

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DE
RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE CONTABILIDADE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CONTROLADORIA E CONTABILIDADE

JOÃO PEDRO FERNANDES

Estudo sobre o uso do Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) como possível
indicador de qualidade de previsões

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Guasti Lima

RIBEIRÃO PRETO

2023

Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Fábio Augusto Reis Gomes
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto

Prof. Dr. Carlos Alberto Grespan Bonacim
Chefe do Departamento de Contabilidade

JOÃO PEDRO FERNANDES

Estudo sobre o uso do Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) como possível indicador de qualidade de previsões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Controladoria e Contabilidade da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências. Versão corrigida. A original encontra-se disponível na FEA-RP/USP.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Guasti Lima

RIBEIRÃO PRETO

2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

FICHA CATALOGRÁFICA

Fernandes, João Pedro.

Estudo sobre o uso do Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) como possível indicador de qualidade de previsões / João Pedro Fernandes; orientador Fabiano Guasti Lima. –Ribeirão Preto, 2023.

107f.

Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-graduação em Controladoria e Contabilidade, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, 2023.

1. MFDFA. 2. Parâmetros multifractais. 3. Previsões. 4. GARCH. 5. Naive. 6. Análise técnica. 7. Indicador de qualidade.

João Pedro Fernandes

Estudo sobre o uso do Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) como possível indicador de qualidade de previsões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Controladoria e Contabilidade da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. Dr. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

AGRADECIMENTOS

Essa é, ao mesmo tempo, a parte mais fácil e a mais difícil do trabalho. Demonstrar toda a gratidão que sinto por todos é difícil organizar em alguns parágrafos, mas vamos lá.

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao meu grande amigo e professor Antônio Carlos, que me lapidou durante toda a graduação e me ensinou grande parte do que sei hoje. Sua inteligência é imensurável. Espero, um dia, conseguir superar meu mestre (hehehe), ou pelo menos me equiparar a ele (sei que terei que ralar muito, professor). Obrigado por sempre acreditar em meu potencial e me guiar nas empreitadas. O senhor me abriu várias portas.

Falando em exemplos a serem seguidos, agradeço também a você, professor Fabiano. Como já disse algumas vezes, “um dia ainda quero descobrir o que o senhor toma no café manhã”. Com exceção da primeira vez que nos conhecemos, todas as outras vezes que nos falamos foi de maneira remota, mas sempre que precisei, você estava à disposição. Admiro-o como professor, profissional, pai e orientador. Também seguirei seus exemplos. Alguns, inclusive, já até sigo, que é responder e-mails instantaneamente aos meus alunos (hahaha). Obrigado também pelo incentivo e por todos os “Manda bala, JP”.

Agora venho agradecer à minha namorada Gabriela. Obrigado por me acompanhar durante toda essa trajetória, já que quando passei no mestrado a primeira coisa que disse foi: “você perderá seu namorado durante 2 anos”. Obrigado por me aturar sendo todo ranzinza, me acompanhar em todos os finais de semana e madrugadas de estudos. Você faz parte do encerramento desse ciclo e sem você, claro, meus textos não seriam os mesmos (hehe). Logo, logo será você terminando também!

Não posso deixar de agradecer aos meus pais, Jane e Wanderley; ao meu irmão Lucas; à minha tia Vanessa; aos meus avós, Pedro e Maria; ao meu tio Marcos; às minhas primas, Larissa e Maria Laura; e à minha mãe “adotiva”, Silvia Viel. Somos todos muito unidos e sei que vocês torceram por mim desde o início. Todos os incentivos, brincadeiras, “puxões de orelha” e preocupações foram fundamentais para que eu mantivesse meu foco, já que eu nem fazia muita coisa ao mesmo tempo, né.

Para finalizar, agradeço aos meus amigos, que mesmo de longe, uns torcem pelos outros e sempre estão dispostos a ajudar. Leonardo, Igor, Allyson e Arthur, obrigado por todas as longas conversas.

My life seemed to be a series of events and accidents.

Yet When I look back I see a pattern.

Benoit B. Mandelbrot

RESUMO

FERNANDES, J.P. (2022). *Estudo sobre o uso do Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF DFA) como possível indicador de qualidade de previsões*. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto.

Economia e Finanças podem ser vistas como sistemas complexos, os quais são estudados desde 1600. Comportamentos complexos podem surgir de uma grande coleção de componentes simples, que não necessitam de um controle central, como, por exemplo: o estudo do Caos; sistemas biológicos; análise de redes e a política e a economia evolucionária. Em vários desses exemplos abrem-se a possibilidade de vários desses sistemas trocarem suas estratégias evolutivas, tornando-se mais competitivos. Assim, sob olhar da Economia como um sistema complexo, os consumidores, produtores, empresas e governos podem ser considerados agentes otimizadores que visam seus objetivos próprios, cujas ações individuais geram impactos que afetam os demais agentes, gerando assim um comportamento coletivo adaptativo e complexo, que pode ser visto nos mercados financeiros. Empresas individuais estão ligadas indiretamente por flutuações em suas condições econômicas, fazendo com que as crises financeiras sejam correlacionadas. Diante do comportamento complexo, com Economia e Finanças sendo a coleção de eventos simples menores, utilizou-se a geometria fractal, mais adequada para o estudo de fenômenos de escala, para o desenvolvimento deste trabalho. Um dos instrumentos para a avaliação de investimentos é a análise técnica, utilizada especialmente em ativos negociados na bolsa de valores. O objetivo central deste trabalho foi adicionar um novo indicador de análise de previsões de ativos financeiros utilizando a técnica MF DFA (*Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*). Foram selecionadas 28 séries temporais de diferentes segmentos econômicos, como: índice de bolsa de valores mundiais; ações internacionais e nacionais; comparação entre moedas mundiais; preços de commodities e índices de renda fixa, todos em cotações diárias. No decorrer deste trabalho revelou-se como os parâmetros multifractais de uma série temporal, nessa nova perspectiva, podem se tornar indicadores de qualidade de uma previsão com base em probabilidades e correlações, utilizando como técnicas de previsão os modelos Naive e GARCH para o cálculo dos valores futuros e como indicador de erros de previsão, a medida de acurácia MAPE (Mean Absolute Percentage Error). A hipótese apresentada foi desenvolvida chegando à conclusão de que os parâmetros multifractais podem sim servir como indicador de qualidade de previsões.

Palavras-chave: MF DFA. Parâmetros multifractais. Previsões. GARCH. Naive. Análise técnica. Indicador de qualidade.

ABSTRACT

FERNANDES, J.P. (2022). *Study on Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) as a possible indicator of the quality of predictions*. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto.

Economics and finance can be seen as complex systems, which have been studied since 1600. Complex behaviour can arise from an extensive collection of simple components, which do not need central control, for example, the study of Chaos; biological systems; network analysis, evolutionary politics, and economics. Several of these examples opens up the possibility of lots of these systems changing their evolutionary strategies and becoming more competitive. Therefore, under the view of Economics as a complex system, consumers, producers, companies and governments can be considered optimizing agents that pursue their own goals, whose individual actions generate impacts that affect the other agents, thus generating an adaptive and complex collective behaviour, which can be seen in the financial markets. Individual companies are connected indirectly by fluctuations in their economic conditions, making financial crises correlated. Given the complex behaviour, with Economics and Finance being the collection of smaller simple events, it was used fractal geometry, more suitable for the study of scale phenomenon, to develop this paper. One of the instruments for investment evaluation is technical analysis, used especially in assets traded on the stock market. The central aim of this paper was to add a new indicator for financial asset prediction analysis using the MFDFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis) technique. A selection of 28 series from different economic segments was made, such as the world stock market index; international and domestic equities; comparison between world currencies; commodity prices and fixed income indexes, all in daily quotations. During the course of this paper, it was revealed how the multifractal parameters of a temporal series, in this new perspective, can become quality indicators of a prediction based on probabilities and correlations, using as prediction techniques the Naive and GARCH models for the calculation of future values and as a prediction error indicator, the MAPE (Mean Absolute Percentage Error) accuracy measure. The hypothesis presented was developed to the conclusion that multifractal parameters can indeed serve as an indicator of quality predictions.

Keywords: MFDFA. Multifractal parameters. Predictions. GARCH. Naive. Technical Analysis. Quality indicator.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEX – Índice da bolsa de Amsterdam.

AMZN – Amazon.

APPL – Apple.

ARIMA – Modelo Autorregressivo Integrado de Médias Móveis.

ATVI – Activision.

B3 – Bolsa de valores do Brasil.

BBDC3 – Ação ordinária do Banco do Bradesco.

BBDC4 – Ação preferencial do Banco do Bradesco.

BM&FBOVESPA – Antiga bolsa de valores do Brasil.

Boi gordo – Indicador do boi gordo CEPEA/B3.

BRL – Real brasileiro.

BRL-USD – Abreviação para o par dólar-real.

Café Arábica – Indicador do café arábica CEPEA/ESALQ.

Café Robusta – Indicador do café robusta CEPEA/ESALQ.

CEPEA-Esalq/USP – Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada.

DFA – *Detrended Fluctuation Analysis*.

DRIFIT – Método simples de previsão que consiste em traçar uma reta entre o primeiro e o último ponto da série estudada, traçando assim a tendencia da série para obtenção do valor futuro.

ETF BOVA 11 – Fundo de Índice iShares Ibovespa.

EUR – Euro.

EUR-USD – Abreviação para o par dólar-euro.

FAC – Função de autocorrelação.

FACP – Função de autocorrelação parcial .

FTSE – Índice de 100 ações representativas da bolsa de Valores de Londres.

GARCH – Modelo Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade Generalizado.

GBP – Libra esterlina.

GBP-EUR – Abreviação para o par euro-libra.

HME – Hipótese de Mercado Eficiente.

HSI – Índice da bolsa de valores de Hong Kong.

$H(q)$ – É associado ao expoente de Hurst e representa o grau de correlação da série, sendo que as correlações de longo alcance contribuem para evidenciar o comportamento multifractal.

$h(q)$ – É associado ao expoente de singularidade, representa a cauda das distribuições (grossa ou fina), tendo a cauda grossa contribuição para o espectro multifractal.

Ibovespa – Índice da bolsa de valores de São Paulo.

IGP-M – Índice geral de preços – Mercado

IMA-B – Índice de renda fixa formado por títulos públicos indexados à inflação medida pelo IPCA.

IMA-G – Índice de renda fixa formado por todos os títulos que compõem a dívida pública.

Imag-ex-c – Índice de renda fixa, formado por todos os títulos que compõem a dívida pública, excluindo os papéis indexados ao IGP-M (as antigas NTN-C ou Tesouro IGPM+ com Juros Semestrais).

IPCA – Índice de preços do consumidor amplo.

ITBU4 – Ação preferencial do Banco Itaú.

ITUB3 – Ação ordinária do Banco Itaú.

JPY – Iene japonês.

JPY-EUR – Abreviação para o par euro- iene japonês.

JPY-USD – Abreviação para o par dólar- iene japonês.

LM – Multiplicador de Lagrange.

MAPE – Erro percentual absoluto médio.

MF1 – Representa a diferença do valor máximo e do valor mínimo do expoente de escala multifractal $H(q)$.

MF2 – Representa a diferença do valor máximo e do valor mínimo do expoente de escala multifractal $h(q)$.

MF DFA – *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*.

Milho – Indicador do milho ESALQ/BM&FBOVESPA.

NAIVE – Método simples de previsão que consiste em projetar o último valor da série estudada para o futuro.

NTLX – Netflix.

NTN-C - Notas do Tesouro Nacional – Série C.

PETR3 – Ação ordinária do Petrobrás.

RMSE – Raiz quadrada do erro médio quadrático.

S&P500 – Índice composto por quinhentos ativos cotados nas bolsas de NYSE ou NASDAQ, qualificados devido ao seu tamanho de mercado, sua liquidez e sua representação de grupo industrial.

Soja – Indicador da soja CEPEA/ESALQ.

TOPX – Índice de bolsa de valores de Tóquio.

USD – Dólar americano.

WBD – A Warner Bros. Entertainment.

WTMM – *Wavelet Transform Modulos Máxima Method.*

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Séries utilizadas e estatísticas descritivas	57
Tabela 2 – Valores de MF1 e MF2, das séries completas e a média geral, máximos e mínimos dos parâmetros multifractais das janelas deslizantes.....	84
Tabela 3 – Resultados obtidos nas etapas 2 e 4 para o modo de previsão de 1001 valores e <i>gap</i> 0 utilizando o parâmetro multifractal MF1 e o modelo Naive.....	86
Tabela 4 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo <i>i</i> para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF1 e o modelo Naive.....	87
Tabela 5 – Resultados obtidos nas etapas 2 e 4 para o modo de previsão de 1001 valores e <i>gap</i> 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo Naive.....	88
Tabela 6 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo <i>i</i> para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF2 e o modelo Naive.....	89
Tabela 7 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo <i>i</i> para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF1 e o modelo GARCH.....	90
Tabela 8 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo <i>i</i> para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF2 e o modelo GARCH.....	90
Tabela 9 – Resultados obtidos nas etapas 2 e 4 para o modo de previsão de 1001 valores e <i>gap</i> 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo de GARCH.....	91
Tabela 10 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo de parâmetros MF2 em cada um dos ativos com o uso do modelo GARCH.....	92

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplos de Fractais: (A) Náutilo, (B) Floco de neve, (C) Babosa e (D) Tapete de Sierpinski	36
Figura 2 – Construção do Fractal “Curva de Koch”	38
Figura 3 – Exemplos de multifractais: (A) Conjunto de Mandelbrot, (B) Nuvens, (C) Tempestade de Raios e (D) Vasos sanguíneos de um coração humano	39
Figura 4 – Exemplo de um reservatório de água com um influxo de entrada $\xi(t)$ e uma vazão média anual $\langle \xi(t) \rangle_\tau$	40
Figura 5 – Divisão de janelas com 1001 observações e gap de 0	50
Figura 6 – Divisão de janelas com 1003 observações e gap de 3	51
Figura 7 – Esquema de previsão de um passo para janelas de 1005 valores	52

ÍNDICE DE FÓRMULAS

Fórmula 1 – Série temporal qualquer.....	31
Fórmula 2 – Modelo Naive de previsão de um passo à frente.....	31
Fórmula 3 – Modelo AR(p).....	32
Fórmula 4 – Modelo MA(q).....	32
Fórmula 5 – Modelo ARIMA (p, d, q).....	32
Fórmula 6 – Modelo ARMA(p,q).....	32
Fórmula 7 – Modelo ARCH de ordem (p).....	34
Fórmula 8 – Modelo GARCH (p,q).....	34
Fórmula 9 – Dimensão Fractal.....	37
Fórmula 10 – Desvio padrão entre o influxo de água e média de vazão.....	40
Fórmula 11 – Análise do Alcance Reescalonado (Expoente de Hurst).....	40
Fórmula 12 – Cálculo do perfil da série.....	43
Fórmula 13 – Função de variância para cada segmento v ($v = 1, \dots, N_s$).....	43
Fórmula 14 – Função de variância para cada segmento v ($v = 1 + N_s, \dots, 2N_s$).....	43
Fórmula 15 – Função de flutuação de q-ésima ordem.....	44
Fórmula 16 – Função de flutuação de q-ésima ordem (para $q = 0$).....	44
Fórmula 17 – Lei de dependência $F_q(s)$ e escala temporal s	44
Fórmula 18 – Lei de dependência $F_q(s)$ e escala temporal s , aplicado log de ambos os lados.....	44
Fórmula 19 – Relação de $h(q)$ com $t(q)$	45
Fórmula 20 – Dimensão multifractal generalizada.....	45
Fórmula 21 – Expoente de singularidade de ordem q	45
Fórmula 22 – Variação do expoente de correlação multifractal.....	45
Fórmula 23 – Variação do expoente de singularidade multifractal.....	46
Fórmula 24 – Erro percentual absoluto médio (MAPE).....	46
Fórmula 25 – Teste Jarque e Bera de normalidade.....	53
Fórmula 26 – Teste de Raízes unitárias Dickey e Fuller.....	54
Fórmula 27 – Log retornos de uma série temporal.....	54
Fórmula 28 – Porcentagem de janelas com o MAPE abaixo da média geral dos MAPEs dado intervalo de escala dos expoentes de multifractalidade MF1 e MF2.....	55
Fórmula 29 – Porcentagem de séries com o intervalo estudado destacado dentre todas as séries de uma categoria de ativos.....	56

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Índice de ações - Ibovespa – Brasil diário de 23/04/2001 a 24/06/2022	58
Gráfico 2 – Commodity – Café A. – Indicador do café arábica CEPEA/ESALQ diário de 02/09/1996 a 13/07/2022.....	59
Gráfico 3 – Ação internacional - AMZN – Amazon diário de 15/05/1997 a 18/07/2022	59
Gráfico 4 – Ação nacional - ITBU4 – Banco Itaú diário de 13/06/2001 a 24/06/2022	60
Gráfico 5 – Índice de renda fixa - IMA-B – Diário de 16/09/2003 a 13/07/2022.....	60
Gráfico 6 – Taxa de câmbio - EUR-USD – Euro-Dólar diário de 28/06/2001 a 24/06/2022.....	61
Gráfico 7 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – FTSE – Modelo Naive - Previsões de um passo.....	62
Gráfico 8 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – Café Robusta – Modelo Naive - Previsões de um passo.....	62
Gráfico 9 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – AMZN – Modelo Naive - Previsões de um passo.....	63
Gráfico 10 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – ITUB4 – Modelo Naive - Previsões de um passo.....	63
Gráfico 11 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – IMA-B – Modelo Naive - Previsões de um passo.....	64
Gráfico 12 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – EUR-USD – Modelo Naive - Previsões de um passo.....	64
Gráfico 13 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – TOPX – Modelo GARCH - Previsões de um passo.....	66
Gráfico 14 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – Soja – Modelo GARCH - Previsões de um passo.....	67
Gráfico 15 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – NTLX – Modelo GARCH - Previsões de um passo.....	67
Gráfico 16 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – BBDC4 – Modelo GARCH - Previsões de um passo.....	68
Gráfico 17 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – Imag-ex-c – Modelo GARCH - Previsões de um passo.....	68
Gráfico 18 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – EUR-USD – Modelo GARCH - Previsões de um passo.	69

Gráfico 19 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – FTSE – Modelo Naive.....	70
Gráfico 20 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – FTSE – Modelo Naive.....	71
Gráfico 21 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – Café Robusta – Modelo Naive.....	71
Gráfico 22 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – Café Robusta – Modelo Naive.....	72
Gráfico 23 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – AMZN – Modelo Naive.....	72
Gráfico 24 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – AMZN – Modelo Naive.....	73
Gráfico 25 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – ITUB4 – Modelo Naive.....	73
Gráfico 26 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – ITUB4 – Modelo Naive.....	74
Gráfico 27 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – IMA-G – Modelo Naive.....	74
Gráfico 28 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – IMA-G – Modelo Naive.....	75
Gráfico 29 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – JPY-USD – Modelo Naive.....	75
Gráfico 30 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – JPY-USD – Modelo Naive.....	76
Gráfico 31 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – FTSE – Modelo GARCH.....	78
Gráfico 32 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – FTSE – Modelo GARCH.....	78
Gráfico 33 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – Boi gordo – Modelo GARCH.....	79
Gráfico 34 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – Boi gordo – Modelo GARCH.....	79
Gráfico 35 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – NTLX – Modelo GARCH.....	80

Gráfico 36 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – NTLX – Modelo GARCH.....	80
Gráfico 37 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – ITUB3 – Modelo GARCH.....	81
Gráfico 38 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – ITUB3 – Modelo GARCH.....	81
Gráfico 39 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – Imag-ex-c – Modelo GARCH.....	82
Gráfico 40 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – Imag-ex-c – Modelo GARCH.....	82
Gráfico 41 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – BRL-USD – Modelo GARCH.	83
Gráfico 42 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – BRL-USD – Modelo GARCH.....	83

ÍNDICE DE APÊNDICES

Apêndice A – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e <i>gap</i> 0 utilizando o parâmetro multifractal MF1 e o modelo Naive.....	104
Apêndice B – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e <i>gap</i> 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo Naive.....	105
Apêndice C – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e <i>gap</i> 0 utilizando o parâmetro multifractal MF1 e o modelo GARCH.....	106
Apêndice D – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e <i>gap</i> 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo GARCH.....	107

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	22
1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA DA PESQUISA	24
1.2 O PROBLEMA DE PESQUISA.....	25
1.3 PROBLEMAS DE INVESTIGAÇÃO.....	26
1.4 OBJETIVOS DA PESQUISA.....	28
1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	29
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	30
2.1 SÉRIES TEMPORAIS E RISCO.....	30
2.2.1 Naive	31
2.2.2 Modelagem Arima-Garch	32
2.3 CAOS, FRACTAIS E MULTIFRACTAIS.....	34
2.3.1 Geometria fractal e multifractal: uma breve introdução.....	34
2.3.2 – Fractais	35
2.3.3 Dimensão Fractal.....	37
2.3.4 Multifractais	38
2.3.5 Expoente de hurst	39
2.4 MFDFA.....	41
2.5 – Medidas de erro e dispersão	46
3 METODOLOGIA DE PESQUISA	47
3.1 DADOS	47
3.2 ORGANIZAÇÃO DAS JANELAS	50
3.3 PREVISÕES	53
3.4 PARÂMETROS E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	54
4 RESULTADOS	57
4.1 CARACTERIZAÇÃO ESTATÍSTICA, PREÇOS E RETORNOS.....	57
4.2 ANÁLISES DE CORRELAÇÃO ENTRE MULTIFRACTALIDADE E ERROS DE PREVISÃO	61
4.2.1 Análise de correlação dos erros das previsões de um passo com o modelo Naive	61
4.2.2 Análise de correlação das previsões de um passo com o modelo GARCH	65
4.3 ANÁLISE LOCAL DA CORRELAÇÃO ENTRE MULTIFRACTALIDADE E ERROS DE PREVISÃO	69
4.3.1 Análise local da correlação das previsões de um passo com o modelo Naive	70
4.3.2 Análise local da correlação das previsões de um passo com o modelo GARCH.....	77
4.4 ANÁLISE ESTATÍSTICA DAS CORRELAÇÕES.....	85
5 CONCLUSÃO	94
REFERÊNCIAS	96

1 INTRODUÇÃO

A Economia e Finanças podem ser vistas de acordo com Mitchell (2009), como sistemas complexos. Ele fundamenta que o estudo de sistemas complexos já vem sendo estudado desde os anos de 1600, desde a época de René Descartes, em que “o todo é mais do que a soma de suas partes”. O aumento significativo das ciências, bem como o Caos, sistemas biológicos, análise de redes, política e a economia evolucionária mostram como comportamento complexo pode surgir de uma grande coleção de componentes simples, que não necessitam de um controle central, tendo a possibilidade de trocarem suas estratégias, tornando-se mais competitivos.

Contudo, sob o olhar da Economia, sendo um sistema complexo, Fonseca (2012) nos mostra que os consumidores, produtores, empresas e governos são agentes que otimizam constantemente os seus objetivos próprios, cujas ações individuais causam impactos que afetam os demais agentes, resultando em comportamento coletivo adaptativo e complexo. Segundo o autor: “assim como a Economia, os mercados financeiros também podem ser tratados como sistemas complexos adaptativos” (p. 2). Empresas individuais estão ligadas, indiretamente, por flutuações em suas condições econômicas, fazendo com que crises financeiras sejam correlacionadas.

Com isso, de acordo com Fonseca (2003, citado por Sornette, 2012) “é essencial perceber que o comportamento temporal de sistemas complexos econômicos é, muitas vezes, controlado por eventos raros” (p. 2). Além disso, no decorrer dos últimos anos presenciou-se várias crises em todo o mundo, sendo elas políticas ou naturais, como a crise do *subprime*, nos Estados Unidos, em 2007; a instabilidade do valor de ativos após denúncias, pronunciamentos, acusações e brigas políticas, além de catástrofes naturais, como o caso das derrapagens das contenções de Brumadinho e Mariana, e o mais recente cenário social: uma reconstrução econômica pós-pandemia, causada pelo vírus da COVID-19.

Nota-se, ainda, que a área de gestão e análise de risco vem se desenvolvendo rapidamente, como afirma Lima (2018) em seu livro, “diante da necessidade de mensurar o risco dessas oscilações, surge a necessidade de se ter ferramentas para gerir o risco” (p. 3), e apesar de o estudo de risco e volatilidade de mercado já estar amplamente debatido no meio científico, este estudo identifica que há a necessidade de preencher algumas lacunas deixadas ainda na literatura sobre a análise de mercado financeiro brasileiro e mundial com técnicas modernas, que nos possibilitam uma menor dispersão de dados e uma confiabilidade maior nos resultados obtidos.

Diante do comportamento complexo, originado a partir de eventos simples menores, será utilizada a geometria fractal – popularmente conhecida como a geometria da natureza – para o desenvolvimento deste trabalho. Benoit Mandelbrot foi quem desenvolveu e nomeou essa nova geometria que consiste em mostrar que um objeto, figura ou elemento da natureza seja a composição de infinitas partes semelhantes ao todo, ou seja, ao aumentar a escala observada obtêm-se mais detalhes que contribuirão para visualização. Mandelbrot (1972) descobriu que os fractais são estruturas autossemelhantes, onde o todo forma a parte e a parte forma o todo.

A geometria fractal vem sendo utilizada em inúmeras áreas de estudos na literatura, tais como a física experimental, geofísica, fisiologia, medicina, ciências sociais, entre outras áreas mais, que utilizam o comportamento de escala fractal. Porém, será visto, no decorrer deste trabalho, que em determinados estudos obteve-se mais do que apenas um componente de escala fractal. O todo será formado, nesses casos, por inúmeros subconjuntos de escalas distintas e tal comportamento, que exige vários componentes de escala diferentes, é chamado de multifractal.

Voltando ao campo de economia e finanças, o comportamento de escala fractal ou multifractal foi evidenciado pela primeira vez no livro “*Les Objets fractals: forme, hasard et dimension*” de Mandelbrot publicado em 1975, e vinte e um anos depois usado por Mantegna e Stanley (1996). A partir disso, vários outros autores verificaram a existência de multifractalidade em diversas séries temporais de inúmeras áreas do conhecimento; todavia, apenas as séries de mercados financeiros, comportamentos fisiológicos e da natureza obtiveram mais sucesso. Além disso, com o passar do tempo, técnicas de análise fractal e multifractal foram surgindo na literatura, como o método MF DFA (*Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*) desenvolvido por Kantelhardt et al. (2002) – sendo ele uma generalização do DFA (*Detrended Fluctuation Analysis*) – e o método WTMM (*Wavelet Transform Modulus Máxima Method*), desenvolvido a partir do modelo elaborado por Holschneider (1988) e idealizado por Calvet e Fisher (2001).

Um dos instrumentos para a avaliação de investimentos é a análise técnica, utilizada especialmente em ativos negociados na bolsa de valores. De acordo com Murphy (2021) a análise técnica é o estudo da ação do mercado com o objetivo de prever tendências no futuro, ou seja, consiste no estudo dos movimentos de mercado, com base na análise gráfica e o uso de indicadores. O tema central deste trabalho é adicionar um novo indicador de análise de previsões de ativos financeiros utilizando a técnica MF DFA. Foram selecionadas 28 séries temporais de diferentes segmentos econômicos, como: índice de bolsa de valores mundiais,

ações internacionais e nacionais, comparação entre moedas mundiais, preços de commodities e índices de renda fixa. Essas séries mencionadas são descritas no capítulo 4. No decorrer deste trabalho fica evidenciado como os parâmetros multifractais de uma série temporal podem se tornar indicadores de qualidade de uma previsão com base em probabilidades e correlações, utilizando como técnicas de previsão os modelos Naive e GARCH.

Atualmente, há várias métricas tradicionais de previsão conhecidas, tais como os modelos de redes neurais, o modelo Autorregressivo Integrado de Médias Móveis (ARIMA), o modelo Autorregressivo Condicional com Heterocedasticidade Generalizado (GARCH) e modelos mais simples, como os modelos Naive, Drift, de Média histórica, entre outros. Métodos que dividem seu espaço a cada ano que se passa, a partir de novas descobertas, como por exemplo, pode-se ver nos trabalhos de Lima (2004); Freitas e Rodrigues (2006); Magnani (2017); Raimundo (2018); Jana, Ghosh e Das (2021); Cho e Lee (2022); Liu et al. (2022); e Yin e Wang (2022), os quais usam uma combinação de modelos para fazer previsões. A sugestão dos autores é que trabalhar com mais de um modelo pode ser mais preciso do que trabalhar com um modelo individualmente. Assim, cada vez que os computadores ficam mais potentes, vão surgindo novas abordagens e estratégias para o cálculo de previsões.

Nesse trabalho, todos os cálculos foram desenvolvidos com o auxílio do software livre R[®], através do ambiente integrado de desenvolvimento RStudio[®]. Vale salientar que mesclou-se a utilização de técnicas amplamente debatidas na literatura, que possuem seus métodos prontos, com a utilização de métodos e critérios desenvolvidos pelo próprio autor, que são descritos no capítulo 3. Obteve-se, assim, resultados significativos, que podem servir de ferramenta para novas análises de previsões e investimentos.

1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA DA PESQUISA

O mundo está cada vez mais globalizado, e a informação hoje é praticamente instantânea. Tem-se, por exemplo, a explosão do *Big data*, com sua imensa variedade, volume, veracidade e velocidade das informações. Pode-se verificar, portanto, a presente variação de preços e impactos econômicos sofridos por diversos fatores, como por exemplo: desastres naturais, notícias e intervenções políticas. As redes sociais são meios de veiculação de notícias mais ágeis que os jornais impressos e os noticiários de televisão. Nesse sentido, sob o olhar da análise técnica, Murphy (2021) traz em seu livro a abordagem em três premissas:

1. O mercado desconta tudo, ou seja, todas as informações, eventos raros e análises fundamentalistas estão precificadas na ação;

2. Os preços se movimentam em tendências, e
3. A história se repete, ou seja, o segredo para entender o futuro reside em um estudo do passado.

Este trabalho busca, portanto, agregar as técnicas presentes hoje na análise de risco e análise técnica com o uso da geometria fractal e o método MF DFA. Nos últimos anos, a área mais ampla da análise técnica vem se dividindo entre dois tipos de profissionais, os grafistas tradicionais e os analistas estatísticos/quantitativos, conforme Murphy (2021). A partir desse olhar pautado em um viés estatístico, o presente trabalho busca trazer um possível indicador de qualidade de previsões de séries financeiras com base na multifractalidade da série, em concordância com a terceira premissa, já que a fractalidade ou multifractalidade de uma série está relacionada com seu comportamento de escala ao longo do tempo.

Durante a pesquisa, buscou-se no que é chamado por Cova (2011) de “mercados fractais”, uma nova ótica fundamentada na conhecida Hipótese de Mercado Eficiente (HME) que fundamenta que o comportamento do mercado é totalmente aleatório, os investidores são racionais e todas as informações são disponíveis igualmente a todos. Um exemplo do uso da HME é a teoria das carteiras eficientes de Harry Markowitz (1952).

A visão fractal dos mercados baseia-se nas teorias de Benoit Mandelbrot, conhecido como o pai da geometria fractal, que em seu livro “Mercados financeiros fora de controle” (Mandelbrot e Hudson, 2004) discorre sobre algumas inconsistências encontradas na Hipótese de Mercados Eficientes. De acordo com estes autores em seu estudo sobre o preço do algodão, ele correlacionou o tamanho das mudanças nos preços e a frequência de cada mudança, percebendo assim que ali não havia um comportamento de uma distribuição normal, e sim que o movimento dos preços obedecia a uma espécie de lei de potência, dando início à linha de estudos e métodos que veremos no decorrer deste projeto.

1.2 O PROBLEMA DE PESQUISA

O problema de pesquisa surgiu após a leitura do trabalho de Da Silva Filho, Maganini e Almeida (2018). Em seus estudos, os autores, além de evidenciarem a presença do comportamento multifractal nas séries intradiárias de 12 horas de Bitcoin, apresentam a existência de correlação entre a multifractalidade e a volatilidade da série. Buscou-se, na literatura e além de Da Silva Filho, Maganini e Almeida (2018), outros autores, como Ramirez, Rodriguez e Valdez (2018); Telli e Chen (2020); Kakinaka e Umeno (2022); Cho e Lee (2022) e Yin e Wang (2022) também evidenciaram a presença desta correlação no mercado de bitcoins.

A seguinte pergunta pode ser construída: será que outros ativos negociados na bolsa possuem também essa correlação e, além da existência dessa correlação, poderíamos verificar a existência de correlações entre indicadores de erros das previsões como o MAPE e o grau de multifractalidade das séries?

Como Ribeiro (2009) traz em seu trabalho, conhecer previamente um valor futuro pode significar a diferença entre sucesso e fracasso em algumas ocasiões, ou seja, acredita-se que ao correlacionar os parâmetros multifractais à qualidade das previsões, pode-se, dentro um intervalo de confiança, ter indicadores que mostrarão o quão perigoso é ou não confiar nas previsões encontradas.

1.3 PROBLEMAS DE INVESTIGAÇÃO

Para a realização deste trabalho, foi feito um levantamento histórico sobre o desenvolvimento do tema. Realizou-se, então, um levantamento bibliográfico internacional pela ferramenta Web of Science disponível na internet, e um levantamento em apenas páginas brasileiras pela plataforma do Google Acadêmico. Durante o levantamento, pesquisou-se nas duas plataformas as seguintes palavras-chave: MF DFA; *forecast*; previsões; *correlation*; correlação; NAIVE; Arima-Garch; Garch; volatilidade; *volatility*, e *prediction*. Todas as palavras foram combinadas e pesquisadas de modo que fosse obtida a noção de todos os trabalhos já escritos.

Durante a pesquisa realizada, buscou-se, na literatura, trabalhos que evidenciassem possíveis correlações entre multifractalidade e volatilidade, multifractalidade e erros de previsão, e artigos que mesclassem técnicas de previsão com os parâmetros multifractais das séries temporais analisadas. Identificou, assim, uma lacuna na literatura sobre os estudos referentes aos temas apresentados.

Os estudos encontrados são recentes, sendo em 2017, quando surgem os primeiros trabalhos associando a multifractalidade de uma série como aliada às técnicas de previsão, e em 2018, trabalhos que correlacionam multifractalidade de volatilidade. Os trabalhos encontrados foram os de:

- Maganini (2017) que desenvolve uma técnica de previsão utilizando os parâmetros multifractais em séries de ações do mercado brasileiro com frequência intra-diária;

- Da Silva Filho, Maganini e Almeida (2018) evidenciam a característica multifractal na série de bitcoins de frequência intra-diária, além de identificarem a correlação entre multifractalidade e volatilidade da série;
- Ramirez, Rodriguez e Valdez (2018) estudam a correlação entre a multifractalidade e a tendência dos preços do mercado de bitcoins em frequência diária e horária;
- Wang e Liu (2020) associam os parâmetros multifractais com a previsibilidade de ações do mercado chinês no período intra-diário, utilizando métodos de redes neurais;
- Telli e Chen (2020) investigam a natureza multifractal do retorno e da volatilidade das series diárias de bitcoin e ouro ao longo de períodos amostrais completos e períodos subamostrais;
- Costa Lopes (2022) desenvolve uma técnica de previsão associando os parâmetros multifractais ao modelo de redes neurais em séries da criptomoeda ethereum com frequência intra-diária;
- Yin e Wang (2022) estudam as características não lineares multifractais e caóticas da volatilidade do bitcoin no período diário, para a melhora da previsibilidade, utilizando redes neurais;
- Cho e Lee (2022) desenvolvem um novo modelo de previsão associando, a relação entre fractalidade e volatilidade a modelos de previsão por redes neurais, na série do índice S&P500, e
- Kakinaka e Umeno (2022) investigam a estrutura de dependência entre multifractalidade e volatilidade em seis criptomoedas representativas de frequência intra-diária.

A quantidade de trabalhos ainda é escassa, sendo a maioria deles desenvolvidos no mercado de criptomoedas, ações orientais, alguns em índices da bolsa de valores e outros em algumas ações brasileiras, além de utilizarem em sua grande maioria séries de alta frequência. A lacuna identificada foi, então, a falta de trabalhos que utilizam séries de índices mundiais, taxas de câmbio, commodities, renda fixa e ações nacionais e internacionais, em frequência diária. Além da possibilidade da busca de um intervalo de multifractalidade mais eficiente para a previsibilidade em cada segmento econômico.

1.4 OBJETIVOS DA PESQUISA

Um dos sonhos dos analistas financeiros é tentar compreender e prever os valores futuros dos preços dos ativos disponíveis no mercado. “É intrínseco ao ser humano prever eventos futuros analisando dados passados” (Costa Lopes, 2022, p.17). Atualmente há várias métricas de previsões como citado anteriormente, e como trouxe Petropoulos (2021) em seu trabalho, o grande número de aplicações de previsão exige um conjunto diversificado de métodos de previsão para enfrentar os desafios da vida real.

“A análise técnica também desempenha um papel na previsão econômica” (Murphy, 2021, p.37). Por exemplo, a direção dos preços das commodities revela informações sobre a direção da inflação, tendências de mercados futuros normalmente aparecem antes de se refletirem nos indicadores econômicos tradicionais, divulgados mensalmente ou trimestralmente, e geralmente indicando fatos que já ocorreram.

O objetivo central deste trabalho foi o de identificar a existência ou não de correlações entre os expoentes de escala multifractal de uma série temporal de um ativo financeiro e os MAPEs de suas previsões, de modo a verificar se tal correlação pode servir como indicador de qualidade de uma previsão. Nesse sentido, trata-se de um problema univariado de previsão de séries temporais, no qual será analisado para quais intervalos de valores de multifractalidade de uma série temporal os erros das previsões (MAPEs) são menores que os erros médios de todas as previsões.

