

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bjbfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Instituto de Matemática e Estatística
Mestrado Profissionalizante "Modelagem Matemática em Finanças"

**Aplicação do Modelo de Black-Karasinski ao Apreçamento de
Opções de Taxa de Juros no Mercado Brasileiro**

Alexandre de Oliveira

Orientador: Gerson Francisco (IFT-UNESP)

Co-Orientador: Joe Akira Yoshino (FEA-USP)

São Paulo

2005

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Instituto de Matemática e Estatística
Mestrado Profissionalizante "Modelagem Matemática em Finanças"

DEDALUS - Acervo - FEA



20600028751

Aplicação do Modelo de Black-Karasinski ao Apreçamento de Opções de Taxa de Juros no Mercado Brasileiro

Alexandre de Oliveira

USP - FEA - SBD
DATA DA DEFESA 09 / 11 / 05

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre.

Orientador: Gerson Francisco (IFT-UNESP)

Co-Orientador: Joe Akira Yoshino (FEA-USP)

São Paulo

2005



882871

T332 048a
T88287



2060028751



Powered by MidProcess - www.midprocess.com.br

À minha esposa e companheira Kátia de Oliveira Fernandes por sua incansável paciência e compreensão sem o que este trabalho não teria sido possível.

Ao meu filho Rafael por todos os momentos em que estive ausente.

Agradecimentos

A experiência de um mestrado feito em paralelo com o trabalho sem dúvida nenhuma exige uma grande dose de determinação e perseverança. Mas, sem o apoio dos mais próximos seja em casa, no trabalho ou dos amigos, esta tarefa pode facilmente se transformar numa barreira intransponível.

Agradeço aos meus pais por terem me ensinado que nunca devemos esmorecer. Aos meus familiares por todo apoio, sobretudo nos momentos mais críticos. Aos meus amigos pela torcida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gerson Francisco por seu incentivo e atenção despendida na consecução deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Joe Yoshino, por sua paciência, dedicação e pelas infundáveis discussões que foram decisivas para o encaminhamento do trabalho.

Aos demais professores do Mestrado Profissionalizante em Modelagem Matemática em Finanças da FEAVIME-USP que contribuíram com idéias e sugestões, principalmente, o Prof. Dr. Rogério Rosenfel e Prof. Dr. Renato Vicente, dentre outros.

Agradeço a todos meus colegas de trabalho que contribuíram com sugestões e questionamentos construtivos, com dados de mercado e acima de tudo com compreensão.

Também agradeço ao Banco Santander pelo apoio não apenas moral, mas sobretudo financeiro sem o qual este projeto teria sido inviabilizado desde o princípio.

Acima de tudo e todos agradeço a Deus por ter me dado esta oportunidade de crescimento.

Resumo

Com a maior estabilidade da economia brasileira após a crise cambial de 1999 e as eleições em 2002, o mercado de derivativos brasileiro vem passando por um processo evolutivo que visa a atender a demanda crescente por proteção ao risco. Apesar deste processo ter se iniciado no mercado de câmbio, atualmente é no mercado de renda fixa que tem ocorrido o maior desenvolvimento, embora, opções sobre juros ainda sejam normalmente apreçadas com o modelo de Black (1976). Contudo, trata-se de um modelo com aplicações limitadas no mercado de renda fixa dado que não consegue modelar a dinâmica de toda a curva de juros. Assim, a medida em que este mercado se desenvolve, é preciso que se busque a implementação de modelos capazes de fornecer um tratamento mais adequado da dinâmica da estrutura a termo das taxas de juros. Este trabalho visa realizar uma implementação aplicada a um caso prático de apreçamento de opções sobre futuro DI utilizando o modelo unifatorial de Black-Karasinski. Por se tratar de um modelo que não admite solução analítica, iremos implementá-lo com árvores trinomiais de acordo com o procedimento de construção geral proposto por Hull-White (Fall 1994).

Abstract

As the Brazilian economy has been facing a growing stability since the crisis in the foreign exchange in 1999 and the presidential election in 2002, its derivatives market has been going through an evolution process which aims to supply the growing demand for risk protection. Despite this process has started in the foreign exchange market, it is in the fixed income market that currently lies the greatest developments, even though, interest rate options are still priced with the Black's (1976) model. Nevertheless, it is a model that suffers from some limitations in its use in this market provided it just can not model the whole yield curve dynamics. Hence, with the interest rate market development, it is fundamental to search for the implementation of models that could be able to provide a more suitable treatment of the whole interest rate term structure dynamics. This work tackles an implementation of the one-factor Black-Karasinski model applied to the pricing of interest rate options on interbank deposit futures of the Brazilian financial market. Considering the fact this model is not analytically tractable, it will be implemented with the numerical approach of trinomial trees under the general tree-building procedure proposed by Hull-White (Fall 1994).

Conteúdo

1. INTRODUÇÃO	3
2. MERCADO – EVOLUÇÃO E DINÂMICA	8
2.1 MERCADO INTERNACIONAL	9
2.1.1 Riscos em Renda Fixa	9
2.1.2 Taxas de Juros	11
2.1.3 Taxa de Juros Livre de Riscos	13
2.2 MERCADO BRASILEIRO	15
2.2.1 Dívida Pública Interna	15
2.2.2 Mercado Monetário	20
2.2.2.1 Repos	20
2.2.2.2 Interbancário	22
2.2.3 Derivativos de Renda Fixa	25
2.2.3.1 Futuros	25
2.2.3.2 Opções	30
2.2.4 Curva de Juros	32
2.2.4.1 Obtenção	32
2.2.4.2 Decomposição em Fatores	33
3. MODELOS DE TAXAS DE JUROS	38
3.1 NECESSIDADE DE MODELOS DE TAXAS DE JUROS	38
3.2 EVOLUÇÃO DOS MODELOS	39
3.3 O MODELO DE BLACK COMO REFERENCIAL	44
3.4 O MODELO DE BLACK-KARASINSKI	50
4. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE BLACK-KARASINSKI	54
4.1 PROCEDIMENTO GERAL DE CONSTRUÇÃO – MÉTODO DE HULL-WHITE	57
4.2 PASSO 1 - AJUSTE DO DRIFT DO MODELO	59
4.2.1 Construção da Árvore Simétrica	59
4.2.2 Ajuste à Curva de Juros de Mercado	63
4.3 O PREÇO DA OPÇÃO SOBRE FUTURO DI NA ÁRVORE	67
4.4 PASSO 2 - CALIBRAGEM DO TERMO ESTOCÁSTICO	68
4.4.1 Determinação da Função Objetivo	70
5. APLICAÇÃO DO MODELO A UM CASO PRÁTICO	71
5.1 DADOS DE MERCADO	72
5.1.1 A Curva de Juros	72
5.1.2 Velocidade de Reversão à Média	73
5.1.3 Cotações das Opções sobre Futuro DI	75
5.2 FLUXO DOS DADOS	76

5.3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	78
5.3.1 Aderência do Modelo à ETTJ.....	78
5.3.2 Comparação das Volatilidades e Preços entre Black e Black-Karasinski	80
5.4 PERFORMANCE COMPUTACIONAL DO MODELO	84
5.4.1 Número de Iterações.....	84
5.4.2 Tempo de Processamento.....	85
6. CONCLUSÕES.....	86
APÊNDICE	88
A.1 PROGRAMAS EM MATLAB	88
A.1.1 Rotinas de Black-Karasinski.....	88
A.1.2 Rotinas de Black.....	95
A.2 PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO	99
A.3 APLICAÇÃO DE NEWTON-RAPHSON AO AJUSTE DO MODELO À ETTJ	104
A.4 RESULTADOS DA CALIBRAGEM INDIVIDUAL DAS OPÇÕES	105
A.5 RESULTADOS DAS CALIBRAGENS DE GRUPOS OPÇÕES.....	106
A.5.1 Resultados de Black	106
A.5.2 Resultados de Black-Karasinski	107
BIBLIOGRAFIA	108

1. Introdução

Desde a criação em 1973 da primeira bolsa de opções em Chicago, o mercado financeiro mundial vem presenciando um crescimento vertiginoso no volume de negócios com derivativos. No Brasil, por sua vez, temos com o processo da abertura econômica e a integração com o mercado financeiro internacional a partir de 1990 um movimento cada vez mais sintonizado com as tendências dos mercados internacionais.

Se no início deste período de desenvolvimento, nosso mercado de derivativos se caracterizava mais pela presença de swaps e futuros, hoje já temos no mercado de opções uma alternativa cada vez mais real e atraente para se buscar proteção frente às flutuações nos fatores de riscos de mercado mais comuns: taxas de câmbio e taxas de juros.

Seguindo os mesmos passos da evolução dos mercados externos, temos atualmente o mercado de opções sobre taxas de juros como sendo uma das mais novas alternativas de investimento disponíveis no mercado financeiro local, mais precisamente, na BM&F.

Uma questão, portanto, que surge imediatamente refere-se ao modelo de apreçamento e gestão de risco utilizado neste mercado na atualidade. Verificamos que, em similaridade com os mercados de ações e câmbio, bem como, com a história evolutiva dos mercados internacionais, o modelo predominante é o de Black (1976)¹.

Um dos motivos que justifica a popularidade deste modelo, em conjunto com seus antecessores – Black-Scholes (BS) e Merton ambos de 1973 – é a existência de uma solução analítica o que contribui para uma compreensão maior de como cada variável influencia o modelo, bem como, a necessidade de se calibrar um único parâmetro: a volatilidade do preço do ativo-objeto. Um outro ponto, que decorre do fato de ter solução analítica, está no baixo custo computacional em comparação com modelos que necessitam de soluções numéricas, principalmente, Monte Carlo devido ao seu elevado custo computacional.

¹ Neste trabalho, o denominaremos de Black.

De toda forma, há que se considerar que, com a drástica elevação da capacidade de processamento dos computadores nos últimos anos, a implementação de modelos numéricos passa a ser cada vez mais viável possibilitando a aplicação de modelos cada vez mais ricos e complexos em sua formulação.

O modelo de Black possui em sua formulação praticamente a mesma abordagem utilizada no modelo de BS, ou seja, os preços do ativo-objeto seguem um processo browniano geométrico fazendo com que seus retornos sigam uma distribuição lognormal tendo seus dois primeiros momentos conhecidos e constantes. Outra hipótese fundamental no modelo de BS está na introdução da medida neutra ao risco que faz com seja possível se construir um portfólio replicante contendo a opção e o respectivo ativo-objeto em quantidades tais que façam com que o portfólio seja remunerado à taxa livre de risco. Logo, o grande avanço no modelo de BS se encontra na possibilidade de apreçamento de opções independentemente das funções de utilidade de cada investidor ou, em última análise, da aversão ao risco dos indivíduos.

A diferença no Black está na sua medida de probabilidade que passa a ser *forward* ao invés de *spot*. Para aplicações em mercados de câmbio ou ações, tal diferença sutil pode ser considerada sem maior relevância, porém, para aplicações em modelos de taxas de juros esta diferença foi crucial, nos mercados mais evoluídos, para justificar a utilização deste último modelo em detrimento dos anteriores. A razão principal reside na observação do comportamento decrescente da volatilidade de um título à medida que se aproxima do vencimento o que conflita totalmente com a hipótese de volatilidade constante assumida no modelo de BS. Este efeito fica ainda mais evidente a medida em que o vencimento do título tem um prazo comparável com o da opção em questão.

Com isto, a medida neutra ao risco *forward* contida no Black corrige este problema na volatilidade. Porém, mesmo utilizando-se os inputs corretos para o modelo (preço e volatilidade do preço a termo), há algo que ainda ele não é capaz de capturar conforme observa Rebonato (2002 – pg 6): apesar de ser consenso que cada ponto no tempo gera um preço a termo diferente para um mesmo título e, assim, cada ponto no tempo dá origem a um ativo-objeto diferente, é também sabido

que estes ativos são altamente correlacionados. No entanto, o modelo de Black não possui um mecanismo capaz de dar conta desta dinâmica conjunta.

De fato, esta é a grande característica da modelagem das estruturas a termo das taxas de juros (ETTJ), ou simplesmente curvas de juros, que a faz ter um comportamento completamente distinto de outras classes de ativos, pois, enquanto no mercado de câmbio ou de renda variável tipicamente há que se modelar o comportamento de uma única variável ao longo do tempo, ou seja, um preço, para as ETTJ é preciso se modelar as flutuações ao longo de toda a estrutura a termo. Em outras palavras, enquanto modelamos variáveis escalares nos outros mercados, na renda fixa temos que considerar vetores se quisermos obter modelos capazes de capturar os efeitos conjuntos da estrutura.

Dentro do ramo da modelagem das curvas de juros para o apreçamento de derivativos, temos já uma extensa coleção de trabalhos podendo-se dar como marco inicial o trabalho clássico de Vasicek (1977) e passando por Cox, Ingersoll e Ross (CIR – 1985), Heath, Jarrow e Morton (HJM – 1987), Black, Derman e Toy (BDT – 1990), Hull-White (HW – 1990), Black-Karasinski (BK – 1991) e Brace, Gatarek e Musiela (BGM – 1996), dentre outros muitos. No entanto, devido à complexidade do tema é consenso que se está ainda longe de se vislumbrar um modelo capaz de estabelecer um referencial tão forte quanto o modelo de BS é para o mercado de renda variável.

Apesar da já comentada limitação no modelo de Black de não possuir um mecanismo capaz de dar conta da dinâmica de toda a ETTJ ser conhecida pelos praticantes em geral, ele ainda é muito usado na prática. No mercado internacional para apreçar títulos, *caps*, *floors* e *swaptions* que são considerados como instrumentos plain-vanilla. Aqui no Brasil, é utilizado no apreçamento de opções em geral incluindo as de taxas de juros que podem ser consideradas, em alguns casos, como os *caps* e *floors* do mercado externo.

No entanto, a medida que o mercado vai se sofisticando e partindo para oferecer produtos mais exóticos como derivativos que dependem da trajetória das taxas de juros, barreiras, títulos com opcionalidades embutidas (*callable* e *puttable bonds*) e opções do tipo americana, dentre outras possibilidades, modelos como os citados acima terão que ser utilizados. Se seguirmos a mesma tendência dos mercados internacionais, estes instrumentos mais exóticos devem ser hedgeados

com base nos instrumentos plain-vanilla que no caso seriam as opções de taxas de juros atuais.

Assim, o presente trabalho tem por objetivo implementar o modelo de Black-Karasinski (BK) em árvores trinomiais para o apreçamento de opções sobre futuro DI. Tomamos como referencial para comparação o modelo de Black por ser o mais utilizado pelo mercado.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

O capítulo 2 faz uma análise do mercado de renda fixa no Brasil. Inicialmente, mostramos com é seu funcionamento em linhas gerais traçando um comparativo entre o mercado internacional com o brasileiro. Apresentamos também o mercado de títulos no Brasil, além dos derivativos em taxas de juros existentes. Por último, apresentamos a curva de juros decorrente da estrutura do nosso mercado bem como suas características.

O capítulo 3 aborda a questão dos modelos de taxas de juros. Não se pretende aqui fazer uma recompilação detalhada de cada modelo existente, mas mostrar apenas algumas características de cada família de modelos e apresentar como o modelo de Black é adaptado para o apreçamento das opções de taxas de juros que será objeto de análise do presente trabalho e, em seguida, discutir um pouco mais detalhadamente o modelo de BK.

O capítulo 4 mostra a implementação do modelo de BK. Mostra as particularidades do método de árvores trinomiais, bem como, o procedimento geral de construção de árvores trinomiais adaptado de Hull-White (1994) para o modelo de BK. Mostra como se realiza ajuste à uma ETTJ dada, bem como, a calibragem da volatilidade da equação estocástica diferencial que define o processo.

O capítulo 5 mostra a aplicação do modelo discutido nos dois capítulos anteriores a uma situação real. Apresenta os dados de mercado como curva de juros e a carteira de opções e, em seguida, apresenta os resultados obtidos, bem como, oferece algum subsídio sobre a performance computacional do modelo.

O capítulo 6 apresenta as conclusões acerca da aplicabilidade do modelo ao caso brasileiro procurando mostrar suas virtudes e limitações, bem como, propor possíveis desenvolvimentos futuros.

No apêndice temos os códigos Matlab utilizados, além de, outras questões mais técnicas que julgamos que seja mais adequado estarem fora dos respectivos capítulos para não prejudicar a fluidez do texto e acabar desviando a atenção do leitor para outros temas.

2. Mercado – Evolução e Dinâmica

De forma geral, podemos classificar o mercado de taxa de juros em função dos tipos de instrumentos utilizados como o de títulos públicos e privados ou de derivativos, bem como, em função do prazo das operações que se estendem desde operações com prazo de um dia até alguns anos. Em especial, operações com prazo de um dia são denominadas comumente de *overnight*.

Procuraremos dar uma visão geral de como o mercado funciona, considerando-se estas duas visões, sem termos a pretensão de esgotar ou, até mesmo, estarmos sendo originais, tendo em vista a existência de inúmeros livros já publicados tanto no exterior como, por exemplo, Hull (2004) e Fabozzi (2000) ou, no Brasil, Securato (2002). No entanto, entendemos ser importante dar ao leitor uma visão mais integrada sobre a evolução e a dinâmica deste mercado a fim de que possa compreender como modelos de taxas de juros, em geral, podem ser implementados tendo-se em conta as peculiaridades do mercado brasileiro.

Antes de iniciarmos, é importante que se tenha em mente que no mercado de taxas de juros, diferentemente do que acontece nos demais mercados, a própria taxa de juros pode servir como referência ou moeda conforme bem observa Securato (2002 – pg 121), uma vez que nos mercados de renda fixa, basicamente o que se está fazendo é comprar e vender dinheiro e a taxa de juros é o parâmetro que determina a remuneração ou o custo destes recursos em função de variáveis como prazo, montante, riscos envolvidos na operação (garantias), bem como, conjuntura econômica.

Inicialmente, discutiremos alguns aspectos importantes com base no mercado internacional como riscos, curvas de juros existentes e o que se considera como sendo uma taxa livre de risco. Em seguida, entramos no mercado brasileiro seguindo-o no mercado de Dívida Pública Mobiliária Federal Interna (DPMFi), Mercado Monetário e o de Derivativos. Mostraremos as particularidades destes seguimentos em termos de tamanho e perfil, bem como, as suas diferenças em relação ao mercado internacional. Por último, mostramos a ETTJ no mercado brasileiro como geralmente é obtida e como ela se caracteriza.

2.1 Mercado Internacional

Apenas para delimitar um pouco, quando falamos em mercado internacional, temos em mente os mercados americano e europeu por se tratarem dos mais desenvolvidos e, por conseqüência, os de maior liquidez.

No entanto, vamos nos deter apenas em suas características mais básicas, uma vez que, não é nosso objetivo aqui fazer uma análise detalhada deste aspecto, mas apenas ressaltar algumas questões relevantes de maneira a servir de contraponto e referência para a análise do mercado brasileiro. Assim, será suficiente delimitarmos nosso foco nos títulos públicos federais americanos e no mercado de moeda.

2.1.1 Riscos em Renda Fixa

Para se poder definir ou adotar um ativo como sendo livre de risco em um determinado mercado, é preciso primeiro que se entenda um pouco quais os tipos de riscos que o caracteriza, conforme argumenta Fabozzi (2000 – pg 34). No caso específico de renda fixa, os riscos referem-se a um conjunto de situações que geram incertezas ou dispersões nos fluxos de caixa futuros.

Dentro desta ótica, podemos citar os seguintes tipos de riscos:

- Taxa de juros: trata-se da flutuação no valor de um título, principalmente de forma desfavorável ao seu detentor, com a variação em toda a ETTJ ao longo do tempo. Este é o risco mais presente que se encontra na vida de aplicações tradicionais de renda fixa, pois, apesar de se ter contratado uma taxa na largada da operação fixando a rentabilidade para seu detentor, a situação no mercado ao longo da vida da aplicação poderá mudar drasticamente definindo novos patamares de rentabilidade pelo prazo remanescente da operação.

- Opcionalidades: trata-se do risco que o detentor de um título possui em ter sua rentabilidade limitada a uma determinada taxa máxima como em um *cap* ou a existência de cláusulas que permitam o seu emissor resgatar antecipadamente a dívida caso as taxas de juros alcancem um determinado nível. Um exemplo deste último caso temos no C-bond o qual em determinadas datas permite ao Tesouro resgatar a dívida toda ao valor par.
- Reinvestimento: sempre que existe a possibilidade de o emissor poder resgatar uma dívida antes de seu vencimento e esta já possuía uma rentabilidade fixada previamente, há o risco para o investidor de ter que reaplicar os recursos, provenientes do resgate antecipado, a taxas inferiores a da aplicação original afetando, assim, o seu resultado final. Desta forma, vemos que opcionalidades como as comentadas anteriormente, estão intimamente relacionadas com o risco de reinvestimento.
- Crédito: quando pensamos neste tipo de risco a primeira questão que surge é a possibilidade do tomador não conseguir honrar o pagamento nas condições inicialmente acordadas, ou seja, no prazo e no montante. A este tipo de ocorrência denomina-se de risco de *default*, pois, o credor pode não receber nem juros nem o principal da dívida contraída. No entanto, ainda podemos ter o risco de *downgrade* o qual se refere a um rebaixamento na classificação de um determinado emissor fazendo com que suas emissões sofram uma redução no seu valor a mercado, dado que a percepção é de que a probabilidade de *default* tenha se elevado.

Além dos fatores comentados acima, ainda temos outros como que não estão diretamente relacionados com as taxas de juros praticadas, tais como:

- Liquidez: possibilita que o valor de um título a ser negociado no mercado secundário seja significativamente abaixo de transações recentes.

- Moeda: ocorre quando um título é negociado ou é indexado a uma outra moeda que não seja a doméstica.
- Volatilidade: ocorre com emissões que possuem opcionalidades as quais, por sua vez, podem reduzir o valor de um título. Neste sentido, a volatilidade pode elevar a probabilidade de que estas opções possam ser exercidas antecipadamente pelo emissor sendo, portanto, uma fonte de risco para o investidor.

2.1.2 Taxas de Juros

Um dos mercados mais importantes no seguimento de renda fixa em todo o mundo é o de títulos da dívida do governo americano. Um dos pontos mais importantes é o fato de ser considerado um mercado livre de risco de *default*, uma vez que, considera-se a possibilidade de o Tesouro ter a capacidade de emitir moeda para honrar suas obrigações em situações extremas.

Devido à existência de uma grande quantidade de emissões de títulos do governo e com liquidez em muitos prazos, a curva de juros sobre os títulos americanos se constitui em uma das principais referências para se apreçar tanto emissões privadas locais como emissões externas de outros países como o Brasil.

Note-se, porém, que se trata de uma curva dita livre de risco de *default*, mas não livre de riscos de flutuações nos valores dos títulos em virtude da volatilidade nas taxas de juros. Assim sendo, esta curva serve de base para a construção de outras ETTJ que contemplem determinados graus de risco de crédito o que não significaria que o detentor de um título do governo americano estaria igualmente livre de riscos de mercado.

Outro mercado extremamente importante é o chamado interbancário no qual grandes bancos operam entre si depósitos denominados em diversas moedas para vários prazos como 1 mês, 3 meses, 6 meses e 12 meses. Embora possua uma cotação para *bid* (LIBID – London Interbank Bid Rate) e outra para *ask* (LIBOR - London Interbank Offered Rate), a segunda é geralmente utilizada como referência.

Como este mercado é entre instituições financeiras privadas e não há garantias ou *collaterals*, suas taxas apresentam valores geralmente superiores aos das taxas do mercado de títulos do governo os chamados *Treasuries*. No entanto, os bancos costumam adotar este mercado como sendo a referência para seu custo de oportunidade de capital, uma vez que, é neste mercado que dão ou tomam dinheiro para se ajustar às suas necessidades financeiras de curto prazo (liquidez).

Conseqüentemente, sendo este o mercado que baliza o custo de oportunidade dos bancos, a uma tendência de se utilizar esta curva no lugar da de *Treasuries* como sendo a curva *risk-free* para o apreamento de contratos derivativos de acordo com Hull (2003 – pg 94).

Além destas duas importantes taxas, há a chamada *Repo rate* originada no mercado de *Repurchase Agreement*. Este mercado se caracteriza por operações na qual o tomador de dinheiro acorda um prazo – geralmente de 1 dia – e uma taxa (*Repo rate*) com o credor vendendo títulos com o compromisso de recomprá-los no vencimento da operação ao preço de volta pré-determinado. A diferença entre o valor de venda e de recompra mais o prazo definem a taxa repo. Assim, diferentemente do interbancário, esta operação envolve baixo risco de crédito, uma vez que, no caso de *default* do tomador o credor fica de posse dos títulos e, em caso contrário, o tomador fica com os recursos se o credor não devolver os títulos dados como garantia.

2.1.3 Taxa de Juros Livres de Riscos

Um dos problemas mais relevantes para a teoria econômica é a avaliação de ativos com riscos, ou seja, ativos cujo pagamento futuro possui algum grau de incerteza. Neste contexto, podemos tomar a teoria de portfólios desenvolvida principalmente por Markowitz (1952) e por Sharpe (1964).

Nesta teoria, parte-se de um ativo livre de risco na qual qualquer investidor pode tomar e dar recursos e combina-se este ativo com o portfólio de mercado que possui um determinado nível de risco. Por se tratar este último de um ativo com risco, segue que ele possui um prêmio ou retorno adicional em relação ao ativo livre de risco determinado por uma função linear que depende de um coeficiente beta que relaciona a covariância dos retornos dos dois ativos (com e sem risco) com a variância dos retornos do portfólio de mercado.

No entanto, Markowitz define o ativo livre de risco como sendo aquele cuja volatilidade dos seus retornos em torno de seu valor esperado é nula o que é uma outra forma de dizer que seu retorno é certo no futuro. Isto faz com que o beta acima comentado seja nulo por causa do termo da covariância.

Na prática, no entanto, não é uma tarefa trivial se determinar um ativo livre de risco ainda mais sendo este ativo a taxa de juros que apresenta forte correlação de toda a ETTJ. Porém uma questão é clara: dado que os títulos privados possuem um determinado risco de inadimplência não desprezível na quase totalidade dos casos, seguramente esta sub-classe de ativos de renda fixa não são candidatos a oferecer uma taxa livre de risco.

Isto nos remete diretamente aos títulos do governo americano, os *Treasuries*¹. Conforme já comentamos anteriormente, estes títulos são considerados livres de risco de crédito devido à possibilidade de emissão de moeda para seu pagamento no caso limite. O problema que surge é que como há uma enormidade de emissões que se espalham desde curtíssimo prazo (dias) até trinta anos, não haveria um único possível candidato para ser a taxa livre de risco. Com efeito, Fraletti (2004) lembra

¹ Os *Treasuries* são compostos por títulos de curto prazo indo até dois anos. São os chamados T-bills. Os T-Notes que vão até 10 anos e os T-Bonds que vão até 30 anos.

que vários estudos empíricos, como os de Copeland, Koller e Murrin (1995), mostram que a escolha recai sobre emissões de prazos variados.

Outra questão importante na determinação deste ativo livre de risco relaciona-se com os riscos de taxas de juros e de reinvestimento, anteriormente comentados, vis-à-vis o horizonte de tempo de investimento. Caso, seu horizonte seja superior haverá um risco de mercado ou preço, caso seja o contrário haverá um risco de reinvestimento por desconhecer a priori qual será a remuneração para seus recursos no final do horizonte de aplicação. Isto obriga, então, que o horizonte de investimento seja o mesmo do vencimento do dito ativo livre de risco conforme observa Fraletti (2004).

Em decorrência deste fato, vemos que no caso de renda fixa temos que pensar não em um único ponto no tempo para se determinar a taxa de juros livre de riscos, mas no conjunto de taxas em função do prazo, ou seja, na ETTJ que seja livre de risco para o mercado como um todo. No caso do mercado internacional, há duas candidatas naturais: a curva de *Treasuries* e a de Interbancário.

No entanto, nem sempre é possível se determinar com total certeza o horizonte de investimento o que faz com que se busque uma taxa de carregamento que não sofra influência de riscos como os citados anteriormente de liquidez, além do risco de mercado o qual induz investidores com elevado grau de incerteza em suas aplicações a preferirem investimentos de curto prazo. Neste sentido, Hull (2003 – pg 94) sugere a utilização das *repo rates* como uma *proxy* para a taxa livre de risco.

2.2 Mercado Brasileiro

Em contraposição aos mercados internacionais, nos quais temos pelo menos dois candidatos para curvas de juros livre de riscos, o mercado brasileiro não possui tantas alternativas. Assim, vamos procurar mostrar como este mercado se caracteriza e qual é a solução para se obter uma curva de juros que sirva de referência para as instituições financeiras de forma análoga ao caso internacional.

Inicialmente vamos analisar o perfil da dívida pública e verificar que se caracteriza por uma grande parte de títulos pós-fixados (LFT) e uma parte menor em títulos prefixados (LTN). Em seguida, passamos para o mercado monetário onde mostraremos o seu tamanho e evolução.

Finalmente, vamos para o mercado de derivativos de renda fixa onde centraremos nossa atenção em cima dos dois instrumentos que serão utilizados na segunda parte deste trabalho: Futuro DI e Opções sobre o Futuro DI.

Em decorrência desta discussão, chegamos na curva de juros livre de risco prefixada em reais geralmente utilizada no mercado brasileiro e que seria análoga às ETTJ comentadas para o caso do mercado externo.

2.2.1 Dívida Pública Interna

Em analogia ao caso discutido para o mercado externo, estaremos sempre nos referindo às emissões de dívida pública internas feitas tanto pelo Tesouro Nacional para cumprir com sua política fiscal, bem como, emissões do Banco Central para levar a cabo a política monetária, sem considerar as emissões externas do Tesouro realizadas atualmente com Globais ou de emissões antigas na forma de Bradies.

