

Universidade de São Paulo  
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de  
Ribeirão Preto  
Departamento de Economia  
Programa de Pós-graduação em Economia - Área: Economia  
Aplicada

João Pedro Coli de Souza Monteneri Nacinben

Modelagem de volatilidade estocástica via aproximações de Laplace  
aninhadas integradas: uma extensão multifatorial e multivariada

Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Ribeirão Preto

2023

Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Júnior  
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Fabio Augusto Reis Gomes  
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de  
Ribeirão Preto

Prof. Dr. Milton Barossi Filho  
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Jefferson Donizeti Pereira Bertolai  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia - Área:  
Economia Aplicada

JOÃO PEDRO COLI DE SOUZA MONTENERI NACINBEN

Modelagem de volatilidade estocástica via aproximações de  
Laplace aninhadas integradas: uma extensão multifatorial e  
multivariada

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia – Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Versão Corrigida. A original encontra-se disponível na FEA-RP/USP.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Ribeirão Preto

2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

---

Nacinben, João Pedro Coli de Souza Monteneri  
Modelagem de volatilidade estocástica via aproximações de Laplace aninhadas integradas: uma extensão multifatorial e multivariada/ João Pedro Coli de Souza Monteneri Nacinben; Orientador: Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini  
Ribeirão Preto, 2023. 49 p. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, 2023.

1. Modelos Multivariados de Volatilidade Estocástica. 2. Aproximações de Laplace. 3. Volatilidade Estocástica Fatorial. 4. Inferência Bayesiana Aproximada.

CDU

---

Nome: Nacinben, João Pedro Coli de Souza Monteneri

Título: Modelagem de volatilidade estocástica via aproximações de Laplace aninhadas integradas: uma extensão multifatorial e multivariada

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia – Área: Economia Aplicada da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências. Versão Corrigida. A original encontra-se disponível na FEA-RP/USP.

Aprovada em \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

Banca Examinadora

---

**Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini**

---

**Prof. Dr. Pedro Luiz P. Chaim**

---

**Dr. Omar Muhieddine F. Abbara**

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer pelo amparo e suporte por parte dos meus pais, Paulo e Francislene, bem como por todo o incentivo e auxílio que tive de meus colegas, amigos e demais familiares.

Estendo, ainda, meus agradecimentos ao meu orientador, Márcio Laurini, que teve papel fundamental na realização desta dissertação, antes mesmo de começar a ser escrita. As aulas do Professor eventualmente motivariam o interesse pelo tema abordado, além de terem proporcionado um ponto de partida para seu aprendizado.

Por fim, faz-se necessária a menção ao apoio financeiro oferecido durante o período de mestrado. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



# Resumo

NACINBEN, J. P. C. S. M. **Modelagem de volatilidade estocástica via aproximações de Laplace aninhadas integradas: uma extensão multifatorial e multivariada.** Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

A presente dissertação discute uma possível extensão multivariada para modelos de volatilidade estocástica estimados com o uso de aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA). As já consagradas técnicas baseadas em simulações, tais como Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), podem ser proibitivas ou pouco eficientes em tempo computacional, conforme o número de observações e a dimensionalidade do problema aumentam, além de não estarem livres de problemas de convergência de cadeia. Nesse sentido, o trabalho objetiva o estabelecimento de uma forma mais computacionalmente eficiente de estimar modelos multivariados de volatilidade estocástica, propondo-se, para tanto, uma formulação multifatorial estimada a partir da metodologia INLA, permitindo uma abordagem que explora álgebra linear esparsa e paralelização. Os ganhos de eficiência com o modelo proposto são avaliados em testes realizados por meio de estudo de simulações e análise empírica de séries de retornos de índices de bolsa de valores, sendo então comparados com os resultados de um modelo multivariado e fatorial estimado por MCMC.

**Palavras-chaves:** Modelos Multivariados de Volatilidade Estocástica. Aproximações de Laplace. Volatilidade Estocástica Fatorial. Inferência Bayesiana Aproximada.



# Abstract

NACINBEN, J. P. C. S. M. **Stochastic volatility modelling via integrated nested Laplace approximations: a multifactor and multivariate extension**. Dissertation (Master's) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2023.

The present dissertation discusses a possible multivariate extension for stochastic volatility models estimated using integrated nested Laplace approximations (INLA). The already established simulation-based techniques, such as Markov chain Monte Carlo (MCMC), can be computationally prohibitive or simply inefficient as the number of observations and problem dimensionality increase, and are not free from convergence problems. In this sense, the study aims to institute a more computationally efficient method of estimating multivariate stochastic volatility models, by proposing a multifactor formulation estimated via INLA, allowing for an approach that explores sparse linear algebra and parallelization. The efficiency gains associated with this proposed model are evaluated in tests performed through simulation studies and empirical analysis of stock index return series, and are compared to the results of a multivariate and multifactor model estimated via MCMC techniques.

**Key-words:** Multivariate Stochastic Volatility Models. Laplace Approximations. Factor Stochastic Volatility. Approximate Bayesian Inference.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Evolução dos retornos dos índices analisados. . . . .	36
Figura 2 – Volatilidades fatoriais estimadas vs. séries simuladas . . . . .	38
Figura 3 – Volatilidades estimadas para as séries simuladas vs. retornos absolutos	39
Figura 4 – Diferença entre tempos de estimação: INLA x MCMC . . . . .	41
Figura 5 – Volatilidades estimadas via INLA vs. retornos absolutos . . . . .	43
Figura 6 – Volatilidades estimadas via MCMC vs. retornos absolutos . . . . .	43

# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1	Modelos de volatilidade estocástica . . . . .	14
2.2	Estimação Bayesiana e aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA) . . . . .	15
2.3	Modelos multivariados e fatoriais . . . . .	19
<b>3</b>	<b>MODELO PROPOSTO E ASPECTOS METODOLÓGICOS</b> . . . . .	<b>25</b>
3.1	Base de comparação e ponto de partida . . . . .	25
3.2	Formulação proposta . . . . .	28
3.3	Implementação prática . . . . .	31
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>35</b>
4.1	Variáveis e bases utilizadas . . . . .	35
4.2	Estudo de simulação . . . . .	37
4.3	Análise empírica . . . . .	41
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>47</b>

# 1 Introdução

Na ciência econômica, especialmente no âmbito das finanças, a modelagem de séries temporais recorrentemente passa pela incorporação de padrões de dependência em relação ao tempo para a variância. Em séries financeiras, os chamados modelos de volatilidade condicional são de particular interesse, posto que o risco desempenha um papel considerável na determinação de preços de ativos e na construção de ferramentas para cobertura dos mesmos. No entanto, por se tratar de um processo latente, a volatilidade condicional não é facilmente estimada por meio das ferramentas convencionais, que compreenderiam, a título de exemplo, os estimadores de máxima verossimilhança. Como resposta, a literatura apresenta o desenvolvimento de caminhos distintos quanto do tratamento dado ao processo de volatilidade assumido.

Entre as abordagens idealizadas, uma das classes que se destacam é a família de modelos ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), proposta originalmente por Engle (1982) e generalizada (GARCH - *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) por Bollerslev (1986). Nesses modelos, o processo latente de volatilidade pode ser aproximado por uma estrutura dependente apenas de processos observáveis, sob a qual a variância é posta como uma função determinística de seus valores passados e quadrado dos resíduos de retorno. Essa seria uma forma de, efetivamente, contornar o problema de estimação imposto pela presença de variáveis latentes, podendo-se recorrer a máxima verossimilhança, já que são levados em conta apenas componentes observáveis no período corrente.

Outra classe relevante de modelos é a definida pelo tratamento da volatilidade condicional como um processo estocástico, denominados usualmente como modelos de volatilidade estocástica (SV). Introduzida por Taylor (1986), em uma representação não-linear em espaço de estados com a log-variância dada por um processo AR(1), esta abordagem traz algumas vantagens, por permitir que sejam incorporados facilmente fatos estilizados de séries de tempo em finanças, tais como retornos não-normais e *clusters* de volatilidade, além de abdicar da hipótese de determinismo sobre a volatilidade, conferindo maior generalidade. Tal formulação baseia-se no método dos momentos, que admite a estimação do vetor de parâmetros do modelo, mas não do processo de volatilidade latente em si, que pode ser explorado por meio de uma gama de métodos frequentistas e bayesianos, criados com esta finalidade.

Dentro da perspectiva frequentista, o principal desenvolvimento se deu em torno do método de quasi-máxima verossimilhança aliado à decomposição do erro de previsão via Filtro de Kalman, proposto de forma independente por Nelson (1988) e Harvey, Ruiz e

Shephard (1994). A estimação parte de uma linearização do modelo, fazendo com que seja uma aproximação computacionalmente pouco complexa, o que seria um atrativo, não fosse a evidência, encontrada por Andersen e Sorensen (1996), de que essa linearização introduz um viés nas estimativas. De forma alternativa, as técnicas de estimação bayesianas se mostram especialmente interessantes, em razão de processos latentes poderem ser tratados como componentes adicionais do modelo, ou seja, como parâmetros adicionais a serem estimados, o que viabiliza o emprego de métodos tradicionais de inferência bayesiana sem grandes complicações. Como exemplos, tem-se os trabalhos de Kim e Shephard (1998) e, mais recentemente, Kastner e Frühwirth-Schnatter (2014), em que são usados algoritmos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

De um ponto de vista aplicado, no entanto, metodologias baseadas em simulação, como MCMC, podem trazer consigo alguns obstáculos computacionais, à medida em que o volume de dados envolvido na estimação aumentam, tanto na dimensionalidade, quanto no número de observações. Esses algoritmos estão sujeitos a problemas de convergência de cadeia condicionados por tamanho de amostra e número de parâmetros, tal qual mencionado por Rajaratnam e Sparks (2015), além de um quadro de ineficiência computacional representado pela natureza iterativa e não-paralelizável do método, que se traduz um tempo maior de execução. Dessa forma, modelos de volatilidade estocástica, que impõem desafios à parte, podem se tornar pouco atraentes ou até mesmo computacionalmente proibitivos em face de séries muito longas ou até mesmo de formulações multivariadas.

Martino et al. (2011) propõem, nesse sentido, uma forma alternativa de se realizar estimação bayesiana de modelos de volatilidade estocástica, utilizando aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA). Por meio dessa estrutura, é possível estimar parâmetros e variáveis latentes, desde que o modelo possa ser aproximado por um campo aleatório de Markov gaussiano. Chaim e Laurini (2019) frisam que, tendo em vista que o método INLA parte de uma aproximação analítica, este não requer que sejam realizados procedimentos de simulação, não sendo afetado, portanto, pela problemática em torno da convergência de cadeias. Não obstante, pode-se, conjuntamente a INLA, implementar matrizes esparsas na representação do campo aleatório de Markov gaussiano, conferindo velocidade e eficiência nas operações computadas, em um algoritmo que admite paralelização. Essas boas propriedades se somam aos achados de Ehlers e Zavallos (2015), que indicam um ganho de precisão atribuído ao método, sobretudo no cálculo de medidas derivadas de volatilidade condicional estimadas como *value-at-risk*.

Ainda assim, a literatura que dispõe dessa metodologia tem se estabelecido na análise do caso univariado, isto é, em que a formulação em espaço de estados incorpora um único ativo na análise. A estimação de modelos multivariados de volatilidade estocástica via aproximações de Laplace aninhadas integradas é, por conseguinte, uma extensão natural a ser explorada, tendo em vista que trabalhos como o de Martino et al. (2011)

ensaíam apenas o caso bivariado. A questão da dimensionalidade do problema traz implicações relevantes sobre o uso de INLA para estes modelos, no entanto. É possível, como observado pela autora, que o ganho informacional (maior volume de dados e dimensão adicional) seja acompanhado de vertiginoso aumento do tempo de estimação, frustrando o propósito de se adotar um ferramental que mira justamente em ser eficiente.

Uma saída possível é a busca por uma parametrização mais parcimoniosa, que permita que o número de parâmetros a serem estimados não cresça demais conforme o número de séries analisadas também aumenta. Os modelos fatoriais cumprem exatamente esse papel, como observam Asai, McAleer e Yu (2006). Os autores citam que o modelo SV multivariado mais básico<sup>1</sup>, para um número  $m$  de séries, implica na estimação de  $2m + m^2$  parâmetros. Em contrapartida, representações em modelos com apenas um fator latente podem chegar a uma relação linear entre  $m$  e a quantidade de parâmetros, mitigando o problema da chamada “maldição da dimensionalidade”.

Isto posto, o presente trabalho busca estabelecer um *framework* factível para estimação de modelos de volatilidade estocástica no caso multivariado, tratando de uma generalização para um modelo de fatores comuns. Referente à aplicação, serão consideradas cotações diárias de índices de bolsas de valores para diversas regiões do mundo. Mais especificamente, pretende-se estimar padrões de dependência de volatilidade para as séries estipuladas, verificando possíveis ganhos de precisão no comparativo com formulações univariadas e ganhos computacionais (performance) no tocante aos amplamente difundidos algoritmos de MCMC.

Finalmente, o trabalho encontra-se estruturado em cinco capítulos, incluindo esta introdução. O capítulo seguinte consta da revisão e discussão da literatura acerca da estimação de modelos de volatilidade estocástica via INLA, além de abordar aspectos do caso multivariado no contexto de modelagem por fatores. No terceiro capítulo, a metodologia a ser empregada é apresentada em mais detalhes, juntamente às séries que fundamentarão a avaliação dos modelos propostos. Os resultados obtidos são expostos no quarto capítulo, que antecede um capítulo de conclusão, no qual são sintetizados os principais achados.

---

<sup>1</sup> Autores seguem formulação proposta por Harvey, Ruiz e Shephard (1994).

## 2 Revisão da literatura

O capítulo a seguir se propõe a fazer um balanço dos trabalhos mais relevantes que integram a literatura acerca de inferência bayesiana aproximada para modelos de volatilidade estocástica (SV) e de modelagem por fatores. Em um primeiro momento, trata-se da estimação de modelos SV, partindo dos primeiros desenvolvimentos no campo, para então abordar a introdução de técnicas bayesianas e do método de aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA). Por fim, é apresentada uma revisão de publicações a respeito de modelos multivariados e fatoriais.

### 2.1 Modelos de volatilidade estocástica

De forma geral, a literatura a respeito do tema de volatilidade estocástica, principalmente no que tange aos seus fundamentos e preceitos teóricos, está razoavelmente consolidada, com avanços recentes vinculados a métodos de estimação. O trabalho de Taylor (1986) introduz o conceito de volatilidade estocástica assumindo retornos log-normais e um processo latente de (log-)volatilidade, cuja natureza não-observável levou, em um primeiro momento, a uma busca por desenvolvimentos metodológicos que superassem a inadequação de técnicas tradicionais, como máxima verossimilhança. Nesse sentido, técnicas de inferência bayesiana, em associação a MCMC, se popularizaram, fomentando assim também uma literatura específica voltada para a proposição de alternativas mais eficientes - entre elas, o uso de aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA), de autoria de Rue, Martino e Chopin (2009) e inserida no contexto de volatilidade estocástica por Martino et al. (2011). Tal *framework* se mostra ao menos tão preciso quanto o de MCMC, segundo evidências colhidas por Ehlers e Zavallos (2015), mas com vantagens do ponto de vista da eficiência na estimação.

