

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE DE RIBEIRÃO PRETO
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA – ÁREA: ECONOMIA APLICADA

JOÃO PEDRO NASCIMENTO DO AMARAL

Modelagem de salto-difusão para a taxa DI: duas abordagens

Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Ribeirão Preto
2020

Prof. Dr. Vahan Agopyan
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. André Lucirton Costa
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto

Prof. Dr. Sérgio Kannebley Júnior
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Luciano Nakabashi
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia - Área: Economia Aplicada

JOÃO PEDRO NASCIMENTO DO AMARAL

Modelagem de salto-difusão para a taxa DI: duas abordagens

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia - Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo para obtenção de título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Versão Corrigida

(versão original disponível na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto)

Ribeirão Preto

2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Amaral, João Pedro Nascimento do Amaral.

Modelagem de salto-difusão para a taxa DI: duas abordagens / João Pedro Nascimento do Amaral – Ribeirão Preto, SP, 2020.

110 p.: il.; 30 cm

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia – Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências. – Universidade de São Paulo

Orientador: Laurini, Márcio Poletti

1. *SDE*. 2. Saltos. 3. Difusão.

Aos meus pais.

Agradecimentos

À Deus por ter guiado meu caminho até aqui e a cada dia continuar guiando. E também agradeço a ele por me dar paz, sabedoria e harmonia nos momentos necessários.

Aos meus pais, José Antônio e Regina, que tornaram possível o sonho de realizar o mestrado através de apoio emocional, amor incondicional, conselhos sempre necessários e também o apoio financeiro.

Aos meus avós por parte de mãe e pai e em especial meu avô João que sempre me motivou na vida e foi sempre um motivo de inspiração para mim.

Ao Meu orientador Márcio Poletti Laurini, o qual, eu tive a honra enorme de trabalhar, não somente na dissertação, mas através de disciplinas cursadas, trabalhos acadêmicos e congressos. O Márcio foi uma fonte muito motivacional e que esteve presente a todo momento, desde antes de começar a dissertação até o final, sempre muito prestativo e sempre solícito. Ao Márcio Laurini, minha eterna gratidão.

Aos membros da banca por terem aceitado o convite para participar.

Aos membros da banca das etapas de Qualificação e Pré-Defesa pelos comentários.

Aos amigos do mestrado, em especial ao Caio Nascimento e Henrique Plens, que contribuíram fortemente para manter o alto rendimento do trabalho, foco e para descontrair em momentos necessários.

Ao CNPq pelo apoio financeiro ao longo do mestrado.

Resumo

AMARAL, J. P. N. **Modelagem de salto-difusão para a taxa DI: duas abordagens**. 2020. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

O presente trabalho busca primeiramente modelar a curva de juros diária (DI) através de vários modelos de equações diferenciais estocásticas estimando-as através de dois métodos de estimação. O primeiro através da estimação usando o método de quasi-máxima verossimilhança (*QMLE*) e o segundo usando a estimação Bayesiana. Inicialmente o objetivo foi o de comparar as duas formas por meio das propriedades estatísticas, calculadas através da simulação e discretização de *Euler - Maruyama*, dos coeficientes das equações que são dadas pelo viés, *MAE*, *ME* e *RMSE*. Posterior a isso foram feitas trajetórias para comparação dentro da amostra e obtenção do *RMSE* da curva. Visto que em ambas as estimações os resultados apresentaram *RMSE* e viés considerável nos coeficientes, foi incluída a presença de saltos nos modelos para verificação de melhora na aderência dos modelos. O intuito, inicialmente, foi modelar a distribuição de saltos, partindo da hipótese de que os quantis mais extremos da primeira diferença da curva DI seriam saltos. Estes quantis apresentaram fortes evidências da distribuição para valores extremos (*GEV*). Posteriormente foi constatado que os saltos nos tempos de chegada seguindo uma distribuição de *Poisson* não-homogênea, traziam mais fortes evidências do que a modelagem homogênea quando incluídas as variáveis explicativas abordadas. O estudo demonstrou fortes evidências para a maioria dos modelos usados que a inclusão de saltos melhorou o ajuste baseado no *RMSE* para a curva de juros diária. Posteriormente a isso, foi feita a estimação por *QMLE* de forma convencional de um processo de salto-difusão sem a definição de saltos construída inicialmente. O estudo buscou comparar os resultados das duas abordagens de saltos e os resultados se mostraram parecidos no que foi considerado saltos, embora o número de tais eventos tenha sido menor. E também para esta estimação não foram obtidas grandes conclusões na comparação com a estimação por *QMLE* e Bayesiana feitas inicialmente.

Palavras-chave: *SDE*, Saltos, Difusão.

Abstract

AMARAL, J. P. N. **Jump-Difusion model to DI interest rate: two approaches**. 2020. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

The present work seeks first to model the daily interest curve (DI) using various models of stochastic differential equations estimating them using two estimation methods. The first through estimation by quasi-maximum likelihood method (QMLE) and the second using Bayesian estimation. Initially the objective was to compare the two forms by statistical properties, calculated through the simulation/discretization of Euler-Maruyama, of the coefficients of the equations that are given by the bias, MAE, ME and RMSE. After that, trajectories were made for comparison within the sample and obtaining the RMSE of the curve. Since in both estimates the results showed considerable bias and RMSE in the coefficients, the presence of jumps in the models was included to verify the improvement in the adherence of the models. The intention was initially to model the distribution of jumps, based on the hypothesis that the most extreme quantiles of the first difference on the DI curve would be jumps. These quantiles showed strong evidence of the distribution for extreme values (GEV). Subsequently it was found that the jumps in the arrival times following a non-homogeneous Poisson distribution, brought stronger evidence than homogeneous modeling when the explanatory variables were included. The study demonstrated strong evidence for most models used that the inclusion of jumps improved the adjustment based on RMSE for the daily interest curve. Subsequently, QMLE was estimated in a conventional way of a jump-diffusion process without the jump definition initially constructed. The study sought to compare the results of the two approaches to jumps and the results were similar in what was considered jumps, although the number of such events was lower. Also, for this estimation, no major conclusions were obtained in comparison with the estimation by QMLE and Bayesian made initially.

Keywords: SDE, Jump, Diffusion.

Lista de ilustrações

1	Taxa DI diária de 2007 a 2018	28
2	Gráfico dos dados faltantes	29
3	Taxa DI	29
4	Diferença da taxa DI	30
5	Histograma do DI	31
6	Histograma da Diferença do DI	31
7	<i>ACF</i> da Taxa DI	32
8	Diferença - Saltos	70
9	Histograma - Quantis	71
10	Gráfico - λ	74
11	<i>ACF</i> - λ	75
12	Lambda - Instantâneo	75
13	Gráfico - Função <i>Hazard</i>	81
14	Histograma - Tempos de chegada	82
15	<i>Duration</i> - Instantânea	82
16	<i>Duration</i> - <i>ACF</i> e <i>PACF</i>	83
17	Gráfico - Taxa DI ajustado pela Média	86
18	Gráfico - Taxa DI ajustado pela Mediana	86
19	Gráfico - Taxa DI ajustado pela Média	86
20	Histograma da diferença da Taxa DI	97
21	Saltos dos Modelos através do limiar 0.001	101

Lista de tabelas

1	Estatísticas da Taxa DI	28
2	Estatísticas da Diferença da Taxa DI	30
3	Teste <i>Jarque - Bera</i>	31
4	Teste de <i>Hartigans</i>	32
5	Teste <i>KPSS</i>	32
6	<i>AIC</i> - Modelos Difusão	50
7	<i>Dothan</i> - <i>QMLE</i> - 1000	51
8	<i>Dothan</i> - <i>Bayes</i> - 1000	51
9	<i>GBM</i> - <i>QMLE</i> - 1000	51
10	<i>GBM</i> - <i>Bayes</i> - 1000	52
11	<i>Vasicek 1</i> - <i>QMLE</i> - 1000	52
12	<i>Vasicek 2</i> - <i>QMLE</i> - 1000	53
13	<i>Vasicek 1</i> - <i>Bayes</i> - 1000	53
14	<i>Vasicek 2</i> - <i>Bayes</i> - 1000	53
15	<i>Brennan 1</i> - <i>QMLE</i> - 1000	54
16	<i>Brennan 2</i> - <i>QMLE</i> - 1000	54
17	<i>Brennan 1</i> - <i>Bayes</i> - 1000	55
18	<i>Brennan 2</i> - <i>Bayes</i> - 1000	55
19	<i>CEV</i> - <i>QMLE</i> - 1000	55
20	<i>CEV</i> - <i>Bayes</i> - 1000	56
21	<i>CIR VR</i> - <i>QMLE</i> - 1000	56
22	<i>CIR VR</i> - <i>Bayes</i> - 1000	56
23	<i>Ahn - Gao</i> - <i>QMLE</i> - 1000	57
24	<i>RMSE</i> - <i>QMLE</i> - 1000	59
25	<i>RMSE</i> - <i>Bayes</i> - 1000	60
26	Ligação da Família Exponencial	64
27	Teste <i>BNS</i>	69
28	Teste Binomial para Positividade	70
29	Teste <i>KS</i> - Distribuições	71
30	Teste <i>KS</i> - Ocorrência de Saltos	72
31	Teste para Distribuição Binomial	72
32	Média e Variância Amostral - <i>Poisson</i>	73
33	Probabilidades de Ocorrência	73
34	Teste de Constância	74
35	Regressão - <i>COPOM</i>	76
36	Probabilidades - <i>Copom</i>	76
37	Regressão - Dias da Semana	77
38	Probabilidades - Dias de Semana	77
39	Regressão - Feriado	78
40	Probabilidades - Feriado	78
41	Regressão - Dólar	79

42	Probabilidades - Dólar	79
43	Regressão - Todos Fatores	80
44	Probabilidades - Modelo Geral	80
45	Taxa - Exponencial	81
46	<i>RMSE</i> - Modelo de Saltos Homogêneos	83
47	Propriedades Estatísticas	84
48	Ajuste da amostra	85
49	<i>AIC</i> - Ajustes	87
50	<i>RMSE</i> - Ajustes	87
51	<i>Vasicek</i> - Tipo 2 - ajustado	88
52	<i>Brennan - Schwartz</i> - Tipo 2 - ajustado	88
53	<i>CIR SR</i> - Tipo 2 - ajustado	88
54	<i>CIR VR</i> - ajustado	89
55	<i>Ahn - Gao</i> - ajustado	89
56	<i>RMSE</i> - Nova Estimacão	90
57	<i>RMSE</i> - Estimacão por Quantil	90
58	Estimacão das Regressões do Limiar	96
59	<i>AIC</i> - Modelo de Salto-Difusão	97
60	Modelo de <i>Dothan</i> com Processo de <i>Poisson</i> em diferentes Limiares	98
61	Propriedades Estatísticas - Modelo de <i>Dothan</i> com Processo de <i>Poisson</i>	98
62	Modelo de <i>GBM</i> com Processo de <i>Poisson</i> em diferentes Limiares	98
63	Propriedades Estatísticas - Modelo de <i>GBM</i> com Processo de <i>Poisson</i>	98
64	Modelo de <i>Vasicek</i> - Tipo 2 com Processo de <i>Poisson</i> em diferentes Limiares	99
65	Propriedades Estatísticas - Modelo de <i>Vasicek</i> - Tipo 2 com Processo de <i>Poisson</i>	99
66	Modelo de <i>CIR VR</i> com Processo de <i>Poisson</i> em diferentes Limiares	99
67	Propriedades Estatísticas - Modelo de <i>CIR VR</i> com Processo de <i>Poisson</i>	100
68	Modelo de <i>CEV</i> com Processo de <i>Poisson</i> em diferentes Limiares	100
69	Propriedades Estatísticas - Modelo de <i>CEV</i> com Processo de <i>Poisson</i>	100
70	Probabilidades - Ocorrência dos Saltos	101

Sumário

	Lista de ilustrações	13
	Lista de tabelas	14
	Sumário	16
1	INTRODUÇÃO	19
2	REVISÃO DE LITERATURA	23
3	DADOS	27
4	MODELAGEM DE DIFUSÃO	35
4.1	Equações Diferenciais Estocásticas	35
4.1.1	Fórmula de <i>Itô</i>	36
4.1.2	Solução de uma <i>SDE</i>	36
4.1.3	Existência e Unicidade	37
4.2	Processos de <i>Wiener</i> e Movimento Browniano	38
4.2.1	Processos de <i>Wiener</i> padrão	38
4.2.2	Movimento Browniano Padrão	38
4.3	Modelos de Difusão	39
4.4	Estimação por <i>QMLE</i> , Estimação Bayesiana e Simulação	45
4.4.1	Estimação por <i>QMLE</i>	45
4.4.2	Estimação Bayesiana	46
4.4.3	Simulação	47
4.4.3.1	Método de <i>Euler</i> ou <i>Euler - Maruyama</i>	47
4.5	Resultados - <i>SDE</i> por <i>QMLE</i> e Estimação Bayesiana	48
4.5.1	Dothan	51
4.5.2	GBM	51
4.5.3	Vasicek	52
4.5.4	Brennan - Schwartz	54
4.5.5	CEV	55
4.5.6	CIR VR	56
4.5.7	<i>Ahn - Gao</i>	57
4.5.8	Outros Modelos	57
4.5.9	RMSE	59
5	MODELAGEM DE SALTOS	61
5.1	Construção dos Saltos	61
5.2	Processo de <i>Poisson</i>	62
5.3	Processo Composto de <i>Poisson</i>	63
5.4	Modelos Lineares Generalizados - <i>GLM</i>	63
5.5	<i>GEV</i>	64

5.5.1	TVE - Teoria do Valor Extremo	64
5.5.2	Máxima	65
5.5.3	Distribuições de Valor Extremo Generalizada - <i>GEV</i>	66
5.6	Estimação por Máxima Verossimilhança - <i>MLE</i>	66
5.6.1	<i>MLE</i> para <i>GEV</i>	67
5.6.2	<i>MLE</i> para <i>GLM</i>	67
5.7	Resultados - Saltos	69
5.7.1	Positividade	69
5.7.2	Distribuição dos Saltos	70
5.7.3	Poisson - Homogêneo	72
5.7.4	Poisson - Não homogêneo	73
5.7.5	<i>Duration</i>	81
5.7.6	Saltos com Distribuição de <i>Poisson</i> Homogênea	83
5.7.6.1	RMSE	83
5.7.6.2	Estimação	83
6	DIFUSÃO COM INCORPORAÇÃO DOS SALTOS	85
6.0.1	<i>SDE</i> sem o Processo Composto de <i>Poisson</i>	85
6.0.2	Processo de Difusão com <i>GEV</i> e <i>Poisson</i>	89
7	MODELAGEM DE SALTO-DIFUSÃO	91
7.1	Processos de <i>Lèvy</i>	91
7.1.1	Saltos de <i>Lèvy</i>	92
7.1.2	Medida de <i>Lèvy</i>	92
7.2	Processos de Salto-Difusão	93
7.3	Estimação	95
7.4	Resultados dos Processos de Salto-Difusão	96
8	CONCLUSÃO	103
	REFERÊNCIAS	107

1 Introdução

Tem sido constante a busca por modelos econométricos para a previsão de preços de ativos e variáveis econômicas como as taxas de câmbio e as taxas de juros. Segundo Ho e Lee 1986, com o aumento da volatilidade das taxas de juros e o uso de títulos de renda fixa, a precificação destas taxas tem se tornado de primeira preocupação para as pesquisas em finanças. Ao mesmo tempo, também é analisada a distribuição de probabilidade de séries temporais de tais ativos financeiros para possibilitar um cálculo melhor do risco associado a estes ativos.

Conforme Lund 2009, entender o comportamento das taxas de juros é importante para *policy makers* e para *traders* ou investidores. O primeiro almeja extrair o conteúdo econômico para tomar decisões e o segundo tem a intenção de prever seu comportamento para assumir posições lucrativas em títulos e derivativos assim como avaliar melhor os riscos de tais taxas.

Para modelar a taxa de juros em tempo discreto tem-se várias formas, como por exemplo, uma regressão (paramétrica ou não) linear ou não linear, ou através de modelos de séries temporais como processo autorregressivos, processos de variância não constante como *ARCH* e *GARCH*, e modelos de mudança de regime. Estes últimos, de modo geral, tentam modelar uma não linearidade através de vários processos autorregressivos em regimes diferentes. Já em tempo contínuo há modelos de difusão, saltos, saltos - difusão, hiperbólicos e outros.

A maioria das séries temporais disponíveis das variáveis são em tempo discreto e ao mesmo tempo é difícil ter acesso a todos os dados de uma série temporal (geralmente relacionado com problemas de coleta de dados). Entretanto, na literatura de estatística e econometria são vistos cada vez mais estudos em que é afirmado que a modelagem em tempo contínuo traz melhores resultados que a modelagem padrão baseada em modelos discretos. Os principais modelos de difusão são devidos a, Vasicek 1977, Cox, Jr e Ross 1985, Merton 1976 ¹, Chan et al. 1992 e Ait-Sahalia 1996, que por sua vez desenvolveu um modelo que engloba a maioria dos outros modelos existentes.

Porém devido à dificuldade em obter a série contínua de dados, deve ser feito um processo de discretização, que resulta em alguns problemas como viés dos estimadores associado a especificação incorreta. A limitação do cálculo convencional para lidar com problemas estocásticos também é uma dificuldade. Porém, com o uso do cálculo estocástico, essa limitação do cálculo convencional é resolvida. E logo as equações diferenciais estocásticas (*SDEs*) resolvem o problema dando significado a uma equação diferencial quando um ou mais dos seus termos estão sujeitos a flutuações aleatórias.

Modelar a volatilidade em função de surpresas também de extrema relevância. E Brenner, Harjes e Kroner 1996 discorda da conclusão de Chan et al. 1992 de que a relação entre a volatilidade da taxa de juros e o nível da taxa de juros é a característica mais importante de qualquer modelo dinâmico da taxa de juros a curto prazo (a sensibilidade da volatilidade da taxa de juros e seus níveis é exagerada na literatura). Pois, embora essa relação seja importante, modelar adequadamente o parâmetro de volatilidade em função de "notícias" inesperadas (choques) é igualmente importante. E logo, a modelagem incluindo saltos nas séries tem sido bem recebida tanto pelo mercado quanto pelo lado acadêmico e tem sido visto que essa modelagem apresenta maior robustez a *outliers*. A mesma permite colocar em alguns tempos um *outlier* ou um choque, como visto por Merton 1976.

O caráter da cauda é extremamente relevante para o modelo. Pois quando são colocados saltos no modelo, a distribuição muda, apresentando geralmente um pico maior e caudas mais pesadas. Por isso a importância

¹Usado muito em precificação de ativos, como opções.

de usar outras distribuições para modelagem além da normal, e logo alguma distribuição com caudas pesadas deve ser levada em consideração, segundo Focardi e Fabozzi 2004.

Lund et al. 2004 achou forte evidência de que saltos são importantes para assegurar a qualidade do modelo e especialmente para acomodação de *outliers* na taxa de juros de curto prazo. Para a volatilidade da taxa de juros é esperada uma alta volatilidade para países emergentes, segundo Edwards e Susmel 2003. Fato este que também advoga a favor da típica presença de saltos na taxa de curto prazo de juros, principalmente em países subdesenvolvidos e/ou emergentes, como o Brasil.

Para trabalhos envolvendo taxas de juros e processos de salto-difusão, Filho, Carlos e Gonçalves 2015, seguindo Das 2002 e Johannes 2004, tenta capturar o efeito informacional da taxa de juros de curto prazo para o Brasil através de um modelo de salto-difusão com saltos seguindo uma distribuição de *Poisson* e foi achado que a volatilidade do mercado de renda fixa é capturada através da introdução de saltos no processo estocástico característico. Essa estrutura também permitiu verificar o conteúdo informacional de eventos específicos como as reuniões do *COPOM*² e leilões de títulos públicos.

Filho, Carlos e Gonçalves 2015 cita que a maioria dos modelos de estrutura a termo implica que a taxa de juros se move continuamente seguindo um processo de difusão, e estudos mais recentes apresentam evidências empíricas fortes de que as taxas contém inesperadas e descontínuas mudanças de grande magnitude, o que é um forte ponto a favor da presença de saltos.

O presente trabalho tem o objetivo inicial de verificar as propriedades dos estimadores de uma gama de modelos existentes para taxa de juros no contexto de difusão e saltos para a modelagem da taxa de juros de contratos interbancários no Brasil (Depósito Interbancário - DI) e verificar quais os modelos apresentaram os melhores ajustes para os dados utilizados e as propriedades estatísticas para os coeficientes dos modelos.

A taxa DI é a principal referência de curvas de juros no Brasil junto com a Selic, e por isso o foco do trabalho é verificar quais modelos podem ser utilizados no contexto das características apresentadas por esta curva (taxa DI). A taxa de juros, tanto a DI quanto a Selic, apresenta um comportamento um tanto peculiar em comparação com outras variáveis e pode-se citar a ocorrência de saltos na série, influência relevante de outras variáveis em seu comportamento, multimodalidade, longa dependência, alta curtose e outras características, além da Selic ser considerada o principal instrumento para política monetária no país.

Na metodologia do trabalho, foi primeiramente feita uma estimação dos parâmetros para os diversos modelos de difusão apresentados e utilizados em finanças, que estão presentes no Capítulo 4, utilizando o método de quasi-máxima verossimilhança (*QMLE*) e a abordagem Bayesiana. Posterior a isso, são realizadas as simulações das trajetórias de curvas formadas a partir dos coeficientes estimados nos métodos citados acima e extraídas as propriedades estatísticas dos estimadores (*RMSE*, viés, *MAE* e *ME*).

Com o intuito de melhorar os resultados obtidos (*RMSE* da curva e as propriedades estatísticas dos coeficientes), foi feito um estudo sobre saltos para a série DI (Capítulo 5) partindo do pressuposto de que estes seriam os quantis mais extremos da curva de primeira diferença da taxa DI. Também foi feita a análise de variáveis explicativas para tais saltos, através do *GLM*. Em seguida foi sugerida uma abordagem para modelagem de difusão com incorporação de saltos (Capítulo 6) para melhora das propriedades estatísticas vistas antes e do *RMSE* da curva, que foi a utilização da distribuição *GEV* para amplitude dos saltos, somado a ocorrência com distribuição de *Poisson*.

E por fim, foi feita a estimação de um processo de salto-difusão por *QMLE* na forma tradicional com simulação para obtenção das propriedades estatísticas dos coeficientes e comparação com a abordagem

²COPOM ou Comitê de Política de Monetária

desenvolvida anteriormente que parte do princípio de uma construção de saltos através da primeira diferença da série DI.

O trabalho obteve como resultado as propriedades estatísticas dos estimadores tidos por *QMLE* e estimação Bayesiana através de 1000 simulações da série DI. Para a comparação destas estimações, foram obtidas diferenças nos parâmetros em alguns modelos e para as propriedades estatísticas, de modo geral, o *drift* apresentou melhores resultados na estimação Bayesiana. Para a diferença de parametrização apresentada em alguns modelos, houve diferença significativa nos estimadores e suas propriedades. E as taxas de longo prazo DI de alguns modelos se mostraram divergentes da realidade.

O trabalho feito também demonstrou forte evidência de presença de saltos na taxa DI brasileira e que há uma série de fatores que têm influência nela que por sua vez são: a variável dólar, feriados, reuniões do *COPOM* e dias da semana e que a ocorrência e comportamento destas variáveis realmente trazem impacto na ocorrência de saltos.

A estimação de difusão com incorporação de saltos em duas etapas através da retirada dos saltos posterior estimação através da *QMLE* trouxe evidências de que a presença de saltos acaba por inflar a componente da difusão/volatilidade dos modelos na maioria dos casos. E que a retirada dos saltos possibilita melhor ajuste e modelagem dos modelos de difusão com melhora na estimação dos parâmetros de difusão principalmente.

Com o intuito de comparar os resultados encontrados na estimação em duas etapas dos saltos e da difusão em separado, foi estimado também o processo de difusão em sua forma tradicional com estimação por *QMLE* com posterior simulação para obtenção das propriedades estatísticas das partículas de *drift*, difusão e saltos com estes últimos sendo modelado como um Processo Composto de *Poisson*. Os resultados mostraram que para alguns modelos, como o *GBM*, o processo de difusão apresentou melhores resultados que a estimação por *QMLE* inicial e a estimação Bayesiana. Porém para outros modelos como o de *Dothan*, os resultados não foram satisfatórios. Entretanto, o limiar escolhido conseguiu identificar os saltos com qualidade.

Os Capítulos são apresentadas da seguinte forma: no Capítulo 2 há uma revisão de literatura, o Capítulo 3 apresenta os dados utilizados para o trabalho, suas estatísticas descritivas e algumas análises da série DI, o Capítulo 4 apresenta uma revisão da abordagem teórica para os modelos de difusão, a metodologia abordada e os resultados obtidos. O Capítulo 5 mostra o arcabouço teórico utilizado, a metodologia usada para os saltos e os resultados obtidos com modelagem. O Capítulo 6 apresenta os resultados obtidos com a junção dos Capítulos 4 e 6. O Capítulo 7 apresenta a estimação de um processo tradicional de Salto-Difusão, e o Capítulo 8 contém a conclusão do trabalho.

2 Revisão de Literatura

A taxa de juros de curto prazo é um dos mais importantes e fundamentais preços determinados no mercado financeiro. Muitos modelos têm sido apresentados para explicar seu comportamento, e em geral estes modelos utilizam uma estrutura de modelagem em tempo contínuo. Estes fornecem uma estrutura rica para especificar o comportamento dinâmico da taxa de curto prazo. E muitos desses modelos de estrutura a termo implicam que a média e variância condicional das mudanças na taxa de curto prazo dependam do nível da taxa de juros.

Em economia e finanças aplicações como apreçamento de opções, apreçamento de desconto de títulos e outros modelos de apreçamento de ativos têm sido desenvolvidos usando equações diferenciais estocásticas. Merton 1976, Brennan e Schwartz 1979, Vasicek 1977, Cox, Jr e Ross 1985, Chan et al. 1992 e Ait-Sahalia 1996 desenvolveram modelos através desse tipo de equação que são a base de toda a modelagem de estrutura a termo da taxa de juros.

Porém, de acordo com Gómez-Valle e Martínez-Rodríguez 2019, na literatura financeira embora seja assumido que a taxa de juros se mova continuamente e ela seja modelada como um processo de difusão, recentes estudos têm mostrado que a mesma contém mudanças descontínuas e inesperadas. Gómez-Valle e Martínez-Rodríguez 2019 alega que isso é devido a algum fenômeno de mercado tal como surpresas ou choques em alguma outra variável de importância como a taxa de câmbio, por exemplo.

Garcia, Perron et al. 1991 constata que a média da taxa de juros real é alterada por saltos ocasionais decorridos de importantes eventos estruturais e esses saltos podem explicar também a não rejeição da hipótese nula de raiz unitária para a série, o que origina um outro ponto de pesquisa relevante.

Segundo Das 2002, a informação surpresa resulta em taxas de juros descontínuas, mas isso não é novidade para os participantes do mercado. Sorwar 2011 cita que estudos têm demonstrado que o comportamento da taxa de juros pode ser melhor explicado se no processo de difusão padrão for incluído uma parte de saltos já que os processos com saltos capturam algumas características empíricas. E Amin 1993 diz que o preço de um ativo pode mudar devido a um evento raro, que por sua vez é definido como um evento com baixa probabilidade de ocorrência em algum dado período, ou seja, um *outlier* ou evento extremo. Quando eventos raros acontecem, o preço salta potencialmente para algum outro estado, apresentando uma descontinuidade (podendo ser negativa ou positiva).

Johannes 2004 argumenta que a presença de saltos nas séries indica que os modelos de difusão puros são mal especificados (porém podem ser melhorados com fatores de difusão adicionais) e desenvolve um procedimento para testar a má especificação com saltos induzidos. Segundo ele, os resultados atestam para a forte evidência da presença de saltos. O modelo definido por Johannes 2004 é visto através da equação abaixo:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t-))dW(t) + d\left(\sum_{n=1}^{N(t)} X(\tau_{n-}) (e^{Z_n} - 1)\right) \quad (2.1)$$

onde $W(t)$ é o movimento browniano, $N(t)$ é o processo pontual duplamente estocástico. A especificação do salto implica que a probabilidade de um salto chegar sobre um curto intervalo de tempo é $\lambda(X(t)dt)$. No tempo de salto τ_n , o tamanho do salto induz uma descontinuidade que depende da taxa de juros corrente a vista. A distribuição de probabilidade do tamanho do salto é log-normal e $X(t)$ não pode saltar negativamente. O modelo implica que os saltos ocorrem em momentos aleatórios e imprevisíveis, o que é uma implicação tanto da homogeneidade do tempo quanto da continuidade da intensidade do salto. Isso pode, a princípio,

parecer estar em desacordo com a observação de que muitos dos eventos que induzem saltos ocorrem em intervalos regulares.

Porém, Johannes 2004, ressalta que não é o fato de que um anúncio ocorre que importa, mas sim o fato de que o anúncio contém um componente grande e imprevisível. Segundo Johannes 2004, em todas as semanas, é necessária uma análise dos resultados para um número considerável de anúncios e, apenas se houver, um número significativamente maior do que o esperado, existe uma resposta no mercado. Isto é especialmente verdade para as mudanças de alvos do *Federal Reserve*, que são frequentemente antecipadas. E também diz que não é possível modelar explicitamente todos os eventos planejados regularmente que causam saltos. A razão é que haveriam muitos anúncios que se mostrariam importantes.

Das 2002 desenvolve um modelo *Poisson* gaussiano das taxas do *FED* para capturar efeitos surpresa e mostra que esse modelo oferece uma boa descrição estatística do comportamento de curto prazo da taxa de juros e é útil para entender muitos fenômenos empíricos. Segundo ele, os processos de saltos de *Poisson* capturam características que não são capturadas pelos modelos gaussianos. As análises feitas suportam muitas aplicações, como testes de intervenção do *FED*, que por sua vez é mostrado ser importante fonte de saltos (surpresas) na taxa de juros assim como os efeitos de dias da semana. O modelo de Das 2002 é:

$$dX(t) = k(\theta - X(t))dt + v dW(t) + J d\pi(h) \quad (2.2)$$

onde θ é a tendência central para taxa de juros que sofre reversão a taxa k , J é o salto aleatório com distribuição de *Poisson* para as chegadas com frequência de chegada definida pelo parâmetro h que denota o número de saltos por ano e o tamanho do salto pode ser constante ou variando de acordo com uma distribuição de probabilidade. Das 2002 coloca restrições nos parâmetros de *drift*, difusão e salto para garantir uma solução forte e única.

Das 2002, usa o processo de salto-difusão para modelar saltos nos dias da semana, dando uma probabilidade para cada dia da semana de um salto ocorrer e fazendo os dias serem uma variável *dummy*. Por exemplo, os saltos seriam mais prováveis às segundas-feiras, já que o lançamento de informações reprimidas no fim de semana pode aumentar a possibilidade de uma grande mudança nas taxas de juros. Da mesma forma, a expiração de uma opção pode injetar saltos no comportamento das taxas de juros, e isso seria mais provável às quartas e quintas-feiras nos EUA. Saltos também podem ocorrer às sextas-feiras, quando a negociação de última hora pode criar excessos de volatilidade.

Saltos podem surgir da intervenção do *Federal Reserve* nos mercados de títulos. O Comitê Federal de Mercado Aberto (*FOMC*)¹ se reúne periodicamente e informa sua mesa de mercado aberto sobre a faixa que desejam estabelecer para a taxa dos *Fed Funds*. É possível que essas reuniões formem um evento de informação importante. Das 2002 analisa a probabilidade de saltos diante desses encontros.

Filho, Carlos e Gonçalves 2015 adotou o processo estocástico com reversão à média e saltos sugerido por Das 2002 para o caso brasileiro em conjunto com a modelagem da variância através de um *ARCH(1)* que mostrou ser superior ao processo sem *ARCH(1)* e ao processo sem salto. Filho, Carlos e Gonçalves 2015 usa para estimar o processo salto-difusão a maximização da função de verossimilhança usando a função característica através da função de distribuição. Filho, Carlos e Gonçalves 2015 também testa a normalidade da Selic através do cálculo da curtose e assimetria, e logo o teste de *Jarque - Bera* para a normalidade é rejeitado.

Johannes 2004 analisa também a conexão entre os saltos e a chegada de notícias macroeconômicas. Os resultados indicam que os saltos são os principais canais em que informações sobre a macroeconomia entram

¹Similar ao *COPOM* no Brasil.

na estrutura a termo. Os resultados mostram que os saltos ocorrem quando os anúncios contêm componentes significantes não observados, ou seja, não é o anúncio que causa o salto mas o seu componente surpresa. Ou seja, caso não haja componente surpresa no anúncio, a chance de salto diminui. Logo, os saltos são um mecanismo significativo e intuitivo de capturar o comportamento das caudas.

Segundo Kou 2002, dois enigmas emergem de investigações empíricas da fórmula de *Black-Scholes*²: o primeiro é a característica leptocúrtica, que significa que o retorno da distribuição de ativos tem pico mais alto e caudas mais pesadas que a normal. Segundo Xiao et al. 2010, para considerar o comportamento não normal, muitos pesquisadores consideram distribuições de retornos como a Distribuição de Pareto, a hiperbólica generalizada, ou outras.

E o outro enigma citado por Kou 2002 é a *volatility smile* (para o modelo ser correto, a volatilidade deveria ser constante). Para tratar isso, Kou 2002 usa o modelo de salto exponencial com difusão por ser simples de derivar soluções analíticas. Kou 2002 cita que muitos trabalhos foram realizados para solucionar esses enigmas, usando desde teoria do caos, fractais, indo até modelos hiperbólicos, difusão, entre outros. O problema da maioria é obter uma solução analítica.

De acordo com Amin 1993, o modelo discretizado pode ser usado para estimar os parâmetros de processos de salto-difusão que não possuem expressões simples para os momentos ou a função de verossimilhança. Além de que pode ser usado para calcular numericamente os momentos ou a função de verossimilhança da distribuição.

Quando a *SDE* não produz solução de forma fechada, é possível resolver o problema com simulação. Porém ao fazer a discretização causa-se viés no estimador da simulação, geralmente. Esse viés, segundo Broadie e Kaya 2006, pode causar muitos problemas, dado que não se sabe a sua magnitude. Porém, Johannes 2004, mostra através de Simulação *Monte-Carlo* que o viés da discretização de *Euler-Maruyama* é pequeno nos modelos de salto-difusão, o que argumenta a seu favor.

Segundo Chan et al. 1992, os modelos de Merton 1976, Vasicek 1977 e Cox, Jr e Ross 1985, são mal-especificados para dados empíricos dos EUA e o modelo de Merton 1976 e Vasicek 1977 permitem taxa de juros negativa além de partirem do princípio da volatilidade constante (ignoram o enigma da *volatility smile*), e a literatura vasta cita que a taxa de juros não apresenta volatilidade constante, portanto é de se esperar resultados não satisfatórios nas propriedades estatísticas. Chan et al. 1992 cita também o valor do γ que deve ser maior ou igual a 1 para melhor dinâmica da taxa de juros (nos EUA), logo o modelo irrestrito de Chan et al. 1992 provavelmente deve ser o que melhor desempenha essas condições (nos EUA), de acordo com essas características para os EUA ou países similares.

Gómez-Valle e Martínez-Rodríguez 2019 calcula a curtose e a assimetria da distribuição da taxa de juros, assim como realiza também o teste de *Jarque-Bera*³ para normalidade. E o resultado é que a série exibe um excesso de curtose significativo quando comparado com a distribuição Gaussiana possuindo assim um maior pico e caudas mais pesadas. Logo, ele também conclui que um processo de salto-difusão é mais adequado para modelar a taxa de juros.

Os saltos formam um mecanismo significativo e intuitivo de capturar o comportamento das caudas. Segundo Johannes 2004, a variância de taxas baixas é explicada em metade pela variância do processo difusão enquanto as altas taxas são mais explicadas pelos saltos.

Das 2002 sugere como estudo futuro que tipo de informação surpresa causam saltos e já em Johannes 2004, fora verificado que as maiores causas de saltos nos EUA eram: anúncio do estado de desemprego, anúncio da

²Fórmula usada para precificação de ativos, principalmente derivativos.

³Teste usado para verificar a normalidade baseado na assimetria e curtose

política monetária pelo *FED*, e em terceiro eventos que dizem respeito à políticas econômicas em algum país de grande relevância econômica no mundo.