Vale ressaltar que as emissões de títulos por parte do Tesouro são sempre realizadas através do Banco Central que teria a função de estabelecer o relacionamento do tesouro com o mercado. O evento da emissão ou colocação no mercado dos títulos é sempre realizado via leilão onde o Banco Central faz o comunicado da oferta definindo as características do título como prazo e indexador e o mercado faz suas propostas. Este é o chamado mercado primário. Uma vez que

os títulos são colocados no mercado, as instituições passam a negociá-los entre si até o seu vencimento no chamado mercado secundário.

A medida que o Banco Central realiza mais leilões seja de emissões próprias ou do Tesouro a tendência é de que haja um aumento do passivo do governo pelo fato de ter mais dívida por ser paga no futuro. Este efeito não ocorreria apenas em situações de substituição de títulos que estão por vencer o que caracteriza a chamada rolagem da dívida.

Se olharmos na tabela seguinte temos uma primeira idéia do tamanho e da composição da Dívida Pública Mobiliária Federal interna (DPMFi) em maio de 2005, de acordo com o Banco Central.

<u>ESTOQUE DA DÍVIDA PÚBLICA MOBILIÁRIA FEDERAL INTERNA</u>					
<u>EM PODER DO PÚBLICO POR TÍTULO</u>					
	Em R\$ milhões				
	Negociáveis oferta pública	Negociáveis emissão direta	Total negociáveis	Inegociáveis	Total geral
Banco Central					
NBCE	12.158,85	-	12.158,85	-	12.158,85
Total	12.158,85	-	12.158,85	-	12.158,85
Tesouro Nacional					
LFT	432.308,10	75.654,60	507.962,70	-	507.962,70
LTN	190.373,50	-	190.373,50	-	190.373,50
NTN-F	5.417,11	-	5.417,11	-	5.417,11
NTN-C	75.586,50	4.232,01	79.818,51	-	79.818,51
NTN-D	3.940,73	1.655,42	5.596,15	-	5.596,15
NTN-B	15.202,69	11.245,51	26.448,21	-	26.448,21
Outros (reg. no Selic)	0,00	12.290,48	12.290,48	3.270,88	15.561,36
Dívida securitizada (a)	-	24.895,52	24.895,52	130,86	25.026,37
Certificados	0,34	13.519,43	13.519,78	3.167,00	16.686,77
LFT-E/M	-	-	-	-	-
TDA	-	2.880,72	2.880,72	-	2.880,72
Total	722.828,99	146.373,69	869.202,68	6.568,73	875.771,41
Total Banco Central	12.158,85	-	12.158,85	-	12.158,85
Total Tesouro Nacional	722.828,99	146.373,69	869.202,68	6.568,73	875.771,41
Total Geral	734.987,84	146.373,69	881.361,53	6.568,73	887.930,26

(a) Inclui Dívida Agrícola

Tabela 2.1 Dívida Pública Mobiliária Federal interna (DPMFi) de 2005. Fonte: Banco Central.

Deste quadro podemos ver que praticamente todo o passivo do governo está concentrado nas mãos do Tesouro (R\$ 875bi), ou seja, possui a finalidade de cobertura do déficit público e não de emissões com objetivos de política monetária como controle de liquidez ou estabelecimento de uma estrutura de emissões capaz

de definir um perfil de prazos que dê ao mercado algum tipo de referência futura sobre a taxa dos juros.

Outra questão diretamente relacionada com esta distribuição entre Tesouro e Bacen pode ser vista através do gráfico seguinte no qual vemos como a dívida mais que dobrou nos últimos cinco anos.

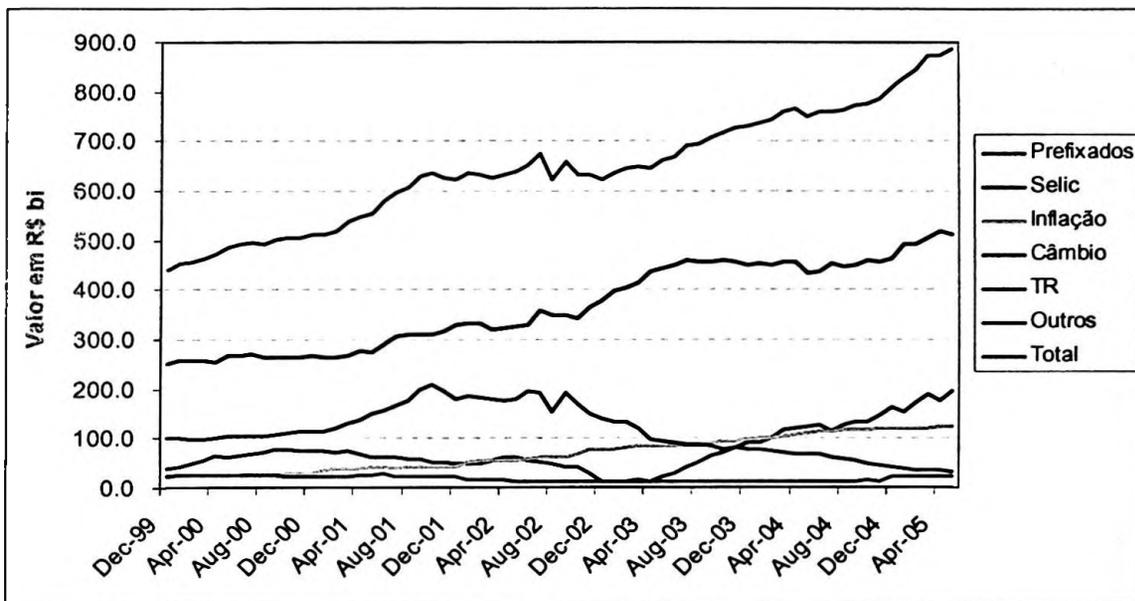


Fig 2.1 Composição Nominal da DPMFi por tipo de indexador.

Uma questão que chama bastante a atenção é que se pode ver claramente que o estoque da dívida foi aumentado com a emissão indexada à taxa Selic que é pós-fixada (LFT) estando, nesta ocasião em mais de R\$ 500bi ou mais de 57% do total emitido. Este fato revela a baixa confiança que o mercado possui com relação à capacidade do governo em honrar seus compromissos, sobretudo a partir do final de 2002 nas últimas eleições presidenciais.

Pelo fato da LFT ser pós-fixada com base em uma taxa *overnight*, por mais que as novas emissões sejam para prazos mais longos, é como que se na prática o governo estivesse refinanciando diariamente no mercado uma parcela cada vez maior de sua dívida, pois, a taxa de juros é repactuada diariamente com base na nova taxa *overnight* Selic.

Outro aspecto importante de ser observado está na troca de dívida indexada ao dólar (NTN-D e NBC-E) por dívida prefixada em reais (LTN). Este seria um fato positivo para as contas do governo, se não considerarmos a elevação em dívida pós-fixada, por que estaria dando ao governo a possibilidade de desindexar sua dívida à moeda americana que foi um fator que gerou bastante pressão sobre a mesma nos últimos anos, além de, sinalizar que o mercado já está aceitando pelo menos ficar pré-fixado em reais no lugar de dolarizado demonstrando um pouco mais de confiança. Embora, este tipo de emissão só mais recentemente tenha chegado no patamar de 22% do total de emissões.

De fato, podemos ver através do gráfico abaixo a evolução da participação de cada tipo de rentabilidade na composição da DPMFi.

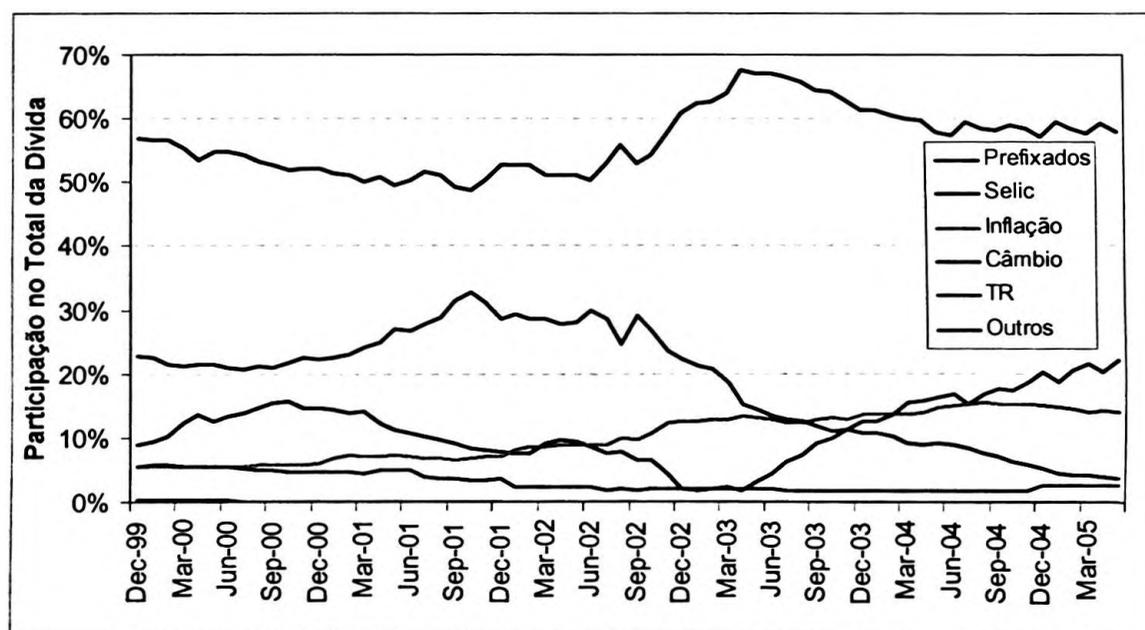


Fig 2.2 Evolução da Composição relativa da DPMFi por tipo de indexador.

Nele podemos ver que sempre a dívida pós-fixada foi a principal componente do total da dívida e apenas agora mais recentemente é que temos uma maior participação da dívida pré-fixada em reais ou até mesmo da indexada aos índices de inflação.

Entretanto, apesar desta evolução mais recente das emissões pré-fixadas, não é possível vislumbrar uma estrutura de emissões capaz de delinear uma referência para taxa de juros com base nos títulos do governo como no caso americano, pois, além de o Tesouro brasileiro não ser considerado um exímio pagador, vide seu extenso histórico de moratórias, as maturidades das emissões pré-fixadas são curtas conforme podemos ver no gráfico a seguir.

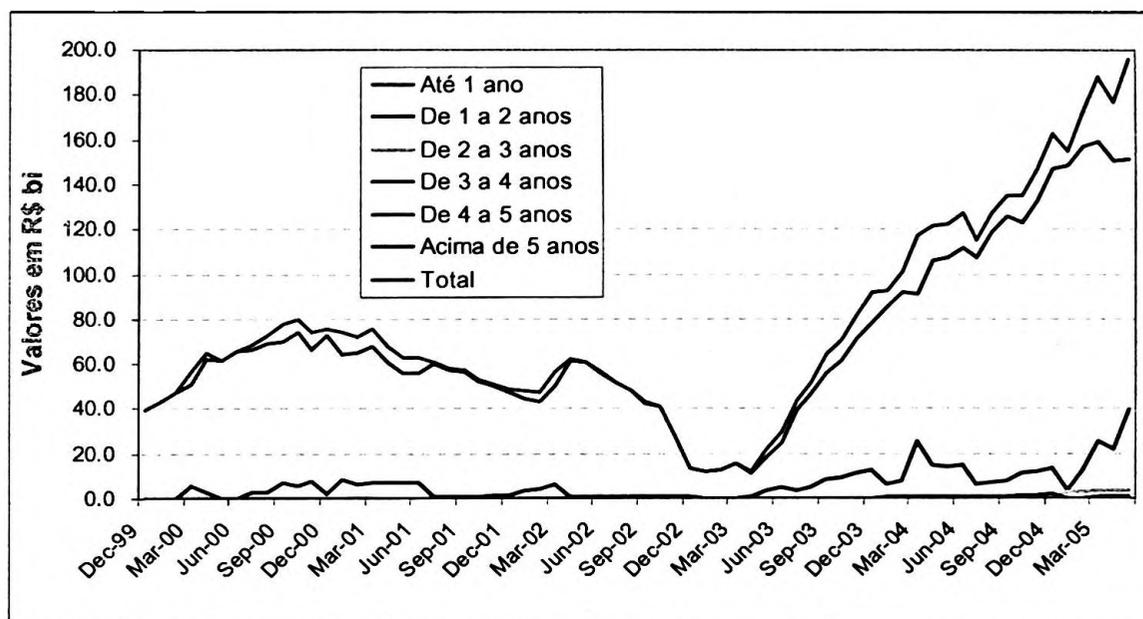


Fig 2.3 Evolução do Perfil da DPMFi prefixada em reais aberta por maturidade.

Vemos que basicamente as emissões se concentram no horizonte de um ano e os 20% restantes até dois anos o que inviabiliza completamente a montagem de uma ETTJ com base em emissões do governo.

2.2.2 Mercado Monetário

Dentre os mercados de taxas de juros este mercado tem especial relevância devido a sua alta liquidez e por se caracterizar em operações de compra e venda de recursos em prazos bastante curtos ou quase sempre de um dia. Sua alta liquidez também contribui para uma alta estabilidade nos preços, ou seja, nas taxas de juros praticadas. Este mercado pode ser segmentado em dois núcleos: mercado de repos e o interbancário os quais passamos a discutir.

2.2.2.1 Repos

Em similaridade com os mercados externos, nosso mercado local também se caracteriza por um mercado de liquidez bastante elevada e pela compra e venda de moeda, tipicamente para zeragem de caixa intradiária, no qual o tomador de recursos acorda pagar uma certa taxa de juros e em troca coloca como lastro da operação títulos do governo.

Se o tomador não honrar a volta da operação, o credor fica com o colateral. No caso contrário, o tomador fica com os recursos. Tipicamente são operações de um dia de prazo ou overnight.

Se por exemplo, uma instituição estiver fechando uma operação deste tipo dando R\$ 100 milhões a uma taxa digamos de 19,75% ao ano para um dia e ficando com lastro em títulos, no dia seguinte receberá um montante de R\$ 100.071.548,83, pois, a base de cálculo considerada seria um dia útil em 252 dias úteis em um ano, obtendo-se assim o fator para um dia ou *overnight*:

$$100.071.548,83 = 100.000.000 * (1 + 0.1975)^{(1/252)}$$

Esta é a convenção mais comum de cálculo de taxas utilizada no mercado brasileiro, ou seja, *business/252* exponencial e esta será a convenção utilizada para todas as taxas neste trabalho. Portanto, se tivéssemos uma taxa definida para um

mês de, por exemplo 18,94% a.a., temos que determinar quantos dias úteis possui este prazo nesta ocasião para se obter o fator efetivo desejado.

Mas, retornando ao exemplo, ao final do dia a câmara responsável pelo controle e custódia destas operações apura a média das taxas das operações realizadas durante o dia e a divulga. Esta taxa recebe o próprio nome da central de custódia: Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia). É esta taxa Selic na qual o Comitê de Política Monetária (COPOM) se reúne mensalmente para definir a sua meta. De acordo com o gráfico abaixo, podemos ver algumas características deste mercado no tempo.

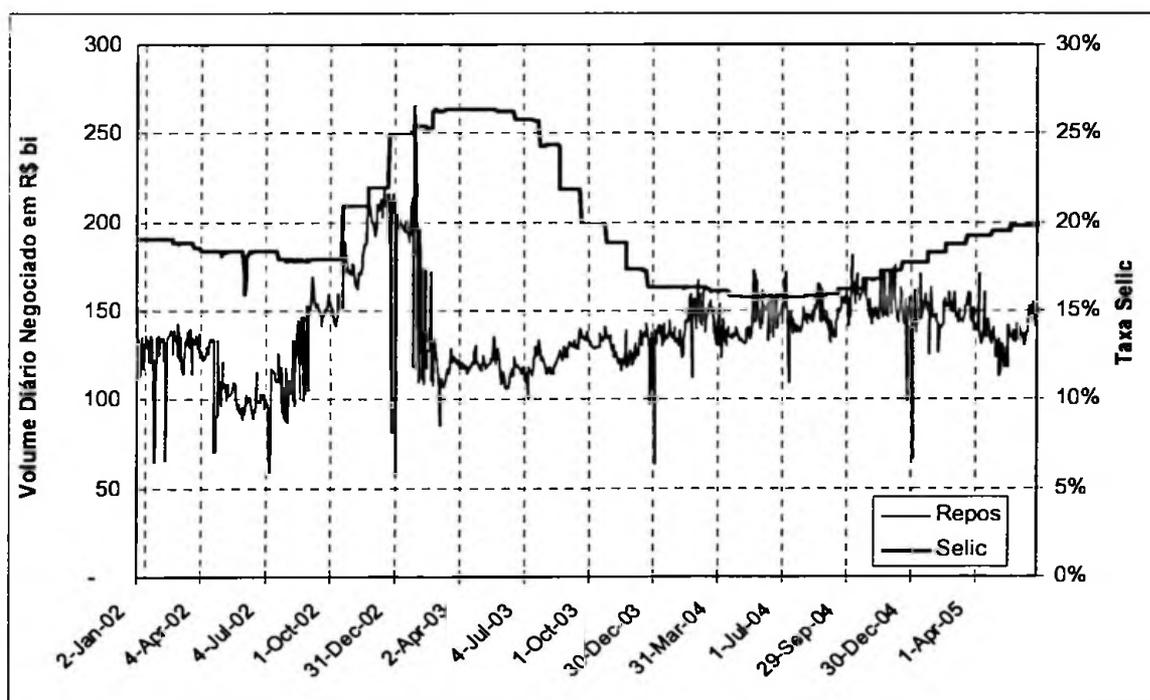


Fig 2.4 Comparativo entre Volume Diário Negociado em Repos e Evolução da Taxa Selic.

Apesar de uma certa volatilidade no volume diário negociado, vemos que tipicamente este mercado gira em torno de R\$ 100 a R\$ 150bi/dia. Durante a crise do segundo semestre de 2002, o mercado buscou ficar posicionado com maior liquidez financeira o que elevou o volume negociado substancialmente retornando depois ao patamar anterior. Há alguns momentos em que temos quedas abruptas no volume negociado. Via de regra são vésperas de feriados como Natal e Ano Novo,

bem como, carnaval. A série de taxas, por outro lado, mostra claramente a intervenção do COPOM ao definir a meta para a Selic para o período seguinte através do formato em degrau da série.

Um fato comum no mercado é as instituições financeiras comprarem títulos do governo para aplicar até o vencimento e utilizando como lastro para tomar e dar recursos por um dia no overnight fazendo com que os investidores em títulos tenham que geralmente tomar recursos para financiar suas posições o que gera o conceito de carregamento da posição.

Por último, vale observar que, em conformidade com os conceitos de riscos em taxas de juros discutidos anteriormente, a Selic é a taxa que mais se aproxima do conceito de taxa livre de risco.

2.2.2.2 Interbancário

Diferentemente do mercado de repo no qual podemos ter a participação do Banco Central nas operações e do lastro em títulos, temos o mercado monetário privativo dos bancos no qual a grande diferença está no fato de que o único lastro das operações é a credibilidade dos participantes.

De forma análoga ao mercado de repo, temos a formação de uma taxa média para as operações realizadas no dia e que recebe o nome das operações realizadas e registradas na central de custódia respectiva denominada CETIP (Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos). As operações são chamadas de Certificados de Depósitos Interfinanceiros (CDI).

O gráfico abaixo mostra a evolução deste mercado. Os volumes negociados são bem distintos do anterior girando em um nível de R\$ 3 a R\$ 4bi/dia. Um fato chamativo é a queda no volume no final de abril de 2002. Isto se deve à entrada em vigor do Sistema Brasileiro de Pagamentos (SPB) no qual fez com que a liquidação das operações neste mercado também fosse realizada em D0 como acontece com o mercado de repos e assim acabasse com a possibilidade de se aplicar neste mercado hoje contando com recursos que estarão disponíveis apenas no dia seguinte.

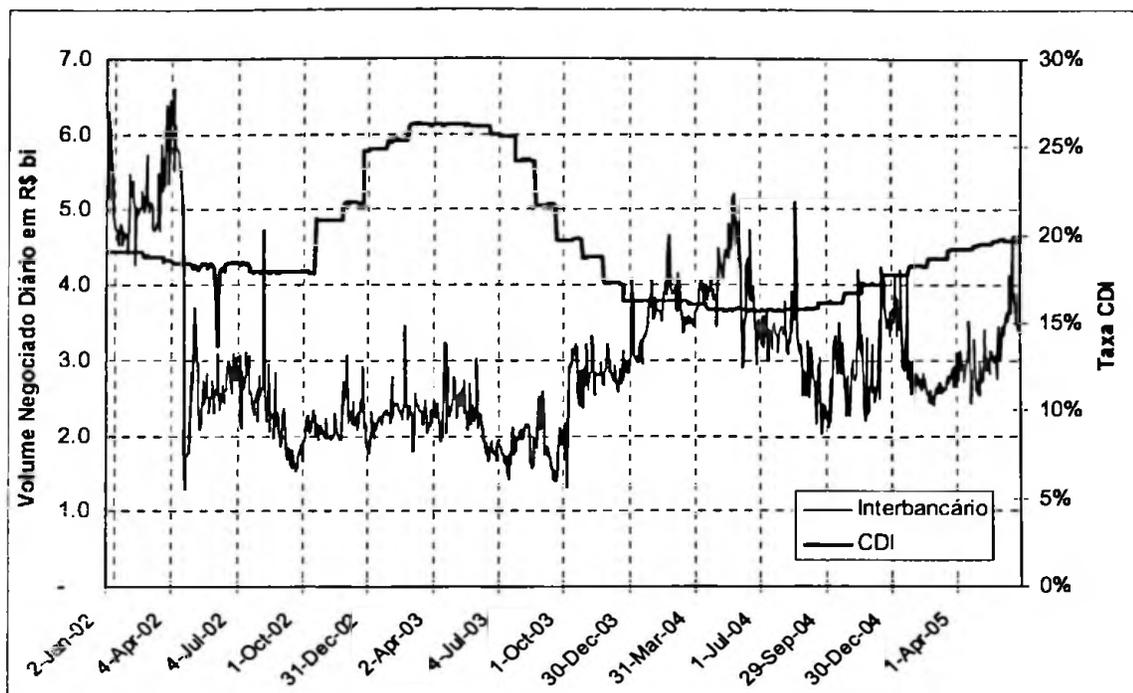


Fig 2.5 Comportamento entre Volume Negociado Diário no Interbancário e Taxa CDI

Mesmo assim, o CDI também possui características de taxa livre de risco, sobretudo quando as operações são realizadas entre grandes bancos, conforme comenta Securato (2002 – pg 124). Ainda assim, a Selic é a taxa mais importante por refletir o custo da reserva bancária e, portanto, ser a taxa de juros básica da economia.

No entanto, é fácil verificar que ambas as taxas são muito próximas de maneira a se evitar arbitragens entre os dois mercados, embora seja consistente um comportamento de termos o CDI alguns poucos pontos básicos abaixo do Selic, conforme mostra o gráfico a seguir. Embora este fato seja um paradoxo, à primeira vista, principalmente se considerarmos este mesmo comportamento no mercado externo, a explicação está no fato de que é o CDI que é utilizado como benchmarking para o custo de oportunidade do capital pelas instituições financeiras de modo que, o custo de carregamento de suas posições são medidas com relação a este referencial.

Conseqüentemente, a margem econômica obtida nas posições em títulos do governo somente será positiva e, portanto, atraente caso o custo de carregamento

da posição seja menor que a rentabilidade da mesma. Em outras palavras, somente é economicamente viável aplicar em dívida do governo caso o custo de financiamento da posição seja inferior à rentabilidade intrínseca do papel.

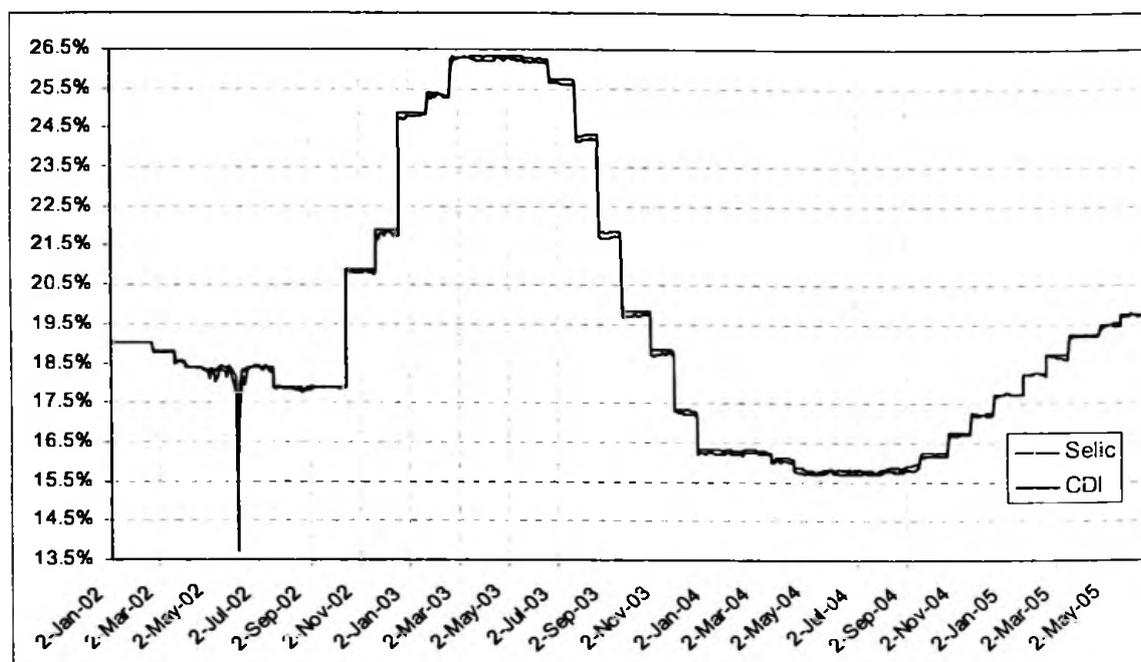


Fig 2.6 Comparativo entre Taxa CDI e SELIC.

Se assim não fosse, não haveria incentivo para se financiar o déficit fiscal de um governo cuja percepção de risco de crédito pelo mercado é certamente diferente da de outros governos.

Este fato fica ainda mais relevante se nos lembrarmos do item 2.2.1 no qual verificamos que historicamente o perfil da dívida pública é fortemente pós-fixado em Selic (LFT) que está nas mãos dos bancos. Assim, se a Selic tivesse uma rentabilidade inferior ao CDI, mesmo com o pequeno deságio com o qual estes títulos são negociados, não seria economicamente interessante carregar estas posições.

Desta forma, vimos que do mercado monetário temos a taxa livre de risco que a rigor seria a Selic, no entanto, o mercado utiliza como *proxy* o CDI que segue sempre muito de perto o comportamento do Selic.

Este ponto é importante por que, como veremos mais adiante, o primeiro ponto da curva de juros será a taxa over tomada pelo CDI e como iremos

desenvolver um modelo de taxas de juros unifatorial sobre a taxa de juros de curto prazo, esta será a referência para a construção da árvore.

2.2.3 Derivativos de Renda Fixa

O principal mercado organizado brasileiro de derivativos financeiros está na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) em São Paulo. Fundada em julho de 1985, sua trajetória é marcada pelo grande crescimento de suas operações alavancadas por um processo contínuo de fusões e acordos com as demais Bolsas regionais brasileiras.

As classes de ativos negociadas podem ser divididas em *commodities* que se referem tipicamente ao mercado agropecuário como algodão, soja, boi-gordo, dentre outros, e os de ativos financeiros como taxa de câmbio, índices ou taxas de juros. Os tipos de contratos mais comuns são os futuros, embora ainda possamos ter em alguns casos opções.

De todas os mercados, vamos centrar nossa atenção no de taxa de juros em reais, tanto nos futuros como nas opções, por serem os ativos que serão utilizados neste trabalho.

2.2.3.1 Futuros

Quando se fala em mercado de derivativos, uma das primeiras questões que ocorrem refere-se aos riscos inerentes a estas operações. Isto com base no histórico de grandes perdas que estes mercados impuseram a alguns investidores, inclusive profissionais, no passado não muito distante¹.

No entanto, para a minimização de riscos de crédito em operações na BM&F, em similaridade com as demais bolsas de derivativos, é preciso depositar alguma garantia para se operar. Esta garantia pode ser um depósito em dinheiro ou mais comumente títulos do governo em valor financeiro suficiente para honrar as

¹ Para uma discussão mais detalhada sobre estes eventos, uma boa referência é Jorion, Philippe *Value at Risk: the New Benchmark for Managing Risk*, 2nd Edition, 2001.

operações que o investidor possui em aberto com base em critérios definidos pela câmara de liquidação e custódia da bolsa.

Outro aspecto importante neste sentido está no fato de que diariamente as operações são liquidadas por diferenças chamadas de ajustes diários. Ao final do dia, a bolsa divulga os preços de ajustes de cada vencimento de cada tipo de contrato em aberto determinando com base nos preços de compra ou de ajuste anterior a diferença a ser paga ou recebida por cada investidor. Com esta marcação a mercado diária, se minimiza as chances de que de um dia para outro o detentor do contrato não consiga honrar a operação, supondo-se que a volatilidade intradiária do mercado fique dentro de um certo intervalo de tolerância.