Taylor (1986) estipula, em sua obra, um modelo padrão de volatilidade estocástica, servindo como marco teórico inicial. Partindo de uma sequência  $\{r_t\}_{t=1}^n$  de retornos, pode-se representar o modelo da seguinte forma:

$$r_t = \exp\{h_t/2\}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1) \quad (2.1)$$

$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + z_t, \quad z_t \sim N(0, [(1 - \phi^2)\tau_h]^{-1}) \quad (2.2)$$

A log-volatilidade,  $h_t$ , é assumida um processo autorregressivo estacionário de primeira ordem, cuja dinâmica é configurada pelos parâmetros  $\mu$  (média de longo prazo),  $\phi$  (relacionado à persistência autorregressiva) e  $\tau_h$  (precisão marginal da log-variância de  $h_t$ ).

Um problema que surge de imediato é a não-observação da log-volatilidade. Seguindo sua formulação, Taylor (1986) sugere tomar quaisquer dois momentos amostrais para estimar  $\mu$ ,  $\phi$  e  $\tau$  ( $= \tau_h[1 - \phi^2]$ ), mas não  $h_t$ , fazendo menção à impossibilidade de se utilizar um estimador de máxima verossimilhança, posto que seria necessário lidar com uma integral múltipla com dimensão igual ao tamanho da amostra. Harvey (1989) propõe, então, uma abordagem frequentista para resolver a questão da estimação da variável latente no modelo, por meio de um estimador de quase-verossimilhança (*quasi-maximum likelihood*) baseado em decomposição do erro de previsão via Filtro de Kalman. Para tal, lineariza-se o quadrado dos log-retornos, realizando uma decomposição em média mais um processo autorregressivo de primeira ordem, impondo uma representação linear de espaço de estados para o modelo.

Alternativamente, Sandmann e Koopman (1998) discutem uma metodologia que substitui quase-verossimilhança por uma versão simulada, denominada *Monte Carlo Likelihood* (MCL), que também permite aplicação do Filtro de Kalman na decomposição do erro de previsão. Andersen, Sorensen e Chung (1999), por outro lado, retomam a classe de estimadores que visa explorar os momentos da amostra, recorrendo ao Método dos Momentos Eficiente (EMM), em que a derivada da função de log-verossimilhança (vetor *score*) provê as condições de momentos. No estudo dos autores, o estimador EMM alcança a eficiência de estimadores de máxima verossimilhança em grandes amostras.

## 2.2 Estimação Bayesiana e aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA)

Paralelo aos desenvolvimentos de cunho frequentista, diversas técnicas bayesianas de estimação foram propostas, fazendo-se valer do fato de que métodos convencionais de inferência bayesiana são facilmente aplicáveis no caso de modelos com variáveis latentes, que podem ser tratadas como parâmetros adicionais. Polson, Rossi e Jacquier (1994) abordam a questão da volatilidade latente explorando diretamente sua estrutura, recorrendo a algoritmos (*Metropolis-Hastings*) de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) para amostragem da distribuição posterior. As estimações obtidas por MCMC, mesmo para modelos simples de volatilidade estocástica, são capazes de obter ajuste aos dados tão bons quanto modelos altamente parametrizados da família GARCH, como exposto por Kim e Shephard (1998). No entanto, os autores também se deparam com problemas característicos de MCMC, como convergência lenta da cadeia, em função dos componentes da variável de volatilidade latente serem altamente correlacionados.

Além de possíveis inconvenientes causados por falhas ou demoras de convergência, verifica-se também que MCMC pode acarretar em ineficiências associadas à exigência computacional do método para amostras muito grandes. Martino et al. (2011) aventam, como



alternativa, a estimação de modelos de volatilidade estocástica por intermédio de aproximações de Laplace aninhadas integradas (INLA), uma metodologia introduzida originalmente por Rue, Martino e Chopin (2009). Desde que os modelos possam ser aproximados ou representados por um Campo Aleatório de Markov Gaussiano (GMRF), parâmetros e fatores latentes podem ser estimados, com a vantagem de se explorar cálculos analíticos (evitando simulações) em matrizes esparsas, com operações facilmente paralelizáveis.

Os autores definem GMRF como uma variável aleatória Gaussiana  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  com propriedades markovianas, sob as quais, para alguns  $i \neq j$ 's,  $x_i$  e  $x_j$  são independentes condicionais a  $\mathbf{x}_{-ij}$ . Tais propriedades se refletem na matriz de precisão (covariância inversa)  $\mathbf{Q}$ , de modo que  $Q_{ij} = 0$  se, e somente se,  $x_i$  e  $x_j$  são independentes condicionais a  $\mathbf{x}_{-ij}$ <sup>1</sup>. Assim, se o valor esperado de  $\mathbf{x}$  é  $\mu$ , a densidade de  $\mathbf{x}$  seria descrita como:

$$\pi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mu)\right\} \quad (2.3)$$

Como mostrado por Rue, Martino e Chopin (2009),  $\mathbf{Q}$  é esparsa, já que, na maioria dos casos, apenas  $\mathcal{O}(n)$  das  $n^2$  entradas dessa matriz são diferentes de zero, ou seja, não-nulas. Também é demonstrado que  $\mathbf{Q}$  pode ser fatorada como  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$ , em que  $\mathbf{L}$  é o triângulo inferior de Cholesky, que herda a esparsidade da matriz de precisão. A partir disso, o cômputo de variâncias marginais pode ser realizado de maneira eficiente usando a matriz  $\mathbf{L}$ :

$$\Sigma_{ij} = \frac{\delta_{ij}^2}{L_{ii}} - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{k=i+1}^n L_{ki} \Sigma_{kj}, \quad j \geq i, \quad i = n, \dots, 1 \quad (2.4)$$

onde  $\Sigma (= \mathbf{Q}^{-1})$  é a matriz de covariância, com  $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  caso contrário. Os autores apontam que, com essa equação, os custos computacionais podem ser reduzidos para algo próximo de  $\mathcal{O}\{n \log(n)^2\}$ .

Partindo então do modelo padrão de volatilidade estocástica, que compreende as equações de  $r_t$  e  $h_t$ , a proposição de Martino et al. (2011) pode ser replicada atribuindo ao parâmetro de média  $\mu$  uma distribuição *a priori* gaussiana com média zero e variância conhecida, de modo que o modelo padrão pode ser entendido como um modelo gaussiano latente em que o campo latente  $\mathbf{x}$  é dado por:

$$\mathbf{x} = \{h_1, \dots, h_n, \mu\} \sim N(0, \mathbf{Q}^{-1}(\theta_1)), \quad (2.5)$$

em que  $\theta_1 = \{\tau_h, \phi\}$  são parâmetros por trás da volatilidade. O campo gaussiano  $n$ -dimensional latente determinado por  $|\mathbf{x}|$  é parcialmente observado por meio do conjunto de dados condicionalmente independentes  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_{n_d}\}$ , em que  $n_d$  denota o número de observações, com verossimilhança

<sup>1</sup> O vetor  $\mathbf{x}_{-i}$  é denotado como sendo o vetor  $\mathbf{x}$  menos o seu  $i$ -ésimo elemento.

$$\pi(\mathbf{r}|\mathbf{x}, \theta_2) = \prod_{t=1}^{n_d} \pi(r_t|\mathbf{h}, \theta_2), \quad (2.6)$$

em que  $\theta_2$  são parâmetros do processo  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ . Considerando  $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ , vale então que modelos de volatilidade estocástica podem ser estimados calculando as distribuições marginais

$$\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r}) \propto \pi(\theta)\pi(\mathbf{x}|\theta) \prod_{t=1}^n \pi(r_t|h_t, \theta). \quad (2.7)$$

No entanto, como comentado por Martino et al. (2011), essa equação para as distribuições marginais não possui forma fechada, tendo em vista que a verossimilhança não é gaussiana, o que prejudica qualquer inferência sobre  $\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r})$ . A abordagem INLA pode então ser empregada no sentido de realizar inferência sobre marginais de  $\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r})$ , permitindo aproximações acuradas para  $\pi(h_t|\mathbf{r})$ ,  $\pi(\mu|\mathbf{r})$  e  $\pi(\theta_j|\mathbf{r})$ .

Os autores colocam INLA como um método computacionalmente eficiente de computar-se tais distribuições marginais, em virtude de sua aproximação gaussiana para densidades dadas pela forma

$$\pi(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \theta) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \sum g_t(h_t)\right\}, \quad (2.8)$$

em que  $g_t(h_t) = \log \pi(r_t|h_t, \theta)$ . No contexto dos modelos de volatilidade estocástica e das formulações discutidas pelos autores, a matriz de precisão  $\mathbf{Q}$  é tridiagonal, além de ter a última linha e a última coluna com valores não-nulos. Ainda assim, a grande maioria das entradas dessa matriz continua sendo constituída de zeros, de modo que  $\mathbf{Q}$  é esparsa.

O algoritmo por trás do método envolve um arranjo em três etapas, conforme listado em Martino et al. (2011). No primeiro passo, é construída uma aproximação para  $\pi(\theta|\mathbf{r})$ , usando como ponto de partida a identidade:

$$\pi(\theta|\mathbf{r}) = \frac{\pi(\mathbf{x}, \theta|\mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})} \propto \frac{\pi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})}, \quad (2.9)$$

em que  $\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})$  é aproximado usando a aproximação gaussiana para as densidades, tal qual exposta anteriormente. Assim, tem-se:

$$\tilde{\pi}(\theta|\mathbf{r}) = K_2 \left. \frac{\pi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r})}{\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(\theta)} \quad (2.10)$$

em que  $K_2$  é uma constante de normalização<sup>2</sup>,  $\tilde{\pi}_G$  é a aproximação gaussiana para  $\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})$  e  $\mathbf{x}^*(\theta)$  é a moda de  $\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})$ .

<sup>2</sup> Ver Martino et al. (2011).

Em seguida, deve-se encontrar uma aproximação para  $\pi(x_t|\theta, \mathbf{r})$ , utilizando-se, para tanto, outra identidade:

$$\pi(x_t|\theta, \mathbf{r}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\theta, \mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}_{-t}|x_t, \theta, \mathbf{r})} \propto \frac{\pi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r})}{\pi(\mathbf{x}_{-t}|x_t, \theta, \mathbf{r})}, \quad (2.11)$$

sendo que  $\mathbf{x}_{-t}$  significa que o elemento  $t$  do vetor é removido. A estratégia de aproximação usada no passo anterior aqui é computacionalmente ineficiente, de modo que Rue, Martino e Chopin (2009) sugerem o cômputo de uma versão simplificada ( $\tilde{\pi}_S$ ) de  $\tilde{\pi}(x_t|\theta, \mathbf{r})$ , com base em uma expansão de seu logaritmo. Dessa forma, vale que:

$$\log \tilde{\pi}_S(x_t|\theta, \mathbf{r}) = c - \frac{1}{2}x_t^2 + \gamma_t^{(1)}(\theta)x_t + \frac{1}{6}x_t^3 + \gamma_t^{(3)}(\theta) + \dots, \quad (2.12)$$

em que  $\gamma_t^{(1)}$  e  $\gamma_t^{(3)}$  são termos em uma expansão de Taylor e  $c$  é uma constante. Os autores mencionam, contudo, que a equação não define uma densidade probabilística de fato. Em razão disso, ajusta-se o logaritmo de uma distribuição normal assimétrica (*skew-normal*) à expansão de Taylor.

Em uma última etapa, os autores mostram como calcular uma aproximação para  $\pi(x_t|\mathbf{r})$ , com base nos resultados encontrados nos passos anteriores. Integrando numericamente, tem-se que:

$$\tilde{\pi}(x_t|\mathbf{r}) = \sum_k \tilde{\pi}(x_t|\theta^k, \mathbf{r})\tilde{\pi}(\theta^k|\mathbf{r})\Delta_k, \quad (2.13)$$

em que  $\theta^k$  denota um conjunto de valores selecionados de  $\theta$  e  $\Delta_k$  remete aos pesos, que seriam todos iguais a 1 no caso de pontos equidistantes. Com isso, pode-se realizar inferência bayesiana aproximada de forma eficiente no contexto de modelos de volatilidade estocástica.

Naturalmente, comparações entre INLA e outros métodos de estimação são realizadas para o caso univariado. Em linhas gerais, parece haver um consenso no que tange aos ganhos de velocidade, medida explicitamente em Rue, Martino e Chopin (2009) e Chaim e Laurini (2019). No primeiro trabalho, contando o tempo de compilação do código, INLA foi algo em torno de 8 vezes mais rápido em cada estimação realizada, quando comparado com MCMC. No segundo, é levado em consideração o tempo de cômputo para todas as aproximações de Laplace (e para cada experimento), que foi de 0.08s *versus* o tempo para se obter as amostras de MCMC, da ordem de 25s, constituindo, portanto, uma diferença considerável. Do ponto de vista da precisão das estimativas obtidas, Ehlers e Zevallos (2015) encontram ganhos atribuídos ao método INLA, que foi utilizado no cálculo de uma métrica de *value-at-risk* e comparado com um estimador de quasi-máxima verossimilhança. Na mesma linha, Chaim e Laurini (2019) investigam a acurácia

do método para séries com memória longa, dessa vez em relação a técnicas tradicionais de MCMC, constatando um desempenho comparável entre ambos.

Por fim, é possível notar também o surgimento de uma literatura voltada para o aspecto prático de aplicações da metodologia INLA, com destaque para implementações na linguagem *R*, tal como a biblioteca *R-INLA*<sup>3</sup>. Entre as contribuições, Ruiz-Cárdenas, Krainski e Rue (2012) estabelecem uma abordagem computacional generalista para realização de inferência bayesiana pelo *R-INLA*, estendendo a classe de modelos dinâmicos ao alcance da ferramenta. Já Martins et al. (2013) listam algumas das funcionalidades e recursos incorporados ao pacote desde suas primeiras versões. No contexto específico dos modelos de volatilidade estocástica, publicações como a de Ravishanker, Raman e Soyer (2022) trazem guias práticos de estimação e códigos para execução no *R*, abrangendo modelagem tanto com erros gaussianos, quanto com distribuições de caudas pesadas, como *t* de Student.

