} \left(\sum_{j=1}^i \left(c_j(t - \tau_{j-1}, Y_{\tau_{j-1}+}) 1_{\{\tau_{j-1} \leq t\}} + \psi(Y_t) 1_{\{\tau_{j-1} > t\}} \right) \right) &\leq E_x^{\mathcal{Y}^*} \left(\sum_{j=1}^i \psi(Y_{\tau_{j-1}+ \wedge t}) \right) + \kappa \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto para todo $i = 1, 2, \dots$ e $x \in E$,

$$E_x^{y^*} \left(\int_0^{t \wedge \tau_i} (f(Y_s) - \beta^*) ds + \sum_{j=1}^i c(Y_{\tau_j}, Y_{\tau_j+}) 1_{\{\tau_j \leq t\}} + \psi(Y_{\tau_i+ \wedge t}) \right) \leq \psi(x) + \kappa \epsilon.$$

Da expressão acima é fácil checar que $P_x^{y^*}(\tau_i \leq t) \leq (2 \|\psi\| + \kappa \epsilon + \beta^* t) / ic_0$ para qualquer $t \in \mathbf{R}_+$ e este resultado leva a

$$P_x^{y^*}(\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i < \infty) = 0.$$

Do Teorema da Convergência Dominante segue que

$$E_x^{y^*} \left(\int_0^t (f(Y_s) - \beta^*) ds + \sum_{j=1}^{\infty} c(Y_{\tau_j}, Y_{\tau_j+}) 1_{\{\tau_j \leq t\}} + \psi(Y_t) \right) \leq \psi(x) + \kappa \epsilon.$$

Dividindo por t , tomando o liminf quando $t \rightarrow \infty$ e do fato de que ψ é limitado obtemos o resultado desejado. \square

2.7. Conclusões

Neste capítulo estudamos o problema da existência e unicidade de distribuições estacionárias para PDP's e o problema do controle impulsional de PDP's para o caso em que o critério de minimização é o custo médio a longo prazo. Para o primeiro problema mostramos na Seção 2.3 que a existência e unicidade de uma distribuição estacionária para uma cadeia de Markov associada ao PDP é equivalente, sob certas condições, à existência e unicidade de uma distribuição estacionária para o PDP. Em geral condições para existência e unicidade de distribuições estacionárias para cadeias de Markov a tempo discreto são mais fáceis de serem estabelecidas do que a tempo contínuo. Algumas dessas condições são apresentadas na Sub-seção 2.3.4. Na Seção 2.5 estudamos o problema do controle impulsional para PDP's quando o critério a ser minimizado é da forma do custo médio a longo prazo, o custo por impulso $c(x,y)$ pode ser escrito na forma separável $c(x) + d(y)$, e não existem restrições para onde o processo pode ser enviado após um impulso. Nosso enfoque é o de utilizar diretamente as propriedades dos PDP's para obter nossas condições, ao invés de usarmos resultados da teoria de desigualdade quase-variacionais ou trabalhar diretamente com discretizações do tempo ([41]-

[44],[49],[50]). A vantagem deste método é que resultados mais específicos podem ser obtidos. Em particular para este problema, uma técnica iterativa que reduz o problema a uma sequência de problemas de parada ótima truncados no número máximo de saltos do processo é derivada. Este resultado é obtido graças aos resultados de equivalência estabelecidos na seção anterior. Esta técnica iterativa é atraente não só por fornecer resultados teóricos interessantes como também por propiciar métodos de discretização para a resolução numérica do problema (vide [18]). Finalmente na Seção 2.6 estudamos o caso geral em que o custo por impulso é da forma geral $c(x,y)$ e existem restrições para onde o processo pode ser enviado após um impulso. Uma equação de otimalidade para o problema é obtida, que também fornece métodos numéricos (vide [19],[20]).

Um futuro tema para pesquisa será utilizar a abordagem direta vista nas Seções 2.5 e 2.6 para analisar o problema mais geral de controle de PDP's em que se permite não apenas impulsos como também controle contínuo. Um enfoque utilizado para analisar este problema adotado em [33] foi o de transformar o controle impulsional em controle contínuo de fronteira, de forma que o problema como um todo transformou-se apenas em um problema de controle contínuo. Tal enfoque exige muitas hipóteses que podem ser restritivas e acreditamos que uma análise mais direta poderá fornecer resultados mais específicos.

Capítulo 3 : Sistemas Lineares com Parâmetros Sujeitos a Saltos Markovianos

3.1. Introdução

Vários sistemas dinâmicos são inerentemente vulneráveis a mudanças bruscas em sua estrutura devido a falhas de componentes ou interconexões, a variações bruscas no ambiente de operação, a chaveamento interno de controladores, etc. É o que acontece por exemplo em sistemas de manipuladores na robótica, sistema de controle de aeronaves, estruturas flexíveis de larga escala, etc, onde falhas em atuadores e sensores, mudanças no ponto de operação ou variações ambientais são possíveis de ocorrer. Neste capítulo consideraremos uma classe de sistemas que em muitos casos podem representar as situações descritas acima, conhecidas como sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Modelos deste tipo foram analisados por vários autores e a literatura associada tem crescido rapidamente (veja [8]-[10],[14],[16],[21]-[26],[38],[45],[52], [59],[64],[66]-[69],[73],[74],[80],[33]-[35],[94],[96]).

Os problemas de interesse neste capítulo são os de obter condições de estabilidade na média quadrática, com probabilidade um e existência de uma medida invariante para sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a variações bruscas modeladas por uma cadeia de Markov, e aplicar tais conceitos para a resolução do problema do regulador ótimo quadrático com horizonte infinito e filtragem ótima linear estacionária. Questões de estabilidade para sistemas lineares com parâmetros sujeitos a variações estocásticas foram tratadas, por exemplo, em [8],[9],[52],[64],[66]-[69],[73],[74]. Em [64], [68] e [74], condições necessárias e suficientes para estabilidade na média quadrática (MSS) foram obtidas para o caso a tempo contínuo, sem distúrbio de entrada. Estas condições são expressas como a maior parte real dos autovalores de uma matriz aumentada sendo menor do que zero, e, de fato, mostra-se que este número é o expoente de Lyapunov do sistema. Em [52] condições necessárias e suficientes para MSS de sistemas a tempo discreto sem ruídos de entrada são obtidas em termos da existência de uma solução de uma equação de Lyapunov. Em relação à estabilidade com

probabilidade um (ASC), em [8] considera-se o caso a tempo discreto sem ruído de entrada e assume-se que as matrizes estocásticas sejam ergódicas e estacionárias ou ϕ -mistas e não estacionárias (cf. [8]). Via teoria de estabilidade de Lyapunov, condições para ASC são obtidas em termos do valor esperado do menor autovalor do gramiano de observabilidade (cf. [8]). Apesar destas condições parecerem, à primeira vista, bastante complicadas, mostra-se através de um exemplo sobre filtro adaptativo que elas podem ser consideravelmente simplificadas. Em [9] considerou-se o caso a tempo contínuo sem ruído de entrada com matrizes estacionárias ergódicas. Baseadas em resultados de dicotomia de Coppel, condições suficientes para ASC são derivadas em termos do valor esperado de certas medidas das matrizes estocásticas no instante inicial. Neste caso, as condições são obtidas em termos da medida das possíveis matrizes do sistema e as probabilidades limites da cadeia de Markov associada.

Após a apresentação da notação a ser utilizada na Seção 3.2 e do modelo a ser considerado na Seção 3.3, estudaremos na Seção 3.4 o problema da MSS e ASC de tais modelos. Analisaremos inicialmente o problema de MSS para sistemas lineares a tempo discreto com saltos markovianos perturbados por uma sequência aleatória estacionária no sentido amplo de segunda ordem. Acreditamos que o enfoque aqui adotado unifica e generaliza os vários resultados prévios existentes sobre o assunto. Mostra-se que MSS é equivalente ao raio espectral de uma matriz aumentada ser menor do que um ou a existência da solução de uma equação de Lyapunov. O primeiro critério (raio espectral) traduz de forma clara e intuitiva a idéia de que modos instáveis de operação não comprometem necessariamente a estabilidade global do sistema. Na realidade, pode-se mostrar que estabilidade de todos os modos de operação não é nem necessária nem suficiente para estabilidade global do sistema (veja [52]). O critério do raio espectral mostra claramente a conexão entre MSS e a probabilidade de visitas a modos instáveis. Para o caso com apenas um modo de operação (caso sem saltos) nosso critério reduz-se aos resultados amplamente conhecidos de estabilidade de Lyapunov para sistemas lineares a tempo discreto. Também verifica-se que a equação de Lyapunov pode ser escrita em quatro formas equivalentes, cada qual fornecendo uma condição mais fácil de ser conferida. Mais ainda, mostra-se que MSS é equivalente a estabilidade estacionária assintótica no sentido amplo (AWSS) conforme definido

abaixo (definição 3.2). Acreditamos que tais resultados dão uma visão bastante completa e geral do problema de MSS para sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos markovianos. Com relação ao problema da ASC, consideramos o caso sem ruído e obtemos condições suficientes em termos das normas de certas matrizes e as probabilidades limites de uma cadeia de Markov construída a partir da cadeia de Markov original. Este resultado é ilustrado através de um exemplo proveniente de uma adaptação de um algoritmo de filtro adaptativo apresentado em [8], e derivamos condições fáceis de serem verificadas para ASC.

Na Seção 3.5 estudaremos o problema da filtragem ótima linear estacionária para a classe de modelos descrita acima com ruído de entrada e medida. Assume-se que, a cada instante k , conhece-se a variável de saída e o modo de operação do sistema. Deseja-se projetar um conjunto de filtros invariantes no tempo, cada um associado a um modo de operação do sistema, de modo a minimizar o valor esperado do erro médio quadrático estacionário. Mostra-se que a solução deste problema está associada à solução de um conjunto de equações de Riccati acopladas entre si. Condições para a existência e unicidade de uma solução não negativa definida são apresentadas e os resultados são escritos em termos dos conceitos, aqui definidos, de sistemas estabilizáveis e detectáveis na média quadrática. O caso de filtros lineares ótimos quando não se tem uma observação do modo de operação do sistema foi estudado em [22], mas, para não dificultar a leitura deste capítulo com o aumento da notação, não apresentaremos estes resultados.

Na Seção 3.6 o problema do regulador ótimo quadrático será analisado com dois tipos de critérios de otimalidade: o caso sem ruído e custo quadrático a horizonte infinito e o caso com ruído e custo médio a longo prazo. Assumiremos, nesta seção, que a cadeia de Markov que modela os saltos do sistema tomará valores em um estado de espaço contável infinito. Verificaremos que, de forma análoga ao caso linear, a solução deste problema estará associada à uma solução de um conjunto contável infinito de equações algébricas de Riccati acopladas entre si. Condições para a existência e unicidade de uma solução única são apresentadas em termos dos conceitos de sistemas estocasticamente estabilizáveis (SS) e detectáveis (SD), conceitos que são equivalentes aos de sistemas estabilizáveis e

detectáveis na média quadrática para o caso da cadeia de Markov tomando finitos valores (cf. [38]), mas, conforme veremos através de um contra-exemplo na Seção 3.6 abaixo, não são equivalentes para o caso infinito. Para o sistema com ruído, mostra-se que (SS) e (SD) garantem a existência e unicidade de uma única medida de probabilidade para uma cadeia de Markov associada e, conseqüentemente, a existência de uma estratégia de controle ótimo estacionário.

O capítulo é concluído na Seção 3.7 com algumas conclusões finais.

3.2. Notação e resultados preliminares

Ao longo deste capítulo \mathbf{R} e \mathbf{C} representarão o conjunto de números reais e complexos respectivamente, \mathbf{R}^n e \mathbf{C}^n o espaço n -dimensional real e complexo Euclideano respectivamente e $\mathbf{N}^0 = \{0,1,2,\dots\}$, $\mathbf{N} = \{1,2,\dots\}$. Denotaremos por $\mathbf{M}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$ o espaço linear normado de todas as matrizes complexas n por m e por simplicidade escreveremos $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ sempre que $m = n$. O produto interno usual em \mathbf{C}^n será representado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e tanto a norma induzida em $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ quanto a norma padrão em \mathbf{C}^n serão representadas por $\|\cdot\|$. Usaremos os superscriptos $-$, $'$ e $*$ para complexo conjugado, transposto e conjugado transposto respectivamente. Definimos os operadores φ e $\hat{\varphi}$ da seguinte maneira: para $H = [h_1 \dots h_m] \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$ (onde $h_i \in \mathbf{C}^n$ são os vetores coluna de H) e $H_i \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$, $i = 1, \dots, N$ defina

$$\varphi(H) := \begin{bmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_m \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{mn} \text{ e } \hat{\varphi}(H_1, \dots, H_N) := \begin{bmatrix} \varphi(H_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(H_N) \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{Nmn}.$$

Para $r_j \in \mathbf{C}^{n^2}$, $j = 1, \dots, N$ defina

$$\hat{\varphi}_j^{-1} \left(\begin{bmatrix} r_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_N \end{bmatrix} \right) := \varphi^{-1}(r_j) \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n), j = 1, \dots, N.$$

Com o produto de Kronecker $L \otimes K \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^{n^2})$ definido de forma usual temos, para qualquer $L, K \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$, as seguintes propriedades (cf [12]) :

$$i) (L \otimes K)^* = L^* \otimes K^* \quad (3.1.i)$$

$$ii) \varphi(LKH) = (H^* \otimes L)\varphi(K), H \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n) \quad (3.1.ii)$$

Usaremos a notação padrão $L \geq 0$ e $L > 0$ se as matrizes auto-adjuntas são não negativas definidas ou positivas definidas, respectivamente. Denotaremos $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+ = \{L \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n); L = L^* \geq 0\}$.

Observação 3.1 : Sabe-se que se $L \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+$ então existe uma única $L^{1/2} \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+$ tal que $L = (L^{1/2})^2$. O valor absoluto de $L \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$, denotado por $|L|$ é definido como $|L| = (L^*L)^{1/2}$. Pode-se verificar facilmente que $\|L\| = \||L|\|$.

Observação 3.2 : Todo elemento em $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ possui uma decomposição auto adjunta (cf [75], p. 376) e todo operador auto adjunto em $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ pode ser decomposto em uma parte positiva e negativa (cf [75], p. 464). Portanto para qualquer $L \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ existem X^+, X^-, Y^+, Y^- em $\mathbf{M}(\mathbf{C})^+$ tais que $L = (X^+ - X^-) + (-1)^{1/2}(Y^+ - Y^-)$. Além disto $X^+ \leq X^+ + X^- = |(L + L^*)/2|$ e portanto $\|X^+\| \leq \|L\|$. Similarmente, $\|X^-\| \leq \|L\|$, $\|Y^+\| \leq \|L\|$ e $\|Y^-\| \leq \|L\|$.

Seja $\mathfrak{H}_1^{m,n}$ ($\mathfrak{H}_\infty^{m,n}$ respectivamente) o espaço linear formado por todas as seqüências infinitas de matrizes complexas $H = (H_1, H_2, \dots)$, $H_i \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$, tais que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|H_i\|$ converge ($\sup\{\|H_i\|; i = 1, 2, \dots\} < \infty$). Para $H \in \mathfrak{H}_1^{m,n}$ ($H \in \mathfrak{H}_\infty^{m,n}$ respectivamente) definimos uma norma em $\mathfrak{H}_1^{m,n}$ ($\mathfrak{H}_\infty^{m,n}$) por

$$\|H\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \|H_i\| \quad (\|H\|_\infty = \sup\{\|H_i\|; i = 1, 2, \dots\}).$$

Igualmente definimos $\mathfrak{H}^{m,n}$ como sendo o espaço linear formado por todas as seqüências de N matrizes complexas $H = (H_1, \dots, H_N)$, $H_i \in (\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^n)$. Escreveremos \mathfrak{H}_1^n , \mathfrak{H}_∞^n e \mathfrak{H}^n sempre que $n = m$, $\mathfrak{H}_1^{n+} = \{H \in \mathfrak{H}_1^n; H_i \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+, i = 1, 2, \dots\}$ e similarmente para \mathfrak{H}_∞^{n+} , \mathfrak{H}^{n+} .

Observação 3.3 : É fácil verificar que $(\mathfrak{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ e $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ (o espaço de todas as seqüências complexas infinitas absolutamente convergentes com a norma ℓ_1 usual) são uniformemente homeomórficos. Similarmente $(\mathfrak{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ e $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ (o espaço de todas as seqüências complexas infinitas uniformemente limitadas com a norma sup) são uniformemente homeomórficos.

Como $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ e $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ são espaços de Banach, temos que $(\mathcal{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathcal{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ também são espaços de Banach.

Observação 3.4 : Para $H = (H_1, \dots)$, $L = (L_1, \dots)$ em \mathcal{H}_1^{n+} usamos a notação $H \leq L$ para indicar que $H_i \leq L_i$ para cada i em \mathbb{N} . Obviamente se $H \leq L$, H, L em \mathcal{H}_1^{n+} então $\|H\|_1 \leq \|L\|_1$. Similarmente para \mathcal{H}^{n+} .

Observação 3.5 : Considere $P = (P_1, \dots) \in \mathcal{H}_1^n$. Da observação 3.2, P_i pode ser decomposto como $P_i = (X_i^+ - X_i^-) + (-1)^{1/2}(Y_i^+ - Y_i^-)$ onde $X_i^+, X_i^-, Y_i^+, Y_i^-$ pertencem a $\mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$. Defina $X^+ = (X_1^+, \dots)$, $X^- = (X_1^-, \dots)$, $Y^+ = (Y_1^+, \dots)$, $Y^- = (Y_1^-, \dots)$. Da observação 3.2 temos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\|X_i^+\| \leq \|P_i\|$ e portanto, $\|X^+\|_1 \leq \|P\|_1$. Resultados similares valem para X^-, Y^+, Y^- . Portanto P pode ser decomposto como $P = (X^+ - X^-) + (-1)^{1/2}(Y^+ - Y^-)$ com X^+, X^-, Y^+, Y^- pertencentes a \mathcal{H}_1^{n+} . Similarmente para \mathcal{H}^n .

Para qualquer espaço de Banach complexo X denotamos por $\mathbf{B}(X)$ o espaço de Banach formado por todas as transformações lineares limitadas de X em X com a norma induzida uniforme representada por $\|\cdot\|$, e, para $L \in \mathbf{B}(X)$, denotaremos por $\tau(L)$ o raio espectral de L .

O próximo resultado segue de forma imediata da decomposição de matrizes quadradas em matrizes não negativas conforme descrito acima:

Proposição 3.1 : Para qualquer $L \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^{Nn^2})$ as seguintes afirmativas são equivalentes:

- $\tau(L) < 1$.
- $\|L^k \hat{\varphi}(H_1, \dots, H_N)\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, para todo $H_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$, $i = 1, \dots, N$. □

No que se segue, a sequência de Cauchy $\{z(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ em um espaço completo normado \mathfrak{Z} (em particular, \mathbb{C} ou $\mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$) é dito ser *Cauchy somável* se e somente se (cf. [55])

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\nu \in \mathbb{N}^0} \|z(k+\nu) - z(k)\| < \infty$$

A próxima proposição foi estabelecida no Lema-L1 de [55] :

Proposição 3.2 : Seja $\{z(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ uma sequência de Cauchy somável em \mathfrak{Z} e considere uma sequência $\{y(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ tomando valores em \mathfrak{Z} dada por:

$$y(k+1) = Ly(k) + z(k)$$

onde L é um operador linear limitado em \mathfrak{Z} . Se $r(L) < 1$ então $\{y(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ é uma seqüência de Cauchy somável e para qualquer condição inicial $y(0) \in \mathfrak{Z}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = (I - L)^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} z(k)$. \square

Finalmente lembramos que $\text{tr}(\cdot) : \mathbf{M}(\mathbf{C}^n) \rightarrow \mathbf{C}$ é um funcional linear com as seguintes propriedades:

$$\text{i) } \text{tr}(KL) = \text{tr}(LK) \text{ para todo } K, L \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n) \quad (3.2.i)$$

ii) para $M, P \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+$ com $P > 0$ e $\lambda_i(P)$ denotando os autovalores de P ,

$$\left(\min_{i=1, \dots, n} \lambda_i(P) \right) \text{tr}(M) \leq \text{tr}(MP) \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(P) \right) \text{tr}(M) \quad (3.2.ii)$$

3.3. Formulação do modelo

Fixe um espaço de probabilidade (Ω, Σ, P) e considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + C_{\theta(k)}w(k) \\ y(k) &= D_{\theta(k)}x(k) + E_{\theta(k)}\eta(k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\{\theta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ é uma cadeia de Markov a tempo discreto com espaço de estado finito $\{1, \dots, N\}$ e matriz com probabilidade de transição $\mathbf{P} = [p_{ij}]$, $\{x(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ denota a seqüência de estados do sistema em \mathbf{C}^n , $\{u(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ denota a seqüência de controles em \mathbf{C}^m , $\{y(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ denota a seqüência de saídas do sistema em \mathbf{C}^p , e $\{w(k); k \in \mathbf{N}^0\}$, $\{\eta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ são distúrbios aleatórios em \mathbf{C}^{s_1} e \mathbf{C}^{s_2} respectivamente. Além disto $A = (A_1, \dots, A_N) \in \mathfrak{H}^n$, $B = (B_1, \dots, B_N) \in \mathfrak{H}^{m, n}$, $C = (C_1, \dots, C_N) \in \mathfrak{H}^{s_1, n}$, $D = (D_1, \dots, D_N) \in \mathfrak{H}^{n, p}$, $E = (E_1, \dots, E_N) \in \mathfrak{H}^{s_2, p}$. Finalmente, assumimos que :

- A1) $\{\theta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ é uma cadeia de Markov aperiódica.
- A2) x_0 é uma variável aleatória de segunda ordem.
- A3) $\{w(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ e $\{\eta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ são seqüências aleatórias independentes de segunda ordem estacionárias no sentido amplo com $E(w(k)) = r$, $E(w(k)w(k)^*) = \mathfrak{R}$, $E(\eta(k)) = 0$, $E(\eta(k)\eta(k)^*) = I$.
- A4) x_0 e $\{\theta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ são independentes de $\{w(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ e $\{\eta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$.
- A5) $\{w(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ e $\{\eta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ são independentes entre si.
- A6) $E_i E_i^* > 0$ para cada $i = 1, \dots, N$.

Denotaremos por $\{v(i); i = 1, \dots, N\}$ a distribuição inicial de $\{\theta(k); k \in \mathbb{N}^0\}$. Segue da hipótese A1 e resultados da teoria de cadeias de Markov que existe uma distribuição de probabilidade limite $\{\pi(i); i = 1, \dots, N\}$ (que depende de v) com $\sum_{j=1}^N \pi(j) = 1$ tal que

$$| P(\theta(k) = i) - \pi(i) | \leq \eta \xi^k \quad (3.4)$$

para algum $\eta \geq 0$ e $0 < \xi < 1$ (cf. [34]).

Das hipóteses acima pode-se verificar facilmente que $\{x(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ é uma sequência aleatória de segunda ordem. Denotaremos por $\Sigma_k := \sigma\{x(\ell), \theta(\ell); \ell = 0, \dots, k\}$, o σ -campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{x(\ell), \theta(\ell); \ell = 0, \dots, k\}$, e

$$q(k) := E(x(k)) \in \mathbb{C}^n, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$Q(\iota, k) := E(x(k+\iota)x(k)^*) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n), \quad k, \iota = 0, 1, \dots$$

$$Q(k) := Q(0, k) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+, \quad k = 0, 1, \dots$$

3.4. Estabilidade na média quadrática e com prob. um

3.4.1. Estabilidade na média quadrática

Nesta seção serão estabelecidas condições necessárias e suficientes para MSS e ASC. Para MSS será preciso que o raio espectral de uma matriz aumentada possua o raio espectral menor do que um, que, como veremos adiante, é equivalente à existência e unicidade de uma solução de uma equação de Lyapunov. Esta equação de Lyapunov pode ser escrita de quatro formas equivalentes, cada uma dessas formas levando a uma condição suficiente mais fácil de ser verificada. Além disso, mostra-se que MSS é equivalente a AWSS, conforme definição 3.2. abaixo. O modelo considerado nesta seção será da forma

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + C_{\theta(k)}w(k) \quad (3.3.a)$$

$$x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0$$

Definição 3.1 : O modelo (3.3.a) é estável na média quadrática (MSS) se para toda condição inicial x_0 , distribuição inicial v , e distúrbio de entrada $\{w(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ satisfazendo A2), A3) e A4) existe $q \in \mathbb{C}^n$ e $Q \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$ independente de x_0 tal que :

a) $\| q(k) - q \| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

b) $\| Q(k) - Q \| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Definição 3.2 : O modelo (3.3.a) é assintoticamente estacionário no sentido amplo (AWSS) se para qualquer condição inicial x_0 , distribuição inicial v , e distúrbio de entrada $\{w(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ satisfazendo A2), A3) e A4) existe $q \in \mathbb{C}^n$ e $Q(\iota) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$ para cada $\iota \in \mathbb{N}^0$, independente de x_0 tal que :

a) $\| q(k) - q \| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

b) $\| Q(\iota, k) - Q(\iota) \| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

No que se segue, I_ℓ denota a matriz identidade $\ell \times \ell$ e para $D_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, N$, $\text{diag}(D_i)$ é a matriz $Nn \times Nn$ formada com D_i na diagonal e zero no resto. Definimos para $q_i \in \mathbb{C}^n$, $L_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $i, j = 1, \dots, N$ e $k, \iota \in \mathbb{N}^0$:

i) $\mathcal{B} := (\mathbf{P}' \otimes I_n) \text{diag}(A_i) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^{Nn})$.

ii) $\mathcal{C} := (\mathbf{P}' \otimes I_{n^2}) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^{Nn^2})$.

iii) $\mathcal{N} := \text{diag}(\bar{A}_i \otimes A_i) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^{Nn^2})$.

iv) $\mathcal{A}_1 := \mathcal{C} \mathcal{N}$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{N}^* \mathcal{C}^*$, $\mathcal{A}_3 := \mathcal{N} \mathcal{C}$, $\mathcal{A}_4 := \mathcal{C}^* \mathcal{N}^*$.

v- a) $T_{1j}(L_1, \dots, L_N) := \sum_{i=1}^N p_{ij} A_i L_i A_i^* \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$.

v- b) $T_{2j}(L_1, \dots, L_N) := \sum_{j=1}^N p_{ij} A_i^* L_j A_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$.

v- c) $T_{3j}(L_1, \dots, L_N) := \sum_{i=1}^N p_{ij} A_j L_i A_j^* \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$.

v- d) $T_{4j}(L_1, \dots, L_N) := \sum_{j=1}^N p_{ij} A_j^* L_j A_j \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$.

vi- a) $u_j(k) := \sum_{i=1}^N p_{ij} B_i r P(\theta(k) = i) \in \mathbb{C}^n$.

vi- b) $\hat{u}(k) := \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{Nn}$.

vii) $U_j(q_1(k), \dots, q_N(k)) := \sum_{i=1}^N p_{ij} \left(B_i \mathcal{R} B_i^* P(\theta(k) = i) + A_i q_i(k) r^* B_i^* + B_i r q_i^*(k) A_i^* \right) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$.

viii) $q_j(k) := E(x(k) 1_{\{\theta(k) = j\}}) \in \mathbb{C}^n$.

$$\text{ix) } \hat{q}(k) := \begin{bmatrix} q_1(k) \\ \vdots \\ q_N(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{Nn}.$$

$$\text{x) } Q_j(k) := E(x(k) x(k)^* 1_{\{\theta(k) = j\}}) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+.$$

$$\text{xi) } Q_j(\iota, k) := E(x(k+\iota) x(k)^* 1_{\{\theta(k+\iota) = j\}}) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n).$$

onde $1_{\{ \cdot \}}$ representa a medida de Dirac.

A próxima proposição nos fornece fórmulas recursivas para a computação dos primeiros e segundos momentos da variável de estado:

Proposição 3.3 : Para todo $k \in \mathbb{N}^0$, $\iota \in \mathbb{N}$ e $j=1, \dots, N$,

$$\text{a) } \hat{q}(k+1) = \mathfrak{B}\hat{q}(k) + \hat{u}(k)$$

$$\text{b) } Q_j(k+1) = T_{1j}(Q_1(k), \dots, Q_N(k)) + U_j(q_1(k), \dots, q_N(k))$$

$$\text{c) } Q_j(\iota, k) = \sum_{i=1}^N p_{ij} A_i Q_i(\iota-1, k) + \sum_{i=1}^N p_{ij} B_i r \left(\sum_{\ell=1}^N p_{\ell i}^{\iota-1} q_{\ell}^*(k) \right)$$

onde $p_{ij}^{\iota-1} := P(\theta(\iota-1) = j \mid \theta(0) = i)$.

Prova : Inicialmente note que de A3) e A4), $x(k)$ é independente de $w(\ell)$ para todo $\ell \geq k$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{a) } q_j(k+1) &= \sum_{i=1}^N E \left\{ \left(A_i x(k) + B_i w(k) \right) 1_{\{\theta(k+1) = j\}} 1_{\{\theta(k) = i\}} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N A_i E \left\{ x(k) 1_{\{\theta(k) = i\}} P(\theta(k+1) = j \mid \Sigma_k) \right\} + \\ &\quad \sum_{i=1}^N B_i r E \left\{ 1_{\{\theta(k) = i\}} P(\theta(k+1) = j \mid \Sigma_k) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ij} A_i q_i(k) + \sum_{i=1}^N p_{ij} B_i P(\theta(k) = i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Q_j(k+1) &= \sum_{i=1}^N E \left\{ \left(A_i x(k) + B_i w(k) \right) \left(A_i x(k) + B_i w(k) \right)^* 1_{\{\theta(k+1) = j\}} 1_{\{\theta(k) = i\}} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N p_{ij} A_i Q_i(k) A_i^* + \sum_{i=1}^N p_{ij} \left(B_i r q_i(k)^* A_i^* + A_i q_i(k) r^* B_i^* + B_i \mathfrak{R} B_i^* P(\theta(k)=i) \right) \\ &= T_{1j}(Q_1(k), \dots, Q_N(k)) + U_j(q_1(k), \dots, q_N(k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \mathcal{Q}_j(\iota, k) &= \sum_{i=1}^N E \left\{ \left(A_i x(k+\iota-1) + B_i w(k+\iota-1) \right) x(k)^* 1_{\{\theta(k+\iota) = j\}} 1_{\{\theta(k+\iota-1) = i\}} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N p_{ij} A_i \mathcal{Q}_i(\iota-1, k) + \sum_{i=1}^N p_{ij} B_i r E \left(x(k)^* 1_{\{\theta(k+\iota-1) = i\}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^N p_{ij} A_i \mathcal{Q}_i(\iota-1, k) + \sum_{i=1}^N p_{ij} B_i r \left(\sum_{\ell=1}^N p_{\ell i}^{\iota-1} q_{\ell}^*(k) \right) \quad \square
\end{aligned}$$

Precisaremos dos seguintes resultados auxiliares:

Proposição 3.4 : Para qualquer $L_j \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$, $j = 1, \dots, N$,

$$a) \hat{\varphi}(T_{\ell_1}(L_1, \dots, L_N), \dots, T_{\ell_N}(L_1, \dots, L_N)) = \mathcal{A}_{\ell} \hat{\varphi}(L_1, \dots, L_N), \ell = 1, 2, 3, 4.$$

$$b) T_{\ell_i}(L_1, \dots, L_N)^* = T_{\ell_i}(L_1^*, \dots, L_N^*), i = 1, \dots, N, \ell = 1, 2, 3, 4.$$

$$c) L_j \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+, j = 1, \dots, N \Rightarrow T_{\ell_i}(L_1, \dots, L_N) \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+, i = 1, \dots, N, \ell = 1, 2, 3, 4.$$

d) para qualquer $K_i \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$, $i = 1, \dots, N$,

$$\text{tr} \left(\sum_{j=1}^N K_j T_{1j}(L_1, \dots, L_N) \right) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^N T_{2i}(K_1, \dots, K_N) L_i \right).$$

$$\text{tr} \left(\sum_{j=1}^N K_j T_{3j}(L_1, \dots, L_N) \right) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^N T_{4i}(K_1, \dots, K_N) L_i \right).$$

Prova : Imediata aplicação das definições na seção 3.2 e os resultados dados pelas equações (3.1) e (3.2i). □

Proposição 3.5 : Se $r(\mathcal{A}_1) < 1$ então $r(\mathfrak{B}) < 1$.

Prova : Seja $\{e_i; i = 1, \dots, Nn\}$ e $\{v_i; i = 1, \dots, n\}$ a base ortonormal canônica de \mathbf{C}^{Nn} e \mathbf{C}^n respectivamente (ie, e_i e v_i são formados por 1 na $i^{\text{ésima}}$ posição e 0 no resto). Fixe arbitrariamente ι , ℓ , $1 \leq \iota \leq n$, $1 \leq \ell \leq N$, e considere o sistema homogêneo

$$x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k), \quad k \in \mathbf{N}^0$$

com condições iniciais $x(0) = v_{\iota}$, $v(\ell) = 1$. Então $\hat{q}(0) = e_{\kappa}$, onde $\kappa = \iota + (\ell-1)n$. Da Proposição 3.3a),

$$\begin{aligned}
\| \mathfrak{B}^k e_{\kappa} \|^2 &= \| \hat{q}(k) \|^2 = \sum_{i=1}^N \| q_i(k) \|^2 = \sum_{i=1}^N \| E(x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}) \|^2 \leq \\
&\sum_{i=1}^N E(\| x(k) \|^2 1_{\{\theta(k)=i\}}) = \sum_{i=1}^N \text{tr}(Q_i(k)) \leq n \sum_{i=1}^N \| Q_i(k) \| \quad (3.5)
\end{aligned}$$

e da Proposição 3.3b) e Proposição 3.4a), temos que

$$\hat{\varphi}(Q_1(k), \dots, Q_N(k)) = \mathcal{A}_1^k \hat{\varphi}(Q_1(0), \dots, Q_N(0)),$$

com $Q_\ell(0) = v_\ell v_\ell^*$ e $Q_i(0) = 0$ para $i \neq \ell$. Logo $r(\mathcal{A}_1) < 1$ implica que $\|Q_i(k)\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para $i = 1, \dots, N$ e de (3.5) obtemos que $\|\mathfrak{B}^k e_\kappa\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Como ι e ℓ foram arbitrariamente escolhidos temos que $\|\mathfrak{B}^k e_i\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para cada $i = 1, \dots, Nn$ e portanto $\|\mathfrak{B}^k q\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $q \in \mathbb{C}^{Nn}$. Segue que $r(\mathfrak{B}) < 1$. \square

Observação 3.6: Pode-se verificar facilmente que $r(\mathfrak{B}) < 1$ não implica que $r(\mathcal{A}_1) < 1$. Por exemplo, considere $n = 1$, $N = 2$, $p_{11} = p_{22} = 1/2$, $A_1 = 0.7$, $A_2 = 1.25$. Neste caso $r(\mathfrak{B}) = 0.975$ e $r(\mathcal{A}_1) = 1.02625$.

Nosso resultado principal de MSS resultará das seguintes proposições:

Proposição 3.6 : Fixe $1 \leq \ell \leq 4$. Se $r(\mathcal{A}_\ell) < 1$ então existem $G_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, N$, únicos tais que

$$G_i = T_{\ell_i}(G_1, \dots, G_N) + S_i, \quad i = 1, \dots, N$$

para todo $S_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, N$. Mais ainda,

$$a) G_i = \hat{\varphi}_i^{-1} \left((I_{Nn} - \mathcal{A}_\ell)^{-1} \hat{\varphi}(S_1, \dots, S_N) \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

$$b) S_i = S_i^*, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{se e somente se} \quad G_i = G_i^*, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$c) S_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{implica} \quad G_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$d) S_i > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{implica} \quad G_i > 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Proof : Imediata adaptação do Lemma 1 em [59]. \square

Proposição 3.7 : Fixe $1 \leq \ell \leq 4$. Se existirem $G_i > 0 \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, N$ tais que

$$G_i = T_{\ell_i}(G_1, \dots, G_N) + S_i, \quad i = 1, \dots, N$$

para algum $S_i > 0 \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, N$ então $r(\mathcal{A}_\ell) < 1$.