Assim, o outro objetivo deste trabalho, além de verificar as propriedades estatísticas dos modelos para ajuste a dados brasileiros, foi o de verificar se a incorporação de saltos nos modelos através de duas abordagens propostas melhoram as propriedades estatísticas e estimação dos parâmetros e também o de verificar a existência de algumas variáveis explicativas propostas para os saltos. A primeira abordagem de saltos parte do pressuposto inicial de que os quantis extremos (1%, 5%, 10%, 90%, 95% e 99%) da primeira diferença da série *DI* são saltos e logo é feita a estimação por *MLE* para a ocorrência (homogênea ou não) e para distribuição da amplitude (*GEV*) dos saltos, o que por sua vez segue uma abordagem diferente de Das 2002, Johannes 2004 e Filho, Carlos e Gonçalves 2015 de salto-difusão. E a segunda abordagem é a estimação mais corriqueira feita através de *QMLE* de um processo de salto-difusão tradicional utilizando um limiar.

Para a solução da *SDE* do processo de difusão com saltos, como em geral soluções explícitas de uma *SDE* são infreqüentes, são utilizados métodos numéricos em tempo discretizado e então um grande número de realizações amostrais do processo é simulado e os parâmetros relevantes são estimados, pois segundo Glasserman 2013 esses métodos são úteis quando o cálculo dos estimadores teóricos exatos é impossível ou difícil e eles dão aproximações desses estimadores baseado na simulação do verdadeiro processo de geração dos dados.

O próximo passo do trabalho, depois de ter calculado os estimadores dos modelos e suas propriedades estatísticas, visto quais eram os melhores modelos, e ter feito uma comparação com os resultados achados na literatura, foi verificar os eventos que podiam ser considerados cisnes-negros e que causavam saltos nas taxas de juros no Brasil, dentre os sugeridos (feriados, reuniões do *COPOM*, saltos no dólar e dias da semana). A probabilidade de ocorrência desses saltos foram estimadas numa regressão de *Poisson*, diferentemente de Johannes 2004 nos EUA, já que ele usufruiu da metodologia tradicional de salto-difusão. A primeira metodologia abordada aqui foi feita através da separação de datas, seus respectivos eventos e as variações na taxa de juros. E foi analisado através dos modelos, quais foram considerados saltos. Foi analisado também o efeito de reuniões do *COPOM* na taxa de juros, similar ao feito por Das 2002 nos EUA, porém com metodologia diferente também.

Ao final do trabalho, foram definidos quais modelos responderam melhor aos dados empíricos brasileiros dentre os propostos, os seus estimadores, as propriedades dos estimadores (*RMSE*, *MAE*, viés e *ME*). Também foram definidos alguns dos possíveis eventos extremos que causam saltos (os principais) nas taxas de juros e o poder da interferência da política monetária (probabilidades) na taxa de juros através da expectativa do anúncio. Como último passo do trabalho também foi feita a abordagem tradicional de estimação dos processos de salto-difusão e comparação entre a outra abordagem proposta. Além de ter a verificação de que se alguma das abordagens melhoram as propriedades estatísticas dos coeficientes estimados das *SDEs*.

3 Dados

A Taxa DI diária é calculada como a média das operações ocorridas num único dia, desconsiderando as operações dentro de um mesmo conglomerado financeiro e faz referência aos CDIs (Certificados de Depósitos Interbancários) que pela definição é evidente que só é negociado no mercado interbancário, transferindo recursos de uma instituição financeira para outra. Os CDIs são títulos emitidos pelos bancos como forma de captação ou aplicação de recursos excedentes com objetivo de aumentar a liquidez de determinada instituição financeira.

De acordo com a B3, o ativo e as estatísticas da Taxa DI são calculadas e divulgadas pela própria B3, apuradas com base nas operações de emissão de Depósitos Interfinanceiros pré-fixados, pactuadas por um dia útil e registradas e liquidadas pelo sistema B3, conforme determinação do BACEN¹. No universo do mercado entre bancos são selecionadas as operações de um dia útil de prazo (*over*), considerando apenas as operações realizadas entre instituições de conglomerados diferentes (Extra-grupo), e não considerando as operações Intra-Grupo. As estatísticas são, portanto estatísticas da população DI *Over* prefixado no Extra-Grupo.

A partir de 01/10/2018, a metodologia para apuração da Taxa DI passa a se basear na observação ou não das duas condições abaixo:

1. O número de operações elegíveis para o cálculo da Taxa DI for igual ou superior a 100;
2. O somatório dos volumes das operações elegíveis para o cálculo da Taxa DI for igual ou superior a R\$ 30 bilhões.

Se no dia de apuração da Taxa DI, ao menos uma das duas condições nos itens acima não for observada, a Taxa DI será igual à Taxa Selic divulgada no dia. Se no dia de apuração da Taxa DI as duas condições relacionadas acima forem conjuntamente observadas, a metodologia de apuração propõe que o cálculo seja baseado em grupos de taxas e valores conforme metodologia definida desde 07/10/2013.

Sua principal característica é a relação com a taxa Selic (taxa básica de juros do Brasil). O movimento da taxa DI está diretamente relacionado com os movimentos da taxa Selic. Esta taxa representa a remuneração das instituições financeiras nas operações com títulos públicos e é um indicador pelo qual as taxas de juros brasileiras se balizam. O *COPOM* utiliza essa taxa como um dos principais instrumentos de política monetária no País para controlar suas taxas de juros. Segundo Vartanian, as taxas Selic e DI são referências balizadoras do mercado e funcionam como *benchmark* de rentabilidade de diversos ativos financeiros. E servem como ancoragem na tomada de decisão em determinado momento de investimento. A taxa DI, como já citada anteriormente, é originária das transições entre bancos com objetivo principal de manter uma quantidade de caixa preestabelecida pelo Banco Central. E caso não apresente as condições necessárias, seu valor será igual a taxa Selic, o que pode indicar uma alta correlação. É importante ressaltar que a taxa Selic por ser lastreada em operações com títulos públicos federais, apresenta um risco menor que a taxa DI. Porém, na prática o que se observa é uma remuneração maior pelos investimentos indexados à taxa Selic. Segundo Rocha, Moreira e Magalhães 2002, a formação da taxa de juros envolve muita complexidade, devido a muitos mercados interligados, grau de austeridade da política monetária, tipos de devedores e operações (curto e longo prazo), condições legais para recuperação de créditos e o risco soberano. E essas variáveis se relacionam diretamente no spread entre a taxa de juros e a taxa considerada livre de risco pelo mercado.

¹Banco Central do Brasil

É importante estudar a taxa DI pela sua relação direta como indicador da economia do País, isto é, esta taxa tem ligação com o risco do país, seus títulos, a remuneração de empréstimos, a estabilidade e níveis de inflação do Brasil, e movimentos em outras variáveis de grande importância como índices da bolsa de valores, preços de ativos e movimentos da taxa de câmbio. E estudar esta taxa pode trazer benefícios no controle e previsão de outras variáveis que têm relação de dependência com a taxa DI, ou no estudo desta própria variável, que por sua vez é o objetivo deste trabalho.

O conjunto de dados utilizado neste trabalho conta como componente principal a taxa de juros de curto prazo (DI diária), que por sua vez foi coletada para o período de 2007 a 2018 (figura 1) para a estimação de parâmetros. Esses dados foram coletados da base do banco de dados do Banco Central do Brasil e esta amostra conta com 3131 observações. Outros dados foram utilizados para estimação dos saltos. São eles: dias de reuniões do *COPOM*, dólar diário, inflação e datas de feriado (Brasil e EUA).

Neste período, a taxa variou de 0.049% no início de 2007 até 0.025% aproximadamente no fim de 2018, o que seria equivalente no caso anualizado a 13,16% para início de 2007 e 6,4% aproximadamente para final de 2018, de acordo com a figura 1.

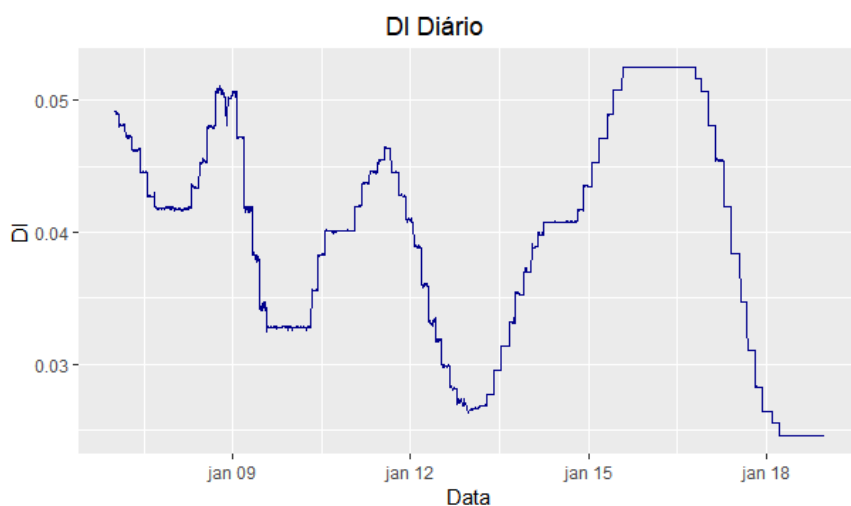


Figura 1 – Taxa DI diária de 2007 a 2018

As estatísticas da série DI para o período utilizado podem ser vistas na figura 1. E na tabela, é visto que há fortes evidências para rejeitar a normalidade da série, observando-se principalmente a assimetria e a curtose.

Estatística	DI
Mínimo	0.0246
Mediana	0.0408
Média Aritmética	0.0398
Máximo	0.0525
Desvio Padrão da Média	0.0002
Variância	0.0001
Desvio - Padrão	0.0085
Assimetria	-0.2363
Curtose	-1.0117

Tabela 1 – Estatísticas da Taxa DI

Antes de realizar as estimações, foi feita uma interpolação de dados usando filtro de *Kalman* utilizando um modelo de nível local, já que o período utilizado considera 252 dias úteis em um ano e há ocorrência de

feriados e datas comemorativas em alguns destes dias. Para evitar os problemas relacionados a falta de dados, foi realizada tal interpolação que pode ser vista no gráfico da figura 2.

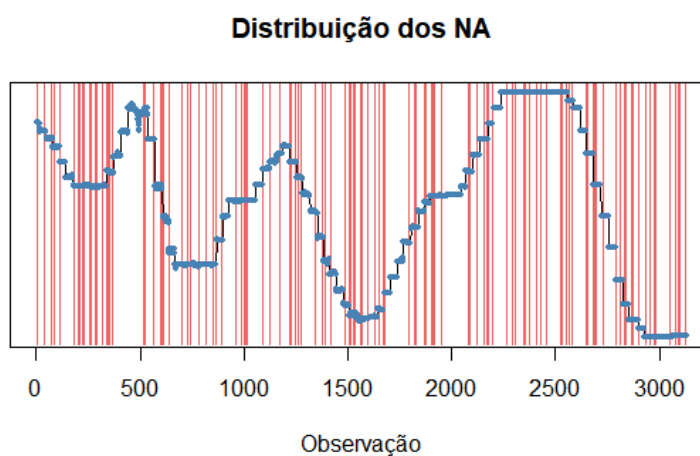


Figura 2 – Gráfico dos dados faltantes

Este gráfico mostra os dados faltantes (dados em branco, como em dias de feriado, por exemplo) em vermelho dentro de toda a amostra e que foram interpolados para ajuste de observações. O número de dados em branco foi de 118 observações, o que representou 3.77% da amostra. Foram encontrados no máximo 2 dados faltantes seguidos num total de 14 vezes.

Para o período desde 2000, a trajetória da taxa de juros em nível pode ser vista na figura 3. ²

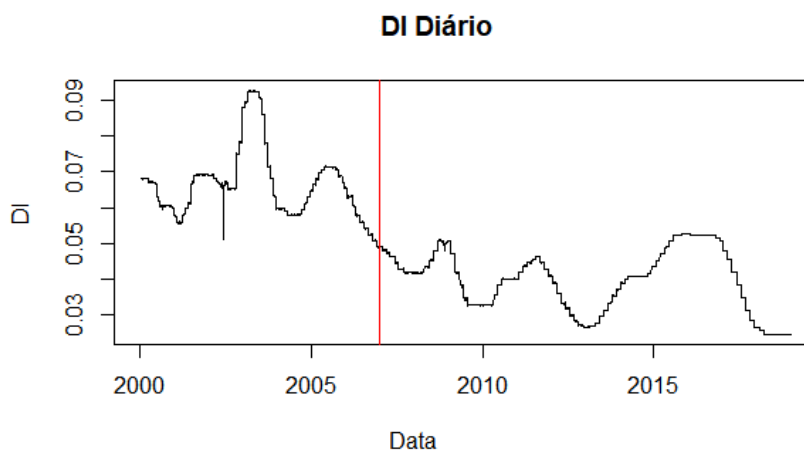


Figura 3 – Taxa DI

O gráfico da curva DI pode ser visto na figura 1 e suas estatísticas na tabela 1, e logo para a variação (primeira diferença) da taxa DI, tem-se a figura 4.

²Para o período antes do plano real, há um problema de não estacionariedade e muitas quebras na série, e por isso esta amostra não será utilizada em nosso estudo

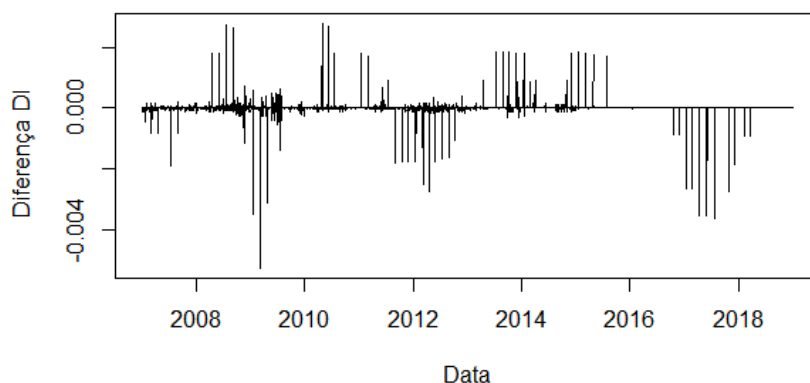


Figura 4 – Diferença da taxa DI

Na figura 4, pode-se ver que as maiores variações de queda foram primeiramente entre 2008 e 2010, que ocorreram provavelmente devido ao efeito da crise econômica mundial de 2008-2009, e a maioria das variações de alta, posteriores a 2011, ocorreram provavelmente devido à crise política - econômica do país que ocorreu no governo Dilma ³ e com impacto nos períodos subsequentes. Posteriormente foi tido um movimento de baixa na taxa de juros a partir de 2017.

Das 2002 e Filho, Carlos e Gonçalves 2015 sugerem a utilização de modelos com capacidade de saltos caso haja excesso de curtose na primeira diferença. Característica que por sua vez pode ser constatada na tabela 2 sobre a diferença da DI.

Estatística	Diferença DI
Mínimo	-0.0053
Mediana	0
Média Aritmética	0
Máximo	0.0028
Desvio - Padrão da Média	0
Variância	0
Desvio - Padrão	0.0003
Assimetria	-4.3367
Curtose	90.7511

Tabela 2 – Estatísticas da Diferença da Taxa DI

Na tabela 2, as estatísticas de mediana, média, e algumas outras foram aproximadas para zero como a média (6 casas decimais) e a variância (8 casas decimais). É vista uma curtose de 90.7511, fato este que corrobora a rejeição da normalidade, que deveria apresentar valor 3 para distribuição gaussiana.

A fim de tentar inferir algo sobre a distribuição característica do DI, foi feito o histograma da figura 5.

³Governo da Presidente Dilma Rousseff que se deu entre 2011 e 2016

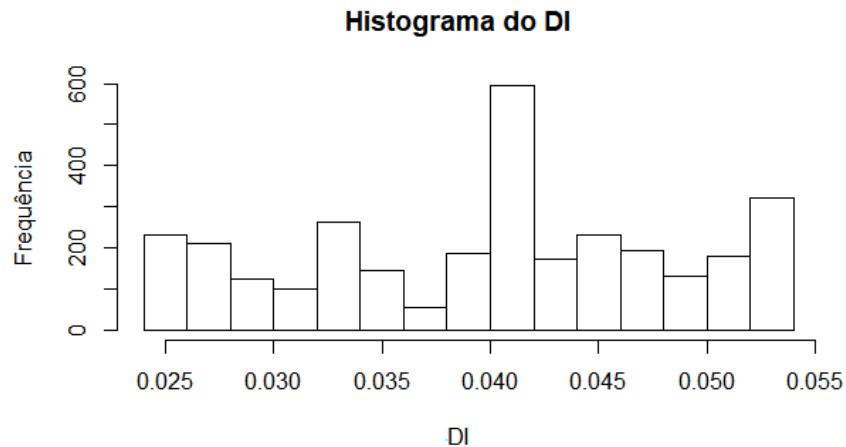


Figura 5 – Histograma do DI

Pode-se observar que através da figura 5, que as frequências nas caudas são muito maiores do que no caso normal, assim como o pico onde se encontra a média. Para o caso da diferença, no histograma na figura 6 pode-se ver que a diferença apresenta um pico bem acima da distribuição normal e assimetria para direita.

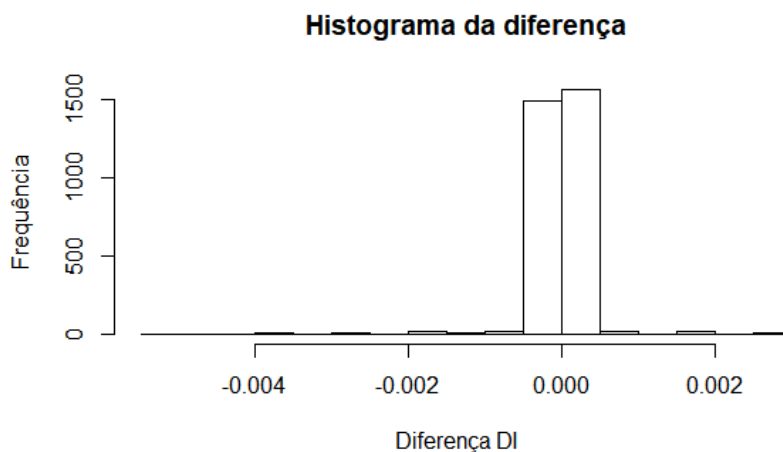


Figura 6 – Histograma da Diferença do DI

Para verificar a normalidade foi feito um teste de normalidade, *Jarque - Bera*, que pode ser visto na tabela 3, similar ao feito por Filho, Carlos e Gonçalves 2015.

	DI	Diferença DI
Estatística do teste	162.64852	1084238.02356
P-valor	0.000	0.000

Tabela 3 – Teste Jarque - Bera

De acordo com a tabela 3, referente ao teste *Jarque - Bera*, pode-se rejeitar a normalidade de ambas as séries, tanto da série DI, quanto da sua diferença, dado que o *p-valor* próximo de zero indica a rejeição da hipótese nula de normalidade.

No histograma da figura 5, pode ser vista hipótese de uma multimodalidade. Baseado nisso, foi feito o teste de multimodalidade de *Hartigans*, de acordo com Hartigan, Hartigan et al. 1985, com os resultados

descritos na tabela 4:

Método	Teste de <i>Hartigans</i>
Estatística do teste	0.0504
P-valor	0.000

Tabela 4 – Teste de *Hartigans*

O teste foi feito com um *p-valor* simulado em 10000 replicações, e de acordo com este teste, rejeita-se hipótese nula de unimodalidade já que o *p-valor* encontrado foi muito próximo de zero.

Para a análise também foi realizado o teste *KPSS*⁴ para as séries e também foi vista a função de autocorrelação. Para o DI, a série apresentou um comportamento típico de dependência infinita, que pode ser visto no gráfico da *ACF*⁵ na figura 7.

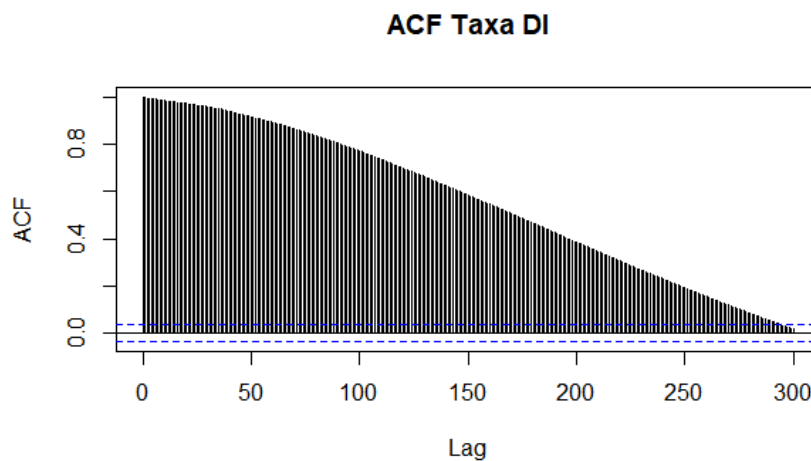


Figura 7 – ACF da Taxa DI

Para o teste *KPSS*, os resultados são mostrados na tabela 5.

	DI	Diferença DI
Estatística do teste	2.42425	0.3727
P-valor	0.01	0.0889

Tabela 5 – Teste *KPSS*

De acordo com a tabela 5, é rejeitado a hipótese nula de que não existe raiz unitária para a série DI e para o caso da diferença entre as taxas DI, não se rejeita a hipótese nula para não existência de raiz unitária.

Das 2002 e Filho, Carlos e Gonçalves 2015 sugerem a utilização de saltos no modelo caso haja excesso de curtose na diferença entre as taxas DI, o que pode ser visto na tabela 2. E isso corrobora ainda mais o estudo dos saltos em específico ou a inclusão de componentes surpresa (saltos) nos modelos usados, como fez Filho, Carlos e Gonçalves 2015, caso o ajuste não seja tão bom sem essa variável.

A normalidade da série em nível como da série em diferença também é rejeitada na teste de *Jarque - Bera*, de acordo com a tabela 3, o que advoga a favor de modelos em que envolvam caudas mais pesadas, como por exemplo, a modelagem usando *GEV*, distribuição generalizada para valores extremos, na caudas da distribuição.

⁴Teste para verificar a estacionariedade nas séries

⁵A função de autocorrelação é uma medida de correlação entre as observações de uma série temporal que são separadas por unidades de tempo

Em distribuições simétricas unimodais, a moda coincide com a média e com a mediana como na distribuição normal, e de acordo com as estatísticas descritivas vistas anteriormente na tabela 1, há forte evidência da curva DI ser assimétrica e logo apresentar uma moda que não coincida com a média ou mediana. Isto somado ao fato de que a média não seja constante no tempo favorecem a especulação de que a série DI possa apresentar um carácter multimodal.

A fim de inferir mais características estatísticas da série DI com relação ao aspecto anteriormente mencionado, foi feito o histograma, visto na figura 5, e nisso é visto características de multimodalidade na série de acordo com os gráficos. E esta característica por sua vez é testada com o teste de *Hartigans*, de acordo com Hartigan, Hartigan et al. 1985, e os valores são vistos na tabela 4.

A multimodalidade pode ser causada por uma mudança de regime em algum momento no tempo, sendo ocasionado ou não por outra variável explicativa, ou saltos frequentes na série, por exemplo. E para isso existem alguns modelos em tempo contínuo que permitem essa característica, como o *Double - Well*.

Para estudar o comportamento da série DI em relação a sua dependência com o passado, foi feito o gráfico da função de autocorrelação, *ACF*, e nisso é observado um comportamento de longa dependência para série DI com sugestão de presença de raiz unitária de acordo com o teste na tabela 5, o que pode ser ocasionado pelos saltos da série DI, segundo Garcia, Perron et al. 1991, como já citado no Capítulo 2.

4 Modelagem de Difusão

Neste Capítulo é feito um arcabouço teórico para as Equações Diferenciais Estocásticas (*SDEs*), para os modelos de difusão usados em finanças e que são usados na modelagem da taxa de juros DI neste trabalho e para a metodologia de estimação para tais modelos. E também é explicada a parte de simulação e discretização de *Euler-Maruyama* que foi usada para obter as propriedades estatísticas dos coeficientes dos modelos de difusão usados. Posterior a isso são feitas as estimações dos modelos propostos utilizando *QMLE* e a estimação Bayesiana e em seguida a extração, através da simulação, das propriedades estatísticas dos coeficientes de cada modelo utilizado para a taxa de juros DI.

4.1 Equações Diferenciais Estocásticas

Equações diferenciais estocásticas (*SDEs*) resolvem o problema de uma equação diferencial quando nela um ou mais dos seus termos estão sujeitos a flutuações aleatórias. Paralelo ao caso das integrais estocásticas, a solução de uma *SDE* é um processo estocástico (distribuição) e não uma função determinística, de acordo com Applebaum 2009.

De modo informal, a solução de uma *SDE* deveria ser uma "perturbação" de uma equação determinística associada. Ou seja, a solução de uma *SDE* deveria ser um limite em tempo contínuo de algum processo em tempo discreto ¹ obtido por discretização de uma equação estocástica.

Um *Processo de Itô*, ou integral estocástica, é um processo da forma:

$$Z(t, w) = \int_0^t \varphi(s, w) ds + \int_0^t \psi(s, w) dB_s(s, w) \quad (4.1)$$

onde $\varphi(s, w)$ é o *drift* e $\psi(s, w)$, $B_s(s, w)$ comporiam a parte da difusão com $B_s(s, w)$ sendo o movimento browniano.

Não é possível escrever uma equação diferencial somado a um termo de ruído branco que admite soluções no domínio das funções ordinárias. Entretanto pode-se escrever uma equação de integral estocástica como a acima da seguinte forma:

$$X(t, w) = \int_0^t \varphi(s, X) ds + \int_0^t \psi(s, X) dB_s \quad (4.2)$$

A equação acima pode ser escrita na forma diferencial como segue abaixo:

$$dX(t, w) = \varphi(t, X) dt + \psi(t, X) dB_t \quad (4.3)$$

A equação acima define uma equação diferencial estocástica. É importante lembrar que o movimento browniano não é diferenciável, então não se pode dividir a equação acima por dt , como seria feito no cálculo

¹O limite em tempo contínuo de um passeio aleatório é um Movimento Browniano.

convencional. De modo geral pode-se dizer que uma *SDE* é uma forma abreviada de se escrever uma integral estocástica ou *Processo de Itô*.

4.1.1 Fórmula de Itô

A *fórmula de Itô* é a equivalência estocástica da fórmula de mudança de variáveis da integração normal. Suponha então que se tenha a forma reduzida em *SDE* de um *Processo de Itô*:

$$dZ_t = adt + b dB_t \quad (4.4)$$

E suponha que se tenha outro processo estocástico Y_t , que é uma função da forma $Y_t = g(t, Z_t)$. E suponha também que g é duas vezes diferenciável em $[0, \infty) \times \mathbf{R}$. Pode ser demonstrado que Y_t é outro *Processo de Itô*. Então a *Fórmula de Itô* é dada explicitamente por:

$$\partial Y_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} a + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 t} \frac{1}{2} b^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} b dB_t \quad (4.5)$$

4.1.2 Solução de uma SDE

É possível determinar um solução explícita de uma *SDE* no caso linear e para muitos outros casos também é possível reduzir-se ao caso linear através de transformações nas funções. Para o caso de uma *SDE* linear tem-se:

$$dX(t) = (a(t) + A(t)X(t))dt + \sigma(t)dB(t) \quad (4.6)$$

,com $\{0 \leq t < \infty\}$ e onde $B(t)$ é um movimento browniano independente, X tem um valor inicial $X_0 = \zeta$, e $A(t)$, $a(t)$ e $\sigma(t)$ são funções não randômicas dependentes do tempo. A notação usada para se referir a variáveis que estão relacionadas ao tempo será $X(t)$ (diferente da usada anteriormente), seja X qualquer variável. O mais simples caso da equação acima é o caso de um movimento browniano aritmético com *drift* como segue:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t) \quad (4.7)$$

, $\{0 \leq t < \infty\}$ onde $X_0 = \zeta$ e μ, σ e ζ são constantes.

Neste caso μ é a variável chamada de *drift* do processo e σ é chamada de volatilidade do processo ou coeficiente de difusão com $A(t) = 0$, $a(t) = \mu$ e $\sigma(t) = \sigma$. A solução para a *SDE* é:

$$X = \mu t + \sigma B \quad (4.8)$$

De modo geral, a solução de uma *SDE* linear é dada pela solução da equação determinística, isto é, a equação diferencial ordinária, mais o termo estocástico cumulativo. Para a *SDE* linear dada como:

$$dX(t) = (a(t) + A(t)X(t))dt + \sigma(t)dB(t) \quad (4.9)$$

a solução única usando a *Fórmula de Itô* é:

$$X(t) = \phi(t) \left[\zeta + \int_0^t \phi^{-1}(s) a(s) ds + \int_0^t \phi^{-1}(s) \sigma(s) dB(s) \right] \quad (4.10)$$

,com $\{0 \leq t < \infty\}$.

4.1.3 Existência e Unicidade

Uma *SDE* pode admitir solução forte ou fraca. Caso admita solução forte, ela é uma função da realização do movimento browniano que resolve uma integral estocástica e é conhecido o espaço de probabilidade. Caso seja uma função somente que resolve a *SDE*, porém não se conhece o espaço de probabilidade, ela é dita fraca. Toda solução forte é uma solução fraca com respeito a mesma filtragem, porém não vale o contrário. E vale ressaltar como já dito anteriormente que a solução de uma *SDE* é um processo estocástico.

A solução é única de acordo com o teorema de existência e unicidade, que não será demonstrado aqui pois não é o intuito deste trabalho. A unicidade é provada usando a *Isometria de Itô* e a condição de *Lipschitz*, segundo (Nunno, Øksendal e Proske 2009). A existência é similar a prova da existência nas equações ordinárias, sua solução é construída indutivamente por uma relação de recursão e pode ser mostrado que essa recursão produz uma sequência de processos que convergem para uma solução única. Seja a *SDE* abaixo:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \quad (4.11)$$

com alguma condição inicial $X(0)$.

Sob as hipóteses abaixo, a *SDE* acima tem uma solução única, contínua e forte.

1. *Lipschitz* global: $\forall x, y \in \mathbf{R}$, e $t \in [0, T]$, $\exists K < \infty$, tal que:

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| < K|x - y| \quad (4.12)$$

2. Crescimento linear: $\forall x, y \in \mathbf{R}$ e $t \in [0, T]$, $\exists C < \infty$, tal que:

$$|b(t, x) + \sigma(t, x)| < C(1 + |x|) \quad (4.13)$$

A condição de crescimento linear controla o comportamento da solução tal que $X(t)$ não explode num tempo finito.

Também é possível obter soluções fracas sob diferentes hipóteses. Em muitos casos em estatística, condições para soluções fracas são suficientes, pois elas implicam que duas quaisquer soluções, por exemplo, não são necessariamente idênticas na trajetória. Soluções fortes são sempre soluções fracas, mas o contrário não é válido, como já dito anteriormente.

1. Seja $b(\cdot)$ uma função localmente limitada, σ^2 uma função contínua e positiva e suponha que para algum A a seguinte condição funcione:

$$X(t)b(X(t)) + \sigma^2(X(t)) \leq A(1 + X(t)^2)$$

(4.14)

Sob essa condição, a *SDE* tem solução fraca única.

4.2 Processos de Wiener e Movimento Browniano

4.2.1 Processos de Wiener padrão

Seja $\{\Omega, F, P\}$ um espaço de probabilidade e $\{F_t, t \geq 0\}$ uma filtragem. Um processo estocástico $\{W\} = \{W_t, F_t, t \geq 0\}$ é chamado de *Processo Padrão de Wiener* relativo a filtragem $\{F_t, t \geq 0\}$ se:

1. as trajetórias $\{W_t(w), t \geq 0\}$ são contínuas em t ;
2. $W = \{W_t, F_t, t \geq 0\}$ é um martingale quadrado integrável com $W_t = 0$;
3. $E[(W_t - W_s)^2 | F_s] = t - s$, com $t \geq s$.

4.2.2 Movimento Browniano Padrão

Segundo Focardi e Fabozzi 2004, em termos intuitivos um movimento browniano é um limite em tempo contínuo de um *Random Walk*² simples. Um passeio aleatório representa a acumulação de incerteza de choques aleatórios, desta forma é natural representar um passeio aleatório como um processo em tempo contínuo que é o limite de um passeio aleatório no tempo discreto.

Sendo Ω o conjunto de todos os possíveis estados da economia, F uma σ -álgebra e P uma medida de probabilidade, um processo estocástico $B = B(t)$, com $t \geq 0$ num espaço de probabilidade $\{\Omega, F, P\}$ é chamado movimento browniano padrão se:

²Passeio Aleatório, definido como um processo estocástico no tempo discreto

1. $B_t = 0$ é contínuo em $\{0 \leq t < \infty\}$;
2. $B_t = 0$;
3. B é um processo com incrementos estacionários e independentes;
4. $B(t) - B(s) \simeq (0, |t - s|)$, onde $N(0, \sigma^2)$ denota a distribuição gaussiana com média 0 e variância σ^2 .

De acordo com a definição de *Processo de Wiener* e de *Movimento Browniano*, qualquer *Processo de Wiener* é um *Movimento Browniano*.

4.3 Modelos de Difusão

Abaixo são destacados alguns dos principais modelos usados em finanças:

1. *Merton*:

$$dX(t) = \alpha dt + \sigma dW(t) \tag{4.15}$$

é um movimento browniano com *drift* descrito por Merton 1976. O modelo apresenta as seguintes hipóteses:

- a) O passado histórico é refletido no valor presente dos ativos e não contém informação do futuro;
- b) O mercado reage imediatamente a cada nova informação nos ativos.

Este modelo não apresenta reversão à média;

2. *Dothan*:

$$dX(t) = X(t)\sigma dW(t) \tag{4.16}$$

este é um modelo desenvolvido para títulos que também não apresenta reversão à média;

3. Movimento Geométrico Browniano:

$$dX(t) = \beta X(t)dt + X(t)\sigma dW(t) \tag{4.17}$$

O parâmetro β é interpretado como a constante taxa de juros e σ como a volatilidade de atividades arriscadas. Um movimento browniano geométrico (*GBM*) é simplesmente um Movimento Browniano exponenciado.

A equação 4.17 pode ser reduzida ao caso linear quando se aplica a transformação:

$$Y = \ln X \tag{4.18}$$

E depois a *Fórmula de Itô*. Logo, o movimento browniano geométrico evolui como um processo log-normal, segundo a equação:

$$X(t) = X(0) \exp\left(\left(\beta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right) \tag{4.19}$$

Uma característica atrativa desse processo é que ele é sempre positivo já que a função exponencial é sempre um valor positivo. Além disso, as mudanças percentuais são independentes. Estes fatos explicam o uso maior do *movimento browniano geométrico* ao invés de *movimento browniano* ordinário para modelar ativos, de acordo com Focardi e Fabozzi 2004;

4. *Vasicek*:

$$dX(t) = (\alpha(b - X(t)))dt + \sigma dW(t) \quad (4.20)$$

Neste modelo, é descrito um processo de *Ornstein-Uhlenbeck* que apresenta reversão à média, esse processo é um modelo de equilíbrio também descrito por Vasicek 1977 para preços de títulos. Vasicek 1977 descreve uma taxa de juros no curto prazo através de um *Processo Ornstein - Uhlenbeck* onde W é um movimento browniano padrão, e α , b , σ são constantes positivas. Note que o *drift* na equação acima é positivo se $X(t) < b$ e negativo se $X(t) > b$. Então $X(t)$ é puxado para o nível b , uma propriedade referida como reversão à média ou *mean reversion*. Pode-se interpretar o b como uma taxa de juros de longo prazo e α como a velocidade que $X(t)$ é puxado para b . A forma de reversão à média é uma essencial característica do processo de *Ornstein - Uhlenbeck* e logo do modelo de *Vasicek*.

Ao contrário do processo de movimento browniano, o processo de *Ornstein - Uhlenbeck* é um processo com finita variância $\forall(t \geq 0)$;

5. *Cox-Ingersoll-Ross (CIR) SR*:

$$dX(t) = (\alpha(b - X(t)))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t) \quad (4.21)$$

Cox, Jr e Ross 1985 desenvolveu um modelo de fator único de equilíbrio geral para estrutura a termo em que o processo de difusão apresenta um termo com raiz quadrada (SR)³. Esse modelo apresenta a volatilidade como proporcional a taxa de juros, onde W é um movimento browniano padrão. Considere o caso em que α e b são positivos. Se $X(0) > 0$, então $X(t)$ nunca será negativo; se $2\alpha b \geq \sigma^2$, então $X(t)$ será estritamente positivo para todo t . Como no modelo de *Vasicek*, a forma do *drift* na equação acima sugere que $X(t)$ é puxado para b na velocidade controlada por α . Porém diferentemente do modelo de *Vasicek*, no *CIR* o termo de difusão $\sigma(\sqrt{X(t)})$ decai para zero conforme $X(t)$ se aproxima da origem e isso faz com que $X(t)$ não assuma valores negativos. Esta característica é atrativa em modelar a taxa de juros.