## 2.3 Modelos multivariados e fatoriais

Desde as primeiras formulações de modelos de volatilidade estocástica, levantadas por Taylor (1986), diversos autores puderam contribuir para que a literatura acerca do tema se expandisse no sentido de uma maior variedade de especificações e da importante extensão para a análise multivariada do comportamento da volatilidade condicional. A começar pelo trabalho de Harvey, Ruiz e Shephard (1994), a modelagem multivariada se difunde e ganha novos desenvolvimentos, incorporando formas funcionais adequadas a determinados fatos estilizados e trazendo abordagens mais eficientes de estimação ou parametrização do problema. Em meio a estes desdobramentos, a noção de análise fatorial é inserida no contexto de modelos multivariados de volatilidade estocástica, sendo explorada com maior afinco primeiramente por Jacquier, Polson e Rossi (1995), que propõe um modelo aditivo de fatores com o intuito de mitigar o custo imposto pela alta dimensionalidade associada à modelagem multivariada da volatilidade latente.

Em seu artigo, Harvey, Ruiz e Shephard (1994) estabelecem uma forma básica para o que os autores chamam de uma generalização multivariada para modelos de variância estocástica. Partindo da representação multivariada para modelos ARCH e suas restrições impostas, tal qual proposto por Bollerslev (1990), tem-se o seguinte conjunto de equações descrevendo o modelo:

$$r_{it} = \varepsilon_{it}(\exp\{h_{it}\})^{1/2}, \quad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T \quad (2.14)$$

$$h_{it} = \gamma_i + \varphi_i h_{it-1} + z_{it} \quad (2.15)$$

<sup>3</sup> <<https://www.r-inla.org/>>

em que  $r_{it}$  é a observação da  $i$ -ésima série no período  $t$  e os vetores  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{Nt})'$  e  $z_t = (z_{1t}, \dots, z_{Nt})'$  de erros seguem uma distribuição normal multivariada com média zero e matrizes de covariância  $\Sigma_\varepsilon$  e  $\Sigma_\eta$ , respectivamente. É assumido ainda que  $\Sigma_\varepsilon$  tem cada elemento de sua diagonal principal igual a 1 e as suas demais entradas denotadas por  $\rho_{ij}$ . Para a estimação, os autores adotam uma estratégia frequentista, por meio de um estimador de quase-verossimilhança e filtro de Kalman.

Sob a perspectiva bayesiana, os trabalhos realizados por Martino (2007) e Martino et al. (2011) teorizam o que seria um esquema de estimação baseado na metodologia INLA para o caso multivariado. Em oposição à formulação univariada, adotada na grande maioria dos trabalhos em que INLA é empregado, o modelo multivariado seria capaz de capturar uma variedade maior de características dos dados, como, por exemplo, o efeito *spillover* da volatilidade, em que o conhecimento a respeito de um ativo poderia ajudar a fazer previsões sobre outro. Os autores demonstram apenas uma extensão bivariada, que pode ser escrita como

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{\Omega}_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{h}_t = \nu + \mathbf{\Phi}(\mathbf{h}_{t-1} - \nu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_\eta) \quad (2.17)$$

em que  $\mathbf{r}_t = \{r_{t1}, r_{t2}\}$  são os log-retornos observados em  $t$ ,  $\varepsilon_t = \{\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}\}$  e  $\eta_t = \{\eta_{t1}, \eta_{t2}\}$  são termos de ruído bivariados e  $\mathbf{h}_t = \{h_{t1}, h_{t2}\}$  são as volatilidades latentes. Além disso, tem-se que

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_t = \begin{pmatrix} \exp\{h_{1t}/2\} & 0 \\ 0 & \exp\{h_{2t}/2\} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\Sigma_\eta = \begin{pmatrix} 1/\tau_{\eta_1} & \rho_\eta/\sqrt{\tau_{\eta_1}\tau_{\eta_2}} \\ \rho_\eta/\sqrt{\tau_{\eta_1}\tau_{\eta_2}} & 1/\tau_{\eta_2} \end{pmatrix} \quad \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \rho_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Uma generalização para ordens mais elevadas foi apresentada por Shapovalova (2021), que avalia que essa metodologia pode perder alguns de seus benefícios em termos de eficiência computacional, pois especificações multivariadas, nesse caso, não permitiriam que fossem exploradas matrizes esparsas.

Para além do modelo básico, uma gama de formas funcionais e especificações é apresentada, assumindo-se diferentes hipóteses sobre correlação entre volatilidades ou a respeito de restrições impostas e parametrização do problema. Asai, McAleer e Yu (2006) fazem um balanço da literatura pertinente, acompanhando variantes do modelo multivariado de volatilidade estocástica (MSV) e explorando o *trade-off* entre flexibilidade de especificação e custo computacional em decorrência de aumento da dimensionalidade. Os autores identificam e categorizam estas variantes em quatro grupos: modelos assimétri-

cos, modelos de correlação com variação no tempo, modelos de fatores e, finalmente, os modelos de especificações alternativas.

A primeira categoria de modelos MSV busca incorporar assimetrias observadas no comportamento dos retornos de ativos, isto é, a tendência de que variações negativas e positivas tenham impactos distintos sobre a volatilidade da série, especialmente no tocante ao conceito de efeito de alavanca, tal qual identificado em Black (1976). O fenômeno, que trata de uma correlação negativa entre volatilidade e retorno passado, foi trazido para o contexto de SV por Harvey e Shephard (1996) e explorado em termos de modelagem multivariada por Danielsson (1998), que parte do seguinte modelo para os retornos:

$$\mathbf{y}_t = \Psi_t \epsilon_t, \quad (2.20)$$

onde  $\Psi_t' \Psi_t = H_t$  é uma matriz  $K \times K$  de volatilidades e  $\epsilon_t$  é um vetor normal-multivariado de choques. Também vale que:

$$H_{t,ij} = \sqrt{h_{t,i}} \quad \forall i = j, \quad H_{t,ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (2.21)$$

$$h_{t,i} = \exp[\omega_i + \delta_i \log h_{t-1,i} + v_i \eta_{t,i}], \quad i = 1, \dots, K \quad (2.22)$$

em que a matriz de covariância do termo de choques de volatilidade, representada por  $\mathcal{L}$ , tem cada entrada de sua diagonal principal igual a 1 e todas as demais entradas dadas por parâmetros  $\xi_{ij}$ , fazendo com que o modelo tenha, ao todo,  $K^2 + 3K$  parâmetros a serem estimados. O autor nota, ainda, que na ausência de efeitos de alavanca, teria-se  $E(\epsilon_t \eta_t') = \mathbf{0}$ . Diferente de Harvey e Shephard (1996), aqui o estimador empregado é da classe dos estimadores de máxima verossimilhança simulada, fazendo uso de métodos de Monte Carlo para integração.

Um segundo grupo de modelos MSV visa capturar correlações condicionais sujeitas a variações no tempo, relaxando-se a hipótese de correlações constantes assumida no modelo básico de Harvey, Ruiz e Shephard (1994). Uma das formas de se fazer isso, conforme proposto por Yu e Meyer (2006), é a utilização de uma transformada de Fisher para o parâmetro de correlação. Em seu modelo bivariado os autores definem:

$$\rho_t = \frac{\exp(q_t) - 1}{\exp(q_t) + 1} \quad (2.23)$$

$$q_{t+1} = \Psi_0 + \Psi(q_t - \Psi_0) + \sigma_\rho v_t, \quad v_t \sim N(0, 1), \quad (2.24)$$

com  $q_0 = \Psi_0$ . Aqui, o parâmetro  $\rho_t$  se refere ao coeficiente de correlação, que é construído de modo que  $-1 < \rho_t < 1$ . Ainda assim, os autores reconhecem a dificuldade de generalização do modelo para o caso em que o número de séries na análise é maior do que 2. Como possível solução, sugerem um modelo estimado usando técnicas de Monte Carlo

via Cadeias de Markov (MCMC), no qual adota-se uma sequência de matrizes  $\{Q_t\}$  da seguinte maneira:

$$Q_{t+1} = S + B \circ (Q_t - S) + A \circ (v_t v_t' - S) = (\iota \iota' - A - B) \circ S + B \circ Q_t + A \circ v_t v_t', \quad (2.25)$$

sendo que  $\iota$  é um vetor com todos os seus componentes iguais a 1,  $v_t \sim N(0, I)$  e “ $\circ$ ” denota o produto de Hadamard<sup>4</sup>. Finalmente, da matriz inversa  $Q_t^{-1}$  e da matriz  $Q_t^{-\frac{1}{2}}$  advinda da decomposição de Cholesky ( $Q_t^{-\frac{1}{2}} [Q_t^{-\frac{1}{2}}]' = Q_t^{-1}$ ), chega-se à matriz de covariância para o termo de choque sobre os retornos, representada como:

$$\Sigma_{\varepsilon,t} = \text{diag}(Q_t^{-\frac{1}{2}}) Q_t \text{diag}(Q_t^{-\frac{1}{2}}). \quad (2.26)$$

Segue que  $\Sigma_{\varepsilon,t}$  tem todos os seus elementos no intervalo  $[-1, 1]$ , com entradas da diagonal principal iguais a 1 e constituindo uma matriz positiva semidefinida, o que indica que  $\Sigma_{\varepsilon,t}$  é uma matriz de correlações devidamente definida, conforme apontado por Yu e Meyer (2006).

Até aqui, as categorias discutidas são pautadas, de certo modo, mais por ganhos de flexibilidade para a modelagem e menos pelo aspecto de avanços na eficiência computacional associada à estimação dos modelos. Os modelos de fatores, contudo, se propõem justamente a oferecer formulações mais parcimoniosas no que diz respeito ao número de parâmetros presente no problema. Asai, McAleer e Yu (2006) separam esta categoria de modelos MSV em dois tipos: os modelos multiplicativos e os aditivos. Os autores relatam que a modelagem fatorial, em virtude de sua capacidade de capturar características comuns em retornos de ativos, contribuindo para que ganhasse um espaço maior na literatura.

O primeiro modelo aditivo de fatores é encontrado em artigo de Harvey, Ruiz e Shephard (1994), posteriormente sendo incrementado por Jacquier, Polson e Rossi (1995), que parte de uma estrutura fatorial para a matriz de covariância e de um modelo com  $q$  ativos e  $k$  fatores. No trabalho dos autores, apresenta-se o problema da seguinte forma:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Delta} \mathbf{F}_t + \Omega^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (2.27)$$

$$\mathbf{F}_t \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t) \quad (2.28)$$

$$\log h_{it} = \alpha_i + \delta_i \log h_{i,t-1} + \sigma_{iv} \mathbf{v}_t, \quad (2.29)$$

em que  $\mathbf{H}_t = \text{diag}(h_{it})$ ,  $\mathbf{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_k)$  é uma matriz de cargas fatoriais e o termo de erros  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  segue uma distribuição normal com médias zero e matriz de variância-covariância

<sup>4</sup> O produto de Hadamard é obtido pela multiplicação elemento a elemento das matrizes, que devem ter dimensões iguais.

identidade de ordem  $q$ . Os autores estimam o modelo por intermédio de técnicas bayesianas, em que a distribuição *a posteriori*  $\pi(\mathbf{F}, \mathbf{\Delta}, \omega | \mathbf{y})$  é quebrada em distribuições condicionais para que seja então empregado um algoritmo MCMC de Metropolis-Hastings de amostragem.

Em um comparativo com o modelo MSV básico de Harvey, Ruiz e Shephard (1994), o modelo aditivo de fatores se destaca pelo fato de o número de parâmetros a ser estimado crescer apenas linearmente conforme são introduzidas mais séries de retornos na análise, isto é, conforme a dimensão aumenta. De fato, Asai, McAleer e Yu (2006) mostram que, para o caso unifatorial, são  $5m - 1$  parâmetros ao todo, sendo  $m$  o número de séries. Com isso, torna-se menos computacionalmente onerosa a estimação de modelos multivariados de volatilidade estocástica baseada em métodos que envolvem simulação e convergência de cadeias.

Outra vertente de modelos fatoriais que caminha no mesmo sentido é a classe de modelos multiplicativos, cuja inspiração pode ser atribuída ao trabalho de Quintana e West (1987). De acordo com Asai, McAleer e Yu (2006), a classe de modelos MSV consiste na separação dos log-retornos em dois componentes, sendo um vetor de ruídos e um fator comum. O modelo pode ser caracterizado pelas equações:

$$\mathbf{r}_t = \exp\{\mathbf{h}_t/2\}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_\varepsilon) \quad (2.30)$$

$$\mathbf{h}_t = \mu + \phi(\mathbf{h}_{t-1} - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2), \quad (2.31)$$

em que  $\phi$  é um parâmetro de persistência do processo autorregressivo de volatilidade comum às séries estimadas. Nessa formulação unifatorial, há eliminação de parte do fardo computacional, posto que o número de parâmetros é menor em relação a uma formulação multivariada padrão, mas ao custo de tomar-se como hipótese uma correlação perfeita entre as volatilidades dos ativos considerados, que é um pressuposto forte.

Uma alternativa que mira na generalização multifatorial desse modelo é encontrada no artigo de Ray e Tsay (2000), cujo objetivo é analisar a dependência de longo alcance entre as volatilidades. Os autores definem um processo de volatilidade estocástica com memória longa como:

$$r_{it} = \sigma_{it}\Psi_{it} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{it} = \sigma_i \exp\left(\frac{\lambda_i v_t}{2}\right), \quad \sigma_i > 0, \quad (2.33)$$

em que  $\Psi_{it}$  é uma variável aleatória i.i.d. com média zero e variância igual a 1 e  $v_t$  é um processo fracionalmente integrado  $I(d)$ , com  $0 < d < \frac{1}{2}$ . Segundo os autores, este processo tomaria uma forma tal como  $(1 - L)^d v_t = \eta_t$ , sendo  $\eta_t$  um vetor de ruído branco e  $L$  o operador de defasagem. Assim, o processo com dependência de longo alcance dado



pela sequência  $\{v_t\}$  fica sujeito ao componente (fator)  $\lambda_i$ , que deve ser uma constante não-nula e respeitar  $i \leq m$ , onde  $m$  é, mais uma vez, o número de séries na análise.

