

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bjbfea@usp.br](mailto:bjbfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO**  
**FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE**  
**MESTRADO PROFISSIONALIZANTE**  
**MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS**

**DEDALUS - Acervo - FEA**



20600028750

**UM ESTUDO SOBRE AS MOEDAS DE PAÍSES EMERGENTES**  
**MODELANDO A VOLATILIDADE ATRAVÉS DE PROCESSOS GARCH -**

**Andrei Basílio Gonçalves**

**Orientador: Professor Pedro A. Morettin**

**SÃO PAULO**  
**2005**

T332 G635e e. 2

788302



2000020751



Powered by RidPreStar - [www.ridprestar.com.br](http://www.ridprestar.com.br)

**a meus pais e irmãos que me fizeram como sou,  
a minha esposa Susan pela paciência e amor,  
aos pequenos Anna e Andrei, pérolas da minha vida.**

**Agradeço ao professor e orientador Pedro A. Morettin pelo pragmatismo e paciência para com os alunos do Mestrado Profissionalizante; por entender suas limitações de tempo e dedicação.**

**Agradeço também ao professor Henrique Von Dreifus pela rara dedicação demonstrada nestes dois anos e por tornar nosso mestrado reconhecidamente qualificado.**

## RESUMO

Neste trabalho, estudamos as propriedades das distribuições de algumas moedas líquidas de países emergentes e tentamos modelar a volatilidade da taxa de câmbio usando processos GARCH e suas variações. Esta abordagem contribui com informações úteis a respeito das características destes mercados, que são essências para estratégias de *trading* e gerenciamento de risco.

**ABSTRACT**

*In this paper, we study the distributions properties of some very liquid emerging market currencies and attempt to model FX volatilities through GARCH-type processes and their extensions. Such approach contributes with meaningful information regarding the characteristics of the FX markets, key for trading and risk management strategies.*

## Sumário

1	Introdução .....	7
2	Modelo GARCH .....	9
2.1	Variações do Modelo GARCH .....	13
2.1.1	EGARCH .....	13
2.1.2	TGARCH .....	14
2.1.3	PGARCH .....	15
2.2	Critérios de Comparação.....	16
3	Análise das Séries .....	17
3.1	Roteiro .....	17
3.2	Países Desenvolvidos.....	18
3.2.1	Euro.....	18
3.2.2	Ien .....	33
3.3	Países Emergentes.....	44
3.3.1	Won.....	44
3.3.2	Zar .....	54
3.3.3	Peso.....	68
3.3.4	Real .....	79
4	Conclusões .....	92
5	Estudos Adicionais.....	95
5.1	Modelos com memória longa.....	96
5.2	Modelos GARCH Multivariado.....	96
5.3	Modelos de Volatilidade Estocástica .....	97
5.4	Modelos Fatoriais.....	98
6	Referências.....	98

## 1 Introdução

A remoção dos *currency pegs*, ou controles sobre a flutuação das taxas de câmbio, nos últimos anos, contribuiu para criar uma nova classe de ativos financeiros e, como consequência, de oportunidades de *trading*. Ao contrário dos sistemas fixos, onde a variação era pré-determinada, o entendimento das propriedades das distribuições das taxas de câmbio flutuantes tornou-se necessário para operar os mercados a vista, futuros e de opções.

Volatilidade ou variância é um ingrediente essencial de uma função de distribuição de probabilidade. Uma análise profunda da variância condicional é muito mais importante do que simplesmente estimar um número fixo de desvios padrões, assumindo uma distribuição normal dos retornos históricos. Em particular, moedas emergentes são conhecidas por terem distribuições assimétricas; a probabilidade de depreciação da moeda é maior que a de apreciação desta. Além disso, choques nas taxas de câmbio tendem a se dissipar mais lentamente. Algumas vezes estes choques são causados por intervenções dos Bancos Centrais, por eleições ou outros eventos políticos.

Escolhemos quatro moedas de mercados emergentes, o real (USD-BRL), o rand sul-africano (USD-ZAR), o won coreano (USD-KRW) e o peso mexicano (USD-MXN). Para fins de comparação entre o comportamento das moedas emergentes com as moedas do G3, incluímos o ien (USD-JPY) e o euro (USD-EUR). Utilizamos os preços de fechamento dos *forwards* diários do período de Janeiro de 1999 até Dezembro de 2004 para construir as séries dos retornos (variação percentual diária dos preços de cada moeda) e estudamos as propriedades das distribuições para determinar o grau de afastamento da “normalidade”. A curtose e a assimetria de cada retorno determinam a escolha da distribuição – normal ou t de Student. A função de distribuição de probabilidade (f.d.p.) escolhida é utilizada na otimização da função de log-verossimilhança, que maximiza a probabilidade que os dados dos retornos observados provêm de uma das determinadas distribuições. A volatilidade é especificada como um modelo paramétrico da família GARCH. Estimamos vários destes modelos para determinar qual melhor se ajusta a cada série. Utilizamos a abordagem do estimador de máxima verossimilhança para estabelecer os parâmetros de cada volatilidade.



Como veremos a seguir, chegamos às seguintes conclusões:

- Os momentos das distribuições das moedas em estudo revelam que todas possuem caudas longas e são assimétricas.
- O real e o peso possuem caudas longas. O real possui a cauda mais longa, refletindo sua pré-disposição para desvalorizar-se.
- Um modelo GARCH (1,1) não explica adequadamente a volatilidade destas moedas. Entretanto, outras variações como EGARCH, PGARCH e TGARCH explicam melhor a persistência e assimetria da volatilidade. Os modelos da família GARCH são chamados de modelos de volatilidade condicional porque a volatilidade corrente é modelada como sendo dependente do quadrado dos retornos passados e da volatilidade passada.