Desse modo, buscou-se estender os estudos apresentados anteriormente e contribuir com a literatura, preenchendo a lacuna presente com a análise de diferentes tipos de ativos em diferentes segmentos econômicos em âmbito local e mundial, com a finalidade de encontrar, com base em fatos estilizados, valores de intervalos de expoentes de escala multifractal que trazem um desempenho maior em relação aos outros intervalos de escala, ou seja, intervalos de multifractalidade cujas séries temporais, em sua grande maioria, possuem valores de MAPEs – obtidos nas previsões – menores do que a média geral.

Tem-se, então, a possibilidade de trazer aos investidores e analistas de mercado a porcentagem de séries (dado seu segmento econômico) que tiveram seus erros abaixo da média geral em relação a todas as séries, em cada intervalo de escala multifractal. Desta maneira, os valores de escala multifractal dos intervalos com melhor desempenho representam indicadores de qualidade das previsões. Este trabalho contribui, portanto, para quanto os investidores e analistas devem confiar ou não em suas previsões.

Foram utilizados para a análise, os métodos de previsão Naive e GARCH, verificando a existência de correlação entre os expoentes de escala multifractal e os valores do MAPE obtidos utilizando estes métodos de previsão, em janelas deslizantes obtidas das séries originais.

1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Após o primeiro capítulo de introdução, em que é apresentado e contextualizado o problema de pesquisa; a justificativa e a relevância do tema; a hipótese a ser desenvolvida; a apresentação dos objetivos e a organização da dissertação, as próximas seções deste trabalho estarão organizadas em mais 4 capítulos:

- Capítulo 2: é apresentada a fundamentação teórica, breves definições acerca do que são séries temporais, fractais, multifractais e expoente de Hurst. Além dos modelos de previsão Naive e Garch, e o método MFDFA.
- Capítulo 3: neste capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos que foram utilizados na pesquisa, e quais os “*benchmarks*” a serem seguidos. Aqui é descrito o passo a passo de como a pesquisa foi desenvolvida, juntamente com as hipóteses que foram testadas e os critérios estabelecidos para a divisão da série em janelas menores e análise dos expoentes de escala multifractal.
- Capítulo 4: são apresentados os dados que foram utilizados, a caracterização estatística e multifractal das séries, as análises de correlação e probabilidade entre os parâmetros multifractais e as medidas de erros das previsões, os gráficos e resultados obtidos.
- Capítulo 5: neste último capítulo são apresentadas as considerações finais com base nos resultados obtidos, contribuições para a literatura e sugestões para próximas pesquisas.
- No final são listadas todas as referências utilizadas neste trabalho e os apêndices.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentadas as teorias, embasamento teórico e equações utilizadas no desenvolvimento da proposta de pesquisa. As subseções foram divididas em: séries temporais e risco; técnicas e métodos de previsão, onde são descritos os modelos Naive e GARCH; caos fractais e multifractais, que são apresentados os conceitos de fractais, multifractais e expoente de Hurst; MF DFA, onde é descrito o desenvolvimento do modelo e uma revisão da literatura e, por fim, medidas de erro e dispersão que são restritas à medida de erro MAPE, que é a utilizada neste trabalho.

2.1 SÉRIES TEMPORAIS E RISCO

Morettin e Tolo (2018) definem uma série temporal como sendo qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo. Essas observações, em muitos casos, são chamadas de dados, ou seja, informações numéricas acerca de algum evento estudado. São exemplos de séries temporais: valores diários de precipitação de chuva na cidade de São Paulo; valores diários do faturamento de uma empresa; índices diários da bolsa de valores de São Paulo, registro da velocidade do vento em usinas eólicas e precipitação atmosférica anual na cidade de Curitiba.

As séries temporais, em sua maioria, são séries temporais discretas. Isso significa que são séries obtidas através da amostragem de uma série temporal contínua em intervalos de tempo iguais.

Segundo Morettin e Tolo (2018) quando se trata de análise de séries temporais, temos a divisão de quatro objetivos principais:

- Investigar o mecanismo gerador da série temporal;
- Fazer previsões de valores futuros da série;
- Apenas descrever o comportamento da série, e
- Procurar periodicidades relevantes nos dados.

O presente trabalho faz a mescla de todos os objetivos descritos, com ênfase na análise de riscos e multifractalidade de séries do mercado financeiro.

A palavra risco nos traz uma noção de perigo, ousadia: o risco gerado de diversas fontes pode ser definido como a variabilidade de resultados inesperados. E de acordo com Lima (2018) “a análise de riscos é o processo através do qual as várias exposições, nos mais variados tipos de riscos, são diagnosticadas, calculadas e analisadas, gerando controles para decisões financeiras nas condições de risco expostas” (p. 3).

Conforme abordado por Fernandes et al. (2022) “risco sempre foi um tema amplamente discutido no mercado financeiro, e a gestão de risco se desenvolveu como uma ferramenta de mitigação no processo de controle e monitoramento de diversos riscos nas operações de mercado” (p. 2). Lima (2018) destacou que, desde Jorion (2009) a evolução das ferramentas de gestão de risco existe, e se deve ao surgimento de métodos estatísticos e matemáticos, cuja motivação é mensurar possíveis perdas nas operações do mercado financeiro.

Assim, para atingir os objetivos deste trabalho, são descritos, nos próximos tópicos, os mecanismos utilizados para a análise das séries.

2.2 TÉCNICAS E MÉTODOS DE PREVISÃO

Para o cálculo das previsões, foram utilizados, neste trabalho, os métodos Naive e GARCH, sendo o primeiro considerado um método de previsão simples, e o segundo, um método de previsão clássico. Como o objetivo do trabalho não é desenvolver ou testar uma métrica de previsão, mas identificar um indicador de confiabilidade de previsões com base nos expoentes de escala multifractal e acurácia das previsões, a escolha dos métodos deu-se pela experimentação de verificar se mesmo utilizando técnicas de previsão de complexidades diferentes chegaríamos em resultados semelhantes.

2.2.1 Naive

O modelo de previsão ingênuo, mais conhecido como Naive, pode ser facilmente encontrada na literatura (Lawrence et al., 2000). Tal técnica consiste em projetar o último valor da série estudada para o futuro. De acordo com Philippsen (2011), o método se baseia em que a melhor previsão para o instante seguinte seja o valor do instante atual, ou seja, se um valor da série estiver em tendência alta, a previsão é de que ela continuará alta e vice-versa. De acordo com Makridakis (1997), o modelo pode ser descrito da seguinte forma:

$$\{x_t\}_{t=1}^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1)$$

$$x_{t+1} = x_t \quad (2)$$

sendo a equação 1 a representação de uma série temporal qualquer e a equação 2 o método Naive para a previsão de dados futuros. Com x_t representando o último valor da série, x_{t+1} a

previsão de um passo à frente. Para a realização de previsões maiores de que um passo à frente basta repetir o último valor de acordo com o número de observações futuras que é desejado.

2.2.2 Modelagem Arima-Garch

O segundo modelo de previsão utilizado neste trabalho foi o modelo generalizado autorregressivo integrado de médias móveis condicionado à heterocedasticidade, conhecido como GARCH. O modelo foi desenvolvido Bollerslev (1986), a partir de uma generalização do modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedasticity*), inicialmente proposto por Engle (1982). A técnica consiste em utilizar a volatilidade passada da série como ferramenta de previsão de riscos, diferenciando-se dos modelos clássicos que não captam a alteração da variância ao longo do tempo. Em outras palavras, os modelos clássicos atribuem os mesmos pesos às informações recentes e passadas, enquanto os modelos que utilizam a volatilidade atribuem maiores pesos às informações recentes, por isso são muito utilizados na literatura (Mota e Fernandes, 2004).

Muitos estudos já foram realizados para previsões de séries financeiras com a utilização de modelos ARCH e GARCH, já que os modelos foram os primeiros capazes de modelar as correlações de curto alcance e a heterocedasticidade presente nos dados (Fonseca, 2012). Na literatura encontram-se vários trabalhos que realizam análises com o uso do modelo GARCH: Galdi e Pereira (2007) utilizam-no para prever a volatilidade de séries temporais; Charles (2008) utiliza-o para fazer previsões de 17 ações francesas, detectando e corrigindo retornos anormais; Karlafits e Vlahogianni (2009) utilizam-no para analisar o tráfego de transporte; Tan et. al (2010) utilizam-no juntamente com a técnica das *wavelets* para prever o preço da eletricidade do mercado espanhol com um dia de antecedência; Fonseca (2012) utiliza-o para estudar as estruturas de linearidade de séries temporais de índices mundiais de bolsa de valores; Costa e Lima (2021) utilizaram a modelagem ARIMA-GARCH para a análise de volatilidade e efeitos de alavancagem do ETF BOVA 11 (Fundo de Índice iShares Ibovespa) e Fernandes et. al (2022) utilizaram-no para analisar o impacto de uma informação privilegiada na previsão da volatilidade e cálculo do *Value at risk* de um opção da Petrobrás.

Além disso, modelagem GARCH é uma extensão do modelo autorregressivo integrado de médias móveis (ARIMA), que é baseada nas quatro etapas básicas propostas por Box e Jenkins (1976), a saber: identificação, estimativa, verificação e previsão. De acordo com os autores, os dados falam por si mesmos. O modelo ARIMA é a combinação do componente autorregressivo (AR), filtro de integração (I) e componente de médias móveis (MA). De acordo

com Morettin e Toloi (2018), o modelo pode ser descrito conforme as equações a seguir, onde z_t e W_t são séries temporais:

$$AR(p) \quad z_t = \Phi_1 * z_{t-1} + \Phi_2 * z_{t-2} + \dots + \Phi_p * z_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3)$$

em que Φ_p são parâmetros reais e ε_t são variáveis aleatórias i.i.d (independentes e identicamente distribuídas), com $E(\varepsilon_t) = 0$ e $var(\varepsilon_t) = \sigma^2$.

$$MA(q) \quad z_t = \mu + \alpha_t - \theta_1 * \alpha_{t-1} + \theta_2 * \alpha_{t-2} - \dots - \theta_q * \alpha_{t-q} \quad (4)$$

em que μ, θ_q são constantes reais, α_t são variáveis aleatórias i.i.d. e $\alpha_t \sim N(0, \sigma^2)$.

$$ARMA(p, q) \quad z_t = \Phi_1 * z_{t-1} + \Phi_2 * z_{t-2} + \dots + \Phi_p * z_{t-p} - \theta_1 * \alpha_{t-1} + \theta_2 * \alpha_{t-2} - \dots - \theta_q * \alpha_{t-q} + \alpha_t \quad (5)$$

$$ARIMA(p, d, q) \quad W_t = z_t - z_{t-d} \quad (6)$$

A identificação das ordens dos componentes de autocorrelação (AR) e de médias móveis (MA), é essencial para a modelagem da previsão GARCH. Faz-se necessário a utilização de recursos computacionais, para a identificação dos componentes ideais da amostra estudada, devido a estrutura complexa do modelo. Com isso, este trabalho utilizou rotinas e pacotes programados no software R, no ambiente de programação Rstudio para identificar automaticamente a estrutura do modelo ARMA. No capítulo de metodologia são descritos os pacotes que foram utilizados. Cabe ressaltar que a identificação pode ser realizada por meio dos gráficos das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP), porém essa abordagem não foi utilizada neste trabalho, devido ao número de amostras a serem analisadas.

Para estimar a classe de modelos ARCH é necessário, antes, determinar se existe a presença de heterocedasticidade condicional nos resíduos do modelo. Para tanto, Engle (1982) propôs o teste ARCH-LM (Multiplicador de Lagrange), o qual testa se a série tem efeito heterocedástico, ou seja, se a variância condicional passada não é constante. A hipótese nula indicada no teste é que os resíduos são homocedásticos, ou seja, não existe efeitos ARCH no modelo. O teste pode ser descrito de acordo com a Equação 7:

$$\varepsilon_t^2 = \beta_0 + \sum_{s=1}^q \beta_s \varepsilon_{t-s}^2 + v_t \quad (7)$$

na qual ε é o resíduo, os β são os parâmetros da regressão e v_t , um processo de ruído branco. Após a análise da presença de heterocedasticidade e obtenção dos componentes ARMA, estimas-se o modelo GARCH, que generaliza o tratamento da variância condicional como uma função linear dos quadrados dos erros passados e das variâncias condicionadas passadas (Bollerslev, 1986):

$$\text{GARCH } (p, q) \quad \sigma_t^2 = \Phi + \sum_{i=1}^q \omega_i u_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^p \varphi_j \sigma_{t-1}^2 \quad (8)$$

onde σ é a variância condicionada e Φ , ω_i e φ são os parâmetros dos termos interceptos erro aleatórios, sendo, $\Phi > 0$ e $\omega_i, \varphi \geq 0$.

Ao selecionar os componentes ARMA para a aplicação do modelo GARCH, muitas pesquisas de análise de séries financeiras seguem o que foi descrito por Morettin e Tolo (2006), que indicam o uso do modelo GARCH (1,1), justamente pela dificuldade de estimar no passado os componentes ideais de cada amostra a ser estudada. Porém, para este estudo escolheu-se estimar os componentes ideais de cada amostra, já que atualmente possuímos recursos computacionais suficientes para a realização da análise sem grandes dificuldades.

2.3 CAOS, FRACTAIS E MULTIFRACTAIS

2.3.1 Geometria fractal e multifractal: uma breve introdução

De acordo com Fernandes e Da Silva Filho (2019), durante muito tempo, em relação à geometria, utilizou-se os conceitos de geometria euclidiana que Euclides organizou no livro “Os Elementos”, reunindo treze obras que fundamentam, até hoje, definições e axiomas ligados à geometria plana e espacial. Por um período, a geometria euclidiana foi suficiente para modelar os problemas apresentados pelo homem em suas construções, formas e estudos científicos. No entanto, com o passar dos anos, notou-se que as formas e objetos estudados na natureza possuíam formas incapazes de serem modeladas dentre os axiomas e postulados de Euclides.

Os matemáticos tiveram, então, dificuldades de calcular, por exemplo, as dimensões de montanhas, nuvens, continentes, vales, furacões, sistemas biológicos e várias outras formas presentes na natureza e que não podiam ser representadas apenas por pontos,

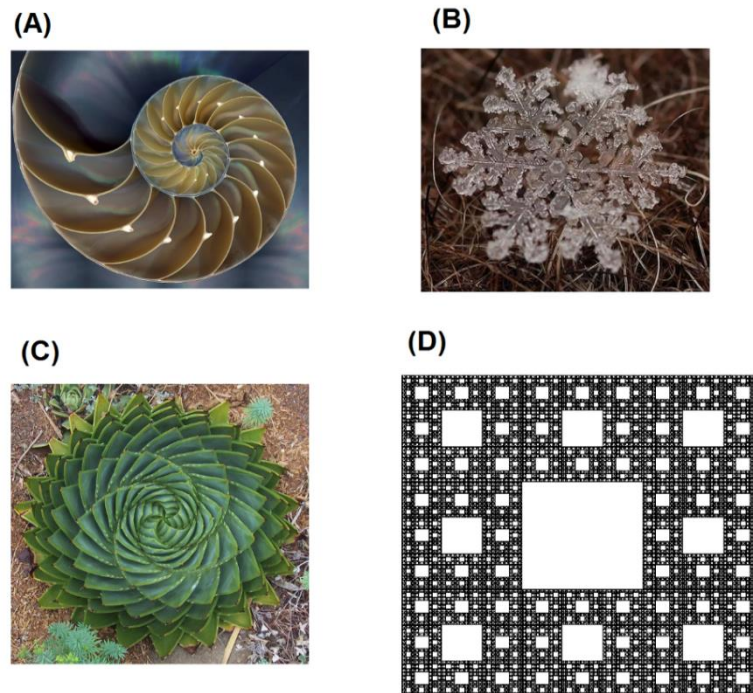
retas, planos ou figuras geométricas, ou seja, pela geometria euclidiana. Nas perspectivas de Fernandes e Da Silva Filho (2019), alguns matemáticos do final do século XIX e início do século XX criaram curvas e objetos, que foram classificados pela sociedade e academia como “monstros matemáticos”, pois não possuíam explicações objetivas e desafiavam as propriedades matemáticas. A falta de representação desses objetos com o uso da geometria euclidiana e as reproduções simplórias de objetos, como nuvens, continentes e sistemas biológicos, geraram insatisfação e inquietações aos matemáticos do final do século XX. Surge, então, o matemático francês Benoit Mandelbrot, que associa a esses objetos o termo “objetos fractais”, desenvolvendo a geometria fractal, tendo como sua obra mais conhecida, o livro intitulado “The fractal geometry of nature” (Mandelbrot, 1982). Este foi o início de uma nova era de análises e computação gráfica, onde é possível considerar a geometria fractal como uma descoberta recente e ainda que possui muitos mistérios a serem desvendados.

2.3.2 – Fractais

Fractal vem do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, em Latim, e significa “partir em segmentos irregulares” (Mandelbrot, 1982). Porém, como será visto, esses segmentos partidos seguem um padrão. Muito conhecido por sua autossimilaridade (propriedade geométrica que representa simetria através de escalas), os fractais possuem fragmentos que se forem ampliados, representarão o todo. Associado a uma ciência chamada Caos, os Fractais buscam justamente encontrar padrões dentro de sistemas aparentemente aleatórios, irregulares, considerados como caóticos (Barbosa, 2005).

Segundo Mandelbrot (1982), em sua definição mais maleável, um Fractal é uma forma constituída de partes similares ao todo. Os fractais tornaram-se conhecidos por sua estética bastante atrativa e desafiadora. Desse modo, quem adquire o conhecimento sobre a geometria Fractal, nunca mais terá o mesmo olhar para a natureza e a arte. Pois ao observarem tapetes, estampas, folhas de samambaias, folhas de árvores, as ramificações de veias no corpo, desenhos, pinturas e outros mais incontáveis objetos, tentarão sempre ali no meio do “Caos” encontrar um padrão.

Figura 1 – Exemplos de Fractais: (A) Náutilo, (B) Floco de neve, (C) Babosa e (D) Tapete de Sierpinsk.



Fonte: Fernandes e Da Silva Filho (2019, p.5).

A evolução tecnológica dos últimos anos e a qualidade gráfica dos efeitos especiais cinematográficos, possuem uma forte contribuição dos fractais, que revolucionaram a geração e a reprodução de imagens. Montanhas, rios, florestas, vulcões e ambientes fictícios de outros planetas podem seguir, em sua construção, um algoritmo que utiliza a iteração fractal.

No estudo dos fractais serão vistas duas definições, a de autossimilaridade ou autossemelhança, e a de autoafinidade. A diferença entre elas é que a autossimilaridade, como explicada acima, é considerada uma homotetia (propriedade que altera o tamanho das figuras, mas mantém a forma e ângulos) interna, ou seja, sempre quando ampliarmos um objeto fractal autossimilar veremos uma imagem idêntica ao todo. Na maioria dos objetos fractais criados pelo homem é fácil identificar a autossimilaridade. Já a autoafinidade é percebida em fenômenos estudados pela natureza. Neste fenômeno, surgem conjuntos que não se encaixam na autossimilaridade, pois eles apresentam mais de um fator de escala, ou seja, um objeto fractal autossimilar é aquele que pode possuir mais de um padrão de repetição dentre suas formas. Quando ele for ampliado, nem sempre será vista uma figura idêntica ao todo, mas idêntica a uma de suas partes. Um exemplo disso é o item B, da figura 1.

Os Fractais possuem uma classificação que os agrupam em três grandes categorias; são separados de acordo como a forma que foram gerados e o seu grau de autossimilaridade e autoafinidade. No entanto, como o estudo exclusivo dos Fractais não é o

foco desta pesquisa, são apresentadas somente as classificações. Tem-se, então, de acordo com Rabay (2013):

- Fractais definidos por sistemas de funções iteradas;
 - Fractais pela Fronteira;
 - Fractais por Remoção;
 - Fractais Tipo Dürer, e
 - Fractais Tipo Árvore.
- Fractais definidos por uma relação de recorrência, e
- Fractais aleatórios.

2.3.3 Dimensão Fractal

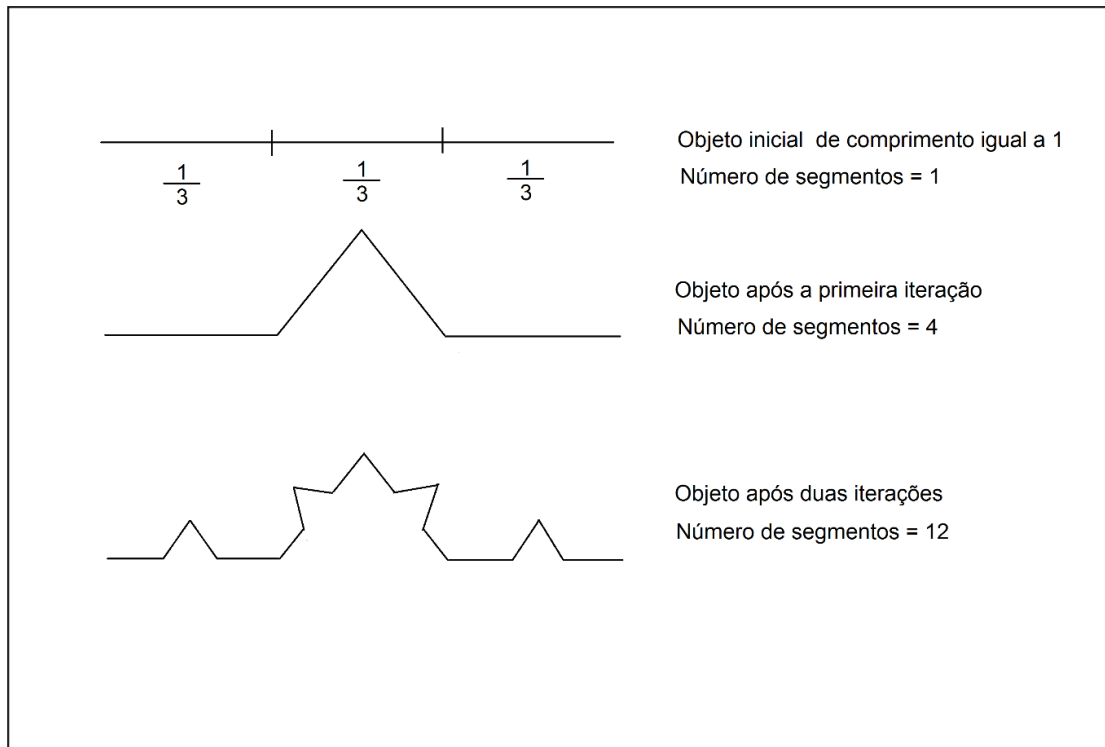
Um conceito chave no estudo da evolução dos sistemas dinâmicos é o de dimensão (Mandelbrot, 2004). Existem várias definições matemáticas do que seja dimensão, como a dimensão euclidiana (número de coordenadas necessárias para descrever um objeto geométrico) e a dimensão topológica (valor da dimensão euclidiana mais um). Dimensão também pode ser definida como o número mínimo de variáveis necessárias para descrever um sistema. No que se refere aos fractais, existem três definições de dimensões mais comumente encontradas na literatura: dimensão de capacidade (D_0), dimensão de informação (D_1) e dimensão de correlação (D_2). A dimensão de capacidade foi proposta por Andrei Kolmogorov em 1958 e é um caso especial da chamada dimensão de Hausdorff, proposta por Felix Hausdorff em 1918.

A dimensão de capacidade é definida a partir do conceito de espaço de fases (espaço multidimensional formado pelos pontos que correspondem aos estados de cada partícula do sistema). Consideremos um espaço de fases cuja dimensão topológica seja d e um conjunto de pontos nesse espaço d -dimensional. Seja $N(\varepsilon)$ o número de hipersferas de diâmetro ε que são necessárias para cobrir todo o conjunto. Assim, a dimensão de capacidade pode ser definida pela expressão:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (9)$$

Agora, considere os dados a seguir para a exemplificação de como calcular a dimensão de um fractal. Será calculada a dimensão de capacidade do fractal Curva de Koch, conforme Fernandes e Da Silva Filho (2019).

Figura 2 – Construção do Fractal “Curva de Koch”.



Fonte: Fernandes e Da Silva Filho (2019, p.8).

Para esse fractal, após a primeira iteração, temos N (número de segmentos) = 4, e $\varepsilon = 1/3$. Neste exemplo, para descobrir o valor de ε , toma-se um segmento de comprimento de 1 (uma unidade), repartindo-o em 3 partes iguais; cada segmento ficará com $1/3$ (um terço) do comprimento inicial. Calculando, então, temos: $D = \log 4 / \log 3$, que é aproximadamente 1,262.

Assim a figura que antes começou como um segmento de dimensão 1 vai terminar como uma figura de dimensão 1,262, a qual está contida em um plano (de dimensão 2).

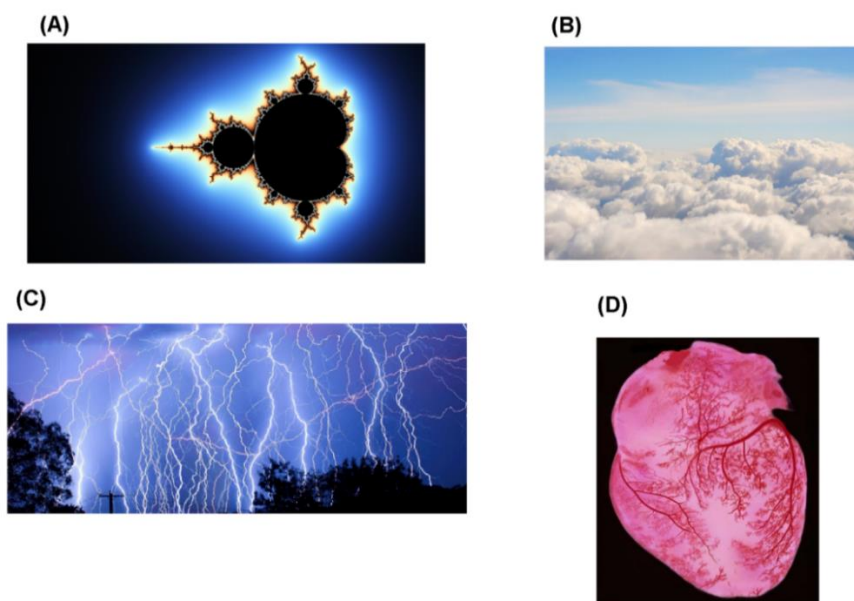
2.3.4 Multifractais

Como citado anteriormente, pode-se calcular a dimensão dos objetos Fractais de diversas formas. Sendo sua dimensão uma espécie de “digital” do Fractal, seu valor numérico, tem grande importância para o conhecimento prévio da forma do Fractal que será estudado.

Nos objetos Fractais, quando analisada sua autossimilaridade, nota-se que para sua construção, é utilizado um mesmo raio de escala ε para todo o comprimento do fractal, ou seja, foi utilizado o mesmo fator de iteração em todo objeto Fractal.

O termo Multifractais, como o próprio nome já introduz, vem de múltiplos, ou seja, esse objeto não é formado por apenas um raio de escala ε para todo o seu comprimento (Fernandes e Da Silva Filho, 2019). Nesse sentido ele possui, vários raios de escalas ε . Os multifractais se encaixam nas transformações autoafins, tendo sempre no mínimo dois raios de escala ε diferentes, em que cada qual possui sua própria dimensão Fractal. Como pode ser visto na figura 3 a seguir, estes objetos, muito presentes nos fenômenos naturais, não possuem uma dimensão geral como nos Fractais, mas várias dimensões para as respectivas escalas.

Figura 3 – Exemplos de multifractais: (A) Conjunto de Mandelbrot, (B) Nuvens, (C) Tempestade de Raios e (D) Vasos sanguíneos de um coração humano.



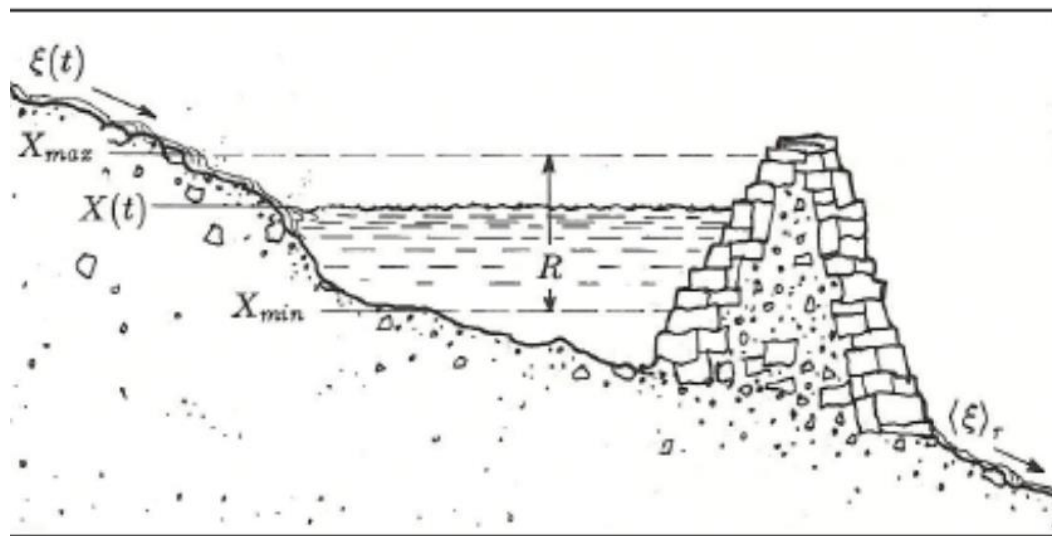
Fonte: Fernandes e Da Silva Filho (2019).

2.3.5 Expoente de hurst

Harold Edwin Hurst (1880-1978) foi um hidrólogo que trabalhou no projeto de construção da barragem na cidade de Assuã no sul do Egito, que dependia do comportamento do Rio Nilo, além de ter estudado problemas relacionados à água. Ele chegou nesta região por volta de 1907 e permaneceu por lá durante 40 anos. Hurst tinha como objetivo construir uma represa de modo que ela nunca transbordasse e nunca ficasse muito vazia. Suas análises levaram ao cálculo do “expoente de Hurst” (Regô, 2012). Existem vários métodos para se encontrar o

expoente de Hurst, definido na equação 11, sendo a “Análise do Alcance Reescalonado” (análise R/S) Hurst (1951), criada propriamente por ele a mais utilizada para poder calcular a correlação presente nos dados de uma série temporal de medidas variáveis, tais como: níveis de rios, temperatura, chuvas, altura das marés e outros eventos de interesse físico que podem ser medidos diariamente.

Figura 4 – Exemplo de um reservatório de água com um influxo de entrada $\xi(t)$ e uma vazão média anual $\langle \xi(t) \rangle_\tau$.



Fonte: Imagens Google.

Sua análise R/S, onde o "R" deriva de “range” (alcance), sendo a diferença acumulada entre o volume máximo (X_{MAX}) e o mínimo (X_{MIN}) durante o ano e o "S" deriva de desvio padrão entre o influxo de água e média de sua vazão em determinado período, pode ser vista na equação 10. Consideremos um reservatório de água, em um determinado período de tempo τ , começando sempre do primeiro ano u , sendo $\xi(u)$ o influxo de entrada e $\langle \xi \rangle_\tau$ a vazão média do período. O parâmetro S pode, então, ser definido por:

$$S(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{u=1}^{\tau} [\xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Hurst descobriu, durante seus estudos, que a estatística R/S é igual à metade do número de observações elevado a um expoente “H”, sendo este “H” denominado expoente Hurst:

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2} \right)^H \quad (11)$$

A interpretação do expoente de Hurst, variando sempre de $0 < H < 1$, é a seguinte: se $0 < H < 0,5$ a série é antipersistente ou de memória curta – o que significa que uma tendência positiva no passado é mais provável de se converter em tendência negativa e vice-versa –; se $H = 0,5$, temos a situação de um movimento puramente aleatório e se $0,5 < H < 1$, os dados são persistentes – o que significa que uma tendência positiva no passado tem maior probabilidade de continuar positiva e vice-versa (Rabay, 2013).

2.4 MF DFA

Conforme Matias, Silva e Vieira (2007, citado por Costa Lopes, 2022), a fractalidade em séries temporais pode ser identificada diante da observação da não-linearidade, da distribuição não-gaussiana dos retornos em relação à média, da persistência de memória de longo prazo e da existência de ordem de integração fracionária.

Vários estudos utilizam metodologias diversificadas para verificar a existência de memória de longo prazo em séries temporais, sendo o MF DFA um deles. Ele é uma generalização do DFA. Impulsionados por Mantegna e Stanley (1996) vários autores aderiram ao método e identificaram o comportamento multifractal em diversos tipos de séries temporais de diversos ramos da ciência. Abaixo são listados alguns exemplos desses trabalhos aplicados ao mercado financeiro:

- **Para o mercado de ações:** Mantegna e Stanley (1996); Norouzzadeh e Jafari (2005); Zunino et al. (2008); Su, Wang e Huang (2010); Wang, Liu e Gu (2009); Zunino et al. (2009); Cajuero et al. (2009); Czarnecki e Grech (2010); Dutta (2010); Maganini, Zhang et al. (2015); Dutta, Ghosh e Chatterjee (2016); Grech (2016); Benbachir e Alaoui (2011); Maganini (2017); Maganini, Da Silva Filho e Lima (2018) e Maganini et al. (2022);
- **Para o mercado de criptomoedas:** Da Silva Filho, Maganini e Almeida (2018); Cheng, Liu e Zhu (2019); Telli e Chen (2020) e Costa Lopes (2022);
- **Preço de commodities:** Matias, Ashkenazy e Stanley (2003); Matias, Silva e Vieira (2007) e Memon, Yao e Naved (2022);
- **Preços futuros de créditos de carbono:** Cao e Xu (2016);
- **Preço do ouro:** Ivanova e Ausloos (1999); Bolgorian e Gharli (2011); Ghosh, Dutta e Samanta (2012); Oh et al. (2012) e Dutta, Ghosh e Chatterjee (2016);
- **Taxa de câmbio:** Vandewalle e Ausloos (1998); Schmit, Schertzer e Lovejoy (1999); Ausloos (2000); Baviera et al. (2001); Muniandy, Lim e Murugan

(2001); Xu e Gençay (2003); Norouzzadeh e Rahmani (2006); Oh, Kim e Eom (2007); Souza, Tabak e Cajueiro (2008); Wang, Wu e Pan (2011); Abounoori, Shahrazi e Rasekhi (2012); Stosic, Silva e Stosic (2012) e Lux, Morales-Arias e Sattarhoff (2014);

- **Fluxo de tráfego:** Feng et al. (2018) em séries de fluxo de tráfego de rodovias e Zang et al. (2019) em series de fluxo de tráfego aéreo.
- **Associaram multifractalidade a volatilidade e técnicas de previsão:** Maganini (2017) que desenvolve uma técnica de previsão utilizando os parâmetros multifractais em séries de ações do mercado brasileiro com frequência intra-diária; Da Silva Filho, Maganini e Almeida (2018): os autores evidenciam a característica multifractal na série de bitcoins de frequência intra-diária, além de identificarem a correlação entre multifractalidade e volatilidade da série; Ramirez, Rodriguez e Valdez (2018) estudam a correlação entre a multifractalidade e a tendência dos preços do mercado de bitcoins em frequência diária e horária; Wang e Liu (2020) associam os parâmetros multifractais com a previsibilidade de ações do mercado chinês no período intra-diário, utilizando métodos de redes neurais; Telli e Chen (2020) investigam a natureza multifractal do retorno e da volatilidade das series diárias de bitcoin e ouro ao longo de períodos amostrais completos e períodos subamostrais; Costa Lopes (2022) desenvolve uma técnica de previsão associando os parâmetros multifractais ao modelo de redes neurais em séries da criptomoedas ethereum com frequência intra-diária; Yin e Wang (2022) estudam as características não lineares multifractais e caóticas da volatilidade do bitcoin no período diário, para a melhora da previsibilidade utilizando redes neurais; Cho e Lee (2022) desenvolvem um novo modelo de previsão associando a relação entre fractalidade e volatilidade modelos de previsão por redes neurais, na série do índice S&P500; e Kakinaka e Umeno (2022) investigam a estrutura de dependência entre multifractalidade e volatilidade em seis criptomoedas representativas de frequência intra-diária.

Muitos estudos também têm investigado a eficiência do mercado durante crises financeiras usando o método MF-DFA. Isso pode ser visto nos trabalhos de Alam, Arshad e Rizvi (2016); Mensi, Tiwari e Yoon (2017); Shahzad et al. (2017); Han, Wang e Ning (2019) e Choi (2021).

O método DFA é mais utilizado em séries nas quais os pesquisadores buscam evidenciar a presença de comportamentos fractais, sendo o MFDFA uma versão modificada do DFA para identificar se a série estudada apresenta comportamento de escala multifractal. O MFDFA, que foi desenvolvido por Kantelhardt et al. (2002), consiste no desenvolvimento de seis etapas que vão desde a determinação do perfil até a análise do expoente de Hurst generalizado – obtido na etapa cinco do método – que está relacionado à determinação do grau de regressão e à dimensão multifractal.

Dada uma série temporal de formato $x_k = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, em que N representa seu comprimento, ou seja, a quantidade de observações presente na série. O primeiro passo consiste em determinar o seu perfil através da equação 12:

$$Y(i) \equiv \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

em que $\langle x \rangle$ representa a média das observações da série x_k e $Y(i)$ será a nova série resultante, essa etapa consiste em remover a tendência da série.

Após a primeiro passo, no segundo passo deve-se dividir a série $Y(i)$ em $N_s \equiv \text{Inteiro}(N/s)$ segmentos de intersecção nula e de igual comprimento s . Como o comprimento N da série frequentemente não é um múltiplo da escala temporal s , sobrarã alguma porção no final. A fim de levar em conta esta parte, repete-se o mesmo procedimento partindo do final para o começo da série. Assim, teremos $2N_s$ segmentos no total. Com o comprimento N da série sendo sua quantidade de pontos e a escala temporal s é determinada conforme a série a ser estudada e os objetivos buscados.