6. *Brennan - Schwartz*:

$$dX(t) = (\alpha + \beta X(t))dt + X(t)\sigma dW(t) \quad (4.22)$$

Este é um modelo numérico para preços de títulos convertíveis;

7. *CIR VR*:

$$dX(t) = \theta X(t)^{\frac{3}{2}}dW(t) \quad (4.23)$$

É um modelo desenvolvido para títulos de taxas variáveis que não apresenta a propriedade de reversão à média;

8. *CEV*:

$$dX(t) = \beta X(t)dt + X(t)^\gamma \sigma dW(t) \quad (4.24)$$

É um modelo para taxa constante de elasticidade da variância. O modelo *CEV* é útil para modelar a volatilidade assimétrica implícita. Para $\gamma < 1$, a assimetria é negativa e para $\gamma > 1$ a assimetria é positiva. Para $\gamma = 1$, *CEV* é um caso particular que se torna o modelo *GBM*.

³Square Root

9. Irrestrito (CKLS) descrito por Chan et al. 1992:

$$dX(t) = (\alpha + \beta X(t))dt + X(t)^\gamma \sigma dW(t) \quad (4.25)$$

Este modelo, descrito na equação 4.25, abrange todos os anteriores como casos particulares;

10. *CIR Lamperti*:

$$dX(t) = (-\theta X(t))dt + \beta \sqrt{1 + X(t)^2} dW(t) \quad (4.26)$$

com $\theta + \frac{\beta^2}{2} > 0$ (condição para positividade de $X(t)$). Segundo Burr 2009, este modelo nada mais é do que uma aplicação da transformação de *Lamperti*⁴ no modelo *CIR* e que origina a *SDE* acima.

O processo tem uma distribuição estacionária cuja densidade $\pi(\cdot)$ é proporcional a:

$$\pi(x) \propto \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\}^{1+\theta+\beta^2} \quad (4.30)$$

11. *OU Radial (Ornstein - Uhlenbeck Radial)*:

$$dX(t) = (\theta X(t)^{-1} - X(t))dt + dW(t) \quad (4.31)$$

para $\theta > 0$.

Este processo, não deixa de ser um caso especial do modelo de *Sahalia*, visto a seguir.

12. *Sahalia - Tipo 1*:

$$dX(t) = (\alpha_1 X(t)^{-1} + \alpha_2 + \alpha_3 X(t) + \alpha_4 X(t)^2)dt + \beta_1 X(t)^\theta dW(t) \quad (4.32)$$

Para este modelo descrito pela equação 4.32, em geral, segundo Burr 2009, não há um resultado para distribuição exata, contudo aproximações para densidade de transição podem ser obtidas através de expansão polinomial de *Hermite*⁵. O modelo foi proposto por Ait-Sahalia 1996 para modelar taxas de juros.

⁴É uma aplicação da Fórmula de *Itô* usada em simulação e métodos de estimação:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t) \quad (4.27)$$

e seja

$$Y(t) = F(X(t)) = \int_z^{X(t)} \frac{1}{\sigma(u)} du \quad (4.28)$$

então tem-se que:

$$dY(t) = \frac{b(t, X(t))}{\sigma(X(t))} - \frac{1}{2} \sigma_x(X(t)) dt + dW(t) \quad (4.29)$$

⁵Os polinômios de *Hermite* são soluções da equação diferencial de *Hermite*: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0$. Eles são polinômios ortogonais cujo principal campo de aplicação encontra-se na mecânica quântica.

13. *Sahalia* - Tipo 2:

$$dX(t) = (\alpha_1 X(t)^{-1} + \alpha_2 + \alpha_3 X(t) + \alpha_4 X(t)^2)dt + \sqrt{(\beta_0 + \beta_1 X(t) + \beta_2 X(t)^3)} dW(t) \quad (4.33)$$

O autor propôs uma generalização do modelo do Tipo 1. Em geral, algumas restrições nos parâmetros são necessárias para garantir uma boa especificação do modelo. Além disso, a Markovianidade só é garantida sob restrições adicionais.

É importante salientar que o modelo *CKLS* é um caso particular dos modelos de Ait-Sahalia 1996.

14. *Sahalia* - Tipo 3:

$$dX(t) = (\alpha_1 X(t)^{-1} + \alpha_2 + \alpha_3 X(t) + \alpha_4 X(t)^2)dt + (\beta_0 + \beta_1 X(t) + \beta_2 X(t)^3)^{\beta} dW(t) \quad (4.34)$$

Este modelo, descrito pela equação 4.34, nada mais é do que o modelo de *Sahalia* do tipo 2 com a inclusão de um expoente em toda a parte da difusão ao invés da raiz. Este modelo é um caso geral dos modelos anteriores e restrições também são necessárias para garantir uma boa especificação do modelo, assim como no anterior.

15. Hiperbólico - Tipo 1 e 2:

A distribuição hiperbólica tem densidade descrita na equação 4.35:

$$p(x; \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{k}{2\alpha\delta K_1(\delta k)} \exp \left\{ -\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu) \right\} \quad (4.35)$$

, $x \in \mathbf{R}$.

Nesta parametrização, μ é a localização, $\delta > 0$ é o parâmetro de escala, β é o parâmetro real com de assimetria em μ , $\alpha > |\beta| \geq 0$ é o parâmetro de cauda, K_1 é a função de *Bessel* modificada do terceiro tipo com índice 1. E $k = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Com os parâmetros α e β é possível obter diferentes formas, incluindo assimetria e distribuições de caudas pesadas.

O processo de difusão hiperbólico foi introduzido por Barndorff-Nielsen 1978 e tem a seguinte *SDE*, vista na equação 4.36:

$$dX(t) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \beta - \alpha \frac{X(t) - \mu}{\sqrt{\delta^2 + (X(t) - \mu)^2}} \right\} dt + \sigma dW(t) \quad (4.36)$$

O nome do processo advém do fato de que a invariante densidade do processo segue uma distribuição hiperbólica.

Bibby e Sørensen 2003, propuseram outro tipo de *SDE* cuja solução tem uma distribuição hiperbólica estacionária (hiperbólico tipo 2). A *SDE* é descrita pela equação 4.37:

$$dX(t) = \sigma \exp \left\{ \frac{1}{2} (\alpha \sqrt{\delta^2 + (X(t) - \mu)^2} - \beta(X(t) - \mu)) \right\} dW(t)$$

(4.37)

16. *Ahn - Gao* ou Inverso do Modelo de raiz quadrada de *Feller*:

É um modelo não linear com reversão à média desenvolvido por Ahn e Gao 1999 e é solução da equação diferencial estocástica 4.38:

$$dX(t) = X(t)(\theta_1 - (\theta_3^3 - \theta_1 \theta_2)X(t))dt + \theta_3 X(t) \frac{3}{2} dW(t)$$

(4.38)

A distribuição condicional do processo está relacionada com o modelo *CIR*.

17. Modelo Epidêmico:

É um modelo bastante usado em epidemiologia, aqui será considerado um modelo simples que segue a seguinte *SDE*:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t)$$

(4.39)

onde:

$$\mu(X(t)) = aX(t)(1 - X(t)) - bX(t) + c(1 - X(t)) \text{ e } \sigma^2(X(t)) = kX(t)(1 - X(t)) , \text{ com } k > 0.$$

A epidemia é improvável de acontecer se o modelo (número de pessoas infectadas na população) está abaixo do modo mais baixo. E quando o modelo está acima, o tamanho da epidemia está em torno do segundo modo. Quando $c > k$ (alta taxa de infecção de causas externas), a epidemia é garantida.

18. Difusão de *Pearson*:

De acordo com Iacus 2009, uma classe que generaliza os processos de *Ornstein - Uhlenbeck* e *CIR* é a classe de difusão de *Pearson*. Seu nome é devido ao fato de que quando soluções estacionárias existem para esse modelo, sua densidade invariante pertence ao sistema de *Pearson*. O sistema de *Pearson* permite uma grande variedade de distribuições que podem assumir valores negativos ou positivos e pode ser limitado, simétrico, com picos, e as caudas podem ser pesadas ou leves. Esses processos resolvem a equação diferencial estocástica 4.40:

$$dX(t) = -\theta(X(t) - \mu)dt + \sqrt{2\theta(aX(t)^2 + bX(t) + c)}dW(t) \tag{4.40}$$

com $\theta > 0$, a , b e c tal que o coeficiente de difusão seja bem definido (a raiz quadrada pode ser extraída) para todos valores de $X(t)$. Modelos de Difusão de *Pearson* são caracterizados por ter reversão à média na *drift* e coeficiente de difusão quadrada.

Quando o coeficiente de difusão for 2θ , o processo se torna um *Ornstein - Uhlenbeck*. E caso a difusão seja $2\theta X(t)$ e $0 < \mu$, é obtido o processo *CIR*.

19. *Catastrophe*:

Ao contrário do nome, não tem tanto a ver com desastres, mas sim com classificação de singularidades não degeneradas. A sua forma padrão é descrita pela *SDE* 4.41:

$$dX(t) = \beta_1(\beta_2 + \beta_3(X(t) - \beta_4) - (X(t) - \beta_4)^3)dt + \sqrt{k}dW(t) \quad (4.41)$$

onde os fatores β_2 e β_3 são chamados de fatores normal e *splitting* respectivamente.

A densidade é caracterizada pelo *Discriminante de Cardan* $C = 27\beta_2 - 4\beta_3^3$.

Se $C < 0$ tem-se que: a densidade é bimodal, β_2 é a altura relativa das duas modas, β_3 determina a separação das duas modas e se $C > 0$: a densidade é unimodal, β_2 mede a assimetria e β_3 mede a curtose.

20. *Double - Well* Potencial:

$$dX(t) = (X(t) - x(t)^3)dt + dW(t) \quad (4.42)$$

Este modelo é interessante pois sua densidade apresenta uma forma bimodal. E é desafiador no sentido de que a aproximação de *Euler* pode não funcionar devido a alta não linearidade da *SDE* na partícula do *drift* e não gaussianidade alta de suas distribuições.

21. Processo de Difusão de *Jacobi*:

$$dX(t) = -\theta(X(t) - \frac{1}{2})dt + \sqrt{\theta X(t)(1 - X(t))}dW(t) \quad (4.43)$$

, para $\theta > 0$. Este processo apresenta distribuição invariante que é uma uniforme entre $(0, 1)$.

Os modelos acima são usados para modelar a estrutura a termo da taxa de juros e outros ativos. O modelo mostrado em *Sahalia* do tipo 3 engloba a maioria dos outros modelos como casos especiais. Os modelos podem ser comparados empiricamente usando o *AIC* de acordo com a equação 4.44:

$$AIC = 2(-\ln L + N_p) \quad (4.44)$$

onde $\ln L$ é o logaritmo neperiano da função de verossimilhança que é maximizada com relação aos parâmetros estimados e N_p é o número de parâmetros. O melhor modelo seria o que apresentasse o menor valor para *AIC* (segundo este mesmo critério). Shoji e Ozaki 1995 estudou a estimação por esses modelos baseado na discretização por linearização local. O mesmo também estudou a possibilidade do *drift* ser uma função não linear seguindo a equação 4.45:

$$dX(t) = (aX(t))dt + X(t)^\gamma \sigma dW(t) \quad (4.45)$$

Porém não foram encontradas conclusões definitivas e foi observado que o *drift* poderia ser tanto linear como não linear.

4.4 Estimação por QMLE, Estimação Bayesiana e Simulação

Nesta seção é descrita a metodologia que foi usada para estimação dos coeficientes dos diversos modelos de difusão apresentados na seção anterior para parametrizar a curva DI no período de 2007 a 2018 através do método de QMLE e também através da estimação Bayesiana, de acordo com Iacus e Yoshida 2017, Iacus 2011, Rao 2011 e Iacus 2009. Posterior a isso é descrita a parte de simulação feita através da discretização das SDEs com o método de Euler - Maruyama, segundo Iacus 2009 e Iacus e Yoshida 2017. A simulação é importante para extração das propriedades estatísticas dos coeficientes de cada modelo analisado em ambos os métodos de estimação citados acima e para a construção de trajetórias que seriam soluções das SDEs.

4.4.1 Estimação por QMLE

Para soluções de processos de difusão de SDEs e observados em tempo discreto, é possível definir a função de verossimilhança fazendo uso da propriedade de Markov. Considere um processo de difusão multidimensional e então particularize-o para o caso de uma dimensão. Seja X um m -dimensional processo de difusão, solução para a equação 4.46:

$$dX(t) = b(X(t), \theta)dt + \sigma(X(t), \theta)dW(t) \quad (4.46)$$

, $t \in [0, T]$, onde $W(t)$ é um movimento browniano padrão de dimensão r , $b(X(t), \theta)$ e $\sigma(X(t), \theta)$ são funções. Pode-se construir a função de verossimilhança $L_n(\theta)$ do processo Markoviano X usando distribuições condicionais, isto é, $\pi_\theta(\Delta, x|y)$ é uma densidade de $X(i)$ dado $X(i-1) = y$ com $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$. De fato, pode-se escrever a equação 4.47:

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(\Delta_i, X(i)|X_{i-1})p_\theta(X(0))$$

(4.47)

onde $p_\theta(X(0))$ é a distribuição do valor inicial $X(0)$. Em geral, a distribuição inicial $p_\theta(X(0))$ é descartada ou tomada como igual a 1 na teoria assintótica. Isso é devido ao fato de que é quase sempre impossível estimar essa distribuição dos dados e, dado o alto número de observações, é assumido que a distribuição inicial dá somente uma pequena contribuição a verossimilhança $L_n(\theta)$. Denota-se por $l_n(\theta) = \ln L_n(\theta)$ a função de log-verossimilhança vista em 4.48:

$$l_n(\theta) = \ln L_n(\theta) = \sum_{i=1}^n l_i(\theta) + \ln(p_\theta(X(0))) = \sum_{i=1}^n \ln p_\theta(\Delta_i, X(i)|X(i-1)) + \ln(p_\theta(X(0))) \quad (4.48)$$

E assumindo $\theta(X(0)) = 1$, então tem-se 4.49:

$$l_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln p_\theta(\Delta_i, X(i)|X(i-1)) \quad (4.49)$$

E depois a equação 4.50, o estimador de θ , $\hat{\theta}$:

$$\theta = \arg \max l_n \{X_n, \theta\} \quad (4.50)$$

Quando as densidades de transição $p_\theta(s, x|y)$ são conhecidas na forma explícita, é possível proceder com a exata verossimilhança na inferência, entretanto os resultados dependem da regularidade dos coeficientes de *drift* e difusão.

4.4.2 Estimação Bayesiana

Um estimador Bayesiano de um parâmetro θ é obtido como o valor esperado da distribuição de probabilidade a posteriori de θ como na equação 4.51:

$$p(\theta|x^{obs}) = \frac{L_n(\theta)p(\theta)}{\int L_n(\theta)p(\theta)d\theta} \quad (4.51)$$

, onde $p(\theta)$ é a distribuição a priori para θ e x^{obs} denota a observação em tempo discreto do processo de difusão. Quando $L_n(\theta)$ é conhecida em forma explícita, diferentes resultados estão disponíveis, o que não é um tanto frequente. Para tratar de tal problema, usa-se o *MCMC*⁶. A ideia por trás de algoritmos de *MCMC* é provar/testar θ de uma aproximação conveniente da distribuição a posteriori.

Considere a equação inicial para a *QMLE*. Primeiro é escolhido um valor arbitrário $\theta_2 \in \Theta_2$ e depois supõe-se que θ_1 é um parâmetro não conhecido para o qual construiu-se o estimador Bayesiano $\tilde{\theta}_1$ desta forma tem-se a equação 4.52:

$$\tilde{\theta}_1 = \left[\int_{\Theta_1} \exp\{l_n(X(n), (\theta_1, \theta_2^*))\} \pi_1(\theta_1) d\theta_1 \right]^{-1} \int_{\Theta_1} \theta_1 \exp\{l_n(X(n), (\theta_1, \theta_2^*))\} \pi_1(\theta_1) d\theta_1 \quad (4.52)$$

onde π_1 é a densidade a priori em Θ_1 .

Para estimação de θ_2 , usa-se $\tilde{\theta}_1$ para refazer a função de quasi-verossimilhança. O estimador é definido pela equação 4.53:

$$\tilde{\theta}_2 = \left[\int_{\Theta_2} \exp l_n(X(n), (\tilde{\theta}_1, \theta_2)) \pi_2(\theta_2) d\theta_2 \right]^{-1} \int_{\Theta_2} \theta_2 \exp l_n(X(n), (\tilde{\theta}_1, \theta_2)) \pi_2(\theta_2) d\theta_2 \quad (4.53)$$

onde π_2 é a densidade a priori em Θ_2 . Desta forma obteve-se os estimadores $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ para (θ_1, θ_2) e assim é feito sucessivamente.

⁶(Markov chain Monte Carlo)

4.4.3 Simulação

Simular uma trajetória de um processo de uma equação diferencial estocástica tem como alvo obter informações sobre a trajetória percorrida e possíveis caminhos (relacionado com a solução fraca da *SDE*) ou valores esperados de alguma característica do processo como momentos e distribuições, o que geralmente não está disponível na forma analítica.

Métodos de simulações são em geral baseados em aproximações discretas de soluções contínuas de uma *SDE*. Os métodos de aproximação são classificados de acordo com suas diferentes propriedades. De acordo com Iacus 2009, os principais são: o método de *Euler - Maruyama*, Esquema de *Milstein*, o método de *Ozaki* e o método de *Shoji - Ozaki*. De acordo com Iacus 2009, o método desenvolvido por Milstein 1979 faz uso da Fórmula de *Itô* para aumentar a precisão da aproximação adicionando um termo de segunda-ordem em comparação com o Método de *Euler - Maruyama*. Já o método de *Ozaki* e *Shoji - Ozaki* de acordo com Ozaki 1985, Ozaki 1992, OZAKI 1993, Shoji 1998, Shoji e Ozaki 1997 e Shoji e Ozaki 1998 são métodos de linearização local que consistem em aproximar localmente o *drift* da *SDE* com uma função linear. A diferença entre estes dois últimos é que no método de *Shoji - Ozaki* a partícula de *drift* pode depender da variável tempo e o coeficiente de difusão pode variar.

De acordo com (Shoji e Ozaki 1997), que realizou uma extensiva investigação de aspectos computacionais dos vários métodos existentes, e fez estudos comparativos dos métodos de estimação já citados por técnicas de simulação e foi visto que entre os métodos, as diferenças não são grandes quando o intervalo dos pontos na amostra é pequeno, porém se o intervalo é grande, a conclusão foi outra.

Por uma questão de custo computacional e tempo, será usado o método de *Euler - Maruyama*, que por sua vez é o mais simples e que de acordo com Iacus 2009, Focardi e Fabozzi 2004 e Shoji e Ozaki 1997 dependendo das condições, não acarretam grandes diferenças.

4.4.3.1 Método de Euler ou Euler - Maruyama

Dado um Processo de *Itô* $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ que é solução da equação diferencial estocástica descrita pela equação 4.54:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \quad (4.54)$$

com valor inicial determinístico $X(0)$ e a discretização do intervalo $\pi_N = \pi_N([0, T])$ do intervalo $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. A aproximação de *Euler* de X é um processo estocástico contínuo Y que satisfaz o esquema iterativo na equação 4.55:

$$Y_{i+1} = Y_i + b(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(W_{i+1} - W_i) \quad (4.55)$$

para $i = 0, 1, \dots, N - 1$, com $Y_0 = X_0$.

Geralmente o tempo $\delta = t_{i+1} - t_i$ é tido como constante, isto é $1/N$.

Da equação acima, pode-se ver que simular o processo Y , somente é preciso simular o incremento do processo de *Wiener*. Porém é importante ressaltar que o método de *Euler* tende a explodir em casos não lineares quando o δ é grande o suficiente, segundo Iacus 2009 e Focardi e Fabozzi 2004.

4.5 Resultados - SDE por QMLE e Estimação Bayesiana

Nesta seção, é primeiramente calculado o *AIC*, utilizando *QMLE*, de acordo com a abordagem em (Iacus 2009) e (Iacus e Yoshida 2017), para a estimação dos parâmetros, com dados reais da série DI definida anteriormente, de vários modelos apresentados na seção 4.3. Para os modelos que obtiveram melhores resultados, isto é, melhor *AIC*, foram feitas 1000 simulações de trajetórias utilizando o método de *Euler - Maruyama*, visto na seção 4.4.3.1, com os parâmetros estimados por duas abordagens para a amostra da série DI. A primeira foi utilizando *QMLE*, vista na seção 4.4.1, e depois usando a abordagem Bayesiana, vista na seção 4.4.2. E com as trajetórias simuladas através do método de *Euler - Maruyama*, foram estimadas as propriedades estatísticas (viés, *RMSE*, *MAE* e *ME*) dos coeficientes de todos estes modelos de difusão amplamente utilizados em finanças. O primeiro objetivo aqui é comparar os métodos de estimação *QMLE* e Bayesiano e analisar qual se comporta melhor para a série DI, porém é esperado má especificação pela não presença de saltos, assim como também coeficientes para a taxa de longo prazo da série DI que não correspondem a realidade.

É importante salientar que alguns dos modelos são repetidos porém com mudança na forma de parametrização dos coeficientes com o intuito de analisar se a forma em que os parâmetros são representados nas *SDEs* dos respectivos modelos interfere nos valores encontrados pelos métodos de estimação e também se há mudança nas propriedades estatísticas encontradas. Esta parte corresponde ao segundo objetivo, que é apenas o de verificar se a diferença de parametrização para os modelos de Vasicek 1977, Cox, Jr e Ross 1985, Brennan e Schwartz 1979 e Chan et al. 1992 acarretam grande mudança nos resultados e principalmente nos coeficientes de reversão à média e nas taxas de longo prazo.

Com a motivação de verificar quais modelos apresentaram piores propriedades estatísticas e quais apresentaram as melhores e também de verificar se há grande divergência entre os métodos de estimação, foi calculada através de simulação com discretização pelo método de *Euler-Maruyama*, descrito em (Iacus 2009), as propriedades estatísticas dos coeficientes estimados das *SDEs*. Que por sua vez são o viés, a média dos erros em valor absoluto (*MAE*), o erro médio (*ME*), e o erro quadrático médio (*RMSE*) para o caso de 1000 simulações. Depois disso, é analisado também o erro quadrático médio para dentro da amostra entre a curva DI e a média das simulações para cada modelo de *SDE* estimado por *QMLE* e pela estimação Bayesiana.

A análise inicial consiste de 26 modelos, porém é importante reforçar que alguns são meramente mudanças da forma como são parametrizados, como já citado anteriormente. Os casos deste tipo são: *Vasicek* (Vasicek 1977), *CIR* (Cox, Jr e Ross 1985), *Brennan-Schwartz* (Brennan e Schwartz 1979) e *CKLS* (Chan et al. 1992). O caso de *Sahalia* (Ait-Sahalia 1996) embora esteja com 3 tipos, não mudam essa forma, apenas são formas cada vez mais generalizadas do modelo. As mudanças são descritas a seguir:

1. Vasicek - Tipo 1

$$dX(t) = (\theta_1 - \theta_2 X(t))dt + \theta_3 dW(t) \quad (4.56)$$

2. Vasicek - Tipo 2

$$dX(t) = \theta_4(\theta_5 - X(t))dt + \theta_6 dW(t) \quad (4.57)$$

3. CIR - Tipo 1

$$dX(t) = (\theta_7 - \theta_8 X(t))dt + \theta_9 \sqrt{X(t)} dW(t) \quad (4.58)$$

4. CIR - Tipo 2

$$dX(t) = \theta_{10}(\theta_{11} - X(t))dt + \theta_{12} \sqrt{X(t)} dW(t) \quad (4.59)$$

5. Brennan-Schwartz - Tipo 1

$$dX(t) = (\theta_{13} + \theta_{14}X(t))dt + \theta_{15}X(t)dW(t) \quad (4.60)$$

6. Brennan-Schwartz - Tipo 2

$$dX(t) = \theta_{16}(\theta_{17} + X(t))dt + \theta_{18}X(t)dW(t) \quad (4.61)$$

7. CKLS - Tipo 1

$$dX(t) = (\theta_{19} - \theta_{20}X(t))dt + \theta_{21}X(t)^{\gamma_1}dW(t) \quad (4.62)$$

8. CKLS - Tipo 2

$$dX(t) = \theta_{22}(\theta_{23} - X(t))dt + \theta_{24}X(t)^{\gamma_2}dW(t) \quad (4.63)$$

Para se chegar da equação 4.57 na equação 4.56 tem - se as equações 4.64, 4.65, 4.66:

$$\theta_4\theta_5 = \theta_1 \quad (4.64)$$

$$\theta_4 = \theta_2 \quad (4.65)$$

$$\theta_6 = \theta_3 \quad (4.66)$$

Para se chegar da equação 4.59 na equação 4.58 tem - se as equações 4.67, 4.68, 4.69:

$$\theta_{10}\theta_{11} = \theta_7 \quad (4.67)$$

$$\theta_{10} = \theta_8 \quad (4.68)$$

$$\theta_{12} = \theta_9 \quad (4.69)$$

Para se chegar da equação 4.61 na equação 4.60 tem - se as equações 4.70, 4.71, 4.72:

$$\theta_{16}\theta_{17} = \theta_{13} \quad (4.70)$$

$$\theta_{16} = \theta_{14} \quad (4.71)$$

$$\theta_{18} = \theta_{15} \quad (4.72)$$

Para se chegar da equação 4.63 na equação 4.62 tem - se as equações 4.73, 4.74, 4.75:

$$\theta_{22}\theta_{23} = \theta_{19} \quad (4.73)$$

$$\theta_{22} = \theta_{20} \quad (4.74)$$

$$\theta_{21} = \theta_{24} \quad (4.75)$$

Primeiramente, analisando os *AIC*s com o intuito de ver os modelos com bons ajustes e não tão complexos em termos do número de parâmetros, conforme cita Iacus e Yoshida 2017, pela estimação por *QMLE* para os diversos modelos de difusão propostos para os dados reais da série DI, tem-se a tabela 6.

Número	Modelo	AIC	Parâmetros
1	Merton	-25954.95	2
2	Dothan	-42100.19	1
3	GBM	-41994.73	2
4	Vasicek - Tipo 1	-23327.93	3
5	Vasicek - Tipo 2	-25952.96	3
6	CIR - Tipo 1	-23237.40	3
7	CIR - Tipo 2	-35959.62	3
8	Brennan - Schwartz - Tipo 1	-39584.33	3
9	Brennan - Schwartz - Tipo 2	-40531.54	3
10	CIR VR	-42013.82	1
11	CEV	-41996.92	3
12	CKLS - Tipo 1	-29027.75	4
13	CKLS - Tipo 2	-29027.75	4
14	Hiperbólico - Tipo 1	-25946.95	6
15	Hiperbólico - Tipo 2	-25877.68	5
16	CIR - Lamperti	-25949.79	2
17	Sahalia - Tipo 1	-8056.77	6
18	Sahalia - Tipo 2	-7922.57	8
19	Sahalia - Tipo 3	-7920.55	9
20	Double - Potential	-22149.48	3
21	Jacobi	-33482.65	2
22	Ahn - Gao	-41578.53	5
23	OU Radial	-8171.65	2
24	Pearson	-23656.95	6
25	Epidemic	-28216.02	4
26	Catastrophe	-18747.51	6

Tabela 6 – AIC - Modelos Difusão

Na tabela 6, pode-se observar que os modelos que obtiveram melhores resultados (menor *AIC*) foram os modelos de *Dothan*, *GBM*, *Brennan-Schwartz* (tipo 1 e 2), *Ahn - Gao*, *CEV* e *CIR VR*. Lembrando que o *AIC* penaliza o aumento de coeficientes, pode-se dizer que o *Ahn - Gao* se saiu melhor de acordo com este critério. Seguidos pelos outros.

O intuito inicial das diferentes metodologias de estimação (seções 4.4.1 e 4.4.2) é verificar qual apresenta melhores propriedades estatísticas para os coeficientes e qual apresenta menor erro quando comparado às mudanças de parametrização para certos modelos e também a questão de custo computacional, ou seja, ver se caso uma abordagem seja melhor que a outra, o custo computacional compensaria.

Utilizando o método da Quasi-Máxima Verossimilhança (*QMLE*) foram feitas as estimações dos coeficientes para os modelos propostos e foram selecionados os com maiores *AIC* e também alguns com *AIC* não tão bom para efeito de comparação futura de resultados. E logo foram feitas simulações para avaliar o viés, *ME*, *RMSE* e *MAE* dos coeficientes de cada modelo. As estimações das propriedades foram feitas com 1000 simulações. Os modelos estimados foram *Dothan*, *GBM*, *Vasicek* (Tipos 1 e 2), *Brennan - Schwartz* (Tipos 1 e 2), *CEV*, *CIR VR*, *Catastrophe*, *Sahalia - Tipo 3*, *Ahn - Gao*, *OU Radial*, *Merton*, *Pearson*, *CKLS* Tipo 1 e Hiperbólico (Tipos 1 e 2).

Para efeito de comparação de método em termos de propriedades trabalhadas aqui como o viés, *RMSE*, *ME* e *MAE*, além do significado dos coeficientes para as taxas de juros DI, foram feitas as estimações usando o método Bayesiano proposto na metodologia para os dados reais, assim como feita na estimação por *QMLE* anteriormente, e em seguida simulações envolvendo tal método para 1000 trajetórias.

Dado este problema, foi utilizado a abordagem Bayesiana somente para alguns casos e estes casos foram definidos baseado na métrica do *AIC* da seguinte forma: os que apresentaram melhor desempenho no passo anterior, alguns que apresentaram desempenho mediano e o *Sahalia* do tipo 3 que apresentou desempenho ruim. Os modelos são *Dothan*, *GBM*, *Vasicek* (Tipos 1 e 2), *Brennan - Schwartz* (Tipos 1 e 2), *CEV*, *CIR VR*, *CIR* (Tipos 1 e 2), *Sahalia* - Tipo 3, *Ahn - Gao*, *Merton* e *Pearson*.

Para as distribuições a priori, foi suposto nenhum ou pouco conhecimento prévio sobre os parâmetros dos modelos, logo foi assumida a priori com distribuição uniforme com valores de 0 a 100 para todos os parâmetros de todos os modelos na estimação Bayesiana.

Os resultados são apresentados a seguir para estimação por *QMLE* e Bayesiana para cada modelo. Nas tabelas estão os valores dos coeficientes obtidos e descritos.

4.5.1 *Dothan*

Abaixo é apresentada a equação a ser estimada por *QMLE* e por estimação Bayesiana para o modelo de *Dothan*:

$$dX(t) = X(t)\sigma dW(t) \quad (4.76)$$

Para o modelo de *Dothan*, equação 4.76, obteve-se os seguintes resultados para 1000 simulações com *QMLE* a partir dos parâmetros originais estimados na tabela 7.

Coefficiente	Estimação	Método	VIÉS	ME	MAE	RMSE
$\hat{\sigma}$	0.1188127	QMLE	-0.0000176	-0.0000176	0.00116	0.00146

Tabela 7 – *Dothan* - *QMLE* - 1000

O coeficiente estimado para o modelo de *Dothan*, $\hat{\sigma}$, apresenta um baixo viés, embora seja negativo (o valor do coeficiente superestima o valor verdadeiro), para o caso da sua estimação numa simulação de 1000 trajetórias.

Coefficiente	Estimação	Método	VIÉS	ME	MAE	RMSE
$\hat{\sigma}$	0.1191473	Bayesiano	-0.000049	-0.000049	0.00163	0.00213

Tabela 8 – *Dothan* - *Bayes* - 1000

Para o método de estimação Bayesiano para 1000 simulações visto na tabela 8, o coeficiente da difusão, $\hat{\sigma}$, apresentou um valor com viés um pouco maior, superestimando o valor verdadeiro.

4.5.2 *GBM*

Abaixo é apresentada a equação a ser estimada por *QMLE* e por estimação Bayesiana para o modelo de *GBM*:

$$dX(t) = \beta X(t)dt + X(t)\sigma dW(t) \quad (4.77)$$

Para o modelo de *GBM*, equação 4.77, obteve-se os seguintes resultados para 1000 simulações com *QMLE* a partir dos parâmetros originais estimados na tabela 9.

Coefficiente	Estimação	Método	VIÉS	ME	MAE	RMSE
$\hat{\beta}$	0.0000462	QMLE	0.01389	0.01389	0.01389	0.01401
$\hat{\sigma}$	0.135905	QMLE	0.01497	0.01497	0.01497	0.02699

Tabela 9 – *GBM* - *QMLE* - 1000

De acordo com a tabela 9, verifica-se que os coeficientes apresentaram um viés de subestimação do parâmetro original alto e bem maior que no caso de *Dothan*, em que no caso do coeficiente de difusão apresentou um viés de aparentemente por volta de 10% do seu valor, enquanto que no coeficiente de *drift* ($\hat{\beta}$) apresentou um viés bem superior, levantando dúvidas sobre sua estimação.

De acordo com a tabela 9 e a equação 4.77, o parâmetro $\hat{\beta}$ é interpretado como a constante taxa de juros e o $\hat{\sigma}$ como a volatilidade de atividades de risco.

Agora, os resultados para estimação Bayesiana podem ser vistos na tabela 10.

Coeficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\beta}$	0.1088391	Bayesiano	0.00517	0.00517	0.00518	0.00545
$\hat{\sigma}$	0.1297249	Bayesiano	0.02984	0.02984	0.02984	0.03442

Tabela 10 – GBM - Bayes - 1000

Para o coeficiente do *drift*, a estimação Bayesiana na tabela 10 mudou bastante o valor paramétrico na comparação com o valor estimado por *QMLE*. Nesta estimação, o coeficiente de difusão apresentou resultados bem melhores. Para o parâmetro da difusão, o viés apresentou-se um pouco maior do que na estimação anterior com praticamente o dobro do viés. Para o coeficiente da difusão, não houve grandes diferenças na estimação do parâmetro, somente houve divergências na estimação das propriedades, que podem ser vistas na tabela 10 para o caso Bayesiano e comparado com a tabela 9 para a estimação por *QMLE*.

4.5.3 Vasicek

Abaixo são apresentadas as equações a serem estimadas por *QMLE* e por estimação Bayesiana para o modelo de *Vasicek* sendo que a primeira é o primeiro tipo de parametrização e a segunda é a sua mudança, onde se tem a estimação da velocidade de reversão à média:

$$dX(t) = (\theta_1 - \theta_2 X(t))dt + \theta_3 dW(t) \quad (4.78)$$

$$dX(t) = \theta_4(\theta_5 - X(t))dt + \theta_6 dW(t) \quad (4.79)$$

Para o modelo de *Vasicek*, equações 4.78 (tipo 1) e 4.79 (tipo 2), obteve-se os seguintes resultados para 1000 simulações nas tabelas 11(tipo 1) e 12(tipo 2) a partir dos parâmetros originais estimados.

Coeficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	0	QMLE	0.01014	0.01014	0.0101	0.01642
$\hat{\theta}_2$	0.05053826	QMLE	0.27020	0.27020	0.27089	0.37618
$\hat{\theta}_3$	0.15226024	QMLE	0.16848	0.02173	0.03564	0.04404

Tabela 11 – Vasicek 1- QMLE - 1000

No modelo de *Vasicek* do tipo 1 de acordo com a tabela 11 para 1000 simulações, o parâmetro que apresentou maior viés foi o $\hat{\theta}_1$, que está relacionado ao *drift* de forma linear. Neste modelo, os parâmetros apresentaram bastante tendência com relação ao enviesamento de forma a subestimar o valor verdadeiro.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_4$	0.054126933	QMLE	0.13584	0.13584	0.14488	0.23978
$\hat{\theta}_5$	0.002572006	QMLE	0.01352	0.01352	0.01444	0.01881
$\hat{\theta}_6$	0.100046189	QMLE	0	0	0	0

Tabela 12 – Vasicek 2- QMLE - 1000

Para o caso do tipo 2, na tabela 12 é visto que a tendenciosidade diminuiu. Para o parâmetro da difusão, o valor do coeficiente não apresentou viés relevante, nem *MAE*, *ME* ou *RMSE*.

Olhando para as tabelas 11 e 12, é visto que os coeficientes se aproximam, em parte, das relações existentes entre as equações 4.64, 4.65 e 4.66. E a maior diferença é achada na parte da difusão, porém no *drift* os coeficientes são bem parecidos de modo geral.