## 2 Modelo GARCH

Inicialmente, considere o problema de estimação de volatilidades (desvios padrões) dos retornos dos ativos. Assumindo média zero, a volatilidade dos retornos do ativo  $i$  utilizando uma amostra de  $T$  observações é definida como:

$$S_i = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^T r_{i,t}^2}}{T}.$$

O cálculo do estimador utilizando toda amostra permite pouca adaptabilidade às informações mais recentes. Isto decorre do fato de que todas as observações da amostra recebem o mesmo peso.

Para contornar este problema, utiliza-se, ao invés de toda amostra, uma janela móvel com um número fixo de observações. Apesar de ainda manter peso igual para todas as observações utilizadas na janela, consegue-se alguma flexibilidade, pois se pode controlar a importância das observações mais recentes através da escolha do tamanho da janela.

No entanto, o uso deste estimador apresenta outro inconveniente. Em geral, a ocorrência de eventos extremos nas séries financeiras se dá com relativa frequência. Como este estimador utiliza o mesmo peso para todas as observações da amostra, a volatilidade estimada dá um salto para cima após um retorno extremo, permanecendo neste nível enquanto a observação permanecer na amostra. Quando esta observação extrema sai da amostra, a volatilidade salta para baixo novamente e, desta forma, em períodos após grandes variações de preços de ativos, a volatilidade tende a ser superestimada.

A técnica do alisamento exponencial tenta contornar estas limitações. Neste caso, o estimador da variância dos retornos é dado por:

$$\sigma_{i,t}^2 = \lambda \sigma_{i,t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{i,t-1}^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

A variância do retorno num dado instante de tempo é composta por dois termos. O primeiro, um termo auto-regressivo expressando a dependência temporal da variância dos retornos, fato estilizado presente na maioria das séries financeiras. O segundo representando a contribuição da observação mais recente para a variância estimada. A expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_{i,T}^2 = \lambda^T \sigma_{i,0}^2 + (1 - \lambda) \sum_{t=1}^{T-1} \lambda^t r_{i,T-t}^2.$$

Nesta expressão, a estimativa da variância dos retornos é igual a da variância inicial mais uma soma com pesos geometricamente declinantes dos quadrados dos retornos, representando a variância instantânea. A influência da variância inicial sobre a variância presente tende a desaparecer e um candidato natural para estimador deste termo é o estimador da variância amostral. O segundo termo faz com que os efeitos dos choques nas séries de retornos sejam dissipados suavemente com o tempo. Note que a variância amostral é um caso particular da expressão acima com

$$\lambda = \frac{T-1}{T}.$$

O mesmo princípio pode ser estendido para a estimação da covariância entre retornos de dois ativos. A covariância entre os retornos  $i$  e  $j$  é dada por:

$$\sigma_{ij,t}^2 = \lambda \sigma_{ij,t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{i,t-1} r_{j,t-1}.$$

Da mesma forma que no cálculo das variâncias, a covariância inicial pode ser estimada pela covariância amostral.

Séries financeiras comumente apresentam a característica de grandes valores em determinados instantes de tempo são seguidos por valores também elevados em períodos seguintes, não necessariamente de mesma direção.

Esta característica pode ser descrita pela alta autocorrelação no quadrado dos retornos. Esta autocorrelação faz com que a variância condicional apresente uma dependência dos choques passados.

O modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), proposto por Engle (1982) é uma forma genérica para a estimação desta variância condicional dos retornos. Ele expressa a variância condicional como uma defasagem distribuída do quadrado dos retornos passados.

Designando o retorno por  $y_t$ , temos:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon \approx NI(0,1)$$

$$E_{t-1}(y_t^2) = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 = \alpha(L) y_t^2,$$

sendo  $\alpha(L)$  um polinômio no operador defasagem do tipo

$$\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q.$$

Para garantir a não negatividade da variância condicional, devemos ter que  $\omega, \alpha_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, q$ .

O modelo descrito possui algumas propriedades úteis. Primeiro, através da técnica de decomposição de erros de predição, é possível construir a função de verossimilhança tornando possível estimarem-se os parâmetros pelo método de máxima verossimilhança. Esta propriedade é importante porque estes estimadores possuem distribuições conhecidas que viabilizam a execução de testes de hipóteses diversos. Além disso, é possível provar que este modelo implica uma distribuição não condicional com caudas pesadas para os retornos.

Em geral, existe uma alta persistência na volatilidade das séries de retornos, o que faz com que o valor  $q$  no modelo ARCH seja elevado, implicando a necessidade de estimação de um grande número de parâmetros.

O modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) proposto por Bollerslev (1986) expressa de forma mais simples a dependência temporal da variância

condicional. Neste modelo, a variância condicional além de depender do quadrado dos retornos passados como no modelo ARCH, também depende do histórico das próprias variâncias condicionais.

A variância condicional num modelo GARCH (p, q) é expressa por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha(L) y_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2,$$

sendo  $\alpha(L)$  e  $\beta(L)$  polinômios no operador defasagem  $L$ . A condição de não negatividade da variância condicional neste modelo é dada por  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, q$  e  $j = 1, \dots, p$ .

A equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$y_t^2 = \omega + (\alpha(L) + \beta(L)) y_t^2 + (1 - \beta(L)) \eta_t$$

onde

$$\eta_t = (y_t^2 - \sigma_t^2)$$

é uma diferença martingal não Gaussiana. Esta representação mostra que um modelo GARCH (p, q) é um modelo ARMA (max (p,q), q) para os quadrados dos retornos.

Para garantir que este processo ARMA para o quadrado dos retornos tenha covariância estacionária, as raízes de

$$1 - \alpha(L) - \beta(L) = 0$$

têm que estar fora do círculo unitário. Com a condição de não negatividade satisfeita, isto é, garantido-se

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$$

então a variância de  $y_t^2$  é dada por:

$$E(y_t^2) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i}$$

e a esperança condicional da variância de  $n$  passos a frente é:

$$E(\sigma_{t+n}^2) = \left( \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^n \left( \sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i} \right) + \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i},$$

o que significa a existência de uma tendência para a variância condicional retornar ao valor da variância não condicional.

## 2.1 Variações do Modelo GARCH

Os modelos ARCH e GARCH analisam os retornos das séries financeiras de forma simétrica uma vez que a variância é uma função quadrática destes. Entretanto, a volatilidade reage de forma assimétrica aos retornos, principalmente em séries financeiras (e em especial nas séries que iremos estudar neste trabalho). Esta assimetria é, em geral, maior para retornos negativos.

### 2.1.1 EGARCH

O modelo **EGARCH**, desenvolvido por Nelson (1991) é assim definido:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 g(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2),$$

onde  $\varepsilon_t$  são v.a. i.i.d com média zero e variância um e  $g(\cdot)$  é a curva de impacto de informação, dada por:

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma\{|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)\},$$

onde  $\theta$  e  $\gamma$  são parâmetros reais e  $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$  é uma seqüência de v.a. i.i.d com média zero e pode-se escrever

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|), & \text{se } \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta - \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|), & \text{se } \varepsilon_t \leq 0. \end{cases}$$

Para que os retornos negativos tenham maior impacto do que os positivos, devemos ter  $\gamma < 0$ .

Tal assimetria permite que a volatilidade responda mais rapidamente aos retornos negativos do que aos positivos, fato conhecido como alavancagem (*leverage*). Utilizando a forma apresentada nas equações acima, pode-se finalmente escrever:

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}.$$

Quando  $\gamma \neq 0$ , o efeito assimétrico deve ser incorporado ao modelo GARCH.

### 2.1.2 TGARCH

O modelo **TARCH** (*threshold ARCH*) é um caso particular do modelo ARCH não-linear. Sua volatilidade pode ser escrita como:

$$(\sigma_t^2)^\delta = \alpha_0 + \alpha_1 g^{(\delta)}(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 (\sigma_{t-1}^2)^\delta.$$

em que

$$g^{(\delta)}(\varepsilon_t) = \theta I_{\{\varepsilon_t > 0\}} |\varepsilon_t|^\delta + (1 - \theta) I_{\{\varepsilon_t \leq 0\}} |\varepsilon_t|^\delta.$$

Quando  $\delta = 1$ , temos o modelo de Zakoian (1994) ou como vamos nos referir a partir de agora, **TGARCH**. Quando  $\delta = 2$ , temos o modelo GJR (Glosten, Jagannathan and Runkle, 1993). Utilizaremos a forma apresentada no “Eviews”, ou seja:

$$\sigma_t^2 = w + \alpha X_{t-1}^2 + \delta X_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

com

$$d_t = \begin{cases} 1, & \text{se } X_t < 0 \\ 0, & \text{se } X_t \geq 0 \end{cases},$$

onde **1** se refere a **más notícias** e **0** se refere a **boas notícias**. Quando  $\gamma \neq 0$ , o efeito assimétrico deve ser incorporado ao modelo GARCH e espera-se que  $\gamma > 0$  para que **más notícias** tenham um impacto maior.

### 2.1.3 PGARCH

Finalmente, o modelo básico GARCH pode ser estendido para permitir os efeitos da alavancagem. Isto pode ser feito tratando o GARCH básico como um caso especial do modelo **PGARCH** (*power GARCH*) proposto por Ding, Granger e Engle (1993):

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^\delta,$$



onde  $\delta/2$  é um expoente positivo e  $\gamma$  é o coeficiente do efeito alavancagem.

## 2.2 Critérios de Comparação

Uma vez que definimos estes quatro modelos - **GARCH**, **EGARCH**, **TGARCH** e **PGARCH** - iremos utilizá-los para tentar ajustar as volatilidades das moedas mencionadas. Entretanto, necessitamos definir critérios para estabelecer qual modelo melhor ajustou as séries de retornos.

O critério de informação **AIC**, sugerido por Akaike (1973, 1974) escolhe o modelo cujas ordens  $k$  e  $l$  minimizam

$$AIC(k, l) = \ln \sigma_{k,l}^2 + \frac{2(k+l)}{T},$$

onde  $\sigma_{k,l}^2$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\sigma^2$  para um modelo de ordem  $(k, l)$ .

Outro critério é o **BIC**, ou critério de informação Bayesiano. Akaike (1977), Rissanen (1978) e Schwarz (1978) sugerem minimizar o BIC, definido por

$$BIC(k, l) = \ln \sigma_{k,l}^2 + \frac{\ln(T)(k+l)}{T}.$$

Hannan (1980) mostra que as estimativas  $k$  e  $l$  que minimizam o BIC são consistentes, sob determinadas condições.

Neste trabalho iremos buscar os modelos onde se têm  $\min(AIC)$  e  $\min(BIC)$ .