Caso as posições contraídas por um investidor estejam em situação desfavorável frente a tendência do mercado, a câmara poderá fazer uma chamada de margem de forma a elevar ou recompor as garantias para que as posições continuem em aberto. Caso contrário, a bolsa poderá até liquidar as posições do investidor de forma discricionária evitando-se, assim, que a exposição creditícia da câmara frente ao investidor se deteriore ainda mais.

Por outro lado, se um cliente possuir valor de ajuste líquido a receber, será a câmara de liquidação que honrará a operação de forma a garantir que todas as operações sejam honradas. Como só poderá haver contratos em aberto se tivermos dois investidores desejando comprar e vender o mesmo tipo de contrato e volume, conclui-se que se todos os devedores ao final de um dia honrarem com seus ajustes diários junto à câmara, esta repassará, por sua vez, os ajustes aos demais investidores que possuam ajustes positivos. Desta forma, a bolsa acaba servindo apenas como intermediária de recursos e caso seja necessário poderá se ressarcir do não pagamento de algum participante executando suas garantias.

Estes são alguns dos mecanismos que fazem com que o mercado de derivativos seja considerado como praticamente sendo livre de risco de crédito o que contribuiu em muito para o seu desenvolvimento nos últimos anos. De fato, podemos ver no gráfico abaixo a evolução do mercado de futuros sobre a taxa de juros sobre os depósitos interfinanceiros (Futuro DI) no qual se negocia o futuro da taxa média over dos depósitos interfinanceiros ou CDI.

Nele temos a média mensal do volume financeiro diário do final de 1999 até 30 de junho de 2005. Pode-se ver que até o final do governo FHC, o volume ficou tipicamente em torno dos R\$20bi ou um pouco menos. Após o início do governo Lula e o fim da crise eleitoral no Brasil o mercado sofre um novo impulso o qual não foi apenas verificado no mercado de juros, mas também na própria Bolsa de Valores.

Atualmente o volume já está chegando em torno de R\$40bi fazendo com que seja o segundo maior mercado de taxas de juros ficando atrás apenas do de repo.

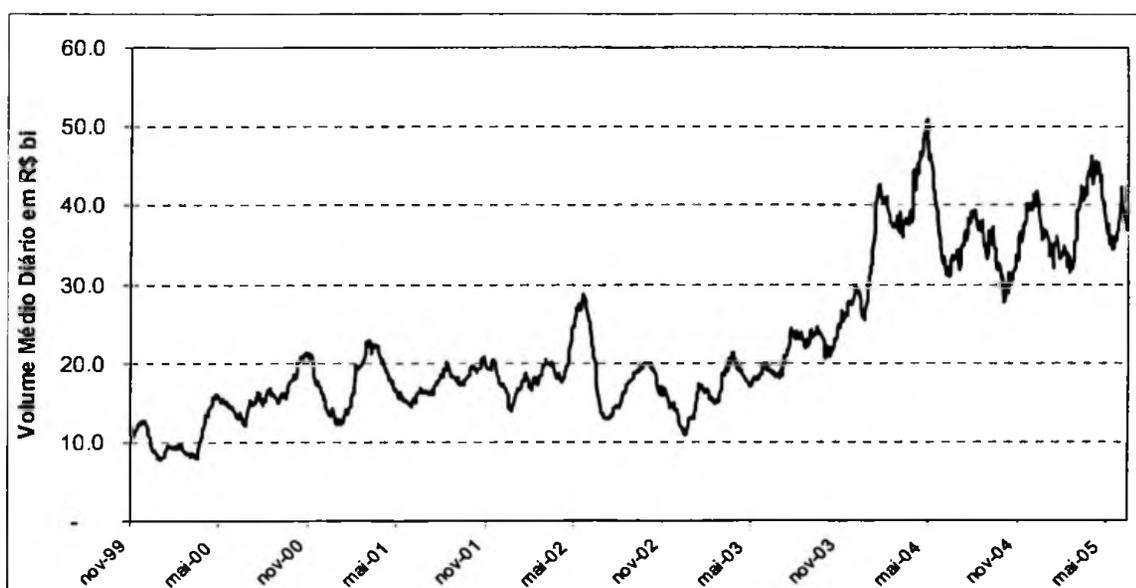


Fig 2.7 Volume Diário Médio de Negócios, em R\$ bi, com Futuro DI.

No entanto, contrariamente ao que vimos no mercado de títulos públicos no qual não possui uma estrutura de vencimentos suficientemente capaz de dar ao mercado um balizamento para a ETTJ, o mercado de Futuro DI vem se notabilizando não apenas pelo seu crescimento, mas também por ter negócios cada vez mais distribuídos em vários prazos conforme o gráfico abaixo.

Podemos ver a participação média no volume diário dos contratos em aberto segmentado por prazos. Assim, temos a participação média no volume diário dos contratos com vencimentos não superiores a 6 meses. Depois, a participação dos contratos com prazo de vencimento superiores a 6 meses indo até 1 ano e assim por

diante indo até a participação dos contratos com prazo de vencimento superiores a 5 anos.

Tendo-se em vista o exposto acima a respeito da elevação do volume negociado diariamente, é imediata a constatação de que, em termos absolutos, houve um aumento significativo no volume negociado sobretudo nos prazos mais curtos. Porém, o aspecto mais marcante está na queda da participação relativa dos prazos mais curtos no volume negociado em detrimento dos prazos mais longos. Em outras palavras, este mercado vem se caracterizando não apenas pelo seu crescimento, mas por se consolidar cada vez mais como um balizador justo para a projeção dos juros em seus distintos prazos.

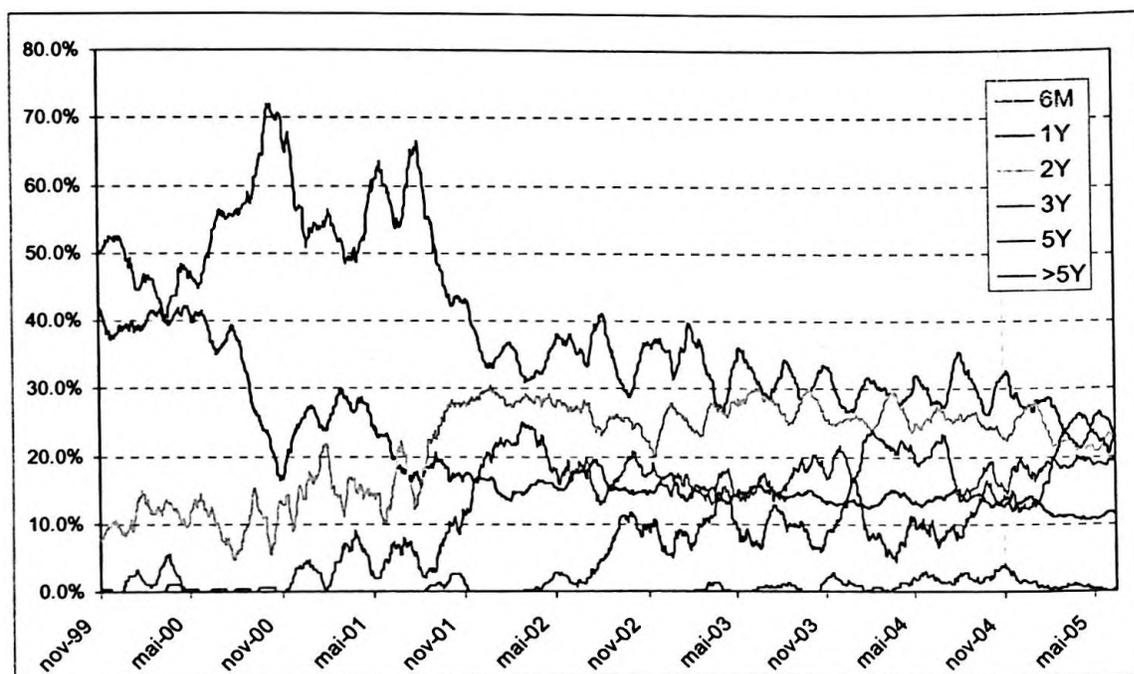


Fig 2.8 Composição do Volume Médio Diário Negociado com Futuro DI aberto por maturidade.

Um detalhe importante sobre os contratos de Futuros DI, refere-se ao seu modelo de apuração o qual se resume a uma simples fórmula de um título zero cupom descontado, ou seja, seu preço é determinado descontando-se seu valor nominal (R\$100mil) em função do número de dias úteis compreendidos entre a data de referência (hoje) e a data de vencimento de contrato, ou seja:

$$PU = \frac{100.000}{(1+r)^{(DU/252)}} \quad (2.1)$$

Assim, se tivermos um Futuro DI com 23 dias úteis de prazo até seu vencimento e a taxa de juros projetada para o período for de 19% a.a., seu PU valerá R\$ 98.424,87 com base na relação anterior.

Na prática, estes contratos podem ser considerados como títulos de desconto puro (PDB – *pure discount bonds*) e, conforme veremos mais adiante, pelo fato de que a ETTJ ser construída com base nas taxas referenciadas a estes contratos, a calibragem do modelo de BK à curva de juros será perfeita o que é fundamental para um modelo de não-arbitragem.

Por último, uma característica fundamental destes contratos é que a data de referência para o vencimento de cada série é a data referente ao primeiro pregão do mês de referência do contrato. Assim, o Futuro JUL05 tem seu vencimento definido para 01/jul/2005 ao passo que o JUL06 tem seu vencimento definido para 03/jul/2006.

Como decorrência imediata dos vencimentos serem em datas fixas e estes contratos serem utilizados na construção diária da ETTJ pré-fixada em reais, temos que as referências dos prazos da curva variam diariamente a medida em que vamos evoluindo no tempo e os contratos vão vencendo.

Adicionando-se este fato ao aspecto de que o número de dias úteis em um prazo de 1 mês ou trinta dias pode variar em função do número de feriados e de finais de semana, concluiremos que uma diferença estrutural marcante em relação a algumas curvas dos mercados externos como a Libor é que, enquanto nestes mercados temos cotações em forma de *tenors* ou prazos fixos, no nosso caso isto não ocorre.

Além do mais, em função de nosso passado inflacionário não muito longínquo o mercado brasileiro trabalha em uma contagem de dias com base em dias úteis enquanto que nos outros mercados se trabalha com dias corridos. O que não necessariamente é pior ou melhor, mas faz com que adaptações de modelos de taxas de juros para os nossos mercados tenham que considerar de alguma maneira estes dois aspectos: base de cálculo em dias úteis e prazos variáveis no tempo. Mais a frente, mostraremos como daremos conta destes dois pontos na adaptação do modelo em questão.

2.2.3.2 Opções

Com a evolução do mercado de Futuro DI, a BM&F deu início ao mercado de opções sobre taxa de juros. No primeiro momento (desde 1999), tivemos a chamadas opções sobre o índice de depósitos interfinanceiros (IDI), que ainda hoje são negociadas, e seu ativo-objeto é construído com base em um índice que vem se acumulando desde uma data específica, tendo partido de 100.000 pontos, com base no fator diário do CDI.

Se comprarmos uma *call* européia sobre IDI hoje para vencimento em, por exemplo, 21 dias úteis teremos, com base na projeção atual do CDI, refletida na curva de juros, e o fator do IDI acumulado até o momento, a projeção para este fator no vencimento da opção podendo-se definir o *strike* de opção no dinheiro (ATM). A medida que a taxa CDI vai sendo observada ou fixada em cada um dos 21 dias, teremos um valor acumulado ou atualizado no IDI. Quando chegar no vencimento da opção, exerceremos caso o fator do IDI seja maior que o *strike*, senão virará pó. Assim, se tivermos uma dívida indexada ao CDI, com vencimento em 21 dias, e quisermos nos proteger de uma elevação inesperada da taxa, podemos travar este risco comprando a referida *call*.

Outro tipo de opção lançado mais recentemente (2003) pela BM&F é a opção de DI ou depósitos interfinanceiros. Nesta opção, o ativo objeto é o contrato de Futuro DI discutido no item anterior. Assim, esta opção pode tanto ser considerada

como sendo sobre taxa de juros – de fato é assim que o mercado a negocia – ou como opção sobre um título zero cupom¹.

Se considerarmos uma call européia de taxa, com vencimento em 21 dias úteis com um strike de, por exemplo, 18.90%a.a. para os 3 meses² subsequentes ao vencimento da opção, teremos uma opção que nos dará exercício caso, no seu vencimento, a taxa projetada pelo Futuro DI com maturidade para 3 meses estiver projetando uma taxa de juros maior que a definida no strike³.

Assim, se por exemplo tivermos um passivo de 3 meses cuja taxa de juros será fixada em 21 dias, podemos comprar uma call onde fixaremos hoje o juros que pagaremos pelo strike nos protegendo de movimentos de escalada nos juros.

Note que, em conformidade com o mercado do seu ativo objeto, o vencimento destas opções sempre respeitam as convenções do mercado de futuros. Assim, o vencimento de qualquer série se dá na mesma data do Futuro DI da base e a taxa de juros projetada também se referirá a uma cotação de um futuro a frente.

Para efeitos de padronização, há 3 tipos distintos opções a saber:

- Tipo 1: opções cujo ativo objeto possui horizonte de vencimento de 3 meses após o vencimento da opção.
- Tipo 2: opções cujo ativo objeto possui horizonte de vencimento de 6 meses após o vencimento da opção.
- Tipo 3: opções cujo ativo objeto possui horizonte de vencimento de 1 ano após o vencimento da opção.

Desta forma, como poderemos ver mais adiante, estas opções guardam estrita semelhança com os *caps* e *floors* do mercado internacional. Assim, um modelo largamente utilizado em seu apreçamento é o Black o qual será desenvolvido em detalhe no capítulo posterior e será utilizado como referencial de comparação com o modelo de Black-Karasinski a ser aplicado neste mesmo instrumento.

¹ Não se esquecendo da equivalência entre os dois tipos, ou seja, se estivermos falando de uma call de taxa tudo será equivalente a uma put de PU, conforme demonstrado em Hull (2003 – pg 516).

² Note que estes 3 meses de referência serão sempre considerados pelo número efetivo de dias úteis existentes no período com base no mesmo critério explicado no item em que falamos sobre o mercado de Futuro DI.

³ A formulação detalhada deste modelo, será deixada para o capítulo seguinte onde trataremos mais especificamente os modelos de apreçamento.

O volume negociado nestes mercados de opções, no entanto, não são significativos se comparados com os mercados até agora analisados tendo um volume financeiro diário que gira em torno de R\$ 2 mm para opções IDI e R\$ 500mil para as opções sobre Futuro DI.

No entanto, com a perspectiva de melhoria da economia, com estabilidade econômica e redução nos juros, e o conseqüente desengavetamento de projetos nos vários segmentos da economia, é de se esperar uma demanda crescente por *hedge* deste tipo e outros estruturados sobre estes tipos instrumentos mais básicos¹.

2.2.4 Curva de Juros

Em decorrência do exposto acima, torna-se imediata a conclusão de que como nosso mercado não possui características que o possibilitem desenvolver uma ETTJ com base na emissão de títulos do governo nem de empréstimos no interbancário, a alternativa trabalhada ao longo do tempo foi via mercado de derivativos. Desta forma, duas questões interessantes são a sua obtenção e suas características que passaremos a discutir.

2.2.4.1 Obtenção

Quando os Futuros DI não possuíam a liquidez mínima para servir de referência para a construção da curva, o mercado utilizava Swaps de taxa de juros (IRS) os quais foram perdendo liquidez para o mercado de futuros com o passar do tempo.

Além disto, a curva de juros não possibilitava uma projeção razoável das taxas para prazos mais longos (2 anos para frente). Com a evolução do mercado de futuros, no entanto, também pudemos observar que a ETTJ pôde ser alongada no prazo por possibilitar uma maior previsibilidade nas taxas mais longas. De fato, atualmente a ETTJ pode se estender até 5 anos ou um pouco além.

¹ Seguindo a história evolutiva dos mercados mais desenvolvidos, de fato, caps e floors poderão no futuro ser considerados como instrumentos tão básicos a ponto deles próprios servirem como ativos-objeto de operações mais complexas exigindo a aplicação de modelos de apreçamento mais sofisticados. Afinal, o próprio mercado de Futuros DI um dia já foi considerado o estado da arte no mercado financeiro brasileiro.

Para efeitos de mercado brasileiro, em função de tudo o que foi discutido até o momento, uma construção normalmente utilizada considera a taxa CDI como a referência para 1 dia e daí para frente cotações de Futuros DI. No entanto, como a liquidez diária em cada vencimento dos futuros não é homogênea¹, algumas vezes pode-se abdicar da cotação de uma referência em particular e se buscar alguma alternativa como interpolação ou ajuste com base no conhecimento específico dos traders.

Assim, mesmo com a evolução do mercado de renda fixa a obtenção das referências diárias a serem utilizadas na determinação da ETTJ ainda tem uma boa dose de arte.

Como, porém, o presente trabalho não se baseia na metodologia de construção da curva de juros, mas na sua aplicação, como sendo um dos parâmetros exógenos, no modelo de taxas de juros de BK não é de nosso interesse discutir mais a fundo este aspecto, mas apenas de apresentar suas características.

2.2.4.2 Decomposição em Fatores

Um fato há muito conhecido é que muitos mercados são caracterizados por um elevado grau de colinearidade entre seus retornos, conforme observa Alexander (2001 – pg 147). Esta colinearidade de retornos é especialmente pronunciada nas ETTJ e de fácil observação dada a ordenação temporal do conjunto de dados.

Este fato pode ser comprovado no gráfico abaixo onde temos a evolução de alguns prazos da curva de juros. Nele verificamos como a evolução para diferentes prazos é muito similar, pois, a principal diferença esta no nível de valores para cada prazo e não no comportamento.

¹ Podemos ter redução de liquidez por conta de algum stress de mercado em alguns prazos ou migração de liquidez para algumas referências específicas.

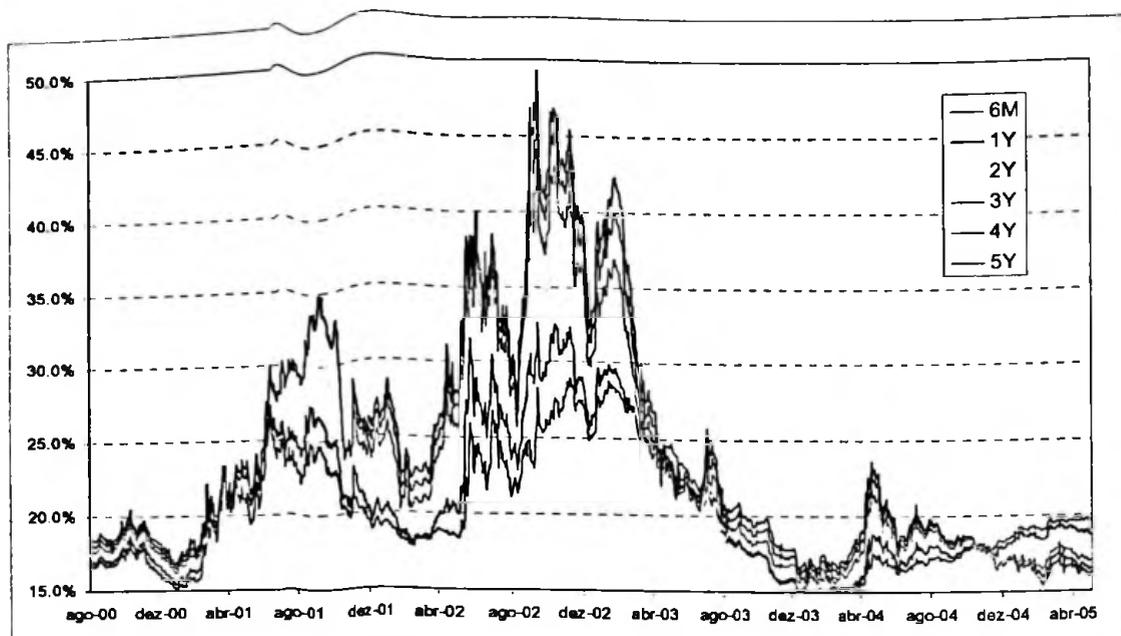


Fig 2.9 Evolução da Taxa PRE para diferentes prazos de uma mesma curva.

Isto mostra claramente que todos os pontos da curva estão bastante correlacionados o que nos indica que alguns poucos fatores podem explicar todo o conjunto da estrutura a termo.

Um método recorrentemente aplicado nestes casos para se extrair as fontes não-correlacionadas mais relevantes dos dados é o chamado Análise de Componentes Principais (PCA) o qual reduz a dimensão do problema a apenas algumas variáveis, denominadas na literatura de *factor loadings*, que consigam explicar a maioria dos eventos que ocorrem com o conjunto original dos dados. Não é nossa intenção aqui fazermos um detalhamento do procedimento, uma vez que, se encontra fartamente registrado na literatura. Algumas referências que discutem e aplicam este método às ETTJ podem ser encontrados em Alexander (2001) e James & Webber (2000). Aqui iremos tratar apenas de apresentar os resultados da aplicação desta técnica aos dados históricos da curva de juros discutida até agora e analisarmos suas características.

Para efeitos de análise, utilizamos os dados referentes às curvas de juros diárias de 31/ago/2000 até 31/maio/2005. Conforme comentamos anteriormente, pelas características dos instrumentos que compõem a ETTJ, as referências não são

fixas no tempo necessitando-se, então, proceder a algum tipo de metodologia para se derivar séries de taxas para prazos fixos. Assim, tomamos alguns prazos fixos em dias úteis e obtivemos as respectivas taxas por interpolação do tipo *cubic spline*. Alguns destes pontos estão no gráfico anterior.

De posse destas séries, aplicamos a metodologia de PCA de forma a obter os resultados que comentamos a seguir. De acordo com o gráfico abaixo, o grau de colinearidade entre os dados é tal que faz com que os 5 primeiros fatores consigam explicar praticamente 100% dos movimentos sendo que 81.4% dos mesmos são explicados pelo primeiro fator, 16.3% pelo segundo e 1.9% pelo terceiro. Assim, os 3 primeiros fatores conseguem explicar 99.6% dos movimentos o que demonstra que os dados possuem um elevado grau de correlacionamento.

Sendo assim, temos que com apenas os 3 primeiros fatores conseguimos explicar quase que a totalidade da variância dos dados o que contribui para uma redução drástica nos fatores necessários para explicar a dinâmica da ETTJ. De fato, havíamos inicialmente definido uma estrutura de dados que continha 37 pontos ou fatores distintos no tempo para compor cada curva diária.

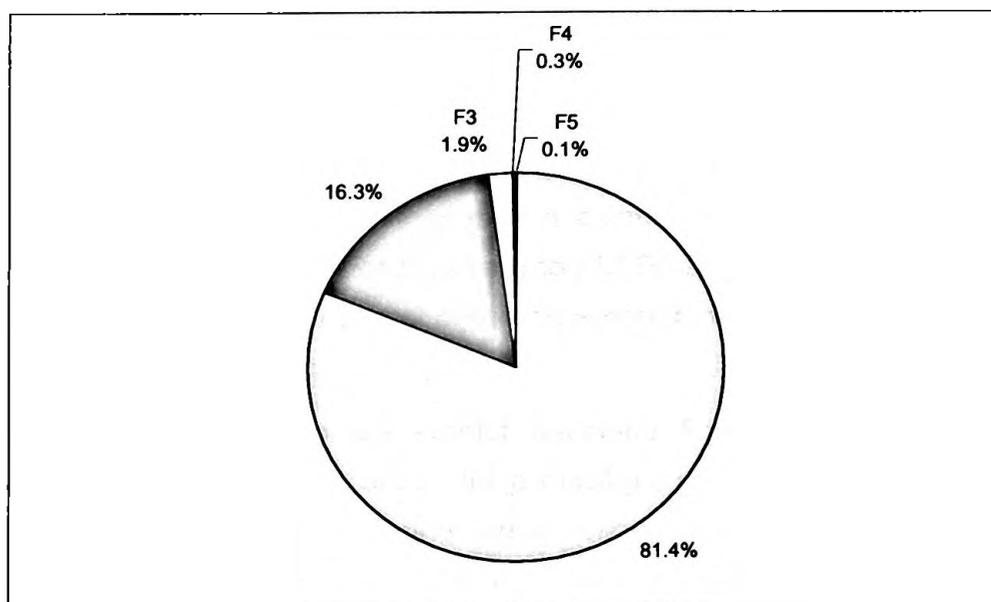


Fig 2.10 *Factor Loadings* resultantes do histórico da curva PRE.

Se centramos nossa atenção apenas sobre os 3 primeiros componentes os quais se relacionam com os 3 primeiros fatores respectivamente, teremos o resultado que se encontra no gráfico a seguir.

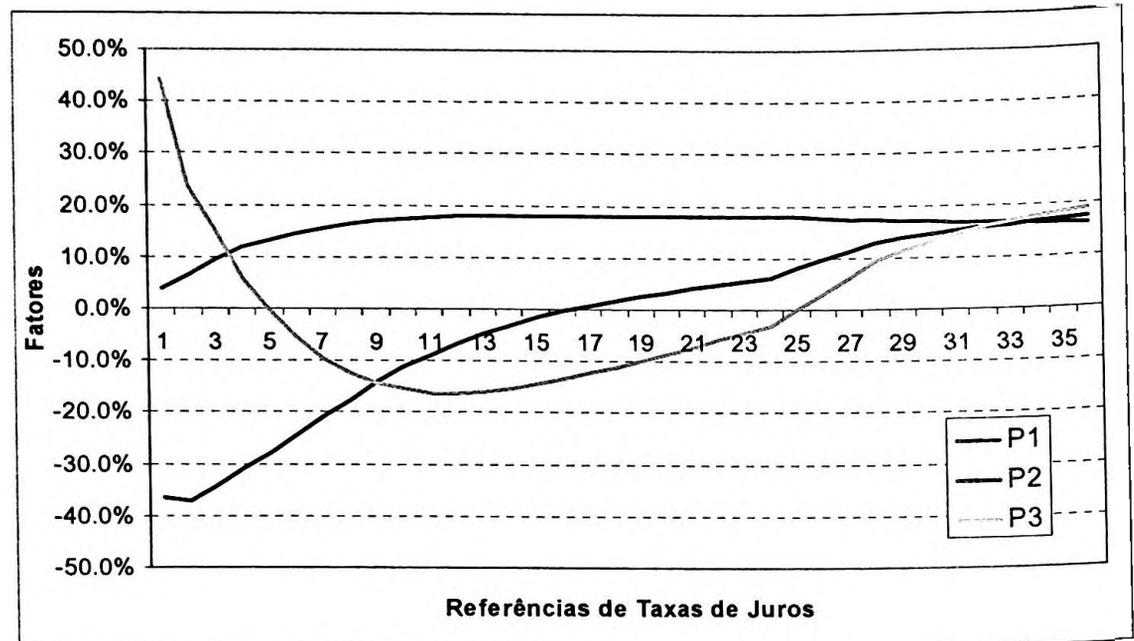


Fig 2.11 Efeitos dos 3 primeiros Componentes no histórico da curva PRE.

Neste gráfico vemos que o primeiro componente se refere a movimentos paralelos na curva, pois, todos seus valores são positivos e mais ou menos na mesma grandeza. Por este mesmo motivo, o segundo componente se refere a movimentos de inclinação na ETTJ por possuir sinais contrários entre seus fatores mais dos extremos. Por último, temos o terceiro fator no qual se refere a movimentos de curvatura da ETTJ.

Apesar de que os 3 primeiros fatores explicam a grande maioria das variações na ETTJ, eles não explicam a totalidade da sua dinâmica por que não conseguem capturar a correlação exata entre todos os fatores. Assim, se necessitarmos de modelos capazes de capturar os efeitos com maior grau de precisão, precisaríamos partir para modelos com mais de um fator.

No entanto, dado que em modelos unifatoriais é permitido haver apenas uma fonte de incertezas, o que simplifica sua calibragem e aplicação, e que os instrumentos que iremos apreçar não requerem informações sobre a correlação

entre os diversos fatores, segue que modelos unifatoriais de não arbitragem como de Black-Karasinski são suficientes para a modelagem.

Assim, vimos quais os tipos de riscos que envolvem ativos de renda fixa. Também fizemos um rápido comentário sobre as principais características dos mercados de renda fixa externos. Vimos quais os tipos de curvas mais comuns que são consideradas como sendo livre de riscos e o porquê da necessidade de se definir uma ETTJ. Também vimos que tipos de taxas podem se aproximar do conceito de livre de risco.

Para o mercado brasileiro, procuramos mostrar quais as razões que o torna diferente dos mercados externos. O risco do governo, bem como, o perfil das emissões soberanas locais não permitem que se estabeleça um ETTJ livre de risco sobre títulos. Por outro lado, o mercado de futuros de taxa de juros veio assumindo cada vez mais este papel se tornando hoje a principal fonte para construção da ETTJ livre de riscos no mercado brasileiro.

Por último, vimos que esta curva possui um alto grau de correlação entre seus fatores de forma que os 3 primeiros componentes são suficientes para explicar quase que a totalidade dos movimentos. O alto poder de explicação destes componentes também permite a aplicação de modelos unifatoriais com bons resultados o que justifica a aplicação de modelos como o de BK.

3. Modelos de Taxas de Juros

De tudo o que comentamos acerca do desenvolvimento do mercado de renda fixa, em relação ao seu funcionamento básico e sua evolução, uma questão foi passada praticamente ao largo: se segmentarmos o mercado em grandes blocos como de renda variável, câmbio e de taxa de juros, este último é sem dúvida o maior mercado. Não apenas por ser mais recente em termos de desenvolvimento de instrumentos derivativos, mas também pela sua complexidade.