Faz-se menção, ainda, aos modelos de especificações alternativas, como são chamados por Asai, McAleer e Yu (2006). Os autores citam quatro formulações alternativas para modelos MSV, baseadas em transformação exponencial de matrizes, decomposição de Cholesky, processo autorregressivo de Wishart e na variação (*range*) observada. Nos dois primeiros casos, a motivação é garantir a construção de matrizes positivas definidas para a covariância  $\Sigma_t$ , por meio da atribuição de propriedades da exponencial de matrizes e da decomposição de Cholesky. Já para os modelos baseados na distribuição de Wishart, Philipov e Glickman (2006) apresentam um modelo com  $n$  séries de retornos de ativos e  $k$  fatores, com uma estrutura tal que:

$$\mathbf{y}_t | \mathbf{B}, \mathbf{f}_t, \boldsymbol{\Omega} \sim N(\mathbf{B}\mathbf{f}_t, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.34)$$

$$\mathbf{f}_t | \mathbf{V}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_t) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{V}_t^{-1} | \mathbf{V}_{t-1}^{-1}, \mathbf{A}, \nu, d \sim W(\nu, \mathbf{S}_{t-1}) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{S}_{t-1} = \frac{1}{\nu} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{V}_{t-1}^{-1})^d \mathbf{A}^{\frac{1}{2}'} \quad (2.37)$$

em que  $\mathbf{S}_{t-1}$  é parâmetro de escala do processo de Wishart,  $\mathbf{V}_t$  é uma matriz de volatilidades,  $\mathbf{A}$  é uma matriz simétrica e positiva definida,  $\mathbf{B}$  é a matriz de cargas para  $\mathbf{f}_t$ ,  $d$  é um parâmetro de persistência e  $\nu$  representa os graus de liberdade da distribuição de Wishart implicada. Os autores demonstram que a incorporação dessa distribuição permite às variâncias e correlações que variem no tempo, de modo estocástico, por meio da equação para  $\mathbf{S}_{t-1}$ .

### 3 Modelo proposto e aspectos metodológicos

Neste capítulo, serão apresentadas as formas funcionais propostas e procedimentos de estimação a serem empregados, além da sequência de testes que deve nortear o trabalho, permitindo que se verifiquem hipóteses pertinentes aos modelos de volatilidade condicional abordados.

Buscando atingir os objetivos determinados, de estabelecimento de um modo factível e eficiente de estimação para modelos multivariados de volatilidade estocástica, pretende-se realizar uma adaptação da metodologia baseada em aproximações de Laplace aninhadas integradas para o caso de formulações multifatoriais, ou seja, de modelos de fatores comuns. Em princípio, tais modelos podem ser construídos por meio de formulações próximas à do caso univariado, aumentando o número de equações de observação (estado) e incorporando estruturas de fatores latentes. A partir da estimação realizada sobre o conjunto de dados estabelecido, para tanto fazendo uso das capacidades do **R-INLA**, pode-se avaliar a possibilidade de ganhos computacionais associados ao método, tendo como comparativo métodos de MCMC, que constituem algumas das técnicas mais consagradas e amplamente difundidas na literatura.

#### 3.1 Base de comparação e ponto de partida

O trabalho parte de especificação similar à apresentada por Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017) e Hosszejni e Kastner (2021), que serve como uma base de comparação aqui. Os autores constroem uma estrutura para estimação eficiente, via MCMC, de um modelo com  $m$  séries e  $r$  fatores. São definidos:

$$\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{f}_t, \bar{\Sigma}_t \sim \mathcal{N}_m(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{f}_t, \bar{\Sigma}_t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}_t | \tilde{\Sigma}_t \sim \mathcal{N}_r(\mathbf{0}, \tilde{\Sigma}_t) \quad (3.2)$$

em que  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)'$  é um vetor com parâmetros de média,  $\mathbf{f}_t = (f_{1t}, \dots, f_{rt})'$  é um vetor de fatores e  $\boldsymbol{\Lambda}$  é uma matriz  $m \times r$  de cargas fatoriais. Também são consideradas as seguintes matrizes diagonais de covariância:

$$\bar{\Sigma}_t = \begin{pmatrix} \exp\{\bar{h}_{1t}\} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp\{\bar{h}_{mt}\} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Sigma}_t = \begin{pmatrix} \exp\{\tilde{h}_{1t}\} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \exp\{\tilde{h}_{rt}\} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\bar{h}_{it} \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}_i + \bar{\phi}_i(\bar{h}_{i,t-1} - \bar{\mu}_i), \bar{\sigma}_i^2), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

$$\tilde{h}_{jt} \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_j + \tilde{\phi}_j(\tilde{h}_{j,t-1} - \tilde{\mu}_j), \tilde{\sigma}_j^2), \quad j = 1, \dots, r. \quad (3.5)$$

Por uma razão de identificação com respeito à matriz de covariância variante no tempo<sup>1</sup> ( $\Sigma_t$ ), os autores impõem algumas restrições a parâmetros, como fixar o nível das log-variâncias em zero, ou seja,  $\tilde{\mu}_j = 0$  ( $j = 1, \dots, r$ ). Em adição, Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017) liberam a matriz de cargas  $\mathbf{\Lambda}$ , de modo a identificar apenas *a posteriori* trocas de sinais entre os elementos da mesma.

Para prosseguir com a estimação, os autores definem as distribuições *a priori* referentes aos parâmetros de média, variância não-observada e cargas fatoriais. No caso de  $\beta$ , são determinadas as distribuições normais convencionais, sendo  $\beta_j \sim N(\mathbf{b}_\beta, \mathbf{B}_\beta)$ , em que  $\mathbf{b}_\beta$  é um vetor de médias e  $\mathbf{B}_\beta$  é uma matriz de variância-covariância. Já no tocante aos parâmetros da variância latente, notadamente a persistência da série ( $\bar{\phi}_i$  e  $\tilde{\phi}_j$ ), adota-se uma *priori* do tipo  $(\phi + 1)/2 \sim \mathcal{B}(a_\phi, b_\phi)$ , isto é, a distribuição *beta*. A escolha é justificada pelo objetivo de evitar-se não-estacionariedade no processo de variância, o que implica em limitar  $\phi$  ao intervalo  $(-1, 1)$ . Segundo Hosszejni e Kastner (2021), uma vez que séries financeiras tendem a apresentar variâncias muito persistentes, com valores de  $\phi$  próximos a 1, é possível estabelecer uma distribuição *a priori* informativa ao escolher-se  $a_\phi \geq 5$  e  $b_\phi \approx 1.5$ , de tal forma que valores mais altos para  $\phi$  seriam mais prováveis.

Também são especificadas as distribuições para a volatilidade da log-variância,  $\sigma$ , e o parâmetro de inicialização da mesma,  $h_0$ . São empregadas, respectivamente, as distribuições *gama* e normal, de tal sorte que:

$$\sigma^2 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2B_\sigma}\right) \quad (3.6)$$

$$h_0 \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{(1 - \phi^2)}\right), \quad (3.7)$$

assumindo-se  $\mathbf{h}$  estacionário, hipótese que pode ser relaxada ao definir-se uma *priori* do tipo  $h_0 \sim N(\mu, B_h)$ , com  $B_h$  representando uma variância constante. Enfim, quanto da *priori* por trás da matriz de cargas  $\mathbf{\Lambda}$ , são adotadas distribuições gaussianas independentes e centradas em zero ( $\Lambda_{ij} \sim N[0, B_\Lambda]$ ), sendo ponto importante para a identificação da variância fatorial, como relatado por Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017).

A estimação dos parâmetros por amostragem via MCMC faz uso de um esquema de *Metropolis-Hastings*, acelerado pelo uso de estratégias de entrelaçamento da família *ASIS*<sup>2</sup>, visando a mitigação de problemas relacionados a lentidão de convergência de cadeia. A implementação prática pode ser realizada, na linguagem *R*, com a utilização do pacote **factorstochvol**<sup>3</sup>, que permite fácil configuração para inicialização de hiperparâmetros,

<sup>1</sup> Hosszejni e Kastner (2021) decompõem a matriz de covariância de modo que  $\Sigma_t = \Lambda \tilde{\Sigma}_t \Lambda' + \bar{\Sigma}_t$ .

<sup>2</sup> A abordagem, denominada de *Ancillarity-Sufficiency Interweaving Strategy*, é explorada em maiores detalhes por Kastner e Frühwirth-Schnatter (2014).

<sup>3</sup> Ver trabalho de Hosszejni e Kastner (2021).

estrutura de identificação dos modelos e ajustes sobre o amostrador empregado, além de possibilitar previsões dentro e fora da amostra. O amostrador é escrito em *C++*, conferindo maior velocidade de execução para a etapa de sorteios (*draws*), altamente intensiva em tempo decorrido para execução.

De um ponto de vista teórico, Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017) propõem um algoritmo para a amostragem por MCMC condicional em quatro passos, partindo da escolha de valores iniciais para  $\mu_i$ ,  $\phi_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{h}$ , e  $\mathbf{f}$ . Na primeira etapa, são estimadas as  $m$  variâncias idiossincráticas  $\mathbf{h}_{i,\bullet} = (h_{i0}, \dots, h_{iT})'$ , ainda no contexto univariado, juntamente aos parâmetros  $\mu_i$ ,  $\phi_i$  e  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). De maneira análoga, faz-se o mesmo para as  $r$  variâncias fatoriais, com seus parâmetros  $\phi_{m+j}$  e  $\sigma_{m+j}$ , levando em consideração  $j = 1, \dots, r$ . Em seguida, o segundo passo consiste em tomar amostras para cada linha  $\mathbf{\Lambda}_{i,\bullet}$  da matriz de cargas fatoriais, a partir de  $\mathbf{\Lambda}_{i,\bullet} | \mathbf{f}, \mathbf{y}_{i,\bullet}, \mathbf{h}_{i,\bullet}$ . Os autores observam que esta etapa envolve a estimação de  $m$  regressões multivariadas de dimensão  $\tilde{r}$  com  $T$  observações, sendo  $\tilde{r}$  o número de elementos não-restritos em  $\mathbf{\Lambda}_{i,\bullet}$ .

Após este primeiro processo de amostragem, são feitos novos sorteios (toma-se novas amostras) para cada um dos elementos da diagonal principal de  $\mathbf{\Lambda}$ , fazendo-se uso da abordagem de entrelaçamento à equação de estado para os fatores ou com relação às volatilidades latentes. No primeiro caso, dá-se o nome de “entrelaçamento superficial” (*shallow interweaving*), enquanto o segundo é chamado de “entrelaçamento profundo” (*deep interweaving*), de acordo com as definições expostas em Kastner e Frühwirth-Schnatter (2014). Ambas as estratégias visam acelerar a convergência das cadeias de Markov por meio de uma lógica de re-amostragem de parâmetros condicionados a variáveis latentes do modelo em uma versão reparametrizada do modelo, sendo o entrelaçamento profundo preferível na maioria dos casos. Por fim, o último passo do algoritmo envolve tomar amostras para  $\mathbf{f}_t$  a partir de  $\mathbf{f}_t | \mathbf{\Lambda}, \mathbf{y}_t, \mathbf{h}_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ), estimando mais  $T$  regressões multivariadas  $r$ -dimensionais em que o número de observações é igual a  $m$ , o número de séries na análise.

É válido ressaltar que, no passo 1, são colocados  $m + r$  modelos univariados de volatilidade estocástica, os quais Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017) combinam com outras duas equações de observação:

$$\log(y_{it} - \mathbf{\Lambda}_{i,\bullet} \mathbf{f}_t)^2 = h_{it} + \log \varepsilon_{it}^2, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

$$\log f_{jt}^2 = h_{m+j,t} + \log \xi_{jt}^2, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.9)$$

em que  $\varepsilon_{it}$  e  $\xi_{jt}$  são, respectivamente, termos de choques associados a  $\mathbf{y}_t$  e  $\mathbf{f}_t$ . A iteração do algoritmo resulta, então, em amostras da distribuição *a posteriori* conjunta, cabendo algum descarte do tipo *burn-in* a fim de evitar quaisquer influências de valores iniciais mal definidos.

## 3.2 Formulação proposta

No que se refere ao presente trabalho, todavia, opta-se por uma formulação alternativa, em que as cargas fatoriais são estimadas diretamente nas equações de volatilidade latente. Em linhas gerais, o modelo proposto, com  $m$  séries e  $k$  fatores, é representado da seguinte maneira:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{\Omega}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon) \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_\eta), \quad (3.11)$$

em que  $\boldsymbol{\sigma}_t = (\sigma_{1t}, \dots, \sigma_{mt})'$  é um vetor contendo as  $m$  volatilidades,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)'$  é um parâmetro de médias e  $\boldsymbol{\gamma}$  é uma matriz  $m \times k$  de cargas fatoriais. São admitidas matrizes de covariância  $\Sigma_\varepsilon$  e  $\Sigma_\eta$  diagonais, indicando processos SV independentes. Quanto das volatilidades fatoriais, denotadas por  $\mathbf{h}_t = (h_{1t}, \dots, h_{kt})'$ , tem-se que:

$$\mathbf{h}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{h}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\xi}_t, \quad \boldsymbol{\xi}_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_h), \quad (3.12)$$

sendo  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$  o vetor de médias para  $\mathbf{h}_t$  e  $\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_k)$  um parâmetro de persistência, configurando uma estrutura autorregressiva de primeira ordem. A relação entre as equações de retorno implicadas pelo vetor  $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, \dots, r_{mt})'$  e as volatilidades para cada ativo são expressas pela matriz  $m \times m$  dada por  $\mathbf{\Omega}_t$ , de forma que:

$$\mathbf{\Omega}_t = \begin{pmatrix} \exp\{\sigma_{1t}/2\} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp\{\sigma_{2t}/2\} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp\{\sigma_{mt}/2\} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

As opções pelas formas funcionais apresentadas passam por questões de preservação das propriedades desejáveis da abordagem de modelagem via INLA. Como argumentado em Martino (2007), há possibilidade de perda da vantagem computacional associada ao método em sua concepção original, produto do que é conhecido em estatística como a "maldição da dimensionalidade". Dessa forma, modelos mais parcimoniosos podem atenuar ineficiências impostas pelo aumento de dimensão, com possibilidade de benefícios advindos do ganho de informações no comparativo com a modelagem univariada. Em adição, os modelos propostos podem ser implementados com o auxílio do pacote **R-INLA** e suas funcionalidades já existentes.

Para a estimação, parte-se de duas restrições fundamentais para a identificação do problema, sob as quais o número de fatores deve ser menor ou igual ao número de séries de retornos ( $k \leq m$ ) e, para uma dessas séries, os parâmetros de carga ( $\gamma_{ij}$ ) serão dados, isto é, arbitrariamente fixos. Seguindo o procedimento de implementação da metodologia

INLA, o modelo aventado é reinterpretado como um modelo de campo aleatório de Markov gaussiano em três etapas, conforme adotado por Martino (2007). Em um primeiro estágio, é colocado um modelo de verossimilhança referente ao conjunto de variáveis que são observadas, de modo que:

$$\pi(\mathbf{r}|\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \theta_1) = \prod \pi(\mathbf{r}_t|\boldsymbol{\sigma}_t, \mathbf{h}_t, \theta_1), \quad (3.14)$$

em que  $\theta_1$  é um vetor de hiperparâmetros relacionados à volatilidade.