### 3 Análise das Séries

Até agora, definimos o problema a ser estudado, ou seja, como modelar a volatilidade de moedas de países emergentes. Além disso, descrevemos os modelos a serem utilizados (GARCH e suas variações) e os critérios para ao final da modelagem, compararmos os ajustes dos modelos. O próximo passo será analisar as séries de taxas de câmbio e dos retornos destas.

Séries de retornos de ativos financeiros, ao contrário de outras séries temporais, apresentam algumas características próprias, ou *fatos* estilizados, que enumeramos a seguir:

1. Retornos são, em geral, não autocorrelacionados;
2. Os quadrados dos retornos são autocorrelacionados, apresentando uma correlação de *lag* 1 pequena e, depois, uma queda lenta das posteriores (*lag* 2 em diante);
3. Séries de retornos apresentam agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo;
4. A distribuição dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma distribuição normal;
5. A distribuição, embora simétrica, é, em geral, leptocúrtica.

#### 3.1 Roteiro

Para a análise das séries de retornos e conseqüente ajuste do melhor modelo para a volatilidade, utilizamos o seguinte roteiro:

- 1 Verificação da normalidade da série através do histograma, gráfico *qq*, e teste de Jarque-Bera (1981);
- 2 Análise das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos retornos. Elas fornecem pistas sobre a adequação de utilizarmos um modelo ARMA ( $p, q$ ) assim como sobre prováveis valores de  $p$  e  $q$ . Além disso, a *fac* está relacionada com a parte MA do modelo, ao passo que a *facp* está relacionada com a parte AR;
- 3 Análise da função de autocorrelação dos quadrados dos retornos. Este gráfico prevê indicações sobre a heteroscedasticidade da série. Se este for o caso, a presença de variância não constante indica a necessidade de se ajustar um modelo GARCH.

- 4 Para os modelos ARMA, efetuar a análise dos resíduos, através das *fac* e *facp* e do teste de *Ljung-Box* para verificar se os resíduos são ruídos brancos e, portanto o modelo refletiu a realidade com boa precisão;
- 5 Para modelos ARCH, ajustar um modelo ARMA para remover a correlação serial da série, se esta existir. A seguir, efetuar o teste de Multiplicadores de Lagrange, que verifica a existência de efeitos ARCH (heteroscedasticidade condicional). A hipótese a ser testada é  $H_0: \alpha_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ , na regressão:

$$X_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r X_{t-r}^2 + u_t,$$

para  $t = r + 1, \dots, T$ .

- 6 Diagnóstico do modelo GARCH. Para um modelo GARCH ( $p, q$ ), os resíduos padronizados são *v.a.i.i.d.* com distribuição normal padrão ou *t-Student*. Assim, para verificar esta adequação, efetuamos os seguintes cálculos:
  - 6.1 Teste de normalidade *Jarque-Bera*;
  - 6.2 Teste de *Ljung-Box* para os resíduos padronizados e para os quadrados dos resíduos padronizados. Este teste verifica a adequação do modelo para modelar a dependência entre sucessivos retornos;
  - 6.3 Gráficos das *fac* e *facp* dos quadrados dos resíduos, para verificar a existência de heteroscedasticidade condicional e gráfico *qq* para os resíduos padronizados;
  - 6.4 Teste do Multiplicador de Lagrange para corroborar as informações obtidas nos itens anteriores;
- 7 De posse de todos os modelos validados, utilizar os critérios AIC e BIC para definir qual dos modelos melhor ajustou a série.

## 3.2 Países Desenvolvidos

### 3.2.1 Euro

A série do Euro (assim como as demais) foi construída com 1566 observações diárias de 2 de janeiro de 1999 até 30 de dezembro de 2004. Ver Figura 3.2.1.1 para o gráfico da série a Figura 3.2.1.2 para o gráfico dos retornos

