

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA
PARA FINANÇAS

ANÁLISE DOS MODELOS DE VASICEK E BLACK-DERMAN-TOY PARA O
APREÇAMENTO E HEDGE DINÂMICO DE OPÇÕES DE TAXA DE JURO

Maria Carlota Morandin Senger

Orientador: Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

SÃO PAULO

2003

MARIA CARLOTA MORANDIN SENGER

**ANÁLISE DOS MODELOS DE VASICEK E BLACK-DERMAN-TOY PARA O
APREÇAMENTO E HEDGE DINÂMICO DE OPÇÕES DE TAXA DE JURO**

Dissertação apresentada à Faculdade de
Economia, Administração e Contabilidade e
ao Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

SÃO PAULO

2003

Agradeço ao professor e orientador Rogério Rosenfeld pela orientação e pelos cursos ministrados durante o Mestrado que serviram de estímulo para esse trabalho. Agradeço também, ao Banco JP Morgan e Unibanco pelo patrocínio financeiro e, em particular, a Antônio Cabrera pela confiança sempre demonstrada e a Edson Kojo pelas discussões e aspecto crítico no desenvolvimento desse trabalho.

Conteúdo

<i>Figuras</i>	3
<i>Tabelas</i>	5
<i>Resumo</i>	6
1. Introdução	7
2. Modelos de Taxa de Juro	9
2.1 Definições.....	9
2.2 Classificação dos Modelos	12
2.3 Revisão dos Principais Modelos de Taxas de Juro	14
2.4 Modelos de Equilíbrio	16
2.5 Modelos de Não-Arbitragem.....	21
3. Apreçamento de Opções	35
3.1 Apreçamento de Opções de Taxa de Juro pelo Modelo de Black	35
3.2 Apreçamento de Opções Europeias pelo Modelo de Vasicek.....	37
3.3 Apreçamento de Opções de Taxa de Juro pelo Modelo de Black-Derman-Toy	41
4. Implementação	42
4.1 Contrato de Opção Europeia sobre Futuro de Depósitos Financeiros de 1 Dia	42
4.2 Descrição dos Dados	47
4.3 Tratamento dos Dados	48
5. Resultados	51
5.1 Modelo de Vasicek.....	51
5.2 Modelo de Black-Derman-Toy.....	63
6. Comparação entre os Modelos	78
6.1 Apreçamento por Delta-Hedge	78
6.2 Resultados.....	82
7. Conclusão	90

8. Bibliografia	92
Anexo I - Cálculo do Valor Esperado do Payoff de uma Call no Modelo de Vasicek	94
Anexo II – Cálculo do Delta no Modelo de Vasicek.....	95
Anexo III– Códigos em Mathematica e Visual Basic.....	98
Modelo de Vasicek	99
Modelo de Black-Derman-Toy para Volatilidade Constante	100
Modelo de Black-Derman-Toy para Volatilidade Dependente do Tempo	101
Anexo IV – Parâmetros Estimados para o Modelo de Vasicek	102

FIGURAS

Figura 4.1 – Comparação entre os <i>payoffs</i> de uma posição comprada em opção de compra sobre taxa e uma opção de venda sobre preço.....	46
Figura 4.2 – Comparação entre os <i>payoffs</i> de uma posição vendida em opção de compra sobre taxa e uma opção de venda sobre preço.....	46
Figura 5.1 – Parâmetro de reversão à média $\hat{\alpha}$ no período de 02-Jan-2002 a 30-Jan-2004.....	53
Figura 5.2 – Parâmetro de nível da taxa de juro para o longo prazo $\hat{\theta}$ no período de 02-Jan-2002 a 30-Jan-2004	53
Figura 5.3 – Parâmetro volatilidade da taxa de juro de curto prazo $\hat{\sigma}$ no período de 02-Jan-2002 a 30-Jan-2004	54
Figura 5.4 – Estrutura a Termo de Taxas de Juros Observada vs. Estimada pelo modelo de Vasicek (02-Jan-2003).....	55
Figura 5.5 – Estrutura a Termo de Taxas de Juros Observada vs. Estimada pelo modelo de Vasicek (30-Out-2003)	56
Figura 5.6 – Estrutura a Termo de Taxas de Juros Observada vs. Estimada pelo modelo de Vasicek (09-Dez-2003).....	56
Figura 5.7 – Comparação entre estruturas a termo de taxas de juro para o dia 19-Nov-2003 ($\hat{\alpha} = 0,01630$).....	57
Figura 5.8 – Comparação entre estruturas a termo de taxas de juro para o dia 16-Dez-2003 ($\hat{\alpha} = 0,01745$).....	58
Figura 5.9 – Gráfico de Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Vasicek vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004	61
Figura 5.10 – Estrutura a Termo das Taxas de Juro para o dia 06-Nov-2003	63
Figura 5.11 – Estrutura a Termo das Volatilidades para o dia 06-Nov-2003	64
Figura 5.12 – Árvore de taxas de juro no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade constante até 10 dias úteis em 06-Nov-2003	65
Figura 5.13 - Árvore de fatores de desconto no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade constante até 10 dias úteis em 06-Nov-2003.....	65
Figura 5.14 – Árvore de taxas de juro no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade variável no tempo até 10 dias úteis em 06-Nov-2003.....	66
Figura 5.15 – Árvore de fatores de desconto no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade variável no tempo até 10 dias úteis em 06-Nov-2003.....	66
Figura 5.16 – Gráfico de Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004	70

Figura 5.17 - Sensibilidade do Preço da Opção à variação da volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante).....	71
Figura 5.18 – Sensibilidade do Preço da Opção à deslocamentos paralelos da estrutura a termo de volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável no tempo).....	71
Figura 5.19 – Gráfico de Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 18,5% a.a., tipo I e vencimento 01-Out-2004.....	74
Figura 5.20 – Sensibilidade do Preço da Opção à variação da volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante).....	75
Figura 5.21 – Sensibilidade do Preço da Opção à deslocamentos paralelos da estrutura a termo de volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável no tempo).....	75
Figura 6.1 – Simulação de Delta-Hedge no Modelo de Black.....	84
Figura 6.2 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 80.000$	85
Figura 6.3 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 85.000$	85
Figura 6.4 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 90.000$	86
Figura 6.5 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 95.000$	86
Figura 6.6 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 80.000$	87
Figura 6.7 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 85.000$	87
Figura 6.8 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 90.000$	88
Figura 6.9 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 95.000$	88

TABELAS

Tabela 5.1 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Vasicek vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004.....	60
Tabela 5.2 – Comparativo entre os preços obtidos no modelo de Vasicek vs. Mercado.....	62
Tabela 5.3 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004.....	70
Tabela 5.4 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 18,5% a.a., tipo I e vencimento 01-Out-2004.....	74
Tabela 5.5 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante vs. Mercado.....	76
Tabela 5.6 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável no tempo vs. Mercado.....	77

RESUMO

Modelos Estocásticos de Estrutura a Termo são essenciais para avaliação de ativos-contingentes em taxas de juro. No Brasil, onde a oferta de instrumentos mais sofisticados sobre taxas de juro está apenas agora se fortalecendo, o desenvolvimento e implementação de modelos mais complexos é desafiador. Buscou-se nesse trabalho a implementação de dois modelos: Vasicek e Black-Derman-Toy e seu uso no apreçamento da recém-lançada opção sobre taxa de juro na Bolsa de Mercadoria & Futuro, comparando os preços obtidos com o modelo mais largamente utilizado pelo mercado – o modelo de Black. Os preços obtidos mostraram que o modelo de Vasicek tende a produzir preços inferiores aos do modelo de Black ou mercado, enquanto no modelo de Black-Derman-Toy constatou-se o contrário, ou seja, os preços produzidos pelo modelo foram superiores aos obtidos no modelo de Black.

Procurou-se também avaliar os erros de hedge dinâmico de cada modelo, em que os erros verificados têm relação com o prazo de vencimento da opção, dias de rebalanceamento e *moneyness* com o modelo de Black apresentando os menores erros nas opções dentro do dinheiro e no dinheiro. Entretanto, essa superioridade não se verificou nas opções fora do dinheiro, em que o modelo de Black apresentou os resultados mais instáveis. Com isso, o modelo de Black é sugerido para gerenciamento de risco, devido a sua simplicidade analítica, incorporando outras medidas de sensibilidade como o Gamma da opção que procure diminuir os erros verificados. Para fins de apreçamento, o modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante é sugerido devido a estabilidade dos resultados apresentados no hedge dinâmico nas diversas faixas de *moneyness*.

1. INTRODUÇÃO

No Brasil, onde a oferta de derivativos de taxas de juro está apenas se iniciando, o desenvolvimento de ferramentas para apreçamento e gerenciamento de risco desses novos instrumentos apresenta um grande grau de dificuldade. A falta de liquidez e de informações disponíveis torna muitas vezes pouco viável a implementação de modelos já bem desenvolvidos no mercado externo.

O objetivo desse trabalho será o de apreçamento das recém-lançadas opções sobre taxas de juro pela Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F) e comparação com o modelo de Black (1976), assumindo-se que o mercado utiliza esse modelo para a determinação dos preços das opções europeias sobre taxas de juro.

O apreçamento dessa opção será através de dois modelos estocásticos de taxa de juros com características diversas, tanto com relação às premissas sobre a estrutura a termo, quanto à forma de implementação. Os modelos analisados são o de Vasicek (1977) e Black-Derman-Toy (1990).

O modelo de Vasicek (1977) foi historicamente uma das primeiras tentativas de modelagem da estrutura a termo e, devido à hipótese de distribuição normal para a taxa instantânea de juro, permite resultados analíticos tanto para o preço de títulos quanto de opções europeias.

Da mesma forma, o modelo de Black-Derman-Toy (1990) foi um dos primeiros modelos a assumir log-normalidade na distribuição das taxas instantâneas de juro, evitando a maior desvantagem do modelo de Vasicek que permitia taxas negativas. No entanto, essa vantagem fez com que o modelo fosse desenvolvido de forma algorítmica, devendo ser implementado numericamente através de uma árvore binomial.

Buscou-se ainda em um etapa posterior, verificar se os resultados de apreçamento mostraram-se consistentes com a hipótese de replicação do valor da opção através do processo do hedge dinâmico de Delta, novamente comparando os resultados dos

modelos de Vasicek (1977) e Black-Derman-Toy (1990) com o modelo de Black (1976). Uma questão de ordem prática seria que o uso de modelos de taxas de juro de maior complexidade como o de Vasicek e Black-Derman-Toy só seria justificado se os resultados de preços e gerenciamento de risco fossem superiores aos apresentados pelo modelo de Black para um instrumento simples que é a opção europeia de taxas de juros.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma:

O capítulo 2 faz uma breve revisão dos conceitos básicos sobre modelos de taxas de juro, descrevendo resumidamente alguns dos modelos existentes e com maior profundidade os modelos de Vasicek e Black-Derman-Toy que serão implementados.

O capítulo 3 traz os resultados teóricos para o apreçamento de opções sobre taxas de juro.

No capítulo 4 é descrita a implementação dos modelos e características do contrato de opção europeia sobre futuro de DI na forma definida pela BM&F.

No capítulo 5 são colocados alguns dos resultados obtidos para os dois modelos e, no capítulo 6, os resultados do Delta-Hedge dinâmico.

O capítulo 7 apresenta as conclusões do trabalho desenvolvido.

2. MODELOS DE TAXA DE JURO

2.1 Definições

Algumas definições são necessárias para o desenvolvimento da teoria relativa à modelagem de taxas de juros. Os próximos itens apenas introduzem algumas notações que serão utilizadas ao longo desse trabalho.

2.1.1 Título sem Cupom

Um título sem cupom é definido como um título sem risco de crédito e sem pagamentos de juros intermediários que garante ao comprador o pagamento de 1 unidade monetária em seu vencimento T . O seu valor no instante $t < T$ será denominado por $P(t,T)$, onde conforme definição, $P(T,T) = 1$.

No mercado brasileiro, a função de título sem cupons é exercida pelos contratos futuros de DI, negociados com grande liquidez na Bolsa de Mercadorias & Futuros, com a única diferença de terem valor R\$ 100.000 no seu vencimento.

Uma definição decorrente é a da taxa continuamente composta $R(t,T)$ associada ao título sem cupom definida por:

$$R(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t} \quad (2.1)$$

Conseqüentemente,

$$P(t,T) = \exp[-R(t,T)(T-t)] \quad (2.2)$$

2.1.2 Equação Fundamental de Apreçamento

Uma definição que será largamente utilizada é a de assumir a existência de uma medida neutra ao risco Q , sob a qual o preço de qualquer ativo-contigente realizável π no instante t com *payoff* H_T no instante $T > t$ é dado por:

$$\pi_t = E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) H_T \mid F_t \right] \quad (2.3)$$

onde $E[\cdot]$ é o valor esperado na medida Q dada uma filtração F_t .

Uma relação decorrente da equação acima, onde a mudança da medida neutra ao risco Q no instante t para uma medida neutra ao risco futura Q^T no instante T , faz com que o preço do ativo-contigente π_t seja¹:

$$\pi_t = P(t, T) E_{Q^T} [H_T \mid F_t] \quad (2.4)$$

Aplicando-se a equação (2.3) ao apreçamento de uma opção de compra européia com vencimento em T , preço de exercício K , sobre um título com vencimento s :

$$Call(t, T, s, K) = E \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) (P(T, s) - K)^+ \mid F_t \right] \quad (2.5)$$

Entretanto, através da mudança de medida risco neutra de Q para Q^T definida pela equação (2.4), o preço da opção européia dado pela equação anterior pode ser simplificado para:

$$Call(t, T, s, K) = P(t, T) E_{Q^T} [(P(T, s) - K)^+ \mid F_t] \quad (2.6)$$

¹ Em situações concretas, o uso de uma medida neutra ao risco que coincide com o vencimento do instrumento será de grande utilidade. Usualmente essa medida é chamada de Q^T com valor esperado associado denominado por E^T .

2.1.3 Estrutura a Termo das Taxas de Juro

A estrutura a termo das taxas de juro consiste na correspondência entre as taxas de juros dos títulos disponíveis no mercado e seus vencimentos. Ao longo desse trabalho, a referência à estrutura a termo será em relação às taxas fornecidas pelos títulos sem cupons e sem risco de crédito. Com isso, a estrutura a termo refere-se ao intervalo contínuo de taxas $\{R(t,T), T \in [t, T^{\text{Max}}]\}$ onde T^{Max} é o maior vencimento disponível no mercado.

2.1.4 Estrutura a Termos das Volatilidades

De forma análoga à definição de estrutura a termo das taxas de juro, segue o conceito de estrutura a termo das volatilidades, que consiste na correspondência entre as volatilidades das taxas de juro associadas a um título sem cupom e seu vencimento.

2.2 *Classificação dos Modelos*

2.2.1 Modelos com Um Fator vs. Modelos Multifatoriais

Os modelos de taxas de juros assumem que a estrutura a termo é função de uma série de variáveis ou fatores. A maioria dos estudos empíricos, usando análise de componentes principais decompôs o movimento da estrutura a termo de taxas de juros em 3 fatores independentes e não correlacionados.

Estudos realizados nos Estados Unidos e no Brasil mostraram que o primeiro fator é o movimento paralelo da estrutura a termo, que responde por 80% a 90% da variância total. Como o primeiro fator ou componente é responsável pela explicação de grande parte dos movimentos da curva de juro, a dinâmica da estrutura temporal é usualmente simplificada para um fator. Grande parte dos modelos de taxas de juro são unifatoriais e assumem a taxa instantânea de juro como a única variável de estado.

Portanto, nos modelos unifatoriais, o processo para r envolve apenas uma fonte de incerteza. Em geral, a taxa de curto prazo é descrita num mundo neutro ao risco pela seguinte equação:

$$dr(t) = m(r)dt + \sigma(r)dW_t^Q \quad (2.7)$$

onde o desvio instantâneo m e o desvio-padrão instantâneo σ são funções de r . A suposição de um único fator não é tão restritiva quanto possa parecer. O modelo de um fator implica que todas as taxas se movem na mesma direção durante qualquer intervalo pequeno de tempo, mas não na mesma proporção. Isso não implica, como às vezes se supõe, que a estrutura a termo das taxas de juro possua sempre o mesmo formato.

Por outro lado, alguns instrumentos são sensíveis ao formato da estrutura a termo, ou a outros aspectos como uma deformação da estrutura de volatilidades, e não apenas do nível da estrutura, onde é necessário pelo menos um modelo com dois fatores.

2.2.2 Modelos de Equilíbrio vs. Modelos de Não-Arbitragem

Os modelos de taxa de juros podem ser separados entre modelos de equilíbrio e modelos de não-arbitragem. Nos modelos de equilíbrio, a estrutura a termo inicial é um output do modelo, enquanto nos modelos de não-arbitragem é um input, ou seja, a estrutura a termo inicial das taxas de juro é um resultado do modelo de equilíbrio e um dado do modelo de não-arbitragem.

Os modelos de equilíbrio geralmente começam com pressupostos acerca das variáveis económicas, derivando um processo para a taxa livre de risco de curto prazo, r . Em seguida, esses modelos exploram a implicação do processo para os preços dos títulos e das opções.

Já os modelos de não-arbitragem supõem determinado comportamento estocástico para uma ou diversas taxas de juro e um comportamento específico para o preço de mercado de risco e então derivam o preço de todos os ativos contingentes, assumindo que não há oportunidades de arbitragem no mercado.

2.3 Revisão dos Principais Modelos de Taxas de Juro

Os primeiros modelos de taxa instantânea de juro propostos na literatura eram contínuos no tempo e assumiam que a dinâmica da taxa instantânea dependia apenas de coeficientes constantes. O sucesso de modelos como Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) foi devido principalmente à possibilidade do apreçamento analítico de títulos e seus derivativos. Entretanto, esses modelos produzem uma estrutura endógena de taxas de juro, em que a estrutura a termo inicial não necessariamente ajusta-se a estrutura observada no mercado, não importando como os parâmetros do modelo sejam escolhidos.

O problema no ajuste à estrutura a termo de taxas de juro resultante dos modelos de equilíbrio foi analisado por Hull e White em seu artigo de 1990 e trabalhos subsequentes. Ho e Lee (1986) foram os primeiros a propor uma estrutura a termo exógena, porém o modelo estava baseado na hipótese de uma árvore binomial comandar a evolução da estrutura inteira de taxas e, mesmo em tempo contínuo, o modelo não era uma extensão apropriada do modelo de Vasicek, uma vez que não apresentava reversão à média na dinâmica de taxas de juro.

A necessidade de um ajuste exato à estrutura a termo observada no mercado levou Hull e White à introdução de um parâmetro variável com o tempo no modelo de Vasicek e, considerando esse parâmetro, o modelo proposto é também capaz de ajustar-se a estrutura a termo de volatilidades.

Em 1992, Heath, Jarrow e Morton (HJM) desenvolveram um novo modelo em que procuraram tratar toda a estrutura de taxas de juro e não apenas a taxa instantânea. O modelo apresentou em tempo contínuo, o que Ho e Lee (1986) trataram em uma estrutura binomial. O modelo se caracteriza por sua abrangência em tratar qualquer outro modelo de taxas de juro em sua estrutura. Por exemplo, o modelo HJM (1992) com um fator e volatilidade determinística é demonstrado ser equivalente ao modelo de Hull-White (1990) para a taxa instantânea de juro.

A tabela a seguir sintetiza alguns dos modelos que serão brevemente abordados nos próximos tópicos, com exceção dos modelos de Vasicek e Black-Derman-Toy em que há um maior aprofundamento teórico, servindo de subsídio para a sua implementação:

Classificação	Modelo	Ano	Dinâmica da Taxa de Juro Instantânea
Equilíbrio	Merton	1973	$dr_t = \theta \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$
	Vasicek	1977	$dr_t = \alpha(\theta - r(t))dt + \sigma \cdot dW_t$
	Cox-Ingersoll-Ross	1985	$dr_t = \alpha(\theta - r(t))dt + \sqrt{r(t)} \cdot \sigma \cdot dW_t$
Não-Arbitragem	Ho-Lee	1986	$dr_t = \theta(t) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$
	Hull-White	1990	$dr_t = (\theta(t) - \alpha \cdot r(t))dt + \sigma \cdot dW_t$
	Black-Derman-Toy	1990	$d \ln(r(t)) = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln(r(t)) \right] dt + \sigma(t) dz$
	Heath-Jarrow-Morton	1992	$f(t, T, \omega) = f(0, T) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^*(s, T, \omega) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^*(s, T, \omega) dW_i'(s)$

2.4 Modelos de Equilíbrio

2.4.1 Modelo de Merton

Merton (1973) foi o primeiro a propor um processo estocástico como um modelo para a taxa instantânea de juro. Sob a medida neutra ao risco Q , a dinâmica da taxa instantânea de juro será:

$$dr_t = \theta \cdot dt + \sigma \cdot dW_t^Q \quad (2.8)$$

onde θ e σ são constantes e positivos.

Evidentemente, o modelo não tratava a hipótese de reversão à média das taxas de juro, mas é citado como a primeira tentativa de tratamento estocástico para a estrutura a termo.

2.4.2 Modelo de Vasicek

O modelo de Vasicek (1977) supõe que a taxa de juro instantânea sob a medida de probabilidade real segue um Processo de Ornstein-Uhlenbeck com coeficientes constantes:

$$dr(t) = \alpha(\theta - r(t))dt + \gamma dW_t^Q \quad (2.9)$$

onde α , θ e γ são constantes e positivos.

A equação (2.9) define um passeio aleatório em torno de uma tendência, com característica de reversão à média, uma vez que a taxa esperada tende a θ , quando t vai a infinito. Com isso, quando $r(t)$ está acima de θ , a variação esperada de $r(t)$ torna-se

negativa e $r(t)$ tende a voltar para o seu nível de longo prazo θ com uma velocidade de reversão α .

A solução para a equação diferencial (2.9):

$$r(t) = \theta - e^{-\alpha(t-s)} \cdot (\theta - r(s)) + \gamma \cdot \int_s^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u \quad (2.10)$$

para qualquer $t \geq s$

Pode-se demonstrar que $r(t)$ condicional em F_s é normalmente distribuída com média e variância derivadas da equação (2.10):

$$E[r(t) | F_s] = r(s) \exp[-\alpha(t-s)] + \theta \{1 - \exp[-\alpha(t-s)]\} \quad (2.11)$$

$$Var[r(t) | F_s] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \{1 - \exp[-2\alpha(t-s)]\} \quad (2.12)$$

Isso implica que para cada tempo t , a taxa $r(t)$ pode ser negativa com probabilidade positiva. Essa possibilidade de taxas negativas é a maior desvantagem do modelo de Vasicek. Entretanto, a tratabilidade analítica implícita pela densidade Gaussiana da distribuição é dificilmente atingida para outras distribuições para o processo r .

2.4.2.1 Preço de um Título sem Cupom

O preço de um título sem cupom pode ser obtido através do cálculo do seu valor esperado conforme a expressão:

$$P(0,T) = E_Q \left[e^{-\int_0^T r(t) dt} \right] \quad (2.13)$$

Fazendo $x = -\int_0^T r(t) dt$

$$P(t,T) = E_Q[e^x] \text{ onde } x \sim N(\mu, \kappa^2)$$

Logo:

$$P(t,T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\kappa^2}} dx$$

$$P(t,T) = e^{\mu - \frac{\kappa^2}{2}} \quad (2.14)$$

Com isso, para calcular o preço de um título sem cupom com distribuição normal, basta calcular sua média (μ) e sua variância (κ^2)

2.4.2.2 Cálculo da Média (μ)

$$\mu = E_Q \left[- \int_0^T r(t) dt \right] = - \int_0^T E_Q[r(t)] dt \quad (2.15)$$

Onde:

$$E_Q[r(t)] = - \left\{ \theta - e^{-\alpha t} \cdot (\theta - r_0) + \gamma \cdot E_Q \left[\int_0^T e^{-\alpha(T-t)} dW_t^Q \right] \right\}$$

No entanto, o valor esperado dos incrementos em processo de Wiener é nulo. Com isso,

$$E_Q \left[\int_0^T e^{-\alpha(T-t)} dW_t^Q \right] = 0$$

$$\mu = - \int_0^T [\theta - e^{-\alpha t} \cdot (\theta - r_0)] dt$$

$$\mu = - \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha T}] \cdot r_0 - \theta \left[T - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T}) \right] \quad (2.16)$$

2.4.2.3 Cálculo da variância (κ^2)

$$\kappa^2 = -\left\{ E_Q \left[\int_0^T \int_0^T dt dt' r(t)r(t') \right] - E_Q^2 \left[\int_0^T dt r(t) \right] \right\} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.9) e após algumas manipulações com as integrais, obtém-se:

$$\kappa^2 = -\gamma^2 E_Q \left[\left(\int_0^T dW_s \int_0^s dt \exp(-\alpha(s-t)) \right)^2 \right]$$

Usando a Isometria de Ito, segue que:

$$\kappa^2 = -\gamma^2 E_Q \left[\int_0^t ds \left(\int_0^s dt \exp(-\alpha(s-t)) \right)^2 \right]$$

Logo,

$$\kappa^2 = -\frac{\gamma^2}{2\alpha^3} \{-\exp(-2\alpha T) + 4\exp(-\alpha T) + 2\alpha T - 3\} \quad (2.18)$$

Com isso, o preço de um título sem cupom com vencimento s no instante t será:

$$P(t,s) = \text{Exp}[A(t,s)] - rB(t,s) \quad (2.19)$$

$$R(t,s) = -\frac{A(t,s)}{t-s} + \frac{B(t,s)}{t-s} r \quad (2.20)$$

onde:

$$A(t,s) = -\frac{\text{Exp}(2\alpha t - 2\alpha s) \cdot \sigma^2}{4\alpha^3} - \frac{\text{Exp}(2\alpha t - 2\alpha s) \cdot (\alpha^2\theta - \sigma^2)}{\alpha^3} + \frac{t \cdot (2\alpha^2\theta - \sigma^2)}{2\alpha^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{4\theta}{\alpha} - 4\theta s - \frac{3\sigma^2}{\alpha^3} + \frac{2s\sigma^2}{\alpha^2} \right) \quad (2.21)$$

$$B(t,s) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\exp(\alpha t - \alpha s)}{\alpha} \quad (2.22)$$

2.4.3 Modelo de Cox, Ingersoll e Ross (CIR)

A abordagem de equilíbrio geral proposta por Cox, Ingersoll e Ross (1985) introduziu uma raiz quadrada no coeficiente de difusão no modelo proposto por Vasicek em 1977. Com isso, o modelo resultante possui o mesmo coeficiente de reversão à média do Vasicek, mas o termo estocástico possui desvio-padrão proporcional a $\sqrt{r(t)}$, fazendo com que conforme aumente a taxa instantânea de juro, o mesmo ocorra com a sua volatilidade. O modelo também apresenta tratabilidade analítica e, ao contrário do modelo de Vasicek, a taxa instantânea de juro é sempre positiva.