O terceiro passo consiste em calcular a tendência local para cada um dos $2N_s$ segmentos por uma regressão de mínimos quadrado na série e, então, determinar a variância:

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (13)$$

para cada segmento $v, v = 1, \dots, N_s$ e

$$F^2(s, v) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (14)$$

para $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$.

Aqui, $y_v(i)$ é o polinômio de regressão para determinar a tendência local em cada segmento v . Em todo o trabalho utilizamos para regressão apenas polinômios de primeiro grau, pois como afirma Fernandes e Da Silva Filho (2019) “não há vantagem qualitativa ou quantitativa ao se usarem polinômios de regressão de graus maiores do que um para séries financeiras” (p. 56).

No quarto passo pode-se notar na equação 15 que o componente $[F^2(s, v)]^{\frac{q}{2}}$ é a função de variância de cada segmento v de dados e dos diferentes segmentos s escolhidos. Calcula-se a média para todos os $2N_s$ segmentos, a fim de obter a função de flutuação de q -ésima ordem:

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (15)$$

onde, em geral, o índice q pode tomar qualquer valor, exceto zero. Para $q = 2$ recupera-se o método padrão DFA. Daqui os passos 2 a 4 devem ser repetidos para as várias escalas temporais s . Quando $q = 0$ a equação 15 deve ser substituída pela equação 16:

$$F_0(s) \equiv \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(s, v)] \right\} \quad (16)$$

Determina-se, no quinto passo, o comportamento de escala da função de flutuação, analisando os gráficos log-log de $F_q(s)$ contra s para cada valor de q .

$$F_q(s) \sim s^{H(q)} \quad (17)$$

onde a função $H(q)$ é o expoente de Hurst generalizado. No sexto passo a equação 17 pode ser escrita como $F_q(s) = As^{H(q)}$, de onde obtemos, após aplicar a propriedade logarítmica em ambos os lados:

$$\text{Log}F_q(s) = \log(A) + H(q)\log(s) \quad (18)$$

Para séries temporais estacionárias, $H(2)$ é idêntico ao expoente de Hurst (H); por este motivo, $H(q)$ é chamado de Hurst generalizado. O expoente de Hurst generalizado $H(q)$, definido na equação 17, relaciona-se com o expoente de escala $t(q)$, definido pela função de partição, no formalismo multifractal. Esta relação é computada por:

$$t(q) = qH(q) - 1 \quad (19)$$

É possível, ainda, relacionar $H(q)$ com a dimensão multifractal generalizada $D(q)$:

$$D(q) \equiv \frac{t(q)}{q-1} = \frac{qH(q) - 1}{q-1} \quad (20)$$

Finalmente, pode-se definir o expoente de singularidade de ordem q , $h(q)$, como a taxa de variação de $t(q)$ em relação a q .

$$h(q) = \frac{dt(q)}{dq} \quad (21)$$

Cabe ressaltar que $H(q)$ e $h(q)$ são as medidas de multifractalidade obtidas com a utilização do método MFDFA, esses parâmetros de escala que são analisados nessa e em outras pesquisas. O $H(q)$ é associado ao expoente de Hurst e representa o grau de correlação da série, sendo que as correlações de longo alcance contribuem para evidenciar o comportamento multifractal. E o $h(q)$ é associado ao expoente de singularidade, representa a cauda das distribuições (grossa ou fina), tendo a cauda grossa contribuição para o espectro multifractal.

Durante o desenvolvimento da pesquisa será utilizada a notação $MF1$ (primeiro parâmetro multifractal), que é obtida através da seguinte equação:

$$MF1 = \text{máx}[H(q)] - \text{mín}[H(q)] \quad (22)$$

A mesma situação acontece para a notação $MF2$ (segundo parâmetro multifractal), obtida através da diferença do valor máximo e do valor mínimo do expoente de escala multifractal.

$$MF2 = \text{máx}[h(q)] - \text{mín}[h(q)] \quad (23)$$

Para esta pesquisa utilizou-se o intervalo de -3 a 3 nos valores de q na equação 15, e para uma padronização da pesquisa os comprimentos s de tamanho de escala escolhidos no segundo passo para as janelas deslizantes, variam de 10 a 274, em intervalos de 8 em 8. Já para o cálculo do MF DFA para as séries completas utilizou-se segmentos s , variando de 10 a um quarto do tamanho da amostra, em intervalos de 20 em 20.

2.5 – Medidas de erro e dispersão

Para a seleção da métrica de desempenho da precisão, de acordo com a literatura, algumas métricas já foram propostas e analisadas para avaliar a previsão, entretanto nenhuma medida foi reconhecida como padrão universal, Li & Shi (2010). Para este estudo, utilizou-se o MAPE (*mean absolute percentage error*) por ser uma medida frequentemente utilizada que mede erro percentual absoluto médio, ou seja, o quanto as previsões estão se distanciando das observações reais. Quanto menor o valor do MAPE, melhor são as previsões do modelo utilizado. De acordo com Makridakis (1997), sua equação é definida como:

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{|erro_i|}{X_i}}{n} \times 100\% \quad (24)$$

em que $|erro_i|$ é o módulo da diferença entre o dado previsto X'_i e o dado real X_i da série e n é o número de observações da série. Cabe ressaltar que além do MAPE, outras medidas poderiam ser utilizadas como, por exemplo, o RMSE (*root-mean-square error*).

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Com o uso do método MDFA buscou-se evidenciar uma possível correlação entre os valores dos parâmetros multifractais e os valores do MAPE obtidos na verificação da acurácia entre previsões e observações reais. Neste capítulo será explicada toda a organização do processo metodológico, ou seja, quais séries foram utilizadas, a forma que se dividiu as séries em sub-janelas deslizantes, critérios estabelecidos para o tamanho das janelas de previsão, critérios para a divisão dos intervalos dos expoentes de escala multifractal, processo de análise e métodos utilizados, e o software utilizado para programação e obtenção dos resultados.

3.1 DADOS

Para o desenvolvimento desta pesquisa utilizaram-se várias séries financeiras de diferentes segmentos econômicos, como: índices de bolsa de valores mundiais, ações internacionais, ações nacionais, séries de comparação entre moedas mundiais, séries de preços de commodities e séries de preços de alguns índices de renda fixa. As séries de índices de bolsa de valores, das ações internacionais, das ações nacionais e taxas de câmbio foram baixadas da plataforma Thomsom Reuters, todas em frequência diária. Já as séries de commodities e de renda fixa foram encontradas e baixadas no site da Cepea-Esalc-USP e da plataforma Economática, respectivamente, todas também em frequência diária.

O critério de escolha das séries foi a diversificação de ativos e o número de observações que cada uma possui. Como pode ser visto em Ihlen (2012), para rodar o método MF DFA é necessário ter uma grande quantidade de informações históricas disponíveis, assim foram utilizadas séries com mais de 4000 dados. Abaixo estão quais séries foram utilizadas, a quantidade de observações, o período de coleta e a moeda de cotação.

- Índices:
 1. **AEX** – Índice da bolsa de Amsterdam – USD – Com 5383 observações diárias de 28/06/2001 a 14/06/2022;
 2. **FTSE** – Índice de 100 ações representativas da bolsa de Valores de Londres – USD – Com 5219 observações diárias de 28/06/2001 a 24/06/2022;
 3. **HSI** – Índice da bolsa de valores de Hong Kong – USD – Com 4993 observações diárias de 02/04/2002 a 24/06/2022;
 4. **Ibovespa** – Índice da bolsa de valores de São Paulo – USD – Com 5234 observações diárias de 23/04/2001 a 24/06/2022, e

5. **TOPX** – Índice de bolsa de valores de Tóquio – USD – Com 5143 observações diárias de 28/06/2001 a 24/06/2022.
- Commodities:
 1. **Boi gordo** – Indicador do boi gordo CEPEA/B3 – BRL – Com 6210 observações de 23/07/1997 a 13/07/2022;
 2. **Café Arábica** – Indicador do café arábica CEPEA/ESALQ – BRL – Com 6438 observações de 02/09/1996 a 13/07/2022;
 3. **Café Robusta** – Indicador do café robusta CEPEA/ESALQ – BRL – Com 5104 observações de 08/11/2001 a 13/07/2022;
 4. **Milho** – Indicador do milho ESALQ/BM&FBOVESPA – BRL – Com 4468 observações de 02/08/2004 a 13/07/2022, e
 5. **Soja** – Indicador da soja CEPEA/ESALQ – Paraná – BRL – Com 6215 observações de 29/07/1997 a 13/07/2022.
 - Ações internacionais:
 1. **AMZN** – Amazon empresa multinacional de tecnologia norte-americana – USD – Com 6332 observações de 15/05/1997 a 18/07/2022;
 2. **APPL** – Apple empresa multinacional de tecnologia norte-americana – USD – Com 4992 observações de 18/09/2002 a 18/07/2022;
 3. **ATVI** – Activision empresa considerada principal desenvolvedora, editora e distribuidora mundial de entretenimento interativo e produtos em consoles, celulares e computadores – USD – Com 6411 observações de 31/12/1996 a 18/07/2022;
 4. **NTLX** – Netflix é uma provedora global de filmes e séries de televisão via streaming – Com 5078 observações de 23/05/2002 a 18/07/2022, e
 5. **WBD** - A Warner Bros. Entertainment., é um conglomerado de mídia americano – USD – Com 4271 observações de 21/07/2005 a 18/07/2022.
 - Ações nacionais:
 1. **BBDC3** – Ação ordinária do Banco do Bradesco, uma instituição financeira bancária brasileira – BRL – Com 5185 observações de 28/06/2001 a 24/06/2022;
 2. **BBDC4** – Ação preferencial do Banco do Bradesco, uma instituição financeira bancária brasileira – BRL – Com 5185 observações de 28/06/2001 a 28/06/2022;
 3. **ITUB3** – Ação ordinária do Banco Itaú, o maior banco privado do Brasil e maior conglomerado financeiro do hemisfério sul – BRL – Com 4916 observações de 02/07/2001 a 24/06/2022;

4. **ITBU4** – Ação preferencial do Banco Itaú, o maior banco privado do Brasil e maior conglomerado financeiro do hemisfério sul – BRL – Com 5204 observações de 13/06/2001 a 24/06/2022, e
 5. **PETR3** – Ação ordinária do Petrobrás, uma empresa petrolífera brasileira – BRL – Com 5242 observações de 23/04/2001 a 24/06/2022.
- Renda fixa:
 1. **IMA-B** – Formado por títulos públicos indexados à inflação medida pelo IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo), que são as NTN-Bs (Notas do Tesouro Nacional – Série B ou Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais) – Pontos de Índice – Com 4729 observações de 16/09/2003 a 13/07/2022;
 2. **IMA-G** – Formado por todos os títulos que compõem a dívida pública – Pontos de Índice – Com 5175 observações de 04/12/2001 a 13/07/2022, e
 3. **Imag-ex-c** – Segue a lógica do IMA-Geral, ou seja, formado por todos os títulos que compõem a dívida pública, excluindo os papéis indexados ao IGP-M (as antigas NTN-C - Notas do Tesouro Nacional – Série C ou Tesouro IGPM+ com Juros Semestrais) – Pontos de Índice – Com 4341 observações de 31/03/2005 a 13/07/2022.
 - Câmbio:
 1. **BRL-USD** – Abreviação para o par dólar-real. Mede quanto vale 1 USD (a moeda base) em relação ao BRL (a moeda cotada ou moeda secundária) – Com 3909 observações de 28/06/2001 a 24/06/2022;
 2. **EUR-USD** – Abreviação para o par dólar-euro. Mede quanto vale 1 USD (a moeda base) em relação ao EUR (a moeda cotada ou moeda secundária) – Com 5476 observações de 28/06/2001 a 24/06/2022;
 3. **GBP-EUR** – Abreviação para o par euro-libra. Mede quanto vale 1 EUR (a moeda base) em relação ao GBP (a moeda cotada ou moeda secundária) – Com 5473 observações de 28/06/2001 a 24/06/2022;
 4. **JPY-EUR** – Abreviação para o par euro- iene japonês. Mede quanto vale 1 EUR (a moeda base) em relação ao JPY (a moeda cotada ou moeda secundária) – Com 5473 observações de 28/06/2001 a 24/06/2022, e
 5. **JPY-USD** – Abreviação para o par dólar- iene japonês. Mede quanto vale 1 USD (a moeda base) em relação ao JPY (a moeda cotada ou moeda secundária) – Com 5474 observações de 28/06/2001 a 24/06/2022.

3.2 ORGANIZAÇÃO DAS JANELAS

Para a operacionalização da análise utilizaram-se janelas deslizantes para o processamento e obtenção de resultados nas 28 séries, o que significa que cada série de ativo foi subdividida em séries menores (que são as janelas deslizantes), com a finalidade de identificar o comportamento das séries estudadas com base em vários intervalos diferentes, técnica que, segundo Da Silva Filho, Maganini e Almeida (2018); Ramirez, Rodrigues e Valdez (2018); Telli e Chen (2020); Cho e Lee (2022), entre outros autores, é muito utilizada na literatura para estudar a evolução das séries.

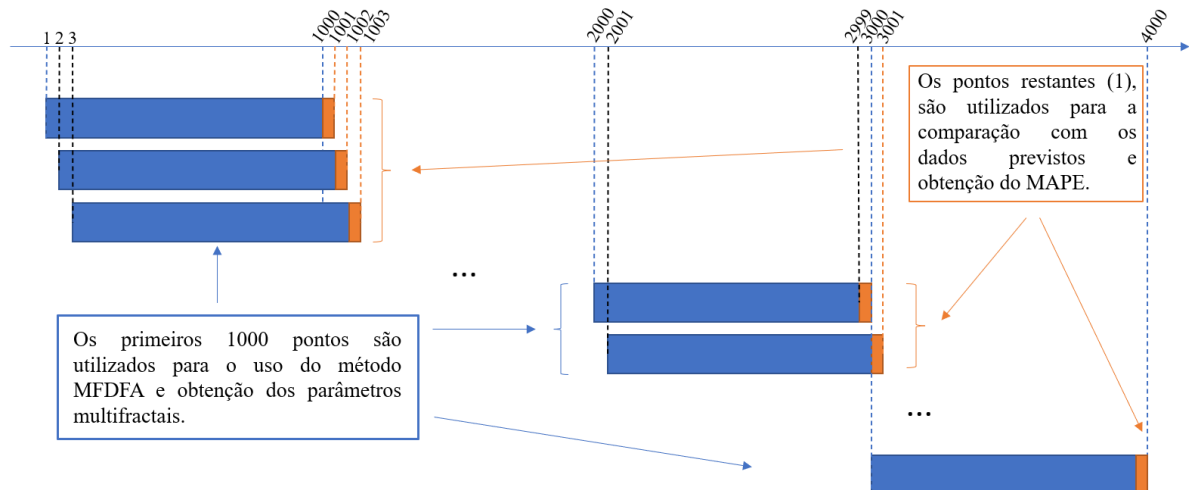
Para a escolha do tamanho e organização das janelas, três características foram levadas em consideração: tamanho mínimo para a aplicação do método MF DFA (1000 valores), espaçamentos entre as janelas, que serão chamados, nesse trabalho, de *gaps* e quantidades de valores a serem previstos. As janelas foram definidas a partir de seis modos distintos para serem analisadas. Os primeiros 1000 valores são utilizados para o cálculo dos parâmetros multifractais. Já a quantidade de valores utilizados para as previsões varia conforme o método: para o método Naive é utilizado apenas o valor anterior ao valor a ser predito e para o método GARCH são utilizados todos os valores anteriores, a partir do início da janela, ao valor a ser predito. As figuras 5 a 7 esquematizam estes procedimentos.

Para melhor ilustração de como as janelas foram organizadas e as formas de análise, consideremos uma série fictícia de 4000 observações. Os seis modos seriam, então:

1. Janelas com 1001 observações e *gap* de 0, ou seja, o início de cada nova janela é imediatamente depois do início da janela anterior.

Ex: (1 ao 1001), (2 ao 1002), (3 ao 1003), ..., (3000 ao 4000), conforme pode ser visto na figura 5.

Figura 5 – Divisão de janelas com 1001 observações e *gap* de 0.



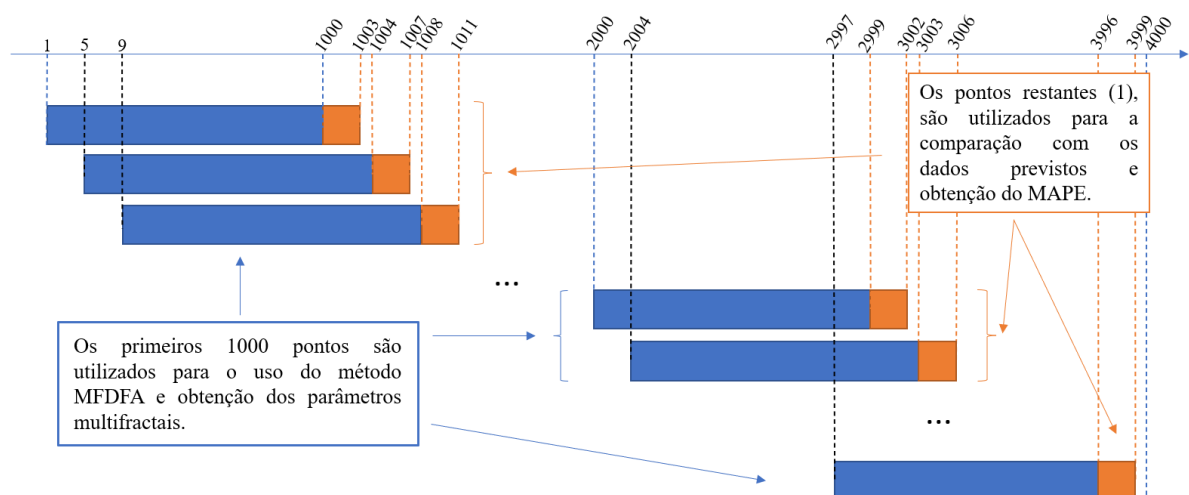
2. Janelas com 1001 observações e *gap* de 1, ou seja, entre os inícios de duas janelas adjacentes há um valor que é desconsiderado.

Ex: (1 ao 1001), (3 ao 1003), (5 ao 1005), ..., (2999 ao 3999).

3. Janelas com 1003 observações e *gap* de 3, ou seja, entre os inícios de duas janelas adjacentes há três valores que são desconsiderados.

Ex: (1 ao 1003), (5 ao 1007), (9 ao 1011), ..., (2997 ao 3999), conforme pode ser visto na figura 6.

Figura 6 – Divisão de janelas com 1003 observações e *gap* de 3.



4. Janelas com 1005 observações e *gap* de 5, ou seja, entre os inícios de duas janelas adjacentes há cinco valores que são desconsiderados.

Ex: (1 ao 1005), (7 ao 1011), (13 ao 1017), ..., (2995 ao 3999).

5. Janelas com 1010 observações e *gap* de 10, ou seja, entre os inícios de duas janelas adjacentes há dez valores que são desconsiderados.

Ex: (1 ao 1010), (12 ao 1021), (23 ao 1032), ..., (2982 ao 3991).

6. Janelas com 1021 observações e *gap* de 21, ou seja, entre os inícios de duas janelas adjacentes há vinte e um valores que são desconsiderados.

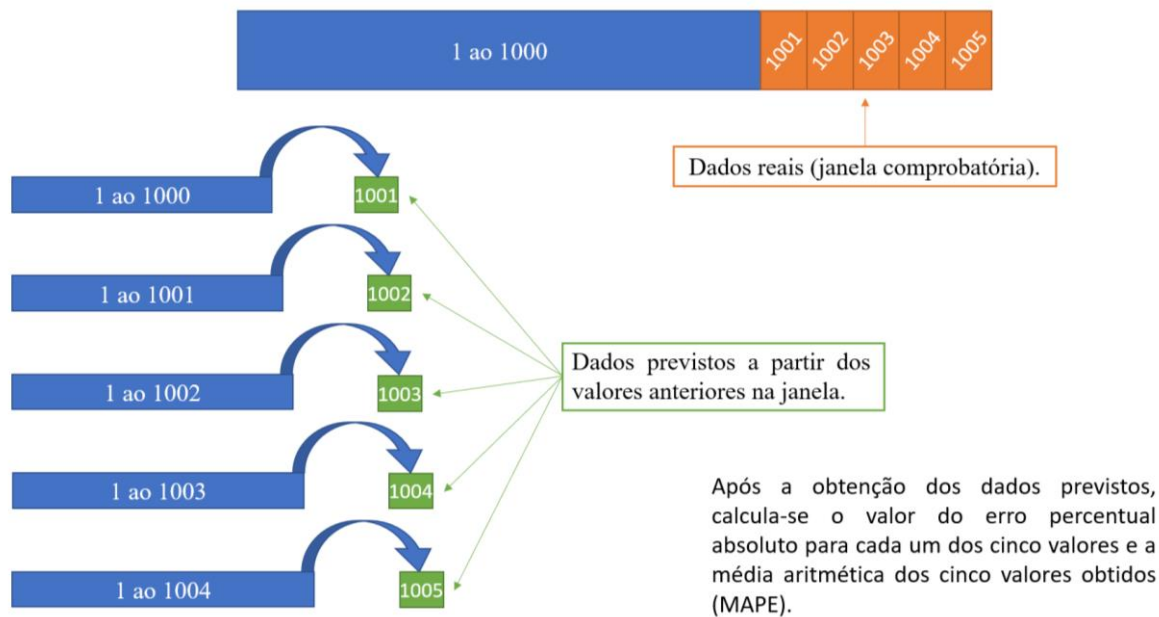
Ex: (1 ao 1021), (23 ao 1043), (45 ao 1065), ..., (2971 ao 3991).

Na escolha do tamanho das janelas e dos *gaps*, levou-se em consideração para a execução do método MF DFA, a quantidade mínima de 1000 valores por janela, conforme feito por Lópes e Contreras (2013) em seu trabalho, em que os autores mostram que é possível calcular a multifractalidade a partir de cerca de 1000 pontos.

O restante das observações das janelas (1, 1, 3, 5, 10 e 21), foram estabelecidos para a comparação entre as previsões e dados reais, podendo ser chamada da parte comprobatória de cada janela. Pode-se notar que, com exceção dos dois primeiros modos, todos os outros terão um tamanho distinto de pontos a serem previstos: a escolha dos intervalos de previsão deu-se na possibilidade de um investidor ou analista querer prever o mercado no período de um dia (1), três dias (3), uma semana (5), uma quinzena (10) ou um mês (21), sendo a quantidade de observações uma aproximação de dias úteis de cada situação. Cabe lembrar que quanto maior são os intervalos de previsão, maiores serão os erros e, dado que não existem abordagens semelhantes a que está sendo feita neste trabalho, escolheu-se o período de um mês (21 dias úteis, em média) como a quantidade máxima de pontos a serem previstos em cada janela.

Todas as previsões, seja com o método Naive, seja com o método GARCH, foram feitas para um passo à frente (apenas um valor previsto de cada vez). Assim, para as janelas de $1000+k$ valores, foram previstos k valores. Para cada um desses k valores foi feita a comparação com o valor real e calculado o erro percentual absoluto. A seguir, foi calculada a média aritmética desses k valores de erro, ou seja, o MAPE correspondente a cada janela. Dessa maneira, cada janela fornece dois valores de parâmetros multifractais e um valor para o MAPE. Um exemplo desse protocolo pode ser visto na figura 7 a seguir:

Figura 7 – Esquema de previsão de um passo para janelas de 1005 valores.



3.3 PREVISÕES

Todas as análises foram realizadas com o auxílio do software livre R®, através do ambiente integrado de desenvolvimento RStudio®. Entre os pacotes básicos e específicos para análise de séries temporais foram utilizados os seguintes pacotes: “dgof”, “fBasics”, “fGarch”, “FinTS”, “forecast”, “fpp2”, “graphs”, “MTS”, “quantmod”, “stats”, “strucchange”, “tseries” e “urca”.

Dentre os modelos de previsão selecionados para essa pesquisa, o modelo autorregressivo condicionado à heterocedasticidade generalizada (GARCH), é o que exige mais pressupostos em relação ao modelo Naive, que não exige nenhuma pré-condição da série ao ser utilizado. Para a modelagem GARCH faz-se necessário que a série atenda aos seguintes requisitos:

- Não apresentar normalidade em seus resíduos;
- Ser estacionária, ou seja, não possuir raízes unitárias, e
- Ter heterocedasticidade em seus resíduos.

Após a seleção das séries e divisão em sub-janelas, para rodar a análise das previsões com o modelo GARCH, realizou-se o teste de Jarque e Bera (1980) para avaliar a normalidade da série, o teste de Dickey e Fuller (1979) para testar a estacionariedade e o teste ARCH-LM (Multiplicador de Lagrange) de Engle (1982) para verificar a existência de

heterocedasticidade condicionada. As janelas que não atenderam nenhum dos três pressupostos foram descartadas para a análise do modelo GARCH.

O teste de Jarque-Bera baseia-se na assimetria dos dados x_1, x_2, \dots, x_n e na diferença entre o coeficiente de curtose e o coeficiente de distribuição normal para testar a hipótese nula de que as amostras são retiradas de uma distribuição normal Jarque & Bera (1980).

A seguir, tem-se a equação 25 que representa o modelo:

$$JB = n \left[\frac{S^2}{6} + \frac{(C - 3)^2}{24} \right] \quad (25)$$

onde JB é o teste de Jarque-Bera, S é o coeficiente de assimetria observado; C é o coeficiente de curtose observado e n é o número de observações. Se o p-value da estatística qui-quadrado calculado for abaixo de 5% ($p < 0,05$), a suposição de que os resíduos têm uma distribuição normal pode ser rejeitada. Caso contrário, p-value maior que 5%, a suposição de normalidade é aceita.

O modelo proposto por Dickey e Fuller (1979) é utilizado para verificar a existência ou não de raízes unitárias nas séries temporais, através da equação 26.

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (26)$$

sendo ΔY_t o operador de diferenças ($Y_t - Y_{t-1}$), α uma constante, β o coeficiente de tendência do modelo que permite testar a estacionariedade, γ o coeficiente da presença de raiz unitária, $\sum_{i=1}^p \delta_i \Delta Y_{t-1}$ são as defasagens incluídas no modelo, e ε_t é o termo de erro aleatório.

O teste de heterocedasticidade, assim como os modelos de previsão Naive e GARCH já foram descritos e apresentados no capítulo anterior, no item de técnicas e métricas de previsão; em sequência são estimados os componentes de autocorrelação (AR) e de médias moveis (MA), para o cálculo das previsões utilizando o modelo GARCH. Para o modelo de previsão Naive não é necessário realizar testes prévios, apenas as previsões.

3.4 PARÂMETROS E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Primeiramente, como muito presente na literatura para a execução do método MFDFA, é necessário calcular os retornos logarítmicos dos ativos. A maioria das pesquisas financeiras, segundo Fernandes et al. (2022), concentra-se na análise de séries de retorno, em oposição às séries de preços de ativos. Tal explicação tem como base que as informações sobre retornos são dos interesses dos investidores, e as séries de retornos têm características estatísticas mais interessantes do que as séries de preços. A equação 27 representa a equação do log-retorno.

$$x_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) \quad (27)$$

sendo p_t o preço do ativo no período t , e x_t a série dos retornos do período.

Após o cálculo dos parâmetros multifractais MF1 e MF2 e obtenção do valor da medida de erro MAPE, a partir das previsões estimadas com os modelos Naive e GARCH em todas as janelas deslizantes, foi feita a análise de correlação entre a multifractalidade e o MAPE de cada janela deslizante, sendo esse o ponto chave da pesquisa. A apresentação da análise foi dividida em 4 etapas.

A primeira etapa consiste em uma análise gráfica de correlação entre:

- O valor do MAPE obtido com as previsões de um passo através do modelo Naive e o parâmetro multifractal MF1;
- O valor do MAPE obtido com as previsões de um passo através do método Naive e o parâmetro multifractal MF2;
- O valor do MAPE obtido com as previsões de um passo através do método GARCH e o parâmetro multifractal MF1;
- O valor do MAPE obtido com as previsões de um passo através do método GARCH e o parâmetro multifractal MF2;

Para a segunda etapa, inicialmente obteve-se a média geral dos MAPes de cada um dos seis modos de previsão a partir da média aritmética dos MAPes de suas respectivas janelas deslizantes, assim obtendo um valor de MAPE geral para cada um dos seis modos. Após o cálculo das médias gerais dos MAPes, com o intuito de uma análise local criou-se intervalos de escala multifractal (MF1 e MF2) a partir da divisão da diferença do maior e do menor valor dos parâmetros multifractais (MF1 e MF2) – dentre os valores obtidos nas janelas deslizantes de cada um dos seis modos de previsão – em 20 partes iguais. Assim obteve-se em cada um dos seis modos de previsão 20 intervalos de mesmo tamanho para o parâmetro MF1 e outros 20

intervalos para o parâmetro MF2, nota-se que esses intervalos serão distintos quando comparado os modos de previsão e os parâmetros multifractais.

Com os intervalos definidos calculou-se a média aritmética dos MAPEs entre as janelas deslizantes pertencentes a cada intervalo de multifractalidade – ou seja, foram obtidos 20 valores de média para cada parâmetro multifractal (MF1 e MF2) em cada um dos seis modos de previsão – com o intuito de verificar quais regiões a média local dos MAPEs ficaria acima ou abaixo da média geral. A decisão da divisão dos intervalos em 20 partes iguais se deu na escolha de intervalos que não fossem muito pequenos ou grandes para a realização da análise.

Na terceira etapa foi feita uma análise percentual a partir da razão entre a quantidade de janelas deslizantes em cada intervalo de escala multifractal em relação a todas as janelas deslizantes de um modo de previsão. O processo foi feito para ambos os parâmetros multifractais (MF1 e MF2) e em todos os modos de previsão pela seguinte fórmula:

$$P_i = \frac{DP_i}{TP} \times 100 \quad (28)$$

com i sendo a posição do intervalo estudado (1 a 20); DP_i a quantidade de janelas deslizantes no intervalo i ; TP o total de janelas deslizantes do modo de previsão e P_i a porcentagem de janelas deslizantes em cada intervalo i em relação ao total de janelas deslizantes do modo de previsão. Os resultados obtidos nesta etapa estão disponíveis nos apêndices.

Na quarta e última etapa calculou-se o percentual de janelas deslizantes que seus MAPEs são menores do que a média geral (dos MAPEs) em relação ao total de janelas deslizantes em cada intervalos de escala multifractal. O processo foi realizado para ambos os parâmetros multifractais (MF1 e MF2) e em todos os modos de previsão pela seguinte fórmula:

$$PI_i = \frac{IO_i}{IT_i} \times 100 \quad (29)$$

com i sendo o intervalo estudado (1 a 20); IO_i a quantidade de janelas deslizantes que seus MAPEs são menores do que a média geral dos MAPEs no intervalo i ; IT_i o total de janelas deslizantes no intervalo i e PI_i a porcentagem de janelas deslizantes que possuem o valor de seus MAPEs abaixo da média geral (dos MAPEs) em relação ao total de janelas deslizantes em cada intervalo i de escala multifractal. Parte das análises obtidas nas etapas 3 e 4 estão disponíveis nos anexos.

4 RESULTADOS

Após a apresentação da metodologia e critérios escolhidos para a execução da pesquisa, neste capítulo são apresentadas todas as análises e resultados proveniente do que foi proposto. Cabe ressaltar que, como foram muitas séries analisadas, será apresentado apenas 1 gráfico de resultados para cada categoria de ativo, pois os gráficos servem apenas para uma visualização e compreensão do que será apresentado na principal análise deste trabalho.

4.1 CARACTERIZAÇÃO ESTATÍSTICA, PREÇOS E RETORNOS

A seguir temos a tabela 1, em que são apresentadas as estatísticas descritivas da série, assim como sua unidade monetária.

Tabela 1 – Séries utilizadas e estatísticas descritivas

Série	Média	Mediana	Máx.	Mín.	Desvio Padrão	Curtose	Assimetria	Unidade Monetária
Índices de bolsa de valores								
AEX	534,26	505,27	948,60	240,37	138,83	0,18	0,69	Pontos de índice – USD ¹
FTSE	9223,10	13989,57	4877,86	4877,86	1595,88	0,17	0,11	Pontos de índice – USD ¹
HSI	2696,99	2831,74	4241,23	1078,20	715,73	-0,60	-0,47	Pontos de índice – USD ¹
Ibovespa	20777,44	20709,71	44617,39	2121,35	10321,52	-0,64	0,14	Pontos de índice – USD ¹
TOPX	12,14	12,06	19,32	6,42	2,74	-0,67	0,18	Pontos de índice – USD ¹
Commodities								
Boi gordo	104,89	85,87	352,05	25,71	73,17	2,10	1,53	BRL
Café – A	352,32	280,67	1555,19	101,48	236,83	7,97	2,49	BRL
Café – R	271,78	239,21	839,81	48,50	149,80	3,73	1,71	BRL
Milho	35,17	28,55	103,90	13,32	20,43	2,80	1,88	BRL
Soja	56,92	46,58	203,22	13,40	38,79	3,10	1,75	BRL
Ações internacionais								
AMZN	29,46	5,94	186,57	0,07	46,91	2,39	1,88	USD
APPL	31,16	16,60	182,01	23,43	41,25	3,07	1,96	USD
ATVI	21,75	10,28	102,99	0,42	26,01	0,49	1,34	USD
NTLX	117,10	26,32	691,69	0,37	168,20	1,06	1,50	USD
WBD	23,15	24,27	77,27	5,08	10,45	0,52	0,34	USD
Ações Nacionais								
BBDC3	9,50	7,14	28,35	0,72	6,88	-0,56	0,64	BRL
BBDC4	10,27	8,34	30,05	0,81	7,57	-0,37	0,78	BRL

ITUB3	11,50	8,47	30,63	0,99	8,22	-0,70	0,74	BRL
ITBU4	12,80	10,28	35,94	1,08	9,34	-0,53	0,78	BRL
PETR3	18,50	18,07	48,58	3,65	9,03	-0,57	0,32	BRL
Renda Fixa								
IMA-B	3673,35	3182,69	8454,51	723,07	2344,90	-0,89	0,63	BRL
IMA-G	2933,60	2552,23	6609,56	532,62	1852,89	-1,01	0,54	BRL
Imag-ex-C	3325,65	2863,59	6479,70	100	1698,22	-1,19	0,43	BRL
Taxas de Câmbio								
BRL-USD	0,39	0,39	0,65	0,17	0,15	-1,43	0,09	USD
EUR-USD	1,22	1,22	1,60	0,84	0,14	-0,02	-0,09	USD
GBP-EUR	1,28	1,21	1,68	1,02	0,16	-1,01	0,61	EUR
JPY-EUR	0,78	0,77	1,06	0,59	0,09	0,27	0,32	EUR
JPY-USD	0,95	0,92	1,32	0,73	0,13	0,63	1,18	USD

USD¹ - Significa que as séries são dolarizadas.

Após a caracterização estatística das séries, calculou-se os log-retornos e os gráficos de cotações de preços ou pontos de índice e retornos de algumas séries utilizadas nesta pesquisa. O ponto chave da análise dos gráficos de retornos e não o de preços, é a possibilidade de identificação de agrupamentos de volatilidade presentes na série.