## Serie Euro

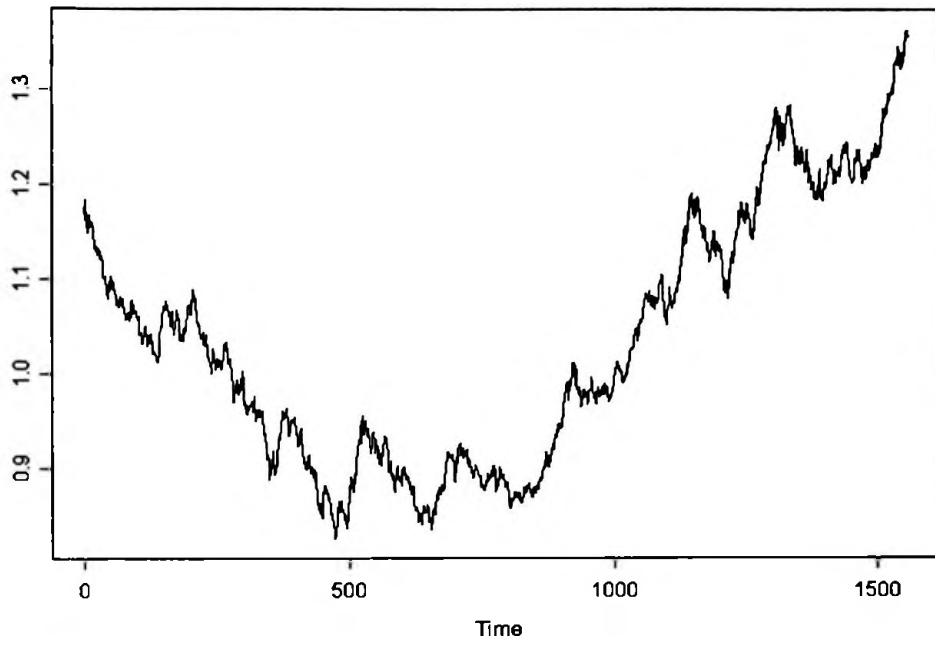


Figura 3.2.1.1 – Série Euro

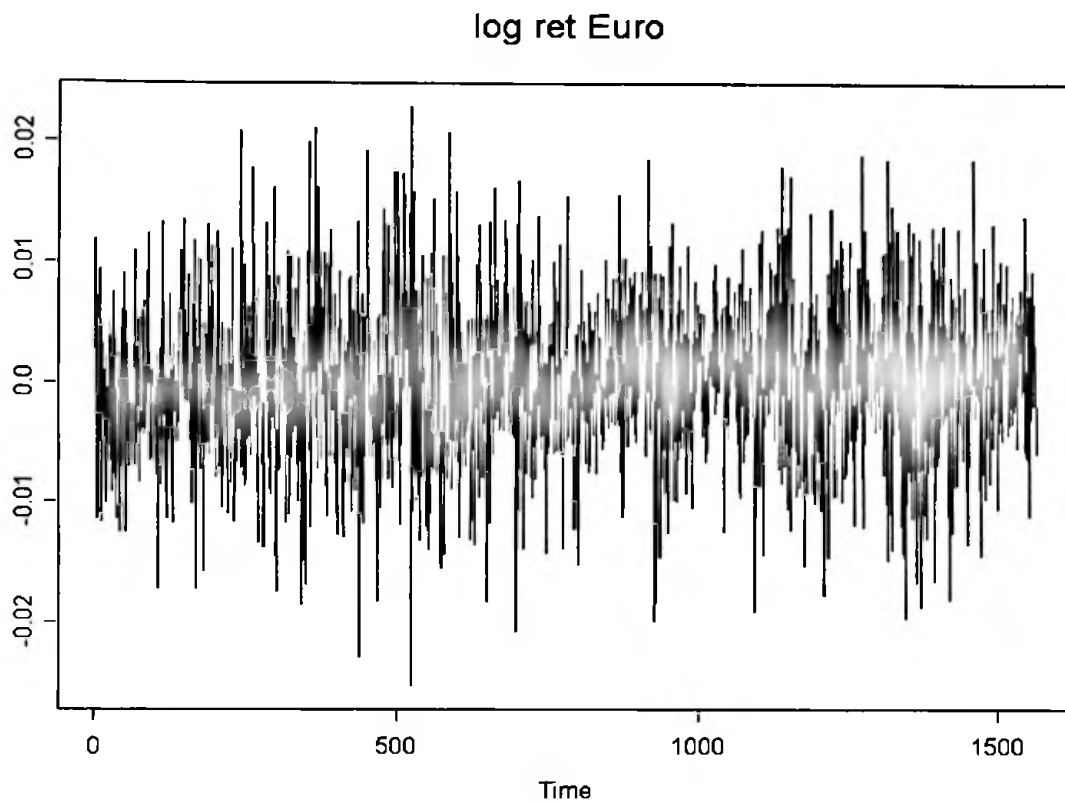


Figura 3.2.1.2 – Série Log Retorno - Euro

A série apresentou as seguintes estatísticas:

Sample Quantiles:

min	1Q	median	3Q	max
-0.02522	-0.003974	0.0002216	0.004146	0.0229

Sample Moments:

mean	std	skewness	kurtosis
0.00009415	0.006648	-0.0369	3.518

Para verificar a normalidade da série, utilizamos dois métodos. O primeiro, chamado, *qq-plot* é o gráfico dos quantis da distribuição da série contra os quantis de uma distribuição normal. Se a distribuição for normal, então os quantis se encontrarão numa reta de 45 graus no gráfico.

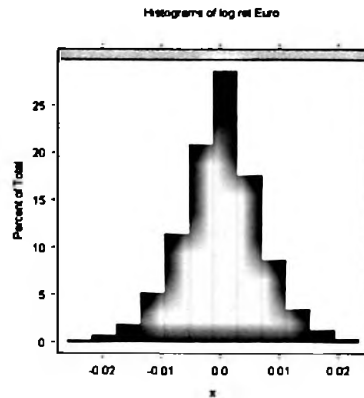


Figura 3.2.1.3 - Histograma Log Retorno - Euro

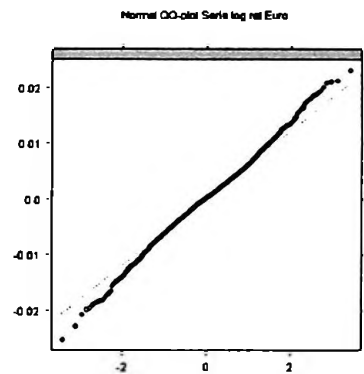


Figura 3.2.1.4 - qq Plot Log Retorno - Euro

Entretanto, o gráfico *qq* é um diagnóstico visual informal. Um segundo teste formal que utilizamos é o teste de Jarque-Bera (1981). Ele é baseado no resultado onde uma variável aleatória com distribuição normal tem curtose igual a três e assimetria igual a zero. A estatística do teste Jarque-Bera é:

$$S = \left(\frac{T}{6}\right)\hat{A}^2 + \frac{T}{24}(\hat{E} - 3)^2,$$

onde  $\hat{A}$  é uma estimativa da assimetria e  $\hat{E}$  da curtose. Para a série do Euro, obtivemos o seguinte resultado:

Test for Normality: Jarque-Bera  
Null Hypothesis: data is normally distributed  
Test Statistics: Test Stat 17.8594 p.value 0.0001  
Dist. under Null: chi-square with 2 degrees of freedom Total Observ.: 1565

e o p-valor indica, assim como a análise gráfica, que não se trata de uma série com distribuição normal.