Proof : Consideramos o sistema homogêneo

$$y(k+1) = \mathcal{A}_\ell^* y(k), \quad k \in \mathbb{N}^0, \quad y(0) \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+) \quad (3.6)$$

onde $\hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+) := \{y \in \mathbb{C}^{Nn}; y = \hat{\varphi}(Q_1, \dots, Q_N), Q_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+, i = 1, \dots, N\}$. Seja $1 \leq \iota \leq 4$ tal que

$\mathcal{A}_\ell^* = \mathcal{A}_\iota$ (note que $\mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3^* = \mathcal{A}_4$). Da Proposição 3.4a),

$$\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k+1)) = T_{ij}(\hat{\varphi}_1^{-1}(y(k)), \dots, \hat{\varphi}_N^{-1}(y(k))), \quad j = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

$$\hat{\varphi}_j^{-1}(y(0)) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+, \quad j = 1, \dots, N$$

Segue da Proposição 3.4c) que $\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k)) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$ para todo $j = 1, \dots, N$ e todo $k \in \mathbb{N}^0$, e portanto

$y(k) \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+)$, $k \in \mathbf{N}^0$. Defina a função ϕ de $\hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+)$ para \mathbf{R} , como :

$$\begin{aligned}\phi_j(y) &:= \text{tr}(\hat{\varphi}_j^{-1}(y) G_j) = \text{tr}(G_j^{1/2} \hat{\varphi}_j^{-1}(y) G_j^{1/2}) \geq 0, j = 1, \dots, N \\ \phi(y) &:= \sum_{j=1}^N \phi_j(y) \geq 0.\end{aligned}$$

Para provar que ϕ é uma função de Lyapunov para o sistema (3.6) precisamos mostrar que (cf [76]) : i) $\phi(y) \rightarrow \infty$ sempre que $\|y\| \rightarrow \infty$ e $y \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+)$, ii) ϕ é contínua, iii) $\phi(0) = 0$, iv) $\phi(y) > 0$ para todo $y \neq 0 \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+)$ e v) $\phi(y(k+1)) - \phi(y(k)) < 0$ sempre que $y(k) \neq 0 \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+)$. Para $y \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+)$ seja $\lambda_{ji}(y) \geq 0$ o i ésimo autovalor de $\hat{\varphi}_j^{-1}(y)$ e $\lambda_i(G_j) > 0$ o i ésimo autovalor de G_j .

Defina $c_0 := \min_{1 \leq i, j \leq N} \lambda_i(G_j) > 0$ (já que $G_j > 0$) e $c_1 := \max_{1 \leq i, j \leq N} \lambda_i(G_j)$. De (3.2ii) temos que

$$c_0 \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \lambda_{ji}(y) \right) \leq \phi(y) \leq c_1 \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \lambda_{ji}(y) \right). \quad (3.8)$$

Note que

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^N \text{tr}((\hat{\varphi}_j^{-1}(y))^2) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \lambda_{ji}(y)^2$$

e pelo fato de $\lambda_{ji}(y)$ ser positivo obtemos que $\|y\| \rightarrow \infty$ se e somente se $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \lambda_{ji}(y) \rightarrow \infty$, e $y = 0$ se e somente se $\lambda_{ji} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$. Logo desses resultados e (3.8) obtemos i), iii) e iv).

Continuidade de ϕ é facilmente verificada e portanto só falta mostrar v). Da Proposição 3.4d) e (3.7) temos que,

$$\begin{aligned}\phi(y(k+1)) - \phi(y(k)) &= \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k+1))) (G_j) \right) - \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k))) (G_j) \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (T_{\ell_j}(\hat{\varphi}_1^{-1}(y(k)), \dots, \hat{\varphi}_N^{-1}(y(k)))) (G_j) \right) - \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k))) (G_j) \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k))) (T_{\ell_j}(G_1, \dots, G_N)) \right) - \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k))) (G_j) \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k))) (T_{\ell_j}(G_1, \dots, G_N) - G_j) \right) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{j=1}^N (\hat{\varphi}_j^{-1}(y(k))) S_j \right) < 0 \text{ sempre que } y(k) \neq 0 \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+).\end{aligned}$$

Portanto mostramos que (3.6) é assintoticamente estável (cf [76], p. 486) e logo $\|\mathcal{A}_t^k y\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para todo $y \in \hat{\varphi}(\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+)$ o que leva a concluir, da Proposição 3.1, que $r(\mathcal{A}_t) = r(\mathcal{A}_\ell) < 1$. \square

Lembrando de (3.4) que $P(\theta(k) = i)$ converge para $\pi(i)$ geometricamente rápido com parâmetros $\eta \geq 0$ e $0 < \xi < 1$, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.8 : Se $r(\mathcal{A}_1) < 1$ então modelo (3.3.a) é MSS de acordo com a Definição 3.1, com

$$q = \sum_{i=1}^N q_i \quad (3.9)$$

$$Q = \sum_{i=1}^N \hat{\varphi}_i^{-1} \left((I_{Nn} - \mathcal{A}_1)^{-1} \hat{\varphi}(\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_N) \right) \quad (3.10)$$

onde

$$u_j = \sum_{i=1}^N \pi(i) p_{ij} B_i r \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{Nn}$$

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_N \end{bmatrix} = (I_{Nn} - \mathfrak{B})^{-1} \hat{u} \in \mathbb{C}^{Nn} \quad (3.11)$$

$$\mathfrak{D}_j = \sum_{i=1}^N p_{ij} \left(B_i \mathfrak{B} B_i^* \pi(i) + A_i q_i r^* B_i^* + B_i r q_i^* A_i^* \right), \quad j = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

Prova : Como $r(\mathcal{A}_1) < 1$, temos da Proposição 3.5 que $r(\mathfrak{B}) < 1$. Vamos mostrar que $\hat{u}(k)$ é uma sequência de Cauchy somável. Realmente (veja(3.4)),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \sup_{\nu \in \mathbb{N}^0} \|\hat{u}(k+\nu) - \hat{u}(k)\| &\leq \sum_{k=0}^N \sup_{\nu \in \mathbb{N}^0} \left\{ \|\hat{u}(k+\nu) - \hat{u}\| + \|\hat{u} - \hat{u}(k)\| \right\} \\ &\leq \sup_{1 \leq j \leq N} \|B_j r\| \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\nu \in \mathbb{N}^0} \sup_{1 \leq i \leq N} \left(|\pi(i) - P(\theta(k+\nu)=i)| + |\pi(i) - P(\theta(k)=i)| \right) \right\} \\ &\leq \sup_{1 \leq j \leq N} \|B_j r\| \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\nu \in \mathbb{N}^0} \left(\eta \xi^k (1 + \xi^\nu) \right) \right\} = \left(2 \eta \sup_{1 \leq j \leq N} \|B_j r\| \right) / (1 - \xi) \end{aligned}$$

Portanto da Proposição 3.2 e Proposição 3.3a) obtemos que $\hat{q}(k) \rightarrow \hat{q}$ quando $k \rightarrow \infty$, onde \hat{q} é dado por (3.11), e como $q(k) = \sum_{i=1}^N q_i(k)$ obtemos que $q(k) \rightarrow q$ quando $k \rightarrow \infty$, onde q é dado por (3.9). Mais ainda a sequência $\{\hat{q}(k); k \geq 0\}$ é Cauchy somável e portanto é facilmente verificável que a sequência

$\{\hat{\varphi}(U_1(q_1(k), \dots, q_N(k)), \dots, U_N(q_1(k), \dots, q_N(k))); k \in \mathbb{N}^0\}$ também será Cauchy somável. Da Proposição 3.2, Proposição 3.3b) e Proposição 3.4a) obtemos que $\hat{\varphi}(Q_1(k), \dots, Q_N(k)) \rightarrow (I_{Nn^2} - \mathcal{A}_1)^{-1} \hat{\varphi}(\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_N)$ quando $k \rightarrow \infty$, onde \mathfrak{D}_j é dado por (3.12). Notando que $\mathcal{Q}(k) = \sum_{i=1}^N Q_i(k)$ concluímos que $\mathcal{Q}(k) \rightarrow \mathcal{Q}$ quando $k \rightarrow \infty$, onde \mathcal{Q} é dado por (3.10). \square

Proposição 3.9 : Se o sistema (3.3.a) é MSS de acordo com a Definição 3.1b) então $r(\mathcal{A}_1) < 1$.

Prova : Temos que $\mathcal{Q}(k) = \sum_{i=1}^N Q_i(k)$ e

$$\hat{\varphi}(Q_1(k+1), \dots, Q_N(k+1)) = \mathcal{A}_1 \hat{\varphi}(Q_1(k), \dots, Q_N(k)) + \hat{\varphi}(U_1((q_1(k), \dots, q_N(k))), \dots, U_N(q_1(k), \dots, q_N(k)))$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(k) &= \sum_{i=1}^N \hat{\varphi}_i^{-1}(\mathcal{A}_1^k \hat{\varphi}(Q_1(0), \dots, Q_N(0))) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \hat{\varphi}_i^{-1}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}_1^{k-j-1} \hat{\varphi}(U_1((q_1(j), \dots, q_N(j))), \dots, U_N(q_1(j), \dots, q_N(j)))\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por hipótese existe $\mathcal{Q} \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$ (que depende apenas de r , \mathfrak{R} e ν) tal que $\mathcal{Q}(k) \rightarrow \mathcal{Q}$ quando $k \rightarrow \infty$ para qualquer $\mathcal{Q}(0) = E(x_0 x_0^*)$, e \mathcal{Q} não depende de x_0 . Para $x_0 = 0$ obtemos que o segundo termo no lado direito de (3.13) converge para \mathcal{Q} quando $k \rightarrow \infty$, e portanto o primeiro termo vai a zero para qualquer x_0 , ν e $\{w(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ satisfazendo A2), A3) e A4). Para qualquer $H_j \in \mathcal{A}_b(\mathbb{C}^n)^+$, $i = 1, \dots, N$ podemos mostrar por argumentos imediatos que existem variáveis aleatórias de segunda ordem x_j tais que $E(x_j x_j^*) = H_j$. Portanto fixando arbitrariamente ι , $1 \leq \iota \leq N$, e fazendo a condição inicial $x_0 = x_\iota$, distribuição inicial $\nu(\iota) = 1$, obtemos que

$$Q_j(0) = E(x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = j\}}) = \begin{cases} H_j, & j = \iota \\ 0, & j \neq \iota \end{cases}$$

e portanto para todo $j = 1, \dots, N$

$$0 \leq \hat{\varphi}_j^{-1}(\mathcal{A}_1^k \hat{\varphi}(Q_1(0), \dots, Q_N(0))) \leq \sum_{i=1}^N \hat{\varphi}_i^{-1}(\mathcal{A}_1^k \hat{\varphi}(Q_1(0), \dots, Q_N(0))) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

o que mostra que $\mathcal{A}_1^k \hat{\varphi}(Q_1(0), \dots, Q_N(0)) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Como ι foi escolhido de forma arbitrária, concluímos que $\mathcal{A}_1^k \hat{\varphi}(H_1, \dots, H_N) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e da Proposição 3.1, $r(\mathcal{A}_1) < 1$. \square

Proposição 3.10 : O sistema (3.3.a) é MSS e acordo com a Definição 3.1 se e somente se é AWSS de acordo com a definição 3.2.

Prova : É imediato verificar que AWSS implica em MSS. Vamos mostrar por indução em ι que se o sistema (3.3.a) é MSS então $\mathcal{Q}_j(\iota, k) \rightarrow \mathcal{Q}_j(\iota)$ quando $k \rightarrow \infty$, para algum $\mathcal{Q}_j(\iota) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $j = 1, \dots, N$. Realmente da Proposição 3.9, $r(\mathcal{A}_1) < 1$ o que implica que $q_j(k) \rightarrow q_j$ e $Q_j(k) \rightarrow Q_j$ quando $k \rightarrow \infty$ para algum $q_j \in \mathbb{C}^n$, $Q_j \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$, $j = 1, \dots, N$. Da Proposição 3.3c) com $\iota = 1$ é imediato que $\mathcal{Q}_j(1, k) \rightarrow \mathcal{Q}_j(1)$ quando $k \rightarrow \infty$ para algum $\mathcal{Q}_j(1) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$, $j = 1, \dots, N$. Assumindo que a hipótese de indução seja satisfeita para ι , é fácil verificar através da Proposition 3.3c) que o caso $\iota+1$ também será satisfeito. Finalmente note que

$$\mathcal{Q}(\iota, k) = \sum_{j=1}^N \mathcal{Q}_j(\iota, k) \rightarrow \sum_{j=1}^N \mathcal{Q}_j(k) = \mathcal{Q}(\iota) \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad \square$$

O próximo resultado mostra a equivalência entre MSS e o raio espectral de uma matriz aumentada ser menor que 1.

Teorema 3.1 : O sistema (3.3.a) é MSS se e somente se $r(\mathcal{A}_1) < 1$.

Prova : Imediato das Proposições 3.8 e 3.9. □

Exemplo 3.1 : Considere $n = 1$, $N = 2$, $p_{11} = p_{22} = 1/2$, $A_1 = 4/3$, $A_2 = 1/3$. Então

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 16/9 & 1/9 \\ 16/9 & 1/9 \end{bmatrix}, \quad r(\mathcal{A}_1) = 17/18 < 1$$

e o sistema é MSS apesar de termos um modo instável $A_1 = 4/3$. Note que se $p_{11} = 0.9$, $p_{22} = 0.1$ (de modo que o sistema fica mais tempo em A_1), então

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 144/90 & 1/10 \\ 16/90 & 1/90 \end{bmatrix}, \quad r(\mathcal{A}_1) = 1.61 > 1$$

e o sistema não é mais MSS. Isto mostra a conexão entre MSS e a probabilidade de visitas a modos instáveis.

Temos as seguintes quatro formas equivalentes para a equação de Lyapunov:

Teorema 3.2 : As seguintes afirmações são equivalentes a MSS do sistema (3.3.a):

a) para alguns $G_j > 0 \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)$, $j = 1, \dots, N$ e algum inteiro η , $1 \leq \eta \leq 4$, temos que

$$G_j - T_{\eta j}(G_1, \dots, G_N) > 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

b) para qualquer $S_j > 0 \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$, $j = 1, \dots, N$ e qualquer inteiro η , $1 \leq \eta \leq 4$, existem únicos $G_{\eta j} > 0 \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$, $j = 1, \dots, N$ tais que $G_{\eta j} - T_{\eta j}(G_{\eta 1}, \dots, G_{\eta N}) = S_j$, $j = 1, \dots, N$. Além disto,

$$G_{\eta j} = \hat{\varphi}_j^{-1} \left(\left(I_{Nn^2} - \mathcal{A}_\eta \right)^{-1} \hat{\varphi} (S_1, \dots, S_N) \right), j = 1, \dots, N.$$

Prova : É óbvio que b) implica a). Da Proposição 3.7 e notando que $r(\mathcal{A}_1) = r(\mathcal{A}_2) = r(\mathcal{A}_3) = r(\mathcal{A}_4)$ obtemos que a) implica MSS. Finalmente da Proposition 3.6 temos que MSS implica b). \square

Exemplo 3.2 : Considere exemplo 3.1 novamente com $p_{11} = p_{22} = 1/2$. Aplicando Teorema 3.2 b) com $\eta = 1$ ou 4 e $S_1 = S_2 = 1/18$ obtemos que $G_j - \frac{1}{2} (G_1 \frac{16}{9} + G_2 \frac{1}{9}) = \frac{1}{18}$, $j = 1, 2$, possui uma solução positiva $G_1 = G_2 = 1$. Para $\eta = 2$ ou 3, $S_1 = 1/9$, $S_2 = 4/9$ temos que

$$G_1 - \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \frac{16}{9} = \frac{1}{9}, G_2 - \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \frac{1}{9} = \frac{4}{9},$$

que possui uma solução positiva $G_1 = 9$, $G_2 = 1$.

Finalmente temos o seguinte resultado mostrando a equivalência entre as definições 3.1 e 3.2.

Teorema 3.3 : As seguintes afirmações são equivalentes:

- O sistema (3.3.a) é AWSS de acordo com a definição 3.2.
- O sistema (3.3.a) é MSS de acordo com a definição 3.1.
- O sistema (3.3.a) é MSS de acordo com a definição 3.1b).

Prova : É óbvio que b) implica c). Proposição 3.10 mostra a equivalência entre a) e b). Proposição 3.9 completa a prova. \square

Observação : Note que para $N = 1$, Teoremas 3.1 e 3.2 se reduzem aos resultados conhecidos de estabilidade de sistemas lineares.

Para o caso em que $p_{ij} = p_j$ para todo $i, j = 1, \dots, N$ temos as seguintes condições necessárias e suficientes para MSS:

Corolário 3.1 : Se $p_{ij} = p_j$ para todo $i, j = 1, \dots, N$ então as seguintes afirmações são equivalentes à MSS do sistema (3.3.a):

- para algum $G > 0 \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ temos que $G - \sum_{j=1}^N p_j A_j^* G A_j > 0$.
- para qualquer $S > 0 \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ existe $G > 0 \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ tal que

$$G - \sum_{j=1}^N p_j A_j^* G A_j = S.$$

Prova : Notando que i) implica no Teorema 2 a) com $\eta = 4$, obtemos que i) \Rightarrow MSS. Similarmente, se Teorema 2 b) é satisfeito então fazendo $\eta = 4$ e $S_j = S$ obtemos ii), o que mostra que MSS \Rightarrow ii). Obviamente ii) \Rightarrow i), o que completa a prova do corolário. \square

Do Teorema 3.2 podemos derivar algumas condições suficientes mais simples de serem verificadas para MSS de (3.3.a):

Corolário 3.2 : Condições i) a iv) abaixo são equivalentes :

$$\text{i) } \exists \alpha_j > 0, j = 1, \dots, N \text{ tais que } \alpha_j - \sum_{i=1}^N p_{ij} \alpha_i r(A_i A_i^*) > 0, j = 1, \dots, N.$$

$$\text{ii) } \exists \alpha_j > 0, j = 1, \dots, N \text{ tais que } \alpha_i - \sum_{j=1}^N p_{ij} \alpha_j r(A_i A_i^*) > 0, i = 1, \dots, N.$$

$$\text{iii) } \exists \alpha_j > 0, j = 1, \dots, N \text{ tais que } \alpha_j - \sum_{i=1}^N p_{ij} \alpha_i r(A_j A_j^*) > 0, j = 1, \dots, N.$$

$$\text{iv) } \exists \alpha_j > 0, j = 1, \dots, N \text{ tais que } \alpha_i - \sum_{j=1}^N p_{ij} \alpha_j r(A_j A_j^*) > 0, i = 1, \dots, N.$$

Além disto, se uma das condições acima for satisfeita então o sistema (3.3.a) é MSS.

Proof : Considere o sistema homogêneo

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{a}_{\theta(k)} \tilde{x}(k), k \in \mathbb{N}^0 \quad (3.14)$$

onde $\tilde{a}_i := (\tau(A_i A_i^*))^{1/2}$, $i = 1, \dots, N$. Aplicando o Teorema 3.2 ao sistema (3.14) obtemos que condições

i) a iv) acima são equivalentes. Suponha que condição iii) é satisfeita e faça $G_j = \alpha_j I_n > 0$, $j = 1, \dots, N$.

Como

$$G_j - T_{3j}(G_1, \dots, G_N) = \alpha_j I_n - \left(\sum_{i=1}^N p_{ij} \alpha_i \right) A_j A_j^* \geq \left(\alpha_j - \sum_{i=1}^N p_{ij} \alpha_i r(A_j A_j^*) \right) I_n > 0$$

obtemos do Teorema 3.2 a) que o sistema (3.3.a) é MSS. \square

Corolário 3.3 : Se para números reais $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, uma das condições abaixo é satisfeita

$$1) \left(\sum_{i=1}^N \delta_i p_{ij} A_i A_i^* \right) < \delta_j, j = 1, \dots, N$$

$$2) \left(\sum_{j=1}^N \delta_j p_{ij} A_j^* A_j \right) < \delta_i, i = 1, \dots, N$$

então o sistema (3.3.a) é MSS. Além disso estas condições são mais fracas do que as do Corolário 3.2.

Proof : Suponha que a condição 1) seja satisfeita e faça $G_j = \delta_j I_n > 0$, $i = 1, \dots, N$. Então seguindo os argumentos do Corolário anterior,

$$G_j - T_{1j}(G_1, \dots, G_N) = \delta_j I_n - \sum_{i=1}^N p_{ij} \delta_i A_i A_i^* \geq \delta_j - \left(\sum_{i=1}^N p_{ij} \delta_i A_i A_i^* \right) I_n > 0, j = 1, \dots, N$$

e o sistema (3.3.a) é MSS. A prova da condição 2) é similar. Note que se as condições do Corolário 3.2 são satisfeitas então da condição i) obtemos que

$$\begin{aligned} r\left(\sum_{i=1}^N p_{ij} \alpha_i A_i A_i^*\right) &= \left\| \sum_{i=1}^N p_{ij} A_i A_i^* \alpha_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^N p_{ij} \|A_i A_i^*\| \alpha_i = \sum_{i=1}^N p_{ij} r(A_i A_i^*) \alpha_i < \alpha_j, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

o que implica na condição 1). Da mesma forma podemos mostrar que a condição iv) do Corolário 3.2 implica na condição 2) acima. \square

Vamos ilustrar as condições acima com alguns exemplos.

Exemplo 3.3 : Este exemplo mostra que as condições 1) e 2) do Corolário 3.3 não são equivalentes.

Realmente, considere $n = 2$, $N = 2$, $p_{ij} = p_j \in (0,1)$, $i, j = 1, 2$, e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2 \text{ números reais.}$$

Então condição 1) será satisfeita se para algum $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$, temos que

$$r\left(\text{diag}(\delta_2 a_2^2, \delta_1 a_1^2)\right) p_j = \max\{\delta_1 a_1^2, \delta_2 a_2^2\} p_j < \delta_j, \quad j = 1, 2$$

ou, equivalentemente, se $p_1 a_1^2 < 1$, $p_2 a_2^2 < 1$. Por outro lado, condição 2) será satisfeita se para algum $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, temos que

$$r\left(\text{diag}(\alpha_1 p_1 a_1^2 + \alpha_2 p_2 a_2^2, 0)\right) = \alpha_1 p_1 a_1^2 + \alpha_2 p_2 a_2^2 < \alpha_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.15)$$

Note que se (3.15) é satisfeita então claramente $p_1 a_1^2 < 1$ e $p_2 a_2^2 < 1$. Considere $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, $a_1^2 = a_2^2 = \frac{4}{3}$. Para esta escolha, $p_1 a_1^2 < 1$ e $p_2 a_2^2 < 1$ mas (3.15) não será satisfeito para qualquer $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$. Portanto condições 1) e 2) do Corolário 3.3 não são equivalentes. Note que para este exemplo condição iv) do Corolário 3.2 será a mesma que (3.15) e que existirá uma solução positiva definida de $G - p_1 A_1^* G A_1 - p_2 A_2^* G A_2 = I_2$ se e somente se $a_2^2 p_2 < 1$, e portanto do Corolário 3.1 esta é uma condição necessária e suficiente para MSS.

Exemplo 3.4 : Considere o exemplo 3.3 com A_1 trocada por :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Repetindo os mesmos argumentos que acima obtemos que a condição 2) será $p_1 a_1^2 < 1$ e $p_2 a_2^2 < 1$,

enquanto que a condição 1 será a mesma que (3.15). Isto mostra que em geral não podemos dizer que uma das condições do Corolário 3.3 será mais forte que a outra. Novamente neste problema temos que MSS é equivalente a $a_2^2 p_2 < 1$.

3.4.2. Estabilidade com prob. um

No restante desta seção vamos considerar a versão homogênea do modelo (3.3.a), isto é

$$x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) \quad (3.16)$$

e derivar condições necessárias e suficientes para ASC de $x(k)$ para 0. Inicialmente mostraremos que MSS implica em ASC.

Corolário 3.4 : Se o sistema (3.16) é MSS então $x(k) \rightarrow 0$ com prob. 1 (w.p.1).

Prova : Se $r(\mathcal{A}_1) < 1$ então para algum $\mu \geq 0$, $0 < \gamma < 1$, $\|\mathcal{A}_1^k\| \leq \mu \gamma^k$ para $k = 0, 1, \dots$. Portanto, lembrando que $Q_j(k) \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+$, obtemos que,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq N} \|Q_j(k)\| &\leq \left(\text{tr} \left(Q_1(k)^2 + \dots + Q_N(k)^2 \right) \right)^{1/2} = \|\hat{\varphi}(Q_1(k), \dots, Q_N(k))\| \\ &\leq \|\mathcal{A}_1^k\| \|\hat{\varphi}(Q_1(0), \dots, Q_N(0))\| \leq \mu' \gamma^k \end{aligned}$$

onde $\mu' = \mu \|\hat{\varphi}(Q_1(0), \dots, Q_N(0))\|$. Da mesma forma que na Proposição 3.5,

$$E(\|x(k)\|^2) \leq n \sum_{i=1}^N \|Q_i(k)\| \leq (n \mu' N) \gamma^k, \quad k \in \mathbf{N}^0.$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} E(\|x(k)\|^2) \leq (n \mu' N) / (1 - \gamma)$$

e o resultado segue aplicando o Lema de Borel-Cantelli. \square

Assumiremos no restante desta seção que a cadeia de Markov $\{\theta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ é ergódica. Para $x \in \mathbf{C}^n$, $\|x\|$ denota qualquer norma em \mathbf{C}^n e para $A \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ $\|A\|$ denota a norma induzida em $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$. Para ν inteiro positivo definimos o processo estocástico $\tilde{\theta}_\nu(k)$, tomando valores em $\{1, \dots, N\}^\nu$ (o espaço produto de $\{1, \dots, N\}$ ν vezes) com:

$$\tilde{\theta}_\nu(k) = (\theta(k\nu + \nu - 1), \dots, \theta(k\nu)) \in \{1, \dots, N\}^\nu, \quad k \in \mathbf{N}^0.$$

Claramente $\tilde{\theta}_\nu(k)$ é uma cadeia de Markov e para $\tilde{i}_\nu, \tilde{j}_\nu \in \{1, \dots, N\}^\nu$, $\tilde{i}_\nu = (i_{\nu-1}, \dots, i_0)$, $\tilde{j}_\nu = (j_{\nu-1}, \dots, j_0)$, as probabilidades de transição de $\tilde{\theta}_\nu(k)$ são

$$\tilde{p}_{\tilde{i}_\nu \tilde{j}_\nu} := P(\tilde{\theta}_\nu(k+1) = \tilde{j}_\nu \mid \tilde{\theta}_\nu(k) = \tilde{i}_\nu) = p_{i_{\nu-1} j_0} p_{j_0 j_1} \dots p_{j_{\nu-2} j_{\nu-1}}$$

Conforme comentado em (3.4), existe uma distribuição de probabilidade limite $\{\pi(i); i=1, \dots, N\}$ (que no caso não depende da distribuição de probabilidade inicial já que assumimos a cadeia de Markov ergódica) tal que $P(\theta(k) = i) \rightarrow \pi(i)$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ quando $k \rightarrow \infty$ e portanto,

$$P(\bar{\theta}_\nu(k) = \bar{j}_\nu) = P(\theta(k\nu) = j_0) P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{\nu-2} j_{\nu-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{\pi}_{\bar{j}_\nu} := \pi_{j_0} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{\nu-2} j_{\nu-1}}$$

Definimos para todo $\bar{i}_\nu \in \{1, \dots, N\}^\nu$, $\bar{A}_{\bar{i}_\nu} = A_{i_{\nu-1}} \cdots A_{i_0}$ e $\bar{x}_\nu(k) = x(k\nu)$. Logo,

$$\bar{x}_\nu(k+1) = x((k+1)\nu) = A_{\theta(k\nu+\nu-1)} \cdots A_{\theta(k\nu)} x(k\nu) = \bar{A}_{\bar{\theta}_\nu(k)} \bar{x}_\nu(k)$$

e portanto

$$\|\bar{x}_\nu(k+1)\| \leq \prod_{i=0}^k \|\bar{A}_{\bar{\theta}_\nu(i)}\| \|\bar{x}_\nu(0)\| \quad (3.17)$$

Teorema 3.4 : Se para algum inteiro positivo ν temos que

$$\prod_{\bar{i}_\nu \in \{1, \dots, N\}^\nu} \|\bar{A}_{\bar{i}_\nu}\| \bar{\pi}_{\bar{i}_\nu} < 1 \quad (3.18)$$

então $x(k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ w.p. 1.

Prova : De (3.17) é fácil ver que para $x(0) \neq 0$

$$\frac{1}{k+1} \ln \frac{\|\bar{x}_\nu(k+1)\|}{\|\bar{x}_\nu(0)\|} \leq \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \ln \|\bar{A}_{\bar{\theta}_\nu(i)}\|.$$

Note que $\bar{\theta}_\nu(k)$ é um processo regenerativo e do Teorema 5.10 de [79] temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \ln \|\bar{A}_{\bar{\theta}_\nu(i)}\| &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{\bar{i}_\nu \in \{1, \dots, N\}^\nu} (\ln \|\bar{A}_{\bar{i}_\nu}\|) \bar{\pi}_{\bar{i}_\nu} \\ &= \ln \left(\prod_{\bar{i}_\nu \in \{1, \dots, N\}^\nu} \|\bar{A}_{\bar{i}_\nu}\| \bar{\pi}_{\bar{i}_\nu} \right) \quad \text{w.p.1} \end{aligned}$$

e se (3.18) é satisfeito então

$$\frac{\|\bar{x}_\nu(k+1)\|}{\|\bar{x}_\nu(0)\|} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ w.p.1.}$$

Note que para qualquer $\ell \in \{1, \dots, \nu-1\}$

$$x(k\nu+\ell) = A_{\theta(k\nu+\ell-1)} \cdots A_{\theta(k\nu)} x(k\nu)$$

de modo que

$$\frac{1}{k} \ln \frac{\|\tilde{x}_\nu(k+\ell)\|}{\|\tilde{x}_\nu(0)\|} \leq \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \|A_i\|}{\|\tilde{x}_\nu(0)\|} \right)^\ell + \frac{1}{k} \ln \frac{\|\tilde{x}_\nu(k)\|}{\|\tilde{x}_\nu(0)\|}$$

o que mostra que $\|\tilde{x}_\nu(k)\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ w.p.1. \square

Usando a mesma técnica que acima, temos o seguinte resultado. Para $P > 0$ em $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ e $A \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ define

$$\zeta_P(A) = \min_{x \in \mathbf{C}^n, x \neq 0} \frac{x^* A^* P A x}{x^* P x}$$

Corolário 3.5 : Se para algum inteiro positivo ν e $P > 0$ em $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$ temos que

$$\prod_{\tilde{i}_\nu \in \{1, \dots, N\}^\nu} \zeta_P \left(\tilde{A}_{\tilde{i}_\nu} \right)^{\tilde{\pi}_{\tilde{i}_\nu}} > 1$$

então $\|\tilde{x}_\nu(k)\| \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ w.p.1.

Prova : Temos que

$$\tilde{x}_\nu^*(k+1) P \tilde{x}_\nu(k+1) = \tilde{x}_\nu^*(k) \tilde{A}_{\tilde{\theta}_\nu(k)}^* P \tilde{A}_{\tilde{\theta}_\nu(k)} \tilde{x}_\nu(k) \geq \zeta_P(\tilde{A}_{\tilde{\theta}_\nu(k)}) \tilde{x}_\nu^*(k) P \tilde{x}_\nu(k)$$

e portanto para $\tilde{x}_\nu(0) \neq 0$,

$$\frac{\tilde{x}_\nu^*(k+1) P \tilde{x}_\nu(k+1)}{\tilde{x}_\nu^*(0) P \tilde{x}_\nu(0)} \geq \prod_{i=0}^k \zeta_P \left(\tilde{A}_{\tilde{\theta}_\nu(i)} \right)$$

Repetindo o mesmo raciocínio que no teorema anterior, concluímos que $\|\tilde{x}_\nu(k)\| \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ w.p.1. Note agora que para $\ell \in \{1, \dots, \nu\}$,

$$x(k\nu+\nu) = A_{\theta(k\nu+\nu-1)} \cdots A_{\theta(k\nu+\nu-\ell)} x(k\nu+\nu-\ell)$$

de modo que

$$\|\tilde{x}_\nu(k+1)\| \leq \left(\max_{i \in \{1, \dots, N\}} \|A_i\| \right)^{\nu-\ell} \|\tilde{x}_\nu(k)\|$$

o que mostra que $\|\tilde{x}_\nu(k)\| \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ w.p.1. \square

Exemplo 3.5 : Podemos verificar que os sistemas nos exemplos 3.3 e 3.4 são sempre ASC. Realmente, $A_2 A_1 = 0$ e para $\nu = 2$, $\tilde{i}_3 = (2, 1)$ temos que $\tilde{\pi}_{\tilde{i}_3} = p_2 p_1 > 0$ de modo que o produto em (3.18) é igual a zero.

Exemplo 3.6 : Fazendo uma escolha apropriada da norma em \mathbb{C}^n podemos forçar a desigualdade (3.18) ocorrer. Considere $n = 2$, $N = 2$, $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$ e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Usando a norma Euclideana obtemos que $\|A_1\| = 1.618$, $\|A_2\| = 2/3$ de modo que $\|A_1\| \|A_2\| = 1.078 > 1$. Mas se definirmos $P = \text{diag}(1/25, 1)$ e considerarmos a norma $\|\cdot\|_P$ em $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$ induzida por $\|x\|_P = (x^* P x)^{1/2}$ em \mathbb{C}^n obtemos que $\|A_1\|_P = 1.105$, $\|A_2\|_P = 2/3$ de modo que $\|A_1\|_P \|A_2\|_P = 0.737$ e o produto em (3.18) com $\nu = 1$ é menor do que 1.

Concluiremos esta seção com um exemplo baseado em um caso estudado em [8]. Considere uma sequência aleatória de vetores n -dimensionais $u_{\theta(k)}$, onde $\theta(k)$ é uma cadeia de Markov tomado valores em $\{1, \dots, N\}$ e $\{u_1, \dots, u_N\}$ é o conjunto de possíveis valores de $u_{\theta(k)}$. Suponha que $u_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$. Esta sequência representa a entrada de um sistema cuja sequência de saída $y(k)$ é dada por:

$$y(k) = u_{\theta(k)}' w, \quad w \in \mathbb{R}^n$$

Estimamos recursivamente w da seguinte forma:

$$w(k+1) = w(k) + \mu \frac{u_{\theta(k)}}{u_{\theta(k)}' u_{\theta(k)}} (y(k) - \hat{y}(k))$$

$$\hat{y}(k) = u_{\theta(k)}' w(k)$$

para $\mu \in (0, 2)$. Escrevendo $e(k) = w(k) - w$, temos que

$$e(k+1) = \left(I_n - \mu \frac{u_{\theta(k)} u_{\theta(k)}'}{u_{\theta(k)}' u_{\theta(k)}} \right) e(k) = A_{\theta(k)} e(k)$$

onde

$$A_i = I_n - \mu \frac{u_i u_i'}{u_i' u_i}, \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

É fácil verificar que $\|A_i\| = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$ (onde consideramos novamente a norma Euclideana). Para um inteiro positivo κ qualquer considere $i_p \in \{1, \dots, N\}$, $p = 1, \dots, \kappa$. Temos os seguintes resultados:

Lema 3.1 : Suponha que $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_\kappa}\}$ gera o \mathbb{R}^n . Então para qualquer $x \neq 0$ em \mathbb{R}^n podemos achar $p \in \{1, \dots, \kappa\}$ tal que $u_{i_p}^t A_{i_{p+1}} \dots A_{i_\kappa} x \neq 0$.