Gráfico 1 – Índice de ações - Ibovespa – Brasil diário de 23/04/2001 a 24/06/2022. O gráfico da esquerda ilustra a série original, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

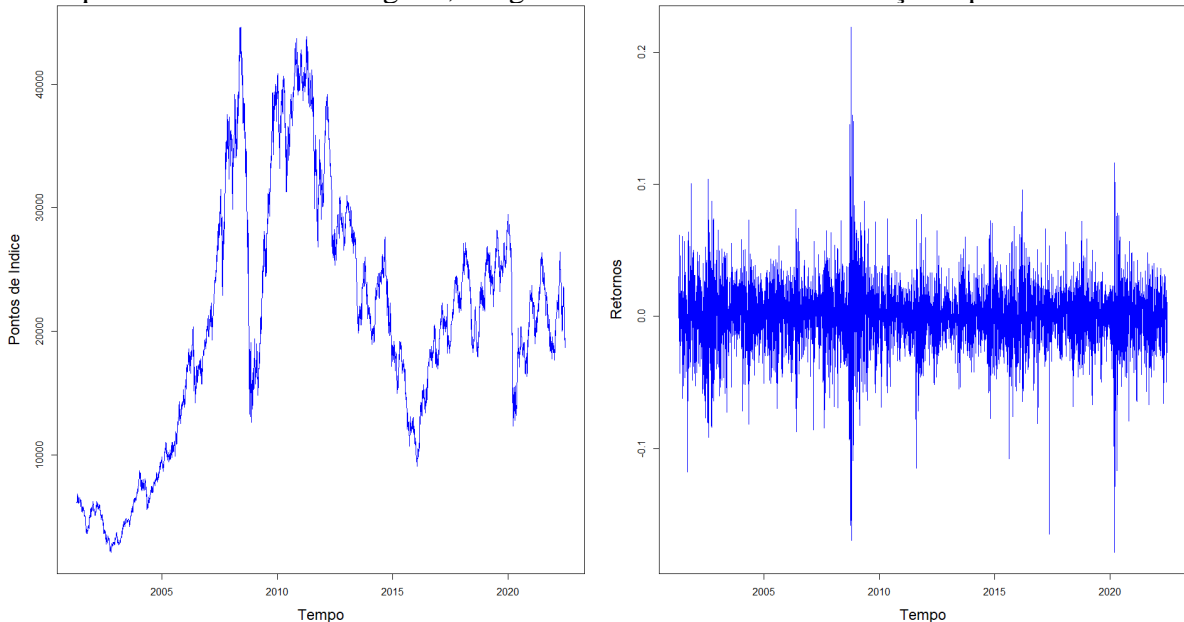


Gráfico 2 – Commodity – Café A. – Indicador do café arábica CEPEA/ESALQ diário de 02/09/1996 a 13/07/2022. O gráfico da esquerda ilustra a série original, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

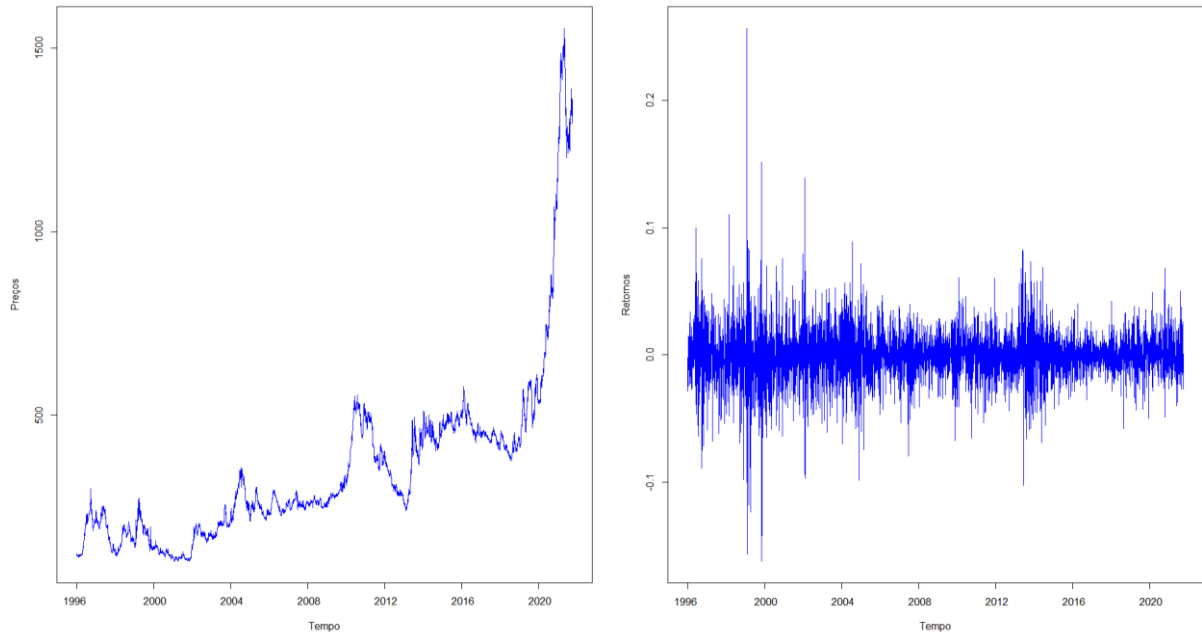


Gráfico 3 – Ação internacional - AMZN – Amazon diário de 15/05/1997 a 18/07/2022. O gráfico da esquerda ilustra a série original, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

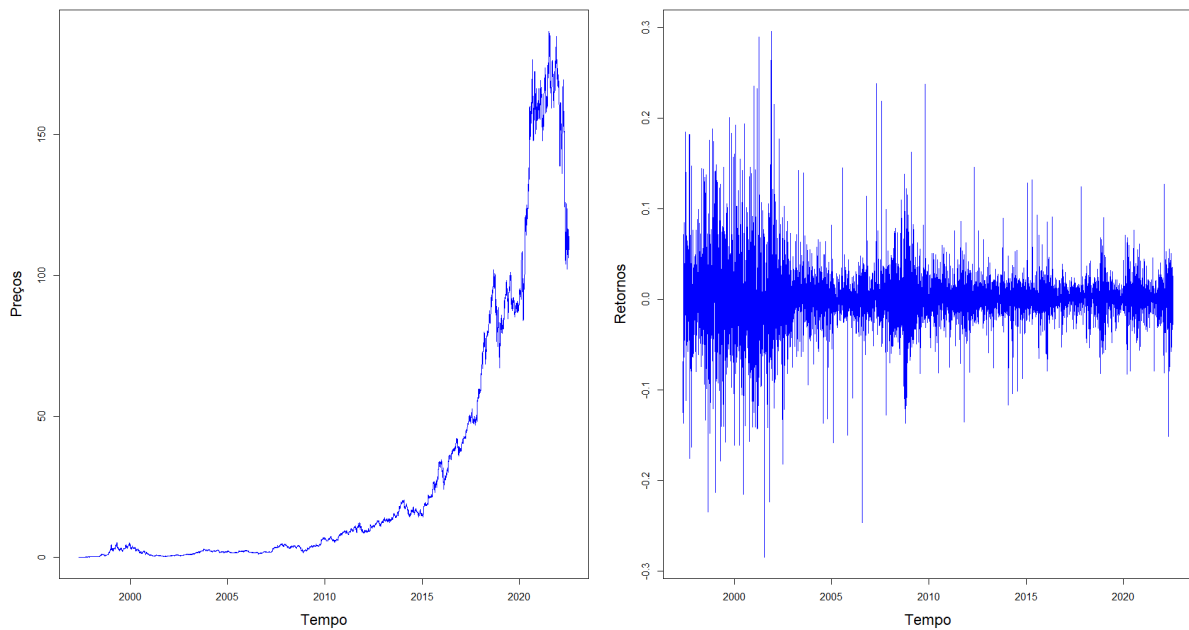


Gráfico 4 – Ação nacional - ITBU4 – Banco Itaú diário de 13/06/2001 a 24/06/2022. O gráfico da esquerda ilustra a série original, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

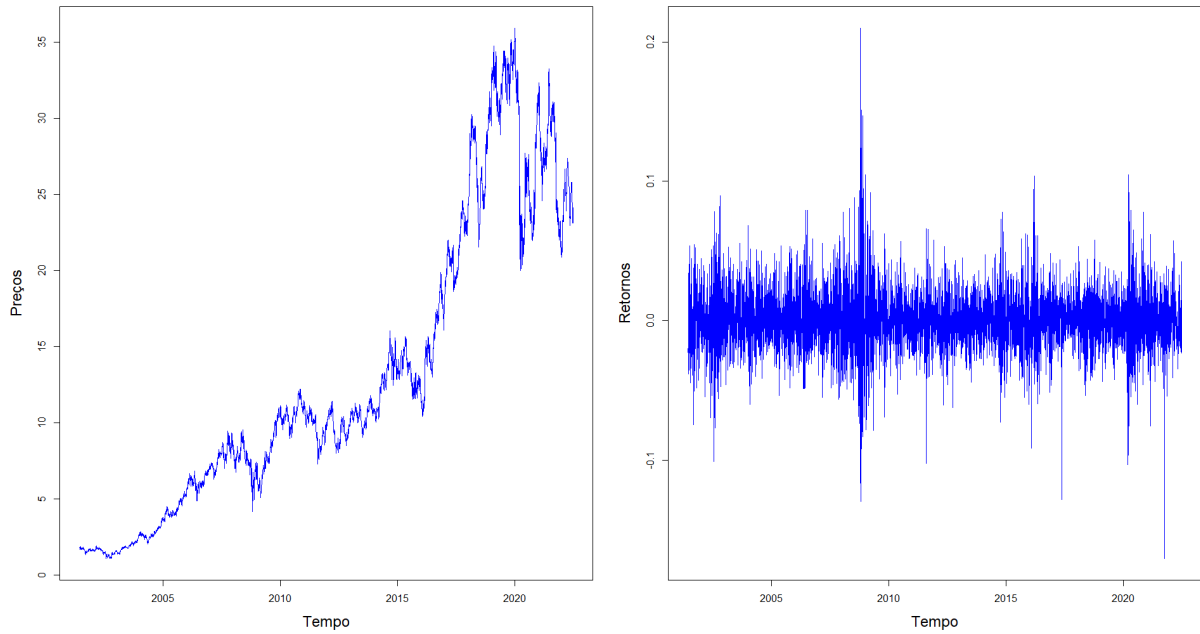


Gráfico 5 – Índice de renda fixa - IMA-B – Diário de 16/09/2003 a 13/07/2022. O gráfico da esquerda ilustra a série original, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.

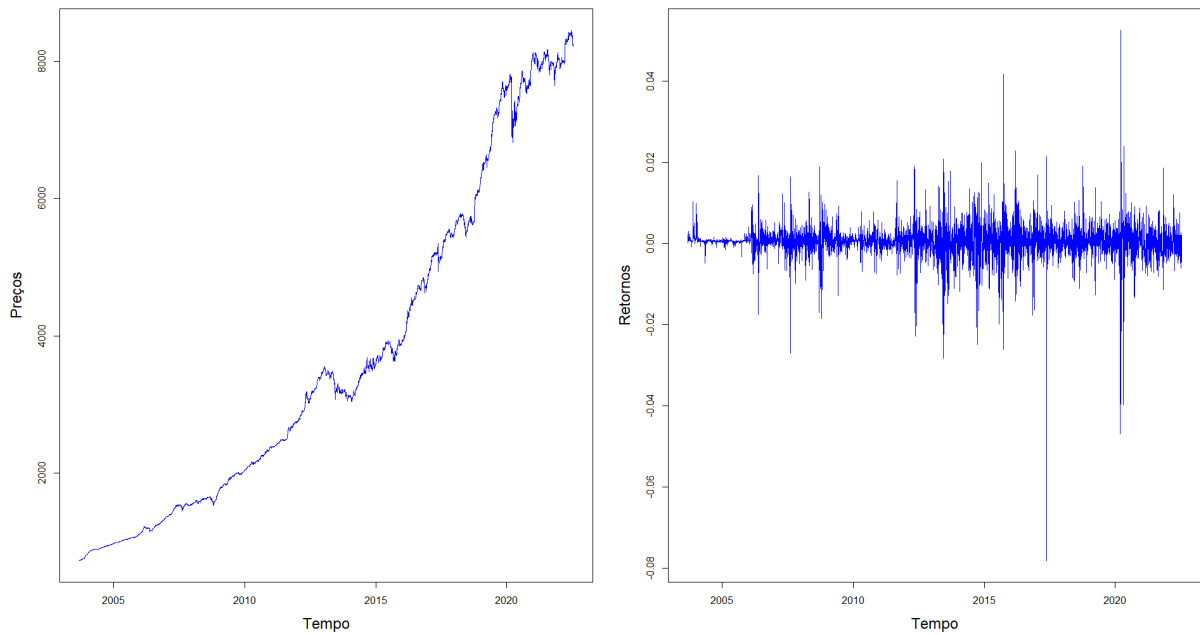
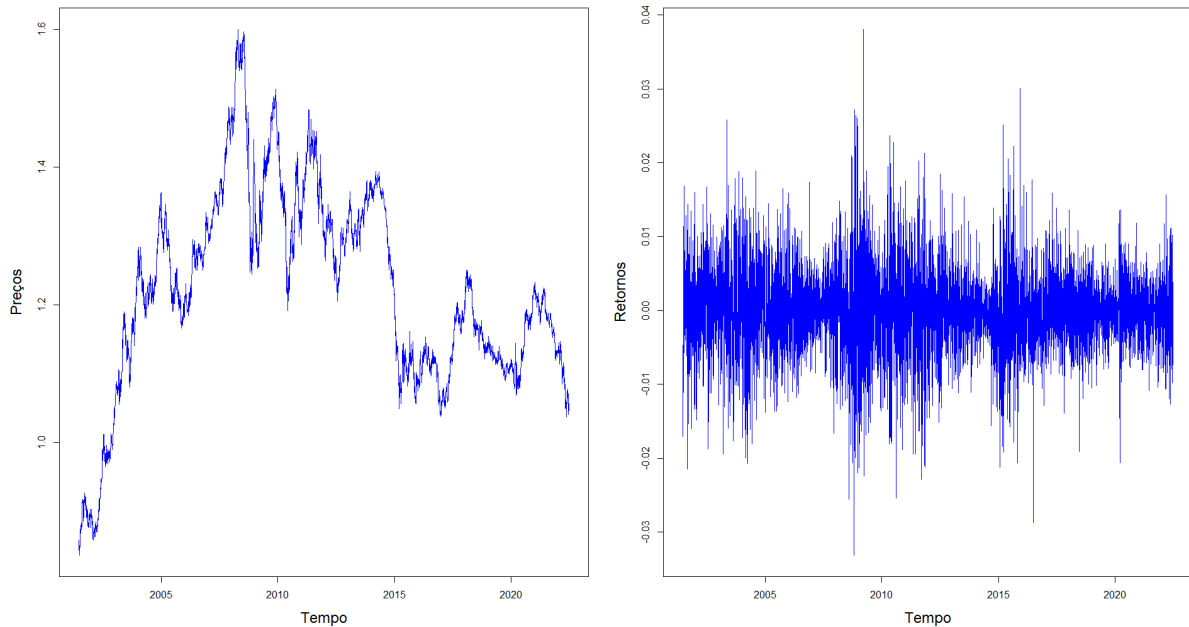


Gráfico 6 – Taxa de câmbio - EUR-USD – Euro-Dólar diário de 28/06/2001 a 24/06/2022. O gráfico da esquerda ilustra a série original, e o gráfico da direita sua distribuição a partir dos retornos.



Em geral, observa-se dois grandes agrupamentos de volatilidade, devidos à crise do Subprime dos EUA em 2009 e a recente pandemia em 2020, principalmente nos gráficos 1, 4 e 6. Nota-se que a taxa de câmbio EUR-USD, possui alta volatilidade com picos de volatilidade em períodos próximos a 2010, 2015 e 2020, e o índice renda fixa IMA-B, apesar de sua baixa volatilidade, traz grandes picos de variações em toda série, principalmente em eventos econômicos raros.

4.2 ANÁLISES DE CORRELAÇÃO ENTRE MULTIFRACTALIDADE E ERROS DE PREVISÃO

Da mesma que forma foi feito nos gráficos de preços e retornos, é utilizados apenas um gráfico para cada categoria de ativos para ilustrar as análises de correlação entre multifractalidade e acurácia dos erros de previsão (MAPE). As análises estão divididas em subitens desta seção, em que primeiramente são apresentados os gráficos em sequência e posteriormente suas análises.

4.2.1 Análise de correlação dos erros das previsões de um passo com o modelo Naive

Durante a análise gráfica, será notado nas figuras as notações: MAPE-1-Gap(0), MAPE-1-Gap(1), MAPE-3-Gap(3), MAPE-5-Gap(5), MAPE-10-Gap(10) e MAPE-21-Gap(21). A notação MAPE-X, em que a incógnita X pode ser substituída por 1, 3, 5, 10 e 21, significa que o MAPE daquela janela deslizante foi calculado a partir da média dos MAPes de 1, 3, 5, 10 ou 21 previsões. E a notação Gap(Y), em que Y pode ser substituído por 0, 1, 3, 5,

10 e 21, se refere a quantidade de valores que são desconsiderados entre os inícios das janelas deslizantes consecutivas. O objetivo dessa análise é observar as regiões que estarão com maiores concentrações de pontos, buscando assim identificar para quais intervalos de escala dos parâmetros MF1 e MF2 os valores dos MAPEs são menores.

Gráfico 7 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – FTSE – Modelo Naive - Previsões de um passo.

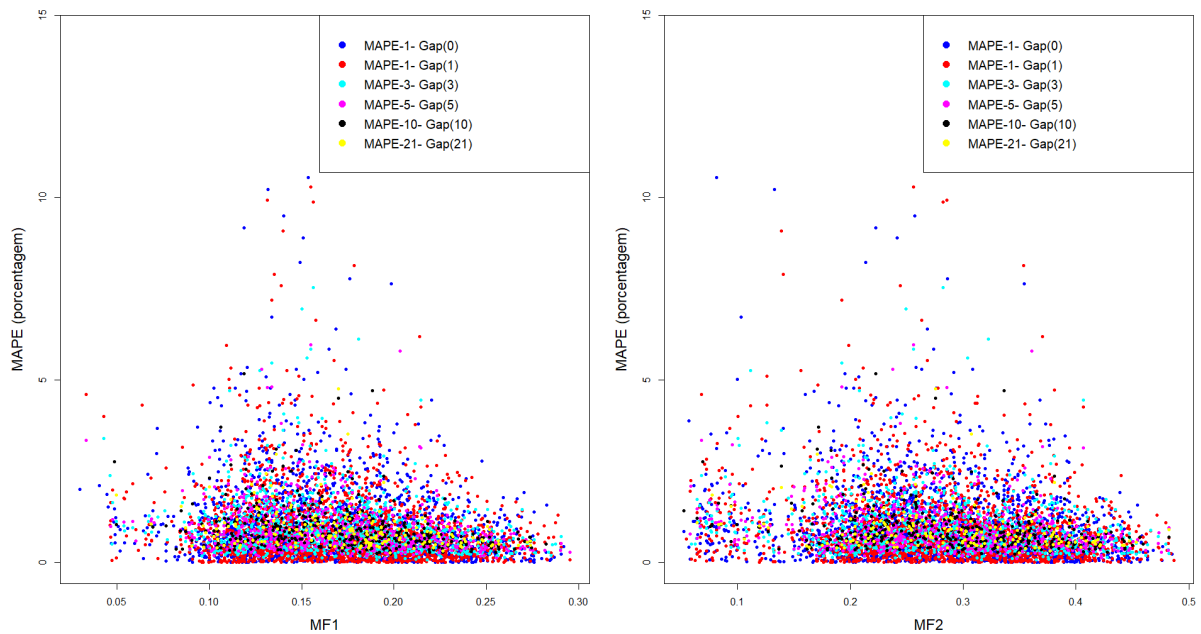


Gráfico 8 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – Café Robusta – Modelo Naive - Previsões de um passo.

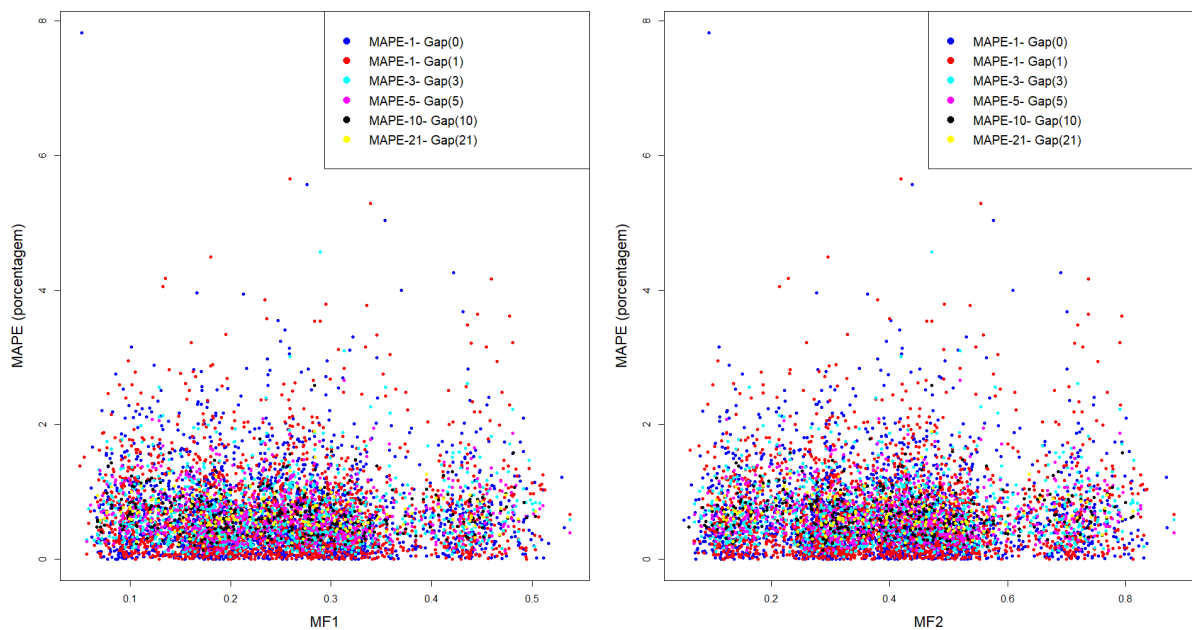


Gráfico 9 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – AMZN – Modelo Naive - Previsões de um passo.

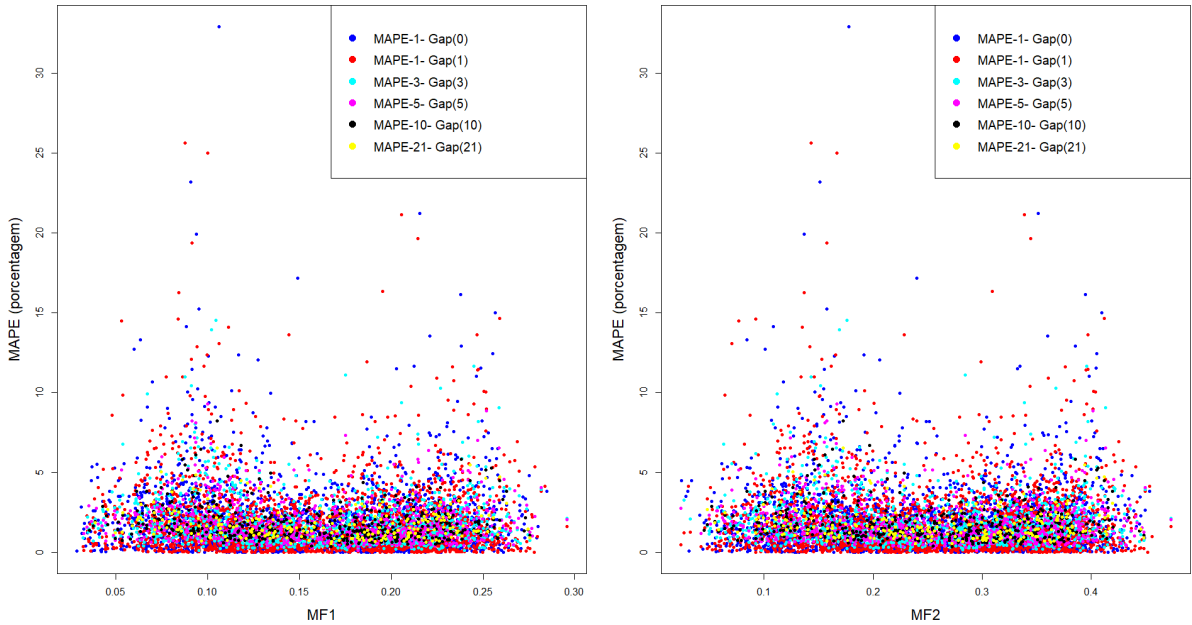


Gráfico 10 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – ITUB4 – Modelo Naive - Previsões de um passo.

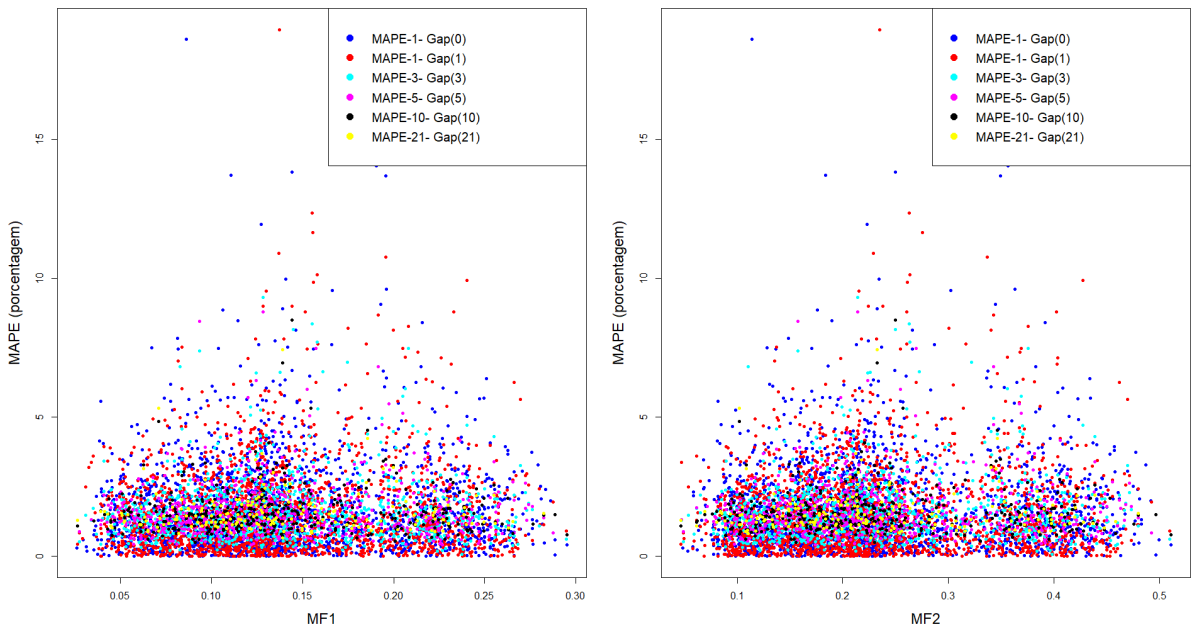


Gráfico 11 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – IMA-B – Modelo Naive - Previsões de um passo.

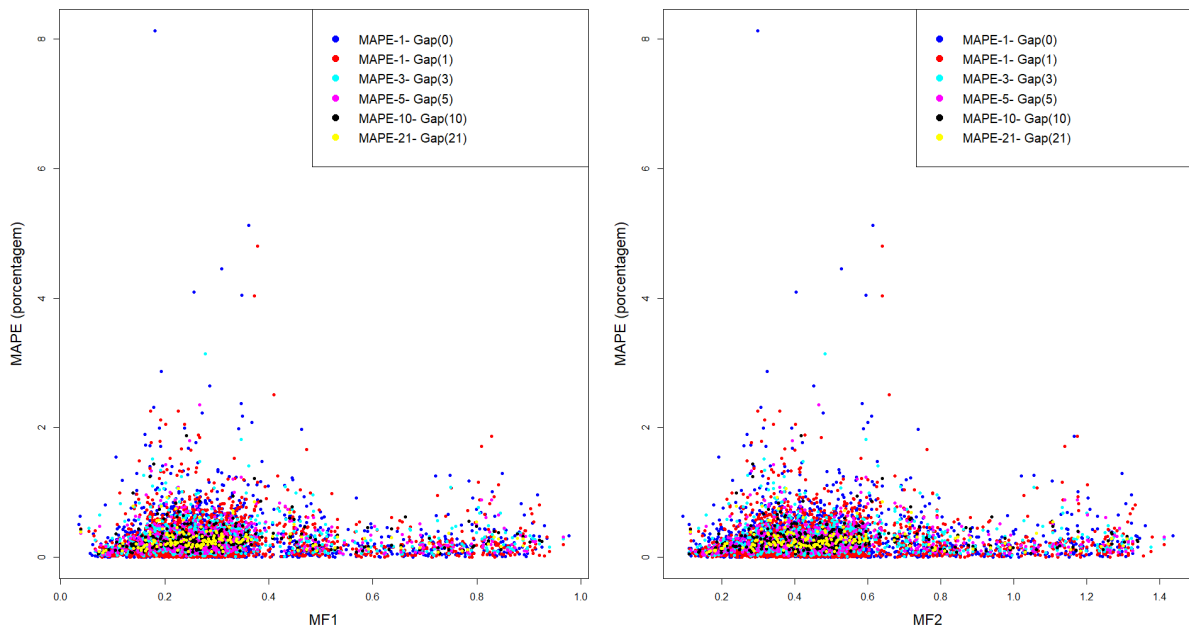
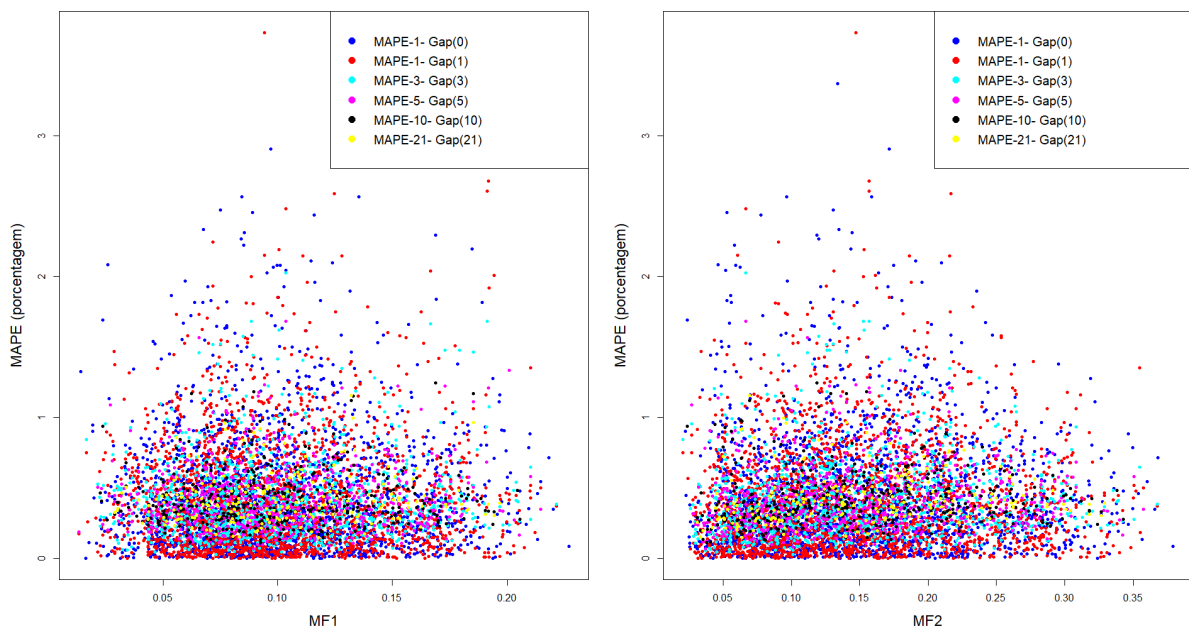


Gráfico 12 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – EUR-USD – Modelo Naive - Previsões de um passo.



Com base nas regiões observadas nos gráficos de análise de correlação entre os expoentes de escala multifractal (MF1 e MF2) e valores do MAPE, nota-se uma grande concentração de pontos para os valores próximos de 0% do MAPE correlacionados ao expoente MF1 nos intervalos:

- De 0.05 a 0.10 nos gráficos: 8 e 12;

- De 0.10 a 0.20 nos gráficos: 7, 9 e 10, e
- De 0.15 a 0.38 nos gráficos: 8, 11.

E ao expoente MF2 nos intervalos:

- De 0.05 a 0.15 no gráfico: 12;
- De 0.15 a 0.35 nos gráficos: 7, 8, 9 e 10, e
- De 0.20 a 0.60 no gráfico: 11.

Outro ponto observado a partir das análises gráficas é a recorrência de intervalos com maiores concentrações de pontos com valores do MAPE próximo a 0%. No expoente de correlação (MF1) isso acontece no intervalo de 0.10 a 0.20 e no expoente de singularidade (MF2) no intervalo de 0.20 a 0.30.

Cabe ressaltar que a análise gráfica é apenas para ilustrar a identificação de intervalos de parâmetros multifractais relacionados às previsões com baixos erros de previsão. Nesse primeiro momento, com a análise visual, nota-se que diferentes segmentos de ativos possuem comportamentos distintos e específicos, deixaremos a análise detalhada para as tabelas 3 a 10 que estão ao final deste capítulo.

4.2.2 Análise de correlação das previsões de um passo com o modelo GARCH

Abaixo, têm-se as análises com o uso do modelo de heterocedasticidade condicionada GARCH. Assim como foi apresentado anteriormente, a modelagem necessita passar em vários testes antes de sua modelagem, então não são todas as janelas deslizantes que possuíram todas as condições necessárias. Desse modo, é visto, nas próximas análises, que a quantidade de pontos será distinta das análises anteriores, e distintas entre as séries. Algumas janelas deslizantes não estarão presente nas análises, pois o modelo não foi capaz de gerar as previsões, tais séries foram:

- Todas as janelas deslizantes de previsões de 1 passo à frente (com *gap* de 0 e 1) do índice de bolsa de valores FTSE;
- Todas as janelas deslizantes de previsões de 1 e 3 passos à frente (com *gap* de 0 e 1 para as previsões de 1 valor e *gap* de 3 para as previsões de 3 valores) do índice de bolsa de valores Ibovespa, e
- Toda as janelas da série Ima-G.

Isso ocorre porque as séries podem conter outliers, zeros, ou simplesmente dados que dificultam a convergência de valores. As previsões seriam muito grandes ou muito

pequenas, tirando assim todo o viés da previsão. Recomenda-se, na literatura, o tratamento da série previamente antes de utilizar o método, para retirar as observações problemáticas. Todavia, como este estudo busca entender o comportamento dos erros das previsões com base na multifractalidade da série, decidiu-se manter a série em seu formato original.

Além disso, durante a modelagem dos componentes ARMA das janelas deslizantes, existiu em todas as séries analisadas janelas que resultaram em ARMAs (0,0). De acordo com Perlin (2018) “esse resultado implica que a série de retorno do índice financeiro não tem memória significativa, ou seja, o retorno do passado não tem poder preditivo sobre o futuro” (p. 369). Dessa forma, esse resultado corrobora com a ideia de que preços do mercado financeiro são difíceis de prever. Utilizou-se, mesmo assim, essas janelas com ARMA (0,0), já que as previsões feitas com esses componentes, ou utilizando o modelo Naive, seriam de todo modo pouco precisas, trazendo a abordagem da correlação dos erros de previsão e a multifractalidade.

Gráfico 13 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – TOPX – Modelo GARCH - Previsões de um passo.

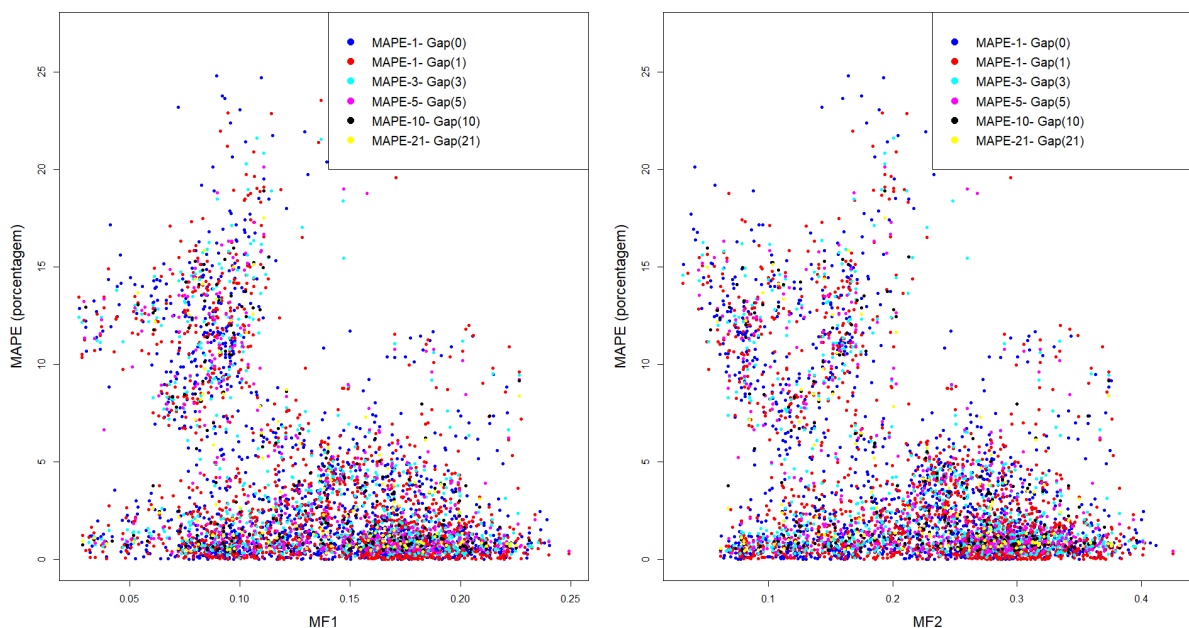


Gráfico 14 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – Soja – Modelo GARCH - Previsões de um passo.

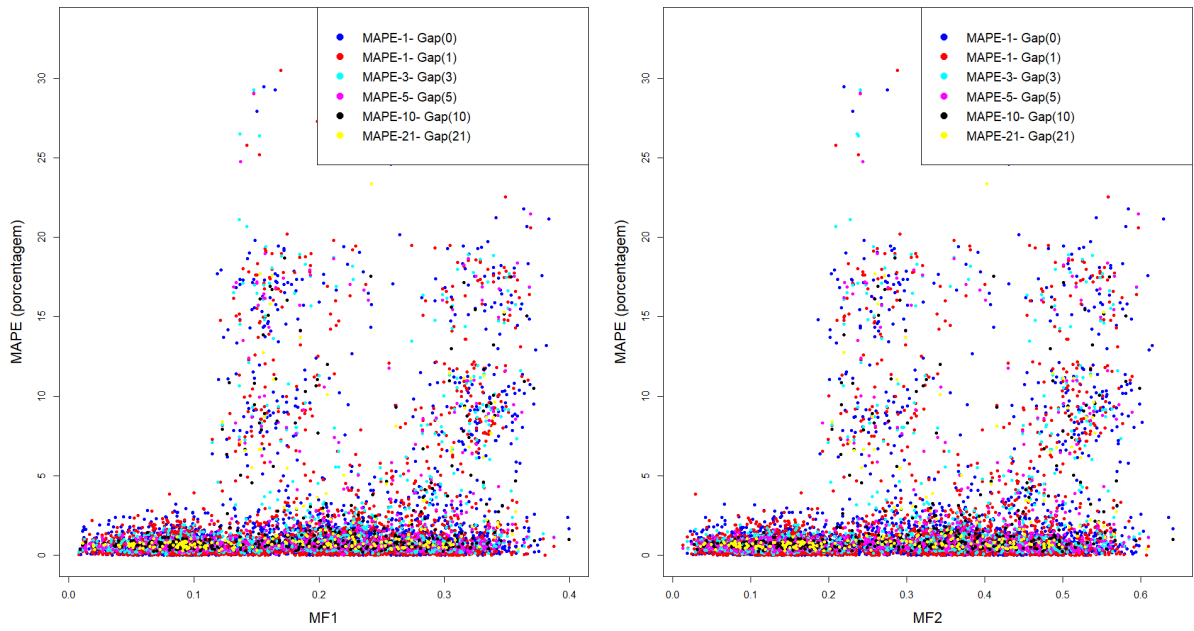


Gráfico 15 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – NTLX – Modelo GARCH - Previsões de um passo.