3.1 Necessidade de Modelos de Taxas de Juros

Esta complexidade pode ser compreendida facilmente, se considerarmos quatro questões que diferenciam este mercado dos demais:

- I. Do último item do capítulo anterior pudemos ver que uma característica fundamental das taxas é que elas devem ser consideradas como um grupo ou vetor de variáveis ao passo que nos outros mercados uma única variável (preço) caracteriza a dinâmica do mercado. Além disto, este conjunto de variáveis possuem um alto grau de correlacionamento fazendo com que tenhamos que aplicar técnicas de redução de dimensionalidade como o PCA para extrair algum tipo de informação relevante do conjunto. Mesmo assim, temos que ter em mente que a tarefa consiste em modelar o processo de um conjunto de dados correlacionados e não de uma variável escalar.
- II. Taxas de juros apresentam o conhecido comportamento de reversão à média ou estacionariedade, ou seja, ela possui a tendência de retornar sempre a um determinado nível de longo prazo de forma a cair caso esteja acima deste patamar de referência ou de subir caso contrário.
- III. A volatilidade não é a mesma para cada ponto da ETTJ.
- IV. O *pay-off* de opções sobre taxas de juros é também determinado por uma taxa de juros, além de, ser igualmente trazido a valor presente por uma taxa de juros o que não ocorre com opções de renda variável e de câmbio.

- V. Taxa de juros não é um ativo transacionado, ao contrário de ações. A carteira replicante e o *hedge* serão diferentes, conforme argumenta Rebonato (2002 – pg 5).

3.2 Evolução dos Modelos

Isto fez com que a busca por modelos de taxas de juros tenha gerado uma variedade tão grande de abordagens e ainda hoje demande muitos esforços por parte tanto de acadêmicos quanto de praticantes.

Se, por exemplo, no mundo de renda variável o modelo de Black-Scholes se consolidou de forma marcante neste mercado, isto não ocorre com a renda fixa. Neste mercado, há uma longa história de desenvolvimento de modelos cada qual com determinadas propriedades que podem torná-los mais aceitável ou não em cada aplicação.

No início deste mercado, no entanto, de acordo com Rebonato (2002 – pg 5) as primeiras tentativas se centraram no sentido de aplicar diretamente os modelos de Black-Scholes (BS) e o de Black que haviam sido originalmente formulados para o mercado de renda variável e depois começaram a se disseminar para outros mercados como o de câmbio. Esta família de modelos se caracteriza pela assunção de que o ativo-objeto do derivativo segue uma evolução determinada por uma distribuição lognormal.

Um problema encontrado pelos praticantes com o modelo de BS, logo no início, que fez com que ele fosse preterido na aplicação em instrumentos derivativos sobre taxas de juros relaciona-se com o conhecido fenômeno de decrescimento da volatilidade dos títulos à medida que se aproximam do vencimento. Como o modelo de BS era aplicado modelando-se o processo do preço do título, o problema surgia pelo fato de que o termo estocástico perde sua relevância com a queda na volatilidade com a aproximação do vencimento.

A solução encontrada seria a de utilizar a taxa do título como ativo-objeto, uma vez que esta não teria o mesmo problema do preço do título. No entanto, o problema que surgia era que, por se tratar de uma grandeza não diretamente

negociada no mercado, teria que ser feita alguma adaptação no esquema de carteira replicante que é a base do modelo de BS.

Mas, todas estas questões foram deixadas rapidamente de lado com a aplicação do modelo de Black o qual considera o preço a termo do título no vencimento da opção e não o preço à vista (*spot*) como em BS. Conseqüentemente, a volatilidade também deixa de ser com base no preço *spot* e passa a ser com base no preço a termo o que elimina o efeito de decrescimento com o passar do tempo dado que o prazo remanescente do título permanece inalterado ao longo da vida da opção, de acordo com Rebonato (2002 – pg 5).

Apesar de solucionada esta questão, um ponto ainda ficaria sem uma solução aparente: a conhecida correlação entre todos os prazos da ETTJ e, conseqüentemente, a dinâmica completa do vetor de variáveis não é capturada pelo modelo de Black, embora, o modelo seja capaz de apreçar corretamente um conjunto de opções de forma individual.

Se considerarmos, então, a grande variedade de derivativos sobre taxas de juros que temos nos mercados internacionais como *caps*, *swaptions*, títulos com opções embutidas¹ e notas estruturadas, dentre outros muitos, além de, derivativos onde os direitos ao exercício podem ser do tipo americano² ou ainda ter barreiras, claramente é necessário que se desenvolvam modelos específicos de taxas de juros que sejam capazes de dar conta de todos os aspectos inerentes a este mercado. Assim, o desenvolvimento de modelos de taxas de juros pode ser segmentado basicamente em três famílias de acordo com a Tabela 3.1 seguir.

Os chamados *short-rate models* ainda podem ser divididos em dois grupos os modelos de equilíbrio e os de não-arbitragem. No primeiro grupo estão alguns dos primeiros modelos de taxas de juros desenvolvidos³ como Rendleman e Barter Cox, Ingersoll e Ross e Vasicek. Baseia-se na taxa de juros de curto prazo instantânea a qual tem o seu processo derivado a partir da calibragem do:

¹ De fato, o C-bond brasileiro também é um exemplo de título com calls embutidas as quais dão direito a tesouro de resgatar toda a emissão ao valor par em determinadas datas coincidentes com o pagamento de juros amortizações de principal.

² Enquanto as opções na modalidade européia dão direito ao titular de exercê-la apenas no seu vencimento, as do tipo americano conferem este direito a todo o momento até o vencimento da mesma. Na atualidade, o mercado brasileiro só possui opções sobre Futuro DI do tipo européias razão pela qual nos fixaremos neste caso.

³ Para mais informações sobre estes e outros modelos que não foram citados aqui, o leitor pode se remeter a obras como de James & Webber (2000), Cairns (2004), Hull (2003), Rebonato (1998 e 2002) e Brigo e Mercurio (2000) dentre outros.

parâmetros do modelo através de abordagem econométrica ou através de dados de mercado. A ETTJ é um *output* do modelo o que não ocorre com os outros modelos. No fundo, se resolve uma equação diferencial parcial de forma a se obter uma solução analítica que é a ETTJ.

Famílias de Modelos	Característica Principal	Principais Representantes
Taxa de Juros à Vista	A evolução de toda a ETTJ é explicada por uma única variável ou fator: a taxa de juros à vista. Na literatura internacional são denominados de <i>short-rate models</i>	Rendleman e Barter (RB) Cox, Ingersoll and Ross (CIR) Ho-Lee (HL) Hull-White (HW) Black, Derman and Toy Black-Karasinski (BK)
Taxa de Juros a Termo	Modelam a ETTJ utilizando como fatores as taxas a termo instatâneas	Heath, Jarrow and Morton (HJM)
Modelos de Mercado	Modelam a ETTJ utilizando como fatores as taxas a termo discretas de acordo com o mercado	Brace, Gatarek and Musiela (BGM) Lognormal-Forward Libor (LFM) Lognormal-Forward Swap (LSM)

Tabela 3.1 Famílias de Modelos de Taxas de Juros e seus modelos mais difundidos.

Um grande problema com estes modelos é que embora ofereçam soluções analíticas, eles não replicam perfeitamente os preços dos títulos o que pode ser uma característica interessante para quem deseja ter um modelo para arbitrar estes mercados, porém, não são úteis para o apreçamento de derivativos que tenham como ativo-objeto um título sendo apreçado por eles.

Assim, como evolução natural, temos a segunda geração dos *short-rate models* que são chamados de modelos de não-arbitragem¹ por procurarem replicar perfeitamente a ETTJ e, conseqüentemente, replicar os preços dos títulos zero cupom. Dentre estes temos:

- Ho-Lee: caracteriza-se pelo fato de que seu *drift* não tem um termo para modelar a velocidade de reversão à média, embora, o modelo consiga apontar a direção média na qual a taxa se move independentemente do nível da mesma, de acordo com Hull (2003 – pg 544). Aceita forma

¹ No caso de opções sobre ações, o princípio de não arbitragem é aplicado através do argumento do portfolio replicante fazendo com que o *drift* do processo seja igual à taxa de juros livre de risco, ou seja, na medida de probabilidade neutra ao risco os investidores serão remunerados a esta taxa independentemente de sua aversão ao risco. No caso dos modelos *spots*, isto é feito ajustando-se o *drift* do modelo à ETTJ inicial a qual já traz consigo informações sobre as preferências dos investidores, ou seja, sobre o preço de mercado do risco (market price of risk).

analítica, porém, não dá flexibilidade para se definir a estrutura de volatilidade.

- Hull-White: muitas vezes chamado de Vasicek estendido pelo fato de que em seu drift há um parâmetro que é função do tempo o que o permite se ajustar perfeitamente à ETTJ. Também pode ser considerado um Ho-Lee com reversão à média, pode gerar soluções analíticas. Um inconveniente nestes dois modelos é que como o processo da taxa de juros é considerado com distribuição normal, podemos ter situações em que tenhamos taxas negativas. Este ponto é solucionado nos modelos seguintes por formularem processos lognormais para a taxa.
- Black-Derman-Toy: considerado em sua versão reduzida como uma versão lognormal do modelo de Ho-Lee. Tanto este como os modelos seguintes são também ditos não-estacionários por possibilitar, em sua formulação mais geral, que tanto o termo de volatilidade da taxa de juros quanto o parâmetro de reversão à média possam ser considerados como função do tempo. Originalmente, havia sido formulado em árvores binomiais pelo fato de não ser possível uma solução analítica dado que se trata de um modelo lognormal na taxa, de acordo com Clewlow (1998 – pg 221) e Rebonato (2002 – pg 12). Um problema com este modelo, de acordo com Clewlow (1998 – pg 221), é que para algumas especificações da volatilidade o modelo não convirja para uma taxa-objetivo demonstrando sua propriedade de reversão à média, mas divirja.
- Black-Karasinski: da mesma forma que o modelo anterior, tem sua formulação para distribuição lognormal das taxas o que permite apenas implementação numérica. No artigo original, foi realizada a implementação em árvore binomial. Pode ser considerado como uma versão lognormal do modelo de Hull-White quando seus parâmetros de reversão à média e de volatilidade ficam constantes. Uma diferença em relação ao Black-Derman-Toy, é que seu parâmetro de velocidade de reversão à média independe da volatilidade o que o torna mais flexível, porém, de calibragem mais complexa.

A abordagem por HJM já parte de um outro referencial ou medida de probabilidade: a taxa *forward* ao invés da *spot*. Mais ainda, em sua formulação original a taxa *forward* é instantânea. Este modelo é considerado, por muitos, como sendo o mais geral possível a partir do qual todos os outros são deriváveis. Por outro lado, sua implementação é bastante complexa requerendo abordagens numéricas que demandem bastante dos computadores como Monte Carlo e árvores não recombinantes (*bushy trees*) ou Métodos de Diferenças Finitas Explícitas ou Implícitas, de acordo com Jarrow (2002 – pg 298). Outro problema, muitas vezes comentado é que taxas *forwards* instantâneas podem ser uma medida de probabilidade boa do ponto de vista teórico do modelo, porém, não muito boa do prático dado que não se trata de uma grandeza diretamente observável no mercado.

Assim, os modelos de mercado basicamente procuram resolver esta questão. A abordagem geral de BGM acaba servindo de marco teórico para vários modelos que na verdade são aplicações ou adaptações às características de cada mercado em especial, ou seja, trata-se apenas de uma mudança de numerário para uma taxa Libor, ou um taxa Swap ou uma taxa de *Money Markets*, por exemplo, porém o *framework* continua o mesmo. De fato, de acordo com Rebonato (2002 – pg 14) alguns puristas ainda tratam os modelos de mercado como sendo tudo HJM dado que todos utilizam a medida de probabilidade *forward*.

Desta forma, vemos que se trata de um ramo de modelagem em finanças muito rico em idéias e modelos e ainda longe de convergir para uma abordagem única como ocorre em outros mercados. Assim, qualquer um que se aventure no campo de aplicar algum modelo de taxas de juros no Brasil deve considerar alguns aspectos em sua escolha:

1. Estágio evolutivo do mercado: embora em franco desenvolvimento, os instrumentos derivativos negociados no mercado brasileiro ainda podem ser considerados de baixa complexidade frente aos dos mercados externos.
2. Aplicabilidade do Modelo: considerando-se as características do mercado em questão, deve-se procurar modelos que não sejam demasiadamente simplistas ou que não sejam muito complexos.

Neste sentido, os modelos das famílias dos modelos a termo e de mercado são demasiadamente complexos para o atual estágio evolutivo de nosso mercado o que nos remete para a família dos modelos de juros à vista. Dentre eles, uma escolha natural são os modelos de não-arbitragem por proporcionarem estruturas que aderem à ETTJ. Neste segmento, já temos exemplos de implementações em cima de modelos como o de Hull-White e Black-Derman-Toy para o mercado brasileiro feitos por, Gluckstern (2001) e Wataru (2004) respectivamente.

Desta forma, o modelo de BK surge como a seqüência natural nesta linha e, principalmente, por se tratar de um modelo com algumas vantagens sobre seus sucessores, pois, não admite taxas de juros negativas como em Hull-White e tem maior flexibilidade em sua calibragem, em relação ao Black-Derman-Toy por dissociar a velocidade de reversão à média da volatilidade. Ademais, pode ser implementado em árvores trinomiais o que lhe confere maior grau de liberdade.

Por este fato, implementaremos o modelo de BK aplicado às opções sobre Futuro DI através de árvores trinomiais utilizando o procedimento geral de construção de árvores proposto por Hull-White (Fall 1994). Utilizaremos como benchmarking o modelo Black o qual é utilizado no mercado para o apreçamento destes instrumentos. O objetivo é oferecer uma primeira adaptação do modelo a este mercado e, dado o potencial do modelo, remeter a trabalhos futuros questões que poderão contribuir de forma significativa para a aplicação prática deste modelo no mercado brasileiro.

Assim, os passos seguintes serão apresentar o modelo Black e como ele é adaptado para o apreçamento das opções sobre Futuro DI, bem como, fazer uma apresentação mais detalhada do modelo de BK. Com isto em mãos, estaremos prontos para entrar na implementação do modelo e a obtenção dos resultados que serão tema dos próximos dois capítulos.

3.3 O Modelo de Black como Referencial

Nosso objetivo neste ponto é mostrar como o modelo de Black é adaptado para apreçar as opções sobre futuro DI, dado que muitos praticantes utilizam este modelo no seu apreçamento. Ele foi originalmente desenvolvido para o apreçamento

de opções sobre futuros de *commodities* e sua hipótese básica é que o preço futuro de um ativo possui a mesma propriedade de lognormalidade existente para ações, conforme Hull (2003 – pg 509).

No entanto, entendemos ser necessário o estabelecimento de algumas convenções em termos de notação. Assim, sempre que estivermos tratando de grandezas expressas em unidades monetárias utilizaremos letras maiúsculas e para taxas letras minúsculas. Ao nos referirmos à variável P ou F queremos dizer algo a respeito de um preço à vista (*spot*) ou a termo (*forward*) de um título que paga \$1 em uma determinada data futura. Se nos referirmos a r ou f estaremos dizendo algo sobre uma taxa *spot* ou *forward*.

Claramente estas grandezas dependem do tempo o qual vamos convencionar em termos de frações anuais (*year fraction*). Como já vimos anteriormente, a convenção de tempo no mercado brasileiro é em dias úteis e o ano é medido em 252 dias. Assim, o tempo, medido sempre pela variável t , será expresso pela relação entre o número de dias úteis no período e o número de dias úteis convencionados em um ano, ou seja, 252 dias.

Desta forma, temos as seguintes relações:

$$\text{Year Fraction: } t = DU/252$$

Valor de um título zero cupom, no instante t_0 , com vencimento em t_1 :

$$P(t_0, t_1) = \frac{1}{[1+r(t_1)]^{t_1-t_0}} \quad (3.1)$$

Em termos práticos, a taxa *spot* r sempre estará referindo-se às taxas da curva pré-fixada zero cupom discutida no capítulo anterior, de forma que, o índice t apenas ressalta a relação existente entre a taxa e o prazo na ETTJ. Note que esta equação é análoga à equação 2.1. A diferença aqui é que o valor a ser descontado é unitário ao passo que na anterior tínhamos o valor nominal de vencimento do contrato futuro sendo trazido a valor presente. Como geralmente estaremos falando de preços de títulos calculados com referência a hoje, temos que t_0 será sempre considerado como sendo nulo, de forma que, a relação 3.1 será dada por 3.2.

$$P(0,t_1) = \frac{1}{[1+r(t_1)]^{t_1}} \quad (3.2)$$

Desta forma o preço forward hoje compreendido entre os momentos t_1 e t_2 pode ser considerado conforme a relação 3.3. Nela, podemos ver que o preço *forward* pode ser obtido a partir da relação entre os preços de dois títulos com vencimentos nas respectivas datas em que se considera a rentabilidade. Claramente, pode-se obter uma formulação em termo de taxas de juros considerando-se a relação 3.2.

$$F(0,t_1,t_2) = \frac{P(0,t_2)}{P(0,t_1)} \quad (3.3)$$

Como consequência destas relações, podemos obter uma expressão para a taxa *forward* hoje, compreendida entre os instantes t_1 e t_2 em função dos preços dos títulos zero cupom com vencimentos nas mesmas datas do *forward* em questão, conforme a relação 3.4 mostra.

$$f(0,t_1,t_2) = \left[\frac{P(0,t_1)}{P(0,t_2)} \right]^{1/(t_2-t_1)} - 1 \quad (3.4)$$

Com estas relações, temos os elementos básicos para podermos discutir o modelo de Black aplicado ao apreçamento das opções europeias sobre futuro DI. Para tanto, considere uma call de PU¹, sobre o Futuro DI, que vence no instante t_1 . Seu ativo objeto é, portanto, o preço de um título que vence em t_2 com $t_2 > t_1$, de acordo com as características comentadas no item 2.2.3.2. O modelo de Black calcula o *pay-off* da opção considerando que o preço *forward* do título possui uma distribuição lognormal e cujo valor esperado é dado pela relação 3.5.

¹ O que equivale a uma *put* de taxa.

$$E[P(t_1, t_2)] = F(0, t_1, t_2) \quad (3.5)$$

Desta forma, nós temos no vencimento da opção em t_1 o *pay-off* definido como sendo o máximo entre zero e a diferença do preço *forward* do título em t_1 contra o *strike* da opção. Conforme demonstrado em Hull (2003 – pg 509), a hipótese de lognormalidade faz com que o valor da opção seja dado pelo seu *pay-off* descontado pela taxa livre de risco, contida na relação 3.2. Assim, chegamos na equação 3.6 que define o preço hoje para uma *call* europeia com vencimento em t_1 sobre um título com maturidade em t_2 .

$$C(0, t_1) = P(0, t_1) [F(0, t_1, t_2) N(d_1) - K N(d_2)] \quad (3.6)$$

Onde

$$d_1 = \frac{\ln[F(0, t_1, t_2)/K] + \sigma^2 t_1}{\sigma \sqrt{t_1}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t_1}$$

$N(\cdot)$ = Distribuição Acumulada Normal

Para uma *put* temos:

$$P(0, t_1) = P(0, t_1) [K N(-d_2) - F(0, t_1, t_2) N(-d_1)] \quad (3.7)$$

No caso das opções sobre Futuro DI, já comentamos suas características básicas no capítulo 2. Assim, vamos tomar como exemplo uma opção que vence em t_1 sobre um título que vence em t_2 . Como a curva envolvida é a pré-fixada em reais, temos que todos os preços dos títulos são obtidos pelas relações 3.1 e 3.2 utilizando-se as taxas *spot* obtidas da curva para t_1 e t_2 .

Conforme já comentamos, podemos interpretar estas opções sob a ótica de taxas ou de preços, ou seja, se estivermos falando de *call* de PU equivalerá a uma *put* de taxa. Apesar de se utilizar normalmente o critério de PU para o apreçamento, veremos mais adiante que elas são negociadas em forma de taxa.

Nesta versão, a interpretação é que se trata de uma opção sobre a ETTJ começando em t_1 e indo até t_2 , ou seja, no vencimento da opção se tratará da taxa *spot* para o prazo referente a t_2-t_1 . Conseqüentemente, o *strike* da opção também é expresso em forma de taxa. Ao longo da vida da opção, no entanto, a taxa implícita na ETTJ para o período entre t_1 e t_2 será a taxa *forward* que pode ser obtida pela relação 3.4 acima.

Portanto, aplicando-se os resultados acima para uma *call* de PU sobre o Futuro DI temos os seguintes resultados:

$$C(0,t_1) = N * P(0,t_1) [F(0,t_1,t_2)N(d_1) - F_f(0,t_1,t_2)N(d_2)] \quad (3.8)$$

Onde, além das relações anteriores para o preço *spot* do título em t_1 e o preço *forward* entre t_1 e t_2 dados pelas relações 3.2 e 3.3, respectivamente, ainda temos a conversão do *strike* de taxa para preço dada pela relação 3.9. Conseqüentemente, os argumentos aplicados na distribuição acumulada normal $N(\cdot)$, são dados pelas relações 3.10 e 3.11.

$$F_f(0,t_1,t_2) = \frac{1}{(1+K)^{(t_2-t_1)}} \quad (3.9)$$

$$d_1 = \frac{\ln[F(0, t_1, t_2)/F_k(0, t_1, t_2)] + \sigma^2 t_1}{\sigma \sqrt{t_1}} \quad (3.10)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t_1} \quad (3.11)$$

Desta forma, o modelo de Black é adaptado de forma a assumir que os preços forwards dos títulos sejam lognormais e σ refere-se à volatilidade deste mesmo preço.

Com isto, apesar de o modelo conseguir resolver alguns problemas comentados anteriormente com a aplicação do modelo de BS para taxas de juros, ele não consegue capturar os movimentos correlacionados na ETTJ o que torna sua aplicação restrita para este mercado, uma vez que, a abordagem a ser seguida tem que respeitar as características de cada instrumento individualmente não permitindo uma abordagem integrada, ou seja, as adaptações necessárias fazem com que instrumentos como opções sobre títulos, *caps* e *swaptions* não possam ser gestionados de forma integrada dificultando, por exemplo, a gestão dos riscos, de acordo com Clewlow (1998 – pg 188) e Brigo e Mercurio (2001 – pg 16).

3.4 O Modelo de Black-Karasinski

Proposto em 1991, trata-se de um modelo unifatorial de não-arbitragem, markoviano definido sobre o logaritmo neperiano da taxa spot instantânea, ou seja, $\ln(r(t))$ que é o fator do modelo. Esta, portanto, é uma das características mais importantes, pois, pelo fato de ser lognormal, não é possível se observar taxas negativas. Aliás, esta é uma propriedade que pertence a todo modelo que tenha esta formulação como, por exemplo, o Black-Derman-Toy (BDT) de 1990.

A diferença básica entre estes dois modelos é que, enquanto no BK temos três parâmetros independentes, no BDT temos apenas dois parâmetros, uma vez que, a velocidade de reversão à média depende diretamente da volatilidade da taxa neste último modelo. Assim, BK possui maior flexibilidade para se ajustar aos dados de mercado e, de fato, pode ser considerado uma generalização de BDT de acordo com Rebonato (2002 – pg 12) e Brigo e Mercurio (2001 – pg 74).

Devido à sua formulação lognormal em taxas, o modelo não é analiticamente tratável fazendo com que não seja possível se encontrar soluções fechadas para os preços dos títulos e das opções. Geralmente, este é o ponto mais freqüentemente colocado como sendo um problema do modelo. Porém, dado o forte avanço dos computadores nos últimos anos, bem como, de técnicas numéricas cada vez mais eficientes este aspecto tem perdido relevância no tempo frente às virtudes do modelo. Ainda mais se considerarmos que famílias de modelos mais sofisticados como os dos Modelos a Termo e de Mercado freqüentemente requerem implementações com técnicas de Monte Carlo ou *Bushy Trees* o que faz com que demandem ainda mais em termos de hardware.

No *paper* original, o modelo foi implementado aplicando árvores binomiais com passo de tempo variável. Entretanto, técnicas mais recentes, como a proposta por Hull (Fall 1994), na qual se desenvolve um procedimento de construção geral para árvores trinomiais¹ pode ser também aplicado ao BK, uma vez que, este último pode ser considerado como sendo uma versão lognormal do primeiro. E de fato, esta será a implementação realizada no presente trabalho.

¹ No *paper* de Hull-White, é realizada a implementação do procedimento com base em seu modelo que é considerado uma extensão do modelo de Vasicek.

Um outro problema geralmente apontado na literatura como por exemplo em Cairns (2004 – pg 90) e Brigo e Mercurio (2001 – pg 74) é que o valor esperado do numerário (*Money Market Account* ou *Cash*) é infinito independentemente do prazo considerado. Porém, Brigo e Mercurio ressaltam que este é um problema de modelos lognormais em geral e, como consequência direta deste ponto, futuros de Eurodollar não podem ser apreçados por esta família de modelos.

Pelo lado das vantagens, está o fato de que possui uma qualidade de ajuste aos dados de mercado muito boa sendo que nos mercados internacionais uma de suas qualidades mais propaladas é o bom ajuste às superfícies de volatilidades de *swaptions*.

Outra questão, ainda com referência ao BDT, é que pode haver determinadas especificações da curva de volatilidade na qual este modelo pode divergir na taxa, de acordo com Clewlow (1998 – pg 222) pelo fato de ter a reversão à média como função da volatilidade da taxa de juros de curto prazo. Como BK dissocia estes fatores introduzindo um terceiro parâmetro independente tal fato não ocorre.

Assim, o modelo assume que o fator associado à de juros de curto prazo se desenvolve sobre a medida neutra ao risco Q^1 de acordo com o seguinte processo na sua forma mais geral:

$$d \ln(r(t)) = [\theta(t) - \varphi(t) \ln(r(t))] dt + \sigma(t) dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad 3.12$$

Onde $r(0)$ é uma constante positiva e os três parâmetros são funções temporais determinísticas que podem ser escolhidas de forma a ajustar o modelo à ETTJ e às curvas de volatilidade. Tal fato não é obrigatório, ou seja, o modelo também dá a flexibilidade de se determinar algum parâmetro endogenamente via processo de calibragem. O parâmetro θ refere-se à taxa de juros de longo prazo. O parâmetro φ dá uma medida da velocidade na qual o logaritmo da taxa tende para seu valor de longo prazo e σ é a volatilidade por unidade de tempo do retorno instantâneo da taxa r .

¹ Conforme comentamos anteriormente, enquanto no modelo de BS para o apreçamento de opções sobre ações utiliza-se da medida de probabilidade neutra ao risco *spot*, através do portfolio replicante, de forma a remunerar a carteira pela taxa livre de risco e, assim, fazer com que o apreçamento do ativo contingente independa da curvas de utilidade marginais e, portanto, da aversão ao risco dos indivíduos, nos modelos de taxas de juros de não-arbitragem isto é realizado com o ajuste do modelo à ETTJ.

De acordo com o trabalho original, sugere-se para o ajuste do modelo que se utilizem os seguintes inputs para os três parâmetros $\theta(t)$, $\varphi(t)$ e $\sigma(t)$, respectivamente:

- Curva de juros *spot*, ou seja, ETTJ.
- Curva de volatilidades sobre a ETTJ.
- Preço de caps de juros no dinheiro.

Uma versão muito utilizada deste modelo na prática se assemelha muito ao modelo de Hull-White (HW) e, de acordo com o que já foi comentado esta sua forma é, as vezes, chamada de versão lognormal de HW. Conforme podemos ver na equação 3.13, a diferença está apenas em fazer os parâmetros φ e σ constantes o que simplifica bastante o ajuste do modelo e, por esta questão, acaba sendo preferido no dia-a-dia, uma vez que, o modelo preserva sua capacidade de se ajustar à ETTJ mesmo assim.

$$d \ln(r(t)) = [\theta(t) - \varphi \ln(r(t))]dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad 3.13$$

Esta equação é a que será utilizada no presente trabalho para se realizar uma primeira implementação deste modelo aplicada ao mercado brasileiro de derivativos de taxas de juros. Conforme já anunciado anteriormente, utilizaremos o procedimento proposto por Hull e White (Fall 1994) para árvores trinomiais.

O caminho que iremos trilhar será o de ajustar de forma exógena ao dois parâmetros do drift do modelo: $\theta(t)$ e φ . O primeiro será realizado através do ajuste à ETTJ de uma data. O segundo será ajustado econometricamente. O termo de volatilidade, por sua vez, será calibrado com base nas cotações das opções sobre futuro DI divulgadas por *brokers*.

No capítulo 4, desenvolveremos o modelo sob a abordagem da árvore trinomial discutindo os aspectos mais relevantes como o ajuste do *drift* do modelo tanto à ETTJ quanto na velocidade de reversão à média, bem como, no processo de calibragem do modelo. No capítulo 5, apresentaremos os dados de mercado utilizados e os resultados do modelo, tanto em termos dos aspectos intrínsecos ao modelo, bem como, de robustez e performance sempre comparando com o marco de Black.

Obviamente, dada a complexidade do tema e das inúmeras possibilidades de abordagens do modelo, não será possível aqui esgotar o assunto, assim, nosso objetivo consiste em adaptar o modelo ao mercado brasileiro e aplicá-lo a um exemplo prático comparando seus resultados com o modelo de Black discutido no item anterior. Por fim, procuraremos deixar uma série de sugestões para futuros trabalhos.

4. Implementação do Modelo de Black-Karasinski

Para a implementação de qualquer modelo, é necessário que se utilize algum método que resolva o processo estocástico ou, mais precisamente, a equação diferencial estocástica que o define.