Proof : Obviamente $\kappa \geq n$. Suponha que exista $x \neq 0$ em \mathbb{R}^n tal que

$$u_{i_\kappa}^t x = 0, u_{i_{\kappa-1}}^t A_{i_\kappa} x = 0, \dots, u_{i_1}^t A_{i_2} \dots A_{i_\kappa} x = 0$$

Note que

$$A_{i_\kappa} x = x - \mu \frac{u_{i_\kappa}^t u_{i_\kappa} x}{u_{i_\kappa}^t u_{i_\kappa}} = x$$

de modo que $u_{i_{\kappa-1}}^t A_{i_\kappa} x = u_{i_{\kappa-1}}^t x = 0$. Repetindo os mesmos argumentos temos que $u_{i_j}^t x = 0$ para todo $j = 1, \dots, \kappa$, o que é uma contradição já que $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_\kappa}\}$ gera o \mathbb{R}^n . \square

Lema 3.2 : Suponha que $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_\kappa}\}$ gera o \mathbb{R}^n . Então $\|A_{i_1} \dots A_{i_\kappa}\| < 1$.

Prova : Para $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, $x \neq 0$, temos do Lema 3.1 que existe $p \in \{1, \dots, \kappa\}$ tal que $u_{i_p}^t A_{i_{p+1}} \dots A_{i_\kappa} x \neq 0$. Considere uma base ortogonal $\{v_j; j = 1, \dots, n\}$ de \mathbb{R}^n tal que $v_1 = u_{i_p} / \|u_{i_p}\|$ e denote $y = A_{i_{p+1}} \dots A_{i_\kappa} x$. Então

$$\|A_{i_p} y\|^2 = \left(\frac{u_{i_p}^t y (1 - \mu)}{\|u_{i_p}\|} \right)^2 + \sum_{j=2}^n (v_j^t y)^2 < \left(\frac{u_{i_p}^t y}{\|u_{i_p}\|} \right)^2 + \sum_{j=2}^n (v_j^t y)^2 = \|y\|^2 \quad (3.19)$$

já que $u_{i_p}^t y \neq 0$ e $\mu \in (0, 2)$. De (3.19) e lembrando que $\|A_i\| = 1, i \in \{1, \dots, N\}$ temos que

$$\|A_{i_1} \dots A_{i_{p-1}} A_{i_p} A_{i_{p+1}} \dots A_{i_\kappa} x\| \leq \prod_{j=1}^{p-1} \|A_{i_j}\| \|A_{i_p} y\| = \|A_{i_p} y\| < \|y\| =$$

$$\|A_{i_{p+1}} \dots A_{i_\kappa} x\| \leq \prod_{j=p+1}^{\kappa} \|A_{i_j}\| \|x\| = \|x\|$$

e concluímos que $\|A_{i_1} \dots A_{i_\kappa} x\| < \|x\|$ para todo $x \neq 0$ em \mathbb{R}^n . Lembrando que o máximo de uma função contínua em um conjunto compacto é atingido em um ponto deste conjunto, obtemos que

$$\|A_{i_1} \dots A_{i_\kappa}\| = \max \{ \|A_{i_1} \dots A_{i_\kappa} x\|; \|x\| = 1, x \text{ em } \mathbb{R}^n \} < 1 \quad \square$$

Finalmente o lema seguinte nos fornece condições suficientes para ASC.

Lema 3.3 : Se $\{u_1, \dots, u_N\}$ gera o \mathbb{R}^n então $\|e(k)\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ w.p.1 .

Prova : Suponha que $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_n}\}$ forma uma base para o \mathbb{R}^n . Da hipótese de ergodicidade da cadeia de

Markov $\{\theta(k)\}$, podemos encontrar para cada $i_j, j = 1, \dots, n$ um inteiro positivo ν_j e $i_j^\ell \in \{1, \dots, N\}$, $\ell = 1, \dots, \nu_j$ tal que $i_j^1 = i_j$, $i_j^{\nu_j} = i_{j+1}$ e

$$P_{i_j^1 i_j^2} P_{i_j^2 i_j^3} \dots P_{i_j^{\nu_j-1} i_j^{\nu_j}} \neq 0.$$

Obviamente o conjunto $\{u_{i_1^1}, \dots, u_{i_1^{\nu_1}}, \dots, u_{i_n^1}, \dots, u_{i_n^{\nu_n}}\}$ gera o \mathbb{R}^n de modo que do Lema 3.2,

$$\|A_{i_1^1} \dots A_{i_1^{\nu_1}} \dots A_{i_n^1} \dots A_{i_n^{\nu_n}}\| < 1. \quad (3.20)$$

Mais ainda,

$$\pi_{i_1^1} P_{i_1^1 i_1^2} \dots P_{i_1^{\nu_1-1} i_1^{\nu_1}} \dots P_{i_n^1 i_n^2} \dots P_{i_n^{\nu_n-1} i_n^{\nu_n}} \neq 0$$

e definindo $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_n$ obtemos que $\|\tilde{A}_{\tilde{i}_\nu}\| \leq 1$ para qualquer $\tilde{i}_\nu \in \{1, \dots, N\}^\nu$. Deste resultado e (3.20) concluímos que o produto em (3.18) com ν definido como acima será menor do que um. \square

3.5. Filtro ótimo linear estacionário

Estaremos interessados nesta seção com o problema da obtenção de um estimador com mínimo erro médio quadrático estacionário para a classe de problemas descrita por (3.3). Assume-se que a cada instante k , tanto a saída como o modo de operação do sistema são conhecidos. Deseja-se então projetar um conjunto de ganhos de filtros, cada um associado a um modo de operação do sistema, de modo a minimizar o valor esperado do erro médio quadrático do estimador. Associado a este problema estará um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas entre si. Condições para a existência e unicidade de uma solução não negativa definida são apresentadas.

O modelo que consideramos nesta seção é descrito pela equação (3.3) e assumimos que $\{w(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ e $\{\eta(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ possuem média nula e matriz de covariância igual a identidade, e $\{\theta(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ é uma cadeia de Markov ergódica. Denotamos $\pi(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(\theta(k) = i) > 0$.

Dos resultados da Seção 3.4 e da definição de sistemas detectáveis e estabilizáveis para o caso linear, temos a seguinte definição:

Definição 3.3 : Para $L = (L_1, \dots, L_N) \in \mathcal{H}^{s,n}$ diremos que (A, L) é estabilizável na média quadrática se existe $J = (J_1, \dots, J_N) \in \mathcal{H}^{n,s}$ tal que o modelo (3.3.a) é MSS trocando A_i por $A_i - L_i J_i$, $i = 1, \dots, N$. Diremos neste caso que J estabiliza (A, L) .

Definição 3.4 : Para $L = (L_1, \dots, L_N) \in \mathcal{H}^{n,s}$ diremos que (L, A) é detectável na média quadrática se existe $J = (J_1, \dots, J_N) \in \mathcal{H}^{s,n}$ tal que o modelo (3.3a) é MSS trocando A_i por $A_i - J_i L_i$. Neste caso diremos que J estabiliza (L, A) .

Colocamos agora nosso problema de filtragem ótima estacionária. Seja $\Gamma = \{K = (K_1, \dots, K_N) \in \mathcal{H}^{s_2, n}; K \text{ estabiliza } (D, A)\}$. Para $K \in \Gamma$ defina o estimador $\hat{x}(k)$ de $x(k)$ por:

$$\hat{x}(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) + K_{\theta(k)} (y(k) - D_{\theta(k)} x(k)) \quad (3.21)$$

$$\hat{x}(0) = E(x(0)).$$

O erro associado ao estimador acima é dado por $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, e de (3.3) e (3.21) segue que

$$e(k+1) = (A_{\theta(k)} - K_{\theta(k)} D_{\theta(k)}) e(k) + C_{\theta(k)} w(k) - K_{\theta(k)} E_{\theta(k)} \eta(k) \quad (3.22)$$

$$e(0) = x(0) - E(x(0)).$$

Além disto, definindo

$$\tilde{Q}_j(k) = E(e(k)e(k)^* 1_{\{\theta(k)=j\}}), j = 1, \dots, N \quad (3.23)$$

$$\tilde{Q}(k) = (\tilde{Q}_1(k), \dots, \tilde{Q}_N(k)) \in \mathcal{H}^{n+}$$

$$\tilde{U}_j(k) = \sum_{i=1}^N P(\theta(k) = i) p_{ij} \left(C_i C_i^* + K_i E_i E_i^* K_i^* \right) \quad (3.24)$$

$$\tilde{U}(k) = (\tilde{U}_1(k), \dots, \tilde{U}_N(k)) \in \mathcal{H}^{n+}$$

temos de (3.22), hipóteses A3, A4, A5 e da Proposição 3.3.b) que

$$\tilde{Q}(k+1) = \mathcal{L}(\tilde{Q}(k)) + \tilde{U}(k) \quad (3.25)$$

onde $\mathcal{L}(\tilde{Q}(k)) = (T_{11}(\tilde{Q}(k)), \dots, T_{1N}(\tilde{Q}(k)))$ com $T_{1j}(\tilde{Q}(k))$ definido como na seção 3.4 trocando A_i por $F_i = A_i - K_i D_i$. Como $r(\mathcal{L}) < 1$, da Proposição 3.8 e Observação 3.6 decorre que

$$\tilde{Q}(k) \rightarrow \tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N) \text{ quando } k \rightarrow \infty \quad (3.25.a)$$

para algum $\tilde{Q} \in \mathcal{H}^{n+}$. Definindo

$$f(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} E(\|e(k)\|^2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N E(\|e(k)\|^2 1_{\{\theta(k)=i\}}) \right) = \sum_{i=1}^N \text{tr} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{Q}_i(k) \right) = \sum_{i=1}^N \text{tr}(\tilde{Q}_i)$$

escrevemos nosso problema de estimação ótima linear estacionária com menor valor esperado do erro médio quadrático como: encontre $\hat{K} \in \Gamma$ tal que $\hat{f} = \min_{K \in \Gamma} f(K) = f(\hat{K})$.

Observação 3.7 : Das equações (3.23) a (3.25.a) e ergodicidade da cadeia de Markov $\{\theta(k); k \in \mathbf{N}^0\}$ concluímos que \tilde{Q} satisfaz a seguinte equação:

$$\tilde{Q} = \mathcal{L}(\tilde{Q}) + \tilde{U}$$

onde $\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_N) \in \mathcal{H}^{n+}$ é dado por

$$\tilde{U}_j = \sum_{i=1}^N \pi_i p_{ij} (C_i C_i^* + K_i E_i E_i^* K_i^*)$$

O resultado que se segue, provado em [24], apresenta condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de uma solução única não negativa definida para um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas entre si, que fornece a solução do problema do estimador ótimo estacionário.

Teorema 3.5 : Suponha que (A, C) seja estabilizável na média quadrática e que (D, A) seja detectável na média quadrática. Então existe uma única solução $\hat{P} = (\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_N) \in \mathcal{H}^{n+}$ satisfazendo

$$\hat{P}_j = \sum_{i=1}^N p_{ij} (A_i - \hat{K}_i D_i) \hat{P}_i (A_i - \hat{K}_i D_i)^* + \sum_{i=1}^N p_{ij} \pi_i \left((\hat{K}_i E_i) (\hat{K}_i E_i)^* + C_i C_i^* \right), j=1, \dots, N$$

onde (lembrar que $\pi_i > 0$ e $E_i E_i^* > 0$ por hipótese)

$$\hat{K}_i = A_i \hat{P}_i D_i^* (D_i \hat{P}_i D_i^* + \pi_i E_i E_i^*)^{-1}, i=1, \dots, N.$$

Além disto, $\hat{K} = (\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_N) \in \Gamma$ e $\hat{f} = f(\hat{K})$.

3.6. Controle ótimo

3.6.1. Preliminares

Nesta seção analisaremos o problema do controle ótimo quadrático para a classe de sistemas descrita por (3.3). Consideraremos o estado e o modo de operação do sistema acessíveis em todos os instantes de tempo, e os funcionais a serem minimizados serão o custo quadrático com horizonte infinito (caso sem ruído) e o custo médio a longo prazo (caso com ruído). A principal novidade referente ao modelo, em comparação aos resultados prévios (veja por exemplo [10], [9], [16],[21]-[25], [14],[38],[45],[52],[64],[66]-[69],[73],[74],[80],[85]-[87],[94],[96]) está relacionada com o espaço de estado da cadeia de Markov, que será considerado contável infinito. Da mesma forma que no caso linear, a solução dos problemas colocados acima será obtida através de condições para a existência e unicidade

de uma solução não negativa definida de um conjunto contável infinito de equações algébricas de Riccati acopladas entre si (ICARE). Tais condições serão derivadas em termos dos conceitos, a serem abaixo definidos, de sistemas estocasticamente estabilizáveis (SS) e estocasticamente detectáveis (SD). Estes conceitos, para cadeias de Markov tomando valores em um conjunto contável infinito, não são equivalentes aos de sistemas estabilizáveis na média quadrática e detectáveis na média quadrática (vide observação 3.8). Deve-se notar entretanto que quando especializado para o caso da cadeia de Markov tomando valores em um conjunto finito, estes conceitos são equivalentes (cf. [38]). Mostra-se que SS e SD são equivalentes ao raios espectrais de certos operadores de dimensão infinita serem menor do que um. Esta equivalência nos permite utilizar resultados da teoria de operadores em espaços de Banach de dimensão infinita para a obtenção de nossos resultados, uma característica que distingue nosso enfoque de outros anteriores e leva a condições similares ao caso linear determinístico, o que não ocorre com condições obtidas anteriormente (por exemplo, Teorema 4.1 em [52] usa o conceito de observabilidade estocástica ao invés de SD para o caso com estado de espaço da cadeia de Markov finito). Finalmente para o caso com ruído, mostraremos que SS e SD garantem a existência e unicidade de uma medida estacionária para uma cadeia de Markov associada, e portanto a existência de uma política de controle ótimo estacionário.

Conforme mencionado acima, dois tipos de problemas serão analisados neste seção. O primeiro considera o modelo

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \quad (3.26)$$

onde $A = (A_1, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^n$, $B = (B_1, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^{m,n}$ e o seguinte problema:

Problema 3.1 : Seja \mathcal{U} a classe das políticas de controle $u = (u(0), u(1), \dots)$ tais que para cada $k \in \mathbb{N}^0$ $u(k)$ é Σ_k -mensurável, modelo (3.26) é MSS (isto é $E(\|x(k)\|^2) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$) e o funcional

$$J(x(0), \theta(0), u) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\|M^{1/2}x(k)\|^2 + \|R^{1/2}u(k)\|^2 \right)$$

é finito, onde $M \geq 0$ e $R > 0$. Diremos que $u = (u(0), u(1), \dots)$ é uma política de controle de Markov se $u \in \mathcal{U}$ e para cada $k \in \mathbb{N}^0$, $u(k) = U(x(k), \theta(k))$ para algum mapeamento de Borel U . O problema é

então derivar uma política de controle \hat{u} , dentro da classe \mathcal{U} , de forma a minimizar o custo acima, ie,

$$\xi(x(0), \theta(0)) = \mathfrak{J}(x(0), \theta(0), \hat{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \sum_{k=0}^{\infty} E \left(\| M^{1/2} x(k) \|^2 + \| R^{1/2} u(k) \|^2 \right) \quad (3.27)$$

sujeito a equação (3.26), onde $\xi(x(0), \theta(0))$ é a função custo.

O segundo caso considera o modelo

$$x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) + C_{\theta(k)} w(k) \quad (3.28)$$

e o seguinte problema:

Problema 3.2 : Seja \mathfrak{X} a classe de políticas de controle $u = (u(0), u(1), \dots)$ tais que para cada $k \in \mathbb{N}^0$, $u(k)$ é Σ_k -mensurável, $E(\|x(k)\|^2) \leq C$, para alguma constante $C > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}^0$ onde $x(k)$ é dado por (3.28), e o custo médio a longo prazo

$$\mathfrak{J}_{\text{ave}}(x(0), \theta(0), u) = \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \left\{ \sum_{k=0}^{M-1} E \left(\| M^{1/2} x(k) \|^2 + \| R^{1/2} u(k) \|^2 \right) \right\}$$

existe. Diremos que $u = (u(0), u(1), \dots)$ é uma política de controle de Markov se $u \in \mathfrak{X}$ e para cada $k \in \mathbb{N}^0$, $u(k) = \mathfrak{U}(x(k), \theta(k))$ para algum mapeamento de Borel \mathfrak{U} . Portanto procuramos por uma política de controle $\hat{u} \in \mathfrak{X}$ tal que $\xi_{\text{ave}}(x(0), \theta(0)) = \mathfrak{J}_{\text{ave}}(x(0), \theta(0), \hat{u}) = \inf_{u \in \mathfrak{X}} \mathfrak{J}_{\text{ave}}(x(0), \theta(0), u)$.

3.6.2. Resultados auxiliares

Para $S \in \mathcal{H}_1^n$, $K \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,m}$ faça $F_i = A_i - B_i K_i$, $F = (F_1, \dots)$ e defina o seguinte operador $\mathcal{L}(S) = (\mathcal{L}_1(S), \dots)$,

$$\mathcal{L}_j(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N p_{ij} F_i S_i F_i^* \quad (3.29)$$

Conforme vimos na Seção 3.4, \mathcal{L} está relacionado com a equação recursiva do segundo momento da variável de estado. O seguinte resultado é facilmente verificável:

Proposição 3.11 : $\mathcal{L} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1^n)$. Além disto \mathcal{L} é um operador positivo no sentido de que se $S \geq 0$ então $\mathcal{L}(S) \geq 0$.

Considere eq. (3.26) com $u(k) = -K_{\theta(k)} x(k)$ e lembre que $Q(k) = (Q_1(k), \dots)$ onde $Q_i(k) = E(x(k)x(k)^* 1_{\{\theta(k)=i\}})$, $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^0$. O resultado seguinte é uma adaptação da Proposição 3.3 para

o caso da cadeia de Markov em um estado de espaço infinito.

Proposição 3.12 : $Q(k) \in \mathcal{H}_1^{n+}$ e $Q(k+1) = \mathcal{L}(Q(k))$.

Apresentamos agora os conceitos de sistemas estabilizáveis estocasticamente e detectáveis estocasticamente, inspirados de [52].

Definição 3.5 : Para $L = (L_1, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^{s,n}$ diremos que (A, L) é estocasticamente estabilizável (SS) se existe $J = (J_1, J_2, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,s}$ tal que para qualquer condição inicial (x_0, θ_0) , $\sum_{k=0}^{\infty} E(\|x(k)\|^2) < \infty$ onde $x(k)$ é dado por (3.26) com $u(k) = -J_{\theta(k)}x(k)$ e $B_i = J_i$. Neste caso diremos que J estabiliza estocasticamente (A, L) .

Definição 3.6 : Para $L = (L_1, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,s}$ diremos que (L, A) é estocasticamente detectável (SD) se existe algum $J \in \mathcal{H}_{\infty}^{s,n}$ tal que para qualquer condição inicial (x_0, θ_0) temos que $\sum_{k=0}^{\infty} E(\|x(k)\|^2) < \infty$ onde $x(k)$ é dado por

$$x(k+1) = (A_{\theta(k)} - J_{\theta(k)}L_{\theta(k)})x(k), \quad k \in \mathbb{N}^0.$$

As técnicas utilizadas nesta seção são baseadas na seguinte equivalência.

Lema 3.3 : (A, B) é SS se e somente se existe algum $K \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,m}$ tal que $r(\mathcal{L}) < 1$, onde \mathcal{L} é definido em (3.29) com $F_i = A_i - B_iK_i$. Similarmente, para $L = (L_1, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,s}$, (L, A) é SD se e somente se existe $J \in \mathcal{H}_{\infty}^{s,n}$ tal que $r(\mathcal{L}) < 1$, onde \mathcal{L} é definido em (3.29) com $F_i = A_i - J_iL_i$.

Prova :

$r(\mathcal{L}) < 1 \Rightarrow SS$

Seja $K \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,m}$ tal que $r(\mathcal{L}) < 1$ onde \mathcal{L} é definido em (3.29) com $F_i = A_i - B_iK_i$. Defina a política de controle por

$$u(k) = -K_{\theta(k)}x(k)$$

de modo que o sistema realimentado seja dado por

$$x(k+1) = F_{\theta(k)}x(k), \quad x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0$$

para condições iniciais (x_0, θ_0) arbitrárias. Como, por hipótese, $r(\mathcal{L}) < 1$, segue do Lema 1 em [56] que existe $0 < \zeta < 1$ e $\beta \geq 0$, tal que

$$\|\mathcal{L}^k\|_1 \leq \beta\zeta^k, \quad k \in \mathbb{N}^0.$$

Lembre agora que $Q(k) = (Q_1(k), \dots) \in \mathcal{H}_1^{n+}$ com $Q_i(k) = E(x(k)x(k)^* 1_{\{\theta(k)=i\}})$. Uma aplicação da Proposição 3.12 leva a $Q(k) = \mathcal{L}^k(Q(0))$, donde

$$\|Q(k)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i(k)\| = \|\mathcal{L}^k(Q(0))\|_1 \leq \beta \zeta^k \|Q(0)\|_1 \leq \beta \zeta^k E(\|x_0\|^2), \quad k \in \mathbb{N}^0$$

Note agora que

$$E(\|x(k)\|^2) = \text{tr}\left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(k)\right) \leq n \left\| \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(k) \right\| \leq n \sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i(k)\| = n \|Q(k)\|_1$$

e decorre que

$$E(\|x(k)\|^2) \leq n \beta \zeta^k E(\|x_0\|^2), \quad k \in \mathbb{N}^0$$

o que leva a $\sum_{k=0}^{\infty} E(\|x(k)\|^2) < \infty$.

SS $\Rightarrow r(\mathcal{L}) < 1$

Seja $K \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,m}$ tal que estabiliza estocasticamente (A, B) . Dado qualquer $Q(0) = (Q_1(0), \dots) \in \mathcal{H}_1^{n+}$ podemos encontrar variáveis aleatórias $x(0)$ e $\theta(0)$ tal que $Q_i(0) = E(x(0)x(0)^* 1_{\{\theta(0)=i\}})$. Considerando estas condições iniciais no modelo (3.26) com $u(k) = -K_{\theta(k)}x(k)$, escrevendo $Q(k) = (Q_1(k), \dots)$, $Q_i(k) = E(x(k)x(k)^* 1_{\{\theta(k)=i\}})$ e definindo \mathcal{L} como em (3.29) com $F_i = A_i - B_i K_i$, temos que

$$\|\mathcal{L}^k(Q(0))\|_1 = \|Q(k)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i(k)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} E(\|x(k)\|^2 1_{\{\theta(k)=i\}}) = E(\|x(k)\|^2)$$

e por hipótese,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{L}^k(Q(0))\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\|x(k)\|^2) < \infty.$$

Considere agora um $Q \in \mathcal{H}_1^n$ arbitrário. Da observação 3.5 existe \mathcal{P}_i em \mathcal{H}_1^{n+} , $i = 1, 2, 3, 4$ tal que $Q = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) + (-1)^{1/2}(\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4)$. Como \mathcal{L} é um operador linear temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{L}^k(Q)\|_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{L}^k(\mathcal{P}_1) - \mathcal{L}^k(\mathcal{P}_2) + (-1)^{1/2}(\mathcal{L}^k(\mathcal{P}_3) - \mathcal{L}^k(\mathcal{P}_4))\|_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^4 \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{L}^k(\mathcal{P}_i)\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

e como isto é válido para todo $Q \in \mathcal{H}_1^n$, Lema 1 em [56] leva a $r(\mathcal{L}) < 1$. \square

Observação 3.8 : Mostrou-se em [38] que para o caso em que a cadeia de Markov toma valores em um espaço de estado finito, os conceitos de estabilidade na média quadrática e estabilidade estocástica

são equivalentes. Entretanto para o caso contável infinito esta equivalência não é mais, em geral, verdadeira. Realmente, considere o sistema (3.26) com $u(k) = 0$, $n = 1$, $p_{i+1} = 1$ and $A_i = (i/(i+1))^{1/2}$, $i = 1, 2, \dots$. Neste caso

$$E(x(k)^2 | x(0), \theta(0)) = \frac{\theta(0)}{\theta(0)+k} x(0)^2 \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

e do Teorema Monotônico de Lebesgue,

$$E(x(k)^2) = E(E(x(k)^2 | x(0), \theta(0))) \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty$$

para qualquer condição inicial $(x(0), \theta(0))$ satisfazendo A2). Por outro lado, considerando $x(0) = x_0 \neq 0$ e $\theta(0) = i_0 \in \mathbb{N}$ determinísticos, obtemos que

$$\sum_{k=0}^N E(x(k)^2) = \sum_{k=0}^N \frac{i_0}{i_0+k} x_0^2 \rightarrow \infty \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

Observação 3.9 : Mostrou-se no Teorema 3.2 acima que no caso da cadeia de Markov tomando valores em um espaço de estado contável finito, a equação de Lyapunov poderia ser escrita de quatro formas equivalentes. Entretanto para o caso contável infinito isto não é verdade, pois, ao contrário do caso finito, o operador \mathcal{L} não pode ser escrito como a composição de dois operadores tomando valores no mesmo espaço de Banach. Mostrou-se em [26] que para o caso contável infinito a equação de Lyapunov fica da seguinte forma: Defina $\hat{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+} = \{ H = (H_1, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}; H_i > \alpha I_n \text{ para algum } \alpha > 0 \text{ e todo } i \in \mathbb{N} \}$.

Lema 3.4 : (A, B) é SS se e somente se dado qualquer $V \in \hat{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+}$ existe $K \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,m}$ e $S \in \hat{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+}$ tal que

$$S_i - \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} (A_i - B_i K_j)^* S_j (A_i - B_i K_j) = V_i$$

3.6.3. Infinitas equações de Riccati acopladas entre si

Estabeleceremos agora condições suficientes para a existência e unicidade de uma solução não negativa definida para um conjunto infinito contável de equações algébricas de Riccati acopladas entre si (ICARE), apresentada em (3.40) abaixo. Como um sub-produto desta análise obteremos a solução dos problemas 3.1 e 3.2 colocados acima. Antes porém de apresentarmos as ICARE, necessitamos de alguns resultados auxiliares. Para $Z = (Z_1, \dots) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$ defina o operador linear $\mathfrak{S}(Z) = (\mathfrak{S}_1(Z), \dots)$ e os operadores não lineares $\mathfrak{V}(Z) = (\mathfrak{V}_1(Z), \dots)$, $\mathfrak{T}(Z) = (\mathfrak{T}_1(Z), \dots)$ e $\mathfrak{K}(Z) = (\mathfrak{K}_1(Z), \dots)$ por

$$\mathcal{V}_i(Z) = (R + B_i^* Z_i B_i)^{-1} \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+, \mathcal{V}_i(Z) > 0 \text{ já que } R > 0, Z \in \mathcal{H}_\infty^{n+} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{K}_i(Z) = \mathcal{V}_i(Z) B_i^* Z_i A_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^{n,m}) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i(Z) &= M + A_i^* Z_i A_i - (A_i^* Z_i B_i) \mathcal{V}_i(Z) (B_i^* Z_i A_i) \\ &= (A_i - B_i \mathcal{K}_i(Z))^* Z_i (A_i - B_i \mathcal{K}_i(Z)) + M + \mathcal{K}_i(Z)^* R \mathcal{K}_i(Z) \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+ \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\mathcal{S}_i(Z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N p_{ij} Z_j \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+ \quad (3.33)$$

O seguinte resultado, estabelecido em [26], fornece algumas propriedades dos operadores acima:

Proposição 3.13 : i) \mathcal{V} , \mathcal{S} e \mathcal{T} levam \mathcal{H}_∞^{n+} em \mathcal{H}_∞^{n+} .

ii) \mathcal{K} leva \mathcal{H}_∞^{n+} em $\mathcal{H}_\infty^{n,m}$.

Para $N \in \mathbf{N}$ e $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ defina

$$P^N(N) = L, P^N(k) = \mathcal{T}(\mathcal{S}(P^N(k+1))) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}, \quad k = N-1, \dots, 0 \quad (3.34)$$

$$K^N(k) = \mathcal{K}(\mathcal{S}(P^N(k))) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}, \quad k = N, \dots, 0 \quad (3.35)$$

No que se segue, \mathcal{U}^N representa o conjunto de políticas de controle $u^N = (u(0), u(1), \dots, u(N-1))$ tais que para cada $k = 0, 1, \dots, N-1$, $u(k)$ é Σ_k -mensurável. Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.14 : Para cada $N \in \mathbf{N}$ arbitrário, $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e a sequência $P^N(k)$ definida em (3.34), temos que, para cada $u^N = (u(0), \dots, u(N-1)) \in \mathcal{U}^N$, a solução $\{x(k); k=0, \dots, N\}$ da eq. (3.26) satisfaz

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) \right) &= E \left(x(0)^* P_{\theta(0)}^N(0) x(0) - x(N)^* P_{\theta(N)}^N(N) x(N) \right) + \\ E \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left\| \left\{ B_{\theta(k)}^* \mathcal{S}_{\theta(k)}(P^N(k+1)) A_{\theta(k)} \right\} x(k) + \right. \right. & \\ \left. \left. \left\{ B_{\theta(k)}^* \mathcal{S}_{\theta(k)}(P^N(k+1)) B_{\theta(k)} + R \right\} u(k) \right\|_{\mathcal{V}_{\theta(k)}(\mathcal{S}(P^N(k+1)))}^2 \right) & \end{aligned} \quad (3.36)$$

Prova : Lembrando que $\Sigma_k = \sigma\{x(\kappa), \theta(\kappa); \kappa=0, \dots, k\}$ representa o σ -campo gerado pelas variáveis aleatórias $\{x(\kappa), \theta(\kappa); \kappa=0, \dots, k\}$, temos que

$$\begin{aligned} E \left(x(N)^* P_{\theta(N)}^N(N) x(N) - x(0)^* P_{\theta(0)}^N(0) x(0) \right) &= \sum_{k=0}^{N-1} E \left(E \left(x(k+1)^* P_{\theta(k+1)}^N(k+1) x(k+1) \right. \right. \\ \left. \left. - x(k)^* P_{\theta(k)}^N(k) x(k) \mid \Sigma_k \right) \right) &= \sum_{k=0}^{N-1} E \left(E \left(\left(A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) \right)^* P_{\theta(k+1)}^N(k+1) \left(A_{\theta(k)} x(k) + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$B_{\theta(k)}u(k) - x(k)^*P_{\theta(k)}^N x(k) \mid \Sigma_k \Big). \quad (3.37)$$

A equação(3.34) leva a

$$\begin{aligned} & E \left(\left(A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \right)^* P_{\theta(k+1)}^N \left(A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \right) - x(k)^* P_{\theta(k)}^N x(k) \right. \\ & \quad \left. + x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \mid \Sigma_k \right) = \\ & \quad \left\| \left\{ B_{\theta(k)}^* \mathfrak{S}_{\theta(k)} (P_{\theta(k+1)}^N) A_{\theta(k)} \right\} x(k) + \left\{ B_{\theta(k)}^* \mathfrak{S}_{\theta(k)} (P_{\theta(k+1)}^N) B_{\theta(k)} + R \right\} u(k) \right\|_{\mathfrak{V}_{\theta(k)}(\mathfrak{S}(P_{\theta(k+1)}^N))}^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Portanto (3.36) decorre de (3.37) e (3.38). \square

Uma consequência imediata da proposição acima é o resultado que fornece a solução do problema a horizonte finito do problema 3.1.

Proposição 3.15 : Para $N \in \mathbb{N}$ arbitrário, $L \in \mathfrak{H}_{\infty}^{n+}$ e a sequência $P^N(k)$ definida em (3.34), temos que

$$E \left(x(0)^* P_{\theta(0)}^N x(0) \right) = \min_{u \in \mathcal{U}^N} E \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) + x(N)^* P_{\theta(N)}^N x(N) \right) \quad (3.39)$$

Além disso, o mínimo é atingido em $\hat{u} = (\hat{u}(0), \dots, \hat{u}(N-1))$, $\hat{u}(k) = -K_{\theta(k)}^N x(k)$ onde $K_{\theta(k)}^N \in \mathfrak{H}_{\infty}^{n,m}$, $k = 0, \dots, N-1$ é dado por (3.35).

A próxima definição refere-se a soluções (estabilizadoras) do conjunto infinito de equações algébricas de Riccati acopladas entre si.

Definição 3.7 : Diremos que $V = (V_1, \dots)$ é uma solução não negativa definida da ICARE se

$$V = \mathcal{T}(\mathfrak{S}(V)), \quad V \in \mathfrak{H}_{\infty}^{n+} \quad (3.40)$$

e V é uma solução estabilizadora se (3.40) é satisfeita e $K = (K_1, \dots) = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}(V))$ estabiliza (A, B) .

A próxima proposição fornece condições suficientes para a existência de uma solução de (3.40).

Proposição 3.16 : Suponha que (A, B) seja SS. Além disto considere $N \in \mathbb{N}$, $L = 0$ e $P^N(k) \in \mathfrak{H}_{\infty}^{n+}$ conforme definido em (3.34) com $k = N-1, \dots, 0$. Então para cada $i \in \mathbb{N}$, temos que $P_i^N(0) \rightarrow P_i \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^n)^+$ quando $N \rightarrow \infty$. Além disto, definindo $P = (P_1, P_2, \dots)$ temos que $P \in \mathfrak{H}_{\infty}^{n+}$ satisfaz (3.40).