Observamos que a série apresenta assimetria e um pequeno excesso de curtose (> três).

A seguir, temos as *fac* e *facp* que sugerem a utilização de um modelo ARMA (1,0):

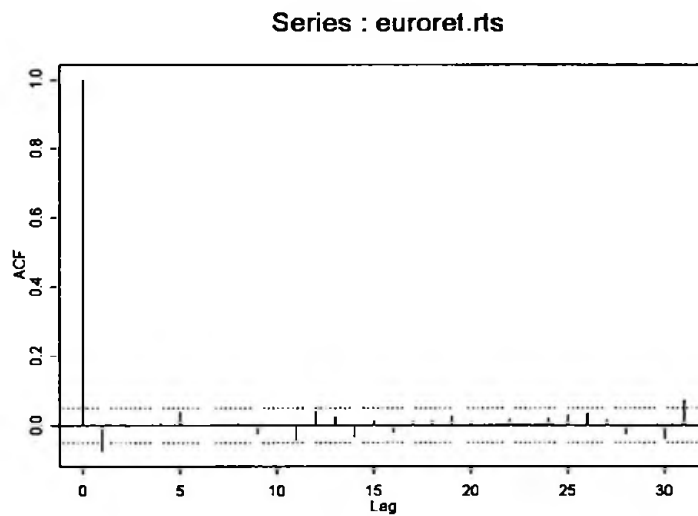


Figura 3.2.1.5 - *fac* Log Retorno - Euro

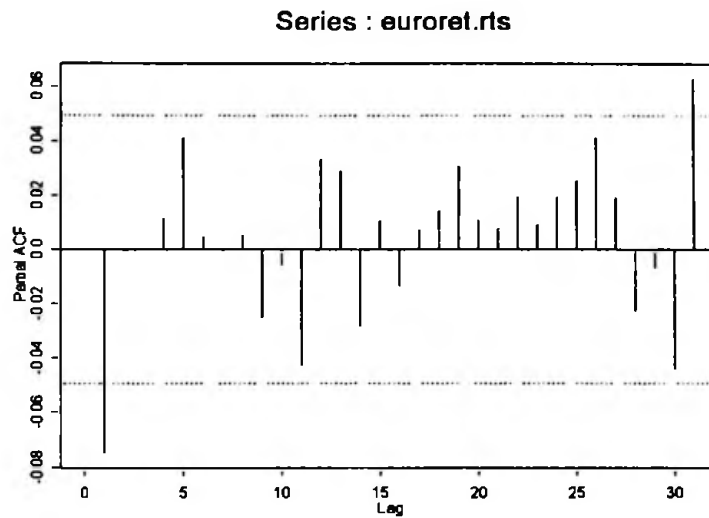


Figura 3.2.1.6 - *facp* Log Retorno - Euro

### ARMA (1,0)

```
> euroret.fit
Call: arima.mle(x = euroret.rts, model = list(order = c(1, 0, 0)
n.cond = 3)) Method: Maximum Likelihood Model : 1 0 0
```

```
Coefficients: AR : -0.07472
```

```
Variance-Covariance Matrix:
```

```
ar(1)
ar(1) 0.00063582
```

```
Optimizer has converged Convergence Type: relative function
convergence AIC: -11253.23406
```

```
> std.errs
```

```
ar(1)
0.025215
```



## ARMA (1,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

```
> summary(euroret.ga, method = "qmls") GARCH I
```

```
Call: garch(formula.mean = euroret.rts ~ + arma(1,0),
formula.var = ~ garch(1,1), cond.dist = "t")
```

```
Mean Equation: euroret.rts ~ + arma(1,0)
```

```
Conditional Variance Equation: ~ garch(1,1)
```

```
Conditional Distribution: t with estimated parameter 10.869 and standard error 2.4878
```

```
-----
Estimated Coefficients:
```

```
-----
              Value Std.Error  t value  Pr(>|t|)
      C  1.923e-004 1.619e-004   1.187 0.11762479
    AR(1) -7.822e-002 2.256e-002  -3.467 0.00027018
      A  4.148e-007 2.321e-007   1.788 0.03700844
    ARCH(1) 2.294e-002 5.506e-003   4.167 0.00001631
    GARCH(1) 9.677e-001 7.422e-003 130.380 0.00000000
-----
```

```
AIC(6) = -11298 BIC(6) = -11266
```

```
Normality Test:
```

```
-----
Jarque-Bera  P-value Shapiro-Wilk P-value
      18.27 0.0001079      0.9857 0.1062
```

```
Ljung-Box test for standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      8.424 0.7512      12
```

```
Ljung-Box test for squared standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      11.15 0.516      12
```

```
Lagrange multiplier test:
```

```
-----
Lag 1 Lag 2 Lag 3 Lag 4 Lag 5 Lag 6 Lag 7 Lag 8 Lag 9 Lag 10
-1.057 0.564 -0.6351 0.5277 1.223 0.1627 0.1434 -0.7961 -0.1704 -0.3418
Lag 11 Lag 12 C
0.1293 -0.09187 -2.637
```

```
TR^2 P-value F-stat P-value
11.25 0.5078 1.03 0.529
```

