

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de
Ribeirão Preto
Departamento de Economia
Programa de Pós-graduação em Economia

Igor Soares Costa

Premiação a condutores como estratégia de fiscalização no trânsito

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Donizeti Pereira Bertolai

Ribeirão Preto

2023

Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Fabio Augusto Reis Gomes
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de
Ribeirão Preto

Prof. Dr. Milton Barossi Filho
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Luciano Nakabashi
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia

IGOR SOARES COSTA

Premiação a condutores como estratégia de fiscalização no
trânsito

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Jefferson Donizeti Pereira Bertolai

Ribeirão Preto

2023

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Versão Corrigida. A original encontra-se disponível na FEA-RP/USP

Costa, Igor Soares
Premiação a condutores como estratégia de fiscalização no trânsito/ Igor Soares
Costa; Orientador: Prof. Dr. Jefferson Donizeti Pereira Bertolai
Ribeirão Preto, 2023- 84 p. : il.; 30cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2023.

1.Fiscalização de trânsito. 2. Jogo de fiscalização. 3. Premiação a motoristas. I.
Orientador: Jefferson Donizeti Pereira Bertolai. II. Universidade de São Paulo -
Campus Ribeirão Preto. III. Faculdade de Economia, Administração e Contabili-
dade de Ribeirão Preto. IV. Premiação a condutores como estratégia de fiscalização
no trânsito.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Marcio e Angela, e ao meu irmão, Caio, pelo incentivo e carinho. Vocês foram, são e serão essenciais na minha vida.

Ao meu orientador, Professor Jefferson, pelo apoio e suporte desde o tempo de graduação. Com toda certeza, todas as conversas e ensinamentos foram e serão fundamentais para a forma como eu penso Economia.

Aos Professores, os quais foram importante na minha formação.

Aos membros da banca, pelos valiosos comentários.

Aos meus amigos, que sempre estiveram presente.

Aos funcionários da FEARP e do Departamento de Economia, por todo o apoio institucional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Costa, Igor Soares. Premiação a condutores como estratégia de fiscalização no trânsito. Dissertação (Master Degree in Economics) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo. Ribeirão Preto, 2023

O modelo para a interação estratégica entre a fiscalização de excesso de velocidade e condutores de veículos proposto por Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) é estendido para comportar o caso de múltiplos condutores. Tal generalização é utilizada para avaliar o efeito de uma política de premiação a condutores não autuados pela fiscalização, como o Registro Nacional Positivo de Condutores (RNPC), que passou a vigorar no Brasil em 2022. Como resultado, a previsão do modelo é que para regiões até então fiscalizadas com radares portáteis *uma intensificação no uso de radares fixos nas localidades relativamente mais perigosas induzida por uma premiação suficientemente alta e abandono da premiação nas demais localidades.*

Palavras-chaves: fiscalização de trânsito, jogo de fiscalização, premiação a motoristas

Abstract

Costa, Igor Soares. Driver rewards as a traffic enforcement strategy.. Dissertação (Mestrado em Economia) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo. Ribeirão Preto, 2023

The strategic interaction model between speeding enforcement and vehicle drivers proposed by Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) is extended to the case of multiple drivers. Such a generalization is used to assess the effect of a policy awarding drivers who have not been fined by the inspectors, such as the National Positive Drivers Registry (RNPC), which came into force in Brazil in 2022. As a result, the prediction of the model is that for regions previously monitored with mobile radar *an intensification in the use of fixed speed cameras in the relatively more dangerous locations induced by a sufficiently high reward and abandonment of the reward in other locations.*

Key-words: traffic enforcement, enforcement game, driver rewards

Sumário

	Sumário	7
1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Literatura Relacionada	10
2	UM MODELO PARA FISCALIZAÇÃO DE VELOCIDADE	13
3	O CASO COM MÚLTIPLOS CONDUTORES	19
3.1	Um esquema de fiscalização com premiação	23
3.2	Previsões de comportamento	28
3.3	Efeitos da premiação	67
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	74
	APÊNDICES	77
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES	78

1 Introdução

Os custos para a economia de acidentes no trânsito são diversos e significativos, recursos que seriam aproveitados para diversos fins alternativos são realocados em ramificações das consequências de acidentes¹. Como destacado por Bacchieri e Barros (2011), cerca de 1,2 milhão de pessoas morreram devido a acidentes de trânsito no ano estudado, sendo a maior parte concentrada em países de baixa renda. Os autores citam que, segundo estimativa da Organização Mundial da Saúde (OMS), os custos dos acidentes de trânsito superam R\$ 500 bilhões por ano no mundo. Dizem ainda que o trânsito no Brasil tem um elevado número de acidentes, enquanto o número de mortos e feridos grave superam 150 mil pessoas.

Apesar dos custos diretos e indiretos dos Acidentes de Transporte Terrestres, a fiscalização de excesso de velocidade não é um consenso entre boa parte da população brasileira. Em particular, a característica de arrecadação da multa é frequentemente criticada, parte dos condutores dizem que é apenas uma forma de arrecadar dinheiro dos motoristas e não cumpre o seu papel pedagógico sobre a importância de respeitar as leis de trânsito².

Outra característica que é frequentemente criticada no trânsito é a ausência de aviso prévio da localização dos radares de fiscalização. Em agosto de 2019, atendendo demanda de parte dos eleitores, o Governo Federal do Brasil suspendeu o uso de radares do tipo móveis³, permitindo a fiscalização apenas com radares do tipo fixo, os quais são montados sobre pórticos ou postes e a posição é previamente informada.

Motivados a entender o efeito da proibição de radares do uso de radares do tipo móvel promovida pelo Governo Federal do Brasil em agosto de 2019, Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) propuseram um modelo de Teoria dos Jogos para estudar a interação estratégica entre condutores de veículos e a fiscalização de velocidade. Desta forma, foram capazes de avaliar o efeito da proibição, com a opção de fiscalização por radares fixos ainda disponível no modelo.

Em maio de 2022, o Contran (Conselho Nacional de Trânsito) criou por meio de uma deliberação⁴, o Registro Nacional Positivo de Condutores (RNPC), que passou a vigorar em Setembro do mesmo ano (ver InfoMoney (2022)). Trata-se de um registro de motoristas que não cometeram infração de trânsito nos últimos doze meses. Os dados registrados no RNPC podem ser utilizados para fornecer benefícios de qualquer natureza

¹ Um exemplo claro é o custo de internações hospitalares (ANDRADE; JORGE, 2017).

² Ver G1 (2019).

³ Ver Folha (2019).

⁴ Ver DOU (2022) e NEXO (2022).

aos cadastrados. Cada ente da Federação poderá utilizar os dados para conceder benefícios fiscais ou tarifários aos cadastrados, sendo dada a liberdade de legislação específica para a União, os Estados, o Distrito Federal e os municípios.

No começo de 2023, aproximadamente 3 milhões de motoristas já haviam aderido ao programa⁵. Em compensação, os parceiros privados e públicos que também aderirem ao programa receberão um selo de “Parceiro do Bom Condutor”, que podem utilizar em campanhas publicitárias e produtos, de forma a sinalizar que colaboram com o programa⁶.

Neste trabalho será proposto uma extensão do modelo de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) para o caso em que há dois condutores na interação estratégica entre fiscalização de excesso de velocidade e condutores de veículos. Tal generalização será útil para entender a dinâmica de um eventual esquema de premiação de bons condutores, isto é, transferência de renda de condutores que não respeitam a regra de velocidade para os quais respeitem. Portanto, entender os efeitos de uma esquema de premiação por bom comportamento no trânsito previstos pela Teoria Econômica.

Espera-se então com este trabalho dar uma contribuição na discussão sobre os efeitos esperados do o Registro Nacional Positivo de Condutores e, por consequência, dos resultados sobre a interação estratégica dos motoristas e da fiscalização de velocidade. Para além da importante discussão de política pública, este trabalho se insere em uma agenda de dar suporte teórico aos fatos bem documentados pela literatura empírica.

A principal previsão deste trabalho para os efeitos da premiação ao bom comportamento no trânsito pode ser interpretado como uma intensificação do uso de radares fixos, visando eliminar por completo o excesso de velocidade, por meio de uma premiação suficientemente alta nas localidades relativamente mais perigosas, enquanto nas localidades mais perigosas a premiação possui efeito nulo. Por fim, nas localidades pouco perigosas, a premiação possui efeito de desestimular a fiscalização e incentivar o excesso de velocidade por parte dos condutores.

O trabalho está organizado em capítulos e seções. Na seção 1.1 será feita uma breve revisão da Literatura relacionada ao tema. No capítulo 2 será apresentado um breve resumo do modelo de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), o qual será base para as demais seções. No capítulo 3 será apresentado o modelo de interação estratégica entre fiscal e condutores (com dois condutores). Na seção 3.1 o esquema de premiação é introduzido no modelo. Na seção 3.2 será calculado e apresentado as previsões (equilíbrios) do modelo. Na seção 3.3 será discutido os efeitos da premiação. Por fim, no capítulo 4 será feito um registro das observações finais.

⁵ Ver InfoMoney (2023).

⁶ Uma lista de parceiros está disponível em Senatran (2023).

1.1 Literatura Relacionada

Em seu artigo seminal, Becker (1968) apresenta um ferramental para estudar violações do ponto de vista econômico, em particular, violações de trânsito. O autor propõe que o infrator leva em consideração a relação entre a utilidade esperada do ganho da infração e o custo associado a tal ato. Todavia, Bjørnskau e Elvik (1992) discutem que esta abordagem não é adequada para o contexto do trânsito. Segundo os autores, o ferramental de Becker (1968) é insuficiente para acomodar a interação estratégica entre a fiscalização de trânsito e os condutores. Estes responderiam ao cumprimento da lei, enquanto o comportamento da fiscalização não se alteraria pela mudança do comportamento dos condutores.

Na mesma linha, Tsebelis (1990) argumenta que a abordagem proposta por Becker (1968) considera o problema do crime, aplicável ao trânsito em particular, como um problema de decisão apenas do criminoso (motorista) ao desconsiderar a fiscalização da lei como um agente estratégico fundamental.

Desta maneira, Tsebelis (1990) propõe um modelo de Teoria dos Jogos para estudar a interação entre crimes e fiscalização, em que cada um dos jogadores poderia mudar sua estratégia como resposta à escolha do outro. Assim, propõem um jogo simultâneo em que a fiscalização opta por fazer cumprir a lei ou não, enquanto o criminoso escolhe entre violar a regra ou não. Como conclusão, obtém que tanto o aumento da pena esperada, quanto de medidas de bem-estar não afetam, em equilíbrio, a frequência de violações da lei. Contudo, o aumento da pena desestimula a execução da lei em equilíbrio.

O modelo de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), inserido nessa discussão, pode ser visto como uma extensão do modelo de Bjørnskau e Elvik (1992) para a situação em que há mais de uma localidade a ser fiscalizada e na qual existe a possibilidade de fiscalização também por meio do emprego de radares fixos (cujo posicionamento é previamente informado para os condutores). Ainda neste contexto, Elvik (2014) e Hollander e Prashker (2006) revisam a literatura que utiliza Teoria dos Jogos para explicar o comportamento de agentes no trânsito.

Segundo Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), a diferença estratégica fundamental entre radares móveis e fixos reside no aviso prévio do posicionamento do radar. Enquanto nos móveis não há aviso, nos fixos a informação é previamente revelada. Como conclusão, fizeram uma previsão de uma intensificação da fiscalização com uso de radares fixos para áreas mais perigosas, que antes eram fiscalizadas com radares móveis, e uma descontinuidade nas regiões mais seguras.

Elvik (2016b) argumentando que a teoria do comportamento racional não é capaz de explicar os efeitos positivos de campanhas de segurança no trânsito obtidos pela evi-

dencia empírica⁷, o autor argumenta que modelos de Teoria dos Jogos são mais adequados para expor os limites da racionalidade dos usuários do trânsito e explicar a relação entre regras formais e informais no trânsito. Desta maneira, propõe um modelo de teoria dos jogos entre ciclistas e motoristas para dar suporte a sua crítica. No jogo proposto, o ciclista decide inicialmente entre pedalar pela estrada, ceder ao carro, esperando para atravessar até que ele passe ou, por fim, descer da bicicleta e atravessar a rua. Após observar a escolha do ciclista, o motorista decide entre dirigir ou ceder a passagem ao ciclista. Assim, concluí que a previsão do jogo é o ciclista pedalar pela estrada e o motorista ceder a passagem, enquanto a regra formal do trânsito analisada seria o ciclista descer da bicicleta e o motorista dar a passagem.

Reconhecendo a diferença prevista para os efeitos do aumento de multas no comportamento dos usuários do trânsito proporcionada pela abordagem liderada por Becker (1968) e pela proposta por Bjørnskau e Elvik (1992) e Tsebelis (1990), Elvik (2016a) em uma metanálise com nove estudos encontrou que um aumento de até cerca de 100% na multa de trânsito foi relacionado a uma pequena mudança na taxa de violações, enquanto para aumentos maiores, nenhuma redução nas violações foi encontrado. Em outra metanálise com quatro estudos encontrou que um aumento nas multas gerou uma pequena queda na em acidentes fatais, variando entre 1-12%.

A literatura empírica, por sua vez, mostra que velocidade alta é um dos componentes da falta de segurança no trânsito (ver, por exemplo, Theofilatos e Yannis (2014)). Aarts e Schagen (2006), em particular, documentam que a além de afetar a severidade, velocidade alta aumenta a probabilidade de se envolver em acidentes. Por isso, os radares de velocidade são concebidos para garantir o cumprimento das regras de velocidade no trânsito. Utilizando dados de velocidade em rodovias antes e depois da implementação de radares, com medidas de velocidade em rodovias semelhantes no mesmo período como grupo de controle, Wilson et al. (2010) registraram, em 35 estudos, uma redução entre 8% e 70% nos excessos do limite de velocidade.

Para avaliar o impacto das mudanças na legislação de trânsito na Espanha, que impuseram punições mais rigorosas, os estudos de Castillo-Manzano, Castro-Nuño e Pedregal (2011) e Castillo-Manzano et al. (2019) constataram uma redução positiva de acidentes. Uma das reformas mais severas incluiu a alteração do código penal espanhol em 2007, que passou a penalizar infrações como dirigir sob influência de drogas ou álcool, exceder 80 km/h do limite de velocidade em autoestradas e dirigir sem habilitação com prisão, multas substanciais e serviços comunitários como consequências. Castillo-Manzano, Castro-Nuño e Pedregal (2011) registrou uma redução significativa de 534 fatalidades nas rodovias entre novembro de 2007 e dezembro de 2008 após a mudança no código penal. Além disso,

⁷ Cita uma metanálise de 67 estudos apresentada por Phillips, Ulleberg e Vaa (2011), na qual encontrou redução de acidentes entre 9% e 10% como efeito de campanhas de transmissão de segurança no trânsito

Castillo-Manzano et al. (2019) evidenciou que os efeitos da mudança no código penal perduraram ao longo do tempo

Em meados de 2018, a fiscalização de trânsito por meio de radares de velocidade estacionários foi suspensa em Israel, contudo as câmeras continuaram a registrar o comportamento dos motoristas, aproveitando deste evento, Factor, Haviv e Keren (2022) buscaram estimar o efeito da fiscalização em acidentes. Utilizando dados compreendidos entre 2016 e 2018 sobre acidentes que resultaram em vítimas, como também o posicionamento dos radares, propuseram um estudo como um quase-experimento: no grupo experimental incluíram acidentes que ocorreram a uma distância dentro de 1 km do radar, enquanto no grupo controle, os acidentes que ocorreram a mais de 5 km dos radares. Encontraram que antes da suspensão a diferença entre acidentes era de cerca de 22% entre os dois grupos e após a suspensão, a diferença prevista de acidentes entre os dois grupos tornou-se insignificante.

Utilizando dados do censo de 1995 de Israel e dados oficiais de multas emitidas entre 2002 e 2008, Factor (2018) estudou as características socio-demográficas e socioeconômica dos condutores autuados no período. Os resultados obtidos mostram que no país 60% dos condutores na amostra foram multados pelo menos uma vez. Homens recebiam 2,66 multas, em média, enquanto mulheres recebiam uma multa em média. Ainda encontraram que motoristas mais jovens recebiam mais multas do que motoristas mais idosos⁸, condutores com menor renda familiar per capita e menos educados recebiam menos multas do que aqueles com maior renda e mais educados⁹.

Por fim, há evidencia de que o emprego de radares ocultos/móveis/portáteis (cuja localização varia e não é informada previamente) inibe o excesso de velocidade (ver, por exemplo, Ciccone, Goodson e Pollner (1987) para os estados da Virgínia e Maryland, nos EUA, e Pezoldt e Brackett (1987) para o estado do Texas, nos EUA). De acordo com um estudo conduzido por Teed, Lund e Knoblauch (1993), o uso de radares móveis pela polícia teve um impacto na redução da velocidade dos motoristas, embora o efeito foi mais identificado nas imediações da localização do radar. Foi identificado uma redução de 42% para 28% no número de motoristas que excediam a velocidade máxima em 10 milhas por hora próximo ao posicionamento do radar. A uma distância de 1 milha do radar, 38% dos motoristas já estavam dirigindo a uma velocidade superior a 65 milhas por hora e essa porcentagem aumentou para 40% após percorrerem de duas a cinco milhas a partir do radar.

⁸ Os com mais de 60 anos eram autuados 0,47 vezes, em média, enquanto os que tinham entre 16-29 anos recebiam 2,72 multas em média.

⁹ Outra característica que influenciou a quantidade de multas foi a religião dominante no país, judeus recebiam menos multas do que os não judeus. Por fim, também encontraram que motoristas que acumularam mais quilometragem foram multados mais vezes, aqueles dirigindo caminhões foram autuados duas vezes mais dos que digiram carros.

2 Um modelo para fiscalização de velocidade

A fim de subsidiar a exposição do modelo com múltiplos condutores, esta seção apresenta os principais componentes do modelo proposto por Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), no qual há somente um condutor. Embora resumida, a exposição aqui apresentada reproduz vários trechos da exposição de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021)¹.

Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) estudam um jogo entre dois jogadores: jogador 0 e jogador 1. O jogador 1 é denominado **Condutor** e precisa decidir se excede ou não a máxima velocidade permitida em uma determinada rodovia. O jogador 0 é denominado **Fiscal** e é responsável por fiscalizar o cumprimento da regra que estabelece o limite máximo de velocidade nesta rodovia. Por simplicidade, os autores supõem que o veículo utilizado pelo Condutor é capaz de desenvolver somente dois níveis de velocidade: um nível baixo, denotado por v_b , e um nível alto, denotado por v_a e tal que $v_a > v_b$. Supõem ainda que há somente dois locais na rodovia em que existe um limite máximo para a velocidade dos veículos: denominados local 1 e local 2, denotado respectivamente por l_1 e l_2 . O limite máximo de velocidade nestas duas localidades é dado por \bar{v} tal que $v_b < \bar{v} < v_a$. Há também uma localidade na qual o Fiscal pode desempenhar uma atividade (produtiva ou de lazer) alternativa à fiscalização: denotada por l_0 .

O Condutor do veículo precisa decidir sob qual velocidade transitará com seu veículo em l_1 e em l_2 . A atratividade da velocidade alta (v_a) reside no fato de que ela permite chegar ao destino em menos tempo. A atratividade da velocidade baixa (v_b) decorre do fato de esta respeitar o limite máximo \bar{v} e, portanto, evitar uma eventual punição por violação do limite. Formalmente, o Condutor possui quatro possibilidades para a *agenda* de velocidade: exceder o limite de velocidade \bar{v} em nenhuma localidade, $a_0 = (v_b, v_b)$; exceder o limite \bar{v} somente na localidade 1, $a_1 = (v_a, v_b)$; exceder \bar{v} somente em l_2 , $a_2 = (v_b, v_a)$; e exceder \bar{v} em todas as localidades, $a_3 = (v_a, v_a)$. Com isso, seu conjunto de escolhas (não probabilísticas) possíveis é $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$.

O Fiscal possui a tarefa de fiscalizar o respeito ao limite \bar{v} por meio de aparelhos de aferição de velocidade, denominados **radares**. Há dois tipos de radares à sua disposição: radares móveis e de radares fixos. A diferença estratégica essencial entre os dois tipos de radares reside na informação previamente provida ao Condutor: o eventual posicionamento de radares fixos é previamente informado ao Condutor, enquanto que o eventual posicionamento de radares móveis não é conhecido pelo Condutor.

A margem de atuação do Fiscal permite escolher quais localidades fiscalizar e qual

¹ Explicações mais detalhadas sobre os objetos e conceitos utilizados podem ser encontradas em Bertolai, Costa e Nakabashi (2021).

tipo de radar utilizar em cada localidade escolhida para ser fiscalizada². Formalmente, a fiscalização por meio de um radar móvel (portátil) é representada por r_p , a fiscalização por radar fixo é representado por r_f e o posicionamento de nenhum radar é denotado por r_n . Assim, levando em conta que há duas localidades com limite de velocidade, a escolha do Fiscal pode ser representada por um par $r = (r_1, r_2) \in R$, em que

$$\begin{aligned} R &= \{r_n, r_p, r_f\} \times \{r_n, r_p, r_f\} \\ &= \{(r_n, r_n), (r_n, r_p), (r_n, r_f), (r_p, r_n), (r_p, r_p), (r_p, r_f), (r_f, r_n), (r_f, r_p), (r_f, r_f)\}. \end{aligned}$$

é o conjunto de ações possíveis para o Fiscal. Como exemplos, $r = (r_p, r_f)$ denota a situação na qual o Fiscal posicionou um radar portátil em l_1 e um radar fixo em l_2 , enquanto que $r = (r_p, r_n)$ denota a situação na qual o Fiscal decidiu não fiscalizar l_2 e posicionou um radar portátil em l_1 .

Considere a situação em que o Fiscal posicionou radares em $n \in \{0, 1, 2\}$ localidades, o Condutor excedeu a velocidade em $e \in \{0, 1, 2\}$ localidades e que tal posicionamento e tais excessos resultaram em $m \in \{0, 1, 2\}$ autuações (multas) ao Condutor. Os níveis de satisfação com (n, m, e) do Fiscal e do Condutor nesta situação são denominados níveis de *utilidade* e são dados, respectivamente, por

$$u_0(n, m, e) = (\alpha + \beta)m - \alpha n - \gamma e \quad (2.1)$$

$$u_1(m, e) = \mu e - (\mu + \eta)m \quad (2.2)$$

em que $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\eta > 0$, $\mu > 0$ e $\gamma > 0$ ³.

O nível de satisfação de cada jogador com cada combinação de escolhas (r, a) é denominado *payoff* e decorre de (2.1) e (2.2). Cada combinação de escolhas $(r, a) \in R \times A_1$ implica um determinado $(n(r, a), m(r, a), e(r, a)) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$, o qual determina o *payoff* de cada jogador de acordo com (2.1) e (2.2). A tabela a seguir apresenta o *payoff* dos dois jogadores para cada possível (r, a) .

Por exemplo, somente um radar é posicionado para aferição de velocidade quando o resultado do jogo é $(r, a) = [(r_n, r_f), (v_b, v_a)]$. Logo, o custo de oportunidade da fiscalização

² A fim de preservar a hipótese de que cada radar móvel precisa ser operado pessoalmente, Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) supõem que o jogador 0 (Fiscal) é a representação de um time de dois fiscais. Neste caso, satisfação do Fiscal definida em (2.1) é interpretada como o interesse da sociedade no cumprimento dos limites de velocidade.

³ Conforme discutido por Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), a condição $\gamma > 0$ estabelece que o Fiscal menos satisfeito quando o Condutor excede o limite de velocidade. A condição $\alpha > 0$ reflete o fato de a fiscalização possuir um custo de oportunidade: cada fiscalização diminui a satisfação do Fiscal em α unidades. Ou seja, α é o custo de oportunidade de cada fiscalização. A hipótese $\beta > 0$ estabelece que a satisfação do Fiscal em autuar o Condutor quando este excede \bar{v} é estritamente maior do que o custo de oportunidade da fiscalização requerida para tal autuação (ou seja, $\alpha + \beta > \alpha$). A condição $\mu > 0$ reflete o fato de que exceder \bar{v} aumenta a satisfação do Condutor, uma vez que permite chegar mais rapidamente ao seu destino. A hipótese $\eta > 0$ estabelece que a satisfação do Condutor em exceder \bar{v} para chegar ao destino mais cedo é estritamente menor do que a punição associada a autuação por limite de velocidade (ou seja, $\mu < \mu + \eta$). A ausência de n em (2.2) estabelece que o Condutor não se importa com o posicionamento do Fiscal quando sua velocidade não excede \bar{v} .

		Valores de a			
		(v_b, v_b)	(v_a, v_b)	(v_b, v_a)	(v_a, v_a)
Valores de r	(r_n, r_n)	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 2)$
	(r_n, r_p)	$(1, 0, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$
	(r_n, r_f)	$(1, 0, 0)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$
	(r_p, r_n)	$(1, 0, 0)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 1, 2)$
	(r_p, r_p)	$(2, 0, 0)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 2, 2)$
	(r_p, r_f)	$(2, 0, 0)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 2, 2)$
	(r_f, r_n)	$(1, 0, 0)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 0, 1)$	$(1, 1, 2)$
	(r_f, r_p)	$(2, 0, 0)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 2, 2)$
	(r_f, r_f)	$(2, 0, 0)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 1, 1)$	$(2, 2, 2)$

Possíveis valores para $(n(r, a), m(r, a), e(r, a))$

Figura 1 – Possíveis valores para $(n(r, a), m(r, a), e(r, a))$

é incorrido somente uma vez ($n = 1$). Como o único radar em operação foi posicionado em l_2 e o Condutor excedeu \bar{v} em l_2 , então ocorre uma autuação por excesso de velocidade ($m = 1$). Tendo em vista que o Condutor excedeu \bar{v} em l_2 , e somente em l_2 , tem-se $e = 1$. Usando tais resultados e (2.1), tem-se que o *payoff* do Fiscal sob $(r, a) = [(r_n, r_f), (v_b, v_a)]$ é dado por $\pi_0(r, a) = u_0(1, 1, 1) = \beta - \gamma$. Similarmente, o *payoff* do Condutor sob o mesmo (r, a) é implicado por (2.2) e dado por $\pi_1(r, a) = u_1(1, 1) = -\eta$. A justificativa para cada uma das demais células da tabela acima é análoga. Portanto, a matriz de *payoffs* $[\pi_0(r, a), \pi_1(r, a)]$ implicada por (2.1), (2.2) é apresentada na Figura 1.

		Condutor			
		(v_b, v_b)	(v_a, v_b)	(v_b, v_a)	(v_a, v_a)
Fiscal	(r_n, r_n)	$0, 0$	$-\gamma, \mu$	$-\gamma, \mu$	$-2\gamma, 2\mu$
	(r_n, r_p)	$-\alpha, 0$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - \gamma, -\eta$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	(r_n, r_f)	$-\alpha, 0$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - \gamma, -\eta$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	(r_p, r_n)	$-\alpha, 0$	$\beta - \gamma, -\eta$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	(r_p, r_p)	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$
	(r_p, r_f)	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$
	(r_f, r_n)	$-\alpha, 0$	$\beta - \gamma, -\eta$	$-\alpha - \gamma, \mu$	$\beta - 2\gamma, \mu - \eta$
	(r_f, r_p)	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$
	(r_f, r_f)	$-2\alpha, 0$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$\beta - \alpha - \gamma, -\eta$	$2(\beta - \gamma), -2\eta$

Matriz de *payoffs* para cada (r, a)

Conforme discutido anteriormente, a utilização ou não de radares fixos e o posici-

onamento destes na rodovia são informados previamente ao Condutor. Esta informação prévia, no entanto, não é suficiente para o Condutor concluir que não há fiscalização nas localidades em que não há radar fixo. Formalmente, o Condutor é capaz de observar previamente quatro diferentes tipos de informação: i_0, i_1, i_2, i_3 . Ao observar i_0 , o Condutor é informado de que o Fiscal escolheu não utilizar radares fixos (ou seja, de que $r \in \{(r_n, r_n), (r_n, r_p), (r_p, r_n), (r_p, r_p)\}$). Após observar i_1 , o Condutor sabe que o Fiscal escolheu usar radar fixo somente em l_1 (ou seja, que $r \in \{(r_f, r_n), (r_f, r_p)\}$). A informação i_2 diz que o Fiscal escolheu usar radar fixo somente em l_2 (ou seja, que $r \in \{(r_n, r_f), (r_p, r_f)\}$). Por fim, ao observar i_3 , o Condutor descobre que o Fiscal escolheu usar radar fixo em todas as localidades (ou seja, que $r = (r_f, r_f)$). Esta estrutura informacional é modelada por Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) conforme apresentado em sua Figura 4, reproduzida aqui na Figura 2 por conveniência.

O jogo apresentado na Figura 2 é um jogo dinâmico de dois estágios com informação imperfeita e possui quatro subjogos⁴. Há um subjogo trivial após i_3 , no qual somente o Condutor joga. Os demais três subjogos são jogos simultâneos entre o Fiscal e o Condutor. Em todos os subjogos, o conjunto de possíveis ações para o Condutor é $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$. Para cada $s \in \{0, 1, 2\}$, o conjunto de ações do Fiscal no subjogo após i_s é dado por A_0^s tal que $A_0^0 = \{(r_n, r_n), (r_p, r_n), (r_n, r_p), (r_p, r_p)\}$, $A_0^1 = \{(r_f, r_n), (r_f, r_p)\}$ e $A_0^2 = \{(r_n, r_f), (r_p, r_f)\}$.

Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) demonstram que todo equilíbrio de Nash em cada subjogo não trivial prevê comportamento probabilístico⁵ para todos os jogadores: há somente equilíbrios de Nash em estratégias mistas. Para cada $s \in \{0, 1, 2\}$, o comportamento previsto para o jogador $k \in \{0, 1\}$ no subjogo após i_s é descrito por uma distribuição de probabilidade sobre A_k^s , em que $A_1^s = A_1$. Antecipando os equilíbrios de Nash de cada subjogo, o Fiscal escolhe o padrão de fiscalização com radares fixo (i_0, i_1, i_2 ou i_3) para maximizar seu *payoff* esperado. O conceito de equilíbrio resultante de previsões de comportamento assim construídas é o de Equilíbrio de Nash Perfeitos em Subjogos. A Proposição a seguir reproduz, por conveniência, o principal resultado de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) e descreve o conjunto de equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos do jogo apresentado na Figura 2.

Proposição 2.0.1. (BERTOLAI; COSTA; NAKABASHI, 2021) *A previsão $\sigma = [(s_0, \sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2), (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)]$ para o jogo apresentado na Figura 2 é equilíbrio de*

⁴ Sem considerar o próprio jogo, o qual é um subjogo.

⁵ Para interpretações alternativas sobre previsão de comportamento em termos probabilísticos, ver o trabalho seminal de Harsanyi (1967), Harsanyi (1968a), Harsanyi (1968b) e o livro-texto Gibbons (1992).