Prova : Primeiramente note que, aplicando (3.39) com $\theta(0) = i$, $x(0) = x$ arbitrário em \mathbf{N} e \mathbf{C}^n , respectivamente e $P^N(N) = L = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} x^* P_i^N(0) x &= \min_{u \in \mathcal{U}^N} E \left(\sum_{k=0}^{N-1} (x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k)) \right) \\ &\leq \min_{u \in \mathcal{U}^{N+1}} E \left(\sum_{k=0}^N (x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k)) \right) = x^* P_i^{N+1}(0) x \end{aligned} \quad (3.41)$$

e portanto $P_i^N(0) \leq P_i^{N+1}(0)$ para cada $i \in \mathbf{N}$. Assuma momentaneamente que exista uma constante $d > 0$ tal que

$$P_i^N(0) \leq d I_n \quad (3.42)$$

para todo i , $N \in \mathbf{N}$. De (3.42) e propriedades de monotonicidade de $\{P_i^N(0)\}_N$, segue facilmente que $0 \leq \|P_i^N(0)\| \leq \|P_i^{N+1}(0)\| \leq d$, o que implica que $\{P_i^N(0)\}_N$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $\mathbf{M}(\mathbf{C}^n)$, e portanto converge para algum $P_i \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+$ quando $N \rightarrow \infty$, já que cada $P_i^N(0) \in \mathbf{M}(\mathbf{C}^n)^+$. Mais ainda, $\|P_i\| \leq d$ para cada $i \in \mathbf{N}$ e conseqüentemente $\|P\|_\infty \leq d$ e $P \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. Além disto, da Proposition 3.13, temos que $\mathcal{S}(P) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e do Teorema da Convergência Monotônica ([7]) obtemos para $x \in \mathbf{C}^n$ arbitrário,

$$0 \leq x^* \mathcal{S}_i(P^N(0)) x = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M p_{ij} x^* P_j^N(0) x \rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M p_{ij} x^* P_j x = x^* \mathcal{S}_i(P) x \quad \text{quando } N \rightarrow \infty$$

o que implica para cada $i \in \mathbf{N}$ que $\mathcal{S}_i(P^N(0)) \rightarrow \mathcal{S}_i(P)$ quando $N \rightarrow \infty$. Portanto de (3.30) obtemos que

$$\mathcal{T}_i(\mathcal{S}(P^N(0))) = (R + B_i^* \mathcal{S}_i(P^N(0)) B_i)^{-1} \rightarrow (R + B_i^* \mathcal{S}_i(P) B_i)^{-1} = \mathcal{T}_i(\mathcal{S}(P))$$

e portanto de (3.32), (3.34), tendo em mente a troca de variáveis, temos que

$$\begin{aligned} P_i^{N+1}(0) &= \mathcal{T}_i(\mathcal{S}(P^N(0))) = M + A_i^* \mathcal{S}_i(P^N(0)) A_i - A_i^* \mathcal{S}_i(P^N(0)) B_i \mathcal{T}_i(\mathcal{S}(P^N(0))) B_i^* \mathcal{S}_i(P^N(0)) A_i \rightarrow \\ P_i &= M + A_i^* \mathcal{S}_i(P) A_i - A_i^* \mathcal{S}_i(P) B_i \mathcal{T}_i(\mathcal{S}(P)) B_i^* \mathcal{S}_i(P) A_i = \mathcal{T}_i(\mathcal{S}(P)) \quad \text{as } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

para cada $i \in \mathbf{N}$, i.e., P satisfaz equação (3.40). Falta provar quer (3.42) é satisfeito. Lembrando que (A, B) é SS, e tendo em mente a definição 3.5, segue que existe $K \in \mathcal{H}_\infty^{n, m}$ que estabiliza (A, B) .

Portanto com a política de controle definida por

$$\bar{u}(k) = -K_{\theta(k)} x(k)$$

temos o sistema realimentado dado por

$$x(k+1) = (A_{\theta(k)} - B_{\theta(k)} K_{\theta(k)}) x(k), \quad x(0) = x, \quad \theta(0) = i$$

onde x e i são determinísticos e arbitrários em \mathbf{C}^n e \mathbf{N} respectivamente. Além disto, existe $0 \leq \beta < \infty$

tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} E(\|x(k)\|^2) \leq \beta \|x\|^2 \quad (3.43)$$

e portanto de (3.43)

$$E\left(\sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^* M x(k) + \bar{u}^*(k) R \bar{u}(k))\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} E(\|x(k)\|^2)\right) (\|M\| + \|K\|_{\infty}^2 \|R\|) \leq d \|x\|^2 \quad (3.44)$$

onde $d = \beta (\|M\| + \|K\|_{\infty}^2 \|R\|)$. De (3.41) e (3.44) concluímos que $x^* P_i^N(0) x \leq d \|x\|^2$, e (3.42) segue, já que x e i são arbitrários. \square

A próxima proposição apresenta condições suficientes para uma solução de (3.40) ser estabilizadora. No que se segue, $\bar{M}^{1/2} \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$ é definido como $(M^{1/2}, M^{1/2}, \dots)$.

Proposição 3.17 : Suponha que $(\bar{M}^{1/2}, A)$ seja SD e P satisfaça (3.40). Então P é uma solução estabilizadora de (3.40).

Prova : Seja $H \in \mathcal{H}_{\infty}^n$ tal que $r(\mathcal{L}) < 1$, onde \mathcal{L} é definido como em (3.29) com $F_i = (A_i - H_i M^{1/2})$ (veja Lema 3.3). Considerando $P^N(k) = P$ em (3.34) e escolhendo $u(k) = -K_{\theta(k)} x(k)$ onde $K = (K_1, \dots) = \mathfrak{K}(\mathcal{E}(P)) \in \mathcal{H}_{\infty}^n$ temos da Proposição 3.15 que

$$E(x(0)^* P_{\theta(0)} x(0)) = E\left(\sum_{k=0}^{N-1} (x(k)^* M x(k) + x(k)^* K_{\theta(k)}^* R K_{\theta(k)} x(k)) + x(N)^* P_{\theta(N)} x(N)\right)$$

e, lembrando que $\|v\| \leq \nu \|v\|_R$ para algum $\nu > 0$ e qualquer $v \in C^n$, concluímos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} E\left(\|M^{1/2} x(k)\|^2 + \|K_{\theta(k)} x(k)\|^2\right) \leq d_1 < \infty$$

onde d_1 depende somente de $E(\|x(0)\|^2)$. Note agora que, definindo $\epsilon > 0$ tal que $(1 + \epsilon^2)r(\mathcal{L}) < 1$, $\tilde{\mathcal{L}} = (1 + \epsilon^2)\mathcal{L}$, $\hat{F}_i = A_i - B_i K_i$ e $Q_i(k) = E(z_i(k) z_i(k)^*)$, $z_i(k) = x(k) 1_{\{\theta(k)=i\}}$, $x(k)$ dado por (3.26) com a lei de controle dada por $u(k) = -K_{\theta(k)} x(k)$, obtemos da Proposição 3.12 que

$$\begin{aligned} Q_j(k+1) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \hat{F}_i Q_i(k) \hat{F}_i^* = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \left(F_i + (H_i M^{1/2} - B_i K_i)\right) Q_i(k) \left(F_i + (H_i M^{1/2} - B_i K_i)\right)^* \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \left(F_i Q_i(k) F_i^* + (H_i M^{1/2} - B_i K_i) Q_i(k) (H_i M^{1/2} - B_i K_i)^* + (H_i M^{1/2} - B_i K_i) Q_i(k) F_i^* \right. \\ &\quad \left. + F_i Q_i(k) (H_i M^{1/2} - B_i K_i)^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \left((1+\epsilon^2) F_i Q_i(k) F_i^* + (1+\frac{1}{2})(H_i M^{1/2} - B_i K_i) Q_i(k) (H_i M^{1/2} - B_i K_i)^* \right) \\ &= \tilde{L}_j(Q(k)) + c_0 \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} (H_i M^{1/2} - B_i K_i) Q_i(k) (H_i M^{1/2} - B_i K_i)^* \end{aligned}$$

onde $c_0 = (1+1/\epsilon^2)$ e a desigualdade acima segue do fato de que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left(\epsilon F_i - \frac{1}{\epsilon} (H_i M^{1/2} - B_i K_i) \right) Q_i(k) \left(\epsilon F_i - \frac{1}{\epsilon} (H_i M^{1/2} - B_i K_i) \right)^*$$

de modo que

$$(H_i M^{1/2} - B_i K_i) Q_i(k) F_i^* + F_i Q_i(k) (H_i M^{1/2} - B_i K_i)^* \leq \epsilon^2 F_i Q_i(k) F_i^* + \frac{1}{\epsilon^2} (H_i M^{1/2} - B_i K_i) Q_i(k) (H_i M^{1/2} - B_i K_i)^* .$$

Para $Z = (Z_1, \dots) \in \mathcal{H}_1^n$, defina o operador $\mathfrak{S}(Z) = (\mathfrak{S}_1(Z), \dots)$ em $\mathbf{B}(\mathcal{H}_1^n)$ por:

$$\mathfrak{S}_j(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} (H_i M^{1/2} - B_i K_i) Z_i (H_i M^{1/2} - B_i K_i)^*$$

Considere a sequência $R(k) \in \mathcal{H}_1^{n+}$ definida por

$$R(k+1) = \tilde{L}(R(k)) + c_0 \mathfrak{S}(Q(k)), \quad R(0) = Q(0) \in \mathcal{H}_1^{n+}, \quad k \in \mathbb{N}^0.$$

Segue que

$$R(k) = \tilde{L}^k(Q(0)) + c_0 \sum_{t=0}^{k-1} \tilde{L}^{k-t-1}(\mathfrak{S}(Q(t))).$$

Vamos mostrar por indução em k que $Q(k) \leq R(k)$ (veja observação 3.4). Para $k = 0$ o resultado é

óbvio já que $Q(0) = R(0)$. Suponha que o resultado seja verdadeiro para k . Então

$$R_j(k+1) = \tilde{L}_j(R(k)) + c_0 \mathfrak{S}_j(Q(k)) \geq \tilde{L}_j(Q(k)) + c_0 \mathfrak{S}_j(Q(k)) \geq Q_j(k+1)$$

o que prova o resultado de indução desejado. Segue portanto que

$$Q(k) \leq \tilde{L}^k(Q(0)) + c_0 \sum_{t=0}^{k-1} \tilde{L}^{k-t-1}(\mathfrak{S}(Q(t)))$$

e pegando a norma, obtemos que

$$\|Q(k)\|_1 \leq \|\tilde{L}^k(Q(0))\|_1 + c_0 \sum_{t=0}^{k-1} \|\tilde{L}^{k-t-1}\| \|\mathfrak{S}(Q(t))\|_1 .$$

Note agora que

$$\|\mathfrak{S}_j(Q(t))\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \left(\|M^{1/2} Q_i(k) M^{1/2}\| + \|K_i Q_i(k) K_i^*\| + 2 \|M^{1/2} Q_i(k) K_i^*\| \right) \right) d_2$$

onde $d_2 = \max\{\|H\|_{\infty}^2, \|B\|_{\infty}^2\}$. Além disto,

$$\|M^{1/2} Q_i(k) M^{1/2}\| \leq E(\|M^{1/2} z_i(k)\|^2),$$

$$\|K_i Q_i(k) K_i^*\| \leq E(\|K_i z_i(k)\|^2),$$

$$2 \|M^{1/2} Q_i(k) K_i^*\| \leq 2 E(\|M^{1/2} z_i(k)\| \|K_i z_i(k)\|) \leq E(\|M^{1/2} z_i(k)\|^2) + E(\|K_i z_i(k)\|^2)$$

e portanto,

$$\| \mathfrak{G}(Q(k)) \|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \| \mathfrak{G}_j(Q(k)) \| \leq 2d_2 E(\| M^{1/2}x(k) \|^2 + \| K_{\theta(k)}x(k) \|^2).$$

Lembre agora que, tendo em vista o Lema 3.3, existe $0 < \zeta < 1$ e $\beta > 0$ tal que $\| \tilde{x}^k \| \leq \beta \zeta^k$ (veja [56]), e portanto definindo $d_3 = 2 c_0 \beta d_2$ temos que

$$\| Q(k) \|_1 \leq \beta \zeta^k \| Q(0) \|_1 + \sum_{t=0}^{k-1} d_3 \zeta^{k-t-1} E(\| M^{1/2}x(t) \|^2 + \| K_{\theta(t)}x(t) \|^2)$$

e fazendo a soma em k , decorre que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| Q(k) \|_1 \leq \beta \| Q(0) \|_1 (1 - \zeta)^{-1} + d_3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{k-1} \zeta^{k-(t+1)} E(\| M^{1/2}x(t) \|^2 + \| K_{\theta(t)}x(t) \|^2).$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \zeta^{k-(t+1)} E(\| M^{1/2}x(t) \|^2 + \| K_{\theta(t)}x(t) \|^2) 1_{\{0, k-1\}}(t) = \\ \sum_{t=0}^{\infty} E(\| M^{1/2}x(t) \|^2 + \| K_{\theta(t)}x(t) \|^2) \sum_{k=t+1}^{\infty} \zeta^{k-(t+1)} \leq d_1 (1 - \zeta)^{-1} \end{aligned}$$

onde $1_{\{ \}} \}$ representa a medida de Dirac. Concluímos que para qualquer $Q(0) \in \mathfrak{H}_1^{n+}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| Q(k) \|_1 < \infty.$$

Como $E(\| x(k) \|^2) \leq n \| Q(k) \|_1$, temos que $\sum_{k=0}^{\infty} E(\| x(k) \|^2) < \infty$, para qualquer condição inicial (x_0, θ_0) . Logo $K = (K_1, \dots) = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}(P))$ estabiliza (A, B) . \square

A próxima proposição mostra a unicidade das soluções estabilizadoras de (3.40).

Proposição 3.18 : Suponha que $P = (P_1, \dots)$ seja uma solução estabilizadora de (3.40). Então P é a única solução estabilizadora de (3.40) em \mathfrak{H}_1^{n+} e definindo $K = (K_1, \dots) = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}(P))$, temos que

$$\xi(x(0), \theta(0)) = E(x(0)^* P_{\theta(0)} x(0)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(\| M^{1/2}x(k) \|^2 + \| R^{1/2}\hat{u}(k) \|^2) \quad (3.45)$$

onde $\hat{u}(k) = -K_{\theta(k)}x(k)$ e $x(k)$ é dado por (3.26) com $u = \hat{u} = (\hat{u}(0), \hat{u}(1), \dots)$.

Prova : Note que o conjunto de políticas de controle admissíveis, \mathfrak{U} , é não vazio já que P é uma solução estabilizadora de (3.40). Aplicando a Proposição 3.14 com $P^N(k) = P$, $k \in \mathbb{N}^0$, $u = (u(0), u(1), \dots) \in \mathfrak{U}$, e pegando o limite quando $N \rightarrow \infty$ temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} E \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) = E \left(x(0)^* P_{\theta(0)} x(0) \right) + \sum_{k=0}^{\infty} E \left(\left\| \left\{ B_{\theta(k)}^* \mathfrak{S}_{\theta(k)}(P) A_{\theta(k)} \right\} x(k) + \left\{ B_{\theta(k)}^* \mathfrak{S}_{\theta(k)}(P) B_{\theta(k)} + R \right\} u(k) \right\|_{\mathcal{V}_{\theta(k)}(\mathfrak{S}(P))}^2 \right) \quad (3.46)$$

já que $0 \leq E \left(x(N)^* P_{\theta(N)} x(N) \right) \leq \| P \|_{\infty} E \left(\| x(N) \|^2 \right) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. É fácil verificar que o infimum de (3.46) em $u \in \mathcal{U}$ é atingido quando $u = \hat{u}$. Neste caso o segundo termo no lado direito de (3.46) é zero e obtemos (3.45). Seja \tilde{P} outra solução estabilizadora de (3.40). Então para $x \in \mathbb{C}^n$ arbitrário e $i \in \mathbb{N}$, segue que $x^* \tilde{P}_i x = \xi(x(0)=x, \theta(0)=i) = x^* P_i x$, e portanto $\tilde{P} = P$. \square

Juntando os resultados anteriores, obtemos a próxima proposição.

Proposição 3.19 : Suponha que (A, B) seja SS e $(\tilde{M}^{1/2}, A)$ SD. Então existe uma única solução estabilizadora P para (3.40).

Prova : Do fato que (A, B) é SS obtemos da Proposição 3.16 que existe uma solução P para (3.40).

Proposição 3.17 e o fato que $(\tilde{M}^{1/2}, A)$ é SD mostra que P é uma solução estabilizadora para (3.40).

Finalmente unicidade segue da Proposição 3.18. \square

Mostraremos agora que a convergência de $P^N(0)$, definido em (3.34), para a única solução estabilizadora P de (3.40), ocorre qualquer que seja $L \in \mathfrak{K}_{\infty}^{n+}$, desde que (A, B) seja SS e $(\tilde{M}^{1/2}, A)$ seja SD. Este resultado generalizará a Proposição 3.19 e mostrará que existe uma única solução não negativa definida P para (3.40).

Proposição 3.20 : Suponha que (A, B) seja SS e $(\tilde{M}^{1/2}, A)$ seja SD. Seja $P = (P_1, \dots)$ a única solução estabilizadora de (3.40) e defina $\tilde{P}^N(k) = (\tilde{P}_1^N(k), \dots) = \mathcal{T}(\mathfrak{S}(\tilde{P}^N(k+1)))$, $k = N-1, \dots, 0$, $\tilde{P}^N(N) = L$ para $L \in \mathfrak{K}_{\infty}^{n+}$ arbitrário. Então para cada $i \in \mathbb{N}$, $\tilde{P}_i^N(0) \rightarrow P_i$ quando $N \rightarrow \infty$. Além disto P é a única solução não negativa definida de (3.40).

Prova : Da Proposição 3.19 sabemos que existe uma única solução estabilizadora P para (3.40). De (3.41) e Proposição 3.15 com $x(0) = x$, $\theta(0) = i$, arbitrários em \mathbb{C}^n e \mathbb{N} respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} x^* \tilde{P}_i^N(0) x &= \min_{u \in \mathcal{U}^N} E \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) + x(N)^* L_{\theta(N)} x(N) \right) \\ &\geq \min_{u \in \mathcal{U}^N} E \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) \right) = x^* P_i^N(0) x \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde $P_i^N(0)$ é definido como na Proposição 3.16. Pegando o limite em (3.47) quando $N \rightarrow \infty$ obtemos da Proposição 3.16 que $\liminf_{N \rightarrow \infty} x^* \tilde{P}_i^N(0)x \geq x^* P_i x$. Por outro lado escolhendo $u(k) = -K_{\theta(k)} x(k)$, onde $K = (K_1, \dots) = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}(P))$, obtemos que

$$\begin{aligned} x^* \tilde{P}_i^N(0)x &\leq E \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) + x(N)^* L_{\theta(N)} x(N) \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} E \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) + \|L\|_{\infty} E \left(\|x(N)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Usando o fato de P ser uma solução estabilizadora, temos que $E(\|x(k)\|^2) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e considerando o limite quando $N \rightarrow \infty$ em (3.48) obtemos de (3.45) que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} x^* \tilde{P}_i^N(0)x \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} E \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) = x^* P_i x$$

o que mostra que $x^* \tilde{P}_i^N(0)x \rightarrow x^* P_i x$ quando $N \rightarrow \infty$. Como x e i são arbitrários, a primeira parte da proposição está provada. Note agora que se $L \in \mathfrak{L}_{\infty}^{n+}$ satisfaz (3.40) então $\tilde{P}^N(0) = L = P$ \square

O teorema principal desta seção, que segue de forma imediata dos resultados anteriores, pode ser escrito da seguinte maneira.

Teorema 3.6 : Suponha que (A, B) seja SS e $P^N(0) = (P_1^N(0), \dots)$ é obtido como na Proposição 3.16. Então para cada $i \in \mathbb{N}$, $P_i^N(0) \rightarrow P_i$ quando $N \rightarrow \infty$, onde $P = (P_1, \dots)$ satisfaz (3.40). Se além disto $(\bar{M}^{1/2}, A)$ é SD então P é a única solução não negativa definida de (3.40). Além disto P é uma solução estabilizadora de (3.40) e para qualquer $L \in \mathfrak{L}_{\infty}^{n+}$ temos que $\tilde{P}_i^N(0) \rightarrow P_i$ quando $N \rightarrow \infty$ para cada $i \in \mathbb{N}$, onde $\tilde{P}_i^N(k)$ é obtido como na Proposição 3.20. Mais ainda, o custo ótimo de (3.27) é atingido para $u(k) = -K_{\theta(k)} x(k)$, onde $K = (K_1, \dots) = \mathfrak{K}(\mathfrak{S}(P))$ e é dado por $\xi(x(0), \theta(0)) = E(x(0)^* P_{\theta(0)} x(0))$.

3.6.4 Custo médio a longo prazo

Consideramos agora o modelo (3.28) descrito pela seguinte classe de equações a tempo discreto:

$$x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) + C_{\theta(k)} w(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.28)$$

onde assumimos as hipóteses da Seção 3.2, e também que $\{\theta(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ é uma cadeia de Markov com distribuição de probabilidade limite $\{\pi(i); i \in \mathbb{N}\}$, e $E(w(k)) = 0$, $E(w(k)w(k)^*) = I_{s_1}$. Temos a

seguinte proposição:

Proposição 3.21 : Para $N \in \mathbb{N}$ arbitrário, $L \in \mathcal{K}_{\infty}^{n+}$ e a sequência $P^N(k)$ definida em (3.34) temos que

$$\begin{aligned} & E \left(x(0)^* P_{\theta(0)}^N(0) x(0) \right) + \sum_{k=0}^{N-1} E \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{\theta(k)j} \operatorname{tr} \left(C_{\theta(k)}^* P_j^N(k+1) C_{\theta(k)} \right) \right) = \\ & \min_{u \in \mathcal{U}^N} E \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right) + x(N)^* P_{\theta(N)}^N(N) x(N) \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

e o mínimo em (3.49) é atingido em $\hat{u} = (\hat{u}(0), \dots, \hat{u}(N-1))$, $\hat{u}(k) = -K_{\theta(k)}^N(k) x(k)$ onde $K_{\theta(k)}^N(k)$ é dado por (3.35).

Prova : Como na Proposição 3.14, temos que

$$\begin{aligned} & E \left(x(N)^* P_{\theta(N)}^N(N) x(N) - x(0)^* P_{\theta(0)}^N(0) x(0) \right) = \sum_{k=0}^{N-1} E \left(E \left(x(k+1)^* P_{\theta(k+1)}^N(k+1) x(k+1) \right. \right. \\ & \left. \left. - x(k)^* P_{\theta(k)}^N(k) x(k) \mid \Sigma_k \right) \right) = \sum_{k=0}^{N-1} E \left(E \left(\left(A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) + C_{\theta(k)} w(k) \right)^* P_{\theta(k+1)}^N(k+1) \left(A_{\theta(k)} x(k) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. B_{\theta(k)} u(k) + C_{\theta(k)} w(k) \right) - x(k)^* P_{\theta(k)}^N(k) x(k) \mid \Sigma_k \right) \right) = \sum_{k=0}^{N-1} E \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{\theta(k)j} \operatorname{tr} \left(C_{\theta(k)}^* P_j^N(k+1) C_{\theta(k)} \right) \right) + \\ & \sum_{k=0}^{N-1} E \left(E \left(\left(A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) \right)^* P_{\theta(k+1)}^N(k+1) \left(A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k) \right) - x(k)^* P_{\theta(k)}^N(k) x(k) \mid \Sigma_k \right) \right) \end{aligned}$$

e o restante da prova segue conforme a prova da Proposição 3.14. \square

Lembramos que, do problem 3.2, nosso objetivo é derivar uma política de controle $\hat{u} \in \mathfrak{X}$ tal que $\mathfrak{J}_{\text{ave}}(x(0), \theta(0)) = \mathfrak{J}_{\text{ave}}(x(0), \theta(0), \hat{u}) = \inf_{u \in \mathfrak{X}} \mathfrak{J}_{\text{ave}}(x(0), \theta(0), u)$ onde

$$\mathfrak{J}_{\text{ave}}(x(0), \theta(0), u) = \limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{M-1} E \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k) \right)}{M} \quad (3.50)$$

O seguinte lema apresenta uma condição suficiente para a existência e unicidade' de uma distribuição estacionária para uma cadeia de Markov acoplada ao sistema (3.25).

Lema 3.5 : Considere $\{x(k); k \in \mathbb{N}^0\}$ dado por (3.25) com uma política de de controle de Markov $u = (u(0), \dots)$. Então existe uma distribuição estacionária $\bar{\mu}$ para a cadeia de Markov $\{(x(k), \theta(k)); k \in \mathbb{N}^0\}$ gerada por (3.25). Além disto, se $K = (K_1, \dots) \in \mathcal{K}_{\infty}^{n, m}$ estabiliza (A,B) então $u = (u(0), \dots)$, $u(k) = -$

$K_{\theta(k)}x(k)$, é uma política de controle de Markov e $\bar{\mu}$ única.

Prova : Denote por $\{(x^\mu(k), \theta^\mu(k)); k \in \mathbb{N}^0\}$ a cadeia de Markov gerada por (3.26) quando $(x(0), \theta(0))$ possui distribuição inicial μ . Faça $\sigma(\mathbb{C}^n)$ o σ -campo gerado pelos abertos em \mathbb{C}^n . Considere μ uma medida de probabilidade tal que $\mu(\mathbb{C}^n, i) = \pi(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e defina a seguinte família de medidas de probabilidades $\mu_M, M = 1, 2, \dots$:

$$\mu_M(A, i) = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} P(x^\mu(k) \in A, \theta^\mu(k) = i)}{M}, \quad A \in \sigma(\mathbb{C}^n), i \in \mathbb{N}.$$

Para $r > 0$ e $j \in \mathbb{N}$, seja $B_{r,j} = \{(x, i) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{N}; \|x\| \leq r, i \leq j\}$. Como para todo $k \in \mathbb{N}^0$ e algum $C > 0$,

$$P(\|x^\mu(k)\| > r) \leq \frac{E(\|x^\mu(k)\|^2)}{r^2} \leq \frac{C}{r^2},$$

decorre da desigualdade de Markov que

$$\mu_M(B_{r,j}) \geq 1 - \left(\frac{C}{r^2} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \pi(i) \right),$$

lembrando que $P(\theta^\mu(k) = i) = \pi(i)$ para todo $k \in \mathbb{N}^0, i \in \mathbb{N}$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ podemos achar $r_\epsilon > 0, j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_M(B_{r_\epsilon, j_\epsilon}) > 1 - \epsilon$ para todo $M = 1, 2, \dots$. Do fato que $B_{r_\epsilon, j_\epsilon}$ é compacto em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{N}$, temos que $\{\mu_M; M=1, 2, \dots\}$ é "tight". Isto implica que para uma subsequência M_j de M existe uma medida de probabilidade $\bar{\mu}$ tal que $\mu_{M_j} \rightarrow \bar{\mu}$ fracamente quando $j \rightarrow \infty$. Através de uma adaptação simples do Teorema 9.3 em [37] para cadeias de Markov a tempo discreto, temos que $\bar{\mu}$ é estacionária. Suponha que $u(k) = -K_{\theta(k)}x(k)$ onde $K = (K_1, \dots) \in \mathcal{K}_{\infty}^{n,m}$ estabiliza estocasticamente (A, B) . Segue que $Q(k+1) = \mathcal{L}(Q(k)) + U(k)$ onde \mathcal{L} é definido em (3.29) com $F_i = A_i - B_i K_i, Q_i(k) = E(x(k)x(k)^* 1_{\{\theta(k)=i\}}), Q(k) = (Q_1(k), \dots)$ e $U(k) = (U_1(k), \dots)$ é dado por

$$U_j(k) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} C_i^* C_i Q(\theta(k)=i), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Da equação acima e do fato que $\tau(\mathcal{L}) < 1$, é fácil verificar que $\|Q(k)\|_1 \leq C'$ para algum $C' > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}^0$. Como $E(\|x(k)\|^2) \leq n \|Q(k)\|_1$ segue que u é uma política de controle de Markov. Falta provar unicidade de $\bar{\mu}$. Realmente suponha que $\bar{\mu}$ seja outra distribuição estacionária. Obviamente $\bar{\mu}(\mathbb{C}^n, i) = \pi(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ e não há perda de generalidade em assumir que $\bar{\theta}^\mu(k) = \theta^\mu(k)$ para cada

$k \in \mathbf{N}^0$. Definindo $z^{\tilde{\mu}}(k) = x^{\tilde{\mu}}(k) - x^{\mu}(k)$ temos que $z^{\tilde{\mu}}(k+1) = F_{\theta^{\tilde{\mu}}(k)} z^{\tilde{\mu}}(k)$ e para qualquer função uniformemente contínua $f: \mathbf{C}^n \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ (de modo que $|f(x,i) - f(y,i)| \leq K \|x-y\|$ para algum $K \geq 0$ e todo $x,y \in \mathbf{C}^n, i \in \mathbf{N}$) temos que

$$|E(f(x^{\tilde{\mu}}(k), \theta^{\tilde{\mu}}(k)) - f(x^{\mu}(k), \theta^{\mu}(k)))| \leq K E(\|z^{\tilde{\mu}}(k)\|) \leq K E(\|z^{\tilde{\mu}}(k)\|^2)^{1/2} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

já que $r(\mathcal{L}) < 1$. Escrevendo $P_{\tilde{\mu}}^k(A,i) = P(x^{\mu}(k) \in A, \theta(k) = i)$ temos que $P_{\tilde{\mu}}^k \rightarrow \tilde{\mu}$ quando $k \rightarrow \infty$ (Teorema 2.1 em [7]) e do Teorema 1.3 em [7] decorre que $\tilde{\mu} = \bar{\mu}$. \square

Nosso resultado final desta seção é o seguinte:

Teorema 3.7 : Suponha que (A,B) seja SS e $(\bar{M}^{1/2}, A)$ SD. Então

$$\xi_{\text{ave}}(x(0), \theta(0)) = \xi_{\text{ave}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \pi(i) p_{ij} \operatorname{tr}(C_i^* P_j C_i)$$

onde P é a única solução não negativa definida para (3.40). Além disto $\hat{u} = (\hat{u}(0), \dots)$ dado por $\hat{u}(k) = -K_{\theta(k)} x(k)$, $k \in \mathbf{N}^0$, $K = (K_1, \dots) = \mathcal{K}(\mathcal{S}(P))$ é uma política de controle de Markov ótima para (3.50).

Mais ainda, com esta política de controle a cadeia de Markov $\{(x(k), \theta(k)); k \in \mathbf{N}^0\}$ gerada por (3.25) possui uma única distribuição estacionária $\bar{\mu}$ e $\xi_{\text{ave}}(x(0), \theta(0)) = E_{\bar{\mu}}(x^*(k) M x(k) + \hat{u}^*(k) R \hat{u}(k))$.

Prova : Da Proposição 3.21 com $P^N(k) = P$ para $k = 0, \dots, N$ temos que para qualquer $u = (u(0), \dots) \in \mathfrak{X}$,

$$\begin{aligned} & E\left(x(0)^* P_{\theta(0)}^N(0) x(0)\right) + \sum_{k=0}^{N-1} E\left(\sum_{j=1}^{\infty} P_{\theta(k)j} \operatorname{tr}\left(C_{\theta(k)}^* P_j^{N(k+1)} C_{\theta(k)}\right)\right) \leq \\ & E\left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k)\right) + x(N)^* P_{\theta(N)}^N(N) x(N)\right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

com igualdade quando $u = \hat{u}$. Dividindo por N , pegando o limite quando $N \rightarrow \infty$ e lembrando que $E(\|x(k)\|^2) \leq C$ para algum $C \geq 0$ e todo $k \in \mathbf{N}^0$ de modo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E\left(x(N)^* P_{\theta(N)} x(N)\right)}{N} \leq \|P\|_{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E\left(\|x(N)\|^2\right)}{N} = 0$$

obtemos de (3.51) que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} E\left(x(k)^* M x(k) + u(k)^* R u(k)\right)}{N} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \pi(i) p_{ij} \operatorname{tr}(C_i^* P_j C_i)$$

com igualdade para $u = \hat{u}$. O restante da prova segue do Lema 3.5. \square

3.7. Conclusões

Analisou-se neste capítulo os problemas de estabilidade na média quadrática, com probabilidade 1, existência de distribuições estacionárias, filtragem ótima estacionária e controle ótimo de modelos lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Para o problema da estabilidade na média quadrática obteve-se um conjunto de condições necessárias e suficientes, via equações de Lyapunov e raios espectrais de matrizes aumentadas, que unificou e generalizou vários resultados existentes anteriormente na literatura. Para a convergência com probabilidade um as condições foram estabelecidas em termos de uma cadeia de Markov e normas de matrizes construídas a partir dos parâmetros originais do processo. Uma aplicação para filtros adaptativos foi apresentada. Em seguida colocou-se o problema da filtragem ótima linear estacionária, que está associado à existência de uma solução não negativa definida de um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas entre si. Inspirado nas condições para o caso linear, verificou-se que uma condição necessária e suficiente para a existência de tal solução pode ser enunciada em termos dos conceitos de sistemas estabilizáveis e detectáveis na média quadrática, uma generalização dos conceitos de sistemas estabilizáveis e detectáveis para sistemas lineares. Por fim, considerou-se o problema de controle ótimo quadrático com critério de minimização sendo o custo total esperado a horizonte infinito e custo médio a longo prazo, para cadeias de Markov tomando valores em um espaço de estado contável infinito. Verificou-se que a solução deste problema está associada a uma solução não negativa definida de um conjunto contável infinito de equações algébricas de Riccati acopladas, e condições necessárias e suficientes para existência e unicidade de tal solução podem ser enunciadas em termos dos conceitos de sistemas estocasticamente estabilizáveis (SS) e estocasticamente detectáveis (SD), conceitos que, conforme visto através de um contra-exemplo, são em geral mais fortes do que estabilizáveis e detectáveis na média quadrática (para o caso da cadeia de Markov tomando valores em um espaço de estado finito, verificou-se a equivalência dos conceitos). Provou-se também que SS e SD garantem a existência e unicidade de uma medida estacionária e, como consequência, a existência de uma política de controle ótimo estacionária.

Alguns problemas que ficaram em aberto e deverão ser analisados no futuro são o de controle ótimo com observações parciais, assumindo conhecidos a saída do sistema e o modo de operação do sistema, e o problema de controle H_{∞} . Para o primeiro caso pretende-se obter um resultado parecido com o princípio da separação para o caso linear e, portanto, resolver o problema através das equações de Riccati acopladas entre si associadas ao problema do controle ótimo e filtragem ótima. Para o segundo caso pretende-se adaptar o enfoque usado para o problema de controle H_{∞} de sistemas bilineares estocásticos, analisado no Capítulo 4, para obter-se uma solução, utilizando equações (não definidas) de Riccati acopladas entre si, similar ao caso linear.

Capítulo 4 : Sistemas Bilineares Estocásticos de Dimensão Infinita

4.1. Introdução

Neste capítulo estudaremos o problema da estabilidade na média quadrática, o controle ótimo quadrático e o controle H_∞ de sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita. Muitos processos importantes, não só na engenharia como também na biologia, sócio-economia e ecologia, podem ser modelados por sistemas bilineares estocásticos. Vários aspectos referentes às propriedades estruturais de tais modelos têm sido investigados na literatura internacional e questões fundamentais, bem como motivações práticas e teóricas para considerar tal classe especial de sistemas não-lineares, podem ser encontradas, por exemplo, em [13],[55],[71],[72].

O problema da estabilidade de sistemas bilineares estocásticos de dimensão finita a tempo contínuo foi analisado em [9],[47],[48],[54] e [70] enquanto que o caso a tempo discreto foi estudado em [55] e [59]. Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos em [27] e [60] que generalizam os resultados em [55] e [59], para o caso de dimensão infinita. Obtêm-se condições necessárias e suficientes para que o raio espectral de um operador \mathcal{T} (vide seção 4.4), associado à estabilidade na média quadrática do sistema, seja menor do que um, em termos da existência de solução para uma equação tipo Lyapunov, um resultado similar ao caso linear. Mostra-se, entretanto, que para se obter estabilidade na média quadrática, dois operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ (vide seção 4.4) precisam ter seus raios espectrais menores que um, um resultado que não é análogo ao caso linear. Apresenta-se um contra-exemplo em que realmente estes dois operadores não possuem o mesmo raio espectral e, portanto, a condição obtida não pode ser simplificada (entretanto, em dimensão finita, os dois operadores têm o mesmo raio espectral e portanto a condição poderia, neste caso, ser simplificada).

O problema de controle ótimo quadrático de sistemas bilineares estocásticos de dimensão infinita a tempo discreto foi analisado em [99],[100] e [101]. Apresentaremos neste capítulo um resumo dos resultados obtidos em [28], onde foi realizada uma análise deste problema baseada na teoria dos

operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ desenvolvida em [59] e [60], o que permitiu escrever a existência e unicidade de uma solução estabilizadora para uma equação tipo-Riccati associada ao problema em termos de hipóteses do sistema ser detectável e estabilizável, um resultado similar ao caso linear.