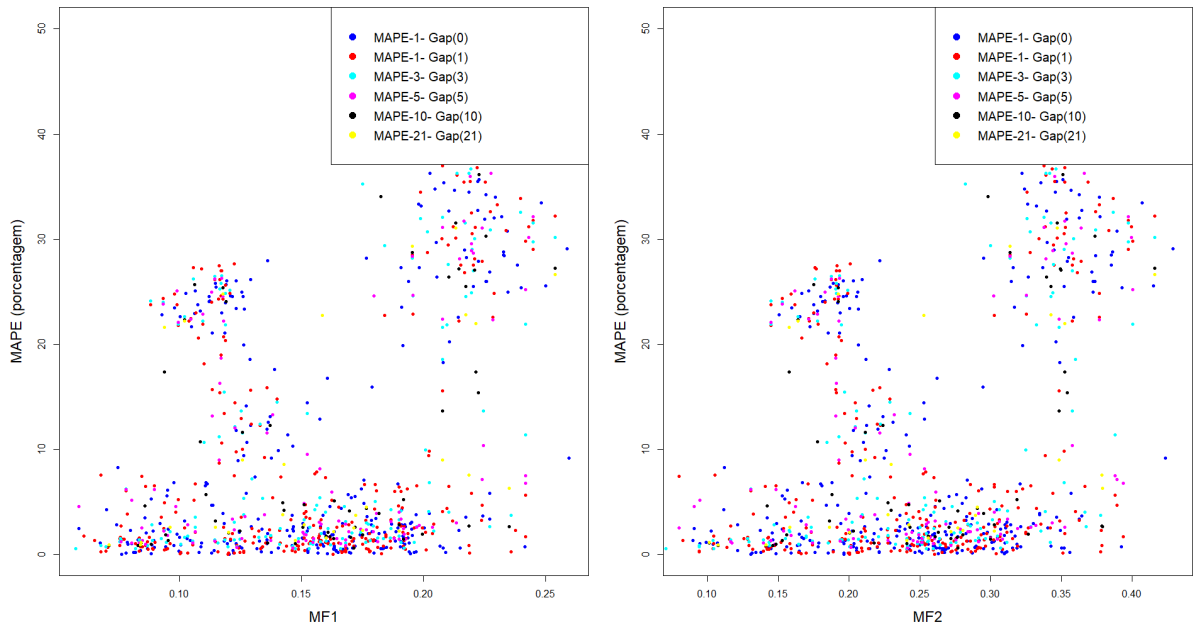


Gráfico 16 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – BBDC4 – Modelo GARCH - Previsões de um passo.

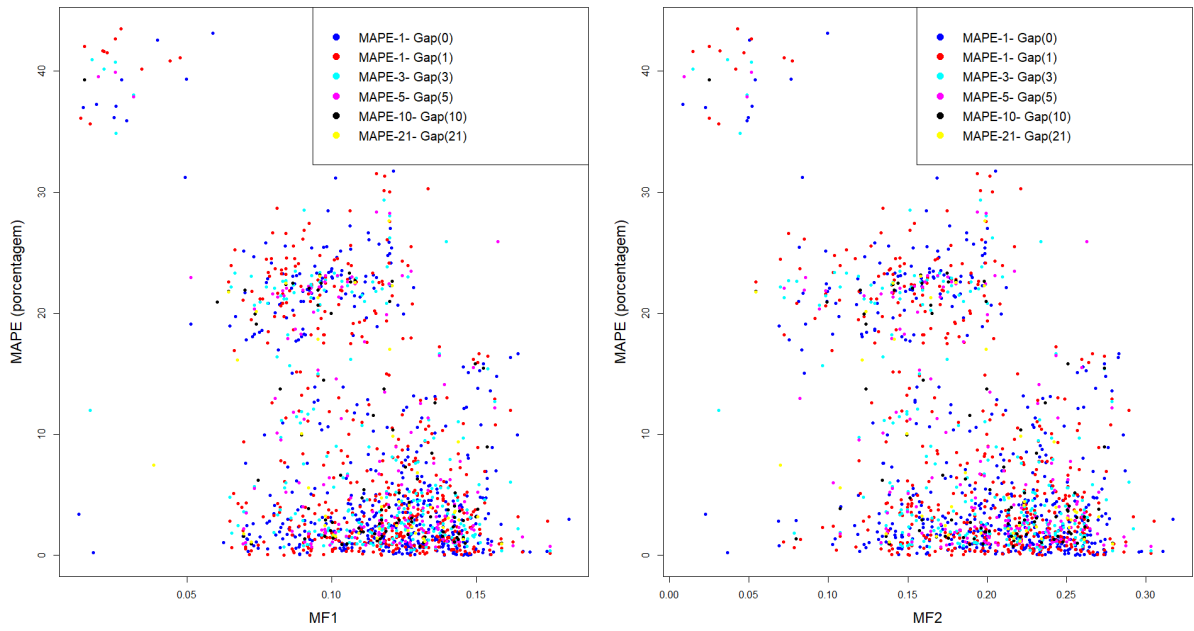


Gráfico 17 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – Imag-ex-c – Modelo GARCH - Previsões de um passo.

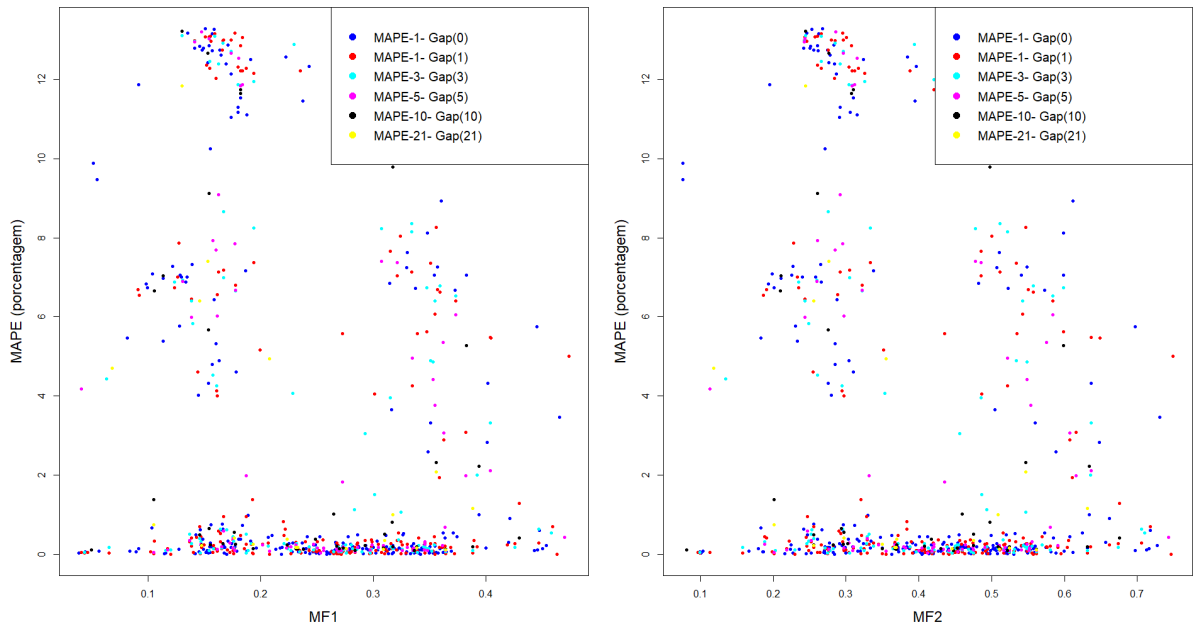
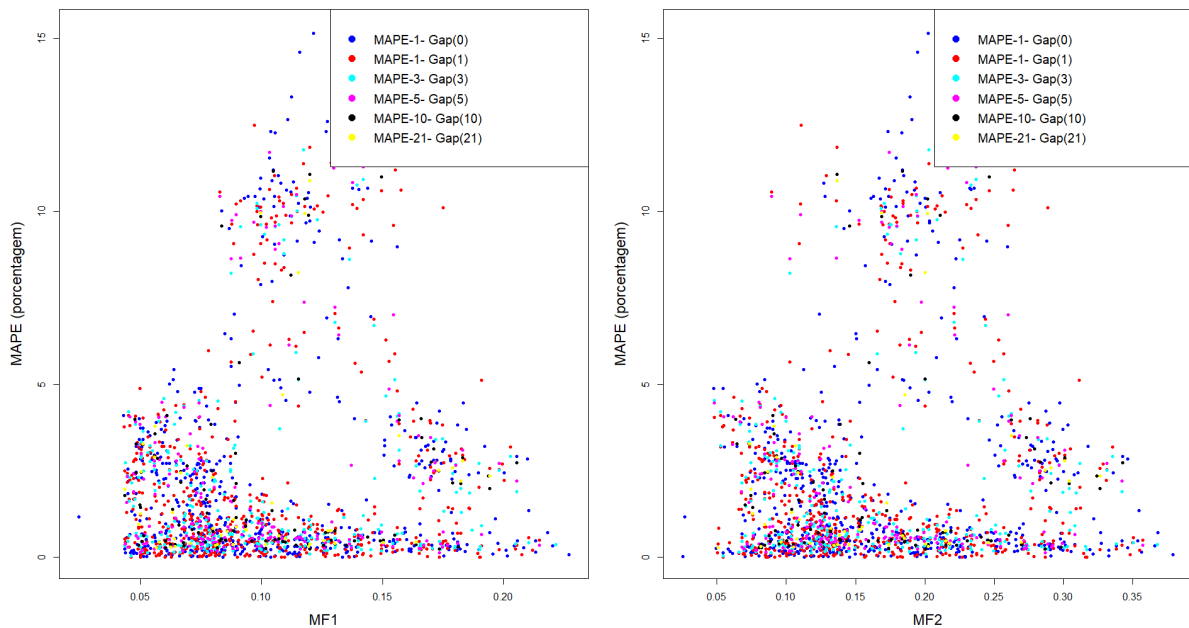


Gráfico 18 – Correlação entre o MAPE e parâmetros multifractais – EUR-USD – Modelo GARCH - Previsões de um passo.



Observa-se uma grande concentração de pontos para os valores próximos a 0% do MAPE correlacionados ao expoente MF1 nos intervalos:

- De 0.05 a 0.15 nos gráficos: 14, 15, 16 e 18;
- De 0.15 a 0.20 nos gráficos: 13, 15 e 18, e
- De 0.20 a 0.30 nos gráficos: 14 e 17.

E ao expoente MF2 nos intervalos:

- De 0.05 a 0.15 nos gráficos: 14, 15 e 18;
- De 0.25 a 0.35 nos gráficos: 13, 15, 16 e 18, e
- De 0.35 a 0.60 nos gráficos: 14 e 17.

Assim como no modelo Naive, é identificado uma recorrência de intervalos com maiores concentrações de pontos com valores do MAPE próximo a 0%. No expoente de correlação (MF1) isso acontece no intervalo de 0.05 a 0.20 e no expoente de singularidade (MF2) no intervalo de 0.10 a 0.25. Trazendo indícios de que os parâmetros multifractais podem servir como indicadores de qualidade de previsões, não apenas pela recorrência de intervalos, mas pela existência de regiões com grande concentração de pontos em cada ativo.

4.3 ANÁLISE LOCAL DA CORRELAÇÃO ENTRE MULTIFRACTALIDADE E ERROS DE PREVISÃO

Essa etapa da análise consiste em ilustrar o comportamento da correlação entre multifractalidade e acurácia dos erros de previsão (MAPE) em função dos valores dos MAPES

gerais de cada modo de previsão e médias locais de valores do MAPE de cada intervalo i de escala multifractal (MF1 e MF2). Primeiramente são apresentados os gráficos em sequência e posteriormente suas análises.

4.3.1 Análise local da correlação das previsões de um passo com o modelo Naive

Nos gráficos a seguir, os traços em rosa representam a média geral dos MAPEs em cada conjunto de janelas de previsão, e as linhas coloridas restantes são formadas a partir das médias locais dos valores do MAPE em cada intervalo i de escala multifractal (cada cor representa um modelo de previsão). Essa abordagem gráfica, em comparação com a que foi descrita anteriormente, facilita a visualização e a identificação de intervalos dos parâmetros multifractais (MF1 e MF2) que os valores médios do MAPE estão abaixo ou acima da média geral dos MAPEs de cada série estudada.

Gráfico 19 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – FTSE – Modelo Naive.

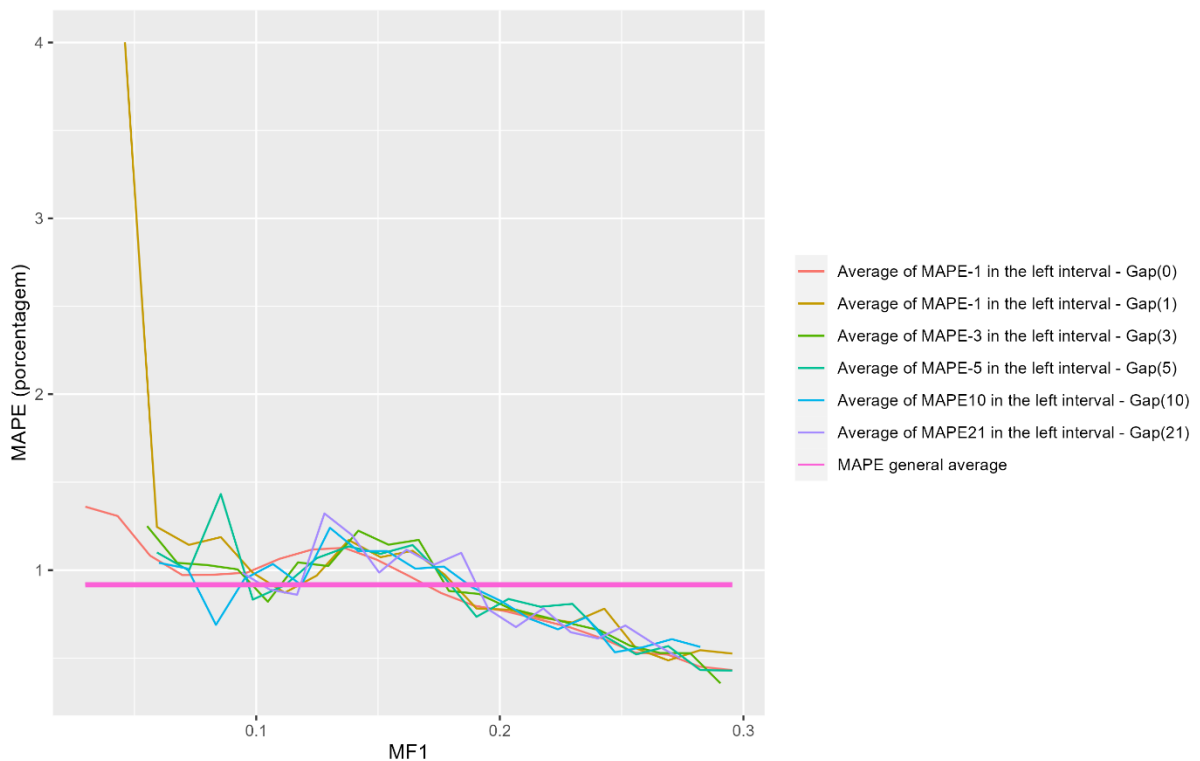


Gráfico 20 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – FTSE – Modelo Naive.

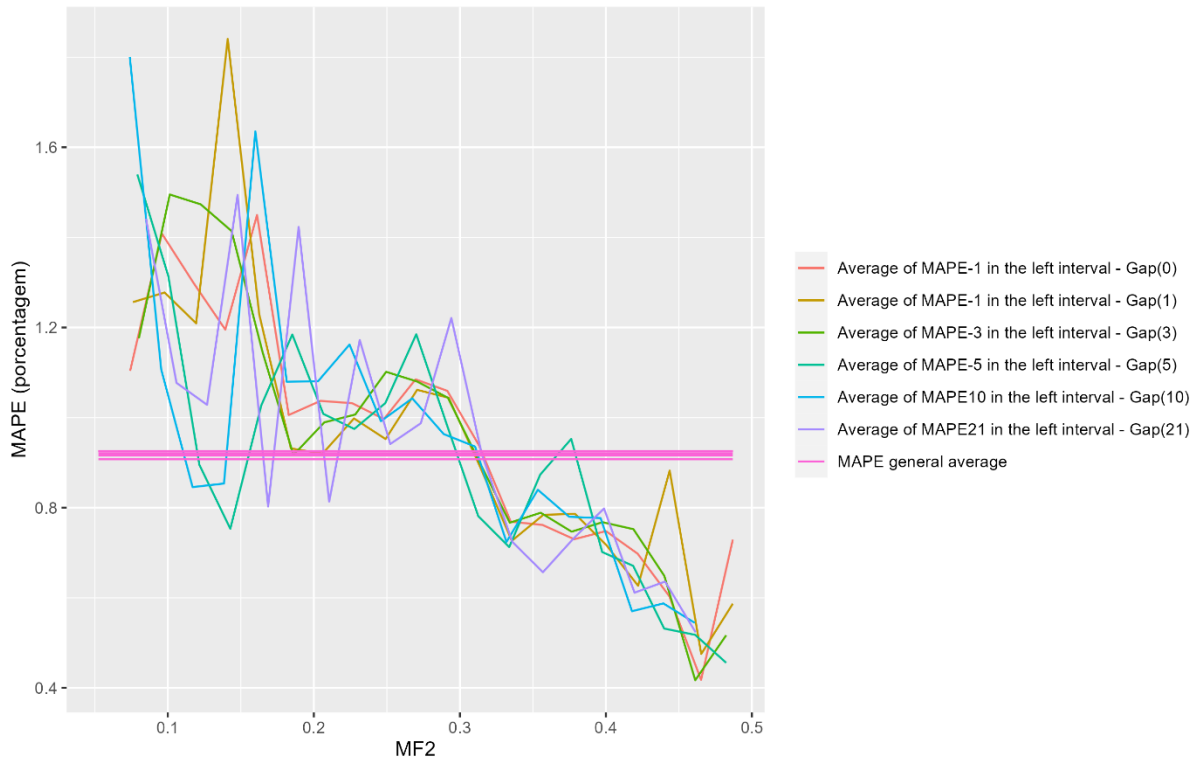


Gráfico 21 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – Café Robusta – Modelo Naïve.

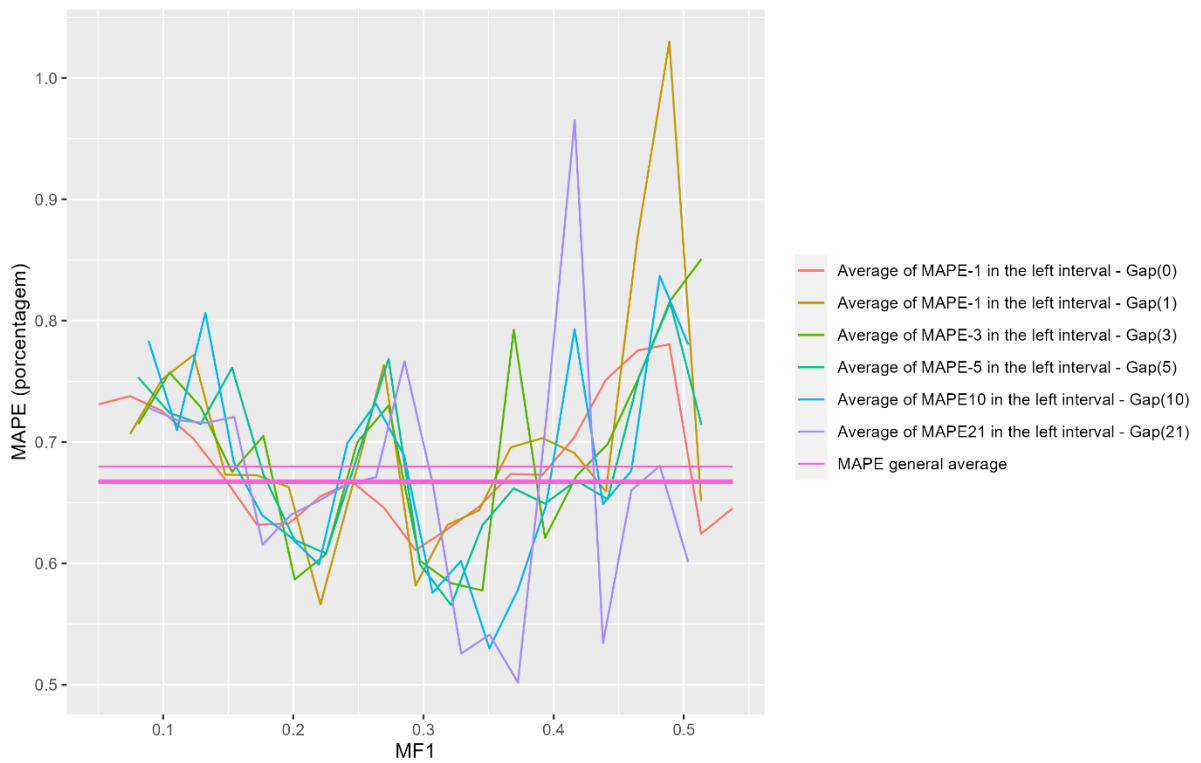


Gráfico 22 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – Café Robusta – Modelo Naïve.

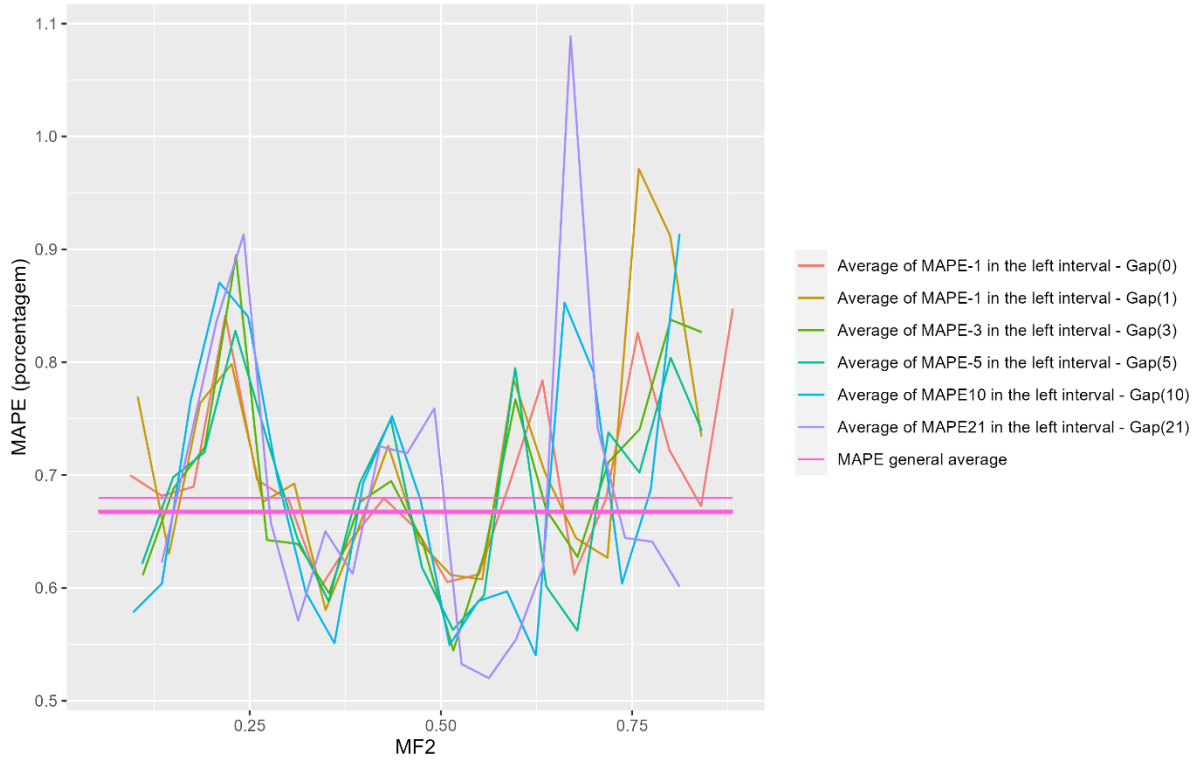


Gráfico 23 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – AMZN – Modelo Naive.

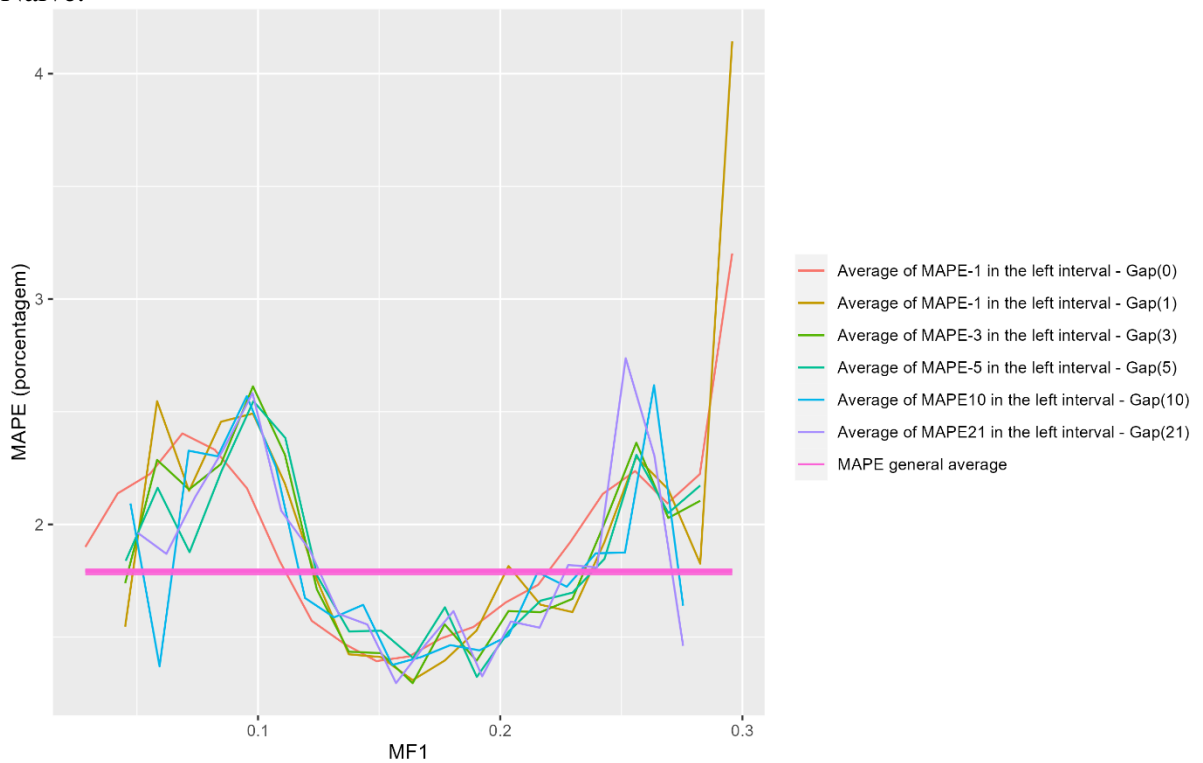


Gráfico 24 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – AMZN – Modelo Naive.

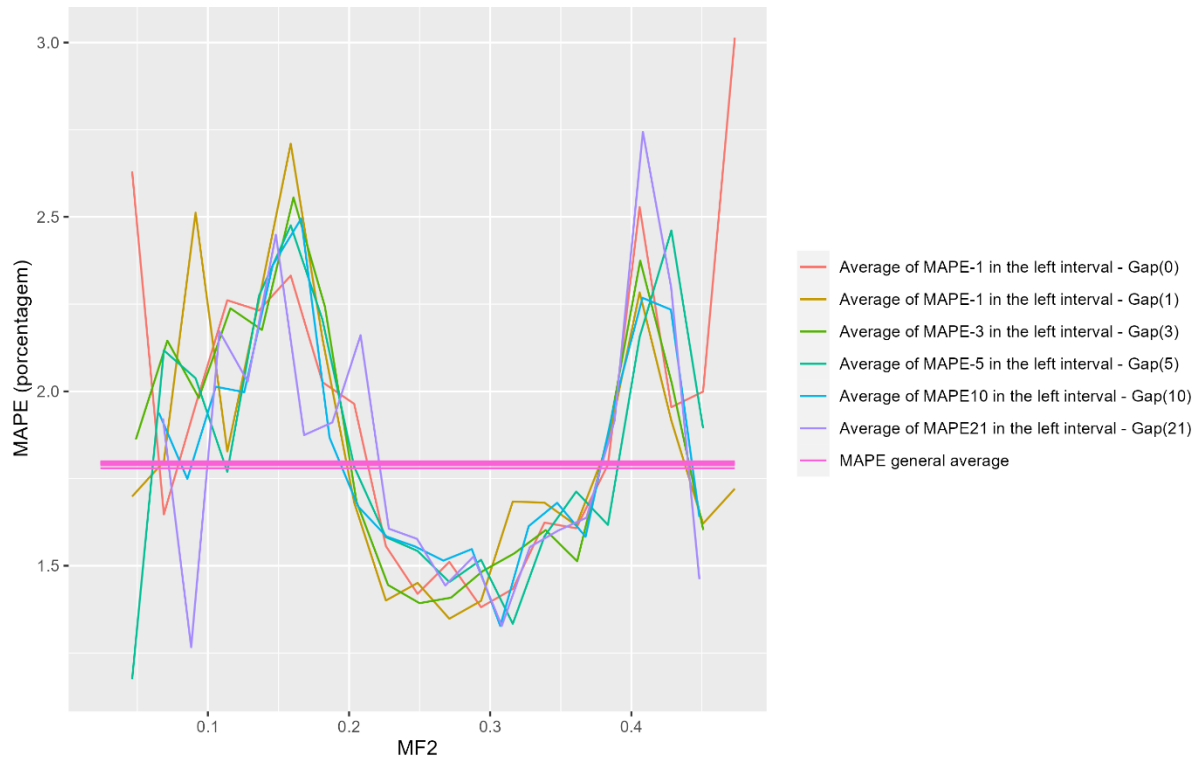


Gráfico 25 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – ITUB4 – Modelo Naive.

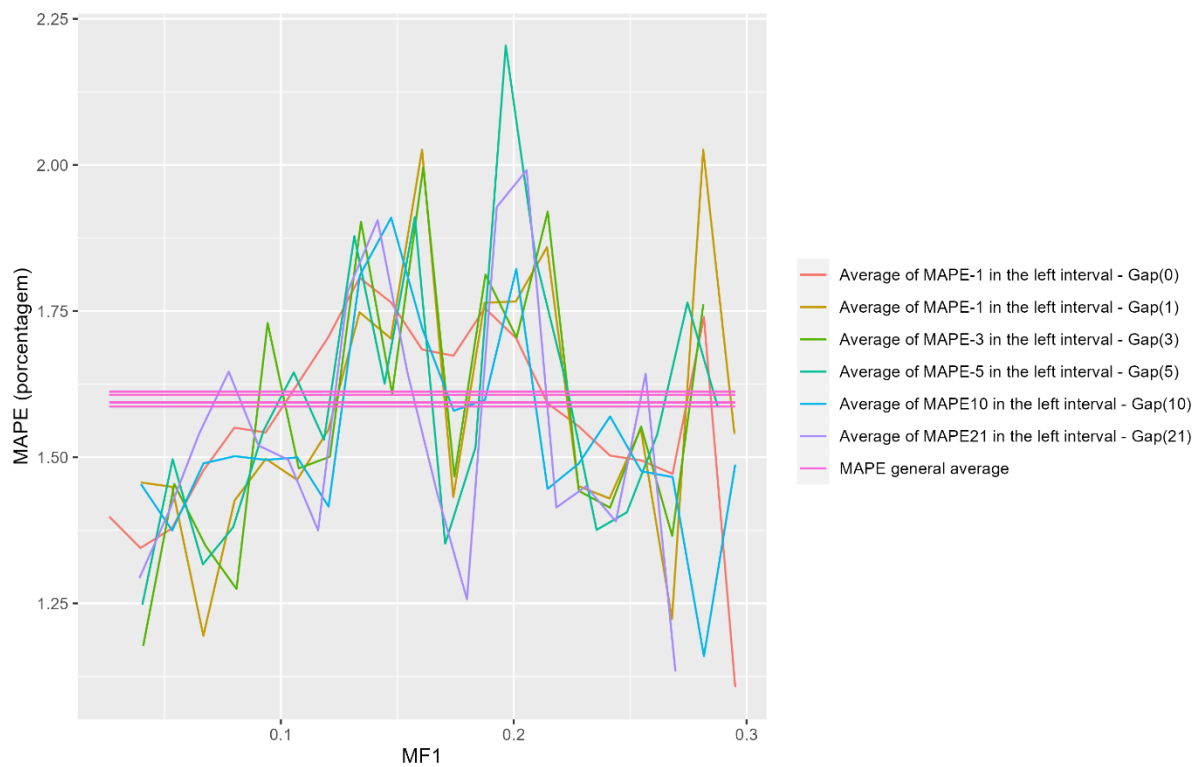


Gráfico 26 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – ITUB4 – Modelo Naive.

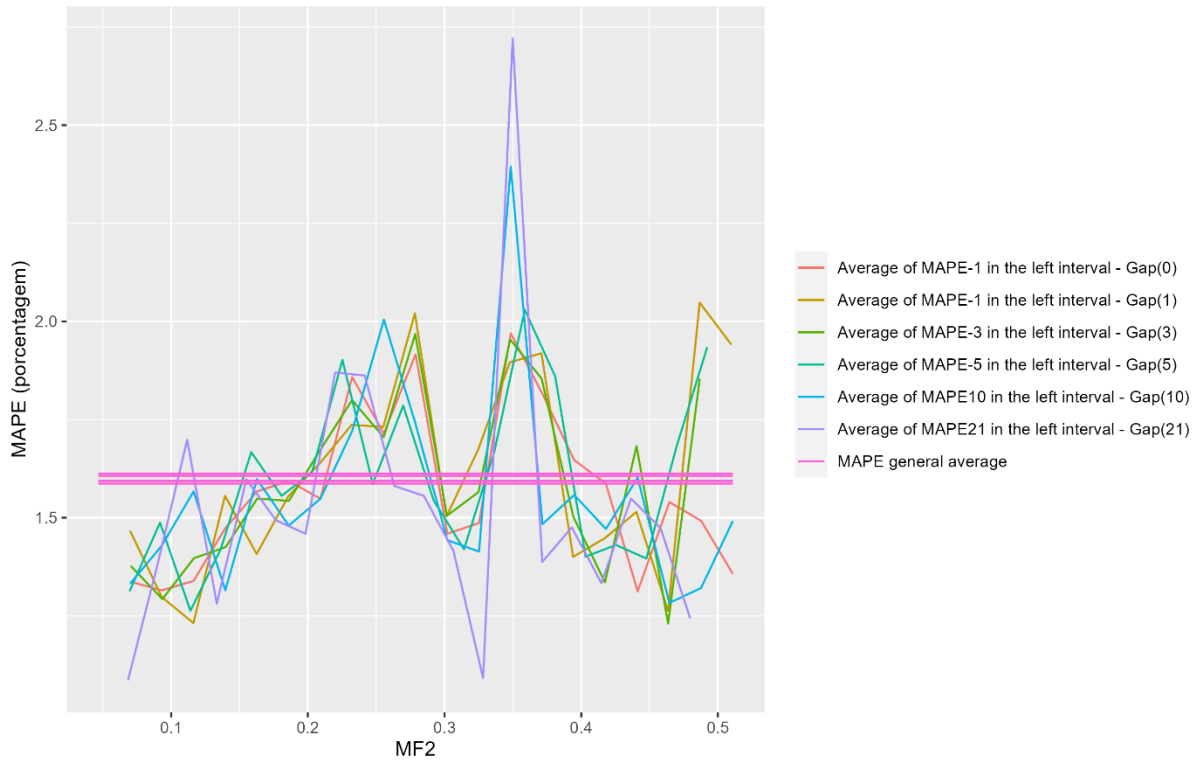


Gráfico 26 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – IMA-G – Modelo Naive.