De acordo com as tabelas 12 e 4.20, a volatilidade seria o coeficiente $\hat{\theta}_6$ (0.100046189). E o equilíbrio de longo prazo, o coeficiente $\hat{\theta}_5$ (0.002572006) e para a velocidade de reversão à média tem - se o coeficiente $\hat{\theta}_4$ (0.054126933). Já para o modelo de *Vasicek* do tipo 1, fazendo as contas de acordo com as equações 4.56 e 4.57, tem-se verificando na tabela 11 que a taxa de longo prazo seria zero, a taxa de reversão à média seria o coeficiente $\hat{\theta}_2$ (0.05053826) e a volatilidade, o coeficiente $\hat{\theta}_3$ (0.15226024).

De acordo com esses valores, pode-se notar a grande diferença existente na questão da parametrização. Onde uma pequena mudança gera um resultado bem diferente. Para a taxa de reversão à média, não houve grandes mudanças significativas. A maior mudança foi com relação a taxa de longo prazo em que no modelo do tipo 2 é estimada como 0.0025 aproximadamente e no tipo 1 ela se torna zero.

Para o modelo de *Vasicek* - Tipo 1 na estimação Bayesiana, foi obtido os seguintes resultados para 1000 simulações na tabela 13 a partir dos parâmetros originais estimados.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	0.03437952	Bayesiano	0.03316	0.03316	0.03316	0.03861
$\hat{\theta}_2$	0.59893708	Bayesiano	0.51955	0.51955	0.52066	0.63713
$\hat{\theta}_3$	0.10007412	Bayesiano	1.01841	0.51955	0.0000384	0.00004

Tabela 13 – Vasicek 1- Bayes - 1000

Comparando a tabela 13 com a tabela 11, pode-se ver que a estimação por *QMLE* apresentou resultados mais satisfatórios, principalmente na parte da difusão, e também apresentou um *MAE* e *RMSE* bem baixos quando comparado a estimação Bayesiana. Com relação a estimação dos coeficientes, a principal diferença foi na parte do *drift*, onde a estimação Bayesiana apresentou menor viés.

Para o modelo de *Vasicek* - Tipo 2, obteve-se os seguintes resultados para 1000 simulações na tabela 14, na abordagem Bayesiana, a partir dos parâmetros originais estimados.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_4$	0.2625166	Bayesiano	-0.01787	-0.01787	0.05634	0.08216
$\hat{\theta}_5$	0.2108529	Bayesiano	0.14105	0.141056	0.14107	0.16834
$\hat{\theta}_6$	0.1000741	Bayesiano	-0.000017	-0.000017	0.0000202	0.0000234

Tabela 14 – Vasicek 2- Bayes - 1000

Comparando a tabela 14 com a tabela 12, pode-se ver que a estimação por *QMLE* apresentou resultados bem semelhantes com relação aos erros da estimação para a difusão principalmente. Porém o viés apresentou um perfil de superestimação nos coeficientes ($\hat{\theta}_4$ e $\hat{\theta}_6$) quando comparado ao modelo estimado por *QMLE*, onde houve uma subestimação de todos os coeficientes. Com relação a estimação dos coeficientes, a

principal diferença foi nos coeficientes do *drift*, onde no coeficiente $\hat{\theta}_5$ houve uma discrepância da ordem multiplicativa 100 e no coeficiente $\hat{\theta}_4$ da ordem multiplicativa de 5.

Olhando para as tabelas 13 e 14, é visto que os coeficientes se aproximam um pouco melhor das equações 4.64, 4.65 e 4.66 principalmente na parte da difusão comparando com a estimação por quasi-máxima verossimilhança. E a distância maior entre os coeficientes foi achada para a parte do *drift*.

De acordo com as tabelas 14 e 4.20, a volatilidade seria o coeficiente $\hat{\theta}_6$ (0.1000741). E o equilíbrio de longo prazo, o coeficiente $\hat{\theta}_5$ (0.2108529) e para a velocidade de reversão à média tem - se o coeficiente $\hat{\theta}_4$ (0.2625166). Já para o modelo de *Vasicek* do tipo 1, fazendo as contas de acordo com as equações 4.56 e 4.57, tem-se verificando na tabela 13 que a taxa de longo prazo seria 0.05740089, a taxa de reversão à média seria o coeficiente $\hat{\theta}_2$ (0.59893708) e a volatilidade o coeficiente $\hat{\theta}_3$ (0.10007412).

De acordo com esses valores, semelhante a estimação por *QMLE*, pode-se notar a grande diferença existente na questão da parametrização. A maior mudança foi com relação a taxa de longo prazo em que no modelo do tipo 2 é estimada como 0.2108529 aproximadamente e no tipo 1 ela se torna 0.05740089. E com relação a volatilidade, não foi obtida grande diferença.

4.5.4 Brennan - Schwartz

Abaixo são apresentadas as equações a serem estimadas por *QMLE* e por estimação Bayesiana para o modelo de *Brennan - Schwartz* de modo que são vistas duas formas de parametrização a seguir:

$$dX(t) = (\theta_1 + \theta_2 X(t))dt + \theta_3 X(t)dW(t) \quad (4.80)$$

$$dX(t) = \theta_4(\theta_5 + X(t))dt + \theta_6 X(t)dW(t) \quad (4.81)$$

Para o modelo de *Brennan - Schwartz*, equações 4.80 (tipo 1) e 4.81 (tipo 2), foram obtidos os seguintes resultados para 1000 simulações por *QMLE* nas tabela 15 (tipo 1) e 16 (tipo 2) a partir dos parâmetros originais estimados.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	0	QMLE	0.00248	0.00248	0.00248	0.00469
$\hat{\theta}_2$	0	QMLE	0.00379	0.00379	0.00379	0.02159
$\hat{\theta}_3$	0.2645503	QMLE	0.13637	0.13637	0.13637	0.19750

Tabela 15 – Brennan 1- QMLE - 1000

De acordo com a tabela 15 e a tabela 16, pode-se ver que o modelo do tipo 1 apresentou resultados mais satisfatórios estatisticamente.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_4$	0	QMLE	0.00360	0.00360	0.00360	0.01807
$\hat{\theta}_5$	0	QMLE	1.72417	1.72417	1.72417	3.36786
$\hat{\theta}_6$	0.2163098	QMLE	0.08084	0.08084	0.08084	0.11354

Tabela 16 – Brennan 2 - QMLE - 1000

Olhando para as tabelas 15 e 16 é visto que os coeficientes se aproximam bastante das relações existentes entre as equações 4.70, 4.71 e 4.72 principalmente nos coeficientes do *drift*, apresentando todos valores iguais a zero. E a diferença é achada somente na parte da difusão, com uma diferença de 22% aproximadamente em seu valor.

Para o modelo de *Brennan - Schwartz* - Tipo 1 (equação 4.80), obteve-se os seguintes resultados para 1000 simulações para a estimação Bayesiana na tabela 17 a partir dos parâmetros originais estimados.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	0.01309267	Bayesiano	-0.00310	0.00407	0.00410	0.00787
$\hat{\theta}_2$	0.22851185	Bayesiano	0.005754	0.13040	0.13040	0.25162
$\hat{\theta}_3$	1.73337742	Bayesiano	1.416980	2.47351	2.47351	4.29530

Tabela 17 – *Brennan 1 - Bayes - 1000*

Olhando para a tabela 17 e comparando com a tabela 15, o coeficiente $\hat{\theta}_1$ pertencente ao *drift* apresentou uma tendência de superestimação enquanto que a estimação por *QMLE* remeteu uma estimação de subestimação. E o *drift* se mostrou com viés maior na estimação por *QMLE*. Porém ambos apresentaram um viés maior na parte da difusão, entretanto na estimação Bayesiana o erro quadrático médio, o *MAE* e *ME* deste coeficiente foram relativamente bem menores. Para os seus valores, a maior discrepância foi na estimação dos coeficientes $\hat{\theta}_2$ e $\hat{\theta}_3$.

Para o modelo de *Brennan - Schwartz* - Tipo 2 (equação 4.81), obteve-se os seguintes resultados para 1000 simulações na estimação Bayesiana de acordo com a tabela 18 a partir dos parâmetros originais estimados.

Coefficiente	Estimação	Método	VIÉS	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_4$	0.009594045	Bayesiano	-0.00505	-0.00505	0.01065	0.01397
$\hat{\theta}_5$	0.131617904	Bayesiano	3.90251	3.90251	3.90321	5.49776
$\hat{\theta}_6$	0.163796502	Bayesiano	0.02817	0.02817	0.02817	0.03226

Tabela 18 – *Brennan 2 - Bayes - 1000*

Olhando para a tabela 18 e comparando com a tabela 16, o coeficiente $\hat{\theta}_4$ pertencente ao *drift* apresentou uma tendência de superestimação enquanto que a estimação por *QMLE* remeteu uma estimação de subestimação. E o *drift* apresentou uma estimação com viés maior na estimação por *QMLE*. Porém ambos apresentaram um viés maior no coeficiente $\hat{\theta}_5$ do *drift*, entretanto na estimação por *QMLE* o erro quadrático médio, o *MAE* e *ME* deste coeficiente foram relativamente bem menores. Para os seus valores, a maior discrepância foi na estimação do coeficiente $\hat{\theta}_5$. As diferenças entre as tabelas 18 e 16 foram bem menores nos coeficientes quando comparadas com as tabelas 17 e 15.

Olhando para as tabelas 17 e 18, é visto que os coeficientes não obedecem as equações 4.70, 4.71 e 4.72 principalmente na parte da difusão, onde há grandes discrepâncias, diferentemente da estimação por *QMLE*.

4.5.5 CEV

Abaixo é apresentada a equação a ser estimada por *QMLE* e por estimação Bayesiana para o modelo *CEV*:

$$dX(t) = \beta X(t)dt + X(t)^\gamma \sigma dW(t) \tag{4.82}$$

Para o modelo *CEV*, que pode ser visto na equação 4.82, obteve-se os seguintes resultados na tabela 19 para 1000 simulações a partir dos parâmetros originais estimados.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\beta}$	0.0000462	QMLE	0.01495	0.01495	0.01495	0.02612
$\hat{\gamma}$	0.1	QMLE	0.05663	0.05663	0.05663	0.10155
$\hat{\sigma}$	0.9056577	QMLE	0.09515	0.09515	0.09962	0.13631

Tabela 19 – *CEV - QMLE - 1000*

Para o modelo *CEV* a partir da equação 4.82, foram obtidos os seguintes resultados para 1000 simulações para o caso Bayesiano na tabela 20 a partir dos parâmetros originais estimados.

Coeficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\beta}$	0.01436196	Bayesiano	0.01895	0.01895	0.01942	0.02548
$\hat{\gamma}$	0.10429993	Bayesiano	0.05330	0.05330	0.05331	0.08943
$\hat{\sigma}$	0.95391282	Bayesiano	0.11978	0.11978	0.11984	0.16106

Tabela 20 – CEV - Bayes - 1000

Comparando as tabelas 19 e 20, é visto que a maior diferença entre as estimações foi para o coeficiente $\hat{\beta}$ do *drift*, onde a diferença é da ordem multiplicativa de 1000 e o viés no *QMLE* para esta estimativa é da ordem da estimativa Bayesiana. Com relação ao parâmetro exponencial da difusão, os valores foram parecidos, porém o método Bayesiano apresentou viés, *MAE*, *ME* e *RMSE* piores.

4.5.6 CIR VR

Abaixo é apresentada a equação a ser estimada por *QMLE* e por estimação Bayesiana para o modelo *CIR VR*:

$$dX(t) = \theta X(t)^{\frac{3}{2}} dW(t) \quad (4.83)$$

Para o modelo *CIR VR*, que pode ser visto na equação 4.83, foram obtidos os seguintes resultados para 1000 simulações para estimação por *QMLE* na tabela 21 a partir dos parâmetros originais estimados.

Coeficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}$	0.6117331	QMLE	-0.0000396	-0.0000396	0.00600	0.00756

Tabela 21 – CIR VR - QMLE - 1000

Similar às estimativas e propriedades das estimações nas tabelas 7 e 8, pode-se ver na tabela 21 que as propriedades apresentaram valores bem pequenos para *RMSE*, *MAE*, *ME* e viés. E também apresentaram viés com tendência de superestimação do parâmetro verdadeiro.

Para o modelo *CIR VR*, visto na equação 4.83, foram obtidos os seguintes resultados para 1000 simulações na abordagem Bayesiana visto na tabela 22 a partir dos parâmetros originais estimados.

Coeficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}$	0.6134627	Bayesiano	-0.02525	-0.02524	0.02547	0.02755

Tabela 22 – CIR VR - Bayes - 1000

Comparando a tabela 22 com a estimação *QMLE*, pode-se ver que o coeficiente foi bem próximo em ambas as estimações, e apresentou uma diferença de menos de 1%. Porém assim como na estimação de 1000 simulações por *QMLE*, na estimação Bayesiana o viés apresentou caráter de superestimação e apresentou um *RMSE* bem maior que o caso da estimação por *QMLE*.

4.5.7 Ahn - Gao

Abaixo é apresentada a equação a ser estimada por *QMLE* e por estimação Bayesiana para o modelo de *Ahn - Gao*:

$$dX(t) = X(t)(\theta_1 - (\theta_2^3 - \theta_3\theta_4)X(t))dt + \theta_5 X(t) \frac{3}{2} dW(t) \quad (4.84)$$

Para o modelo de *Ahn - Gao*, que pode ser visto na equação 4.84, obteve-se os seguintes resultados para 1000 simulações (*QMLE*) vistos na tabela 23 a partir dos parâmetros originais estimados.

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	0	QMLE	0.25437	0.25436	0.25436	0.37341
$\hat{\theta}_2$	1.334122	QMLE	0.69038	0.69038	0.69200	0.81356
$\hat{\theta}_3$	1.017781	QMLE	-0.180385	-0.18038	0.19622	0.26359
$\hat{\theta}_4$	1.138359	QMLE	-0.08314	-0.08314	0.10110	0.15352
$\hat{\theta}_5$	0.814712	QMLE	0.30558	0.30558	0.30558	0.32699

Tabela 23 – *Ahn - Gao - QMLE - 1000*

De acordo com a tabela 23, o maior viés foi para o coeficiente $\hat{\theta}_3$ e o menor para o coeficiente $\hat{\theta}_4$. Já o *RMSE*, o menor foi para o coeficiente $\hat{\theta}_4$ e o maior para o coeficiente $\hat{\theta}_2$. O mesmo para o *ME* e *MAE*.

Para o modelo de *Ahn - Gao* usando a estimação Bayesiana, a simulação não foi completada devido a erros de matrizes não positivas semi-definidas (condição necessária) na variância do processo.

4.5.8 Outros Modelos

Abaixo tem-se a descrição dos resultados para alguns dos demais modelos que não obtiveram *AIC* tão bom por *QMLE*.

- *Catastrophe*

Nas simulações usando *QMLE*, as maiores diferenças foram nos coeficientes do *drift*, porém pequenas, enquanto que no parâmetro da difusão, não foi tida muita discrepância.

- *Sahalia - Tipo 3*

Os maiores vieses foram nos parâmetros da difusão, enquanto na parte do *drift*, os vieses foram pequenos. O mesmo é visto para *MAE*, *ME* e *RMSE*. E na simulação foi visto que três dos parâmetros da difusão estão superestimando o valor verdadeiro.

- *OU Radial*

Para este modelo, o maior viés foi na partícula do *drift*, embora para a difusão os resultados também não se mostraram satisfatórios.

- *Merton*

Para o modelo de *Merton*, o *drift* obteve propriedades piores do que a difusão.

- *Pearson*

Para o modelo de *Pearson*, o *drift* obteve propriedades piores do que a difusão.

- *CKLS* - Tipo 1

O coeficiente exponencial da difusão apresentou característica de superestimação na simulação. O maior viés relativo foi para o coeficiente do *drift* na simulação.

De acordo com as equações 4.62 e 4.63, o valor da taxa de longo prazo seria 0.01238. E para a velocidade de reversão à média, teria-se 0.07192.

- Hiperbólico - Tipo 1

Os maiores vieses foram para a parte do *drift* para a simulação. O mesmo vale para as outras propriedades.

- Hiperbólico - Tipo 2

Os resultados se mostraram melhores do que para o modelo Hiperbólico do Tipo 1.

E agora tem-se a descrição dos resultados para alguns modelos pelo método Bayesiano:

- *CIR* - Tipo 1 e Tipo 2

Para este modelo usando *QMLE*, o coeficiente da taxa de longo prazo seria 0.01103272 (2.819097% ano ano), e para o modelo *CIR* do Tipo 1, seria a divisão entre o primeiro coeficiente do *drift* pelo segundo, o que daria 0.006232412 (1.582916% ao ano) Já para o modo Bayesiano, o coeficiente da taxa de longo prazo seria 0.1075646, e para o modelo *CIR* do Tipo 1 seria a divisão entre o primeiro coeficiente do *drift* pelo segundo, o que daria 0.0459927 (12.28555% ao ano)

Para o parâmetro da difusão (coeficiente $\hat{\theta}_6$), o modelo *CIR* do tipo 2 apresentou um menor erro quando vistas as propriedades estatísticas. O coeficiente $\hat{\theta}_6$ apresentou um valor bem próximo quando foi comparado os dois modelos. Para o modelo do tipo 1, o coeficiente $\hat{\theta}_2$ apresentou maior viés, enquanto no modelo do tipo 2, o menor viés foi para o coeficiente $\hat{\theta}_1$, o mesmo vale para as outras propriedades.

De acordo com as equações 4.58 e 4.59, para o *CIR* do tipo 1, tem-se que a taxa de longo prazo seria 0.0459927(12.28555% ao ano), e a reversão à média 0.51443398, com volatilidade de 0.26098. Já para o modelo *CIR* do tipo 2, a reversão à média seria 0.788045, e a taxa de longo prazo 0.1075646, com volatilidade de 0.26098. Ou seja, não houve grandes mudanças na volatilidade estimada.

- *Sahalia* - Tipo 3

Para este modelo, quase todos os parâmetros apresentaram caráter de superestimação do valor verdadeiro. Porém quando comparado com a estimativa por *QMLE*, a Bayesiana mostrou-se ter melhores propriedades estatísticas, principalmente na questão da difusão, que era o principal problema na estimação por *QMLE*. Em relação aos valores da estimação, a principal diferença nos parâmetros é com relação aos parâmetros da difusão também.

- *Merton*

Para o coeficiente da difusão, a estimação Bayesiana não demonstrou grande variação. Já para o coeficiente do *drift* há uma grande diferença proporcional, fato este que pode ser visto através do viés na estimação por *QMLE*.

- *Pearson*

Com relação aos coeficientes da difusão, ambos apresentaram mesmo valor. Porém a estimação Bayesiana apresentou viés, *RMSE*, *MAE* e *ME* melhores que na *QMLE*.

4.5.9 *RMSE*

Nesta seção, apresentou-se o erro quadrático médio entre a série real do DI e a média das simulações (1000 simulações) para cada modelo com os parâmetros calculados através dos métodos de quasi-máxima verossimilhança e estimação Bayesiana para a curva DI feitos anteriormente e posterior simulação das trajetórias usando o método de *Euler-Maruyama* como já citado anteriormente também. Pode ser visto na tabela 24, primeiramente para o método *QMLE*, onde tem-se a coluna com o modelo da *SDE* usado, e depois a coluna com o valor do *RMSE* para 1000 simulações.

Modelo	RMSE - 1000
Merton	0.01141
Dothan	0.01216
Gbm	0.01210
CIR - Tipo 1	2.22607
CIR - Tipo 2	0.02061
Vasicek - Tipo 1	0.01068
Vasicek - Tipo 2	0.01051
Brennan - Tipo 1	0.01162
Brennan - Tipo 2	0.01178
CIR VR	0.01210
CEV	0.01211
CKLS - Tipo 1	0.16405
Hiper - Tipo 1	0.01151
Hiper - Tipo 2	0.01152
CIR Lamperti	0.01853
Sahalia - Tipo 3	7.20250
Catastrophe	0.03491
Epidemic	0.03369
Pearson	0.01648
Jacobi	0.09772
Radial OU	0.07204
Double - Potential	0.03955
Ahn - Gao	0.01067

Tabela 24 – *RMSE - QMLE - 1000*

Os modelos que apresentaram menores erro quadrático médio dentro da amostra foram: o de *Merton*, *Dothan*, *GBM*, *Vasicek* (1 e 2), *Brennan-Schwartz* (1 e 2), *CIR VR*, *CEV*, Hiperbólicos(1 e 2), e *Ahn e Gao*. Modelos mais gerais como *CKLS* e *Sahalia* não apresentaram bons resultados.

E também o *RMSE* dos modelos que foram estimados usando estimação Bayesiana dos parâmetros para a curva DI com a simulação das 1000 trajetórias usando método de *Euler - Maruyama*, pode ser visto na tabela 25:

Modelo	RMSE - 1000
CEV	0.01592
Ahn - Gao	0.04067
Dothan	0.01292
GBM	0.07721
Vasicek - Tipo 1	0.01895
Vasicek - Tipo 2	0.13119
Brennan - Tipo 1	0.05540
Brennan - Tipo 2	0.02442
CIR VR	0.01287
CKLS - Tipo 1	0.04160
Hiperbólico - Tipo 1	0.04056
Hiperbólico - Tipo 2	0.04026
Sahalia - Tipo 3	0.15024
Pearson	1.52775
Merton	0.14706
CIR - Tipo 1	0.03938
CIR - Tipo 2	0.06402

Tabela 25 – RMSE - Bayes - 1000

Os modelos que apresentaram menores erro quadrático médio dentro da amostra para estimação Bayesiana foram: *Dothan*, *Vasicek* do tipo 1, *Brennan-Schwartz* do tipo 2, *CIR VR*, *CEV*, Hiperbólicos(1 e 2), *Ahn-Gao* e *CIR* do tipo 1. O modelo mais geral que é o de *Sahalia* do tipo 3 e o menos geral que é o modelo de *Merton* não apresentaram bons resultados. Modelos com dois tipos, como *Vasicek* e *Brennan - Schwartz* apresentaram muita discrepância com relação ao *RMSE* na comparação interna entre eles (tipos de parametrização).

5 Modelagem de Saltos

Nesta parte do trabalho é feita primeiramente a abordagem teórica de Processos de *Poisson* (Composto ou Não), de Modelos Lineares generalizados e da Distribuição *GEV*. Pois todos servirão de base para a construção da metodologia e dos resultados obtidos para os saltos. O objetivo deste Capítulo é modelar somente os saltos da série DI, de forma homogênea e não homogênea, esta última através de variáveis explicativas. Partindo do pressuposto, por construção, de que os quantis mais extremos da primeira diferença da série DI seriam saltos.

5.1 Construção dos Saltos

Suponha que X_t seja a taxa de juros para o tempo t e para um período de amostra específico de n dias tem-se o conjunto na equação 5.1:

$$S = \{X_1, X_2, \dots, X_t, X_n\}$$

(5.1)

E tomando a primeira diferença, $X_t - X_{t-1}$ para t , é obtido, dX_t , que forma conjunto dS , das diferenças diárias:

$$dS = \{dX_2, \dots, dX_t, dX_n\}$$

(5.2)

E depois ordenando dS de forma crescente, tem-se:

$$\{dX_1 \leq dX_2 \leq \dots \leq dX_n\}$$

(5.3)

Baseado na expressão 5.3 é agora construído os saltos positivos e negativos que serão usados no trabalho:

1. Quantil 1% ($Q1$): Quantil de 1% da expressão 5.3;
2. Quantil 5% ($Q2$): Quantil de 5% da expressão 5.3;
3. Quantil 10% ($Q3$): Quantil de 10% da expressão 5.3;
4. Quantil 90% ($Q4$): Quantil de 90% da expressão 5.3;
5. Quantil 95% ($Q5$): Quantil de 95% da expressão 5.3;
6. Quantil 99% ($Q6$): Quantil de 99% da expressão 5.3;
7. Quantil 1 e 99% ($Q7$): $|Q1| \cup |Q6|$;

8. Quantil 5 e 95% ($Q8$): $|Q2| \cup |Q5|$;
9. Quantil 10 e 90% ($Q9$): $|Q3| \cup |Q4|$.

Os quantis $Q7$, $Q8$ e $Q9$ são os que serão usados para modelagem dos saltos. E o porquê da união é explicado na seção 5.7.1. Para a ocorrência dos saltos, tem-se baseado acima, a definição binária de ocorrência ou não. E logo de acordo com a expressão 5.3, pode-se construir a série de ocorrência dos saltos para seu uso na distribuição de *Poisson*. De acordo com $Q1$, $Q2$, $Q3$, $Q4$, $Q5$, $Q6$ e a expressão 5.3, caso dX_n , elemento de 5.3, pertença a um dos quantis citados ($Q2$, $Q3$, $Q4$, $Q5$, $Q6$), então ele é um salto, e caso não pertença, então não é considerado salto. Esta definição é usada como base para definir a variável aleatória de ocorrência dos saltos N_t na seção 5.2.

5.2 Processo de *Poisson*

O Processo de *Poisson* é um dos principais processos estocásticos em tempo contínuo com espaço de estado discreto. Ele é um processo de contagem com tempo de chegada, que por sua vez é distribuído de forma exponencial (conceito usado na seção 5.7.5). Este processo é usado para modelar o número de eventos raros no tempo, e que serão dados pelos saltos neste trabalho. Rupturas de mercados financeiros ou grandes choques são considerados eventos raros e o processo de *Poisson* é bastante usado para modelá-los, segundo (Iacus 2011). Neste processo, é assumido que os incrementos do processo são independentes do passado, ou seja, a ocorrência de salto da taxa de juros não depende do passado. Sob essas hipóteses é possível mostrar a equação 5.4:

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (5.4)$$

, $k = 0, 1, 2, \dots$

O que significa que N_t é uma variável aleatória de *Poisson* que descreve as ocorrências de saltos na série DI com taxa λt , isto é, $N_t \sim Poi(\lambda t)$.

Seja T , o tempo aleatório de chegada de eventos, então $T \sim Exp(\lambda)$.

Quando a taxa que os eventos ocorrem é constante, isto é, λ , o processo é chamado processo de *Poisson* homogêneo. É possível generalizar o caso, como por exemplo o caso em que λ depende do tempo, $\lambda = \lambda(t)$, deste modo λ seria função do tempo, e o processo deixaria de ser homogêneo. O processo não homogêneo de *Poisson* é caracterizado por sua função de intensidade na equação 5.5:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \quad (5.5)$$

e sua distribuição tem a forma seguindo a equação 5.6:

$$P(N_t = k) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^k}{k!} \quad (5.6)$$

, $k = 0, 1, 2, \dots$

isto é $N_t \sim Poi(\Lambda(t))$. Do fato de que N_t é uma variável aleatória de *Poisson*, tem-se que $E(N_t) = \Lambda(t)$. Quando $\Lambda(t) = \lambda \forall t$, o processo se torna homogêneo. O Processo homogêneo é usado no trabalho para definir a ocorrência dos saltos quando não usadas variáveis explicativas.

5.3 Processo Composto de *Poisson*

O Processo Composto de *Poisson* pode ser definido como na equação 5.7:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_{\tau_i} \quad (5.7)$$

, onde N_t é um processo de *Poisson*, que descreve a ocorrência dos saltos usado no trabalho, e Y_{τ_i} são saltos no tempo aleatório τ_i , que descreve a amplitude (seu tamanho).

O Processo Composto de *Poisson* tem um importante papel na construção de Processos de *Lèvy* (generalização do Processo Composto de *Poisson*, que é definido no Capítulo 7.).

Seja N_t um processo composto de *Poisson* e seja Y_{τ_i} independente e identicamente distribuído com média comum μ . Então segue a equação 5.8:

$$E(X(t)) = \mu\Lambda(t) \quad (5.8)$$

Uma explícita versão da distribuição de X_t não pode ser sempre achada e então a Transformada Rápida de *Fourier* (*FFT*) ou outros métodos devem ser considerados.

Qualquer distribuição pode ser especificada para a distribuição dos saltos. Ex: *NIG*, Normal, Exponencial, *GEV*, entre outras. O processo composto também pode ser não homogêneo, neste caso a intensidade pode depender do tempo ou de alguma outra variável explicativa (analisado também no trabalho), assim como no Processo não *homogêneo* de *Poisson*.

5.4 Modelos Lineares Generalizados - *GLM*

Com o intuito de fazer a estimação da ocorrência dos saltos baseada em variáveis explicativas, que seriam: saltos no dólar, feriados nos EUA e no Brasil, dia de reunião do *COPOM* e dias da semana; foi proposta a modelagem baseada em Modelos Lineares Generalizados. De acordo com Fox 2015, os Modelos Lineares Generalizados ou *GLM* consistem de 3 componentes vistos a seguir. E esses modelos relacionam a distribuição aleatória da variável dependente (ocorrência de saltos) no experimento com as covariáveis do modelo (variáveis explicativas dos saltos) através de uma função chamada função de ligação.

1. Uma componente aleatória especificando a distribuição condicional da variável resposta, Y_i , dados os valores das variáveis explanatórias no modelo. Na inicial formulação dos *GLMs*, a distribuição de Y_i faz parte da família exponencial, como as famílias de distribuições: Gaussiana, Binomial, *Poisson*, Gama, ou Gaussiana-Inversa;
2. Um predictor linear, ou seja, uma função linear de regressares:

$$\theta = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}$$

(5.9)

em que θ é a taxa de ocorrência da distribuição de *Poisson* e $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik}$, são as variáveis explicativas que por sua vez são saltos no dólar, feriados nos EUA e no Brasil, dia de reunião do *COPOM* e dias da semana.

3. Uma suave e invertível função de ligação linearizada $g(\cdot)$, que transforma a expectativa da variável resposta, $\mu_i = E(Y_i)$, no preditor linear:

$$g(\mu_i) = \lambda = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}$$

(5.10)

De acordo com Fox 2015, a tabela abaixo mostra a gama de variação da variável resposta em cada família e a função de ligação canônica ou "natural" associado com cada família.

Família	Função de Ligação
Gaussiana	Identidade
Binomial	Logit
Poisson	Log
Gama	Inversa
Gaussiana-Inversa	Inversa-Quadrada

Tabela 26 – Ligação da Família Exponencial

Os *GLMs* são ajustados aos dados por *MLE*, fornecendo não só as estimativas dos coeficientes da regressão mas também os desvios-padrão assintóticos estimados dos coeficientes. É importante ressaltar que nos *GLMs* Binomial e *Poisson* os parâmetros de dispersão são fixados em 1.

5.5 GEV

Nesta seção é apresentado o arcabouço teórico para a distribuição de Valor Extremo Generalizada (*GEV*) que é usada para modelar o tamanho dos saltos na taxa de juros DI que foi construído na seção 5.1.

Distribuições com caudas pesadas são distribuições que tem mais peso nas caudas do que alguma distribuição de referência. Muitas vezes é assumido erroneamente que a distribuição de referência é a Gaussiana. Essas caracterizações errôneas não são convenientes do ponto de vista estatístico nem matemático de acordo com Focardi e Fabozzi 2004.

Fat-tailedness tem uma consequência prática importante: a probabilidade de eventos extremos é muito maior que no caso da distribuição normal. Uma distribuição de caudas pesadas tem maior probabilidade de valores extremos do que se na distribuição normal. A teoria de valores extremos atenta para estimar a inteira região de cauda. Um número de indicadores para calcular a dimensão de eventos extremos foi proposto por (Embrechts, Klüppelberg e Mikosch 2013).

Se a distribuição tem caudas pesadas, então ela segue as duas propriedades abaixo:

1. Possui momentos exponenciais infinitos de toda todas as ordens: $E[e^s X] = \infty$ para todo $s \geq 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) e^{\lambda x} = \infty$, para todo $\lambda \geq 0$ onde \bar{F} é a cauda da distribuição $F(x)$.

5.5.1 TVE - Teoria do Valor Extremo

O objetivo do *TVE* é estimar a cauda de uma distribuição de uma amostra finita por encaixar uma distribuição apropriada a esses valores de uma amostra que caem na cauda. Dois conceitos têm papel crucial em *TVE*:

1. O comportamento de estatísticas de ordem superior, a *Máxima* por exemplo;
2. O comportamento dos pontos onde amostras excedem um dado limiar.

O *TVE* está diretamente relacionado com as distribuições limite da *Máxima* e a distribuição de pontos de excesso de um certo limiar.

5.5.2 *Máxima*

Uma teoria paralela é desenvolvida para a *Máxima*, que por sua vez nada mais é do que o maior valor em uma amostra. A distribuição limite da *Máxima*, se ela existir, é uma distribuição *Frechet*, *Weibull* ou *Gumbel*. Esse resultado forma a base do clássico *TVE*. Cada distribuição limite tem seu *Máximo Domínio de Atração*. Considere uma sequência de variáveis independentes X_i com comum distribuição não degenerada F e a máxima das amostras extraídas dessa sequência:

$$M_1 = X_1, M_n = \max \{X_1, \dots, X_n\} \quad (5.11)$$

A máxima M_n forma uma nova sequência de variáveis aleatórias que são independentes. Como as variáveis da sequência X_i são assumidas serem independentes, a distribuição F_n da *Máxima* M_n pode ser imediatamente escrita abaixo:

$$F(x)_n = P(X_1 \leq x \wedge \dots \wedge X_n \leq x) = F^n(x) \quad (5.12)$$

onde \wedge é o símbolo lógico para "e".

Um fundamental resultado do comportamento da máxima é o *Teorema de Fisher - Tippett*: Considere uma sequência de variáveis X_i independentes e identicamente distribuídas e a sequência relativa de máximas M_n . Se nela existe duas sequências de constantes $C_n > 0$, $d_n \in \mathbf{R}$ e uma função de distribuição não degenerada H tal que:

$$(C_n^{-1})(M_n - d_n) \xrightarrow{D} H \quad (5.13)$$

então H é uma das seguintes distribuições:

1. *Frechet*: $\phi_\alpha = 0$, se $x \leq 0$ ou $\phi_\alpha = \exp(-x^{-\alpha})$ se $x > 0$ e, $\alpha > 0$;
2. *Weibull*: $\psi_\alpha = \exp\{-(-x^{-\alpha})\}$, se $x < 0$ ou $\psi_\alpha = 1$, se $x \geq 0$, e $\alpha > 0$;
3. *Gumbel*: $\vartheta_\alpha = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbf{R}$.

O limite de H é único, no sentido de que diferentes sequências de constantes normalizadas determinam a mesma distribuição. As três distribuições acima: *Frechet*, *Weibull* e *Gumbel* são chamadas de **distribuições de valores extremos padrão**. Elas são funções contínuas para todo número real x . Variáveis aleatórias distribuídas de acordo com uma dessas distribuições são chamadas de variáveis aleatórias extremas.

5.5.3 Distribuições de Valor Extremo Generalizada - GEV

As três distribuições de valores extremos, *Frechet*, *Weibull*, e *Gumbel* podem ser representadas como uma família de um parâmetro de distribuições através da Distribuição de Valor Extremo Generalizada (*GEV*) de Jenkinson 1955 e Mises 1936. Definindo a função cumulativa de distribuição H_ξ :

$$H_\xi = \exp\left(-\left(1 + \xi x\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), \text{ se } \xi \neq 0, H_\xi = \exp(-\exp(-x)), \text{ se } \xi = 0 \text{ e, } \alpha > 0; \quad (5.14)$$

onde $x = \frac{z - \mu}{\sigma}$ (valores padronizados), μ é o parâmetro de locação, ξ é o de forma, o σ é o parâmetro de escala e $1 + \xi x > 0$. Pode-se ver que se $\xi = \alpha^{-1} > 0$ corresponde a distribuição de *Frechet*, $\xi = 0$ corresponde a distribuição de *Gumbel* e $\xi = -\alpha^{-1} < 0$ corresponde a distribuição de *Weibull*.

5.6 Estimação por Máxima Verossimilhança - MLE

Nesta seção é descrita a metodologia que foi usada para estimação dos coeficientes dos modelos *GLM* apresentados neste Capítulo para parametrizar as variáveis explicativas dos saltos (ocorrência) - *Poisson* não homogênea -, de modo que é partida da hipótese inicial de que os saltos são os quantis mais extremos (1%, 5%, 10%, 90%, 95% e 99%) da primeira diferença da curva DI, conforme visto na seção 5.1, da curva DI no período entre o período de 2007 a 2018 através do método de estimação por máxima verossimilhança (*MLE*) de acordo com Focardi e Fabozzi 2004, Fox 2015 e McCullagh 2018. Posterior a isso é descrita a parte da *MLE* para a estimação da distribuição *GEV*, que é usada para estimação da amplitude destes mesmos saltos.