O caso a tempo contínuo de dimensão finita foi analisado em [93]. Uma condição básica utilizada foi a de que o sistema era observável. Em [39] obteve-se um enfraquecimento destas hipóteses utilizando-se uma generalização dos conceitos de sistemas detectáveis na média quadrática e estabilizáveis na média quadrática para o caso bilinear estocástico. Mostra-se, em particular, que o conceito de observabilidade pode ser substituído pelo de detectabilidade na média quadrática. Entretanto não discutiremos estes resultados neste capítulo pois, para isto, precisaríamos realizar um grande número de definições e notações, dificultando a leitura do mesmo.

Durante a última década um grande número de artigos tem sido publicados sobre controle H_∞ , desde o trabalho pioneiro de Zames [102]. Uma descrição dos desenvolvimentos iniciais da teoria de controle H_∞ pode ser encontrada, por exemplo, em [40]. Apesar de o problema de H_∞ ter sido originalmente desenvolvido no domínio da frequência, muita atenção tem sido recentemente dada a métodos no domínio do tempo, baseados em equações algébricas de Riccati (cf. [2],[35],[84],[88]). O desenvolvimento teórico da técnica de jogos dinâmicos para o problema de projetar controladores para o pior caso de entrada possível, como alternativa às técnicas no domínio da frequência, possibilitou a solução do problema de atenuação de distúrbios para uma classe muito mais geral de sistemas. Esta formulação tem sido usada para estudar o problema de controle H_∞ em modelos lineares de dimensão infinita [53], sistemas lineares de dimensão finita variantes no tempo com horizonte finito [2],[84],[88], e sistemas não-lineares [51]. Neste capítulo adotamos esta formulação para o problema de controle H_∞ de sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita e obtemos uma solução para o problema em termos de uma equação algébrica de operadores tipo Riccati, que generaliza o caso linear [2],[84]. Devido ao ambiente estocástico do sistema, uma formulação probabilística para o problema de H_∞ é desenvolvida. Os resultados aqui expressos foram obtidos em [29] e serão apresentados de forma mais pormenorizada, uma vez que exemplificam várias das técnicas utilizadas nos artigos [27],[28],[60].

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 4.2 apresentaremos a notação a ser utilizada. A construção do espaço de probabilidade, bem como as várias hipóteses de independência a serem utilizadas são apresentadas na Seção 4.3. O modelo a ser considerado e várias definições de operadores que serão necessários ao longo do capítulo são apresentados na Seção 4.4. Resultados relativos à estabilidade na média quadrática do modelo são descritos na Seção 4.5, juntamente com um contra-exemplo mostrando que em dimensão infinita nem sempre se consegue uma analogia completa com os sistemas lineares. O problema de controle ótimo quadrático é discutido na Seção 4.6 enquanto o problema de controle H_∞ é analisado com mais detalhes na Seção 4.7, permitindo, assim, uma melhor apreciação das técnicas utilizadas nas outras seções. O capítulo é encerrado com algumas conclusões na Seção 4.8.

4.2. Notação

Sejam X e X' espaços de Banach e denote por $\mathbf{B}[X, X']$ o espaço de Banach formado por todos os operadores lineares e limitados de X em X' . Por simplicidade escreveremos $\mathbf{B}[X] = \mathbf{B}[X, X]$ e denotaremos por $\mathbf{G}[X]$ o grupo de todos os operadores inversíveis em $\mathbf{B}[X]$. As normas em X , X' e a norma induzida uniforme em $\mathbf{B}[X, X']$ serão todas denotadas por $\|\cdot\|$ e $r(\cdot)$ representará o raio espectral na algebra de Banach $\mathbf{B}[X]$. Um operador é dito ser similar a uma contração estrita se $\|W^{-1}TW\| < 1$ para algum $W \in \mathbf{G}[X]$. Para um espaço de Hilbert H_0 não trivial complexo qualquer denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em H_0 ($\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}$ com norma $\|\cdot\|_{H_0}$ se H_0 for um espaço probabilístico) e uma estrela superior $*$ representará o adjunto de forma usual. Seja $\mathbf{B}^+[H_0] = \{T \in \mathbf{B}[H_0]; T \geq 0\}$ o cone convexo fracamente fechado formado por todos operadores auto-adjuntos não negativos em $\mathbf{B}[H_0]$ e defina $\mathbf{G}^+[H_0] = \mathbf{B}^+[H_0] \cap \mathbf{G}[H_0]$. Seja $\mathbf{B}_\infty[H_0]$ o conjunto de todos os operadores compactos de $\mathbf{B}[H_0]$. Se $T \in \mathbf{B}_\infty[H_0]$, seja $\{\lambda_k; k \geq 0\}$ a sequência crescente não negativa formada por todos os autovalores de $(T^*T)^{1/2} \in \mathbf{B}_\infty[H_0]$, cada um contado de acordo com a sua multiplicidade e defina $\|T\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k$. Denotaremos por $\mathbf{B}_1[H_0] = \{T \in \mathbf{B}_\infty[H_0]; \|T\|_1 < \infty\}$ a classe de todos os operadores nucleares de $\mathbf{B}[H_0]$ e definiremos $\mathbf{B}_1^+[H_0] = \mathbf{B}_1[H_0] \cap \mathbf{B}^+[H_0]$. $\|\cdot\|_1$ é uma

norma em $\mathcal{B}_1[H_0]$ e $(\mathcal{B}_1[H_0], \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach. O traço de $T \in \mathcal{B}_1[H_0]$ é definido como $\text{tr}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle T e_k; e_k \rangle$, que não depende da escolha da base ortonormal $\{e_k; k \geq 0\}$ de H_0 . $|\text{tr}(T)| \leq \text{tr}(T^*T)^{1/2} = \|T\|_1$, de modo que $\text{tr}(\cdot): \mathcal{B}_1[H_0] \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear limitado. Para $f, g \in H_0$, seja $f \circ g \in \mathcal{B}_1[H_0]$ definido da seguinte forma; $(f \circ g)h = \langle h; g \rangle f$ para todo $h \in H_0$, de modo que $(f \circ f) \in \mathcal{B}_1^+[H_0]$. Defina $\ell_2(H_0) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_0$, a soma direta de infinitas cópias de H_0 , que é um espaço de Hilbert formado por todas as seqüências $\{x_k \in H_0, k \geq 0; \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty\}$.

Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de probabilidade, onde Σ é um σ -campo formado por sub-conjuntos de Ω e μ uma medida de probabilidade em Σ . Seja $\mathcal{K}_0 = L_2(\Omega, \Sigma, \mu, H_0)$ o espaço de Hilbert formado por todas as variáveis aleatórias de segunda ordem tomando valores em H_0 e com produto interno dado por: $\langle x; y \rangle_{\mathcal{K}_0} = \mathfrak{E}(\langle x; y \rangle)$ para todo $x, y \in \mathcal{K}_0$ onde \mathfrak{E} representa a espectância da variável aleatória escalar $\langle x; y \rangle$. Desta forma, a norma de $x \in \mathcal{K}_0$ é dada por $\|x\|_{\mathcal{K}_0} = (\mathfrak{E}(\|x\|^2))^{1/2}$. Para qualquer $x \in \mathcal{K}_0$, sua espectância e correlação serão representados por $E x \in H_0$ e $E(x \circ x) \in \mathcal{B}_1^+[H_0]$ respectivamente.

Para uma família de sub-conjuntos \mathfrak{G} de Ω representamos por $\sigma(\mathfrak{G})$ o σ -campo formado por \mathfrak{G} . Suponha que $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$, $i \geq 0$, seja uma seqüência de espaços de probabilidade. Denotaremos por $\prod_{i=0}^n \Omega_i$ o espaço produto formado por Ω_i (n podendo ser infinito) e

$$\prod_{i=0}^n \Sigma_i = \sigma\{E_0 \times \dots \times E_n; E_i \in \Sigma_i, i=0, \dots, n\} \text{ se } n < \infty$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} \Sigma_i = \sigma\{E_0 \times \dots \times E_k \times \prod_{j=k+1}^{\infty} \Omega_j; E_i \in \Sigma_i, i=0, \dots, k, k=0, 1, \dots\} \text{ se } n = \infty.$$

Temos então que (cf. [89]) existe uma única medida de probabilidade $\bar{\mu}^n$ definida em $\prod_{i=0}^n \Sigma_i$ ($n < \infty$) e $\bar{\mu}$ definida em $\prod_{i=0}^{\infty} \Sigma_i$ tal que

$$\bar{\mu}^n(E_0 \times \dots \times E_n) = \mu_0(E_0) \dots \mu_n(E_n) \text{ para } E_i \in \Sigma_i, i=0, \dots, n$$

$$\bar{\mu}(E_0 \times \dots \times E_k \times \prod_{j=k+1}^{\infty} \Omega_j) = \mu_0(E_0) \dots \mu_k(E_k) \text{ para } E_i \in \Sigma_i, i=0, \dots, k, k=0, 1, \dots$$

Note que para qualquer $A \in \prod_{j=0}^{k-1} \Sigma_j$, $E_i \in \Sigma_i, i=k, \dots, r$, temos que

$$\bar{\mu}(A \times E_k \times \dots \times E_r \times \prod_{j=r+1}^{\infty} \Omega_j) = \bar{\mu}^{k-1}(A) \mu_k(E_k) \dots \mu_r(E_r).$$

Finalmente concluímos esta seção com a seguinte definição: para qualquer $x \in \mathfrak{K}_0$ denotaremos por \mathfrak{J}_x o conjunto de variáveis aleatórias em \mathfrak{K}_0 independentes de x , isto é, $\mathfrak{J}_x = \{y \in \mathfrak{K}_0; y \text{ é independente de } x\}$.

4.3. Preliminares

Ao longo deste capítulo, H, H', H'' e H''' representarão espaços de Hilbert complexos separáveis. Considere os espaços de probabilidade $(\Omega_0, \Sigma_0, \mu_0), (\Omega, \Sigma, \mu)$ e defina para $n=0,1,\dots$

$$\tilde{\Omega} = \prod_{i=0}^n \Omega_i \text{ onde } \Omega_i = \Omega \text{ para } i \geq 1,$$

$$\tilde{\Sigma} = \prod_{i=0}^{\infty} \Sigma_i \text{ onde } \Sigma_i = \Sigma \text{ para } i \geq 1,$$

$$\tilde{\Sigma}_n = \sigma\{E_0 \times \dots \times E_n \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j; E_i \in \Sigma_i, i=0,\dots,n\} = \sigma\{A \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j; A \in \prod_{i=0}^n \Sigma_i\} \subset \tilde{\Sigma}$$

e seja $\bar{\mu}$ a única medida de probabilidade definida em $\tilde{\Sigma}$ com as propriedades observadas na seção anterior. Portanto para $A_n \in \tilde{\Sigma}_n, A_n = A \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j, \bar{\mu}(A_n) = \bar{\mu}^n(A)$.

Definimos $\mathfrak{K} = L_2(\Omega, \Sigma, \mu, H), \tilde{\mathfrak{K}} = L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \bar{\mu}, H), \tilde{\mathfrak{K}}' = L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \bar{\mu}, H')$, $\tilde{\mathfrak{K}}'' = L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \bar{\mu}, H'')$ e $\tilde{\mathfrak{K}}''' = L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \bar{\mu}, H''')$. Considere $w \in \mathfrak{K}$ e defina a sequência estacionária de variáveis aleatórias $\{w_i, i \geq 0\}, w_i \in \tilde{\mathfrak{K}}$ para cada $i \geq 0$, da seguinte forma: para $\tilde{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in \tilde{\Omega}$, defina $w_i(\tilde{\omega}) = w(\omega_{i+1}), i \geq 0$. Desta forma temos que $\{w_0, w_1, \dots\}$ forma uma sequência estacionária de variáveis aleatórias independentes em $\tilde{\mathfrak{K}}$, já que para quaisquer conjuntos de Borel A_0, \dots, A_n de H , temos que

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(w_0 \in A_0, \dots, w_n \in A_n) &= \bar{\mu}(\Omega_0 \times \{w^{-1}(A_0)\} \times \dots \times \{w^{-1}(A_n)\}) \\ &= \mu(w \in A_0) \dots \mu(w \in A_n) = \bar{\mu}(w_0 \in A_0) \dots \bar{\mu}(w_n \in A_n) \end{aligned}$$

o que mostra a independência de $\{w_i, i \geq 0\}$. Representaremos por $s \in H$ e $S \in \mathbb{B}_1^+[H]$ respectivamente o valor esperado e o operador correlação da sequência $\{w_k; k \geq 0\}$.

Definimos $\mathfrak{S} \subset \ell_2(\tilde{\mathfrak{K}})$ da seguinte forma: $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$ pertence a \mathfrak{S} se $\underline{x} \in \ell_2(\tilde{\mathfrak{K}})$ (ie, $x_i \in \tilde{\mathfrak{K}}, i \geq 0$, e $\|\underline{x}\|_{\ell_2(\tilde{\mathfrak{K}})}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}(\|x_i\|^2) < \infty$) e $x_i \in L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}_i, \bar{\mu}, H)$ para cada $i \geq 0$. Temos que \mathfrak{S} é um subespaço linear fechado de $\ell_2(\tilde{\mathfrak{K}})$ e portanto um espaço de Hilbert (realmente, se $\underline{x}^j = (x_0^j, x_1^j, \dots) \in \mathfrak{S}$ para cada $j \geq 0$ e $\underline{x}^j \rightarrow \underline{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \ell_2(\tilde{\mathfrak{K}})$ quando $j \rightarrow \infty$ temos que $x_i^j \in L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}_i, \bar{\mu}, H)$ para cada $i, j \geq 0$, e como

$$\|x - x^j\|_{\ell_2(\tilde{\mathcal{H}})}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}(\|x_i - x_i^j\|^2) \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty$$

concluimos que $\mathfrak{E}(\|x_i - x_i^j\|^2) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$ para cada $i \geq 0$, e portanto x_i pertence ao espaço de Hilbert $L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}_i, \tilde{\mu}, H)$ para cada $i \geq 0$. De uma forma similar, definimos $\mathcal{V} \subset \ell_2(\tilde{\mathcal{H}}')$, $\mathcal{U} \subset \ell_2(\tilde{\mathcal{H}}'')$ e $\mathcal{Z} \subset \ell_2(\tilde{\mathcal{H}}''')$ trocando H e $\tilde{\mathcal{H}}$ na definição de \mathfrak{S} por H' e $\tilde{\mathcal{H}}'$, H'' e $\tilde{\mathcal{H}}''$, e H''' e $\tilde{\mathcal{H}}'''$ respectivamente.

Pela definição acima, temos que para $x = (x_0, \dots) \in \mathfrak{S}$, $w_j \in \mathfrak{J}_{x_i}$ para $j \geq i$. Realmente, para quaisquer conjuntos de Borel A, B de H temos que $x_i^{-1}(B) \in \tilde{\Sigma}_i$ de forma que $x_i^{-1}(B) = C \times \prod_{k=i+1}^{\infty} \Omega_k$ para algum $C \in \prod_{k=0}^i \Sigma_k$ e portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(w_j \in A, x_i \in B) &= \tilde{\mu}\left(\left(\prod_{k=0}^i \Omega_k \times w^{-1}(A) \times \prod_{k=i+2}^{\infty} \Omega_k\right) \cap \left(C \times \prod_{k=i+1}^{\infty} \Omega_k\right)\right) \\ &= \tilde{\mu}\left(C \times w^{-1}(A) \times \prod_{k=i+2}^{\infty} \Omega_k\right) = \tilde{\mu}^i(C) \mu(w^{-1}(A)) = \tilde{\mu}(x_i \in B) \tilde{\mu}(w_j \in A) \end{aligned}$$

e o resultado se estende facilmente para $j > i$. De forma similar, para $y = (y_0, y_1, \dots) \in \mathcal{V}$, $u = (u_0, u_1, \dots) \in \mathcal{U}$ e $z = (z_0, z_1, \dots) \in \mathcal{Z}$, temos que $w_j \in \mathfrak{J}_{y_i}$, $w_j \in \mathfrak{J}_{u_i}$ e $w_j \in \mathfrak{J}_{z_i}$ para $j \geq i$.

Concluimos esta seção com as seguintes definições dos espaços de Hilbert \mathfrak{S}_n , \mathcal{V}_n , \mathcal{U}_n e \mathcal{Z}_n . Diremos que $x_n = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_n$ se para cada $i = 0, 1, \dots, n$, $x_i \in L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}_i, \tilde{\mu}, H)$. As definições de \mathcal{V}_n , \mathcal{U}_n e \mathcal{Z}_n são feitas de forma análoga. Por simplicidade, escreveremos $x_0 = x_0$, $u_0 = u_0$ e $y_0 = y_0$.

4.4. Descrição do modelo

Consideramos um sistema bilinear a tempo discreto de dimensão infinita evoluindo em um ambiente estocástico, cujo o modelo é dado pela seguinte equação a diferenças de dimensão infinita:

$$x_{i+1} = \left(A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \langle w_i; e_k \rangle \right) x_i + B_1 v_i + B_2 u_i, \quad x_0 \in \mathfrak{S}_0 \quad (4.1)$$

onde $y = (y_0, y_1, \dots) \in \mathcal{V}$, $u = (u_0, u_1, \dots) \in \mathcal{U}$, $A_0 \in \mathbf{B}[H]$, $\{A_k \in \mathbf{B}[H], k \geq 0\}$ é uma sequência limitada, $B_1 \in \mathbf{B}[H', H]$, $B_2 \in \mathbf{B}[H'', H]$ e $\{e_k; k \geq 1\}$ é uma base ortornormal para H . Pela construção acima, é imediato verificar que para todo $n \geq 0$, $x_n = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_n$. Escrevemos $V_i = E(v_i \circ v_i) \in \mathbf{B}_1^+[H''']$ e $Q_i = E(x_i \circ x_i) \in \mathbf{B}_1^+[H]$ para todo $i \geq 0$. Para $B \in \mathbf{B}[H_0, H]$, $K \in \mathbf{B}[H, H_0]$, H_0 um espaço de Hilbert, definimos

$$(\mathcal{A}_{BK})_{w_i} = (A_0 - BK) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \langle w_i; e_k \rangle$$

e para todo $P \in \mathbf{B}[H]$, \mathcal{T}_{BK} e \mathcal{T} são operadores em $\mathbf{B}[\mathbf{B}[H]]$ definidos como

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{BK}(P) &= F_{BK} P F_{BK}^* + \mathcal{T}(P) \\ \mathcal{T}(P) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle C e_k ; e_l \rangle A_k P A_l^*\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}C &= (S - s \circ s) \in \mathbf{B}_1^+[H] \\ F_{BK} &= (A_0 - BK) + \sum_{k=1}^{\infty} \langle s ; e_k \rangle A_k \in \mathbf{B}[H]\end{aligned}$$

A sequência $\{e_k; k \geq 1\}$ é suposta ser uma base ortornormal para H que assegure a convergência das séries acima na topologia uniforme de $\mathbf{B}[\mathbf{B}[H]]$ e $\mathbf{B}[H]$ respectivamente (a existência de tal base ortornormal foi provada em [57]).

Associado aos operadores \mathcal{T} e \mathcal{T}_{BK} definimos os operadores $\mathcal{T}^\# \in \mathbf{B}[\mathbf{B}[H]]$ e $\mathcal{T}_{BK}^\# \in \mathbf{B}[\mathbf{B}[H]]$ da seguinte forma: para todo $P \in \mathbf{B}[H]$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^\#(P) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle C e_k ; e_l \rangle A_l^* P A_k \\ \mathcal{T}_{BK}^\#(P) &= F_{BK}^* P F_{BK} + \mathcal{T}^\#(P)\end{aligned}$$

e por simplicidade escreveremos $\mathcal{A}_{w_i} = (\mathcal{A}_0)_{w_i}$, $i \geq 0$, $F = F_0$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}^\# = \mathcal{T}_0^\#$. Note que para qualquer $y \in L_2(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}_j, \tilde{\mu}, H)$, $j \geq 0$, e $i \geq j$ (cf [28]),

$$\mathfrak{E}(\|(\mathcal{A}_{BK})_{w_i} \cdots (\mathcal{A}_{BK})_{w_j} y\|^2) = \|\mathcal{T}_{BK}^{i-j+1}(E(y \circ y))\|_1 \leq \|\mathcal{T}_{BK}^\#{}^{i-j+1}\| \|E(y \circ y)\|_1 \quad (4.2)$$

Finalmente definimos

$$\Gamma_{B_2} = \{K \in \mathbf{B}[H, H'']; r(\mathcal{T}_{B_2}^\# K) < 1\}.$$

4.5. Alguns resultados sobre estabilidade

Inicialmente é interessante notar que, apesar de existir, conforme verificaremos mais adiante, uma grande analogia entre a teoria de sistemas lineares e sistemas bilineares de dimensão infinita, algumas diferenças fundamentais existem, o que exige do estudo de tais sistemas algum cuidado. O contra-exemplo que apresentaremos a seguir exemplifica uma dessas diferenças e justifica a necessidade de definirmos os operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ conforme feito na seção anterior.

Se se particulariza o modelo bilinear (4.1) para o caso linear (fazendo $A_k = 0$ para todo $k \geq 1$)

então a identidade $r(\mathfrak{F}_{B_2K}^\#) = r(\mathfrak{F}_{B_2K})$ seria válida pois neste caso $\mathfrak{F}_{B_2K}^\#(P) = (F-B_2K)^*P(F-B_2K)$ e $\mathfrak{F}_{B_2K}(P) = (F-B_2K)P(F-B_2K)^*$ para todo $P \in \mathbf{B}[H]$, e portanto, $r(\mathfrak{F}_{B_2K}^\#) = r((F-B_2K)^*)^2 = r((F-B_2K))^2 = r(\mathfrak{F}_{B_2K})$. Entretanto esta identidade não é necessariamente verdadeira para o caso bilinear de dimensão infinita. Na verdade, $r(\mathfrak{F}_{B_2K}^\#) < 1$ não é em geral equivalente a $r(\mathfrak{F}_{B_2K}) < 1$, e por isto o símbolo superior $\#$ não pode ser suprimido. O seguinte contra-exemplo mostra isto: considere $B_2K = 0$, $H = \ell_2$, $\alpha \neq 0$ e defina $A_0, A_1 \in \mathbf{B}[\ell_2]$ da seguinte forma:

$$A_0h = \alpha(\nu_2, \nu_4, \nu_6, \dots), \quad A_1h = \alpha(\nu_1, \nu_3, \nu_5, \dots)$$

para todo $h = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots) \in \ell_2$, de modo que $A_0A_0^* = A_1A_1^* = \alpha^2I$, $A_0^*A_0 = \alpha^2\text{diag}(0,1,0,1,\dots)$ e $A_1^*A_1 = \alpha^2\text{diag}(1,0,1,0,\dots)$. Suponha que $s = 0$, $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \mathbf{B}_1^+[\ell_2]$ com $\sigma_1 = 1$ e $A_k = 0$ para todo $k \geq 2$. Desta forma

$$\mathfrak{F}(I) = A_0A_0^* + A_1A_1^* = 2\alpha^2I, \quad \mathfrak{F}^\#(I) = A_0^*A_0 + A_1^*A_1 = \alpha^2I.$$

Portanto $\mathfrak{F}^i(I) = (2\alpha^2)^i$ e $\mathfrak{F}^{\#i}(I) = (\alpha^2)^iI$ de modo que (cf. Propriedade (7) de [60]) $\|\mathfrak{F}^i\|^{1/i} = 2\alpha^2$ e $\|\mathfrak{F}^{\#i}\|^{1/i} = \alpha^2$ para todo $i \geq 0$. Pela fórmula de Beurling-Gelfand para raio espectral ([36], p. 567), $r(\mathfrak{F}) = 2$ e $r(\mathfrak{F}^\#) = \alpha^2$.

O resultado a seguir, estabelecido em [27], apresenta condições de Lyapunov necessárias e suficientes para $r(\mathfrak{F}) < 1$, análogas ao caso linear.

Proposição 4.1 : As seguintes afirmações são equivalentes

- $r(\mathfrak{F}) < 1$.
- \mathfrak{F} é similar a uma contração estrita.
- Existe $W \in G^+[H]$ tal que $W - \mathfrak{F}(W) \in G^+[H]$.
- Para todo $V \in G^+[H]$ existe $W \in G^+[H]$ tal que $V = W - \mathfrak{F}(W)$.

Mais ainda, se uma das condições acima é satisfeita, então a solução $W \in G^+[H]$ da equação tipo-Lyapunov $V = W - \mathfrak{F}(W)$, para qualquer $V \in G^+[H]$, é única e dada por

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{F}^j(V) = (I - \mathfrak{F})^{-1}(V)$$

(com I representado o operador identidade em $\mathbf{B}[\mathbf{B}[H]]$), onde a convergência acima é na topologia uniforme de $\mathbf{B}[\mathbf{B}[H]]$.

O resultado que se segue refere-se à estabilidade na média quadrática do modelo (4.1). Para isto, dada a sequência de operadores $\{V_i \in \mathbf{B}[H]; i \geq 0\}$, considere a sequência de operadores $\{Q_i \in \mathbf{B}[H]; i \geq 0\}$ definida recursivamente para cada $i \geq 0$ como:

$$Q_{i+1} = \mathcal{F}(Q_i) + R_i$$

Note que se $u_i = 0$ para todo $i \geq 0$ em (4.1), $\{v_i; i \geq 0\}$ é uma sequência de média nula independente de $\{w_i; i \geq 0\}$, $R_i = B_1 V_i B_1^*$ ($V_i = E(v_i \circ v_i)$) para todo $i \geq 0$ e $Q_0 = Q_0$, então $Q_i = Q_i (=E(x_i \circ x_i))$ para todo $i \geq 0$.

Proposição 4.2 : As seguintes afirmativas são equivalentes:

- (a1) $r(\mathcal{F}) < 1$.
- (b1) $\{Q_i \in \mathbf{B}[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}[H]$ sempre que $\{R_i \in \mathbf{B}[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}[H]$.
- (c1) $\{Q_i \in \mathbf{B}^+[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}[H]$ sempre que $\{R_i \in \mathbf{B}^+[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}[H]$.

Proposição 4.3 : As seguintes afirmativas são equivalentes:

- (a2) $r(\mathcal{F}^\#) < 1$.
- (b2) $\{Q_i \in \mathbf{B}_1[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}_1[H]$ sempre que $\{R_i \in \mathbf{B}[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}[H]$.
- (c2) $\{Q_i \in \mathbf{B}_1^+[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}_1[H]$ sempre que $\{R_i \in \mathbf{B}_1^+[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}_1[H]$.

As duas proposições anteriores levam à seguinte condição de estabilidade na média quadrática para os modelos bilineares em dimensão infinita.

Proposição 4.4 : Se $r(\mathcal{F}) < 1$ e $r(\mathcal{F}^\#) < 1$ então (estabilidade na média quadrática) $\{Q_i \in \mathbf{B}_1^+[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}[H]$ para um operador nuclear sempre que $\{R_i \in \mathbf{B}_1^+[H]; i \geq 0\}$ converge em $\mathbf{B}[H]$ para um operador nuclear.

Nas três proposições acima verificamos algumas das diferenças existentes entre os modelos lineares e os bilineares em dimensão infinita, devido à não-igualdade entre os raios espectrais de \mathcal{F} e $\mathcal{F}^\#$. Apresentaremos agora o seguinte resultado, que segue de forma imediata da prova da Proposição 4.3 (c2) \Rightarrow (a2) apresentada em [60].

Proposição 4.5 : Considere modelo (4.1) com $u = 0$ e $v = 0$. Se $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \mathfrak{S}$ para qualquer $x_0 \in \mathfrak{S}_0$ então $r(\mathcal{T}_{B_2K}^\#) < 1$.

Considere agora modelo (4.1) com $u_i = -B_2Kx_i$. Conforme mencionado acima, $\underline{x}_n = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_n$ e $\underline{u}_n = (u_0, \dots, u_n) \in \mathcal{U}_n$ para $n \geq 0$. Mostraremos que $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \mathfrak{S}$ (e logo $\underline{u} = (u_0, u_1, \dots) \in \mathcal{U}$) se e somente se $r(\mathcal{T}_{B_2K}^\#) < 1$, um resultado análogo ao caso linear. Por simplicidade escreveremos $y_i = B_1v_i$, $i \geq 0$, de modo que $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots) \in \mathfrak{S}$ e

$$x_{i+1} = (\mathcal{A}_{B_2K})_{w_i} x_i + y_i \quad (4.3.a)$$

Como $x_i \in \mathfrak{S}_i$, $y_i = (y_0, \dots, y_i) \in \mathfrak{S}_i$, segue que

$$w_0 \in \mathcal{J}_{\{x_0, y_0\}}, w_i \in \mathcal{J}_{\{x_0, \dots, x_i, y_0, \dots, y_i, w_0, \dots, w_{i-1}\}}$$

e de acordo com o Lema 1 em [57], para $i = 1, 2, \dots$

$$x_i = \left((\mathcal{A}_{B_2K})_{w_{i-1}} \dots (\mathcal{A}_{B_2K})_{w_0} \right) x_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \left((\mathcal{A}_{B_2K})_{w_{i-1}} \dots (\mathcal{A}_{B_2K})_{w_j} \right) y_{j-1} + y_{i-1} \quad (4.3.b)$$

Proposição 4.6 : $r(\mathcal{T}_{B_2K}^\#) < 1$ se e somente se $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \mathfrak{S}$ para todo $\underline{v} = (v_0, v_1, \dots) \in \mathcal{V}$ e $x_0 \in \mathfrak{S}_0$.

Prova : Provemos a suficiência primeiro. Neste caso tudo o que temos de provar é que $\underline{x} \in \ell_2(\mathfrak{H})$ sempre que $\underline{v} \in \mathcal{V} \subset \ell_2(\mathfrak{H}')$ já que $\underline{x}_n = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_n$ para todo $n \geq 0$, e portanto a condição de independência para \underline{x} pertencer a \mathfrak{S} será satisfeita (veja sub-seção 4.3). De (4.3) temos, pela desigualdade triangular, que

$$\|x_i\|_{\mathfrak{H}} \leq \left\| \left((\mathcal{A}_{B_2K})_{w_{i-1}} \dots (\mathcal{A}_{B_2K})_{w_0} \right) x_0 \right\|_{\mathfrak{H}} + \sum_{j=1}^{i-1} \left\| \left((\mathcal{A}_{B_2K})_{w_{i-1}} \dots (\mathcal{A}_{B_2K})_{w_j} \right) y_{j-1} \right\|_{\mathfrak{H}} + \|y_{i-1}\|_{\mathfrak{H}}$$

De (4.2) segue que

$$\left\| \left((\mathcal{A}_{B_2K})_{w_{i-1}} \dots (\mathcal{A}_{B_2K})_{w_j} \right) y_{j-1} \right\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \|\mathcal{T}_{B_2K}^\#\|^{i-j} \|V_{j-1}\|_1 \|B_1\|^2,$$

e similarmente,

$$\left\| \left((\mathcal{A}_{B_2K})_{w_{i-1}} \dots (\mathcal{A}_{B_2K})_{w_0} \right) x_0 \right\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \|\mathcal{T}_{B_2K}^\#\|^i \|Q_0\|_1.$$

Lembre-se que

$$\|y_{i-1}\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \|B_1\|^2 \|V_{i-1}\|_1$$

e faça :

$$a = (\zeta_0, \zeta_1, \dots) \text{ com } \zeta_i = \|\mathfrak{F}_{B_2K}^{\#i}\|^{1/2} ;$$

$$b = (\beta_0, \beta_1, \dots) \text{ com } \beta_0 = \|Q_0\|_1^{1/2} \text{ e } \beta_j = \|V_{j-1}\|_1^{1/2} \|B_1\|, j \geq 1.$$

Portanto,

$$\|x_i\|_{\mathfrak{H}_6} \leq \gamma_i := \sum_{j=0}^i \zeta_{i-j} \beta_j.$$

Como $a \in \ell_1$ (pois $\|a\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \|\mathfrak{F}_{B_2K}^{\#i}\|^{1/2} < \infty$, já que $r(\mathfrak{F}_{B_2K}^{\#}) < 1$, cf. [56]) e $b \in \ell_2$ (pois $y \in \mathcal{V} \in \ell_2(\mathfrak{H}_6)$ e $\|V_i\|_1 = \|v_i\|_{\mathfrak{H}_6}^2$, de modo que $\sum_{j=0}^{\infty} \|V_j\|_1 = \|y\|_{\mathcal{V}}^2 < \infty$, e portanto $\|b\|_2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^2\right)^{1/2} < \infty$), segue que a convolução $c = a * b = \{\gamma_i = \sum_{j=0}^i \zeta_{i-j} \beta_j ; i \geq 0\}$ pertence a ℓ_2 com $\|c\|_2 \leq \|a\|_1 \|b\|_2$. Portanto, para todo $y \in \mathcal{V}$ e $x_0 \in \mathfrak{S}_0$,

$$\|x\|_{\mathfrak{S}} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_{\mathfrak{H}_6}^2 \right\}^{1/2} \leq \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^2 \right\}^{1/2} = \|c\|_2 < \infty.$$

A prova da necessidade segue da Proposição 4.5. □

Pela Proposição 4.6 temos que, para $r(\mathfrak{F}_{B_2K}^{\#}) < 1$, o seguinte operador linear limitado $X_{B_2K} \in \mathbf{B}[\mathfrak{S}_0 \oplus \mathcal{V}, \mathfrak{S}]$ é bem definido:

$$X_{B_2K}(x_0, y) = x = (x_0, x_1, \dots)$$

onde x é definido por (4.1) com $u_i = -Kx_i$ (note que $\|X_{B_2K}\| < \infty$). Seja $H''' = H \oplus H''$ e defina z_i , $i \geq 0$, tomado valores em H''' como:

$$z_i = \begin{bmatrix} M^{1/2} x_i \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{1/2} x_i \\ -Kx_i \end{bmatrix}$$

onde $M \in \mathbf{B}^+[H]$. Temos que $z = (z_0, z_1, \dots) \in \mathfrak{Z}$ e portanto o seguinte operador linear limitado $Z_{B_2K} \in \mathbf{B}[\mathfrak{S}_0 \oplus \mathcal{V}, \mathfrak{Z}]$ é bem definido:

$$Z_{B_2K}(x_0, y) = z = (z_0, z_1, \dots).$$

A partir dos operadores acima, definimos $X_{B_2K}^0 \in \mathbf{B}[\mathcal{V}, \mathfrak{S}]$ e $Z_{B_2K}^0 \in \mathbf{B}[\mathcal{V}, \mathfrak{Z}]$ da seguinte forma:

$$X_{B_2K}^0(y) = X_{B_2K}(0, y) \quad \text{e} \quad Z_{B_2K}^0(y) = Z_{B_2K}(0, y).$$

4.6. Controle ótimo

O problema de controle ótimo quadrático para o modelo bilinear (4.1), inspirado no caso linear, pode ser definido da seguinte forma. Considere (4.1) com $v_i = 0$ para todo $i \geq 0$. Deseja-se determinar $K \in \Gamma_{B_2}$ tal que minimize $\|Z_{B_2}K(x_0, 0)\|^2$, isto é, encontre $K \in \Gamma_{B_2}$ tal que minimize $J_K(x_0)$ onde

$$J_K(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}(\langle Mx_i; x_i \rangle + \langle u_i; u_i \rangle)$$

e $\{x_i; i \geq 0\}$ é dado por (4.1) com $v_i = 0$ e $u_i = -Kx_i$, $i \geq 0$ (note que não há perda de generalidade em assumirmos um custo da forma $\langle u_i; u_i \rangle$ ao invés de $\langle Nu_i; u_i \rangle$ para $N \in \mathbf{G}^+[H]$). Da mesma forma que no caso linear, a solução deste problema está associada à existência de uma solução para uma equação algébrica de operadores tipo Riccati, conforme veremos mais adiante. Uma condição para a existência e unicidade de uma solução estabilizadora para esta equação será obtida, generalizando os resultados conhecidos para o caso linear. Para tanto os seguintes resultados auxiliares serão necessários. Efetuando algumas manipulações algébricas longas porém simples, obtém-se o seguinte resultado.