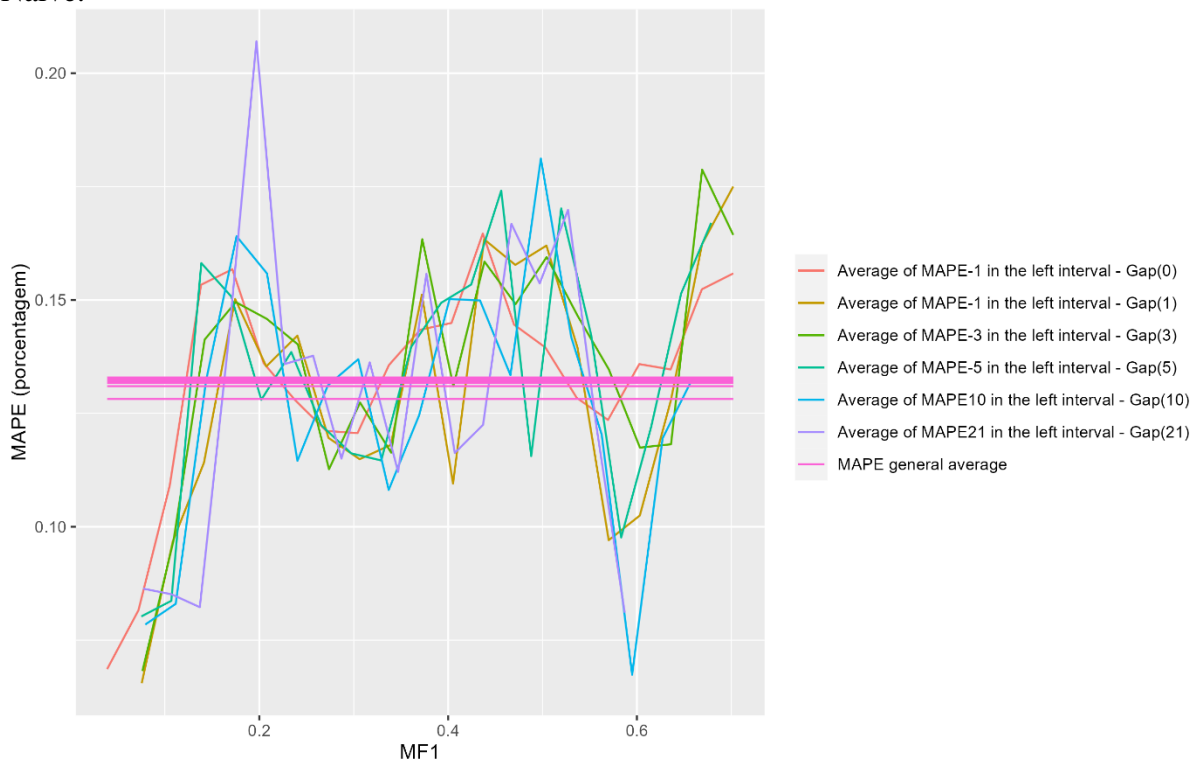


Gráfico 28 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – IMA-G – Modelo Naive.

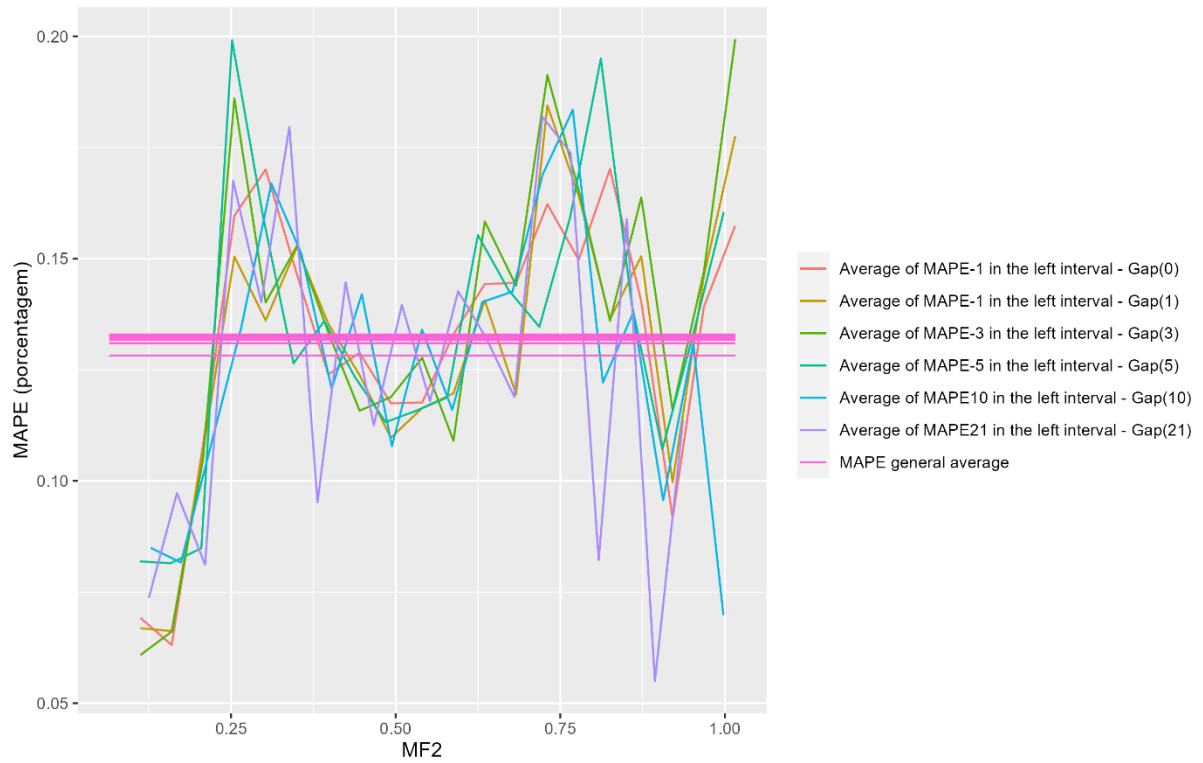


Gráfico 29 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – JPY-USD – Modelo Naive.

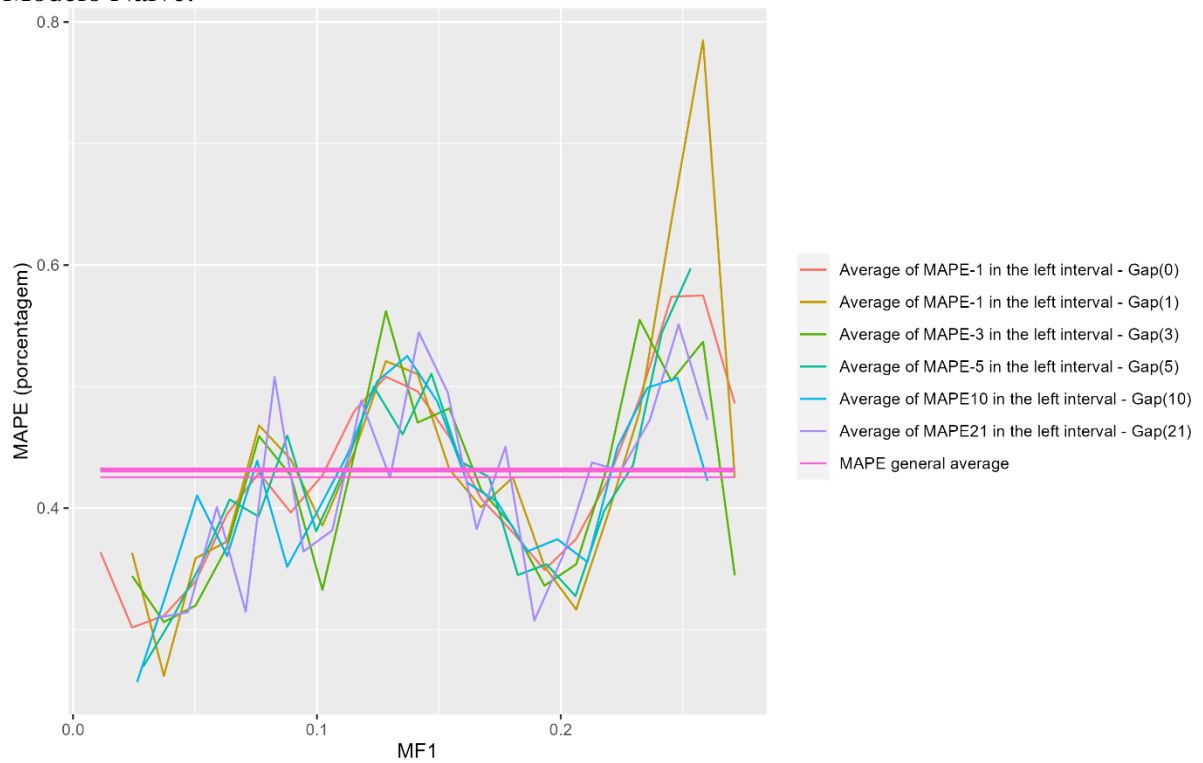
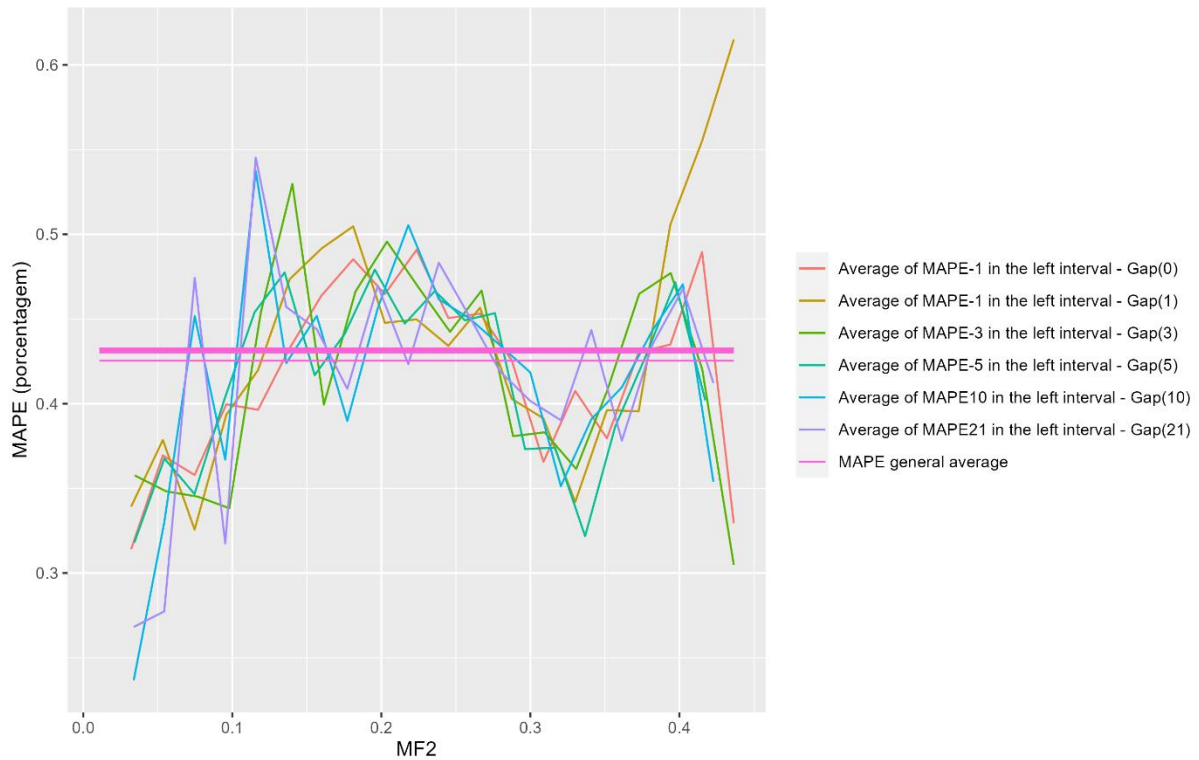


Gráfico 30 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – JPY-USD – Modelo Naive.



Examinando os resultados obtidos a partir dos gráficos 19 a 30, é possível perceber que o comportamento dos intervalos de escala multifractal (MF1 e MF2) são os mesmos do que foi descrito nos itens 4.2.1 e 4.2.2. A única diferença é que nessa última abordagem a visualização é mais clara, sendo mais fácil de observar o comportamento de cada ativo. Além disso, cabe lembrar que este estudo segue uma abordagem empírica quantitativa, já que abordagens semelhantes não existem ainda na literatura. O objetivo da apresentação gráfica é ilustrar a existência de correlação entre parâmetros multifractais (MF1 e MF2) e valores do MAPE obtidos a partir dos erros dos modelos de previsão em cada janela.

Nota-se que do mesmo modo que existem intervalos com MAPes próximos aos erros de 0%, têm-se intervalos com MAPes com valores bem acima da média geral dos erros, podendo, em alguns casos, chegar a erros de 4% como pode ser visto nos gráficos 19 e 23. Outro ponto interessante é que os ativos possuem comportamentos distintos, uma espécie de digital, podendo perceber, a partir da visualização dos gráficos, que:

- Alguns ativos, como nos gráficos 19 e 20, possuem MAPes maiores do que a média dos MAPes para valores de parâmetros multifractais próximos de 0, que vão diminuindo em valores de multifractalidade próximos a 0.3 e 0.5;

- Outros ativos, como os dos gráficos: 21, 22, 23, 24, 27 e 28. Seus MAPEs são elevados para valores de parâmetros multifractais próximos de 0 e, maiores do que 0.5, contendo valores abaixo da média geral dos MAPEs na região central do gráfico, sendo a região de valores de multifractalidade entre 0.15 e 0.35, e
- Uma menor quantidade de ativos, como pode ser visto nos gráficos 25 e 26. Contam com grandes oscilações entre valores altos e baixos de MAPE em todo o intervalo multifractal. Mesmo assim, atingem valores baixos de MAPE em relação à média geral dos MAPEs, em regiões que a multifractalidade está próxima a 0.2 e 0,3.

Não se faz distinção dos parâmetros MF1 e MF2 nas análises acima, por possuírem comportamento semelhante em seus intervalos que possuem valores de MAPE inferiores à média geral de MAPEs, sendo assim o comportamento identificado se aplica em ambos os expoentes de escala multifractal.

4.3.2 Análise local da correlação das previsões de um passo com o modelo GARCH

De forma similar aos gráficos anteriores, os traços em rosa representam a média geral dos MAPEs em cada conjunto de janelas de previsão, e as linhas coloridas restantes são formadas a partir das médias locais dos valores do MAPE em cada intervalo i de escala multifractal (cada cor representa um modelo de previsão). Com o mesmo objetivo de ilustrar a existência da correlação entre parâmetros multifractais e valores do MAPE, são apresentados os gráficos em sequência e em seguida as análises.

Gráfico 31 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – FTSE – Modelo GARCH.

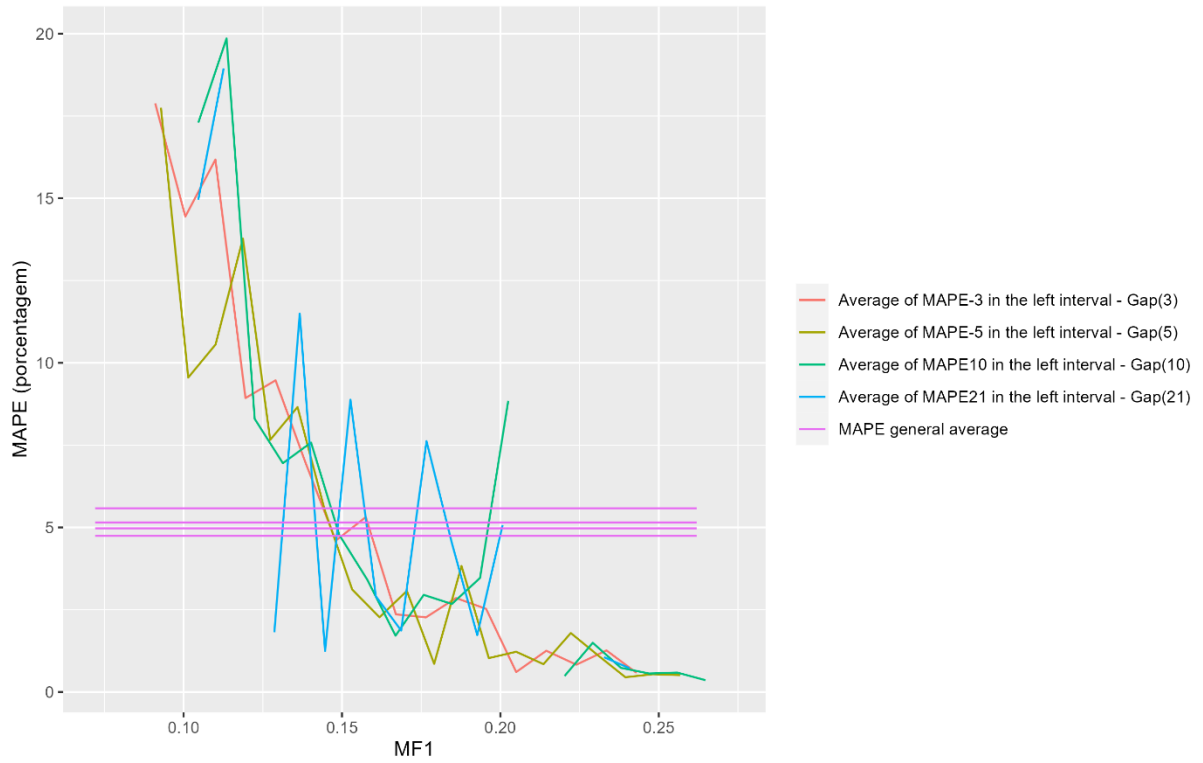


Gráfico 32 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – FTSE – Modelo GARCH.

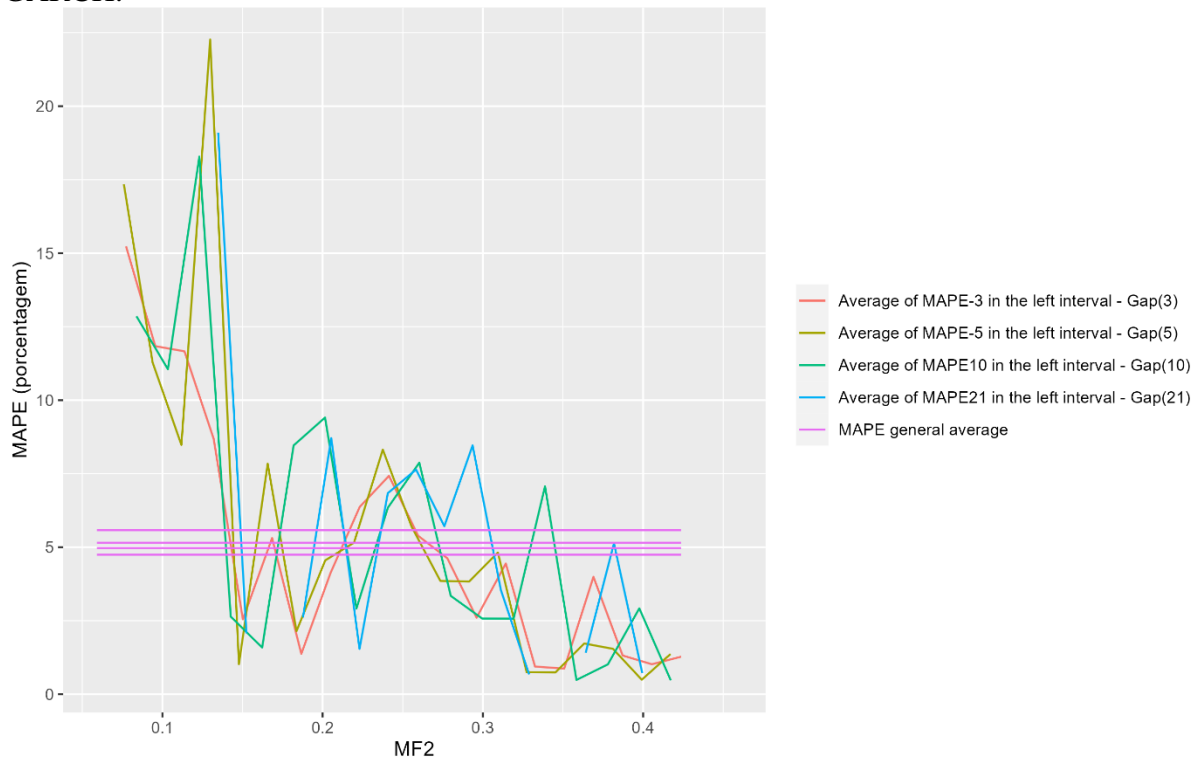


Gráfico 33 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – Boi gordo – Modelo GARCH.

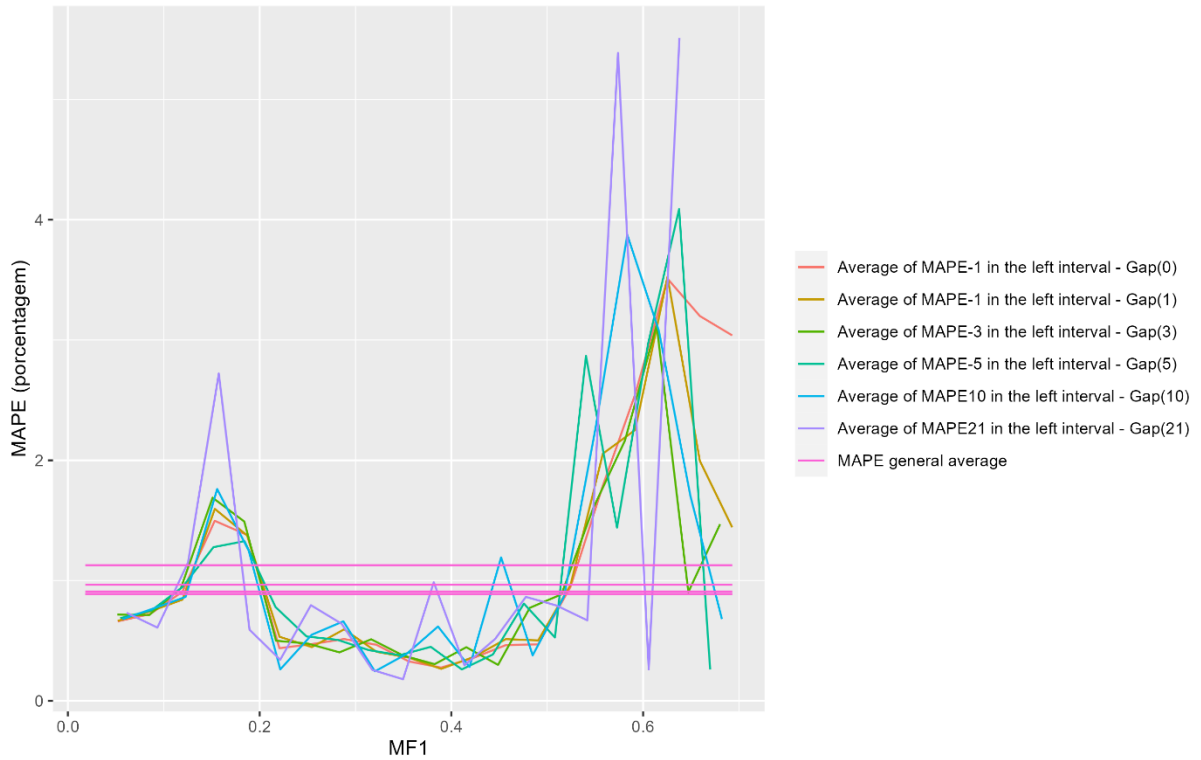


Gráfico 34 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – Boi gordo – Modelo GARCH.

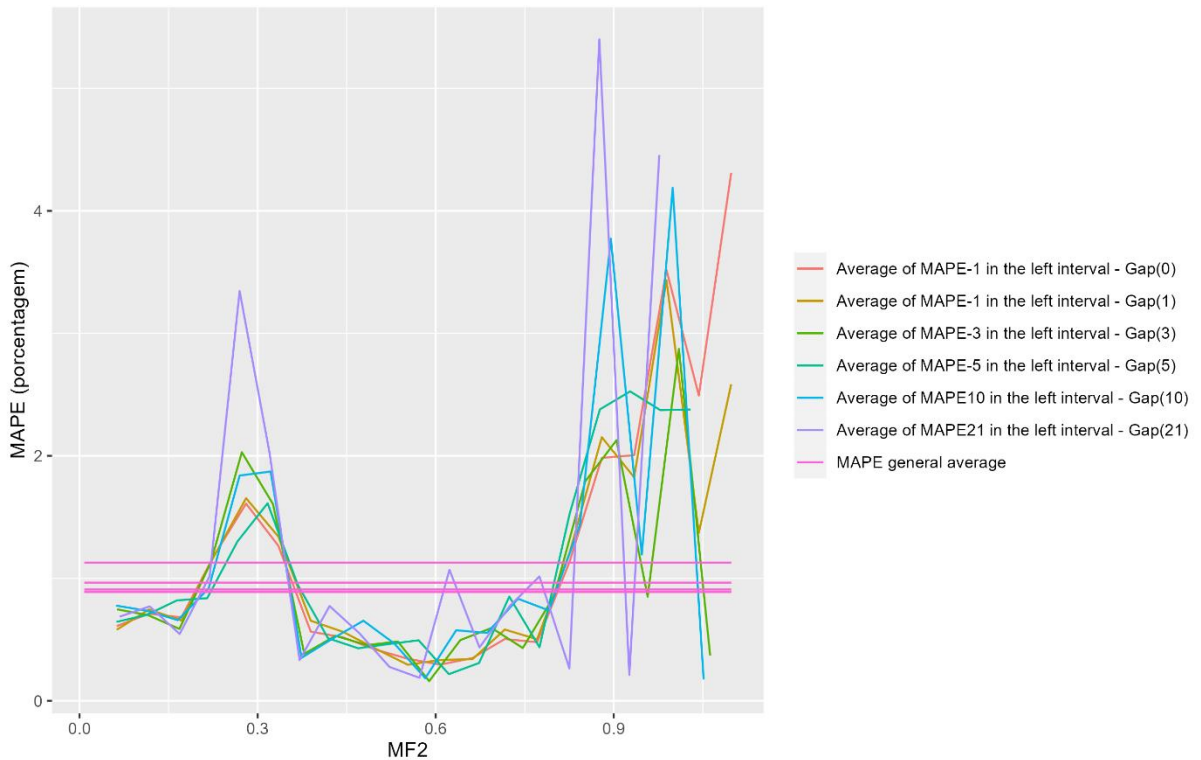


Gráfico 35 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – NTLX – Modelo GARCH.

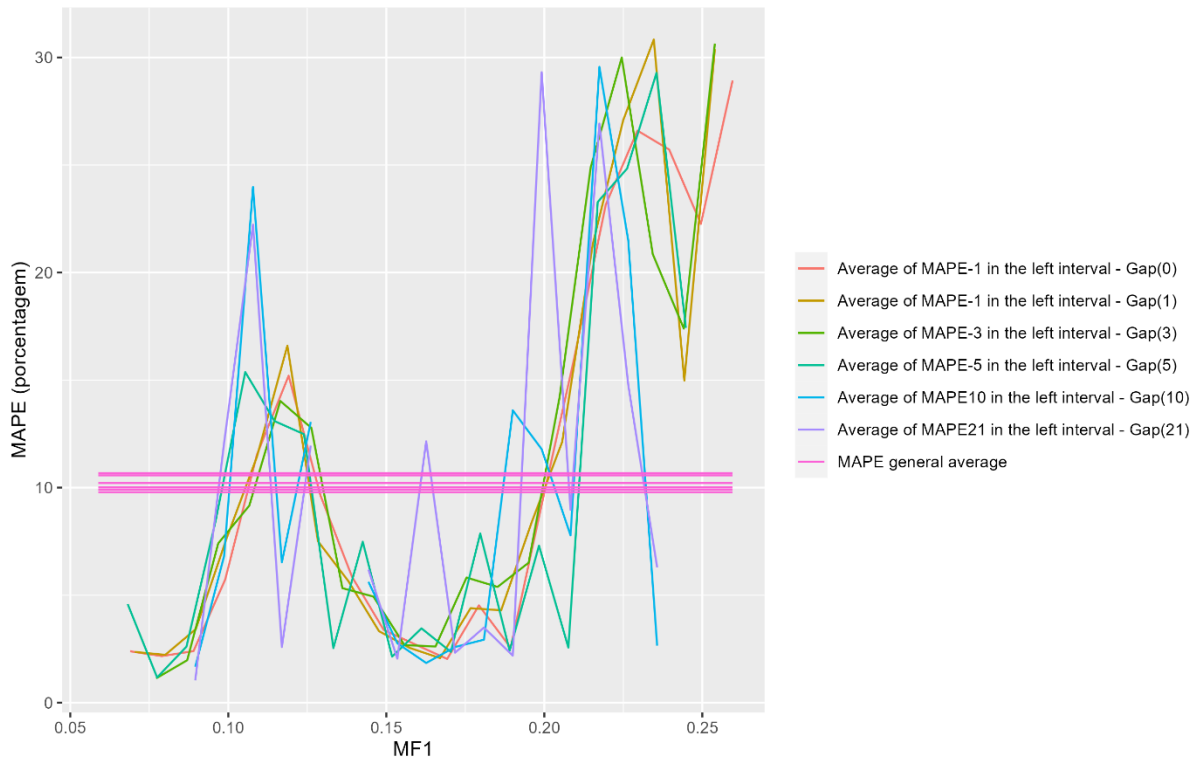


Gráfico 36 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – NTLX – Modelo GARCH.

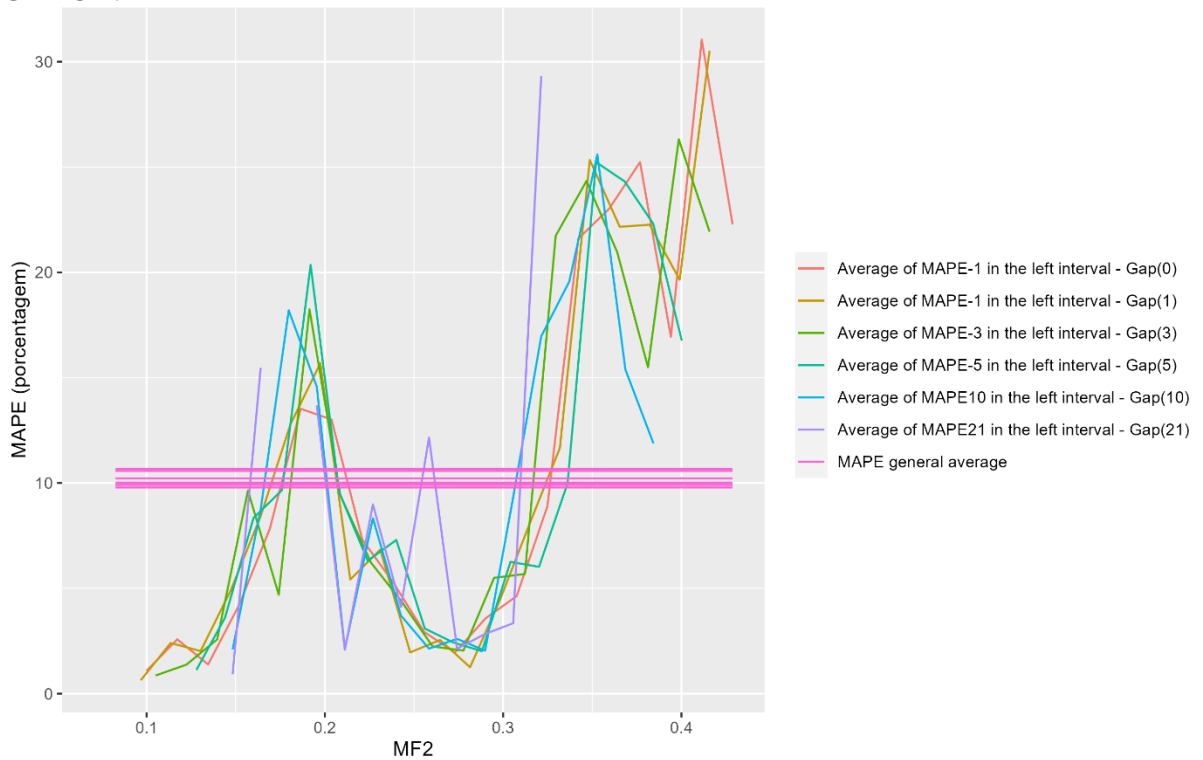


Gráfico 37 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – ITUB3 – Modelo GARCH.

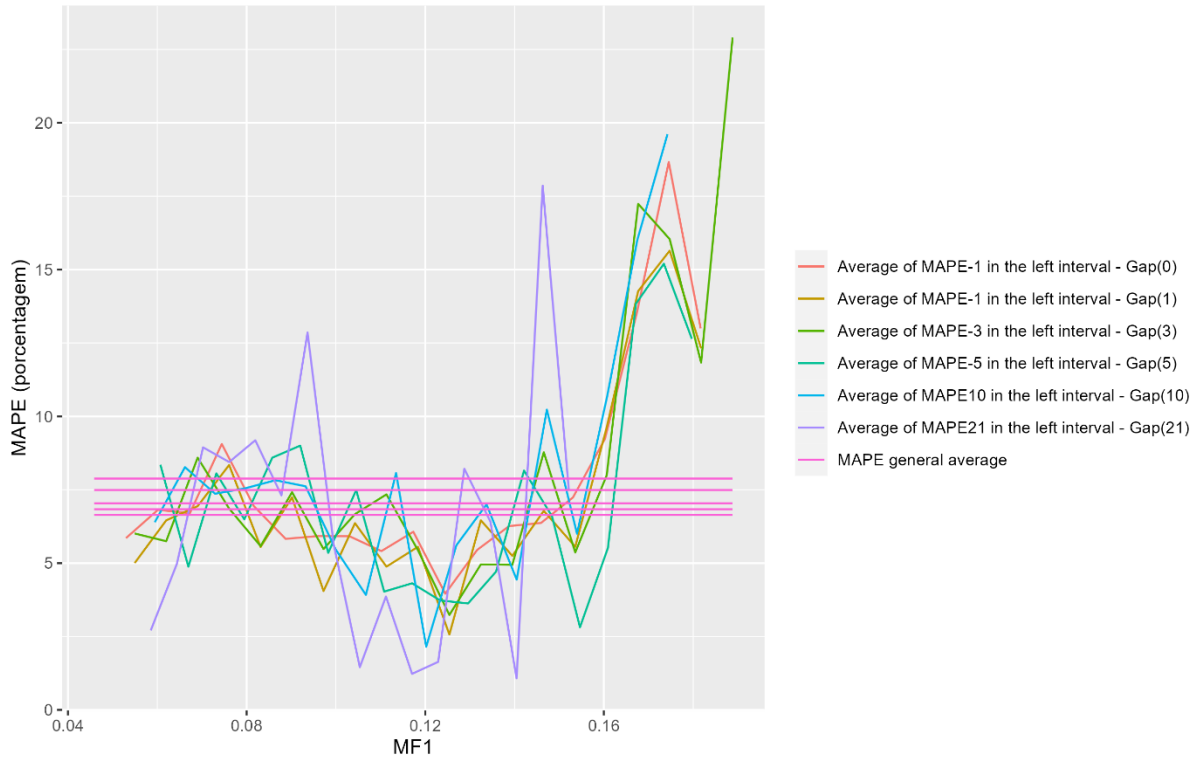


Gráfico 38 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – ITUB3 – Modelo GARCH.

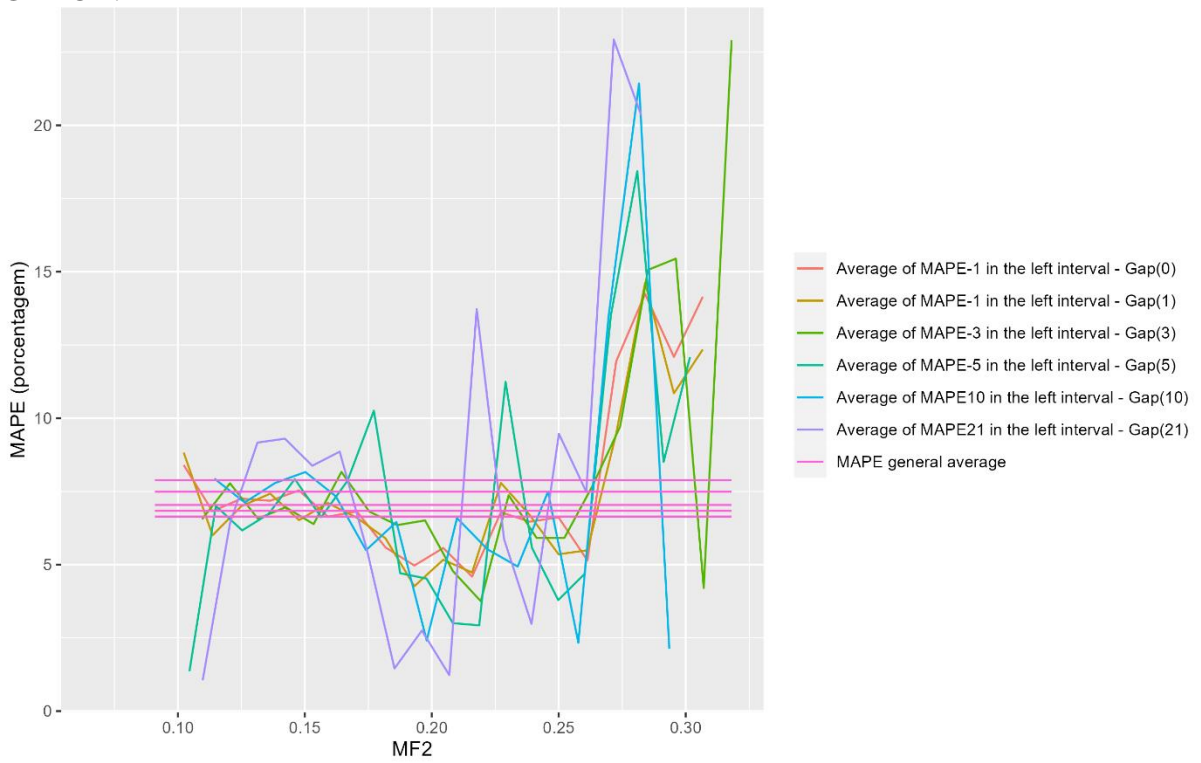


Gráfico 39 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – Imag-ex-c – Modelo GARCH.