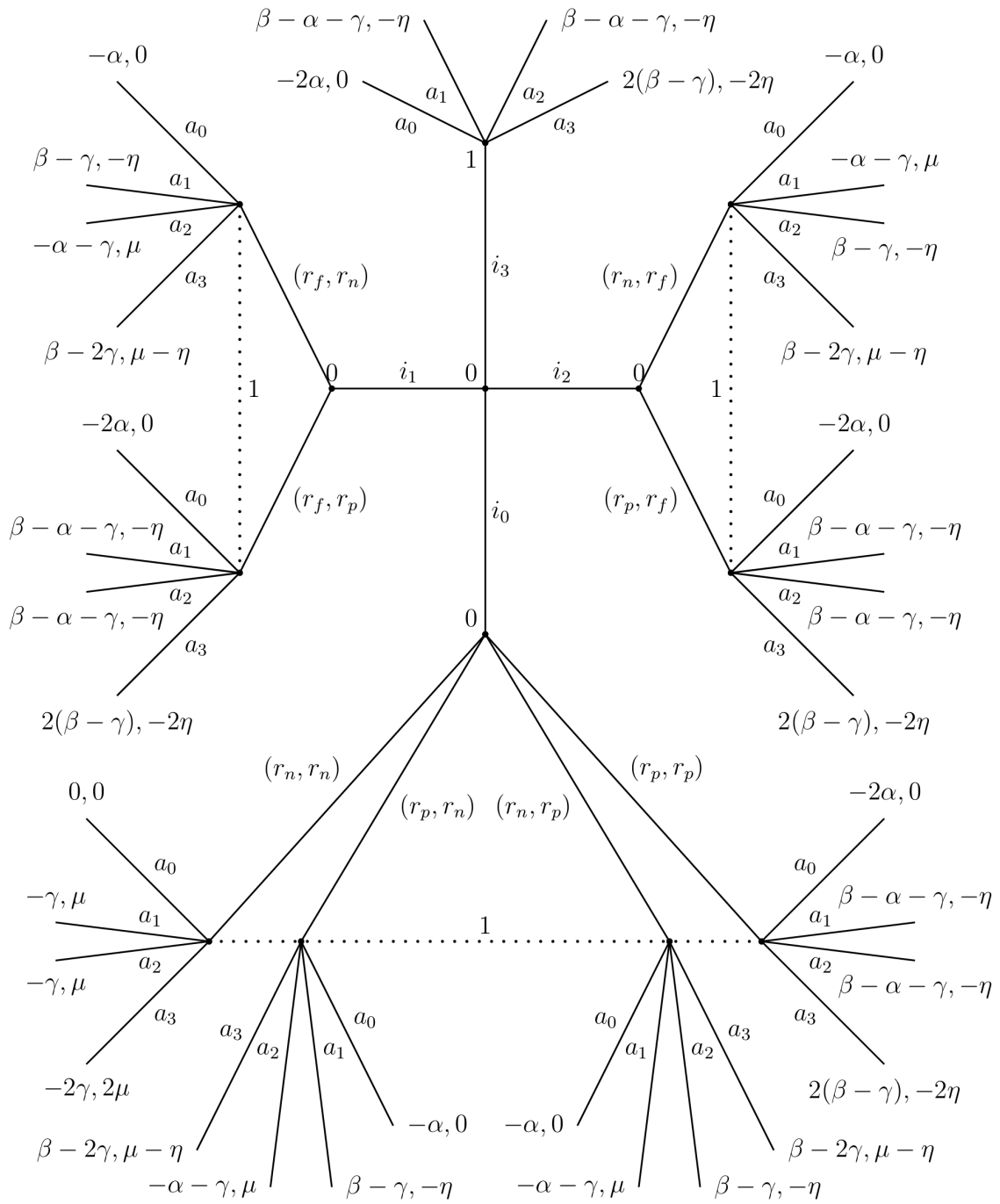


Figura 2 – Fiscalização via radares fixos e portáteis no modelo de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021)

Nash perfeito em subjogos se, e somente se, s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$ e $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ satisfazem

$$\begin{aligned}
 & \sigma_1^3 = [\sigma_1^3(a_0), \sigma_1^3(a_1), \sigma_1^3(a_2), \sigma_1^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \\
 & \begin{cases} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0) \end{cases} , \\
 & \begin{cases} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0) \end{cases} \\
 e & \begin{cases} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - \delta, x, x, \delta - x) \\ \sigma_1^0 = [\sigma_1^0(a_0), \sigma_1^0(a_1), \sigma_1^0(a_2), \sigma_1^0(a_3)] = (1 - \theta - y, y, y, \theta - y) . \end{cases}
 \end{aligned}$$

para algum (x, y) tal que $0 \leq x \leq \min\{\delta, 1 - \delta\}$ e $0 \leq y \leq \min\{1 - \theta, \theta\}$ em que $\delta \equiv \mu/(\mu + \eta) \in (0, 1)$ e $\theta \equiv \alpha/(\alpha + \beta) \in (0, 1)$.

3 O caso com múltiplos condutores

O modelo apresentado na seção 2 é agora generalizado para estudar situações com mais de um Conductor. Considere a situação na qual há dois condutores que trafegam pelas mesmas duas localidades, l_1 e l_2 , e possuem as mesmas opções de velocidade para cada localidade, v_b e v_a . O primeiro condutor a trafegar pelas localidades será denominado **Conductor 1** e também referido como C_1 . O segundo condutor a trafegar pelas localidades será denominado **Conductor 2** e também referido como C_2 . Para manter a relação estratégica estática entre todos os jogadores, suponha que o primeiro condutor a trafegar pelas localidades (C_1) não é capaz de revelar o posicionamento do Fiscal ao outro condutor (C_2) antes de C_2 decidir suas ações¹.

Uma interpretação interessante do modelo com dois condutores é que C_1 representaria metade dos condutores na população, enquanto C_2 representaria a outra metade. Assim, ao exceder a velocidade permitida, um condutor estaria representando metade da população, ou seja, metade da população teria excedido a velocidade. Caso ambos os condutores escolham exceder \bar{v} , a população inteira estaria desrespeitando o limite de velocidade. Por fim, se ambos não desrespeitarem a regra de velocidade, a população inteira estaria respeitando \bar{v} .

Assim, a satisfação do Conductor $j \in \{1, 2\}$ é dada por $u_j(m_j, e_j) = \mu e_j - (\mu + \eta)m_j$, em que e_j é número de localidades nas quais a velocidade de C_j excede \bar{v} e m_j denota a quantidade de multas pagas por C_j . A satisfação do Fiscal ainda é dada por $u_0(m, n, e)$ definida em (2.1), mas agora $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$ e $e = \frac{e_1 + e_2}{2}$. Como cada condutor representa metade da população, é natural tomar a média das multas na satisfação do Fiscal, pois assim se todos os condutores estão excedendo a velocidade, a população toda estaria excedendo e, portanto, o total de multa é unitário.² Os demais casos para m são similares, como também a interpretação para a média para e .

Note que, a satisfação do Fiscal é suposta independente da distribuição de multas e excessos de velocidade entre os condutores. Somente a quantidade total é relevante para o Fiscal. Além disso, a satisfação de um condutor não é diretamente afetada pelo comportamento dos demais condutores³.

¹ Tal hipótese se verifica se não existe comunicação entre os condutores ou quando o posicionamento do Fiscal é revelado para C_1 somente após C_2 trafegar pelas localidades. Este último caso ocorreria se o posicionamento do Fiscal fosse revelado ao C_1 somente via autuação por excesso de velocidade e tal autuação fosse comunicada ao C_1 somente após o C_2 trafegar pelas localidades.

² Desta forma, o modelo fica comparável com Bertolai, Costa e Nakabashi (2021). Neste, o condutor representativo seria a população toda.

³ Uma generalização interessante neste ponto seria permitir que a distribuição de excessos fosse relevante para o bem estar do Fiscal e de cada condutor. Como os condutores de fato interagem entre si no trânsito, seria razoável supor que o excesso de velocidade de um condutor afeta a probabilidade de

Note que o conjunto de ações possíveis para o Fiscal neste novo jogo continua sendo dada por $R = \{r_n, r_p, r_f\} \times \{r_n, r_p, r_f\}$ e disponíveis de acordo com A_0^s para $s \in \{0, 1, 2\}$. O conjunto de ações do condutor 1 é dado por $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ e o conjunto de ações do condutor 2 é dado por $A_2 = A_1$. O jogo implicado por tais hipóteses é apresentado na Figura 3, em que G_s indica o subjogo implicado pela escolha de padrão de fiscalização com radares fixos i_s . Somente C_1 e C_2 possuem conjuntos não triviais de ações possíveis do

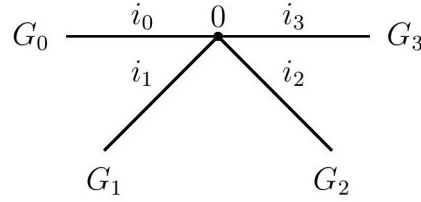


Figura 3 – Escolha de padrão de fiscalização com radares fixos.

subjogo G_3 , pois o Fiscal possui somente uma ação possível neste subjogo: $r = (r_f, r_f)$. O conjunto de ações do jogador $k \in \{1, 2\}$ em G_3 é dado por $A_k^3 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$. Com isto, o Fiscal pode ser omitido na representação do subjogo G_3 na forma normal, a qual é apresentada a seguir.

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	$-2\alpha, 0, 0$	$\lambda - \alpha, 0, -\eta$	$\lambda - \alpha, 0, -\eta$	$2\lambda, 0, -2\eta$
	a_1	$\lambda - \alpha, -\eta, 0$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_2	$\lambda - \alpha, -\eta, 0$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_3	$2\lambda, -2\eta, 0$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$4\lambda + 2\alpha, -2\eta, -2\eta$

Figura 4 – Representação do subjogo G_3 na forma normal ($\lambda = \frac{\beta - \alpha - \gamma}{2}$)

Nos demais subjogos (G_0, G_1 e G_2), todos os jogadores possuem conjuntos não triviais de ações possíveis e, portanto, os três jogadores aparecem explicitamente na representação do subjogo na forma normal.

acidente dos demais condutores de forma não trivial. Para manter a tratabilidade do modelo, esta generalização foi postergada para pesquisa futura.

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	- $\alpha, 0, 0$	- $\alpha - \frac{\gamma}{2}, 0, \mu$	$\lambda, 0, -\eta$	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, 0, \tau$
	a_1	- $\alpha - \frac{\gamma}{2}, \mu, 0$	- $\alpha - \gamma, \mu, \mu$	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, \mu, -\eta$	$\lambda - \gamma, \mu, \tau$
	a_2	$\lambda, -\eta, 0$	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \mu$	$2\lambda + \alpha, -\eta, -\eta$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \tau$
	a_3	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, \tau, 0$	$\lambda - \gamma, \tau, \mu$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, \tau, -\eta$	$2\lambda + \alpha - \gamma, \tau, \tau$

com Fiscal escolhendo $r = (r_n, r_f)$

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	- $2\alpha, 0, 0$	$\lambda - \alpha, 0, -\eta$	$\lambda - \alpha, 0, -\eta$	$2\lambda, 0, -2\eta$
	a_1	$\lambda - \alpha, -\eta, 0$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_2	$\lambda - \alpha, -\eta, 0$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_3	$2\lambda, -2\eta, 0$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$4\lambda + 2\alpha, -2\eta, -2\eta$

com Fiscal escolhendo $r = (r_p, r_f)$

Figura 5 – Representação do subjogo G_2 na forma normal ($\lambda = \frac{\beta - \alpha - \gamma}{2}$ e $\tau = \mu - \eta$)

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	- $\alpha, 0, 0$	$\lambda, 0, -\eta$	- $\alpha - \frac{\gamma}{2}, 0, \mu$	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, 0, \tau$
	a_1	$\lambda, -\eta, 0$	$2\lambda + \alpha, -\eta, -\eta$	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \mu$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \tau$
	a_2	- $\alpha - \frac{\gamma}{2}, \mu, 0$	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, \mu, -\eta$	- $\alpha - \gamma, \mu, \mu$	$\lambda - \gamma, \mu, \tau$
	a_3	$\lambda - \frac{\gamma}{2}, \tau, 0$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, \tau, -\eta$	$\lambda - \gamma, \tau, \mu$	$2\lambda + \alpha - \gamma, \tau, \tau$

com Fiscal escolhendo $r = (r_f, r_n)$

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	- $2\alpha, 0, 0$	$\lambda - \alpha, 0, -\eta$	$\lambda - \alpha, 0, -\eta$	$2\lambda, 0, -2\eta$
	a_1	$\lambda - \alpha, -\eta, 0$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_2	$\lambda - \alpha, -\eta, 0$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_3	$2\lambda, -2\eta, 0$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$4\lambda + 2\alpha, -2\eta, -2\eta$

com Fiscal escolhendo $r = (r_f, r_p)$

Figura 6 – Representação do subjogo G_1 na forma normal ($\lambda = \frac{\beta - \alpha - \gamma}{2}$ e $\tau = \mu - \eta$)

Tabela 1 – Representação do subjogo G_0 na forma normal ($\lambda = \frac{\beta - \alpha - \gamma}{2}$ e $\tau = \mu - \eta$)

		Condutor 1													
		(v_b, v_b)			(v_a, v_b)			(v_b, v_a)			(v_a, v_a)				
Fiscal	(r_n, r_n)	0,	0,	0	$\frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$\frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$-\gamma,$	$2\mu,$	0	(v_b, v_b)	
	(r_p, r_n)	$-\alpha,$	0,	0	$\lambda,$	$-\eta,$	0	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	0		
	(r_n, r_p)	$-\alpha,$	0,	0	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$\lambda,$	$-\eta,$	0	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	0		
	(r_p, r_p)	$-2\alpha,$	0,	0	$\lambda - \alpha,$	$-\eta,$	0	$\lambda - \alpha,$	$-\eta,$	0	$2\lambda,$	$-2\eta,$	0		
	(r_n, r_n)	$-\frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$2\mu,$	μ	(v_a, v_b)	
	(r_p, r_n)	$\lambda,$	0,	$-\eta$	$2\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	$-\eta$	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	$-\eta$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	$-\eta$		
	(r_n, r_p)	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$-\alpha - \gamma,$	$\mu,$	μ	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	μ	$\lambda - \gamma,$	$\tau,$	μ		
	(r_p, r_p)	$\lambda - \alpha,$	0,	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$3\lambda + \alpha,$	$-2\eta,$	$-\eta$		
	(r_n, r_n)	$-\frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$2\mu,$	μ	(v_b, v_a)	
	(r_p, r_n)	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	μ	$-\alpha - \gamma,$	$\mu,$	μ	$\lambda - \gamma,$	$\tau,$	μ		
	(r_n, r_p)	$\lambda,$	0,	$-\eta$	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	$-\eta$	$2\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	$-\eta$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	$-\eta$		
	(r_p, r_p)	$\lambda - \alpha,$	0,	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$3\lambda + \alpha,$	$-2\eta,$	$-\eta$		
	(r_n, r_n)	$-\gamma,$	0,	2μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$\mu,$	2μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$\mu,$	2μ	$-2\gamma,$	$2\mu,$	2μ	(v_a, v_a)	
	(r_p, r_n)	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	0,	τ	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	τ	$\lambda - \gamma,$	$\mu,$	τ	$2\lambda + \alpha - \gamma,$	$\tau,$	τ		
	(r_n, r_p)	$\lambda - \frac{\gamma}{2},$	0,	τ	$\lambda - \gamma,$	$\mu,$	τ	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	τ	$2\lambda + \alpha - \gamma,$	$\tau,$	τ		
	(r_p, r_p)	$2\lambda,$	0,	-2η	$3\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	-2η	$3\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	-2η	$4\lambda + 2\alpha,$	$-2\eta,$	-2η		

3.1 Um esquema de fiscalização com premiação

Considere uma política de fiscalização que devolva para os condutores não autuados por excesso de velocidade uma parcela $\phi \geq 0$ da receita gerada pela atividade de fiscalização. Tal devolução pode ser vista como uma premiação por bom comportamento. A proporção da receita destinada ao Fiscal ($1 - \phi \geq 0$) é suposta suficiente para cobrir seu custo de oportunidade: $(\alpha + \beta)(1 - \phi) > \alpha$. Assim, $\theta < 1 - \phi \leq 1$. Portanto, $0 \leq \phi < 1 - \theta < 1$.

Sob tal esquema de fiscalização, o montante de premiação esperado por um dado condutor ao não ser autuado depende do número de autuações do outro condutor somente se $\phi > 0$.

O conjunto de ações possíveis para o Fiscal neste novo jogo continua sendo dada por $R = \{r_n, r_p, r_f\} \times \{r_n, r_p, r_f\}$ e disponíveis de acordo com A_0^s para $s \in \{0, 1, 2\}$. O conjunto de ações do condutor 1 é dado por $A_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ e o conjunto de ações do condutor 2 é dado por $A_2 = A_1$. O jogo implicado por tais hipóteses é apresentado na Figura 7 a seguir, em que G_s^ϕ indica o subjogo implicado pela escolha de padrão de fiscalização com radares fixos i_s e o esquema de premiação. Observe que o jogo apresentado na Figura 3 é um caso particular do jogo apresentado na Figura 7 quando $\phi = 0$.

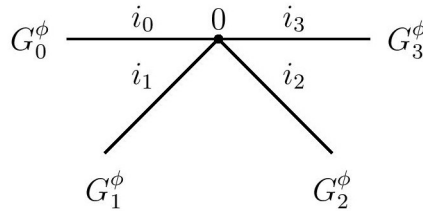


Figura 7 – Escolha de padrão de fiscalização com radares fixos e esquema de premiação

A satisfação do Condutor $j \in \{1, 2\}$ é dada agora por

$$u_j(m_j, e_j) = \mu e_j + (\mu + \eta)m_j \tag{3.1}$$

em e_j é como antes, mas agora m_j é interpretada como a transferência líquida da premiação ao condutor j , ou seja, $m_j \in \{-2, -1, 0, \phi, 2\phi\}$. Se não houver nenhuma autuação, m_j é 0, caso C_j seja multado uma vez atribui-se a m_j o valor de -1 , se multado duas vezes m_j é -2 . Nos casos em que C_j não é autuado e o outro condutor é multado, o condutor j recebe a premiação: ϕ se o outro condutor é multado uma vez e 2ϕ se duas.

Neste novo ambiente, a satisfação do Fiscal é dada por

$$u_0(n, m_0, e) = (\alpha + \beta)m_0 - \alpha n - \gamma e \tag{3.2}$$

em que m_0 é a transferência líquida da premiação ao Fiscal. Se a premiação não for paga $m_0 = -\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)$. Se a premiação for paga, $m_0 = -\left(\frac{(1-\phi)(m_1+m_2)}{2}\right)$.

O *payoff* do Fiscal é neste novo jogo é definido pela sua satisfação com (m, n, e) de acordo com (3.2) e pelo vetor (m, n, e) que emerge da combinação de sua escolha $p \in A_0 \equiv R$ com a escolha $(a^1, a^2) \in A_1 \times A_2$ dos condutores. Tal *payoff* é denotado por $\pi_0(p_k, a_i, a_j)$ quando o resultado do jogo é (p_k, a_i, a_j) . O *payoff* do Condutor $i \in \{1, 2\}$ no novo jogo é definido de acordo com esta nova utilidade e pelo vetor (m_i, e_i) que emerge de cada combinação $(p, a^1, a^2) \in A_0 \times A_1 \times A_2$. Tal *payoff* é denotado por $\pi_i(p_k, a_i, a_j)$ quando o resultado do jogo é (p_k, a_i, a_j) .

Nas combinações (p_k, a_i, a_j) em que somente um dos condutores é autuado, a receita arrecadada com a multa é dividida entre o Fiscal e o condutor não autuado. Conforme dito acima, o condutor premiado recebe uma proporção ϕ desta receita. O efeito de tal transferência na satisfação do condutor premiado é $\phi_1 = \phi_2 \equiv (\mu + \eta)\phi \geq 0$. A proporção restante $(1 - \phi)$ da receita é recebida pelo Fiscal e aumenta sua satisfação em $\frac{(1 - \phi)(\alpha + \beta)}{2}$. Por conveniência, o efeito da multa na satisfação do Fiscal, líquido dos efeitos da fiscalização $-\alpha$ e do excesso de velocidade $-\frac{\gamma}{2}$, é denotado por $\phi_0 \equiv \frac{(1 - \phi)(\alpha + \beta)}{2} - \alpha - \frac{\gamma}{2}$. Mais detalhes sobre o padrão de *payoffs* apresentados nas Tabelas desta seção são explorados a seguir.

Adotando a notação como em Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), $p_1 \equiv (l_0, l_1)$ indica que o Fiscal fiscalizou apenas a localidade 1 com um radar portátil, $p_2 \equiv (l_0, l_2)$ fiscalizou somente a localidade 2 com um radar portátil, $p_3 \equiv (l_1, l_2)$ fiscalizou todas as localidades com radares portáteis e $p_0 \equiv (l_0, l_0)$ fiscalizou nenhuma localidade.

Tabela 2 – Representação na Forma Normal do subgrupo G_0^ϕ ($\lambda = \frac{\beta - \alpha - \gamma}{2}$ e $\tau = \mu - \eta$)

		Condutor 1												
		(v_b, v_b)			(v_a, v_b)			(v_b, v_a)			(v_a, v_a)			
Fiscal	(l_0, l_0)	0,	0,	0	$-\frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$-\frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$-\gamma,$	$2\mu,$	0	(v_b, v_b)
	(l_0, l_1)	$-\alpha,$	0,	0	$\phi_0,$	$-\eta,$	ϕ_2	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	ϕ_2	
	(l_0, l_2)	$-\alpha,$	0,	0	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\mu,$	0	$\phi_0,$	$-\eta,$	ϕ_2	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	ϕ_2	
	(l_1, l_2)	$-2\alpha,$	0,	0	$\phi_0 - \alpha,$	$-\eta,$	ϕ_2	$\phi_0 - \alpha,$	$-\eta,$	ϕ_2	$2\phi_0,$	$-2\eta,$	$2\phi_2$	
	(l_0, l_0)	$-\frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$2\mu,$	μ	(v_a, v_b)
	(l_0, l_1)	$\phi_0,$	$\phi_1,$	$-\eta$	$2\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	$-\eta$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$\phi_1 + \mu,$	$-\eta$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	$-\eta$	
	(l_0, l_2)	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$-\alpha - \gamma,$	$\mu,$	μ	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	$\phi_2 + \mu$	$\phi_0 - \gamma,$	$\tau,$	$\phi_2 + \mu$	
	(l_1, l_2)	$\phi_0 - \alpha,$	$\phi_1,$	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$3\lambda + \alpha,$	$-2\eta,$	$-\eta$	
	(l_0, l_0)	$-\frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\gamma,$	$\mu,$	μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$2\mu,$	μ	(v_b, v_a)
	(l_0, l_1)	$-\alpha - \frac{\gamma}{2},$	0,	μ	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	$\phi_2 + \mu$	$-\alpha - \gamma,$	$\mu,$	μ	$\phi_0 - \gamma,$	$\tau,$	$\phi_2 + \mu$	
	(l_0, l_2)	$\phi_0,$	$\phi_1,$	$-\eta$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$\phi_1 + \mu,$	$-\eta$	$2\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	$-\eta$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$\tau,$	$-\eta$	
	(l_1, l_2)	$\phi_0 - \alpha,$	$\phi_1,$	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$2\lambda,$	$-\eta,$	$-\eta$	$3\lambda + \alpha,$	$-2\eta,$	$-\eta$	
(l_0, l_0)	$-\gamma,$	0,	2μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$\mu,$	2μ	$-\frac{3\gamma}{2},$	$\mu,$	2μ	$-2\gamma,$	$2\mu,$	2μ	(v_a, v_a)	
(l_0, l_1)	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$\phi_1,$	τ	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	τ	$\phi_0 - \gamma,$	$\phi_1 + \mu,$	τ	$2\lambda + \alpha - \gamma,$	$\tau,$	τ		
(l_0, l_2)	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2},$	$\phi_1,$	τ	$\phi_0 - \gamma,$	$\phi_1 + \mu,$	τ	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2},$	$-\eta,$	τ	$2\lambda + \alpha - \gamma,$	$\tau,$	τ		
(l_1, l_2)	$2\phi_0,$	$2\phi_1,$	-2η	$3\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	-2η	$3\lambda + \alpha,$	$-\eta,$	-2η	$4\lambda + 2\alpha,$	$-2\eta,$	-2η		

A relação estratégica (o jogo) entre o Fiscal e os dois condutores sob o esquema de premiação ϕ quando o Fiscal escolhe o padrão de fiscalização i_0 é apresentada de forma bastante conveniente (na *forma Normal*) na Tabela 2 acima.

A matriz *payoffs* do subjogo G_0^ϕ , Tabela 2, é composta de 16 linhas e quatro colunas, totalizando 64 células. Cada uma das 64 células corresponde a uma combinação de escolhas dos jogadores $(p_i, a_j, a_k) \in A_0^0 \times A_1 \times A_2$, em que a segunda entrada de (p_i, a_j, a_k) indica a escolha de C_1 e a terceira entrada indica a escolha de C_2 . Por exemplo, a célula na linha 9 da coluna 4 corresponde a combinação $(p_0, a_3, a_2) = [(l_0, l_0), (v_a, v_a), (v_b, v_a)]$, na qual o Fiscal escolhe $p_0 = (l_0, l_0)$, o Condutor 1 escolhe $a_3 = (v_a, v_a)$ e o Condutor 2 escolhe $a_2 = (v_b, v_a)$. Em cada célula, é apresentado a tripla de *payoffs* $[\pi_0(p_k, a_i, a_j), \pi_1(p_k, a_i, a_j), \pi_2(p_k, a_i, a_j)]$. O primeiro número apresentado na tripla é o *payoff* do Fiscal. O segundo *payoff* apresentado na tripla é do C_1 e o terceiro é o *payoff* do C_2 . Por exemplo, a tripla $(-\frac{3\gamma}{2}, 2\mu, \mu)$ apresentada na nona linha da quarta coluna indica que o *payoff* dos jogadores sob (p_0, a_3, a_2) é dado por $-\frac{3\gamma}{2}$ para o Fiscal, 2μ para C_1 e μ para C_2 . Observe que neste caso a premiação não foi realizada, pois nenhum condutor foi multado. Já a tripla $(\phi_0, -\eta, \phi_2)$ na segunda linha e segunda coluna é referente as ações (p_1, a_1, a_0) . O *payoff* $\phi_0 \equiv \frac{(1-\phi)(\alpha+\beta)}{2} - \alpha - \frac{\gamma}{2}$ é atribuído aos Fiscal, pois a premiação é paga ao C_2 , uma vez que este respeita o limite em ambas as localidades e o C_1 é pego excedendo a velocidade em l_1 . Como C_1 é pego excedendo a velocidade seu *payoff* é $-\eta = \mu - (\mu + \eta)$. Já o *payoff* do C_2 é ϕ_2 , pois este é premiado ao não exceder a velocidade quando C_1 é pego excedendo.

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	$-\alpha, 0, 0$	$-\alpha - \frac{\gamma}{2}, 0, \mu$	$\phi_0, \phi_1, -\eta$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, \phi_1, \tau$
	a_1	$-\alpha - \frac{\gamma}{2}, \mu, 0$	$-\alpha - \gamma, \mu, \mu$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, \phi_1 + \mu, -\eta$	$\phi_0 - \gamma, \phi_1 + \mu, \tau$
	a_2	$\phi_0, -\eta, \phi_2$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \phi_2 + \mu$	$2\lambda + \alpha, -\eta, -\eta$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \tau$
	a_3	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, \tau, \phi_2$	$\phi_0 - \gamma, \tau, \phi_2 + \mu$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, \tau, -\eta$	$2\lambda + \alpha - \gamma, \tau, \tau$
com Fiscal escolhendo $r = (r_n, r_f)$					
		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	$-2\alpha, 0, 0$	$\phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta$	$\phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta$	$2\phi_0, 2\phi_1, -2\eta$
	a_1	$\phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_2	$\phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_3	$2\phi_0, -2\eta, 2\phi_2$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$4\lambda + 2\alpha, -2\eta, -2\eta$
com Fiscal escolhendo $r = (r_p, r_f)$					

Figura 8 – Representação do subjogo G_2^ϕ na forma normal ($\lambda = \frac{\beta - \alpha - \gamma}{2}$ e $\tau = \mu - \eta$)

A relação estratégica entre Fiscal e Condutores após o radar fixo ser posicionado na localidade 2 é apresentada na Figura 8. Como os condutores antecipam somente o

posicionamento do radar fixo, não sabem então qual padrão de fiscalização com radar portátil será empregado. Assim, os condutores escolhem em qual localidade excedem, enquanto o Fiscal escolhe se posiciona o radar móvel na outra localidade. A primeira matriz é referente a escolha em que o Fiscal não utiliza o radar portátil e a segunda matriz é referente ao uso do mesmo.

Novamente, a primeira entrada da célula de uma das matrizes é o *payoff* do Fiscal, a segunda do C_1 e a terceira do C_2 . Por exemplo, a tripla na primeira linha, terceira coluna da primeira matriz é $(\phi_0, \phi_1, -\eta)$. Como a fiscalização utilizou radar fixo na segunda localidade e nenhum radar na primeira, ao mesmo tempo que o Condutor 1 não excedeu a velocidade em nenhuma localidade e C_2 somente excedeu na segunda, então houve uma multa para C_2 . Este recebeu $-\eta$ e a receita foi dividida entre Fiscal e C_1 , sendo o *payoff* de cada um, respectivamente, ϕ_0 e ϕ_1 . A interpretação da interação após o Fiscal escolher i_1 é similar a interpretação de i_2 e é descrita pela Figura 9.

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	$-\alpha, 0, 0$	$\phi_0, \phi_1, -\eta$	$-\alpha - \frac{\gamma}{2}, 0, \mu$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, \phi_1, \tau$
	a_1	$\phi_0, -\eta, \phi_2$	$2\lambda + \alpha, -\eta, -\eta$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \phi_2 + \mu$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, -\eta, \tau$
	a_2	$-\alpha - \frac{\gamma}{2}, \mu, 0$	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, \phi_1 + \mu, -\eta$	$-\alpha - \gamma, \mu, \mu$	$\phi_0 - \gamma, \mu + \phi_1, \tau$
	a_3	$\phi_0 - \frac{\gamma}{2}, \tau, \phi_2$	$2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2}, \tau, -\eta$	$\phi_0 - \gamma, \tau, \mu + \phi_2$	$2\lambda + \alpha - \gamma, \tau, \tau$
com Fiscal escolhendo $r = (r_f, r_n)$					
		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	$-2\alpha, 0, 0$	$\phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta$	$\phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta$	$2\phi_0, 2\phi_1, -2\eta$
	a_1	$\phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_2	$\phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_3	$2\phi_0, -2\eta, 2\phi_2$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$4\lambda + 2\alpha, -2\eta, -2\eta$
com Fiscal escolhendo $r = (r_f, r_p)$					

Figura 9 – Representação do subjogo G_1^ϕ na forma normal ($\tau = \mu - \eta$)

A interpretação do Jogo após o Fiscal escolher i_3 é similar as demais, a única diferença é que a escolha do Fiscal é trivialmente dada por (r_f, r_f) .

O *payoff* esperado do jogador $k \in \{0, 1, 2\}$ sob uma determinada previsão probabilística $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ passa a ser dado por

$$U_k(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{s=0}^3 \sigma_0(p_s) \left[\sum_{i=0}^3 \sigma_1(a_i) \left(\sum_{j=0}^3 \sigma_2(a_j) \pi_k(p_s, a_i, a_j) \right) \right]. \quad (3.3)$$

A previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ para o subjogo G_0^ϕ , apresentado na Tabela 2, é considerada uma boa previsão somente se ela constitui um Equilíbrio de Nash. Ou seja, somente se

		C_2			
		$a_0 = (v_b, v_b)$	$a_1 = (v_a, v_b)$	$a_2 = (v_b, v_a)$	$a_3 = (v_a, v_a)$
C_1	a_0	$-2\alpha, 0, 0$	$\phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta$	$\phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta$	$2\phi_0, 2\phi_1, -2\eta$
	a_1	$\phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_2	$\phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$2\lambda, -\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -\eta, -2\eta$
	a_3	$2\phi_0, -2\eta, 2\phi_2$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$3\lambda + \alpha, -2\eta, -\eta$	$4\lambda + 2\alpha, -2\eta, -2\eta$

Figura 10 – Representação do subjogo G_3^ϕ na forma normal.

satisfaz

$$\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \equiv \arg \max_{\sigma_0 \in \Delta(A_0)} U_0(\sigma_0, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \quad (3.4)$$

$$\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_2^*) \equiv \arg \max_{\sigma_1 \in \Delta(A_1)} U_1(\sigma_0^*, \sigma_1, \sigma_2^*) \quad (3.5)$$

$$\sigma_2^* \in B_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*) \equiv \arg \max_{\sigma_2 \in \Delta(A_2)} U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2) \quad (3.6)$$

quando a função $U_i(\cdot)$ é definida por (3.3). Os conjuntos $B_0(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$, $B_1(\sigma_0^*, \sigma_2^*)$ e $B_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ são definidos implicitamente em (3.4), (3.5) e (3.6).