Uma primeira abordagem é buscar possíveis soluções analíticas por facilitarem a compreensão de como as variáveis afetam o processo, bem como, por serem modelos mais eficientes em termos de tempo de resposta. Este é o caso, por exemplo, de modelos como o de BS para opções sobre ações ou de Vasicek para taxa de juros.

No entanto, poucos são os modelos que admitem soluções fechadas o que torna necessária a utilização de métodos numéricos para a sua implementação. Alguns dos métodos numéricos mais utilizados são:

Monte Carlo: consiste na simulação direta da equação estocástica diferencial através da obtenção de dezenas ou centenas de milhares de trajetórias aleatórias para a variável estocástica através da geração de números aleatórios. Trata-se de uma técnica bastante genérica. Devido ao volume de simulações necessárias para que a técnica gere bons resultados ela tende a demandar bastante em termos computacionais. É bastante aplicado em situações onde há mais de uma variável estocástica envolvida ou o *pay-off* do derivativo seja bastante complexo. Também pode ser utilizado em derivativos que tenham o *pay-off* determinado em função da trajetória do ativo, porém, possui aplicação limitada em ativos que não sejam do tipo europeu.

Método de Diferenças Finitas: consiste em converter a equação diferencial que descreve o modelo em uma equação de diferenças finitas e esta última é resolvida de forma iterativa através de várias técnicas como métodos implícitos, explícitos ou Crank-Nicolson.

Árvores: método discreto no tempo que consiste em simular os possíveis estados que a variável estocástica pode atingir em cada passo em função das probabilidades de transição de um nó para outro. As árvores podem ser recombinantes ou não o que determinará a performance do modelo. Para ações o

método mais comum é o de árvore binomial recombinante o que fez com que vários modelos para taxa de juros fossem inicialmente abordados sob este mesmo método.

De fato, tanto BDT quanto BK em seus artigos originais utilizam árvores binomiais para implementar seus modelos. No entanto, uma abordagem alternativa são as árvores trinomiais recombinantes nas quais possuem três possibilidades para se sair de um estado para outros à frente. Esta técnica vêm sendo aplicada em modelos de taxas de juros no lugar das árvores binomiais por oferecer um maior grau de liberdade para se ajustar modelos que tenham efeito de reversão à média. Outro fato interessante é a equivalência deste método com o de diferenças explícitas finitas, conforme Hull mostra em seu artigo de 1990. Ainda como último ponto, vale ressaltar que estes métodos tratam, de forma mais simples, derivativos que não sejam do tipo europeu.

Uma diferença fundamental, no entanto, entre árvores sobre ativos como ações e taxas de juros é que, enquanto no primeiro, as taxas de juros são consideradas constantes ao longo de todo o processo, no segundo a taxa varia em cada passo de tempo.

Então, apesar de o modelo de BK ter sido inicialmente apresentado em árvore binomial com passo variável, faremos sua aplicação através de árvores trinomiais recombinantes por serem mais flexíveis no tratamento de reversão à média. Em particular, faremos a implementação utilizando o procedimento proposto por Hull-White (Fall 1994)¹ respeitando as particularidades do mercado brasileiro tais como convenção de contagem de dias na ETTJ² e base de expressão de taxas, uma vez que, em nosso caso as taxas estão expressas no formato DU/252 exponencial.

O procedimento é aplicável a qualquer processo cuja variável estocástica x seja função da *short rate* r , ou seja, $x=f(r)$ como em HW e BK. Assim, é aplicável a uma equação estocástica geral do tipo da equação 4.1.

$$df(r(t)) = [\theta(t) - \rho f(r(t))]dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad 4.1$$

¹ Neste artigo, Hull e White aplicam o procedimento a modelos unifatoriais que será o nosso caso. No entanto, em artigo subsequente (Winter 1994) eles estendem o procedimento para aplicar em modelos que dependem de curvas em dois países simultaneamente, bem como, em uma variedade de modelos markovianos com dois fatores.

² O que faz com que o time step na árvore seja variável ao contrário da maioria dos exemplos disponíveis.

Se $f(r)=r$, então, temos o HW ou Vasicek estendido modelo sobre o qual Hull apresentou o procedimento de construção da árvore trinomial que aplicaremos em BK. Vale notar que se fizermos em 4.1 $f(r)=\ln(r)$ temos a equação simplificada de BK 3.13 na qual nos basearemos para a implementação.

O processo se caracteriza pela construção da árvore em duas fases distintas. Na primeira, define-se uma variável aleatória $x=\ln(r)$ e gera-se uma árvore simétrica em torno do seu valor esperado. Nesta etapa, ainda obtemos todas as probabilidades de transição de estados. Depois, implementamos por *forward induction*, conforme descrito no artigo de Jamishdian (1991), o ajuste da árvore original à ETTJ até o vencimento do ativo-objeto da opção sobre Futuro DI.

A grande diferença na aplicação do método proposto por HW é que, no caso, de BK teremos que utilizar um processo de Newton-Raphson em conjunto com o *forward induction* para determinar a posição do nó central em cada passo de tempo, enquanto que, em HW este procedimento é analítico.

Uma vez obtida a árvore por *forward induction*, podemos calcular o preço do título nesta mesma árvore por *backward induction* determinando seu preço em cada estado da natureza em cada passo de tempo, inclusive no vencimento da opção que é o preço *forward* do título no seu vencimento. Com base no *strike*, o preço *forward* em cada estado da natureza e os preços Arrow-Debrew (AD), conseguimos calcular o preço da opção a valor presente.

Este é um roteiro simplificado do que vamos discutir na seqüência deste capítulo. Inicialmente comentaremos algumas características das árvores trinomiais e apresentamos o procedimento de construção de Hull aplicando-o ao BK. Mostraremos os processos de *forward induction* e o de *backward induction* que serve para o apuração do título e a opção sobre o mesmo. Posteriormente, discutimos como é feito o ajuste do *drift* e do termo estocástico do modelo.

No capítulo seguinte, mostramos os resultados da aplicação de BK adaptado aos dados do mercado brasileiro. Por último, fechamos a conclusão do trabalho com um repasso geral nos resultados obtidos e deixamos sugestões para trabalhos futuros.

4.1 Procedimento Geral de Construção – Método de Hull-White

Vamos aplicar o procedimento geral de construção de árvores trinomiais recombinantes para modelos unifatoriais markovianos desenvolvido por HW (Fall 1994) ao caso específico do modelo de Black-Karasinski (1991) adaptado ao mercado brasileiro. Em particular, partiremos de sua forma contínua mais restrita que já foi apresentado na equação 3.13 que reescrevemos em 4.2.

$$d \ln(r(t)) = [\theta(t) - \varphi \ln(r(t))] dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad 4.2$$

Como estaremos trabalhando com o modelo restrito¹, ou seja, com os parâmetros de reversão à média e de volatilidade constantes teremos que ajustar o modelo unicamente à ETTJ dada pela curva de mercado de uma data qualquer. O parâmetro de reversão à média será, neste momento, considerado como dado e mais adiante veremos como estimá-lo. Já o parâmetro de volatilidade da taxa de juros será obtido calibrando o modelo com base nos preços de cada opção cotada no mercado.

Para aplicarmos o método, iniciamos observando que a equação 4.2 está em sua forma contínua e que, portanto, é preciso utilizar uma versão discreta dado que o procedimento numérico em questão assim requer. Então, ao invés de termos dt , teremos δt para representarmos um intervalo discreto de tempo. Por sua vez, a taxa de juros R , que está associada ao intervalo δt , segue o mesmo processo de $r(t)$ conforme equação 4.2².

$$\delta \ln(R(i)) = [\theta(i\delta t) - \varphi \ln(R(i))] \delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t} \quad 4.3$$

¹ De fato, de acordo com Hull (1996), embora trabalhar com parâmetros em função do tempo possibilita um melhor ajuste do modelo para o apreçamento dos instrumentos, este fato faz com que o modelo apresente um comportamento não estacionário na estrutura de volatilidade fazendo com que a estrutura a termo da volatilidade obtida pelo modelo no futuro possa apresentar diferenças substanciais em relação à estrutura existente no mercado hoje. Para contornar este problema, o autor sugere a escolha de funções temporais “bem comportadas”, ou seja, que não possibilitem grandes variações de um passo para o outro. Este fato, faz com que muitos praticantes prefiram inicialmente utilizar a forma restrita, de acordo com Clewlow (1998 – pg 222) e London (2005 – pg 495).

² Por se tratar de um processo particular de Markov, segue que em sua forma discreta a variável $\delta V = \varepsilon \sqrt{\delta t}$, com $\varepsilon \sim N(0,1)$, ou seja, a equação 4.1 segue um processo de Wiener.

Onde

$$\delta t(i) = t_{i+1} - t_i \quad \text{com} \quad t_i = \frac{DU(i)}{252}$$

Como os pontos da curva de juros não são fixos no tempo nem possuem prazos constantes entre si, temos que utilizar passos de tempo variáveis onde cada referência de tempo na ETTJ determina onde começa e termina um período. Adicionalmente, também utilizamos a convenção de contagem de dias úteis fazendo com que as frações de ano utilizadas estejam em base 252.

Desta maneira, definimos uma árvore com passos de tempo δt variáveis no tempo e que são função dos pontos tomados como referência para a montagem da curva na data específica. Observe que os passos de tempo, assim especificados, representam diferenças temporais em frações de ano sempre partindo do passo atual para o passo seguinte no tempo, pois, todos os valores que vamos determinar em um dado passo como probabilidades de transição, taxas de juros e fatores de desconto serão válidos também para este mesmo intervalo de tempo δt .

Como já sabemos, o modelo de BK é lognormal na taxa, ou seja, se fizermos $\ln r = f(r)$ recaímos na equação geral 4.1. De acordo com Hull (Fall 1994), qualquer modelo que possa ser expresso nesta forma pode ser resolvida através da aplicação do procedimento geral. De fato, se fizermos $x = \ln r$ em 4.3 obtemos a equação 4.4 que pode ser interpretada como uma discretização do modelo normal de Hull-White.

$$\delta x(i) = [\theta(i) \delta \lambda(i) - \varphi x(i)] \delta \lambda(i) + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta \lambda(i)} \quad 4.4$$

Aplicando-se o método de construção de árvore trinomial para este processo, que na verdade é um HW, e reconvertendo-o depois para o processo original estaremos resolvendo o problema. O método é aplicado em duas fases, a primeira que gera uma árvore simétrica em x e a segunda que ajusta este processo à ETTJ por *forward induction*. Estas duas etapas, ajustam o termo de *drift* do modelo o qual discutiremos na seção seguinte. Depois, mostraremos como se obter o preço de uma opção de Futuro DI a partir destes resultados e, por último, discutiremos a calibragem do modelo com base na volatilidade σ .

4.2 Passo 1 - Ajuste do Drift do Modelo

A versão do modelo que vamos ajustar possui um parâmetro em função do tempo no *drift* que é o θ . Enquanto o termo constante φ representa velocidade de reversão à média, o θ tem a função de ajustar o modelo à curva de juros de mercado o que fazemos a seguir.

4.2.1 Construção da Árvore Simétrica

Para a construção da árvore simétrica, utilizamos uma variável x^* que segue o mesmo processo de x , mas possui valor inicial nulo e segue o seguinte processo:

$$\delta x^*(i) = -\varphi x^*(i) \delta t(i) + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t(i)} \quad 4.5$$

Com

$$\delta x^*(i) = x^*(i+1) - x^*(i) \quad 4.6$$

Este processo é simétrico em torno de $x^*=0$ e a variável na relação 4.6 é distribuída normalmente. Assim, desconsiderando-se termos de ordem superior a δt , obtemos a esperança e a variância de δx^* a partir de 4.5.

$$E[\delta x^*(i)] = -\varphi x^*(i) \delta t(i) \quad 4.7$$

$$Var[\delta x^*(i)] = \sigma^2 \delta t(i) \quad 4.8$$

Vemos que a esperança em cada passo do modelo depende da velocidade de reversão à média, que no nosso caso é constante, e do passo de tempo que é variável. O mesmo acontece com a variância. Em consequência, veremos que as probabilidades de transição também dependerão do passo de tempo.

Até o presente momento, apenas discutimos a árvore na dimensão tempo e associamos à sua evolução a variável inteira i . Mas, para que o processo seja montado, é preciso que tenhamos em conta a difusão da variável estocástica ao longo do tempo o que implica em dispersão de valores. Em outras palavras, é preciso considerar a dimensão de todos os possíveis valores que a variável que descreve o processo pode assumir em cada passo de tempo, ou seja, todos os

estados da natureza que ela pode assumir. À esta dimensão associamos a variável j . Desta forma, temos um par ordenado (i,j) que determinam um ponto ou nó no tempo e no espaço de estados formando um retículo que dá origem à árvore.

Nesta nova dimensão, necessitamos definir como será realizado o espaçamento da variável em questão de um passo para outro. Hull (1990) mostra a equivalência entre o método de diferenças finitas explícitas e o de árvores trinomiais onde argumenta que por questões de convergência e estabilidade do método¹ as variáveis que se relacionam com o tempo e com o espaçamento de estados devem ser escolhidas de forma a respeitar a relação 4.9.

$$\frac{\sigma\sqrt{3\delta t(i)}}{2} < \delta x^*(i) < 2\sigma\sqrt{\delta t(i)} \quad 4.9$$

Assim, Hull (1990) e (1993) sugere que uma boa escolha que minimiza o erro de aproximação da equação diferencial pelo método de diferenças finitas e, por consequência, também pelo método de árvores trinomiais, está em assumir o espaçamento de estados de acordo com a relação 4.10. Assim, os valores que a variável x^* assume no passo de tempo seguinte é completamente determinado pela relação 4.10 e pelo estado da natureza j , conforme a relação 4.11 a seguir.

$$\delta x^*(i) = \sigma\sqrt{3\delta t(i)} \quad 4.10$$

Assim, os valores que a variável x^* assume no passo de tempo i é completamente determinado pela relação 4.10 e pelo estado da natureza j , conforme a relação 4.11 a seguir.

$$x^*(i,j) = j\delta x^*(i) \quad 4.11$$

Para se definir a geometria da árvore ainda necessitamos identificar que tipo de ramificação devemos aplicar a partir de um determinado nó para os nós do passo seguinte e, em função do tipo de ramificação a ser utilizado, calcular as probabilidades de transição respectivas. De acordo com a figura abaixo podemos ver as três possibilidades de ramificação do processo.

¹ Ao se utilizar o método de diferenças finitas é importante se assegurar que o valor estimado do instrumento sendo apreçado convirja para o seu valor verdadeiro a medida em que δt e $\delta x^* \rightarrow 0$ de acordo com Hull (1990).

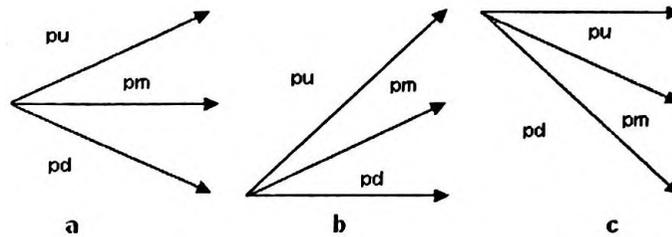


Figura 4.1 Possibilidades de ramificação para o processo.

Na Figura 4.1a, temos um processo normal no qual leva, ao passo seguinte, a um valor superior e a outro inferior ao valor do nó atual, bem como, ao mesmo valor atual. Este é o processo de ramificação mais freqüente, porém, quando se atinge valores suficientemente grandes para j , é necessário que se passe para o processo da Figura 4.1c. Alternativamente, também será necessário passar da Figura 4.1a para a 4.1b quando tivermos j muito negativo.

Assim, Hull (Fall 1994) argumenta que para termos probabilidades sempre positivas, é preciso considerar um valor crítico para j para que, ao longo da montagem da árvore, possa-se definir em cada passo qual tipo de ramificação se deve utilizar. Assim, temos um j_{max} com que se escolhe sair do processo de ramificação do tipo 4.1a passando para o tipo 4.1c. Alternativamente, temos um j_{min} que permite passar para o tipo 4.1b saindo do tipo 4.1a. Desta forma, Hull conclui que o j_{max} deve ser o menor inteiro maior que o valor da relação 4.12 e que o j_{min} deve ser $-j_{max}$.

$$j_{max} = \frac{0.184}{\varphi \delta l(i)} \quad 4.12$$

As variáveis pu , pm e pd são as probabilidades de transição do ramo superior, intermediário e inferior da ramificação de um nó. Estas probabilidades devem ser sempre positivas e somar 1. Ainda, para se determinar seus valores em cada nó (i,j) , é preciso resolver um sistema de três equações onde a primeira já comentamos e as outras duas saem do fato de que estas probabilidades devem satisfazer 4.7 e 4.8, ou seja, devem satisfazer a esperança de δx^* e sua variância.

Com estas 3 equações não-linearmente dependentes podemos resolver o sistema e determinar as probabilidades em cada passo de tempo e tipo de ramificação¹, conforme podemos ver nos resultados das equações abaixo.

- Tipo de Ramificação da Figura 4.1a.

$$pu = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta_t(i)]^2 - \varphi_j \delta_t(i)}{2}$$

$$pm = \frac{2}{3} - [\varphi_j \delta_t(i)]^2$$

$$pd = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta_t(i)]^2 + \varphi_j \delta_t(i)}{2}$$

- Tipo de Ramificação da Figura 4.1b.

$$pu = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta_t(i)]^2 + \varphi_j \delta_t(i)}{2}$$

$$pm = -\frac{1}{3} - [\varphi_j \delta_t(i)]^2 - 2\varphi_j \delta_t(i)$$

$$pd = \frac{7}{6} + \frac{[\varphi_j \delta_t(i)]^2 + 3\varphi_j \delta_t(i)}{2}$$

- Tipo de Ramificação da Figura 4.1c.

$$pu = \frac{7}{6} + \frac{[\varphi_j \delta_t(i)]^2 - 3\varphi_j \delta_t(i)}{2}$$

$$pm = -\frac{1}{3} - [\varphi_j \delta_t(i)]^2 + 2\varphi_j \delta_t(i)$$

$$pd = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta_t(i)]^2 - \varphi_j \delta_t(i)}{2}$$

Assim, conseguimos construir a árvore simétrica definida pela relação 4.11 e obter todas as probabilidades de transição para todo o processo, em função do passo de tempo. Agora precisamos fazer o ajuste da árvore à ETTJ.

¹ A demonstração deste resultado encontra-se no Apêndice 2.

4.2.2 Ajuste à Curva de Juros de Mercado

O segundo estágio da construção será converter x^* para x . Lembrando que a diferença entre as duas variáveis está no parâmetro $\theta(.)$ que é nulo para x^* . Assim, definimos a variável α da seguinte forma:

$$\alpha(i\delta t(i)) = x(i\delta t(i)) - x^*(i\delta t(i)) \quad 4.13$$

Se o modelo fosse tratável analiticamente como HW ou Ho-Lee, poderíamos resolver uma equação diferencial em α considerando-se os processos em 4.4 e 4.5. No entanto, mesmo que este fosse o caso, Hull (Fall 1994) observa que esta solução analítica, embora interessante para muitos propósitos, apresenta a inconveniência de não se ajustar precisamente à ETTJ. Assim, a alternativa é partir para um procedimento iterativo que seja capaz de ajustar o modelo de forma precisa à curva de mercado. Outra vantagem deste procedimento encontra-se no fato de que pode ser facilmente estendido para modelos que não podem ser tratados analiticamente como os lognormais o que nos obriga a necessariamente adotar este caminho para implementar BK.

Para tanto, necessitamos de um meio que nos possibilite evoluir com o processo sobre a taxa de juros de curto prazo (*short rate*) de hoje até um ponto futuro ajustando-se sempre à curva de mercado. Lembrando-se do que já comentamos anteriormente, enquanto para ações utiliza-se a medida neutra ao risco criando-se uma carteira replicante que seja remunerada à taxa livre de risco fazendo com que o apreçamento da opção sobre a ação independa da aversão ao risco dos indivíduos, no caso de modelos para taxas de juros toda a informação sobre as preferências dos indivíduos já está contida na ETTJ que serve como medida de probabilidade para estes modelos. O processo que nos possibilita realizar esta evolução é a versão discreta da equação *forward* de Fokker-Plank, conhecido como *forward induction*, de acordo com Jamshidian (1991)¹.

No entanto, para que possamos aplicar este conceito devemos antes definir a variável $Q(i,j)$ como sendo o valor presente de um título que paga \$1 se o nó (i,j) for atingido e zero caso contrário, ou seja, é o preço Arrow-Debrew (AD). Assim, o

¹ O complementar do processo de *forward induction* é o *backward induction* que é mais difundido uma vez que é aplicado inclusive em árvores para ações. O *backward induction* é a versão discreta da equação *backward* de Kolmogorov. Estas duas equações, por sua vez, são satisfeitas pela função de Green cuja versão binomial é satisfeita pelo que é conhecido como preços Arrow-Debrew, de acordo com Jamshidian (1991).

processo de *forward induction* nos permite determinar os preços AD no passo de tempo seguinte uma vez que tenhamos determinado todas as variáveis até o passo presente.

Supondo-se, então, que estejamos num passo i qualquer do processo e que conheçamos todas as variáveis necessárias em todos os nós (i,k) como taxas *forward*, fatores de desconto, preços AD e probabilidades de transição podemos determinar os preços AD no passo seguinte de acordo com a relação 4.14.

$$Q(i+1, j) = \sum_k q[(i, k), j] Q(i, k) d(i, k) \quad 4.14$$

onde

$q[(i, k), j]$ = probabilidade de transição do nó de estado k do passo i para o nó de estado j do passo $i+1$.

$Q(i, k)$ = preço AD no estado k do passo i .

$d(i, k)$ = fator de desconto do passo i para $i+1$ no estado k .

Repare que os estados da natureza no passo i estão referenciados à variável k e a variável j agora se refere aos estados da natureza dos nós de destino, ou seja, em $i+1$. Outro ponto é que os preços AD são formados por somatórios das probabilidades de transição descontadas¹. Como o somatório é feito com relação à k , sempre que houver algum ramo de algum nó do passo i que se conecta com um nó do passo $i+1$ a variável q terá valor positivo, caso um estado do passo i não se conecte com um estado do passo $i+1$ esta variável assumirá valor nulo não contribuindo no somatório.

Uma vez obtidos os preços AD por 4.14, podemos avançar no tempo de forma que o passo $i+1$ agora passa a ser o novo passo i , ou seja, após determinarmos na 4.14 os preços AD do passo seguinte podemos avançar no tempo para calcular a taxa *forward* válida para o período seguinte, bem como, fatores de desconto. Para levarmos a cabo esta tarefa, temos que considerar que os fatores de desconto de um determinado passo de tempos multiplicados pelos respectivos

¹ No nó inicial temos que $Q(0,0) = 1$, pois, um título livre de risco que vence hoje tem seu valor presente igual ao seu valor de face. Também consideramos $r(0,0)$ como sendo a taxa de juros *spot* de curto prazo. No nosso caso, tomamos o ponto da curva de 1 dia que é a taxa CDI-over.

preços AD fornecem o preço ou valor presente de um título zero cupom¹ com vencimento no passo seguinte conforme mostra a equação 4.15.

$$P(i+1) = \sum_j Q(i,j) d(i,j) \quad 4.15$$

Mas, o preço deste título é obtido a partir da curva de mercado pela equação 2.1 constituindo-se, assim, em um dado exógeno ao modelo e que será utilizado para se determinar o fator de desconto que faz com que a relação 4.15 seja verificada². Este fator de desconto, em toda a literatura é definido com base em taxas compostas continuamente o que não é o caso do mercado brasileiro que possui taxas compostas de forma discreta. Assim, utilizamos a convenção da relação 4.16 por refletir exatamente o critério de denominação de taxas em nosso mercado.

$$d(i,j) = \frac{1}{[1+r(i,j)]^{\delta t(i)}} \quad 4.16$$

Lembrando que $f(r) = \ln r = x$ e das relações 4.11 e 4.13 temos que:

$$\begin{aligned} x(i\delta t(i)) &= \alpha(i\delta t(i)) + x^*(i\delta t(i)) \\ \ln r(i,j) &= \alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i) \\ r(i,j) &= e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \end{aligned} \quad 4.17$$

Substituindo 4.17 em 4.16 temos:

$$d(i,j) = \frac{1}{[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)}]^{\delta t(i)}} \quad 4.18$$

Vemos da equação 4.17 que a taxa nunca poderá ser negativa o que é decorrência direta do modelo BK ser lognormal. O fator de desconto fica com o termo exponencial no qual contém a única incógnita que deve ser determinada na equação 4.15 que é o termo α o qual vamos determinar por Newton-Raphson.

¹ Na literatura é referido como *Pure Discount Bond* (PDB).

² Repare que para esta igualdade ser válida é preciso que se considere o produto entre as duas variáveis em todos os estados da natureza j existentes no passo i .

Aplicando-se este método à relação 4.15, considerando-se o fator de desconto dado por 4.18, chegamos na equação 4.19¹ a qual determina o valor de φ a ser aplicado em 4.17 para se obter as taxas *forwards* e os fatores de desconto válidos do passo i ao passo $i+1$ ². Repare em 4.17 que quando $j=0$, o termo φ determina o valor da taxa *forward* no nó central naquele passo de tempo a qual por sua vez foi determinada com base na curva de juros de mercado. Portanto, o que se está fazendo é ajustar o modelo à curva de mercado.

$$\alpha_k(i\delta t(i)) = \frac{\sum_j Q(i,j) \left[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \right]^{-\delta t(i)} - P(i+1)}{e^{\alpha(i\delta t(i))} \delta t(i) \sum_j Q(i,j) \left[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \right]^{-\delta t(i)-1} e^{j\delta x^*(i)}} + \alpha_{k-1}(i\delta t(i)) \quad 4.19$$

Uma vez determinados estes novos fatores de descontos para o passo $i+1$, podemos retornar à equação 4.14 para determinarmos os preços AD para o passo seguinte e assim seguirá o processo adiante até chegar no vencimento do ativo objeto da opção que no caso é o título.

Ao final deste processo, temos o modelo ajustado à curva de juros de mercado. Assim, dada uma curva de mercado, um valor para o parâmetro de reversão à média e outro para a volatilidade da taxa de juros, construímos uma árvore trinomial para BK contemplando as adaptações necessárias para o mercado brasileiro.

Como produtos, temos as árvores de taxas de juros, de fatores de desconto, de probabilidades de transição, preços do título até o valor presente e de preços dos ativos AD, dentre outros parâmetros gerados. A implementação do procedimento até agora descrito pode ser verificado no Apêndice 1 na função BK.

No entanto, este é apenas o motor de cálculo que implementa o modelo. Resta ainda fazer o apreçamento da opção em função dos dados gerados pelo procedimento descrito e, principalmente calibrar o modelo sem o que os preços obtidos para as opções não terão relação alguma com os preços referenciados no mercado. Por isto, estes são os próximos dois pontos que atacamos.

¹ A dedução desta equação encontra-se no Apêndice 3.

² O termo k refere-se ao k -ésimo passo nas iterações realizadas no Newton-Raphson para se conseguir encontrar um valor para α que convirja para o valor procurado.

4.3 O preço da Opção sobre Futuro DI na Árvore

De acordo com Clewlow (1998 – pg 285), o apreçamento de opções sobre taxas de juros em árvores trinomiais é análogo ao das árvores binomiais. Apenas há que se tomar cuidado que neste procedimento temos 3 ramos de probabilidades saindo de cada nó e suas probabilidades são variáveis. No mais, tudo funciona como o processo de *backward induction* já bastante conhecido das implementações para ações.

No entanto, se por um lado discutimos um processo mais trabalhoso na seção anterior do que os processos que envolvem ações, agora nossa vida pode ser um pouco facilitada. O processo geral requer que definamos o *pay-off* da opção em função do *strike* e dos valores que o ativo objeto assume em cada estado da natureza no vencimento da opção. Estes *pay-offs* devem ser descontados pela taxa de juros de cada período ponderados pelas probabilidades de transição *pu*, *pm* e *pd* já determinadas. Este processo deve ser feito até o valor presente, ou seja, o nó (0,0) que pode requerer algum tempo para se fazer todos os cálculos de todos os passos, apesar de não ser nenhuma tarefa descabível.

Mas, se considerarmos todos os dados que citamos no final da seção anterior, principalmente o da árvore que contém os preços do título em cada estado e a árvore com os preços dos ativos AD a tarefa pode ser encurtada. De fato, Clewlow (1998 – pg 288) mostra que uma *call* de taxa europeia pode ser apreçada pela equação 4.20.

$$C(0,0) = \sum_j Q(i,j) \max[0, K - P_{S_{t,j}}] \quad 4.20$$

Onde, $P_{S_{t,j}}$ é o preço de um título que vence em s e está sendo calculado no instante t onde vence a opção. Em outras palavras, não necessitamos voltar na árvore até a data atual uma vez mais, pois, esta tarefa já foi realizada anteriormente para se calcular o preço do título e os preços AD já contém toda a informação necessária, pois, são probabilidades acumuladas descontadas. De fato, este é o método que utilizamos na função `optprice.m` anexa para apreçar cada opção.

4.4 Passo 2 - Calibragem do Termo Estocástico

Conforme comentada anteriormente, uma das etapas mais relevantes de todo o processo é o da calibragem do modelo que consiste em se determinar os parâmetros de volatilidade. É um processo equivalente ao de se determinar a volatilidade a ser utilizada no modelo de BS para apreçar opções sobre ações.