Na sequência, são modelados os campos latentes referentes a  $\boldsymbol{\sigma}_t$  e  $\mathbf{h}_t$ , com médias não conhecidas. Tem-se, então:

$$\boldsymbol{\sigma}_t|\mathbf{h}_t, \boldsymbol{\alpha}, \theta_2 \sim N(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{h}_t, \Sigma_\eta) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{h}_t|\mathbf{h}_{t-1}, \boldsymbol{\mu}, \theta_3 \sim N(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}[\mathbf{h}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}], \Sigma_h), \quad (3.16)$$

sendo  $\theta_2$  e  $\theta_3$  vetores de hiperparâmetros associados às suas respectivas matrizes de covariância ( $\Sigma_\eta$  e  $\Sigma_h$ ). No tocante aos parâmetros de média,  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\mu}$ , são estipuladas distribuições *a priori* gaussianas, centradas em zero. Assim, segundo demonstra Martino (2007), a média para a volatilidade pode ser inserida no campo latente por meio do cálculo da seguinte densidade:

$$\pi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}|\theta_1) = \pi(\boldsymbol{\alpha}) \prod_{t=1}^T \pi(\boldsymbol{\sigma}|\mathbf{h}_t, \theta_1) \propto |\mathbf{Q}|^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')\mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')'\right], \quad (3.17)$$

com  $\mathbf{Q}$  representando a matriz de precisão e  $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')$  denotando o campo latente para a volatilidade. A esparsidade de  $\mathbf{Q}$ , que pode ser fatorada em formas também esparsas, confere às operações realizadas uma grande eficiência do ponto de vista computacional, sendo explorada em maiores detalhes por Rue, Martino e Chopin (2009).

Em um último estágio, enfim, é definida uma *priori*  $\pi(\boldsymbol{\theta})$  para os vetores de hiperparâmetros discutidos, considerando  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Nesse sentido, o trabalho adota distribuições de acordo com as propostas por Martino (2007), onde aplicável, e Kastner, Frühwirth-Schnatter e Lopes (2017), particularmente no âmbito dos parâmetros ligados à estrutura de fatores. Por questões de compatibilização com o pacote **R-INLA**, entretanto, lida-se com o parâmetro de precisão ( $\tau$ ) em termos de seu logaritmo natural (log-precisão) e com uma função definida entre  $-1$  e  $1$  para o parâmetro de persistência ( $\phi$ ), de modo que:

$$\ln(\tau_k) \sim \log\text{Gama}(1, 0.00005), \quad (3.18)$$

$$\ln\left(\frac{1 + \phi_k}{1 - \phi_k}\right) \sim N(0, 0.15), \quad (3.19)$$

com as distribuições *a priori* dos demais parâmetros sendo gaussianas. A partir daí, tomando o campo latente  $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\alpha}')$ , a estimação via INLA passa pela construção de uma aproximação para  $\pi(x_t|\mathbf{r})$  a partir de  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$  e de  $\pi(x_t|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$ .

Para obter-se a distribuição *a posteriori* conjunta em relação aos hiperparâmetros, parte-se da seguinte aproximação gaussiana para a densidade condicional completa de  $\mathbf{x}$ :

$$\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) = \bar{K} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu})'[\mathbf{Q} + \text{diag}(\mathbf{C})](\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu}) \right\}, \quad (3.20)$$

em que  $\bar{K}$  trata-se de uma constante de normalização,  $\boldsymbol{\nu}$  corresponde à moda de  $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta})$  e  $\text{diag}(\mathbf{C})$  é uma matriz banda com largura igual ao número de séries  $m$ , podendo ser escrita como:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{C}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{C}_t$  contém os termos de 2<sup>a</sup> ordem para a expansão de Taylor de  $\sum \log \pi(\mathbf{r}_t|x_t, \theta_1)$  ao redor de  $\boldsymbol{\nu}$ , em formato de um Hessiano. Deste modo, a *posteriori* conjunta para  $\boldsymbol{\theta}$  pode ser aproximada por meio da seguinte relação:

$$\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r}) \propto \frac{\pi(\mathbf{r}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})} \Bigg|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (3.22)$$

A aproximação para  $\pi(x_t|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$ , por outro lado, segue uma estratégia gaussiana, mas podendo-se aproveitar de resultados obtidos na etapa do cômputo de  $\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$ . Em particular, toma-se  $\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$  como parâmetro de médias para a distribuição, cabendo apenas encontrar os valores para as variâncias marginais, representadas por  $\sigma_G^2$ . O cálculo é realizado de acordo com métodos recursivos propostos por Rue e Martino (2007), permitindo que a aproximação seja dada por:

$$\tilde{\pi}_G(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) = N(x_t; \boldsymbol{\nu}[\boldsymbol{\theta}], \sigma_G^2[\boldsymbol{\theta}]). \quad (3.23)$$

É válido apontar, contudo, que, de acordo com os autores, esta aproximação não se faz acurada sob algumas situações, principalmente quando da presença de valores extremos para  $\boldsymbol{\theta}$ . Seu mérito reside em constituir uma alternativa mais rápida que outras formas mais precisas de realizar-se o cômputo, o que é especialmente interessante no contexto de modelos em que a dimensionalidade é uma questão relevante.

Finalmente, tem-se que  $\pi(x_t|\mathbf{r})$  pode ser aproximado, uma vez computados  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$  e  $\pi(x_t|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$ , por meio de uma integração numérica do tipo:

$$\tilde{\pi}(x_t|\mathbf{r}) = \sum_n \tilde{\pi}(x_t|\boldsymbol{\theta}_n, \mathbf{r})\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_n|\mathbf{r})\Delta_n, \quad n \in \{1, \dots, N\}, \quad (3.24)$$

a ser realizada sobre um conjunto de pontos (*grid*) para  $\boldsymbol{\theta}$ , sendo que os pesos  $\Delta_n$  seriam iguais a 1 para pontos equidistantes. No entanto, com o intuito de tornar mais célere o processo de aproximação, adota-se no trabalho uma abordagem baseada no procedimento de Bayes empírico, no qual emprega-se apenas um ponto de integração equivalente à moda *a posteriori* dos hiperparâmetros. Em linhas gerais, substitui-se o termo  $\tilde{\pi}(x_t|\boldsymbol{\theta}_n, \mathbf{r})$  por  $\tilde{\pi}(x_t|\boldsymbol{\theta}_*, \mathbf{r})$ , sendo  $\boldsymbol{\theta}_*$  a moda de  $\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{r})$ . Segundo Martino (2007), a abordagem é altamente precisa quando a distribuição do vetor de hiperparâmetros condicional aos log-retornos é regular.

### 3.3 Implementação prática

Sob a perspectiva da implementação prática, o pacote **R-INLA** permite que sejam definidas estratégias mais eficientes do ponto de vista computacional com o auxílio do argumento “*control.inla*”, que controla a forma como são computadas as aproximações e integrações numéricas. Entre as opções de interesse para o trabalho, a abordagem de integração via procedimento de Bayes empírico é lograda por meio do comando “*control.inla = list(int.strategy = "eb")*”, ao passo que a aproximação gaussiana para  $\pi(x_t|\boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$  é garantida pelo argumento “*strategy = "gaussian"*”. A lista completa de argumentos considerados na estimação pode ser observada pelo código empregado:

```
inla(
  formula,
  family = rep("stochvol", m),
  data = data,
  control.inla = list(stupid.search = TRUE,
                     reordering = "metis",
                     strategy = "gaussian",
                     int.strategy = "eb"),
  control.predictor = list(compute = TRUE)
)
```

Em adição às configurações já mencionadas, com respeito às estratégias para obtenção das aproximações, é definido, ainda, mais um argumento, referente ao algoritmo de reordenamento escolhido para a matriz de precisão. Faz-se a opção pelo reordenamento da classe de programas METIS<sup>4</sup>, que visa minimizar o preenchimento (*fill-in*) em matrizes

<sup>4</sup> Ver <<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>>.



esparsas de modo eficiente, tanto no que tange à necessidade de armazenamento, quanto de capacidade de processamento. Das vantagens em relação ao uso de outras alternativas disponíveis no pacote **R-INLA**, como algoritmos de grau mínimo múltiplos (*multiple minimum degree*), destaca-se o fato de o reordenamento METIS ser perfeitamente adequado a paralelizações, reforçando o aspecto de eficiência sobre as operações matriciais.

A estimação do modelo se dá por intermédio de uma estrutura de múltiplas verossimilhanças, com uma mesma configuração para os vetores e índices, independente do número de fatores levado em consideração na análise. Assumindo um caso geral envolvendo  $m$  séries,  $k$  fatores e  $n$  observações para cada série de retorno, tem-se, como ponto de partida, a criação de uma matriz de retornos de dimensões  $(m + 1)n \times m$ , organizada da seguinte maneira:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} NA & NA & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & NA & \dots & NA \\ r_{1,1} & NA & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n,1} & NA & \dots & NA \\ NA & r_{1,2} & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & r_{n,2} & \dots & NA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & NA & \dots & r_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ NA & NA & \dots & r_{n,m} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

em que  $\mathbf{r}_{t,i}$  diz respeito ao log-retorno do ativo  $i$ , para o período  $t$ , e são denotadas por  $NA$ 's as entradas nulas na matriz. Deve-se salientar também que as primeiras  $n$  linhas de  $\mathbf{R}$  correspondem a valores nulos, de tal sorte que a primeira entrada referente a um retorno,  $\mathbf{r}_{1,1}$ , consta da linha  $n + 1$  da matriz.

Outros três grupos de índices são construídos, paralelamente, com a finalidade de estimar os efeitos fixos e aleatórios do modelo dinâmico linear colocado. No tocante aos efeitos fixos, tem-se os  $m$  vetores a seguir:

$$\mathbf{a}_1 = (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n})' \quad (3.26)$$

$$\mathbf{a}_2 = (\underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-2)n})' \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \mathbf{a}_m &= \left( \underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n}, \underbrace{1, \dots, 1}_n \right)', \end{aligned} \quad (3.28)$$

em que os primeiros  $n$  elementos são deixados como valores nulos e, para cada vetor  $\mathbf{a}_i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ), introduz-se uma sequência de 1's com dimensão  $n$  e início a partir do elemento de número  $ni + 1$ . Além disso, outros  $k$  índices idênticos, associados à evolução dos fatores, são adicionados, sendo inicializados da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_1 = \left( 1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{m \cdot n} \right)' \quad (3.29)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{f}_k = \left( 1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{m \cdot n} \right)', \quad (3.30)$$

sendo os  $n$  primeiros elementos a sequência de 1 até  $n$ , em uma estrutura que se repete para todo  $\mathbf{f}_j$ , com  $j = \{1, \dots, k\}$ . Por fim, os efeitos aleatórios com respeito às volatilidades são captados por um conjunto de  $mk$  vetores, construídos como:

$$\mathbf{cf}_{1,j} = \left( \underbrace{NA, \dots, NA}_n, 1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n} \right)' \quad (3.31)$$

$$\mathbf{cf}_{2,j} = \left( \underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_n, 1, \dots, n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-2)n} \right)' \quad (3.32)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{cf}_{m,k} = \left( \underbrace{NA, \dots, NA}_n, \underbrace{NA, \dots, NA}_{(m-1)n}, 1, \dots, n \right)', \quad (3.33)$$

devendo valer que, para um mesmo índice  $i$  de ativos,  $\mathbf{cf}_{i,j} = \mathbf{cf}_{i,s}$ ,  $\forall j, s \in \{1, \dots, k\}$ . É possível utilizar uma mesma definição de índices para qualquer número  $k \leq m$  de fatores, desde que esta última estrutura de vetores seja criada de acordo com o caso em que há tantos fatores quanto séries na análise ( $m = k$ ), levando o número de vetores para  $m^2$ . Seria necessário um ajuste, todavia, no sentido de assumir, manualmente, que os fatores desconsiderados na estimação são fixados em zero, isto é, que possuem uma log-precisão fixada em um valor alto e seu parâmetro de persistência fixo e igual a zero.

Uma vez obtendo-se os vetores necessários, estipula-se a fórmula que possibilitará a estimação do modelo, a partir da matriz de retornos e dos índices criados. No contexto do pacote **R-INLA**, termos relacionados aos efeitos aleatórios são indicados pela função “ $f()$ ”, que leva como argumentos o respectivo vetor de índices, uma cadeia de caracteres informando o modelo que o descreve e especificações adicionais sobre parâmetros. Tomando o caso geral em que  $m = k$ , a fórmula pode ser escrita como:

```

formula = R ~ 1 + a_1 + ... + a_m +
          f(f_1, model="ar1") + ... + f(f_m, model="ar1") +
          f(cf_1.1, copy="f_1", fixed=T, initial=1) +
          f(cf_2.1, copy="f_1", fixed=F, hyper=list(...)) + ... +
          f(cf_m.1, copy="f_1", fixed=F, hyper=list(...)) + ... +
          f(cf_m.m, copy="f_m", fixed=F, hyper=list(...))

```

Nessa formulação, os modelos por trás dos índices de cada vetor de log-volatilidades são construídos como “cópias” da estrutura estabelecida para um vetor de índices associado aos fatores, por intermédio do atributo “*copy*”, que permite a inclusão de uma tendência compartilhada entre mais de um preditor linear. Ademais, observa-se que os modelos para os vetores do grupo  $\mathbf{cf}_{i,j}$  têm, para cada fator  $j$ , um de seus termos (o primeiro, no caso) apresentando hiperparâmetros fixados, respeitando restrição imposta sobre as cargas fatoriais. Já para o grupo de  $\mathbf{f}_j$ , faz-se necessária a definição do argumento “*model = "ar1"*”, que determina uma estrutura autorregressiva de primeira ordem para as volatilidades fatoriais.

Após a realização de todos os procedimentos para estimação, os modelos discutidos são então apreciados no que concerne a seus desempenhos em matéria de acurácia e eficiência computacional. Um estudo de simulações é empregado, nesse sentido, com o objetivo de avaliar os parâmetros estimados relativamente aos seus valores verdadeiros definidos no exercício, estabelecendo uma comparação entre o modelo de fatores via algoritmo de MCMC e o modelo proposto no trabalho, baseado em aproximações. São simuladas  $m = 5$  e  $m = 10$  séries de retornos, cada qual com  $n = 5000$  observações, levando em consideração, ainda, uma dinâmica em que  $k = 2$  fatores são responsáveis pela evolução das séries de volatilidade.

Em outra vertente, os dados empíricos de retornos de índices de bolsa de valores são incorporados na análise, com a finalidade de aferir medidas de qualidade de ajuste e eficiência para as estimações. É realizada uma comparação gráfica entre os resultados obtidos pelas formas multivariadas discutidas na seção, além da análise de métricas de erro médio (ME), erro absoluto médio (MAE) e raiz do erro quadrático médio (RMSE), sob o pretexto de observar a acurácia dos modelos. Por fim, é levado em conta uma medida simples de tempo total decorrido para a estimação via INLA, a ser contrastado com o tempo de execução para a estimação via MCMC em modelos multivariados de fatores, fazendo uso do pacote *factorstochvol*<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Foi implementado um modelo com especificações análogas, 40000 sorteios (*draws*) e *burnin* igual a 3500. Mais detalhes no *paper* dos autores, Hosszejni e Kastner (2021).