É natural esperar que jogadores idênticos se comportem de maneira idêntica. Assim, é comum considerar boas previsões para jogos nos quais há jogadores idênticos somente aquelas que prevêm comportamento igual para os jogadores idênticos. Neste sentido, uma previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ será considerada uma boa previsão de comportamento para o jogo apresentado na Tabela 2 se, e somente se, σ^* é um Equilíbrio de Nash. Um Equilíbrio de Nash σ^* tal que $\sigma_1^* = \sigma_2^*$ será denominado **Equilíbrio de Nash Simétrico**. Por completude, um Equilíbrio de Nash em que $\sigma_1^* \neq \sigma_2^*$ será denominado **Equilíbrio de Nash Assimétrico**. Os demais subjogos seguem lógica similar. Por fim, dado os Equilíbrio de Nash nos Subjogos, a previsão para o jogo principal será uma boa previsão se for um Equilíbrio Perfeito em Subjogos.

3.2 Previsões de comportamento

Conforme explorado a seguir, a representação matricial do *payoff* esperado de cada jogador é bastante conveniente. Considere inicialmente o *payoff* esperado do Fiscal. Para cada p_k , defina $\Pi_0(p_k)$ a matriz na qual o elemento da linha $i + 1$ da coluna $j + 1$ é dada por $\pi_0(p_k, a_i, a_j)$. Ou seja,

$$\Pi_0(p_k) \equiv \begin{pmatrix} \pi_0(p_k, a_0, a_0) & \pi_0(p_k, a_0, a_1) & \pi_0(p_k, a_0, a_2) & \pi_0(p_k, a_0, a_3) \\ \pi_0(p_k, a_1, a_0) & \pi_0(p_k, a_1, a_1) & \pi_0(p_k, a_1, a_2) & \pi_0(p_k, a_1, a_3) \\ \pi_0(p_k, a_2, a_0) & \pi_0(p_k, a_2, a_1) & \pi_0(p_k, a_2, a_2) & \pi_0(p_k, a_2, a_3) \\ \pi_0(p_k, a_3, a_0) & \pi_0(p_k, a_3, a_1) & \pi_0(p_k, a_3, a_2) & \pi_0(p_k, a_3, a_3) \end{pmatrix}.$$

Tal notação permite escrever o *payoff* do Fiscal como

$$U_0(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{k=0}^3 \sigma_0(p_k) \left[\sigma_1 \Pi_0(p_k) \sigma_2^T \right], \quad (3.7)$$

em que para cada $i \in \{1, 2\}$, σ_i denota o vetor linha $[\sigma_i(a_0), \sigma_i(a_1), \sigma_i(a_2), \sigma_i(a_3)]$ e σ_i^T denota o vetor coluna obtido ao transpor σ_i .

A quantidade de autuações ao Condutor $k \in \{1, 2\}$ para cada combinação $(a_i, a_j) \in A_1 \times A_2$, quando um radar portátil foi posicionado na localidade $s \in \{1, 2\}$, é sumarizada na matriz \tilde{M}_s^k tal que

$$\tilde{M}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{M}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{M}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{M}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O elemento na linha $i + 1$ da coluna $j + 1$ da matriz \tilde{M}_s^k indica o número de multas arrecadadas do Condutor k usando um radar na posição s quando o Condutor 1 escolhe a_i e o Condutor 2 escolhe a_j . Por exemplo, o elemento na posição $(i + 1, j + 1) = (2, 3)$ da matriz \tilde{M}_1^1 é igual a 1, pois o Condutor 1 é multado uma (e somente uma) vez quando este escolhe $a_1 = (v_a, v_b)$ e o Condutor 2 escolhe $a_2 = (v_b, v_a)$. Note que a quantidade de multas pagas por um condutor é independente da escolha do outro condutor e que \tilde{M}_1^2 é igual a transposta da matriz \tilde{M}_1^1 . Ou seja, $\tilde{M}_1^2 = (\tilde{M}_1^1)^T$. A quantidade de autuações ao Condutor k por um radar posicionado em l_0 , para cada combinação $(a_i, a_j) \in A_1 \times A_2$, é obviamente zero. Logo, tal informação é sumarizada pela matriz nula de dimensão 4×4 , denotada por $\mathbf{0}$. Ou seja, $\tilde{M}_0^k = \mathbf{0}$ para todo $k \in \{1, 2\}$.

Usando tais objetos e suas propriedades, a quantidade de autuações obtida por meio do posicionamento de um radar na localidade $s \in \{1, 2\}$, para cada combinação $(a_i, a_j) \in A_1 \times A_2$, é sumarizada por $M_s \equiv \frac{1}{2} [\tilde{M}_s^1 + (\tilde{M}_s^1)^T]$. Como consequência, a quantidade total de autuações obtida por meio do posicionamento $p_3 = (l_1, l_2)$, para cada combinação $(a_i, a_j) \in A_1 \times A_2$, é sumarizada por $M_3 \equiv M_1 + M_2$

Observe agora que a premiação por bom comportamento ϕ é paga quando um, e somente um, condutor é autuado. Ainda, a arrecadação líquida (da premiação) do Fiscal é dada por $1 - \phi$ quando a premiação é distribuída e é unitária caso contrário. Assim, a arrecadação líquida de premiação proporcionada por um radar posicionado na localidade $s \in \{0, 1, 2\}$ é dada por $I_s^\phi M_s I_s^\phi$, em que

$$I_0^\phi \equiv \begin{pmatrix} 1 - \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \phi \end{pmatrix}, \quad I_1^\phi \equiv \begin{pmatrix} 1 - \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_2^\phi \equiv \begin{pmatrix} 1-\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_3^\phi \equiv \begin{pmatrix} 1-\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A pré-multiplicação de M_s pela matriz I_s^ϕ tem como efeito normalizar para $1 - \phi$ as *linhas* de M_s nas quais \mathbb{C}_1 não pode ser autuado pelo radar posicionado em l_s . A pós-multiplicação M_s pela matriz I_s^ϕ tem como efeito normalizar para $1 - \phi$ as *colunas* de M_s nas quais \mathbb{C}_2 não pode ser autuado pelo radar posicionado em l_s .

Observação 3.2.1. Seja $n_s = \min\{1, s\} + \max\{0, s - 2\}$ o número de fiscalizações do posicionamento p_s e N a matriz de dimensão 4×4 com todos os elementos iguais a 1. Então, para cada $s \in \{0, 1, 2, 3\}$, a matriz $\Pi_0(p_s)$ pode ser escrita como

$$\Pi_0(p_s) = (\alpha + \beta)I_s^\phi M_s I_s^\phi - \alpha n_s N - \gamma E = (\alpha + \beta)I_s^\phi M_s I_s^\phi - \alpha n_s N + \Pi_0(p_0) \quad (3.8)$$

em que a matriz E sumariza o número de excessos de velocidade decorrentes de cada escolha $(a_i, a_j) \in A_1 \times A_2$. Ou seja, $E = M_3$.

O Lemma 3.2.1 a seguir se vale de (3.8) para caracterizar o comportamento ótimo do Fiscal para cada $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ tal que $\sigma_2 = \sigma_1$. A notação $p_i \succ p_j$ (ou ainda, $p_j \prec p_i$) indica uma situação na qual p_i é uma opção estritamente melhor do que p_j do ponto de vista do Fiscal. A notação $p_i \sim p_j$ indica uma situação na qual o Fiscal é indiferente entre as opções p_i e p_j , pois ambas lhe conferem a mesma satisfação. Conforme estabelecido pelo Lemma 3.2.1, o ordenamento de opções do Fiscal depende do comportamento dos condutores. Por exemplo, o resultado (3.9) estabelece que $p_0 \succ p_2$ quando $\sigma_2 = \sigma_1$ se, e somente se, $\sigma_1(I_2^\phi M_2 I_2^\phi - I_0^\phi M_0 I_0^\phi) \sigma_1^T < \theta$. A variável $q_i(\sigma_0) = \sigma_0(p_i) + \sigma_0(p_3)$ denota a probabilidade com que a localidade $i \in \{1, 2\}$ é fiscalizada quando os jogadores se comportam de acordo com $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$. As variáveis $q_i(\sigma_1) = \sigma_1(a_i) + \sigma_1(a_3)$ e $q_i(\sigma_2) = \sigma_2(a_i) + \sigma_2(a_3)$ denotam a probabilidade com que o limite \bar{v} é excedido na localidade $i \in \{1, 2\}$ quando os jogadores se comportam de acordo com $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$.

Lema 3.2.1. *Seja $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$. Para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$ com $j > i$, tem-se*

$$p_i \left\{ \begin{array}{l} \succ \\ \sim \\ \prec \end{array} \right\} p_j \Leftrightarrow \sigma_1 \left(I_j^\phi M_j I_j^\phi - I_i^\phi M_i I_i^\phi \right) \sigma_2^T \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \theta(n_j - n_i) \quad (3.9)$$

em que $\sigma_1 I_0^\phi M_0 I_0^\phi \sigma_2^T = 0$ e

$$\sigma_1 I_i^\phi M_i I_i^\phi \sigma_2^T = \frac{(1-\phi)}{2} [q_i(\sigma_1) + q_i(\sigma_2)] + \phi q_i(\sigma_1) q_i(\sigma_2), \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 I_3^\phi M_3 I_3^\phi \sigma_2^T &= \frac{(1-\phi)}{2} \sum_{i=1}^2 [q_i(\sigma_1) + q_i(\sigma_2)] + \phi [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi [\sigma_1(a_3)(q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)) + \sigma_2(a_3)(q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1))] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \frac{U_0(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)}{\alpha + \beta} &= \frac{U_0(p_0, \sigma_1, \sigma_2)}{\alpha + \beta} + \frac{(1-\phi)}{2} \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_0) \left[q_s(\sigma_1) + q_s(\sigma_2) - \frac{2\theta}{1-\phi} \right] \\ &\quad + \sigma_0(p_1) \phi q_1(\sigma_1) q_1(\sigma_2) + \sigma_0(p_2) \phi q_2(\sigma_1) q_2(\sigma_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi \sigma_0(p_3) [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi \sigma_0(p_3) [\sigma_1(a_3)(q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)) + \sigma_2(a_3)(q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1))] \end{aligned}$$

Demonstração. Usando (3.7) e (3.8), o *payoff* esperado pelo Fiscal ao escolher p_0 com probabilidade 1 (ou seja, $\sigma_0 = (1, 0, 0, 0)$) é dado por $U_0[(1, 0, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1 \Pi_0(p_0) \sigma_2^T$. O *payoff* esperado pelo Fiscal ao escolher p_1 com probabilidade 1 é obtido de maneira análoga: usando novamente (3.7) e (3.8) e observando que o número de fiscalizações neste caso é $n_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} U_0[(0, 1, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2] &= \sigma_1 \Pi_0(p_1) \sigma_2^T = (\alpha + \beta) \sigma_1 I_1^\phi M_1 I_1^\phi \sigma_2^T - \alpha \sigma_1 N \sigma_2^T + \sigma_1 \Pi_0(p_0) \sigma_2^T \\ &= (\alpha + \beta) \sigma_1 I_1^\phi M_1 I_1^\phi \sigma_2^T + \sigma_1 \Pi_0(p_0) \sigma_2^T - \alpha. \end{aligned}$$

em que se usou o fato $\sigma_1 N \sigma_2^T = 1$. Ao escolher p_2 com probabilidade 1, o número de fiscalizações é $n_2 = 1$ e, portanto, o *payoff* esperado pelo Fiscal é

$$\begin{aligned} U_0[(0, 0, 1, 0), \sigma_1, \sigma_2] &= \sigma_1 \Pi_0(p_2) \sigma_2^T = (\alpha + \beta) \sigma_1 I_2^\phi M_2 I_2^\phi \sigma_2^T - \alpha \sigma_1 N \sigma_2^T + \sigma_1 \Pi_0(p_0) \sigma_2^T \\ &= (\alpha + \beta) \sigma_1 I_2^\phi M_2 I_2^\phi \sigma_2^T + \sigma_1 \Pi_0(p_0) \sigma_2^T - \alpha. \end{aligned}$$

Por fim, o número de fiscalizações é $n_3 = 2$ quando o Fiscal escolhe p_3 com probabilidade 1. Seu *payoff* esperado neste caso é

$$\begin{aligned} U_0[(0, 0, 0, 1), \sigma_1, \sigma_2] &= \sigma_1 \Pi_0(p_3) \sigma_2^T = (\alpha + \beta) \sigma_1 I_3^\phi M_3 I_3^\phi \sigma_2^T - 2\alpha \sigma_1 N \sigma_2^T + \sigma_1 \Pi_0(p_0) \sigma_2^T \\ &= (\alpha + \beta) \sigma_1 I_3^\phi M_3 I_3^\phi \sigma_2^T + \sigma_1 \Pi_0(p_0) \sigma_2^T - 2\alpha. \end{aligned}$$

Note que $p_1 \succ p_0$ se, e somente se, $U_0[(0, 1, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2] > U_0[(1, 0, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2]$. Ou seja, quando $\sigma_1 I_1^\phi M_1 I_1^\phi \sigma_2^T > \alpha / (\alpha + \beta) = \theta$. Similarmente, $p_1 \sim p_0$ se, e somente se, $U_0[(0, 1, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2] = U_0[(1, 0, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2]$. Ou seja, quando $\sigma_1 I_1^\phi M_1 I_1^\phi \sigma_2^T = \theta$. Por fim, $p_0 \succ p_1$ se, e somente se, $U_0[(1, 0, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2] > U_0[(0, 1, 0, 0), \sigma_1, \sigma_2]$. Ou seja, quando $\sigma_1 I_1^\phi M_1 I_1^\phi \sigma_2^T < \theta$. Os demais casos apresentados em (3.9) são obtidos de forma análoga.

Para os demais resultados, observe que para cada $i \in \{1, 2\}$ o vetor linha $\sigma_i I_1^\phi$ pode ser escrito como $[(1 - \phi)\sigma_i(a_0), \sigma_i(a_1), (1 - \phi)\sigma_i(a_2), \sigma_i(a_3)]$ e o vetor linha $\sigma_i I_2^\phi$ pode ser escrito como $[(1 - \phi)\sigma_i(a_0), (1 - \phi)\sigma_i(a_1), \sigma_i(a_2), \sigma_i(a_3)]$. Por fim, $\sigma_i I_3^\phi$ é igual a $[(1 - \phi)\sigma_i(a_0), \sigma_i(a_1), \sigma_i(a_2), \sigma_i(a_3)]$. Similarmente, o vetor coluna $I_1^\phi \sigma_i^T$ pode ser escrito como $[(1 - \phi)\sigma_i(a_0), \sigma_i(a_1), (1 - \phi)\sigma_i(a_2), \sigma_i(a_3)]^T$ e o vetor coluna $I_2^\phi \sigma_i^T$ pode ser escrito como $[(1 - \phi)\sigma_i(a_0), (1 - \phi)\sigma_i(a_1), \sigma_i(a_2), \sigma_i(a_3)]^T$. Por fim, $I_3^\phi \sigma_i^T$ é igual a $[(1 - \phi)\sigma_i(a_0), \sigma_i(a_1), \sigma_i(a_2), \sigma_i(a_3)]^T$. Portanto, $\sigma_1 I_1^\phi M_1 I_1^\phi \sigma_2^T$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_1 I_1^\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \phi)\sigma_2(a_0) \\ \sigma_2(a_1) \\ (1 - \phi)\sigma_2(a_2) \\ \sigma_2(a_3) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \sigma_1 I_1^\phi \begin{pmatrix} q_1(\sigma_2) \\ 1 - \phi - (1 - \phi)q_1(\sigma_2) + 2q_1(\sigma_2) \\ q_1(\sigma_2) \\ 1 - \phi - (1 - \phi)q_1(\sigma_2) + 2q_1(\sigma_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{(1 - \phi)}{2} [q_1(\sigma_1) + q_1(\sigma_2)] + \phi q_1(\sigma_1) q_1(\sigma_2) \end{aligned}$$

em que se utilizou o fato de $\sigma_k(a_0) = 1 - \sum_{i=1}^3 \sigma_k(a_i)$. Logo, segue a equação (3.10) para $i = 1$ ao supor $\sigma_2 = \sigma_1$. Similarmente, $\sigma_1 I_2^\phi M_2 I_2^\phi \sigma_2^T$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_1 I_2^\phi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \phi)\sigma_2(a_0) \\ (1 - \phi)\sigma_2(a_1) \\ \sigma_2(a_2) \\ \sigma_2(a_3) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \sigma_1 I_2^\phi \begin{pmatrix} q_2(\sigma_2) \\ q_2(\sigma_2) \\ 1 - \phi - (1 - \phi)q_2(\sigma_2) + 2q_2(\sigma_2) \\ 1 - \phi - (1 - \phi)q_2(\sigma_2) + 2q_2(\sigma_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{(1 - \phi)}{2} [q_2(\sigma_1) + q_2(\sigma_2)] + \phi q_2(\sigma_1) q_2(\sigma_2) \end{aligned}$$

em que se utilizou o fato de $\sigma_k(a_0) = 1 - \sum_{i=1}^3 \sigma_k(a_i)$. Logo, segue a equação (3.10) para

$i = 1$ ao supor $\sigma_2 = \sigma_1$. Finalmente, $\sigma_1 I_3^\phi M_3 I_3^\phi \sigma_2^T$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sigma_1 I_3^\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\phi)\sigma_2(a_0) \\ \sigma_2(a_1) \\ \sigma_2(a_2) \\ \sigma_2(a_3) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \sigma_1 I_3^\phi \begin{pmatrix} q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2) \\ 1 + q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2) - \phi\sigma_2(a_0) \\ 1 + q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2) - \phi\sigma_2(a_0) \\ 2 + q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2) - 2\phi\sigma_2(a_0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{(1-\phi)}{2} \sigma_1(a_0) [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] + \frac{1}{2} q_1(\sigma_1) + \frac{1}{2} q_2(\sigma_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] [\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2) + \sigma_1(a_3)] - \frac{\phi\sigma_2(a_0)}{2} [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] \\
&= \frac{(1-\phi)}{2} \sigma_1(a_0) [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] + \frac{1}{2} q_1(\sigma_1) + \frac{1}{2} q_2(\sigma_1) \\
&\quad + \frac{1}{2} [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] [1 - \sigma_1(a_0)] - \frac{\phi\sigma_2(a_0)}{2} [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] \\
&= \frac{1}{2} q_1(\sigma_1) + \frac{1}{2} q_2(\sigma_1) + \frac{1}{2} q_1(\sigma_2) + \frac{1}{2} q_2(\sigma_2) \\
&\quad - \frac{1}{2} \phi\sigma_1(a_0) [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] - \frac{1}{2} \phi\sigma_2(a_0) [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] \\
&= \frac{(1-\phi)}{2} [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1) + q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] \\
&\quad + \phi [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] \\
&\quad - \frac{1}{2} \phi [\sigma_1(a_3) (q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)) + \sigma_2(a_3) (q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1))]
\end{aligned}$$

em que se utilizou o fato que $\sigma_k(a_0) = 1 - \sum_{i=1}^3 \sigma_k(a_i) = 1 - q_1(\sigma_k) - q_2(\sigma_k) + \sigma_k(a_3)$. A equação (3.11) segue desta última linha após usar $\sigma_2 = \sigma_1$ e (3.10) para $i = 1$ e $i = 2$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 U_0(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) &= \sum_{k=0}^3 \sigma_0(p_k) [\sigma_1 \Pi_0(p_k) \sigma_2^T] \\
 &= \sum_{s=0}^3 \sigma_0(p_s) [(\alpha + \beta) \sigma_1 I_s^\phi M_s I_s^\phi \sigma_2^T - \alpha n_s \sigma_1 N \sigma_2^T - \gamma \sigma_1 E \sigma_2^T] \\
 &= \sum_{s=0}^3 \sigma_0(p_s) [(\alpha + \beta) I_s^\phi M_s I_s^\phi \sigma_2^T - \alpha n_s] + U_0(p_0, \sigma_1, \sigma_2) \\
 &= U_0(p_0, \sigma_1, \sigma_2) + (\alpha + \beta) \sum_{s=1}^3 \sigma_0(p_s) [\sigma_1 I_s^\phi M_s I_s^\phi \sigma_2^T] - \alpha \sum_{s=1}^3 \sigma_0(p_s) n_s \\
 &= U_0(p_0, \sigma_1, \sigma_2) + (\alpha + \beta) \frac{(1 - \phi)}{2} \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_0) [q_s(\sigma_1) + q_s(\sigma_2)] - \alpha \sum_{s=1}^3 q_s(\sigma_0) \\
 &\quad + (\alpha + \beta) \sigma_0(p_1) \phi q_1(\sigma_1) q_1(\sigma_2) + (\alpha + \beta) \sigma_0(p_2) \phi q_2(\sigma_1) q_2(\sigma_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \phi \sigma_0(p_3) [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \phi \sigma_0(p_3) [\sigma_1(a_3)(q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)) + \sigma_2(a_3)(q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1))] \\
 &= U_0(p_0, \sigma_1, \sigma_2) + (\alpha + \beta) \frac{(1 - \phi)}{2} \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_0) \left[q_s(\sigma_1) + q_s(\sigma_2) - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
 &\quad + (\alpha + \beta) \sigma_0(p_1) \phi q_1(\sigma_1) q_1(\sigma_2) + (\alpha + \beta) \sigma_0(p_2) \phi q_2(\sigma_1) q_2(\sigma_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \phi \sigma_0(p_3) [q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1)] [q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \phi \sigma_0(p_3) [\sigma_1(a_3)(q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)) + \sigma_2(a_3)(q_1(\sigma_1) + q_2(\sigma_1))]
 \end{aligned}$$

□

O *payoff* do Condutor 1 no jogo com dois condutores é definido pela sua satisfação com (m_1, e_1) de acordo com (3.1), e pelo vetor (m_1, e_1) que emerge de cada combinação de escolha $(p_k, a_i, a_j) \in A_0 \times A_1 \times A_2$. Para cada a_k , defina $\Pi_1(a_k)$ a matriz na qual o elemento da linha $i + 1$ da coluna $j + 1$ é dado por $\pi_1(p_i, a_k, a_j)$. Ou seja,

$$\Pi_1(a_k) \equiv \begin{pmatrix} \pi_1(p_0, a_k, a_0) & \pi_1(p_0, a_k, a_1) & \pi_1(p_0, a_k, a_2) & \pi_1(p_0, a_k, a_3) \\ \pi_1(p_1, a_k, a_0) & \pi_1(p_1, a_k, a_1) & \pi_1(p_1, a_k, a_2) & \pi_1(p_1, a_k, a_3) \\ \pi_1(p_2, a_k, a_0) & \pi_1(p_2, a_k, a_1) & \pi_1(p_2, a_k, a_2) & \pi_1(p_2, a_k, a_3) \\ \pi_1(p_3, a_k, a_0) & \pi_1(p_3, a_k, a_1) & \pi_1(p_3, a_k, a_2) & \pi_1(p_3, a_k, a_3) \end{pmatrix}$$

Tal notação permite escrever o *payoff* do Condutor 1 como

$$U_1(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{k=0}^3 \sigma_1(a_k) [\sigma_0 \Pi_1(a_k) \sigma_2^T]. \quad (3.12)$$

A quantidade de autuações ao Condutor 1 para cada combinação $(p_i, a_j) \in A_0 \times A_2$,

quando este escolhe $a_k \in A_1$ é sumarizada na matriz \hat{M}_k^1 tal que

$$\hat{M}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{M}_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \hat{M}_2^1 + \hat{M}_3^1.$$

Obviamente, o Condutor 1 nunca é multado quando escolhe $a_0 = (v_b, v_b)$. Ou seja, $\hat{M}_0^1 = \mathbf{0}$. O elemento na linha $i + 1$ da coluna $j + 1$ da matriz \hat{M}_k^1 indica o número de autuações ao Condutor 1 quando o Fiscal escolhe p_i e o Condutor 2 escolhe a_j , dado que \mathbf{C}_1 escolheu a_k . Por exemplo, o elemento na posição $(i + 1, j + 1) = (4, 2)$ da matriz \hat{M}_1^1 é igual a 1, pois \mathbf{C}_1 é multado uma (e somente uma) vez quando este escolhe $a_1 = (v_a, v_b)$, o Fiscal escolhe $p_i = p_3 = (l_1, l_2)$ e \mathbf{C}_2 escolhe $a_j = a_1 = (v_a, v_b)$.

Note que a quantidade de multas pagas por \mathbf{C}_1 é independente da escolha de \mathbf{C}_2 . A quantidade de autuações ao Condutor 2 também independe da escolha de \mathbf{C}_1 . Para cada combinação $(p_i, a_j) \in A_0 \times A_2$, ela é sumarizada na matriz P tal que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

em que o elemento na linha $i + 1$ da coluna $j + 1$ apresenta o número de autuações ao Condutor 2 quando o Fiscal escolhe p_i e o Condutor 2 escolhe a_j . A primeira coluna é nula, pois \mathbf{C}_2 não é multado quando escolhe $a_j = a_0 = (v_b, v_b)$. A primeira linha é nula, pois \mathbf{C}_2 não é multado quando o Fiscal escolhe $p_i = p_0 = (l_0, l_0)$.

O esquema de premiação paga ao Condutor 1 somente quando este não é autuado. Neste caso, o Condutor 1 recebe uma proporção ϕ de cada multa aplicada a \mathbf{C}_2 . Assim, a quantidade (líquida) de multas paga pelo Condutor 1 ao escolher $a_k \in A_1$ é dado por

$$\hat{M}_k^1 - \hat{I}_k^\phi P,$$

em que quantidades negativas de multa na matriz resultante indicam premiações ao Condutor 1 e a matriz \hat{I}_k^ϕ indica os casos em que o Condutor 1 não é multado. Especificamente, $\hat{I}_3^\phi = \phi \mathbf{0}$,

$$\hat{I}_0^\phi = \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_1^\phi = \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{I}_2^\phi = \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A pré-multiplicação pela matriz \hat{I}_k^ϕ tem como efeito zerar as linhas de P correspondentes aos casos em que o \mathbf{C}_1 é autuado ao escolher a_k . Além disso, a pré-multiplicação por \hat{I}_k^ϕ

normaliza para ϕ as linhas P correspondentes aos casos em que o \mathbf{C}_1 não é atuado ao escolher a_k .

Observação 3.2.2. Seja $e_s = \min\{1, s\} + \max\{0, s - 2\}$ a quantidade de excessos de velocidade associados a escolha a_s . Para cada $s \in \{0, 1, 2, 3\}$, a simetria entre os dois condutores implica que para cada $k \in \{1, 2\}$ a matriz $\Pi_k(a_s)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\Pi_k(a_s) &= \mu e_s N - (\mu + \eta) \left(\hat{M}_s^1 - \hat{I}_s^\phi P \right) \\ &= \mu e_s N - (\mu + \eta) \left(\hat{M}_s^1 - (\hat{I}_s^\phi - \hat{I}_0^\phi) P \right) + \Pi_k(a_0)\end{aligned}\quad (3.13)$$

em que o *payoff* esperado pelo Condutor 2 para cada $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ é dado por $U_2(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{k=0}^3 \sigma_2(a_k) [\sigma_0 \Pi_2(a_k) \sigma_1^T]$ e

$$\Pi_2(a_i) \equiv \begin{pmatrix} \pi_2(p_0, a_0, a_i) & \pi_2(p_0, a_1, a_i) & \pi_2(p_0, a_2, a_i) & \pi_2(p_0, a_3, a_i) \\ \pi_2(p_1, a_0, a_i) & \pi_2(p_1, a_1, a_i) & \pi_2(p_1, a_2, a_i) & \pi_2(p_1, a_3, a_i) \\ \pi_2(p_2, a_0, a_i) & \pi_2(p_2, a_1, a_i) & \pi_2(p_2, a_2, a_i) & \pi_2(p_2, a_3, a_i) \\ \pi_2(p_3, a_0, a_i) & \pi_2(p_3, a_1, a_i) & \pi_2(p_3, a_2, a_i) & \pi_2(p_3, a_3, a_i) \end{pmatrix}$$

O Lemma 3.2.2 a seguir se vale (3.13) para caracterizar o comportamento ótimo do Condutor $k \in \{1, 2\}$ para cada comportamento dos demais jogadores: $(\sigma_0, \sigma_{(3-k)}) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_{(3-k)})$. A notação $a_i \succ^k a_j$ (ou ainda, por $a_j \prec^k a_i$) indica uma situação na qual a_i é uma opção estritamente melhor do que a_j do ponto de vista de \mathbf{C}_k . A notação $a_i \sim^k a_j$ indica uma situação na qual \mathbf{C}_k é indiferente entre as opções a_i e a_j , pois ambas lhe conferem a mesma satisfação. Conforme estabelecido pelo Lemma 3.2.2, o ordenamento de opções do Condutor k depende do comportamento do Fiscal e de $\mathbf{C}_{(3-k)}$. Por exemplo, o resultado (3.14) estabelece que $a_0 \prec^1 a_2$ se, e somente se, $\sigma_0 [\hat{M}_2^1 - \hat{M}_0^1 + (\hat{I}_0^\phi - \hat{I}_2^\phi) P] \sigma_2^T < \delta$.

Lema 3.2.2. *Seja $k \in \{1, 2\}$ e $(\sigma_0, \sigma_{(3-k)}) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_{(3-k)})$. Para cada $i \in \{0, 1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $j > i$, tem-se*

$$a_i \begin{cases} \succ^k \\ \sim^k \\ \prec^k \end{cases} a_j \Leftrightarrow \sigma_0 \left(\hat{M}_j^1 - \hat{M}_i^1 + (\hat{I}_i^\phi - \hat{I}_j^\phi) P \right) \sigma_2^T \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \delta (e_j - e_i), \quad (3.14)$$

em que $(\sigma_0 \hat{M}_0^1 \sigma_2^T, \sigma_0 \hat{M}_1^1 \sigma_2^T, \sigma_0 \hat{M}_2^1 \sigma_2^T, \sigma_0 \hat{M}_3^1 \sigma_2^T) = [0, q_1(\sigma_0), q_2(\sigma_0), q_1(\sigma_0) + q_2(\sigma_0)]$,

$$\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_2^T = \phi [q_1(\sigma_0) q_1(\sigma_{(3-k)}) + q_2(\sigma_0) q_2(\sigma_{(3-k)})] \quad (3.15)$$

$$\sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_2^T = \phi q_2(\sigma_{(3-k)}) \sigma_0(p_2) \quad (3.16)$$

$$\sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_2^T = \phi q_1(\sigma_{(3-k)}) \sigma_0(p_1) \quad (3.17)$$

e $\sigma_0 I_3^\phi P \sigma_2^T = 0$.