## ARMA (1,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t-Student* sem o parâmetro C

```
> summary(euroret.mod.ga, method = "qmlc") GARCH II
```

```
Call: garch(series = euroret.rts, model = euroret.mod, cond.dist = "t")
```

```
Mean Equation: euroret.rts ~ + arma(1,0)
```

```
Conditional Variance Equation: ~ garch(1,1)
```

```
Conditional Distribution: t with estimated parameter 10.122 and standard error 1.86
```

```
-----  
Estimated Coefficients:
```

```
-----  
                Value Std. Error  t value  Pr(>|t|)  
AR(1) -7.785e-002 2.257e-002   -3.449 0.00028829  
  A    4.402e-007 2.480e-007    1.775 0.03802567  
ARCH(1) 2.434e-002 5.778e-003    4.212 0.00001339  
GARCH(1) 9.658e-001 8.085e-003  119.459 0.00000000  
-----
```

```
AIC(5) = -11298 BIC(5) = -11272
```

```
Normality Test:
```

```
-----  
Jarque-Bera    P-value Shapiro-Wilk P-value  
    18.43 0.00009955      0.9857 0.1067
```

```
Ljung-Box test for standardized residuals:
```

```
-----  
Statistic P-value Chi^2-d.f.  
    8.39  0.754      12
```

```
Ljung-Box test for squared standardized residuals:
```

```
-----  
Statistic P-value Chi^2-d.f.  
   12.18 0.4311      12
```

```
Lagrange multiplier test:
```

```
-----  
Lag 1 Lag 2 Lag 3 Lag 4 Lag 5 Lag 6 Lag 7 Lag 8 Lag 9 Lag 10  
-1.198 0.4666 -0.7475 0.5333 1.137 0.09873 0.08827 -0.8488 -0.2165 -0.3852
```

```
Lag 11 Lag 12 C  
0.1376 -0.09081 -2.789
```

```
TR^2 P-value F-stat P-value  
12.31 0.421 1.128 0.4468
```

## ARMA (1,0) + GARCH (1,1) - distribuição *Normal* sem o parâmetro C

```
> summary(euroret.mod.ga, method = "qmls") GARCH III
```

```
Call: garch(series = euroret.rts, model = euroret.mod, cond.dist = "gaussian")
```

```
Mean Equation: euroret.rts ~ + arma(1,0)
```

```
Conditional Variance Equation: ~ garch(1,1)
```

```
Conditional Distribution: gaussian
```

```
-----
```

Estimated Coefficients:

```
-----
```

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
AR(1)	-7.007e-002	2.344e-002	-2.989	0.001421
A	4.826e-007	2.767e-007	1.744	0.040655
ARCH(1)	2.247e-002	6.144e-003	3.657	0.000132
GARCH(1)	9.666e-001	9.172e-003	105.390	0.000000

```
-----
```

AIC(4) = -11285 BIC(4) = -11263

Normality Test:

```
-----
```

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
17.64	0.0001476	0.9855	0.08763

Ljung-Box test for standardized residuals:

```
-----
```

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
8.233	0.7667	12

Ljung-Box test for squared standardized residuals:

```
-----
```

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
11.78	0.4639	12

Lagrange multiplier test:

```
-----
```

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-1.133	0.5636	-0.6671	0.6425	1.184	0.1918	0.1461	-0.784	-0.1133	-0.3397

Lag 11	Lag 12	C
0.1578	-0.09277	-2.715

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
11.87	0.4558	1.088	0.4793

Vejamos, agora, alguns modelos assimétricos. Ajustamos modelos EGARCH, TGARCH e PGARCH com distribuição Normal e *t-Student*.

### EGARCH: ARMA (1,0) + EGARCH (1,1) - distribuição Normal

```
> summary(euroret.ega, method = "qmls") EGARCH
```

```
Call: garch(formula.mean = euroret.rts ~ + arma(1,0),
formula.var = ~ egarch(1,1), leverage = T, cond.dist = "gaussian")
```

```
Mean Equation: euroret.rts ~ + arma(1,0) Conditional Variance Equation: ~ egarch(1,1)
```

```
Conditional Distribution: gaussian (PROBLEMA DE CONVERGENCIA COM t)
```

```
-----
Estimated Coefficients:
```

```
-----
              Value Std.Error    t value Pr(>|t|)
      C  1.015e-004 0.0001953  5.198e-001 0.301634
    AR(1) -7.495e-002 0.0249060 -3.009e+000 0.001331
      A -2.803e-001 0.1151843 -2.434e+000 0.007528
    ARCH(1) 1.000e-001 0.0359357  2.783e+000 0.002728
    GARCH(1) 9.800e-001 0.0098104  9.989e+001 0.000000
    LEV(1) -2.733e-008 0.1654337 -1.652e-007 0.500000****
-----
```

```
AIC(6) = -11268 BIC(6) = -11236
```

```
Normality Test:
```

```
-----
Jarque-Bera    P-value Shapiro-Wilk P-value
      21.59 0.00002049      0.985 0.04674
-----
```

```
Ljung-Box test for standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      8.49 0.7457      12
-----
```

```
Ljung-Box test for squared standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      16.44 0.1718      12
-----
```

```
Lagrange multiplier test:
```

```
-----
Lag 1 Lag 2 Lag 3 Lag 4 Lag 5 Lag 6 Lag 7 Lag 8 Lag 9 Lag 10
-1.765 -0.354 -1.245 -0.1262 0.7135 -0.5948 -0.4611 -1.174 -0.6906 -0.5933
Lag 11 Lag 12 C
-0.2419 -0.05719 -3.388
-----
```

```
TR^2 P-value F-stat P-value
17.79 0.1222 1.636 0.1793
```