## 4 Resultados

O quarto capítulo se dedica a apresentar e discutir os resultados encontrados para as estimações e testes propostos. A princípio, discute-se o conjunto de dados adotado para avaliação dos modelos, dispendo de suas fontes, escolhas para a mensuração e construção das variáveis. Na sequência, dá-se início à análise com um estudo de simulações, avaliando a capacidade de estimação para os parâmetros e comparando o desempenho computacional entre as duas abordagens relatadas no trabalho. Finalmente, no contexto de análise empírica, são expostos os parâmetros estimados pelos modelos de volatilidade estocástica para cada uma das séries de interesse. Em paralelo, são exibidas graficamente as volatilidades ajustadas, com uma breve análise de métricas de acurácia em relação aos retornos observados e uma comparação entre os tempos de execução.

### 4.1 Variáveis e bases utilizadas

A parte empírica do trabalho faz uso de dados diários para as cotações de índices de bolsas de valores<sup>1</sup>, ao longo de um mesmo intervalo de tempo. Foram selecionadas como variáveis os log-retornos para índices representando mercados diversos e provenientes de porções do globo distintas, sendo eles: *Dow Jones Industrial* (Estados Unidos), Ibovespa (Brasil), *Índice de Precios y Cotizaciones* (México), FTSE 100 (Inglaterra) e SSE Composite Index (China). Na Tabela 1, tais índices são devidamente listados e atribuem-se a eles algumas abreviações com a finalidade facilitar a identificação e denotação dos mesmos.

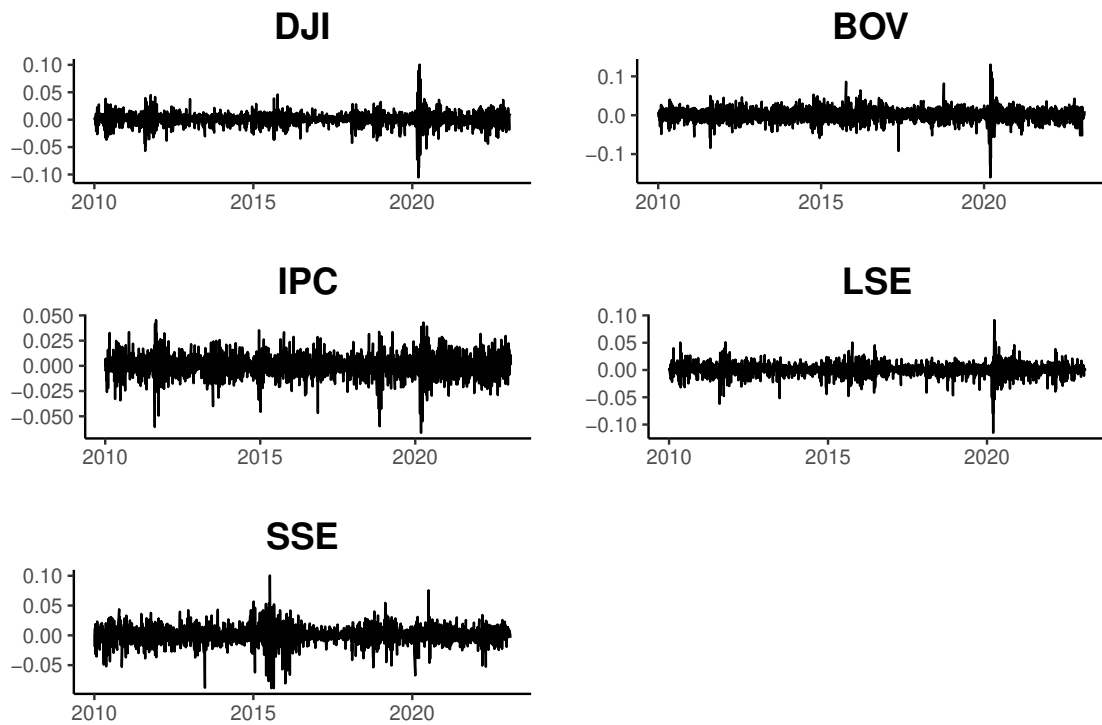
Tabela 1 – Abreviações dos Índices de Mercado

Abreviação	Índice correspondente
DJI	<i>Dow Jones Industrial Average</i>
BOV	Índice Bovespa
IPC	S&P/BMV <i>Índice de Precios y Cotizaciones</i>
LSE	FTSE 100
SSE	<i>Shanghai Stock Exchange Composite Index</i>

O período de análise compreende os preços de fechamento diários de cada índice entre janeiro de 2010 a fevereiro de 2023, garantindo um volume de dados, entre número de séries analisadas e observações individuais, que permita a avaliação adequada do modelo proposto em matéria de eficiência computacional. A Figura 1 traz as movimentações para os retornos dos índices entre as datas delimitadas.

<sup>1</sup> Todos os dados retirados de <<https://www.investing.com/indices>>.

Figura 1 – Evolução dos retornos dos índices analisados.



Os índices foram escolhidos por serem amplamente utilizados no mercado financeiro global e por representarem diferentes regiões do mundo, levando em conta também a possibilidade de interação entre os mesmos no sentido de contágio e efeitos do tipo *spillover* sobre a volatilidade de preços dos ativos negociados. Para índices como o Ibovespa e o *Dow Jones Industrial*, Achcar, Cepeda-Cuervo e Barossi-Filho (2012) reforçam a relevância da relação entre ambos do ponto de vista da constituição de uma referência para investidores no que diz respeito a alternativas de investimento nos mercados emergentes. Entre outros achados, os autores mensuram que um incremento de 100% na volatilidade do mercado de ações americano está associado a um aumento de 116.4% na volatilidade do mercado brasileiro, na média.

Na Tabela 2, por fim, podem ser consultados algumas das propriedades estatísticas associadas aos log-retornos dos índices escolhidos, incluindo média, mediana, desvio padrão, assimetria (*skewness*), curtose e número de observações. Além disso, um teste do tipo Jarque-Bera é computado, com os valores calculados constando também da tabela. Em todos os casos, a hipótese nula é rejeitada a um nível de significância de 1%.

Tabela 2 – Estatísticas Descritivas dos Índices de Mercado

	DJI	BOV	IPC	LSE	SSE
Média	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001	0.0000
Mediana	0.0007	0.0004	0.0002	0.0005	0.0004
Desvio Padrão	0.011	0.017	0.010	0.011	0.014
Assimetria	-0.509	-0.496	-0.366	-0.606	-0.594
Curtose	14.764	12.316	6.343	12.450	9.175
Teste de Jarque-Bera	15894**	10005**	1335**	10349**	4508**
Nº de Observações	2737	2737	2737	2737	2737

Nota: \*\* representa p-valor  $< 0.01$ .

## 4.2 Estudo de simulação

Seguindo a formulação estipulada, são simuladas 10 séries de retornos, cujas volatilidades condicionais são construídas a partir de dois fatores  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$ , que assumem uma estrutura autorregressiva de primeira ordem. Por se tratarem de volatilidades fatoriais, são atribuídos parâmetros de persistência de diferentes magnitudes, em consonância com evidências trazidas pela literatura empírica<sup>2</sup>, que sugere, para modelos de dois fatores, um fator com elevada persistência e um outro com célere reversão à média. Dessa forma, atribui-se a  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$ , respectivamente, persistências da ordem de  $\phi_1 = 0.98$  e  $\phi_2 = 0.28$ . A relação completa de parâmetros pode ser encontrada na Tabela 3 a seguir.

Tabela 3 – Parâmetros definidos para simulação

Série	$\mu$	$\phi$	$\alpha$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$\mathbf{h}_1$	-0.08	0.98			
$\mathbf{h}_2$	0.00	0.28			
$\mathbf{s}_1$			-0.50	1.00	1.00
$\mathbf{s}_2$			0.00	0.70	1.40
$\mathbf{s}_3$			-0.25	0.80	1.10
$\mathbf{s}_4$			0.10	1.20	0.70
$\mathbf{s}_5$			0.50	-0.25	1.75
$\mathbf{s}_6$			-0.40	1.15	0.65
$\mathbf{s}_7$			0.25	0.55	1.30
$\mathbf{s}_8$			-0.40	1.90	-0.30
$\mathbf{s}_9$			-0.10	1.00	0.90
$\mathbf{s}_{10}$			0.40	1.40	0.50

As séries de volatilidade que compreendem o exercício de simulação, totalizando 5000 observações cada, são analisadas a partir de dois modelos, que variam justamente no

<sup>2</sup> Ver, por exemplo, trabalho de Alizadeh, Brandt e Diebold (2002) para séries de cotação cambial e de Durham (2006) para índices de bolsa de valores.

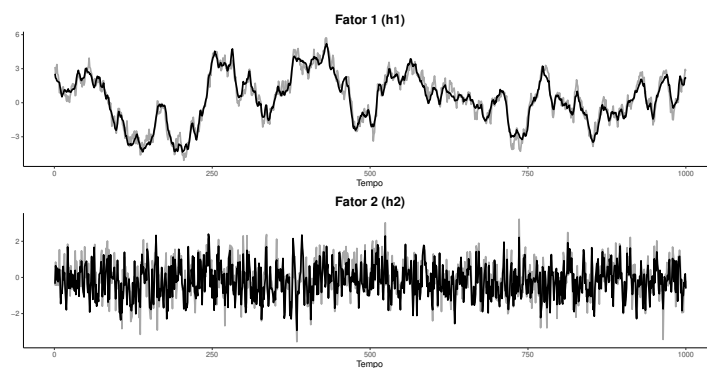
número de séries incorporado à estimação. Em ambos, todavia, são utilizados os mesmos parâmetros para  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$ , bem como para as demais séries, com a finalidade de observar eventuais diferenças causadas pelo aumento de dimensionalidade do problema. A Tabela 4 traz as distribuições *a posteriori* dos parâmetros estimados para o modelo que leva em consideração  $m = 5$  séries ( $\mathbf{s}_1$  até  $\mathbf{s}_5$ ).

Tabela 4 – Parâmetros estimados das distribuições *a posteriori* - Modelo com 5 séries

		real	média	dp	0.025q	0.5q	0.975q
$\mathbf{h}_1$	$\tau_1$		0.230	0.017	0.193	0.232	0.260
	$\phi_1$	0.98	0.970	0.001	0.968	0.970	0.973
$\mathbf{h}_2$	$\tau_2$		0.928	0.025	0.879	0.928	0.978
	$\phi_2$	0.28	0.287	0.013	0.260	0.287	0.312
$\mathbf{s}_1$	$\alpha_1$	-0.50	-0.420	0.233	-0.877	-0.420	0.037
	$\gamma_{1,1}$	1.00	1.000				
	$\gamma_{1,2}$	1.00	1.000				
$\mathbf{s}_2$	$\alpha_2$	0.00	0.048	0.161	-0.267	0.048	0.364
	$\gamma_{2,1}$	0.70	0.678	0.012	0.655	0.679	0.701
	$\gamma_{2,2}$	1.40	1.316	0.024	1.270	1.316	1.363
$\mathbf{s}_3$	$\alpha_3$	-0.25	-0.097	0.172	-0.435	-0.097	0.240
	$\gamma_{3,1}$	0.80	0.731	0.011	0.709	0.731	0.754
	$\gamma_{3,2}$	1.10	1.076	0.022	1.032	1.076	1.119
$\mathbf{s}_4$	$\alpha_4$	0.10	0.279	0.263	-0.237	0.279	0.794
	$\gamma_{4,1}$	1.20	1.130	0.012	1.105	1.130	1.154
	$\gamma_{4,2}$	0.70	0.681	0.022	0.637	0.681	0.726
$\mathbf{s}_5$	$\alpha_5$	0.50	0.633	0.071	0.494	0.633	0.771
	$\gamma_{5,1}$	-0.25	-0.252	0.018	-0.288	-0.252	-0.217
	$\gamma_{5,2}$	1.75	1.616	0.033	1.550	1.616	1.681

Nota-se, de imediato, que o modelo estimado faz um bom trabalho no que tange à recuperação dos parâmetros que dispõem das volatilidades fatoriais. Para as persistências,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , são computados valores muito próximos aos estabelecidos nas simulações, indicando um possível bom ajuste aos fatores assumidos, que pode ser melhor visualizado por meio da Figura 2. No gráfico, as séries estimadas constam em preto.

Figura 2 – Volatilidades fatoriais estimadas vs. séries simuladas

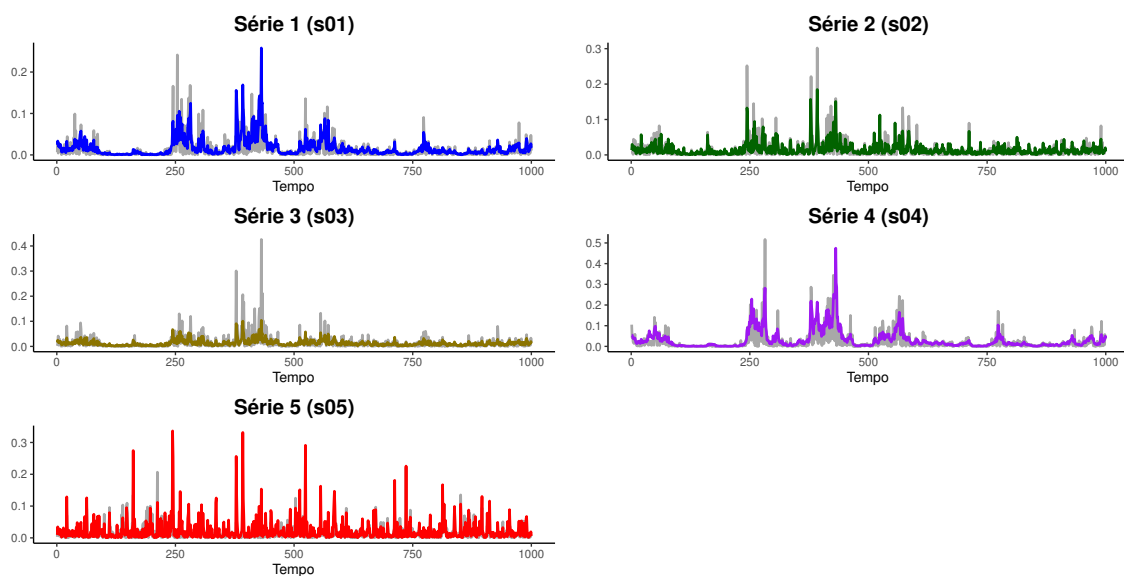


Em linhas gerais, as cargas fatoriais estimadas pelo modelo se aproximam dos

parâmetros verdadeiros, com divergências que aparecem, na maioria dos casos, apenas na segunda casa decimal. Especialmente para as cargas referentes à volatilidade fatorial  $\mathbf{h}_2$ , é possível perceber que, com a exceção de  $\gamma_{2,2}$  e  $\gamma_{5,2}$ , todas se encontram dentro dos respectivos intervalos de confiança de 95% estimados, com  $\gamma_{3,2}$  e  $\gamma_{4,2}$  próximos ao valor real. Assim, pode-se constatar que o método proposto é capaz de oferecer estimativas consistentes em relação ao valor real dos parâmetros que constituem o modelo. No caso dos parâmetros de efeitos fixos, representados por  $\alpha_1$  até  $\alpha_5$ , o desempenho é relativamente inferior, ainda que razoável, posto que as discrepâncias são pequenas.