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) &= \sum_{s=0}^3 \sigma_1(a_s) \left(\sigma_0 \Pi_k(a_s) \sigma_2^T \right) = \sum_{s=0}^3 \sigma_1(a_s) \left(\sigma_0 \left[\mu e_s N - (\mu + \eta) \left(\hat{M}_s^1 - \hat{I}_s^\phi P \right) \right] \sigma_2^T \right) \\ &= \sum_{s=0}^3 \sigma_1(a_s) \left(\mu e_s - (\mu + \eta) \sigma_0 \left(\hat{M}_s^1 - \hat{I}_s^\phi P \right) \right) \sigma_2^T \\ &= \mu \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_1) - (\mu + \eta) \sum_{s=0}^3 \sigma_1(a_s) \left(\sigma_0 \hat{M}_s^1 \sigma_2^T - \sigma_0 \hat{I}_s^\phi P \sigma_2^T \right) \\ &= \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_1) [\mu - (\mu + \eta) q_s(\sigma_0)] + (\mu + \eta) \sum_{s=0}^3 \sigma_1(a_s) \sigma_0 \hat{I}_s^\phi P \sigma_2^T \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu + \eta} U_1(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) &= \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_1) [\delta - q_s(\sigma_0)] + \phi \sigma_1(a_0) [q_1(\sigma_0) q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_0) q_2(\sigma_2)] \\ &\quad + \phi \sigma_1(a_1) q_2(\sigma_2) \sigma_0(p_2) + \phi \sigma_1(a_2) q_1(\sigma_2) \sigma_0(p_1) \\ &= \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_1) [\delta - q_s(\sigma_0)] + \phi [1 - \sigma_1(a_3)] [q_1(\sigma_0) q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_0) q_2(\sigma_2)] \\ &\quad + \phi \sigma_1(a_1) [q_2(\sigma_2) [\sigma_0(p_2) - q_2(\sigma_0)] - q_1(\sigma_0) q_1(\sigma_2)] \\ &\quad + \phi \sigma_1(a_2) [q_1(\sigma_2) [\sigma_0(p_1) - q_1(\sigma_0)] - q_2(\sigma_0) q_2(\sigma_2)] \\ &= \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_1) [\delta - q_s(\sigma_0)] + \frac{U_1(\sigma_0, a_0, \sigma_2)}{\mu + \eta} - \phi \sigma_1(a_3) [q_1(\sigma_0) q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_0) q_2(\sigma_2)] \\ &\quad - \phi \sigma_1(a_1) [q_2(\sigma_2) \sigma_0(p_3) + q_1(\sigma_0) q_1(\sigma_2)] \\ &\quad - \phi \sigma_1(a_2) [q_1(\sigma_2) \sigma_0(p_3) + q_2(\sigma_0) q_2(\sigma_2)] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{U_1(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)}{\mu + \eta} &= \frac{U_1(\sigma_0, a_0, \sigma_2)}{\mu + \eta} + \sigma_1(a_3) \left[2\delta - \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_0) [1 + \phi q_s(\sigma_2)] \right] \\ &\quad + \sigma_1(a_1) \left(\delta - q_1(\sigma_0) [1 + \phi q_1(\sigma_2)] - \phi q_2(\sigma_2) \sigma_0(p_3) \right) \\ &\quad + \sigma_1(a_2) \left(\delta - q_2(\sigma_0) [1 + \phi q_2(\sigma_2)] - \phi q_1(\sigma_2) \sigma_0(p_3) \right) \end{aligned}$$

No caso $\phi = 0$, tem-se

$$\frac{U_1(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)}{\mu + \eta} = q_1(\sigma_1) \left(\delta - q_1(\sigma_0) \right) + q_2(\sigma_1) \left(\delta - q_2(\sigma_0) \right)$$

Demonstração. Pela simetria entre os condutores, basta considerar a situação do Condutor 1. Usando (3.13), $i \in \{0, 1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $j > i$, tem-se

$$\begin{aligned} \Pi_1(a_i) - \Pi_1(a_j) &= \mu N(e_i - e_j) + (\mu + \eta) [\hat{M}_j - \hat{M}_i + (\hat{I}_i^1 - \phi - \hat{I}_j^1 - \phi) P] \\ &= (\mu + \eta) \left([\hat{M}_j - \hat{M}_i + (\hat{I}_i^1 - \phi - \hat{I}_j^1 - \phi) P] - \delta N(e_j - e_i) \right) \end{aligned}$$

Logo, $\sigma_0 [\Pi_1(a_i) - \Pi_1(a_j)] \sigma_2^T > 0$ se, e somente se, $\sigma_0 [\hat{M}_j - \hat{M}_i + (\hat{I}_i^1 - \phi - \hat{I}_j^1 - \phi) P] \sigma_2^T > \delta(e_j - e_i)$. Como $a_i \succ^1 a_j$ é equivalente a $\sigma_0 [\Pi_1(a_i) - \Pi_1(a_j)] \sigma_2^T > 0$, o primeiro caso

do resultado (3.14) se justifica. Similarmente, $\sigma_0[\Pi_1(a_i) - \Pi_1(a_j)]\sigma_2^T < 0$ se, e somente se, $\sigma_0[\hat{M}_j - \hat{M}_i + (\hat{I}_i^1 - \phi - \hat{I}_j^1 - \phi)P]\sigma_2^T < \delta(e_j - e_i)$. Como $a_i \prec^1 a_j$ é equivalente a $\sigma_0[\Pi_1(a_i) - \Pi_1(a_j)]\sigma_2^T < 0$, o terceiro caso do resultado (3.14) se justifica. Finalmente, $\sigma_0[\Pi_1(a_i) - \Pi_1(a_j)]\sigma_2^T = 0$ se, e somente se, $\sigma_0[\hat{M}_j - \hat{M}_i + (\hat{I}_i^1 - \phi - \hat{I}_j^1 - \phi)P]\sigma_2^T = \delta(e_j - e_i)$. Como $a_i \sim^1 a_j$ é equivalente a $\sigma_0[\Pi_1(a_i) - \Pi_1(a_j)]\sigma_2^T = 0$, o segundo caso do resultado (3.14) se justifica.

Agora, observe que $\hat{M}_0^1 = \mathbf{0}$. Ainda, a matriz \hat{M}_2^1 possui todos os elementos das linhas 3 e 4 iguais a 1 e todos os elementos das linhas 1 e 2 iguais a 0. Como $\sum_{i=0}^3 \sigma_2(a_i) = 1$, tem-se $\sigma_0 \hat{M}_2^1 \sigma_2^T = \sigma_0(p_2) + \sigma_0(p_3) = q_2(\sigma_0)$. Analogamente, a matriz \hat{M}_1^1 possui todos os elementos das linhas 2 e 4 iguais a 1 e todos os elementos das linhas 1 e 3 iguais a 0. Usando novamente que $\sum_{i=0}^3 \sigma_2(a_i) = 1$, tem-se $\sigma_0 \hat{M}_1^1 \sigma_2^T = \sigma_0(p_1) + \sigma_0(p_3) = q_1(\sigma_0)$. Finalmente, lembrando que $\hat{M}_3^1 = \hat{M}_1^1 + \hat{M}_2^1$, tem-se $\sigma_0 \hat{M}_3^1 \sigma_2^T = \sigma_0 \hat{M}_1^1 \sigma_2^T + \sigma_0 \hat{M}_2^1 \sigma_2^T = q_1(\sigma_0) + q_2(\sigma_0)$.

Usando a definição de P , tem-se $P\sigma_2^T = [0, q_1(\sigma_2), q_2(\sigma_2), q_1(\sigma_2) + q_2(\sigma_2)]^T$. Ainda, $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi = \phi \sigma_0$ e $\sigma_0 \hat{I}_1^\phi$ pode ser escrita como $\phi[\sigma_0(p_0), 0, \sigma_0(p_2), 0]$. Por fim, $\sigma_0 \hat{I}_2^\phi$ pode ser escrito como $\phi[\sigma_0(p_0), \sigma_0(p_1), 0, 0]$ e $\sigma_0 \hat{I}_3^\phi = \mathbf{0}$. Portanto, a multiplicação matricial de $\sigma_0 \hat{I}_1^\phi$ com $P\sigma_2^T$ gera a equação (3.17) para $i = 1$. A multiplicação de $\sigma_0 \hat{I}_2^\phi$ com $P\sigma_2^T$ gera a equação (3.17) para $i = 2$. A multiplicação de $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi$ com $P\sigma_2^T$ gera a equação (3.15). \square

Os resultados estabelecidos nos Lemmas 3.2.1 e 3.2.2 são instrumentos bastante úteis para o entendimento da demonstração da Proposição 3.2.1 a seguir. Será utilizado as seguintes notações $r(\sigma_1) = (q_1(\sigma_1), q_2(\sigma_1))$ e $r(\sigma_0) = (q_1(\sigma_0), q_2(\sigma_0))$.

Proposição 3.2.1. *Defina $t_0 = \theta$ e $t_\phi = [\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - (1-\phi)]/2\phi \in (\theta, 1)$ para $\phi > 0$. Defina $d_\phi = \delta/[1 + \phi t_\phi]$. A previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ é uma boa previsão (Equilíbrio de Nash Simétrico) para o subjogo G_0^ϕ , apresentado na Tabela 2, se, e somente se, $\sigma_2^* = \sigma_1^*$,*

$$r(\sigma_0^*) = \left(d_\phi + \frac{\sigma_0^*(p_1) - \sigma_0^*(p_2)}{2}, d_\phi - \frac{\sigma_0^*(p_1) - \sigma_0^*(p_2)}{2} \right), \quad r(\sigma_1^*) = (t_\phi, t_\phi) \quad (3.18)$$

e $\phi \sigma_1^*(a_1) = 0$ e $[\sigma_0^*(p_1) - \sigma_0^*(p_2)]\sigma_1^*(a_1) = 0$. Em particular,

(i) se $\phi = 0$, então σ^* é um Equilíbrio de Nash simétrico se, e somente se,

$$\sigma_0^* = (1 - x - d_0, x + z, x - z, d_0 - x) \quad e \quad (3.19)$$

$$\sigma_1^* = (1 - y - t_0, y, y, t_0 - y) \quad (3.20)$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \min\{t_0, 1 - t_0\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_0, 1 - d_0\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$;

(ii) se $\phi > 0$, então σ^* é um Equilíbrio de Nash simétrico se, e somente se,

$$\sigma_0^* = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \quad e \quad (3.21)$$

$$\sigma_1^* = (1 - t_\phi, 0, 0, t_\phi) \quad (3.22)$$

para algum (x, z) tal que $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$ e $\max\{-z, z\} \leq \min\{1 - x, x\}$;

Demonstração. (\Leftarrow) Suponha que $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ satisfaz (3.18), $\sigma_2^* = \sigma_1^*$ e $\phi\sigma_1^*(a_1) = 0$. Quer-se demonstrar que σ^* é um Equilíbrio de Nash Simétrico. Ou seja, demonstrar que $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ e $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$.

Como $r(\sigma_1^*) = (\sigma_1^*(a_1) + \sigma_1^*(a_3), \sigma_1^*(a_2) + \sigma_1^*(a_3))$ e $r(\sigma_0^*) = (t_\phi, t_\phi)$, então $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = y$ e $\sigma_1^*(a_3) = t_\phi - y$ para algum y tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $\phi y = 0$. Usando $r(\sigma_1^*) = (t_\phi, t_\phi)$ em (3.10) para cada $i \in \{1, 2\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_1 I_i^\phi M_i I_i^\phi \sigma_1^T &= t_\phi[\phi t_\phi + (1 - \phi)] = \frac{\sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi} - (1 - \phi)}{4\phi} \left(\sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi} + 1 - \phi \right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi} \right)^2 - (1 - \phi)^2}{4\phi} = \theta \end{aligned}$$

Tal resultado e $\sigma_1 I_1^\phi M_0 I_1^\phi \sigma_1^T = 0$ em (3.9) mostram que $p_0 \sim p_1$ e $p_0 \sim p_2$. Usando $\sigma_1 I_1^\phi M_1 I_1^\phi \sigma_1^T = \sigma_1 I_2^\phi M_2 I_2^\phi \sigma_1^T = \theta$ e $r(\sigma_1^*) = (t_\phi, t_\phi)$ em (3.11), obtém-se

$$\sigma_1 I_3^\phi M_3 I_3^\phi \sigma_1^T = 2\theta + 2\phi t_\phi [t_\phi - \sigma_1^*(a_3)] = 2\theta + 2\phi t_\phi y = 2\theta$$

em que a última igualdade usa $\phi y = 0$. Tal resultado e $\sigma_1 I_1^\phi M_0 I_1^\phi \sigma_1^T = 0$ em (3.9) mostram que $p_0 \sim p_3$. Portanto, $B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{p_0, p_1, p_2, p_3\}) = \Delta(A_0)$.

Como $r(\sigma_0^*) = (\sigma_0^*(p_1) + \sigma_0^*(p_3), \sigma_0^*(p_2) + \sigma_0^*(p_3))$ e $r(\sigma_0^*) = (d_\phi + z, d_\phi - z)$ para z tal que $2z = \sigma_0^*(p_1) - \sigma_0^*(p_2)$, então $\sigma_0^* = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x)$ para algum (x, z) tal que $\max\{-z, z\} \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$. Usando $r(\sigma_0^*) = (d_\phi + z, d_\phi - z)$ e $r(\sigma_1^*) = (t_\phi, t_\phi)$ em (3.15) e (3.17) para $i \in \{1, 2\}$ e $k = 1$, tem-se $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P(\sigma_1^*)^T = 2\phi t_\phi d_\phi$ e

$$\begin{aligned} \sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_1^T &= \phi t_\phi (x - z) \leq \phi t_\phi [d_\phi - z] \\ \sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_1^T &= \phi t_\phi (x + z) \leq \phi t_\phi [d_\phi + z] \end{aligned}$$

em que a desigualdade é estrita se, e somente se, $x < d_\phi$ e $\phi > 0$. Pelo Lemma 3.2.2 e por $r(\sigma_0^*) = (d_\phi + z, d_\phi - z)$, tem-se $\sigma_0^* \hat{M}_3^1(\sigma_1^*)^T = q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$ e $\sigma_0^* \hat{M}_0^1(\sigma_1^*)^T = 0 = \sigma_0 \hat{I}_3^\phi(\sigma_1^*)^T$. Logo,

$$\begin{aligned} \sigma_0^* \left(\hat{M}_3^1 - \hat{M}_0^1 - (\hat{I}_3^\phi - \hat{I}_0^\phi) P \right) (\sigma_1^*)^T &= 2d_\phi + 2\phi t_\phi d_\phi \\ &= 2d_\phi [1 + \phi t_\phi] = 2\delta \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que a segunda igualdade usa a definição de d_ϕ . Tal resultado em (3.14) mostra que $a_0 \sim a_3$. Novamente, pelo Lemma 3.2.2 e por $r(\sigma_0^*) = (d_\phi + z, d_\phi - z)$, tem-se $\sigma_0^* \hat{M}_1^1(\sigma_1^*)^T =$

$q_1(\sigma_0^*) = d_\phi + z$ e $\sigma_0^* \hat{M}_2^1(\sigma_1^*)^T = q_2(\sigma_0^*) = d_\phi - z$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sigma_0^* \left(\hat{M}_1^1 - \hat{M}_0^1 - (\hat{I}_1^\phi - \hat{I}_0^\phi)P \right) (\sigma_1^*)^T &\geq d_\phi + z - [\phi t_\phi [d_\phi - z] - 2\phi t_\phi d_\phi] \\ &= [d_\phi + z][1 + \phi t_\phi] \\ &= \delta \frac{d_\phi + z}{d_\phi} = \delta + z[1 + \phi t_\phi], \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0^* \left(\hat{M}_2^1 - \hat{M}_0^1 - (\hat{I}_2^\phi - \hat{I}_0^\phi)P \right) (\sigma_1^*)^T &\geq d_\phi - z - [\phi t_\phi [d_\phi + z] - 2\phi t_\phi d_\phi] \\ &= [d_\phi - z][1 + \phi t_\phi] \\ &= \delta \frac{d_\phi - z}{d_\phi} = \delta - z[1 + \phi t_\phi], \end{aligned} \quad (3.25)$$

em que se usou a definição de d_ϕ e a desigualdade é estrita se, e somente se, $\phi[d_\phi - x] > 0$. Tal resultado em (3.14) mostra que $a_0 \sim^1 a_1$ e $a_0 \sim^1 a_2$ se $\phi[d_\phi - x] = 0$ e $z = 0$. Neste caso, $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_0, a_1, a_2, a_3\}) = \Delta(A_1)$ e conclui-se que $\sigma_1^* \in \Delta(A_1) = B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$.

Se $z > 0$, então $a_0 \succ^1 a_1$. Neste caso, $0 = \sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = y$ e $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_0, a_3\})$ ou $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_0, a_2, a_3\})$. Se $z < 0$, então $a_0 \succ^1 a_2$. Neste caso, $0 = \sigma_1^*(a_2) = \sigma_1^*(a_1) = y$ e $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_0, a_3\})$ ou $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_0, a_1, a_3\})$. Portanto, nestes dois casos $\sigma_1^* = (1 - t_\phi, 0, 0, t_\phi)$ e, com isso, $\sigma_1^* \in \Delta(\{a_0, a_3\}) \subseteq B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$.

(\Rightarrow) Suponha que $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \in \Delta(A_0) \times \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ é um Equilíbrio de Nash Simétrico para o jogo apresentado na Tabela 2. Por definição, $\sigma_2^* = \sigma_1^*$. Quer-se demonstrar que σ^* satisfaz (3.18) e $\phi\sigma_1^*(a_1) = 0$.

A necessidade de $r(\sigma_1^*) = (t_\phi, t_\phi)$ e $\phi\sigma_1^*(a_1) = 0$ para que σ^* seja um Equilíbrio de Nash Simétrico é demonstrada no Lemma A.0.1 apresentado no apêndice A. Conforme exposto acima, $r(\sigma_1^*) = (t_\phi, t_\phi)$ implica em $\sigma_1^* = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y)$ para algum y tal que $0 \leq y \leq \min\{t_\phi, 1 - t_\phi\}$. Para a necessidade de $r(\sigma_0^*) = (d_\phi + z, d_\phi - z)$ para z tal que $2z = \sigma_0^*(p_1) - \sigma_0^*(p_2)$, considere o caso em que $1 - t_\phi > t_\phi$. Portanto, $2t_\phi < 1$. Logo, $\sigma_1^*(a_0) = 1 - t_\phi - y \geq 1 - 2t_\phi > 0$. Assim, $a_0 \succ^1 a_1$, $a_0 \succ^1 a_2$ e $a_0 \succ^1 a_3$. Usando (3.14), $a_0 \succ^1 a_1$ implica a desigualdade (3.26) a seguir, a qual vale com igualdade se, e somente se, $a_0 \sim^1 a_1$. Similarmente, $a_0 \succ^1 a_2$ implica (3.27), a qual vale com igualdade se, e somente se, $a_0 \sim^1 a_2$. Por fim, $a_0 \succ^1 a_3$ implica (3.28). Novamente, a desigualdade (3.28) vale com igualdade se, e somente se, $a_0 \sim^1 a_3$.

$$\delta \leq q_1(\sigma_0^*)[1 + \phi t_\phi] + \phi t_\phi \sigma_0^*(p_3) \quad (3.26)$$

$$\delta \leq q_2(\sigma_0^*)[1 + \phi t_\phi] + \phi t_\phi \sigma_0^*(p_3) \quad (3.27)$$

$$2\delta \leq [q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*)][1 + \phi t_\phi] \quad (3.28)$$

Suponha $y > 0$, então $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = y > 0$. Por isso, $a_1 \succ^1 a_0$ e $a_2 \succ^1 a_0$. Como $a_0 \succ^1 a_1$ e $a_0 \succ^1 a_2$, então $a_0 \sim^1 a_1$ e $a_0 \sim^1 a_2$. Segue disto que (3.27) e (3.26) são válidas com igualdade. Como $\phi = 0$ quando $y > 0$, as igualdades obtidas em (3.27) e (3.26) implicam que $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$. Suponha agora que $y = 0 < t_\phi$. Então

$\sigma_1^*(a_3) = t_\phi - y > 0$. Por isso, $a_3 \succsim^1 a_0$. Como $a_0 \succsim^1 a_3$, então $a_3 \sim^1 a_0$. Segue disto que (3.28) é válida com igualdade e, portanto, $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$. Como nos dois casos tem-se $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$, então $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$ se $1 - t_\phi > t_\phi$.

Considere o caso em que $1 - t_\phi < t_\phi$. Portanto, $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\} < t_\phi$. Assim, $\sigma_1^*(a_3) = t_\phi - y > 0$. Logo, $a_3 \succsim^1 a_0$, $a_3 \succsim^1 a_1$ e $a_3 \succsim^1 a_2$. Usando (3.14), $a_3 \succsim^1 a_0$ implica a desigualdade (3.29), a seguir. Similarmente, $a_3 \succsim^1 a_1$, implica (3.30) e $a_3 \succsim^1 a_2$, a desigualdade (3.31).

$$2\delta \geq [q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*)][1 + \phi t_\phi] \quad (3.29)$$

$$\delta \geq q_2(\sigma_0^*)[1 + \phi t_\phi \sigma_0^*(p_2)] \quad (3.30)$$

$$\delta \geq q_1(\sigma_0^*)[1 + \phi t_\phi \sigma_0^*(p_1)] \quad (3.31)$$

Suponha $y > 0$. Então, $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = y > 0$. Assim, $a_1 \succsim^1 a_3$ e $a_2 \succsim^1 a_3$. Logo, (3.30) e (3.31) valem com igualdade e, portanto, $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$ uma vez que $\phi = 0$ com $y > 0$. Suponha $y = 0 < 1 - t_\phi$. Assim, $\sigma_1^*(a_0) = 1 - t_\phi - y > 0$. Logo, $a_0 \succsim^1 a_3$ e, por isso, (3.29) vale com igualdade. Logo, $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$. Como nos dois casos tem-se $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$, então $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$ se $1 - t_\phi < t_\phi$.

Considere o caso em que $t_\phi = 1 - t_\phi$. Então, $t_\phi = \frac{1}{2}$. Se $y = 0$, então $\sigma_1^*(a_0) = \sigma_1^*(a_3) = \frac{1}{2} > 0$. Logo, $a_0 \succsim^1 a_3$ e $a_3 \succsim^1 a_0$. Assim, $a_0 \sim^1 a_3$. Usando (3.14), tem-se que $[q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*)][1 + \phi t_\phi] = 2\delta$. Logo, $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$. Se $y > 0$, então $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = y > 0$. Logo, $a_1 \sim^1 a_2 \succsim^1 a_0$ e $a_1 \succsim a_3$. Usando (3.14), $a_1 \sim^1 a_2$ e o fato que $\phi = 0$ com $y > 0$ tem-se que $q_1(\sigma_0^*) = q_2(\sigma_0^*)$. De (3.14) e $a_1 \succsim a_0$, tem-se que $q_1(\sigma_0^*) \leq \delta$. De (3.14) e $a_1 \succsim a_3$, tem-se que $q_2(\sigma_0^*) \geq \delta$. Como $q_1(\sigma_0^*) = q_2(\sigma_0^*)$, segue que $q_1(\sigma_0^*) \leq \delta$ e $q_1(\sigma_0^*) \geq \delta$. Portanto, $q_1(\sigma_0^*) = q_2(\sigma_0^*) = \delta$. Assim, $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$. Como nos dois casos tem-se $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$, então $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$ se $1 - t_\phi = t_\phi$.

Como em todos casos tem-se $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$, então

$$q_1(\sigma_0^*) - [d_\phi + z] = q_1(\sigma_0^*) \pm q_2(\sigma_0^*) - d_\phi - \frac{\sigma_0^*(p_1) - \sigma_0^*(p_2)}{2} \quad (3.32)$$

$$= 2d_\phi - q_2(\sigma_0^*) - d_\phi - \frac{q_1(\sigma_0^*) - q_2(\sigma_0^*)}{2} \quad (3.33)$$

$$= d_\phi - \frac{q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*)}{2} = d_\phi - \frac{2d_\phi}{2} = 0 \quad (3.34)$$

em que $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$ foi usado nas igualdades segunda e quarta. Como $q_1(\sigma_0^*) = d_\phi + z$ e $q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi$, então $q_2(\sigma_0^*) = 2d_\phi - q_1(\sigma_0^*) = d_\phi - z$. \square

De modo a entender o efeito da premiação, os Corolários 3.2.1 e Corolários 3.2.2, a seguir, registram fatos relevantes sob o comportamento dos agentes quando o Fiscal escolhe o padrão de fiscalização i_0 .

Corolário 3.2.1. *Os payoffs esperados do Fiscal, do Condutor 1 e do Condutor 2 no Equilíbrio de Nash Simétrico do subjogo G_0^ϕ , dado pela Proposição 3.2.1, são, respectivamente,*

$$\begin{aligned} U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) &= -2\gamma t_\phi \\ U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) &= 2(\mu + \eta)\phi d_\phi t_\phi \\ U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) &= 2(\mu + \eta)\phi d_\phi t_\phi \end{aligned}$$

Demonstração. Considere σ_0^* , σ_1^* e σ_2^* , com $\sigma_1^* = \sigma_2^*$, dados pela Proposição 3.2.1. Pelo Lema 3.2.1, o *payoff* esperado do Fiscal, quando $\phi > 0$, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)}{\alpha + \beta} &= \frac{U_0(p_0, \sigma_1^*, \sigma_2^*)}{\alpha + \beta} + \frac{(1 - \phi)}{2} \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_0^*) \left[q_s(\sigma_1^*) + q_s(\sigma_2^*) - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\ &\quad + \sigma_0^*(p_1)\phi q_1(\sigma_1^*)q_1(\sigma_2^*) + \sigma_0^*(p_2)\phi q_2(\sigma_1^*)q_2(\sigma_2^*) \\ &\quad + \frac{1}{2}\phi\sigma_0^*(p_3)[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)][q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*)] \\ &\quad - \frac{1}{2}\phi\sigma_0^*(p_3)[\sigma_1^*(a_3)(q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*)) + \sigma_2^*(a_3)(q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*))] \\ &= \frac{-\gamma t_\phi}{\alpha + \beta} + \frac{(1 - \phi)}{2}(d_\phi + z) \left[2t_\phi - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] + \frac{(1 - \phi)}{2}(d_\phi - z) \left[2t_\phi - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\ &\quad + \phi(x + z)t_\phi^2 + \phi(x - z)t_\phi^2 + \frac{1}{2}\phi(d_\phi - x)4t_\phi^2 - \frac{1}{2}\phi(d_\phi - x)4t_\phi^2 \\ &= \frac{-2\gamma t_\phi}{\alpha + \beta} + (1 - \phi)d_\phi \left[2t_\phi - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] + 2d_\phi\phi t_\phi^2 \\ &= \frac{-2\gamma t_\phi}{\alpha + \beta} + (1 - \phi)2d_\phi \left[t_\phi - \frac{\theta}{1 - \phi} + \frac{\phi}{1 - \phi}t_\phi^2 \right] \\ &= \frac{-2\gamma t_\phi}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

Pois, $t_\phi - \frac{\theta}{1 - \phi} + \frac{\phi}{1 - \phi}t_\phi^2 = 0$ de acordo com o Lemma A.0.6.

Quando $\phi = 0$, o *payoff* esperado do Fiscal é dado por

$$\begin{aligned} \frac{U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)}{\alpha + \beta} &= \frac{U_0(p_0, \sigma_1^*, \sigma_2^*)}{\alpha + \beta} + \frac{(1 - \phi)}{2} \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_0^*) [q_s(\sigma_1^*) + q_s(\sigma_2^*) - 2\theta] \\ &= \frac{-2\gamma t_0}{\alpha + \beta} + \frac{(1 - \phi)}{2}(d_0 + z) [2t_0 - 2\theta] + \frac{(1 - \phi)}{2}(d_0 - z) [2t_0 - \theta] \\ &= \frac{-2\gamma t_0}{\alpha + \beta} + \frac{(1 - \phi)}{2}(d_0 + z) [2\theta - 2\theta] + \frac{(1 - \phi)}{2}(d_0 - z) [2\theta - \theta] \\ &= \frac{-2\gamma t_0}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Pela simetria dos condutores, é suficiente considerar a situação do Condutor 1

apenas, pelo Lema 3.2.2, o *payoff* do Condutor 1, quando $\phi > 0$, é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)}{\mu + \eta} &= \frac{U_1(\sigma_0^*, a_0, \sigma_2^*)}{\mu + \eta} + \sigma_1(a_3^*) \left[2\delta - \sum_{s=1}^2 q_s(\sigma_0^*) [1 + \phi q_s(\sigma_2^*)] \right] \\
&\quad + \sigma_1^*(a_1) \left(\delta - q_1(\sigma_0^*) [1 + \phi q_1(\sigma_2^*)] - \phi q_2(\sigma_2^*) \sigma_0^*(p_3) \right) \\
&\quad + \sigma_1^*(a_2) \left(\delta - q_2(\sigma_0^*) [1 + \phi q_2(\sigma_2^*)] - \phi q_1(\sigma_2^*) \sigma_0^*(p_3) \right) \\
&= \frac{U_1(\sigma_0^*, a_0, \sigma_2^*)}{\mu + \eta} + t_\phi [2\delta - (d_\phi + z)[1 + \phi t_\phi] - (d_\phi - z)[1 + \phi t_\phi]] \\
&= 2\phi d_\phi t_\phi + t_\phi [2\delta - 2d_\phi [1 + \phi t_\phi]] \\
&= 2\phi d_\phi t_\phi + t_\phi [2\delta - 2\delta] \\
&= 2\phi d_\phi t_\phi
\end{aligned}$$

Portanto, $U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = 2(\mu + \eta)\phi d_\phi t_\phi$.

Quando $\phi = 0$, o *payoff* esperado do Condutor é

$$\begin{aligned}
\frac{U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)}{\mu + \eta} &= q_1(\sigma_1^*) \left(\delta - q_1(\sigma_0^*) \right) + q_2(\sigma_1^*) \left(\delta - q_2(\sigma_0^*) \right) \\
&= t_0 \left(\delta - (d_0 + z) \right) + t_0 \left(\delta - (d_0 - z) \right) \\
&= t_0 (2\delta - 2d_0) \\
&= t_0 (2\delta - 2\delta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.2. *Em cada Equilíbrio de Nash Simétrico do subjogo G_0^ϕ , dado pela Proposição 3.2.1, o número esperado de excesso de velocidade é $\mathbb{E}(e) = \sigma_1^* E(\sigma_2^*)^T = 2t_\phi$, em que E sumariza o número de excessos de velocidade, ou seja, $E = M_3$. O número esperado de excesso de velocidade do condutor 1 é $\mathbb{E}(e_1) = \sigma_1^* \cdot [0, 1, 1, 2] = q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*) = 2t_\phi$. O número esperado de fiscalizações é descrito por $\mathbb{E}(n) = \sigma_0^* \cdot [0, 1, 1, 2] = 2d_\phi$. A quantidade esperada de autuações é $\mathbb{E}(m) = 2d_\phi t_\phi$. A transferência para o fiscal esperada é dada por $\mathbb{E}(m_0) = 2d_\phi t_\phi [1 - \phi + \phi t_\phi]$. A transferência para o C_1 e o C_2 esperada é dada por $\mathbb{E}(m_1) = \mathbb{E}(m_2) = 2d_\phi t_\phi [\phi - 1 - \phi t_\phi]$.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 3.2.1, para $k \in \{1, 2\}$, $q_k(\sigma_k^*) = q_k(\sigma_{3-k}^*) = t_\phi$. Ainda, $q_1(\sigma_0^*) = d_\phi + z$ e $q_2(\sigma_0^*) = d_\phi - z$. Então, o número esperado de excesso de

velocidade é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e) &= \frac{1}{2}\sigma_1^* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} (\sigma_2^*)^T \\
&= \frac{1}{2}\sigma_1^* \begin{pmatrix} q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*) \\ 1 + q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*) \\ 1 + q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*) \\ 2 + q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} [q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*) + q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*)] \\
&= 2t_\phi.
\end{aligned}$$

O número esperado de excesso de velocidade do condutor 1 é $\mathbb{E}(e_1) = \sigma_1^* \cdot [0, 1, 1, 2] = q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*) = 2t_\phi$.