A formulação do modelo sob a medida neutra ao risco Q é:

$$dr_t = \alpha(\theta - r(t))dt + \sqrt{r(t)} \cdot \sigma \cdot dW_t^Q \quad (2.23)$$

onde α , θ e σ são constantes e positivos.

2.5 Modelos de Não-Arbitragem

2.5.1 Modelo de Ho-Lee

Ho e Lee (1986) foram os primeiros autores a desenvolver um modelo consistente com a estrutura a termo inicial de taxas de juro. Embora desenvolvido originalmente em uma estrutura binomial, a dinâmica da taxa instantânea de juro em tempo contínuo é representada por:

$$dr_t = \theta(t) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t^Q \quad (2.24)$$

onde σ é constante e $\theta(t)$ representa uma tendência com dependência no tempo, refletindo a inclinação da estrutura a termo inicial e o parâmetro de volatilidade do processo da taxa instantânea:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad (2.25)$$

em que a derivada parcial significa a inclinação da estrutura a termo no vencimento t .

O parâmetro dependente do tempo $\theta(t)$ é que permite ao modelo retornar os preços observados dos títulos, embora o modelo tenha a desvantagem de não apresentar reversão à média e, também, fornecer taxas de juro com valores negativos.

2.5.2 Modelo de Hull-White

Hull e White (1990) assumiram que o processo de taxa instantânea de taxas de juro se desenvolve sob a medida neutra ao risco de acordo com:

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t) \cdot r(t))dt + \sigma(t) \cdot dW_t^Q \quad (2.26)$$

onde $\alpha(t)$, $\theta(t)$ e $\sigma(t)$ são funções determinísticas do tempo.

O modelo conforme determinado pela equação anterior pode ser ajustado à estrutura a termo de taxas de juro e à estrutura a termo de volatilidades. Entretanto, se uma calibração exata a estrutura a termo é desejada, o ajuste exato à estrutura de volatilidades deve ser considerado com cuidado. As razões são que as volatilidades de mercado podem não ser significativas devido a não liquidez de alguns instrumentos e, também, devido ao fato que a estrutura de volatilidades futuras implícitas podem não ser condizentes com a estrutura de mercado dessas curvas, conforme observado pelos próprios autores (Hull e White (1995)).

A partir das restrições colocadas acima, o modelo mais comumente utilizado é o que define α e σ como constantes:

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha \cdot r(t))dt + \sigma \cdot dW_t^Q \quad (2.27)$$

onde α e σ são constantes e $\theta(t)$ é uma função determinística do tempo.

O modelo na forma como colocado na equação (2.27) permite o ajuste exato à estrutura a termo inicial de taxas de juro. Além disso, o modelo pode ser visto como um avanço sobre os modelos de Vasicek e Ho-Lee, uma vez que permite o ajuste à estrutura a termo e traz o componente de reversão à média. O parâmetro $\theta(t)$ é dado por:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \alpha \cdot f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) \quad (2.28)$$

O modelo propõe uma distribuição normal para a taxa instantânea de juro e lognormal para os preços dos títulos, o que permite a derivação de fórmulas analíticas e a construção de procedimentos numéricos para o apreçamento de títulos e derivativos.

Por outro lado, as desvantagens ainda são a de probabilidade não nula para taxas de juro negativas e a formulação com apenas um fator explicativo para a dinâmica das taxas.

Entretanto, a extensão de Hull-White para o modelo de Vasicek é um dos modelos historicamente mais importantes.

2.5.3 Modelo de Black-Derman-Toy

2.5.3.1 Descrição do Modelo

O modelo de estrutura a termo desenvolvido em 1990 por Fischer Black, Emanuel Derman e William Toy é um modelo baseado no comportamento da taxa de juro instantânea, que tem sido bastante utilizado pelo mercado na avaliação de derivativos de taxa de juros como opções, caps, floors e swaptions.

O modelo de Black-Derman-Toy é um modelo de não-arbitragem unifatorial, ou seja, os preços dos títulos são dependentes de apenas um fator – a taxa de juro instantânea. A estrutura a termo atual de taxa de juro é usada para a construção de uma árvore binomial dos possíveis futuros valores da taxa de juro, de forma a poder ser utilizada para avaliação de títulos e derivativos dependentes da taxa de juro. Com isso, os pressupostos do modelo são:

- A variável fundamental é a taxa spot ou instantânea;
- Os inputs do modelo serão um vetor de taxas de juro para diferentes prazos (estrutura a termo de taxas de juro) e um vetor de volatilidades para essas taxas (estrutura a termo das volatilidades);

O modelo é construído a partir das premissas de que todas as taxas de juro dos títulos são correlacionadas, o retorno esperado para todos os títulos para determinado período é o mesmo, as taxas instantâneas têm distribuição lognormal e de que não há impostos ou custos de transação.

O modelo foi originalmente desenvolvido de forma algorítmica, descrevendo a evolução da estrutura a termo em uma árvore binomial com tempo discreto, muito embora

diversos autores demonstraram posteriormente que o modelo implícito em tempo contínuo é dado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$d \ln(r(t)) = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln(r(t)) \right] dt + \sigma(t) dz \quad (2.29)$$

A equação (2.29) permite a compreensão de algumas hipóteses implícitas ao modelo. O modelo de Black-Derman-Toy é um modelo lognormal com reversão à média, em que a reversão à média é intrínseca ao modelo, ou seja, é determinada a partir dos parâmetros de entrada, o que resulta na vantagem de que as taxas de juro não podem tornar-se negativas.

O modelo também incorpora duas funções dependentes do tempo - $\theta(t)$ e $\sigma(t)$ - escolhidas de forma que o modelo reproduza a estrutura a termo de taxas de juro spot e a estrutura a termo de volatilidade das taxas de juros spot.

Ainda analisando-se a equação (2.29), observa-se que o parâmetro de reversão à média é dado pelo termo $\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$ quando negativo. Isso implica que se $\sigma'(t) < 0$, ou seja, a estrutura de volatilidade da taxa de juros spot for decrescente, então o modelo de Black-Derman-Toy terá reversão à média. Por outro lado, quando $\sigma'(t) > 0$, ou seja, a estrutura de volatilidade da taxa de juros spot for crescente, a taxa de juros spot irá crescer sem reversão à média. Portanto, no modelo de Black-Derman-Toy, a reversão à média será determinada pela estrutura local de volatilidade. Com isso, uma desvantagem do modelo será que para certas especificações da função volatilidade $\sigma(t)$, a taxa de juro poderá ter comportamento explosivo ao invés de um comportamento de reversão à média.

2.5.3.2 Construção da Árvore Binomial

De um modo geral, a aproximação discreta para a construção de uma árvore binomial procura aproximar a equação diferencial estocástica do ativo-objeto. Dessa forma, a aproximação da dinâmica da taxa instantânea de juro para uma árvore binomial é feita escolhendo-se um dos modelos e tomando-se intervalos de tempo Δt .

Inicialmente será feita uma breve descrição da construção da árvore binomial nos seus primeiros passos e, a seguir, será detalhado o algoritmo implementado para o apreçamento de opções europeias.

Considere a seguinte representação da árvore binomial para o preço de um título sem cupom com vencimento em $T = 3$, onde $i = 1, \dots, T$ e j representando os estados possíveis na árvore.

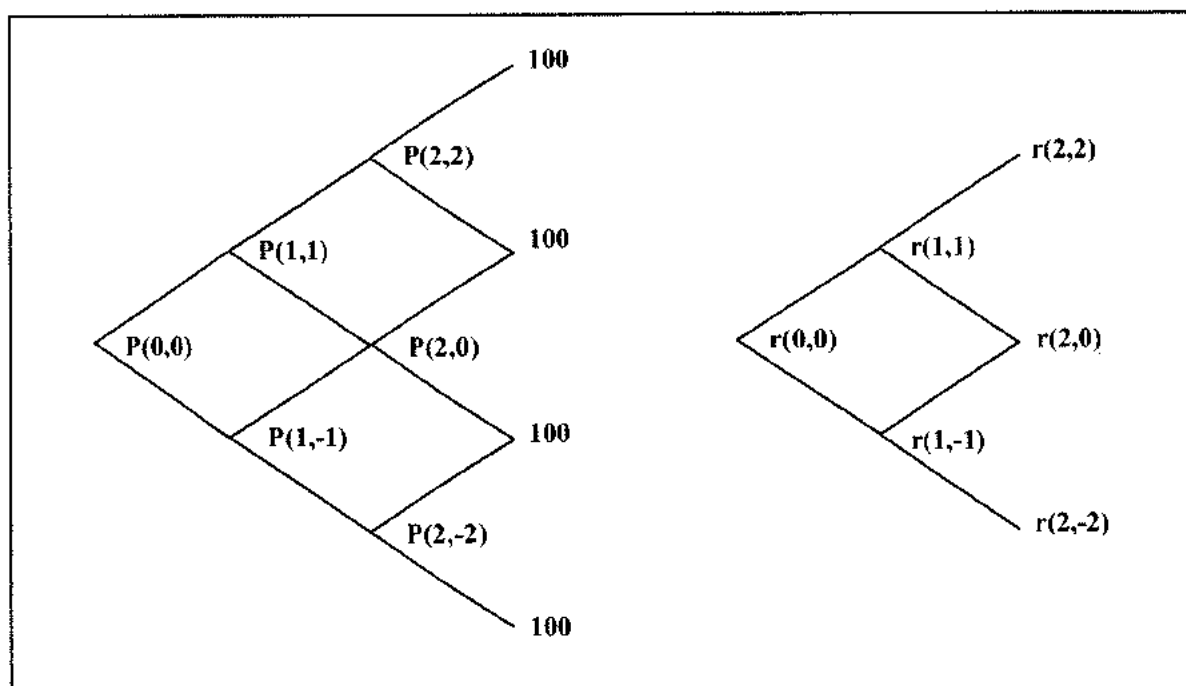


Figura 2.1 – Representação da Árvore Binomial

Os parâmetros de entrada na árvore serão a estrutura a termo de taxas de juro (y_0, y_1, y_2) e a estrutura a termo de volatilidades ($\sigma_{R0}, \sigma_{R1}, \sigma_{R2}$)

O preço de um título $P(i)$ no instante 0 com vencimento em $t = i\Delta t$, será:

$$P(i) = \frac{1}{(1 + y_i)^{i-1}} \quad (2.30)$$

Os preços de subida e de descida na árvore são representados como:

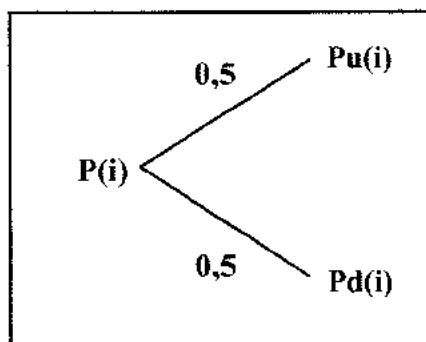


Figura 2.2 – Representação dos nós de subida e descida

onde dada a hipótese do modelo de subida e descida na árvore igual a $\frac{1}{2}$, verifica-se a seguinte relação:

$$P(i) = \frac{1}{(1 + y_0)} \left(\frac{1}{2} Pu(i) + \frac{1}{2} Pd(i) \right) \quad (2.31)$$

E também:

$$\sigma_R(i) = \frac{1}{2} \left(\log \frac{Ru}{Rd} \right) = \frac{1}{2} \left(\log \frac{\log(Pu(i))}{\log(Pd(i))} \right) \Rightarrow \frac{\log(Pu(i))}{\log(Pd(i))} = \exp(2\sigma_R(i)) \quad (2.32)$$

Com isso, os passos para a construção da árvore binomial serão:

- $i = 0$

$$P(0) = P(0,0) = \frac{1}{(1 + y_0)} \quad (2.33)$$

- $i = 1$

$$P(1) = \frac{1}{(1 + y_0)} \left(\frac{1}{2} Pu(1) + \frac{1}{2} Pd(1) \right) = \frac{100}{(1 + y_1)^2} \quad (2.34)$$

$$\sigma_R(1) = \frac{1}{2} \left(\log \frac{r(1,1)}{r(1,-1)} \right) = \frac{1}{2} \left(\log \frac{\log(Pu(1))}{\log(Pd(1))} \right) \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow \frac{\log(Pu(1))}{\log(Pd(1))} = \exp(2\sigma_R(1))$$

As equações (2.34) e (2.35) constituem um sistema para resolução nas incógnitas $Pu(1)$ e $Pd(1)$.

Pela equação (2.35):

$$Pd(1) = Pu(1)^{\exp(-2\sigma_R(1))} \quad (2.36)$$

Substituindo em (2.34):

$$Pu(1) + Pu(1)^{\exp(-2\sigma_R(1))} = 2(1 + y_0)P(1) \quad (2.37)$$

- $i = 2$

$$P(2) = \frac{1}{(1 + y_2)^3} \quad (2.38)$$

$$Pu(2) + Pu(2)^{\exp(-2\sigma_R(2))} = 2(1 + y_0)P(2) \quad (2.39)$$

$$Pd(2) = Pu(2)^{\exp(-2\sigma_R(2))} \quad (2.40)$$

O sistema acima composto pelas equações (2.39) e (2.40) deve ser resolvido para $P_u(2)$ e $P_d(2)$.

Os preços dos títulos para $i = 2$ serão:

$$P(2,2) = \frac{1}{1+r(2,2)} \left(\frac{1}{2}100 + \frac{1}{2}100 \right) = \frac{100}{1+r_2 \exp(4\sigma_2)} \quad (2.41)$$

$$P(2,0) = \frac{1}{1+r(2,0)} \left(\frac{1}{2}100 + \frac{1}{2}100 \right) = \frac{100}{1+r_2 \exp(2\sigma_2)} \quad (2.42)$$

$$P(2,0) = \frac{1}{1+r(2,-1)} \left(\frac{1}{2}100 + \frac{1}{2}100 \right) = \frac{100}{1+r_2} \quad (2.43)$$

Com isso,

$$r(2,2) = r_2 \exp(-4\sigma_2) \quad (2.44)$$

$$r(2,0) = r_2 \exp(-2\sigma_2) \quad (2.45)$$

$$r(2,-2) = r_2 \quad (2.46)$$

Considere ainda:

$$P_u(2) = \frac{1}{1+r(1,1)} \left(\frac{1}{2}P(2,2) + \frac{1}{2}P(2,0) \right) \quad (2.47)$$

$$P_d(2) = \frac{1}{1+r(1,-1)} \left(\frac{1}{2}P(2,0) + \frac{1}{2}P(2,-2) \right) \quad (2.48)$$

Substituindo o valores de $P(2,2)$, $P(2,0)$ e $P(2,-2)$ nas equações (2.47) e (2.48), resulta em uma sistema com duas equações e duas incógnitas ($r(2)$ e $\sigma(2)$).

2.5.3.3 Descrição do Algoritmo

O algoritmo utilizado para a construção das árvores de taxas de juros está baseado em Clewlow e Strickland (1998)², que demonstraram a implementação do modelo através da determinação dos preços Arrow-Debreu em cada um dos nós da árvore.

Os preços Arrow-Debreu podem ser definidos como o valor no instante atual de receber \$ 1 se o estado j no instante i for realizado ou zero em caso contrário. Usando a mesma notação de Clewlow e Strickland (1998), considere $d_{i,j}$ como o preço de um zero-coupon- bond com vencimento em $(i + 1)\Delta t$, ou seja, o fator de desconto para um período no nó (i,j) :

$$d_{i,j} = \frac{1}{1 + r_{i,j}\Delta t} \quad (2.49)$$

Os preços dos títulos com vencimento no instante $(i + 1)\Delta t$ podem ser expressos em função dos preços Arrow-Debreu e dos fatores de desconto $d_{i,j}$ através da seguinte equação:

$$P(i + 1) = \sum_j Q_{i,j} d_{i,j} \quad (2.50)$$

Onde os preços Arrow-Debreu são obtidos por “forward induction” que consiste em utilizar os valores já conhecidos do passo anterior para utilização no passo seguinte. Com isso, o preço Arrow-Debreu no nó (i,j) será fornecido pelos valores já determinados nos nós $(i - 1, j - 1)$ e $(i - 1, j + 1)$ a partir da condição inicial $Q_{0,0} = 1$, pela seguinte equação:

$$Q_{i,j} = \frac{1}{2} Q_{i-1,j-1} \cdot d_{i-1,j-1} + \frac{1}{2} Q_{i-1,j+1} \cdot d_{i-1,j+1} \quad (2.51)$$

² Originalmente, o procedimento de forward induction e o uso de preços Arrow Debreu foi desenvolvido por Jamshidian, F., 1991, “Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models”, Journal of Fixed Income, vol. 1, pp. 62-74.

com exceção dos nós nos extremos da árvore (i, i) e $(i, -i)$ onde há uma única probabilidade de transição:

$$Q_{i,i} = \frac{1}{2} Q_{i-1,i-1} \cdot d_{i-1,i-1} \quad (2.52)$$

$$Q_{i,-i} = \frac{1}{2} Q_{i-1,-i-1} \cdot d_{i-1,-i-1} \quad (2.53)$$

As relações acima serão utilizadas nos algoritmos para a construção da árvore binomial, tanto para a volatilidade constante quanto variável, que serão descritos nos próximos itens.

2.5.3.4 Volatilidade Constante

Fazendo a volatilidade constante, a equação para o modelo de Black-Derman-Toy será:

$$d \ln(r(t)) = \theta(t) dt + \sigma dz \quad (2.54)$$

Onde a sua representação discreta:

$$r_{i,j} = U(i) \exp(\sigma j \sqrt{\Delta t}) \quad (2.55)$$

Pelas equações (2.49) e (2.50):

$$P(i+1) = \sum_j Q_{i,j} d_{i,j} \quad (2.56)$$

$$P(i+1) = \sum_j Q_{i,j} \frac{1}{1 + r_{i,j} \Delta t} \quad (2.57)$$

e substituindo (2.55),

$$P(i+1) = \sum_i Q_{i,j} \frac{1}{1 + U(i) \exp(\sigma_j \sqrt{\Delta t}) \Delta t} \quad (2.58)$$

Os preços dos títulos $P(i)$ são conhecidos a partir da estrutura a termo de taxas de juro inicial $R(i)$, a partir da seguinte relação:

$$P(i) = \frac{1}{(1 + R(i))^{i \cdot \Delta t}} \quad (2.59)$$

Portanto, na equação (2.58), a única variável desconhecida será $U(i)$ que devido a impossibilidade de ser extraída analiticamente, deverá ser obtida numericamente.

Em resumo, os passos para obtenção da árvore de Black-Derman-Toy para obtenção das taxas $r(i,j)$ e fatores de desconto $d(i,j)$ serão³:

1. Inicialização da estrutura a termo de taxas de juro ($R_{i,j}$) através da leitura de dados de mercado.
2. Cálculo dos preços dos títulos $P(i)$ através da equação (2.59).
3. Cálculo dos preços Arrow-Debreu, utilizando as equações (2.51), (2.52) e (2.53), através do processo de "forward induction", que consiste em acumular os preços Arrow-Debreu, a partir dos valores conhecidos de $d_{i,j}$, com valores iniciais $Q_{0,0} = 1$ e $r_{0,0} = R(1)$ e $d_{0,0} = \frac{1}{(1 + r_{0,0}) \Delta t}$.
4. Utilização de procedimento numérico para obtenção de $U(i)$. Para o modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante, utilizou-se o método da bissecção.
5. Obtenção de $r_{i,j}$ e $d_{i,j}$ através das equações (2.55) e (2.49).

³ O código desenvolvido em Visual Basic está detalhado no Anexo III.

2.5.3.5 Volatilidade Variável no Tempo

Para a volatilidade variável no tempo, o procedimento é semelhante ao adotado para volatilidade constante. Novamente, a forma discreta para o modelo de Black-Derman-Toy será:

$$r_{i,j} = U(i) \exp(\sigma(i) j \sqrt{\Delta t}) \quad (2.60)$$

Entretanto, a árvore deverá se ajustar tanto a estrutura a termo de taxas de juro quanto de volatilidade, ou seja, deverá ser consistente com os valores conhecidos de $P(i)$ e $\sigma_R(i)$ e, para isso, são necessárias duas funções de preço $P_U(i)$ e $P_D(i)$, que representam os preços de um título no nó de subida (U) e descida (D), com $R_U(i)$ e $R_D(i)$ sendo, respectivamente, as taxas associadas.

As funções $P_U(i)$ e $P_D(i)$ podem ser determinadas através das seguintes relações:

$$P(i) = \frac{\frac{1}{2} P_U(i) + \frac{1}{2} P_D(i)}{1 + r_{0,0} \Delta t} \quad \text{para } i \geq 2 \quad (2.61)$$

E também pela equação abaixo que relaciona a estrutura de volatilidades aos preços no nós:

$$\sigma_R(i) \sqrt{\Delta t} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_U(i)}{P_D(i)} \quad (2.62)$$

ou,

$$P_D(i) = P_U(i) \exp(-2\sigma_R(i) \sqrt{\Delta t}) \quad (2.63)$$

Substituindo a equação acima em (2.61), a solução para $P_U(i)$ será:

$$P_U(i) + P_D(i) \exp(-2\sigma_R(i)\sqrt{\Delta t}) = 2P(i) \cdot (1 + r_{0,0}\Delta t) \quad (2.64)$$

De modo semelhante ao algoritmo para volatilidade constante, deverão ser calculados os preços de Arrow-Debreu em cada nó através de um procedimento de “*forward induction*”. No entanto, os preços serão calculados para $P_U(i)$ e $P_D(i)$ e são definidos como $Q_{U,i,j}$ e $Q_{D,i,j}$, onde $Q_{U,i,j}$ é o valor, visto do nó U, de um título que paga \$ 1 caso o nó (i,j) seja alcançado e 0 em caso contrário e, de forma análoga, $Q_{D,i,j}$ é o valor, visto do nó D, de um título que paga \$ 1 caso o nó (i,j) seja alcançado e 0 em caso contrário.

E novamente utilizando a equação (2.50), os preços $P_U(i)$ e $P_D(i)$ são fornecidos pelas equações:

$$P_U(i+1) = \sum_j Q_{U,i,j} d_{i,j} \quad (2.65)$$

$$P_D(i+1) = \sum_j Q_{D,i,j} d_{i,j} \quad (2.66)$$

Com:

$$d_{i,j} = \frac{1}{1 + r_{i,j}\Delta t} = \frac{1}{1 + U(i) \exp(\sigma(i)j\sqrt{\Delta t})\Delta t} \quad (2.67)$$

Entretanto, ao contrário do modelo com volatilidade constante onde havia apenas uma equação e uma incógnita $U(i)$, o modelo com volatilidade variável no tempo apresenta duas equações e duas incógnitas ($U(i)$ e $\sigma(i)$) que deverão novamente ser resolvidas numericamente através do procedimento de Newton-Raphson.

Em resumo, os seguintes passos devem ser seguidos para obtenção da árvore de preços e taxas no modelo de Black-Derman-Toy:

1. Inicialização da estrutura a termo de taxas de juro ($R_{i,j}$) e da estrutura de volatilidades ($\sigma_R(i)$) através da leitura de dados de mercado.
2. Cálculo de $P_U(i)$ e $P_D(i)$ através das equações (2.64) e (2.63).

3. Cálculo dos preços Arrow-Debreu, utilizando as equações (2.65) e (2.66), através do processo de "forward induction".
4. Resolução das equações (2.65), (2.66) e (2.67) para obtenção de $U(i)$ e $\sigma(i)$.
5. Obtenção de $r_{i,j}$ e $d_{i,j}$ através das equações (2.49) e (2.60).

A construção da árvore binomial através do algoritmo descrito acima apresentou resultados convergentes ao do trabalho original de Black, Derman e Toy (1990).

2.5.4 Modelo de Heath, Jarrow e Morton

No modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992), assume-se que a taxa a termo instantânea $f(t, T, \omega)$ segue o seguinte processo estocástico:

$$f(t, T, \omega) = f(0, T) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^*(s, T, \omega) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^*(s, T, \omega) dW_i^f(s) \quad (2.68)$$

$$\sigma_i^*(s, T, \omega) = \sigma_i(s, T, \omega) \int_s^T \sigma_i(s, u, \omega) du$$

onde W é um movimento Browniano N-Dimensional e ω representa a dependência do processo da taxa a termo em um caminho $\omega \in \Omega$.

3. APREÇAMENTO DE OPÇÕES

O problema na modelagem de preços de uma opção sobre taxa de juros onde o ativo-objeto é um título de renda fixa é o de que o preço desse ativo converge para um valor final e, portanto, não se pode dizer que segue um passeio aleatório e tem distribuição lognormal. Esse efeito conhecido como Pull-to-Par descreve o fato de que a incerteza do preço do ativo-objeto diminui, na medida em que o ativo se aproxima do seu vencimento, ou seja, quanto mais próximo o prazo de vencimento, menor a volatilidade de seus preços.

Assim, o uso de modelos como Black-Scholes tenderia a produzir preços superavaliados, por supor que a volatilidade é constante até o vencimento da opção, não levando em conta seu decréscimo.

Esse problema é parcialmente resolvido quando, ao invés de considerar o próprio título como ativo-objeto, modelam-se os preços obtidos através das taxas implícitas entre o vencimento da opção e o vencimento do ativo-objeto, supondo que esses preços têm distribuição lognormal. Essa modelagem é largamente utilizada pelo mercado, utilizando a equação de apreçamento do modelo publicado por Black em 1976.

3.1 Apreçamento de Opções de Taxa de Juro pelo Modelo de Black

O modelo de Black (1976) será utilizado como um modelo de referência para a determinação dos preços e deltas das opções, assumindo-se que o mercado utiliza esse modelo para a determinação dos preços das opções europeias no Brasil.

Em 1976, Fisher Black publicou um artigo em que modela os preços futuros como ativo-objeto no lugar dos preços spot modelados pela equação de Black & Scholes. O modelo é largamente utilizado para o apreçamento de opções europeias sobre commodities, contratos a termo e futuros.