Graficamente, as volatilidades estimadas parecem se ajustar bem às séries de retornos correspondentes (em módulo). Na Figura 3, são exibidos os valores ajustados para as cinco séries.

Figura 3 – Volatilidades estimadas para as séries simuladas vs. retornos absolutos



Nos gráficos, o valor absoluto dos log-retornos é representado pela cor cinza, ao passo em que as séries estimadas aparecem nas demais cores. Observa-se que o modelo foi capaz de capturar as mudanças na volatilidade ao longo do tempo para cada uma das séries de dados simulados, apresentando resultados coerentes com as séries de retornos. Na análise visual, todavia, há percepção de que o ajuste referente à Série 3 ( $\mathbf{s}_3$ ) é comparativamente pior, sobretudo em momentos em que há pico de volatilidade.

Em sequência, a metodologia é testada também em um segundo exercício, estimando o modelo com todas as  $m = 10$  séries simuladas. Constam, da Tabela 5, os resultados obtidos. Novamente, os parâmetros de persistência associados às volatilidades fatoriais se aproximam consideravelmente de seus valores verdadeiros, revelando que a introdução de mais séries na análise não prejudicou esta propriedade. Em se tratando das cargas fatoriais, por outro lado, as estimativas obtidas apresentaram níveis variados de consistência em relação a seus valores reais. Embora a maior parte dos parâmetros



estimados esteja próxima dos patamares estabelecidos para simulação das séries, há alguns casos, como o da Série 10 ( $\mathbf{s}_{10}$ ), em que os resultados divergem. Originalmente, os parâmetros  $\gamma_{10,1}$  e  $\gamma_{10,2}$  foram definidos como sendo, respectivamente, iguais a 1.40 e 0.50, mas o modelo encontra os valores 1.15 e 0.31. Ao menos no que concerne ao conjunto de dados testados, a introdução de mais séries ao modelo acarretou, portanto, em uma perda relativa, mesmo que não de forma generalizada ou acentuada.

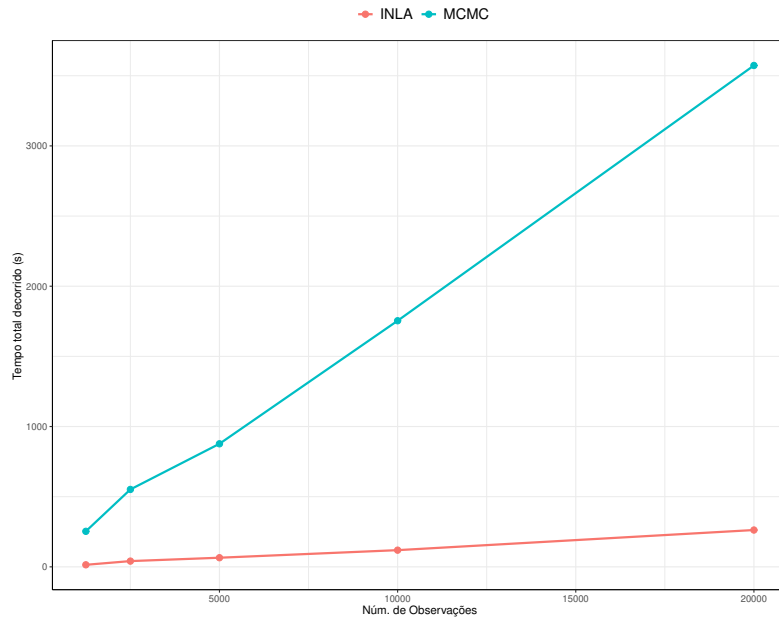
Tabela 5 – Parâmetros estimados das distribuições *a posteriori* - Modelo com 10 séries

		real	média	dp	0.025q	0.5q	0.975q
$\mathbf{h}_1$	$\tau_1$		0.220	0.015	0.193	0.224	0.251
	$\phi_1$	0.98	0.972	0.001	0.969	0.972	0.975
$\mathbf{h}_2$	$\tau_2$		0.875	0.019	0.839	0.875	0.913
	$\phi_2$	0.28	0.271	0.011	0.249	0.270	0.294
$\mathbf{s}_1$	$\alpha_1$	-0.50	-0.389	0.247	-0.873	-0.389	0.094
	$\gamma_{1,1}$	1.00	1.000				
	$\gamma_{1,2}$	1.00	1.000				
$\mathbf{s}_2$	$\alpha_2$	0.00	0.050	0.172	-0.286	0.050	0.386
	$\gamma_{2,1}$	0.70	0.685	0.012	0.661	0.685	0.707
	$\gamma_{2,2}$	1.40	1.306	0.018	1.271	1.306	1.343
$\mathbf{s}_3$	$\alpha_3$	-0.25	-0.084	0.187	-0.451	-0.084	0.283
	$\gamma_{3,1}$	0.80	0.753	0.011	0.731	0.754	0.775
	$\gamma_{3,2}$	1.10	1.054	0.016	1.022	1.054	1.088
$\mathbf{s}_4$	$\alpha_4$	0.10	0.299	0.285	-0.259	0.299	0.857
	$\gamma_{4,1}$	1.20	1.156	0.011	1.133	1.156	1.176
	$\gamma_{4,2}$	0.70	0.688	0.016	0.657	0.688	0.721
$\mathbf{s}_5$	$\alpha_5$	0.50	0.633	0.078	0.480	0.633	0.787
	$\gamma_{5,1}$	-0.25	-0.275	0.012	-0.299	-0.276	-0.250
	$\gamma_{5,2}$	1.75	1.578	0.021	1.537	1.578	1.619
$\mathbf{s}_6$	$\alpha_6$	-0.40	-0.200	0.279	-0.746	-0.200	0.346
	$\gamma_{6,1}$	1.15	1.132	0.011	1.109	1.132	1.152
	$\gamma_{6,2}$	0.65	0.642	0.017	0.609	0.641	0.677
$\mathbf{s}_7$	$\alpha_7$	0.25	0.293	0.138	0.022	0.293	0.564
	$\gamma_{7,1}$	0.55	0.547	0.010	0.527	0.547	0.567
	$\gamma_{7,2}$	1.30	1.260	0.018	1.225	1.259	1.297
$\mathbf{s}_8$	$\alpha_8$	-0.40	0.351	0.375	-0.384	0.351	1.086
	$\gamma_{8,1}$	1.90	1.526	0.014	1.498	1.526	1.552
	$\gamma_{8,2}$	-0.30	-0.191	0.018	-0.226	-0.191	-0.156
$\mathbf{s}_9$	$\alpha_9$	-0.10	0.200	0.240	-0.271	0.200	0.672
	$\gamma_{9,1}$	1.00	0.974	0.010	0.954	0.974	0.992
	$\gamma_{9,2}$	0.90	0.961	0.018	0.925	0.960	0.999
$\mathbf{s}_{10}$	$\alpha_{10}$	0.40	0.914	0.282	0.361	0.914	1.466
	$\gamma_{10,1}$	1.40	1.147	0.010	1.126	1.147	1.166
	$\gamma_{10,2}$	0.50	0.307	0.016	0.276	0.306	0.340

Finalmente, partindo-se para uma comparação direta com respeito à metodologia baseada em simulações estabelecida como alternativa à apresentada no presente trabalho, é possível avaliar como as duas abordagens desempenham em termos de eficiência computacional. A Figura 4 traz a evolução no tempo decorrido para execução em ambos os casos, com base na formulação envolvendo  $m = 5$  séries na estimação. A mensuração do

tempo se deu por meio de funções nativas<sup>3</sup> do *R* e foram tomados cinco valores para  $n$ : 1250, 2500, 5000, 10000 e 20000.

Figura 4 – Diferença entre tempos de estimação: INLA x MCMC



Conforme são computadas séries com um maior número de observações, nota-se que, no quesito de tempo, a estimação a partir do método proposto, baseado em aproximações de Laplace (INLA), se torna progressivamente mais vantajosa em relação àquela obtida via MCMC. De fato, a diferença, medida em 238.6s quando consideradas  $n = 1250$  observações, salta para 3310.8s na simulação realizada com  $n = 20000$  observações, com tempo de execução superior a uma hora no modelo estimado por meio de MCMC. Em particular para dados de alta frequência, esta divergência do ponto de vista da eficiência computacional pode fazer com que a inferência bayesiana aproximada refletida pela formulação introduzida no trabalho represente uma economia de horas no tocante à estimação de modelos de volatilidade estocástica, tendo em vista que a quantidade de pontos de observação pode exceder facilmente o patamar de 20000 nesses casos.

### 4.3 Análise empírica

A princípio, são expostos os parâmetros estimados pelos modelos de volatilidade estocástica e, ilustrativamente, as volatilidades ajustadas. Também são realizadas a análise de métricas de acurácia em relação aos retornos observados e uma comparação entre os tempos de execução.

<sup>3</sup> Notadamente, a função `Sys.time()`, que marca um determinado ponto no tempo ao ser executada, atribuindo a hora exata a um objeto.

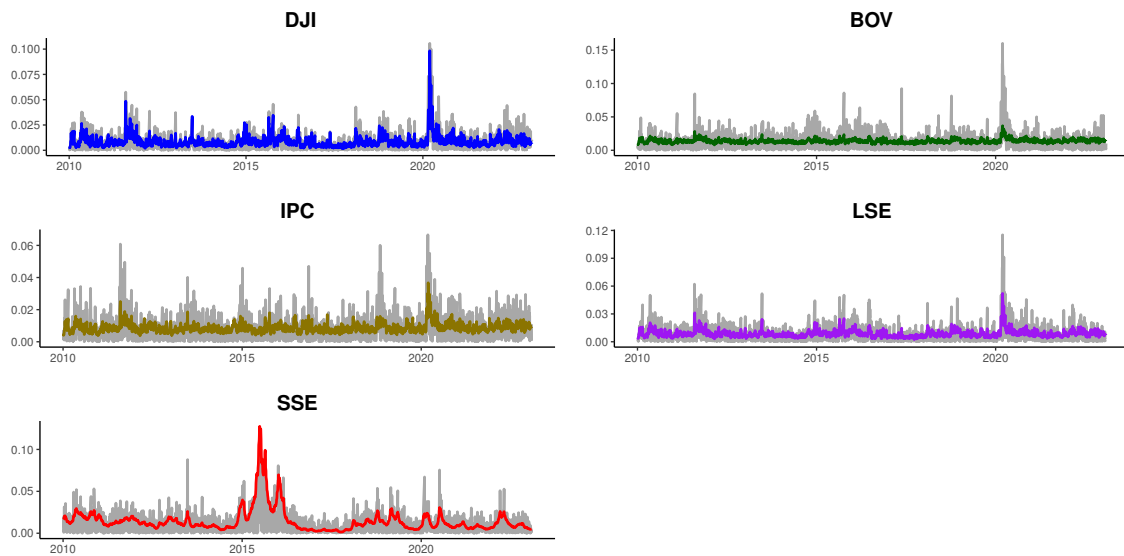
Constam, na Tabela 6, os parâmetros estimados para as distribuições *a posteriori* das séries e das volatilidades fatoriais ( $h_1$  e  $h_2$ , na tabela), incluindo algumas estatísticas descritivas.

Tabela 6 – Parâmetros estimados das distribuições *a posteriori* - Dados de índice de bolsa

		média	dp	0.025q	0.5q	0.975q
<b>h<sub>1</sub></b>	$\tau_1$	6.132	1.047	4.478	5.991	8.568
	$\phi_1$	0.982	0.003	0.975	0.982	0.987
<b>h<sub>2</sub></b>	$\tau_2$	0.793	0.053	0.690	0.792	0.900
	$\phi_2$	0.665	0.023	0.618	0.666	0.707
<b>DJI</b>	$\alpha_1$	-5.172	0.098	-5.365	-5.172	-4.980
	$\gamma_{1,1}$	1.000				
	$\gamma_{1,2}$	1.000				
<b>BOV</b>	$\alpha_2$	-3.980	0.054	-4.085	-3.980	-3.874
	$\gamma_{2,1}$	0.418	0.083	0.252	0.418	0.580
	$\gamma_{2,2}$	0.630	0.031	0.569	0.630	0.693
<b>IPC</b>	$\alpha_3$	-4.946	0.053	-5.050	-4.946	-4.842
	$\gamma_{3,1}$	0.299	0.083	0.133	0.300	0.459
	$\gamma_{3,2}$	0.775	0.038	0.700	0.775	0.848
<b>LSE</b>	$\alpha_4$	-5.010	0.087	-5.181	-5.010	-4.839
	$\gamma_{4,1}$	0.893	0.086	0.725	0.892	1.065
	$\gamma_{4,2}$	0.847	0.039	0.771	0.847	0.924
<b>SSE</b>	$\alpha_5$	-4.340	0.155	-4.643	-4.340	-4.037
	$\gamma_{5,1}$	1.952	0.158	1.679	1.938	2.294
	$\gamma_{5,2}$	0.221	0.049	0.128	0.219	0.321

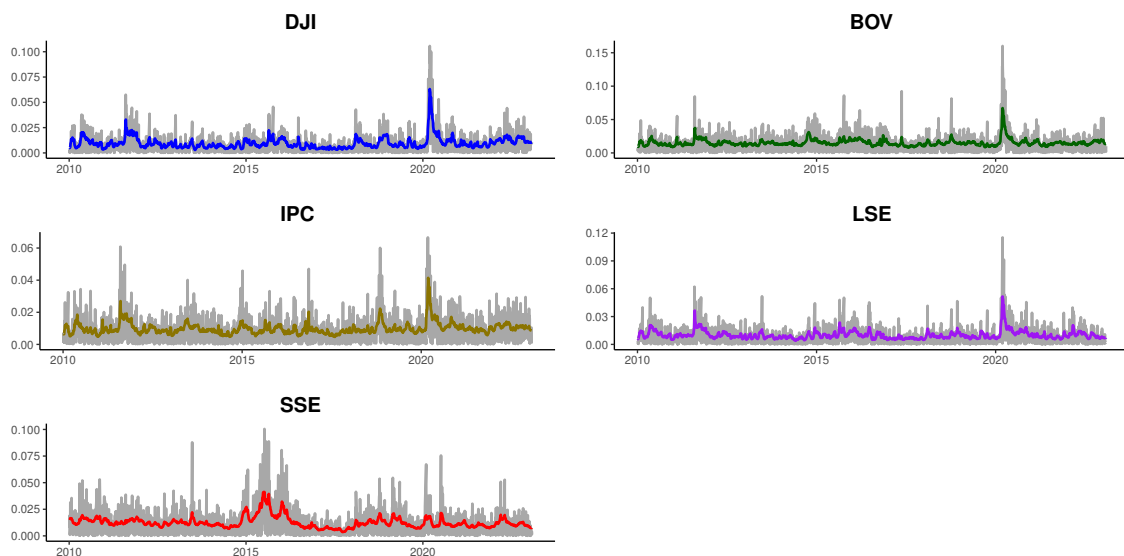
A especificação adotada toma  $k = 2$  fatores, respeitando a restrição sob a qual  $k$  não pode ser maior que o número de séries modeladas. Em adição, é válido ressaltar que os parâmetros  $\gamma_{1,1}$  e  $\gamma_{1,2}$  referentes à série de retornos do índice *Dow Jones* (DJI) são fixados arbitrariamente ao valor de 1, também em consonância com as restrições de identificação discutidas previamente, sob as quais os parâmetros de carga devem ser fixados para uma das séries. Nota-se, da tabela, que as volatilidades ajustadas para as séries do Ibovespa e do *Índice de Precios y Cotizaciones* parecem responder mais à volatilidade fatorial  $h_2$ , associada, respectivamente, aos parâmetros  $\gamma_{2,2}$  e  $\gamma_{3,2}$ , ao contrário das demais. Esta volatilidade fatorial apresenta uma persistência (representada por  $\phi_2$ ) consideravelmente menor que  $h_1$ , bem como precisão (denotada como  $\tau_2$ ) também mais baixa no comparativo. Graficamente, essa distinção parece impactar na percepção de qualidade de ajuste, como pode-se observar na Figura 5.