Proposição 4.7 : Considere H_0 um espaço de Hilbert arbitrário, $Q \in \mathbf{B}[H]$, $N = N^* \in \mathbf{B}[H_0]$ e $B \in \mathbf{B}[H_0, H]$. Suponha que para algum $\hat{P} \in \mathbf{B}^+[H]$, $(N + B^*\hat{P}B)^{-1}$ exista em $\mathbf{B}[H]$. Defina $\hat{K} = (N + B^*\hat{P}B)^{-1}B^*\hat{P}$ e considere abaixo $K \in \mathbf{B}[H, H_0]$ arbitrário. As seguintes expressões são equivalentes:

- (a) $Q + \hat{K}^*N\hat{K} = \hat{P} - \mathfrak{T}_{B\hat{K}}^{\#}(\hat{P})$
- (b) $Q + K^*NK = \hat{P} - \mathfrak{T}_{BK}^{\#}(\hat{P}) + (K - \hat{K})^*(B^*\hat{P}B + N)(K - \hat{K})$
- (c) $Q = \hat{P} - \mathfrak{T}^{\#}(\hat{P}) + K^*(B^*\hat{P}B + N)\hat{K}$.

A proposição que se segue é crucial para a obtenção dos próximos resultados e foi provada em [28].

Proposição 4.8 : Considere H_0 um espaço de Hilbert arbitrário e $B \in \mathbf{B}[H_0, H]$. Suponha que

$$r(\mathfrak{T}_{BK}^{\#}) < 1. \text{ Se}$$

$$K^*K = P - \mathfrak{T}^{\#}(P)$$

para algum $P \in \mathbf{B}^+[H]$ então $r(\mathfrak{T}^{\#}) < 1$.

A próxima proposição pode ser facilmente estabelecida:

Proposição 4.9 : Considere H_0 um espaço de Hilbert arbitrário e $B \in \mathbf{B}[H_0, H]$. Suponha que $r(\mathcal{F}_{BK}^\#) < 1$. Para cada $Q \in \mathbf{B}[H]$ existe uma única solução $P \in \mathbf{B}[H]$ para a equação tipo Lyapunov $Q = P - \mathcal{F}^\#(P)$. Mais ainda, se $Q \in \mathbf{B}^+[H]$ então $P \in \mathbf{B}^+[H]$.

O resultado seguinte é uma consequência da Proposição 4.8.

Proposição 4.10 : Suponha que exista $\hat{B} \in \mathbf{B}[H]$ tal que $r(\mathcal{F}_{\hat{B}M}^\#) < 1$, e considere $Q \in \mathbf{B}^+[H]$ arbitrário.

Se

$$M + Q + K^*K = P - \mathcal{F}_{B_2K}^\#(P)$$

para algum $P \in \mathbf{B}^+[H]$ então $r(\mathcal{F}_{B_2K}^\#) < 1$.

Esboço da prova: Definindo

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} M^{1/2} \\ Q^{1/2} \\ K \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = [\hat{B}M^{1/2} \quad 0 \quad -B_2]$$

temos que $(\mathcal{F}_{B_2K}^\#)_{\tilde{B}\tilde{K}} = \mathcal{F}_{\hat{B}M}^\#$ e $\tilde{K}^*\tilde{K} = P - \mathcal{F}_{B_2K}^\#(P)$. Como $r((\mathcal{F}_{B_2K}^\#)_{\tilde{B}\tilde{K}}) < 1$, temos pela

Proposição 4.8 que $r(\mathcal{F}_{B_2K}^\#) < 1$. □

Podemos agora estabelecer um resultado que garante a existência e unicidade de uma solução estabilizadora para a equação algébrica tipo Riccati associada ao controle ótimo quadrático do modelo bilinear em dimensão infinita.

Teorema 4.1 : Suponha que exista $\hat{B} \in \mathbf{B}[H]$ tal que $r(\mathcal{F}_{\hat{B}M}^\#) < 1$. Se $\Gamma_{B_2} \neq \emptyset$, então existe uma única solução não negativa $P \in \mathbf{B}^+[H]$ para a equação tipo Riccati

$$M = P - \mathcal{F}^\#(P) + F^*PB_2(B_2^*PB_2 + I)^{-1}B_2^*PF.$$

Mais ainda, $K_P = (B_2^*PB_2 + I)^{-1}B_2^*PF \in \Gamma_{B_2}$.

Esboço da prova : Mostraremos por indução em i que para cada $i \geq 0$ existe $P_i \in \mathbb{B}^+[H]$ e $K_i \in \Gamma_{B_2}$ tal que

$$M + K_i^* K_i = P_i - \mathfrak{F}_{B_2 K_i}^\#(P_i). \quad (4.4)$$

Realmente considere $K_0 \in \Gamma_{B_2}$ arbitrário, de modo que $r(\mathfrak{F}_{B_2 K_0}^\#) < 1$. Portanto de acordo com a Proposição 4.9 existe um único $P_0 \in \mathbb{B}^+[H]$ tal que

$$M + K_0^* K_0 = P_0 - \mathfrak{F}_{B_2 K_0}^\#(P_0)$$

e o resultado é válido para $i = 0$. Suponha agora que o resultado seja válido para i e defina $K_{i+1} = (B_2^* P_i B_2 + I)^{-1} B_2^* P_i F \in \mathbb{B}[H, H']$. Adicionando $(K_i - K_{i+1})^* (B_2^* P_i B_2 + I) (K_i - K_{i+1})$ aos dois lados da equação (4.4) e da Proposição 4.7 (b) \Rightarrow (a), obtemos que

$$M + (K_i - K_{i+1})^* (B_2^* P_i B_2 + I) (K_i - K_{i+1}) + K_{i+1}^* K_{i+1} = P_i - \mathfrak{F}_{B_2 K_{i+1}}^\#(P_i).$$

e pela Proposição 4.10, $r(\mathfrak{F}_{B_2 K_{i+1}}^\#) < 1$. Pela Proposição 4.9, existe um único $P_{i+1} \in \mathbb{B}^+[H]$ tal que

$$M + K_{i+1}^* K_{i+1} = P_{i+1} - \mathfrak{F}_{B_2 K_{i+1}}^\#(P_{i+1})$$

o que conclui a prova por indução. Das duas últimas equações acima, temos que

$$0 \leq (K_i - K_{i+1})^* (B_2^* P_i B_2 + I) (K_i - K_{i+1}) = (P_i - P_{i+1}) - \mathfrak{F}_{B_2 K_{i+1}}^\#(P_i - P_{i+1})$$

para todo $i \geq 0$, e portanto pela Proposição 4.3, $(P_i - P_{i+1}) \in \mathbb{B}^+[H]$. Logo $\{P_i; i \geq 0\}$ é uma sequência monotônica não crescente de operadores não negativos, de modo que converge fortemente (cf. [92], p.79) para um operador $P_\infty \in \mathbb{B}^+[H]$, isto é, quando $i \rightarrow \infty$,

$$P_i \xrightarrow{s} P_\infty.$$

Temos então que,

$$(B_2^* P_i B_2 + I)^{-1} \xrightarrow{s} (B_2^* P_\infty B_2 + I)^{-1}$$

$$K_{i+1} = (B_2^* P_i B_2 + I)^{-1} B_2^* P_i F \xrightarrow{s} K_\infty = (B_2^* P_\infty B_2 + I)^{-1} B_2^* P_\infty F, \quad K_{i+1}^* \xrightarrow{s} K_\infty^*$$

$$K_i^* K_i \xrightarrow{s} K_\infty^* K_\infty$$

e pelas hipóteses feitas em relação à base ortornormal $\{e_k; k \geq 1\}$ podemos concluir que (cf. [28])

$$\mathfrak{F}_{B_2 K_i}^\#(P_i) \xrightarrow{s} \mathfrak{F}_{B_2 K_\infty}^\#(P_\infty).$$

Logo da equação (4.4) e dos resultados acima concluímos que

$$M + K_\infty^* K_\infty = P_\infty - \mathfrak{F}_{B_2 K_\infty}^\#(P_\infty)$$

e pela Proposição 4.10 obtemos que $K_\infty \in \Gamma_{B_2}$. Pela Proposição 4.7 (a) \Rightarrow (c) temos a prova da existência do teorema. A prova da unicidade pode ser facilmente obtida usando argumentos similares aos vistos acima (cf.[28]). \square

O teorema acima nos leva às seguintes definições:

Definição 4.1 : Considere um espaço de Hilbert separável H_0 arbitrário e $L \in \mathbf{B}[H, H_0]$ arbitrário. Diremos que o par (L, \mathfrak{F}) é detectável se existe $\hat{B} \in \mathbf{B}[H_0, H]$ tal que $r(\mathfrak{F}_{\hat{B}L}^\#) < 1$. Diremos que o par (\mathfrak{F}, B_2) é estabilizável se $\Gamma_{B_2} \neq \emptyset$.

Note que quando particularizamos o modelo bilinear para o caso linear, as definições acima se transformam nas condições usuais de sistemas detectáveis e estabilizáveis (isto é, (L, A_0) é detectável se existe \hat{B} tal que $r(A_0 - \hat{B}L)^2 = r(\mathfrak{F}_{\hat{B}L}^\#) = r(\mathfrak{F}_{\hat{B}L}) < 1$). Podemos agora resolver o problema de controle ótimo colocado no início da seção, utilizando os resultados do Teorema 4.1, com condições análogas às do caso linear.

Teorema 4.2 : Se (M, \mathfrak{F}) é detectável e (\mathfrak{F}, B_2) é estabilizável então existe $K_P \in \Gamma_{B_2}$ tal que para qualquer $x_0 \in \mathfrak{E}_0$,

$$J_{K_P}(x_0) = \min_{K \in \Gamma_{B_2}} J_K(x_0).$$

Mais ainda, $K_P = (B_2^* P B_2 + I)^{-1} B_2^* P F$ onde $P \in \mathbf{B}^+[H]$ é a única solução não negativa da equação algébrica tipo Riccati

$$M = P - \mathfrak{F}^\#(P) + F^* P B_2 (B_2^* P B_2 + I)^{-1} B_2^* P F$$

e $J_{K_P}(x_0) = \text{tr}(Q_0 P)$.

Esboço da prova : Através de manipulações algébricas temos que (cf [28])

$$J_K(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \text{tr} \left(Q_0 \mathfrak{F}_{B_2 K}^{\# i} (M + K^* K) \right)$$

e da equação algébrica tipo Riccati juntamente com a Proposição 4.7 temos

$$M + K^* K = P - \mathfrak{F}_{B_2 K}^{\#} (P) + (K - K_P)^* (B_2^* P B_2 + I) (K - K_P)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} J_K(x_0) &= \sum_{i=0}^{\infty} \text{tr} \left(Q_0 \mathfrak{F}_{B_2 K}^{\# i} (P - \mathfrak{F}_{B_2 K}^{\#} (P) + (K - K_P)^* (B_2^* P B_2 + I) (K - K_P)) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \text{tr} \left(Q_0 \mathfrak{F}_{B_2 K}^{\# i} ((K - K_P)^* (B_2^* P B_2 + I) (K - K_P)) \right) + \text{tr}(Q_0 P). \end{aligned}$$

A equação acima nos leva a concluir que o mínimo de $J_K(x_0)$ sobre $K \in \Gamma_{B_2}$ é obtido com $K = K_P$ e $J_{K_P}(x_0) = \text{tr}(Q_0 P)$, para qualquer $x_0 \in \mathfrak{X}_0$. \square

Concluimos esta seção notando que o problema de controle ótimo quadrático invariante no tempo com horizonte infinito definido acima pode ser aproximado fortemente por uma sequência de problemas de controle ótimo quadrático variantes no tempo com horizonte finito, um resultado que foi demonstrado em [28].

4.7. Controle H_{∞}

4.7.1. Resultado principal

Dado o sistema bilinear estocástico acima, o problema de controle que se deseja resolver consiste em encontrar uma realimentação de estado que estabilize o sistema e minimize o impacto dos distúrbios na saída do sistema, isto é,

Problema OP : Encontre $K \in \Gamma_{B_2}$ que minimize $\|Z_{B_2 K}^0\| = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \frac{\|Z_{B_2 K}^0(y)\|_{\mathfrak{Z}}}{\|y\|_{\mathcal{Y}}}$.

Para o caso linear, este problema é conhecido como controle H_∞ e, em geral, é de difícil solução. Portanto temos de considerar um problema sub-ótimo que, em termos do sistema bilinear acima, seria da forma:

Problema SOP : Dado $\delta > 0$ encontre $K \in \Gamma_{B_2}$ tal que $\|Z_{B_2}^0 K\| < \delta$, isto é, encontre $K \in \Gamma_{B_2}$ tal que para qualquer $y \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$,

$$\|Z_{B_2}^0 K(y)\|_{\mathcal{Z}}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \xi(\langle Mx_i; x_i \rangle + \langle u_i; u_i \rangle) < \delta^2 \sum_{i=0}^{\infty} \xi(\langle v_i; v_i \rangle).$$

(note que novamente não há perda de generalidade em assumirmos um custo da forma $\langle u_i; u_i \rangle$ ao invés de $\langle Nu_i; u_i \rangle$ para $N \in G^+[H]$).

Nas seções seguintes mostraremos o seguinte teorema, que resolve o problema SOP.

Teorema 4.3 : Suponha que (M, \mathcal{F}) seja detectável e considere $\delta > 0$ fixo. Então existe $K_P \in \Gamma_{B_2}$ tal que $\|Z_{B_2}^0 K_P\| < \delta$ se e somente se existe $P \in \mathbf{B}^+[H]$ satisfazendo as seguintes condições:

$$(i) \quad I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \in G^+[H],$$

$$(ii) \quad P = M + (\mathcal{F}_{B_2 K_P}^{\#})_{\frac{1}{\delta} B_1 (-K_N)}^{(P)} + K_P^* K_P - K_N^* K_N$$

onde

$$K_P = (I + B_2^* P B_2)^{-1} B_2^* P F_{\frac{1}{\delta} B_1 (-K_N)} \in \mathbf{B}[H, H''],$$

$$K_N = (I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2})^{-1} \frac{1}{\delta} B_1^* P F_{B_2 K_P} \in \mathbf{B}[H, H'],$$

isto é,

$$K_P = \left(I + B_2^* P B_2 + \frac{B_2^* P B_1}{\delta^2} \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right)^{-1} B_1^* P B_2 \right)^{-1} \left(B_2^* \left(I + \frac{P B_1}{\delta^2} \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right)^{-1} B_1^* \right) P F \right)$$

$$K_N = \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} + \frac{B_1^* P B_2}{\delta^2} \left(I + B_2^* P B_2 \right)^{-1} B_2^* P B_1 \right)^{-1} \left(\frac{B_1^*}{\delta} \left(I - P B_2 \left(I + B_2^* P B_2 \right)^{-1} B_2^* \right) P F \right)$$

$$(iii) \quad r((\mathcal{F}_{B_2 K_P}^{\#})_{\frac{1}{\delta} B_1 (-K_N)}) < 1.$$

Observação : Note que $(\mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#)_{\frac{1}{\delta} B_1(-K_N)}$ é obtido de $\mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#$ da mesma forma como $\mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#$ foi obtido de $\mathfrak{F}^\#$, isto é

$$(\mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#)_{\frac{1}{\delta} B_1(-K_N)} = (F_{B_2 K_P} + \frac{1}{\delta} B_1 K_N)^* P (F_{B_2 K_P} + \frac{1}{\delta} B_1 K_N) + \mathfrak{F}^\#(P)$$

4.7.2. Condição suficiente

Apresentaremos nessa seção a prova da condição de suficiência do Teorema 4.3, que pode ser escrita da seguinte forma.

Lema 4.1 : Para $\delta > 0$ fixo, suponha que exista $P \in \mathbb{B}^+[H]$ satisfazendo as condições (i), (ii), e (iii) do Teorema 4.3. Então existe $K \in \Gamma_{B_2}$ tal que $\|Z_{B_2}^0 K\| < \delta$.

A prova do Lema 4.1 será obtida a partir das seguintes proposições.

Proposição 4.11 : $r((\mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#)) < 1$.

Prova : Realmente temos do Teorema 4.3, (ii) que

$$P - (\mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#)_{\frac{1}{\delta} B_1(-K_N)}(P) = M + K_P^* K_P - K_N^* K_N$$

e da Proposição 4.7, (a) \Rightarrow (c), obtemos que

$$M + K_P^* K_P = P - \mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#(P) + K_N^* \left(\frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} - I \right) K_N$$

ou seja,

$$M + K_P^* K_P + K_N^* \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right) K_N = P - \mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#(P) \quad (4.5)$$

Defina agora $\hat{K} \in \mathbb{B}[H, H \oplus H' \oplus H'']$ da seguinte forma:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} M^{1/2} \\ \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right)^{1/2} K_N \\ K_P \end{bmatrix}.$$

Portanto a equação (4.5) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\hat{K}^* \hat{K} = P - \mathfrak{F}_{B_2 K_P}^\#(P) \quad (4.6)$$

Note agora que definindo $\hat{B} \in \mathbf{B}[H \oplus H' \oplus H'', H]$ como

$$\hat{B} = \left[0 \quad -\frac{1}{\delta} B_1 \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right)^{-1/2} \quad 0 \right]$$

obtemos que

$$\hat{B}\hat{K} = -\frac{1}{\delta} B_1 K_N$$

de modo que

$$\left(\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\# \right) \hat{B}\hat{K} = \left(\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\# \right) \frac{1}{\delta} B_1 (-K_N)$$

e portanto do Teorema 4.3, (iii) concluímos que

$$r\left(\left(\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\# \right) \hat{B}\hat{K} \right) = r\left(\left(\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\# \right) \frac{1}{\delta} B_1 (-K_N) \right) < 1. \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7) e pela Proposição 4.8 obtemos que $r\left(\left(\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\# \right) \right) < 1$. \square

Para $y \in \mathcal{Y}$, considere as seqüências $\{x_i; i \geq 0\}$ e $\{z_i; i \geq 0\}$ obtidas a partir de (4.1) com $u_i = -K_P x_i$ e $x_0 = 0$, isto é,

$$x_{i+1} = (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} x_i + B_1 v_i, \quad x_0 = 0 \quad (4.8.a)$$

$$u_i = -K_P x_i \quad (4.8.b)$$

$$z_i = \begin{bmatrix} M^{1/2} x_i \\ u_i \end{bmatrix}. \quad (4.8.c)$$

Proposição 4.12 : Para todo $i \geq 0$,

$$\mathfrak{E}\left(\langle P x_{i+1}; x_{i+1} \rangle \right) - \mathfrak{E}\left(\langle P x_i; x_i \rangle \right) = -\|z_i\|_{\mathfrak{H}}^2 + \delta^2 \|v_i\|_{\mathfrak{H}}^2 - \delta^2 \left\| \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right)^{1/2} \left(\frac{K_N}{\delta} x_i - v_i \right) \right\|_{\mathfrak{H}}^2 \quad (4.9)$$

Prova : Temos que $x_i \in \mathfrak{J}_{w_i}$ e da Proposição 2 em [57] concluímos que

$$\mathfrak{E}\left(\langle P((\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} x_i); ((\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} x_i) \rangle \right) = \text{tr} \left(\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\#(P) Q_i \right)$$

Também temos que

$$\mathfrak{E}\left(\langle Px_i; x_i \rangle\right) = \text{tr}\left(P Q_i\right)$$

de modo que, de (4.5), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}\left(\langle P((\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i x_i}); (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i x_i} \rangle\right) - \mathfrak{E}\left(\langle Px_i; x_i \rangle\right) &= \text{tr}\left(\left(\mathfrak{T}_{B_2 K_P}^\#(P) - P\right) Q_i\right) = \\ &- \text{tr}\left(\left(M + K_P^* K_P + K_N^* \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) K_N\right) Q_i\right) = - \left\{ \mathfrak{E}\left(\langle Mx_i; x_i \rangle + \langle K_P x_i; K_P x_i \rangle \right. \right. \\ &\left. \left. + \langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) K_N x_i; K_N x_i \rangle\right) \right\} = - \left\{ \mathfrak{E}\left(\langle z_i; z_i \rangle + \langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) K_N x_i; K_N x_i \rangle\right) \right\}. \end{aligned}$$

Note agora que $w_i \in \mathcal{J}_{\{v_i, x_i\}}$ e portanto (cf. [58], p. 21)

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}\left(\langle PB_1 v_i; (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i x_i} \rangle\right) &= \mathfrak{E}\left(\langle PB_1 v_i; F_{B_2 K_P} x_i \rangle\right) = \mathfrak{E}\left(\langle v_i; B_1^* P F_{B_2 K_P} x_i \rangle\right) \\ &= \delta \mathfrak{E}\left(\langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) v_i; K_N x_i \rangle\right) \end{aligned}$$

Da mesma forma, $\mathfrak{E}\left(\langle (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i x_i}; PB_1 v_i \rangle\right) = \delta \mathfrak{E}\left(\langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) K_N x_i; v_i \rangle\right)$ e obtemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}\left(\langle Px_{i+1}; x_{i+1} \rangle\right) - \mathfrak{E}\left(\langle Px_i; x_i \rangle\right) &= \mathfrak{E}\left(\langle P((\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i x_i} + B_1 v_i); (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i x_i} + B_1 v_i \rangle\right) \\ &- \mathfrak{E}\left(\langle Px_i; x_i \rangle\right) = - \mathfrak{E}\left(\langle z_i; z_i \rangle\right) - \mathfrak{E}\left(\langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) K_N x_i; K_N x_i \rangle\right) + \\ &\delta \mathfrak{E}\left(\langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) K_N x_i; v_i \rangle\right) + \delta \mathfrak{E}\left(\langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) v_i; K_N x_i \rangle\right) - \\ &\delta^2 \mathfrak{E}\left(\langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right) v_i; v_i \rangle\right) + \delta^2 \mathfrak{E}\left(\langle v_i; v_i \rangle\right) = \end{aligned}$$

$$- \|z_i\|_{\mathfrak{H}_6}^2 + \delta^2 \|v_i\|_{\mathfrak{H}_6}^2 - \delta^2 \left\| \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2}\right)^{1/2} \left(\frac{K_N}{\delta} x_i - v_i\right) \right\|_{\mathfrak{H}_6}^2.$$

□

Lembrando que $x_0 = 0$ e $\|x_i\|_{\mathcal{J}_6} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$ (realmente, como $r((\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\#)) < 1$ temos, pela Proposição 4.6, que $\|x\|_{\mathcal{E}} = \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_{\mathcal{J}_6} < \infty$, de modo que $\|x_i\|_{\mathcal{J}_6} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$), obtemos da equação (4.9) que

$$\sum_{i=0}^N \left\{ \mathfrak{E} \left(\langle P x_{i+1}; x_{i+1} \rangle \right) - \mathfrak{E} \left(\langle P x_i; x_i \rangle \right) \right\} = \mathfrak{E} \left(\langle P x_{N+1}; x_{N+1} \rangle \right) \leq \|P\| \|x\|_{\mathcal{J}_6} \rightarrow 0 \text{ quando } i \rightarrow \infty$$

resultando que

$$0 = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ -\|z_i\|_{\mathcal{J}_6}^2 + \delta^2 \|v_i\|_{\mathcal{J}_6}^2 - \delta^2 \left\| \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right)^{1/2} \left(\frac{K_N}{\delta} x_i - v_i \right) \right\|_{\mathcal{J}_6}^2 \right\}$$

isto é,

$$\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 = \delta^2 \left\{ \|v\|_{\mathcal{V}}^2 - \|r\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} \quad (4.10)$$

onde $r = (r_0, r_1, \dots) \in \mathcal{V}$ é definido como

$$r_i = \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right)^{1/2} \left(\frac{K_N}{\delta} x_i - v_i \right), i \geq 0 \quad (4.11)$$

Definimos o operador $\tilde{V} \in \mathcal{B}[\mathcal{V}]$ da seguinte forma: $\tilde{V} = \frac{1}{\delta} K_N X_{B_2 K_P}^0 - I$, isto é, para qualquer $y \in \mathcal{V}$,

$\tilde{V}(y) = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots)$, onde

$$\tilde{v}_i = \frac{1}{\delta} K_N x_i - v_i, i \geq 0$$

com x_i dado por (4.8). Temos o seguinte resultado:

Proposição 4.13 : \tilde{V}^{-1} existe em $\mathcal{B}[\mathcal{V}]$.

Prova : Defina os operadores $\tilde{X} \in \mathcal{B}[\mathcal{V}, \mathfrak{E}]$ e $\tilde{S} \in \mathcal{B}[\mathcal{V}]$ da seguinte forma:

a) para $y \in \mathcal{V}$, $\tilde{X}(y) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots)$ é dado por

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{\mathcal{A}}_{w_i} \tilde{x}_i - B_1 v_i, i \geq 0, \tilde{x}_0 = 0 \quad (4.12)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{A}}_{w_i} = \left(A_0 - B_2 K_P + \frac{1}{\delta} B_1 K_N \right) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \langle w_i; e_k \rangle$$

Note que, pela hipótese (iii) do Teorema 4.3, $r((\mathcal{F}_{B_2 K_P}^\#) \frac{1}{\delta} B_1 (-K_N)) < 1$, e portanto pela Proposição 4.6, $\tilde{X} \in \mathcal{B}[\mathcal{V}, \mathfrak{E}]$.

b) $\tilde{S} = \frac{1}{\delta} K_N \tilde{X} - I$, isto é, para $y \in \mathcal{V}$, $\tilde{S}(y) = (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots)$ é dado por

$$\tilde{s}_i = \frac{1}{\delta} K_N \tilde{x}_i - v_i, i \geq 0$$

com $\tilde{x}_i, i \geq 0$, dado por (4.12). Como $\tilde{X} \in \mathbf{B}[\mathcal{V}, \mathfrak{E}]$, temos que $\tilde{S} \in \mathbf{B}[\mathcal{V}]$.

Vamos mostrar agora que $\tilde{V}\tilde{S} = \tilde{S}\tilde{V} = I$. Representando por $[\tilde{V}\tilde{S}(y)]_i$ o $i^{\text{ésimo}}$ elemento de $\tilde{V}\tilde{S}(y)$, obtemos que

$$[\tilde{V}\tilde{S}(y)]_i = \tilde{v}_i = \frac{1}{\delta} K_N x_i - \tilde{s}_i = \frac{1}{\delta} K_N x_i - \left(\frac{1}{\delta} K_N \tilde{x}_i - v_i \right) = v_i + \frac{1}{\delta} K_N (x_i - \tilde{x}_i). \quad (4.13)$$

De (4.8) e (4.12) temos que

$$x_{i+1} = (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} x_i + B_1 \tilde{s}_i, x_0 = 0$$

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{\mathcal{A}}_{w_i} \tilde{x}_i - B_1 v_i = (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} \tilde{x}_i + B_1 \tilde{s}_i, \tilde{x}_0 = 0$$

de modo que $\tilde{x}_i = x_i$ para todo $i \geq 0$, e de (4.13) concluímos que $[\tilde{V}\tilde{S}(y)]_i = v_i$. Representando por $[\tilde{S}\tilde{V}(y)]_i$ o $i^{\text{ésimo}}$ elemento de $\tilde{S}\tilde{V}(y)$, resulta que

$$[\tilde{S}\tilde{V}(y)]_i = \tilde{s}_i = \frac{1}{\delta} K_N \tilde{x}_i - \tilde{v}_i = \frac{1}{\delta} K_N \tilde{x}_i - \left(\frac{1}{\delta} K_N x_i - v_i \right) = v_i + \frac{1}{\delta} K_N (\tilde{x}_i - x_i). \quad (4.14)$$

Novamente, de (4.8) e (4.12) obtemos que

$$x_{i+1} = (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} x_i + B_1 v_i, x_0 = 0$$

$$\tilde{x}_{i+1} = \tilde{\mathcal{A}}_{w_i} \tilde{x}_i - B_1 \tilde{v}_i = (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} \tilde{x}_i + \frac{1}{\delta} B_1 K_N \tilde{x}_i - B_1 \left(\frac{1}{\delta} K_N x_i - v_i \right)$$

$$= (\mathcal{A}_{B_2 K_P})_{w_i} \tilde{x}_i + B_1 v_i + \frac{1}{\delta} B_1 K_N (\tilde{x}_i - x_i), \tilde{x}_0 = 0$$

e é fácil de verificar que $x_i = \tilde{x}_i$ para todo $i \geq 0$. De (4.14) segue que $[\tilde{S}\tilde{V}(y)]_i = v_i$, e portanto concluímos que $\tilde{V}^{-1} = \tilde{S} \in \mathbf{B}[\mathcal{V}]$. \square

Podemos agora concluir a prova do lema.

Prova do Lema 4.1 : Considere $\alpha_1 > 0$ tal que $\|\tilde{V}^{-1}\| < \alpha_1$ e $\alpha_2 > 0$ tal que $I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \geq \alpha_2 I$. Como $(1/\alpha_1) \|y\|_{\mathcal{V}} \leq \|\tilde{V}^{-1}\|^{-1} \|y\|_{\mathcal{V}} \leq \|\tilde{V}(y)\|_{\mathcal{V}}$ para qualquer $y \in \mathcal{V}$, obtemos de (4.11) que

$$\begin{aligned} \|r\|_{\mathcal{V}}^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E} \left(\left\langle \left(I - \frac{B_1^* P B_1}{\delta^2} \right) \left(\frac{1}{\delta} K_N x_i - v_i \right); \left(\frac{1}{\delta} K_N x_i - v_i \right) \right\rangle \right) \geq \alpha_2^2 \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E} \left(\left\| \frac{1}{\delta} K_N x_i - v_i \right\|^2 \right) \\ &= \alpha_2^2 \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E} \left(\left\| [\tilde{V}v]_i \right\|^2 \right) = \alpha_2^2 \|\tilde{V}(y)\|_{\mathcal{V}}^2 \geq \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

e substituindo (4.14) em (4.10) temos que para todo $y \neq 0$ em \mathcal{V} ,

$$\frac{\|z\|_{\mathcal{Z}}^2}{\|y\|_{\mathcal{V}}^2} \leq \delta^2 \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right) < \delta^2$$

ou, em outras palavras, $\|Z_{B_2 K_P}^0\| < \delta$. □

4.7.3. Condição necessária

Nesta seção mostraremos que as condições do Teorema 4.1, com a hipótese extra de que o par (M, \mathcal{F}) é detectável (veja sub-seção 4.6, definição 4.1), também são necessárias. Isto é, mostraremos o seguinte lema:

Lema 4.2 : Para $\delta > 0$ fixo, suponha que (M, \mathcal{F}) seja detectável e que exista $\tilde{K} \in \Gamma_{B_2}$ tal que $\|Z_{B_2 \tilde{K}}\| < \delta$. Então existe $P \in \mathbb{B}^+[H]$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 4.3.

Para mostrarmos este lema, precisaremos do seguinte resultado, enunciado em [53,p.11] e estabelecido por Yakubovich [95].

Proposição 4.14 : Considere um espaço de Hilbert \mathcal{G} com a seguinte forma quadrática: $J(\zeta) = \langle R\zeta; \zeta \rangle$ com $R \in \mathbb{B}[\mathcal{G}]$, $R = R^*$. Seja \mathcal{M}_0 um subespaço fechado de \mathcal{G} e \mathcal{M} a translação de \mathcal{M}_0 por um elemento $m \in H_0$ (ie, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + m$). Suponha que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\inf_{\zeta \in \mathcal{M}_0} \frac{\langle R\zeta; \zeta \rangle}{\langle \zeta; \zeta \rangle} > 0.$$

Então existe um único elemento $\hat{\zeta} \in \mathcal{M}$ tal que $J(\hat{\zeta}) = \inf_{\zeta \in \mathcal{M}} J(\zeta)$, onde $\hat{\zeta}$ é da forma $\hat{\zeta} = p + m$ com $p \in \mathcal{M}_0$ e $p = Tm$ para algum $T \in \mathbb{B}[\mathcal{G}]$.

Do Teorema 4.1 existe um único $L \in \mathbb{B}^+[H]$ tal que

$$M = L - \mathcal{F}^{\#}(L) + F^*LB_2(I + B_2^*LB_2)^{-1}B_2^*LF = L - \mathcal{F}_{B_2 K_L}^{\#}(L) - K_L^*K_L \quad (4.16)$$

onde $K_L = (I + B_2^*LB_2)^{-1}B_2^*LF \in \Gamma_{B_2}$. Para qualquer $q = (q_0, q_1, \dots) \in \mathcal{U}$, $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ e $y = (v_0, v_1, \dots) \in \mathcal{V}$, defina para todo $i \geq 0$,

$$x'_{i+1} = \mathcal{A}_{w_i} x'_i + B_1 v_i + B_2 u'_i, \quad x'_0 = x_0 \quad (4.17.a)$$

$$u_i' = -K_L x_i' + q_i \quad (4.17.b)$$

$$z_i' = \begin{bmatrix} M^{1/2} x_i' \\ u_i' \end{bmatrix} \quad (4.17.c)$$

e os operadores lineares X' e Z' da seguinte forma: $X'(x_0, y, q) = (x_0', x_1', \dots)$ e $Z'(x_0, y, q) = (z_0', z_1', \dots)$.