O preço para uma opção europeia de compra é dado por:

$$c(t, T, s) = P(t, T) \cdot [P(T, s) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2)] \quad (3.1)$$

E para uma opção europeia de venda:

$$p(t, T, s) = P(t, T) \cdot [K \cdot \Phi(-d_1) - P(T, s) \cdot \Phi(-d_2)] \quad (3.2)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(T, s)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}} \quad (3.3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T - t}$$

T: Vencimento da opção

s: Vencimento do título

$P(T, s)$: Preço a termo do título entre T e s

σ : Volatilidade do Preço a termo do Título

As equações (3.1) e (3.2) podem ser utilizadas para avaliar opções europeias supondo que as taxas de juros não sejam estocásticas e que a variável objeto seja lognormal no vencimento da opção.

O modelo de apreamento de opções de Black pressupõe a lognormalidade da distribuição de probabilidade de uma taxa de juro ou do preço de um título em algum ponto no futuro e é amplamente utilizado para avaliação de instrumentos como opções europeias sobre títulos, caps e floors. Entretanto, a utilização do modelo de Black possui algumas limitações por não fornecer uma descrição da forma como as taxas de juros se desenvolvem ao longo do tempo e, com isso, não pode ser utilizado para a avaliação de derivativos tais como opções americanas de taxa de juro.

3.2 *Apreçamento de Opções Europeias pelo Modelo de Vasicek*

Jamshidian (1989) mostrou analiticamente a derivação para os preços de opções europeias de compra e venda a partir da dinâmica para a taxa instantânea de juro especificada pelo modelo de Vasicek, ou seja, assumindo-se que a estrutura a termo é completamente determinada pelo valor da taxa instantânea de juro $r(t)$ e que $r(t)$ segue um processo gaussiano de reversão à média.

A existência de uma medida risco-neutra Q implica que o preço livre de arbitragem no instante t de uma ativo-contingente com *payoff* H_T no instante T é dado por:

$$H_t = E'_Q [P(t,T) \cdot H_T] = E'_Q \left[\exp\left(-\int_t^T r(t') dt'\right) \cdot H_T \right] \quad (3.4)$$

onde E'_Q significa a esperança condicional no instante t sob a medida Q neutra ao risco.

A expressão acima pode ser utilizada para a precificação de qualquer ativo-contingente. No caso particular do preço de um zero-coupon bond, o *payoff* H_T é igual a um no instante T . Logo,

$$H_t = P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(t') dt'\right) \quad (3.5)$$

Para a precificação de uma opção europeia de compra sobre um título sem cupom, o *payoff* H_T é dado por:

$$H_T = C(T,s) = \text{Max}(P(T,s) - K, 0) \quad (3.6)$$

A expressão acima pode ser escrita:

$$H_T = C(T,s) = \text{Max}\left(\exp\left(-\int_t^s r(t') dt'\right) - K, 0\right) \quad (3.7)$$

Substituindo em (3.4),

$$H_t = E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(t') dt' \right) \cdot \text{Max} \left(\exp \left(- \int_t^s r(t') dt' \right) - K, 0 \right) \right] \quad (3.8)$$

Fazendo:

$$x = - \int_t^T r(t') dt' \quad \text{onde } x \sim N(\mu_x, \kappa_x^2)$$

$$y = - \int_t^s r(t') dt' \quad \text{onde } y \sim N(\mu_y, \kappa_y^2)$$

Considerando a relação de apreçamento dada por (2.4):

$$H_t = E_Q[\exp(x)] \cdot E_{Q'}[(\exp(y) - K)^+] \quad (3.9)$$

onde:

$$E_Q[\exp(x)] = P(t, T) \quad (3.10)$$

e também⁴,

$$E_{Q'}[(\exp(y) - K)^+] = \exp \left(\mu_y + \frac{\kappa_y^2}{2} \right) \cdot \Phi \left[\frac{-\ln K + \mu_y + \kappa_y^2}{\kappa_y} \right] - K \cdot \Phi \left[\frac{-\ln K + \mu_y}{\kappa_y} \right] \quad (3.11)$$

ou de forma equivalente,

$$E_{Q'}[(\exp(y) - K)^+] = \exp \left(\mu_y + \frac{\kappa_y^2}{2} \right) \cdot \Phi[h] - K \cdot \Phi[h - \kappa_y] \quad (3.12)$$

onde:

⁴ Ver Anexo I

$$h = \frac{-\ln K + \mu_y + \kappa_y^2}{\kappa_y} = \frac{-\ln K + \ln\left(\exp\left(\mu_y + \frac{\kappa_y^2}{2}\right)\right) + \frac{\kappa_y^2}{2}}{\kappa_y}$$

$$h = \frac{-\ln K + \ln[P(T, s)]}{\kappa_y} + \frac{\kappa_y}{2}$$

$$h = \frac{\ln\left[\frac{P(t, s)}{P(t, T) \cdot K}\right]}{\kappa_y} + \frac{\kappa_y}{2} \quad (3.13)$$

usando também:

$$P(T, s) = \exp\left(\mu_y + \frac{\kappa_y^2}{2}\right) \quad (3.14)$$

Substituindo as expressões anteriores em (3.9), o preço da opção de compra será:

$$C(t, T, s) = P(t, T) \cdot [P(T, s) \cdot \Phi(h) - K \cdot \Phi(h - \kappa_y)] \quad (3.15)$$

ou ainda,

$$C(t, T, s) = P(t, s) \cdot \Phi(h) - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi(h - \kappa_y) \quad (3.16)$$

onde:

$$h = \frac{\ln\left[\frac{P(t, s)}{P(t, T) \cdot K}\right]}{\kappa_y} + \frac{\kappa_y}{2} \quad (3.17)$$

A demonstração de uma opção europeia de venda pode ser feita de forma análoga.

Portanto, a expressão geral para o preço no instante t, de uma opção europeia com preço de exercício K, vencimento em T, sobre um título sem cupons com vencimento em s, é:

$$O(t, T, s, K) = \omega \left[P(t, s) \cdot \Phi(\omega h) - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi(\omega(h - \sigma_p)) \right] \quad (3.18)$$

onde $\omega = 1$ para opção de compra, $\omega = -1$ para opção de venda, $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão e :

$$\sigma_p = \kappa_p = \frac{\sigma}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}} \cdot (1 - e^{-\alpha(s-T)}) \quad (3.19)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P(t, s)}{P(t, T)K} + \frac{\sigma_p}{2} \quad (3.20)$$

3.3 *Apreçamento de Opções de Taxa de Juro pelo Modelo de Black-Derman-Toy*

A partir da construção da árvore para a taxa instantânea de juro em cada intervalo de tempo e cada estado da natureza, de forma consistente com as hipóteses do modelo de Black, Derman e Toy definidas no item (2.5.3.3), essa árvore pode ser utilizada para o apreçamento de diversos instrumentos derivativos.

Para o caso específico de uma opção europeia sobre um título sem cupom, o procedimento utilizado é recursivo e consiste em construir a árvore para o ativo-objeto do seu vencimento em s até o vencimento da opção em T , quando se comparam os preços obtidos com o preço de exercício da opção K .

Considere $Ps_{i,j}$ como o preço do zero-coupon bond no instante i e estado j , onde $Ps_{s,j} = 1$, ou seja, o bond tem preço 1 no seu vencimento. O seu valor em cada estado j será:

$$Ps_{i,j} = \frac{1}{2} d_{i,j} [Ps_{i+1,j+1} + Ps_{i+1,j-1}] \quad (3.21)$$

onde $d_{i,j}$ é o fator de desconto no instante $i\Delta t$ e estado j .

A partir da construção da árvore para $Ps_{i,j}$ recursivamente de s até T , avalia-se o valor da opção em T , ou seja: para opção de compra: $C_{T,j} = \text{Máximo} \{0, Ps_{T,j} - K\}$ e para opção de venda: $P_{T,j} = \text{Máximo} \{0, K - Ps_{T,j}\}$

Com isso, pode-se trazer o valor da opção em seu vencimento T até o instante 0, aplicando em cada nó a equação:

$$C_{i,j} = \frac{1}{2} d_{i,j} [C_{i+1,j+1} + C_{i+1,j-1}] \quad (3.22)$$

4. IMPLEMENTAÇÃO

Os modelos de Vasicek e Black-Derman-Toy foram implementados para o apreamento de uma opção sobre taxa de juro, conforme especificação do ofício circular do dia 29 de agosto de 2003 da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F).

Ao constituir um instrumento cujo ativo-objeto é um contrato futuro de taxas de juro, a BM&F lançou um produto com características semelhantes à de uma opção sobre zero-coupon bond existente em outros mercados. Essa semelhança é devida ao fato de que o mercado brasileiro negocia os futuros de taxas de juro sobre DI de forma análoga ao que no mercado norte-americano são chamados títulos sem risco de default e sem pagamentos de cupons, com a diferença que nos contratos futuros não há desembolso de caixa, apenas pagamentos de ajuste.

O ofício com o lançamento dos contratos de opção, cujas características são reproduzidas a seguir, autorizou a operação desse instrumento a partir do dia 19 de setembro de 2003.

4.1 Contrato de Opção Européia sobre Futuro de Depósitos Financeiros de 1 Dia

A seguir, estão descritas as principais características das opções européias de compra e venda sobre o futuro de DI.

4.1.1 Ativo-Objeto

Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI1).

4.1.2 Tipo de Opção

A opção é europeia, ou seja, serão exercidas pelos seus titulares apenas na data de vencimento do contrato.

4.1.3 Séries de Vencimento do Ativo-Objeto

As opções serão de três tipos, que se referem ao prazo entre o vencimento da opção e o vencimento do ativo-objeto, conforme descrito a seguir:

- Tipo 1: O ativo-objeto terá vencimento três meses após o vencimento da opção;
- Tipo 2: O ativo-objeto terá vencimento seis meses após o vencimento da opção;
- Tipo 3: O ativo-objeto terá vencimento um ano após o vencimento da opção.

4.1.4 Exercício

Opção de Compra: O exercício de cada contrato de opção de compra por seu titular implica no direito de compra da taxa de um contrato de DI-Futuro do lançador, transformado em posição vendedora em termos de preço desse contrato pela seguinte equação:

$$PU_K = \frac{100.000}{(1 + i_K)^{\frac{u}{252}}} \quad (4.1)$$

Onde:

PU_K : Preço de liquidação da operação;

i_K : taxa de juros de exercício da opção, expressa em percentual ao ano, base 252 dias úteis;

u: número de dias úteis entre o data de exercício e a data de vencimento do ativo-objeto.

Opções de Venda: O exercício de cada contrato de opção de venda por seu titular implica no direito de venda, em taxa, de um DI-Futuro ao lançador, transformado em posição compradora em PU, conforme equação (4.1) anterior.

Com isso, o titular (lançador) de uma opção de compra (venda) sobre DI-Futuro está supondo um aumento nas taxas de juros entre o período de vencimento da opção e do ativo-objeto, enquanto o titular (lançador) de uma opção de venda (compra) faz a suposição contrária.

O contrato da opção, na forma definida pela Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F), é especificado com um preço de exercício na forma de taxa ao ano. Entretanto, tanto o modelo de Black, como a expressão de Jamshidian para o modelo de Vasicek e o algoritmo de apreçamento do modelo de Black-Derman-Toy, supõe como parâmetro de entrada para o preço de exercício, o preço de um zero-coupon bond e não de uma taxa. Portanto, a seguinte relação de transformação de taxa de exercício para preço de exercício deve ser utilizada:

$$K = \frac{100.000}{(1 + r_K)^{\frac{s-T}{252}}} \quad (4.2)$$

onde:

K: Preço de exercício;

r_K : Preço de exercício na forma como definido no contrato da opção na BM&F (% a.a. 252);

s: Número de dias úteis para o vencimento do ativo-objeto;

T: Número de dias úteis para o vencimento da opção.

Como exemplo, considere no dia 06-Nov-20003, uma opção de compra de taxa do tipo I (conforme definido pelo contrato negociado na Bolsa de Mercadorias & Futuros) com exercício r_K igual a 18% a.a. e vencimento em 02-Jan-2004. Como a opção é do tipo I, o

seu ativo-objeto será o contrato de DI-Futuro com vencimento 3 meses após o vencimento da opção, isto é, o ativo-objeto será o contrato de DI-Futuro que vence em 01-Abr-2004. Com isso, o preço de exercício equivalente à taxa de exercício será:

$$K = \frac{100.000}{(1 + 0,18)^{\frac{62}{252}}} = 96.009,61$$

Uma outra consideração diz respeito a *payoff* das opções: uma opção de compra sobre taxa terá *payoff* análogo ao de uma opção de venda sobre preço ou, de forma análoga, uma opção de venda sobre taxa terá *payoff* análogo ao de uma opção de compra sobre preço. Com isso, uma opção de compra na forma como definida no contrato deverá ser apreçada como uma opção de venda no modelo de Black ou na expressão analítica de Jamshidian (1989).

Portanto, a relação de equivalência entre *payoffs* será dada por:

- Opção de Compra sobre Taxa \Leftrightarrow Opção de Venda sobre Preço

$$\text{Valor da Opção} = \text{Máximo}\{0, r_T - r_K\} \Leftrightarrow \text{Máximo}\{0, K - P(T, s)\}$$

- Opção de Venda sobre Taxa \Leftrightarrow Opção de Compra sobre Preço

$$\text{Valor da Opção} = \text{Máximo}\{0, r_K - r_T\} \Leftrightarrow \text{Máximo}\{0, P(T, s) - K\}$$

A aproximação linear para o *payoff* da opção pode ser representada graficamente por:

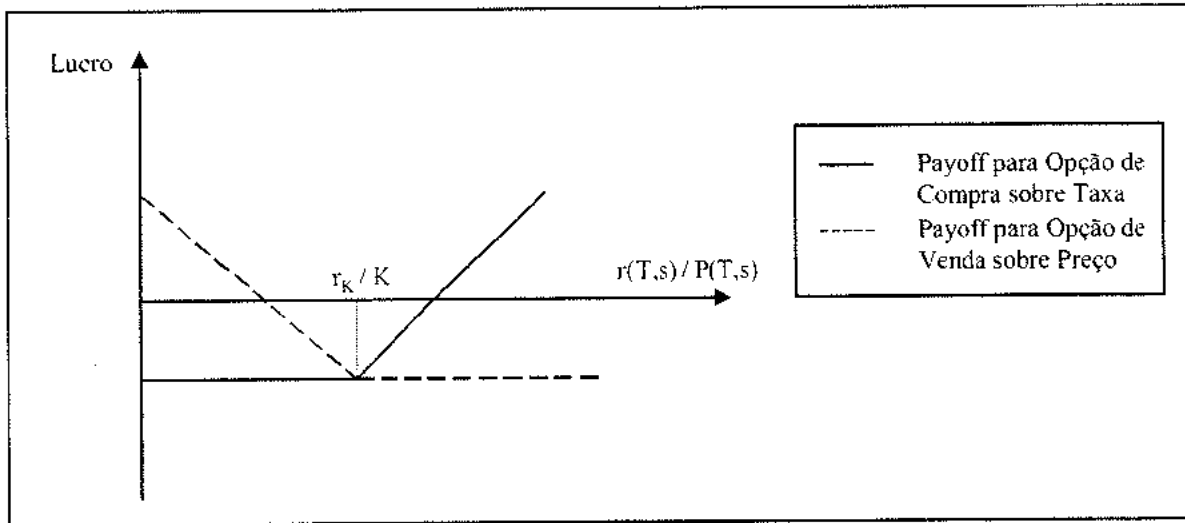


Figura 4.1 – Comparação entre os *payoffs* de uma posição comprada em opção de compra sobre taxa e uma opção de venda sobre preço

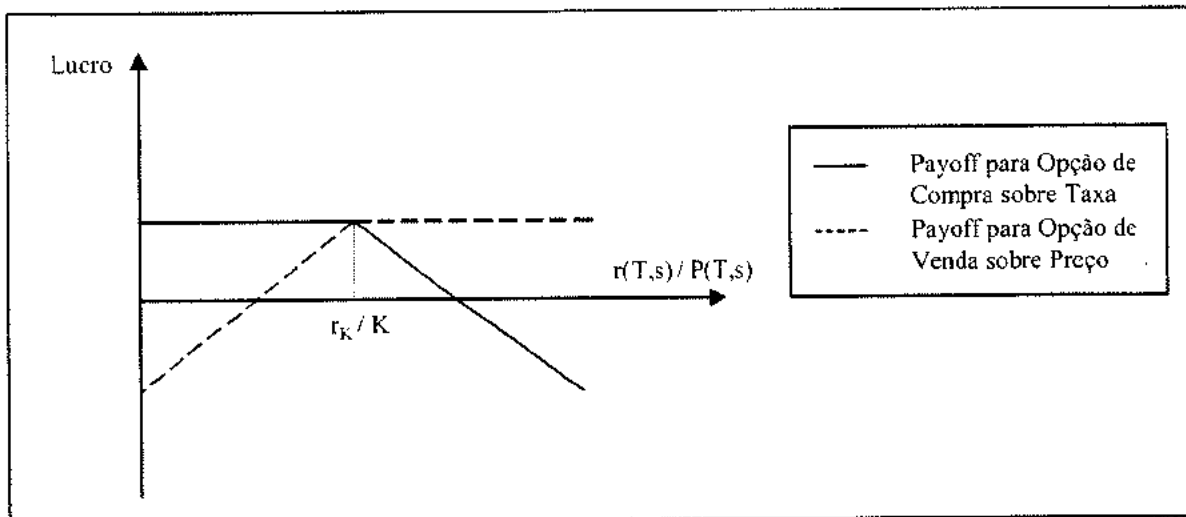


Figura 4.2 – Comparação entre os *payoffs* de uma posição vendida em opção de compra sobre taxa e uma opção de venda sobre preço

4.2 Descrição dos Dados

4.2.1 Estrutura a Termo das Taxas de Juro

Os dados utilizados para a construção da estrutura a termo das taxas de juro consistiram da taxa diária média do CDI-Cetip e dos preços de ajuste dos contratos de DI Futuro da Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F).

Dois períodos foram considerados:

- Período de 06-Nov-2003 a 30-Jan-2004 para comparação dos preços de opções calculados através dos modelos de Vasicek e Black-Derman-Toy e o mercado através do modelo de Black. Apesar da opção ter início de negócios em 19-Set-2003, o mercado começou a apresentar alguma liquidez na data considerada.
- Período de 02-Jan-2003 a 02-Jan-2004 para avaliação do apreçamento por Delta-Hedge.

4.2.2 Preços de Mercado das Opções de Taxas de Juro

Os preços de mercado das opções de taxa de juro foram obtidos a partir da coleta das suas volatilidades no período de 06 de novembro de 2003 a 30 de janeiro de 2004, a partir dos Calls diários da corretora Liquidez. Os calls de uma corretora são organizados de forma a concentrar a negociação de uma opção em determinado horário, aumentando a sua liquidez. A partir da informação de volatilidade, os preços foram calculados pelo modelo de Black utilizando-se a expressão (3.1) e (3.2).

4.3 Tratamento dos Dados

4.3.1 Interpolação da Estrutura a Termo de Taxas de Juro

Para a construção da estrutura temporal na convenção taxa exponencial ao ano / 252 dias úteis, utiliza-se o CDI Cetip para 1 dia e, para os prazos posteriores, os vencimentos dos contratos de DI-Futuro a partir das seguintes equações:

$$R(1) = \text{CDI Cetip} \quad (4.3)$$

Para os pontos subseqüentes, inicialmente é achado um fator de desconto a partir dos preços de ajuste⁵ disponíveis para os contratos de DI Futuro:

$$P(i) = \left(\frac{100.000}{DI_i} \right) \quad (4.4)$$

onde i é o número de dias úteis para o vencimento do contrato futuro de DI

A interpolação é feita através do método exponencial sobre os fatores de desconto da equação anterior, onde:

$$R(t) = \left[P(i) \left(\frac{P(j)}{P(i)} \right)^{\left(\frac{t-i}{j-i} \right)} \right]^{\frac{252}{t}} - 1 \quad i < t < j \quad (4.5)$$

onde $P(i)$ e $P(j)$ são os contratos futuros de DI adjacentes e i e j referem-se ao prazo para vencimento desses contratos em dias úteis.

⁵ Os preços de ajuste são uma média ponderada dos preços e volumes próximos ao fechamento do dia.

4.3.2 Volatilidades

Para o modelo de Black-Derman-Toy é necessário o cálculo da estrutura a termo de volatilidades para obtenção da árvore de taxas de juro. O procedimento utilizado foi de cálculo de volatilidade histórica através do conceito de alisamento exponencial (EWMA – Exponential Weighted Moving Average), em que pesos maiores são dados aos retornos mais recentes.

Sejam:

λ : Fator de alisamento exponencial

r_t : Retorno do instrumento financeiro observado no instante t

σ_t : Volatilidade do instrumento financeiro no instante t

Neste caso, a volatilidade será estimada por:

$$\sigma_t^2 = \lambda \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot (r_t - \bar{r}_t)^2 = (1 - \lambda) \cdot \sum_{i=-\infty}^t [\lambda^{-i} \cdot (r_i - \bar{r}_i)^2] \quad (4.6)$$

As volatilidades foram calculadas com o fator λ recomendado pelo Banco JP Morgan de 0,94 para um horizonte de tempo de 1 dia. Utilizou-se ainda uma janela de 101 dias úteis que geram 100 dados de retornos.

Um ponto importante é sobre qual parâmetro de retorno devem ser calculadas as volatilidades. Usualmente a volatilidade é calculada sobre os retornos dos preços dos ativos. Entretanto, para o cálculo da volatilidade no modelo de Black-Derman-Toy, a volatilidade é calculada sobre os retornos das taxas de juro e, não como o convencional – sobre os preços unitários. A lógica do argumento de “retorno da taxa de juro”, conforme descrita em Silva (1997), fica clara ao se comparar a um outro modelo lognormal – o de Black e Scholes. Da mesma maneira que no modelo de Black e Scholes modela-se a taxa de crescimento do preço da ação, ou seja, seu retorno, no

modelo de Black-Derman-Toy, modela-se a taxa de crescimento das taxas de juro, isto é, o equivalente ao retorno das taxas de juro.

Apesar da utilização no modelo de Black-Derman-Toy da volatilidade de taxa, o parâmetro de entrada na equação de Black será o de volatilidade de preço.

4.3.3 *Moneyness*

O *moneyness* será umas das características utilizadas na avaliação dos preços de opções por permitir a análise do efeito de smile de volatilidades e será calculado como:

$$\text{Moneyness} = \frac{r(T,s)}{r_K} \quad (4.7)$$

onde:

$r(T,s)$ é taxa a termo entre o vencimento da opção (T) e de seu ativo-objeto (s)

r_K é a taxa de exercício da opção

As opções dentro do dinheiro são aquelas que proporcionam lucro ao seu comprador, as opções no dinheiro proporcionariam fluxo nulo e as opções fora do dinheiro prejuízo se exercidas na data de análise. O critério adotado nesse trabalho é de *moneyness* inferior a 0,98 para opções fora do dinheiro, entre 0,98 e 1,02 para opções no dinheiro e superior a 1,02 para opções dentro do dinheiro.

5. RESULTADOS

5.1 Modelo de Vasicek

Para estimação do preço de uma opção europeia através do modelo de Vasicek, é necessário inicialmente estimar os parâmetros de velocidade de reversão à média (α), nível da taxa de juro para o longo prazo (θ) e volatilidade da taxa instantânea de juro (σ).

Neto (1999), em estudo recente sobre modelos de taxa de juro, propõe duas abordagens: a primeira chamada de método endógeno, em que o próprio modelo é utilizado para a construção de uma função de log-verossimilhança para a estimação dos parâmetros; e uma segunda abordagem chamada de método exógeno, em que a volatilidade da taxa instantânea de juro é estimada historicamente e utilizada na determinação dos outros dois parâmetros.

O método utilizado nesse estudo foi o classificado como método endógeno, de forma a não depender de modelos econométricos para a estimação da volatilidade.

5.1.1 Estimadores de Máxima Verossimilhança

Reescrevendo a equação (2.9):

$$dr(t) = (b - a \cdot r(t))dt + \gamma dW_t^Q \quad (5.1)$$

Através da integração da equação acima, temos para dois instantes quaisquer s e t ($t > s$):

$$r(t) = r(s) \cdot e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \gamma \cdot \int_s^t e^{-a(t-s)} dW_u \quad (5.2)$$

Conforme observado anteriormente, a variável $r(t)$ condicional em F_s é normalmente distribuída com média $r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)})$ e variância $\frac{\gamma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})$.

As seguintes funções dos parâmetros podem ser derivadas: $\theta = b/a$, $\alpha = e^{-a\delta}$ e $V^2 = \frac{\gamma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta})$, onde δ significa o intervalo de tempo para os dados observados r_0, r_1, \dots, r_n de r (usualmente $\delta = 1$ dia).