Nesta seção é explicado e desenvolvido o método da Máxima Verossimilhança, que por sua vez será usado para estimação de algumas distribuições como as distribuições *Poisson* homogênea (sem variáveis explicativas), *GEV* e *GPD* no trabalho e também para estimação dos Modelos *GLM* que é usado nos saltos. Como a *MLE* será mais usada para a regressão *Poisson* e Binomial - dado que a distribuição *Poisson* é um caso limite da distribuição binomial como citado em Morettin 2010, foi feita a estimação como regressão Binomial e como regressão *Poisson* para a ocorrência baseada nas covariáveis citadas anteriormente -, e também para estimação da distribuição *GEV*, não será desenvolvida aqui a verossimilhança para outras recorrências no trabalho.

Suponha uma distribuição de probabilidade em que seus parâmetros sejam desconhecidos e suponha que seja objetivo, dada uma amostra de uma população, estimar o valor dos parâmetros da distribuição de probabilidade que representa toda a população. Desta forma, a partir de uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída com distribuição de probabilidade e vetor de parâmetros a serem estimados, deseja-se estimar o valor destes parâmetros ou de uma função destes a partir dos valores da amostra observados.

O *MLE* consiste em maximizar a função de verossimilhança e com isso achar o vetor dos estimadores de máxima verossimilhança. Para as funções de densidade usadas aqui, como os valores do vetor de parâmetros que maximiza a verossimilhança é o mesmo que maximiza seu logaritmo e este está definido, logo utiliza-se este último dada a maior facilidade.

5.6.1 MLE para GEV

Para se estimar a distribuição *GEV*, precisa ser estimado o ξ . A metodologia de máxima verossimilhança (*MLE*) pode ser usada para achar a melhor *GEV* para os dados, que neste caso é a junção dos quantis extremos $Q7, Q8$ e $Q9$ definidos na seção 5.1. Aplica-se a máxima verossimilhança e escolhe-se os parâmetros que a maximizam através de métodos de integração numérica.

Para a Distribuição *GEV*, com $\Theta = (\mu, \sigma, \xi)$, tem-se a seguinte função de verossimilhança:

$$L(\Theta|x) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma} \left(1 - \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1-\xi}{\xi}} \exp \left(- \left(1 - \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right) \right] \quad (5.15)$$

Aplicando o logaritmo tem-se:

$$l(\Theta|x) = -n \ln(\sigma) - (1 - \xi) \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n e^{-z_i} \quad (5.16)$$

onde $z_i = -\frac{1}{\xi} \ln \left(1 - \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)$.

A expressão em 5.16 igualada a zero não possui solução explícita. Assim deve ser usado algum método de numérico, que neste caso é aplicado o *Nelder-Mead*¹, já que o mesmo é robusto e funciona bem para funções não diferenciáveis.

5.6.2 MLE para GLM

Para os Modelos Lineares Generalizados, que é usado aqui para modelar as variáveis explicativas de ocorrência para os saltos, é usado a estimação pelo método de *MLE* geralmente, de acordo com Fox 2015 e McCullagh 2018. E como um dos objetivos do trabalho é estimar regressões *Poisson* e *Binomial* de modo que variáveis expliquem os saltos ocorridos na taxa de juros DI para o Brasil. Foi feito aqui o desenvolvimento da estimativa pelo método de máxima verossimilhança para as regressões em questão, em especial a regressão *Poisson*.

Seja π_i a probabilidade que a resposta Y_i para o i -ésimo indivíduo seja zero. Então,

$$\log_e \frac{\pi_i}{1 - \pi_i} = \psi_0 + \psi_1 z_{i1} + \psi_2 z_{i2} + \dots + \psi_p z_{ip} \quad (5.17)$$

onde z_{ij} são os regressores para prever os membros da primeira classe latente, e:

$$\log_e \mu_i = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} \quad (5.18)$$

¹Procedimento descrito por Nelder e Mead 1965 para estimação da matriz hessiana na vizinhança do mínimo, necessária em problemas de estimação estatística.

onde $\mu_i = E(Y_i)$ e X_{i1}, \dots, X_{in} são as variáveis explicativas dos saltos, de forma com que i seja o número de variáveis explicativas, que neste caso vão ser os dias da semana, salto no dólar, feriados (Brasil e EUA) e dias de Reunião do *COPOM*.

A log-verossimilhança para uma observação individual Y_i da equação 5.17 é:

$$\log_e L(\theta_i, \phi; Y_i) = \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\phi)} + c(Y_i, \phi) \quad (5.19)$$

Para n observações independentes de saltos, tem-se:

$$\log_e L(\Theta, \phi; y) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\phi)} + c(Y_i, \phi) \quad (5.20)$$

onde $\Theta = \{\theta_i\}$ e $y = \{Y_i\}$

Suponha que o *GLM* use a função de ligação $g(\cdot)$, então:

$$g(\mu_i) = \lambda = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}$$

(5.21)

O modelo expressa os valores esperados das n observações em termos de um número muito menor de parâmetros da regressão. Para se ter as equações dos parâmetros da regressão, deve-se diferenciar a log-verossimilhança com relação a cada coeficiente. Seja l_i o i -ésimo componente da log-verossimilhança. Então, pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} x \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} x \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_i} x \frac{\partial \lambda_i}{\partial \beta_j} \quad (5.22)$$

para $j = 0, 1, \dots, k$ Pode-se reescrever a equação 5.22 como:

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} = \frac{y_i - \mu_i}{a_i(\phi)v(\mu_i)} x \frac{d\mu_i}{d\lambda_i} x X_{ij} \quad (5.23)$$

Somando todas as equações das observações e igualando a zero, tem-se a máxima verossimilhança estimando as equações para o *GLM*:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \mu_i}{a_i v(\mu_i)} x \frac{d\mu_i}{d\lambda_i} x X_{ij} = 0 \quad (5.24)$$

para $j = 0, 1, \dots, k$, onde $a_i = a_i(\phi)/\phi$ não depende do parâmetro de dispersão, que é constante nas observações.

No entanto, as equações de estimativa são funções não lineares dos parâmetros de regressão e geralmente requerem métodos iterativos para sua solução. Neste caso foi usado o *IRLS*².

²O *IRLS*, Mínimos Quadrados Iterativamente Ponderados (*Iteratively reweighted least squares*), é usado para encontrar as estimativas de máxima verossimilhança de um modelo linear generalizado.

5.7 Resultados - Saltos

Esta parte do trabalho tem o objetivo de analisar os saltos na série DI de forma homogênea e depois os principais fatores que podem ocasionar saltos (*Poisson* não-homogênea), na série DI - estes saltos seguem aqui a definição de eventos extremos, e é definido no trabalho como os quantis extremos da primeira diferença da série DI, conforme na seção 5.1 - e verificar as distribuições de ocorrência e amplitude destes saltos.

Primeiramente é definido o que foi considerado salto no estudo de acordo o visto na seção 5.1 e posterior a isso é vista a distribuição da frequência dos saltos (homogênea ou não) e do tamanho dos saltos. A questão do sinal dos saltos também é analisada com o intuito de ver se a ocorrência de um salto positivo tem a mesma probabilidade de ocorrência que um salto negativo, que é necessário para juntar os quantis na seção 5.1. A duração do período em que não ocorrem saltos também é trabalhada aqui e definida como *duration*, o que seria definido como o período que a serie DI passa sem apresentar saltos e sua duração acaba a partir do primeiro salto ocorrido, e logo começa uma nova *duration* até o próximo salto.

Na parte da estimação da distribuição não homogênea dos saltos é feita uma análise dos principais fatores que ocasionariam saltos, baseado na definição inicial de saltos, e que seria ocasionado por um processo não homogêneo com as principais variáveis sendo dias de feriado, dias de reunião do *COPOM*, salto no dólar e dias da semana. Esta parte do trabalho é feita, por dois motivos: o primeiro é que há fortes evidências de que os saltos são causados por alguns fatores como cita Das 2002, Johannes 2004 e Filho, Carlos e Gonçalves 2015; e o segundo é que para a distribuição de *Poisson* homogênea, foram tidas algumas evidências de que o processo poderia ser não homogêneo, ocasionado por variáveis explicativas.

Com o objetivo e motivação de melhorar o ajuste na curva DI e também de incorporar componentes surpresas de impacto significativo para a variável financeira estudada (Taxa DI), foi realizado primeiramente um teste *BNS*³ para testar a hipótese de saltos na variável DI, ele pode ser visto na tabela 27. De acordo com a literatura de finanças, segundo Das 2002 e Johannes 2004, saltos são ocasionados por informações inesperadas em componentes macroeconômicos importantes de grande relevância global. E o objetivo com o teste *BNS*, descrito por Barndorff-Nielsen e Shephard 2006, é verificar se a série DI apresenta um comportamento característico de saltos presente na série.

Teste BNS	
Estatística BNS	154.06
P-valor	0

Tabela 27 – Teste BNS

De acordo com a tabela 27, rejeita-se a hipótese nula de que não há saltos na variável, série DI analisada, dado o *p - valor* bem próximo de zero (muitas casas decimais) ou levando-se em conta o valor da estatística do teste *BNS*. De acordo com teste há forte evidência de presença de saltos na série, o que é de se esperar dada as características deste ativo. Com isso, o próximo passo do trabalho é estudar como é a distribuição estatística da parte de saltos na série, tanto com relação a sua ocorrência como sua amplitude (seja negativa ou positiva) baseado na definição de saltos na série construída na seção 5.1.

5.7.1 Positividade

Para estimar algumas distribuições é requerida valores positivos e também para analisar a distribuição dos saltos em valores extremos, foi assumido positividade em todas as amostras de forma a aumentá-la. Ou

³Teste para presença de saltos proposto por *Barndorff-Nielsen e Shephard* em Barndorff-Nielsen e Shephard 2006.

seja, ao invés de estimar e simular os saltos em separados quantis, foi unido o quantil 95% com o 5%, o 99% com o 1% e o 90% com o 10%, mudando o sinal para positivo de todos os quantis (seção 5.1). Desta forma aumentou-se a amostra para a estimação das distribuições e foi resolvido o problema de ter somente valores negativos na estimação. De forma a perpetuar a verdadeira distribuição dos sinais dos saltos e verificar a coerência da junção dos quantis, foi feito o teste nas diferenças da taxa DI para verificar se há alguma prevalência, seja ela positiva ou negativa para a amplitude dos saltos na taxa DI.

Os resultados são apresentados na tabela 28. Olhando a tabela é visto que não foi rejeitado a hipótese nula da distribuição binomial para a positividade com probabilidade de 50% para altas e baixas (positivo e negativo) das diferenças da taxa DI (mesma probabilidade de alcançar valores positivos e negativos).

Teste Binomial	Valores
Probabilidade	0.5
Número de Sucessos	1599
P-valor	0.11553

Tabela 28 – Teste Binomial para Positividade

5.7.2 Distribuição dos Saltos

Nesta parte do trabalho é feita a estimativa da ocorrência de saltos, dado que o teste *BNS* evidenciou a presença de saltos, e agora considerando-os como eventos extremos que por sua vez estão presentes nos quantis 1%, 5% ou 10% e 99%, 95% ou 90% da série de diferenças da taxa DI, ou seja, serão considerados saltos a parte de caudas pesadas da diferença da série DI. Os primeiros quantis são referências a queda na taxa DI, por ser negativo, enquanto os quantis superiores são referências a eventos de alta na taxa DI, por serem positivos.

Pode-se ver nos gráficos na figura 8, as diferenças da taxa DI para o momento do salto considerando os quantis acima descritos. Ou seja $DI_{salto_t} - DI_{t-1}$. Sendo que DI_{t-1} pode ou não ser um salto.

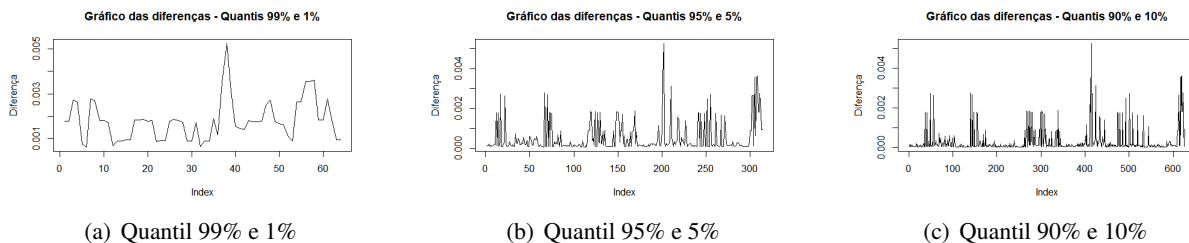


Figura 8 – Diferença - Saltos

De acordo com os gráficos na figura 8, conforme vai aumentando o tamanho do quantil considerado salto, é tido uma maior presença de "constantes" ou algo em torno disso, ou seja, menos oscilações e picos no gráfico, o que significa um comportamento não tão extremo (em comparação com os outros quantis), e logo, provavelmente, uma informação macroeconômica (ou de grande relevância) que não apresentou impacto tão grande na curva DI. Os histogramas da curva DI em primeira diferença podem ser vistos nos gráficos na figura 9:

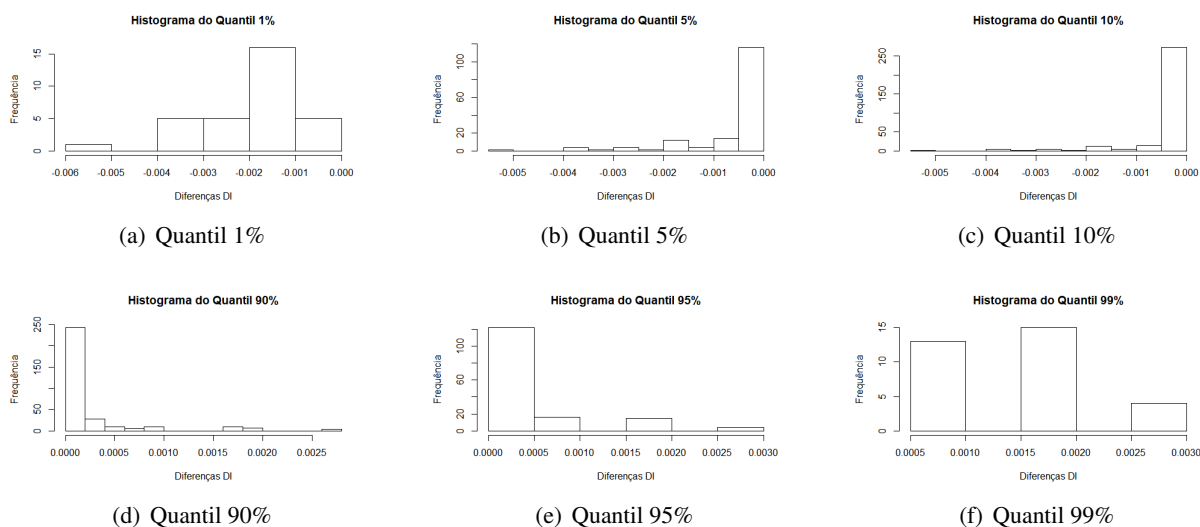


Figura 9 – Histograma - Quantis

Dado que são valores extremos, foi feito o teste de *Kolmogorov-Smirnov*⁴ para verificar a distribuição que melhor se adequava aos dados da curva para os quantis sugeridos como extremos, dentre as distribuições sugeridas (*GEV*, *Exponencial*, *Gama* e *GPD*). Os resultados são apresentados na tabela 29.

Quantil	GEV	Exponencial	Gama	GPD
99%	0.03250	0.00100	0.000004	-
95%	0.04590	0 (7 casas decimais)	0.00004	0
90%	0	0	0	0
1%	0.62412	0.00072	0.62851	0.000001
5%	0.00121	0	0	0
10%	0 (10 casas decimais)	0	0	0
99% e 1% (abs)	0.05293	0	0	-
95% e 5% (abs)	0.00027	0	0	0
90% e 10% (abs)	0	0	0	0

Tabela 29 – Teste KS - Distribuições

De acordo com a tabela 29, na coluna quantis foi apresentado o quantil usado no teste, onde "abs" indica que foi utilizado dois quantis em valor absoluto para o teste, ou seja, foram usados a junção dos quantis 99% com 1%, 95% com 5% e 90% com 10%. A junção dos quantis 99% com 1%, 95% com 5% e 90% com 10% é usada com objetivo de aumentar a amostra. E as demais colunas representam os *p-valor* para a distribuição descrita na coluna. A distribuição *GEV* se refere a Distribuição Generalizada para Valores Extremos e *GPD* é a Distribuição Generalizada de Pareto, ambas são usadas para valores extremos, porém a *GPD* é usada com um limiar, de acordo com Focardi e Fabozzi 2004.

Os parâmetros das distribuições foram estimados por máxima verossimilhança (*MLE*), de acordo com a seção 5.6.1, para posterior teste de *Kolmogorov - Smirnov*. Os resultados na tabela 29 indicam que para distribuição Gama, não se rejeita para o quantil de 1% e rejeita-se para todo o resto. Para a distribuição exponencial é rejeitada a hipótese nula em todos os casos ao nível de 1%. Já para a *GEV*, que é por sua vez a distribuição característica para valores extremos, ela foi bem aceita para o quantil 99%(ao nível de 1%), 95%(ao nível de 1%), 1%, e 99% e 1%. Para os quantis 90%, 10% e 90% e 10% não houve resultados significantes. E para a distribuição *GPD*, foi rejeitado todos os quantis ao nível de 1%.

⁴Teste não paramétrico para verificar a igualdade de distribuições contínuas.

5.7.3 Poisson - Homogêneo

Saltos são considerados aqui como eventos raros (quantis extremos da primeira diferença da série DI), diferentemente do que é feito por Das 2002 e Johannes 2004 nos EUA, Filho, Carlos e Gonçalves 2015 no Brasil e do que é apresentado no Capítulo 7. E para modelar sua ocorrência será utilizado a distribuição de *Poisson*, que é corriqueiramente usada na literatura para ocorrência de eventos cisnes negros. Nesta parte do trabalho então foi analisada a ocorrência dos saltos, diferentemente da seção anterior onde foi analisada sua amplitude. Aqui foi feito o teste para distribuição de *Poisson* para os quantis definidos anteriormente (1%, 5%, 10%, 90%, 95%, 99%, 1% com 99%, 5% com 95% e 99% com 1%) e os resultados podem ser vistos na tabela 30:

Quantil	Estatísticas	P - valor
99%	0.00020	0.99973
95%	0.00470	0.87045
90%	0.01752	0.14628
01%	0.00005	0.99998
05%	0.00121	0.99077
10%	0.00467	0.87193
99% e 1%	0.00005	0.99998
95% e 5%	0.00121	0.99077
90% e 10%	0.00467	0.87193

Tabela 30 – Teste KS - Ocorrência de Saltos

De acordo com a tabela 30, não foi rejeitado a hipótese nula de distribuição de *Poisson* para os saltos usando o teste *Kolmogorov-Smirnov*, supondo que os saltos sejam os quantis propostos 1%, 5%, 10%, 90%, 95%, 99% e a junção entre eles.

De acordo com a literatura em Morettin 2010, a distribuição de *Poisson* é um caso limite da distribuição binomial quando n é grande. E baseado nisto, foi feito o teste para distribuição binomial e então foram obtidos os resultados na tabela 31:

Quantil	P - valor
99% e 1%	0.51714
95% e 5%	0.50871
90% e 10%	0.50713
99%	0.52387
95%	0.51144
90%	0.50872
1%	0.52387
5%	0.51144
10%	0.50872

Tabela 31 – Teste para Distribuição Binomial

De acordo com a tabela 31, não foi rejeitada a distribuição binomial para as ocorrências em um nível considerável de significância.

Com o objetivo de continuar a análise, foi analisado também a média e variância da ocorrência dos saltos. Na tabela 32 é tido a estimação por máxima verossimilhança do parâmetro (média) da distribuição de *Poisson* e também da variância amostral para os quantis 99%, 95%, 90%, 10%, 5%, 1%, 99% e 1%, 95% e 5%, 90% e 10%:

Quantis	Média	Variância Amostral
99%	0.01022	0.01012
95%	0.05015	0.04765
90%	0.1	0.09002
01%	0.01022	0.01012
05%	0.05015	0.04765
10%	0.1	0.09002
99% e 1%	0.02044	0.02003
95% e 5%	0.10031	0.09028
90% e 10%	0.2	0.16005

Tabela 32 – Média e Variância Amostral - Poisson

De acordo com a teoria de probabilidade visto em Morettin 2010, a média e variância da distribuição de *Poisson* devem ser iguais. E na tabela 32, os casos em que mais se aproximam são os quantis 1%, 5%, 99%, 95%, 1% e 99% e 5% e 95%. Fato este que pode ser visto também através da tabela 30 onde esses mesmos quantis obtiveram melhores resultados para a distribuição de *Poisson*. Os resultados da tabela 32 corroboram os resultados da tabela 30.

As probabilidades supondo ocorrência com distribuição homogênea de *Poisson* nos quantis conjuntos foram descritas na tabela 33 de acordo com a equação 5.25, com a média (λ) descrita na tabela 32:

Ocorrências	Prob(%) - Quantis 99% e 1%	Prob(%) - Quantis 95% e 5%	Prob(%) - Quantis 90% e 10%
1 salto em um dia	2.00	9.07	16.37
1 salto em 1 mês	28.69	24.28	5.40
2 saltos em um mês	6.45	26.80	11.88
1 salto em 1 semana	9.23	30.37	36.79
2 saltos em uma semana	0.47	7.62	18.39
1 salto em 3 meses	35.00	0.88	0.00
2 saltos em 3 meses	23.62	2.92	0.02

Tabela 33 – Probabilidades de Ocorrência

De acordo com a tabela 33, as probabilidades vão aumentando, caso haja o aumento do quantil, ou seja, caso vá se considerando uma porcentagem maior da amostra da primeira diferença da série DI como saltos, maior sua probabilidade de ocorrência. Os resultados de 1 salto em 3 meses e 2 saltos em 3 meses podem parecer estranhos a primeira vista, porém a probabilidade é baseada no valor exato, o que significa que a probabilidade de se ter exatamente 1 salto ou 2 em 3 meses é menor para os quantis 95% e 5% e 90% e 10%, pois espera-se um número maior de saltos para tais quantis. Os valores foram baseados em dias úteis, logo o valor para 1 semana, 1 mês e 3 meses, de forma aproximada, são respectivamente 5 dias, 22 dias e 66 dias respectivamente.

As probabilidades acima (tabela 33) foram obtidas de acordo com Morettin 2010 com a seguinte definição:

$$[P(N(t+s) - N(s)) = n] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad (5.25)$$

, $\forall n \in \mathbb{N}$ e para algum $\lambda > 0$.

5.7.4 *Poisson - Não homogêneo*

De acordo com Das 2002, Johannes 2004 e Filho, Carlos e Gonçalves 2015, os saltos na taxa de juros são ocasionados por mudanças não esperadas em variáveis macroeconômicas de grande relevância global ou para o País em questão, que neste caso é o Brasil. Baseado nisto, nesta parte do trabalho, diferentemente da estimação feita na seção anterior onde foi feita uma estimação de distribuição de *Poisson* homogênea, nesta

parte é tentado explicar a ocorrência com as variáveis externas que possivelmente ocasionam os saltos na série DI. E primeiramente é preciso checar se a distribuição de *Poisson* é homogênea ou não. Caso não seja, ela pode depender de outros fatores ou então do próprio fator t . De acordo com Daley e Vere-Jones 2003, os valores achados na equação 5.26 devem ser aproximadamente constantes para processos de *Poisson* estacionários e igual a taxa do processo (λ). Qualquer alteração deste regime pode indicar que o processo é não estacionário ou não segue uma distribuição de *Poisson* com λ constante.

$$(5.26) \quad \frac{VAR(D)}{n} \approx const. \approx \lambda$$

onde, D é um intervalo semi-aberto dado por t e $t + n$, $\forall t$ onde é aberto em t e fechado em $t + n$, e VAR indica a variância nesse intervalo.

Para analisar isso, Daley e Vere-Jones 2003, e ver o comportamento do λ na comparação com a razão vista na equação 5.26, tem-se os gráficos para esta razão:

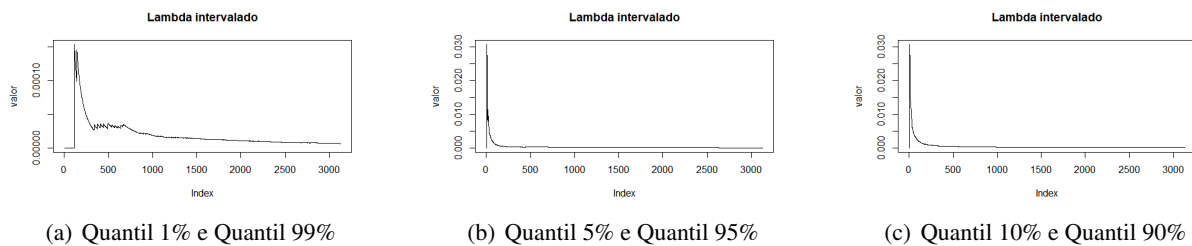


Figura 10 – Gráfico - λ

Observa-se nos gráficos da figura 10 que para os quantis 99% e 1%, o λ leva um tempo bem maior para alcançar algo perto do constante. Enquanto as outras amostras alcançaram isto bem mais rápido. E para o primeiro quantil, o λ fica em um valor bem próximo de zero, enquanto nos outros quantis, ele alcança valores entre zero e 0.03.

A fim de testar a constância do λ , foi estimado um $AR(1)$ por MQO^5 (tabela 34):

Quantis	Teste t - Coeficiente 2	Teste t - Intercepto
Quantil 99% e 1%	498.51597	2.22800
Quantil 95% e 5%	136.49596	2.32831
Quantil 90% e 10%	169.29296	2.45013

Tabela 34 – Teste de Constância

De acordo com a tabela 34, rejeita-se para todos os quantis a hipótese de que o coeficiente do $AR(1)$ (coeficiente 2) seja zero, e para todos os interceptos ao nível de 5% rejeita-se também, ou seja, há fortes evidências de que o λ varia. E para investigar o processo do λ foi feita a função de autocorrelação.

⁵Mínimos Quadrados Ordinários

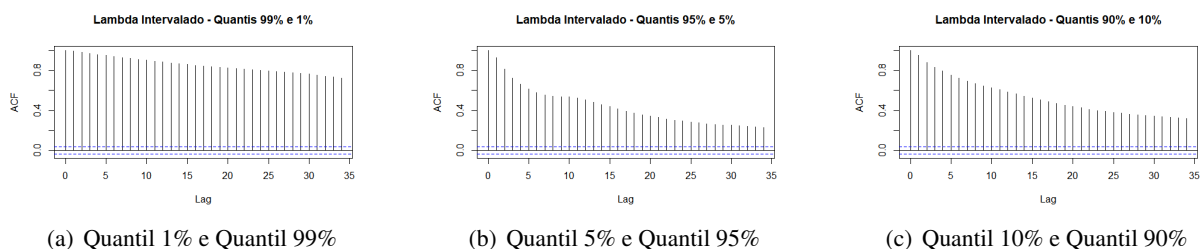


Figura 11 – ACF - λ

De acordo com os gráficos da função de autocorrelação na figura 11, o conjunto dos quantis 99% e 1% apresentou uma tendência de dependência de longa duração, enquanto que os outros apresentaram uma dependência menor.

Pode-se ver também os gráficos dos λ instantâneos na figura 12, em que os λ instantâneos se referem aos λ entre os tempos de chegada:

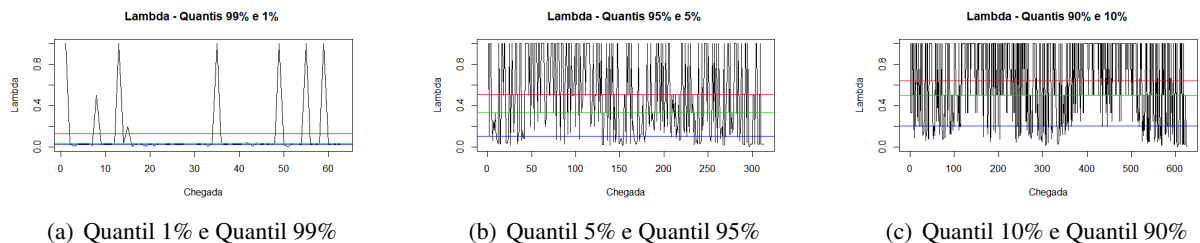


Figura 12 – Lambda - Instantâneo

Nos gráficos da figura 12 tem-se que a linha vermelha representa a mediana, a verde representa a média, e a azul representa a estimada anteriormente por MLE ⁶ por quantil.

Supondo agora que a ocorrência dos saltos possa ser gerada por outros fatores, foram feitas regressões *Poisson* e Binomial com *GLM* utilizando MLE de acordo com a seção 5.6.2. Esta análise foi feita para verificar as principais causas de saltos na taxa DI, assim como Das 2002, Johannes 2004 e Filho, Carlos e Gonçalves 2015. Eles verificaram o efeito dos dias da semana e anúncio no *FOMC* em relação a mudanças na taxa básica de juros norte-americana, porém aqui é utilizada outra metodologia (*GLM*) e não a metodologia de salto-difusão que os mesmos utilizam. E aqui o estudo foi realizado de forma mais abrangente, incluindo câmbio, feriados, reuniões do *COPOM*, e dias da semana como variáveis explicativas para a ocorrência de saltos. Dado que a distribuição *Poisson* é um caso limite da distribuição binomial como citado em Morettin 2010, foi feita a estimação como regressão Binomial e como regressão *Poisson* para a ocorrência baseada nas covariáveis citadas anteriormente.

Para o caso da reunião do *COPOM* gerar saltos na taxa DI, de acordo com a equação 5.27, tem-se a tabela 35 dos resultados através do *GLM* para distribuição binomial e *Poisson*. Onde CPQ indica o Coeficiente da Regressão *Poisson*, CBQ indica o Coeficiente da Regressão Binomial, PP indica o valor da Regressão *Poisson*, PB indica o valor da Regressão Binomial, Q1 indica a união dos Quantis 99% e 1%, Q2 indica a união dos Quantis 95% e 5% e Q3 indica a união dos Quantis 90% e 10%.

$$\lambda = f(\text{ReuniaoCOPOM}) = \beta_{\text{ReuniaoCOPOM}} X_{\text{ReuniaoCOPOM}} + \alpha_{\text{ReuniaoCOPOM}} + \epsilon_{\text{ReuniaoCOPOM}}$$

⁶Estimação por Máxima Verossimilhança

(5.27)

em que $\beta_{ReuniaoCOPOM}$ é o coeficiente angular, $\alpha_{ReuniaoCOPOM}$ é o intercepto, $\varepsilon_{ReuniaoCOPOM}$ é o resíduo e $X_{ReuniaoCOPOM}$ é a variável explicativa para os saltos.

Coeficiente	CPQ1 ⁷	PPQ1 ⁸	CBQ1 ⁹	PBQ1 ¹⁰	CPQ2 ¹¹	PPQ2 ¹²	CBQ2 ¹³	PBQ2 ¹⁴	CPQ3 ¹⁵	PPQ3 ¹⁶	CBQ3 ¹⁷	PBQ3 ¹⁸
$\alpha_{ReuniaoCOPOM}$	-3.85875	0	-3.8374	0	-2.30060	0	-2.19502	0	-1.622	0	-1.4024	0
$\beta_{ReuniaoCOPOM}$	-14.4438	0.98025	-14.7286	0.9823	0.03884	0.90379	0.04326	0.8985	0.3538	0.0720	0.46417	0.04499

Tabela 35 – Regressão - COPOM

De acordo com a tabela 35, e assumindo que os coeficientes tem distribuição gaussiana, rejeitou-se a hipótese nula de coeficiente igual a zero para todos os interceptos ($\alpha_{ReuniaoCOPOM}$) das regressões e para um nível de significância de 10% para a regressão *Poisson* no caso dos saltos estarem presentes nos quantis 90% e 10% e também para um nível de significância de 5% para a regressão binomial no caso dos saltos estarem presentes nos quantis 90% e 10%. Ou seja, para uma consideração maior do número de saltos na amostra, os valores se tornaram mais significativos para o parâmetro referente as reuniões do *COPOM* ($\beta_{ReuniaoCOPOM}$). Na tabela 36, pode-se ver as probabilidades tidas pelas estimações em *MLE* do *GLM* para regressão Binomial e *Poisson* onde é caracterizado a presença ou não de reunião.

Presença - Copom	Q. 99% e 1%	Q. 95% e 5%	Q. 90% e 10%
Poisson - Com reunião	0.00	10.42	28.13
Poisson - Sem reunião	2.11	10.02	19.74
Bin - Com reunião	0.00	10.42	28.13
Bin - Sem reunião	2.11	10.02	19.74

Tabela 36 – Probabilidades - Copom

De acordo com a significância dos parâmetros na tabela 35, pode-se dizer olhando na tabela 36 que a presença de uma reunião do *COPOM* aumenta em aproximadamente 9% a probabilidade de saltos de acordo com as estimativas para os quantis de 90% e 10%. Enquanto para os quantis 95% e 5%, a probabilidade aumenta 0.4%.

Os resultados vistos na tabela 36 estão de acordo com as estimativas achadas por Filho, Carlos e Gonçalves 2015 para a taxa Selic no Brasil, em que foi achado uma diferença de 9% aproximadamente na diferença de probabilidade de um dia de reunião do *COPOM* e um dia típico. E pode-se argumentar, de acordo com as probabilidades vistas na tabela 36, que em dias de reuniões do *COPOM* a probabilidade é em torno de 40% maior de ocorrência de um salto na taxa DI do que em dias sem reuniões do *COPOM*. Estes resultados são bastante semelhantes aos encontrados por Das 2002 e Johannes 2004, embora se tenha uma metodologia diferente, mostrando uma forte relação entre os anúncios do *COPOM* e o salto na taxa de juros de curto prazo.

Para o caso da reunião dos dias da semana gerarem saltos na taxa DI, de acordo com a equação 5.28, tem-se a tabela 37 dos resultados através do *GLM* para distribuição binomial e *Poisson*.

$$\lambda = f(DiasSemana) = \beta_{Dias}X_{Dias} + \alpha_{Dias} + \varepsilon_{Dias}$$

(5.28)

em que β_{Dias} é o vetor de coeficientes angulares, α_{Dias} é o intercepto, ε_{Dias} é o resíduo e X_{Dias} é a matriz das variáveis explicativas que neste caso são os dias da semana.

Na tabela 37, pode-se ver que para níveis de significância de 10% ou abaixo, não se rejeitou a hipótese nula de que os coeficientes referentes aos dias segunda-feira e terça-feira sejam iguais a zero. Já para a quinta e o intercepto (contém o dia de sexta-feira) rejeitou-se a hipótese nula de coeficiente nulo para todos os quantis propostos com exceção da união de 90% e 10% para a quinta-feira. E para quarta-feira, não rejeitou-se a hipótese nula apenas para o quantil 95% e 5%. Na tabela 37, CPQ indica o Coeficiente da Regressão *Poisson*, CBQ indica o Coeficiente da Regressão Binomial, PP indica o valor da Regressão *Poisson*, PB indica o valor da Regressão Binomial, Q1 indica a união dos Quantis 99% e 1%, Q2 indica a união dos Quantis 95% e 5% e Q3 indica a união dos Quantis 90% e 10%.

Coefficiente	CPQ1 ¹⁹	PPQ1 ²⁰	CBQ1 ²¹	PBQ1 ²²	CPQ2 ²³	PPQ2 ²⁴	CBQ2 ²⁵	PBQ2 ²⁶	CPQ3 ²⁷	PPQ3 ²⁸	CBQ3 ²⁹	PBQ3 ³⁰
α_{Dias}	-4.49344	0.00000	-4.48220	0.00000	-2.48811	0.00000	-2.40139	0.00000	-1.41856	0.00000	-1.41856	0.00000
$\beta_{Diasseg}$	-16.80914	0.98691	-17.08387	0.98833	0.20764	0.26606	0.22877	0.24290	0.04023	0.77669	0.04023	0.77669
$\beta_{Diasster}$	-16.80914	0.98691	-17.08387	0.98833	-0.05942	0.76535	-0.06464	0.75558	-0.05172	0.71919	-0.05172	0.71919
$\beta_{Diasqua}$	-1.94591	0.06872	-1.95556	0.06775	0.09181	0.63212	0.10056	0.61632	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
$\beta_{Diasqui}$	2.07944	0.00000	2.16191	0.00000	0.57054	0.00101	0.64278	0.00046	0.16477	0.23718	0.16477	0.23718

Tabela 37 – Regressão - Dias da Semana

Para os efeitos de dias da semana, pode-se ver na tabela 38 que o dia de maior probabilidade de saltos seria as quintas para todos os quantis, tanto para a regressão *Poisson*, quanto para a Binomial.