Na primeira parte do capítulo, nos dedicamos a apresentar o procedimento de construção da árvore trinomial para BK no mercado brasileiro. Para isto, ajustamos o modelo à curva de juros e assumimos que a velocidade de reversão à média também é um *input* do modelo o qual iremos estimá-lo no capítulo seguinte.

No entanto, mesmo que o modelo replique perfeitamente os preços dos títulos com a aplicação do procedimento anterior, esta não é uma condição suficiente para a sua utilização, mas apenas necessária, pois, replicar os preços dos títulos significa que o ativo-objeto não é fonte de distorção para o preço da opção. O que já era de se esperar dado que se trata de um modelo de não-arbitragem. Se estivéssemos lidando com um modelo de equilíbrio, por outro lado, como Vasicek esta aderência à ETTJ já seria impossível, até mesmo por que nele a curva é um *output* e não um *input* tornando este modelo inviável para a gestão de opções sobre títulos.

Desta maneira, a condição suplementar que se faz necessária para a aplicação do modelo é o ajuste do termo estocástico através da volatilidade a fim de que o modelo seja capaz de reproduzir o preço de mercado das opções da melhor forma possível. No modelo que estamos implementando a volatilidade é constante, embora, haja a possibilidade de realizar uma implementação utilizando-se o conceito de volatilidades locais, conforme proposto por Hull (2000).

Conforme teremos a oportunidade de verificar no capítulo seguinte, iremos trabalhar com todo o universo de opções sobre Futuro DI abertas em uma data. O que iremos fazer será aplicar tanto o modelo de Black quanto o de BK para cada opção aberta, ou seja, calcularemos a volatilidade implícita e o preço teórico para cada uma das opções tanto de forma individual quanto em conjunto.

Efetivamente, temos aí o problema do *moneyness* de cada opção e da sua liquidez. Geralmente, nos trabalhos acadêmicos procura-se selecionar previamente

as opções nas quais o modelo será aplicado para depois analisar os resultados sobre este subgrupo.

Na prática do dia-a-dia, no entanto, como se trata de um mercado que ainda hoje não possui um grau suficiente de liquidez, o que se costuma fazer é trabalhar com todas as opções, para um dado vencimento e tipo (1, 2 ou 3), procurando ajustar uma curva de volatilidades implícitas¹ que melhor se ajuste às observações de mercado o que tende a suavizar as informações. Mesmo assim, certamente a volatilidade não será constante para um dado conjunto de opções com o mesmo vencimento dando origem ao chamado sorriso de volatilidade o qual está presente em qualquer modelo.

Por outro lado, conforme observa Rebonato (2004 – pg 250), trabalhar com modelos com parâmetros ajustados diretamente sobre os preços de mercado pode ser considerado como uma abordagem mais limpa, mas que pode ser perigosa. Tal observação advém do fato de que muitos parâmetros de um modelo pertencem ao mundo ajustado ao risco e não às medidas do mundo real o que faz com que uma transformação no *drift* do modelo pode afetar sua medida de probabilidade. Em outras palavras, isto significa que parâmetros como velocidade de reversão à média, amplitudes e frequência de saltos não são os mesmos que podem ser estimados no mundo real por incorporarem ajustes de risco.

Em nosso caso, porém, como já determinamos previamente os dois parâmetros do *drift*, apenas nos interessa ajustar o modelo ao mercado por intermédio da volatilidade implícita da mesma forma que se faz com BS ou Black e poder comparar os resultados individuais entre o benchmarking do modelo de Black versus os resultados obtidos com BK deixando para trabalhos posteriores o eventual aprimoramento do modelo.

Desta forma, dois pontos vitais no processo de calibragem, além da estratégia comentada, estão na determinação da função de minimização utilizada e no algoritmo de otimização aplicado na função objetivo.

¹ Esta curva será de volatilidade versus *strike*, delta ou *moneyness* para um dado prazo de vencimento das opções e um ativo objeto, ou seja, título que vence 3 meses após o vencimento da opção, 6 meses ou 1 ano.

4.4.1 Determinação da Função Objetivo

Tendo-se em mente que o processo de calibragem consiste em se ajustar um ou vários parâmetros de um modelo de forma a fazer com que o preço dele obtido se aproxime ao máximo em relação ao preço de mercado, a idéia básica então está em se levantar o preço para o derivativo a partir do modelo, o qual chamaremos de preço teórico, considerando-se um conjunto de valores para os parâmetros por serem calibrados e fazer uma pesquisa otimizada de forma a encontrar o melhor conjunto de valores para eles que minimizem a diferença entre o preço teórico e o de mercado.

No modelo de BK, temos três parâmetros dos quais os dois do *drift* já foram ajustados previamente a partir de dados de mercado restando apenas o termo de volatilidade. Assim a função objetivo utilizada para se determinar a volatilidade que melhor ajusta o modelo ao mercado é dada pela relação 4.21.

$$\min_{\sigma} \sum [BK(\sigma) - P_{mkt}]^2 \quad 4.21$$

Esta é uma relação freqüentemente utilizada neste tipo de problema. Trata-se de uma minimização de uma diferença quadrática tendo como parâmetro a volatilidade utilizada no modelo, ou seja, o objetivo do problema posto em 4.21 é qual o valor para o parâmetro de volatilidade do modelo de BK que faz com que a diferença quadrática entre seu preço e o de mercado seja mínima. A este valor de σ , denominaremos de volatilidade implícita de Black-Karasinski.

Com relação ao algoritmo de minimização Hull (2000) e (2003 – pg 565) recomenda a aplicação do algoritmo de otimização não linear de Levenberg-Marquardt¹ o qual é um método bem sucedido em aplicações de redes neurais². Assim, este é o método de otimização que iremos aplicar em 4.21 para obter a volatilidade implícita.

¹ Para uma descrição detalhada do procedimento, ver W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, e W. T. Vetterling, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 2002.

² Uma rápida e boa introdução ao tema pode ser encontrada em Vicente, Renato, Redes Neurais para Inferência Estatística, IME-FEA/USP Junho 2002.

5. Aplicação do Modelo a um Caso Prático

Nos capítulos anteriores, falamos sobre o mercado brasileiro no que diz respeito à sua evolução e as características que o faz diferente dos mercados mais tradicionais. Também fizemos uma breve discussão sobre os modelos de apreçamento aplicados a instrumentos de renda fixa como os de BS e Black, principalmente. Comentamos qual a necessidade de se desenvolver modelos específicos para taxas de juros e quais suas características básicas, bem como, os motivos que nos levaram a buscar uma implementação de BK ao mercado de opções sobre Futuros DI. Por último, apresentamos uma adaptação do método geral de construção de árvores trinomiais proposto por Hull-White em 1994 aplicando-o ao modelo de BK fazendo as devidas "tropicalizações" à nossa realidade.

Neste capítulo vamos apresentar uma aplicação deste modelo ao mercado brasileiro. Para isto, vamos fixar uma data específica da qual tomaremos os dados de mercado como curva de juros e cotações das opções e compararemos os resultados obtidos em BK frente ao modelo de Black que é bastante utilizado no mercado.

No presente trabalho, mais do que fazer uma implementação completa e acabada do modelo para ser aplicado no dia-a-dia, faremos uma comparação dos resultados entre os dois modelos, não apenas do apreçamento das opções em questão, mas também em termos de performance e robustez dos resultados deixando para trabalhos subseqüentes o seu refinamento.

Vamos primeiramente apresentar os dados de mercado que iremos utilizar por se tratar da matéria-prima básica de informação. Em seguida, procuraremos dar uma visão de como foram estruturados os códigos em MatLab, que se encontram no Apêndice 1. Por último apresentamos os resultados seguidos em financeiros, robustez e performance.

No capítulo seguinte fechamos o trabalho com as considerações finais deixando algumas sugestões para próximos trabalhos.

5.1 Dados de Mercado

Como já dissemos anteriormente, tomamos as informações de uma data específica para aplicarmos no modelo. No caso, nos fixamos nas informações de 31 de maio de 2005. A princípio, não há motivo nenhum que justifique a escolha desta data em detrimento de outras, mas trata-se simplesmente de uma escolha ao acaso para se testar a aplicabilidade do modelo.

As três fontes de informação para o modelo devem ser a curva de juros de mercado, as cotações das opções com preços sincronizados com a curva de juros e a velocidade de reversão à média que é obtida a partir da mesma curva de juros. Tanto a ETTJ quanto a reversão à média vimos que são parâmetros utilizados no ajuste do *drift* do modelo de BK enquanto que as cotações das opções serão utilizadas na calibragem da volatilidade do modelo. Já em Black apenas necessitamos da curva de mercado¹ e da obtenção da volatilidade implícita através de um processo de calibragem do termo estocástico do modelo a partir dos preços de mercado das opções.

5.1.1 A Curva de Juros

A curva de juros que estaremos utilizando possui o perfil da Fig 5.1 a seguir. De acordo com o que foi discutido no capítulo 2, o primeiro ponto desta curva foi obtido com base na taxa CDI que é válida para 1 dia útil. A partir daí, utilizamos as cotações de futuros DI com base no call de fechamento do mercado para a data o que faz com que os prazos no eixo das abscissas, que são denominados em dias úteis, variem ao longo do tempo a medida que os contratos futuros vão se aproximando do seus vencimentos.

Outra observação importante é que apesar desta curva se estender até sete anos, não significa que ela tenha bastante liquidez nos prazos mais longos, apesar de termos argumentado no capítulo 2 que este mercado tem se caracterizado pelo alongamento das operações. Como, no entanto, estaremos interessados em utilizá-

¹ A qual é utilizada apenas para se estimar, de forma determinística, o preço a termo do título no vencimento da opção.

la no apreçamento de opções sobre Futuro DI, e estas não possuem vencimentos que tipicamente excedem 1.5 anos, estaremos utilizando uma faixa de tempo nesta curva com maior liquidez.

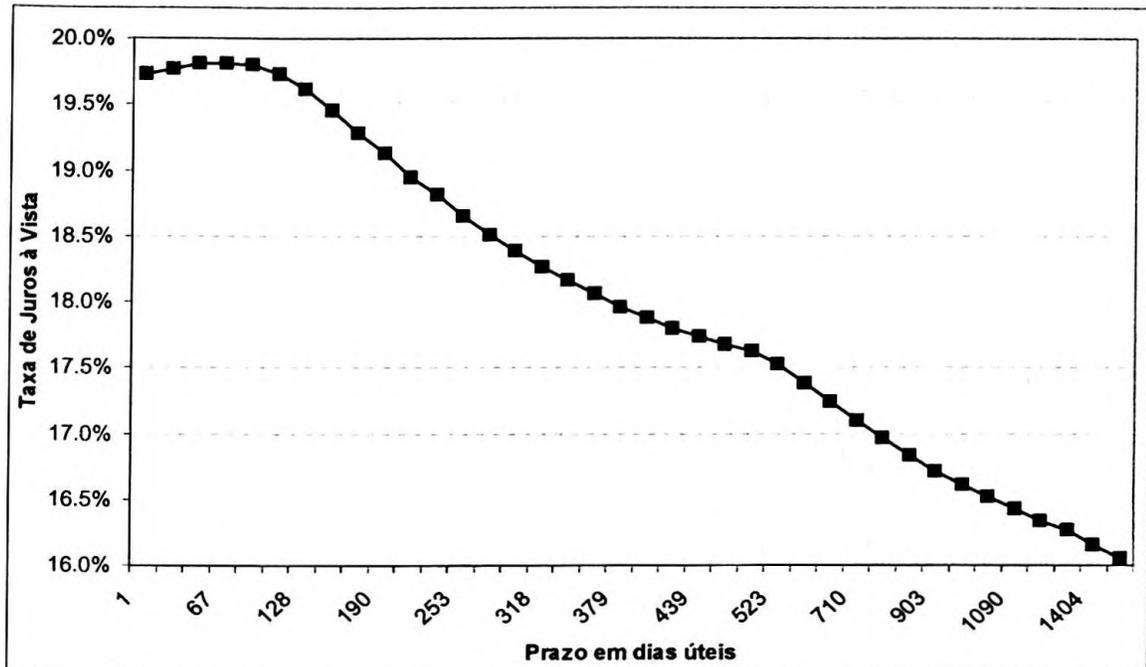


Fig 5.1 Estrutura a Termo da Taxa de Juros PRE em 31/maio/2005.

De toda forma, como BK é um modelo de não arbitragem, dada uma ETTJ, ele é capaz de obter a partir da taxa de juros e do seu respectivo número de dias úteis o melhor ajuste do modelo à esta ETTJ fornecida como input através do processo iterativo descrito na seção 4.2.2.

5.1.2 Velocidade de Reversão à Média

Para a obtenção do parâmetro de reversão à média, utilizamos o método econométrico dos momentos generalizados. Como o modelo é aplicado à curva de juros específica de um dia, o parâmetro deve ser estimado com base no perfil da ETTJ da data. Assim, utilizamos como janela de observações todos os pontos da curva em questão, obtendo os resultados da Tabela 5.1.

A discretização da equação do modelo, em termos da esperança condicional, com o uso do GMM pode ser obtida a partir da equação 3.13 a qual transcrevemos sua versão contínua aqui apenas para facilitar.

$$d \ln(r(t)) = [\theta(t) - \varphi \ln(r(t))]dt + \sigma dW(t)$$

Sua versão discreta pode ser colocada na forma da equação 5.1:

$$\ln r_{t+1} - \ln r_t = [\theta_t - \varphi \ln r_t](T_{t+1} - T_t) + \sigma \sqrt{(T_{t+1} - T_t)} \varepsilon \quad 5.1$$

Onde

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

Aplicando-se a esperança condicional ao tempo na 5.1 temos:

$$E_t[\ln r_{t+1} - \ln r_t] = E_t\left\{[\theta_t - \varphi \ln r_t](T_{t+1} - T_t) + \sigma \sqrt{(T_{t+1} - T_t)} E_t[\varepsilon]\right\}$$

E, lembrando-se que $E_t[\varepsilon] = 0$ e que todos os termos em r no instante t já são conhecidos, chegamos à equação 5.2 a ser utilizada no GMM.

$$E_t[\ln r_{t+1}] - \ln r_t - \theta_t(T_{t+1} - T_t) + \varphi \ln r_t(T_{t+1} - T_t) = 0 \quad 5.2$$

E, lembrando-se que $E_t[\varepsilon] = 0$ e que todos os termos em r no instante t já são conhecidos, chegamos à equação 5.2 a ser utilizada no GMM. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 5.1 a seguir.

Estimação da Velocidade de Reversão à Média					
Modelo	θ (Taxa de Juros de Longo Prazo)	φ (Velocidade de Reversão à Média)	J-stat	Método	Lags no Log da Taxa de juros
Equação 5.2	-0.002924	0.001579	3.875	GMM	-1
	(-10.62375)	(10.51596)	{0.049}		-2
	[0.0000]	[0.0000]	Degr. of Fr.: 42		-4

Onde: () t-stat [] Prob. { } p-value

Kernel: Bartlett; Bandwidth: Fixed(3), No prewhitening

Tabela 5.1 Resultados do GMM para estimar a velocidade de reversão à média do modelo de BK.

Com isto, obtemos 0.001579 para a velocidade de reversão à média que será o valor que utilizaremos na aplicação.

5.1.3 Cotações das Opções sobre Futuro DI

Conforme comentamos na seção 2.2.3.2, temos três tipos distintos de opções sobre Futuro DI. A Tabela 5.2 dá uma amostra dos dados disponíveis para as cotações. Nela vemos os três tipos de opções e alguns vencimentos em cada um, além de termos tanto *calls* quanto *puts* européias.

Como estão definidas com visão de taxa, uma vez que, seus *strikes* estão denominados neste formato, teremos que considerar este fato no apreçamento, ou seja, quando tivermos uma *call* de taxa consideraremos uma *put* de PU e para converter o *strike* de taxa para PU utilizaremos a equação 3.9.

Podemos também ver que cada opção possui uma data definida para o seu vencimento bem como uma data para o vencimento do futuro DI correspondente a um título que vence em três, seis ou doze meses após o vencimento da opção em conformidade com o seu tipo.

SÉRIE	STRIKE	Option Maturity	Future Maturity	Tipo	BID	ASK
CALL 53	19,00%	1-jul-05	3-out-05	1	163,24	164,14
PUT 80	19,50%	1-jul-05	3-out-05	1	9,26	11,62
CALL 52	18,00%	3-out-05	2-jan-06	1	188,50	195,35
Put 78	19,50%	3-out-05	2-jan-06	1	130,48	139,96
PUT 76	19,00%	2-jan-06	3-abr-06	1	276,66	286,58
PUT 77	19,50%	2-jan-06	3-abr-06	1	359,12	367,57
PUT 88	19,00%	3-abr-06	3-jul-06	1	390,28	411,56
PUT 89	20,00%	3-abr-06	3-jul-06	1	536,42	558,75
PUT 81	20,00%	1-jul-05	2-jan-06	2	239,17	244,93
PUT 78	19,00%	3-out-05	3-abr-06	2	303,21	320,24
PUT 80	20,00%	3-out-05	3-abr-06	2	623,93	628,82
PUT 77	19,00%	2-jan-06	3-jul-06	2	621,45	637,78
PUT 78	20,00%	2-jan-06	3-jul-06	2	939,19	953,71
CALL 54	17,50%	1-jul-05	3-jul-06	3	616,98	617,51
PUT 78	18,50%	1-jul-05	3-jul-06	3	168,82	188,14
PUT 81	19,50%	1-jul-05	3-jul-06	3	780,49	783,49
PUT 78	18,00%	2-jan-06	2-jan-07	3	857,56	896,64
PUT 80	18,50%	2-jan-06	2-jan-07	3	1.115,21	1.139,02

Tabela 5.2 Cotações para algumas das opções em aberto no mercado em 31/maio/2005.

Nos últimos dois campos têm as cotações de compra e venda, respectivamente. Um indicador de liquidez pode ser tirado com base no *spread* de compra e venda. Para efeitos da aplicação adotaremos a média aritmética entre estes dois valores para o preço de cada opção. Com base neste preço médio é que iremos obter as volatilidades implícitas de Black e BK.

5.2 Fluxo dos Dados

A implementação do modelo foi realizada em MatLab através de uma série de funções que se encontram no Apêndice 1. Apesar da simplicidade da idéia, comentamos um pouco como é o funcionamento do conjunto das funções. Para isto, temos um fluxograma simplificado na Figura 5.2. Através dos nomes das funções identificadas nas figuras o leitor pode se remeter ao respectivo código no apêndice.

O modelo de BK está na função que recebe o mesmo nome. Nela é implementado o modelo com a abordagem proposta por Hull e que já descrevemos anteriormente. Com base na ETTJ, na volatilidade e no vencimento do título ativo objeto da opção a função constrói a árvore trinomial de BK ajustada à curva de juros.

Estes parâmetros são passados pela função `optprice.m` que recebe de volta da BK as matrizes contendo os dados resultantes do modelo e realiza o apreçamento da opção. Portanto, o motor de cálculo é composto por estas duas funções. A primeira implementa BK e a segunda apreça a opção.

No entanto, é preciso que se realize a calibragem do modelo em função do parâmetro de volatilidade. Esta tarefa é realizada pelo conjunto de funções `calibrate.m` e `FUN.m` para o processo opção a opção e pela `portcalibration.m`, `myfun.m` e `optportprice.m` para a calibragem de um conjunto de opções.

A `calibrate.m` define o método de otimização que será aplicado na calibragem que, no caso, será Levenberg-Marquardt e chama a segunda função que define o critério ou relação a ser minimizada. Note que a `FUN.m` depende do motor de cálculo do modelo para obter resultados e poder servir de parâmetro para que a `calibrate.m` possa realizar a tarefa de determinar a volatilidade implícita que resolve o problema de minimização.

Este conjunto de funções é utilizado na `opdivalutation.m` primeiramente para calibrar o modelo à uma dada opção que lhe seja fornecida pela função `calibragemindividual.m`. Uma vez que o modelo tenha sido calibrado, a `opdivalutation.m` utiliza esta volatilidade para entregar à função superior as duas respostas, ou seja, a volatilidade implícita de BK e o respectivo preço encontrado.

O processo acessório que trata do apreçamento por conjunto de opções, possui a mesma filosofia do fluxo comentado acima, uma vez que, também utiliza o

mesmo motor de cálculo. A diferença é que ao invés de determinar uma volatilidade para cada opção, ela busca uma única volatilidade que minimize a soma dos erros quadráticos do conjunto.

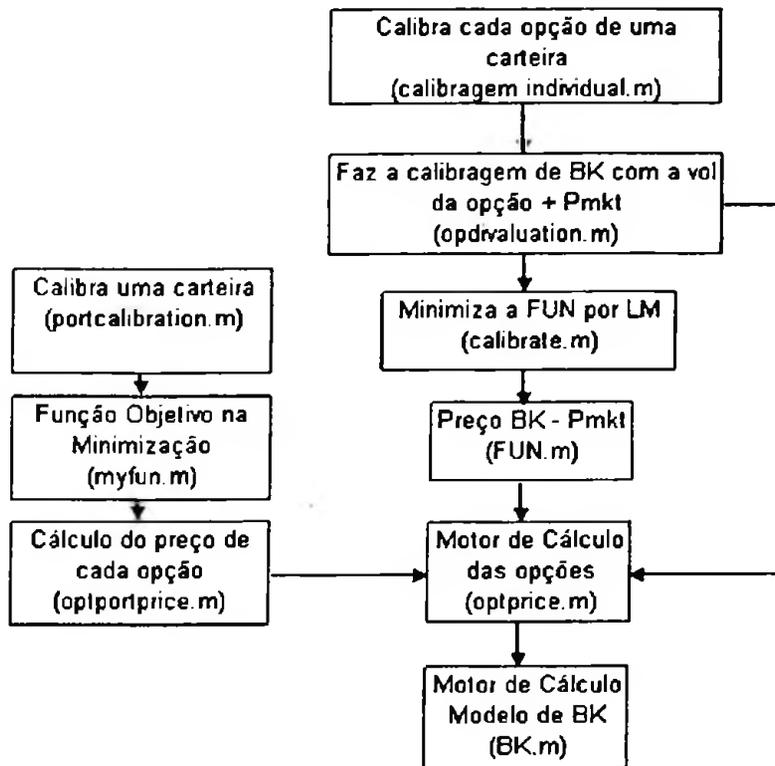


Fig 5.2 Fluxograma de Apreçamento das Opções nas rotinas de Black-Karasinski

Em analogia ao processo descrito acima, temos as rotinas para o modelo de Black conforme a Fig 5.3. Por se tratar de um modelo com solução fechada, o motor de cálculo é único (BlackDI.m) o qual é acionado igualmente tanto no caso de estarmos apreçando uma única opção, que é o caso acionado na função dadoscalibragem.m quanto na portcalibrationBlack.m que faz o apreçamento de um lote de opções.

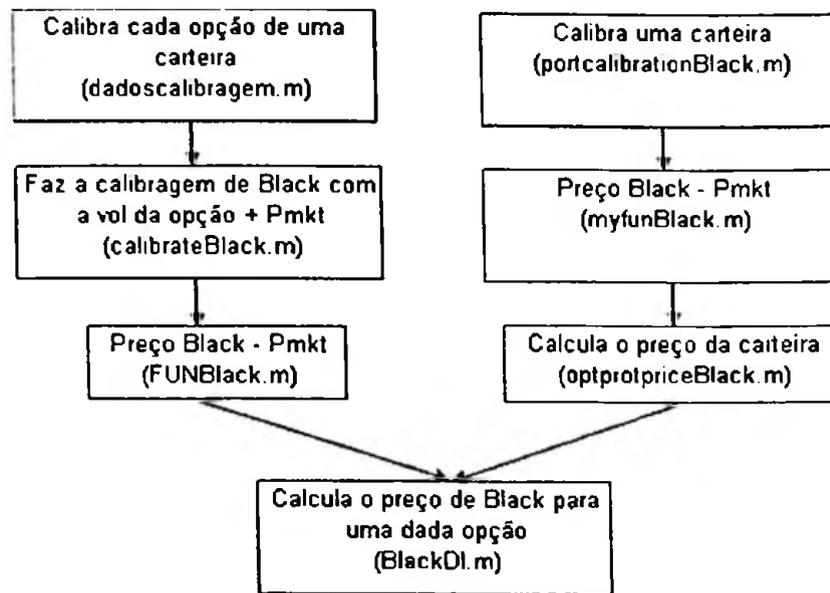


Fig 5.3 Fluxograma de Apreçamento das Opções nas rotinas de Black

5.3 Apresentação dos Resultados

Como já dissemos anteriormente, uma característica muito importante nos modelos de taxas de juros refere-se ao grau com que adere à ETTJ e esta é uma qualidade que sempre é comentada quando se fala em modelos de não-arbitragem independentemente do número de fatores que ele considere ou da medida de probabilidade utilizada. Portanto, este é o primeiro ponto que vamos verificar. Em seguida nos voltaremos para analisar as volatilidades implícitas obtidas com cada modelo.

5.3.1 Aderência do Modelo à ETTJ

Na primeira seção deste capítulo apresentamos a curva de mercado a ser aplicada no modelo. Para testar a aderência do modelo à ETTJ, implementamos o modelo até o prazo de cinco anos referente a trinta e cinco pontos na estrutura e levantamos a curva de juros ajustada com base nos preços dos ativos Arrow-Debrew em cada passo de tempo conforme a Figura 5.4.

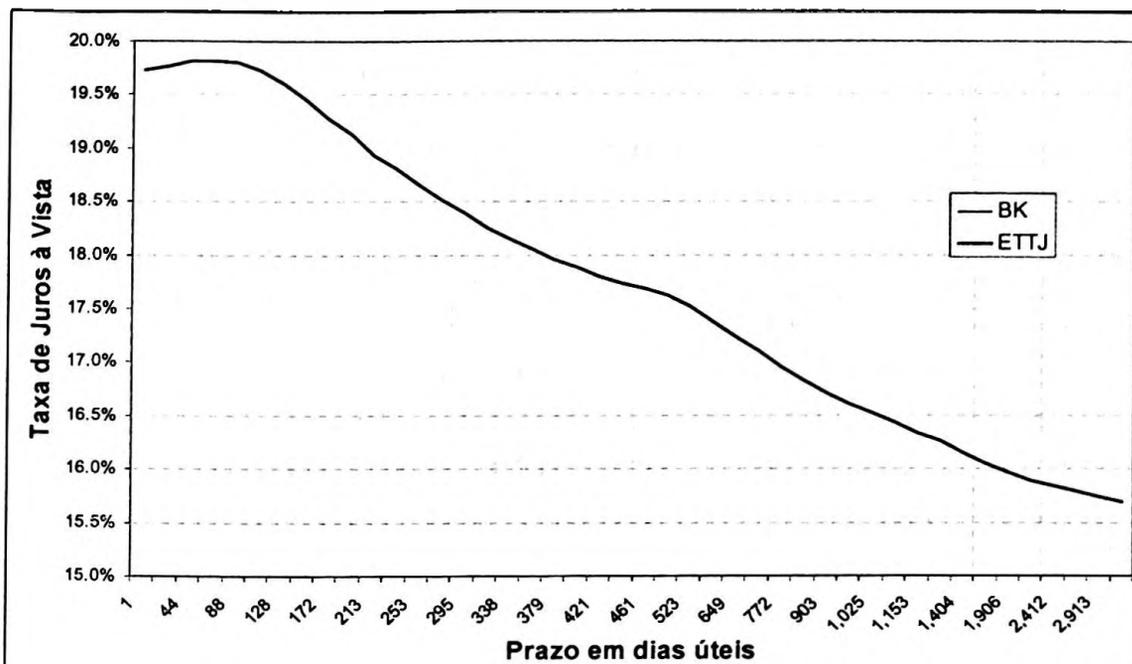


Fig 5.4 Comparação da ETTJ ajustada pelo modelo de BK frente à curva de mercado original

Embora tenhamos colocado no mesmo gráfico a curva original e a ajustada do modelo vemos que não é possível encontrar visualmente qualquer diferença entre as duas.

Tomando-se os valores numéricos das taxas em cada caso vemos que a diferença em *basis points* fica na ordem de 10^{-9} ou menor ainda. Em termos do PU do Futuro DI a maior diferença absoluta ficou na ordem de 10^{-8} e em termos relativos esta diferença não ficou acima de 10^{-13} confirmando o poder que o modelo possui de se ajustar à curva de mercado.

5.3.2 Comparação das Volatilidades e Preços entre Black e Black-Karasinski

Para analisarmos o comportamento da volatilidade, partimos para o apreçamento de cada opção individualmente. Assim, podemos não apenas comparar as volatilidades obtidas por cada modelo, mas principalmente observar as eventuais diferenças no sorriso da volatilidade para um dado vencimento em cada um.

Os dados completos originais obtidos do processo de calibragem e apreçamento em cada modelo podem ser vistos na tabela apêndice 4. Nela temos todas as opções em aberto no mercado segmentado para os três tipos de opções. Em cada segmento, temos o tipo (*call* ou *put*), *strike*, dias úteis para o vencimento da opção e do título subjacente, bem como, o delta e o preço médio de mercado¹ para cada uma das séries.

Como boa parte do mercado costuma utilizar o método de Newton-Raphson sobre o modelo de Black a fim de obter a volatilidade implícita a partir do preço de mercado, este foi o procedimento inicialmente adotado partindo-se de um chute inicial para a volatilidade de 10%². Os resultados podem ser vistos na coluna Black NR.

Um fato que chama a atenção relaciona-se com a não convergência do método para algumas poucas opções que estão tipicamente muito dentro do dinheiro o que revela uma certa fragilidade no método. Assim, estendemos a aplicação do método de Levenberg-Marquardt para o modelo de Black também. Desta forma, podemos ver que as opções que antes não conseguiam ser calibradas, pela limitação do método anterior, agora foi possível determinar suas volatilidades. Apesar deste problema de convergência, ao se comparar as volatilidades obtidas por um e por outro método, para as demais opções, verifica-se facilmente que seus valores coincidem.