Os estimadores de máxima verossimilhança para α , θ e V^2 são derivados como:

$$\hat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^n r_i \cdot r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \cdot \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n r_{i-1} \right)^2} \quad (5.3)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} \cdot r_{i-1}]}{n \cdot (1 - \hat{\alpha})} \quad (5.4)$$

$$\hat{V}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} \cdot r_{i-1} - \hat{\theta} \cdot (1 - \hat{\alpha})]^2}{n} \quad (5.5)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{V}^2} \quad (5.6)$$

5.1.2 Parâmetros $\hat{\alpha}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\sigma}$

A partir das equações (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) e do histórico de estrutura temporal de taxas de juro conforme definido no item (4.2.1), os parâmetros $\hat{\alpha}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\sigma}$ foram obtidos para o mercado brasileiro no período de 02-Jan-2002 a 30-Jan-2004 e os resultados são apresentados a seguir⁶:

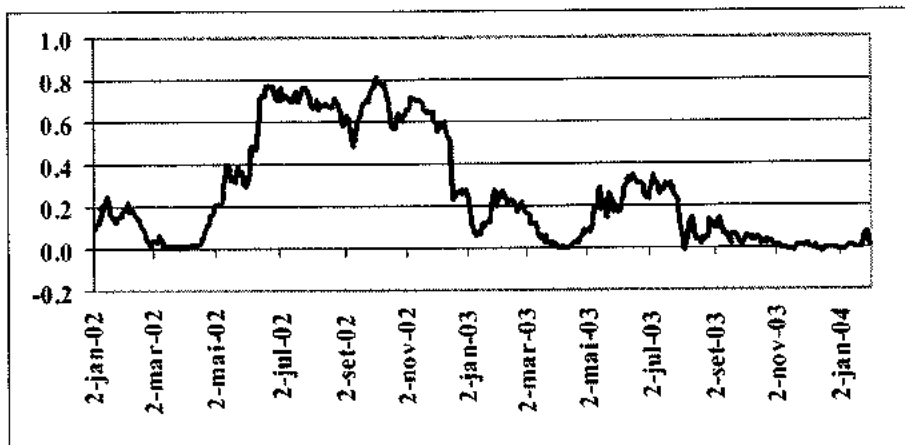


Figura 5.1 – Parâmetro de reversão à média $\hat{\alpha}$
no período de 02-Jan-2002 a 30-Jan-2004

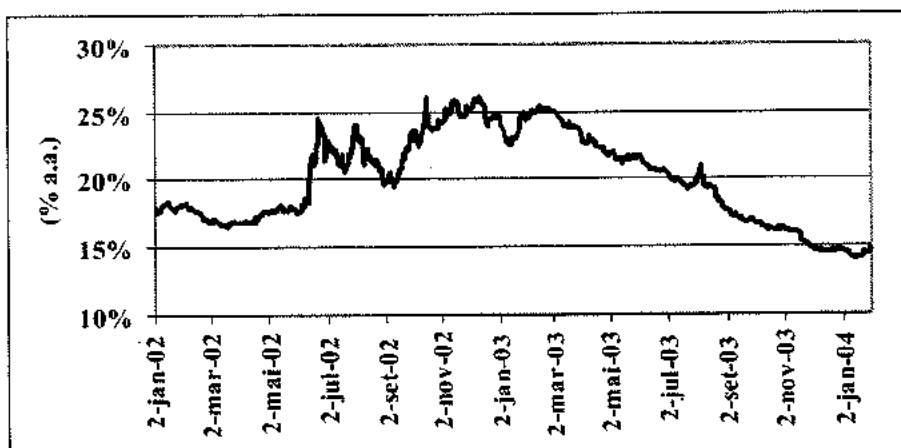


Figura 5.2 – Parâmetro de nível da taxa de juro para o longo prazo $\hat{\theta}$
no período de 02-Jan-2002 a 30-Jan-2004

⁶ A tabela com valores dos parâmetros está reproduzida no Anexo IV.

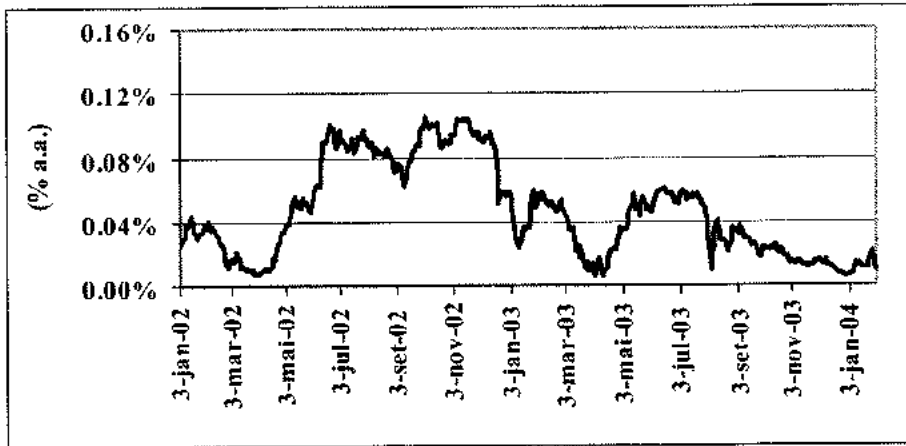


Figura 5.3 – Parâmetro volatilidade da taxa de juro de curto prazo $\hat{\sigma}$ no período de 02-Jan-2002 a 30-Jan-2004

A evolução histórica dos parâmetros $\hat{\alpha}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\sigma}$ mostrou-se coerente com a situação econômica brasileira para esse período, com um primeiro período de grande turbulência verificado no 2º semestre de 2003 com as eleições presidenciais, que se refletem nos altos níveis de volatilidade. Em um segundo período, no início de 2004, nota-se o início do decréscimo da volatilidade e, também, dos níveis de taxa de longo prazo e velocidade de reversão à média que se mostram consistentes com o início do processo de redução de juros pelo Banco Central.

Uma comparação importante realizada a partir da estimação dos parâmetros é se a estrutura a termo de taxas de juro decorrente reproduz a estrutura a termo observada. Com isso, para cada dia a estrutura a termo estimada pelo modelo de Vasicek deveria reproduzir -ou ser uma boa aproximação - da estrutura a termo observada através da seguinte equação:

$$R(r, T, \hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = -\frac{A(T, \hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\sigma})}{T} + \frac{B(T, \hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\sigma})}{T} \cdot r \quad (5.7)$$

Onde:

$$A(t, T, \hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = -\frac{\exp[2\hat{\alpha}t - 2\hat{\alpha}T] \cdot \hat{\sigma}^2}{4\hat{\alpha}^3} - \frac{\exp[\hat{\alpha}t - \hat{\alpha}T] \cdot [\hat{\alpha}^2 \cdot \hat{\theta} - \hat{\sigma}^2]}{\hat{\alpha}^3} + \frac{t \cdot (2\hat{\alpha}^2 \cdot \hat{\theta} - \hat{\sigma}^2)}{2\hat{\alpha}^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{4\hat{\theta}}{\hat{\alpha}} - 4\hat{\theta}T - \frac{3\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}^3} + \frac{2T\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}^2} \right] \quad (5.8)$$

$$B(t, T, \hat{\alpha}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{\exp[\hat{\alpha}t - \hat{\alpha}T]}{\hat{\alpha}} \quad (5.9)$$

t: instante inicial (0);

T: prazo observado;

r: nível da taxa instantânea de juro observada em T;

$\hat{\alpha}$: parâmetro de reversão à média estimado para a data considerada;

$\hat{\theta}$: nível da taxa de juro para o longo prazo estimado para a data considerada;

$\hat{\sigma}$: volatilidade da taxa instantânea de juro estimado para a data considerada.

A seguir são mostradas graficamente comparações entre a estrutura a termo de taxas de juro obtida através modelo de Vasicek em relação à estrutura a termo observada para os dias 02/01/2003, 30/10/2003 e 09/12/2003 que possuem formatos específicos da curva:

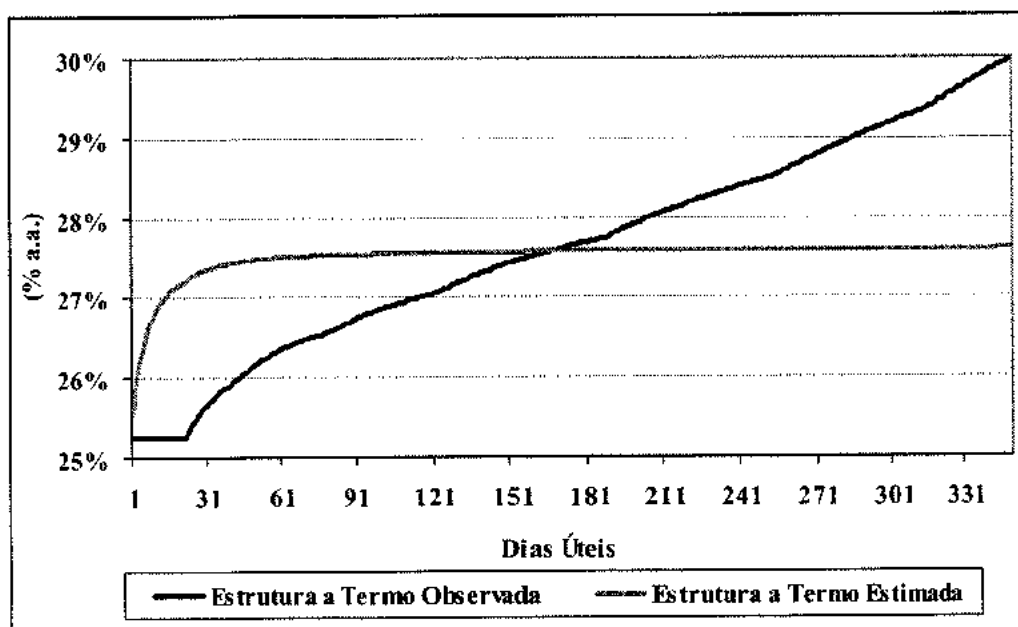


Figura 5.4 – Estrutura a Termo de Taxas de Juros Observada vs. Estimada pelo modelo de Vasicek (02-Jan-2003)

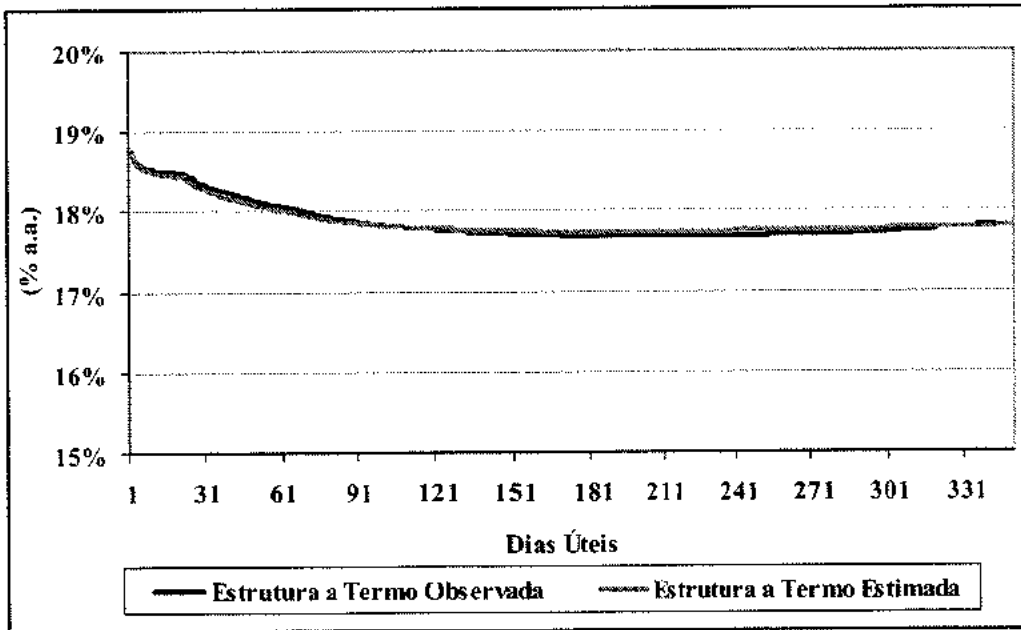


Figura 5.5 – Estrutura a Termo de Taxas de Juros Observada vs. Estimada pelo modelo de Vasicek (30-Out-2003)

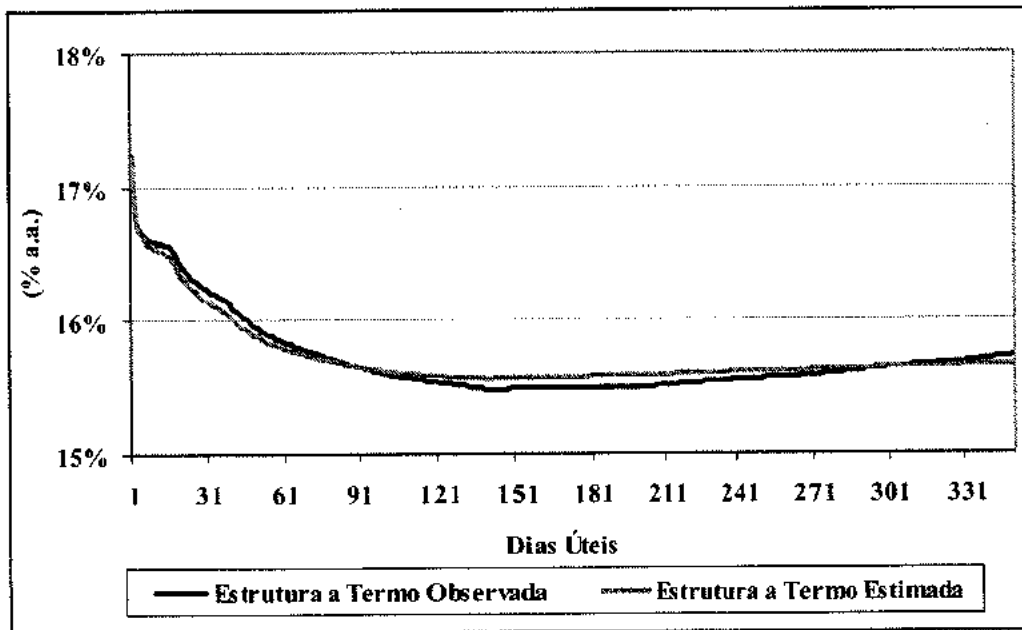


Figura 5.6 – Estrutura a Termo de Taxas de Juros Observada vs. Estimada pelo modelo de Vasicek (09-Dez-2003)

Os dias 02-Jan-2003, 30-Out-2003 e 09-Dez-2003 foram escolhidos devido ao formato específico de sua estrutura temporal de taxas de juro, respectivamente, positivamente inclinada, “flat” e negativamente inclinada. Os gráficos mostram que há uma melhor

aderência do modelo a estruturas “flat” e negativamente inclinadas, não reproduzindo muito bem estruturas a termo positivamente inclinadas.

Ainda que não seja visualmente observado no gráfico para o parâmetro de velocidade de reversão à média $\hat{\alpha}$, uma outra consideração importante é a de que a estimação apresentou valores negativos (ainda que próximos a zero) para esse parâmetro e, como consequência, estrutura temporais de taxas de juro com valores explosivos ou negativos. Como o modelo de Vasicek prevê parâmetros não-negativos, esses valores foram tomados como próximos a zero (0,00001). Valores inferiores a zero foram encontrados em 27 dos 525 dias, ou seja, em aproximadamente 5% dos dias analisados.

A seguir, estão alguns exemplos de dias e estrutura de taxas decorrentes da estimação negativa para o parâmetro $\hat{\alpha}$ e da sua aproximação por zero:

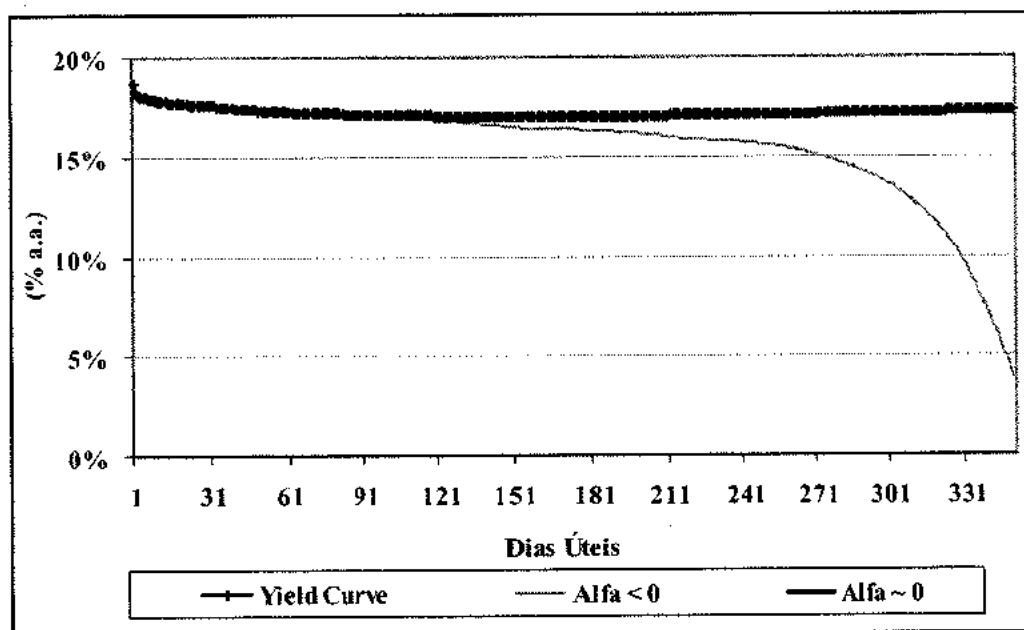


Figura 5.7 – Comparação entre estruturas a termo de taxas de juro para o dia 19-Nov-2003 ($\hat{\alpha} = -0,01630$)

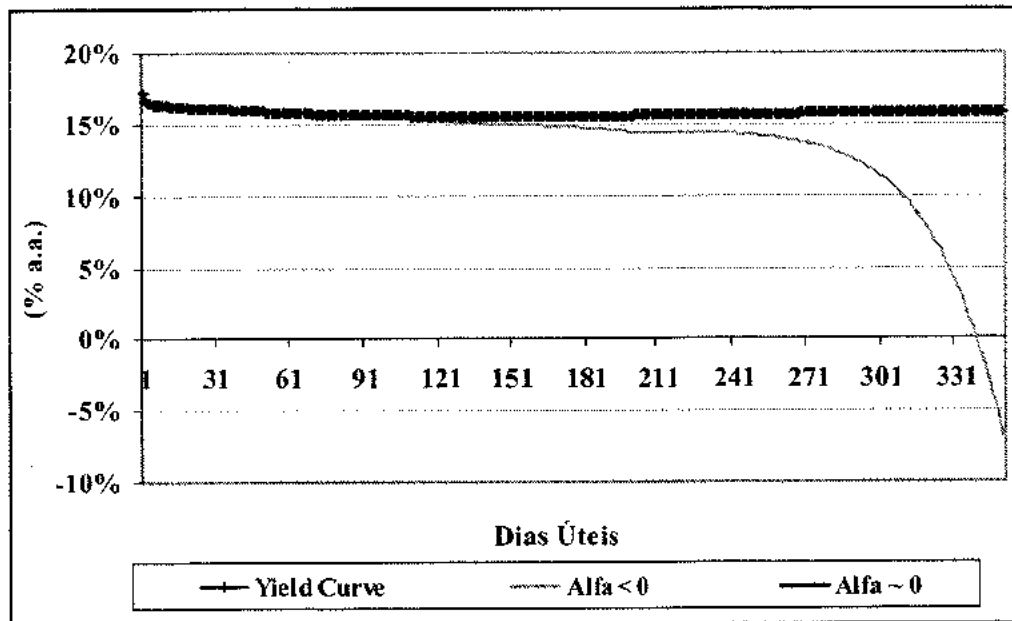


Figura 5.8 – Comparação entre estruturas a termo de taxas de juro para o dia 16-Dez-2003 ($\hat{\alpha} = -0,01745$)

Os gráficos anteriores mostram que a aproximação de estimadores de velocidade de reversão à média negativos por valores próximos a zero, torna a estrutura a termo estimada através do modelo de Vasicek bastante próxima da estrutura a termo realizada.

5.1.3 Preço de Opções Europeias

A partir da estimação dos parâmetros $\hat{\alpha}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\sigma}$ e das estruturas a termos de taxas de juros decorrentes, os preços das opções europeias de compra e venda podem ser calculados analiticamente através das expressões obtidas em (3.18), (3.19) e (3.20), onde o preço no instante t , de uma opção europeia com strike K , vencimento em T , sobre um título sem cupons com vencimento em s , é:

$$O(t, T, s, K) = \omega \left[P(t, s) \cdot \Phi(\omega h) - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi(\omega(h - \sigma_p)) \right] \quad (5.10)$$

onde $\omega = 1$ para opção de compra, $\omega = -1$ para opção de venda, $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão e :

$$\sigma_P = \frac{\sigma}{\alpha} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}} \cdot (1 - e^{-\alpha(s-T)}) \quad (5.11)$$

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \frac{P(t,s)}{P(t,T)K} + \frac{\sigma_P}{2} \quad (5.12)$$

Entretanto, a expressão derivada por Jamshidian (1989) para opções europeias foi formulada para um zero-coupon bond e, de modo análogo, ao modelo de Black, é necessário que as características da opção na forma definida pelo contrato em (4.1) sejam readequadas aos inputs do modelo.

Aplicando as relações estabelecidas anteriormente para as opções negociadas a partir de 06-Nov-2003 até 30-Jan-2004, foram obtidos os preços para opções de compra e venda.

A tabela a seguir sintetiza os dados obtidos para a opção de compra com taxa de exercício de 16% a.a., vencimento em 02-Jan-2004 e tipo I, ou seja, com vencimento do ativo-objeto em 01-Abr-2004, comparando os preços obtidos pelo modelo de Vasicek com os preços negociados no mercado:

Data	Preço		Volatilidade (% a.a.)	
	Mercado	Vasicek	Mercado	Vasicek
06-nov-03	270.46	336.47	0.43%	0.30%
07-nov-03	253.43	321.51	0.43%	0.30%
10-nov-03	233.86	304.28	0.50%	0.30%
11-nov-03	255.88	317.20	0.57%	0.36%
12-nov-03	236.39	308.09	0.57%	0.33%
13-nov-03	246.07	305.20	0.57%	0.34%
14-nov-03	237.53	295.39	0.57%	0.33%
17-nov-03	224.60	280.51	0.57%	0.33%
18-nov-03	219.47	274.10	0.57%	0.32%
19-nov-03	191.09	243.45	0.57%	0.30%
20-nov-03	102.77	133.44	0.59%	0.20%
21-nov-03	86.06	119.87	0.57%	0.19%
24-nov-03	85.88	111.03	0.64%	0.19%
25-nov-03	69.54	105.09	0.54%	0.18%
26-nov-03	58.11	92.06	0.55%	0.18%
27-nov-03	49.57	79.81	0.55%	0.17%
28-nov-03	50.86	77.56	0.55%	0.17%
01-dez-03	39.75	65.47	0.49%	0.15%
02-dez-03	41.07	56.07	0.51%	0.14%
03-dez-03	38.13	64.84	0.57%	0.18%
04-dez-03	26.81	72.62	0.52%	0.23%
05-dez-03	25.07	78.30	0.48%	0.24%
08-dez-03	16.72	66.83	0.49%	0.24%
09-dez-03	17.91	48.52	0.54%	0.20%
10-dez-03	23.88	58.65	0.54%	0.23%
11-dez-03	7.14	52.59	0.36%	0.23%
12-dez-03	14.47	46.51	0.48%	0.21%
15-dez-03	21.19	38.76	0.56%	2.50%
16-dez-03	12.01	32.34	0.47%	2.33%
17-dez-03	10.64	25.31	0.45%	2.04%
18-dez-03	14.00	19.06	0.50%	1.66%
19-dez-03	14.65	19.77	0.46%	1.52%
22-dez-03	15.38	16.89	0.46%	1.26%
23-dez-03	12.72	14.40	0.46%	1.19%
26-dez-03	12.17	13.01	0.46%	0.87%
29-dez-03	14.35	8.80	0.52%	0.72%
30-dez-03	11.72	5.74	0.52%	0.63%

Tabela 5.1 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Vasicek vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004

Observando graficamente a evolução dos preços:

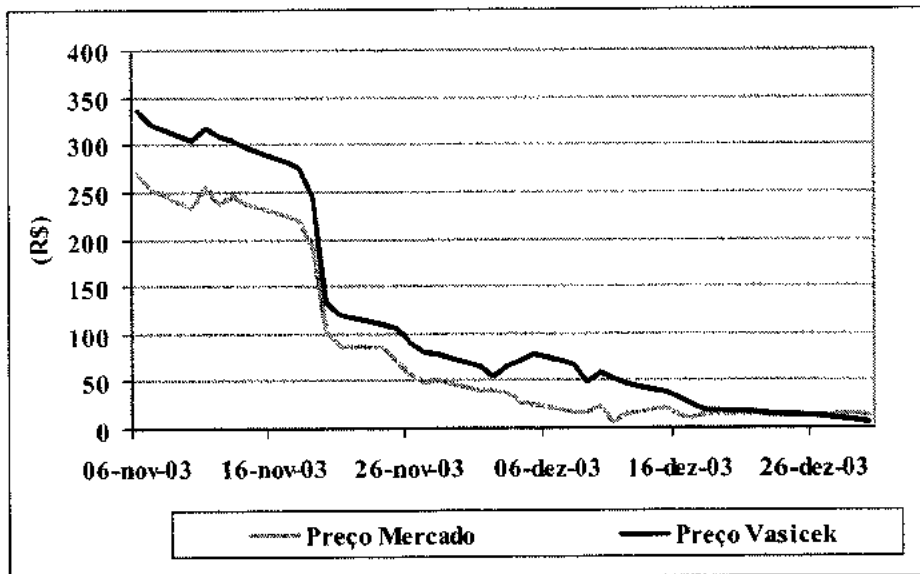


Figura 5.9 – Gráfico de Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Vasicek vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004

Os preços obtidos no modelo de Vasicek estiveram quase todo o período acima dos preços de mercado obtidos através do modelo de Black. Entretanto, para o período total analisado (06-Nov a 31-Jan), os preços obtidos no modelo de Vasicek estiveram abaixo dos preços de mercado (66% da amostra), sendo a maior frequência nas opções de venda (72% contra 60% nas opções de compra).

A tabela seguinte apresenta os resultados encontrados, comparando-se as diferenças entre os modelos de Vasicek e de Black (mercado):

	Diferença em % (*)		
	Abaixo de -10%	Entre -10% e +10%	Acima de +10%
Opção de Compra	53.17%	13.33%	33.50%
Opção de Venda	49.27%	34.69%	16.03%
Tipo 1	55.00%	20.62%	24.38%
Tipo 2	51.02%	26.75%	22.23%
Tipo 3	37.64%	28.73%	33.63%
<i>Vencimento da Opção</i>			
até 63 du	41.87%	21.83%	36.29%
entre 63 du e 126 du	53.87%	22.30%	23.83%
acima 126 du	60.79%	27.26%	11.96%
<i>Moneyness</i>			
< 0.98	55.84%	28.46%	15.69%
entre 0.98 e 1.02	41.90%	13.02%	45.08%
> 1.02	46.12%	19.65%	34.22%

(*) Diferença calculada como $\frac{P_{Vasicek} - P_{Black}}{P_{Black}}$

Tabela 5.2 – Comparativo entre os preços obtidos no modelo de Vasicek vs. Mercado

A tabela 5.2 mostra que a maior parte da amostra apresentou diferenças negativas em todas as características analisadas, ou seja, o modelo de Vasicek tende a produzir preços inferiores ao do mercado independente do tipo de opção (compra ou venda), vencimento do ativo-objeto (tipos I, II ou III), vencimento da opção ou seu *moneyness*.

5.2 Modelo de Black-Derman-Toy

No modelo de Black-Derman-Toy, as árvores binomiais para as taxas de juros e fatores de desconto foram geradas a partir dos algoritmos especificados no item (2.5.3.3). Conforme detalhado, ambos os modelos têm como parâmetro de entrada a estrutura a termo de taxas de juros, sendo que no modelo com volatilidade constante há uma única volatilidade estimada e no modelo com volatilidade variável no tempo, a entrada no modelo é da estrutura a termo de volatilidades estimada para a data em análise.