Figura 5 – Volatilidades estimadas via INLA vs. retornos absolutos



Os gráficos, nos quais a volatilidade estimada (em cores) é representada juntamente ao valor absoluto dos log-retornos (em cinza), expõem um aparente bom ajuste do modelo rodado, sobretudo no caso dos índices *Dow Jones* (DJI), FTSE 100 (LSE) e *SSE Composite* (SSE). Com respeito ao Ibovespa (BOV) e IPC, todavia, observa-se um ajuste pior em comparação, especialmente nos picos por volta do ano de 2020, que corresponde à crise deflagrada pela pandemia do novo coronavírus. No tocante aos resultados obtidos pela estimação via MCMC, mostrados na Figura 6, essa diferença não ocorre.

Figura 6 – Volatilidades estimadas via MCMC vs. retornos absolutos



Como constatado pelos gráficos, o ajuste provido pelo modelo estimado por meio do pacote `factorstochvol` parece ser mais adequado no caso de Ibovespa e IPC, embora

a percepção seja contrária para os índices *Dow Jones* e *SSE Composite*, cujo pico de volatilidade após 2015 aparenta ser melhor modelado pela formulação introduzida no artigo. Essas percepções advindas da visualização dos dados são corroboradas parcialmente pela análise das métricas de acurácia calculadas a partir dos valores ajustados para a volatilidade latente, mais uma vez tomando como alvo o valor absoluto dos retornos. A Tabela 7 traz as medidas de erro médio (ME), erro absoluto médio (MAE) e raiz do erro quadrático médio (RMSE).

Tabela 7 – Métricas de acurácia para o modelo estimado via INLA vs. MCMC

		DJI	BOV	IPC	LSE	SSE
<b>INLA</b>	ME	0.006	0.017	0.009	0.008	0.052
	MAE	0.038	0.075	0.044	0.044	0.089
	RMSE	0.052	0.103	0.058	0.061	0.144
<b>MCMC</b>	ME	0.019	0.030	0.020	0.022	0.027
	MAE	0.049	0.078	0.050	0.052	0.063
	RMSE	0.065	0.101	0.063	0.069	0.083

No geral, as métricas obtidas com a volatilidade estimada via INLA são melhores, em todos os casos, para quase todas as séries. As exceções, de forma não exatamente surpreendente, incluem a série de retornos para o Ibovespa, em que a raiz do erro quadrático médio é menor no contexto do modelo estimado por MCMC, e a série de retornos para o *SSE Composite*, em que todas as métricas são piores para o modelo proposto. Ainda assim, tratam-se de discrepâncias de relativa baixa magnitude e que não se demonstram consistentes em todas as séries, reforçando uma tese de qualidade de ajuste comparável entre as duas metodologias empregadas.

Pelo lado do desempenho computacional, entretanto, as diferenças são menos sutis. Para o *hardware* específico em que se deram as estimações<sup>4</sup>, o tempo total decorrido para execução dos comandos foi de 19.1s no caso do modelo estimado via INLA, em contraste com os 529s (08m49s) referentes à estimação do modelo baseado em MCMC. Nesse cenário, o modelo proposto no trabalho é cerca de 27 vezes mais rápido que a alternativa, revelando um expressivo ganho de velocidade na estimação, sem qualquer perda relevante em termos de qualidade do ajuste, como já abordado.

<sup>4</sup> Ambos os modelos foram rodados em uma máquina com *Windows 11*, tendo como principais especificações um processador Intel i7-11800H 2.30Ghz e memória RAM 3200MHz 16GB.

## 5 Conclusão

Em síntese, o presente trabalho buscou introduzir uma extensão multivariada e multifatorial para a classe de modelos de volatilidade estocástica (SV) estimados via INLA, a partir de estudo de simulações e da investigação da dinâmica de volatilidade de cotações para índices selecionados.

A formulação proposta foi empregada, primeiramente, na avaliação de parâmetros estimados para 10 séries simuladas de volatilidade (e log-retornos). Pôde-se constatar que o modelo empregado foi capaz de gerar estimativas próximas aos valores verdadeiros dos parâmetros assumidos, tanto no cenário em que são consideradas apenas 5 das séries, quanto no cenário em que todas são efetivamente incluídas na análise, com relativo melhor desempenho apontado no primeiro caso. Outro achado importante se dá no comparativo de tempo para execução entre a metodologia introduzida e a alternativa próxima, cuja estimação é obtida por meio de técnicas de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). Conforme o número de observações aumenta, o método aproximado sugerido no trabalho se torna progressivamente mais vantajoso no que diz respeito à eficiência computacional, medida pela diferença nos tempos totais decorridos para estimação.

Já na seção empírica do *paper*, realizou-se estimação das volatilidades para os log-retornos dos índices *Dow Jones Industrial*, *Ibovespa*, *Índice de Precios y Cotizaciones*, *FTSE 100* e *SSE Composite Index*, verificando-se, posteriormente, o desempenho medido em termos de acurácia e eficiência computacional. Em relação à alternativa baseada em MCMC, os resultados apontam para a maior viabilidade de estimação de modelos SV multivariados por meio da metodologia baseada em INLA, com pouco ou nenhum custo em termos de qualidade de ajuste e ganhos importantes do ponto de vista do tempo necessário para se estimar os parâmetros de interesse.

Do ponto de vista da acurácia dos modelos testados, a formulação proposta se saiu melhor ou muito próxima da sua contraparte baseada em métodos de simulações para quase todos os ativos analisados e em quase todas as métricas colocadas. Em linhas gerais, os números não apresentam diferença muito relevante e é possível dizer que, ao menos para o índice bolsa chinesa de Xangai (SSE), o modelo estimado via MCMC foi consistentemente mais acurado. Por outro lado, a estimação via INLA teve um tempo total decorrido para execução até 27 vezes menor que a alternativa, novamente provando-se mais eficiente no sentido computacional.

Por fim, generalizações ao modelo proposto no trabalho poderiam auxiliar na melhor compreensão dos padrões de volatilidade para uma diversidade maior de séries de ativos financeiros, contribuindo para o avanço das formulações multivariadas no contexto

de INLA. Entre algumas possibilidades, cita-se a elaboração de uma análise de *value at risk* (VaR) e a introdução de outras especificações que permitam melhor modelagem de características frequentemente atribuídas a séries financeiras, como, por exemplo, a presença de efeito alavanca (“*leverage effect*”) e caracterização como processos de memória longa. No último caso, um caminho particularmente atrativo é o da análise a partir de dados intradiários, uma vez que o grande volume de observações implicado deve favorecer consideravelmente o emprego de metodologias como INLA em oposição às tradicionais técnicas baseadas em MCMC.

## Referências

- ACHCAR, J. A.; CEPEDA-CUERVO, E.; BAROSSO-FILHO, M. Multivariate volatility models: an application to Ibovespa and Dow Jones Industrial. **Cuadernos de Economía**, Cuadernos de Economía, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional, v. 31, n. 56, p. 301–320, 2012.
- ALIZADEH, S.; BRANDT, M.; DIEBOLD, F. Range-based estimation of stochastic volatility models. **The Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 57, n. 3, p. 1047–1091, 2002.
- ANDERSEN, T.; SORENSEN, B. GMM estimation of a stochastic volatility model: a Monte Carlo study. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 14, n. 3, p. 328–352, 1996.
- ANDERSEN, T.; SORENSEN, B.; CHUNG, H.-J. Efficient method of moments estimation of a stochastic volatility model: A Monte Carlo study. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 91, n. 1, p. 61–87, 1999.
- ASAI, M.; MCALEER, M.; YU, J. Multivariate stochastic volatility: A review. **Econometric Reviews**, Taylor & Francis, v. 25, n. 2-3, p. 145–175, 2006.
- BLACK, F. Studies of stock market volatility changes. **Proceedings of the 1976 American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section**, American Statistical Association, 1976.
- BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.
- \_\_\_\_\_. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. **The Review of Economics and Statistics**, JSTOR, p. 498–505, 1990.
- CHAIM, P.; LAURINI, M. P. **Ensaio em econometria financeira**. 131 p. Tese (Doutorado em Economia Aplicada) — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Ribeirão Preto, 2019.
- DANIELSSON, J. Multivariate stochastic volatility models: estimation and a comparison with VGARCH models. **Journal of Empirical Finance**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 155–173, 1998.
- DURHAM, G. Monte carlo methods for estimating, smoothing, and filtering one-and two-factor stochastic volatility models. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 133, n. 1, p. 273–305, 2006.
- EHLERS, R.; ZEVALLOS, M. Bayesian estimation and prediction of stochastic volatility models via INLA. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, Taylor & Francis, v. 44, n. 3, p. 683–693, 2015.



- ENGLE, R. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. **Econometrica**, Wiley-Blackwell, v. 50, n. 4, p. 987–1007, 1982.
- HARVEY, A. **Forecasting, Structural Time Series and the Kalman Filter**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- HARVEY, A.; RUIZ, E.; SHEPHARD, N. Multivariate stochastic variance models. **The Review of Economic Studies**, Oxford University Press, v. 61, n. 2, p. 247–264, 1994.
- HARVEY, A.; SHEPHARD, N. Estimation of an asymmetric stochastic volatility model for asset returns. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 14, n. 4, p. 429–434, 1996.
- HOSSZEJNI, D.; KASTNER, G. Modeling Univariate and Multivariate Stochastic Volatility in R with stochvol and factorstochvol. **Journal of Statistical Software**, v. 100, p. 1–34, 2021.
- JACQUIER, E.; POLSON, N.; ROSSI, P. Models and priors for multivariate stochastic volatility. Centre Interuniversitaire de Recherche en Analyse des Organisations (CIRANO), 1995.
- KASTNER, G.; FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. Ancillarity-sufficiency interweaving strategy (ASIS) for boosting MCMC estimation of stochastic volatility models. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 76, n. 1, p. 408–423, 2014.
- KASTNER, G.; FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S.; LOPES, H. Efficient bayesian inference for multivariate factor stochastic volatility models. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, Taylor & Francis, v. 26, n. 4, p. 905–917, 2017.
- KIM, S.; SHEPHARD, N. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. **The Review of Economic Studies**, Oxford University Press, v. 65, n. 3, p. 361–393, 1998.
- MARTINO, S. **Approximate bayesian inference for multivariate stochastic volatility models**. Trondheim, Norway, 2007.
- MARTINO, S. et al. Estimating stochastic volatility models using integrated nested laplace approximations. **European Journal of Finance**, Taylor & Francis, v. 17, n. 7, p. 487–503, 2011.
- MARTINS, T. et al. Bayesian computing with INLA: new features. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 67, p. 68–83, 2013.
- NELSON, D. **The time series behavior of stock market volatility and returns**. 174 p. Tese (Doutorado em Economia) — Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1988.
- PHILIPOV, A.; GLICKMAN, M. Multivariate stochastic volatility via wishart processes. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 24, n. 3, p. 313–328, 2006.

- POLSON, N.; ROSSI, P.; JACQUIER, E. Bayesian analysis of stochastic volatility models. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 20, n. 1, p. 69–87, 1994.
- QUINTANA, J.; WEST, M. An analysis of international exchange rates using multivariate DLM's. **Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)**, Wiley Online Library, v. 36, n. 2-3, p. 275–281, 1987.
- RAJARATNAM, B.; SPARKS, D. MCMC-based inference in the era of big data: A fundamental analysis of the convergence complexity of high-dimensional chains. **arXiv e-prints**, p. arXiv-1508, 2015.
- RAVISHANKER, N.; RAMAN, B.; SOYER, R. **Dynamic Time Series Models using R-INLA: An Applied Perspective**. Boca Raton: CRC Press, 2022.
- RAY, B.; TSAY, R. Long-range dependence in daily stock volatilities. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 18, n. 2, p. 254–262, 2000.
- RUE, H.; MARTINO, S. Approximate Bayesian inference for hierarchical Gaussian Markov random field models. **Journal of Statistical Planning and Inference**, Elsevier, v. 137, n. 10, p. 3177–3192, 2007.
- RUE, H.; MARTINO, S.; CHOPIN, N. Approximate bayesian inference for latent gaussian models by using integrated nested laplace approximations. **Journal of the Royal Statistical Society**, Blackwell, v. 71, n. 2, p. 319–392, 2009.
- RUIZ-CÁRDENAS, R.; KRAINSKI, E.; RUE, H. Direct fitting of dynamic models using integrated nested laplace approximations—INLA. **Computational Statistics & Data Analysis**, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 1808–1828, 2012.
- SANDMANN, G.; KOOPMAN, S. J. Estimation of stochastic volatility models via Monte Carlo maximum likelihood. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 87, n. 2, p. 271–301, 1998.
- SHAPOVALOVA, Y. “Exact” and approximate methods for bayesian inference: Stochastic volatility case study. **Entropy**, MDPI, v. 23, n. 4, p. 466, 2021.
- TAYLOR, S. **Modelling Financial Time Series**. Hoboken: John Wiley & Sons, 1986.
- YU, J.; MEYER, R. Multivariate stochastic volatility models: Bayesian estimation and model comparison. **Econometric Reviews**, Taylor & Francis, v. 25, n. 2-3, p. 361–384, 2006.