Note que

$$x_{i+1}' = (\mathcal{A}_{B_2 K_L})_{w_i} x_i' + B_1 v_i + B_2 q_i \quad (4.18.d)$$

e como $r(\mathcal{F}_{B_2 K_L}^\#) < 1$, temos da Proposição 4.6 que $X' \in \mathbf{B}[\mathfrak{X}_0 \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}, \mathfrak{X}]$ e $Z' \in \mathbf{B}[\mathfrak{X}_0 \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}, \mathfrak{Z}]$. Os seguintes resultados decorrem dessas definições:

Proposição 4.15 : Para qualquer $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ e $q \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} \|Z'(x_0, 0, q)\|_{\mathfrak{Z}}^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}(\langle M x_i'; x_i' \rangle + \langle u_i'; u_i' \rangle) \\ &= \mathfrak{E}(\langle L x_0'; x_0' \rangle) + \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}(\langle (I + B_2^* L B_2) q_i'; q_i' \rangle) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Prova : Utilizando argumentos similares aos usados na prova da Proposição 4.12, temos que

$$\mathfrak{E}(\langle L(\mathcal{A}_{B_2 K_L})_{w_i} x_i'; (\mathcal{A}_{B_2 K_L})_{w_i} x_i' \rangle) = \text{tr}(\mathcal{F}_{B_2 K_L}^\#(L) Q_i'),$$

$$\mathfrak{E}(\langle L x_i'; x_i' \rangle) = \text{tr}(L Q_i'),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(\langle L(\mathcal{A}_{B_2 K_L})_{w_i} x_i'; B_2 q_i' \rangle) &= \mathfrak{E}(\langle L F_{B_2 K_L} x_i'; B_2 q_i' \rangle) = \mathfrak{E}(\langle B_2^* L F x_i'; q_i' \rangle) - \mathfrak{E}(\langle B_2^* L B_2 K_L x_i'; q_i' \rangle) \\ &= \mathfrak{E}(\langle (I + B_2^* L B_2) K_L x_i'; q_i' \rangle) - \mathfrak{E}(\langle B_2^* L B_2 K_L x_i'; q_i' \rangle) = \mathfrak{E}(\langle K_L x_i'; q_i' \rangle), \end{aligned}$$

onde $Q_i' = E(x_i' \circ x_i')$. De (4.16) obtemos que

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}(\langle L(\mathcal{A}_{B_2 K_L})_{w_i} x_i'; (\mathcal{A}_{B_2 K_L})_{w_i} x_i' \rangle) - \mathfrak{E}(\langle L x_i'; x_i' \rangle) = \text{tr}(\left(\mathcal{F}_{B_2 K_L}^\#(L) - L\right) Q_i') = \\ &- \text{tr}(\left(M + K_L^* K_L\right) Q_i') = - \left\{ \mathfrak{E}(\langle M x_i'; x_i' \rangle) + \mathfrak{E}(\langle K_L x_i'; K_L x_i' \rangle) \right\} \end{aligned}$$

e portanto de (4.17) concluímos que,

$$\begin{aligned} & \mathfrak{E}(\langle Lx'_{i+1}; x'_{i+1} \rangle) - \mathfrak{E}(\langle Lx'_i; x'_i \rangle) = - \left\{ \mathfrak{E}(\langle Mx'_i; x'_i \rangle) + \mathfrak{E}(\langle K_L x'_i; K_L x'_i \rangle) \right\} \\ & + \mathfrak{E}(\langle K_L x'_i; q_i \rangle) + \mathfrak{E}(\langle q_i; K_L x'_i \rangle) + \mathfrak{E}(\langle (I + B_2^* L B_2) q_i; q_i \rangle) - \mathfrak{E}(\langle q_i; q_i \rangle) = \\ & - \left\{ \mathfrak{E}(\langle Mx'_i; x'_i \rangle) + \mathfrak{E}(\langle (q_i - K_L x'_i); (q_i - K_L x'_i) \rangle) \right\} + \mathfrak{E}(\langle (I + B_2^* L B_2) q_i; q_i \rangle) = \\ & - \left\{ \mathfrak{E}(\langle Mx'_i; x'_i \rangle) + \mathfrak{E}(\langle u'_i; u'_i \rangle) \right\} + \mathfrak{E}(\langle (I + B_2^* L B_2) q_i; q_i \rangle) \end{aligned}$$

Somando em i de 0 a ∞ e lembrando que $\mathfrak{E}(\|x_i\|) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$ (já que $r(\mathcal{T}_{B_2 K_L}^\#) < 1$; cf Proposição 4.6) obtemos (4.18). \square

Defina $\mathfrak{G}' = \mathfrak{F}_0 \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ e para $(x_0, y, q) \in \mathfrak{G}'$,

$$J'(x_0, y, q) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \mathfrak{E}(\langle Mx'_i; x'_i \rangle) + \mathfrak{E}(\langle u'_i; u'_i \rangle) - \delta^2 \mathfrak{E}(\langle v_i; v_i \rangle) \right\} = \|Z'(x_0, y, q)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|y\|_{\mathcal{V}}^2$$

Proposição 4.16 : Para cada $x_0 \in \mathfrak{F}_0$ e $y \in \mathcal{V}$ existe um único elemento $q' \in \mathcal{U}$ tal que $J'(x_0, y, q')$ = $\inf_{q \in \mathcal{U}} J'(x_0, y, q)$. Além disto, existe $G' \in \mathcal{B}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ tal que $q' = G'y$.

Prova : Inicialmente note que

$$\begin{aligned} J'(x_0, y, q) &= \langle Z'(x_0, y, q); Z'(x_0, y, q) \rangle_{\mathfrak{Z}} - \langle (0, \delta^2 y, 0); (x_0, y, q) \rangle_{\mathfrak{G}'} \\ &= \langle Z'^* Z'(x_0, y, q); (x_0, y, q) \rangle_{\mathfrak{G}'} - \langle (0, \delta^2 y, 0); (x_0, y, q) \rangle_{\mathfrak{G}'} \\ &= \langle R'(x_0, y, q); (x_0, y, q) \rangle_{\mathfrak{G}'} \end{aligned}$$

onde $R'(x_0, y, q) = Z'^* Z'(x_0, y, q) - (0, \delta^2 y, 0)$. Note que \mathfrak{G}' é um espaço de Hilbert, $R' \in \mathcal{B}[\mathfrak{G}']$ e $R' = R'^*$.

Defina $\mathcal{M}'_0 = \{(x_0, y, q) \in \mathfrak{G}'; x_0 = 0, y = 0\}$ e para $x'_0 \in \mathfrak{F}_0, y' \in \mathcal{V}$, $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_0 + m' = \{(x_0, y, q) \in \mathfrak{G}'; x_0 = x'_0, y = y'\}$ onde $m' = (x'_0, y', 0)$. Temos que \mathcal{M}'_0 é um subespaço fechado de \mathfrak{G}' e \mathcal{M}' uma translação de \mathcal{M}'_0 por um elemento m' . De (4.18) temos que

$$\inf_{\zeta \in \mathcal{M}'_0} \frac{\langle R' \zeta; \zeta \rangle_{\mathfrak{G}'}}{\langle \zeta; \zeta \rangle_{\mathfrak{G}'}} = \inf_{q \in \mathcal{U}} \frac{\|Z'(0, 0, q)\|_{\mathfrak{Z}}^2}{\|q\|_{\mathcal{U}}^2} = \inf_{q \in \mathcal{U}} \frac{\|(I + B_2^* L B_2)^{1/2} q\|_{\mathcal{U}}^2}{\|q\|_{\mathcal{U}}^2} \geq 1$$

e de acordo com a Proposição 4.14 existe um único elemento $\zeta' \in \mathcal{A}b'$ tal que $J'(\zeta') = \inf_{\zeta \in \mathcal{A}b'} J'(\zeta)$, onde $\zeta' = p' + m'$, $p' = (0, 0, q') \in \mathcal{A}b'_0$ e $p' = T'm'$ para algum $T' \in \mathbf{B}[\mathfrak{G}']$. Logo $T'm' = T'(x'_0, y', 0) = (0, 0, q')$. Note também que de (4.18) devemos ter que $T'(x'_0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ e portanto para algum $G' \in \mathbf{B}[\mathfrak{V}, \mathfrak{U}]$, $q' = G'y'$ onde $J'(x'_0, y', q') = \inf_{q \in \mathfrak{U}} J'(x'_0, y', q')$. \square

Definimos agora os seguintes operadores \tilde{X} e \tilde{X} em $\mathbf{B}[\mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{V}, \mathfrak{S}]$ e \tilde{Z} e \tilde{Z} em $\mathbf{B}[\mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{V}, \mathfrak{Z}]$: para $x_0 \in \mathfrak{F}_0$ e $y = (v_0, v_1, \dots) \in \mathfrak{V}$, $\tilde{X}(x_0, y) = X'(x_0, y, G'y)$, $\tilde{Z}(x_0, y) = Z'(x_0, y, G'y)$ e $\tilde{X}(x_0, y) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots)$, $\tilde{Z}(x_0, y) = (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \dots)$ onde (\tilde{K} conforme enunciado do Lema 4.2),

$$\tilde{x}_{i+1} = \mathcal{A}_{w_i} \tilde{x}_i + B_1 v_i + B_2 \tilde{u}_i, \quad \tilde{x}_0 = x_0 \quad (4.19.a)$$

$$\tilde{u}_i = -\tilde{K} \tilde{x}_i \quad (4.19.b)$$

$$\tilde{z}_i = \begin{bmatrix} M^{1/2} \tilde{x}_i \\ \tilde{u}_i \end{bmatrix} \quad (4.19.c)$$

(note que \tilde{X} e \tilde{Z} são operadores limitados porque $r((\mathfrak{T}_{B_2 \tilde{K}}^\#)) < 1$). Defina $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{F}_0 \oplus \mathfrak{V}$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 4.17 : Para qualquer $(x_0, y) \in \tilde{\mathfrak{G}}$,

$$\|\tilde{Z}(x_0, y)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|y\|_{\mathfrak{V}}^2 \leq \|\tilde{Z}(x_0, y)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|y\|_{\mathfrak{V}}^2$$

Prova : Para qualquer $q \in \mathfrak{U}$,

$$\|\tilde{Z}(x_0, y)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|y\|_{\mathfrak{V}}^2 \leq \|Z'(x_0, y, q)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|y\|_{\mathfrak{V}}^2$$

e escolhendo $q = (q_0, q_1, \dots)$ como $q_i = K_L x'_i - \tilde{K} x'_i$, $i \geq 0$, onde x'_i é definido como em (4.17), obtemos que $x'_i = \tilde{x}_i$, $i \geq 0$, onde \tilde{x}_i é definido como em (4.19), e portanto $Z'(x_0, y, q) = \tilde{Z}(x_0, y)$. Note que realmente $q \in \mathfrak{U}$. \square

Da hipótese de que existe $\tilde{K} \in \Gamma_{B_2}$ tal que para qualquer $y \neq 0$ em \mathfrak{V} , $\|Z_{B_2 \tilde{K}}^0(y)\|_{\mathfrak{Z}} < \delta \|y\|_{\mathfrak{V}}$, podemos encontrar $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\|Z_{B_2 \tilde{K}}^0(y)\|_{\mathfrak{Z}}^2}{\|y\|_{\mathfrak{V}}^2} < \delta^2 - \alpha^2 \quad (4.20)$$

obtemos da Proposição 4.17 que para qualquer $\mathfrak{y} \in \mathcal{V}$,

$$\alpha^2 \|\mathfrak{y}\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \delta^2 \|\mathfrak{y}\|_{\mathcal{V}}^2 - \|\tilde{Z}(0, \mathfrak{y})\|_{\mathcal{Z}}^2 \leq \delta^2 \|\mathfrak{y}\|_{\mathcal{V}}^2 - \|\tilde{Z}(0, \mathfrak{y})\|_{\mathcal{Z}}^2$$

e portanto

$$\inf_{\mathfrak{y} \in \mathcal{V}} \left\{ \frac{\delta^2 \|\mathfrak{y}\|_{\mathcal{V}}^2 - \|\tilde{Z}(0, \mathfrak{y})\|_{\mathcal{Z}}^2}{\|\mathfrak{y}\|_{\mathcal{V}}^2} \right\} \geq \alpha^2. \quad (4.21)$$

Defina para $(x_0, \mathfrak{y}) \in \tilde{\mathcal{G}}$,

$$\begin{aligned} \tilde{J}(x_0, \mathfrak{y}) &= \|\tilde{Z}(0, \mathfrak{y})\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|\mathfrak{y}\|_{\mathcal{V}}^2 = \langle \tilde{Z}^* \tilde{Z}(x_0, \mathfrak{y}); (x_0, \mathfrak{y}) \rangle_{\tilde{\mathcal{G}}} - \langle (0, \delta^2 \mathfrak{y}); (x_0, \mathfrak{y}) \rangle_{\tilde{\mathcal{G}}} \\ &= \langle \tilde{R}(x_0, \mathfrak{y}); (x_0, \mathfrak{y}) \rangle_{\tilde{\mathcal{G}}} \end{aligned}$$

onde $\tilde{R}(x_0, \mathfrak{y}) = \tilde{Z}^* \tilde{Z}(x_0, \mathfrak{y}) - \delta^2 (0, \mathfrak{y})$. Temos que $\tilde{\mathcal{G}}$ é um espaço de Hilbert, $\tilde{R} \in \mathbf{B}[\tilde{\mathcal{G}}]$ e $\tilde{R} = \tilde{R}^*$. Resulta a seguinte proposição.

Proposição 4.18 : Para cada $x_0 \in \mathfrak{S}_0$ existe um único elemento $\hat{\mathfrak{y}} \in \mathcal{V}$ tal que

$$-\tilde{J}(x_0, \hat{\mathfrak{y}}) = \inf_{\mathfrak{y} \in \mathcal{V}} (-\tilde{J}(x_0, \mathfrak{y})).$$

Mais ainda, para algum $\tilde{G} \in \mathbf{B}[\mathfrak{S}_0, \mathcal{V}]$, $\hat{\mathfrak{y}} = \tilde{G}x_0$.

Prova : Defina

$$\tilde{\mathcal{M}}_0 = \{(x_0, \mathfrak{y}) \in \tilde{\mathcal{G}}; x_0 = 0\}$$

$$\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}_0 + \tilde{m} = \{(x_0, \mathfrak{y}) \in \tilde{\mathcal{G}}; x_0 = \tilde{x}_0\}$$

onde $\tilde{m} = (\tilde{x}_0, 0) \in \tilde{\mathcal{G}}$. Temos que $\tilde{\mathcal{M}}_0$ é um sub-espaço fechado de $\tilde{\mathcal{G}}$ e $\tilde{\mathcal{M}}$ uma translação de $\tilde{\mathcal{M}}_0$ pelo elemento \tilde{m} . Note que de (4.21),

$$\inf_{\zeta \in \tilde{\mathcal{M}}_0} \left\{ \frac{-\langle \tilde{R}\zeta; \zeta \rangle_{\tilde{\mathcal{G}}}}{\langle \zeta; \zeta \rangle_{\tilde{\mathcal{G}}}} \right\} \geq \alpha^2 > 0$$

e de acordo com a Proposição 4.14, existe um único elemento $\tilde{\zeta} \in \tilde{\mathcal{M}}$ tal que $(-\tilde{J}(\tilde{\zeta})) = \inf_{\zeta \in \tilde{\mathcal{M}}} (-\tilde{J}(\zeta))$ onde

$\tilde{\zeta} = \tilde{p} + \tilde{m}$, $\tilde{p} = (0, \mathfrak{y}) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ e $\tilde{p} = \tilde{T}\tilde{m}$ para algum $\tilde{T} \in \mathbf{B}[\tilde{\mathcal{G}}]$. Logo, $\tilde{T}\tilde{m} = \tilde{T}(\tilde{x}_0, 0) = (0, \hat{\mathfrak{y}})$ e para algum $\tilde{G} \in \mathbf{B}[\mathfrak{S}_0, \mathcal{V}]$, $\hat{\mathfrak{y}} = \tilde{G}x_0$ onde $(-\tilde{J}(x_0, \hat{\mathfrak{y}})) = \inf_{\mathfrak{y} \in \mathcal{V}} (-\tilde{J}(x_0, \mathfrak{y}))$. \square

Definimos os operadores $\hat{X} \in \mathbf{B}[\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}]$, $\hat{Z} \in \mathbf{B}[\mathfrak{S}_0, \mathcal{Z}]$ e $\hat{J}(\cdot): \mathfrak{S}_0 \rightarrow \mathbf{R}_+$ da seguinte forma: para $x_0 \in \mathfrak{S}_0$, $\hat{X}(x_0) = \tilde{X}(x_0, \tilde{G}x_0)$, $\hat{Z}(x_0) = \tilde{Z}(x_0, \tilde{G}x_0)$ e

$$\hat{J}(x_0) = \tilde{J}(x_0, \tilde{G}x_0) = \|\hat{Z}(x_0)\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}x_0\|_{\mathcal{V}}^2.$$

Note que realmente $\hat{J}(x_0) \geq 0$ já que

$$-\hat{J}(x_0) = \inf_{\mathcal{V}} (-\hat{J}(x_0, \mathcal{V})) \leq -\hat{J}(x_0, 0) = -\|\tilde{Z}(x_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 \leq 0.$$

Sejam os operadores $\mathcal{P} \in \mathbf{B}^+[\mathfrak{X}_0]$ e $P \in \mathbf{B}^+[H]$ definidos da seguinte forma:

$$\mathcal{P} = \hat{Z}^* \hat{Z} - \delta^2 \tilde{G}^* \tilde{G},$$

$$Px = E(\mathcal{P}x) \text{ para todo } x \in H \subset \mathfrak{X}_0.$$

Note que para qualquer $x_0 \in \mathfrak{X}_0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \hat{J}(x_0) &= \langle \hat{Z}(x_0); \hat{Z}(x_0) \rangle_{\mathfrak{Z}} - \delta^2 \langle \tilde{G}x_0; \tilde{G}x_0 \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle (\hat{Z}^* \hat{Z} - \delta^2 \tilde{G}^* \tilde{G})(x_0); x_0 \rangle_{\mathfrak{X}_0} = \langle \mathcal{P}x_0; x_0 \rangle_{\mathfrak{X}_0} \end{aligned}$$

e, da definição do operador valor esperado E (cf [57]), para qualquer $x \in H$,

$$0 \leq \hat{J}(x) = \mathfrak{E}(\langle \mathcal{P}x; x \rangle) = \langle E(\mathcal{P}x); x \rangle = \langle Px; x \rangle$$

mostrando que realmente $\mathcal{P} \geq 0$ e $P \geq 0$.

No que se segue abaixo, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_n &= \{\mathcal{V} = (v_0, v_1, \dots) \in \mathcal{V}; v_{n+i} = 0 \text{ para } i \geq 0\}, \\ \hat{J}_n(x_0) &= \sup_{\mathcal{V} \in \mathcal{Y}_n} \left\{ \|\tilde{Z}(x_0, \mathcal{V})\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|\mathcal{V}\|_{\mathcal{V}}^2 \right\}, \quad x_0 \in \mathfrak{X}_0 \end{aligned}$$

e para qualquer $\mathcal{V} = (v_0, v_1, \dots) \in \mathcal{V}$, faça $g_n \in \mathbf{B}[\mathcal{V}, \mathcal{Y}_n]$ como

$$g_n(\mathcal{V}) = (v_0, \dots, v_{n-1}, 0, 0, \dots)$$

Proposição 4.19 : Para cada $x_0 \in \mathfrak{X}_0$, $\hat{J}_n(x_0) \uparrow \hat{J}(x_0)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Prova : Como $\mathcal{Y}_n \subset \mathcal{V}$ é claro que

$$\begin{aligned} \left\{ \|\tilde{Z}(x_0, g_n(\tilde{G}(x_0)))\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|g_n(\tilde{G}(x_0))\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} &\leq \hat{J}_n(x_0) = \sup_{\mathcal{V} \in \mathcal{Y}_n} \left\{ \|\tilde{Z}(x_0, \mathcal{V})\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|\mathcal{V}\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} \\ &\leq \sup_{\mathcal{V} \in \mathcal{V}} \left\{ \|\tilde{Z}(x_0, \mathcal{V})\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|\mathcal{V}\|_{\mathcal{V}}^2 \right\} = \hat{J}(x_0) = \left\{ \|\tilde{Z}(x_0, (\tilde{G}(x_0)))\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}(x_0)\|_{\mathcal{V}}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Como $g_n(\tilde{G}(x_0)) \rightarrow \tilde{G}(x_0)$ quando $n \rightarrow \infty$, temos, pela continuidade do operador norma e de $\tilde{Z}(x_0, \cdot)$, o resultado desejado. \square

Defina a seqüência $P_n \in \mathbf{B}[H]$, $n \geq 0$, e $K_n \in \mathbf{B}[H, H'']$, $\tilde{K}_n \in \mathbf{B}[H, H']$, $n \geq 1$, da seguinte forma:

$$P_0 = L$$

$$P_{n+1} = M + (\mathcal{F}_{B_2 K_{n+1}}^\#) \frac{1}{\delta} B_1(-\tilde{K}_{n+1}) (P_n) + K_{n+1}^* K_{n+1} - \tilde{K}_{n+1}^* \tilde{K}_{n+1}, \quad n \geq 0$$

onde

$$K_{n+1} = (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} B_2^* P_n F \frac{1}{\delta} B_1(-\tilde{K}_{n+1}) \in \mathbf{B}[H, H'']$$

$$\tilde{K}_{n+1} = (I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2})^{-1} \frac{1}{\delta} B_1^* P_n F B_2 K_{n+1} \in \mathbf{B}[H, H'],$$

isto é,

$$K_{n+1} = \left(I + B_2^* P_n B_2 + \frac{B_2^* P_n B_1}{\delta^2} \left(I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} \right)^{-1} B_1^* P_n B_2 \right)^{-1} \left(B_2^* \left(I + \frac{P_n B_1}{\delta^2} \left(I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} \right)^{-1} B_1^* \right) P_n F \right)$$

$$\tilde{K}_{n+1} = \left(I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} + \frac{B_1^* P_n B_2}{\delta^2} \left(I + B_2^* P_n B_2 \right)^{-1} B_2^* P_n B_1 \right)^{-1} \left(\frac{B_1^*}{\delta} \left(I - P_n B_2 \left(I + B_2^* P_n B_2 \right)^{-1} B_2^* \right) P_n F \right)$$

onde a inversa dos operadores acima será estabelecida na próxima proposição. Para cada $n \geq 0$, defina os operadores $\hat{X}_n \in \mathbf{B}[\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}]$, $\hat{Z}_n \in \mathbf{B}[\mathfrak{X}_0, \mathfrak{Z}]$ e $\tilde{G}_n \in \mathbf{B}[\mathfrak{X}_0, \mathfrak{Y}_n]$ da seguinte forma: para $x_0 \in \mathfrak{X}_0$,

$$\hat{x}_{ni+1} = \mathcal{A}_w \hat{x}_{ni} + B_1 \hat{v}_{ni} + B_2 \hat{u}_{ni}, \quad \hat{x}_{n0} = x_0, \quad , i \geq 0$$

$$\hat{u}_{ni} = \begin{cases} -K_{n-i} \hat{x}_{ni} & \text{se } n-i-1 \geq 0 \\ -K_L \hat{x}_{ni} & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad , i \geq 0$$

$$\hat{v}_{ni} = \begin{cases} -\frac{1}{\delta} \tilde{K}_{n-i} \hat{x}_{ni} & \text{se } n-i-1 \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad , i \geq 0$$

$$\hat{z}_{ni} = \begin{bmatrix} M^{1/2} \hat{x}_{ni} \\ \tilde{u}_{ni} \end{bmatrix}, \quad , i \geq 0$$

e $\hat{y}_n = \tilde{G}_n(x_0) = (\hat{y}_{n0}, \hat{y}_{n1}, \dots)$, $\hat{X}_n(x_0) = (\hat{x}_{n0}, \hat{x}_{n1}, \dots)$, $\hat{Z}_n(x_0) = (\hat{z}_{n0}, \hat{z}_{n1}, \dots)$ (note que para $i \geq n$, $\hat{y}_{ni} = 0$ e $\hat{u}_{ni} = -K_L \hat{x}_{ni}$ e como $r(\mathcal{T}_{B_2 K_L}^\#) < 1$, temos que os operadores lineares \tilde{G}_n , \hat{X}_n e \hat{Z}_n são limitados).

Proposição 4.20 : Para cada $n \geq 0$ temos que

(a) $P_n \in \mathbf{B}^+[H]$,

(b) $I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} \geq \frac{\alpha^2}{\delta^2} I$ (α definido em (4.20)),

(c) $\hat{X}_n(x_0) = \tilde{X}(x_0, \hat{y}_n)$, $\hat{Z}_n(x_0) = \tilde{Z}(x_0, \hat{y}_n)$

(d) $\hat{J}_n(x_0) = \mathfrak{E}(\langle P_n x_0; x_0 \rangle) = \|\hat{Z}_n(x_0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}_n(x_0)\|_{\mathcal{V}}^2 = \|\tilde{Z}(x_0, \tilde{G}_n(x_0))\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}_n(x_0)\|_{\mathcal{V}}^2$

Prova : Aplicamos indução em n para provar este resultado:

$n = 0$: Temos que $P_0 = L \in \mathbf{B}^+[H]$ e, de (4.18), segue que para qualquer $x_0 \in \mathfrak{X}_0$,

$$\hat{X}_0(x_0) = \tilde{X}(x_0, 0), \tilde{G}_0(x_0) = 0$$

$$\hat{Z}_0(x_0) = \tilde{Z}(x_0, 0)$$

$$\hat{J}_0(x_0) = \|\tilde{Z}(x_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \|Z'(x_0, 0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \mathfrak{E}(\langle Lx_0; x_0 \rangle)$$

mostrando (a), (c) e (d). Para qualquer $v_0 \in \mathcal{V}_0$ define $\underline{v} = (v_0, 0, 0, \dots) \in \mathcal{V}$ e note que

$$\begin{aligned} \|Z_{B_2 K_L}^0(\underline{v})\|_{\mathfrak{Z}}^2 &= \|Z_{B_2 K_L}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \|\tilde{Z}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \|Z'(B_1 v_0, 0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 \\ &= \mathfrak{E}(\langle LB_1 v_0; B_1 v_0 \rangle) = \mathfrak{E}(\langle B_1^* L B_1 v_0; v_0 \rangle) \end{aligned}$$

$$\|Z_{B_2 \tilde{K}}^0(\underline{v})\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \|Z_{B_2 \tilde{K}}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \|\tilde{Z}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2$$

de modo que, da Proposição 4.17, temos que

$$\|\tilde{Z}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 \leq \|\tilde{Z}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2$$

e de (4.20) obtemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(\langle B_1^* L B_1 v_0; v_0 \rangle) - \delta^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2 &= \|\tilde{Z}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2 \leq \|\tilde{Z}(B_1 v_0, 0)\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2 \\ &= \|Z_{B_2 \tilde{K}}^0(\underline{v})\|_{\mathfrak{Z}}^2 - \delta^2 \|\underline{v}\|_{\mathcal{V}}^2 \leq -\alpha^2 \|\underline{v}\|_{\mathcal{V}}^2 = -\alpha^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2 \end{aligned}$$

o que mostra que para todo $v_0 \in H' \subset \mathcal{V}_0$,

$$\left\langle \left(I - \frac{B_1^* L B_1}{\delta^2} \right) v_0; v_0 \right\rangle \geq \frac{\alpha^2}{\delta^2} \|v_0\|^2$$

$n \Rightarrow n+1$: Suponha o resultado válido para n . Segue que para $x_0 \in \mathfrak{S}_0$,

$$\begin{aligned} \hat{j}_{n+1}(x_0) &= \sup_{v_0 \in \mathcal{V}_0} \inf_{u_0 \in \mathcal{U}_0} \left\{ \mathfrak{E} \left(\|z_0\|^2 - \delta^2 \|v_0\|^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \langle P_n(\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0 + B_2u_0); (\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0 + B_2u_0) \rangle \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $u_0 = -K_L x_0 + q_0$. Defina

$$\hat{W}_n = (I + B_2^* P_n B_2) \in G^+[H^n]$$

$$\hat{K}_{n+1} = (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} B_2^* P_n F = \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n F$$

$$P'_{n+1} = \mathcal{F}^\#(P_n) + M - \hat{K}_{n+1}^* (I + B_2^* P_n B_2) \hat{K}_{n+1}$$

$$\hat{u}_0(x_0, v_0) = \hat{W}_n^{-1} (B_2^* P_n F x_0 + B_2^* P_n B_1 v_0) = \hat{K}_{n+1} x_0 + \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1 v_0, \quad x_0 \in \mathfrak{S}_0, v_0 \in \mathcal{V}_0$$

e portanto

$$\hat{W}_n \hat{u}_0(x_0, v_0) = B_2^* P_n F x_0 + B_2^* P_n B_1 v_0.$$

Por simplicidade escreveremos $\hat{u}_0 = \hat{u}_0(x_0, v_0)$ e recordamos que $Q_0 = E(x_0 \circ x_0)$. Decorre que

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E} \left(\langle P_n(\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0 + B_2u_0); (\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0 + B_2u_0) \rangle \right) - \mathfrak{E} \left(\langle P'_{n+1}x_0; x_0 \rangle \right) = \\ &\mathfrak{E} \left(\langle P_n(\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0); (\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0) \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle P_n(\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0); B_2u_0 \rangle \right) + \\ &\mathfrak{E} \left(\langle P_n B_2 u_0; (\mathcal{A}_{w_0}x_0 + B_1v_0) \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle P_n B_2 u_0; B_2 u_0 \rangle \right) - \mathfrak{E} \left(\langle P'_{n+1}x_0; x_0 \rangle \right) = \\ &\text{tr} \left((\mathcal{F}^\#(P_n) - P'_{n+1}) Q_n \right) + \mathfrak{E} \left(\langle B_1^* P_n F x_0; v_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle v_0; B_1^* P_n F x_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle B_1^* P_n B_1 v_0; v_0 \rangle \right) + \\ &\mathfrak{E} \left(\langle \hat{W}_n \hat{u}_0; u_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle u_0; \hat{W}_n \hat{u}_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle B_2^* P_n B_2 u_0; u_0 \rangle \right) = - \mathfrak{E} \left(\langle M x_0; x_0 \rangle \right) + \\ &\mathfrak{E} \left(\langle \hat{W}_n \hat{K}_{n+1} x_0; \hat{K}_{n+1} x_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle B_1^* P_n F x_0; v_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle v_0; B_1^* P_n F x_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle B_1^* P_n B_1 v_0; v_0 \rangle \right) + \\ &\mathfrak{E} \left(\langle \hat{W}_n \hat{u}_0; u_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle u_0; \hat{W}_n \hat{u}_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle \hat{W}_n u_0; u_0 \rangle \right) - \mathfrak{E} \left(\langle u_0; u_0 \rangle \right) = - \left\{ \mathfrak{E} \left(\langle M x_0; x_0 \rangle \right) + \right. \\ &\left. \mathfrak{E} \left(\langle u_0; u_0 \rangle \right) \right\} + \mathfrak{E} \left(\langle B_1^* P_n F x_0; v_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle v_0; B_1^* P_n F x_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle B_1^* P_n B_1 v_0; v_0 \rangle \right) + \\ &\mathfrak{E} \left(\langle \hat{W}_n \hat{u}_0; u_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle u_0; \hat{W}_n \hat{u}_0 \rangle \right) + \mathfrak{E} \left(\langle \hat{W}_n u_0; u_0 \rangle \right) + \\ &\mathfrak{E} \left(\langle \hat{W}_n (\hat{u}_0 - \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1 v_0); (\hat{u}_0 - \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1 v_0) \rangle \right) = - \left\{ \mathfrak{E} \left(\langle M x_0; x_0 \rangle \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{E}(\langle u_0; u_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle B_1^* P_n F x_0; v_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle v_0; B_1^* P_n F x_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle B_1^* P_n B_1 v_0; v_0 \rangle) + \\
& \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n \hat{u}_0; u_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle u_0; \hat{W}_n \hat{u}_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n u_0; u_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n \hat{u}_0; \hat{u}_0 \rangle) + \\
& \mathfrak{E}(\langle (B_1 P_n B_2^* \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1) v_0; v_0 \rangle) - \mathfrak{E}(\langle (B_2^* P_n F x_0 + B_2^* P_n B_1 v_0); \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1 v_0 \rangle) - \\
& \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1 v_0; (B_2^* P_n F x_0 + B_2^* P_n B_1 v_0) \rangle) = - \left\{ \mathfrak{E}(\langle M x_0; x_0 \rangle) + \right. \\
& \mathfrak{E}(\langle u_0; u_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle B_1^* P_n F x_0; v_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle v_0; B_1^* P_n F x_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle B_1^* P_n B_1 v_0; v_0 \rangle) + \\
& \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n(\hat{u}_0 + u_0); (\hat{u}_0 + u_0) \rangle) + \mathfrak{E}(\langle (B_1 P_n B_2^* \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1) v_0; v_0 \rangle) - \\
& \left. \mathfrak{E}(\langle (B_2^* P_n F x_0 + B_2^* P_n B_1 v_0); \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1 v_0 \rangle) - \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n^{-1} B_2^* P_n B_1 v_0; (B_2^* P_n F x_0 + B_2^* P_n B_1 v_0) \rangle) \right\}.
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\tilde{W}_n = \delta^2 \left(I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} + \frac{B_1^* P_n B_2}{\delta^2} (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} B_2^* P_n B_1 \right) \in G^+[H]$$

$$\tilde{D}_n = B_1^* (I - P_n B_2 (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} B_2^*) P_n F$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{E}(\langle P_n (\mathcal{A}_{w_0} x_0 + B_1 v_0 + B_2 u_0); (\mathcal{A}_{w_0} x_0 + B_1 v_0 + B_2 u_0) \rangle) + \left\{ \mathfrak{E}(\langle M x_0; x_0 \rangle) + \right. \\
& \mathfrak{E}(\langle u_0; u_0 \rangle) - \delta^2 \mathfrak{E}(\langle v_0; v_0 \rangle) \left. \right\} = \mathfrak{E}(\langle P'_{n+1} x_0; x_0 \rangle) - \mathfrak{E}(\langle \tilde{W}_n v_0; v_0 \rangle) + \\
& \mathfrak{E}(\langle \tilde{W}_n (\tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0); v_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle v_0; \tilde{W}_n (\tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0) \rangle) + \mathfrak{E}(\langle \tilde{W}_n (\tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0); (\tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0) \rangle) - \\
& \mathfrak{E}(\langle \tilde{W}_n (\tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0); (\tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0) \rangle) + \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n(\hat{u}_0 + u_0); (\hat{u}_0 + u_0) \rangle) = \\
& \mathfrak{E}(\langle (P'_{n+1} + \tilde{D}_n^* \tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n) x_0; x_0 \rangle) + \mathfrak{E}(\langle \hat{W}_n(\hat{u}_0 + u_0); (\hat{u}_0 + u_0) \rangle) - \\
& \mathfrak{E}(\langle \tilde{W}_n (v_0 - \tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0); (v_0 - \tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0) \rangle)
\end{aligned}$$

Das expressões acima segue que o problema de minimax definido em (4.22) é resolvido com:

$$q_0 = -\hat{u}_0 + K_L x_0 = - (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} B_2^* P_n (F x_0 + B_1 v_0) + K_L x_0$$

$$v_0 = \tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n x_0 = \frac{1}{\delta} \tilde{K}_{n+1} x_0$$

e portanto,

$$q_0 = K_L x_0 - (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} B_2^* P_n F \frac{B_1}{\delta} (-\tilde{K}_{n+1}) x_0 = (K_L - K_{n+1}) x_0.$$

Além disto, temos que para qualquer $x_0 \in \mathfrak{S}_0$,

$$\hat{J}_{n+1}(x_0) = \mathfrak{E} \left(\langle (P'_{n+1} + \tilde{D}_n^* \tilde{W}_n^{-1} \tilde{D}_n) x_0; x_0 \rangle \right) = \mathfrak{E} \left(\langle P_{n+1} x_0; x_0 \rangle \right) \geq 0$$

onde $P_{n+1} \geq 0$ é dado por

$$P_{n+1} = \mathfrak{F}^\#(P_n) + M - \hat{K}_{n+1}^* (I + B_2^* P_n B_2) \hat{K}_{n+1} + \tilde{K}_{n+1}^* \left(I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} \right) \tilde{K}_{n+1} + \\ \tilde{K}_{n+1}^* \frac{B_1^* P_n B_2}{\delta} (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} \frac{B_2^* P_n B_1}{\delta} \tilde{K}_{n+1}.$$

Portanto,

$$P_n - \mathfrak{F}^\#(P_n) + \hat{K}_{n+1}^* (I + B_2^* P_n B_2) \hat{K}_{n+1} = M + P_n - P_{n+1} + \tilde{K}_{n+1}^* \left(I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} \right) \tilde{K}_{n+1} + \\ \tilde{K}_{n+1}^* \frac{B_1^* P_n B_2}{\delta} (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} \frac{B_2^* P_n B_1}{\delta} \tilde{K}_{n+1}$$

e da Proposição 4.7, (c) \Rightarrow (b), temos que

$$P_n - \mathfrak{F}_{B_2 K_{n+1}}^\#(P_n) + (\hat{K}_{n+1} - K_{n+1})^* (I + B_2^* P_n B_2) (\hat{K}_{n+1} - K_{n+1}) = \\ P_n - \mathfrak{F}_{B_2 K_{n+1}}^\#(P_n) + \tilde{K}_{n+1}^* \frac{B_1^* P_n B_2}{\delta} (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} \frac{B_2^* P_n B_1}{\delta} \tilde{K}_{n+1} = \\ M + P_n - P_{n+1} + K_{n+1}^* K_{n+1} + \tilde{K}_{n+1}^* \left(I - \frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} \right) \tilde{K}_{n+1} + \\ \tilde{K}_{n+1}^* \frac{B_1^* P_n B_2}{\delta} (I + B_2^* P_n B_2)^{-1} \frac{B_2^* P_n B_1}{\delta} \tilde{K}_{n+1}$$

isto é,

$$P_n - \mathfrak{F}_{B_2 K_{n+1}}^\#(P_n) + \tilde{K}_{n+1}^* \left(\frac{B_1^* P_n B_1}{\delta^2} - I \right) \tilde{K}_{n+1} = M + P_n - P_{n+1} + K_{n+1}^* K_{n+1}$$

e aplicando a Proposição 4.7, (c) \Rightarrow (a) obtemos que

$$P_{n+1} - \left(\mathfrak{F}_{B_2 K_{n+1}}^\# \right)_{\frac{1}{\delta} B_1 (-\tilde{K}_{n+1})} (P_n) = M + K_{n+1}^* K_{n+1} - \tilde{K}_{n+1}^* \tilde{K}_{n+1}$$

mostrando (a), (c) e (d) para $n+1$. Considere agora a equação (4.17) com $x_0' = 0$ e $y = (v_0, v_1, \dots) \in \mathcal{V}$,

$q = (q_0, q_1, \dots) \in \mathcal{U}$ dados por:

$$q_0 = 0, v_0 \in \mathcal{V}_0,$$

$$q_i = \begin{cases} (K_L - K_{n+2-i})x_i' & \text{se } n+1-i \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, i \geq 1$$

$$v_i = \begin{cases} -\frac{1}{\delta} \tilde{K}_{n+2-i} x_i' & \text{se } n+1-i \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, i \geq 1$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \|Z'(0, y, q)\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|y\|_{\mathcal{V}}^2 &= \|\hat{Z}_{n+1}(B_1 v_0)\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}_{n+1}(B_1 v_0)\|_{\mathcal{V}}^2 - \delta^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2 \\ &= \mathfrak{S}(\langle P_{n+1}(B_1 v_0); (B_1 v_0) \rangle) - \delta^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2 \end{aligned}$$

e da Proposição 4.17,

$$\begin{aligned} \|\hat{Z}_{n+1}(B_1 v_0)\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}_{n+1}(B_1 v_0)\|_{\mathcal{V}}^2 &= \|\tilde{Z}(B_1 v_0, \tilde{G}_n(B_1 v_0))\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}_n(B_1 v_0)\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &\leq \|\tilde{Z}(B_1 v_0, \tilde{G}_n(B_1 v_0))\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}_n(B_1 v_0)\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned}$$

e portanto da equação (4.20),

$$\begin{aligned} \|\tilde{Z}(B_1 v_0, \tilde{G}_n(B_1 v_0))\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|\tilde{G}_n(B_1 v_0)\|_{\mathcal{V}}^2 - \delta^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2 &= \|\tilde{Z}(0, y)\|_{\mathcal{Z}}^2 - \delta^2 \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &\leq -\alpha^2 \|y\|_{\mathcal{V}}^2 \leq -\alpha^2 \|v_0\|_{\mathcal{V}_0}^2. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $v_0 \in H'$,

$$\langle (B_1^* P_{n+1} B_1) v_0; v_0 \rangle - \delta^2 \|v_0\|^2 \leq \alpha^2 \|v_0\|^2$$

o que implica em

$$\langle \left(I - \frac{1}{\delta^2} B_1^* P_{n+1} B_1\right) v_0; v_0 \rangle \geq \frac{\alpha^2}{\delta^2} \|v_0\|^2$$

concluindo a prova da proposição. \square

Apresentamos agora a prova do Lema 4.2.