Tomando-se novamente o dia 06-Nov-2003 para exemplificação, as estruturas a termo de taxas de juro e de volatilidades utilizadas podem ser graficamente visualizadas:

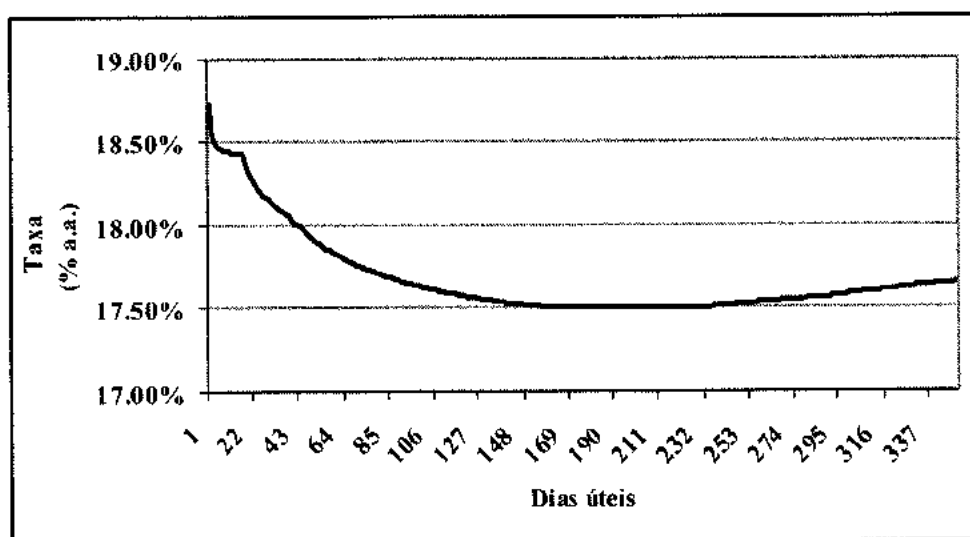


Figura 5.10 – Estrutura a Termo das Taxas de Juro para o dia 06-Nov-2003

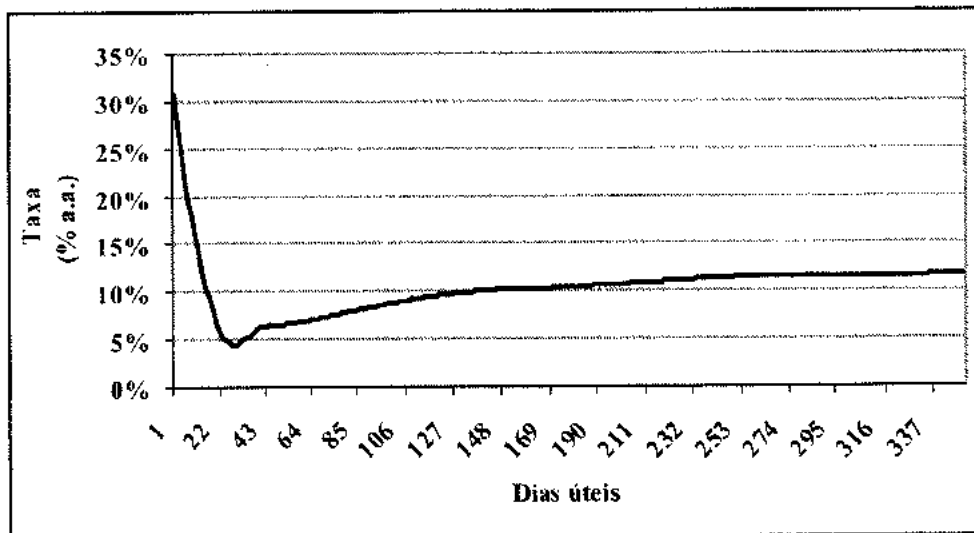


Figura 5.11 – Estrutura a Termo das Volatilidades para o dia 06-Nov-2003

No modelo de volatilidade constante, o parâmetro para a volatilidade será o valor estimado para o número de dias úteis para o vencimento do ativo-objeto. Como, por exemplo, no dia 06-Nov-2003, a volatilidade estimada para uma opção de compra sobre ativo-objeto com vencimento em 01-Abr-2004, seria o valor estimado para 102 dias úteis, ou seja, 8,88% a.a.

5.2.1 Estrutura a Termo das Taxas de Juro

Apenas para exemplificação, a seguir estão os resultados das árvores binomiais para 10 passos para o dia 06-Nov-2003:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									17.50%
								17.64%	17.70%
						17.84%	17.86%	17.84%	17.90%
			18.06%	18.06%	18.06%	18.04%	18.06%	18.04%	18.10%
	18.30%	18.24%	18.27%	18.24%	18.27%	18.24%	18.27%	18.24%	18.30%
18.73%	18.51%	18.45%	18.47%	18.45%	18.47%	18.45%	18.47%	18.45%	18.51%
		18.65%	18.68%	18.65%	18.68%	18.65%	18.68%	18.65%	18.72%
			18.86%	18.86%	18.86%	18.86%	18.89%	18.86%	18.93%
				18.89%	18.89%	19.08%	18.89%	19.08%	18.93%
							19.10%	19.08%	19.14%
								19.29%	19.14%
									19.36%

Figura 5.12 – Árvore de taxas de juro no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade constante até 10 dias úteis em 06-Nov-2003

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									0.999333
								0.999332	0.999332
						0.999331	0.999332	0.999332	0.999332
				0.999330	0.999333	0.999330	0.999332	0.999331	0.999332
			0.999332	0.999332	0.999332	0.999331	0.999331	0.999331	0.999331
		0.999329	0.999329	0.999329	0.999329	0.999329	0.999330	0.999331	0.999330
0.999319	0.999330	0.999328	0.999331	0.999328	0.999331	0.999328	0.999329	0.999330	0.999330
	0.999329	0.999328	0.999331	0.999328	0.999331	0.999328	0.999329	0.999329	0.999329
		0.999328	0.999330	0.999328	0.999330	0.999328	0.999329	0.999329	0.999329
			0.999327	0.999327	0.999329	0.999327	0.999328	0.999328	0.999328
				0.999329	0.999329	0.999326	0.999327	0.999327	0.999327
							0.999327	0.999327	0.999327
								0.999327	0.999326

Figura 5.13 - Árvore de fatores de desconto no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade constante até 10 dias úteis em 06-Nov-2003

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									17.74%
								17.61%	17.89%
							17.52%	17.89%	18.38%
						17.46%	17.77%	18.63%	18.19%
			17.59%		17.52%	17.77%	18.25%	18.27%	18.34%
		17.60%	18.17%		17.95%	18.87%	18.28%	18.50%	18.49%
	16.62%	18.18%	18.64%		18.42%	18.48%	18.55%	18.61%	18.64%
	17.19%	18.78%	19.19%		18.87%	18.73%	18.85%	18.82%	18.80%
				19.35%	19.20%	19.67%	19.74%	19.32%	18.95%
					19.48%	19.45%	19.35%	19.24%	19.19%

Figura 5.14 – Árvore de taxas de juro no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade variável no tempo até 10 dias úteis em 06-Nov-2003.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									0.999352
								0.999356	0.999347
							0.999360	0.999350	0.999342
						0.999362	0.999351	0.999343	0.999337
				0.999360	0.999349	0.999340	0.999343	0.999336	0.999332
			0.999357	0.999345	0.999336	0.999330	0.999334	0.999330	0.999327
	0.999390	0.999337	0.999340	0.999330	0.999323	0.999319	0.999325	0.999323	0.999322
0.999319	0.999371	0.999317	0.999322	0.999314	0.999310	0.999308	0.999316	0.999316	0.999317
			0.999304	0.999298	0.999296	0.999296	0.999307	0.999309	0.999312
							0.999298	0.999302	0.999307

Figura 5.15 – Árvore de fatores de desconto no modelo de Black-Derman-Toy para volatilidade variável no tempo até 10 dias úteis em 06-Nov-2003.

O segundo passo/ dia das árvores de taxas de juro mostradas anteriormente mostra o efeito de se considerar o modelo de volatilidade constante e variando no tempo. Enquanto, para o modelo de volatilidade constante os valores apresentados são de 18,30% / 18,51% , no modelo com volatilidade variável no tempo, os valores são de 16,62% / 17,19%, refletindo a estrutura a termo de volatilidades que apresenta comportamento com rápido decrescimento até os primeiros 21 dias úteis, como pode ser visualizado na figura (5.11).

5.2.2 Preços das Opções Europeias

Conforme detalhado no item (2.5.3.3), dois algoritmos foram construídos para obtenção dos preços de opções europeias de taxas de juro. O primeiro construído em Visual Basic denominado por “modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante” ou, conforme denominação de Clewlow e Strickland (1998) de “modelo Black-Derman-Toy ajustado a estrutura a termo de taxas de juro”, tem como parâmetros de entrada a estrutura a termo de taxas de juro, o vencimento da opção em dias úteis, o vencimento do ativo-objeto também em dias úteis e a volatilidade do ativo-objeto para o vencimento da opção em análise.

O segundo algoritmo denominado por “modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável no tempo” ou novamente o que Clewlow e Strickland (1998) chamam de “modelo Black-Derman-Toy ajustado à estrutura a termo de taxas de juro e de volatilidades”, construído no software Mathematica, tem como entrada, além dos vencimentos e da estrutura a termo de taxas de juro especificados no modelo anterior, a estrutura a termo de volatilidades conforme procedimento de cálculo especificado no item (4.3.2).

Evidentemente, o segundo modelo apresenta maior complexidade matemática, que tornou necessário um software mais robusto para sua implementação. O algoritmo para volatilidade constante foi implementado em Visual Basic, que embora não disponha dos recursos existentes em qualquer um dos softwares matemáticos, apresenta uma grande vantagem de ordem prática que é a interface automática com planilhas eletrônicas.

Os passos para o cálculo das opções no modelo de Black-Derman-Toy são de forma resumida⁷:

- Leitura dos parâmetros de entrada conforme especificado nos parágrafos anteriores;

⁷ Os códigos estão disponíveis no Anexo III.

- Construção da árvore binomial no número de passos igual ao do vencimento do ativo-objeto, tanto para as taxas quanto para os preços dos títulos sem cupons – ou fatores de desconto. Essa construção está descrita em detalhes no item (2.5.3.3).
- Inicialização da condição no vencimento no ativo-objeto (s) em que os preços nos nós são fixados em \$ 1 e, através de procedimento recursivo e dos fatores de desconto obtidos pelo procedimento do parágrafo anterior, esses preços são calculados em cada estado j e trazidos até o vencimento da opção (T);
- Para opções européias, é apenas necessário verificar a sua condição de vencimento nos nós de instante T, ou seja, no vencimento da opção. Com isso, a condição $\text{Max}\{0, P(T,j) - K\}$ para opções de compra sobre títulos ou $\text{Max}\{0, K - P(T,j)\}$ para opções de venda sobre títulos é verificada e os valores dos prêmios calculados. Novamente, a mesma consideração em relação ao *payoff* no modelo de Vasicek deve ser feita: uma opção de compra sobre taxa terá *payoff* análogo ao de uma opção de venda sobre preço ou, de forma análoga, uma opção de venda sobre taxa terá *payoff* análogo ao de uma opção de compra sobre preço;
- Os prêmios no vencimento da opção são trazidos a valor presente, utilizando os mesmos fatores de desconto calculados previamente e seu valor no nó (0,0) é multiplicado pelo valor de principal de \$ 100.000.

De forma análoga ao modelo de Vasicek, os preços para as opções disponíveis no mercado foram gerados no período de 06-Nov-2003 a 30-Jan-2004 e alguns resultados serão apresentados a seguir.

A tabela a seguir mostra a evolução dos preços da opção de compra com taxa de exercício de 16% a.a., vencimento em 02-Jan-2004 e vencimento do ativo-objeto em 01-Abr-2004, comparando os preços obtidos pelos preços gerados no modelo de Black-Derman-Toy com os preços negociados no mercado:

Data	Preço			Volatilidade (% a.a.)		
	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte
06-nov-03	270.46	268.93	270.89	0.43%	8.88%	14.40%
07-nov-03	253.43	252.53	263.71	0.43%	12.46%	22.40%
10-nov-03	233.86	228.90	241.80	0.50%	12.69%	22.69%
11-nov-03	255.88	246.74	258.43	0.57%	12.81%	22.77%
12-nov-03	236.39	228.47	241.49	0.57%	13.06%	23.12%
13-nov-03	246.07	237.88	250.24	0.57%	13.29%	23.32%
14-nov-03	237.53	231.55	244.15	0.57%	13.45%	23.44%
17-nov-03	224.60	215.04	228.70	0.57%	13.71%	23.88%
18-nov-03	219.47	213.93	228.00	0.57%	13.96%	24.33%
19-nov-03	191.09	185.57	201.90	0.57%	14.24%	24.77%
20-nov-03	102.77	90.53	113.75	0.59%	14.46%	25.38%
21-nov-03	86.06	74.44	97.37	0.57%	14.55%	25.33%
24-nov-03	85.88	64.91	86.32	0.64%	14.62%	25.39%
25-nov-03	69.54	63.45	84.64	0.54%	14.79%	26.04%
26-nov-03	58.11	50.43	70.53	0.55%	14.95%	26.37%
27-nov-03	49.57	43.82	62.14	0.55%	15.23%	27.14%
28-nov-03	50.86	46.15	63.96	0.55%	15.11%	27.08%
01-dez-03	39.75	41.73	57.40	0.49%	15.15%	27.54%
02-dez-03	41.07	39.57	54.42	0.51%	14.86%	28.07%
03-dez-03	38.13	34.09	46.86	0.57%	15.01%	28.75%
04-dez-03	26.81	25.28	35.50	0.52%	15.14%	29.33%
05-dez-03	25.07	28.64	38.97	0.48%	15.35%	30.11%
08-dez-03	16.72	19.52	27.76	0.49%	15.44%	30.62%
09-dez-03	17.91	15.79	22.62	0.54%	15.64%	31.53%
10-dez-03	23.88	22.43	28.72	0.54%	15.85%	31.96%
11-dez-03	7.14	14.85	20.22	0.36%	14.49%	31.90%
12-dez-03	14.47	15.68	20.09	0.48%	14.67%	32.40%
15-dez-03	21.19	15.92	20.39	0.56%	14.76%	32.89%
16-dez-03	12.01	14.19	17.28	0.47%	14.92%	33.27%
17-dez-03	10.64	13.63	16.75	0.45%	15.02%	33.46%
18-dez-03	14.00	13.97	16.00	0.50%	15.12%	33.60%
19-dez-03	14.65	17.59	19.75	0.46%	15.30%	33.78%
22-dez-03	15.38	18.45	20.54	0.46%	15.25%	33.72%

Data	Preço			Volatilidade (% a.a.)		
	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte
23-dez-03	12.72	11.72	12.22	0.46%	13.04%	21.65%
26-dez-03	12.17	10.59	10.71	0.46%	11.80%	15.59%
29-dez-03	14.35	10.03	10.31	0.52%	11.70%	13.48%
30-dez-03	11.72	5.62	5.93	0.52%	11.99%	13.91%

Tabela 5.3 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs.

Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004

As volatilidades não são comparáveis pelo fato do mercado convencionar a volatilidade de preço, enquanto a volatilidade utilizada no modelo de Black-Derman-Toy é a volatilidade de taxa.

Graficamente, observa-se a proximidade entre os preços de mercado e os preços calculados pelo modelo de Black-Derman-Toy:

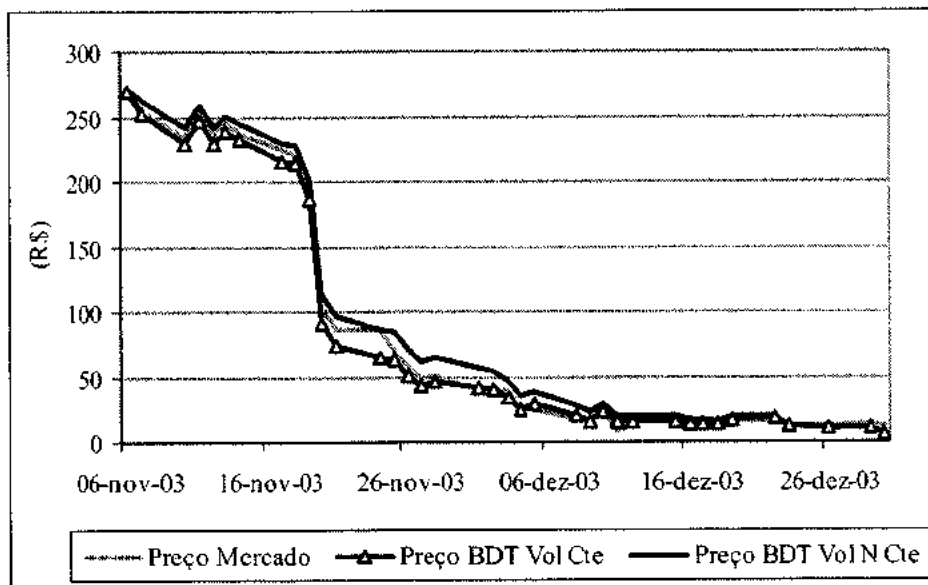


Figura 5.16 – Gráfico de Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004

Uma questão analisada foi a da sensibilidade dos preços das opções europeias ao parâmetro de volatilidade no modelo. Foram realizados dois testes: o primeiro em relação ao modelo com volatilidade constante, variando o nível da volatilidade de 0,5%

a.a. até 21% a.a. e o segundo teste com relação ao modelo com volatilidade variável no tempo com deslocamentos paralelos na estrutura a termo de volatilidades na ordem de -4%, -2%, +2%, +4%, +10% para a opção de compra com taxa de exercício 16% a.a., tipo I e vencimento 02-Jan-2004 para o dia 06 de novembro de 2003.

Os gráficos dos resultados alcançados são mostrados a seguir:

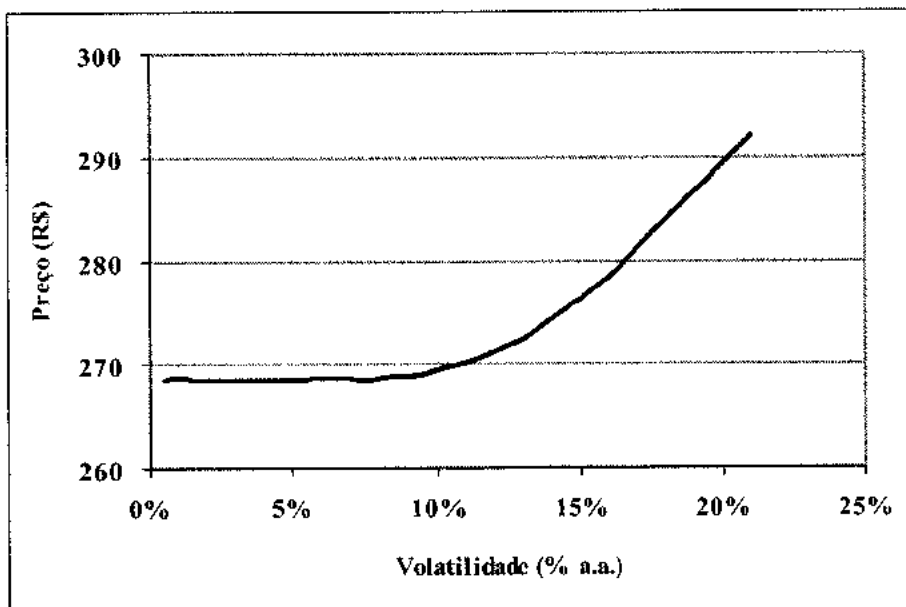


Figura 5.17 – Sensibilidade do Preço da Opção à variação da volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante)

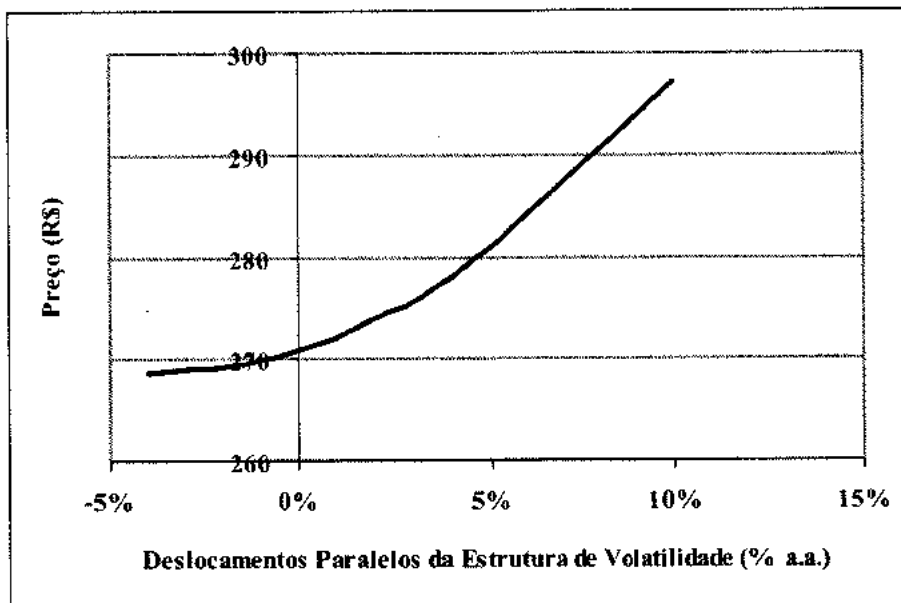


Figura 5.18 – Sensibilidade do Preço da Opção à deslocamentos paralelos da estrutura a termo de volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável no tempo)

Os gráficos anteriores mostram que o preço da opção analisada apresenta pouca sensibilidade à variação da volatilidade, tanto no modelo com volatilidade constante quanto no de volatilidade variável no tempo. Mesmo nos valores ou deslocamentos paralelos mais extremos analisados (21% no modelo de volatilidade constante e +10% de deslocamento paralelo no modelo de volatilidade variável), os preços gerados são da ordem de 8,6% e 9,7%, respectivamente, superiores aos preços originais.

A figura (5.17) mostra ainda que a opção mantém-se num patamar de preço constante até o nível de 10% de volatilidade, quando então passa a ter uma sensibilidade um pouco maior às variações no patamar de volatilidade. No segundo gráfico (figura (5.18)), o resultado é semelhante, uma vez que os deslocamentos paralelos foram realizados com a restrição de não gerar valores de volatilidade negativa na estrutura a termo.

Uma vez que tanto o prazo para o vencimento da opção, quanto o prazo para o vencimento do ativo-objeto eram relativamente curtos (40 du e 102 du respectivamente), procurou-se analisar também uma opção de vencimento mais longo para o mesmo dia de análise (06-Nov-2003).

A opção de compra com prazo de vencimento mais longo disponível no mercado tinha vencimento em 01-Out-2004 sobre ativo-objeto com vencimento em 03-Jan-2005 (Opção do Tipo I) com taxa de exercício em 18,5%.

A tabela seguinte apresenta o comparativo entre os modelos e o mercado:

Data	Preço			Volatilidade (% a.a.)		
	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte
06-nov-03	256.36	87.99	113.45	0.99%	11.49%	12.71%
07-nov-03	202.89	192.37	270.83	0.86%	21.72%	28.21%
10-nov-03	176.00	193.04	274.44	0.79%	22.25%	28.81%
11-nov-03	178.30	208.03	292.87	0.78%	22.79%	29.48%
12-nov-03	176.88	206.81	293.43	0.79%	23.35%	30.03%
13-nov-03	179.13	217.31	302.74	0.79%	23.48%	30.24%
14-nov-03	178.37	216.82	303.44	0.79%	24.02%	30.62%
17-nov-03	173.53	222.59	311.19	0.78%	24.60%	31.40%
18-nov-03	170.64	232.71	324.49	0.76%	25.21%	32.03%
19-nov-03	160.78	222.75	305.65	0.76%	25.39%	30.92%
21-nov-03	134.67	203.31	292.86	0.76%	26.45%	32.51%
24-nov-03	115.52	180.99	263.72	0.76%	26.60%	31.79%
25-nov-03	111.27	179.23	262.66	0.76%	26.89%	32.70%
26-nov-03	102.33	173.82	260.10	0.76%	27.51%	33.44%
27-nov-03	96.49	172.73	262.51	0.76%	28.22%	34.37%
28-nov-03	94.12	162.72	248.38	0.76%	28.13%	34.17%
01-dez-03	82.75	160.14	248.64	0.76%	28.85%	35.16%
02-dez-03	77.14	155.59	249.03	0.76%	29.27%	36.01%
03-dez-03	104.75	171.37	270.65	0.86%	29.99%	37.10%
04-dez-03	97.51	173.60	272.38	0.83%	30.43%	37.48%
05-dez-03	76.60	176.93	279.79	0.75%	31.19%	38.37%
08-dez-03	77.14	179.86	285.70	0.76%	31.76%	39.75%
09-dez-03	73.77	170.72	274.31	0.79%	32.43%	40.05%
10-dez-03	82.79	186.64	297.82	0.79%	33.26%	41.23%
11-dez-03	78.05	184.04	302.09	0.79%	33.11%	42.76%
12-dez-03	81.66	203.24	326.21	0.79%	33.94%	43.99%
15-dez-03	88.03	197.83	323.12	0.79%	34.53%	44.80%
16-dez-03	90.13	215.43	344.38	0.83%	35.26%	46.03%
17-dez-03	87.68	208.77	337.18	0.83%	35.82%	45.96%
18-dez-03	87.36	221.36	347.09	0.83%	36.35%	46.77%
19-dez-03	89.46	227.75	356.07	0.83%	37.13%	47.43%
22-dez-03	89.14	230.20	351.42	0.83%	37.11%	45.59%
23-dez-03	90.55	137.68	271.40	0.83%	27.71%	41.07%

Data	Preço			Volatilidade (% a.a.)		
	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte	Mercado	BDT Vol. Cte	BDT Vol. N. Cte
26-dez-03	92.14	93.37	211.90	0.83%	22.73%	37.56%
29-dez-03	83.10	70.57	177.44	0.83%	20.07%	31.87%
30-dez-03	79.87	65.20	169.88	0.77%	19.64%	31.99%
02-jan-04	70.99	56.20	145.94	0.77%	19.04%	30.19%
05-jan-04	68.49	54.02	144.11	0.79%	19.49%	30.86%
06-jan-04	61.61	43.57	111.04	0.79%	19.14%	29.13%
12-jan-04	42.36	11.84	63.03	0.79%	15.69%	26.70%
13-jan-04	39.73	8.47	52.86	0.79%	15.84%	26.79%
14-jan-04	42.00	11.02	58.00	0.79%	14.87%	26.02%
15-jan-04	42.19	10.79	59.35	0.79%	15.16%	26.88%
16-jan-04	40.82	9.23	53.65	0.79%	14.64%	27.15%
21-jan-04	57.20	3.88	20.40	0.89%	13.10%	20.37%

Tabela 5.4 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 18,5% a.a., tipo I e vencimento 01-Out-2004

Graficamente, observa-se que a aderência é muito menor entre o preço de mercado e os preços gerados pelo modelo de Black-Derman-Toy, com os preços gerados pelo modelo consistentemente acima dos práticos pelo mercado.