Dias	Poi - Quantis 99% e 1%	Bin - Quantis 99% e 1%	Pois - Quantis 95% e 5%	Bin - Quantis 95% e 5%	Pois - Quantis 90% e 10%	Bin - Quantis 90% e 10%
Segunda	0.00	0.00	10.22	10.22	20.13	20.13
Terça	0.00	0.00	7.83	7.83	18.69	18.69
Quarta	0.16	0.16	9.11	9.11	19.49	19.49
Quinta	8.95	8.95	14.70	14.70	22.20	22.20
Sexta	1.12	1.12	8.31	8.31	19.49	19.49

Tabela 38 – Probabilidades - Dias de Semana

De acordo com Filho, Carlos e Gonçalves 2015, dado que o Tesouro Nacional recompra títulos antes de seu vencimento, em quartas-feiras, aumentando a quantidade de negócios, isto causaria um aumento na volatilidade observada neste dia da semana. E também os leilões dos três tipos de títulos do governo tendem a concentrar-se nas quintas-feiras, segundo Filho, Carlos e Gonçalves 2015. Além disso, outro fator determinante de maior probabilidade de ocorrência de saltos nestes dias são as reuniões do *COPOM* e divulgação das atas destas reuniões, o que corrobora a favor de saltos na quarta-feira e quinta-feira e está em linha com o achado na tabela 38. E para um outro achado que foi a segunda-feira com uma potencial probabilidade de saltos, pode-se especular sobre a volta de funcionamento do mercado e isto está atrelado ao efeito fim de semana e que poderia trazer algum fato relevante que só teria impacto na segunda-feira, dado que o mercado não funciona nos fins de semana.

Para o caso dos feriados gerarem saltos na taxa DI, de acordo com a equação 5.29, tem-se a tabela 39 dos resultados através do *GLM* estimado por *MLE* para distribuição binomial e *Poisson*.

$$\lambda = f(Feriado) = \beta_{Feriado}X_{Feriado} + \alpha_{Feriado} + \varepsilon_{Feriado}$$

(5.29)

em que $\beta_{Feriado}$ é o vetor de coeficientes angulares, $\alpha_{Feriado}$ é o intercepto, $\varepsilon_{Feriado}$ é o resíduo e $X_{Feriado}$ é a matriz das variáveis explicativas, que neste caso são os feriados no Brasil e os feriados nos EUA.

Na tabela 39, CPQ o indica Coeficiente da Regressão *Poisson*, CBQ o indica Coeficiente da Regressão Binomial, PP o indica valor da Regressão *Poisson*, PB o indica valor da Regressão Binomial, Q1 indica a união dos Quantis 99% e 1%, Q2 indica a união dos Quantis 95% e 5% e Q3 indica a união dos Quantis 90% e 10%.

Coefficiente	CPQ1 ³¹	PPQ1 ³²	CBQ1 ³³	PBQ1 ³⁴	CPQ2 ³⁵	PPQ2 ³⁶	CBQ2 ³⁷	PBQ2 ³⁸	CPQ3 ³⁹	PPQ3 ⁴⁰	CBQ3 ⁴¹	PBQ3 ⁴²
$\hat{\alpha}_{Feriado}$	-3.93526	0.00000	-3.91553	0.00000	-2.32934	0.00000	-2.22690	0.00000	-1.62743	0.00000	-1.40873	0.00000
$\hat{\beta}_{FeriadoEUA}$	-0.07207	0.92020	-0.07346	0.91940	0.11376	0.69948	0.12684	0.68447	0.18504	0.35610	0.23601	0.30317
$\hat{\beta}_{FeriadoBR}$	0.90997	0.05106	0.94000	0.04905	0.58498	0.01609	0.67463	0.01147	0.28853	0.14288	0.37383	0.10234

Tabela 39 – Regressão - Feriado

De acordo com a tabela 39, não foi rejeitado a hipótese nula do coeficiente ser nulo referente a ocorrência de feriado nos EUA ($\hat{\beta}_{FeriadoEUA}$) ao nível de 10% para os quantis propostos. Já para o feriado no Brasil, a hipótese do coeficiente ($\hat{\beta}_{FeriadoBR}$) ser nulo pôde ser rejeitado ao nível de 10% para todos os quantis com exceção do quantil 90% e 10% em conjunto. Já para o intercepto ($\hat{\alpha}_{Feriado}$), houve rejeição da hipótese nula para todos os quantis. Na tabela 40 são vistas as probabilidades.

Evento	Quantis 99% e 1%	Quantis 95% e 5%	Quantis 90% e 10%
Poisson - Ambos feriados	4.52	19.58	31.54
Poisson - Feriado BR	4.85	17.48	26.21
Poisson - Feriado EUA	1.82	10.91	23.64
Poisson - Ambos sem	1.95	9.74	19.64
Bin - Ambos feriados	4.53	19.38	31.03
Bin - Feriado BR	4.85	17.48	26.21
Bin - Feriado EUA	1.82	10.91	23.64
Bin - Ambos sem	1.95	9.74	19.64

Tabela 40 – Probabilidades - Feriado

De acordo com a tabela 40, não houve tanta diferença entre as estimações por binomial e a estimação por *poisson*. E foi observado também que conforme se aumenta o quantil do salto, maior a probabilidade de ocorrência. A probabilidade de saltos na taxa DI com feriado tanto nos EUA como no Brasil é de aproximadamente 4.5%, 19.6% e 31.5% para os quantis extremos: 99% e 1%; 95% e 5%; e 90% e 10% respectivamente.

Os resultados da tabela 40 indicam que um dia típico sem feriado apresentaria uma probabilidade de 19.64% (quantil 90% e 10%), enquanto que um dia com feriado no Brasil aumentaria a probabilidade para a 26,21% (quantil 90% e 10%) e quando o feriado for nos Estados Unidos, este valor se reduz para 23.64% (quantil 90% e 10%). E caso se tenha um feriado em ambos os países, a probabilidade aumenta para faixa de 31% (quantil 90% e 10%). Conforme dito anteriormente sobre o final de semana poder ocasionar uma volatilidade maior nas segundas-feiras por conta do acúmulo informacional e do não funcionamento dos mercados no sábado e nem no domingo, para o caso do feriado tem-se algo similar. Pois durante este período, não há geralmente funcionamento dos mercados e isto pode ocasionar em acumulação informacional relevante que só terá impacto e correção no dia de funcionamentos dos mercados.

Para o caso dos saltos no dólar gerarem saltos na taxa DI, de acordo com a equação 5.30, tem-se a tabela 41 dos resultados através do *GLM* estimado por *MLE* para distribuição Binomial e *Poisson*.

$$\lambda = f(Dolar) = \beta_{Dolar}X_{Dolar} + \alpha_{Dolar} + \varepsilon_{Dolar}$$

(5.30)

em que β_{Dolar} é o vetor de coeficientes angulares, α_{Dolar} é o intercepto, ε_{Dolar} é o resíduo e X_{Dolar} é a matriz das variáveis explicativas, que neste caso é a presença de salto ou não no dólar.

O salto no dólar é tido a partir do momento que cai no seu quantil extremo (os mesmos quantis usados para taxa DI). Na tabela 41 tem-se os efeitos de saltos na taxa DI, onde CPQ indica o Coeficiente da Regressão *Poisson*, CBQ indica o Coeficiente da Regressão Binomial, PP indica o valor da Regressão *Poisson*, PB indica o valor da Regressão Binomial, Q1 indica a união dos Quantis 99% e 1%, Q2 indica a união dos Quantis 95% e 5% e Q3 indica a união dos Quantis 90% e 10%.

Coeficiente	CPQ1 ⁴³	PPQ1 ⁴⁴	CBQ1 ⁴⁵	PBQ1 ⁴⁶	CPQ2 ⁴⁷	PPQ2 ⁴⁸	CBQ2 ⁴⁹	PBQ2 ⁵⁰	CPQ3 ⁵¹	PPQ3 ⁵²	CBQ3 ⁵³	PBQ3 ⁵⁴
α_{Dolar}	-3.88336	0.00000	-3.86257	0.00000	-2.33706	0.00000	-2.23546	0.00000	-1.61523	0.00000	-1.39353	0.00000
β_{Dolar}	-0.35074	0.72783	-0.35694	0.72505	0.29077	0.06847	0.32753	0.05484	0.02543	0.78889	0.03184	0.76467

Tabela 41 – Regressão - Dólar

De acordo com a tabela 41 não se rejeitou a influência de saltos no dólar apenas para o quantil 95% e 5% ao nível de 10%. E para o intercepto (α_{Dolar}), rejeitou-se a hipótese nula para todos quantis. Na tabela 42, a probabilidade de salto na taxa DI quando ocorre um salto no dólar tem um efeito considerável somente no quantil onde houve significância de acordo com a tabela 41.

Presença de Salto - Dólar	Quantis 99% e 1%	Quantis 95% e 5%	Quantis 90% e 10%
Poisson - Salto Dólar	1.44	12.92	20.39
Poisson - Sem Salto	2.05	9.66	19.88
Bin - Salto Dólar	1.44	12.92	20.39
Bin - Sem Salto	2.05	9.66	19.88

Tabela 42 – Probabilidades - Dólar

De acordo com a tabela 42, o salto no dólar aumentaria a probabilidade de saltos na taxa DI em 2,6% aproximadamente para os quantis 90% e 10%, 34% aproximadamente para os quantis 95% e 5% e se reduziria em 30% aproximadamente para os quantis 99% e 1%. E de acordo com a tabela 41, somente é significativo os quantis 95% e 5%. O que por sua vez apresenta coerência com a literatura econômica e de finanças sobre a relação câmbio e juros, como a paridade descoberta da taxa de juros.

Para o caso de todas as variáveis anteriores gerarem saltos na taxa DI, de acordo com a equação 5.31, tem-se a tabela 43 dos resultados através do *GLM* estimado por *MLE* para distribuição binomial e *Poisson*.

$$\lambda = f(TodasVariveis) = \beta_{Todas}X_{Todas} + \alpha_{Todas} + \varepsilon_{Todas} \tag{5.31}$$

em que β_{Todas} é o vetor de coeficientes angulares, α_{Todas} é o intercepto, ε_{Todas} é o resíduo e X_{Todas} é a matriz das variáveis explicativas, que neste caso são todas trabalhadas anteriormente, ou seja, salto no dólar, feriado no Brasil e nos EUA, dias da semana e dia de reunião no *COPOM*.

Agora, mesclando-se todos os efeitos e fazendo uma estimação com todas as covariáveis acima juntas numa regressão Binomial e numa regressão *Poisson*, obteve-se a tabela 43. Onde CPQ indica o Coeficiente da Regressão *Poisson*, CBQ indica o Coeficiente da Regressão Binomial, PP indica o valor da Regressão *Poisson*, PB indica o valor da Regressão Binomial, Q1 indica a união dos Quantis 99% e 1%, Q2 indica a união dos Quantis 95% e 5% e Q3 indica a união dos Quantis 90% e 10%.

Coefficiente	CPQ1 ³⁵	PPQ1 ³⁶	CBQ1 ³⁷	PBQ1 ³⁸	CPQ2 ³⁹	PPQ2 ⁴⁰	CBQ2 ⁴¹	PBQ2 ⁴²	CPQ3 ⁴³	PPQ3 ⁴⁴	CBQ3 ⁴⁵	PBQ3 ⁴⁶
$\hat{\alpha}_{Todas}$	-4.61017	0.00000	-4.63228	0.00000	-2.55970	0.00000	-2.48257	0.00000	-1.66150	0.00000	-1.45114	0.00000
$\hat{\beta}_{TodasFeriadoEUA}$	0.19777	0.78355	0.21612	0.77462	0.11584	0.69869	0.13015	0.68228	0.19132	0.34908	0.24397	0.29608
$\hat{\beta}_{TodasSaltoDol.}$	-0.23064	0.81921	-0.25207	0.80857	0.25791	0.10730	0.29470	0.08683	0.01805	0.85000	0.02269	0.83226
$\hat{\beta}_{TodasFeriadoBR}$	1.40862	0.00266	1.64968	0.00231	0.61652	0.01186	0.71580	0.00808	0.31950	0.10703	0.41279	0.07318
$\hat{\beta}_{TodasCOPOM}$	-14.88196	0.99546	-15.10054	0.99596	0.19491	0.57658	0.21657	0.55673	0.47122	0.03109	0.60909	0.01657
$\hat{\beta}_{Todasseg}$	-16.80324	0.98671	-17.09415	0.98818	0.19594	0.29646	0.21687	0.27170	0.01850	0.88487	0.02307	0.87168
$\hat{\beta}_{Todaster}$	-16.73473	0.98687	-16.99829	0.98832	-0.03534	0.85933	-0.03720	0.85823	-0.02905	0.82275	-0.03580	0.80401
$\hat{\beta}_{Todasqua}$	-1.80803	0.09089	-1.83086	0.08769	0.06396	0.75090	0.07015	0.73966	-0.08296	0.54474	-0.10215	0.50142
$\hat{\beta}_{Todasqui}$	2.14147	0.00000	2.25685	0.00000	0.58698	0.00073	0.66344	0.00032	0.14008	0.25944	0.17689	0.20524

Tabela 43 – Regressão - Todos Fatores

De acordo com a tabela 43, a hipótese nula do intercepto ($\hat{\alpha}_{Todas}$) ser nulo continuou sendo rejeitada, ou seja, pode-se inferir que há chance de haver saltos na taxa DI, mesmo sem o efeito das outras covariáveis. Para os quantis 99% e 1% em conjunto, rejeitou-se ao nível de 10% para as variáveis quinta ($\hat{\beta}_{Todasqui}$), quarta ($\hat{\beta}_{Todasqua}$) e feriado no Brasil ($\hat{\beta}_{TodasFeriadoBR}$) como interferência na taxa DI. Para os quantis 95% e 5% foram significantes os feriados no Brasil ($\hat{\beta}_{TodasFeriadoBR}$), saltos no dólar ($\hat{\beta}_{TodasSaltoDol.}$) e a quinta-feira ($\hat{\beta}_{Todasqui}$) ao nível de 10%. Já para a última junção de quantil, a significância esteve presente nos feriados brasileiros ($\hat{\beta}_{TodasFeriadoBR}$) e nas reuniões do COPOM ($\hat{\beta}_{TodasCOPOM}$) ao nível de 10%.

Na tabela 44 são inferidas algumas probabilidades do modelo geral:

Eventos	Quantis 99% e 1%	Quantis 95% e 5%	Quantis 90% e 10%
Poisson - Todos e Quinta	0.00	45.50	59.37
Poisson - Dol., Copom, e Quinta	0.00	21.87	35.62
Poisson - Copom e Quinta	0.00	16.90	34.99
Poisson - Quinta	8.47	13.91	21.84
Bin - Todos e Quinta	0.00	38.65	50.36
Bin - Dol., Copom, e Quinta	0.00	21.28	34.47
Bin - Copom e Quinta	0.00	16.76	33.96
Bin - Quinta	8.51	13.95	21.85

Tabela 44 – Probabilidades - Modelo Geral

Na tabela 44, tem-se como "Todos" a caracterização onde há salto no dólar, reunião do COPOM, feriado no Brasil e nos EUA. Olhando a tabela, pode-se ver do modelo que a probabilidade é de 59.37% de haver salto na taxa DI, utilizando os quantis 90% e 10%, quando há todos esses fatores somado ao fato de ser uma quinta-feira, no modelo estimado por *Poisson*; esta probabilidade é reduzida a 50.36% quando a estimação é binomial. Esta probabilidade cai para 45% aproximadamente (*Poisson*) e 39% aproximadamente (Binomial) no caso dos quantis 95% e 5%. E cai para zero no primeiro conjunto de quantil (mais extremo) tanto para o caso *Poisson* como para o binomial. Caso seja apenas quinta, no primeiro quantil proposto a probabilidade de salto é em torno de 8%, seguida por 14% e 22% nos outros quantis respectivamente. Para o primeiro conjunto de quantil, a única probabilidade relevante foi a do dia ser quinta-feira.

Os resultados apresentados de acordo com a equação geral 5.31 e que podem ser vistos na tabela 44 advogam a favor de existem fatores que interferem na taxa DI e que podem ocasionar saltos em sua curva dependendo da magnitude da variável explicativa para os saltos em questão. Os fatores explicativos levantados aqui, que por sua vez foram os feriados nos Estados Unidos, Brasil, saltos na taxa de câmbio, reunião do COPOM e dias da semana, se mostraram relevantes de acordo com a tabela 44 em termos de probabilidade na ocorrência de saltos na taxa DI e corroboram e complementam os resultados levantados por Filho, Carlos e Gonçalves 2015 para o Brasil e por (Das 2002) e Johannes 2004, embora a metodologia adotada aqui seja diferente da adotada por eles como já dito anteriormente.

5.7.5 Duration

A *duration* será definida aqui como o tempo que a taxa DI passa sem apresentar saltos. Po exemplo: Suponha que a taxa DI fique 50 dias sem apresentar saltos e depois no quinquagésimo primeiro dia ocorra um salto e depois fique um período de 60 dias sem saltos até que no sexagésimo primeiro dia ocorra outro salto. Neste exemplo hipotético citado, a *duration* foi de 50 dias e depois de 60 dias. Como os dias de ocorrência dos saltos são modelados como uma distribuição de *Poisson*, seguindo a seção 5.7.3, logo os tempos da *duration* definida aqui tendem a seguir uma distribuição exponencial, de acordo com Morettin 2010.

Com o objetivo de inferir algo sobre os tempos de duração dos períodos sem saltos na taxa *DI* para posterior estudo dos tempos de falha (definindo falha aqui como a ocorrência de saltos), foi feita a estimação da distribuição exponencial da *duration*. Fazendo a estimação de máxima verossimilhança para uma distribuição exponencial entre os tempos de chegada dos saltos (*duration*), dado que a ocorrência foi estimada como *Poisson*, obteve-se os valores na tabela 45:

Quantis	1/Taxa	Taxa
Quantil 99% e 1%	44.68253	0.02238
Quantil 95% e 5%	9.33226	0.10715
Quantil 90% e 10%	4.89279	0.20438

Tabela 45 – Taxa - Exponencial

De acordo com a tabela 45, a duração média de um período sem saltos foi de aproximadamente 45 dias levando em conta os quantis mais extremos (99% e 1%). E a duração vai caindo conforme se aumenta os quantis. Para o quantil considerado menos extremo neste trabalho (90% e 10%), a duração se reduz entre 9 e 10 vezes, ficando em torno de 5 dias. Pode ser inferido destes resultados, que para uma abordagem mais extrema da definição de saltos, um período médio de duração sem informações macroeconômicas que teriam caráter inovador para o mercado, ou que caso fossem surpresa para o mercado não acarretariam grande impacto na taxa DI, seria um período de 45 dias. E este período muda para 5 dias quando a definição de saltos se torna menos restritiva, ou seja, considerando os quantis de 90% e 10% da diferença da taxa DI.

Nos gráficos da figura 13, pode-se ver a função *Hazard*⁶⁷, para as taxas acima:

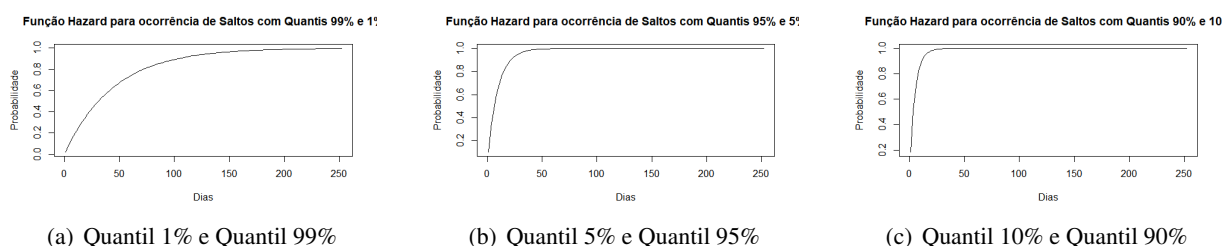


Figura 13 – Gráfico - Função Hazard

De acordo com os gráficos da figura 13, pode ser notado que quanto maior o número de saltos considerados, ou seja, quanto maior o quantil usado, mais "fácil" é da função chegar na sua assíntota horizontal de limite 1 (probabilidade 100% de salto). O que quer dizer que quanto mais tempo se passa depois da duração média visto na tabela 45, maior a probabilidade (acumulada) de chegada de uma informação que poderá causar impacto significativo na taxa DI.

⁶⁷Usada para avaliar o risco de ocorrência de uma falha, neste caso as falhas seriam os saltos. Ela indica a probabilidade de ocorrência de uma falha de acordo com o tempo *t*

Os histogramas dos tempos de chegada podem ser vistos na figura 14:

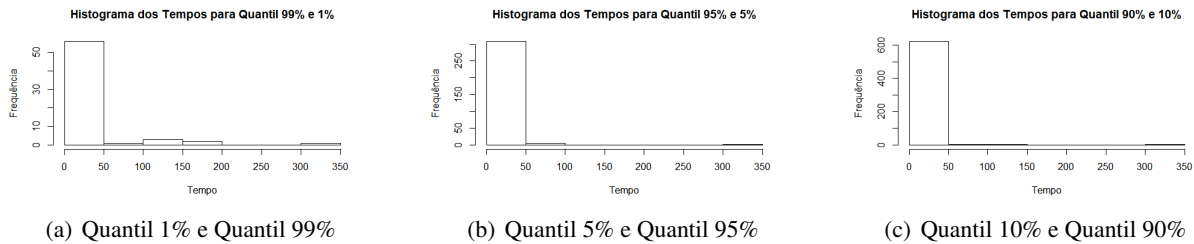


Figura 14 – Histograma - Tempos de chegada

Com o aumento dos quantis, pode ser visto que a frequência dos saltos vai aumentando.

Para a suposição da *duration* variar, isto é, a *duration* ser instantânea e medida entre os saltos, tem-se os gráficos (figura 15) da *duration* calculada em cada ponto de salto para os quantis propostos.

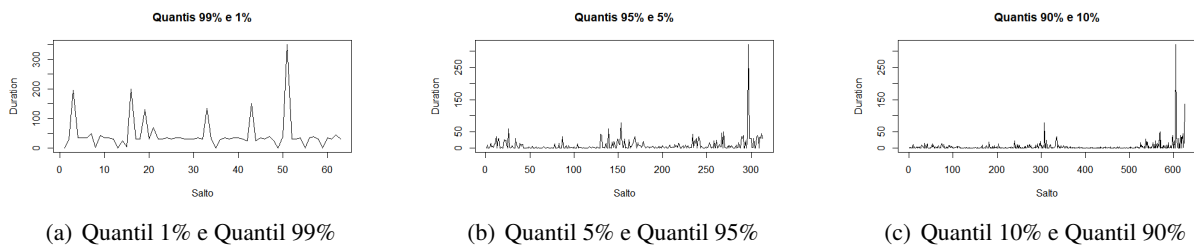


Figura 15 – Duration - Instantânea

De acordo com os gráficos da figura 15, foi notado que conforme se aumenta os quantis, a constância vai aumentando. E para o primeiro conjunto (99% e 1%) o tempo entre chegadas varia bastante. Pode-se ver também que a média da *duration* vai caindo conforme se aumenta os quantis. Fato este que já era esperado, dado que o tempo entre os saltos vai diminuindo com o aumento do quantil. No primeiro caso, a média se aproxima de algum valor em torno de 50 e para os outros quantis, olhando graficamente, a média deve ficar abaixo de 10 dias. As médias podem ser vistas na tabela 45.

Anteriormente neste trabalho foi analisado a hipótese dos saltos ocorrerem de maneira não uniforme, em que se teria uma distribuição de *Poisson* não homogênea e que o salto seria ocasionado por variáveis explicativas, que seriam por sua vez o salto no dólar, feriados nacionais e nos Estados Unidos, dias da semana e reuniões do *COPOM*. Dado isto, é interessante fazer uma análise pelo ponto de vista dos tempos de chegada também, já que existe uma relação profunda entre as distribuições de *Poisson* e exponencial, segundo Morettin 2010. Uma análise para ver um comportamento mais específico da *duration* pode ser vista através das funções de *ACF* (função de autocorrelação) e *PACF* (função de autocorrelação parcial) nos gráficos na figura 16:

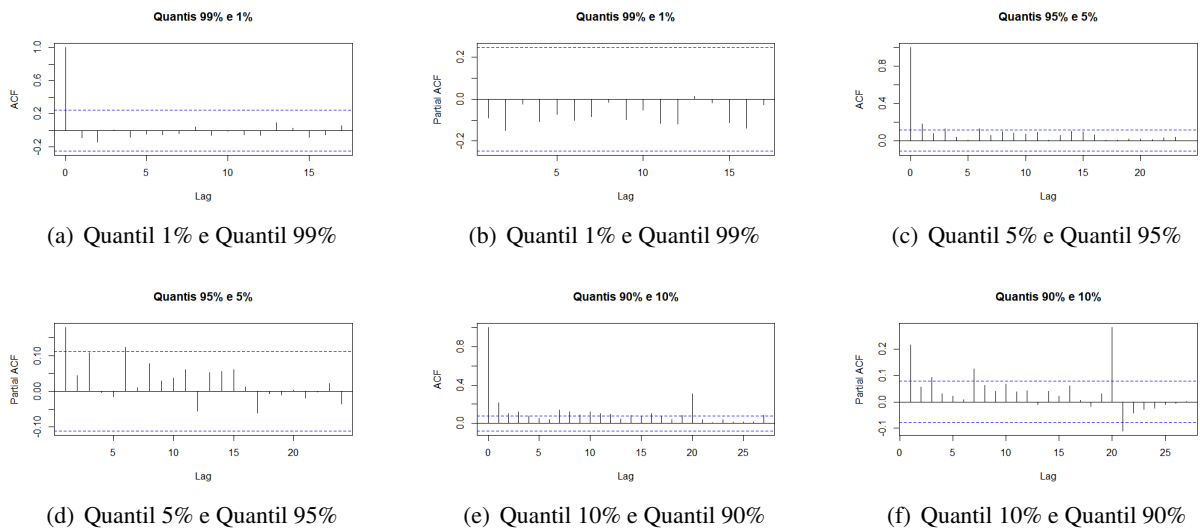


Figura 16 – Duration - ACF e PACF

Olhando para os gráficos da figura 16, pôde ser inferido baseado na metodologia de Box et al. 2015 que os tempos de chegada seguiam algo semelhante a um MA⁶⁸, ou seja, um modelo que depende dos termos estocásticos passados.

5.7.6 Saltos com Distribuição de Poisson Homogênea

5.7.6.1 RMSE

Supondo-se a distribuição de *poisson* homogênea, foi feita a estimação dos saltos dentro da amostra para os quantis propostos anteriormente e suas uniões a fim de verificar se o modelo de *poisson* estima corretamente a ocorrência dos saltos. Os coeficientes (média) da distribuição foram estimados anteriormente e podem ser vistos na tabela 32. De acordo com ela, tem-se numa simulação de 5000 trajetórias de ocorrência os valores propostos na tabela 46. Nela pôde-se ver que os maiores quantis obtiveram piores estimativas para a amostra. Enquanto os quantis 99%, 1% e suas junções tiveram um menor erro.

Quantil	RMSE
99%	0.14297
95%	0.31668
90%	0.44714
01%	0.10110
05%	0.22393
10%	0.31618
99% e 1%	0.10110
95% e 5%	0.22393
90% e 10%	0.31618

Tabela 46 – RMSE - Modelo de Saltos Homogêneos

5.7.6.2 Estimação

Nesta seção foram obtidas as propriedades estatísticas para os coeficientes das distribuições dos saltos. Fazendo 2000 simulações para os saltos seguindo uma distribuição de ocorrência de *Poisson* e distribuição de amplitude sendo *GEV*, já que fora a única em que não houve rejeição de acordo com a tabela 29 e também

⁶⁸Modelo de Médias Móveis

devido ao fato de que é a distribuição para valores extremos, que por sua vez é o que está sendo considerado como definição de saltos na taxa DI. E ressaltando o fato de que como os quantis 99%, 1%, 5% e 95% foram os que obtiveram melhores resultados, de acordo com a tabela 30 e a tabela 32, foram usados esses quantis.

A estimação foi feita em 2000 simulações usando a máxima verossimilhança. Os resultados podem ser vistos na tabela 47. De acordo com ela, os coeficientes que apresentaram maior viés e logo propriedades estatísticas que demonstraram desvios foram o coeficiente ξ , que por sua vez é o coeficiente da forma da distribuição, e o lambda, que por sua vez é o coeficiente da distribuição de *Poisson*. Porém os desvios não foram grandes.

Quantis	Coefficiente	Coefficiente Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
95% e 5%	$\hat{\xi}$	1.11627	MLE	0.00468	0.00468	0.07168	0.11726
95% e 5%	$\hat{\sigma}$	0.00009	MLE	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
95% e 5%	$\hat{\mu}$	0.00015	MLE	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001
95% e 5%	$\hat{\lambda}$	0.10032	MLE	-0.00516	-0.00516	0.00608	0.00740
99% e 1%	$\hat{\xi}$	0.10197	MLE	-0.00020	-0.00020	0.08900	0.11163
99% e 1%	$\hat{\sigma}$	0.00063	MLE	-0.00001	-0.00001	0.00006	0.00007
99% e 1%	$\hat{\mu}$	0.00136	MLE	0.00001	0.00001	0.00007	0.00009
99% e 1%	$\hat{\lambda}$	0.02045	MLE	-0.00069	-0.00069	0.00208	0.00255

Tabela 47 – Propriedades Estatísticas

6 Difusão com Incorporação dos Saltos

Neste Capítulo, é desenvolvido um modelo de difusão baseado na estimação de *SDEs* com estimação por *QMLE* dos parâmetros da série DI com incorporação dos saltos definido no Capítulo 5. Porém diferentemente da estimação inicial da seção passada (seção 4.5), desta vez é retirado o efeito dos saltos na série DI. E posterior a estimação e simulação de trajetórias para obtenção de propriedades estatísticas, é incorporado os saltos seguindo a distribuição *GEV* para amplitude e distribuição de *Poisson* para a ocorrência. Na primeira seção deste Capítulo é apresentada a estimação das *SDEs*, seção 6.0.1, e na seção posterior, seção 6.0.2, a introdução dos saltos.

6.0.1 *SDE sem o Processo Composto de Poisson*

Retirando - se os saltos, quantis propostos na seção anterior, com objetivo de melhorar a posterior estimação por *QMLE* e Bayesiana desenvolvida na primeira parte, tem-se o restante da amostra. Dada a dificuldade em ajustar o restante da amostra em alguma distribuição de probabilidade, foram propostas neste trabalho 3 formas de ajustar as diferenças, de forma também a melhorar a estacionariedade:

- Ajustar pelo valor zero: desta forma supõe se que o valor normal da variação caso não houvesse salto em tal dia seria zero. Seja dS da definição na expressão 5.3, e retirando os quantis de saltos $Q7$, $Q8$ ou $Q9$ (de acordo com cada caso e da definição na seção 5.1) de dS , substituindo por zero os valores retirados, mantendo a mesma ordenação antes da retirada, somando o termo inicial $X(0)$ e tomando a série com a ordem inicial de S para os elementos correspondentes e depois fazendo uma nova série para S , chamada de S_0 com elementos nomeados por $X(t)_0$. Tem-se então o ajuste pelo zero proposto;
- Ajustar pela Mediana: ajustar no lugar dos saltos o valor da mediana do resto da amostra. Seja dS da definição na expressão 5.3, e retirando os quantis de saltos $Q7$, $Q8$ ou $Q9$ (de acordo com cada caso e da definição na seção 5.1) de dS , substituindo pela mediana os valores retirados, mantendo a mesma ordenação antes da retirada, somando o termo inicial $X(0)$ e tomando a série com a ordem inicial de S para os elementos correspondentes e depois fazendo uma nova série para S , chamada de S_{Me} . com elementos nomeados por $X(t)_{Me}$. Tem-se então o ajuste pela mediana proposto;
- Ajustar pela média: ajustar no lugar dos saltos o valor da média do resto da amostra. Seja dS da definição em na expressão 5.3, e retirando os quantis de saltos $Q7$, $Q8$ ou $Q9$ (de acordo com cada caso e da definição na seção 5.1) de dS , substituindo pela mediana os valores retirados, mantendo a mesma ordenação antes da retirada, somando o termo inicial $X(0)$ e tomando a série com a ordem inicial de S para os elementos correspondentes e depois fazendo uma nova série para S , chamada de S_M . com elementos nomeados por $X(t)_M$. Tem-se então o ajuste pela média proposto.

Na tabela 48 pode-se ver a mediana, a média e o zero para os quantis retirados:

Quantil Retirado	Média	Mediana	Zero
99% e 1%	0.0000276	0.000000159	0.000000000
95% e 5%	0.0000123	0.000000136	0.000000000
90% e 10%	0.0000065	0.000000113	0.000000000

Tabela 48 – Ajuste da amostra

Olhando para a tabela 48, foi verificado que os valores da média praticamente se dividem pela metade conforme se aumenta o quantil retirado, já pela mediana o valor não sofre tanta alteração. A média é inflada e desinflada devido ao fato de que é retirado um valor extremo significativo da amostra.

Após retirar esses valores da amostra, o ajuste pela média pode ser visto na figura 17, enquanto o ajuste pela mediana pode ser visto na figura 18 e o ajuste pelo zero pode ser visto na figura 19:

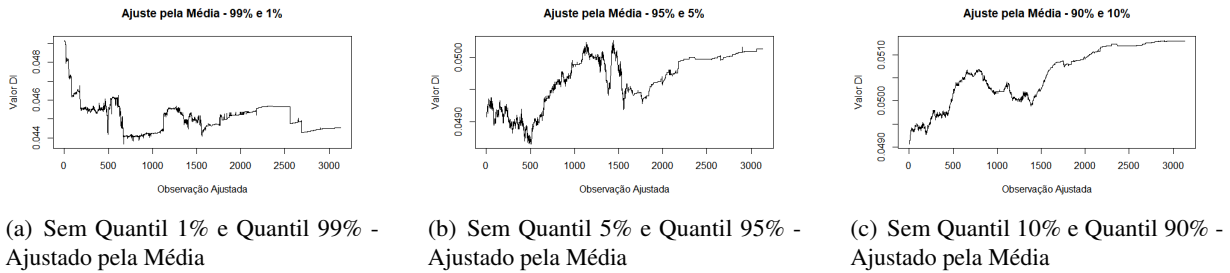


Figura 17 – Gráfico - Taxa DI ajustado pela Média

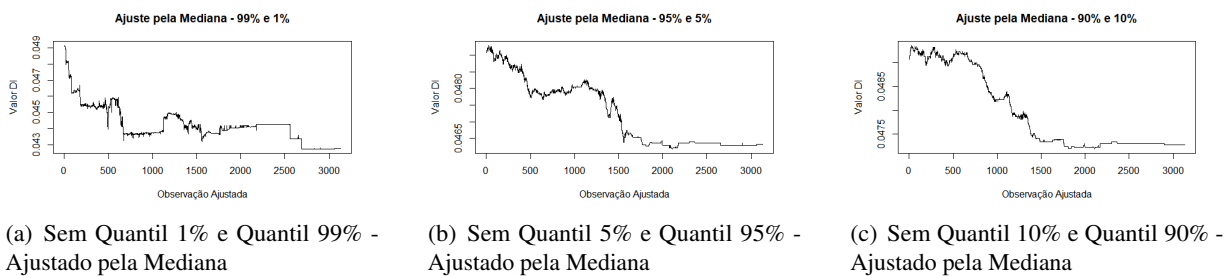


Figura 18 – Gráfico - Taxa DI ajustado pela Mediana

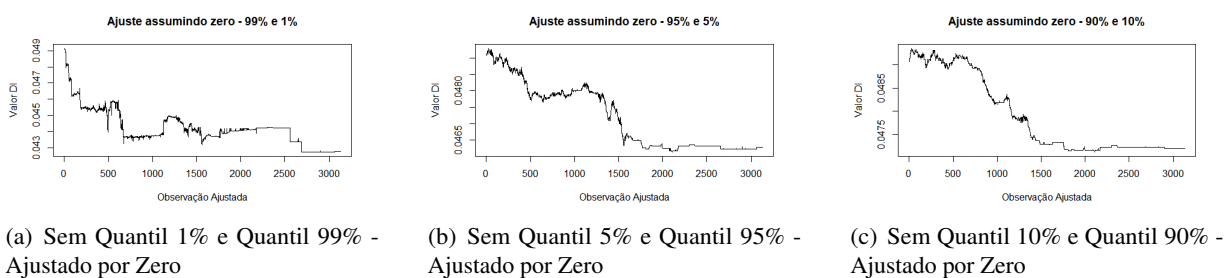


Figura 19 – Gráfico - Taxa DI ajustado pela Média

Depois dos ajustes vistos pelos gráficos nas figuras 17, 18 e 19, foram estimados os coeficientes do modelo de difusão através da *QMLE* e os valores dos correspondentes *AIC* podem ser vistos na tabela 49. Onde M. indica ajuste pela média, Me. indica ajuste pela mediana, Z. indica ajuste por zero. E Q1, Q2 e Q3 indicam os conjuntos de quantis 99% e 1%, 95% e 5%, 90% e 10% respectivamente.