O número esperado de fiscalizações é dado por $\mathbb{E}(n) = \sigma_0^* \cdot [0, 1, 1, 2] = q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*) = d_\phi + z + d_\phi - z = 2d_\phi$. A quantidade esperada de autuações é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m) &= \frac{1}{2}\sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} (\sigma_1^* + \sigma_2^*)^T \\
&= \frac{1}{2}\sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 \\ q_1(\sigma_1^*) + q_1(\sigma_2^*) \\ q_2(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_2^*) \\ q_1(\sigma_1^*) + q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_2^*) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} [q_1(\sigma_0^*)[q_1(\sigma_1^*) + q_1(\sigma_2^*)] + q_2(\sigma_0^*)[q_2(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_2^*)]] \\
&= \frac{1}{2} [(d_\phi + z)2t_\phi + (d_\phi - z)2t_\phi] \\
&= 2d_\phi t_\phi.
\end{aligned}$$

A transferência para o fiscal esperada é dada por $\mathbb{E}(m_0) = 2d_\phi t_\phi [(1 - \phi) + \phi t_\phi]$. Utilizando o Lema 3.2.1, observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m_0) &= \sum_{j=0}^3 \sigma_0^*(p_j) (\sigma_1^* I_j^\phi M_j I_j^\phi (\sigma_1^*)^T) \\
&= \sigma_0^*(p_1) [(1 - \phi)q_1(\sigma_1^*) + \phi q_1(\sigma_1^*)^2] + \sigma_0^*(p_2) [(1 - \phi)q_2(\sigma_1^*) + \phi q_2(\sigma_1^*)^2] \\
&\quad + \sigma_0^*(p_3) [(1 - \phi)(q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)) + \phi(q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*))^2] - \phi \sigma_1^*(a_3) [q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)].
\end{aligned}$$

Se $\phi = 0$, $\mathbb{E}(m_0) = [\sigma_0^*(p_1) + \sigma_0^*(p_2) + 2\sigma_0^*(p_3)]t_0 = [x + z + x - z + 2(d_0 - x)] = 2d_0t_0$. Se $\phi > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(m_0) &= [\sigma_0^*(p_1) + \sigma_0^*(p_2)][(1 - \phi)t_\phi + \phi t_\phi^2] + \sigma_0^*(p_3)[2(1 - \phi)t_\phi + 4\phi t_\phi^2 - 2\phi t_\phi^2] \\ &= [q_1(\sigma_0^*) + q_2(\sigma_0^*)][(1 - \phi)t_\phi + \phi t_\phi^2] \\ &= [d_\phi + z + d_\phi - z][(1 - \phi)t_\phi + \phi t_\phi^2] \\ &= 2d_\phi t_\phi [(1 - \phi) + \phi t_\phi].\end{aligned}$$

A transferência para o C_1 esperada é dada por $\mathbb{E}(m_1) = 2d_\phi t_\phi [\phi - 1 - \phi t_\phi]$. Observe que $\mathbb{E}(m_1) = \sigma_1^* \cdot [\hat{m}_0, \hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3]$ em que

$$\begin{aligned}\hat{m}_0 &= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 & \phi \\ 0 & 0 & \phi & \phi \\ 0 & \phi & \phi & 2\phi \end{pmatrix} (\sigma_2^*)^T \\ &= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 \\ \phi q_1(\sigma_2^*) \\ \phi q_2(\sigma_2^*) \\ \phi [q_1(\sigma_2^*) + q_2(\sigma_2^*)] \end{pmatrix} \\ &= \phi q_1(\sigma_0^*) q_1(\sigma_2^*) + \phi q_2(\sigma_0^*) q_2(\sigma_2^*) \\ &= \phi q_1(\sigma_0^*) q_1(\sigma_2^*) + \phi q_2(\sigma_0^*) q_2(\sigma_2^*) \\ &= \phi(d_\phi + z)t_\phi + \phi(d_\phi - z)t_\phi \\ &= 2\phi d_\phi t_\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 &= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \phi & \phi \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (\sigma_2^*)^T \\ &= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \phi q_2(\sigma_2^*) \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \phi \sigma_0^*(p_2) q_2(\sigma_2^*) - q_1(\sigma_0^*) \\ &= \phi \sigma_0^*(p_2) t_\phi - d_\phi - z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{m}_2 &= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 & \phi \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (\sigma_2^*)^T \\
&= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 \\ \phi q_1(\sigma_2^*) \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \phi \sigma_0^*(p_1) q_1(\sigma_2^*) - q_2(\sigma_0^*) \\
&= \phi \sigma_0^*(p_1) t_\phi - d_\phi - z - d_\phi + z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{m}_3 &= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} (\sigma_2^*)^T \\
&= \sigma_0^* \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= -q_1(\sigma_0^*) - q_2(\sigma_0^*) \\
&= -(d_\phi + z) - (d_\phi - z) \\
&= -2d_\phi
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m_1) &= \sigma_1^*(a_0) 2\phi d_\phi t_\phi + \sigma_1^*(a_1) [\phi \sigma_0^*(p_2) t_\phi - d_\phi - z] + \sigma_1^*(a_2) [\phi \sigma_0^*(p_1) t_\phi - d_\phi + z] - \sigma_1^*(a_3) 2d_\phi \\
&= \sigma_1^*(a_0) 2\phi d_\phi t_\phi + \sigma_1^*(a_1) [-d_\phi - z] + \sigma_1^*(a_2) [-d_\phi + z] - \sigma_1^*(a_3) 2d_\phi
\end{aligned}$$

Se $\phi > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m_1) &= (1 - t_\phi) 2\phi d_\phi t_\phi - 2d_\phi t_\phi \\
&= 2d_\phi t_\phi [(1 - t_\phi)\phi - 1] \\
&= 2d_\phi t_\phi [\phi - 1 - \phi t_\phi].
\end{aligned}$$

Se $\phi = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m_1) &= \sigma_1^*(a_1) [-d_\phi - z] + \sigma_1^*(a_2) [-d_\phi + z] - \sigma_1^*(a_3) 2d_\phi \\
&= y[-d_\phi - z] + y[-d_\phi + z] - (t_\phi - y) 2d_\phi \\
&= 2d_\phi t_\phi,
\end{aligned}$$

em que se usou o fato que $\phi\sigma_1^*(a_1) = 0$. □

Como destacado anteriormente, o Fiscal possui somente uma ação possível no subjogo implicado por i_3 , isto é, $r = (r_f, r_f)$. Neste subjogo, somente os Condutores jogam e o Equilíbrio de Nash e os respectivos *payoffs* são dados pela observação 3.2.3, a seguir.

Observação 3.2.3. O Equilíbrio de Nash no subjogo G_3^ϕ é trivialmente dado por $[(r_f, r_f), (v_b, v_b), (v_b, v_b)]$ e confere ao Fiscal o nível de payoff -2α e aos Condutores payoff nulo. Ainda, o número esperado de fiscalizações é 2, enquanto o excesso de velocidade esperado é nulo. Como os Condutores nunca são multados em equilíbrio, o número esperado de multas é zero.

Para o cálculo do equilíbrio de Nash no subjogo G_1^ϕ da Figura 9, observe que o *payoff* que o Condutor 1 obtém escolhendo a_0 é estritamente maior do que aquele obtido escolhendo a_1 , independentemente da escolha do Fiscal e do Condutor 2. Então, a estratégia “jogar a_1 com probabilidade 1” é dita estratégia estritamente dominada pela estratégia “jogar a_0 com probabilidade 1”. Desta forma, com a observação 3.2.4, a seguir, toda estratégia do Condutor 1 que atribui probabilidade estritamente positiva para a_1 não pode fazer parte do equilíbrio de Nash e, assim, pode ser eliminada, uma vez que cada uma de tais estratégias é estritamente dominada pela estratégia que se obtém ao transferir para a ação a_0 a probabilidade atribuída a a_1 ⁴.

Observação 3.2.4. Nenhuma estratégia estritamente dominada pode ser componente de equilíbrios de Nash, pois toda estratégia que compõem um equilíbrio de Nash necessita ser melhor resposta para a estratégia dos demais jogadores e estratégias estritamente dominadas nunca são melhores respostas.

Similarmente, o *payoff* que o Condutor 2 obtém escolhendo a_0 é estritamente maior do que aquele obtido escolhendo a_1 independentemente da escolha do Fiscal e do Condutor 1. Ainda, note que o *payoff* que o Condutor 1 obtém escolhendo a_2 é estritamente maior do que aquele obtido escolhendo a_3 independentemente da escolha do Fiscal e do Condutor 2. Similarmente, o *payoff* que o Condutor 2 obtém escolhendo a_2 é estritamente maior do que aquele obtido escolhendo a_3 independentemente da escolha do Fiscal e do Condutor 1. Então, toda estratégia dos Condutores 1 e 2 que atribuem probabilidade estritamente positiva para a_1 e a_3 podem ser ignoradas do cálculo, pois cada uma de tais estratégias é estritamente dominada pela estratégia obtida ao transferir para a ação a_0 e a_2 as probabilidades atribuídas a a_1 e a_3 , respectivamente.

A matriz de *payoffs* obtida ao eliminar as estratégias estritamente dominadas é apresentada a seguir.

⁴ Para obter mais detalhes sobre tal fato, ver Tadelis (2013).

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{C}_2 \\
 \begin{array}{cc}
 a_0 = (v_b, v_b) & a_2 = (v_b, v_a) \\
 \hline
 a_0 & -\alpha, 0, 0 \quad -\alpha - \frac{\gamma}{2}, 0, \mu \\
 a_2 & -\alpha - \frac{\gamma}{2}, \mu, 0 \quad -\alpha - \gamma, \mu, \mu \\
 \hline
 \end{array} \\
 \text{com Fiscal escolhendo } r = (r_f, r_n) \\
 \\
 \mathbf{C}_2 \\
 \begin{array}{cc}
 a_0 = (v_b, v_b) & a_2 = (v_b, v_a) \\
 \hline
 a_0 & -2\alpha, 0, 0 \quad \phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta \\
 a_2 & \phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2 \quad 2\lambda, -\eta, -\eta \\
 \hline
 \end{array} \\
 \text{com Fiscal escolhendo } r = (r_f, r_p)
 \end{array}$$

Figura 11 – Subjogo G_1^ϕ após eliminar as estratégias estritamente dominadas.

A Proposição 3.2.2 registra um Equilíbrio de Nash Simétrico do subjogo implicado pelo padrão de fiscalização i_1 como também os *payoffs* de equilíbrio dos jogadores.

Proposição 3.2.2. *A previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ é Equilíbrio de Nash Simétrico para o subjogo G_1^ϕ se, e somente se, $\sigma_2^* = \sigma_1^*$,*

$$\sigma_0^* = [\sigma_0^*(r_f, r_n), \sigma_0^*(r_f, r_p)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \quad (3.35)$$

$$\sigma_1^* = [\sigma_1^*(a_0), \sigma_1^*(a_1), \sigma_1^*(a_2), \sigma_1^*(a_3)] = (1 - t_\phi, 0, t_\phi, 0) \quad (3.36)$$

Ainda, o *payoff* esperado do Fiscal, do \mathbf{C}_1 e do \mathbf{C}_2 são, respectivamente

$$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) = -\alpha - \gamma t_\phi$$

$$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) = d_\phi(\mu + \eta)\phi t_\phi$$

$$U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) = d_\phi(\mu + \eta)\phi t_\phi$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que σ^* é Equilíbrio de Nash Simétrico apresentado na Figura 9. Conforme destacado no texto acima, as estratégias que colocam probabilidade positiva em a_1 e a_3 para os Condutores 1 e 2 são estratégias estritamente dominadas, portanto, $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_3) = \sigma_2^*(a_1) = \sigma_2^*(a_3) = 0$. Concluí-se que σ^* pode ter probabilidade positiva somente em a_0 e a_2 , ou seja, $\sigma_1^*(a_0) \geq 0$ e $\sigma_1^*(a_2) \geq 0$. Então, para o cálculo do(s) equilíbrio(s) de Nash basta considerar a Figura 11.

Observe que $\sigma_0^*(r_f, r_p) > 0$ e $\sigma_0^*(r_f, r_n) > 0$ em equilíbrio de Nash. De fato, suponha que o Fiscal jogue $\sigma_0^*(r_f, r_n) = 1$. Note que \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 respondem de maneira ótima jogando a_2 com probabilidade 1. Mas a melhor resposta do Fiscal aos Condutores jogarem a_2 com probabilidade 1 é jogar (r_f, r_p) com probabilidade 1. Contradição com o Fiscal jogar (r_f, r_n) com probabilidade 1. Suponha que o Fiscal jogue $\sigma_0^*(r_f, r_p) = 1$. Note que \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 respondem de maneira ótima jogando a_0 com probabilidade 1. Mas a melhor resposta do

Fiscal aos Condutores jogarem a_0 com probabilidade 1 é jogar (r_f, r_n) com probabilidade 1. Contradição com o Fiscal jogar (r_f, r_p) com probabilidade 1.

Observe que $\sigma_1^*(a_0) > 0$ e $\sigma_1^*(a_2) > 0$ no equilíbrio de Nash Simétrico. De fato, suponha $\sigma_1^*(a_2) = 0$. Então, $\sigma_1^*(a_0) = 1$. Como $\sigma_1^* = \sigma_2^*$ no equilíbrio de Nash Simétrico, segue que $\sigma_2^*(a_0) = 1$. A melhor resposta do Fiscal aos Condutores jogando a_0 com probabilidade 1 é escolher (r_f, r_n) com probabilidade 1. Mas a melhor resposta dos Condutores ao Fiscal escolher (r_f, r_n) com probabilidade 1 é escolherem a_2 com probabilidade 1. Contradição com $\sigma_1^*(a_0) = \sigma_2^*(a_0) = 1$. Portanto, $\sigma_1^*(a_2) > 0$ no equilíbrio de Nash Simétrico. Suponha $\sigma_1^*(a_0) = 0$. Então, $\sigma_1^*(a_2) = 1$. Como $\sigma_1^* = \sigma_2^*$ no equilíbrio de Nash Simétrico, segue que $\sigma_2^*(a_2) = 1$. A melhor resposta do Fiscal aos condutores jogando a_2 com probabilidade 1 é escolher (r_f, r_p) com probabilidade 1. Mas a melhor resposta dos Condutores ao Fiscal escolher (r_f, r_p) com probabilidade 1 é escolherem a_0 com probabilidade 1. Contradição com $\sigma_1^*(a_2) = \sigma_2^*(a_2) = 1$. Portanto, $\sigma_1^*(a_0) > 0$ no equilíbrio de Nash Simétrico. Como $\sigma_1^*(a_0) > 0$, $\sigma_1^*(a_2) > 0$ e $\sigma_1^* = \sigma_2^*$ em Nash Simétrico, segue que $\sigma_2^*(a_0) > 0$ e $\sigma_2^*(a_2) > 0$.

Concluí-se que $\sigma_1^*(a_0) > 0$, $\sigma_1^*(a_2) > 0$, $\sigma_2^*(a_0) > 0$, $\sigma_2^*(a_2) > 0$, $\sigma_0^*(r_f, r_p) > 0$ e $\sigma_0^*(r_f, r_n) > 0$ em equilíbrio de Nash Simétrico. Utilizando o fato que $\sigma_0^*(r_f, r_n) + \sigma_0^*(r_f, r_p) = \sigma_1^*(a_0) + \sigma_1^*(a_2) = \sigma_2^*(a_0) + \sigma_2^*(a_2) = 1$. Então, o *payoff* esperado do \mathbf{C}_1 ao escolher a_0 é dado por $\sigma_0^*(r_f, r_n)[0\sigma_2^*(a_0) + (1 - \sigma_2^*(a_0))0] + (1 - \sigma_0^*(r_f, r_n))[0\sigma_2^*(a_0) + (1 - \sigma_2^*(a_0))\phi_1]$ e ao escolher a_2 o seu *payoff* esperado é dado por $\sigma_0^*(r_f, r_n)[\mu\sigma_2^*(a_0) + (1 - \sigma_2^*(a_0))\mu] + (1 - \sigma_0^*(r_f, r_n))[(-\eta)\sigma_2^*(a_0) + (1 - \sigma_2^*(a_0))(-\eta)]$. Como σ^* é equilíbrio de Nash, $\sigma_1(a_0) > 0$ e $\sigma_1(a_2) > 0$, então o *payoff* esperado do \mathbf{C}_1 ao escolher a_0 é igual ao *payoff* esperado do \mathbf{C}_1 ao escolher a_2 . Assim, temos a seguinte condição:

$$(1 - \sigma_0^*(r_f, r_n))(1 - \sigma_2^*(a_0))\phi_1 = \mu\sigma_0^*(r_f, r_n) - \eta(1 - \sigma_0^*(r_f, r_n)) \quad (3.37)$$

De maneira análoga, o *payoff* esperado do \mathbf{C}_2 ao escolher a_0 é dado por $\sigma_0^*(r_f, r_n)[0\sigma_1^*(a_0) + (1 - \sigma_1^*(a_0))0] + (1 - \sigma_0^*(r_f, r_n))[0\sigma_1^*(a_0) + (1 - \sigma_1^*(a_0))\phi_2]$ e ao escolher a_2 o seu *payoff* esperado é dado por $\sigma_0^*(r_f, r_n)[\mu\sigma_1^*(a_0) + (1 - \sigma_1^*(a_0))\mu] + (1 - \sigma_0^*(r_f, r_n))[(-\eta)\sigma_1^*(a_0) + (1 - \sigma_1^*(a_0))(-\eta)]$. Como $\sigma_1(a_0) > 0$ e $\sigma_1(a_2) > 0$, então no equilíbrio de Nash o *payoff* esperado do \mathbf{C}_2 ao escolher a_0 é igual ao *payoff* esperado do \mathbf{C}_2 ao escolher a_2 . Desta forma, temos a seguinte condição:

$$(1 - \sigma_0^*(r_f, r_n))(1 - \sigma_1^*(a_0))\phi_2 = \mu\sigma_0^*(r_f, r_n) - \eta(1 - \sigma_0^*(r_f, r_n)) \quad (3.38)$$

O *payoff* esperado do Fiscal ao escolher (r_f, r_n) é dado por $\sigma_1^*(a_0)[(-\alpha)\sigma_2^*(a_0) + (-\alpha - \frac{\gamma}{2})(1 - \sigma_2^*(a_0))] + (1 - \sigma_1^*(a_0))[(-\alpha - \frac{\gamma}{2})\sigma_2^*(a_0) + (-\alpha - \gamma)(1 - \sigma_2^*(a_0))]$ e ao escolher (r_f, r_p) o seu *payoff* esperado é dado por $\sigma_1^*(a_0)[(-2\alpha)\sigma_2^*(a_0) + (\phi_0 - \alpha)(1 - \sigma_2^*(a_0))] + (1 - \sigma_1^*(a_0))[(\phi_0 - \alpha)\sigma_2^*(a_0) + 2\lambda(1 - \sigma_2^*(a_0))]$. Como $\sigma_0^*(r_f, r_n) > 0$ e $\sigma_0^*(r_f, r_p) > 0$ no equilíbrio de Nash o *payoff* esperado do Fiscal ao escolher (r_f, r_n) é igual ao *payoff* esperado ao

escolher (r_f, r_p) , assim

$$-\alpha - \frac{\gamma}{2}(1 - \sigma_1^*(a_0)) - \frac{\gamma}{2}(1 - \sigma_2^*(a_0)) = -\alpha\sigma_1^*(a_0) - \alpha\sigma_2^*(a_0) + \sigma_1^*(a_0)(1 - \sigma_2^*(a_0))\phi_0 \quad (3.39)$$

$$+(1 - \sigma_1^*(a_0))\sigma_2^*(a_0)\phi_0 + (1 - \sigma_1^*(a_0))(1 - \sigma_2^*(a_0))2\lambda$$

Como $\sigma_1^* = \sigma_2^*$, tem-se que $\sigma_1^*(a_0) = \sigma_2^*(a_0) \equiv Q$. Da condição (3.39) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \gamma(1 - Q) - 2\alpha Q + 2Q(1 - Q)\phi_0 + 2(1 - Q)^2 \left(\frac{\beta - \alpha - \gamma}{2} \right) \\ &= -\alpha + \gamma(1 - Q) + 2\alpha(1 - Q) + Q(1 - Q) \left((1 - \phi)(\alpha + \beta) - 2\alpha - \gamma \right) \\ &\quad + (1 - Q)^2 (\alpha + \beta - 2\alpha - \gamma) \\ &= -\alpha + (2\alpha + \gamma)(1 - Q) + Q(1 - Q) \left((1 - \phi)(\alpha + \beta) - 2\alpha - \gamma \right) \\ &\quad + (1 - Q)^2 (\alpha + \beta - 2\alpha - \gamma) \\ &= -\alpha + (2\alpha + \gamma)(1 - Q) + (1 - Q) (\alpha + \beta) \left((1 - \phi)Q + 1 - Q \right) \\ &\quad + (1 - Q) (-2\alpha - \gamma) \\ &= -\alpha + (\alpha + \beta) \left((1 - \phi)(Q - Q^2) + (1 - Q)^2 \right) \\ &= (\alpha + \beta) \left[-\theta + Q - Q^2 + \phi Q^2 - \phi Q + 1 - 2Q + Q^2 \right] \\ &= (\alpha + \beta) \left[\phi Q^2 - (1 + \phi)Q + 1 - \theta \right] \end{aligned}$$

Portanto, $\phi Q^2 - (1 + \phi)Q + 1 - \theta = 0$. Note que, se $\phi = 0$, então $Q = 1 - \theta = 1 - t_0$ e de (3.37) ou (3.38), segue que $\sigma_0^*(r_f, r_n) = \eta/(\mu + \eta) = 1 - \delta$.

Se $\phi > 0$, então

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1 + \phi \pm \sqrt{(1 + \phi)^2 - 4\phi(1 - \theta)}}{2\phi} \\ &= \frac{1 + \phi \pm \sqrt{1 + 2\phi + \phi^2 - 4\phi + 4\theta\phi}}{2\phi} \\ &= \frac{1 + \phi \pm \sqrt{1 - 2\phi + \phi^2 + 4\theta\phi} + 2\phi - 2\phi}{2\phi} \\ &= \frac{1 - \phi \pm \sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi} + 2\phi}{2\phi} \\ &= 1 + \frac{1 - \phi \pm \sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi}}{2\phi} \end{aligned}$$

Como $1 + \frac{1 - \phi + \sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi}}{2\phi} > 1$, descarta-se tal solução. Segue então que $Q =$

$1 - \frac{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - (1-\phi)}{2\phi} = 1 - t_\phi$. De (3.37) ou (3.38), tem-se

$$\begin{aligned}
0 &= (1 - \sigma_0^*(r_f, r_n))t_\phi(\mu + \eta)\phi - (\mu + \eta)\sigma_0^*(r_f, r_n) + \eta \\
&= t_\phi(\mu + \eta)\phi - t_\phi(\mu + \eta)\phi\sigma_0^*(r_f, r_n) - (\mu + \eta)\sigma_0^*(r_f, r_n) + \eta \\
&= (\mu + \eta) \left[t_\phi\phi - t_\phi\phi\sigma_0^*(r_f, r_n) - \sigma_0^*(r_f, r_n) + \frac{\eta}{\eta + \mu} \right] \\
&= (\mu + \eta) [t_\phi\phi - t_\phi\phi\sigma_0^*(r_f, r_n) - \sigma_0^*(r_f, r_n) + 1 - \delta] \\
&= (\mu + \eta) [1 + t_\phi\phi - \delta - \sigma_0^*(r_f, r_n)(1 + t_\phi\phi)] \\
&= (\mu + \eta)(1 + t_\phi\phi) \left[1 - \frac{\delta}{1 + t_\phi\phi} - \sigma_0^*(r_f, r_n) \right] \\
&= (\mu + \eta)(1 + t_\phi\phi) [1 - d_\phi - \sigma_0^*(r_f, r_n)]
\end{aligned}$$

Como $\mu + \eta > 0$ e $1 + t_\phi\phi > 0$, segue que $\sigma_0^*(r_f, r_n) = 1 - d_\phi$. Portanto, (3.35) e (3.36) valem.

(\Leftarrow) Para ver que σ^* , dada por (3.35) e (3.36), é equilíbrio de Nash, note que não há desvio unilateral a partir de σ^* . De fato, observe que o *payoff* esperado do Condutor 1 é dado por

$$\begin{aligned}
U_1(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_1(a_0)\{\sigma_0(r_f, r_n)[0\sigma_2(a_0) + \phi_1\sigma_2(a_1) + 0\sigma_2(a_2) + \phi_1\sigma_2(a_3)] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p)[0\sigma_2(a_0) + \phi_1\sigma_2(a_1) + \phi_1\sigma_2(a_2) + 2\phi_1\sigma_2(a_3)]\} \\
&+ \sigma_1(a_1)\{\sigma_0(r_f, r_n)[-\eta\sigma_2(a_0) - \eta\sigma_2(a_1) - \eta\sigma_2(a_2) - \eta\sigma_2(a_3)] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p)[-\eta\sigma_2(a_0) - \eta\sigma_2(a_1) - \eta\sigma_2(a_2) - \eta\sigma_2(a_3)]\} \\
&+ \sigma_1(a_2)\{\sigma_0(r_f, r_n)[\mu\sigma_2(a_0) + (\mu + \phi_1)\sigma_2(a_1) + \mu\sigma_2(a_2) + (\mu + \phi_1)\sigma_2(a_3)] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p)[-\eta\sigma_2(a_0) - \eta\sigma_2(a_1) - \eta\sigma_2(a_2) - \eta\sigma_2(a_3)]\} \\
&+ \sigma_1(a_3)\{\sigma_0(r_f, r_n)[(\mu - \eta)\sigma_2(a_0) + (\mu - \eta)(\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_2) + \sigma_2(a_3))] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p)[-2\eta\sigma_2(a_0) - 2\eta\sigma_2(a_1) - 2\eta\sigma_2(a_2) - 2\eta\sigma_2(a_3)]\} \\
&= \sigma_1(a_0)\{\sigma_0(r_f, r_n)[\phi_1(\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3))] + \sigma_0(r_f, r_p)[\phi_1(\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_2) + 2\sigma_2(a_3))]\} \\
&\quad - \eta\sigma_1(a_1) \\
&\quad + \sigma_1(a_2)\{\sigma_0(r_f, r_n)[\mu + \phi_1(\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3))] - \eta\sigma_0(r_f, r_p)\} \\
&\quad + \sigma_1(a_3)\{-\eta + \mu\sigma_0(r_f, r_n) - \eta\sigma_0(r_f, r_p)\}
\end{aligned}$$

Observe que $U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = U_1(\sigma_0^*, a_0, \sigma_2^*) = U_1(\sigma_0^*, a_2, \sigma_2^*)$. Ou seja, $d_\phi\phi_1t_\phi = U_1(\sigma_0^*, a_0, \sigma_2^*) = U_1(\sigma_0^*, a_2, \sigma_2^*) = \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi$.

Suponha σ_1 arbitrário. Então,

$$\begin{aligned}
U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) - U_1(\sigma_0^*, \sigma_1, \sigma_2^*) &= d_\phi \phi_1 t_\phi - \sigma_1(a_0) d_\phi \phi_1 t_\phi + \eta \sigma_1(a_1) \\
&\quad - \sigma_1(a_2) \{ \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi \} - \sigma_1(a_3) \{ -\eta + \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_1(a_0) - \sigma_1(a_2)] d_\phi \phi_1 t_\phi + \eta [\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)] \\
&\quad - \sigma_1(a_3) \{ \mu - (\mu + \eta) d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_1(a_0) - \sigma_1(a_2)] d_\phi \phi_1 t_\phi + \eta [\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)] \\
&\quad - \sigma_1(a_3) \{ \mu - \mu d_\phi - \eta d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_1(a_0) - \sigma_1(a_2)] d_\phi \phi_1 t_\phi + \eta [\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)] \\
&\quad - \sigma_1(a_3) \{ \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_1(a_0) - \sigma_1(a_2) - \sigma_1(a_3)] d_\phi \phi_1 t_\phi + \eta [\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

em que se usou os fatos que $\mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi = d_\phi \phi_1 t_\phi$, $\sigma_1(a_0) + \sigma_1(a_2) + \sigma_1(a_3) \leq 1$, $d_\phi \phi_1 t_\phi \geq 0$, $\eta > 0$ e $\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3) \geq 0$. Portanto, $U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq U_1(\sigma_0^*, \sigma_1, \sigma_2^*)$.

O *payoff* esperado do Condutor 2 é dado por

$$\begin{aligned}
U_2(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_2(a_0) \{ \sigma_0(r_f, r_n) [0\sigma_1(a_0) + \phi_2\sigma_1(a_1) + 0\sigma_1(a_2) + \phi_2\sigma_1(a_3)] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p) [0\sigma_1(a_0) + \phi_2\sigma_1(a_1) + \phi_2\sigma_1(a_2) + 2\phi_2\sigma_1(a_3)] \} \\
&+ \sigma_2(a_1) \{ \sigma_0(r_f, r_n) [-\eta\sigma_1(a_0) - \eta\sigma_1(a_1) - \eta\sigma_1(a_2) - \eta\sigma_1(a_3)] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p) [-\eta\sigma_1(a_0) - \eta\sigma_1(a_1) - \eta\sigma_1(a_2) - \eta\sigma_1(a_3)] \} \\
&+ \sigma_2(a_2) \{ \sigma_0(r_f, r_n) [\mu\sigma_1(a_0) + (\mu + \phi_2)\sigma_1(a_1) + \mu\sigma_1(a_2) + (\mu + \phi_2)\sigma_1(a_3)] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p) [-\eta\sigma_1(a_0) - \eta\sigma_1(a_1) - \eta\sigma_1(a_2) - \eta\sigma_1(a_3)] \} \\
&+ \sigma_2(a_3) \{ \sigma_0(r_f, r_n) [(\mu - \eta)\sigma_1(a_0) + (\mu - \eta)(\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2) + \sigma_1(a_3))] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p) [-2\eta\sigma_1(a_0) - 2\eta\sigma_1(a_1) - 2\eta\sigma_1(a_2) - 2\eta\sigma_1(a_3)] \} \\
&= \sigma_2(a_0) \{ \sigma_0(r_f, r_n) [\phi_2(\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3))] + \sigma_0(r_f, r_p) [\phi_2(\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2) + 2\sigma_1(a_3))] \} \\
&\quad - \eta\sigma_2(a_1) \\
&+ \sigma_2(a_2) \{ \sigma_0(r_f, r_n) [\mu + \phi_2(\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3))] - \eta\sigma_0(r_f, r_p) \} \\
&+ \sigma_2(a_3) \{ -\eta + \mu\sigma_0(r_f, r_n) - \eta\sigma_0(r_f, r_p) \}
\end{aligned}$$

Observe que $U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, a_0) = U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, a_2)$. Ou seja, $d_\phi \phi_2 t_\phi = U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, a_0) = U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, a_2) = \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi$.

Suponha σ_2 arbitrário. Então,

$$\begin{aligned}
U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) - U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2) &= d_\phi \phi_2 t_\phi - \sigma_2(a_0) d_\phi \phi_2 t_\phi + \eta \sigma_2(a_1) \\
&\quad - \sigma_2(a_2) \{ \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi \} - \sigma_2(a_3) \{ -\eta + \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_2(a_0) - \sigma_2(a_2)] d_\phi \phi_2 t_\phi + \eta [\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)] \\
&\quad - \sigma_2(a_3) \{ \mu - (\mu + \eta) d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_2(a_0) - \sigma_2(a_2)] d_\phi \phi_2 t_\phi + \eta [\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)] \\
&\quad - \sigma_2(a_3) \{ \mu - \mu d_\phi - \eta d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_2(a_0) - \sigma_2(a_2)] d_\phi \phi_2 t_\phi + \eta [\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)] \\
&\quad - \sigma_2(a_3) \{ \mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi \} \\
&= [1 - \sigma_2(a_0) - \sigma_2(a_2) - \sigma_2(a_3)] d_\phi \phi_2 t_\phi + \eta [\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

em que se usou os fatos que $\mu(1 - d_\phi) - \eta d_\phi = d_\phi \phi_2 t_\phi$, $\sigma_2(a_0) + \sigma_2(a_2) + \sigma_2(a_3) \leq 1$, $d_\phi \phi_2 t_\phi \geq 0$, $\eta > 0$ e $\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3) \geq 0$. Portanto, $U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2)$.

O *payoff* esperado do Fiscal é dado por

$$\begin{aligned}
U_0(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) &= \sigma_0(r_f, r_n) \left\{ \sigma_1(a_0) \left[-\alpha \sigma_2(a_0) + \phi_0 \sigma_2(a_1) - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2(a_2) + \left(\phi_0 - \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2(a_3) \right] \right. \\
&\quad + \sigma_1(a_1) \left[\phi_0 \sigma_2(a_0) + (2\lambda + \alpha) \sigma_2(a_1) + \left(\phi_0 - \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2(a_2) + (2\lambda + \alpha) \sigma_2(a_3) \right] \\
&\quad + \sigma_1(a_2) \left[- \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2(a_0) + \left(\phi_0 - \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2(a_1) - (\alpha + \gamma) \sigma_2(a_2) + (\phi_0 - \gamma) \sigma_2(a_3) \right] \\
&\quad \left. + \sigma_1(a_3) \left[\left(\phi_0 - \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2(a_0) + \left(2\lambda + \alpha - \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2(a_1) + (\phi_0 - \gamma) \sigma_2(a_2) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + (2\lambda + \alpha - 2\gamma) \sigma_2(a_3) \right] \right\} \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p) \{ \sigma_1(a_0) [-2\alpha \sigma_2(a_0) + (\phi_0 - \alpha) \sigma_2(a_1) + (\phi_0 - \alpha) \sigma_2(a_2) + 2\phi_0 \sigma_2(a_3)] \\
&\quad + \sigma_1(a_1) [(\phi_0 - \alpha) \sigma_2(a_0) + 2\lambda \sigma_2(a_1) + 2\lambda \sigma_2(a_2) + (3\lambda + \alpha) \sigma_2(a_3)] \\
&\quad + \sigma_1(a_2) [(\phi_0 - \alpha) \sigma_2(a_0) + 2\lambda \sigma_2(a_1) + 2\lambda \sigma_2(a_2) + (3\lambda + \alpha) \sigma_2(a_3)] \\
&\quad + \sigma_1(a_3) [2\phi_0 \sigma_2(a_0) + (3\lambda + \alpha) \sigma_2(a_1) + (3\lambda + \alpha) \sigma_2(a_2) + (4\lambda + 2\alpha) \sigma_2(a_3)] \}
\end{aligned}$$

Observe que $U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = U_0((r_f, r_n), \sigma_1^*, \sigma_2^*) = U_0((r_f, r_p), \sigma_1^*, \sigma_2^*) = -\alpha - \gamma t_\phi$.