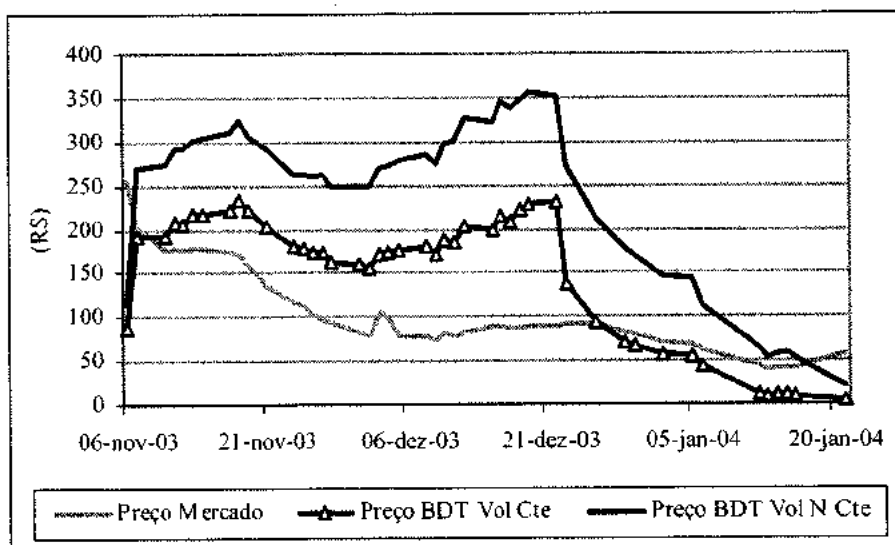


Figura 5.19 – Gráfico de Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy vs. Mercado para a opção de compra com taxa de exercício 18,5% a.a., tipo I e vencimento 01-Out-2004

Com relação à sensibilidade à volatilidade, verifica-se que com o aumento do prazo de vencimento da opção e de seu ativo-objeto, passa a haver maior sensibilidade do preço da opção gerado pelo modelo a volatilidade, como mostram os gráficos a seguir com análise análoga a da opção anterior de prazo de vencimento mais curto:

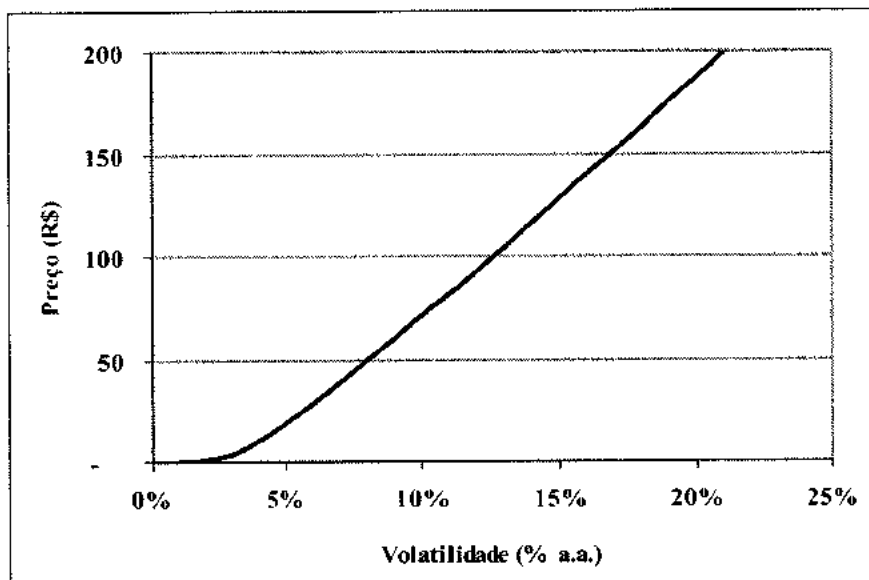


Figura 5.20 – Sensibilidade do Preço da Opção à variação da volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante)

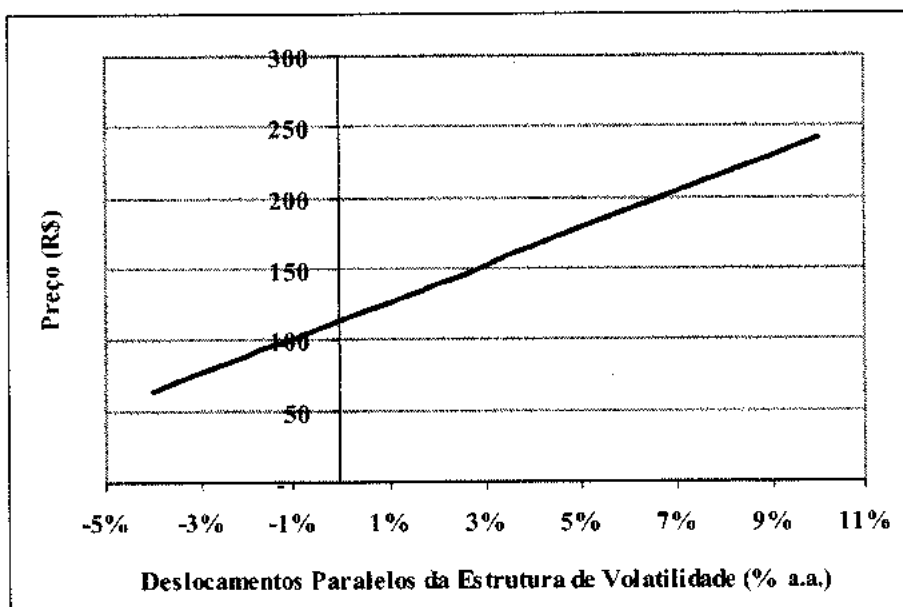


Figura 5.21 – Sensibilidade do Preço da Opção à deslocamentos paralelos da estrutura a termo de volatilidade (Modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável no tempo)

Ao contrário da opção com vencimento mais curto, a opção de vencimento em Outubro-2005 apresentou grandes variações em relação aos preços iniciais. Nos valores /

deslocamentos paralelos mais extremos analisados (21% no modelo de volatilidade constante e +10% de deslocamento paralelo no modelo de volatilidade variável), os preços gerados são da ordem de 126% e 114%, respectivamente, superiores aos preços originais.

Para o período todo de análise, os seguintes resultados comparativos em relação ao modelo de Black foram obtidos:

	Diferença em %		
	Abaixo de -10%	Entre -10% e +10%	Acima de +10%
Opção de Compra	38.32%	15.07%	46.61%
Opção de Venda	25.95%	38.72%	35.34%
Tipo 1	39.45%	28.45%	32.10%
Tipo 2	31.73%	22.78%	45.48%
Tipo 3	17.48%	24.52%	58.00%
<i>Vencimento da Opção</i>			
até 63 du	32.78%	32.02%	35.19%
entre 63 du e 126 du	36.50%	25.59%	37.91%
acima 126 du	28.60%	20.90%	50.50%
<i>Moneyness</i>			
< 0.98	31.48%	30.58%	37.94%
entre 0.98 e 1.02	30.32%	17.30%	52.38%
> 1.02	36.10%	23.40%	40.51%

Tabela 5.5 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante vs. Mercado

A tabela com comparativo para o modelo de volatilidade constante (Tabela 5.5) não permite inferir se o modelo tende a produzir preços super ou sub avaliados em relação ao mercado, apesar de algumas características apresentarem maior percentual em diferenças superiores a 10%.

Por outro lado, o modelo com volatilidade variável no tempo (Tabela 5.6) apresentou tendência a produzir preços superiores em relação ao mercado, ou seja, proporções próximas ou superiores a 50% são verificadas nos erros maiores que 10% em todas características analisadas.

	Diferença em %		
	Abaixo de -10%	Entre -10% e +10%	Acima de +10%
Opção de Compra	23.25%	11.32%	65.43%
Opção de Venda	12.54%	32.65%	54.81%
Tipo 1	21.36%	22.79%	55.84%
Tipo 2	18.34%	19.51%	62.14%
Tipo 3	10.72%	21.44%	67.83%
<i>Vencimento da Opção</i>			
até 63 du	21.01%	31.82%	47.18%
entre 63 du e 126 du	18.43%	20.19%	61.38%
acima 126 du	14.05%	10.70%	75.25%
<i>Moneyness</i>			
< 0.98	17.30%	25.64%	57.07%
entre 0.98 e 1.02	18.41%	10.32%	71.27%
> 1.02	19.65%	20.45%	59.89%

Tabela 5.6 - Comparação entre os preços obtidos pelo modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável no tempo vs. Mercado

6. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS

6.1 *Apreçamento por Delta-Hedge*

No capítulo anterior, buscou-se implementar dois modelos de taxa de juros – Vasicek e Black-Derman-Toy – e, a partir de então, fazer o apreçamento de uma opção europeia disponível no mercado brasileiro. Evidentemente, os preços calculados nos diferentes modelos apresentaram diferenças e, com isso, buscou-se nesse trabalho um indicador de qual modelo reproduz melhor o comportamento da estrutura de taxas de juro através do apreçamento por delta-hedge.

De um modo geral, o processo de hedge de uma opção qualquer é usualmente referido como a replicação da opção, através de um processo sintético de compras e vendas que anulam a exposição ao instrumento. O conceito de replicação traz como consequência que, em um mercado sem arbitragem, uma vez que o método de replicação anula todo o resultado proporcionado pela compra / venda de uma opção real, então o resultado desse sistema de replicação tem que ser igual ao preço da opção.

A metodologia adotada foi a de tentar replicar o preço da opção através do seu Delta, ou seja, através de uma posição sintética de Delta quantidades do ativo-objeto. Originalmente, o objetivo do hedge de Delta é tornar uma carteira imune a pequenas mudanças no preço do ativo-objeto em um período curto de tempo.

Com isso, através de simulações de posições sintéticas de carteiras compostas pelo ativo-objeto na quantidade determinada pelo Delta do derivativo correspondente é possível reproduzir o preço desse derivativo, observando a hipótese proveniente de não-arbitragem, na qual é possível estabelecer uma carteira risco-neutra, composta de uma posição no derivativo e de uma posição no ativo-objeto que em determinado período de tempo deveria ter como retorno a taxa livre de risco.

O Delta de um derivativo - Δ - é definido como a variação de seu preço em relação ao preço do ativo-objeto, ou seja, é a inclinação da curva que relaciona o preço do derivativo ao preço do ativo-objeto:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \quad (6.1)$$

onde f é o preço do derivativo e S é o preço do ativo-objeto.

Para que seja efetuado o hedge de Delta em uma posição vendida em uma opção europeia de compra, isso envolve uma posição comprada em Delta quantidades do ativo-objeto, ou em no caso da posição vendida em opções de compra, envolve uma posição vendida em Delta quantidades do ativo-objeto.

Para uma opção de venda de europeia, o delta assume valores negativos, implicando que uma posição comprada em uma opção de venda deve ser hedgeada com uma posição comprada no ativo-objeto e que uma posição vendida na opção de venda deve ser hedgeada com uma posição vendida no ativo-objeto.

Os modelos de Black e Vasicek possuem expressões analíticas para o cálculo do Delta, ao contrário do modelo de Black-Derman-Toy em que deve ser calculado numericamente.

Para o modelo de Black, a expressão para o Delta da opção de compra é dada por:

$$\Delta_{Call} = \frac{\Phi(d_1)}{P(t,T)} \quad (6.2)$$

E para a opção de venda:

$$\Delta_{Put} = \frac{\Phi(d_1) - 1}{P(t,T)} \quad (6.3)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(T,s)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} \quad (6.4)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T-t} \quad (6.5)$$

T: Vencimento da opção

s: Vencimento do título

$P(T,s)$: Preço a termo do título entre T e s

σ : Volatilidade do Preço a termo do Título

No modelo de Vasicek, o Delta tem forma análoga à expressão do modelo de Black⁸. O Delta para a opção de compra será:

$$\Delta_{CALL} = \frac{\Phi(h)}{P(t,T)} \quad (6.6)$$

E para a opção europeia de venda:

$$\Delta_{PUT} = \frac{\Phi(h) - 1}{P(t,T)} \quad (6.7)$$

onde:

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P(t,s)}{P(t,T)K} + \frac{\sigma_p}{2} \quad (6.8)$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}} \cdot (1 - e^{-\alpha(s-T)}) \quad (6.9)$$

Já para o modelo de Black-Derman-Toy, a expressão para o Delta é calculada no 1º passo da árvore. Considere, C_u e C_d os possíveis valores assumidos por uma opção

⁸ A derivação para a expressão do Delta no modelo de Vasicek é feita no Anexo II.

européia de compra e P_{S_u} e P_{S_d} os possíveis valores assumidos pelo ativo-objeto dessa opção, o delta é dado por:

$$\Delta_{call} = \frac{C_u - C_d}{P_{S_u} - P_{S_d}} \quad (6.10)$$

Considerando P_u e P_d os possíveis valores assumidos por uma opção européia de venda, o resultado para o delta da opção de venda é análogo à expressão da opção de compra:

$$\Delta_{put} = \frac{P_u - P_d}{P_{S_u} - P_{S_d}} \quad (6.11)$$

6.2 Resultados

O estudo de Delta-Hedge foi realizado para o período de 02-Jan-2003 a 02-Jan-2004 em que foram simuladas opções sintéticas de taxas de juros. O uso de opções sintéticas é justificado pelo fato de que dados com as opções reais estão disponíveis apenas a partir do mês de setembro de 2003 e, de qualquer forma, esse será o preço reproduzido testando as hipóteses assumidas pelos modelos em estudo.

Uma janela de um semestre foi considerada para simulações de compras e vendas ao final do qual, avaliava-se se a opção teria exercício ou não para os seguintes valores de strike: 80.000, 85.000, 90.000 e 95.000 que representam faixas de taxas de juro, em que as opções vão dos estados dentro do dinheiro até as opções fora do dinheiro. É importante considerar que quanto maior a janela de dias úteis analisada, maior será o erro proveniente de rebalanceamentos, uma vez que o pressuposto são de rebalanceamentos contínuos e não discretos.

Também foram considerados para as simulações, dois tipos de opções: as opções do tipo I, ou seja, aquelas com vencimento do ativo-objeto 3 meses (ou 63 dias úteis) após o vencimento da opção e opções do tipo II, opções com vencimento do ativo-objeto 6 meses (ou 126 dias úteis) após o vencimento da opção.

Uma especificidade das simulações para os modelos de Black e Vasicek é a de serem feitas sobre contratos futuros de DI. Isso implica, ao contrário das simulações de delta hedge feitas, por exemplo, para ações, que os recebimentos e desembolsos de caixa ocorrem apenas sobre os preços de ajuste no final de cada dia.

Nos modelos de Black e Vasicek, o ativo-objeto considerado é o preço a termo entre o vencimento da opção (T) e o vencimento do futuro (s), onde essa posição é reproduzida por:

$$\Delta \cdot DI_s - \frac{\Delta}{100.000 / P(T, s)} \cdot DI_T \quad (6.12)$$

em que a venda dos contratos de DI_T devem ser feitas pelo valor de delta trazidos pela taxa a termo até o vencimento da opção.

Onde DI_s representa o preço de ajuste do contrato futuro de DI no vencimento do ativo-objeto (s) e DI_T representa o preço de ajuste do contrato futuro de DI no vencimento do opção (T).

No modelo de Black-Derman-Toy, a simulação para o Delta foi apenas sobre o preço do título sem cupons com vencimento em s e, com isso, a posição ao final de cada dia será:

$$\Delta \cdot P(t, s) \quad (6.13)$$

As tabelas a seguir procuram exemplificar a simulação de hedge dinâmico no modelo de Black no dia 03-Jan-2003 para uma opção do tipo I e preço de exercício 80.000:

Data de Início	03-01-2003	Preço Modelo	12.342.80
T	10-07-2003	Qtde Contratos	1.000.00
s	07-10-2003	Portfólio no Exercício	13.875.530.62
DU(s-T)	63	Preço Delta Hedge	12.334.28
K (%)	144,14%	Erro	0,07%
K (PU)	80.000,00		

$$(*) \text{ Erro} = \frac{P_{Modelo} - P_{Delta Hedge}}{P_{Modelo}}$$

Data	T-t (du)	s-t (du)	DI_T	DI_s	$P(T,s)$	$r(t,T)$	Vol (% a.a.)
03-01-2003	128	191	88,607.68	83,228.94	93,929.72	26.89%	4.484%
06-01-2003	127	190	88,942.60	83,749.81	94,161.64	26.18%	4.713%
07-01-2003	126	189	89,104.53	83,930.82	94,193.66	25.95%	4.576%
08-01-2003	125	188	89,306.31	84,180.70	94,260.64	25.61%	4.480%
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
09-07-2003	1	64	99,909.50	94,786.00	94,871.87	25.63%	0.578%
10-07-2003	0	63	100,000.00	94,842.18	94,842.18	0.00%	0.572%

Data	ΔDI_s	ΔDI_T	Qtde ΔDI_s	Qtde ΔDI_T	Ajustes (R\$)	Receitas / Custos Acumulados (R\$)	Receitas / Custos Juros (R\$)
03-01-2003	0.88608	0.83229	886.08	832.29	96,315.19	96,315.19	84.74
06-01-2003	0.88943	0.83750	889.43	837.50	182,941.99	279,514.97	245.88
07-01-2003	0.89105	0.83931	891.05	839.31	25,398.00	305,192.26	268.47
08-01-2003	0.89306	0.84181	893.06	841.81	53,347.66	358,864.47	315.57
(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)	(...)
09-07-2003	0.99909	0.94786	999.09	947.86	1,554.78	996,335.80	901.71
10-07-2003	1.00000	0.94842	1,000.00	948.42	-29,691.55	966,644.25	-

Figura 6.1 – Simulação de Delta-Hedge no Modelo de Black

No primeiro dia de análise, o modelo forneceu o preço de R\$ 12.342,80 e valores de Delta para o DI-Futuro em s de 0,88608 e para o DI-Futuro em T de 0,83229. Para a simulação de 1.000 contratos de uma posição comprada em opção de compra, isso acarretou em ajuste positivo de R\$ 96.315,19, referente a 886 contratos comprados em DI_s e 832 contratos vendidos em DI_T . A coluna de juros (receitas) refere-se ao pagamento (recebimento) de juro decorrente dos ajustes negativos (positivos) ao longo do rebalanceamento e a taxa de empréstimo (aplicação) considerada foi a taxa do CDI do dia.

Desse modo, a cada dia são feitos rebalanceamentos a cada novo valor de delta, de forma que no dia 10-Jul as receitas acumuladas estavam em R\$ 966.644,25, ou seja, R\$ 966,64 por opção que somadas ao resultado de exercício de R\$ 80.000,00 e descontado o preço de venda de R\$ 94.842,18, resultam no preço da opção de R\$ 13.875,53. Esse é o valor da opção na data de exercício (10-Jul) que trazido a valor presente pelo CDI do período tem como valor final R\$ 12.334,28.

Efetuada-se as simulações detalhadas anteriormente para os modelos de Black, Vasicek e Black-Derman-Toy para 100 observações nos diferentes preços de exercícios, foram observados os seguintes resultados:

6.2.1 Opção do Tipo I

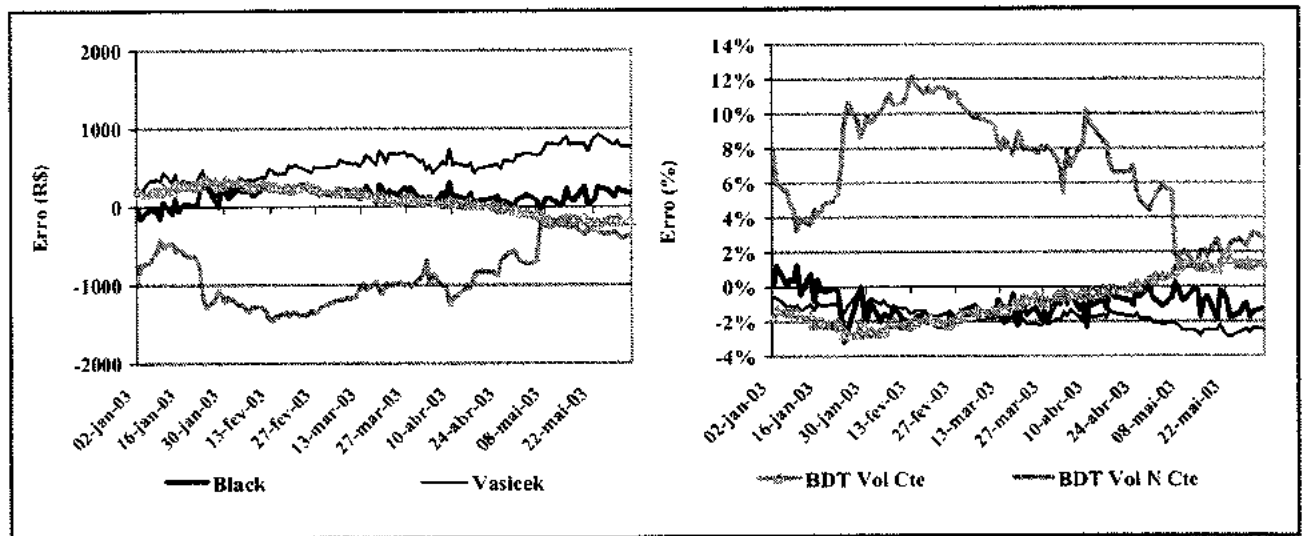


Figura 6.2 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 80.000$

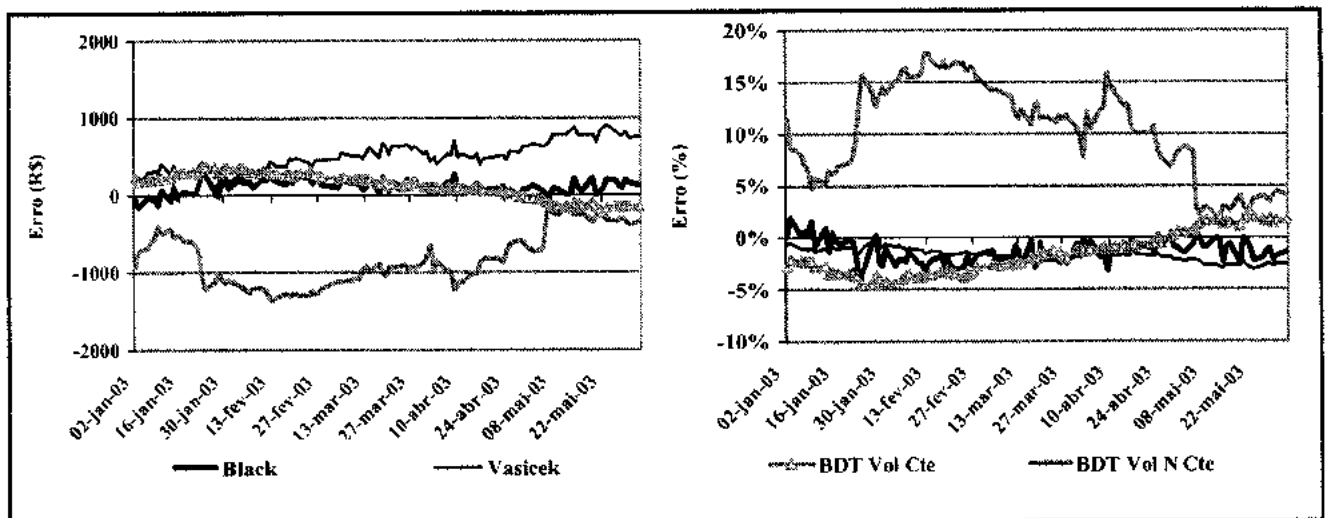


Figura 6.3 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 85.000$

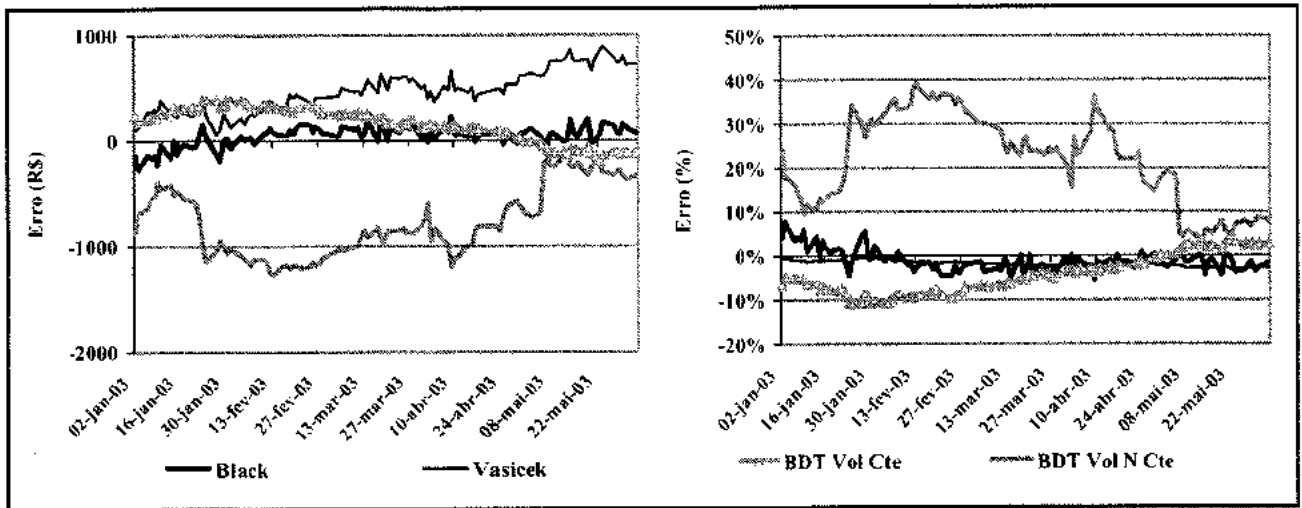


Figura 6.4 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 90.000$

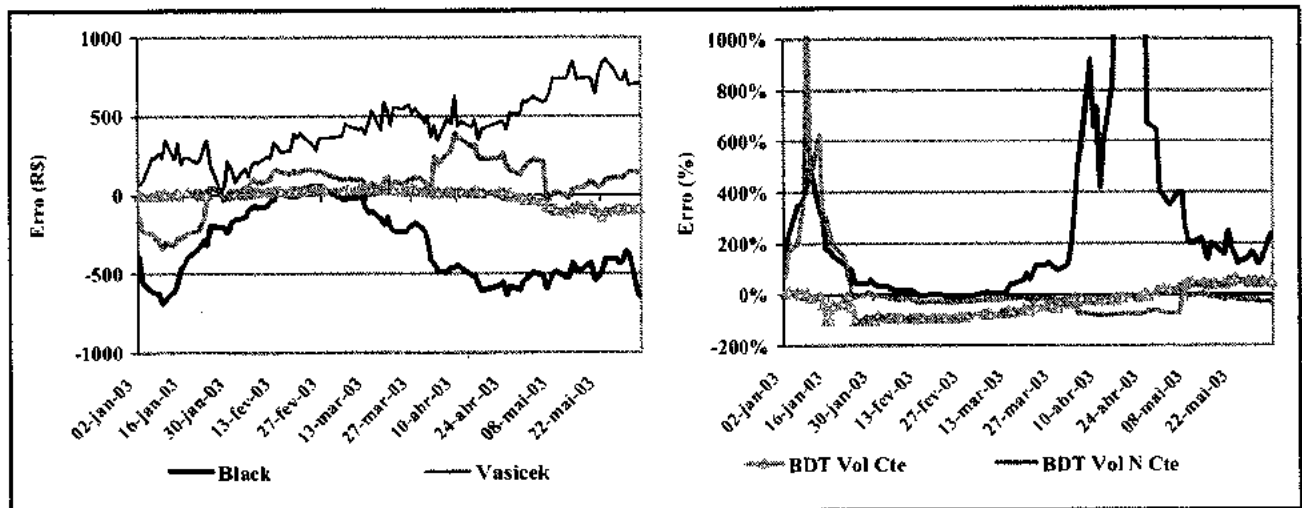


Figura 6.5 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 95.000$

6.2.2 Opção do Tipo II

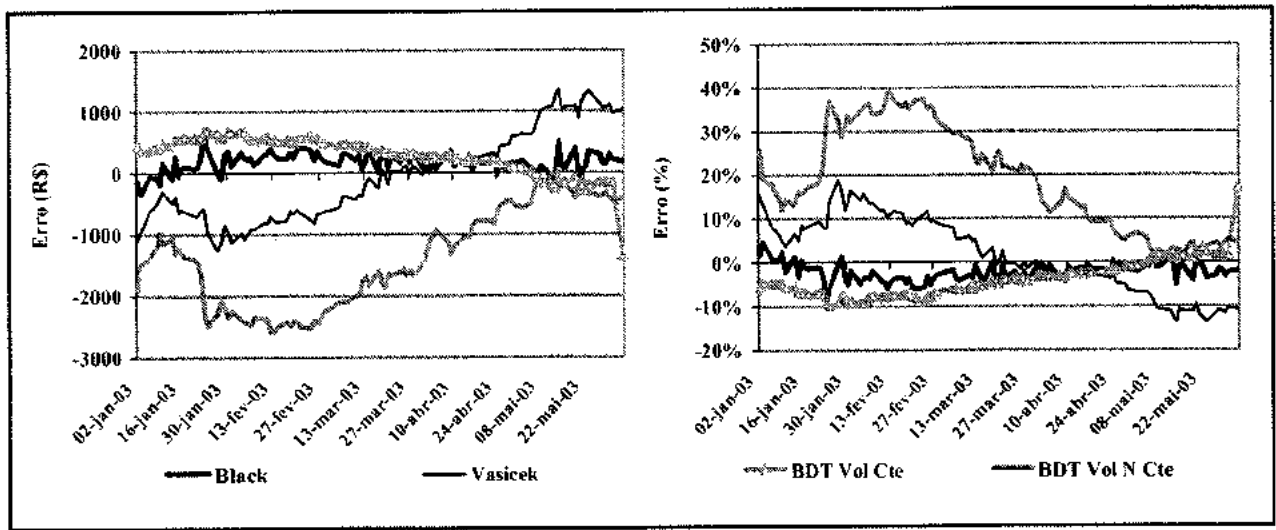


Figura 6.6 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 80.000$

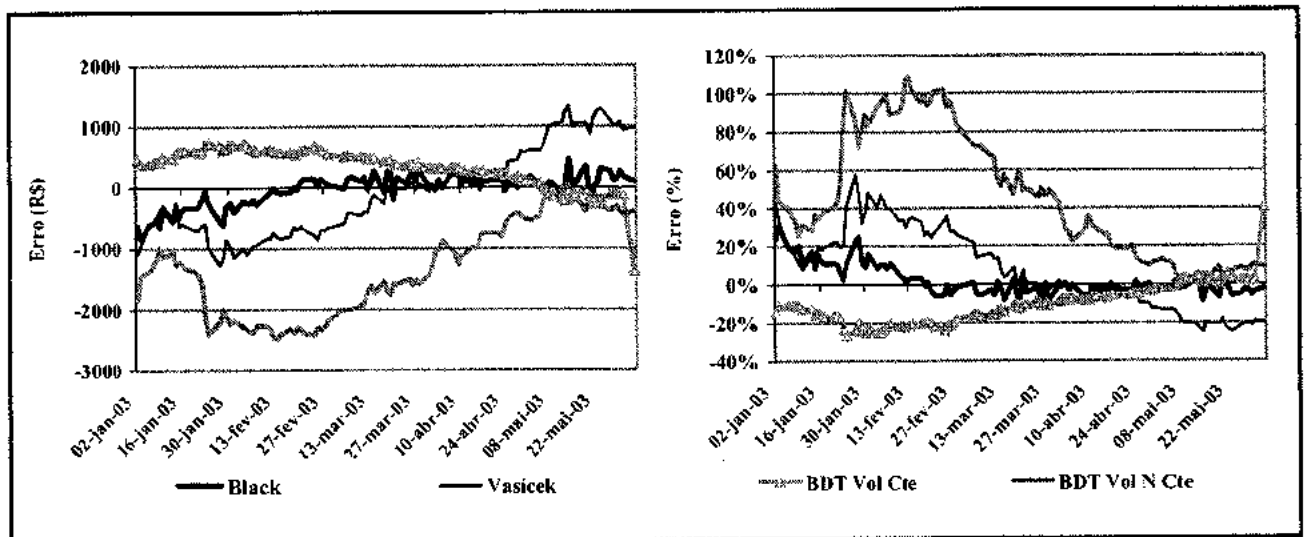


Figura 6.7 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 85.000$

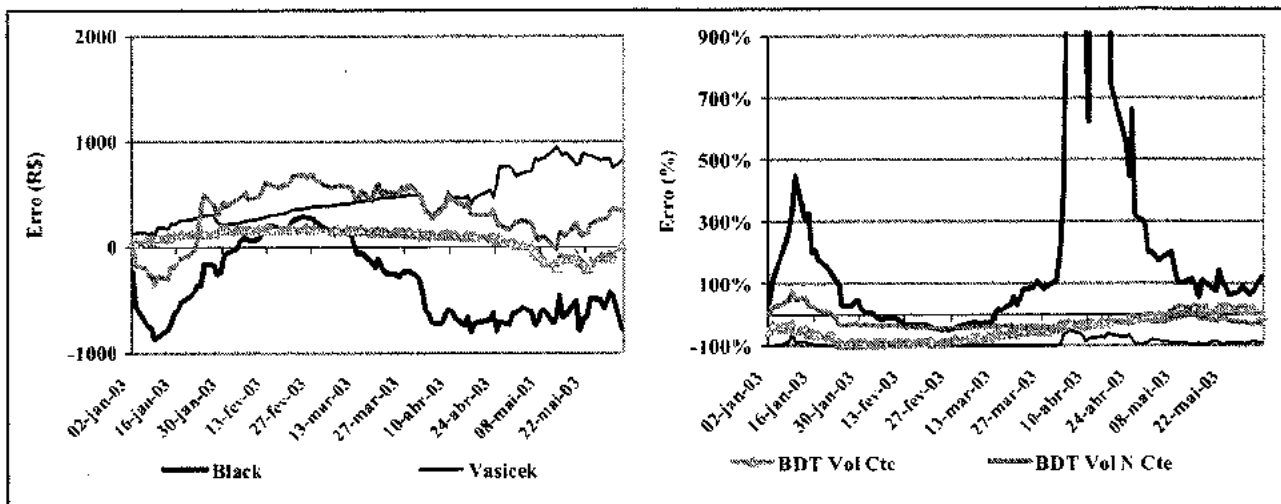


Figura 6.8 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 90.000$

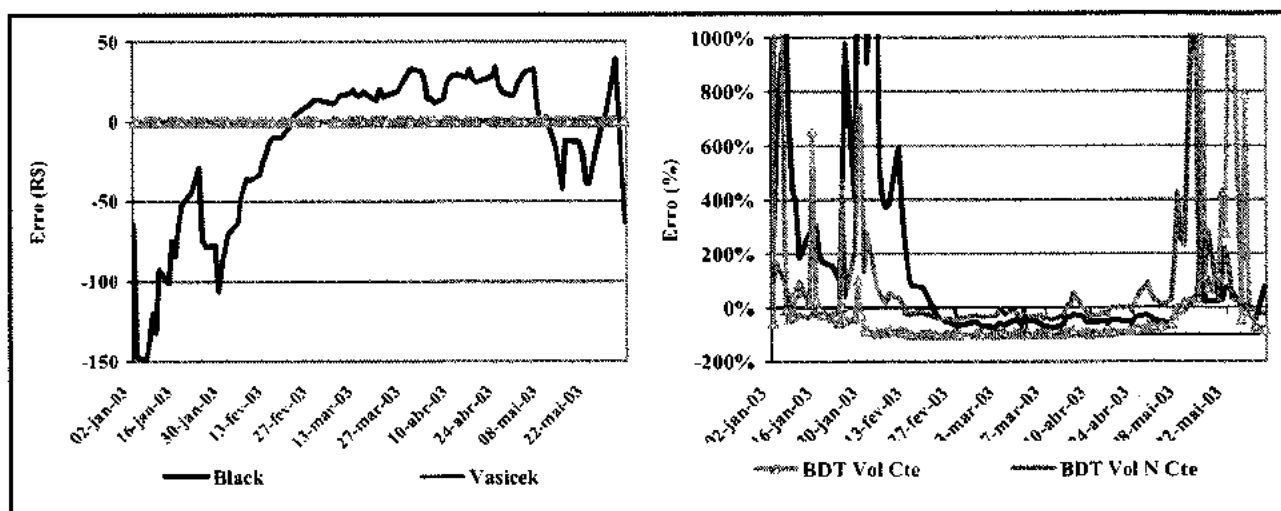


Figura 6.9 – Comparação entre os modelos no hedge dinâmico para opção com preço de exercício $K = 95.000$

A análise dos gráficos acima mostra inicialmente que o erro do hedge aumenta com o preço de exercício e tipo da opção. A opção com prazo de 63 dias úteis entre o seu vencimento e do seu ativo-objeto (tipo I) obteve menores erros de hedge do que a opção com 126 dias úteis (tipo II).

Com relação ao preço de exercício, quanto mais “dentro do dinheiro” estiver a opção, melhor o resultado do hedge. Essa observação pode ser justificada pelo fato de que o delta-hedge não contempla, por exemplo, efeitos de segunda ordem – ou o efeito do Gamma da opção. O efeito Gamma é máximo para as opções no dinheiro e decresce

para opções dentro e fora do dinheiro, ou seja, a sensibilidade mais alta das opções no dinheiro a variações no preço do ativo-objeto tem como consequência maiores erros no hedge dinâmico.

Com relação aos modelos analisados, com exceção dos preços de exercício de 90.000 e 95.000 que representam, respectivamente as opções no dinheiro e fora do dinheiro, o modelo de Black apresentou maior estabilidade, ainda que os modelos de Vasicek e Black-Derman-Toy com volatilidade constante tenham apresentados erros percentuais aceitáveis, entre 2% e 5% para opções do tipo I e entre 10% e 20% para opções do tipo II.

O modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade variável do tempo, foi o que apresentou maiores erros para as opções dentro do dinheiro (preços de exercício de 80.000 e 85.000) e no dinheiro (preço de exercício 90.000).

Entretanto, apesar dos bons resultados de hedge dinâmico do modelo de Black para opções dentro do dinheiro e no dinheiro, essa estabilidade não se verificou para as opções fora do dinheiro, onde os resultados de maior estabilidade e menores erros foram encontrados no modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante.

7. CONCLUSÃO

No modelo de Vasicek, os parâmetros estimados através da função de log-verossimilhança apresentaram bom ajuste a estruturas a termo de taxas de juro flat ou negativamente inclinadas, ao contrário de estruturas positivamente inclinadas em que o modelo não apresentou aderência a estrutura corrente. O parâmetro de reversão à média também apresentou resultados negativos, o que fez com que a principal desvantagem do modelo de produzir taxas negativas com probabilidade não nula, fosse verificada. Os preços das opções de DI calculados através do modelo de Vasicek foram inferiores aos do mercado calculados através do modelo de Black, independente do vencimento da opção ou de seu ativo-objeto, *moneyness* ou tipo de opção.

No modelo de Black-Derman-Toy, uma constatação importante foi a da sua pouca sensibilidade à volatilidade nas opções de taxa de juros com vencimentos curtos, apesar do modelo com volatilidade dependente do tempo ter apresentado preços superiores aos de mercado.

Entretanto, uma vantagem importante do modelo – verificada em modelos estruturados na forma de árvore – é tanto o de permitir o apreçamento de instrumentos dependentes do caminho do ativo-objeto como, por exemplo, opções americanas, quanto o de se extrair uma quantidade maior de informações de hedge, como o impacto no preço da opção em decorrência de movimentos da estrutura a termo. Com isso, os lucros ou prejuízos decorrentes de movimentação paralela, mudanças de inclinação ou curvatura da estrutura a termo podem ser simulados, ao contrário de modelos com resultados analíticos como o de Vasicek ou Black.

O apreçamento através do hedge dinâmico mostrou resultados mais estáveis no modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante. O modelo de Black apesar de apresentar baixos erros para opções dentro do dinheiro e no dinheiro, apresentou baixa estabilidade para opções fora do dinheiro. No entanto, testes adicionais poderão ser feitos considerando janelas menores de rebalanceamento e períodos mais longos de tempo.

Para o gerenciamento de risco, o modelo de Black poderá ser usado por sua vantagem analítica, com a sugestão da incorporação de outras medidas de sensibilidade, que procurem minimizar os erros encontrados. Entretanto, para efeitos de apuração, ainda que o modelo de Black-Derman-Toy com volatilidade constante tenha produzido resultados razoáveis no hedge dinâmico para todas as faixas de *moneyness* analisadas, pesquisas adicionais deverão ser feitas de forma a se obter resultados mais conclusivos.

8. BIBLIOGRAFIA

Black, F. (1976), "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, Jan-Mar 3, pp. 167-179.

Black, F., Derman E., Toy W. (1990), "A One Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Jan-Feb 46, pp. 33-39.

Brigo, D., Mercurio, F. (2001), *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer.

Buetow, G., Sochacki, J. (2001), "Term Structure Models Using Binomial Trees", AIMR Publications.

Cox J. C., Ingersoll, J. E., Ross S. A. (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.

Clewlow, L., Strickland C. (1998), *Implementing Derivatives Models*, John Wiley & Sons.

Heath D., Jarrow R., Morton A. (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation", *Econometrica*, 60, pp. 77-105.

Ho T. S. Y., Lee S. (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, pp. 1011-1029.

Hull J. (1997), *Options, Futures and Other Derivatives Securities*, Prentice Hall.

Hull J., White A. (1990), "Pricing Interest Rate Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, 3, pp. 573-592.

Hull J., White A. (1995), "A Note on the Models of Hull and White for Pricing Pptions on the Term Structure: Response", *Journal of Fixed Income*, September 5, pp. 97-102.

Jamshidian F. (1989), "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*, March, pp. 205-209

Merton R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141-183.

Neftci S. N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press.

Neto C. A. (1999), "Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juro e Avaliação de Contratos Derivativos", Tese de Doutorado, FEA-USP.

Rebonato R. (1998), *Interest Rate Option Models: understanding, analysing and using models for exotic interest-rate options*, John Wiley & Sons.

Silva M. E. (1997), "Precificação de Opções sobre o Futuro de DI com o Modelo de Black, Derman e Toy", *Resenha BM&F*, Jan-Fev 115.

Vasicek O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

ANEXO I - CÁLCULO DO VALOR ESPERADO DO PAYOFF DE UMA CALL NO MODELO DE VASICEK

$$\begin{aligned}
 E_Q[(\exp(y) - K)^+] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(\exp(y) - K)^+] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_y}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(y - \mu_y)^2}{\kappa_y^2}\right) dy \\
 &= \int_{\frac{\ln K - \mu_y}{\kappa_y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [(\exp(\mu_y + \kappa_y \cdot z) - K)] \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot z^2\right) dz \\
 &= \exp\left(\mu_y + \frac{1}{2} \kappa_y^2\right) \cdot \int_{\frac{\ln K - \mu_y}{\kappa_y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (z - \kappa_y)^2\right) dz - K \cdot \int_{\frac{\ln K - \mu_y}{\kappa_y}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot z^2\right) dz \\
 &= \exp\left(\mu_y + \frac{1}{2} \kappa_y^2\right) \cdot \Phi\left[\frac{-\ln K + \mu_y + \kappa_y^2}{\kappa_y}\right] - K \cdot \Phi\left[\frac{-\ln K + \mu_y}{\kappa_y}\right]
 \end{aligned}$$

ANEXO II – CÁLCULO DO DELTA NO MODELO DE VASICEK

Conforme demonstrado no item (3.2), o preço no instante t , de uma opção de compra européia com strike K , vencimento em T , sobre um título sem cupons com vencimento em s , é:

$$C(t, T, s, K) = P(t, s) \cdot \Phi(h) - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi(h - \sigma_p) \quad (II.1)$$

Onde:

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}} \cdot (1 - e^{-\alpha(s-T)})$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P(t, s)}{P(t, T)K} + \frac{\sigma_p}{2} \quad (II.2)$$

O delta de uma opção - Δ - é a taxa de variação no seu preço em relação ao preço do ativo-objeto, ou seja, para a opção de compra definida acima cujo ativo-objeto é o título com vencimento em s , o Delta será:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial C(t, T, s, K)}{\partial P(t, s)} = \frac{\partial [P(t, s) \cdot \Phi(h) - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi(h - \sigma_p)]}{\partial P(t, s)} \\ &= \frac{\partial P(t, s)}{\partial P(t, s)} \Phi(h) + P(t, s) \frac{\partial \Phi(h)}{\partial P(t, s)} - K \cdot P(t, T) \frac{\partial \Phi(h - \sigma_p)}{\partial P(t, s)} \\ &= \Phi(h) + P(t, s) \cdot \Phi'(h) \frac{\partial h}{\partial P(t, s)} - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi'(h - \sigma_p) \frac{\partial (h - \sigma_p)}{\partial P(t, s)} \end{aligned} \quad (II.3)$$

onde $\Phi'(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}}$.

Calculando $\frac{\partial h}{\partial P(t,s)}$ e $\frac{\partial(h - \sigma_p)}{\partial P(t,s)}$ a partir da equação (II.2):

$$\frac{\partial h}{\partial P(t,s)} = \frac{\partial(h - \sigma_p)}{\partial P(t,s)} = \frac{1}{\sigma_p \cdot P(t,s)}$$

Substituindo a expressão acima na equação (II.3):

$$\begin{aligned} \Delta &= \Phi(h) + P(t,s) \cdot \Phi'(h) \frac{1}{\sigma_p \cdot P(t,s)} - K \cdot P(t,T) \cdot \Phi'(h - \sigma_p) \frac{1}{\sigma_p \cdot P(t,s)} \\ &= \Phi(h) + \frac{1}{\sigma_p \cdot P(t,s)} \left[P(t,s) \cdot \Phi'(h) - K \cdot P(t,T) \cdot \Phi'(h - \sigma_p) \right] \end{aligned} \quad (II.4)$$

Entretanto, $\Phi'(h)$ é valor da distribuição normal em h , ou seja, $\Phi'(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}}$. A partir dessa expressão, obtém-se a seguinte relação:

$$\Phi'(h - \sigma_p) = \frac{P(t,s)}{P(t,T)} \cdot \Phi'(h) \quad (II.5)$$

Substituindo a equação acima em (II.4):

$$\Delta = \Phi(h) + \frac{1}{\sigma_p \cdot P(t,s)} \left[P(t,s) \cdot \Phi'(h) - K \cdot P(t,T) \cdot \frac{P(t,s)}{P(t,T)} \cdot \Phi'(h) \right]$$

em que o último termo se anula.

Com isso, a expressão para o Delta de uma opção de compra para o Modelo de Vasicek será:

$$\Delta_{CALL} = \Phi(h)$$

Ou considerando como ativo-objeto o preço do título forward entre T e s, a expressão acima é análoga a do modelo de Black, onde:

$$\Delta_{CALL} = \frac{\Phi(h)}{P(t,T)}$$

A demonstração para uma opção europeia de venda pode ser feita de forma análoga e seu Delta será:

$$\Delta_{PUT} = \Phi(h) - 1$$

E, também, considerando o ativo-objeto o preço do título forward entre T e s

$$\Delta_{PUT} = \frac{\Phi(h) - 1}{P(t,T)}$$

ANEXO III– CÓDIGOS EM MATHEMATICA E VISUAL BASIC

Modelo de Vasicek

*Modelo de Black-Derman-Toy
para Volatilidade Constante*

***Modelo de Black-Derman-Toy
para Volatilidade Dependente do Tempo***

ANEXO IV – PARÂMETROS ESTIMADOS PARA O MODELO DE VASICEK

Data	Alfa	Theta	Sigma
2-jan-02	0.11710	0.0708%	0.00180%
3-jan-02	0.09225	0.0697%	0.00160%
4-jan-02	0.11598	0.0706%	0.00180%
7-jan-02	0.12171	0.0702%	0.00185%
8-jan-02	0.13241	0.0706%	0.00194%
9-jan-02	0.15723	0.0711%	0.00212%
10-jan-02	0.19813	0.0720%	0.00241%
11-jan-02	0.19202	0.0720%	0.00236%
14-jan-02	0.21889	0.0727%	0.00255%
15-jan-02	0.24325	0.0730%	0.00270%
16-jan-02	0.23349	0.0729%	0.00264%
17-jan-02	0.19793	0.0719%	0.00241%
18-jan-02	0.16194	0.0712%	0.00215%
21-jan-02	0.14694	0.0710%	0.00204%
22-jan-02	0.14612	0.0710%	0.00204%
23-jan-02	0.12609	0.0705%	0.00189%
24-jan-02	0.14720	0.0713%	0.00205%
28-jan-02	0.15316	0.0715%	0.00209%
29-jan-02	0.16755	0.0717%	0.00220%
30-jan-02	0.18353	0.0720%	0.00231%
31-jan-02	0.18289	0.0720%	0.00231%
1-fev-02	0.18077	0.0719%	0.00230%
4-fev-02	0.21783	0.0725%	0.00256%
5-fev-02	0.20233	0.0718%	0.00246%
6-fev-02	0.16812	0.0710%	0.00221%
7-fev-02	0.18784	0.0715%	0.00235%
8-fev-02	0.19057	0.0715%	0.00236%
13-fev-02	0.14227	0.0702%	0.00203%
14-fev-02	0.14632	0.0705%	0.00205%
15-fev-02	0.13183	0.0702%	0.00193%

Data	Alfa	Theta	Sigma
18-fev-02	0.09768	0.0698%	0.00165%
19-fev-02	0.09425	0.0696%	0.00162%
20-fev-02	0.09508	0.0693%	0.00162%
21-fev-02	0.06823	0.0682%	0.00140%
22-fev-02	0.05638	0.0682%	0.00128%
25-fev-02	0.01998	0.0675%	0.00083%
26-fev-02	0.02110	0.0676%	0.00084%
27-fev-02	0.01060	0.0670%	0.00074%
28-fev-02	0.02934	0.0675%	0.00097%
1-mar-02	0.03465	0.0675%	0.00103%
4-mar-02	0.04004	0.0677%	0.00109%
5-mar-02	0.02538	0.0670%	0.00093%
6-mar-02	0.03689	0.0674%	0.00105%
7-mar-02	0.06534	0.0678%	0.00136%
8-mar-02	0.04657	0.0672%	0.00118%
11-mar-02	0.04203	0.0669%	0.00113%
12-mar-02	0.01197	0.0661%	0.00074%
13-mar-02	0.00928	0.0661%	0.00070%
14-mar-02	0.01343	0.0663%	0.00076%
15-mar-02	0.00721	0.0659%	0.00068%
18-mar-02	0.00687	0.0659%	0.00066%
19-mar-02	0.00861	0.0658%	0.00068%
20-mar-02	0.01256	0.0655%	0.00074%
21-mar-02	0.00584	0.0664%	0.00061%
22-mar-02	0.00793	0.0670%	0.00059%
25-mar-02	0.00912	0.0670%	0.00059%
26-mar-02	0.00918	0.0671%	0.00059%
27-mar-02	0.00239	0.0668%	0.00050%
28-mar-02	0.00615	0.0667%	0.00049%
1-abr-02	0.00678	0.0668%	0.00049%