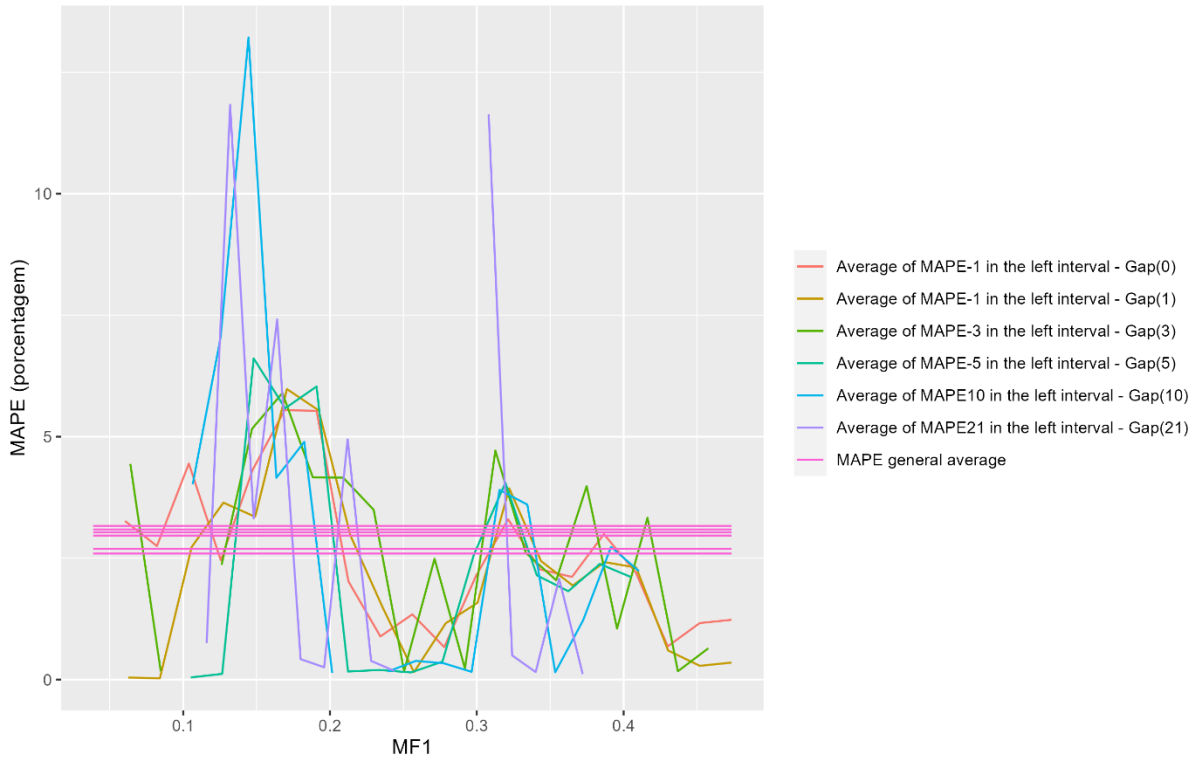


Gráfico 40 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – Imag-ex-c – Modelo GARCH.

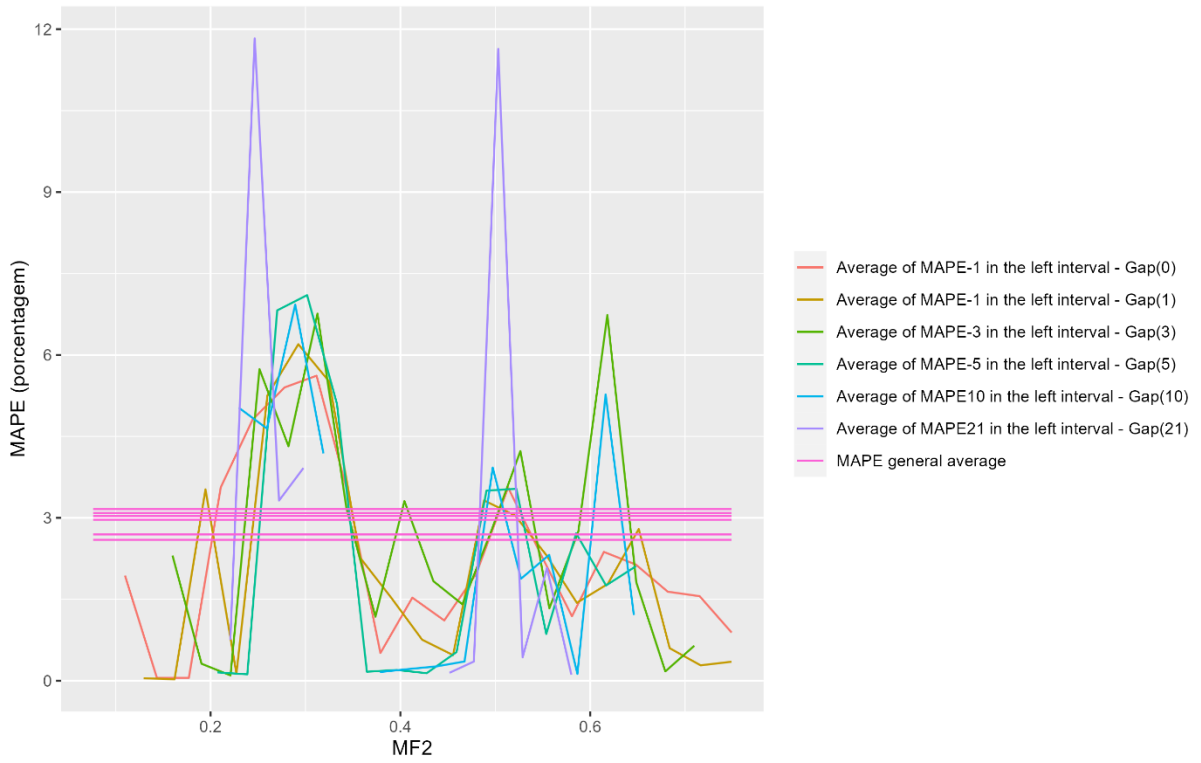


Gráfico 41 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF1 – BRL-USD – Modelo GARCH.

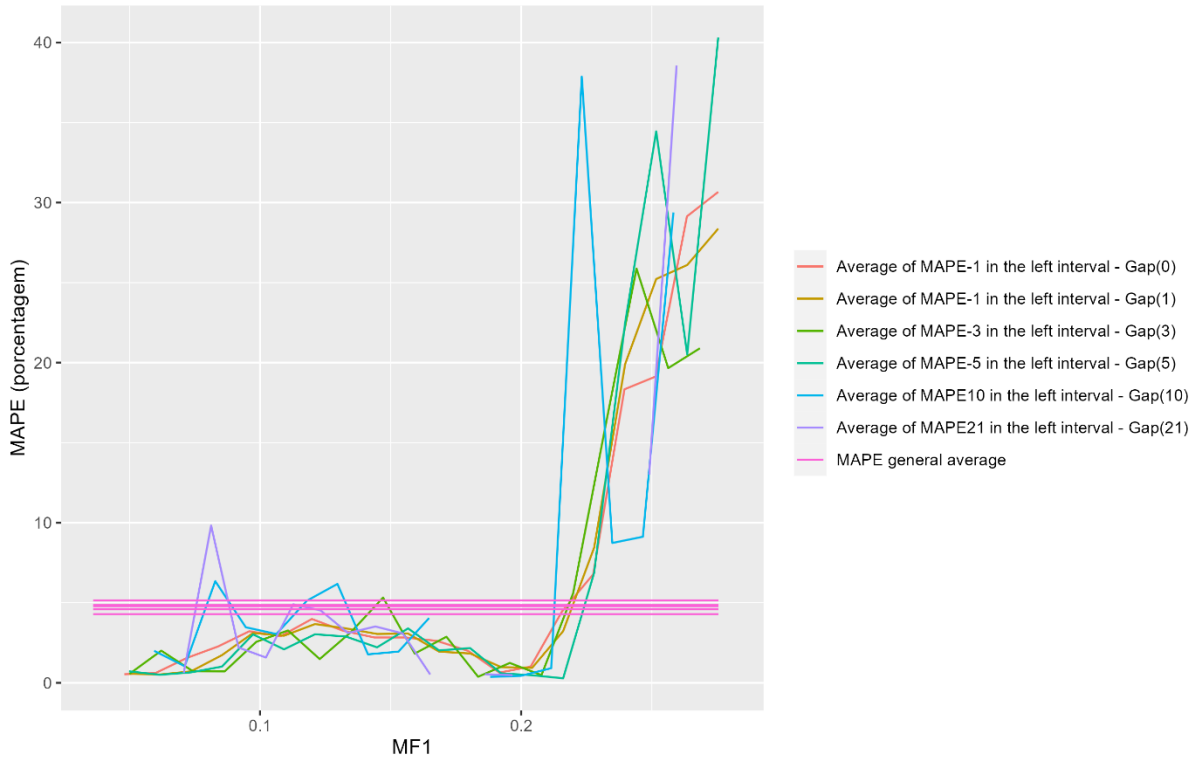
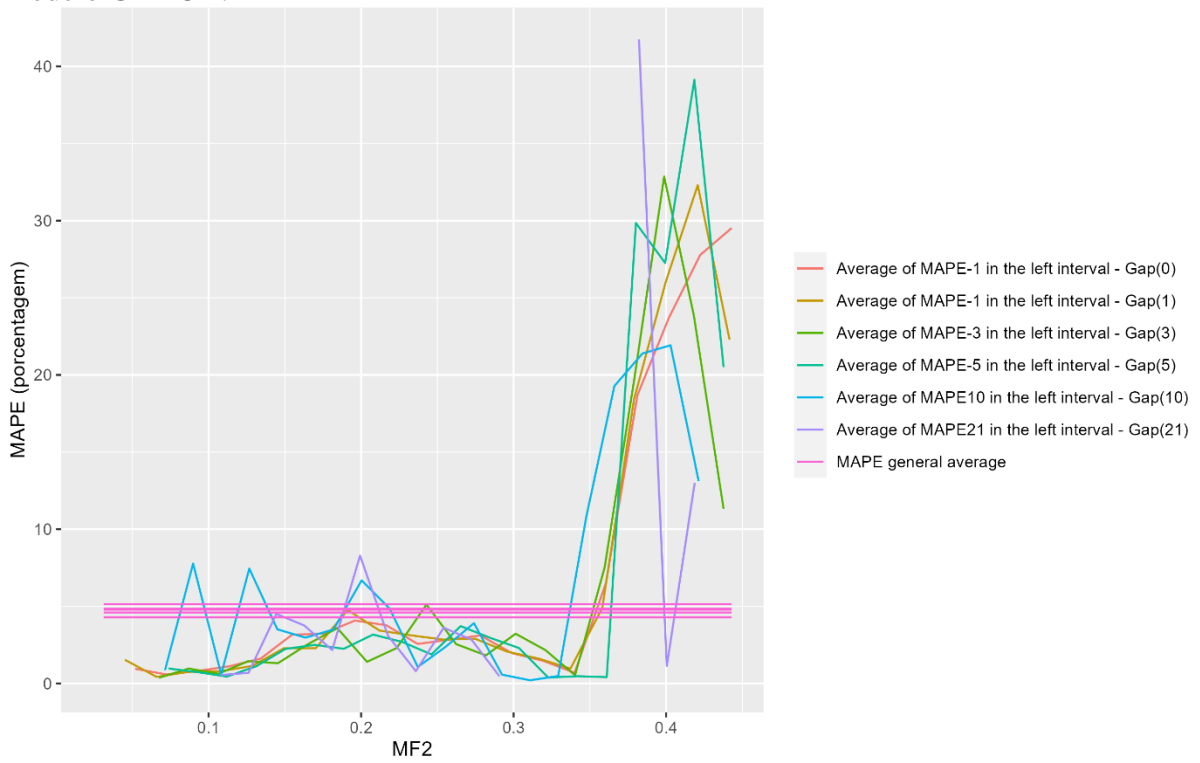


Gráfico 42 – Correlação local entre os erros das previsões (MAPE) e MF2 – BRL-USD – Modelo GARCH.



Os resultados obtidos, a partir dos gráficos 31 a 42 utilizando o modelo GARCH, são semelhantes ao que foi visto nos gráficos 19 a 30 com a utilização do modelo Naive. As

regiões dos parâmetros de escala multifractal (MF1 e MF2) próximas de 0.15, 0.2, e 0.3, são aquelas que possuem valores de MAPE próximos de 0%. Dentre os três comportamentos identificados e apresentados anteriormente, a partir dos gráficos 19 a 30, surge um novo comportamento dentre os gráficos da análise com o modelo GARCH, como pode ser visto nos gráficos 33, 34, 37, 38, 41 e 42. Os ativos financeiros possuem seus valores de MAPE abaixo da média geral dos MAPEs, para valores dos expoentes de escala multifractal (MF1 e MF2) entre 0 e 0.25, e conforme os parâmetros multifractais vão aumentando, os valores do MAPE superam a média geral dos MAPEs.

A partir da análise dos gráficos, é observado que nas séries das commodities e renda fixa, os parâmetros multifractais possuem comportamentos distintos dos outros ativos, pois em ambos, os valores de MF1 e MF2 se aproximam com maior facilidade do valor de uma unidade. Acredita-se, portanto, que isso ocorre por serem ativos negociados de forma distinta dos outros analisados (ações, índices e taxas de câmbio), ou seja, nesse tipo de ativo os investidores possuem uma estratégia distinta de atuação, quando comparadas aos outros ativos. Desse modo, calculou-se os parâmetros multifractais das séries completas, e estes mesmos parâmetros para cada janela deslizante estudada, na tabela 2 abaixo, estão discriminados os valores de MF1 e MF2 das séries completas estudadas e, para as janelas deslizantes que são milhares, têm-se os valores médio, máximo e mínimo dos parâmetros, em relação a todas as janelas estudadas dentro de cada ativo.

Tabela 2 – Valores de MF1 e MF2, das séries completas e a média geral, máximos e mínimos dos parâmetros multifractais das janelas deslizantes.

	Série Completa		Janelas deslizantes			Janelas deslizantes		
	MF1	MF2	Média MF1	Máx MF1	Mín MF1	Média MF2	Máx MF2	Mín MF2
Índices Mundiais								
AEX	0.1590	0.2628	0.1535	0.3016	0.0237	0.2544	0.5130	0.0354
FTSE	0.1558	0.2590	0.1703	0.2954	0.0298	0.2852	0.4869	0.0525
HSI	0.1191	0.2134	0.1164	0.2818	0.0142	0.1870	0.4728	0.0158
Ibovespa	0.1113	0.1935	0.1088	0.2580	0.0163	0.1687	0.4417	0.0185
TOPX	0.0987	0.1725	0.1360	0.2492	0.0270	0.2255	0.4254	0.0315
Commodities								
Boi gordo	0.2388	0.4037	0.2743	0.6929	0.0182	0.4426	1.0977	0.0081
Café – A	0.1166	0.2033	0.1163	0.2886	0.0114	0.1796	0.4452	0.0184
Café – R	0.1305	0.2207	0.2454	0.5376	0.0503	0.3980	0.8818	0.0521
Milho	0.0962	0.1602	0.2271	0.3586	0.0825	0.3716	0.5835	0.1413
Soja	0.0974	0.1637	0.1855	0.3995	0.0084	0.3012	0.6412	0.0132
Ações internacionais								

AMZN	0.1450	0.2255	0.1606	0.2958	0.0287	0.2579	0.4733	0.0239
APPL	0.0980	0.1661	0.1045	0.2676	0.0122	0.1669	0.4710	0.0108
ATVI	0.1089	0.1831	0.1124	0.2759	0.0108	0.1819	0.4712	0.0171
NTLX	0.1433	0.2393	0.1570	0.3304	0.0102	0.2528	0.5856	0.0231
WBD	0.1199	0.2069	0.1296	0.3284	0.0125	0.2196	0.5597	0.0142
Ações Nacionais								
BBDC3	0.0859	0.1504	0.1098	0.2719	0.0136	0.1786	0.4773	0.0122
BBDC4	0.0925	0.1618	0.1180	0.2471	0.0119	0.1964	0.4279	0.0060
ITUB3	0.0985	0.1695	0.1458	0.5476	0.0412	0.2459	0.8707	0.0255
ITBU4	0.0933	0.1650	0.1386	0.2951	0.0263	0.2327	0.5109	0.0468
PETR3	0.1143	0.1943	0.1322	0.3192	0.0222	0.2173	0.5479	0.0214
Índices de Renda Fixa								
IMA-B	0.6963	1.0881	0.3161	0.9771	0.0350	0.5068	1.4357	0.0932
IMA-G	0.5112	0.7547	0.2861	0.7019	0.0387	0.4630	1.0157	0.0649
Imag-ex-C	0.4863	0.7932	0.2567	0.5886	0.0332	0.4256	0.8494	0.0610
Câmbio								
BRL-USD	0.1556	0.2683	0.2461	0.5022	0.0242	0.1512	0.3073	0.0361
EUR-USD	0.0831	0.1396	0.1472	0.3792	0.0207	0.0990	0.2270	0.0132
GBP-EUR	0.0886	0.1495	0.1687	0.4928	0.0127	0.1064	0.2887	0.0156
JPY-EUR	0.1064	0.1914	0.1806	0.3967	0.0090	0.1144	0.2597	0.0054
JPY-USD	0.0990	0.1699	0.2257	0.4365	0.0108	0.1371	0.2713	0.0112

Nesse sentido, para sistematizar os resultados observados a partir de algumas análises gráficas, a próxima seção dedica-se a uma análise estatística dos resultados.

4.4 ANÁLISE ESTATÍSTICA DAS CORRELAÇÕES

De acordo com o que foi descrito no capítulo metodológico nas etapas 2 a 4, o objetivo desta análise é identificar quais são os intervalos de escala dos parâmetros multifractais (MF1 e MF2) que contenham a maior quantidade de séries com seus valores do MAPE abaixo ou acima da média geral dos MAPEs.

A análise foi feita individualmente, para cada série de ativo financeiro apresentada neste trabalho e para cada categoria de ativos. As análises individuais de cada ativo – todos os seis métodos de previsão – são muitas e como pode ser visto nos gráficos 19 a 42 todos os seis métodos – representados pelas linhas coloridas – possuem comportamento semelhante, as linhas são bem próximas. Logo será apresentado apenas a análise feita com o primeiro modo de previsão (janelas de 1001 valores e *gap* 0), por ser a análise com a maior quantidade de janelas deslizantes, não desconsiderar valores e conseguir representar os resultados obtidos.

Os resultados são apresentados em formato de tabelas (3 a 10). As tabelas 3, 5, 7, e 9 trazem em suas células duas informações: a primeira informação é a porcentagem de janelas deslizantes que possuem o valor de seus MAPEs abaixo da média geral (dos MAPEs) em relação ao total de janelas deslizantes em cada intervalo i de escala multifractal (MF1 e MF2) – valores já em porcentagem obtidos na etapa 4 –; a segunda informação são os intervalos i que a média local de seus MAPEs está abaixo da média geral (dos Mapes) – para a identificação dos intervalos que ficaram com suas médias locais abaixo da média geral, usou-se a cor azul para colorir as células, e para a identificação dos intervalos que ficaram acima da média geral utilizou-se a cor amarela.

Para a elaboração das tabelas 4, 6, 8 e 10 calculou-se a porcentagem de células destacadas em azul para cada intervalo i em relação ao total de células no intervalo i por categoria de séries temporais de ativos – índices de bolsa de valores (5), commodities (5), ações internacionais (5), ações nacionais (5), índices de renda fixa (3) e taxas de câmbio (5) – com o intuito de identificar dentre os subgrupos quais intervalos possuem o maior e menor número de ativos com sua célula destacada. Posteriormente fez-se o mesmo processo em relação a todos os ativos, ou seja, calculou-se a porcentagem de células destacadas em azul em cada intervalo i em relação ao total de células no intervalo i dentre todos os ativos (28 ativos).

De maneira distinta ao que foi abordado na análise dos gráficos 19 a 42, os resultados obtidos nas tabelas são organizados por intervalos, não é feita a distinção dos valores de multifractalidade (MF1 e MF2), já que os valores máximos e mínimos dos parâmetros multifractais MF1 e MF2 são distintos.

Tabela 3 – Resultados obtidos nas etapas 2 e 4 para o modo de previsão de 1001 valores e *gap* 0 utilizando o parâmetro multifractal MF1 e o modelo Naive.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
AEX	50	70	71	73	56	56	59	56	59	61	64	72	76	74	74	78	72	88	75	100
FTSE	0	42	58	45	66	63	63	55	57	59	60	69	72	73	73	79	86	80	84	83
HSI	78	63	63	62	65	64	60	57	63	60	65	67	69	71	50	38	85	79	80	80
Ibovespa	83	67	62	64	66	62	68	65	60	64	64	48	54	56	64	68	73	81	69	73
TOPX	60	55	59	59	56	64	64	56	62	61	67	66	61	64	63	63	71	77	68	50
Boi gordo	47	49	49	50	54	74	76	82	85	87	84	73	66	71	73	84	79	65	76	75
Café Arábica	71	64	64	65	64	59	57	63	61	62	67	68	71	69	74	68	78	85	94	100
Café Robusta	56	57	54	59	64	63	65	60	59	69	66	67	66	67	60	61	57	49	62	67
Milho	100	100	88	58	71	58	53	60	62	60	62	60	60	62	59	69	67	78	94	60
Soja	66	65	64	66	69	68	59	58	56	56	56	63	61	63	65	66	57	56	42	60
AMZN	69	55	51	58	54	55	67	73	73	70	74	75	68	70	67	61	57	64	43	0
APPL	67	53	59	50	60	59	63	66	63	66	76	71	72	75	71	77	63	83	67	0
ATVI	54	50	58	53	58	68	73	68	68	66	68	70	70	59	58	51	57	76	89	63

NTFLX	58	64	62	66	71	64	67	67	63	67	68	62	62	67	66	63	61	68	64	80
WBD	47	55	59	63	57	55	61	67	60	67	69	77	78	79	67	72	73	72	76	73
BBDC3	71	55	62	57	64	64	55	59	53	63	62	62	71	75	77	75	77	73	75	79
BBDC4	61	59	66	64	58	64	66	62	55	57	59	58	61	70	68	74	75	77	75	78
ITUB3	61	66	61	62	59	62	65	63	53	50	NA	NA	NA	NA	NA	50	41	73	88	50
ITUB4	68	58	73	62	65	62	64	57	61	58	65	63	64	63	64	66	61	63	48	67
PETR3	78	72	74	76	65	56	61	60	61	69	62	67	64	67	73	61	50	29	40	0
IMA-B	86	86	72	60	65	62	58	50	56	64	72	75	78	85	83	85	57	88	57	50
IMA-G	91	78	72	63	57	66	67	65	67	61	71	61	59	63	65	73	70	68	47	65
Imag-ex-c	93	93	78	78	62	57	62	66	68	62	63	52	65	64	59	42	52	76	88	100
BRL-USD	70	61	56	59	61	56	61	66	76	76	61	75	66	68	52	52	48	37	67	25
EUR-USD	64	65	56	63	63	61	63	66	60	60	55	68	60	66	63	57	54	68	33	67
GBP-EUR	45	55	57	56	56	65	71	67	65	63	54	63	50	50	58	69	45	90	38	50
JPY-EUR	85	81	63	64	64	67	63	66	65	69	65	63	63	58	57	45	39	37	0	40
JPY-USD	69	76	72	69	65	63	64	60	59	57	59	61	66	71	72	69	59	46	65	75

NA² - Significa que não havia janelas deslizantes a serem contabilizadas no intervalo.

*Os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram abaixo da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em azul e os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram acima da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em amarelo.

Tabela 4 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo *i* para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF1 e o modelo Naive.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
Índices B. V.	60	60	80	60	40	40	20	20	20	20	60	80	60	80	80	60	100	100	100	80
Commodities	60	60	40	60	80	60	60	40	40	40	80	40	60	60	100	80	40	60	80	60
Ações Intern.	20	0	20	0	20	20	60	60	60	80	100	80	100	80	60	60	60	60	80	60
Ações Nacio.	80	60	40	60	60	80	40	20	0	40	20	40	20	40	80	60	60	60	60	60
Índices R. F.	100	100	100	33	33	33	33	67	67	33	100	33	33	33	67	67	0	100	33	67
Câmbio	60	80	40	40	20	60	80	80	60	60	40	80	60	60	40	40	0	40	20	40
Total	61	57	50	43	43	50	50	46	39	46	64	61	57	61	71	61	46	68	64	61

A partir da análise da tabela 3, nota-se que há vários intervalos com ótimas previsões e vários outros com péssimas, mas nem sempre há uma repetição de padrões. Existem três grandes concentrações de células destacadas em azul: os ativos que suas células são destacadas do 12° ao 20° intervalo; os ativos que suas células são destacadas do 1° ao 8° intervalo e os ativos que suas células são destacadas do 8° ao 13° intervalo. Porém os ativos não se limitam a terem células destacadas apenas dentre estas concentrações.

Com isso buscou-se a separação e análise dos ativos por subgrupos, a análise apresentada na tabela 4 traz a porcentagem de células destacadas em cada categoria de ativos e em seu final a porcentagem de células destacadas dentre todas as séries. Assim ao observar a

porcentagem de células destacadas é possível identificar com facilidade aqueles intervalos que tiveram baixas porcentagens.

Considerando que intervalos com porcentagens abaixo de 20% representam intervalos com previsões ruins e os intervalos com porcentagens acima de 80% representam intervalos com previsões boas, a multifractalidade pode servir como um indicador de perigo. Como pode ser visto nos intervalos:

- Índices de bolsa de valores: 7°, 8°, 9° e 10°;
- Ações internacionais: 1°, 2°, 3°, 4°, 5° e 6°;
- Ações nacionais: 8°, 9°, 11° e 13°;
- Índices de renda fixa: 17°, e
- Taxas de câmbio: 5°, 17° e 19°.

Em relação a análise das porcentagens dentre todos os ativos, nota-se que as porcentagens são próximas, tendo o 9° intervalo o maior número de previsões ruins e 15° o maior número de previsões boas.

Tabela 5 – Resultados obtidos nas etapas 2 e 4 para o modo de previsão de 1001 valores e *gap* 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo Naive.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
AEX	54	55	47	61	66	63	57	55	62	65	69	73	71	70	73	71	74	84	100	100
FTSE	45	44	50	57	55	63	63	60	60	59	60	67	71	70	73	73	84	77	89	86
HSI	69	59	65	60	63	66	62	61	61	59	67	65	67	69	45	50	63	95	71	80
Ibovespa	64	60	57	60	66	65	65	66	64	65	63	55	56	56	70	62	91	79	73	67
TOPX	40	61	72	66	61	56	62	61	57	60	66	64	64	63	61	60	69	79	61	67
Boi gordo	66	44	51	57	49	48	71	79	84	86	84	72	68	73	73	79	79	65	77	71
Café Arábica	70	61	64	62	62	63	61	60	62	63	62	68	67	75	69	70	69	79	82	94
Café Robusta	58	64	56	49	60	61	67	57	61	66	65	67	70	66	62	63	55	53	56	50
Milho	100	86	69	63	63	62	56	61	61	60	61	63	62	60	60	67	65	81	92	50
Soja	64	66	67	65	68	69	61	54	57	59	56	61	64	61	66	63	60	53	49	25
AMZN	46	64	54	63	56	54	60	67	71	73	69	73	71	69	71	63	56	63	52	50
APPL	62	55	62	56	54	56	64	66	63	67	74	71	77	74	68	72	75	75	67	0
ATVI	53	48	61	63	63	68	69	68	70	68	68	74	67	65	57	61	51	67	92	80
NTFLX	52	58	63	67	65	74	70	65	66	70	64	61	65	72	65	54	65	61	60	100
WBD	61	52	55	58	62	59	63	60	58	68	69	79	75	68	73	69	67	78	76	71
BBDC3	55	62	59	61	67	60	55	60	56	58	63	60	69	79	76	77	73	75	69	86
BBDC4	59	51	61	61	65	60	65	62	59	58	55	58	65	64	71	72	79	73	73	78
ITUB3	64	65	64	62	62	58	64	62	65	59	50	NA	NA	NA	100	32	63	78	100	50
ITUB4	62	65	67	63	64	61	62	58	60	60	66	68	63	60	66	64	64	61	52	60
PETR3	77	67	66	65	66	58	64	63	64	66	62	62	64	65	70	58	80	14	67	20
IMA-B	88	83	71	61	62	67	59	54	57	59	71	75	88	83	81	73	67	79	62	67
IMA-G	86	93	74	61	60	61	68	66	67	66	68	61	70	58	63	56	62	74	55	62

Imag-ex-c	85	98	95	69	66	63	60	63	66	68	63	63	61	55	66	57	56	54	58	71
BRL-USD	50	49	69	62	59	62	57	59	65	70	73	68	70	66	58	50	50	48	46	47
EUR-USD	78	66	70	70	61	57	60	60	60	56	53	61	57	63	68	60	64	73	36	67
GBP-EUR	61	54	55	57	61	64	69	67	67	64	62	62	57	50	51	71	48	73	43	100
JPY-EUR	83	70	73	62	57	67	65	64	62	65	65	65	63	62	68	65	62	47	100	67
JPY-USD	80	66	74	69	66	57	63	58	61	62	60	59	62	69	69	66	70	56	65	75

NA² - Significa que não havia janelas deslizantes a serem contabilizadas no intervalo.

*Os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram abaixo da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em azul e os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram acima da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em amarelo.

Tabela 6 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo *i* para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF2 e o modelo Naive.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
Índices B. V.	40	40	40	20	0	20	40	20	20	40	80	40	80	80	60	80	100	100	100	100
Commodities	60	60	40	40	40	20	60	60	40	40	60	40	80	60	80	80	60	60	40	40
Ações Intern.	0	20	0	20	40	40	40	40	60	100	80	80	100	60	80	80	40	80	40	60
Ações Nacio.	80	80	40	60	80	20	60	60	20	40	20	40	20	60	80	60	60	60	80	60
Índices R. F.	100	100	67	33	0	33	33	67	67	67	67	67	33	33	67	0	33	67	0	33
Câmbio	60	60	80	40	40	40	20	40	40	60	20	60	40	60	80	60	80	40	40	40
Total	54	57	43	36	36	29	43	46	39	57	54	54	61	61	75	64	64	68	54	57

Os resultados obtidos nas tabelas 5 e 6 são similares ao que foi descrito na análise anterior das tabelas 3 e 4, as diferenças são que: na tabela 5 a região de células destacadas concentra-se do 13° ao 20° intervalo e células destacadas mais dispersas nos intervalos anteriores e na tabela 6 as porcentagens dentre o total de ativos não são tão próximas. Considerando o mesmo critério anterior, os intervalos destacados por indicarem previsões ruins são:

- Índices de bolsa de valores: 4°, 5°, 6°, 8° e 9°;
- Commodities: 6°;
- Ações internacionais: 1°, 2°, 3° e 4°;
- Ações nacionais: 6°, 9°, 11° e 13°;
- Índices de renda fixa: 5°, 16° e 19°, e
- Taxas de câmbio: 7° e 11°.

Nota-se uma recorrência de intervalos destacados para as categorias de ações internacionais e nacionais e maior número de intervalos destacados com 0% de previsões boas. Na análise das porcentagens dentre todos os ativos, o 6° intervalo é destacado pelo maior

número previsões e ruins e o 15° (o mesmo destacado para o parâmetro MF1) pelo maior número de previsões boas.

As tabelas 7 a 10 representam a mesma análise, porém com o uso do modelo de previsão GARCH.

Tabela 7 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo *i* para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF1 e o modelo GARCH.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
AEX	100	83	78	70	75	57	44	80	75	56	100	75	100	83	100	63	67	67	100	100
HSI	60	100	75	90	89	90	91	90	73	65	58	68	61	67	54	67	91	71	86	50
TOPX	51	60	66	28	45	48	47	65	77	76	65	78	86	88	88	87	89	84	95	100
Boi gordo	72	72	73	63	68	93	95	93	92	95	95	91	90	89	82	75	70	68	71	81
Café Arábica	93	76	71	65	58	59	68	66	73	88	80	76	80	84	86	82	100	70	50	75
Café Robusta	87	91	84	78	81	94	100	97	87	83	74	71	74	52	66	82	79	78	88	90
Milho	100	33	82	86	83	82	87	89	93	88	91	94	92	90	91	93	94	100	94	60
Soja	100	99	98	98	98	94	78	67	67	82	89	84	86	83	75	69	56	43	44	40
AMZN	91	0	NA	NA	NA	100	100	33	45	60	46	36	28	43	33	37	73	50	60	NA
APPL	NA	100	100	100	100	100	100	83	42	28	12	20	15	14	21	0	0	0	0	NA
ATVI	68	67	56	53	77	80	94	85	93	94	96	88	85	82	77	64	49	74	100	75
NTFLX	100	100	96	85	55	38	58	71	83	95	98	92	96	76	52	30	18	17	30	0
WBD	100	93	100	93	95	82	96	79	59	57	25	34	30	24	20	27	40	75	100	NA
BBDC3	33	29	28	23	22	20	32	18	31	57	64	54	26	17	11	38	74	60	67	100
BBDC4	20	0	0	0	0	50	61	41	46	45	59	63	70	82	87	93	73	58	100	100
ITUB3	63	56	52	34	44	64	53	57	68	60	78	69	65	67	62	55	36	8	38	NA
ITUB4	50	50	NA	NA	100	NA	88	81	72	60	67	78	75	80	56	71	25	33	33	NA
PETR3	NA	NA	100	71	100	88	71	73	68	69	78	79	80	64	47	43	38	27	100	NA
IMA-B	33	16	24	45	75	84	68	80	100	100	100	100	100	38	63	83	100	73	58	43
Imag-ex-c	67	50	44	64	48	48	52	79	94	90	94	84	68	74	74	56	67	100	83	67
BRL-USD	100	100	97	91	84	86	77	79	82	78	79	84	97	94	90	85	53	50	23	25
EUR-USD	65	61	74	76	78	74	67	63	72	67	60	54	58	43	64	67	70	69	88	100
GBP-EUR	100	100	94	75	73	64	55	57	51	47	69	76	76	73	89	100	93	100	100	100
JPY-EUR	90	75	30	49	64	64	75	76	68	63	70	66	73	75	79	86	91	100	71	100
JPY-USD	67	61	60	37	34	40	44	61	72	73	83	80	80	79	83	89	93	95	92	85

NA² - Significa que não havia janelas deslizantes a serem contabilizadas no intervalo.

*Os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram abaixo da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em azul e os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram acima da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em amarelo.

Tabela 8 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo *i* para cada subgrupo de ativos e para o total de ativos utilizando o parâmetro MF2 e o modelo GARCH.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
Índices B. V.	67	33	33	33	67	33	33	67	67	33	100	33	100	67	67	33	100	67	67	67
Commodities	80	60	40	20	40	60	40	40	80	60	80	60	80	60	40	40	60	40	40	40

Ações Intern.	60	60	60	60	60	80	100	80	60	60	40	40	40	60	0	0	20	40	60	20
Ações Nacio.	40	20	40	20	40	40	60	60	60	60	80	60	60	60	20	60	40	40	60	40
Índices R. F.	0	0	0	0	50	50	50	50	50	50	50	50	50	0	50	50	50	50	50	0
Câmbio	100	100	80	60	80	40	40	40	20	40	60	60	60	100	100	80	80	80	80	80
Total	57	46	43	32	50	46	50	50	50	46	61	46	57	57	39	39	50	46	54	39

Ao analisarmos as tabelas 7 a 8, nota-se que as células destacadas possuem diversas vezes 100% de janelas deslizantes com a média de seus MAPEs menores do que a média geral (dos MAPEs), e um número maior de intervalos com ausência de janelas (NA). Existem também como apresentado anteriormente três grandes concentrações de células destacadas em azul: do 1º ao 5º intervalo; do 6ª ao 13º e do 14ª ao 20º. Tais concentrações são semelhantes ao que foi identificado nas análises dos gráficos 19 a 42, onde foi identificado três comportamentos distintos. Considerando o mesmo critério anterior, os intervalos destacados por indicarem previsões ruins são:

- Commodities: 4º;
- Ações internacionais: 15º, 16º, 17º e 20º;
- Ações nacionais: 2º, 4º e 15º;
- Índices de renda fixa: 1º, 2º, 3º, 4º, 14º e 20º, e
- Taxas de câmbio: 9º e 11º.

Observa-se na análise das porcentagens dentre todos os ativos que as porcentagens não são muito distantes, tendo o 4º intervalo o maior número de previsões ruins e 11º o maior número de previsões boas.

Tabela 9 – Resultados obtidos nas etapas 2 e 4 para o modo de previsão de 1001 valores e *gap* 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo de GARCH.

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º	20º
AEX	NA	67	78	83	100	100	100	100	64	50	38	67	67	93	78	60	75	67	50	100
HSI	88	73	82	80	60	78	100	86	80	77	100	82	79	40	47	50	60	100	67	NA
TOPX	0	24	40	49	58	53	51	57	75	75	67	78	84	88	88	90	89	81	100	100
Boi gordo	77	71	75	75	60	65	91	93	94	94	96	92	86	90	79	76	74	70	79	73
Café Arábica	79	67	59	60	73	60	78	80	77	79	81	79	78	71	80	79	100	67	50	75
Café Robusta	46	76	89	89	93	93	95	98	90	84	80	69	75	50	62	84	80	75	100	86
Milho	100	69	84	85	78	78	80	89	92	91	92	94	92	92	92	93	93	97	92	50
Soja	97	99	99	98	98	94	78	70	65	82	88	86	85	78	77	69	57	50	49	0
AMZN	91	0	NA	NA	100	NA	100	33	40	60	43	32	34	38	38	38	70	44	75	NA
APPL	NA	100	100	100	100	100	100	90	24	22	14	21	9	13	20	0	0	0	0	NA
ATVI	51	53	72	80	97	89	82	93	89	92	95	93	94	88	88	80	79	62	20	0
NTFLX	100	100	100	88	74	47	48	65	72	91	98	97	90	77	38	27	22	47	0	33

WBD	100	100	100	95	100	84	89	83	82	39	38	40	28	35	64	50	67	60	100	NA
BBDC3	0	5	12	50	57	53	27	0	25	23	23	53	62	36	26	18	50	68	75	100
BBDC4	33	33	0	50	21	9	44	39	55	49	49	67	65	88	86	93	85	64	86	100
ITUB3	42	52	47	48	46	53	49	58	70	70	74	65	60	65	78	41	31	40	33	NA
ITUB4	100	0	NA	100	100	82	78	75	50	67	89	80	67	60	50	100	0	0	50	NA
PETR3	NA	NA	100	71	100	78	83	71	59	80	79	78	69	68	35	50	20	57	NA	NA
IMA-B	15	10	33	42	63	84	73	72	92	100	100	100	NA	55	67	97	96	57	59	45
Imag-ex-c	80	100	100	53	43	53	43	69	94	89	90	85	62	73	83	72	67	80	75	80
BRL-USD	100	100	100	90	94	80	86	81	78	85	79	75	84	89	98	82	54	42	28	30
EUR-USD	100	50	66	55	70	85	78	82	56	63	67	63	58	53	45	66	85	63	90	100
GBP-EUR	50	65	53	57	70	67	67	73	65	56	64	71	80	74	93	94	93	100	100	100
JPY-EUR	88	94	84	71	65	75	74	75	72	71	63	63	60	60	51	69	77	100	NA	100
JPY-USD	39	53	50	50	55	50	48	54	63	65	73	80	82	84	80	98	93	90	91	83

NA² - Significa que não havia janelas deslizantes a serem contabilizadas no intervalo.