Suponha σ_0 arbitrário. Então,

$$\begin{aligned}
U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) - U_0(\sigma_0, \sigma_1^*, \sigma_2^*) &= U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) - \sigma_0(r_f, r_n) U_0((r_f, r_n), \sigma_1^*, \sigma_2^*) \\
&\quad - \sigma_0(r_f, r_p) U_0((r_f, r_p), \sigma_1^*, \sigma_2^*) \\
&= [1 - \sigma_0(r_f, r_n) - \sigma_0(r_f, r_p)] U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \\
&= 0 U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \\
&= 0
\end{aligned}$$

em que se usou o fato que $\sigma_0(r_f, r_n) + \sigma_0(r_f, r_p) = 1$. Portanto, $U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = U_0(\sigma_0, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$. Concluí-se que não há desvio unilateral a partir de σ^* . Portanto, σ^* é equilíbrio de Nash. \square

O Colorário 3.2.3 registra fatos relevantes sobre a economia no Equilíbrio de Nash Simétrico do subjogo implicado por i_1 .

Corolário 3.2.3. *No Equilíbrio de Nash Simétrico do subjogo G_1^ϕ , dado pela Proposição 3.2.2, o número esperado de excesso de velocidade é $\mathbb{E}(e) = t_\phi$. O número esperado de fiscalizações é descrito por $\mathbb{E}(n) = 1 + d_\phi$. A quantidade esperada de autuações é $\mathbb{E}(m) = d_\phi t_\phi$. A transferência esperada para o Fiscal é $\mathbb{E}(m_0) = d_\phi t_\phi - \phi d_\phi (1 - t_\phi) t_\phi$. A transferência líquida para o condutor é $\mathbb{E}(m_1) = -(1 - \phi) d_\phi t_\phi - \phi d_\phi t_\phi^2$.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 3.2.2, segue que

$$\begin{aligned}\sigma_0^* &= [\sigma_0^*(r_f, r_n), \sigma_0^*(r_f, r_p)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \\ \sigma_1^* &= [\sigma_1^*(a_0), \sigma_1^*(a_1), \sigma_1^*(a_2), \sigma_1^*(a_3)] = (1 - t_\phi, 0, t_\phi, 0)\end{aligned}$$

com $\sigma_1^* = \sigma_2^*$. Então, o número esperado de excesso de velocidade é dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e) &= \frac{1}{2} [0(1 - t_\phi)(1 - t_\phi) + 1(1 - t_\phi)t_\phi + 1t_\phi(1 - t_\phi) + 2t_\phi^2] \\ &= t_\phi - t_\phi^2 + t_\phi^2 \\ &= t_\phi.\end{aligned}$$

O número esperado de fiscalizações é dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(n) &= 1(1 - d_\phi) + 2d_\phi \\ &= 1 - d_\phi + 2d_\phi = 1 + d_\phi.\end{aligned}$$

O número esperado de multas é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(m) &= \frac{1}{2} [0(1 - d_\phi)(1 - t_\phi)^2 + 0(1 - d_\phi)(1 - t_\phi)t_\phi + 0(1 - d_\phi)t_\phi + 0d_\phi(1 - t_\phi)^2 \\ &\quad + 1d_\phi(1 - t_\phi)t_\phi + 1d_\phi t_\phi(1 - t_\phi) + 2d_\phi t_\phi^2] \\ &= d_\phi t_\phi - d_\phi t_\phi^2 + d_\phi t_\phi^2 \\ &= d_\phi t_\phi.\end{aligned}$$

A transferência líquida esperada para o Fiscal é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(m_0) &= \frac{1}{2} [0(1 - d_\phi)(1 - t_\phi)^2 + 0(1 - d_\phi)(1 - t_\phi)t_\phi + 0(1 - d_\phi)t_\phi + 0d_\phi(1 - t_\phi)^2 \\ &\quad + (1 - \phi)d_\phi(1 - t_\phi)t_\phi + (1 - \phi)d_\phi t_\phi(1 - t_\phi) + 2d_\phi t_\phi^2] \\ &= d_\phi t_\phi - \phi d_\phi (1 - t_\phi) t_\phi.\end{aligned}$$

A transferência líquida esperada para o Conductor é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(m_1) &= \phi d_\phi(1-t_\phi)t_\phi - d_\phi t_\phi(1-t_\phi) - d_\phi t_\phi^2 \\ &= -(1-\phi)d_\phi t_\phi - \phi d_\phi t_\phi^2.\end{aligned}$$

□

Uma das hipótese do modelo é que a proporção da receita destinada à fiscalização é suposta suficiente para cobrir o custo da fiscalização, ou seja, $(1-\phi)(\alpha+\beta) \geq \alpha$. Contudo, se $\frac{(1-\phi)(\alpha+\beta)}{2} \geq \alpha$, então haverá um Equilíbrio de Nash Assimétrico para o subjogo G_1^ϕ . Observe ainda que $\frac{(1-\phi)(\alpha+\beta)}{2} \geq \alpha$ é equivalente a $2\theta \leq 1-\phi$. A Proposição 3.2.3 apresenta este equilíbrio.

Proposição 3.2.3. *A previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ é Equilíbrio de Nash para o subjogo G_1^ϕ se $2\theta \leq 1-\phi$ e*

$$\sigma_0^* = [\sigma_0^*(r_f, r_n), \sigma_0^*(r_f, r_p)] = (1-\delta, \delta) \quad (3.40)$$

$$\sigma_1^* = [\sigma_1^*(a_0), \sigma_1^*(a_1), \sigma_1^*(a_2), \sigma_1^*(a_3)] = \left(1 - \frac{2\theta}{1-\phi}, 0, \frac{2\theta}{1-\phi}, 0\right) \quad (3.41)$$

$$\sigma_2^* = [\sigma_2^*(a_0), \sigma_2^*(a_1), \sigma_2^*(a_2), \sigma_2^*(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \quad (3.42)$$

Ainda, o *payoff* esperado do Fiscal, do \mathcal{C}_1 e do \mathcal{C}_2 são, respectivamente

$$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = -\alpha - \frac{\gamma\theta}{1-\phi}$$

$$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = 0$$

$$U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = \delta\phi_2 \frac{\theta}{1-\phi}$$

Demonstração. Suponha que σ^* seja dado por (3.40), (3.41) e (3.42). Note que não há um desvio unilateral a partir de σ^* . De fato, observe que o *payoff* esperado do Conductor 1 dado por σ^* é

$$\begin{aligned}U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) &= \sigma_1^*(a_0)\{\sigma_0^*(r_f, r_n)[\phi_1(\sigma_2^*(a_1) + \sigma_2^*(a_3))] \\ &\quad + \sigma_0^*(r_f, r_p)[\phi_1(\sigma_2^*(a_1) + \sigma_2^*(a_2) + 2\sigma_2^*(a_3))]\} \\ &\quad - \eta\sigma_1^*(a_1) \\ &\quad + \sigma_1^*(a_2)\{\sigma_0^*(r_f, r_n)[\mu + \phi_1(\sigma_2^*(a_1) + \sigma_2^*(a_3))] - \eta\sigma_0^*(r_f, r_p)\} \\ &\quad + \sigma_1^*(a_3)\{-\eta + \mu\sigma_0^*(r_f, r_n) - \eta\sigma_0^*(r_f, r_p)\} \\ &= \sigma_1^*(a_2)[(1-\delta)\mu - \eta\delta] \\ &= \sigma_1^*(a_2)[(\mu - (\mu + \eta)\delta)] \\ &= 0\end{aligned}$$

Suponha σ_1 arbitrário. Então, o *payoff* esperado de desvio do Condutor 1 é dado por

$$\begin{aligned}
U_1(\sigma_0^*, \sigma_1, \sigma_2^*) &= \sigma_1(a_0)\{\sigma_0^*(r_f, r_n)[\phi_1(\sigma_2^*(a_1) + \sigma_2^*(a_3))] + \sigma_0^*(r_f, r_p)[\phi_1(\sigma_2^*(a_1) + \sigma_2^*(a_2) + 2\sigma_2^*(a_3))]\} \\
&\quad - \eta\sigma_1(a_1) \\
&\quad + \sigma_1(a_2)\{\sigma_0^*(r_f, r_n)[\mu + \phi_1(\sigma_2^*(a_1) + \sigma_2^*(a_3))] - \eta\sigma_0^*(r_f, r_p)\} \\
&\quad + \sigma_1(a_3)\{-\eta + \mu\sigma_0^*(r_f, r_n) - \eta\sigma_0^*(r_f, r_p)\} \\
&= -\eta\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_2)\{\mu(1 - \delta) - \eta\delta\} + \sigma_1(a_3)\{-\eta + \mu(1 - \delta) - \eta\delta\} \\
&= -\eta[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)] + [\sigma_1(a_2) + \sigma_1(a_3)] [\mu(1 - \delta) - \eta\delta] \\
&= -\eta[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)] + [\sigma_1(a_2) + \sigma_1(a_3)] [\mu - (\mu + \eta)\delta] \\
&= -\eta[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)]
\end{aligned}$$

Logo, $U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) - U_1(\sigma_0^*, \sigma_1, \sigma_2^*) = \eta[\sigma_1(a_1) + \sigma_1(a_3)] \geq 0$. Portanto, segue que $U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq U_1(\sigma_0^*, \sigma_1, \sigma_2^*)$.

O *payoff* esperado do Condutor 2 dado por σ^* é

$$\begin{aligned}
U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) &= \sigma_2^*(a_0)\{\sigma_0^*(r_f, r_n)[\phi_2(\sigma_1^*(a_1) + \sigma_1^*(a_3))] + \sigma_0^*(r_f, r_p)[\phi_2(\sigma_1^*(a_1) + \sigma_1^*(a_2) + 2\sigma_1^*(a_3))]\} \\
&\quad - \eta\sigma_2^*(a_1) \\
&\quad + \sigma_2^*(a_2)\{\sigma_0^*(r_f, r_n)[\mu + \phi_2(\sigma_1^*(a_1) + \sigma_1^*(a_3))] - \eta\sigma_0^*(r_f, r_p)\} \\
&\quad + \sigma_2^*(a_3)\{-\eta + \mu\sigma_0^*(r_f, r_n) - \eta\sigma_0^*(r_f, r_p)\} \\
&= \delta\phi_2 \frac{2\theta}{1 - \phi}
\end{aligned}$$

Suponha σ_2 arbitrário. Então, o *payoff* esperado de desvio do Condutor 2 é dado por

$$\begin{aligned}
U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2) &= \sigma_2(a_0)\delta\phi_2 \frac{2\theta}{1 - \phi} - \eta\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_2)\{\mu(1 - \delta) - \eta\delta\} \\
&\quad + \sigma_2(a_3)\{-\eta + \mu(1 - \delta) - \eta\delta\} \\
&= \sigma_2(a_0)\delta\phi_2 \frac{2\theta}{1 - \phi} - \eta[\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)] + [\sigma_2(a_2) + \sigma_2(a_3)] [\mu(1 - \delta) - \eta\delta] \\
&= \sigma_2(a_0)\delta\phi_2 \frac{2\theta}{1 - \phi} - \eta[\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)] + [\sigma_2(a_2) + \sigma_2(a_3)] [\mu - (\mu + \eta)\delta] \\
&= \sigma_2(a_0)\delta\phi_2 \frac{2\theta}{1 - \phi} - \eta[\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)]
\end{aligned}$$

Logo, $U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) - U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2) = [1 - \sigma_2(a_0)]\delta\phi_2 \frac{2\theta}{1 - \phi} + \eta[\sigma_2(a_1) + \sigma_2(a_3)] \geq 0$. Portanto, $U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2)$.

O *payoff* esperado do Fiscal dado por σ^* é

$$\begin{aligned}
U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) &= \sigma_0^*(r_f, r_n) \left\{ \sigma_1^*(a_0) [-\alpha \sigma_2^*(a_0)] + \sigma_1^*(a_2) \left[-\left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2^*(a_0) \right] \right\} \\
&\quad + \sigma_0^*(r_f, r_p) \left\{ \sigma_1^*(a_0) [-2\alpha \sigma_2^*(a_0)] + \sigma_1^*(a_2) [(\phi_0 - \alpha) \sigma_2^*(a_0)] \right\} \\
&= (1 - \delta) \left[-\alpha \left(1 - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right) - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&\quad + \delta \left[-2\alpha \left(1 - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right) + (\phi_0 - \alpha) \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= (1 - \delta) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \delta \left[-2\alpha + (\phi_0 + \alpha) \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= (1 - \delta) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \delta \left[-2\alpha + \left[\frac{(1 - \phi)}{2} (\alpha + \beta) - \alpha - \frac{\gamma}{2} + \alpha \right] \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= (1 - \delta) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \delta \left[-2\alpha + \frac{(1 - \phi)}{2} (\alpha + \beta) \frac{2\theta}{1 - \phi} - \frac{\gamma}{2} \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= (1 - \delta) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \delta \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= -\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi}
\end{aligned}$$

Suponha σ_0 arbitrário. Então, o *payoff* esperado de desvio do Fiscal é dado por

$$\begin{aligned}
U_0(\sigma_0, \sigma_1^*, \sigma_2^*) &= \sigma_0(r_f, r_n) \left\{ \sigma_1^*(a_0) [-\alpha \sigma_2^*(a_0)] + \sigma_1^*(a_2) \left[-\left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \sigma_2^*(a_0) \right] \right\} \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p) \left\{ \sigma_1^*(a_0) [-2\alpha \sigma_2^*(a_0)] + \sigma_1^*(a_2) [(\phi_0 - \alpha) \sigma_2^*(a_0)] \right\} \\
&= \sigma_0(r_f, r_n) \left[-\alpha \left(1 - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right) - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2} \right) \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&\quad + \sigma_0(r_f, r_p) \left[-2\alpha \left(1 - \frac{2\theta}{1 - \phi} \right) + (\phi_0 - \alpha) \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= \sigma_0(r_f, r_n) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \sigma_0(r_f, r_p) \left[-2\alpha + (\phi_0 + \alpha) \frac{\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= \sigma_0(r_f, r_n) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \sigma_0(r_f, r_p) \left[-2\alpha + \left[(1 - \phi) \frac{(\alpha + \beta)}{2} - \alpha - \frac{\gamma}{2} + \alpha \right] \frac{2\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= \sigma_0(r_f, r_n) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \sigma_0(r_f, r_p) \left[-2\alpha + (1 - \phi) (\alpha + \beta) \frac{\theta}{1 - \phi} - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= \sigma_0(r_f, r_n) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] + \sigma_0(r_f, r_p) \left[-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi} \right] \\
&= -\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi}
\end{aligned}$$

Portanto, $U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = U_0(\sigma_0, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$. Concluí-se que não há desvio unilateral a partir de σ^* . Portanto, σ^* é equilíbrio de Nash. \square

O Corolário 3.2.4 documenta importantes fatos sobre o Equilíbrio de Nash Assimétrico implicado por i_1 dado pela Proposição 3.2.3.

Corolário 3.2.4. *No Equilíbrio de Nash Assimétrico do subjogo G_1^ϕ , dado pela Proposição 3.2.3, o número esperado de excesso de velocidade é $\mathbb{E}(e) = \frac{\theta}{1-\phi}$. O número esperado de fiscalizações é descrito por $\mathbb{E}(n) = 1 + \delta$. A quantidade esperada de autuações é $\mathbb{E}(m) = \delta \frac{\theta}{1-\phi}$. A transferência líquida esperada para o fiscal é $\mathbb{E}(m_0) = \delta\theta$. A transferência líquida esperada para o \mathcal{C}_1 é $\mathbb{E}(m_1) = -\delta \frac{\theta}{1-\phi}$. Por fim, a transferência líquida para o \mathcal{C}_2 é $\delta\phi \frac{\theta}{1-\phi}$.*

Demonstração. Tome σ^* de acordo com a Proposição 3.2.3. Então, o número esperado de excesso de velocidade é dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e) &= \frac{1}{2} \left[0 \cdot 1 \left(1 - \frac{2\theta}{1-\phi} \right) + 1 \cdot 1 \frac{2\theta}{1-\phi} + 1 \cdot 0 \left(1 - \frac{2\theta}{1-\phi} \right) + 2 \cdot 0 \frac{2\theta}{1-\phi} \right] \\ &= \frac{\theta}{1-\phi}.\end{aligned}$$

O número esperado de fiscalizações é dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(n) &= 1(1-\delta) + 2\delta \\ &= 1 - \delta + 2\delta = 1 + \delta.\end{aligned}$$

O número esperado de multas é

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(m) &= \frac{1}{2} \left[0(1-\delta) 1 \left(1 - \frac{2\theta}{1-\phi} \right) + 0(1-\delta) 1 \frac{2\theta}{1-\phi} + 0(1-\delta) 0 \left(1 - \frac{2\theta}{1-\phi} \right) \right. \\ &\quad \left. + 0(1-\delta) 0 \frac{2\theta}{1-\phi} + 0\delta 1 \left(1 - \frac{2\theta}{1-\phi} \right) + 1\delta 1 \frac{2\theta}{1-\phi} + 1\delta 0 \left(1 - \frac{2\theta}{1-\phi} \right) + 2\delta 0 \frac{2\theta}{1-\phi} \right] \\ &= \delta \frac{\theta}{1-\phi}.\end{aligned}$$

A transferência líquida esperada para o fiscal é $\mathbb{E}(m_0) = (1-\phi)\delta \frac{\theta}{1-\phi}$. A transferência líquida esperada para o \mathcal{C}_1 é $\mathbb{E}(m_1) = -\delta \frac{\theta}{1-\phi}$. Por fim, a transferência líquida para o \mathcal{C}_2 é $\delta\phi \frac{\theta}{1-\phi}$. □

Para o cálculo do equilíbrio de Nash do subjogo apresentado na Figura 8, note que para o Condutor 1 as estratégias a_2 e a_3 são estritamente dominadas pela estratégias a_0 e a_1 , respectivamente. De maneira similar, para o Condutor 2 as estratégias a_2 e a_3 são estritamente dominadas pela estratégias a_0 e a_1 , respectivamente. Utilizando novamente a observação 3.2.4, toda estratégia dos Condutores 1 e 2 que atribuem probabilidade estritamente positiva para a_2 e a_3 podem ser ignoradas do cálculo.

A matriz de *payoffs* obtida ao eliminar as estratégias estritamente dominadas é apresentada a seguir. Repare que os *payoffs* da Matriz dada pela Figura 12 coincidem

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{C}_2 \\
 \frac{a_0 = (v_b, v_b) \quad a_1 = (v_a, v_b)}{-\alpha, 0, 0 \quad -\alpha - \gamma, 0, \mu} \\
 \mathbf{C}_1 \frac{a_0}{a_1} \frac{-\alpha - \gamma, \mu, 0 \quad -\alpha - 2\gamma, \mu, \mu}{ } \\
 \text{com Fiscal escolhendo } r = (r_f, r_n)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{C}_2 \\
 \frac{a_0 = (v_b, v_b) \quad a_1 = (v_a, v_b)}{-2\alpha, 0, 0 \quad \phi_0 - \alpha, \phi_1, -\eta} \\
 \mathbf{C}_1 \frac{a_0}{a_1} \frac{\phi_0 - \alpha, -\eta, \phi_2 \quad 2\lambda, -\eta, -\eta}{ } \\
 \text{com Fiscal escolhendo } r = (r_f, r_p)
 \end{array}$$

Figura 12 – Subjogo G_2^ϕ após eliminar as estratégias estritamente dominadas.

com os *payoffs* da Matriz dada pela Figura 11. Este fato nos permite concluir a seguinte Proposição 3.2.4, a qual descreve o Equilíbrio de Nash Simétrico implicado por i_2 .

Proposição 3.2.4. *A previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ é Equilíbrio de Nash Simétrico para o subjogo G_2^ϕ se, e somente se, $\sigma_2^* = \sigma_1^*$,*

$$\sigma_0^* = [\sigma_0^*(r_f, r_n), \sigma_0^*(r_f, r_p)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \quad (3.43)$$

$$\sigma_1^* = [\sigma_1^*(a_0), \sigma_1^*(a_1), \sigma_1^*(a_2), \sigma_1^*(a_3)] = (1 - t_\phi, t_\phi, 0, 0) \quad (3.44)$$

Ainda, o *payoff* esperado do Fiscal, do \mathbf{C}_1 e do \mathbf{C}_2 são, respectivamente

$$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) = -\alpha - \gamma t_\phi$$

$$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) = d_\phi(\mu + \eta)\phi t_\phi$$

$$U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_1^*) = d_\phi(\mu + \eta)\phi t_\phi$$

Também podemos concluir o Corolário 3.2.5, que registra importantes fatos do Equilíbrio de Nash Simétrico implicado por i_2 .

Corolário 3.2.5. *No Equilíbrio de Nash Simétrico do subjogo G_2^ϕ , dado pela Proposição 3.2.4, o número esperado de excesso de velocidade é $\mathbb{E}(e) = t_\phi$. O número esperado de fiscalizações é descrito por $\mathbb{E}(n) = 1 + d_\phi$. A quantidade esperada de autuações é $\mathbb{E}(m) = d_\phi t_\phi$. A transferência esperada para o Fiscal é $\mathbb{E}(m_0) = d_\phi t_\phi - \phi d_\phi(1 - t_\phi)t_\phi$. A transferência líquida para o condutor é $\mathbb{E}(m_1) = -(1 - \phi)d_\phi t_\phi - \phi d_\phi t_\phi^2$.*

Pela coincidência de *payoffs*, é possível concluir o Equilíbrio de Nash Assimétrico implicado por i_2 e descrito pela Proposição 3.2.5, a seguir, como também o Corolário 3.2.6, que documenta os principais resultados do equilíbrio.

Proposição 3.2.5. *A previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ é Equilíbrio de Nash Assimétrico para o subjogo G_2^ϕ se $2\theta \leq 1 - \phi$ e*

$$\sigma_0^* = [\sigma_0^*(r_f, r_n), \sigma_0^*(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \quad (3.45)$$

$$\sigma_1^* = [\sigma_1^*(a_0), \sigma_1^*(a_1), \sigma_1^*(a_2), \sigma_1^*(a_3)] = \left(1 - \frac{2\theta}{1 - \phi}, \frac{2\theta}{1 - \phi}, 0, 0\right) \quad (3.46)$$

$$\sigma_2^* = [\sigma_2^*(a_0), \sigma_2^*(a_1), \sigma_2^*(a_2), \sigma_2^*(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \quad (3.47)$$

Ainda, o payoff esperado do Fiscal, do C_1 e do C_2 são, respectivamente

$$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = -\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi}$$

$$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = 0$$

$$U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = \delta\phi_2 \frac{\theta}{1 - \phi}$$

Corolário 3.2.6. *No Equilíbrio de Nash Assimétrico do subjogo G_2^ϕ , dado pela Proposição 3.2.5, o número esperado de excesso de velocidade é $\mathbb{E}(e) = \frac{\theta}{1 - \phi}$. O número esperado de fiscalizações é descrito por $\mathbb{E}(n) = 1 + \delta$. A quantidade esperada de autuações é $\mathbb{E}(m) = \delta \frac{\theta}{1 - \phi}$. A transferência líquida esperada para o fiscal é $\mathbb{E}(m_0) = \delta\theta$. A transferência líquida esperada para o C_1 é $\mathbb{E}(m_1) = -\delta \frac{\theta}{1 - \phi}$. Por fim, a transferência líquida para o C_2 é $\mathbb{E}(m_2) = \delta\phi_2 \frac{\theta}{1 - \phi}$.*

A simetria do subjogo implicado por i_2 permite concluir o Equilíbrio de Nash descrito pela Proposição 3.2.6 como o Corolário 3.2.7.

Proposição 3.2.6. *A previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$ é Equilíbrio de Nash para o subjogo G_2^ϕ se $2\theta \leq 1 - \phi$ e*

$$\sigma_0^* = [\sigma_0^*(r_f, r_n), \sigma_0^*(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \quad (3.48)$$

$$\sigma_1^* = [\sigma_1^*(a_0), \sigma_1^*(a_1), \sigma_1^*(a_2), \sigma_1^*(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \quad (3.49)$$

$$\sigma_2^* = [\sigma_2^*(a_0), \sigma_2^*(a_1), \sigma_2^*(a_2), \sigma_2^*(a_3)] = \left(1 - \frac{2\theta}{1 - \phi}, \frac{2\theta}{1 - \phi}, 0, 0\right) \quad (3.50)$$

Ainda, o payoff esperado do Fiscal, do C_1 e do C_2 são, respectivamente

$$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = -\alpha - \frac{\gamma\theta}{1 - \phi}$$

$$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = \delta\phi_1 \frac{\theta}{1 - \phi}$$

$$U_2(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*) = 0$$

Corolário 3.2.7. *No Equilíbrio de Nash Assimétrico do subjogo G_2^ϕ , dado pela Proposição 3.2.6, o número esperado de excesso de velocidade é $\mathbb{E}(e) = \frac{\theta}{1 - \phi}$. O número esperado de*

fiscalizações é descrito por $\mathbb{E}(n) = 1 + \delta$. A quantidade esperada de autuações é $\mathbb{E}(m) = \delta \frac{\theta}{1-\phi}$. A transferência líquida esperada para o fiscal é $\mathbb{E}(m_0) = \delta\theta$. A transferência líquida esperada para o \mathcal{C}_2 é $\mathbb{E}(m_2) = -\delta \frac{\theta}{1-\phi}$. Por fim, a transferência líquida para o \mathcal{C}_1 é $\mathbb{E}(m_1) = \delta\phi \frac{\theta}{1-\phi}$.

Para $\phi = 0$, os *payoffs* dos Condutores 1 e 2 se igualam a zero em todos os equilíbrios de Nash em todos os subjogos. Após i_0 , o *payoff* do Fiscal é $-2\gamma\theta$ no equilíbrio de Nash. No equilíbrio de Nash após i_3 o *payoff* esperado se iguala a -2α . Em todo subjogo implicado por i_1 e i_2 , o *payoff* esperado se iguala a $-\theta(\alpha + \beta + \gamma)$. Antecipando tais *payoffs*, o Fiscal escolhe posicionar o radar fixo $s_0 \in \{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ de modo a maximizar seu nível de satisfação. Se $\gamma > \alpha + \beta$, então $-2\alpha > -\theta\gamma$ e $-2\alpha > -\theta(\alpha + \beta + \gamma)$, assim, o Fiscal escolhe i_3 quando $\gamma > \alpha + \beta$. Ele escolhe i_0 quando $\gamma < \alpha + \beta$, pois $-2\theta\gamma > -2\alpha$ e $-2\theta\gamma > -\theta(\gamma + \alpha + \beta)$ quando $\gamma < \alpha + \beta$. Por fim, se $\gamma = \alpha + \beta$, o Fiscal está indiferente entre todos os padrões de radares fixos utilizados.

Com $\phi > 0$, o *payoff* do Fiscal após escolher i_3 é -2α e após i_0 é $-2\gamma t_\phi$. Após, o Fiscal escolher i_1 e i_2 , há dois tipo de equilíbrios, os Equilíbrio de Nash Simétricos e os Equilíbrios de Nash Assimétricos. Nos Equilíbrio de Nash Simétricos, o *payoff* do Fiscal é $-\alpha - \gamma t_\phi$ e nos Equilíbrio de Nash Assimétricos, seu *payoff* é $-\alpha - \frac{\gamma\theta}{1-\phi}$.

Observe que pelo Lema A.0.5, quando $\phi > 0$, $t_\phi < \frac{\theta}{1-\phi}$. Logo, $-\alpha - \gamma t_\phi > -\alpha - \frac{\gamma\theta}{1-\phi}$. Então, quando $\phi > 0$, o *payoff* que o Fiscal obtém nos Equilíbrio de Nash Simétricos é sempre maior que nos Equilíbrio de Nash Assimétricos, pois $-\alpha - \gamma t_\phi > -\alpha - \frac{\gamma\theta}{1-\phi}$. Antecipando os níveis de satisfação, o Fiscal escolhe o padrão de fiscalização i_0 , se $\gamma < \frac{\alpha}{t_\phi}$, pois neste caso $-2\gamma t_\phi > -2\alpha$ e $-2\gamma t_\phi > -\alpha - \gamma t_\phi$. Se $\gamma > \frac{\alpha}{t_\phi}$, o Fiscal escolhe posicionar o radar fixo em todas as localidades, portanto, escolhe i_3 , pois neste caso $-2\gamma t_\phi < -2\alpha$ e $-2\alpha > -\alpha - \gamma t_\phi$. Desta forma, temos os seguintes Equilíbrios de Nash Perfeito em Subjogos descritos pelas Proposições a seguir.