Data	Alfa	Theta	Sigma	Data	Alfa	Theta	Sigma
2-abr-02	0.00596	0.0667%	0.00046%	15-mai-02	0.36429	0.0711%	0.00333%
3-abr-02	0.01073	0.0670%	0.00053%	16-mai-02	0.32663	0.0703%	0.00311%
4-abr-02	0.01059	0.0670%	0.00053%	17-mai-02	0.32890	0.0705%	0.00312%
5-abr-02	0.01284	0.0669%	0.00057%	20-mai-02	0.31455	0.0704%	0.00304%
8-abr-02	0.02021	0.0672%	0.00069%	21-mai-02	0.33701	0.0707%	0.00316%
9-abr-02	0.01573	0.0669%	0.00062%	22-mai-02	0.38777	0.0716%	0.00344%
10-abr-02	0.01765	0.0670%	0.00066%	23-mai-02	0.38079	0.0714%	0.00339%
11-abr-02	0.01775	0.0668%	0.00068%	24-mai-02	0.35219	0.0709%	0.00324%
12-abr-02	0.01340	0.0666%	0.00059%	27-mai-02	0.35774	0.0710%	0.00327%
15-abr-02	0.01989	0.0670%	0.00069%	28-mai-02	0.32697	0.0704%	0.00311%
16-abr-02	0.02058	0.0669%	0.00071%	29-mai-02	0.30603	0.0699%	0.00297%
17-abr-02	0.02567	0.0669%	0.00079%	31-mai-02	0.29496	0.0696%	0.00289%
18-abr-02	0.04904	0.0682%	0.00108%	3-jun-02	0.34791	0.0700%	0.00319%
19-abr-02	0.04705	0.0681%	0.00104%	4-jun-02	0.46264	0.0718%	0.00378%
22-abr-02	0.09185	0.0690%	0.00152%	5-jun-02	0.44090	0.0714%	0.00365%
23-abr-02	0.11269	0.0692%	0.00170%	6-jun-02	0.48556	0.0738%	0.00395%
24-abr-02	0.10817	0.0690%	0.00166%	7-jun-02	0.48819	0.0740%	0.00400%
25-abr-02	0.12059	0.0694%	0.00175%	10-jun-02	0.46653	0.0728%	0.00388%
26-abr-02	0.15138	0.0700%	0.00199%	11-jun-02	0.56593	0.0767%	0.00448%
29-abr-02	0.16589	0.0702%	0.00208%	12-jun-02	0.55468	0.0838%	0.00484%
30-abr-02	0.17508	0.0699%	0.00213%	13-jun-02	0.66669	0.0840%	0.00526%
2-mai-02	0.20736	0.0705%	0.00239%	14-jun-02	0.71353	0.0866%	0.00561%
3-mai-02	0.21222	0.0703%	0.00241%	17-jun-02	0.73079	0.0839%	0.00562%
6-mai-02	0.20816	0.0701%	0.00239%	18-jun-02	0.72342	0.0857%	0.00560%
7-mai-02	0.20976	0.0701%	0.00239%	19-jun-02	0.77157	0.0891%	0.00602%
8-mai-02	0.24132	0.0702%	0.00259%	20-jun-02	0.76597	0.0901%	0.00600%
9-mai-02	0.30730	0.0708%	0.00300%	21-jun-02	0.77122	0.0972%	0.00635%
10-mai-02	0.34111	0.0709%	0.00318%	24-jun-02	0.75822	0.0943%	0.00612%
13-mai-02	0.40108	0.0719%	0.00353%	25-jun-02	0.76394	0.0927%	0.00609%
14-mai-02	0.38286	0.0716%	0.00343%	26-jun-02	0.77238	0.0926%	0.00616%

Data	Alfa	Theta	Sigma
27-jun-02	0.73390	0.0871%	0.00570%
28-jun-02	0.70013	0.0847%	0.00541%
1-jul-02	0.74497	0.0908%	0.00597%
2-jul-02	0.76013	0.0908%	0.00608%
3-jul-02	0.70805	0.0880%	0.00563%
4-jul-02	0.72016	0.0889%	0.00571%
5-jul-02	0.73140	0.0893%	0.00577%
8-jul-02	0.71341	0.0874%	0.00559%
9-jul-02	0.71310	0.0876%	0.00557%
10-jul-02	0.70341	0.0867%	0.00549%
11-jul-02	0.70112	0.0850%	0.00543%
12-jul-02	0.69568	0.0837%	0.00534%
15-jul-02	0.71812	0.0854%	0.00555%
16-jul-02	0.74156	0.0870%	0.00576%
17-jul-02	0.73969	0.0843%	0.00563%
18-jul-02	0.70646	0.0817%	0.00535%
19-jul-02	0.69479	0.0813%	0.00527%
22-jul-02	0.73891	0.0843%	0.00564%
23-jul-02	0.75791	0.0870%	0.00583%
24-jul-02	0.75665	0.0862%	0.00580%
25-jul-02	0.75546	0.0866%	0.00580%
26-jul-02	0.75762	0.0891%	0.00591%
29-jul-02	0.73209	0.0958%	0.00606%
30-jul-02	0.70670	0.0957%	0.00579%
31-jul-02	0.68562	0.0936%	0.00578%
1-ago-02	0.66908	0.0937%	0.00570%
2-ago-02	0.67101	0.0908%	0.00547%
5-ago-02	0.67869	0.0922%	0.00562%
6-ago-02	0.70501	0.0915%	0.00566%
7-ago-02	0.69734	0.0891%	0.00549%

Data	Alfa	Theta	Sigma
8-ago-02	0.65972	0.0836%	0.00509%
9-ago-02	0.67972	0.0879%	0.00535%
12-ago-02	0.67981	0.0884%	0.00536%
13-ago-02	0.68409	0.0867%	0.00531%
14-ago-02	0.67786	0.0852%	0.00522%
15-ago-02	0.68132	0.0862%	0.00527%
16-ago-02	0.67932	0.0851%	0.00523%
19-ago-02	0.67036	0.0843%	0.00514%
20-ago-02	0.66825	0.0836%	0.00510%
21-ago-02	0.67948	0.0840%	0.00518%
22-ago-02	0.70411	0.0855%	0.00537%
23-ago-02	0.71306	0.0851%	0.00540%
26-ago-02	0.67163	0.0821%	0.00508%
27-ago-02	0.67040	0.0825%	0.00509%
28-ago-02	0.63826	0.0803%	0.00483%
29-ago-02	0.61655	0.0790%	0.00466%
30-ago-02	0.58472	0.0780%	0.00447%
2-set-02	0.60772	0.0790%	0.00462%
3-set-02	0.62427	0.0802%	0.00473%
4-set-02	0.61755	0.0801%	0.00469%
5-set-02	0.62157	0.0812%	0.00474%
6-set-02	0.59413	0.0810%	0.00458%
9-set-02	0.48825	0.0774%	0.00393%
10-set-02	0.52359	0.0787%	0.00415%
11-set-02	0.51434	0.0783%	0.00410%
12-set-02	0.53069	0.0787%	0.00421%
13-set-02	0.59082	0.0804%	0.00458%
16-set-02	0.61675	0.0824%	0.00481%
17-set-02	0.63351	0.0828%	0.00490%
18-set-02	0.64735	0.0842%	0.00502%

Data	Alfa	Theta	Sigma
19-set-02	0.68163	0.0870%	0.00531%
20-set-02	0.67785	0.0857%	0.00526%
23-set-02	0.70344	0.0886%	0.00551%
24-set-02	0.69802	0.0893%	0.00552%
25-set-02	0.69450	0.0881%	0.00547%
26-set-02	0.71357	0.0884%	0.00563%
27-set-02	0.74674	0.0920%	0.00598%
30-set-02	0.76372	0.0938%	0.00632%
1-out-02	0.77544	0.0907%	0.00620%
2-out-02	0.78976	0.0918%	0.00638%
3-out-02	0.80593	0.0937%	0.00661%
4-out-02	0.78855	0.0906%	0.00633%
7-out-02	0.78157	0.0901%	0.00625%
8-out-02	0.77376	0.0893%	0.00617%
9-out-02	0.77513	0.0912%	0.00628%
10-out-02	0.77962	0.0923%	0.00635%
11-out-02	0.76859	0.0934%	0.00633%
14-out-02	0.69809	0.0981%	0.00627%
15-out-02	0.65405	0.1039%	0.00644%
16-out-02	0.64726	0.0991%	0.00616%
17-out-02	0.59728	0.0977%	0.00575%
18-out-02	0.57237	0.0954%	0.00547%
21-out-02	0.56929	0.0940%	0.00539%
22-out-02	0.57552	0.0943%	0.00544%
23-out-02	0.61764	0.0942%	0.00563%
24-out-02	0.63592	0.0945%	0.00574%
25-out-02	0.62799	0.0943%	0.00567%
28-out-02	0.60428	0.0946%	0.00551%
29-out-02	0.63178	0.0965%	0.00574%
30-out-02	0.62774	0.0964%	0.00568%
31-out-02	0.62931	0.0959%	0.00566%

Data	Alfa	Theta	Sigma
1-nov-02	0.65261	0.0959%	0.00593%
4-nov-02	0.65866	0.0961%	0.00597%
5-nov-02	0.68053	0.0971%	0.00616%
6-nov-02	0.71192	0.1001%	0.00653%
7-nov-02	0.71052	0.0997%	0.00652%
8-nov-02	0.71106	0.0995%	0.00652%
11-nov-02	0.70746	0.0987%	0.00645%
12-nov-02	0.70529	0.1007%	0.00650%
13-nov-02	0.70019	0.1022%	0.00656%
14-nov-02	0.70496	0.1024%	0.00660%
18-nov-02	0.69798	0.1015%	0.00652%
19-nov-02	0.67826	0.0996%	0.00632%
20-nov-02	0.66096	0.0977%	0.00610%
21-nov-02	0.64539	0.0979%	0.00598%
22-nov-02	0.64395	0.0984%	0.00597%
25-nov-02	0.64301	0.0981%	0.00596%
26-nov-02	0.64459	0.0987%	0.00599%
27-nov-02	0.63877	0.0990%	0.00597%
28-nov-02	0.64497	0.1007%	0.00605%
29-nov-02	0.61029	0.0999%	0.00579%
2-dez-02	0.57772	0.1003%	0.00572%
3-dez-02	0.55271	0.1009%	0.00560%
4-dez-02	0.58041	0.1015%	0.00577%
5-dez-02	0.58680	0.1029%	0.00587%
6-dez-02	0.57575	0.1018%	0.00578%
9-dez-02	0.58258	0.1028%	0.00584%
10-dez-02	0.60330	0.1037%	0.00601%
11-dez-02	0.57304	0.1022%	0.00579%
12-dez-02	0.53862	0.1017%	0.00555%
13-dez-02	0.53749	0.1016%	0.00552%
16-dez-02	0.50860	0.1004%	0.00529%

Data	Alfa	Theta	Sigma
17-dez-02	0.40918	0.0973%	0.00457%
18-dez-02	0.22812	0.0952%	0.00322%
19-dez-02	0.24970	0.0965%	0.00345%
20-dez-02	0.25081	0.0968%	0.00346%
23-dez-02	0.27014	0.0976%	0.00364%
24-dez-02	0.26699	0.0977%	0.00361%
26-dez-02	0.27298	0.0980%	0.00366%
27-dez-02	0.25936	0.0974%	0.00355%
30-dez-02	0.27535	0.0981%	0.00367%
31-dez-02	0.27166	0.0982%	0.00364%
2-jan-03	0.24414	0.0966%	0.00347%
3-jan-03	0.19853	0.0954%	0.00304%
6-jan-03	0.10155	0.0929%	0.00207%
7-jan-03	0.08414	0.0923%	0.00185%
8-jan-03	0.07822	0.0914%	0.00179%
9-jan-03	0.06476	0.0909%	0.00161%
10-jan-03	0.05251	0.0894%	0.00150%
13-jan-03	0.08222	0.0903%	0.00184%
14-jan-03	0.07093	0.0899%	0.00171%
15-jan-03	0.11702	0.0912%	0.00224%
16-jan-03	0.10933	0.0909%	0.00217%
17-jan-03	0.11404	0.0912%	0.00221%
20-jan-03	0.12404	0.0916%	0.00231%
21-jan-03	0.13039	0.0920%	0.00237%
22-jan-03	0.12475	0.0925%	0.00229%
23-jan-03	0.14303	0.0938%	0.00255%
24-jan-03	0.24117	0.0975%	0.00342%
27-jan-03	0.27802	0.0993%	0.00374%
28-jan-03	0.24378	0.0978%	0.00344%
29-jan-03	0.19595	0.0966%	0.00301%
30-jan-03	0.22389	0.0974%	0.00328%

Data	Alfa	Theta	Sigma
31-jan-03	0.25723	0.0981%	0.00357%
3-fev-03	0.23465	0.0976%	0.00337%
4-fev-03	0.26300	0.0985%	0.00362%
5-fev-03	0.27017	0.0987%	0.00369%
6-fev-03	0.25119	0.0994%	0.00351%
7-fev-03	0.24663	0.0996%	0.00346%
10-fev-03	0.20997	0.0989%	0.00312%
11-fev-03	0.21826	0.0989%	0.00320%
12-fev-03	0.23068	0.0992%	0.00331%
13-fev-03	0.23331	0.1006%	0.00331%
14-fev-03	0.22650	0.1009%	0.00324%
17-fev-03	0.22206	0.1003%	0.00322%
18-fev-03	0.20072	0.0997%	0.00301%
19-fev-03	0.19598	0.1004%	0.00295%
20-fev-03	0.17083	0.0998%	0.00286%
21-fev-03	0.18344	0.0999%	0.00300%
24-fev-03	0.20882	0.1002%	0.00325%
25-fev-03	0.22041	0.1002%	0.00337%
26-fev-03	0.19174	0.0995%	0.00310%
27-fev-03	0.18867	0.0998%	0.00306%
28-fev-03	0.17236	0.0995%	0.00289%
5-mar-03	0.15106	0.0988%	0.00267%
6-mar-03	0.11257	0.0977%	0.00224%
7-mar-03	0.11010	0.0977%	0.00222%
10-mar-03	0.11484	0.0976%	0.00228%
11-mar-03	0.09708	0.0970%	0.00207%
12-mar-03	0.09235	0.0967%	0.00201%
13-mar-03	0.05345	0.0953%	0.00147%
14-mar-03	0.04290	0.0948%	0.00130%
17-mar-03	0.05832	0.0957%	0.00153%
18-mar-03	0.03097	0.0944%	0.00108%

Data	Alfa	Theta	Sigma
19-mar-03	0.04340	0.0957%	0.00123%
20-mar-03	0.05506	0.0961%	0.00144%
21-mar-03	0.02774	0.0947%	0.00094%
24-mar-03	0.02959	0.0948%	0.00098%
25-mar-03	0.01856	0.0945%	0.00069%
26-mar-03	0.01646	0.0941%	0.00065%
27-mar-03	0.02941	0.0947%	0.00094%
28-mar-03	0.01678	0.0941%	0.00063%
31-mar-03	0.02373	0.0945%	0.00084%
1-abr-03	0.00928	0.0934%	0.00048%
2-abr-03	0.00236	0.0924%	0.00036%
3-abr-03	0.00226	0.0908%	0.00073%
4-abr-03	0.00241	0.0905%	0.00078%
7-abr-03	0.00861	0.0894%	0.00108%
8-abr-03	0.00158	0.0903%	0.00079%
9-abr-03	0.00154	0.0906%	0.00073%
10-abr-03	0.00120	0.0920%	0.00041%
11-abr-03	-0.00043	0.0912%	0.00056%
14-abr-03	0.00304	0.0910%	0.00071%
15-abr-03	0.01118	0.0902%	0.00103%
16-abr-03	0.00825	0.0902%	0.00098%
17-abr-03	0.01810	0.0888%	0.00130%
22-abr-03	0.02423	0.0884%	0.00146%
23-abr-03	0.02739	0.0884%	0.00150%
24-abr-03	0.02070	0.0888%	0.00137%
25-abr-03	0.04680	0.0874%	0.00182%
28-abr-03	0.06215	0.0867%	0.00201%
29-abr-03	0.08357	0.0862%	0.00224%
30-abr-03	0.08054	0.0866%	0.00220%
2-mai-03	0.08431	0.0870%	0.00222%
5-mai-03	0.07974	0.0873%	0.00216%

Data	Alfa	Theta	Sigma
6-mai-03	0.10111	0.0869%	0.00238%
7-mai-03	0.15201	0.0855%	0.00280%
8-mai-03	0.16994	0.0849%	0.00293%
9-mai-03	0.18421	0.0854%	0.00302%
12-mai-03	0.20477	0.0854%	0.00314%
13-mai-03	0.26315	0.0842%	0.00347%
14-mai-03	0.28912	0.0838%	0.00360%
15-mai-03	0.17824	0.0853%	0.00297%
16-mai-03	0.19698	0.0853%	0.00309%
19-mai-03	0.21728	0.0848%	0.00321%
20-mai-03	0.14324	0.0861%	0.00272%
21-mai-03	0.20802	0.0852%	0.00316%
22-mai-03	0.24984	0.0847%	0.00340%
23-mai-03	0.25772	0.0852%	0.00344%
26-mai-03	0.21123	0.0858%	0.00317%
27-mai-03	0.17437	0.0861%	0.00293%
28-mai-03	0.18983	0.0857%	0.00303%
29-mai-03	0.20213	0.0855%	0.00311%
30-mai-03	0.17356	0.0861%	0.00292%
2-jun-03	0.17275	0.0864%	0.00291%
3-jun-03	0.18368	0.0860%	0.00299%
4-jun-03	0.21810	0.0849%	0.00321%
5-jun-03	0.23690	0.0846%	0.00331%
6-jun-03	0.27680	0.0840%	0.00353%
9-jun-03	0.30023	0.0834%	0.00364%
10-jun-03	0.31952	0.0834%	0.00373%
11-jun-03	0.32979	0.0832%	0.00378%
12-jun-03	0.31738	0.0828%	0.00372%
13-jun-03	0.32649	0.0821%	0.00376%
16-jun-03	0.34076	0.0818%	0.00382%
17-jun-03	0.32341	0.0819%	0.00374%

Data	Alfa	Theta	Sigma
18-jun-03	0.30460	0.0822%	0.00366%
20-jun-03	0.30814	0.0821%	0.00363%
23-jun-03	0.30938	0.0817%	0.00363%
24-jun-03	0.29588	0.0815%	0.00356%
25-jun-03	0.25756	0.0819%	0.00337%
26-jun-03	0.24871	0.0819%	0.00333%
27-jun-03	0.23829	0.0818%	0.00328%
30-jun-03	0.22914	0.0816%	0.00323%
1-jul-03	0.26835	0.0810%	0.00343%
2-jul-03	0.29130	0.0807%	0.00354%
3-jul-03	0.30793	0.0799%	0.00361%
4-jul-03	0.33960	0.0790%	0.00373%
7-jul-03	0.30374	0.0794%	0.00358%
8-jul-03	0.30926	0.0789%	0.00360%
9-jul-03	0.30419	0.0788%	0.00357%
10-jul-03	0.25966	0.0795%	0.00337%
11-jul-03	0.27195	0.0795%	0.00343%
14-jul-03	0.28622	0.0786%	0.00349%
15-jul-03	0.27876	0.0786%	0.00345%
16-jul-03	0.30382	0.0779%	0.00356%
17-jul-03	0.29691	0.0778%	0.00352%
18-jul-03	0.29981	0.0770%	0.00353%
21-jul-03	0.30906	0.0765%	0.00356%
22-jul-03	0.30213	0.0761%	0.00352%
23-jul-03	0.27151	0.0773%	0.00340%
24-jul-03	0.28884	0.0770%	0.00335%
25-jul-03	0.25850	0.0773%	0.00321%
28-jul-03	0.22792	0.0775%	0.00306%
29-jul-03	0.19075	0.0779%	0.00285%
30-jul-03	0.15312	0.0783%	0.00262%
31-jul-03	0.12363	0.0785%	0.00243%

Data	Alfa	Theta	Sigma
1-ago-03	0.07610	0.0793%	0.00204%
4-ago-03	-0.00859	0.0829%	0.00064%
5-ago-03	0.03551	0.0801%	0.00162%
6-ago-03	0.01870	0.0803%	0.00141%
7-ago-03	0.08012	0.0783%	0.00210%
8-ago-03	0.12410	0.0774%	0.00245%
11-ago-03	0.13857	0.0768%	0.00255%
12-ago-03	0.08633	0.0774%	0.00218%
13-ago-03	0.07433	0.0771%	0.00209%
14-ago-03	0.03860	0.0773%	0.00178%
15-ago-03	0.03788	0.0770%	0.00178%
18-ago-03	0.03484	0.0765%	0.00178%
19-ago-03	0.02011	0.0763%	0.00164%
20-ago-03	0.04457	0.0736%	0.00155%
21-ago-03	0.02892	0.0737%	0.00134%
22-ago-03	0.05143	0.0726%	0.00163%
25-ago-03	0.04885	0.0726%	0.00159%
26-ago-03	0.07257	0.0718%	0.00182%
27-ago-03	0.13157	0.0707%	0.00225%
28-ago-03	0.11205	0.0708%	0.00213%
29-ago-03	0.10803	0.0705%	0.00211%
1-set-03	0.11519	0.0701%	0.00216%
2-set-03	0.09731	0.0701%	0.00204%
3-set-03	0.09449	0.0702%	0.00202%
4-set-03	0.11978	0.0692%	0.00220%
5-set-03	0.14747	0.0684%	0.00237%
8-set-03	0.10667	0.0687%	0.00213%
9-set-03	0.06902	0.0690%	0.00188%
10-set-03	0.08356	0.0683%	0.00199%
11-set-03	0.06093	0.0682%	0.00184%
12-set-03	0.06195	0.0677%	0.00186%

Data	Alfa	Theta	Sigma
15-set-03	0.05413	0.0671%	0.00182%
16-set-03	0.02764	0.0676%	0.00161%
17-set-03	0.01882	0.0674%	0.00154%
18-set-03	0.06010	0.0669%	0.00154%
19-set-03	0.06777	0.0666%	0.00161%
22-set-03	0.06684	0.0665%	0.00160%
23-set-03	0.04599	0.0670%	0.00141%
24-set-03	0.04764	0.0669%	0.00144%
25-set-03	0.03165	0.0674%	0.00125%
26-set-03	0.02214	0.0675%	0.00114%
29-set-03	0.01560	0.0675%	0.00106%
30-set-03	0.04088	0.0666%	0.00138%
1-out-03	0.04969	0.0664%	0.00147%
2-out-03	0.05034	0.0661%	0.00149%
3-out-03	0.05238	0.0659%	0.00152%
6-out-03	0.04331	0.0659%	0.00144%
7-out-03	0.03847	0.0659%	0.00140%
8-out-03	0.04241	0.0656%	0.00145%
9-out-03	0.04437	0.0654%	0.00147%
10-out-03	0.04067	0.0653%	0.00144%
13-out-03	0.04355	0.0651%	0.00148%
14-out-03	0.05079	0.0647%	0.00155%
15-out-03	0.04775	0.0646%	0.00153%
16-out-03	0.03080	0.0646%	0.00139%
17-out-03	0.01987	0.0650%	0.00128%
20-out-03	0.02797	0.0646%	0.00138%
21-out-03	0.03036	0.0643%	0.00140%
22-out-03	0.02028	0.0644%	0.00131%
23-out-03	0.03678	0.0645%	0.00124%
24-out-03	0.03138	0.0646%	0.00117%
27-out-03	0.02644	0.0647%	0.00112%

Data	Alfa	Theta	Sigma
28-out-03	0.03192	0.0643%	0.00119%
29-out-03	0.01475	0.0648%	0.00096%
30-out-03	0.00571	0.0650%	0.00083%
31-out-03	0.00541	0.0647%	0.00086%
3-nov-03	0.01027	0.0644%	0.00096%
4-nov-03	0.00654	0.0645%	0.00090%
5-nov-03	0.00670	0.0646%	0.00090%
6-nov-03	0.00277	0.0644%	0.00086%
7-nov-03	0.00336	0.0641%	0.00090%
10-nov-03	0.00312	0.0637%	0.00093%
11-nov-03	-0.00264	0.0640%	0.00082%
12-nov-03	0.00025	0.0637%	0.00090%
13-nov-03	-0.00531	0.0638%	0.00080%
14-nov-03	-0.00785	0.0637%	0.00079%
17-nov-03	-0.00890	0.0634%	0.00080%
18-nov-03	-0.01139	0.0633%	0.00077%
19-nov-03	-0.01630	0.0627%	0.00075%
20-nov-03	0.00585	0.0608%	0.00072%
21-nov-03	0.00841	0.0606%	0.00078%
24-nov-03	0.00836	0.0603%	0.00081%
25-nov-03	0.01031	0.0601%	0.00086%
26-nov-03	0.01050	0.0597%	0.00090%
27-nov-03	0.01317	0.0594%	0.00095%
28-nov-03	0.01293	0.0593%	0.00095%
1-dez-03	0.01624	0.0590%	0.00100%
2-dez-03	0.01886	0.0588%	0.00104%
3-dez-03	0.01102	0.0587%	0.00098%
4-dez-03	0.00268	0.0585%	0.00089%
5-dez-03	0.00040	0.0585%	0.00086%
8-dez-03	0.00065	0.0581%	0.00090%
9-dez-03	0.00632	0.0577%	0.00099%

Data	Alfa	Theta	Sigma
10-dez-03	-0.00620	0.0583%	0.00081%
11-dez-03	-0.00745	0.0580%	0.00082%
12-dez-03	-0.01018	0.0580%	0.00078%
15-dez-03	-0.01486	0.0581%	0.00071%
16-dez-03	-0.01745	0.0579%	0.00069%
17-dez-03	-0.02132	0.0580%	0.00063%
18-dez-03	0.00287	0.0578%	0.00059%
19-dez-03	0.00189	0.0580%	0.00055%
22-dez-03	-0.00148	0.0583%	0.00045%
23-dez-03	-0.00238	0.0582%	0.00046%
24-dez-03	-0.00281	0.0581%	0.00045%
26-dez-03	-0.00226	0.0585%	0.00040%
29-dez-03	-0.00432	0.0584%	0.00037%
30-dez-03	-0.00487	0.0583%	0.00037%
2-jan-04	-0.00614	0.0581%	0.00038%
5-jan-04	-0.00634	0.0579%	0.00043%
6-jan-04	-0.00466	0.0577%	0.00050%
7-jan-04	0.00146	0.0572%	0.00066%

Data	Alfa	Theta	Sigma
8-jan-04	0.00521	0.0567%	0.00076%
9-jan-04	0.01177	0.0562%	0.00087%
12-jan-04	0.01045	0.0561%	0.00086%
13-jan-04	0.00889	0.0558%	0.00087%
14-jan-04	0.00229	0.0564%	0.00075%
15-jan-04	-0.00085	0.0564%	0.00071%
16-jan-04	-0.00093	0.0563%	0.00072%
19-jan-04	-0.00066	0.0564%	0.00071%
20-jan-04	-0.00066	0.0564%	0.00070%
21-jan-04	0.00151	0.0565%	0.00072%
22-jan-04	0.03229	0.0577%	0.00097%
23-jan-04	0.04935	0.0575%	0.00113%
26-jan-04	0.08033	0.0572%	0.00137%
27-jan-04	0.06333	0.0575%	0.00124%
28-jan-04	0.04285	0.0577%	0.00106%
29-jan-04	0.01985	0.0584%	0.00078%
30-jan-04	0.01282	0.0585%	0.00066%