Modelos	M. ¹ (Q1 ²)	Me ³ (Q1 ⁴)	Z. ⁵ (Q1 ⁶)	M. ⁷ (Q2 ⁸)	Me ⁹ (Q2 ¹⁰)	Z. ¹¹ (Q2 ¹²)	M. ¹³ (Q3 ¹⁴)	Me ¹⁵ (Q3 ¹⁶)	Z. ¹⁷ (Q3 ¹⁸)
Merton	-25961.42	-25961.42	-25961.42	-25961.81	-25961.81	-25961.81	-25961.83	-25961.84	-25961.84
Dothan	-45155.18	-45277.15	-45277.86	-44742.27	-45058.10	-45061.74	-44638.91	-44976.63	-44982.76
GBM	-45153.18	-45275.15	-45275.86	-44740.27	-45056.10	-45059.74	-44636.92	-44974.63	-44980.76
Vasicek1	-23975.81	-23838.33	-23837.53	-24635.80	-24286.25	-24282.30	-24764.30	-24389.12	-24382.69
Vasicek2	-25959.42	-25959.42	-25959.42	-25959.81	-25959.81	-25959.81	-25959.83	-25959.84	-25959.84
CIR1	-23975.15	-23837.20	-23836.40	-24635.31	-24286.01	-24282.01	-24763.98	-24388.97	-24382.29
CIR2	-35649.78	-35712.66	-35713.03	-35357.24	-35515.46	-35517.28	-35300.04	-35468.93	-35472.00
BS 1 ¹⁹	-40825.42	-40858.15	-40858.34	-40739.64	-40828.45	-40829.45	-40711.10	-40809.21	-40810.92
BS 2 ²⁰	-42784.84	-42784.73	-42784.73	-42949.98	-42946.95	-42946.89	-42963.68	-42960.55	-42960.42
CIR VR	-50757.33	-50851.06	-50851.55	-53791.52	-54242.05	-54247.11	-53867.17	-54369.41	-54378.42
CEV	-47292.99	-47391.60	-47392.17	-47572.06	-47847.76	-47850.91	-47529.02	-47825.94	-47831.30
CKLS1	-29130.14	-29114.89	-29114.77	-29170.52	-29141.94	-29141.38	-29174.88	-29151.47	-29150.63
CKLS2	-29137.14	-29133.21	-29131.42	-29172.62	-29153.73	-29153.50	-29179.32	-29159.54	-29159.19
Hiper1	-25953.42	-25953.42	-25953.42	-25953.81	-25953.81	-25953.81	-25953.83	-25953.84	-25953.84
Hiper2	-25888.25	-25887.56	-25887.56	-25892.14	-25890.26	-25890.24	-25892.88	-25890.84	-25890.81
CIR Lamperti	-25955.06	-25955.31	-25955.31	-25954.10	-25954.83	-25954.84	-25953.84	-25954.65	-25954.67
Sahalia1	-9412.92	-9279.37	-9278.56	-10017.77	-9692.91	-9688.94	-10130.21	-9790.68	-9784.12
Sahalia2	-9156.50	-9034.69	-9033.97	-9729.05	-9427.56	-9424.02	-9836.91	-9514.62	-9508.52
Sahalia3	-9154.37	-9032.69	-9031.97	-9727.92	-9425.27	-9421.73	-9836.92	-9515.79	-9509.87
Double Potential	-19423.15	-19547.60	-19548.32	-24578.39	-23876.64	-23869.02	-24815.34	-24073.22	-24061.92
Jacobi	-33779.81	-33769.83	-33769.77	-33852.47	-33817.83	-33817.29	-33862.56	-33830.35	-33829.80
Ahn - Gao	-45311.68	-45315.00	-45315.54	-45414.43	-45554.57	-45556.09	-45395.79	-45513.47	-45515.33
Radial OU	-9470.04	-9341.71	-9340.96	-10076.17	-9756.03	-9752.29	-10191.89	-9851.63	-9845.35
Pearson	-23642.80	-23645.70	-23645.72	-23628.13	-23636.10	-23636.19	-23625.11	-23633.79	-23633.94
Epidemico	-28566.73	-28557.46	-28557.40	-28607.45	-28584.70	-28584.41	-28615.20	-28591.53	-28591.05
Catastrophe	-18748.16	-18748.16	-18748.16	-18748.20	-18748.20	-18748.20	-18748.20	-18748.20	-18748.20

Tabela 49 – AIC - Ajustes

Comparando com a tabela 6, houve uma melhora significativa dos resultados. De acordo com a tabela 49, os modelos que obtiveram maiores variações foram o *CIR VR*, *Double Well* Potencial. Com relação aos tipos de parametrização, os modelos *Vasicek* do tipo 2, *CIR* do tipo 2, *Brennan - Schwartz* do tipo 2 (BS 2) e *CKLS* do tipo 2 se mostraram melhores do que os modelos do tipo 1. Para os melhores AICs que foram os modelos de *Dothan*, *GBM*, *Vasicek* do tipo 2, *Brennan - Schwartz* do tipo 2 (BS 2), *CIR* do tipo 2, *Ahn - Gao*, *CEV* e *CIR VR* foram feitas 1000 simulações, para verificar as propriedades estatísticas e *RMSE* dentro da amostra. Os resultados podem ser vistos para o *RMSE* na tabela 50. Onde M. indica ajuste pela média, Me. indica ajuste pela mediana, Z. indica ajuste por zero. E Q1, Q2 e Q3 indicam os conjuntos de quantis 99% e 1%, 95% e 5%, 90% e 10% respectivamente.

Modelos	M. ²¹ (Q1 ²²)	Me ²³ (Q1 ²⁴)	Z. ²⁵ (Q1 ²⁶)	M. ²⁷ (Q2 ²⁸)	Me ²⁹ (Q2 ³⁰)	Z. ³¹ (Q2 ³²)	M. ³³ (Q3 ³⁴)	Me ³⁵ (Q3 ³⁶)	Z. ³⁷ (Q3 ³⁸)
Dothan	0.00347	0.00438	0.00438	0.00136	0.00144	0.00147	0.00228	0.00074	0.00079
GBM	0.00349	0.00439	0.00440	0.00080	0.00146	0.00149	0.00109	0.00076	0.00081
Vasicek - Tipo 2	0.00191	0.00180	0.00180	0.00136	0.00114	0.00116	0.00228	0.00056	0.00060
CIR - Tipo 2	0.00065	0.00096	0.00096	0.02632	0.02800	0.02799	0.02538	0.02757	0.02756
BS 2 ³⁹	0.00318	0.00404	0.00405	0.00104	0.00117	0.00120	0.00132	0.00051	0.00055
CIR VR	0.00390	0.00483	0.00483	0.00083	0.00196	0.00199	0.00175	0.00126	0.00131
CEV	0.04368	0.04279	0.04279	0.04937	0.04694	0.04691	0.02804	0.04765	0.04760
Ahn Gao	0.00059	0.00075	0.00076	0.00039	0.00084	0.00082	0.00048	0.00082	0.00079

Tabela 50 – RMSE - Ajustes

Não se deve comparar a tabela 24 e a tabela 25 com a nova tabela de *RMSEs* (tabela 50), pois os resultados do Capítulo 4 não contavam com esse mecanismo de retirada e substituição dos saltos desenvolvido neste Capítulo e portanto apresentam uma "contaminação" de saltos nos resultados. E também é de se esperar melhores *RMSEs* (pode ser visto olhando a tabela 50) na tabela 50 já que a amostra não está tão "contaminada" com o que foram considerados saltos.

De acordo com a tabela 50, os menores *RMSE* dentro da amostra foram obtidos para a amostra sem os quantis 90% e 10% e 95% e 5%. O modelo que apresentou pior *RMSE* foi o *CEV*. Retirando-se apenas os quantis 99% e 1%, o melhor resultado foi o do modelo *Ahn - Gao* e do modelo *CIR VR*. Para o caso sem os quantis 95% e 5%, o melhor foi o *Ahn - Gao*, e para os últimos quantis, obteve-se o *Brennan - Schwartz*

do tipo 2 (BS 2) e o modelo *Vasicek* do tipo 2. A seguir tem-se as tabelas dos melhores modelos com suas propriedades estatísticas obtidas a partir de 1000 simulações e estimação por *QMLE*.

1. *Vasicek* do Tipo 2 ajustado pela Mediana retirando os quantis 90% e 10% na tabela 51:

Baseado na equação abaixo, 6.1, são estimados os parâmetros e propriedades.

$$dX(t)_{Me.10e90} = \theta_1(\theta_2 - X(t)_{Me.10e90})dt + \theta_3 dW(t) \quad (6.1)$$

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	0.00057	QMLE	0.13989	0.13989	0.14030	0.31565
$\hat{\theta}_2$	0.00000	QMLE	0.01649	0.01649	0.01649	0.02447
$\hat{\theta}_3$	0.10005	QMLE	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela 51 – Vasicek - Tipo 2 - ajustado

Nesta estimação da tabela 51 houve uma redução do coeficiente 1 (taxa de reversão à média), indicando que a taxa de reversão à média é menor e bem lenta. E a taxa de longo prazo apresentou valor próximo a zero, porém o coeficiente apresentou viés considerável, o que pode indicar uma taxa não nula.

2. *Brennan - Schwartz* do Tipo 2 ajustado pela Mediana retirando os quantis 90% e 10% na tabela 52:

Baseado na equação abaixo, 6.2, são estimados os parâmetros e propriedades.

$$dX(t)_{Me.10e90} = \theta_1(\theta_2 + X(t)_{Me.10e90})dt + \theta_3 X(t)_{Me.10e90} dW(t) \quad (6.2)$$

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	0.00000	QMLE	0.00237	0.00237	0.00237	0.01150
$\hat{\theta}_2$	0.00000	QMLE	0.95837	0.95837	0.95837	1.85264
$\hat{\theta}_3$	0.13803	QMLE	0.07193	0.07193	0.07193	0.08065

Tabela 52 – Brennan - Schwartz - Tipo 2 - ajustado

Comparando os resultados da tabela 52 com os anteriores, não houve mudança nos coeficientes estimados por *QMLE*.

3. *CIR* - Tipo 2 ajustado pela média retirando os quantis 99% e 1% na tabela 53:

Baseado na equação abaixo, 6.3, são estimados os parâmetros e propriedades.

$$dX(t)_{M.1e99} = (\alpha(b - X(t)_{M.1e99}))dt + \sigma \sqrt{X(t)_{M.1e99}} dW(t) \quad (6.3)$$

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\alpha}$	2.22390	QMLE	-0.59090	-0.59090	1.21309	1.50855
\hat{b}	0.04494	QMLE	-0.01649	-0.01649	0.01796	0.02731
$\hat{\sigma}$	0.10005	QMLE	0.00354	0.00354	0.00354	0.00374

Tabela 53 – CIR SR - Tipo 2 - ajustado

De acordo com a tabela 53, a taxa de longo prazo seria algo em torno de 0.04494% ao dia (útil), ou 11.98938% ao ano. E uma velocidade de reversão à média de 2.22390, bem maior do que na estimação feita na série com saltos (primeira estimação, Capítulo 4).

4. *CIR VR* ajustado pela Média retirando os quantis 95% e 5% na tabela 54:

Baseado na equação abaixo, 6.4, são estimados os parâmetros e propriedades.

$$dX(t)_{M.5e95} = \theta X(t)_{M.5e95}^{\frac{3}{2}} dW(t) \quad (6.4)$$

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}$	0.10005	QMLE	0.00049	0.00049	0.00049	0.00087

Tabela 54 – CIR VR - ajustado

A estimação apresentou coeficiente bem diferente da estimativa feita por *QMLE* e Bayesiana no Capítulo 4. De modo que as propriedades se mostraram semelhantes a estimação por *QMLE* inicial, porém com Viés e *ME* piores e *MAE* e *RMSE* melhores.

5. *Ahn - Gao* ajustado pela Média retirando os quantis 95% e 5% na tabela 55:

Baseado na equação abaixo, 6.5, são estimados os parâmetros e propriedades.

$$dX(t)_{M.5e95} = X(t)(\theta_1 - (\theta_2^3 - \theta_3\theta_4)X(t)_{M.5e95})dt + \theta_5 X(t)_{M.5e95}^{\frac{3}{2}} dW(t) \quad (6.5)$$

Coefficiente	Estimação	Método	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\theta}_1$	1.38025	QMLE	0.36436	0.36436	0.51224	0.71272
$\hat{\theta}_2$	3.05901	QMLE	0.19137	0.19137	0.31508	0.40945
$\hat{\theta}_3$	0.88326	QMLE	-0.37190	-0.37190	0.37665	0.52389
$\hat{\theta}_4$	0.97820	QMLE	-0.28770	-0.28770	0.29728	0.48921
$\hat{\theta}_5$	0.40245	QMLE	0.38267	0.38267	0.38267	0.43429

Tabela 55 – Ahn - Gao - ajustado

De modo geral, as propriedades se mostraram melhores na estimação do Capítulo 4.

De modo geral, de acordo com os valores dos coeficientes, houve uma diminuição do coeficiente de difusão, fato este que pode ser explicado pela componente de saltos incluída no modelo. E com relação as propriedades estatísticas, não houve melhora significativa em relação a estimação por *QMLE* do Capítulo 4.

6.0.2 Processo de Difusão com *GEV* e *Poisson*

Com os coeficientes estimados, foi estimado por simulação, com 1000 trajetórias assim como no Capítulo 4, a curva média dos melhores modelos da seção anterior. Isto é, os modelos: *Ahn - Gao*, *CIR* do tipo 2, *CIR VR*, *Brennan - Schwartz* do tipo 2 (BS 2) e *Vasicek* do tipo 2. E também baseado no Capítulo 5 em que foi feito um teste de *Kolmogorov - Smirnov* para a distribuição *GEV* e a mesma obteve resultados satisfatórios, foi feita a simulação dos saltos e sua incorporação na simulação dos modelos com a distribuição de *Poisson* para a ocorrência e a distribuição *GEV* para amplitude.

Baseado nisso, tem-se a tabela de comparação dos *RMSEs* para os pontos da amostra na tabela 56:

Modelo	Quantis	Ajuste na amostra	RMSE novo	RMSE antigo
CIR - Tipo 2	99% e 1%	Média	0.00990	0.02021
Ahn - Gao	99% e 1%	Média	0.00990	0.01060
Ahn - Gao	95% e 5%	Média	0.03776	0.01060
CIR VR	95% e 5%	Média	0.03749	0.01233
Brennan - Schwartz - Tipo 2	90% e 10%	Mediana	2.71769	0.01216
Vasicek - Tipo 2	90% e 10%	Mediana	2.71761	0.01045

Tabela 56 – RMSE - Nova Estimacão

Pode ser visto que usando os quantis 99% e 1% para os saltos e logo, retirando-os da amostra, corrigindo com a média e depois colocando-os de novo na simulacão para os modelos CIR do tipo 2 e Ahn - Gao, a melhora segundo a tabela 56 foi considerável. Já para a retirada dos quantis 95% e 5% e correçãõ com a média, não foi obtida melhora. E para o último conjunto de quantis com correçãõ usando mediana para os demais modelos selecionados, não se obteve melhora.

Levando este fato em conta, na tentativa de melhorar a estimacão, foi feita uma abordagem baseada no mínimo erro quadrático médio tido por quantil das simulacões. Ou seja, cada ponto da curva DI da amostra tem 1000 estimativas. Logo foi feita uma minimizacão, por varredura com intervalo de 0.01 entre quantis, para achar o melhor quantil no conjunto das curvas simuladas que melhor se ajustaria, já que para o caso da média, não se obteve muito sucesso para os quantis 95%, 90%, 10% e 5%.

Para o algoritmo criado, tem-se na tabela 57 os menores RMSEs achados e os quantis propostos.

Modelo	Quantis	Ajuste na Amostra	RMSE c/ Média	RMSE Antigo	RMSE - Quantil	Quantis minimiz.
CIR - Tipo 2	99% e 1%	Média	0.00990	0.02022	0.00971	0.5
Ahn - Gao	99% e 1%	Média	0.00990	0.01060	0.00971	0.5
Ahn - Gao	95% e 5%	Média	0.03777	0.01060	0.00996	0.49
CIR VR	95% e 5%	Média	0.03749	0.01234	0.00910	0.47
Brennan - Schwartz - Tipo 2	90% e 10%	Mediana	2.71770	0.01217	0.01040	0.5
Vasicek - Tipo 2	90% e 10%	Mediana	2.71761	0.01046	0.01109	0.5

Tabela 57 – RMSE - Estimacão por Quantil

Na tabela 57, tem-se os RMSEs achados na coluna RMSE - Quantil, e em seguida os quantis utilizados para minimizar a funçãõ. Pode-se ver que todas as estimativas e modelos foram melhorados, com exceçãõ do modelo Vasicek do tipo 2. É importante salientar também, que olhando para a coluna dos quantis minimizadores, quase todos chegam bem perto da mediana e muitos são a própria mediana da simulacão dos pontos (quantil de 50%). E esta seçãõ traz forte evidência de que saltos podem piorar a estimacão de modelos de difusãõ quando os mesmos não são levados em consideracão. E também que saltos são difíceis de prever.

7 Modelagem de Salto-Difusão

Este Capítulo busca modelar a curva de juros DI através de um processo de Salto-Difusão, diferentemente do Capítulo 4 onde é feita somente a estimação da curva DI por um processo de difusão sem inclusão de saltos nos modelos e diferente também da abordagem adotada no Capítulo 5, que por sua vez estima os saltos através de Máxima Verossimilhança com os mesmos seguindo uma distribuição de *Poisson* homogênea ou não-homogênea (com variáveis explicativas através do *GLM*) e partem do princípio básico de que os saltos são observáveis.

O uso do processo de salto-difusão neste trabalho é usado para comparar os resultados achados na modelagem de saltos vista no Capítulo 5, que por sua vez utiliza uma abordagem totalmente diferente deste Capítulo. Neste Capítulo, partimos do pressuposto básico de que saltos não são observáveis, o que por sua vez, vai de contradição com a construção feita na seção 5.1. Embora alguns resultados do Capítulo 5 use o conceito de Processos Composto de *Poisson*, que por sua vez, são processos de *Lèvy*, o pressuposto básico visto na seção 5.1 não é o utilizado em geral na literatura. Contudo, o mesmo apresentou resultados satisfatórios e inclusive trouxe melhoras quando unido com a estimação por *QMLE* feito no Capítulo 6.

Este Capítulo primeiramente apresenta uma abordagem teórica sobre os Processos de *Lèvy* com o intuito de apresentar ao leitor um pouco da vasta literatura sobre os conceitos relacionados a estes processos, que por sua vez podem ser entendidos como generalizações de um processo de difusão. Posteriormente são vistos os modelos que são usados para os processos de Salto-Difusão na parametrização da curva DI diária usada no trabalho. E em seguida é apresentado método de estimação usado, *QMLE* com a presença de salto, seguido pelos resultados encontrados.

7.1 Processos de *Lèvy*

Estes processos foram introduzidos por *Lèvy* como soma de um composto e compensado processo de *Poisson* e um Movimento Browniano com *drift*, de acordo com Applebaum 2009. A ideia inicial era construir uma família de processos para compreender a variedade de outros processos estocásticos.

A medida de *Lèvy* tem um papel central na construção de processos de *Lèvy*. A ideia da medida de *Lèvy* é que ela contenha toda informação sobre os saltos do processo e em geral modela-se diretamente a medida de *Lèvy* ao invés das funções de distribuições de Y_{τ_i} do processo de *Lèvy*.

Devido ao fato de que saltos podem ser negativos ou positivos, mas não nulos, a medida de *Lèvy* terá uma descontinuidade no ponto zero. Além disso a soma da integral da soma das funções de distribuição comum de Y_{τ_i} não resulta em integral igual a 1. Então a construção geral de processos de *Lèvy* requer adequadas restrições para a forma geral da medida de *Lèvy*. A extensão do teorema de *Kolmogorov*, garante que para qualquer distribuição infinitamente divisível, existe um único processo de *Lèvy*.

Um processo estocástico e *càdlàg* $\{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$, com $Z_0 = 0$ quase certamente, é chamado de Processo de *Lèvy* se as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Z_t tem incrementos independentes, isto é, $Z_t - Z_s$ é independente de F_s , para qualquer $\{0 \leq s < t \leq T\}$;
2. Z_t tem incrementos estacionários, isto é, para qualquer $\{0 \leq s\}, \{t \leq T\}$, a distribuição de $Z_{t+s} - Z_t$ não depende de t ;

3. Z_t é estocasticamente contínuo, isto é, para qualquer $\{0 \leq t \leq T\}$ e $\{\varepsilon > 0\}$, tem-se a equação 7.1:

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|Z_t Z_s| > \varepsilon) = 0 \quad (7.1)$$

A propriedade na equação 7.1 não está relacionada com a continuidade dos caminhos mas somente as propriedades de distribuições dos incrementos. O mais simples processo de *Lèvy* é um processo determinístico com *drift* linear e o único não determinístico processo de *Lèvy* com trajetória contínua é o movimento browniano. O processo de *Poisson* e o Processo Composto de *Poisson*, abordados no Capítulo 5, são também Processos de *Lèvy*. É importante salientar que um Processo de salto-difusão, não necessariamente é um processo de *Lèvy*.

7.1.1 Saltos de *Lèvy*

Seja $\Delta Z = \{\Delta Z_t, 0 \leq t \leq T\}$ um processo de salto associado com o processo de *Lèvy* Z , definido para cada t como na equação 7.2:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-} \quad (7.2)$$

onde $Z_{t-} = \lim_{s \rightarrow t} Z_s$, é o limite esquerdo. Pela continuidade estocástica do processo de *Lèvy*, se considerar um tempo fixo t , então $\Delta Z_t = 0$ quase certamente. Isso significa que o Processo de *Lèvy* não tem tempo fixo de descontinuidade, mas mesmo assim tem saltos e ocasionalmente o total dos saltos pode divergir, isto é, equação 7.3):

$$\sum_{s \leq t} |\Delta_s| = \infty \quad (7.3)$$

quase certamente. Mas tem-se que $\sum_{s \leq t} |\Delta_s|^2 < \infty$ quase certamente, o que faz com que o processo de *Lèvy* seja tratável como um martingale.

Considere a tripla (b, c, ν) onde $b \in \mathbf{R}$, $c \geq 0$, e ν é uma medida tal que $\nu(0) = 0$ e $\int_{\mathbf{R}} (1 \wedge |x|^2) \nu dx < \infty$. Então, há em algum espaço de probabilidade, 4 independentes estocásticos processos: $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$, e $Z^{(4)}$, onde $Z^{(1)}$ é um processo de *drift* constante, $Z^{(2)}$ é um movimento browniano, $Z^{(3)}$ é um processo composto de *Poisson* e $Z^{(4)}$ é um salto puro martingale quadrado integrável, com quase certamente, um contável número de saltos de magnitude menor que 1 em cada finito intervalo.

7.1.2 Medida de *Lèvy*

Seja $\nu(0) = 0$ e $\int_{\mathbf{R}} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty$, a medida de *Lèvy* descreve o esperado número de saltos de uma certa amplitude em um intervalo de tempo de tamanho 1. A medida de *Lèvy* não tem massa na origem, mas muitos saltos podem ocorrer em volta da origem, isto é, pode haver uma grande quantidade de muitos pequenos saltos.

Se ν é uma medida finita, tem-se que $\lambda = \nu(\mathbf{R}) < \infty$, $F(dx) = \nu(dx)/\lambda$ é uma medida de probabilidade e λ é apenas o valor esperado de saltos com $F(\cdot)$ sendo a distribuição dos saltos. Mas, se $\nu(\mathbf{R}) = \infty$, então um infinito número de pequenos saltos é esperado. Nesse caso, o processo de *Lèvy* é dito ter atividade infinita.

Seja Z um processo de *Lèvy* com tripla (b, c, ν) :

1. Se $\nu(\mathbf{R}) < \infty$, então quase todos caminhos de Z tem um finito número de saltos em cada intervalo compacto. Nesse caso, o processo de *Lèvy* tem atividade finita;

2. Se $v(\mathbf{R}) = \infty$, então quase todos os caminhos de Z tem um infinito número de saltos em cada intervalo compacto. Nesse caso, o processo de *Lèvy* tem atividade infinita.

E também:

1. Se $c = 0$ e $\int^{|x| \leq 1} |x|v(dx) < \infty$, então quase todos os caminhos de Z tem variação finita;
2. Se $c \neq 0$ e $\int^{|x| \leq 1} |x|v(dx) = \infty$, então quase todos os caminhos de Z tem variação infinita.

O resultado diz que quando a parte browniana está faltando e a soma de pequenos saltos não diverge, então o processo Z tem variação finita e vice-versa.

Pequenos saltos (e a parte browniana) determinam a variação do processo e grandes saltos afetam a existência de mais altos momentos do processo. Logo, a atividade depende do conjunto de saltos do processo.

7.2 Processos de Salto-Difusão

Nesta seção são descritos como são os processos de salto-difusão utilizados como base para modelar a curva DI diária apresentada anteriormente. Os modelos usados de difusão dos processos de salto-difusão estimados aqui contam com as partículas de *drift* e difusão que por sua vez são definidas aqui com base nos resultados achados no Capítulo 4. E a partícula de saltos que é incorporada no modelo é baseado na literatura que diz respeito aos Processos de *Lèvy* apresentada na seção 7.1 e nas seções 5.2 e 5.3.

Abaixo são definidos os processos de Salto-Difusão usados:

- *Dothan* com saltos de intensidade λ e distribuição Normal:

$$dX(t) = X(t)\sigma dW(t) + dJ(t)$$

(7.4)

Este é um modelo que não apresenta reversão à média com a parte sem saltos descrito na seção 4.3, e na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *GBM* com saltos de intensidade λ e distribuição Normal;

$$dX(t) = \beta X(t)dt + X(t)\sigma dW(t) + dJ(t)$$

(7.5)

O parâmetro β é interpretado como a constante taxa de juros e σ como a volatilidade de atividades arriscadas descrito na seção 4.3, e na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *Vasicek* - Tipo 2 com saltos de intensidade λ e distribuição Normal;

$$dX(t) = \alpha(b - X(t))dt + \sigma dW(t) + dJ(t) \quad (7.6)$$

Neste modelo, é descrito um processo de *Ornstein-Uhlenbeck* que apresenta a propriedade de reversão à média, para um modelo de equilíbrio descrito por Vasicek 1977 para preços de títulos. Vasicek 1977 descreve uma taxa de juros no curto prazo através de um *Processo Ornstein - Uhlenbeck* onde W é um movimento browniano padrão, e α , b , σ são constantes positivas descrito na seção 4.3, e na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *CIR* - Tipo 2 com saltos de intensidade λ e distribuição Normal;

$$dX(t) = \alpha(b - X(t))dt + \sigma\sqrt{x}dW(t) + dJ(t) \quad (7.7)$$

esse modelo apresenta a volatilidade como proporcional a taxa de juros onde W é um movimento browniano padrão. Considere o caso em que α e b são positivos. Se $X(0) > 0$, então $X(t)$ nunca será negativo; se $2\alpha b \geq \sigma^2$, então $X(t)$ será estritamente positivo para todo t . Na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *Brennan - Schwartz* - Tipo 2 com saltos de intensidade λ e distribuição Normal;

$$dX(t) = (\alpha + \beta X(t))dt + X(t)\sigma dW(t) \quad dX(t) = \alpha(\beta + x)dt + \sigma x dW(t) + dJ(t) \quad (7.8)$$

a parte da difusão é descrita na seção 4.3, e na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *CIR VR* com saltos de intensidade λ e distribuição Normal;

$$dX(t) = \alpha X(t)^{\frac{3}{2}} dW(t) + dJ(t) \quad (7.9)$$

este modelo não apresenta reversão à média, conforme descrito na seção 4.3, e na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *CEV* com saltos de intensidade λ e distribuição Normal;

$$dX(t) = \beta X(t)dt + X(t)^\alpha \sigma dW(t) + dJ(t) \quad (7.10)$$

o modelo *GBM* é um caso particular do modelo *CEV* descrito na seção 4.3, e na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *CKLS* - Tipo 2 com saltos de intensidade λ e distribuição Normal;

$$dX(t) = (\alpha + \beta X(t))dt + X(t)^\gamma \sigma dW(t) \quad dX(t) = \alpha(\beta - x)dt + \sigma x^{\frac{\zeta}{2}} dW(t) + dJ(t) \quad (7.11)$$

Este modelo, descrito na equação 4.25, abrange todos os anteriores como casos particulares e na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

- *Ahn - Gao* com saltos de intensidade λ e distribuição Normal:

$$dX(t) = X(t)(\alpha - (\sigma^3 - \alpha\beta)X(t))dt + \sigma X(t) \frac{3}{2} dW(t) + dJ(t) \quad (7.12)$$

É um modelo não linear com reversão à média onde na parte de saltos se tem $J(t)$, que é um Processo Composto de *Poisson* com intensidade λ e saltos distribuídos com uma distribuição normal $N(\mu, \theta^2)$.

7.3 Estimação

Segundo, Ogihara e Yoshida 2011 uma das dificuldades causadas pela existência de saltos é que não se pode distinguir os incrementos dos dados com saltos daqueles sem saltos embora seja necessária uma classificação de incrementos para atribuir cada incremento à função de verossimilhança de difusão/salto, quando uma análise é feita. Para resolver este problema, Ogihara e Yoshida 2011 propôs um filtro de discriminação, que permitia discriminar assintoticamente entre incrementos com saltos e incrementos sem saltos.

Para a estimação das *SDEs* com saltos usadas nesta parte do trabalho, foi utilizada a estimação por quasi-máxima verossimilhança (*QMLE*), semelhante a usada na seção 4.4.1, porém aqui é incorporada na função, os saltos através do mecanismo de filtragem de acordo com Ogihara e Yoshida 2011.

A função de quasi-verossimilhança é dada por:

$$L_n(\alpha) = \exp H_n(\alpha)$$

(7.13)

onde

$$\begin{aligned} H_n(\alpha) = & \frac{-1}{2h} \sum_n^{i=1} X_{i,n}^T(\theta) \beta_{i-1}^{-1}(\sigma) X_{i,n}(\theta) 1_{|\Delta X_i^n| \leq Dh^p} \\ & - \frac{1}{2} \sum_n^{i=1} \ln \det \beta_{i-1}(\sigma) 1_{|\Delta X_i^n| \leq Dh^p} \\ & + \sum_n^{i=1} \left\{ \ln \phi_\theta(\Delta X_i^n, X_{i-1}^n) \right\} \kappa_n(X_{i-1}^n, \Delta X_i^n) 1_{|\Delta X_i^n| > Dh^p} \\ & - h \sum_n^{i=1} \int_{B(X_{i-1}^n)} \phi_\theta(y, X_{i-1}^n) \kappa_n(X_{i-1}^n, y) dy \end{aligned} \quad (7.14)$$

Onde na equação 7.14, h se refere ao limiar, X é a taxa de juros, $\alpha = (\sigma, \theta)$ e representa os parâmetros, $\beta(x, \sigma) = b^T(x, \sigma)b(x, \sigma)$, p é uma variável usada para definir o limiar (usado no filtro), D é uma constante maior que zero, κ é uma função com valor zero ou 1 e depende de y , $\phi_\theta(y, x) = f_\theta(c^{-1}(x, y, \theta))J(x, y, \theta)$, onde $J(x, y, \theta)$ é o jacobiano. A função segue algumas restrições que podem ser melhores vistas em Ogihara e Yoshida 2011. .

De acordo com (Shimizu e Yoshida 2006), a exata verossimilhança deveria ser usada se fosse conhecida a forma das transições de probabilidade. Entretanto, isso é geralmente impossível de escrever de forma explícita, então deve ser aproximada a função de verossimilhança como feito acima na equação 7.14.

A inferência baseada na estimação por Quasi-Máxima Verossimilhança (*QMLE*) é baseada no limiar dos incrementos do caminho observado, que neste caso é a amostra da curva DI utilizada, para separar a parte contínua dos incrementos e os saltos com distribuição de *Poisson*. Ergodicidade e um número alto de observações são requeridos para consistência e normalidade assintótica dos estimadores. Uma condição clara é que se tenha poucos saltos em torno de zero para evitar a perda de informação na estimação da intensidade dos saltos de *Poisson* (λ).

7.4 Resultados dos Processos de Salto-Difusão

Através da estimação por *QMLE* foram estimados os processos de salto-difusão descritos na seção 7.2. Os processos foram estimados com o objetivo de melhorar as estimativas feitas no Capítulo 4 e comparar com o achado para os saltos no Capítulo 5 mais especificamente na seção 5.7.3 que por sua vez é visto em conjunto com a difusão no Capítulo 6. A abordagem vista no Capítulo 5 e no Capítulo 6, parte da suposição inicial de que saltos são observáveis e são construídos conforme visto na seção 5.1. Agora neste Capítulo, é feita a estimação das *SDEs* de forma com que os parâmetros dos saltos sejam estimados juntos com as *SDEs* propostas na seção 7.2.

Para a estimação por *QMLE* de um processo de salto-difusão, é necessário delimitar um limiar que será usado para a parte dos incrementos (saltos) na estimação, de acordo com Ogihara e Yoshida 2011. Segundo, Iacus e Yoshida 2017, o limiar escolhido é de extrema importância, pois caso seja muito grande, então o número de eventos de *Poisson* será subestimado e caso seja pequeno, o número de saltos será superestimado. De acordo com isso, foi feita uma estimação da regressão linear abaixo, na equação 7.15, para servir de balizamento nas decisões sobre o limiar escolhido:

$$X(t) = \gamma_1 + \gamma_2 I(t) + \varepsilon \quad (7.15)$$

onde γ_1 e γ_2 são os parâmetros linear e angular respectivamente da regressão da taxa de juros DI como variável dependente, $I(t)$ seria a variável indicativa da ocorrência de saltos baseado na seção 5.1 e ε são os erros. Com isso, tem-se os resultados na tabela 58.

Quantis	$\hat{\gamma}_1$	Desvio-padrão $\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$	Desvio-padrão $\hat{\gamma}_2$
Regressão Quantis 99% e 1%	0.03978	0.00015	-0.00040	0.00108
Regressão Quantis 95% e 5%	0.03976	0.00016	0.00006	0.00051
Regressão Quantis 90% e 10%	0.04014	0.00017	-0.00186	0.00038

Tabela 58 – Estimação das Regressões do Limiar

De acordo com a tabela e fazendo teste-t, dos parâmetros γ_2 estimados, somente é significativo o feito com os quantis 90% e 10%. E de acordo com isso é proposto dois limiares para a estimação por *QMLE* dos processos de salto-difusão. Os limiares considerados são 0.001 e 0.002, que por sua vez apresentam o valor de 0.00186 (módulo de $\hat{\gamma}_2$) dentro do intervalo.

No gráfico da figura 20, tem-se um histograma da primeira diferença da curva DI com marcação em vermelho das diferenças acima do limiar de 0.001 e em verde acima do limiar de 0.002.

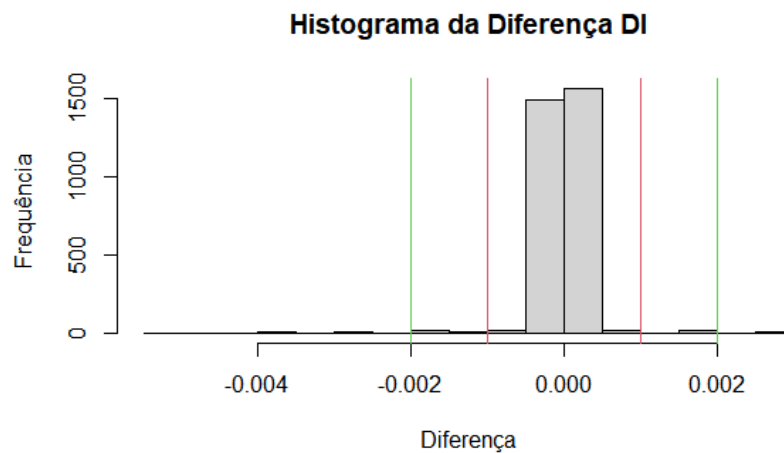


Figura 20 – Histograma da diferença da Taxa DI

Esses valores de limiar serão usados na estimação por *QMLE* para balizar a estrutura dos incrementos considerados saltos nesta estimação. Considerando a mesma amostra usada ao longo do trabalho foram estimadas as *SDEs* de *Dothan*, *GBM*, *Vasicek*, *CIR SR*, *Brennan-Schwartz*, *CIR VR*, *CEV*, *CKLS* e *Ahn-Gao* com inclusão da partícula de saltos seguindo um processo Composto de *Poisson*, que por sua vez pode ser visto na seção 5.3 uma visão mais específica e na seção 7.1 uma generalização para tal processo.