Proposição 3.2.7. *A previsão, com $\sigma_1 = \sigma_2$, para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$ e $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ satisfazem

$$\begin{aligned} & \sigma_1^3 = [\sigma_1^3(a_0), \sigma_1^3(a_1), \sigma_1^3(a_2), \sigma_1^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \\ & \begin{cases} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_f, r_n), \sigma_0^2(r_f, r_p)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1 - t_\phi, t_\phi, 0, 0) \end{cases}, \\ & \begin{cases} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1 - t_\phi, 0, t_\phi, 0) \end{cases} \\ e & \begin{cases} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_1^0 = [\sigma_1^0(a_0), \sigma_1^0(a_1), \sigma_1^0(a_2), \sigma_1^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y). \end{cases} \end{aligned}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.8. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_1, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{aligned} & \left\{ \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \right., \\ & \begin{cases} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0) \\ \sigma_2^2 = [\sigma_2^2(a_0), \sigma_2^2(a_1), \sigma_2^2(a_2), \sigma_2^2(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \end{cases}, \\ & \begin{cases} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \\ \sigma_k^1 = [\sigma_k^1(a_0), \sigma_k^1(a_1), \sigma_k^1(a_2), \sigma_k^1(a_3)] = (1 - t_\phi, 0, t_\phi, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \end{cases} \\ e & \begin{cases} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{cases} \end{aligned}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.9. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_1, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \text{ ,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \\ \sigma_2^2 = [\sigma_2^2(a_0), \sigma_2^2(a_1), \sigma_2^2(a_2), \sigma_2^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0) \end{array} \right. \text{ ,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \\ \sigma_k^1 = [\sigma_k^1(a_0), \sigma_k^1(a_1), \sigma_k^1(a_2), \sigma_k^1(a_3)] = (1 - t_\phi, 0, t_\phi, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \end{array} \right. \\ e \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \end{cases}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.10. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \text{ ,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \\ \sigma_k^2 = [\sigma_k^2(a_0), \sigma_k^2(a_1), \sigma_k^2(a_2), \sigma_k^2(a_3)] = (1 - t_\phi, t_\phi, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \end{array} \right. \text{ ,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0) \\ \sigma_2^1 = [\sigma_2^1(a_0), \sigma_2^1(a_1), \sigma_2^1(a_2), \sigma_2^1(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right. \\ e \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \end{cases}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.11. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjugos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjugos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \text{ ,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0) \text{ ,} \\ \sigma_2^2 = [\sigma_2^2(a_0), \sigma_2^2(a_1), \sigma_2^2(a_2), \sigma_2^2(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0) \\ \sigma_2^1 = [\sigma_2^1(a_0), \sigma_2^1(a_1), \sigma_2^1(a_2), \sigma_2^1(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right. \\ e \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_0, x + z, x - z, d_0 - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \end{cases}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.12. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \\ \sigma_2^2 = [\sigma_2^2(a_0), \sigma_2^2(a_1), \sigma_2^2(a_2), \sigma_2^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0) \end{array} \right. , \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0) \\ \sigma_2^1 = [\sigma_2^1(a_0), \sigma_2^1(a_1), \sigma_2^1(a_2), \sigma_2^1(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right. \\ e \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \end{cases}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.13. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\}, \\ \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - d_\phi, d_\phi) \\ \sigma_1^2 = k^2 = [\sigma_k^2(a_0), \sigma_k^2(a_1), \sigma_k^2(a_2), \sigma_k^2(a_3)] = (1 - t_\phi, t_\phi, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \\ \sigma_2^1 = [\sigma_2^1(a_0), \sigma_2^1(a_1), \sigma_2^1(a_2), \sigma_2^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.14. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjugos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjugos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\} , \\ \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0) , \\ \sigma_2^2 = [\sigma_2^2(a_0), \sigma_2^2(a_1), \sigma_2^2(a_2), \sigma_2^2(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \\ \sigma_2^1 = [\sigma_2^1(a_0), \sigma_2^1(a_1), \sigma_2^1(a_2), \sigma_2^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

Proposição 3.2.15. *Caso $\phi > 0$, a previsão para o jogo apresentado na Figura 7 é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se $2\theta \leq 1 - \phi$ e se s_0 satisfaz*

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_0, i_1, i_3\} & \text{se } \gamma = \frac{\alpha}{t_\phi} \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \frac{\alpha}{t_\phi} \end{cases}$$

Caso $\phi = 0$, é equilíbrio de Nash perfeito em subjogos para o mesmo jogo se s_0 satisfaz

$$s_0 \in \begin{cases} \{i_0\} & \text{se } \gamma < \alpha + \beta \\ \{i_0, i_1, i_2, i_3\} & \text{se } \gamma = \alpha + \beta \\ \{i_3\} & \text{se } \gamma > \alpha + \beta \end{cases}$$

Ao mesmo tempo em que $\sigma_0 = (\sigma_0^0, \sigma_0^1, \sigma_0^2)$, $\sigma_1 = (\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3)$ e $\sigma_2 = (\sigma_2^0, \sigma_2^1, \sigma_2^2, \sigma_2^3)$ satisfazem

$$\begin{cases} \sigma_k^3 = [\sigma_k^3(a_0), \sigma_k^3(a_1), \sigma_k^3(a_2), \sigma_k^3(a_3)] = (1, 0, 0, 0), \text{ para } k \in \{1, 2\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^2 = [\sigma_0^2(r_n, r_f), \sigma_0^2(r_p, r_f)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^2 = [\sigma_1^2(a_0), \sigma_1^2(a_1), \sigma_1^2(a_2), \sigma_1^2(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \\ \sigma_2^2 = [\sigma_2^2(a_0), \sigma_2^2(a_1), \sigma_2^2(a_2), \sigma_2^2(a_3)] = (1 - \theta, \theta, 0, 0) \end{array} \right. , \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^1 = [\sigma_0^1(r_f, r_n), \sigma_0^1(r_f, r_p)] = (1 - \delta, \delta) \\ \sigma_1^1 = [\sigma_1^1(a_0), \sigma_1^1(a_1), \sigma_1^1(a_2), \sigma_1^1(a_3)] = (1, 0, 0, 0) \\ \sigma_2^1 = [\sigma_2^1(a_0), \sigma_2^1(a_1), \sigma_2^1(a_2), \sigma_2^1(a_3)] = (1 - \theta, 0, \theta, 0) \end{array} \right. \\ e \left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^0 = [\sigma_0^0(r_n, r_n), \sigma_0^0(r_p, r_n), \sigma_0^0(r_n, r_p), \sigma_0^0(r_p, r_p)] = (1 - x - d_\phi, x + z, x - z, d_\phi - x) \\ \sigma_k^0 = [\sigma_k^0(a_0), \sigma_k^0(a_1), \sigma_k^0(a_2), \sigma_k^0(a_3)] = (1 - y - t_\phi, y, y, t_\phi - y), \text{ para } k \in \{1, 2\}. \end{array} \right. \end{cases}$$

para algum (x, y, z) tal que $0 \leq y \leq \{t_\phi, 1 - t_\phi\}$ e $0 \leq x \leq \min\{d_\phi, 1 - d_\phi\}$, assim como $\max\{-z, z\} \leq x$ e $yz = 0$.

3.3 Efeitos da premiação

No modelo aqui desenvolvido, a parcela $\phi \geq 0$ da receita oriunda da fiscalização que retorna aos condutores não autuados é interpretada como um prêmio ao bom comportamento no trânsito. Na contingência em que $\phi = 0$, a premiação é nula e, portanto, toda a arrecadação de multas é destinada à fiscalização. O aumento de ϕ implica no aumento da premiação e, assim, diminuí-se a proporção $1 - \phi$ destinada à fiscalização. Assim, para avaliar os efeitos da premiação, deve-se comparar as contingências em que $\phi = 0$ com as que $\phi > 0$.

A previsão de equilíbrio⁵ é o Fiscal escolher posicionar em ambas as localidades radares fixos e ambos os Condutores escolhem respeitar o limite de velocidade se $\gamma > \frac{\alpha}{t_\phi}$.

⁵ Ver Proposição 3.2.7 à Proposição 3.2.15.

Se $\gamma < \frac{\alpha}{t_\phi}$, o Fiscal escolhe utilizar somente radares portáteis e os condutores escolhem o padrão de excesso de acordo com o Equilíbrio de Nash descrito pela Proposição 3.2.1.

A Tabela 3, a seguir, resume as variáveis de interesse: a quantidade de fiscalizações esperadas, a quantidade de autuações esperadas, o número de violações de \bar{v} , o *payoff* do Fiscal e os *payoff* do Condutor $k \in \{1, 2\}$. Estes valores são apresentados para os casos definidos de acordo com a relevância relativa do excesso de velocidade na satisfação do Fiscal, ou seja, γ . Note que $\gamma < \alpha < \frac{\alpha}{t_\phi}$ para todo $\phi \in [0, 1 - \theta)$. De fato, como $t_\phi < 1$, segue que $1 < \frac{1}{t_\phi}$ e, portanto, $\alpha < \frac{\alpha}{t_\phi}$. Logo, podemos dividir a análise em casos a depender se $\phi = 0$ ou $\phi > 0$: $\gamma \in (0, \alpha)$ o primeiro caso, o segundo caso $\gamma \in (\alpha, \frac{\alpha}{t_\phi})$ e, por fim, $\gamma \in (\frac{\alpha}{t_\phi}, \infty)$.

Tabela 3 – Efeitos da premiação sobre a previsão $\sigma^* = (\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$.

Conjunto de possíveis valores para γ		$(0, \frac{\alpha}{t_\phi})$		$(\frac{\alpha}{t_\phi}, \infty)$	
		$\phi = 0$	$\phi > 0$	$\phi = 0$	$\phi > 0$
Fiscalizações esperadas	$\mathbb{E}(n)$	2δ	$2d_\phi$	2	2
Autuações esperadas	$\mathbb{E}(m)$	$2\theta\delta$	$2t_\phi d_\phi$	0	0
Excessos esperados	$\mathbb{E}(e)$	2θ	$2t_\phi$	0	0
<i>Payoff</i> do Fiscal	$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$	$-2\gamma\theta$	$-2\gamma t_\phi$	-2α	-2α
<i>Payoff</i> dos Condutores	$U_k(\sigma_0^*, \sigma_1^*, \sigma_2^*)$	0	$2(\mu + \eta)\phi d_\phi t_\phi$	0	0

Com $\phi = 0$ (sem premiação), observe que as variáveis são as mesmas encontradas por Bertolai, Costa e Nakabashi (2021) quando o uso de radares móveis é permitido no modelo deste autores. As variáveis destes autores são apresentadas de maneira conveniente na Tabela 4, a seguir. Se $\gamma \in (\alpha, \alpha + \beta)$, o número esperado de fiscalizações é igual a 2δ , o número esperado de multas é igual $2\theta\delta$ e o número esperado de excesso de velocidade é 2θ . Ainda, os *payoffs* do Fiscal e dos Condutores se igualam a $-2\gamma\theta$ e 0, respectivamente. Quando $\gamma > \alpha + \beta$, as variáveis aqui encontradas também coincidem com o modelo de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021): o número esperado de fiscalizações se iguala a 2, enquanto autuações e excessos esperados são nulos. O *payoff* de C_k é nulo e o *payoff* do Fiscal é -2α .

Tabela 4 – Efeitos da proibição de radares móveis (BERTOLAI; COSTA; NAKABASHI, 2021).

Conjunto de possíveis valores para γ		$(0, \alpha)$		$(\alpha, \alpha + \beta)$		$(\alpha + \beta, \infty)$	
		sim	não	sim	não	sim	não
Fiscalizações esperadas	$\mathbb{E}(n)$	2δ	0	2δ	2	2	2
Autuações esperadas	$\mathbb{E}(m)$	$2\theta\delta$	0	$2\theta\delta$	0	0	0
Excessos esperados	$\mathbb{E}(e)$	2θ	2	2θ	0	0	0
<i>Payoff</i> do Fiscal	$U_0(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$	$-2\gamma\theta$	-2γ	$-2\gamma\theta$	-2α	-2α	-2α
<i>Payoff</i> do Condutor	$U_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$	0	2μ	0	0	0	0

Apesar de ser uma generalização do modelo de Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), a coincidência entre os resultados, quando $\phi = 0$, é devida ao fato de que se considerou a média do excesso de \bar{v} e a média de multas de cada Conductor na utilidade do Fiscal, dada em (3.2). Interpretou-se C_1 como um representante de metade da população, enquanto C_2 representaria a outra metade. Desta forma, quando ambos os condutores excedem o limite, o número de excesso é unitário e representaria a população toda desrespeitando a regra, sendo equivalente ao Conductor representativo excedendo \bar{v} em Bertolai, Costa e Nakabashi (2021). Se ambos os Condutores respeitarem \bar{v} , a quantidade de multas é nula e toda a população estaria cumprindo a regra. Assim, pode-se comparar os dois modelos e, portanto, comparar os resultados obtidos por cada um. Contudo, o modelo desenvolvido neste trabalho possui uma dimensão extra, o caso em que apenas metade da população excede o limite \bar{v} , por exemplo, C_2 escolhendo desrespeitar o limite somente na localidade l_1 e C_1 escolhendo respeitar em todas as localidades.

Com a premiação sendo paga, ou seja, $\phi > 0$, há dois casos para o efeito do aumento da premiação nas variáveis de interesse. O primeiro caso é para valores de $\gamma \in \left(0, \frac{\alpha}{t_\phi}\right)$, em que a fiscalização utiliza somente radares móveis. O segundo caso é quando $\gamma \in \left(\frac{\alpha}{t_\phi}, \infty\right)$, no qual a fiscalização adota radares fixos em ambas as posições. Como podemos ver na Figura 13, o eixo horizontal representa os valores de ϕ e no eixo vertical estão os valores das variáveis de interesse. A região em que corresponde ao primeiro caso é para valores de ϕ menores que 0,44 (aproximadamente) e para valores maiores que 0,44, tem-se o segundo caso.

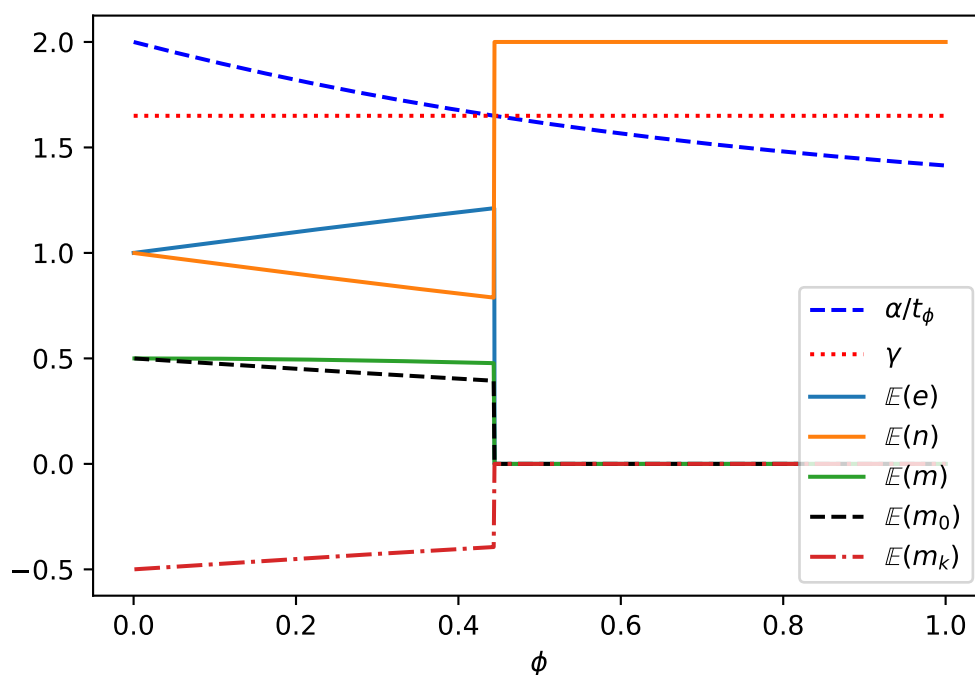


Figura 13 – Valores das variáveis de interesse da economia em função de ϕ .

Considere o primeiro caso na Figura 13, em que $\gamma < \frac{\alpha}{t_\phi}$. A quantidade esperada de fiscalizações, $2d_\phi$, é representada pela curva laranja, que começa no valor 2δ ($\delta = \frac{1}{2}$) para $\phi = 0$ e com $\phi > 0$ decresce até ϕ se aproximar de 0,44. A quantidade de excessos esperados, $2t_\phi$, é apresentada na curva azul, a qual se inicia no valor 2θ ($\theta = \frac{1}{2}$) com $\phi = 0$ e para $\phi > 0$ cresce até ϕ se aproximar de 0,44.

Ainda no mesmo caso, o número de multas (arrecadação bruta da fiscalização), $2t_\phi d_\phi$, é dado pela curva sólida verde, que começa no ponto $2\theta\delta$ com $\phi = 0$ e para $\phi > 0$ decresce até ϕ se aproximar de 0,44. Como a arrecadação líquida da premiação ao Fiscal é dada por $\mathbb{E}(m_0) = 2t_\phi d_\phi(1 - \phi + \phi t_\phi)$, sem premiação esta variável coincide com a arrecadação bruta, mas com a premiação paga, a arrecadação líquida cai e é descrita pela curva preta tracejada com início em $2\theta\delta$. A transferência líquida ao Condutor $k \in \{1, 2\}$ é dada por $\mathbb{E}(m_k) = 2t_\phi d_\phi(\phi - 1 - \phi t_\phi)$ e é descrita pela curva vermelha pontilhada entre pontos, a qual inicia em $-2\theta\delta$. Com $\phi > 0$, esta curva cresce na magnitude da diferença vertical entre a arrecadação bruta e a arrecadação líquida da premiação, ou seja, as curvas verde sólida e preta pontilhada ($|\mathbb{E}(m) - \mathbb{E}(m_0)|$). Esta diferença é a parcela da premiação que antes era devida à fiscalização e agora é destinada aos Condutores.

Para valores de $\gamma > \frac{\alpha}{t_\phi}$, o alto custo relativo do excesso de velocidade imposto ao Fiscal, o motiva a posicionar radares fixos em ambas as localidades. Desta maneira, o número esperado de fiscalizações passa a ser 2, o qual pode ser visto na curva laranja da Figura 13, que passa a ser constante em 2 após $\phi = 0,44$. Como resposta, os Condutores escolhem não exceder em nenhuma localidade e, portanto, o número esperado de excesso de velocidade e a quantidade de multas se igualam a zero. Como consequência, a arrecadação e a transferência aos Condutores ambas também se igualam a zero. Assim, todas as demais curvas já discutidas passam a ser constante em zero.

Observe a Figura 14, em que é apresentado os *payoffs* do Fiscal e do Condutor $k \in \{1, 2\}$ em função de ϕ . Para $\gamma < \frac{\alpha}{t_\phi}$, a premiação faz decrescer o *payoff* do Fiscal e aumentar o *payoff* do Condutor k até ϕ se aproximar de 0,44. Após $\phi = 0,44$, quando $\gamma > \frac{\alpha}{t_\phi}$, o *payoff* do Fiscal e do *payoff* do Condutor k passam a ficar constante independentemente do nível de premiação.

Portanto, quando o custo do excesso de velocidade na satisfação do Fiscal é relativamente baixo, com a fiscalização escolhendo o padrão de fiscalização com radares móveis, a premiação tem como efeito desincentivar a fiscalização. Em resposta, os Condutores desrespeitam mais o limite de velocidade com o aumento de ϕ . Como consequência da premiação sendo paga e menor fiscalização, a arrecadação bruta e a arrecadação líquida decrescem e a transferência aos Condutores aumenta. O Fiscal piora com o aumento da premiação, enquanto os Condutores melhoram.

Se o custo do excesso de velocidade na utilidade do Fiscal é relativamente alto, a fiscalização adota radares fixos em ambas as localidades e em resposta os Condutores não

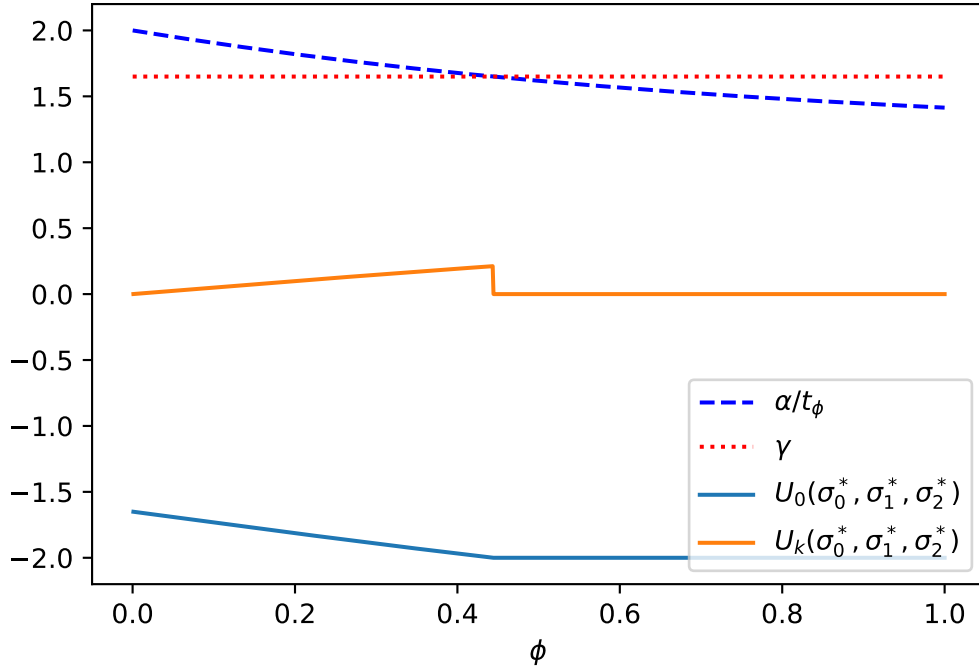


Figura 14 – *Payoffs* do Fiscal e do Condutor $k \in \{1, 2\}$ em função de $\phi \in (0, 1)$.

excedem o limite \bar{v} . Assim, não há multa e, portanto, a arrecadação e transferências são nulas. Concluí-se que, neste caso, a premiação possui nenhum efeito independentemente da magnitude de ϕ .

É importante destacar que a premiação ainda tem o efeito de mudar a decisão inicial do uso de nenhum radar fixo para o uso de somente radares fixos em todas as localidades quando $\gamma \in (\alpha, \frac{\alpha}{t_\phi})$. De fato, como t_ϕ é crescente em ϕ , tem-se que $\frac{\alpha}{t_\phi}$ é decrescente em ϕ . Assim, há um valor de $\phi > 0$ que faz $\frac{\alpha}{t_\phi}$ se igualar com γ . Observe ainda na Figura 14 (ou ainda na Figura 13), a linha pontilhada vermelha representa o valor de γ neste intervalo ($\gamma = 1,65$). A linha tracejada azul representa o valor de $\frac{\alpha}{t_\phi}$, o qual começa em $\alpha + \beta$ quando $\phi = 0$. Em ϕ aproximadamente 0,44, as duas curvas se cruzam. Portanto, para um valor de premiação suficientemente alto, o Fiscal muda sua decisão inicial acerca do uso de radares fixos.

Mostrou-se acima que se $\gamma < \alpha$ então $\gamma < \frac{\alpha}{t_\phi}$ para todo $\phi \in [0, 1 - \theta)$. Então, na situação em que $\gamma \in (0, \alpha)$, não existe um aumento de premiação que faz o Fiscal trocar a decisão inicial sobre o uso de radares fixos. Portanto, a premiação só tem o efeito de desincentivar a fiscalização, diminuir a arrecadação e aumentar o número esperado de excesso de \bar{v} , pois $(0, \alpha) \subseteq (0, \frac{\alpha}{t_\phi})$. No caso em que $\gamma > \frac{\alpha}{t_\phi}$, o aumento da premiação também não faz o Fiscal alterar a decisão inicial sobre o uso de radares fixos, pois $\frac{\alpha}{t_\phi}$ é decrescente em ϕ .

Observe novamente a Tabela 4 e a coluna em que $\gamma \in (\alpha, \alpha + \beta)$, como discutido em

Bertolai, Costa e Nakabashi (2021), a proibição do uso de radares portáteis, neste caso, motiva a fiscalização a utilizar radares fixos em ambas as localidades: o número esperado de fiscalizações aumenta de 2δ para 2. Em resposta, os Condutores zeram os excessos de velocidade e a arrecadação, por consequência disto, zera.

Como discutido anteriormente, sem premiação, as variáveis (em equilíbrio) encontradas aqui coincidem com as encontradas por Bertolai, Costa e Nakabashi (2021). Considere então a situação em que $\gamma \in \left(\alpha, \frac{\alpha}{t_\phi}\right)$, um aumento suficiente de ϕ faz o Fiscal mudar a decisão sobre o uso de radares fixos: antes utilizava somente radares portáteis e após passa a utilizar radares fixos em ambas as localidades. Portanto, a quantidade esperada de fiscalizações passa de 2δ para 2, o número de excessos esperados passa ser nulo como também a arrecadação. Desta forma, uma premiação suficientemente alta possui o mesmo efeito da proibição do uso de radares móveis.

O objetivo final de uma política de premiação por bom comportamento no trânsito é reduzir o número de violações de \bar{v} e, por consequência, reduzir o número de acidentes. Então, como para $\gamma \in \left(\alpha, \frac{\alpha}{t_\phi}\right)$ temos que um aumento suficientemente alto da premiação elimina por completo a quantidade esperada de excessos e, ainda, o custo do excesso de velocidade na sociedade é relativamente alto (comparado com o custo de fiscalização), então as previsões apresentadas pela Figura 13 e Tabela 3 para este caso podem ser vistas como a previsão para os efeitos da premiação.

Desta maneira, a previsão do modelo deste trabalho para os efeitos da premiação ao bom comportamento no trânsito pode ser interpretado como uma intensificação do uso de radares fixos, visando eliminar por completo o excesso de velocidade, por meio de uma premiação suficientemente alta nas localidades relativamente mais perigosas, enquanto nas localidades mais perigosas a premiação possui efeito nulo. Por fim, nas localidades pouco perigosas, a premiação possui efeito de desestimular a fiscalização e incentivar o excesso de velocidade por parte dos condutores.

4 Considerações Finais

A interação estratégica entre a fiscalização de trânsito e condutores, implicada por uma política de premiação ao bom comportamento dos motoristas, foi explicada de maneira conveniente pelo ferramental de Teoria dos Jogos. Mostrou-se que uma premiação suficientemente alta é capaz de eliminar por completo os excessos de velocidades ao induzir o uso de radares fixos nas localidades relativamente mais perigosas. Contudo, nas localidades menos perigosas a política de premiação possui o efeito de aumentar a quantidade de violações do limite de velocidade ao desincentivar a fiscalização.

É importante destacar que as localidades neste trabalho são homogêneas. Desta forma, a interpretação interessante obtida aqui não é uma interpretação literal sobre as posições dos radares. Uma extensão do modelo seria considerar localidades heterogêneas em termos de custo do excesso de velocidade para a sociedade. Desta forma, seria possível confirmar em definitivo os resultados obtidos neste trabalho.

Como um passo na agenda futura de pesquisa seria interessante relaxar a hipótese de homogeneidade nas preferências por excessos de velocidade dos condutores, por exemplo, assumir μ 's diferentes em (3.1). Assim, poder-se-ia reconhecer o fato documentado por Factor (2018) que a distribuição de multas não é igualmente distribuída na população.

A contribuição presente neste trabalho evidencia os principais efeitos de uma política de premiação ao bom comportamento no trânsito. Em particular, podemos inferir a consequência teórica prevista para o Registro Nacional Positivo de Condutores. Desta maneira, busca-se entender a interação estratégica no trânsito e suas consequências para a sociedade em um ambiente em que há uma política de premiação, como o RNPC.

Além das contribuições já destacadas, este trabalho avançou na agenda futura proposta por Bertolai, Costa e Nakabashi (2021). Como discutido por estes, esta se insere em uma discussão mais ampla sobre a intervenção estatal na decisão privada de alocação de risco, por exemplo, como o consumo de cigarro e bebidas alcoólicas. Um dos principais posicionamentos dessa discussão é que o Governo deveria intervir nestes mercados de modo a proteger os cidadãos deles mesmo. Um ingrediente para pesquisa futura baseado no modelo apresentado por este trabalho seria introduzir alocação de risco em situações que os agentes não conseguem se comprometer com boas ações.

Referências

- AARTS, L.; SCHAGEN, I. V. Driving speed and the risk of road crashes: A review. **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 215–224, 2006.
- ANDRADE, S. S. C. d. A.; JORGE, M. H. P. d. M. Internações hospitalares por lesões decorrentes de acidente de transporte terrestre no brasil, 2013: permanência e gastos. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, SciELO Public Health, v. 26, p. 31–38, 2017.
- BACCHIERI, G.; BARROS, A. J. Acidentes de trânsito no brasil de 1998 a 2010: muitas mudanças e poucos resultados. **Revista de Saúde Pública**, SciELO Public Health, v. 45, p. 949–963, 2011.
- BECKER, G. S. Crime and punishment: An economic approach. **Journal of political economy**, The University of Chicago Press, v. 76, n. 2, p. 169–217, 1968.
- BERTOLAI, J. D. P.; COSTA, I. S.; NAKABASHI, L. Fiscalização com e sem radares móveis à luz da teoria dos jogos. **Revista Brasileira de Economia**, SciELO Brasil, v. 75, p. 371–409, 2021.
- BJØRNSKAU, T.; ELVIK, R. Can road traffic law enforcement permanently reduce the number of accidents? **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 24, n. 5, p. 507–520, 1992.
- CASTILLO-MANZANO, J. I. et al. From legislation to compliance: The power of traffic law enforcement for the case study of spain. **Transport policy**, Elsevier, v. 75, p. 1–9, 2019.
- CASTILLO-MANZANO, J. I.; CASTRO-NUÑO, M.; PEDREGAL, D. J. Can fear of going to jail reduce the number of road fatalities? the spanish experience. **Journal of Safety Research**, Elsevier, v. 42, n. 3, p. 223–228, 2011.
- CICCONI, M. A.; GOODSON, M.; POLLNER, J. **Radar detectors and speeds in Maryland and Virginia**. [S.l.]: Insurance Institute for Highway Safety, 1987.
- DOU. **DELIBERAÇÃO CONTRAN Nº 257, DE 4 DE MAIO DE 2022**. [S.l.], 2022. Disponível em: <<https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/deliberacao-contran-n-257-de-4-de-maio-de-2022-398340651>>.
- ELVIK, R. A review of game-theoretic models of road user behaviour. **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 62, p. 388–396, 2014.
- _____. Association between increase in fixed penalties and road safety outcomes: A meta-analysis. **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 92, p. 202–210, 2016.
- _____. A theoretical perspective on road safety communication campaigns. **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 97, p. 292–297, 2016.
- FACTOR, R. An empirical analysis of the characteristics of drivers who are ticketed for traffic offences. **Transportation research part F: traffic psychology and behaviour**, Elsevier, v. 53, p. 1–13, 2018.

FACTOR, R.; HAVIV, N.; KEREN, G. Enforcement and behavior: the effects of suspending enforcement through automatic speed cameras. **Journal of Experimental Criminology**, Springer, p. 1–17, 2022.

FOLHA. **Bolsonaro determina suspensão de uso de radares móveis em rodovias federais**. [S.l.], 2019. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2019/08/bolsonaro-determina-suspensao-de-uso-de-radares-moveis-em-rodovias-federais.shtml>>.

G1. **Condutores consideram a existência de uma indústria da multa de trânsito no Brasil**. [S.l.], 2019. Disponível em: <<https://g1.globo.com/go/goias/especial-publicitario/dr-multas/dicas-de-transito-direcao-segura/noticia/2019/10/04/condutores-consideram-a-existencia-de-uma-industria-da-multa-de-transito-no-brasil.ghtml>>.

GIBBONS, R. **Game Theory for Applied Economists**. [S.l.]: Princeton University Press, 1992. ISBN 9781400835881.

HARSANYI, J. C. Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I–III Part I. The basic model. **Management science**, INFORMS, v. 14, n. 3, p. 159–182, 1967.

_____. Games with incomplete information played by “Bayesian” players part II. Bayesian equilibrium points. **Management Science**, INFORMS, v. 14, n. 5, p. 320–334, 1968.

_____. Games with incomplete information played by “Bayesian” players, part III. The basic probability distribution of the game. **Management Science**, INFORMS, v. 14, n. 7, p. 486–502, 1968.

HOLLANDER, Y.; PRASHKER, J. N. The applicability of non-cooperative game theory in transport analysis. **Transportation**, Springer, v. 33, p. 481–496, 2006.

INFOMONEY. **Cadastro de ‘bons motoristas’ começa a valer hoje; veja as vantagens para quem não tiver multas na CNH**. [S.l.], 2022. Disponível em: <<https://www.infomoney.com.br/consumo/cadastro-de-bons-motoristas-comeca-a-valer-hoje-veja-as-vantagens-para-quem-nao-tiver-multas-na-cnh>>.

_____. **Cadastro Positivo de Condutores: 3 milhões de motoristas já aderiram ao programa**. [S.l.], 2023. Disponível em: <<https://www.infomoney.com.br/minhas-financas/cadastro-positivo-de-condutores-3-milhoes-de-motoristas-ja-aderiram-ao-programa/>>.

NEXO. **Conselho cria cadastro para motorista sem infração ter benefícios**. [S.l.], 2022. Disponível em: <<https://www.nexojournal.com.br/extra/2022/05/09/Conselho-cria-cadastro-para-motorista-sem-infra%C3%A7%C3%A3o-ter-benef%C3%ADcios>>.

PEZOLDT, V.; BRACKETT, R. Q. **The influence of radar detectors on Texas highway traffic speeds**. [S.l.]: Texas Transportation Institute, the Texas A & M University System, 1987.

- PHILLIPS, R. O.; ULLEBERG, P.; VAA, T. Meta-analysis of the effect of road safety campaigns on accidents. **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 1204–1218, 2011.
- SENATRAN, P. S. **Cadastro Positivo Parceiros**. [S.l.], 2023. Disponível em: <<https://portalservicos.senatran.serpro.gov.br/#/condutor/cadastro-positivo-parceiros>>.
- TADELIS, S. **Game theory: an introduction**. [S.l.]: Princeton university press, 2013.
- TEED, N.; LUND, A. K.; KNOBLAUCH, R. The duration of speed reductions attributable to radar detectors. **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 131–137, 1993.
- THEOFILATOS, A.; YANNIS, G. A review of the effect of traffic and weather characteristics on road safety. **Accident Analysis & Prevention**, Elsevier, v. 72, p. 244–256, 2014.
- TSEBELIS, G. Penalty has no impact on crime: A game-theoretic analysis. **Rationality and Society**, Sage Publications, v. 2, n. 3, p. 255–286, 1990.
- WILSON, C. et al. Speed cameras for the prevention of road traffic injuries and deaths. **Cochrane database of systematic reviews**, John Wiley & Sons, Ltd, n. 11, 2010.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstrações

Lema A.0.1. *Suponha que σ^* é Equilíbrio de Nash Simétrico para o jogo apresentado na Tabela 2. Então, $r(\sigma_1^*) = (t_\phi, t_\phi)$ e $\phi\sigma_1^*(a_1) = 0$.*

Demonstração. Suponha que σ^* é Equilíbrio de Nash Simétrico para o jogo apresentado na Tabela 2, de forma que $\sigma_2^* = \sigma_1^*$ e $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ e $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$. Seja $X \neq \emptyset$ tal que $X \subseteq A_0$ e $B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*) = \Delta(X)$. Neste caso, o conjunto X denota o conjunto de melhores respostas *não probabilísticas* do Fiscal. Seja $Y \neq \emptyset$ tal que $Y \subseteq A_1$ e $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(Y)$. Neste caso, o conjunto Y denota o conjunto de melhores respostas *não probabilísticas* do Condutor 1.