*Os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram abaixo da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em azul e os intervalos que os valores de suas médias locais ficaram acima da média geral (dos MAPEs) suas células estão coloridas em amarelo.

Tabela 10 – Porcentagem de células destacadas em relação ao total de células em cada intervalo de parâmetros MF2 em cada um dos ativos com o uso do modelo GARCH.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
Índices B. V.	33	0	0	0	33	67	67	67	67	67	67	100	67	67	67	67	100	100	67	67
Commodities	80	40	60	40	60	40	60	60	60	80	100	80	60	40	20	40	60	40	40	40
Ações Intern.	60	60	60	80	100	60	80	80	60	60	40	40	40	60	40	20	20	40	40	0
Ações Nacio.	20	20	20	60	60	80	60	60	20	40	60	80	40	60	40	40	40	40	40	40
Índices R. F.	50	50	50	0	50	50	50	50	100	100	100	100	0	50	100	100	100	100	100	50
Câmbio	40	80	60	60	80	60	60	80	40	40	60	60	60	60	60	60	80	80	60	80
Total	48	44	44	48	68	60	64	68	52	60	68	72	48	56	48	48	60	60	52	44

Analisando as tabelas 9 e 10, os resultados são semelhantes ao que foi apresentado na análise utilizando o parâmetro de multifractalidade MF1 e o modelo GARCH. Algumas diferenças então nas regiões com concentração de células destacadas em azul – nessa análise temos células mais dispersas e concentradas apenas nos intervalos centrais – e, o número de células com porcentagem baixas e com valores próximos de 0. Considerando o mesmo critério anterior, os intervalos destacados por indicarem previsões ruins são:

- Índices de bolsa de valores: 2°, 3°, 4°, 8° e 9°;
- Commodities: 15°;
- Ações internacionais: 16°, 17° e 20°;
- Ações nacionais: 1°, 2°, 3°, 9° e 15°

- Índices de renda fixa: 4º, 13º e 20º, e

A partir das porcentagens totais da tabela 10, considerando que o pior intervalo seja aquele que tenha a menor porcentagem, temos então três intervalos com desempenho ruim (2º, 3º e 4º) e o 12º sendo aquele com o maior número de previsões boas. Assim é possível concluir que para a utilização da multifractalidade da série como indicador de qualidade de previsões não é possível utilizar generalizações com ativos de diferentes segmentos econômicos, deve-se tomar cuidado até com generalizações dentro a um subgrupo específico.

Além disso os multifractais se mostraram eficazes para a identificação de intervalos ruins, já que há um número grande de intervalos destacados como bons.

5 CONCLUSÃO

Desvendar e entender o comportamento dos ativos do mercado financeiro é de extrema importância para a área de análise técnica e gestão de risco. Os investidores, cada vez mais, possuem acesso a uma grande quantidade de informações e podem desfrutar de um imenso arsenal tecnológico, já que para investir na atualidade, basta possuir um smartphone e uma conta em alguma corretora ou instituição bancária. Atualmente, conta-se com cerca de 4,6 milhões de investidores, um aumento de 35% em relação ao ano de 2021 em que havia 3,3 milhões, podendo grande parte desses investidores serem categorizados como grafistas, por avaliarem e tomarem suas decisões com base em gráficos históricos.

Sob o olhar da análise técnica, mais especificamente aos analistas estatísticos/quantitativos como classifica Murphy (2021), este trabalho analisou 28 ativos diferentes entre ações nacionais e internacionais, taxas de câmbio, índices de bolsa de valores mundiais, commodities e renda fixa, todos em cotações diárias, com o intuito de identificar se o grau de multifractalidade de uma série pode servir como indicador de qualidade de previsões, utilizando como ferramenta o método MF DFA (*Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*), desenvolvido por Kantelhardt (2002) para estimar os parâmetros multifractais e os modelos de previsão Naive e GARCH para o cálculo dos valores futuros, utilizando o indicador de erros de previsão MAPE.

Por falta de exemplos a serem seguidos na literatura buscou-se por meio de uma análise robusta desenvolver a lacuna apresentada. A hipótese foi desenvolvida chegando à conclusão de que os parâmetros multifractais podem sim servir como indicadores de qualidade de previsões. Em geral os ativos possuem uma espécie de digital, ou seja, intervalos específicos com seu melhor ou pior desempenho.

Como apresentado no capítulo anterior, utilizar os parâmetros multifractais (MF1 e MF2) como indicadores de qualidade de previsões, será mais eficaz na identificação de intervalos ruins. Ele funcionará como uma “luz vermelha” que acenderá indicando os intervalos de multifractalidade a serem evitados, podendo em alguns casos utilizar-se generalizações em subgrupos de ativos que pertençam ao mesmo segmento econômico.

Este trabalho trouxe, portanto, uma nova perspectiva do que já vem sendo trabalhado na literatura, trazendo ao investidor e analista técnico um indicador de confiabilidade, que combina um dos pilares da análise técnica com a principal característica da geometria multifractal, a autossimilaridade, sendo a identificação de padrões que repetem ao longo do tempo.

Com o advento da tecnologia e *softwares* de programação, o investidor pode simplesmente rodar a análise diariamente e com base nos parâmetros multifractais da série MF1 ou MF2, e decidir o quanto deve confiar em suas previsões para o próximo período. Dado a existência de tal correlação, cabe aos analistas encontrarem os intervalos ideais para cada ativo de interesse.

Para pesquisas futuras, sugere-se a reprodução dessa análise utilizando métodos de previsões mais sofisticados, como por exemplo as previsões utilizando-se o método de redes neurais, além de aumentar a quantidade de ativos dentre as categorias, explorar séries com frequências *intraday*. Outro ponto a ser desbravado seria o desenvolvimento dessa análise com a utilização de *machine learning*, podendo a inteligência artificial aprender, melhorar e trazer parâmetros ideais para cada categoria de ativo, com base em variáveis pré-definidas.

REFERÊNCIAS

- Abounoori, E., Shahrazi, M., & Rasekhi, S. (2012). An investigation of Forex market efficiency based on detrended fluctuation analysis: A case study for Iran. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391, pp. 3170-3179.
- Alam, N., Arshad, S., & Rizvi, S. A. R. (2016). Do Islamic stock indices perform better than conventional counterparts? An empirical investigation of sectoral efficiency. *Review of Financial Economics*, 31, pp.108-114.
- Ausloos, M. (2000). Statistical physics in foreign exchange currency and stock markets. *Physica A*, 285, pp. 48-65.
- Barbosa, Ruy (2005). *Descobrimos a geometria Fractal – para sala de aula*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora.
- Baviera, R., Pasquini, M., Serva, M., Vergni, D., & Vulpiani, A. (2001). Correlations and multi-affinity in high frequency financial datasets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 300, pp. 551-557.
- Benbachir, S., & Alaoui, M. E. (2011). A multifractal detrended fluctuation analysis of the Moroccan stock exchange. *International Research Journal of Finance and Economics*, 78, pp. 6-15.
- Bolgorian, M., & Gharli, Z. (2011). A multifractal detrended fluctuation analysis of gold price fluctuations. *Acta Physica Polonica B*, 42, pp. 159-169.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 21, pp. 307-327. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1). Acesso em: 6 de out. 2022.
- Box, G. E., & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Revised Edition. San Francisco: Holden Day.
- Cajueiro, D. O., Gogas, P., & Tabak, B. M. (2009). Does financial market liberalization increase the degree of market efficiency? The case of the Athens stock exchange. *International Review of Financial Analysis*, 18, pp.50-57.
- Calvet, L., Fisher, A. J., & Thompson, S. B. (2006). Volatility comovement: a multifrequency approach. *Journal of Econometrics*, 131, pp.179-216.
- Cao, G., & Xu, W. (2016). Multifractal features of EUA and CER futures markets by using multifractal detrended fluctuation analysis based on empirical model decomposition. *Chaos, Solution and Fractals*, 83, pp. 212-222.
- Charles, A. (2008). Forecasting Volatility with Outliers in GARCH Models. *Journal of forecasting*, 27, pp. 551-565.

- Cheng, Q., Liu, X., & Zhu, X. (2019). Cryptocurrency momentum effect: DFA and MF – DFA analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 526, pp. 120847. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.04.083>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Cho, P., & Lee, M. (2022). Forecasting the Volatility of the Stock Index with Deep Learning Using Asymmetric Hurst Exponents. *Fractal Fractional*, 6. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/fractalfract6070394>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Choi, S. Y. (2021). Analysis of stock market efficiency during crisis periods in the US stock market: Differences between the global financial crisis and COVID – 19 pandemic. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 574. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437121002600>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Costa Lopes, E. J. (2022). Uso de redes neurais profundas para previsão de curto prazo do preço da criptomoeda Ethereum. *Centro Universitário FEI*, São Bernardo do Campo. Disponível em: <https://repositorio.fei.edu.br/handle/FEI/4586>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Costa, J. C., & Lima, F. G. (2021). Análise da Volatilidade do BOVA11: Evidências entre os anos 2019 e 2020 através da abordagem ARIMA-GARCH. *21ª USP International Conference in Accounting*. São Paulo. Disponível em: <https://congressosp.fipecafi.org/anais/21UspInternational/ArtigosDownload/3132.pdf>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Cova, C. J. G. (Org.) (2011). *Finanças e mercado de capitais: Mercados fractais: a nova fronteira das finanças*. São Paulo: Cengage Learning.
- Czarnecki, L. & Grech, D. (2010). Multifractal dynamics of stock markets. *Acta Physica Polonica A*, 117, pp. 623-629.
- Da Silva Filho, A. C., Maganini, N. D., & Almeida, E. F. (2018). Multifractal analysis of Bitcoin market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 512, pp. 954-967. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.08.076>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74, pp. 427-431. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2286348>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Dutta, S. (2010). Multifractal detrended fluctuation analysis of SENSEX fluctuation in the Indian Stock Market. *Canadian Journal of Physics*, 88, pp. 545-551.
- Dutta, S., Ghosh, D., & Chatterjee, S. (2016). Multifractal detrended cross correlation analysis of foreign exchange and SENSEX fluctuation in Indian perspective. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 463, pp. 188- 201.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *The Econometric Society*, 50, pp. 897-1007. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1912773>. Acesso em 6 de out. 2022.

Feng, S., Wang, X., San, H., Zhang, Y., & Li, L. (2018). A better understanding of long-range temporal dependence of traffic flow time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 492, pp. 639-650. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.10.006>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Fernandes, J. P., & Da Silva Filho, A. C. (2019). Estudo do melhor grau de regressão para evidenciar a multifractalidade em séries temporais financeiras utilizando o método MF DFA. *Revista eletrônica do curso de licenciatura em matemática*, v. 1. Disponível em: <https://periodicos.unifacef.com.br/index.php/RELIMAT/article/view/1888/1345>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Fernandes, J. P., Costa, J. C., Lima, F. G., & Da Silva Filho, A. C. (2022). Quebra Estrutural: Análise da influência das informações de mercado no preço de uma opção de Petrobrás. *22ª USP International Conference in Accounting*. São Paulo. Disponível em: <https://congressosp.fipecafi.org/anais/22uspinternational/ArtigosDownload/3791.pdf>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Fonseca, E. (2012). *O estudo das propriedades multifractais de séries temporais financeiras*. Dissertação de Mestrado. Programa de Mestrado em Modelagem de Sistemas Complexos, Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo: São Paulo.

Freitas, P. S. A., & Rodrigues, A. J. L. (2006). Model combination in neural-based forecasting. *European Journal of Operational Research*, 173, pp. 801-814. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.06.057>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Galdi, F. C., & Pereira, L. M. (2007). Valor em Risco (VaR) utilizando modelos de previsão de volatilidade: EWMA, GARCH e Volatilidade Estocástica. *Brazilian Business Review*, 4, pp. 74-95. Vitória: ES.

Ghosh D., Dutta, S., & Samanta, S. (2012). Fluctuation of gold price: a multifractal approach. *Acta Physica Polonica B*, 43, pp. 1261-1274.

Grech, D. (2016). Alternative measure of multifractal content and its application in finance. *Chaos, Solutions and Fractals*, 88, pp. 183-195.

Han, C., Wang, Y., & Ning, Y. (2019). Comparative analysis of the multifractality and efficiency of Exchange markets: Evidence from Exchange rates dynamics of major world currencies. *Physica A*, 535. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437119313627>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Holschneider, M. (1988). On the wavelet transformation of fractals objects. *Journal of Statistical Physics*, 50, pp. 963-993.

Hurst, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. (1951). *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, pp. 770-799. Disponível em: <https://doi.org/10.1061/TACEAT.0006518>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Ihlen, E. A. F. (2012). Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in MatLab. *Frontiers in Physiology*, 3, pp. 1-18.

- Ivanova, K., & Ausloos, M. (1999). Low q-moment multifractal analysis of Gold Price, Dow Jones Industrial and BGL-USD exchange rate. *The European Physical Journal B*, 8, pp. 665-669.
- Jana, R.K., Ghosh, I., & Das, D. (2021). A differential evolution-based regression framework for forecasting Bitcoin price. *Annals of Operations Research*, 306, pp. 295-320. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-021-04000-8>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity, and serial independence of regression residuals. *Economics letters*, 6, pp. 255-259, 1980. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0165-1765\(80\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0165-1765(80)90024-5). Acesso em: 6 de out. 2022.
- Jorion, P. (2009). *Financial Risk Manager Handbook*. Canadá: John Wiley & Sons.
- Kakinaka, S., & Umeno, K. (2022). Asymmetric volatility dynamics in cryptocurrency markets on multi-time scales. *Research in International Business and Finance*, 62. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2022.101754>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Kantelhardt, J. W., Zschiegner, S. A., Bunde, E. K., Havlin, S., Bunde, A., & Stanley, H. E. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316, pp. 87-114.
- Karlaftis, M. G., & Vlahogianni, E. I. (2009). Memory properties and fractional integration in transportation time-series. *Transportation Research Part C*. Elsevier, pp. 444-453.
- Lawrence, M., O'Connor, M., & Edmundson, B. (2000). A field study of sales forecasting accuracy and processes. *European Journal of Operational Research*, 122, pp. 151-160.
- Li, G., & Shi, J. (2010). On comparing three artificial neural networks for wind speed forecasting. *Applied Energy*, 87, pp. 2313-2320. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2009.12.013>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Lima, F.G. (2004). *Um método de análise de modelos de previsão em sucessões cronológicas unidimensionais lineares e não-lineares*. (Tese de Doutorado). Faculdade de Administração, Economia e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Lima, FG. (2018). *Análise de Riscos*. São Paulo, SP: Atlas.
- Liu, J., Wang, P., Chen, H., & Zhu J. (2022). A combination forecasting model based on hybrid interval multi-scale decomposition: Application to interval-valued carbon price forecasting. *Expert Systems with Applications*, 191, pp. 116267. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116267>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- López, J.L & Contreras, J.G. (2013). Performance of multifractal detrended fluctuation analysis on short time series. *Physical Review E*, 87, pp. 022918. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.022918>. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Lux, T., Morales-Arias, L., & Sattarhoff, C. (2014). Forecasting Daily Variations of Stock Index Returns with a Multifractal Model of Realized Volatility. *Journal of Forecasting*, 33, pp. 532-541.

Maganini, N. D. (2017). *FGAMP: um novo método para previsão de séries usando parâmetros multifractais*. (Tese de Doutorado). Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo: Ribeirão Preto, SP. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/96/96133/tde-17072017-161414/publico/NataliaDMaganini_Corrigida.pdf. Acesso em: 6 de out. 2022.

Maganini, N.D., Silva Filho, A.C., Lima, F.G. (2018). Investigation of multifractality in the Brazilian stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 497, pp. 258-271. Disponível: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.12.126>. Acesso em: 17 de set. 2022.

Maganini, N.D., Rasheed, A. A, Yasar, M., & Sheng, H. H. (2022). Cross-listing and price efficiency: An institutional explanation. *Journal of International Business Studies*. Disponível em: <https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace;community-lie/handle/10438/32655>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. (1997). *Forecasting: methods and applications*. New York: John Wiley & Sons.

Mandelbrot, B. (1972). *Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: From the Covariance to RS Analysis*. *Annals of economic and social measurement*, 1, pp. 259-290.

Mandelbrot, B. (1975). *Les Objets Fractals: forme, hazard et dimension*. Paris: Flammarion.

Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman.

Mandelbrot, B. B., & Hudson, Richard. (2004). *Mercados financeiros fora de controle: a teoria dos fractais explicando o comportamento dos mercados*. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. Rio de Janeiro: Elsevier.

Mantegna R. N., & Stanley, H. E. (1996). Turbulence and financial markets. *Nature*, 383, pp. 587-588.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. *The Journal of Finance*, 7, pp. 77-91.

Matia, K., Ashkenazy, Y., & Stanley, H. E. (2003). Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities. *Europhysics Letters*, 61, pp. 422-428.

Matias, M. A., Silva, C. A., & Vieira, L. (2007). *Fractalidade em séries temporais: uma aplicação para uma série histórica de preços de minério de cobre*. In: _____. 7º Congresso USP de Controladoria e Contabilidade, 26.

Memon, B.A., Yao, H., & Naveed, H. M. (2022). Examining the efficiency and herding behavior of commodity markets using multifractal detrended fluctuation analysis. Empirical evidence from energy, agriculture, and metal markets. *Resources Policy*, 77. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301420722001635?via%3Dihub>. Acesso em: 6 de out. 2022.

- Mensi, W., Tiwari, A. K., & Yoon, S. M. (2017). Global financial crisis and weak-form efficiency of Islamic sectoral stock markers: An MF-DFA analysis. *Physica A*, 471, pp.135-146. Disponível em: 10.1016/j.physa.2016.12.034. Acesso em: 6 de out. 2022.
- Mitchell, M. (2009). *Complexity: A Guided Tour*. Oxford University Press.
- Morettin, P. A., & Toloi, C. M. C. (2006). *Análise de séries temporais*. São Paulo: Egard Blucher.
- Morettin, P. A., & Toloi, C. M. C. (2018). *Análise de series temporais*. São Paulo: Blucher.
- Mota, B. de Sá, & Fernandes, M. (2004). Desempenho de Estimadores de Volatilidade na Bolsa de Valores de São Paulo. *Revista Brasileira de Economia*, 58.
- Muniandy, S. V., Lim, S. C., & Murugan, R. (2001). Inhomogeneous scaling behaviors in Malaysian foreign currency exchange rates. *Physica A*, 301, pp. 407-428.
- Murphy, J. J. (2021). *Análise Técnica Do Mercado Financeiro: Um Guia Abrangente de Aplicações e Métodos de Negociação*. Rio de Janeiro: Alta Books.
- Norouzzadeh, P. & Jafari, G. R. (2005). Application of multifractal measures to Tehran price index. *Physica A*, 356, pp. 609-627.
- Norouzzadeh, P., & Rahmani, B. (2006). A multifractal detrended fluctuation description of Iranian rial: US dollar exchange rate. *Physica A*, 367, pp. 328-336. *of Forecasting*, pp. 551-565.
- Oh, G., Kim, S., & Eom, C. (2007). Market efficiency in foreign exchange markets. *Physica A*, 382, pp. 209-212.
- Oh, G., Eom, C., Halvin, S., Jung, W. -S., Wang, F., Stanley, H. E., & Kim, S. (2012). Multifractal analysis of Asian foreign exchange markets. *The European Physical Journal B*, 85, pp. 214-219.
- Perlin, M. S. (2018). *Processamento e análise de dados financeiros e econômicos com o R*. Publicação independente.
- Petropoulos, Fotios et al. (2021). *Forecasting: theory and practice*. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2012.03854>. Acesso em: 5 set. 2022.
- Philippsen, A. S. (2011). *Abordagem clássica e bayesiana para os modelos de séries temporais da família GARMA com aplicações para dados de contagem*. (Dissertação de Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Rabay, Yara Silvia Freire. (2013). *Estudo e aplicações da geometria Fratal*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.
- Raimundo, M. S. (2018). *Desenvolvimento de um modelo adaptativo baseado em um sistema SVR-Wavelet híbrido para previsão de séries temporais financeiras*. (Tese de Doutorado). Universidade de São Paulo, São Paulo. Disponível em:

<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3152/tde-13072018-143525/pt-br.php>. Acesso em: 06 out. 2022.

Ramirez, J. A., Rodriguez, E., & Ilbarra-Valdez, C. (2022). Long-range correlations and asymmetry in the Bitcoin market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 492, pp. 948-955. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/phsmap/v492y2018icp948-955.html>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Regô, C. R. C. (2012). *Multifractalidade dos rios brasileiros*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Amazonas, Manaus.

Ribeiro, C. V., Goldschmidt, R. R., & Choren, R. (2009). Métodos para previsão de séries temporais e suas tendências de desenvolvimento. (Monografia). Disponível em: https://www.academia.edu/9031328/M%C3%A9todos_para_Previs%C3%A3o_de_S%C3%A9ries_Temporais_e_suas_Tend%C3%Aancias_de_Deenvolvimento. Acesso em: 6 de out. 2022.

Schmitt, F., Schertzer, D., & Lovejoy, S. (1999). Multifractal analysis of foreign exchange data. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 15, pp. 29-53.

Shahzad, S. J. H., Nor, S. M., Mensi, W., & Kumar, R. R. (2017). Examining the efficiency and interdependence of US credit and stock markets through MF-DFA and MF-DXA approaches. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 471, pp. 351-363. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/phsmap/v471y2017icp351-363.html>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Sornette, D. (2003). *Why Stock Markets Crash? Critical Events in Complex Financial Systems*. Princeton University Press.

Souza, S. R. S., Tabak, B. M., & Cajueiro, D. O. (2008). Long-range Dependence in Exchange Rates: the case of the European Monetary System. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 11, pp.199-223.

Stosic, I., Silva, J. R. S., & Stosic, T. (2012). Multifractal analysis of pegged and floating Dollar- Real Exchange rates. CMAC. *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional*.

Su, Z. Y., Wang, Y. T., & Huang, H. Y. (2009). A Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Taiwan's Stock Exchange. *Journal of the Korean Physical Society*, 54, pp. 1395-1402.

Tan, Z., Zhang, J., Wang, J., & Xu, J. (2010). Day-ahead electricity price forecasting using wavelet transform combined with ARIMA and GARCH models. *Applied Energy*, 87, pp. 3606-3610. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2010.05.012>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Telli, S., & Chen, H. (2020). Multifractal behavior in return and volatility series of Bitcoin and gold in comparison. *Chaos, Solitons e Fractals*, 139. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077920303933?via%3Dihub>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Vandewalle, N., & Ausloos, M. (1998). Sparseness and roughness of foreign exchange rates. *International Journal of Modern Physics C*, 9, pp. 711-719.

Wang, K., & Huang, S. (2010). Using fast adaptive neural network classifier for mutual fund performance evaluation. *Expert Systems with Applications*. Elsevier. pp.6007-6011.

Wang, L., & Liu, L. (2020). Long-range correlation and predictability of Chinese stock prices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 549, pp. 124384. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843712030145X>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Wang, Y., Liu, L., & Gu, R. (2009). Analysis of efficiency for Shenzhen stock market based on multifractal detrended fluctuation analysis. *International Review of Financial Analysis*, 18, pp. 271-275.

Wang, Y., Wu, C., & Pan, Z. (2011). Multifractal detrending moving average analysis on the US Dollar exchange rates. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390, pp. 3512-3523.

Xu, Z., & Gençay, R. (2003). Scaling, self-similarity and multifractality in FX markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 323, pp.578-59.

Yin, T., & Wang, Y-M. (2022). Nonlinear Analysis and Prediction of Bitcoin Return's Volatility. *E&M Economics and Management*, 25, pp. 102-117. Disponível em: https://dSPACE.tul.cz/bitstream/handle/15240/164989/EM_2_2022_07.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 6 de out. 2022.

Zhang, A., Li, X., Su, G., & Zhang Y. (2015). A multifractal detrended fluctuation analysis of the ising financial markets model with small world topology. *Chinese Physics Letters*, 32, pp. 1-4.

Zhang, X., Liu, H., Zhao, Y., & Zhang, X. (2019). Multifractal detrended fluctuation analysis on air traffic flow time series: A single airport case. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 531, pp. 121790. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/eee/phsmmap/v531y2019ics0378437119310362.html>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Zunino, L., Tabak, B. M., Figliola, A., Pérez, D. G., Garavaglia, M., & Rosso, O. A. (2008). A multifractal approach for stock market inefficiency. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387, pp. 6558-6566. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108007462>. Acesso em: 6 de out. 2022.

Zunino, L., Figliola, A., Tabak, B. M., Pérez, D. G., Garavaglia, M., & Rosso, O. A. (2009). Multifractal structure in Latin-American market indices. *Chaos, Solutions and Fractals*, 41, pp. 23331-2340. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.013>. Acesso em: 6 de out. 2022.

APÊNDICES

Apêndice A – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e *gap* 0 utilizando o parâmetro multifractal MF1 e o modelo Naive.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
AEX	0	1	2	3	3	6	11	12	10	8	12	11	8	6	3	3	2	1	0	0
FTSE	0	1	0	1	2	4	8	10	10	9	9	12	10	8	6	4	3	2	1	0
HSI	1	2	4	7	9	11	11	11	10	8	8	7	4	3	1	0	0	1	0	0
Ibovespa	1	3	5	6	9	8	11	13	13	9	6	6	5	2	2	1	0	0	0	0
TOPX	1	1	1	2	5	8	9	7	8	8	9	8	9	7	6	4	2	1	1	0
Boi gordo	2	6	10	13	9	6	7	7	6	4	4	4	5	4	4	4	2	2	1	0
Café Arábica	2	4	6	7	9	10	12	12	7	6	5	4	4	3	3	3	2	1	0	0
Café Robusta	1	5	6	5	8	11	8	8	9	9	8	6	3	1	2	4	3	1	1	0
Milho	0	0	0	1	2	3	5	8	9	14	14	15	11	8	4	2	2	1	0	0
Soja	2	3	5	8	9	6	5	6	5	6	8	8	6	6	5	5	4	2	1	0
AMZN	1	1	3	5	6	7	8	7	7	5	5	8	9	9	8	6	4	2	1	0
APPL	1	4	9	8	9	10	10	10	9	7	5	5	5	4	2	1	0	0	0	0
ATVI	2	7	6	5	5	6	9	11	11	11	9	7	5	2	2	1	1	1	0	0
NTFLX	1	3	3	5	7	6	8	9	7	7	8	9	8	7	4	3	3	1	1	0
WBD	0	2	6	7	8	13	16	10	9	9	6	5	4	1	1	1	1	1	1	0
BBDC3	2	2	4	9	12	9	12	13	9	6	5	6	4	2	1	1	1	1	0	0
BBDC4	1	2	2	2	3	7	10	12	13	14	12	7	4	3	3	3	2	1	1	0
ITUB3	5	12	17	18	13	17	11	4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
ITUB4	1	3	6	6	7	10	10	12	9	6	4	4	3	4	5	4	3	2	1	0
PETR3	1	2	5	6	8	9	14	14	13	9	6	5	3	2	1	0	0	0	0	0
IMA-B	1	4	10	13	22	20	11	2	2	3	1	1	1	1	2	2	2	1	1	0
IMA-G	2	2	4	8	6	11	14	15	10	8	5	2	2	3	2	2	1	1	1	0
Imag-ex-c	3	1	3	6	8	7	9	12	11	13	7	7	5	2	1	1	1	1	0	0
BRL-USD	1	2	5	9	10	11	10	7	7	5	4	5	4	3	4	6	4	3	1	0
EUR-USD	0	2	3	6	8	12	13	10	10	8	6	5	4	3	3	2	1	1	0	0
GBP-EUR	0	2	7	10	13	13	15	13	9	6	3	2	2	2	1	1	0	0	0	0
JPY-EUR	1	1	2	3	5	8	11	12	13	13	12	7	5	3	2	1	1	1	0	0
JPY-USD	1	2	3	5	5	5	5	7	8	12	11	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Apêndice B – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e *gap* 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo Naive.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
AEX	1	2	2	2	4	6	9	10	9	11	12	10	8	5	4	3	1	0	0	0
FTSE	1	2	1	1	1	3	6	8	9	9	9	11	9	9	7	6	4	3	1	0
HSI	2	5	6	7	8	9	10	9	9	8	8	8	5	3	1	0	0	1	0	0
Ibovespa	2	4	7	8	9	9	11	12	13	8	6	5	3	2	1	0	0	0	0	0
TOPX	0	1	4	4	5	5	7	6	7	8	9	9	10	9	6	4	3	2	0	0
Boi gordo	1	4	7	10	10	8	8	8	8	5	3	4	5	6	4	4	2	2	1	0
Café Arábica	3	5	7	9	9	9	9	9	7	6	5	5	4	3	3	3	3	2	1	0
Café Robusta	1	5	6	4	5	10	10	7	10	10	10	7	3	2	2	4	3	1	1	0
Milho	0	0	1	1	2	3	5	8	10	13	15	14	10	8	5	2	2	1	0	0
Soja	1	3	5	8	9	5	4	5	6	6	8	7	6	6	6	5	4	3	1	0
AMZN	0	1	2	4	6	6	6	7	6	7	5	7	8	10	9	7	5	2	1	0
APPL	1	7	10	10	9	8	9	9	9	8	6	6	4	2	1	1	0	0	0	0
ATVI	4	11	6	4	4	5	8	10	11	11	9	6	4	2	2	1	1	0	0	0
NTFLX	2	4	7	6	6	7	8	6	8	9	9	8	6	4	2	3	2	1	0	0
WBD	2	2	3	6	8	12	16	11	9	10	7	6	3	1	1	1	1	1	1	0
BBDC3	4	6	5	8	11	8	10	11	8	6	6	4	3	3	2	1	1	1	0	0
BBDC4	1	2	3	3	4	6	11	11	11	13	12	6	5	4	3	3	2	1	1	0
ITUB3	1	3	11	17	18	14	14	12	6	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
ITUB4	1	3	8	7	8	10	10	12	8	5	4	2	3	4	6	4	3	2	1	0
PETR3	1	3	4	6	8	9	14	15	13	9	5	4	3	3	2	1	0	0	0	0
IMA-B	2	5	7	13	16	19	13	7	2	3	2	1	1	1	1	2	1	2	1	0
IMA-G	1	2	3	5	6	8	10	13	13	10	7	8	4	3	2	2	1	1	1	1
Imag-ex-c	1	2	2	3	6	7	8	8	10	10	10	8	6	6	5	2	2	1	1	1
BRL-USD	0	1	3	4	7	10	10	10	9	7	5	5	5	4	4	5	5	3	1	1
EUR-USD	2	6	9	9	10	10	10	8	8	6	6	5	3	3	3	2	1	1	0	0
GBP-EUR	1	4	8	11	13	12	12	10	7	6	5	2	2	2	1	1	0	0	0	0
JPY-EUR	1	2	3	4	5	7	9	9	9	9	11	11	7	5	3	2	1	0	0	0
JPY-USD	1	2	3	4	4	5	6	6	6	9	12	9	8	7	5	4	5	3	1	0

Apêndice C – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e *gap* 0 utilizando o parâmetro multifractal MF1 e o modelo GARCH.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	
AEX	1	5	7	8	10	6	7	8	6	7	3	3	2	5	3	6	7	2	1	1	
HSI	2	2	4	5	4	5	5	5	7	9	9	9	8	7	6	4	5	3	3	1	
TOPX	1	1	2	3	7	10	9	5	6	5	6	7	10	9	7	6	3	2	1	0	
Boi gordo	2	7	10	11	8	6	7	8	6	5	4	5	5	5	4	4	2	2	1	0	
Café Arábica	3	5	4	8	9	9	11	13	8	5	6	6	4	4	3	1	0	1	0	0	
Café Robusta	2	6	8	7	3	3	2	4	11	11	9	8	6	4	2	3	5	5	1	0	
Milho	0	0	1	1	2	3	5	8	10	14	13	14	11	9	5	2	2	1	1	0	
Soja	2	3	5	9	10	6	5	5	5	6	7	7	6	6	5	5	5	5	2	1	0
AMZN	3	0	0	0	0	0	0	1	3	5	7	8	12	16	15	18	10	2	1	0	
APPL	0	0	0	2	3	4	6	7	11	11	16	15	9	4	3	2	3	1	1	0	
ATVI	5	9	6	4	4	7	9	8	9	7	6	6	4	3	4	3	2	1	1	0	
NTFLX	1	3	4	5	6	8	8	6	4	7	7	7	5	10	4	5	6	2	2	1	
WBD	0	3	6	9	11	10	5	5	6	7	11	8	4	7	6	2	1	1	0	0	
BBDC3	1	3	6	6	4	3	4	4	5	10	9	11	12	7	5	3	4	2	1	0	
BBDC4	1	1	0	0	0	0	3	4	8	9	9	10	13	15	11	9	5	1	0	0	
ITUB3	1	4	11	11	8	9	7	10	7	4	5	4	5	5	3	2	2	1	1	0	
ITUB4	2	2	0	0	1	0	7	15	17	9	6	8	4	5	8	7	4	3	3	0	
PETR3	0	0	1	2	3	2	4	11	16	13	9	7	10	7	4	5	3	3	1	0	
IMA-B	2	8	23	10	8	14	14	4	1	1	1	0	0	1	1	3	2	3	1	2	
Imag-ex-c	1	0	2	2	7	14	9	3	4	7	7	8	9	9	10	2	2	1	1	1	
BRL-USD	0	1	3	6	8	12	12	13	10	8	6	2	2	3	2	2	4	4	2	0	
EUR-USD	9	8	8	14	9	6	9	6	5	4	4	3	3	4	4	2	1	1	1	0	
GBP-EUR	0	0	3	7	11	9	8	8	9	10	8	8	6	4	2	2	3	2	1	1	
JPY-EUR	0	0	2	3	6	8	11	11	14	13	10	7	4	3	2	1	1	1	0	0	
JPY-USD	1	2	4	5	7	5	6	7	6	7	8	7	5	5	5	4	6	4	3	2	

Apêndice D – Porcentagens obtidas na etapa 3 para o modo de previsão de 1001 valores e *gap* 0 utilizando o parâmetro multifractal MF2 e o modelo GARCH.

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
AEX	0	2	7	5	2	2	2	2	11	3	6	7	7	11	7	8	10	2	2	1
HSI	4	7	8	7	9	4	2	3	7	6	5	5	9	9	7	5	2	1	1	0
TOPX	1	2	6	5	6	6	7	5	5	5	7	8	11	10	7	5	3	2	1	0
Boi gordo	2	5	8	10	8	8	8	8	9	5	4	4	5	6	4	3	2	1	1	0
Café Arábica	5	9	10	11	10	8	8	8	6	6	5	4	3	2	1	1	0	1	0	0
Café Robusta	1	7	8	6	3	2	3	3	8	12	11	9	7	4	2	3	6	4	1	0
Milho	0	0	1	1	2	3	5	8	10	13	14	13	11	8	5	2	2	1	0	0
Soja	1	3	6	8	10	6	4	5	5	5	7	7	6	6	6	6	5	3	1	0
AMZN	3	0	0	0	0	0	0	1	2	6	7	8	12	15	16	16	10	2	1	0
APPL	0	1	1	3	4	6	6	4	7	10	16	14	9	6	3	3	3	1	1	0
ATVI	6	12	6	2	2	3	6	8	7	7	8	7	5	6	4	4	4	3	1	0
NTFLX	1	2	2	4	5	6	10	8	5	8	8	6	7	7	5	7	4	3	1	1
WBD	1	1	4	4	4	5	7	11	9	13	14	8	10	4	2	1	1	1	0	0
BBDC3	1	4	3	3	1	3	4	1	2	4	5	12	12	15	12	7	4	4	2	0
BBDC4	0	0	1	0	2	1	2	4	8	9	8	9	11	10	12	9	8	3	1	0
ITUB3	1	7	11	10	9	7	8	7	7	5	5	4	5	5	4	3	2	1	0	0
ITUB4	2	2	0	1	1	10	17	15	9	3	8	5	8	5	6	2	4	1	2	0
PETR3	0	0	1	2	3	2	6	13	15	14	8	8	8	7	5	4	3	2	0	0
IMA-B	3	12	15	12	7	11	15	7	2	1	1	1	0	2	2	2	2	2	2	2
Imag-ex-c	1	0	0	3	5	12	11	6	4	8	7	10	9	8	6	4	2	1	1	1
BRL-USD	0	1	3	2	5	7	9	10	12	12	9	6	5	3	3	2	2	2	3	1
EUR-USD	0	2	6	8	12	14	9	6	8	6	6	5	4	4	4	3	1	1	1	0
GBP-EUR	0	2	9	12	13	11	8	5	5	7	6	5	6	3	1	2	3	2	2	1
JPY-EUR	1	1	2	4	6	8	9	9	10	9	11	9	7	6	3	2	1	0	0	0
JPY-USD	1	2	2	5	6	6	7	7	7	7	8	6	7	6	5	5	5	4	3	1