¹ Conforme já comentamos, este preço é o médio entre a cotação de compra e venda.

² Este valor foi adotado apenas por se saber que as volatilidades encontram-se tipicamente em um intervalo de 5% a 20%.

Outra questão importante está no valor inicial para a volatilidade no Levenberg-Marquardt. Como inicialmente havíamos utilizado 10% para o Newton-Raphson, tomamos os dados gerados por este valor como referência para a análise, porém, realizamos a calibragem de todo o universo de opções com diferentes valores iniciais para a volatilidade como -100%, -10%, 50%, 100% e podemos verificar que independentemente deste valor inicial o método sempre acabou convergindo para o mesmo valor de volatilidade tanto na calibragem através do modelo de Black quanto no de BK demonstrando a robustez do método. Assim, para efeitos de análise sempre nos referiremos aos dados obtidos com o valor inicial de 10% para a volatilidade.

Observando-se as volatilidades obtidas com cada modelo, podemos ver que não há uma diferença muito significativa entre eles ficando sempre na mesma ordem de grandeza. A variação em função do tipo, prazo e *strike* também apresentam comportamentos semelhantes. Este fato pode ser visto mais claramente nas figuras abaixo onde temos a curva de volatilidade, para um determinado tipo de opção e prazo de vencimento.

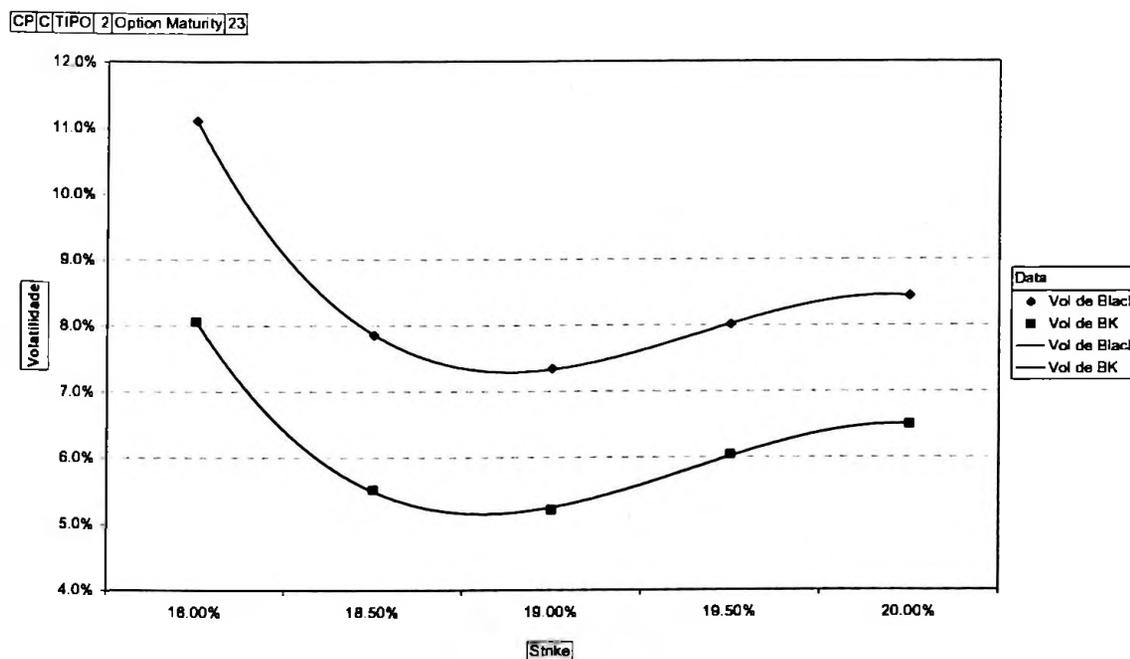


Fig 5.5 Curva de Volatilidade para Opções de Compra do Tipo 2 com vencimento em 23 dias úteis.

Tanto da Fig 5.5 quanto da Fig 5.6 vemos que a volatilidade de BK é inferior a de Black. Uma possível explicação para isto é que como o modelo de Black considera que o ativo objeto, no caso um título, possui distribuição lognormal apenas no vencimento da opção sem procurar modelar o processo de evolução deste ativo do momento presente até o vencimento da opção, ele acaba tendo que compensar esta simplificação aumentando a volatilidade da sua distribuição de densidade de probabilidades.

Outro ponto interessante, é que o comportamento de ambas estruturas de volatilidades são similares em função do *strike*. Revelando que os dois modelos apresentam estruturas de sorriso de volatilidade equivalentes.

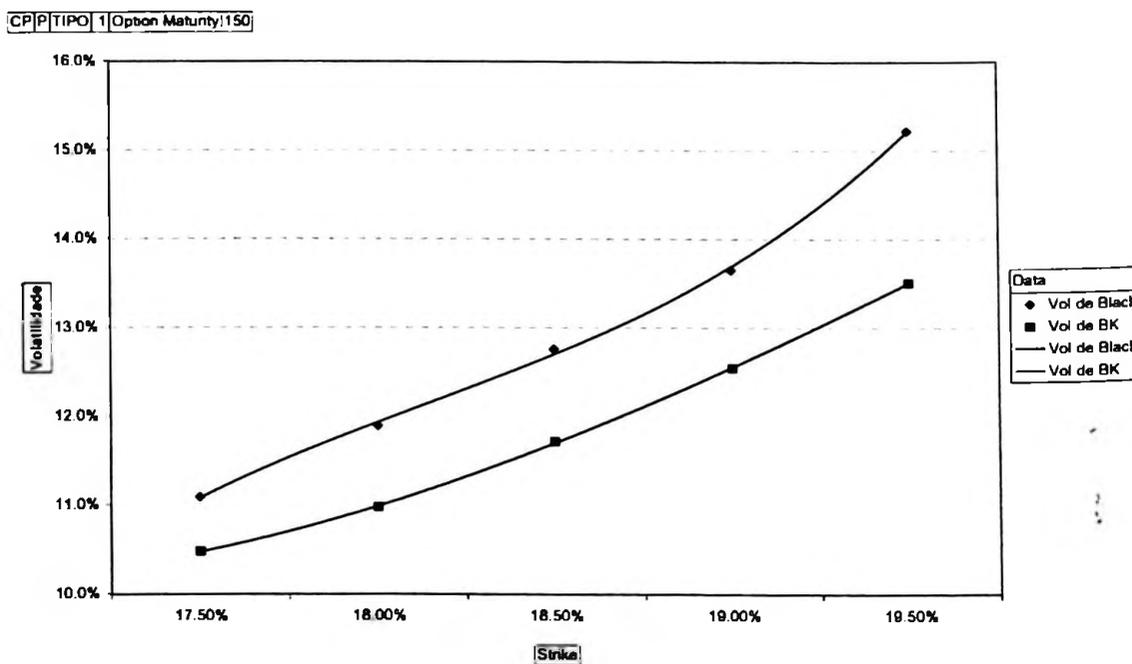


Fig 5.6 Curva de Volatilidade para Opções de Venda do Tipo 1 com vencimento em 150 dias úteis.

Para a análise de aderência aos preços de mercado, utilizamos a abordagem de apreçamento por grupos de opções respeitando seu tipo e prazo de vencimento. Podemos ver os resultados nas tabelas do apêndice 5.

A segmentação de cada grupo de opções dentro de um mesmo tipo pode ser visto pela gradação da mesma cor. Um ponto já comentado anteriormente, mas que pode ser visto novamente, trata da robustez do método de otimização utilizado na calibragem dos modelos, uma vez que, aqui também fizemos a calibragem dos grupos considerando-se os mesmos valores iniciais testados anteriormente e, como podemos verificar nas tabelas, as volatilidades calibradas não variaram em função destes valores o que ratifica o resultado que comentamos antes.

Neste processo, pegamos um grupo de *calls* e *puts* de mesmo tipo e vencimento e procuramos determinar a volatilidade implícita por minimização das soma quadrática dos erros. Uma vez obtida a volatilidade, aplicamos este valor nos respectivos modelos para obter o preço estimado para cada opção do grupo. Este valor se encontra na coluna TheoPrice e ao seu lado temos a diferença ou resíduos entre este valor e o preço de mercado original. A soma dos quadrados destes resíduos nos fornece uma medida do erro global para o conjunto em cada modelo. Os resultados destes erros podem ser vistos na Tabela 5.3 a seguir.

Venc Opção	Tipo	Erro Quadrático		
		BK	Black	BK/Black
23	1	229	223	1.0
23	2	123	40	3.1
23	3	1,694	1,529	1.1
88	1	485	538	0.9
88	2	772	995	0.8
150	1	1,932	2,270	0.9
150	2	19,123	20,318	0.9
150	3	5,545	8,851	0.6
213	1	944	1,344	0.7

Tabela 5.3 Erro Quadrático por grupo de opções em cada modelo.

Desta tabela, podemos ver que, a menos dos vencimentos mais curtos, os demais prazos possuem um erro inferior em BK quando comparado ao de Black. Este fato pode ser visto na última coluna que relaciona um erro com o outro. Uma possível explicação está no fato de que como o BK modela toda a trajetória das

taxas de juros de hoje até o vencimento do ativo-objeto, ele possui maior flexibilidade para ajustar a dispersão das taxas de juros e, por consequência, dos preços dos títulos ao longo de todo o caminho o que possibilita uma maior aderência aos dados de mercado.

Por outro lado, para prazos curtos ele revela uma piora no ajuste em relação ao Black. Uma provável razão está no fato de que este prazo mais curto é o primeiro passo de tempo desenvolvido na árvore trinomial e, portanto, possui apenas três possíveis valores o que reduz significativamente a flexibilidade acima comentada. Uma solução para contornar este problema poderia ser o de se adicionar mais pontos interpolados entre o primeiro ponto da curva que é o CDI e a primeira referência de vencimento. Assim, a árvore trinomial possuiria vários outros estados da natureza possíveis aumentando a aderência do modelo ao mercado.

5.4 Performance Computacional do Modelo

Outra questão ao se considerar a viabilidade de implementação prática de um modelo reside na sua performance, uma vez que, não seria muito útil um modelo que, embora robusto e de boa capacidade preditiva, fosse muito custoso em termos de tempo de processamento e máquina para funcionar. Tal fato, por exemplo inviabilizaria a sua aplicação em mesas de operação. Assim, vamos comentar alguns aspectos sobre a performance obtida neste estudo muito embora os algoritmos aqui utilizados não foram otimizados com este intuito.

5.4.1 Número de Iterações

A partir da Tabela 5.4, podemos ver que o número médio de iterações é claramente maiores em ambos modelos à medida que nos afastamos de valores mais plausíveis para o valor inicial da volatilidade. Assim, temos 5 iterações em média quando iniciamos o processo de calibragem com 10% e podendo chegar dobrar este valor a medida em que iniciamos o mesmo processo com valores extremos. No entanto, lembramos que mesmo requerendo mais processamento, o algoritmo de otimização demonstrou ser capaz de obter sempre a mesma

volatilidade. Também podemos ver que este número médio de iterações foi o mesmo para os dois modelos.

Valor Inicial da Vol	Número Médio de Iterações		Tempo de Médio de Processamento (seg)	
	BK	Black	BK	Black
-100%	9	9	0.69	0.07
-10%	9	9	0.69	0.07
10%	5	5	0.41	0.05
50%	9	9	0.78	0.07
100%	10	10	0.78	0.08

Tabela 5.4 Comparativo de desempenho computacional dos Modelos

5.4.2 Tempo de Processamento

Nesta mesma Tabela 5.4, vemos que o tempo médio de processamento para cada opção é significativamente maior para BK, apesar de que ambos apresentam uma redução clara neste tempo para um valor inicial de volatilidade para próximo do valor esperado. Vemos que BK necessita algo da ordem de 10 vezes mais tempo do que o modelo de Black para apreçar uma opção.

Isto se deve ao fato de que enquanto o modelo de Black possui solução fechada, BK necessita construir uma árvore trinomial ajustada à ETTJ e ser calibrada o que obviamente requer mais tempo computacional. No entanto, como o tempo médio de apreçamento em Black é extremamente baixo, segue que o de BK também pode ainda ser considerado pequeno se considerarmos que, como já comentamos, não trabalhamos com algoritmos otimizados o que poderia melhorar ainda mais seu desempenho.

6. Conclusões

O presente trabalho teve por objetivo apresentar uma metodologia de implementação do modelo de Black-Karasinski ao apreçamento de opções de taxas de juros para o mercado brasileiro. O modelo se mostrou plenamente viável para a consecução deste objetivo a despeito da necessidade de sua "tropicalização".

Porém, um ponto que poderia ser contemplado de forma distinta seria o *time-step* que embora tenha sido feito de forma variável, percebemos que o processo difusivo poderia ser aprimorado caso utilizássemos um passo de tempo diário sobretudo no curto prazo afim de ajustar de forma mais consistente o modelo aos instrumentos com vencimento neste período.

O ajuste do modelo à curva de juros se mostrou altamente eficaz replicando com grande precisão o seu comportamento. A calibragem ao mercado de opções sobre futuro DI também se mostrou bastante aderente demonstrando possuir um comportamento em sua volatilidade implícita similar ao modelo de Black, embora seu valor tenha consistentemente ficado abaixo da volatilidade deste último modelo.

No entanto, ressaltamos que este é apenas o segundo momento de uma função de distribuição densidade de preços que pode revelar algumas outras informações, por conter todos os momentos da distribuição do ativo-objeto, que simplesmente a curva de volatilidade não seria capaz de prover.

Em termos de desempenho computacional o modelo apresentou bom potencial para ser aplicado em situações que requeiram qualidade de resultados aliada à velocidade apesar de não poder ser comparável a modelos que possuam solução analítica.

Seu alto grau de aderência à curva de juros permite vislumbrar um grande espectro de aplicações práticas de forma a não se restringir apenas ao mercado de opções de juros, mas também podendo ser aplicado ao apreçamento de outros títulos de menor liquidez ou com opcionalidades embutidas como é o caso do C bond ou Global, além de, emissões privadas que contenham risco de crédito inclusive. Outro tipo de instrumento em que poderia ser aplicado são em swaption do tipo americano.

Ressaltamos, no entanto, que dos três parâmetros do modelo o de reversão à média (φ) foi o que gerou um maior grau de dificuldade em sua estimação. Em geral, a literatura costuma centrar maior atenção no ajuste dos outros dois parâmetros e pouco se comenta sobre como ajustar o φ . As rápidas referências sobre este tema sempre se referem a um ajuste exógeno, tal como ocorre com o θ , com base em uma curva de volatilidades para as taxas de juros que pode ser obtida a partir de séries históricas, de acordo com Hull (1993 – pg 245).

No entanto, uma abordagem alternativa bastante interessante para o modelo seria a de se fazer a calibragem tanto da volatilidade quanto da velocidade de reversão à média como função do tempo o que conferiria ao modelo um maior grau de liberdade possibilitando modelar estruturas de instrumentos mais complexos ou, até mesmo, de se utilizar um processo alternativo de calibragem, conforme descrito em Hull (2000), de forma a obter uma superfície de volatilidades para o modelo.

Outras questões que igualmente deveriam ser atacadas referem-se à análise de hedge via gregas através do delta, gamma e vega, bem como, estender o processo para tratar duas ETTJ em duas moedas distintas simultaneamente.

Assim, entendemos que esta seria uma seqüência natural do presente trabalho visando ao refinamento do modelo permitindo chegar ao ponto de utilizá-lo na prática.

Apêndice

A.1 Programas em Matlab

A.1.1 Rotinas de Black-Karasinski

BK.m

```
function ps1,ps2,ps3,ps4,ps5,ps6,ps7,ps8]=BK(prazomeses,a,s,du,ducont,yield,ydcont)
% Constrói-se uma árvore trinomial pelo método geral proposto por Hull and White
em seu paper
% Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor
Models.
% Aplicado ao modelo de Black-Karasinski (BK) ou de Hull-White(HW) lognormal.
% Também estamos considerando as probabilidades de transição com as mesmas
particularidades do paper.
%
% A função BK(prazomeses,a,s,du,ducont,yield,ydcont) tem os seguintes parâmetros:
%
% prazomeses = prazo em meses para o vencimento do bond subjacente da opção
% a = reversão à média da taxa forward
% s = volatilidade da short-rate
% du = vetor com estrutura de prazos em dias úteis da curva de juros
% ducont = número de prazos no vetor du
% yield = vetor da curva de juros
% ydcont = número de prazos no vetor du

prazototalanos=prazomeses/12;
prazototaldias=prazototalanos*252;

for i=1:ducont-1
    if i==1
        dt(i)=du(i)/252; %year fraction entre dois time steps
    else
        dt(i)=(du(i)-du(i-1))/252; %year fraction entre dois time steps
    end
    PDB(i)=1/((1+yield(i))^(du(i)/252)); %zero-coupon bond price
    dx(i)=s*sqrt(3*dt(i)); %espacamento entre estados da natureza em um dado time
step
end

%Determinar qual o prazo máximo n que precisamos construir a árvore
n=1;
while du(n)<=prazototaldias
    n=n+1;
end

if (abs(du(n)-prazototaldias) <= abs(du(n-1)-prazototaldias))
    n=n+1;
end

%Definição do ponto de truncamento dos estados da natureza em cada passo
i=1;
while i<=n
    jmax(i)=0.184/(a*dt(i));
    jmin(i)=-jmax(i);
    nm(i)=ceil(jmax(i));
    if i<nm(i)
        topnode(i)=i ;
    else
        topnode(i)=nm(i);
    end
    i=i+1;
end
end
```

```

%Montagem da primeira fase: arvore simetrica
sp=2*max(topnode)+1; %numero maximo de precos de estado
jmaxpos=max(topnode);
ts=n-1; %numero de time esteps

for i=1:n
    %arvore de estados
    for j=-topnode(i)+1:topnode(i)-1
        x(j+jmaxpos,i)=-j*dx(i);
    end
    %probabilidades de transicao
    for j=0:topnode(i)-1
        if j==nm(i)
            pu(-j+jmaxpos,i) = 7/6 + ((a*j*dt(i))^2-3*a*j*dt(i))/2;
            pm(-j+jmaxpos,i) = -1/3 + ((-a*j*dt(i))^2+2*a*j*dt(i));
            pd(-j+jmaxpos,i) = 1/6 + ((a*j*dt(i))^2-a*j*dt(i))/2;
        else
            pu(-j+jmaxpos,i) = 1/6 + ((a*j*dt(i))^2-a*j*dt(i))/2;
            pm(-j+jmaxpos,i) = 2/3 - ((a*j*dt(i))^2);
            pd(-j+jmaxpos,i) = 1/6 + ((a*j*dt(i))^2+a*j*dt(i))/2;
        end
        pu(j+jmaxpos,i) = pd(-j+jmaxpos,i);
        pm(j+jmaxpos,i) = pm(-j+jmaxpos,i);
        pd(j+jmaxpos,i) = pu(-j+jmaxpos,i);
    end
end

%***** CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE TRINOMIAL FINAL *****
%Calculamos inicialmente os preços de estado (Arrow-Debrew) por forward induction
%Em seguida calculamos os alfa(i+1) para ajustar a evolução das taxas às yields de
mercado
%Utilizamos um algoritmo de Newton-Raphson para obter os alfa(i)

for i=1:ts
    sumQ(i+1)=0;
    if i==1

        %Inicio da arvore
        alfa(i)=log(yield(i));
        q(jmaxpos,i)=1;
        sumQ(i)=q(jmaxpos,i);
        r(jmaxpos,i)=exp(alfa(i));
        d(jmaxpos,i)=(1+r(jmaxpos,i))^(-dt(i));
    end
    for j=-topnode(i+1)+1:topnode(i+1)-1
        %Versao discreta da equacao forward de Kolmogorov
        q(-j+jmaxpos,i+1)=0;
        for k=-topnode(i)+1:topnode(i)-1
            %Identificamos qual probabilidade (pu,pm,pd) de cada estado k
            %do passo i se conecta com o no (i+1,j)

            %tipo de no
            if k==nm(i)
                tipo=3;
            else
                if k==-nm(i)
                    tipo=2;
                else
                    tipo=1;
                end
            end

            %Associacao da probabilidade correspondente
            if abs(j-k)>2
                p=0;
            else

```

```

switch tipo
case {1}
    if abs(j-k)==2
        p=0;
    else
        if j-k==-1
            p=pd(k+jmaxpos, i);
        else
            if j-k==1
                p=pu(k+jmaxpos, i);
            else
                p=pm(k+jmaxpos, i);
            end
        end
    end
end
case {2}
    if j-k==0
        p=pd(k+jmaxpos, i);
    else
        if j-k==1
            p=pm(k+jmaxpos, i);
        else
            p=pu(k+jmaxpos, i);
        end
    end
end
case {3}
    if j-k==0
        p=pu(k+jmaxpos, i);
    else
        if j-k==1
            p=pm(k+jmaxpos, i);
        else
            p=pd(k+jmaxpos, i);
        end
    end
end
end
end
q(-j+jmaxpos, i+1)=q(-j+jmaxpos, i+1)+p*q(-k+jmaxpos, i)*d(-k+jmaxpos, i);
sumQ(i+1)=sumQ(i+1)+p*q(-k+jmaxpos, i)*d(-k+jmaxpos, i);
end
end

%Calculo dos a(i+1) por Newton-Raphson
%Chute inicial
Fa=1;
ak=alfa(i);
while abs(Fa)>=0.00000001
    soma1=0;
    soma2=0;
    for j=-topnode(i+1)+1:topnode(i+1)-1
        soma1=soma1+q(-j+jmaxpos, i+1)*((1+exp(ak+j*dx(i+1)))^(-dt(i+1)));
        soma2=soma2+q(-j+jmaxpos, i+1)*((1+exp(ak+j*dx(i+1)))^(-dt(i+1)-
1))*exp(ak+j*dx(i+1));
    end
    ak=ak+((soma1-PDB(i+1))/(dt(i+1)*soma2));
    soma1=0;
    for j=-topnode(i+1)+1:topnode(i+1)-1
        soma1=soma1+q(-j+jmaxpos, i+1)*((1+exp(ak+j*dx(i+1)))^(-dt(i+1)));
    end
    Fa=(soma1-PDB(i+1));
end
alfa(i+1)=ak;
%Atualiza os fatores de desconto
if i+1<=ts
    for j=-topnode(i+1)+1:topnode(i+1)-1
        r(-j+jmaxpos, i+1)=exp(alfa(i+1)+j*dx(i+1));
        d(-j+jmaxpos, i+1)=(1+r(-j+jmaxpos, i+1))^(-dt(i+1));
    end
end

```

```

        end
    end

end

ps1=du;
ps2=q;
ps3=r;
ps4=d;
ps5=pu;
ps6=pm;
ps7=pd;
ps8=topnode;

optprice.m
function [ps1,ps2,ps3]=optprice(vol,K,opmat,bondmat,cp,a,du,ducont,yield,ydcont)
%Calcula o preço de uma opção europeia de futuro DI através de Black-Karasinski
%Chama a função EK que gera, por forward induction, uma árvore trinomial de taxa de
juros.
%Em seguida, calcula o preço do zero coupon bond subjacente do derivativo
%por backward induction. Depois, realiza o aprecamento da opção respectiva.

Kpu=(1/(1+K)^(bondmat-opmat)/252));

m=(bondmat/252)*12;
[du,Q,r,d,pu,pm,pd,topnode]=BK(m,a,vol,du,ducont,yield,ydcont);
%[du,Q,r,d,pu,pm,pd,topnode]=EK(m,a,vol);
jmaxpos=max(topnode);

%Aprecamento do bond zero coupon por backward induction
bdpos=1;
while du(bdpos)~=bondmat
    bdpos=bdpos+1;
end
bdpos=bdpos+1;

bdprice(2*topnode(bdpos)-1,bdpos)=0;
bdprice(:,bdpos)=1;
while bdpos>1
    for j=-topnode(bdpos-1)+1:topnode(bdpos-1)-1
        if abs(topnode(bdpos-1)-topnode(bdpos))==0
            if j==-topnode(bdpos-1)
                bdprice(-j+jmaxpos,bdpos-1)=(pu(-j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-
j+jmaxpos+2,bdpos)+pm(-j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-j+jmaxpos+1,bdpos)+pd(-
j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-j+jmaxpos,bdpos))*d(-j+jmaxpos,bdpos-1);
            else
                bdprice(-j+jmaxpos,bdpos-1)=(pu(-j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-
j+jmaxpos,bdpos)+pm(-j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-j+jmaxpos-1,bdpos)+pd(-
j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-j+jmaxpos-2,bdpos))*d(-j+jmaxpos,bdpos-1);
            end
        else
            bdprice(-j+jmaxpos,bdpos-1)=(pu(-j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-
j+jmaxpos+1,bdpos)+pm(-j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-j+jmaxpos,bdpos)+pd(-
j+jmaxpos,bdpos-1)*bdprice(-j+jmaxpos-1,bdpos))*d(-j+jmaxpos,bdpos-1);
        end
    end
    bdpos=bdpos-1;
end

%Aprecamento da opção sobre o bond
oppos=1;
while du(oppos)~=opmat
    oppos=oppos+1;
end

%oppos=oppos+1;

```

```

optprice=0;
for j=-topnode(oppo)+1:topnode(oppo)-1
    pricedf(-j+jmaxpos)=Q(-j+jmaxpos,oppo)*(max(-cp*(bdprice(-j+jmaxpos,oppo)-
Kpu),0));
    rstate(-j+jmaxpos)=r(-j+jmaxpos,oppo);
    optprice=optprice+Q(-j+jmaxpos,oppo)*(max(-cp*(bdprice(-j+jmaxpos,oppo)-
Kpu),0));
end

ps1=optprice*100000;
ps2=pricedf;
ps3=rstate;

```

FUN.m

```

function [ps1]=FUN(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,ydcont)
%Calcula a diferenca entre o preco do modelo contra o de mercado.
%Esta funcao tem por objetivo ser utilizada na calibracao da arvore de EK
%atraves de seu parametro de volatilidade.

```

```

ps1=optprice(vol,K,opmat,bondmat,cp,a,du,ducont,yield,ydcont)-mktprice;

```

Calibrate.m

```

function
[ps1,ps2,ps3,ps4,ps5]=calibrate(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,y
dcont)
%Funcao que tem por objetivo calibrar o modelo de BK atraves do parametro
%de volatilidade utilizando o processo de Levenberg-Marquardt para
%minimizar a funcao lsqnonlin e, portanto, fazer com que o parametro de
%volatilidade torne o preco de BK o mais proximo possivel do de mercado.

```

```

options=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','on');
LB=0;
UB=inf;
[x,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin(@fun,vol,LB,UB,options,K,opmat,bondr
at,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,ydcont);
ps1=x;
ps2=resnorm;
ps3=residual;
ps4=exitflag;
ps5=output;

```

opdivaluation.m

```

function
[ps1,ps2,ps3,ps4]=opdivaluation(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,)
dcont)
%A funcao toma os parametros de uma opcao e calibra o EK em funcao da vol
%contra o preco de mercado. Em seguida, calcula o preco teorico de BK com a
%vol obtida.

```

```

ps1=calibrate(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,ydcont);
[ps2,ps3,ps4]=optprice(ps1,K,opmat,bondmat,cp,a,du,ducont,yield,ydcont);

```

calibragemindividual.m

```

function [ps1]=calibragemindividual(datain,argout,ao,volo)
%Peça uma carteira de opcoes sobre futuro DI e faz seu aprecamento
%individual calibrando o modelo de BK para cada operacao.
%Os parametros de entrada sao:
%
%datain = data de referencia dos arquivos de entrada.
%argout = nome do arquivo de saida.
%ao= valor da taxa de reversao a media da taxa forward para o processo.
%volo = chute inicial para a volatilidade.