Pelo Lemma A.0.2, $\theta \leq t_\phi < 1$. Adicionalmente, observe que o Lemma 3.2.1 e (3.10) implicam que

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_0 \succ p_1 & \text{se } q_1(\sigma_1^*) < t_\phi \\ p_0 \sim p_1 & \text{se } q_1(\sigma_1^*) = t_\phi \\ p_0 \prec p_1 & \text{se } q_1(\sigma_1^*) > t_\phi \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_0 \succ p_2 & \text{se } q_2(\sigma_1^*) < t_\phi \\ p_0 \sim p_2 & \text{se } q_2(\sigma_1^*) = t_\phi \\ p_0 \prec p_2 & \text{se } q_2(\sigma_1^*) > t_\phi \end{array} \right. .$$

Por conveniência para os argumentos a seguir, denote $f_i = \sigma_1(I_i^\phi M_i I_i^\phi) \sigma_1^T$ e $c_i = \sigma_0 \hat{M}_i \sigma_1^T - \sigma_0 \hat{I}_i^\phi P \sigma_1^T$.

Considere o caso em que o conjunto de melhores respostas não probabilísticas do Fiscal é tal que $X = \{p_0\}$. Ou seja, o caso no qual $p_0 \succ p_1$, $p_0 \succ p_2$ e $p_0 \succ p_3$. A condição $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ implica que $\sigma_0^* = (1, 0, 0, 0)$ e, portanto, $r(\sigma_0^*) = (0, 0)$. Pelo Lemma 3.2.2, isto implica em $\sigma_0 \hat{M}_i \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{I}_i^\phi P \sigma_1^T = 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Logo, $c_3 - c_0 = 0 < 2\delta$, $c_3 - c_1 = 0 < \delta$ e $c_3 - c_2 = 0 < \delta$. Usando tais desigualdades e o Lemma 3.2.2, tem-se $a_3 \succ^1 a_0$, $a_3 \succ^1 a_1$ e $a_3 \succ^1 a_2$, de forma que $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_3\})$. Logo, $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ implica em $\sigma_1^* = (0, 0, 0, 1)$ e, por consequência, $r(\sigma_1^*) = (1, 1)$. Como $q_1(\sigma_1^*) = 1 > t_\phi$, segue do exposto acima que $p_0 \prec p_1$. Uma contradição com $p_0 \succ p_1$. O argumento para os demais casos segue estrutura similar para mostrar que todos os casos em que $X \neq A_0$ geram contradições.

Suponha que $X = \{p_1\}$, de forma que $p_1 \succ p_0$, $p_1 \succ p_2$ e $p_1 \succ p_3$. Assim, $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ implica em $\sigma_0^* = (0, 1, 0, 0)$ e, com isso, $r(\sigma_0^*) = (1, 0)$. Segue do Lemma 3.2.2 que $\sigma_0 \hat{M}_0 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_2 \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{M}_1 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_3 \sigma_1^T = 1$. Além disso, $\sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_3^\phi P \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_1^T = \phi q_1(\sigma_1^*)$. Então, $c_2 - c_0 = 0 < \delta$ e $c_2 - c_1 = -(1 - \phi)q_1(\sigma_1^*) < 0$ e $c_3 - c_2 = 1 + \phi q_1(\sigma_1^*) > \delta$. Usando o Lemma 3.2.2, tem-se $(a_2 \succ^1 a_0)$, $(a_2 \succ^1 a_1)$ e $(a_2 \succ^1 a_3)$. Então, $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_2\})$. Segue de $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ que $\sigma_1^* = (0, 0, 1, 0)$ e, por consequência, $r(\sigma_1^*) = (0, 1)$. Como $q_1(\sigma_1^*) = 0 < t_\phi$, segue do exposto acima que $p_0 \succ p_1$. Uma contradição com $p_0 \prec p_1$.

Suponha que $X = \{p_2\}$, de forma que $p_2 \succ p_0$, $p_2 \succ p_1$ e $p_2 \succ p_3$. Neste caso, $\sigma_0^* = (0, 0, 1, 0)$ e, portanto, $r(\sigma_0^*) = (0, 1)$. Segue do Lemma 3.2.2 que $\sigma_0 \hat{M}_0 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_1 \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{M}_2 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_3 \sigma_1^T = 1$. Além disso, $\sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_3^\phi P \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_1^T = \phi q_2(\sigma_1^*)$. Assim, $c_1 - c_0 = 0 < \delta$ e $c_2 - c_1 = 1 + \phi q_2(\sigma_1^*) > 0$ e $c_3 - c_1 = 1 + \phi q_2(\sigma_1^*) > \delta$. Usando o Lemma 3.2.2, tem-se $(a_1 \succ^1 a_0)$, $(a_1 \succ^1 a_2)$ e $(a_1 \succ^1 a_3)$. Então, $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_1\})$. Segue de $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ que $\sigma_1^* = (0, 1, 0, 0)$ e, por consequência, $r(\sigma_1^*) = (1, 0)$. Como $q_2(\sigma_1^*) = 0 < t_\phi$, segue que $p_0 \succ p_2$. Uma contradição com $p_0 \prec p_2$.

Considere agora o caso em que $X = \{p_3\}$, no qual $p_3 \succ p_0$, $p_3 \succ p_1$ e $p_3 \succ p_2$. Neste caso, $\sigma_0^* = (0, 0, 0, 1)$ e, portanto, $r(\sigma_0^*) = (1, 1)$. Novamente pelo Lemma 3.2.2 que $\sigma_0 \hat{M}_0 \sigma_1^T = 0$, $\sigma_0 \hat{M}_1 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_2 \sigma_1^T = 1$ e $\sigma_0 \hat{M}_3 \sigma_1^T = 2$. Além disso, $\sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_3^\phi P \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_1^T = \phi[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]$. Assim, $c_2 - c_0 = c_1 - c_0 = 1 + \phi[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)] > \delta$ e $c_3 - c_0 = 2 + \phi[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)] > 2\delta$. Usando (3.14), tem-se $(a_0 \succ^1 a_1)$, $(a_0 \succ^1 a_2)$ e $(a_0 \succ^1 a_3)$. Então, $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) = \Delta(\{a_0\})$. Logo, $\sigma_1^* = (1, 0, 0, 0)$ e, por consequência, $r(\sigma_1^*) = (0, 0)$. Usando $r(\sigma_1^*) = (0, 0)$ em (3.11), tem-se $f_0 = f_3 = 0 < 2\theta$ e, por isso, $p_0 \succ p_3$. Uma contradição com $p_0 \prec p_3$.

Suponha agora que $X = \{p_0, p_1\}$, de forma que $p_0 \sim p_1$, $p_0 \succ p_2$ e $p_0 \succ p_3$. Então, $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ implica que $\sigma_0^* = (1 - x, x, 0, 0)$ para algum $x \in [0, 1]$. Logo, $r(\sigma_0^*) = (x, 0)$, $\sigma_0 \hat{M}_0 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_2 \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{M}_1 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_3 \sigma_1^T = x$. Adicionalmente, $\sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_3^\phi P \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_1^T = x\phi q_1(\sigma_1^*)$. Segue disto que $c_2 - c_0 = c_3 - c_1 = 0 < \delta$. Usando (3.14), tem-se $a_2 \succ^1 a_0$ e $a_3 \succ^1 a_1$. Então, $B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*) \subseteq \Delta(\{a_2, a_3\})$. Logo, $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ implica em $\sigma_1^* = (0, 0, 1 - y, y)$ para algum $y \in [0, 1]$. Por consequência, $r(\sigma_1^*) = (y, 1)$. Como $q_2(\sigma_1^*) = 1 > t_\phi$, segue do exposto acima que $p_0 \prec p_2$. Uma contradição com $p_0 \succ p_2$.

Suponha agora que $X = \{p_0, p_2\}$, de forma que $p_0 \sim p_2$, $p_0 \succ p_1$ e $p_0 \succ p_3$. Então, $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ implica que $\sigma_0^* = (1 - x, 0, x, 0)$ para algum $x \in [0, 1]$. Logo, $r(\sigma_0^*) = (0, x)$, $\sigma_0 \hat{M}_0 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_1 \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{M}_2 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_3 \sigma_1^T = x$. Adicionalmente, $\sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_3^\phi P \sigma_1^T = 0$ e $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_1^T = x\phi q_2(\sigma_1^*)$. Então, $c_1 - c_0 = 0 < \delta$ e $c_0 - c_3 = -x - x\phi q_2(\sigma_1^*) < 2\delta$. Usando o Lemma 3.2.2 tem-se $a_1 \succ^1 a_0$ e $a_0 \succ^1 a_3$. Logo, $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ implica em $\sigma_1^*(a_0) = \sigma_1^*(a_3) = 0$. Como $p_0 \sim p_2$, então $q_2(\sigma_1^*) = t_\phi$ e $\sigma_1^* = (0, 1 - t_\phi, t_\phi, 0)$. Logo, por (3.11), $f_3 = (1 - \phi)(1 - t_\phi) + (1 - \phi)t_\phi + \phi = 1$. Como $f_3 - f_0 = 1 > 2\delta$, segue que $p_3 \succ p_0$. Uma contradição com $p_3 \prec p_0$.

Suponha agora que $X = \{p_0, p_3\}$, de forma que $p_0 \sim p_3$, $p_0 \succ p_1$ e $p_0 \succ p_2$. Logo, $f_1 < \theta$, $f_2 < \theta$ e $f_3 = 2\theta > f_1 + f_2$. Segue de (3.11) que $\phi > 0$, uma vez que neste caso $0 < f_3 - f_1 - f_2 = 2\phi[q_1(\sigma_1^*)q_2(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]]$. Pela mesma razão, $q_1(\sigma_1^*)q_2(\sigma_1^*) > \sigma_1^*(a_3)[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)] \geq 0$. Logo, $q_1(\sigma_1^*) > 0$ e $q_2(\sigma_1^*) > 0$. Agora, usando $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ tem-se $\sigma_0^* = (1 - x, 0, 0, x)$ para algum $x \in [0, 1]$ e $r(\sigma_0^*) = (x, x)$. Logo, $\sigma_0 \hat{M}_0 \sigma_1^T = 0$, $\sigma_0 \hat{M}_1 \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{M}_2 \sigma_1^T = x$ e $\sigma_0 \hat{M}_3 \sigma_1^T = 2x$. Adicionalmente, $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_1^T = x\phi[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]$ e $\sigma_0 \hat{I}_i^\phi P \sigma_1^T = 0$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Assim, $c_2 - c_1 = 0$ e $c_3 - c_2 = c_3 - c_1 = x$. Usando (3.14),

tem-se $(a_1 \sim^1 a_2)$ e $a_3 \succ^1 a_2$ e $a_3 \succ^1 a_1$ se $x < \delta$. Neste caso, $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ implica em $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = 0$. Quando $x \geq \delta$, tem-se $c_1 - c_0 = c_2 - c_0 = x\{1 + \phi[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]\} > x \geq \delta$, pois $\phi q_1(\sigma_1^*) > 0$. Logo, $a_0 \succ^1 a_1$ e $a_0 \succ^1 a_2$. Assim, $\sigma_1^* \in B_1(\sigma_0^*, \sigma_1^*)$ novamente implica em $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2) = 0$. Com isso, $q_1(\sigma_1^*) = q_2(\sigma_1^*) = \sigma_1^*(a_3)$ e a contradição $0 < f_3 - f_1 - f_2 = 2\phi[q_1(\sigma_1^*)q_2(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]] \leq 0$ é obtida.

Suponha agora que $X = \{p_1, p_2\}$, de forma que $p_1 \sim p_2$, $p_1 \succ p_0$ e $p_1 \succ p_3$. Logo, $f_1 = f_2 > \theta > f_3 - f_1 = f_2 + \phi[2q_1(\sigma_1^*)q_2(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]]$. Usando $f_1 = f_2$, obtém-se $\phi[q_1(\sigma_1^*)^2 - q_2(\sigma_1^*)^2] + (1 - \phi)[q_1(\sigma_1^*) - q_2(\sigma_1^*)] = 0$. Ou seja, $q_1(\sigma_1^*) = q_2(\sigma_1^*)$, pois $\{1 - \phi + \phi[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]\}[q_1(\sigma_1^*) - q_2(\sigma_1^*)] = 0$ e $\phi[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)] + 1 - \phi > 0$. Usando tal resultado, tem-se $\theta > f_3 - f_1 = f_2 + 2\phi[q_1(\sigma_1^*)^2 - \sigma_1^*(a_3)q_1(\sigma_1^*)]$. Como $f_2 > \theta$, então $0 > 2\phi[q_1(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)]q_1(\sigma_1^*)$. Assim, $\phi > 0$ e $\sigma_1^*(a_3) > q_1(\sigma_1^*) = \sigma_1^*(a_1) + \sigma_1^*(a_3)$. Obteve-se a contradição $\sigma_1^*(a_1) < 0 \leq \sigma_1^*(a_1)$.

Suponha agora que $X = \{p_1, p_3\}$, de forma que $p_1 \sim p_3$, $p_1 \succ p_0$ e $p_1 \succ p_2$. Logo, $f_2 > f_1 > \theta = f_3 - f_1 = f_2 + \phi[2q_1(\sigma_1^*)q_2(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]]$. Agora, usando $\sigma_0^* \in B_0(\sigma_1^*, \sigma_1^*)$ tem-se $\sigma_0^* = (0, 1 - x, 0, x)$ e $r(\sigma_0^*) = (1, x)$ para algum $x \in [0, 1]$. Logo, $\sigma_0 \hat{M}_0 \sigma_1^T = 0$, $\sigma_0 \hat{M}_1 \sigma_1^T = 1$, $\sigma_0 \hat{M}_2 \sigma_1^T = x$ e $\sigma_0 \hat{M}_3 \sigma_1^T = 1 + x$. Adicionalmente, $\sigma_0 \hat{I}_1^\phi P \sigma_1^T = \sigma_0 \hat{I}_3^\phi P \sigma_1^T = 0$, $\sigma_0 \hat{I}_2^\phi P \sigma_1^T = (1 - x)\phi q_1(\sigma_1^*)$ e $\sigma_0 \hat{I}_0^\phi P \sigma_1^T = \phi[q_1(\sigma_1^*) + xq_2(\sigma_1^*)]$. Assim, $c_1 - c_0 = 1 + \phi[q_1(\sigma_1^*) + xq_2(\sigma_1^*)] > \delta$ e $c_3 - c_2 = 1 + (1 - x)\phi q_1(\sigma_1^*) > \delta$. Logo, $a_0 \succ^1 a_1$ e $a_2 \succ^1 a_3$, de forma que $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_3) = 0 = q_1(\sigma_1^*)$. Com isso, obteve-se a contradição $f_2 > \theta = f_3 - f_1 = f_2 + \phi[2q_1(\sigma_1^*)q_2(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)[q_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]] = f_2$.

Suponha agora que $X = \{p_2, p_3\}$, de forma que $p_2 \sim p_3$, $p_2 \succ p_0$ e $p_2 \succ p_1$. Ainda, $\sigma_0^* = (0, 0, 1 - x, x)$ e $r(\sigma_0^*) = (x, 1)$. Então, $\sigma_0^* \hat{M}_0 \sigma_1^* = 0$, $\sigma_0^* \hat{M}_1 \sigma_1^* = x$, $\sigma_0^* \hat{M}_2 \sigma_1^* = 1$ e $\sigma_0^* \hat{M}_3 \sigma_1^* = 1 + x$. Adicionalmente, $\sigma_0^* \hat{I}_2 P \sigma_1^* = \sigma_0^* \hat{I}_3 P \sigma_1^* = 0$, $\sigma_0^* \hat{I}_1 P \sigma_1^* = (1 - x)\phi q_2(\sigma_1^*)$ e $\sigma_0^* \hat{I}_0 P \sigma_1^* = \phi[xq_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)]$. Logo, $c_2 - c_0 = 1 + \phi[xq_1(\sigma_1^*) + q_2(\sigma_1^*)] > \delta$ e $c_3 - c_1 = 1 + \phi(1 - x)q_1(\sigma_1^*) > \delta$. Com isso, $(a_0 \succ^1 a_2)$, $(a_1 \succ^1 a_3)$ e, portanto, $\sigma_1^*(a_2) = \sigma_1^*(a_3) = 0 = q_2(\sigma_1^*)$. Então, $p_0 \sim p_2$ segue de $f_0 = f_2 = 0$. Uma contradição com $p_2 \succ p_0$.

Suponha agora que $X = \{p_0, p_1, p_2\}$, de forma que $p_0 \sim p_1$, $p_0 \sim p_2$ e $p_0 \succ p_3$. Então, $r(\sigma_0^*) = (t_\phi, t_\phi)$ e $f_1 = f_2 = \theta$. Logo, $f_3 = 2\theta + 2\phi t_\phi[t_\phi - \sigma_1^*(a_3)]$. Como $p_0 \succ p_3$ requer $f_3 < 2\theta$, então $2\phi t_\phi[t_\phi - \sigma_1^*(a_3)] < 0$. Obtém-se assim $\sigma_1^*(a_3) > t_\phi = \sigma_1^*(a_2) + \sigma_1^*(a_3)$ e a contradição $\sigma_1^*(a_2) < 0 \leq \sigma_1^*(a_2)$.

Suponha agora que $X = \{p_0, p_1, p_3\}$, de forma que $p_0 \sim p_1$, $p_0 \sim p_3$, $p_0 \succ p_2$ e $\sigma_0^* = (1 - x - y, x, 0, y)$ para algum (x, y) tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. Como $p_0 \sim p_1$, então, $q_1(\sigma_1^*) = t_\phi$ e $f_1 = \theta$. Como $p_1 \sim p_3$, então $\theta = f_3 - f_1 = f_2 + \phi[2q_2(\sigma_1^*)t_\phi - \sigma_1^*(a_3)[q_2(\sigma_1^*) + t_\phi]]$. Como $p_0 \succ p_2$, então $q_2(\sigma_1^*) < t_\phi$ e $f_2 < \theta$. Logo, $\phi > 0$ decorre de $0 < \theta - f_2 = \phi[2q_2(\sigma_1^*)t_\phi - \sigma_1^*(a_3)[q_2(\sigma_1^*) + t_\phi]]$. Note que $\sigma_1^*(a_1) = 0$ gera uma contradição, pois neste caso $t_\phi = q_1(\sigma_1^*) = \sigma_1^*(a_1) + \sigma_1^*(a_3) = \sigma_1^*(a_3)$ e, portanto,

$$0 < 2q_2(\sigma_1^*)t_\phi - \sigma_1^*(a_3)[q_2(\sigma_1^*) + t_\phi] = t_\phi[2q_2(\sigma_1^*) - q_2(\sigma_1^*) - t_\phi] = t_\phi[q_2(\sigma_1^*) - t_\phi] < 0.$$

Assim, $\sigma_1^*(a_1) > 0$, o que exige $(a_1 \succ^1 a_0)$, $(a_1 \succ^1 a_2)$ e $(a_1 \succ^1 a_3)$. Usando $r(\sigma_0^*) = (x + y, y)$, tem-se $\sigma_0^* \hat{M}_1 \sigma_1^* = x + y$ e $\sigma_0^* \hat{M}_2 \sigma_1^* = y$. Ainda, tem-se $\sigma_0^* \hat{I}_1 P \sigma_1^* = 0$ e $\sigma_0^* \hat{I}_2 P \sigma_1^* = x \phi q_1(\sigma_1^*)$. Logo, $c_2 - c_1 = -x[1 + \phi q_1(\sigma_1^*)] \leq 0$. Como $(a_1 \succ^1 a_2)$ exige $c_2 - c_1 \geq 0$, então $x = 0$. Usando $(x + y, y) = (y, y) = r(\sigma_0^*) = (\sigma_0^* \hat{M}_1 \sigma_1^*, \sigma_0^* \hat{M}_2 \sigma_1^*)$, tem-se $\sigma_0^* \hat{M}_3 \sigma_1^* = 2y$, $\sigma_0^* \hat{I}_0 P \sigma_1^* = y \phi [t_\phi + q_2(\sigma_1^*)]$ e $\sigma_0^* \hat{I}_i P \sigma_1^* = 0$ para $i \in \{1, 3\}$. Como $(a_1 \succ^1 a_3)$ exige $c_3 - c_1 = y \geq \delta$ e $\phi t_\phi > 0$, então $c_1 - c_0 = y[1 + \phi [t_\phi + q_2(\sigma_1^*)]] > \delta$. Obteve-se assim a contradição de $(a_1 \prec^1 a_0)$ com $(a_1 \succ^1 a_0)$.

Suponha agora que $X = \{p_0, p_2, p_3\}$, de forma que $p_0 \sim p_2$, $p_0 \sim p_3$, $p_0 \succ p_1$ e $\sigma_0^* = (1 - x - y, 0, x, y)$ para algum (x, y) tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. Como $p_0 \sim p_2$, então $q_2(\sigma_1^*) = t_\phi$ e $f_2 = \theta$. Como $p_2 \sim p_3$, então $\theta = f_3 - f_2 = f_1 + \phi [2q_1(\sigma_1^*) t_\phi - \sigma_1^*(a_3) [q_1(\sigma_1^*) + t_\phi]]$. Como $p_0 \succ p_1$, então $q_1(\sigma_1^*) < t_\phi$ e $f_1 < \theta$. Logo, $\phi > 0$ decorre de $0 < \theta - f_1 = \phi [2q_1(\sigma_1^*) t_\phi - \sigma_1^*(a_3) [q_1(\sigma_1^*) + t_\phi]]$. Pela mesma razão, $q_1(\sigma_1^*) [2t_\phi - \sigma_1^*(a_3)] > \sigma_1^*(a_3) t_\phi \geq 0$. Usando $2t_\phi \geq \sigma_1^*(a_3)$ e $q_1(\sigma_1^*) \leq t_\phi$, tem-se $\sigma_1^*(a_3) < t_\phi$ como consequência de $\sigma_1^*(a_3) t_\phi < q_1(\sigma_1^*) [2t_\phi - \sigma_1^*(a_3)] \leq t_\phi [2t_\phi - \sigma_1^*(a_3)]$. Segue disto que $\sigma_1^*(a_2) = q_2(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3) = t_\phi - \sigma_1^*(a_3) > 0$ e, portanto, $(a_2 \succ^1 a_0)$, $(a_2 \succ^1 a_1)$ e $(a_2 \succ^1 a_3)$. Note que $(a_2 \succ^1 a_3)$ exige $c_3 - c_2 \geq \delta$ ao mesmo tempo em que $c_3 - c_2 = y$ precisa ser válida tendo em vista que $r(\sigma_0^*) = (y, x + y)$. Similarmente, $(a_2 \succ^1 a_1)$ exige $c_2 - c_1 \leq 0$ ao mesmo tempo em que $c_2 - c_1 = x[1 + \phi q_1(\sigma_1^*)] \geq 0$ precisa ser válida, o que é possível somente sob $x = 0$. Por fim, $(a_2 \succ^1 a_0)$ exige $c_2 - c_0 \leq \delta$ ao mesmo tempo em que $c_2 - c_0 = (x + y)[1 + \phi t_\phi] + y \phi q_1(\sigma_1^*) = y[1 + \phi [t_\phi + q_1(\sigma_1^*)]] > y$ precisa ser válida, o que é possível somente se $y < \delta$. Assim, obteve-se a contradição $\delta \leq y < \delta$.

Suponha agora que $X = \{p_1, p_2, p_3\}$, de forma que $p_1 \sim p_2$, $p_1 \sim p_3$, $p_1 \succ p_0$ e $\sigma_0^* = (0, 1 - x - y, x, y)$ para algum (x, y) tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. Como $p_1 \sim p_2$, então $f_1 = f_2$, $q_1(\sigma_1^*) = q_2(\sigma_1^*)$ e, portanto, $\sigma_1^*(a_1) = \sigma_1^*(a_2)$. Como $p_2 \sim p_3$, então $\theta = f_3 - f_2 = f_1 + 2\phi q_1(\sigma_1^*) [q_1(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)]$. Como $p_1 \succ p_0$, então $q_1(\sigma_1^*) > t_\phi$ e $f_1 > \theta$. Logo, $\phi > 0$ e $q_1(\sigma_1^*) > 0$ decorrem de $0 > \theta - f_1 = 2\phi q_1(\sigma_1^*) [q_1(\sigma_1^*) - \sigma_1^*(a_3)]$. Pela mesma razão, $q_1(\sigma_1^*) < \sigma_1^*(a_3)$. Assim, obteve-se a contradição $0 \leq \sigma_1^*(a_1) < 0$ decorrente de $\sigma_1^*(a_1) + \sigma_1^*(a_3) = q_1(\sigma_1^*) < \sigma_1^*(a_3)$. \square

Lema A.0.2. Para cada $\phi \in [0, 1 - \theta)$, $\theta \leq t_\phi < 1$.

Demonstração. As desigualdades são satisfeitas para $\phi = 0$, pois $t_0 = \theta < 1$. Considere o

caso $\phi > 0$, observe que

$$\begin{aligned}
 0 &> 4\theta\phi^2(\theta - 1) \\
 &= 4\theta^2\phi^2 - 4\theta\phi^2 \\
 &= (1 - \phi)^2 + 4\theta^2\phi^2 + 4\theta\phi - 4\theta\phi^2 - (1 - \phi)^2 - 4\theta\phi \\
 &= (1 - \phi)^2 + 4\theta^2\phi^2 + 4\theta\phi(1 - \phi) - (1 - \phi)^2 - 4\theta\phi \\
 &= [(1 - \phi) + 2\theta\phi]^2 - [(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi]
 \end{aligned}$$

Portanto, $(1 - \phi)^2 + 2\theta\phi > [(1 - \phi) + 2\theta\phi]^2$. Entao, $\sqrt{(1 - \phi)^2 + 2\theta\phi} > (1 - \phi) + 2\theta\phi$. Logo,

$$t_\phi - \theta = \frac{\sqrt{(1 - \phi)^2 + 2\theta\phi} - (1 - \phi) - 2\theta\phi}{2\phi} > 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
 0 &> 4\phi(\theta - 1) \\
 &= 4\phi\theta - 4\phi \\
 &= 1 - 2\phi + \phi^2 + 4\phi\theta - [1 + 2\phi + \phi^2] \\
 &= (1 - \phi)^2 + 4\phi\theta - (1 + \phi)^2
 \end{aligned}$$

Portanto, $(1 + \phi)^2 > (1 - \phi)^2 + 4\phi\theta$. Logo, $1 + \phi > \sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\phi\theta}$. Ainda, $2\phi = 1 + \phi - (1 - \phi) > \sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\phi\theta} - (1 - \phi)$. Segue que $2\phi > \sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\phi\theta} - (1 - \phi)$. Assim,

$$1 - t_\phi = \frac{2\phi - [\sqrt{(1 - \phi)^2 + 2\theta\phi} - (1 - \phi)]}{2\phi} > 0.$$

□

Lema A.0.3. Para $\phi > 0$, t_ϕ é crescente em relação a ϕ .

Demonstração. Observe que $2\phi t_\phi = \sqrt{(1 - \phi)^2 + 4\theta\phi} - (1 - \phi)$. Derivando implicitamente

em relação a ϕ e arrumando a expressão temos que

$$\begin{aligned}
 2\phi t'_\phi &= \frac{(-1)2(1-\phi) + 4\theta}{2\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}} + 1 - 2t_\phi \\
 &= \frac{2\theta - (1-\phi) + \sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - 2t_\phi\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}}{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}} \\
 &= \frac{2\theta - (1-\phi) + \sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - 2t_\phi\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}}{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}} \left[2\theta - (1-\phi) + \sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi - (1-\phi)\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}}{\phi} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}} \left[-2\theta - (1-\phi) + \sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1 - 2\phi + \phi^2 - (1-\phi)\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}}{\phi} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}} \left[-2\theta - \left(\frac{1 - \phi - \sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}}{\phi} \right) \right] \\
 &= \frac{2t_\phi - 2\theta}{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi}} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

em que na última desigualdade se utilizou o Lema A.0.2. Logo, $2\phi t'_\phi > 0$. Como $\phi > 0$, segue que $t'_\phi > 0$. \square

Lema A.0.4. Para $\phi > 0$, d_ϕ é decrescente em relação a ϕ .

Demonstração. Como $d_\phi = \delta/[1 + \phi t_\phi]$, tem-se que $\frac{\partial t_\phi}{\partial \phi} > 0$ para $\phi > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial d_\phi}{\partial \phi} &= \delta \left[\frac{-\left(t_\phi + \phi \frac{\partial t_\phi}{\partial \phi}\right)}{(1 + \phi t_\phi)^2} \right] \\
 &= (-1)\delta \left[\frac{t_\phi + \phi \frac{\partial t_\phi}{\partial \phi}}{(1 + \phi t_\phi)^2} \right] \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

pois, como pelo Lemma A.0.3, $\frac{\partial t_\phi}{\partial \phi} > 0$, tem-se que $\phi \frac{\partial t_\phi}{\partial \phi} > 0$. Logo, $t_\phi + \phi \frac{\partial t_\phi}{\partial \phi} > 0$. \square

Lema A.0.5. Para cada $\phi \in (0, 1 - \theta)$, $t_\phi < \frac{\theta}{1 - \phi}$.

Demonstração. Suponha $\phi > 0$. Note que $0 < \frac{4\theta^2\phi^2}{(1-\phi)^2} = \frac{4\theta^2\phi^2}{(1-\phi)^2} + (1-\phi)^2 + 4\theta\phi - (1-\phi)^2 - 4\theta\phi$. Logo, $(1-\phi)^2 + 4\theta\phi < (1-\phi)^2 + 4\theta\phi + \frac{4\theta^2\phi^2}{(1-\phi)^2} = \left[1 - \phi + \frac{2\theta\phi}{1-\phi}\right]^2$. Assim, $(1-\phi)^2 + 4\theta\phi < \left[1 - \phi + \frac{2\theta\phi}{1-\phi}\right]^2$. Como $(1-\phi)^2 + 4\theta\phi > 0$ e $1 - \phi + \frac{2\theta\phi}{1-\phi} > 0$, segue que $\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} < 1 - \phi + \frac{2\theta\phi}{1-\phi}$. Uma vez que $1 - \phi > 0$, tem-se que $(1-\phi)\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} < (1-\phi)^2 + 2\theta\phi$. Assim,

$$\begin{aligned} t_\phi - \frac{\theta}{1-\phi} &= \frac{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - (1-\phi)}{2\phi} - \frac{\theta}{1-\phi} \\ &= \frac{(1-\phi)\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - (1-\phi)^2 - 2\theta\phi}{2\phi(1-\phi)} \\ &= \frac{(1-\phi)\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - [(1-\phi)^2 + 2\theta\phi]}{2\phi(1-\phi)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

em que na desigualdade se usou os fatos que $(1-\phi)\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} < (1-\phi)^2 + 2\theta\phi$ e $\phi(1-\phi) > 0$. Portanto, $t_\phi < \frac{\theta}{1-\phi}$. \square

Lema A.0.6. Note que $t_\phi - \frac{\theta}{1-\phi} + \frac{\phi}{1-\phi}t_\phi^2 = 0$.

Demonstração. Se $\phi = 0$, então $t_0 - \theta = \theta - \theta = 0$. Se $\phi > 0$, $t_\phi - \frac{\theta}{1-\phi} + \frac{\phi}{1-\phi}t_\phi^2 = 0$, pois $t_\phi + \frac{\phi}{1-\phi}t_\phi^2 = \frac{\theta}{1-\phi}$. De fato,

$$\begin{aligned} t_\phi + \frac{\phi}{1-\phi}t_\phi^2 &= t_\phi \left[1 + \frac{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} - (1-\phi)}{2(1-\phi)} \right] \\ &= t_\phi \left[\frac{\sqrt{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi} + (1-\phi)}{2(1-\phi)} \right] \\ &= \frac{(1-\phi)^2 + 4\theta\phi - (1-\phi)^2}{4\phi(1-\phi)} \\ &= \frac{\theta}{1-\phi}. \end{aligned}$$

\square