Abaixo na tabela 59 tem-se o *AIC* para as estimações separado por modelo e por limiar:

Modelo	Limiar	<i>AIC</i>	Parâmetros
<i>Dothan</i>	0.002	-44167.65	4
<i>Dothan</i>	0.001	-48433.45	4
<i>GBM</i>	0.002	-44141.52	5
<i>GBM</i>	0.001	-48158.71	5
<i>Vasicek - Tipo 2</i>	0.002	-37301.9	6
<i>Vasicek - Tipo 2</i>	0.001	-37485.37	6
<i>CIR - SR - Tipo 2</i>	0.002	-37588.82	6
<i>CIR - SR - Tipo 2</i>	0.001	-37771.62	6
<i>Brennan - Schwartz - Tipo 2</i>	0.002	-36479.11	6
<i>Brennan - Schwartz - Tipo 2</i>	0.001	-36621.6	6
<i>CIR VR</i>	0.002	-43896.38	4
<i>CIR VR</i>	0.001	-48109.91	4
<i>CEV</i>	0.002	-44313.75	6
<i>CEV</i>	0.001	-48260.75	6
<i>CKLS - Tipo 2</i>	0.002	-37721.46	7
<i>CKLS - Tipo 2</i>	0.001	-37880.68	7
<i>Ahn - Gao</i>	0.002	-43871.41	8
<i>Ahn - Gao</i>	0.001	-47859.19	8

Tabela 59 – *AIC* - Modelo de Salto-Difusão

De acordo com a tabela 59, considerando-se o limiar de 0.001 os modelos atingiram um *AIC* melhor, indicando que modelos com esse limiar apresentaram melhor qualidade em termos de informação perdida e simplicidade.

Os modelos que obtiveram melhor *AIC* foram o *Dothan*, *GBM*, *CIR VR*, *CEV* e *Ahn-Gao*. Dentre esses, o modelo de *Dothan*, *GBM* e *CIR VR* são os que apresentam menos coeficientes e na outra ponta tem-se o modelo de *Ahn-Gao* com 8 coeficientes, sendo 5 para a parte de *drift* e difusão e 3 para a parte de saltos e logo é o que apresenta menor parcimônia.

Estimando esses 4 modelos e mais o de *Vasicek - Tipo 2*, tem-se os resultados a seguir:

- *Dothan* com Processo Composto de *Poisson*:

De acordo com a equação 7.4, têm-se as estimativas por *QMLE* vistas abaixo:

Coefficiente	Estimação - Limiar 0.002	Estimação - Limiar 0.001
$\hat{\sigma}$	0.08400	0.04146
$\hat{\lambda}$	1.21618	3.70329
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00000
$\hat{\theta}$	0.00342	0.00262

Tabela 60 – Modelo de *Dothan* com Processo de *Poisson* em diferentes Limiares

Dado que os melhores resultados baseado no *AIC* foram obtidos com o limiar de 0.001, foram feitas 1000 simulações para extração das propriedades estatísticas deste modelo. Elas podem ser vistas na tabela 61:

Coefficiente	Estimação	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\sigma}$	0.04146	-0.00193	-0.00193	0.00301	0.00926
$\hat{\mu}$	0	0.00019	0.00019	0.00019	0.00052
$\hat{\theta}$	0.00262	0.00076	0.00076	0.00077	0.00346
$\hat{\lambda}$	3.70329	-1.24421	-1.24421	1.29842	1.40964

Tabela 61 – Propriedades Estatísticas - Modelo de *Dothan* com Processo de *Poisson*

De acordo com a tabela 61, o coeficiente que apresentou maior viés foi o $\hat{\lambda}$ que representa a ocorrência dos saltos seguindo uma distribuição de *Poisson*. O coeficiente que apresentou menor viés foi o $\hat{\mu}$, que é a média da amplitude dos saltos da distribuição Normal. Comparando com a seção 4.5.1, o modelo estimado por *QMLE* na tabela 7 e por estimação Bayesiana na tabela 8 apresentaram melhores propriedades estatísticas para o parâmetro da difusão.

- *GBM* com Processo Composto de *Poisson*:

De acordo com a equação 7.5, têm-se as estimativas por *QMLE* vistas abaixo:

Coefficiente	Estimação - Limiar 0.002	Estimação - Limiar 0.001
$\hat{\sigma}$	0.08976	0.05202
$\hat{\beta}$	0.00004	0.00083
$\hat{\lambda}$	1.21619	3.70329
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00000
$\hat{\theta}$	0.00342	0.00262

Tabela 62 – Modelo de *GBM* com Processo de *Poisson* em diferentes Limiares

Dado que os melhores resultados baseado no *AIC* foram obtidos com o limiar de 0.001, foram feitas 1000 simulações para extração das propriedades estatísticas deste modelo. Elas podem ser vistas na tabela 63:

Coefficiente	Estimação	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\beta}$	0.00083	0.00507	0.00507	0.00585	0.01529
$\hat{\sigma}$	0.05202	0.00673	0.00673	0.00673	0.03391
$\hat{\mu}$	0	0.00019	0.00019	0.00019	0.00055
$\hat{\theta}$	0.00262	0.00068	0.00068	0.00069	0.00228
$\hat{\lambda}$	3.70329	-1.23618	-1.23618	1.28863	1.40528

Tabela 63 – Propriedades Estatísticas - Modelo de *GBM* com Processo de *Poisson*

Na tabela 63, o parâmetro com pior propriedade estatística foi o $\hat{\lambda}$ e com melhores, foram os parâmetros da amplitude dos saltos. Para o parâmetro $\hat{\beta}$ que representa o *drift* da *SDE* e para o $\hat{\sigma}$ que representa a difusão da mesma, as propriedades de modo geral foram melhores para os estimativas acima incluindo saltos do que para as obtidas na tabela 9 (*QMLE*) na tabela 10 (estimacão Bayesiana).

- *Vasicek* - Tipo 2 com Processo Composto de *Poisson*:

De acordo com a equação 7.6, têm-se as estimativas por *QMLE* vistas abaixo:

Coefficiente	Estimacão - Limiar 0.002	Estimacão - Limiar 0.001
$\hat{\sigma}$	0.40823	0.40120
$\hat{\alpha}$	0.00201	0.00000
\hat{b}	0.000000	0.00000
$\hat{\lambda}$	1.76265	3.49656
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00000
$\hat{\theta}$	0.00328	0.00239

Tabela 64 – Modelo de *Vasicek* - Tipo 2 com Processo de *Poisson* em diferentes Limiares

Dado que os melhores resultados baseado no *AIC* foram obtidos com o limiar de 0.001, foram feitas 1000 simulações para extração das propriedades estatísticas deste modelo. Elas podem ser vistas na tabela 65:

Coefficiente	Estimacão	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\alpha}$	0.00000	0.21016	0.21016	0.21016	3.20073
\hat{b}	0.00000	0.00391	0.00391	0.00391	0.01238
$\hat{\sigma}$	0.40120	3.55834	3.55834	3.63633	13.08480
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00002	0.00002	0.00002	0.00024
$\hat{\theta}$	0.00239	0.00012	0.00012	0.00045	0.00082
$\hat{\lambda}$	3.49656	84.56117	84.56117	84.56117	88.62700

Tabela 65 – Propriedades Estatísticas - Modelo de *Vasicek* - Tipo 2 com Processo de *Poisson*

As estimacões para o $\hat{\lambda}$ mostraram valores para as propriedades estatísticas bem maiores (piores) do que os achados no modelo de *Dothan* e no modelo *GBM* vistos anteriormente. Porém, assim como nos anteriores, $\hat{\mu}$ e $\hat{\theta}$, mostraram ter as melhores propriedades dentre os outros coeficientes estimados acima. E de acordo com os modelos estimados anteriormente não considerando saltos, somente para o coeficiente da difusão houve melhora nas propriedades estatísticas estimadas (comparando com a tabela 14 e a tabela 12). O mesmo pode ser dito para a comparacão na estimacão que foram retirados os saltos vista na seccão 6.0.1.

- *CIR VR* com Processo Composto de *Poisson*:

De acordo com a equação 7.9, têm-se as estimativas por *QMLE* vistas abaixo:

Coefficiente	Estimacão - Limiar 0.002	Estimacão - Limiar 0.001
$\hat{\alpha}$	0.44564	0.22190
$\hat{\lambda}$	1.21618	3.70329
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00000
$\hat{\theta}$	0.00342	0.00262

Tabela 66 – Modelo de *CIR VR* com Processo de *Poisson* em diferentes Limiares

Dado que os melhores resultados baseado no *AIC* foram obtidos com o limiar de 0.001, foram feitas 1000 simulações para extração das propriedades estatísticas deste modelo. Elas podem ser vistas na tabela 67:

Coefficiente	Estimação	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\alpha}$	0.22191	-0.01093	-0.01093	0.01855	0.03506
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00020	0.00020	0.00020	0.00059
$\hat{\theta}$	0.00262	0.00068	0.00068	0.00069	0.00231
$\hat{\lambda}$	3.70330	-1.20935	-1.20935	1.27379	1.39722

Tabela 67 – Propriedades Estatísticas - Modelo de CIR VR com Processo de Poisson

De acordo com a tabela 67, o coeficiente estimado $\hat{\lambda}$ referente a ocorrência dos saltos de acordo com uma distribuição *Poisson* homogênea apresentou piores propriedades estatísticas, porém a parte da distribuição da amplitude apresentou os melhores resultados ($\hat{\mu}$ e $\hat{\theta}$, média e variância respectivamente). O coeficiente referente a difusão, $\hat{\alpha}$, apresentou de modo geral melhores propriedades do que a estimação Bayesiana, porém a estimação por *QMLE* vista na tabela 21 se mostrou melhor.

- *CEV* com Processo Composto de *Poisson*:

De acordo com a equação 7.10, têm-se as estimativas por *QMLE* vistas abaixo:

Coefficiente	Estimação - Limiar 0.002	Estimação - Limiar 0.001
$\hat{\sigma}$	0.01490	0.01936
$\hat{\alpha}$	0.45381	0.69991
$\hat{\beta}$	0.00150	0.00023
$\hat{\lambda}$	1.21618	3.70329
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00000
$\hat{\theta}$	0.00342	0.00262

Tabela 68 – Modelo de *CEV* com Processo de Poisson em diferentes Limiares

Dado que os melhores resultados baseado no *AIC* foram obtidos com o limiar de 0.001, foram feitas 1000 simulações para extração das propriedades estatísticas deste modelo. Elas podem ser vistas na tabela 69:

Coefficiente	Estimação	Viés	ME	MAE	RMSE
$\hat{\beta}$	0.00024	0.00430	0.00430	0.00451	0.00805
$\hat{\sigma}$	0.01936	0.38307	0.38307	0.38312	0.42754
$\hat{\alpha}$	0.69991	-0.11566	-0.11566	0.19359	0.21100
$\hat{\mu}$	0.00000	0.00020	0.00020	0.00020	0.00054
$\hat{\theta}$	0.00262	0.00067	0.00067	0.00068	0.00214
$\hat{\lambda}$	3.70330	-1.23314	-1.23314	1.28023	1.39456

Tabela 69 – Propriedades Estatísticas - Modelo de *CEV* com Processo de Poisson

Olhando para a tabela 69, o $\hat{\lambda}$ possui as piores propriedades estatísticas dentre os outros coeficientes estimados. E os coeficientes da amplitude dos saltos se mostraram melhores, mais uma vez. Para os coeficientes restantes, o parâmetro do *drift* $\hat{\beta}$ se mostrou melhor na estimação de salto-difusão, e os parâmetros da difusão $\hat{\sigma}$ e $\hat{\alpha}$ (expoente da difusão) se mostraram melhor nas estimações anteriores por *QMLE* e Bayesiana.

Olhando o gráfico abaixo na figura 21 pode ser vista a primeira diferença da curva DI e em vermelho a marcação dos saltos de acordo com o limiar e estimação. No gráfico pode ser visto que os modelos

consideram saltos as maiores diferenças encontradas para curva DI, o que significa um bom poder explicativo dos saltos.

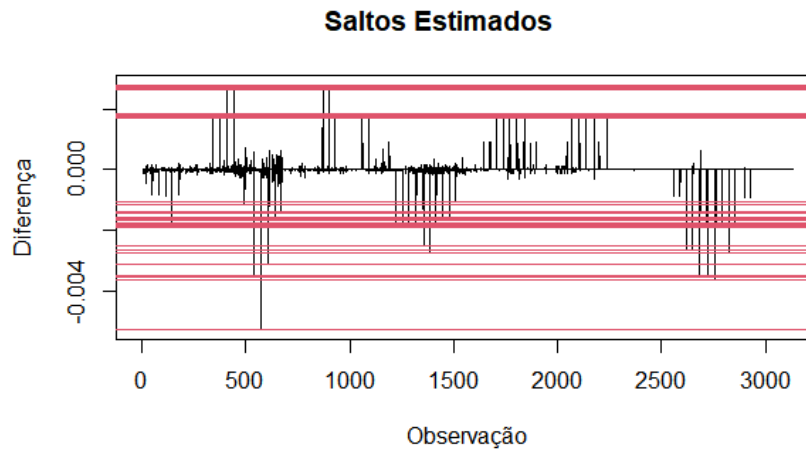


Figura 21 – Saltos dos Modelos através do limiar 0.001

E de acordo com o mesmo, as diferenças existentes na estimação foi com relação ao parâmetro λ , que é o coeficiente correspondente a ocorrência dos saltos, e com relação ao θ que é a variância da amplitude dos saltos. Conforme pode ser visto nas tabelas acima, para o modelo de Vasicek foi achado um $\hat{\lambda}$ de 3.49656 e para os modelos restantes foi achado o valor de 3.70330. E para o $\hat{\theta}$ foi achado um valor de 0.00239 para o Vasicek e 0.00262 para os outros. Abaixo é vista uma tabela com os valores apresentados das probabilidades de ocorrência de saltos seguindo uma distribuição de Poisson. Seja o $\hat{\lambda}$ o número de saltos por ano num período de 252 dias úteis e comparando com a seção 5.7.5, os períodos sem saltos teriam uma duração aproximada média de 72 dias para o modelo de Vasicek e de 68 dias para os outros modelos. Que por sua vez, são períodos bem maiores do que os períodos de *duration* encontrados anteriormente.

Probabilidade de Saltos	1 salto	2 saltos	5 Saltos	10 Saltos	20 Saltos	Modelo
Salto(s) no Ano	9.12573	16.89764	14.30342	0.32946	0.00000	Todos outros estimados
Salto(s) em 3 Meses	36.77095	17.83227	0.71175	0.00000	0.00000	Todos outros estimados
Salto(s) em 6 Meses	29.06685	26.91078	2.84741	0.00205	0.00000	Todos outros estimados
Salto(s) no Mês	23.39923	3.78253	0.00213	0.00000	0.00000	Todos outros estimados
Salto(s) em Semana	6.82726	0.25083	0.00000	-	-	Todos outros estimados
Salto(s) no Dia	1.44812	-	-	-	-	Todos outros estimados
Salto(s) no Ano	10.59502	18.52310	13.19740	0.22810	0.00000	Vasicek
Salto(s) em 6 Meses	30.43280	26.60259	2.36924	0.00128	0.00000	Vasicek
Salto(s) em 3 Meses	36.64987	16.78138	0.21479	0.00000	0.00000	Vasicek
Salto(s) no Mês	22.49537	3.43342	0.00163	0.00000	0.00000	Vasicek
Salto(s) na Semana	6.47264	0.22452	0.00000	-	-	Vasicek
Salto(s) no Dia	1.36841	-	-	-	-	Vasicek

Tabela 70 – Probabilidades - Ocorrência dos Saltos

Na tabela 70 podem ser vistas as probabilidades de ocorrência de 1, 2, 5, 10 ou 20 saltos para os períodos correspondentes a 1 ano, 6 meses, 3 meses, 1 mês, 1 semana e 1 dia. De acordo com a tabela, é visto que os resultados se mostram com probabilidade de ocorrência menor quando comparados com as estimações feitas por MLE na seção 5.7.3 na tabela 33 de modo geral e somente apresentam probabilidade maior na ocorrência de 1 salto em 3 meses. E os resultados se mostraram, de modo geral, mais compatíveis com os quantis de 99% e 1% utilizados na construção da definição de saltos usada no Capítulo 5. E pode ser dito que os resultados vistos aqui se mostraram menos conservadores com relação a ocorrência de saltos.

8 Conclusão

Neste trabalho foi analisado inicialmente as propriedades estatísticas dos modelos de difusão com parâmetros observados para a taxa de juros DI diária.

Um ponto deve ser levado em conta na estimação paramétrica dos modelos usados para a curva DI. Quando é feita a discretização é esperado viés nos estimadores e esse viés, segundo (Broadie e Kaya 2006) pode afetar as propriedades de apreçamento de ativos de gerenciamento de risco derivados destes modelos. Em conjunto com um viés natural esperado, a série da taxa DI apresenta características peculiares que poderão também impactar no desempenho destes modelos, como por exemplo a não-normalidade, eventos extremos e saltos na série. Dados estes fatos, muitos dos modelos estarão com especificação incorreta, o que pode acarretar em não confiabilidade dos ajustes ou uma extração ruim de propriedades como os momentos da série.

Através do uso do processo de simulação/discretização de *Euler-Maruyama* com 1000 trajetórias, foram extraídas as propriedades estatísticas dos coeficientes estimados para os modelos de difusão sugeridos com o objetivo de verificar a especificação incorreta nas propriedades destes estimadores e verificar quais são mais robustos a estes problemas. Os resultados mostraram que a estimação Bayesiana apresentou melhores propriedades estatísticas para a partícula de *drift* dos modelos de difusão sugeridos. Já para a componente da difusão, a estimação por Quasi-máxima verossimilhança se mostrou melhor em termos das propriedades estatísticas extraídas, apontando assim uma melhor especificação para a difusão.

E para a questão da mudança de parametrização usada nos modelos de *Vasicek*, *CIR*, *CKLS* e *Brennan - Schwartz* na parte do *drift*, houve uma sensibilidade maior nas propriedades estatísticas com método de estimação de Quasi-máxima verossimilhança fazendo com que as caracterizações do Tipo 2 apresentassem melhores propriedades estatísticas do que o Tipo 1 de parametrização, o que está de acordo com a conclusão de (Iacus e Yoshida 2017).

Para o erro quadrático médio dentro da amostra obtido na comparação entre a média das simulações pelo método de *Euler-Maruyama* feito a partir das estimações por Quasi-máxima verossimilhança e pela metodologia Bayesiana, os modelos que obtiveram menores erros foram o modelo de *Dothan*, *Vasicek* do Tipo 1, *Brennan-Schwartz* do Tipo 2, *CIR VR*, *CEV*, Hiperbólicos (Tipos 1 e 2), e *Ahn e Gao*. Embora tenha sido observado uma sensibilidade maior à mudança de parametrização para a estimação Bayesiana, de acordo com o *RMSE* feito entre a curva DI e a média das simulações.

De modo geral, a escolha entre os modelos usados vai depender também do objetivo existente. Por exemplo, caso queira uma modelagem para a taxa de longo prazo ou velocidade de reversão à média, poderiam ser usados, por exemplo, os modelos de *Vasicek* e/ou *CIR* do Tipo 2. Já para um estudo referente a difusão, recomenda-se o uso de modelos que o obtiveram melhores propriedades estatísticas para essa componente, que neste caso pode-se citar como exemplos os modelos de *Vasicek*, *CEV*, *CIR VR* ou *Brennan-Schwartz* com estimação por *QMLE*. E caso o foco seja o *drift*, modelos usando estimação Bayesiana, que se saíram bem, como os modelos de *Brennan - Schwartz* e *Vasicek*.

Para a amplitude dos saltos, foi utilizada a Distribuição Generalizada de Valores Extremos, que por sua vez foi a que melhor se ajustou aos saltos da série DI dentre as outras testadas. E para a ocorrência de saltos, foi primeiramente feito a estimação por *MLE* em que foi suposto que os saltos seguissem uma distribuição de *Poisson* homogênea. Posterior a isso com o intuito de estudar variáveis explicativas para os saltos e também de ajustar melhor a distribuição de ocorrência, foi feita a estimação do *GLM* por *MLE* para uma distribuição de *Poisson* com variáveis explicativas definidas de acordo com a literatura de finanças.

O trabalho feito demonstra que há forte evidência de presença de saltos na taxa DI brasileira e forte evidência de influência de uma série de fatores. Que por sua vez são saltos no dólar, feriados, reuniões do *COPOM* para decisão de mudanças na taxa Selic, e dias da semana. E que a ocorrência destas variáveis podem causar impacto na taxa DI, ocasionando assim um salto na série em questão. Os resultados apresentados aqui estão em linha aos existentes na literatura como os trabalhos de Das 2002, Johannes 2004 e o de Filho, Carlos e Gonçalves 2015 para o Brasil.

Tentando aprofundar mais as variáveis explicativas de saltos e também verificar os achados para a taxa Selic por Filho, Carlos e Gonçalves 2015, o presente trabalho acrescentou o efeito do dólar e de feriados nos Estados Unidos e no Brasil como variáveis explicativas para os saltos na taxa DI e também testou os dias da semana e reuniões do *COPOM* como variáveis explicativas. Os resultados foram estimados através de Modelos Lineares Generalizados (regressão *Poisson* e Binomial) pelo método de *MLE* e resultaram em resultados similares aos encontrados por Filho, Carlos e Gonçalves 2015 para a Selic.

Foram achados outros efeitos relevantes de outras variáveis, que foram os saltos no dólar e feriados nos EUA e no Brasil, corroborando evidências de que notícias inesperadas (macroeconômicas ou que influenciam estas) de relevância para o País ou para o mundo ocasionam impactos relevantes imediatos na curva de juros, de acordo com Das 2002 e Johannes 2004.

O trabalho também estudou a *duration*, que por sua vez é visto aqui com a definição de duração de um período sem salto na Taxa DI, e foram tidas fortes evidências da variação deste indicador no tempo, o que corrobora também com a evidência de que a taxa de ocorrência de saltos não é única e varia conforme as variáveis explicativas dos saltos na taxa DI definidas neste trabalho.

Depois de estimadas as *SDEs* e modelar os saltos separadamente, foi feita uma segunda estimação das *SDEs* retirando a componente que foi considerada salto. Este passo foi feito com o objetivo de verificar se a presença de saltos possuía efeito significativo nos resultados obtidos das estimações dos parâmetros das *SDEs* feitas pela estimação por *QMLE* e Bayesiana.

Posterior a isso foi incluída a parte de saltos nas *SDEs* seguindo uma distribuição de ocorrência *Poisson* e distribuição de amplitude com distribuição *GEV*. Esta estimação do modelo de difusão com incorporação de saltos, através de quantis extremos, em duas etapas através da retirada dos saltos e sua modelagem e posterior estimação através da *QMLE* trouxe evidências de que a presença de saltos acaba por inflar a componente da difusão/volatilidade dos modelos na maioria dos casos. E também trouxe evidências que a retirada dos saltos possibilita melhor ajuste da curva.

No último Capítulo do trabalho, foi feita a estimação de um processo de salto-difusão de forma convencional, também usado por Das 2002, Johannes 2004 e Filho, Carlos e Gonçalves 2015. Foram apresentados os modelos *CEV*, *Vasicek* (tipo 2), *CIR VR*, *GBM* e *Dothan* e incluídos partículas de saltos seguindo um processo Composto de *Poisson*, caracterizando assim um Processo de *Lévy*. O objetivo foi o de comparar os resultados obtidos através da estimação dos saltos obtida anteriormente e os resultados se mostram parecidos no que foi considerado saltos. Porém não foram obtidas grandes conclusões na comparação com a estimação por *QMLE* e Bayesiana apresentadas no Capítulo de difusão. Embora possa-se dizer que os resultados se mostraram menos conservadores com relação a probabilidade de ocorrência dos saltos do que a modelagem apresentada no Capítulo 5, tendo o Capítulo 7 apresentado menores probabilidades de ocorrência para os saltos.

Os resultados mostraram melhora para o modelo *GBM* em todas as partículas, para o *CIR VR* o resultado foi melhor apenas que a estimação Bayesiana. Para o modelo de *Vasicek* do tipo 2, houve melhora na difusão e para o modelo *CEV* a melhora foi na partícula de saltos.

Como sugestões de trabalhos futuros, tem-se a estimação por *QMLE* utilizando outros métodos de

discretização; a inclusão de restrições em alguns modelos; o uso de *SDEs* em conjunto para mais de uma variável e a captura da correlação entre as variáveis. A sugestão também de um modelo com mudança de regime para os saltos com o uso de uma função *Hazard* como forma de suavização de acordo com a probabilidade de saltos e seu efeito nos resultados de previsão. A correção de viés dos estimadores e seus efeitos nos parâmetros de longo prazo para a base de decisões econômicas também podem trazer relevância. E não menos importante, o estudo da incorporação de processos mais gerais de *Lèvy* na partícula de saltos.

Referências

- Ahn e Gao 1999 AHN, D.-H.; GAO, B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *The Review of Financial Studies*, Oxford University Press, v. 12, n. 4, p. 721–762, 1999.
- Ait-Sahalia 1996 AIT-SAHALIA, Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate. *The review of financial studies*, Oxford University Press, v. 9, n. 2, p. 385–426, 1996.
- Ait-Sahalia 2004 AIT-SAHALIA, Y. Disentangling diffusion from jumps. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 74, n. 3, p. 487–528, 2004.
- Ait-Sahalia, Cacho-Diaz e Laeven 2015 AIT-SAHALIA, Y.; CACHO-DIAZ, J.; LAEVEN, R. J. Modeling financial contagion using mutually exciting jump processes. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 117, n. 3, p. 585–606, 2015.
- Ait-Sahalia, Jacod et al. 2009 AIT-SAHALIA, Y.; JACOD, J. et al. Testing for jumps in a discretely observed process. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 37, n. 1, p. 184–222, 2009.
- Amin 1993 AMIN, K. I. Jump diffusion option valuation in discrete time. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 48, n. 5, p. 1833–1863, 1993.
- Applebaum 2009 APPLEBAUM, D. *Lévy processes and stochastic calculus*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- Barndorff-Nielsen 1978 BARNDORFF-NIELSEN, O. Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae. *Scandinavian Journal of statistics*, JSTOR, p. 151–157, 1978.
- Barndorff-Nielsen e Shephard 2006 BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. *Journal of financial Econometrics*, Oxford University Press, v. 4, n. 1, p. 1–30, 2006.
- Belomestny et al. 2015 BELOMESTNY, D. et al. Lévy matters iv. *Estimation for discretely observed Lévy processes*, Springer, v. 2128, 2015.
- Bibby e Sørensen 2003 BIBBY, B. M.; SØRENSEN, M. Hyperbolic processes in finance. In: *Handbook of heavy tailed distributions in finance*. [S.l.]: Elsevier, 2003. p. 211–248.
- Box et al. 2015 BOX, G. E. et al. *Time series analysis: forecasting and control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- Brennan e Schwartz 1979 BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking & Finance*, Elsevier, v. 3, n. 2, p. 133–155, 1979.
- Brenner, Harjes e Kroner 1996 BRENNER, R. J.; HARJES, R. H.; KRONER, K. F. Another look at models of the short-term interest rate. *Journal of financial and quantitative analysis*, Cambridge University Press, v. 31, n. 1, p. 85–107, 1996.
- Broadie e Kaya 2006 BROADIE, M.; KAYA, Ö. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations research*, INFORMS, v. 54, n. 2, p. 217–231, 2006.
- Brouste et al. 2014 BROUSTE, A. et al. The yuima project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations. In: AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION. [S.l.], 2014.
- Burr 2009 BURR, T. L. Simulation and inference for stochastic differential equations with r examples. *Technometrics*, American Society for Quality, v. 51, n. 3, p. 340, 2009.
- Chan et al. 1992 CHAN, K. C. et al. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 47, n. 3, p. 1209–1227, 1992.

- Cox, Jr e Ross 1985 COX, J.; JR, J. I.; ROSS, S. A theory of the term structure of interest rates. *econometrica* 53 385–407. *Mathematical Reviews (MathSciNet)*: MR785475 Digital Object Identifier: doi, v. 10, p. 1911242, 1985.
- Daley e Vere-Jones 2003 DALEY, D. J.; VERE-JONES, D. *An introduction to the theory of point processes. Vol. I. Probability and its Applications*. [S.l.]: New York). Springer-Verlag, New York,, 2003.
- Das 2002 DAS, S. R. The surprise element: jumps in interest rates. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 106, n. 1, p. 27–65, 2002.
- Edwards e Susmel 2003 EDWARDS, S.; SUSMEL, R. Interest-rate volatility in emerging markets. *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, v. 85, n. 2, p. 328–348, 2003.
- Embrechts, Klüppelberg e Mikosch 2013 EMBRECHTS, P.; KLÜPPELBERG, C.; MIKOSCH, T. *Modelling extremal events: for insurance and finance*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 33.
- Filho, Carlos e Gonçalves 2015 FILHO, N. C.; CARLOS, J.; GONÇALVES, E. D. L. Jump diffusion modelling for the brazilian short-term interest rate. *BBR-Brazilian Business Review*, FUCAPE Business School, v. 12, n. 1, 2015.
- Focardi e Fabozzi 2004 FOCARDI, S. M.; FABOZZI, F. J. *The mathematics of financial modeling and investment management*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. v. 138.
- Fox 2015 FOX, J. *Applied regression analysis and generalized linear models*. [S.l.]: Sage Publications, 2015.
- Garcia, Perron et al. 1991 GARCIA, R.; PERRON, P. et al. *An analysis of the real interest rate under regime shifts*. [S.l.]: Universite de Montreal, Departement de sciences economiques, 1991.
- Glasserman 2013 GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 53.
- Gómez-Valle e Martínez-Rodríguez 2019 GÓMEZ-VALLE, L.; MARTÍNEZ-RODRÍGUEZ, J. The risk-neutral stochastic volatility in interest rate models with jump–diffusion processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 347, p. 49–61, 2019.
- Hartigan, Hartigan et al. 1985 HARTIGAN, J. A.; HARTIGAN, P. M. et al. The dip test of unimodality. *The annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 13, n. 1, p. 70–84, 1985.
- Ho e Lee 1986 HO, T. S.; LEE, S.-B. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *the Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 41, n. 5, p. 1011–1029, 1986.
- Iacus 2009 IACUS, S. M. *Simulation and inference for stochastic differential equations: with R examples*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.
- Iacus 2011 IACUS, S. M. *Option pricing and estimation of financial models with R*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- Iacus e Yoshida 2017 IACUS, S. M.; YOSHIDA, N. *Simulation and inference for stochastic processes with YUIMA*. [S.l.]: Springer, 2017.
- Jenkinson 1955 JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Wiley Online Library, v. 81, n. 348, p. 158–171, 1955.
- Johannes 2004 JOHANNES, M. The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 59, n. 1, p. 227–260, 2004.

- Kou 2002 KOU, S. G. A jump-diffusion model for option pricing. *Management science*, INFORMS, v. 48, n. 8, p. 1086–1101, 2002.
- Kutoyants 2013 KUTOYANTS, Y. A. *Statistical inference for ergodic diffusion processes*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- Kyprianou 2006 KYPRIANOU, A. E. *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- Levy e Duchin 2004 LEVY, H.; DUCHIN, R. Asset return distributions and the investment horizon. *Journal of Portfolio Management*, Euromoney Institutional Investor PLC, v. 30, n. 3, p. 47, 2004.
- Lund 2009 LUND, B. The role of jumps and options in the risk premia of interest rates. 2009.
- Lund et al. 2004 LUND, J. et al. Stochastic volatility, mean drift, and jumps in the short rate diffusion: Sources of steepness, level and curvature. In: ECONOMETRIC SOCIETY. *Econometric Society 2004 North American Winter Meetings*. [S.l.], 2004.
- Madan, Carr e Chang 1998 MADAN, D. B.; CARR, P. P.; CHANG, E. C. The variance gamma process and option pricing. *Review of Finance*, European Finance Association, v. 2, n. 1, p. 79–105, 1998.
- McCullagh 2018 MCCULLAGH, P. *Generalized linear models*. [S.l.]: Routledge, 2018.
- Merton 1976 MERTON, R. C. The impact on option pricing of specification error in the underlying stock price returns. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 333–350, 1976.
- Merton 1976 MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 3, n. 1-2, p. 125–144, 1976.
- Milshtein 1979 MILSHTEIN, G. A method of second-order accuracy integration of stochastic differential equations. *Theory of Probability & Its Applications*, SIAM, v. 23, n. 2, p. 396–401, 1979.
- Mises 1936 MISES, R. v. La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. Math. Union Interbalcanique*, v. 1, p. 141–160, 1936.
- Miyahara 2011 MIYAHARA, Y. *Option pricing in incomplete markets: Modeling based on geometric Lévy processes and minimal entropy martingale measures*. [S.l.]: World Scientific, 2011. v. 3.
- Morettin 2010 MORETTIN, L. G. *Estatística básica: probabilidade e inferência: volume único*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010.
- Nelder e Mead 1965 NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, Oxford University Press, v. 7, n. 4, p. 308–313, 1965.
- Nunno, Øksendal e Proske 2009 NUNNO, G. D.; ØKSENDAL, B. K.; PROSKE, F. *Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance*. [S.l.]: Springer, 2009. v. 2.
- Obstfeld, Rogoff e Wren-Lewis 1996 OBSTFELD, M.; ROGOFF, K. S.; WREN-LEWIS, S. *Foundations of international macroeconomics*. [S.l.]: MIT press Cambridge, MA, 1996. v. 30.
- Ogihara e Yoshida 2011 OGIHARA, T.; YOSHIDA, N. Quasi-likelihood analysis for the stochastic differential equation with jumps. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Springer, v. 14, n. 3, p. 189, 2011.
- Ozaki 1985 OZAKI, T. 2 non-linear time series models and dynamical systems. *Handbook of statistics*, Elsevier, v. 5, p. 25–83, 1985.
- Ozaki 1992 OZAKI, T. A bridge between nonlinear time series models and nonlinear stochastic dynamical systems: a local linearization approach. *Statistica Sinica*, JSTOR, p. 113–135, 1992.

- OZAKI 1993 OZAKI, T. A local linearization approach to nonlinear filtering. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 57, n. 1, p. 75–96, 1993.
- Rao 2011 RAO, B. P. *Statistical inference for fractional diffusion processes*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- Rocha, Moreira e Magalhães 2002 ROCHA, K.; MOREIRA, A. R.; MAGALHÃES, R. Determinantes do spread brasileiro: uma abordagem estrutural. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), 2002.
- Sato, Ken-Iti e Katok 1999 SATO, K.-i.; KEN-ITI, S.; KATOK, A. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.
- Schoutens 2003 SCHOUTENS, W. *Lévy processes in finance: pricing financial derivatives*. [S.l.: s.n.], 2003.
- Shimizu e Yoshida 2006 SHIMIZU, Y.; YOSHIDA, N. Estimation of parameters for diffusion processes with jumps from discrete observations. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Springer, v. 9, n. 3, p. 227–277, 2006.
- Shoji 1998 SHOJI, I. A comparative study of maximum likelihood estimators for nonlinear dynamical system models. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 71, n. 3, p. 391–404, 1998.
- Shoji e Ozaki 1995 SHOJI, I.; OZAKI, T. A local linearization method for multivariate stochastic processes. *Res. Memo*, n. 586, 1995.
- Shoji e Ozaki 1997 SHOJI, I.; OZAKI, T. Comparative study of estimation methods for continuous time stochastic processes. *Journal of Time Series Analysis*, Wiley Online Library, v. 18, n. 5, p. 485–506, 1997.
- Shoji e Ozaki 1998 SHOJI, I.; OZAKI, T. Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method. *Stochastic Analysis and Applications*, Taylor & Francis, v. 16, n. 4, p. 733–752, 1998.
- Sorwar 2011 SORWAR, G. Estimating single factor jump diffusion interest rate models. *Applied Financial Economics*, Taylor & Francis, v. 21, n. 22, p. 1679–1689, 2011.
- Vartanian VARTANIAN, P. R. Determinantes do descolamento entre as taxas selic e di: Análise histórica das taxas entre 1999 e 2018.
- Vasicek 1977 VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977.
- Xiao et al. 2010 XIAO, W.-L. et al. Pricing currency options in a fractional brownian motion with jumps. *Economic Modelling*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 935–942, 2010.