```

```

y='prazos'+datain;
Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\prazos20050531.txt','rt');

```

```

[du,ducont]=fscanf(Narqu, '%f');
fclose(Narqu);
Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\mktrate20050531.txt', 'rt');
[yield,ydcont]=fscanf(Narqu, '%f');
fclose(Narqu);

Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\optbase20050531total.txt', 'rt');
[opbase,optcont]=fscanf(Narqu, '%f');
fclose(Narqu);

nlin=optcont/6;

lin=1;
j=1;
while (lin<=nlin)
    col=1;
    while (col<=6)
        matriz(lin,col)=opbase(j);
        col=col+1;
        j=j+1;
    end
    lin=lin+1;
end

a=ao;
for i=1:nlin
    vol=vol0;
    K=matriz(i,1);
    opmat=matriz(i,2);
    bondmat=matriz(i,3)+opmat;
    cp=matriz(i,5);
    mktprice=matriz(i,6);

    [bkvol,bkprice]=opdivaluation(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,ydc
ont);
    matriz(i,7)=bkvol;
    matriz(i,8)=bkprice;
end

dlmwrite('C:\MATLAB6p5\work\dados\opvaluation.txt',matriz,'\t');

ps1=matriz;

```

portcalibration.m

```

function [ps1]=portcalibration(ao,vol0)
%Pega uma carteira de opcoes sobre futuro DI e faz seu aprecamento
%calibrando a volatilidade de Black-Karasinski.
%Os parametros de entrada sao:
%
%datain = data de referencia dos arquivos de entrada.
%argout = nome do arquivo de saida.
%ao= valor da taxa de reversao a media da taxa forward para o processo.
%vol0 = chute inicial para a volatilidade.

%Dados de curvas de mercado
Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\prazos20050531.txt', 'rt');
[du,ducont]=fscanf(Narqu, '%f');
fclose(Narqu);
Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\mktrate20050531.txt', 'rt');
[yield,ydcont]=fscanf(Narqu, '%f');
fclose(Narqu);

%Carteira de opcoes

Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\arqcap.txt', 'rt');
[arqorigem,arqcont]=fscanf(Narqu, '%s');
fclose(Narqu);

```

```

[arqorigem]=textread('C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\arqcap.txt', '%s', arqcont);
volo=[-1,-.1,.1,.5,1];
for u=1:arqcont
x='C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\';
y=arqorigem(u);
y=char(y);
z=[x,y];
Narqu=fopen(z, 'rt');
{opbase,optcont}=fscanf(Narqu,'%f');
fclose(Narqu);

nlin=optcont/6;
matriz=[];
lin=1;
j=1;
while (lin<=nlin)
col=1;
while (col<=6)
matriz(lin,col)=opbase(j);
col=col+1;
j=j+1;
end
lin=lin+1;
end

options=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','on');
LB=0;
UB=inf;
a=ao;
K=matriz(:,1);
opmat=matriz(:,2);
bondmat=matriz(:,3)+opmat;
cp=matriz(:,5);
mktprice=matriz(:,6);
for j=1:5
vol=volo(j);

[bkvol,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin(@myfun,vol, LB,UB,options,K
,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,ydcont);

bkprice=optportprice(bkvol,K,opmat,bondmat,cp,a,du,ducont,yield,ydcont);
pr=myfun(bkvol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,ydcont);

d=size(K);
for i=1:d(1,1)
matriz(i,7+(j-1)*10)=bkvol;
matriz(i,8+(j-1)*10)=bkprice(i);
matriz(i,9+(j-1)*10)=pr(i);
matriz(i,10+(j-1)*10)=resnorm;
matriz(i,11+(j-1)*10)=residual(i);
matriz(i,12+(j-1)*10)=exitflag;
matriz(i,13+(j-1)*10)=output.firstorderopt;
matriz(i,14+(j-1)*10)=output.iterations;
matriz(i,15+(j-1)*10)=output.funcCount;
matriz(i,16+(j-1)*10)=output.cgiterations;
end
end
x='C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\respBK\';
y=arqorigem(u);
y=char(y);
z=[x,y];
dlmwrite(z,matriz,'\t');

ps1=matriz;
end

```

myfun.m

```
function [ps1]=myfun(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,a,du,ducont,yield,ydcont)
%Calcula a diferenca entre o preco do modelo contra o de mercado.
%Esta funcao tem por objetivo ser utilizada na calibracao da arvore de BK
%atraves de seu parametro de volatilidade.
```

```
ps1=optportprice(vol,K,opmat,bondmat,cp,a,du,ducont,yield,ydcont)- mktprice.';
```

optportprice.m

```
function [ps1]=optportprice(vol,K,opmat,bondmat,cp,a,du,ducont,yield,ydcont)
%Calcula o preco para cada opcao no modelo de BK
%atraves de seu parametro de volatilidade.
```

```
d=size(K);
```

```
for i=1:d(1,1)
    X=K(i);
    opttm=opmat(i);
    bondttm=bondmat(i);
    cpflag=cp(i);
    Pricet(i)=optprice(vol,X,opttm,bondttm,cpflag,a,du,ducont,yield,ydcont);
end
```

```
ps1=Pricet;
```

A.1.2 Rotinas de Black

BlackDI.m

```
function [ps1,ps2]=BlackDI(vol,K,opmat,bondmat,cp,du,yield)
%Calcula o preco para uma opcao sobre futuro DI com o modelo de Black e o
%N(d1)
%Parametros:
%vol=volatilidade de taxa
%K=Strike em formato de taxa
%opmat=dias uteis ate o vencimento da opcao
%bondmat=dias uteis ate o vencimento do futuro DI
%cp=call/put flag (Call=1, Put=-1)
%du=vetor de referencia de prazos na curva de juros em dias uteis
%yield=vetor das taxas na curva pre
```

```
w=1;
while du(w)~=opmat
    w=w+1;
end
v=1;
while du(v)~=bondmat
    v=v+1;
end
yf1 = opmat/252;
yf2 = bondmat/252;
pre1 = yield(w);
pre2 = yield(v);
F=((1+pre2)^yf2)/((1+pre1)^yf1)^(1/(yf2-yf1))-1;
S=100000/((1+F)^(yf2-yf1));
K=100000/((1+K)^(yf2-yf1));
vp=vol*((yf2-yf1)/(1+F))*F;
d1=(log(S/K)+(0.5*(vp^2))*yf1)/(vp*sqrt(yf1));
d2=d1-(vp*sqrt(yf1));
j=-cp;
opvalue=j*(S*normcdf(j*d1)-K*normcdf(j*d2))/((1+pre1)^yf1);
ps1=opvalue;
ps2=normcdf(j*d1);
```

VOLBlackDI.m

```
function [ps1,ps2]=VOLBlackDI(vol,K,opmat,bondmat,cpflag,du,yield,mktprice)
%Calcula a vol implicita de Black para uma opcao sobre futuro DI por
%Newton-Raphson
%Parametros:
%vol=volatilidade de taxa
%K=Strike em formato de taxa
%opmat=dias uteis ate o vencimento da opcao
%bondmat=dias uteis ate o vencimento do futuro DI
%cpflag=call/put flag (Call=1, Put=-1)
%du=vetor de referencia de prazos na curva de juros em dias uteis
%yield=vetor das taxas na curva pre
%mktpprice=preco de mercado da opcao

w=1;
while du(w)~=opmat
    w=w+1;
end
v=1;
while du(v)~=bondmat
    v=v+1;
end
yf1 = opmat/252;
yf2 = bondmat/252;
pre1 = yield(w);
pre2 = yield(v);
F=(((1+pre2)^yf2)/((1+pre1)^yf1))^(1/(yf2-yf1))-1;
S=100000/((1+F)^(yf2-yf1));
K=100000/((1+K)^(yf2-yf1));
j=-cpflag;

oldvp=vol;
vp=vol*((yf2-yf1)/(1+F))*F;
n=0;
while abs(oldvp-vp)>0.0001
    oldvp = vp;
    d1=(log(S/K)+(0.5*(oldvp^2))*yf1)/(oldvp*sqrt(yf1));
    d2=d1-(oldvp*sqrt(yf1));
    Fsigma=j*(S*normcdf(j*d1)-K*normcdf(j*d2))/((1+pre1)^yf1)-mktprice;
    Fdersig=(S*normpdf(j*d1)*sqrt(yf1))/((1+pre1)^yf1);
    vp=-Fsigma/Fdersig+oldvp;
    n=n+1;
end
ps1=vp/(((yf2-yf1)/(1+F))*F);
ps2=n;
```

optportpriceBlack.m

```
function [ps1]=optportpriceBlack(vol,K,opmat,bondmat,cp,du,yield)
%Calcula o preco para cada opcao no modelo de Black
%atraves de seu parametro de volatilidade.

d=size(K);

for i=1:d(1,1)
    X=K(i);
    opttm=opmat(i);
    bondtm=bondmat(i);
    cpflag=cp(i);
    Pricet(i)=BlackDI(vol,X,opttm,bondtm,cpflag,du,yield);
end

ps1=Pricet;
```

myfunBlack.m

```
function [ps1]=myfunBlack(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,du,yield)
%Calcula a diferenca entre o preco do modelo contra o de mercado.
%Esta funcao tem por objetivo ser utilizada na calibragem do modelo de
%Black atraves de seu parametro de volatilidade.
```

```
ps1=optportpriceBlack(vol,K,opmat,bondmat,cp,du,yield)-mktprice.');
```

portcalibrationBlack.m

```
function [ps1]=portcalibrationBlack(volo)
%Pega uma carteira de opcoes sobre futuro DI e faz seu aprecamento
%calibrando a volatilidade de Black.
%Os parametros de entrada sao:
%
%datain = data de referencia dos arquivos de entrada.
%argout = nome do arquivo de saida.
%volo = chute inicial para a volatilidade.

%Dados de curvas de mercado
Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\prazos20050531.txt','rt');
[du,ducont]=fscanf(Narqu,'%f');
fclose(Narqu);
Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\mktrate20050531.txt','rt');
[yield,ydcont]=fscanf(Narqu,'%f');
fclose(Narqu);

%Carteira de opcoes
Narqu=fopen('C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\arqcap.txt','rt');
[arqorigem,arqcont]=fscanf(Narqu,'%s');
fclose(Narqu);
[arqorigem]=textread('C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\arqcap.txt','%s',arqcont);

volo=[-1,-.1,.1,.5,1];

for u=1:arqcont
    x='C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\';
    y=arqorigem(u);
    y=char(y);
    z=[x,y];
    Narqu=fopen(z,'rt');
    [opbase,optcont]=fscanf(Narqu,'%f');
    fclose(Narqu);

    nlin=optcont/6;
    matriz=[];
    lin=1;
    j=1;
    while (lin<=nlin)
        col=1;
        while (col<=6)
            matriz(lin,col)=opbase(j);
            col=col+1;
            j=j+1;
        end
        lin=lin+1;
    end

    options=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','on');
    LB=0;
    UB=inf;
    K=matriz(:,1);
    opmat=matriz(:,2);
    bondmat=matriz(:,3)+opmat;
```

```

        cp=matriz(:,5);
        mktprice=matriz(:,6);
        for j=1:5
            vol=vol(j);

            [blackvol, resnorm, residual, exitflag, output]=lsqnonlin(@myfunBlack, vol, LB, UB, options, K, opmat, bondmat, cp, mktprice, du, yield);
            blackprice=optportpriceBlack(blackvol, K, opmat, bondmat, cp, du, yield);
            pr=myfunBlack(blackvol, K, opmat, bondmat, cp, mktprice, du, yield);

            d=size(K);
            for i=1:d(1,1)
                matriz(i,7+(j-1)*10)=blackvol;
                matriz(i,8+(j-1)*10)=blackprice(i);
                matriz(i,9+(j-1)*10)=pr(i);
                matriz(i,10+(j-1)*10)=resnorm;
                matriz(i,11+(j-1)*10)=residual(i);
                matriz(i,12+(j-1)*10)=exitflag;
                matriz(i,13+(j-1)*10)=output.firstorderopt;
                matriz(i,14+(j-1)*10)=output.iterations;
                matriz(i,15+(j-1)*10)=output.funcCount;
                matriz(i,16+(j-1)*10)=output.cgiterations;
            end
        end
        x='C:\MATLAB6p5\work\dados\caps\respBlack\';
        y=arqorigem(u);
        y=char(y);
        z=[x,y];
        dlmwrite(z,matriz,'\t');

        ps1=matriz;
    end
end

```

funBlack.m

```

function [ps1]=funBlack(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,du,yield)
%Calcula a diferenca entre o preco do modelo contra o de mercado.
%Esta funcao tem por objetivo ser utilizada na calibragem do modelo de
%Black atraves de seu parametro de volatilidade.
ps1=BlackDI(vol,K,opmat,bondmat,cp,du,yield)-mktprice;

```

calibrateBlack.m

```

function
[ps1,ps2,ps3,ps4,ps5]=calibrateBlack(vol,K,opmat,bondmat,cp,mktprice,du,yield)
%Funcao que tem por objetivo calibrar o modelo de Black atraves do parametro
%de volatilidade utilizando o processo de Levenberg-Marquardt para
%minimizar a funcao lsqnonlin e, portanto, fazer com que o parametro de
%volatilidade torne o preco de Black o mais proximo possivel do de mercado.

options=optimset('LargeScale','on','LevenbergMarquardt','on');
LB=0;
UB=inf;
[x, resnorm, residual, exitflag, output]=lsqnonlin(@funBlack, vol, LB, UB, options, K, opmat, bondmat, cp, mktprice, du, yield);
ps1=x;
ps2=resnorm;
ps3=residual;
ps4=exitflag;
ps5=output;

```

A.2 Probabilidades de Transição

Para se obter as probabilidades de transição de estados apresentados em 4.2.1, podemos partir da equação 4.1 que reproduzimos em A.2.1 a seguir.

$$df(r(t)) = [\theta(t) - \varphi f(r(t))]dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0 \quad \text{A.2.1}$$

Esta equação está do domínio contínuo do tempo. No entanto, para implementar o processo de construção da árvore proposto por Hull, é preciso transformá-la em versão discreta. Para isto, utilizamos a variável R que é válida para o intervalo de tempo discreto δt . Assim, obtemos a equação A.2.2.

$$\delta f(R(i\delta t)) = [\theta(i\delta t) - \varphi f(R(i\delta t))]\delta t + \sigma \sqrt{\delta t} \varepsilon \quad \text{A.2.2}$$

Onde

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

É fácil verificar que quando este intervalo de tempo tende a zero equação A.2.2 se aproxima da A.2.1. Outro ponto que vale ressaltar é que iremos considerar o passo de tempo δt constante sem haver perda de generalidade. No momento oportuno, relaxaremos esta consideração passando a ter δt em função do passo de tempo.

Considerando-se $f(R)=x$, temos o Hull-White para a variável x :

$$\delta x = [\theta(i\delta t) - \varphi x]\delta t + \sigma \sqrt{\delta t} \varepsilon \quad \text{A.2.3}$$

Note que como já comentamos, pelo fato da $f(R)$ ser geral, podemos impor que ela seja o logaritmo da taxa e teremos a relação entre o modelo de BK com o de Hull-White.

No primeiro estágio da montagem da árvore, vamos considerar uma variável x^* que inicialmente é nula e a taxa de juros de longo prazo também, ou seja, θ é nulo em todo passo de tempo, conforme a equação A.2.4.

$$\delta x^* = -\varphi x^* \delta t + \sigma \sqrt{\delta t} \varepsilon \quad \text{A.2.4}$$

Isso ocorre por que, na segunda etapa da construção, é que se faz o ajuste do modelo à ETTJ. Também podemos ver que a variável aleatória δx^* segue uma distribuição normal e que seus dois momentos podem ser obtidos conforme abaixo:

Primeiro Momento

$$E[\delta x^*] = E[-\varphi x^* \delta t + \sigma \sqrt{\delta t} \varepsilon] = -\varphi x^* \delta t + \sigma \sqrt{\delta t} E[\varepsilon]$$

Como, $E[\varepsilon] = 0$ segue que a esperança desta variável é dada por A.2.5.

$$E[\delta x^*] = -\varphi x^* \delta t \quad \text{A.2.5}$$

Segundo Momento

$$Var[\delta x^*] = E[\delta x^{*2}] - E[\delta x^*]^2$$

Mas,

$$E[\delta x^{*2}] = E\left[(-\varphi x^* \delta t + \sigma \sqrt{\delta t} \varepsilon)^2\right] = E\left[(\varphi x^* \delta t)^2 + (\sigma \sqrt{\delta t} \varepsilon)^2 - 2\varphi x^* \delta t \sigma \sqrt{\delta t} \varepsilon\right]$$

A medida em que δt tende a zero, podemos desprezar termos em δt de ordem superior a 1, assim:

$$E[\delta x^{*2}] = (\varphi x^* \delta t)^2 + \sigma^2 \delta t E[\varepsilon^2]$$

Como

$$Var[\varepsilon] = E[\varepsilon^2] = 1$$

E, considerando A.2.5, segue que o segundo momento é dado por

$$Var[\delta x^*] = \sigma^2 \delta t \quad \text{A.2.6}$$

De posse dos dois momentos e considerando-se as três possibilidades de ramificações para o processo seguido por δx^* na Figura A.2.1, podemos deduzir as probabilidades de transição (p_u , p_m e p_d) para cada tipo de ramificação. Como temos três variáveis a terceira equação que necessitamos é a que considera que a soma destas três probabilidades que emanam de um nó seja igual a 1 sempre.

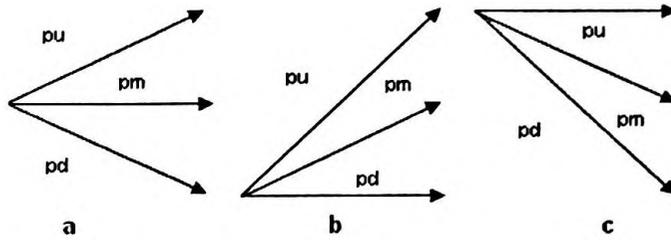


Figura A.2.1 Possibilidades de ramificação para o processo.

Um detalhe importante por ser considerado se refere ao fato de que o espaçamento das taxas de um passo de tempo para outro é dado por A.2.7.

$$\delta x^*(i) = \sigma \sqrt{3\delta t(i)} \quad \text{A.2.7}$$

Noto o leitor que aqui estamos considerando o intervalo de tempo δt como sendo função do passo de tempo i , uma vez que, nossa construção requer que consideremos esta questão no processo difusivo.

Um último detalhe importante está no fato de que, conhecido o choque δx^* , precisamos determinar os valores que x^* assume no passo seguinte. Este fato temos na equação A.2.8.

$$x^*(i, j) = j\delta x^*(i) \quad \text{A.2.8}$$

Assim, vamos considerar cada uma das ramificações da Figura A.2.1 para deduzir suas probabilidades de transição:

Processo da Fig A.2.1.a

Pela geometria do processo, vemos que um dado estado da natureza j do passo i , se relaciona com o passo seguinte com três estados $j+1$ para pu , j para pm e $j-1$ para pd .

Aplicando-se estas considerações em A.2.5 e aplicando também a A.2.8, temos:

$$E[\delta x^*] = pu\delta x^* - pd\delta x^* = -\varphi j\delta x^*\delta t$$

$$pu - pd = -\varphi j\delta t$$

A.2.9

Considerando-se a A.2.6, temos:

$$Var[\delta x^*] = E[\delta x^{*2}] - E[\delta x^*]^2 = pu \delta x^{*2} + pd \delta x^{*2} - (\varphi_j \delta x^* \delta t)^2 = \sigma^2 \delta t$$

$$3pu + 3pd = 1 + 3(\varphi_j \delta t)^2 \quad \text{A.2.10}$$

Resolvendo o sistema composto por A.2.9 e A.2.10, e considerando-se que a soma das três probabilidades deve dar 1, temos:

$$pu = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta t(i)]^2 - \varphi_j \delta t(i)}{2}$$

$$pm = \frac{2}{3} - [\varphi_j \delta t(i)]^2$$

$$pd = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta t(i)]^2 + \varphi_j \delta t(i)}{2}$$

Processo da Fig A.2.1.b

Pela geometria do processo, vemos que um dado estado da natureza j do passo i , se relaciona com o passo seguinte com três estados $j+2$ para pu , $j+1$ para pm e j para pd .

Aplicando-se estas considerações em A.2.5 e aplicando também a A.2.8, temos:

$$E[\delta x^*] = 2pu\delta x^* + pm\delta x^* = -\varphi_j \delta x^* \delta t$$

$$2pu + pm = -\varphi_j \delta t \quad \text{A.2.11}$$

Considerando-se a A.2.6, temos:

$$Var[\delta x^*] = E[\delta x^{*2}] - E[\delta x^*]^2 = 4pu \delta x^{*2} + pm \delta x^{*2} - (\varphi_j \delta x^* \delta t)^2 = \sigma^2 \delta t$$

$$4pu + pm = 1/3 + (\varphi_j \delta t)^2 \quad \text{A.2.12}$$

Resolvendo o sistema composto por A.2.11 e A.2.12, e considerando-se que a soma das três probabilidades deve dar 1, temos:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta t(i)]^2 + \varphi_j \delta t(i)}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - [\varphi_j \delta t(i)]^2 - 2\varphi_j \delta t(i)$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{[\varphi_j \delta t(i)]^2 + 3\varphi_j \delta t(i)}{2}$$

Processo da Fig A.2.1.c

Pela geometria do processo, vemos que um dado estado da natureza j do passo i , se relaciona com o passo seguinte com três estados j para p_u , $j-1$ para p_m e $j-2$ para p_d .

Aplicando-se estas considerações em A.2.5 e aplicando também a A.2.8, temos:

$$E[\delta x^*] = -p_m \delta x^* - 2p_d \delta x^* = -\varphi_j \delta x^* \delta t$$

$$p_m + 2p_d = \varphi_j \delta t \tag{A.2.13}$$

Considerando-se a A.2.6, temos:

$$Var[\delta x^*] = E[\delta x^{*2}] - E[\delta x^*]^2 = p_m \delta x^{*2} + 4p_d \delta x^{*2} - (\varphi_j \delta x^* \delta t)^2 = \sigma^2 \delta t$$

$$p_m + 4p_d = 1/3 + (\varphi_j \delta t)^2 \tag{A.2.14}$$

Resolvendo o sistema composto por A.2.13 e A.2.14, e considerando-se que a soma das três probabilidades deve dar 1, temos:

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{[\varphi_j \delta t(i)]^2 - 3\varphi_j \delta t(i)}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - [\varphi_j \delta t(i)]^2 + 2\varphi_j \delta t(i)$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{[\varphi_j \delta t(i)]^2 - \varphi_j \delta t(i)}{2}$$

A.3 Aplicação de Newton-Raphson ao Ajuste do Modelo à ETTJ

Substituindo-se a equação 4.18 na 4.15 chegamos à equação A.3.1 abaixo.

$$P(i+1) = \sum_j Q(i,j) \left[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \right]^{-\delta t(i)} \quad \text{A.3.1}$$

Assim, podemos dizer que temos uma função de α , tal que:

$$F(\alpha) = \sum_j Q(i,j) \left[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \right]^{-\delta t(i)} - P(i+1) \quad \text{A.3.2}$$

Queremos encontrar a raiz desta função, ou seja, o valor de α que anula a função. Devemos, então, procurar a solução por um método numérico. Vamos fazê-lo por Newton-Raphson. Assim, vamos primeiramente obter a derivada da função em relação à α .

$$F'(\alpha) = -\delta t(i) e^{\alpha(i\delta t(i))} \sum_j Q(i,j) \left[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \right]^{-\delta t(i)-1} e^{j\delta x^*(i)} \quad \text{A.3.3}$$

Como a relação de Newton-Raphson para o k-ésimo passo é dada por:

$$\alpha_k = -\frac{F(\alpha_{k-1})}{F'(\alpha_{k-1})} + \alpha_{k-1} \quad \text{A.3.4}$$

Substituindo-se as equações A.3.2 e A.3.3 na A.3.4, temos:

$$\alpha_k(i\delta t(i)) = \frac{\sum_j Q(i,j) \left[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \right]^{-\delta t(i)} - P(i+1)}{e^{\alpha(i\delta t(i))} \delta t(i) \sum_j Q(i,j) \left[1 + e^{\alpha(i\delta t(i)) + j\delta x^*(i)} \right]^{-\delta t(i)-1} e^{j\delta x^*(i)}} + \alpha_{k-1}(i\delta t(i)) \quad \text{A.3.5}$$

A.5.2 Resultados de Black-Karasinski

TPO	TPO	TPO	TPO	TPO	TPO	Vol											
						Vol	Vol										
TIPO 1	10.0%	21	66	1	1	36.46	4.97%	24.75	3.74%	4.97%	24.75	3.74%	4.97%	24.75	3.74%	4.97%	24.75
	10.5%	22	66	1	1	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%
	11.0%	23	66	1	1	161.68	4.97%	166.52	4.97%	166.52	4.97%	166.52	4.97%	166.52	4.97%	166.52	4.97%
	11.5%	24	66	1	1	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%
	12.0%	25	66	1	1	39.49	4.97%	75.35	4.97%	75.35	4.97%	75.35	4.97%	75.35	4.97%	75.35	4.97%
	12.5%	26	66	1	1	10.64	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%
	13.0%	27	66	1	1	13.22	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%
	13.5%	28	66	1	1	13.22	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%	18.27	4.97%
	14.0%	29	66	1	1	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%	0.01	4.97%
	14.5%	30	66	1	1	10.64	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%	12.27	4.97%
TIPO 2	10.0%	21	127	2	1	53.67	5.81%	53.31	5.81%	53.31	5.81%	53.31	5.81%	53.31	5.81%	53.31	5.81%
	10.5%	22	127	2	1	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%
	11.0%	23	127	2	1	342.41	5.81%	342.50	5.81%	342.50	5.81%	342.50	5.81%	342.50	5.81%	342.50	5.81%
	11.5%	24	127	2	1	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%	0.01	5.81%
	12.0%	25	127	2	1	162.33	5.81%	171.46	5.81%	171.46	5.81%	171.46	5.81%	171.46	5.81%	171.46	5.81%
	12.5%	26	127	2	1	27.34	5.81%	22.18	5.81%	22.18	5.81%	22.18	5.81%	22.18	5.81%	22.18	5.81%
	13.0%	27	127	2	1	42.64	5.81%	60.07	5.81%	60.07	5.81%	60.07	5.81%	60.07	5.81%	60.07	5.81%
	13.5%	28	127	2	1	54.63	5.81%	91.00	5.81%	91.00	5.81%	91.00	5.81%	91.00	5.81%	91.00	5.81%
	14.0%	29	127	2	1	4.99	5.81%	5.81	5.81%	5.81	5.81%	5.81	5.81%	5.81	5.81%		
	14.5%	30	127	2	1	63.94	5.81%	236.78	5.81%	236.78	5.81%	236.78	5.81%	236.78	5.81%	236.78	5.81%
TIPO 3	10.0%	21	261	3	1	617.24	6.81%	637.30	6.81%	637.30	6.81%	637.30	6.81%	637.30	6.81%	637.30	6.81%
	10.5%	22	261	3	1	0.01	6.81%	0.01	6.81%	0.01	6.81%	0.01	6.81%	0.01	6.81%	0.01	
	11.0%	23	261	3	1	60.01	6.81%	130.36	6.81%	130.36	6.81%	130.36	6.81%	130.36	6.81%	130.36	6.81%
	11.5%	24	261	3	1	170.48	6.81%	178.19	6.81%	178.19	6.81%	178.19	6.81%	178.19	6.81%	178.19	6.81%
	12.0%	25	261	3	1	28.10	6.81%	18.04	6.81%	18.04	6.81%	18.04	6.81%	18.04	6.81%	18.04	6.81%
	12.5%	26	261	3	1	60.29	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%
	13.0%	27	261	3	1	7.27	6.81%	7.32	6.81%	7.32	6.81%	7.32	6.81%	7.32	6.81%		
	13.5%	28	261	3	1	60.29	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%
	14.0%	29	261	3	1	0.01	6.81%	0.01	6.81%	0.01	6.81%	0.01	6.81%	0.01	6.81%		
	14.5%	30	261	3	1	60.29	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%	148.21	6.81%

Bibliografia

Alexander, C. 2001. *Market Models*. John Wiley & Sons.

Benninga, S. and Wiener, Z. 1998. "Binomial Term Structure Models". *Mathematica in Education and Research*, Vol. 7 No. 3 pp 1-9.

Black, F. and Karasinski, P. 1991. "Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal". *Financial Analysts Journal*, pp 52-59.

Black, F., Derman, E. and Toy, W, 1990. "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options". *Financial Analysts Journal*, pp 33-39.

Brigo, D. and Mercurio, F. 2001. *Interest rate Models: Theory and Practice*. Springer-Verlag.

Cairns, A. J.G. 2004. *Interest Rate Models: An Introduction*. Princeton University Press.

Clelow, L. and Strickland, C. 1998. *Implementing Derivative Models*. John Wiley & Sons.

Fraletti, P. B. 2004. "Ensaio sobre Taxas de Juros em Reais e sua Aplicação na Análise Financeira". *Tese de Doutorado em Administração, FEA -USP*.

Gluckstern, M. C. 2001. "Aplicação do Modelo de Hull-White a Precificação de Opções sobre IDI". *Tese de Doutorado em Administração, EAESP-FGV*.

Hull, J. and White, A. March 1990. "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp 87-100.

Hull, J. and White, A. June 1993. "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp 235-254.

Hull, J. and White, A. Fall 1994. "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models". *Journal of Derivatives*, pp 7-16.

Hull, J. and White, A. Winter 1994. "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models". *Journal of Derivatives*, pp 37-48.

Hull, J. and White, A. Winter 1996. "Using Hull-White Interest Rate Trees". *Journal of Derivatives*.

Hull, J. and White, A. August 2000. "The General Hull-White Model and Supercalibration". *working paper*.

Hull, J., 2003. *Options, Futures and Other Derivatives*. 5th. Edition, Prentice Hall, NJ.

James, J. and Webber, N. 2000. *Interest Rate Modelling*. John Wiley & Sons.

Jamshidian, F. June 1991. "Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Model". *The Journal of Fixed Income*, pp 62-74.

- Jarrow, R. A., 2002. *Modeling Fixed-Income Securities and Interest Rate Options*. 2nd. Edition, Stanford University Press.
- London, Justin. 2005. *Modeling Derivatives in C++*. Wiley Finance Series.
- Neto, C. A. V. 1999. “Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e Avaliação de Contratos Derivativos”. *Tese de Doutorado, FEA-USP*.
- Pelsser, A. 2000. *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*. Springer-Verlag.
- Rebonato, R. 1998. *Interest Rate Option Models*. 2nd. Edition, John Wiley & Sons.
- Rebonato, R. 2002. *Modern Pricing of Interest Rate Derivatives*. Princeton University Press.
- Rebonato, R. 2004. *Volatility and Correlation: the perfect hedger and the fox*. 2nd. Edition, John Wiley & Sons.
- Securato, J. R. 2002. *Cálculo Financeiro das Tesourarias – Bancos e Empresas*. 4^a. Edição, Saint Paul Institute of Finance.
- Yamauchi, L. W. 2004. “Apreçamento de Opções de Juros com a Utilização do Modelo de Black, Derman and Toy”. *Dissertação do Mestrado de Modelagem Matemática em Finanças, FEA/IME-USP*.