Prova do Lema 4.2 : $P_n \uparrow P$ quando $n \rightarrow \infty$ e P satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) do Teorema 4.3.

Mais ainda, escrevendo $\tilde{X}(x_0) = (x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots)$, temos que $\tilde{G}x_0 = \hat{y} = (\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots) = \left(\frac{K_N}{\delta} x_0, \frac{K_N}{\delta} \hat{x}_1, \frac{K_N}{\delta} \hat{x}_2, \dots\right)$ e $G'\hat{y} = \hat{q} = (\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots) = ((K_L - K_P)x_0, (K_L - K_P)\hat{x}_1, (K_L - K_P)\hat{x}_2, \dots)$.

Prova : Como $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{J}_{n+1} \subset \mathcal{V}$, temos que para todo $x \in H$,

$$\hat{J}_n(x) = \langle P_n x; x \rangle \leq \hat{J}_{n+1}(x) = \langle P_{n+1} x; x \rangle \leq \hat{J}(x) = \langle P x; x \rangle$$

o que mostra que $P_n \leq P_{n+1} \leq P$. Logo $\{P_n; n \geq 0\}$ é uma seqüência monotônica não-decrescente de operadores não negativos, de modo que ela converge fortemente para um operador $P_\infty \in \mathcal{B}^+[H]$. Da Proposição 4.19, segue que para cada $x \in H$,

$$\langle P_\infty x; x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_n x; x \rangle = \langle P x; x \rangle$$

e portanto (cf. [75,p.374]) $P = P_\infty$. Como para todo $v_0 \in H$ '

$$\langle \left(I - \frac{1}{\delta^2} B_1^* P_n B_1 \right) v_0; v_0 \rangle \geq \frac{\alpha^2}{\delta^2} \|v_0\|^2$$

temos que

$$\langle \left(I - \frac{1}{\delta^2} B_1^* P B_1 \right) v_0; v_0 \rangle \geq \frac{\alpha^2}{\delta^2} \|v_0\|^2$$

o que mostra que $\left(I - \frac{1}{\delta^2} B_1^* P B_1 \right) \geq \frac{\alpha^2}{\delta^2} I$. Repetindo os mesmos argumentos que na prova do Teorema 4.1 [28], obtemos, quando $n \rightarrow \infty$, que

$$K_n \xrightarrow{s} K_P, K_n^* \xrightarrow{s} K_P^*, K_n^* K_n \xrightarrow{s} K_P^* K_P$$

$$\tilde{K}_n \xrightarrow{s} K_N, \tilde{K}_n^* \xrightarrow{s} K_N^*, \tilde{K}_n^* \tilde{K}_n \xrightarrow{s} K_N^* K_N$$

$$\left(\mathcal{J}_{B_2 K_{n+1}}^\# \right)_{\frac{1}{\delta} B_1(-\tilde{K}_{n+1})} (P_n) \xrightarrow{s} \left(\mathcal{J}_{B_2 K_P}^\# \right)_{\frac{1}{\delta} B_1(-K_N)} (P)$$

e destas relações concluímos que

$$P = M + \left(\mathcal{J}_{B_2 K_P}^\# \right)_{\frac{1}{\delta} B_1(-K_N)} (P) + K_P^* K_P - K_N^* K_N.$$

Como $\hat{y}_n = \tilde{G}_n(x_0) \in \mathcal{J}_n \subset \mathcal{V}$ é uma seqüência maximizante para $\sup_{y \in \mathcal{V}} \tilde{J}(x_0, y) = \hat{J}(x_0) = \tilde{J}(x_0, \hat{y})$ e \hat{y} é

único (Proposição 4.18) concluímos, pelos mesmos argumentos que na prova da Proposição 3 em [88],

que $\hat{y}_n \rightarrow \hat{y}$ quando $n \rightarrow \infty$. Pela continuidade do operador \tilde{X} , temos que quando $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{X}_n(x_0) = (\hat{x}_{n0}, \hat{x}_{n1}, \dots) = \tilde{X}(x_0, \hat{y}_n) \rightarrow \tilde{X}(x_0, \hat{y}) = \hat{X}(x_0) = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots)$$

o que implica, em particular, que $\hat{x}_{ni} \rightarrow \hat{x}_i$ quando $n \rightarrow \infty$, para cada $i \geq 0$. Pela convergência forte de \tilde{K}_{n-i} para K_N quando $n \rightarrow \infty$, obtemos para cada $i \geq 0$ que

$$\tilde{K}_{n-i}\hat{x}_{ni} \rightarrow K_N\hat{x}_i \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e portanto,

$$\hat{v} = \tilde{G}x_0 = \left(\frac{K_N}{\delta}\hat{x}_0, \frac{K_N}{\delta}\hat{x}_1, \dots\right).$$

Pela continuidade de G' obtemos que $G'\hat{v}_n \rightarrow G'\hat{v} = \hat{q}$ e repetindo os mesmos argumentos acima, concluímos que para cada $i \geq 0$,

$$(K_L - K_{n-i})\hat{x}_{ni} \rightarrow (K_L - K_P)\hat{x}_i \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

o que mostra que

$$\hat{q} = ((K_L - K_P)\hat{x}_0, (K_L - K_P)\hat{x}_1, \dots).$$

Finalmente note que para qualquer $x_0 \in \mathfrak{X}_0$, $\hat{X}(x_0) = (x_0, \hat{x}_1, \dots) \in \mathfrak{X}$ onde

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= \mathcal{A}_{w_i}\hat{x}_i + B_1\hat{v}_i + B_2(\hat{q}_i - K_L\hat{x}_i) = \mathcal{A}_{w_i}\hat{x}_i + B_1K_N\hat{x}_i + B_2K_P\hat{x}_i \\ &= \left((\mathcal{A}_{B_2K_P})_{\frac{1}{\delta}B_1(-K_N)} \right)_{w_i} \hat{x}_i, \hat{x}_0 = x_0 \end{aligned}$$

e o resultado segue da Proposição 4.5. □

4.8. Conclusões

Considerou-se neste capítulo o problema da estabilidade na média quadrática, o controle ótimo quadrático e o controle H_∞ de sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita. Os dois primeiros tópicos foram estudados em [27],[28],[60], e apresentados de uma forma mais resumida neste capítulo, enquanto o último tópico, estudado em [29], foi analisado de forma mais pormenorizada para exemplificar as técnicas utilizadas nos trabalhos anteriores. Verificou-se através de um contra-exemplo sobre os raios espectrais dos operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ que a analogia, dos sistemas bilineares em dimensão infinita com os sistemas lineares nem sempre ocorre, o que exige uma análise mais cuidadosa de tais sistemas. O problema de controle ótimo foi estudado utilizando-se a teoria desenvolvida para os operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ e enunciada em termos das definições do sistema ser detectável

e estabilizável, fato que generaliza os resultados para sistemas lineares. Um problema análogo a este foi estudado em [100] e as condições estabelecidas em termos do raio espectral de um operador, que depende dos parâmetros do problema, ser menor do que um. Apesar destas condições serem independentes (isto é, uma não implica na outra) acreditamos que as condições aqui obtidas têm a vantagem de serem mais próximas do caso linear determinístico.

O problema de controle H_∞ foi desenvolvido para um ambiente estocástico e analisado também utilizando os operadores \mathcal{F} e $\mathcal{F}^\#$. Uma condição necessária e suficiente em termos da solução de uma equação de operadores algébrica tipo Riccati foi obtida, generalizando o caso linear. Finalmente vale lembrar que o problema de controle ótimo quadrático de sistemas bilineares a tempo contínuo também foi analisado em [39], obtendo-se um enfraquecimento das hipóteses impostas anteriormente em [93].

Capítulo 5 : Conclusões Finais

Vários sistemas dinâmicos estão sujeitos a variações inerentes em sua dinâmica devido, por exemplo, a modificações bruscas no estado do modelo, a falhas ou reparos em componentes, a mudanças na interconexão entre subsistemas, a distúrbios ambientais repentinos ou ainda a ruídos que possam estar atuando diretamente nos parâmetros da planta de forma contínua e gradativa ao longo do tempo. Neste texto sistematizamos criticamente parte dos trabalhos do autor sobre tais sistemas, realizados após a conclusão de seu doutoramento, englobando três tipos de modelos que, em muitos casos, podem ser utilizados para modelar as situações descritas acima.

Consideramos no Capítulo 2 os processos determinísticos por partes (PDP's), que podem modelar sistemas não-lineares a tempo contínuo que estejam sujeitos a variações bruscas tipo markoviana. Apresentou-se parte dos trabalhos do autor, em continuação à sua tese de doutoramento, relacionados aos problemas de existência e unicidade de distribuições estacionárias e caracterização da função custo associada ao problema de controle impulsional de PDP's com o custo médio a longo prazo. Tais problemas são mais delicados de serem analisados em comparação ao caso em que o critério de minimização é o valor esperado com desconto a horizonte infinito, e o estudo foi dividido em duas partes. Considerou-se, inicialmente, algumas hipóteses simplificadoras e obteve-se resultados de caracterização mais explícitos, onde a solução do problema pode ser escrita via uma sequência de problemas de parada ótima truncados. Para o caso mais geral, uma equação de otimalidade relativa ao problema foi deduzida, mas condições para a existência de soluções desta equação são, em geral, difíceis de serem estabelecidas (vide [19]). Nosso enfoque em todos esses problemas foi o de utilizar diretamente as propriedades dos PDP's para obter nossas condições ao invés de usarmos resultados da teoria de desigualdade quase-variacionais ou trabalhar diretamente com discretizações no tempo ([41]-[44],[49],[50]). A vantagem deste enfoque é que resultados mais específicos podem ser obtidos. Um tema futuro de pesquisa nesta área será o de utilizar esta abordagem direta na análise do problema mais geral de controle de PDP's em que se permite não apenas impulsos como também controle contínuo.

Um enfoque adotado em [33] para analisar este problema foi o de transformar o controle impulsional em controle contínuo de fronteira, de forma que o problema como um todo transformou-se em um problema de controle contínuo apenas. Tal enfoque exige muitas hipóteses que podem ser restritivas e acreditamos que uma análise mais direta poderá fornecer resultados mais específicos.

Em seguida estudamos no Capítulo 3 os sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Tais sistemas servem para analisar modelos que estejam com a dinâmica linear sujeita a variações bruscas devido a falhas, mudanças ambientais repentinas, etc. Analisou-se neste capítulo os problemas de estabilidade na média quadrática, com probabilidade um, existência de distribuições estacionárias, filtragem ótima estacionária e controle ótimo quadrático de tais sistemas. A metodologia de análise aqui utilizada foi a de estabelecer uma analogia com os resultados conhecidos para sistemas lineares utilizando o ferramental da teoria de operadores, um enfoque que distingue nossos trabalhos de outros anteriores e que permite uma visão mais geral e unificadora da teoria. Via equações de Lyapunov e raios espectrais de matrizes aumentadas, obteve-se um conjunto de condições necessárias e suficientes para o problema da estabilidade na média quadrática, um resultado que na nossa opinião unificou e generalizou vários resultados existentes anteriormente na literatura. Para a convergência com probabilidade um as condições foram estabelecidas em termos de uma cadeia de Markov e normas de matrizes construídas a partir dos parâmetros originais do processo. Inspirado nas condições para o caso linear, obteve-se uma condição necessária e suficiente, em termos dos conceitos de sistemas estabilizáveis e detectáveis na média quadrática (uma generalização dos conceitos de sistemas estabilizáveis e detectáveis para sistemas lineares), para a existência de uma solução não negativa definida de um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas entre si, associadas ao problema de filtragem ótima linear estacionária de sistemas lineares markovianos. Por fim, considerou-se o problema do controle ótimo quadrático com critério de minimização sendo o custo total esperado a horizonte infinito e o custo médio a longo prazo, para cadeias de Markov tomando valores em um espaço de estado contável infinito. Analogamente ao caso de filtragem, verificou-se que a solução deste problema está associada a uma solução não-negativa definida de um conjunto contável infinito de

equações algébricas de Riccati acopladas entre si. Tais equações podem ser vistas como duais do problema de filtragem para o caso da cadeia de Markov tomando valores finitos. Condições necessárias e suficientes para existência e unicidade de tal solução podem ser enunciadas em termos dos conceitos de sistemas estocasticamente estabilizáveis (SS) e estocasticamente detectáveis (SD), conceitos que, conforme visto através de um contra-exemplo são, em geral mais fortes do que estabilizáveis e detectáveis na média quadrática (para o caso da cadeia de Markov tomando valores em um espaço de estado finito, verificou-se a equivalência dos conceitos). Em comparação com trabalhos anteriores, nossa condição tem a vantagem de ser enunciada de uma forma mais similar ao caso linear tradicional do que o resultado estabelecido em [52], onde é considerado o problema do controle ótimo quadrático para sistemas lineares com saltos markovianos em um número contável finito de pontos, e as condições escritas em termos do conceito de sistemas estocasticamente observáveis (cf. [52]). Verificou-se também que SS e SD garantem a existência e unicidade de uma medida estacionária e, como consequência, a existência de uma política de controle ótimo estacionária. Futuros temas de pesquisa serão os de estudar o problema de controle ótimo com observações parciais, assumindo conhecidos a saída do sistema e o modo de operação do sistema, e o problema de controle H_∞ . No primeiro caso, busca-se um resultado parecido ao princípio da separação para o caso linear, de modo que o problema poderia ser resolvido através das equações de Riccati acopladas entre si associadas ao problema do controle ótimo e filtragem ótima. Para o segundo caso, pretende-se utilizar um enfoque parecido ao utilizado para os sistemas bilineares estocásticos analisados no Capítulo 4, e obter uma solução via equações algébricas (não definidas) de Riccati acopladas entre si, similar ao caso linear determinístico.

Por fim considerou-se no Capítulo 4 o problema da estabilidade na média quadrática, controle ótimo quadrático e controle H_∞ de sistemas bilineares estocásticos a tempo discreto de dimensão infinita. Tais resultados de estabilidade são enunciados em termos de operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ associados à evolução do operador covariância do modelo. O problema de controle ótimo foi estudado utilizando-se a teoria desenvolvida para os operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$ e enunciada em termos das definições do sistema ser detectável e estabilizável, fato que generaliza os resultados para sistemas lineares. Resultados anteriores

para o problema do regulador quadrático de modelos bilineares estocásticos estabelecidos em [100] foram escritos em termos do raio espectral de um operador, definido a partir dos parâmetros do problema, sendo menor que um, resultado que não se assemelha tanto ao caso linear quanto o nosso. A igualdade entre os raios espectrais para os operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$, apesar de válida para dimensão finita, não pode ser estendida, conforme demonstrado através de um contra-exemplo, para dimensão infinita, justificando assim a necessidade do uso do operador $\mathcal{T}^\#$ em nossas definições. O problema de controle H_∞ para sistemas bilineares estocásticos, usualmente definido em uma formulação determinística, foi adaptado ao caso estocástico e analisado também utilizando os operadores \mathcal{T} e $\mathcal{T}^\#$. Tal adaptação se fez necessária pois o problema de controle H_∞ , quando escrito no domínio do tempo, pode ser interpretado como um problema de minimax, onde o controlador deseja minimizar a função custo e o distúrbio aditivo deseja maximizá-la. Da mesma forma que no caso linear determinístico, o “distúrbio ótimo” para o caso bilinear estocástico ocorrerá na forma de realimentação de estado e, como o estado é naturalmente um processo estocástico, a exclusão de distúrbios aditivos estocásticos excluiriam precisamente o “distúrbio ótimo”. De certa forma este foi o procedimento adotado em [28], onde os distúrbios aditivos de entrada foram assumidos independentes de estados passados, e verificou-se, neste caso, que o problema pode ser resolvido de forma mais simples, via a equação algébrica de operadores tipo Riccati. No caso em que não impomos esta hipótese recaímos, para sistemas lineares, no problema de controle H_∞ , e esta é a formulação adotada na Seção 4.7, justificando portanto o nome H_∞ e a formulação estocástica para o problema. Uma condição necessária e suficiente em termos da solução de uma equação algébrica de operadores tipo Riccati foi obtida, generalizando o caso linear determinístico.

Bibliografia

- [1] S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Wiley, (1987).
- [2] T. Basar e P. Bernhard, *H_∞ -Optimal control and related minimax problems*, Birkhauser, Berlin (1990).
- [3] A. Bensoussan e J.L. Lions, "Nouvelles Methodes en Contrôle Impulsionnel", *Appl. Math . Optim.* 1, pp 289-312 (1975).
- [4] A. Bensoussan e J.L. Lions, *Applications des Inequations Variationnelles en Contrôle Stochastique*, Dunod, Paris, (1978).
- [5] A. Bensoussan e J.L. Lions, *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi-Variationnelles*, Dunod, Paris, (1982).
- [6] D. Bertsekas e S.E. Shreve, *Stochastic Optimal Control : The Discrete-Time Case*, Academic Press, New York, (1978).
- [7] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley, (1979).
- [8] R. R. Bitmead e B. D. O. Anderson, "Lyapunov techniques for the exponential stability of linear difference equations with random coefficients", *IEEE Trans. Auto. Control* 25, pp 782-787 (1980).
- [9] G. Blankenship, "Stability of linear differential equations with random coefficients", *IEEE Trans. Autom. Control* 19, pp 834-838 (1977).
- [10] H.A.P. Blom e Y. Bar-Shalom, "The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients", *IEEE Trans. Automatic Control*, 33, pp 780-783 (1988).
- [11] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, (1968).
- [12] J.W. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory", *IEEE Trans. Circuits Syst.* 25, pp 772-781 (1978).
- [13] C. Bruni, G. Di Pillo e G. Koch, "Bilinear systems: An appealing class of "nearly linear" systems in theory and applications", *IEEE Trans. Autom. Control* 19 , 334-348 (1974).
- [14] H.J. Chizeck, A.S. Willsky e D.Castano, "Discrete-time Markovian-jump linear quadratic optimal control", *Int. J. Control*, 43, pp 213-231 (1986).

- [15] O.L.V. Costa e M.H.A. Davis, "Approximations for optimal stopping of a piecewise-deterministic process", *Math. Control Signals Systems* 1, pp 123-146 (1988).
- [16] O.L.V. Costa e M.H.A. Davis, "Impulse control of piecewise-deterministic processes", *Math. Control Signals Systems* 2, pp 187-206 (1989).
- [17] O.L.V. Costa, "Impulse control of piecewise-deterministic processes via linear programming", *IEEE Transc. Automatic Control* 36, pp 371-375 (1991).
- [18] O.L.V. Costa, "Average impulse control of piecewise-deterministic processes", *IMA J. Math. Control Inform.* 6, pp 375-397 (1989).
- [19] O.L.V. Costa, "Asymptotic convergence for the general average impulse control of piecewise deterministic processes", *IMA J. Math. Control Inform.* 8, pp 1-27 (1991).
- [20] O.L.V. Costa, "Discretizations for the average impulse control of piecewise-deterministic processes", *J. Appl. Probab.*, a ser publicado (aceito).
- [21] O.L.V. Costa, "Stationary distributions for piecewise-deterministic processes", *J. Appl. Probab.* 27, pp 60-73 (1990).
- [22] O.L.V. Costa, "Optimal linear filtering for discrete-time Markovian jump linear systems", 30 CDC, Brighton, Inglaterra, 11 a 13 de dezembro de 1991, pp 2761-2762. Versão completa: O.L.V. Costa, "Linear Minimum Mean Square Error Estimation for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems", submetido ao *IEEE Trans. Auto. Control*.
- [23] O.L.V. Costa, "Optimal control of linear systems subject to Markovian jumps", 9^o Congresso Brasileiro de Automática, Vitória, ES, 14 a 18 de setembro de 1992, pp 810-815.
- [24] O.L.V. Costa, "Optimal stationary linear filtering for systems with Markov switching parameters", submetido ao 32^o CDC.
- [25] O.L.V. Costa e M.D. Fragoso, "Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters", *J. Math. Analysis and Applications*, a ser publicado (aceito). Versão simplificada: O.L.V. Costa e M.D. Fragoso, "Necessary and sufficient conditions for mean square stability of discrete-time linear systems subject to Markovian jumps", apresentado no MTNS-91, Kobe, Japão, 17 a 21 de junho de 1991, pp 85-86.

- [26] O.L.V. Costa e M.D. Fragoso, "Infinite coupled Riccati equations arising in a certain optimal control problem", 12th IFAC World Congress, Australia, 19 a 23 de julho de 1993. Versão Completa: O.L.V. Costa e M.D. Fragoso, "On the infinite coupled Riccati equations which arises in a certain optimal control problem", submetido ao *IEEE Trans. Auto Control*.
- [27] O.L.V. Costa e C.S. Kubrusly, "Lyapunov equation for infinite-dimensional discrete bilinear systems", *Systems and Control Letters* 17, pp 71-77 (1991).
- [28] O.L.V. Costa e C.S. Kubrusly, "Riccati equation for infinite dimensional discrete bilinear systems", submetido ao *IMA J. Math. Control and Information*.
- [29] O.L.V. Costa e C.S. Kubrusly, "State feedback H_∞ -optimal control for discrete time infinite dimensional stochastic bilinear systems", submetido ao *SIAM J. Control and Optimization*.
- [30] M.H.A. Davis, "Piecewise-deterministic Markov processes: A general class of non-diffusion stochastic models", *J. Royal Statistical Soc. (B)* 46, pp 353-388 (1984).
- [31] M.H.A. Davis, *Markov Models and Optimization*, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, London, a ser publicado.
- [32] M.H.A. Davis, M.A.H. Dempster, S.P. Sethi e D. Vermes, "Optimal capacity expansion under uncertainty", *Adv. Appl. Prob.* 19, pp 156-176 (1987).
- [33] M.A.H. Dempster e J.J. Ye, "Impulse control of piecewise-deterministic Markov processes", submetido ao *Ann. Appl. Prob.*
- [34] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley (1953).
- [35] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar e B.A. Francis, "State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", *IEEE Trans. Automat. Control* 34, pp 831-847 (1989).
- [36] N. Dunford e J.T. Schwartz, *Linear Operators-Part I: General Theory*, Wiley, New York, (1958).
- [37] S.N. Ethier e T.G. Kurtz, *Markov-Processes ; Characterization and Convergence*, Wiley, 1986.
- [38] M.D. Fragoso e O.L.V. Costa, "A note on stochastic stability for linear systems with jumping parameters", 12th IFAC World Congress, Australia, 19 a 23 de julho de 1993. Versão completa: M.D. Fragoso e O.L.V. Costa, "A note on stochastic stability for linear systems with jumping parameters", submetido ao *Systems and Control Letters*.

- [39] M. D. Fragoso, O.L.V. Costa e C.E. de Souza, "Some issues on generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control", submetido ao *SIAM J. Control and Optimization*. Versão simplificada: O.L.V. Costa e M.D. Fragoso, "Some issues on generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control" a ser apresentado no MTNS-93, Regensburg, Alemanha, 2 a 6 de agosto de 1993.
- [40] B.A. Francis, *A course in H_∞ control theory*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Vol 88, Springer Verlag, New York, (1987).
- [41] D. Gatarek e L. Stettner, "On the compactness method in general ergodic impulsive control of Markov processes", *Stochastics*, a ser publicado.
- [42] D. Gatarek, "On value functions for impulsive control of piecewise-deterministic processes", *Stochastics* 32, pp 27-52 (1990).
- [43] D. Gatarek, "Optimality conditions for impulsive control of piecewise-deterministic processes", *Math. Control Signals Systems* 5, pp 217-232 (1992).
- [44] D. Gatarek, "Impulsive control of piecewise-deterministic processes with long run average cost", *Stochastics*, a ser publicado.
- [45] B.E. Griffiths e K.A. Loparo, "Optimal control of jump-linear gaussian systems", *Int. J. Control* 42, pp 791-819 (1985).
- [46] U.S. Gugerli, "Optimal stopping of a piecewise-deterministic Markov process", *Stochastics* 19, pp 221-236 (1986).
- [47] U.G. Haussmann, "Stability of linear systems with control dependent noise", *SIAM J. Control* 2, pp 382-394 (1973).
- [48] U.G. Haussmann, "On the existence of moments of stationary linear systems with multiplicative noise", *SIAM J. Control* 12, pp 99-105 (1974).
- [49] A. Hordijk e F.A. Van der Duyn Schouten, "Average optimal policies in Markov decision drift processes with applications to a queuing and a replacement model", *Adv. in Appl. Probab.* 15, pp 274-303 (1983).

- [50] A. Hordijk e F.A. Van der Duyn Schouten, "Discretization and weak convergence in Markov decision drift processes", *Math. Oper. Res.* **9**, pp. 112-141 (1984).
- [51] A. Isidori e A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ -control via measurement feedback in nonlinear systems", *IEEE Trans. Automat. Control* **37**, pp 1283-1293 (1992).
- [52] Y. Ji e H.J. Chizeck, "Jump linear quadratic Gaussian Control: Steady-state solution and testable conditions", *Control-Theory and Advanced Technology* **6**, pp 289-319 (1990).
- [53] B.V. Keulen, M. Peters e R.Curtain, " H_∞ -control with state feedback: The infinite dimensional case", University of Groningen, Department of Mathematics, Internal Report W-9015.
- [54] D.L. Kleinman, "On the stability of linear stochastic systems", *IEEE Trans. Autom. Control* **14**, 429-430 (1969).
- [55] C.S. Kubrusly, "On discrete stochastic bilinear systems stability", *J. Math. Anal. Appl.* **113**, pp 36-58 (1986).
- [56] C.S. Kubrusly, "Mean square stability for discrete bounded linear systems in Hilbert space", *SIAM J. Control Optim.* **23**, pp 19-29 (1985).
- [57] C.S. Kubrusly, "On the existence, evolution and stability of infinite dimensional stochastic discrete bilinear models", *Control Theory Adv. Tech.* **3**, pp 271-287 (1987).
- [58] C.S. Kubrusly, "On stochastic modelling for discrete bilinear systems in Hilbert space", *Mathematics and Computers in Simulation* **31**, pp 19-30 (1989).
- [59] C.S. Kubrusly e O.L.V. Costa, "Mean square stability conditions for discrete stochastic bilinear systems", *IEEE Trans. Autom. Control* **30**, pp 1082-1087 (1985).
- [60] C.S. Kubrusly e O.L.V. Costa, "Mean square stability for discrete bilinear systems in Hilbert space", *Systems and Control Letters* **19**, pp 205-211 (1992).
- [61] H. J. Kushner, "Optimality conditions for the average cost per unit time problem with a diffusion model", *SIAM J. Control and Optimization* **16**, pp 330-346 (1978).
- [62] H. J. Kushner, "Approximations and computational methods for optimal stopping and stochastic impulsive control problems", *Appl. Math. Optim.* **3**, pp 81-100 (1977).

- [63] H. J. Kushner, *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*, Academic Press, New York (1977).
- [64] A. Leizarowitz, "Estimates and exact expressions for Lyapunov exponents of stochastic linear differential equations", *Stochastics* 24, pp. 335-356 (1988).
- [65] J.P. Lepeltier e B. Marchal, "Théorie générale du contrôle impulsif Markovien", *SIAM J. Control Optim.* 22, pp 645-665 (1984).
- [66] K.A. Loparo, "Stochastic stability of coupled linear systems : a survey of methods and results", *Stochastic Analysis Appl.* 2, pp 193-228 (1984).
- [67] K.A. Loparo, M.R. Buchner e K. Vasudeva, "Leak detection in an experimental heat exchanger process: a multiple model approach", *IEEE Trans. on Automatic Control* 36, pp 167-177 (1991).
- [68] M. Mariton, "Almost sure and moments stability of jump linear systems", *Systems & Control Letters* 11, pp 393-397 (1988).
- [69] M. Mariton, "Robust jump linear quadratic control: a mode stabilizing solution", *IEEE Trans. Automatic Control* 30, pp 1145-1147 (1985).
- [70] P. J. Mc Lane, "Asymptotic stability of linear autonomous systems with state dependent noise", *IEEE Trans. Autom. Control* 14 , pp 754-755 (1969).
- [71] R.R. Mohler e A. Ruberti (Ed.), *Recent development in variable structure systems economics and biology*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol 111, Sringer-Verlag, Berlin (1975).
- [72] R.R. Mohler e W.J. Kolodziej, "An overview of stochastic bilinear control processes", *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 10, pp 913-919 (1980).
- [73] T. Morozan, "Stabilization of some stochastic discrete time control systems", *Stochastic Analysis and Applications* 1, pp 86-116 (1983).
- [74] T. Morozan, "Optimal stationary control for dynamic systems with Markov perturbations", *Stochastic Analysis and Applications* 1, pp 219-325 (1983).
- [75] A.W. Naylor e G.R. Sell, *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, 2nd ed, New York Springer Verlag (1982).

- [76] K. Ogata, *State-space analysis of control system*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall (1967).
- [77] M. Robin, *Contrôle impulsionnel des processus de Markov*, Thesis, Universite Paris IX (1978).
- [78] M. Robin, "On some impulsive control problems with long run average cost, *SIAM J. Control Optim.* 19, pp 333-358 (1981).
- [79] S. Ross, *Applied probability models with optimization applications*, Holden-day (1970).
- [80] D.D. Siljak, "Reliable control using multiple control systems", *Int. J. Control* 31, pp 303-329 (1980).
- [81] L. Stettner, "On the Poisson equation and optimal stopping of ergodic Markov processes", *Stochastics* 18, pp 25-48 (1986).
- [82] L. Stettner, "On ergodic impulsive control problems", *Stochastics* 18, pp 49-72 (1986).
- [83] L. Stettner, "On impulsive control with long run average cost criterion", *Studia Math.* 76, pp 279-298 (1983).
- [84] A.A. Stoorvogel, The H_{∞} -control problem: A state space approach, Ph.D. dissertation, Technical Univ. Eindhoven, (1990).
- [85] D.D. Sworder, "Feedback control of a class of linear systems with jump parameters, *IEEE Trans. Automat. Control* 14, pp 9-14 (1969).
- [86] D.D. Sworder e R.O. Rogers, "An LQG solution to a control problem with a solar thermal receiver", *IEEE Trans. Auto. Control* 28, pp 971-978 (1983).
- [87] D.D. Sworder e S.D. Chow, "A survey of design methods for random parameter systems", Proc. 24th IEEE Conf. on Decision and Control, Fort Lauderdale, FL, pp 894-899 (1985).
- [88] G. Tadmor, "Worst case design in the time domain: The maximum principle and the standard H_{∞} -problem", *Maths. Control Signals Systems* 3, pp 301-324 (1990).
- [89] S.J. Taylor, *Introduction to measure and integration*, Cambridge University Press (1966).
- [90] R.L. Tweedie, "Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains on a general state space", *Stochastic Processes and their Applications*, 3, pp 385-403 (1975).
- [91] F.A. Van der Duyn Schouten, "Markov Decision Drift Processes, CWI Tract, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam (1983).

- [92] J. Weidmann, *Linear operator in Hilbert spaces*, Springer-Verlag, New York (1980).
- [93] W.M. Wonham, "On a matrix Riccati equation of stochastic control", *SIAM J. Control* **6**, pp 681-697 (1968).
- [94] C. Yang, P. Bertrand e M. Mariton, "Adaptive control in the presence of Markovian parameter jumps", *Int. J. Control* **52**, pp 473-484 (1990).
- [95] V.A. Yakubovich, "A frequency theorem for the case in which the state and control spaces are Hilbert spaces with an application to some problems in the synthesis of optimal controls I", *Syberian Math. Journal* **15**, pp 457-476 (1974).
- [96] J. Yuandong e H.J. Chizeck, "Optimal quadratic control of jump linear systems with separately controlled transition probabilities", *Int. J. Control* **49**, pp 481-491 (1989).
- [97] A.A. Yushkevich, "Continuous-time Markov decision processes with intervention", *Stochastics* **9**, pp 235-274 (1983).
- [98] A.A. Yushkevich, "Bellman inequalities in Markov decision deterministic drift processes", *Stochastics* **23**, pp 25-77 (1987).
- [99] J. Zabczyk, "Remarks on the control of discrete-time distributed parameters systems", *SIAM J. Control* **12**, pp 721-735 (1974).
- [100] J. Zabczyk, "On the optimal stochastic control of discrete-time systems in Hilbert space", *SIAM J. Control* **13**, pp 1217-1234 (1975).
- [101] J. Zabczyk, "Stability properties of the discrete Riccati operator equation", *Kybernetika* **13**, pp 1-10 (1977).
- [102] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: mode reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses", *IEEE Trans. Automat. Control* **26**, pp 301-320 (1981).