## TGARCH: ARMA (1,0) + TGARCH (1,1) - distribuição *t-Student*

```
> summary(euroret.tga, method = "qmls") TGARCH
```

```
Call: garch(formula.mean = euroret.rts ~ + arma(1,0),
formula.var = ~ tgarch(1,1), cond.dist = "t")
```

```
Mean Equation: euroret.rts ~ + arma(1,0) Conditional Variance Equation: ~ tgarch(1,1)
```

```
Conditional Distribution: t with estimated parameter 10.802 and standard error 2.5498
```

```
-----
Estimated Coefficients:
```

```
-----
              Value Std.Error t value Pr(>|t|)
      C 1.955e-004 1.617e-004  1.209 0.1134286
    AR(1) -7.856e-002 2.271e-002 -3.459 0.0002784
      A  3.766e-007 2.810e-007  1.340 0.0901685
    ARCH(1) 2.448e-002 7.296e-003  3.355 0.0004061
    GARCH(1) 9.689e-001 9.843e-003 98.440 0.0000000
    GAMMA(1) -3.706e-003 1.448e-002 -0.256 0.3990031****
-----
```

```
AIC(7) = -11296 BIC(7) = -11259
```

```
Normality Test:
```

```
-----
Jarque-Bera  P-value Shapiro-Wilk P-value
      18.09 0.0001178      0.9858 0.1222
```

```
Ljung-Box test for standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      8.335 0.7584      12
```

```
Ljung-Box test for squared standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      11.36 0.4984      12
```

```
Lagrange multiplier test:
```

```
-----
Lag 1 Lag 2 Lag 3 Lag 4 Lag 5 Lag 6 Lag 7 Lag 8 Lag 9 Lag 10
-1.045 0.527 -0.6579 0.5154 1.21 0.1793 0.1695 -0.8188 -0.1985 -0.3961
Lag 11 Lag 12 C
0.165 -0.09241 -2.674
```

```
TR^2 P-value F-stat P-value
11.46 0.4896 1.05 0.5115
```

## PGARCH: ARMA (1,0) + PGARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

```
> summary(euroret.pga, method = "qmls") PGARCH
```

```
Call: garch(formula.mean = euroret.rts ~ + arma(1,0),
formula.var = ~ garch(1,1), leverage = T, cond.dist = "t")
```

```
Mean Equation: euroret.rts ~ + arma(1,0) Conditional Variance Equation: ~ garch(1,1)
```

```
Conditional Distribution: t with estimated parameter 10.787 and standard error 2.5827
```

```
-----
Estimated Coefficients:
```

```
-----
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
      C  1.945e-004 1.617e-004  1.2024 0.1146882
    AR(1) -7.845e-002 2.270e-002 -3.4559 0.0002816
      A  3.809e-007 2.883e-007  1.3213 0.0933024
    ARCH(1) 2.281e-002 6.127e-003  3.7228 0.0001020
    GARCH(1) 9.686e-001 9.890e-003 97.9408 0.0000000
    LEV(1) 4.939e-002 1.671e-001  0.2956 0.3837877****
-----
```

```
AIC(7) = -11296 BIC(7) = -11259
```

```
Normality Test:
```

```
-----
Jarque-Bera P-value Shapiro-Wilk P-value
      18.1 0.0001172      0.9858 0.1233
-----
```

```
Ljung-Box test for standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      8.303 0.761      12
-----
```

```
Ljung-Box test for squared standardized residuals:
```

```
-----
Statistic P-value Chi^2-d.f.
      11.47 0.4894      12
-----
```

```
Lagrange multiplier test:
```

```
-----
Lag 1 Lag 2 Lag 3 Lag 4 Lag 5 Lag 6 Lag 7 Lag 8 Lag 9 Lag 10
-1.057 0.5075 -0.6725 0.503 1.198 0.1717 0.1629 -0.8318 -0.2126 -0.4137
Lag 11 Lag 12 C
0.1658 -0.09245 -2.693
-----
```

```
TR^2 P-value F-stat P-value
11.58 0.4801 1.06 0.5024
```

O quadro a seguir resume os resultados calculados:

Modelo	AIC	BIC
ARMA(1,0) + GARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-11298	-11266
ARMA(1,0) + GARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i> sem o parâmetro C	-11298	-11272
ARMA(1,0) + GARCH (1,1) distribuição Normal sem parâmetro C	-11285	-11263

Observamos também que as estatísticas dos modelos com alavancagem assimétrica (E-GARCH, T-GARCH e P-GARCH) não foram significativas. Além disso, AIC e BIC mostram que os modelos GARCH simples têm melhor ajuste.

O Modelo ARMA (1,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t-Student* sem o parâmetro C - foi o que melhor ajustou a série de retornos do Euro:

$$Y_t = 0,07785Y_{t-1} + X_t,$$

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 10,122,$$

$$h_t = 0,0000004402 + 0,02434X_{t-1}^2 + 0,9658h_{t-1}$$

A seguir apresentamos a volatilidade por ele gerada bem como o gráfico *qq* dos seus resíduos padronizados que apresentam bom ajuste à distribuição *t-Student*:

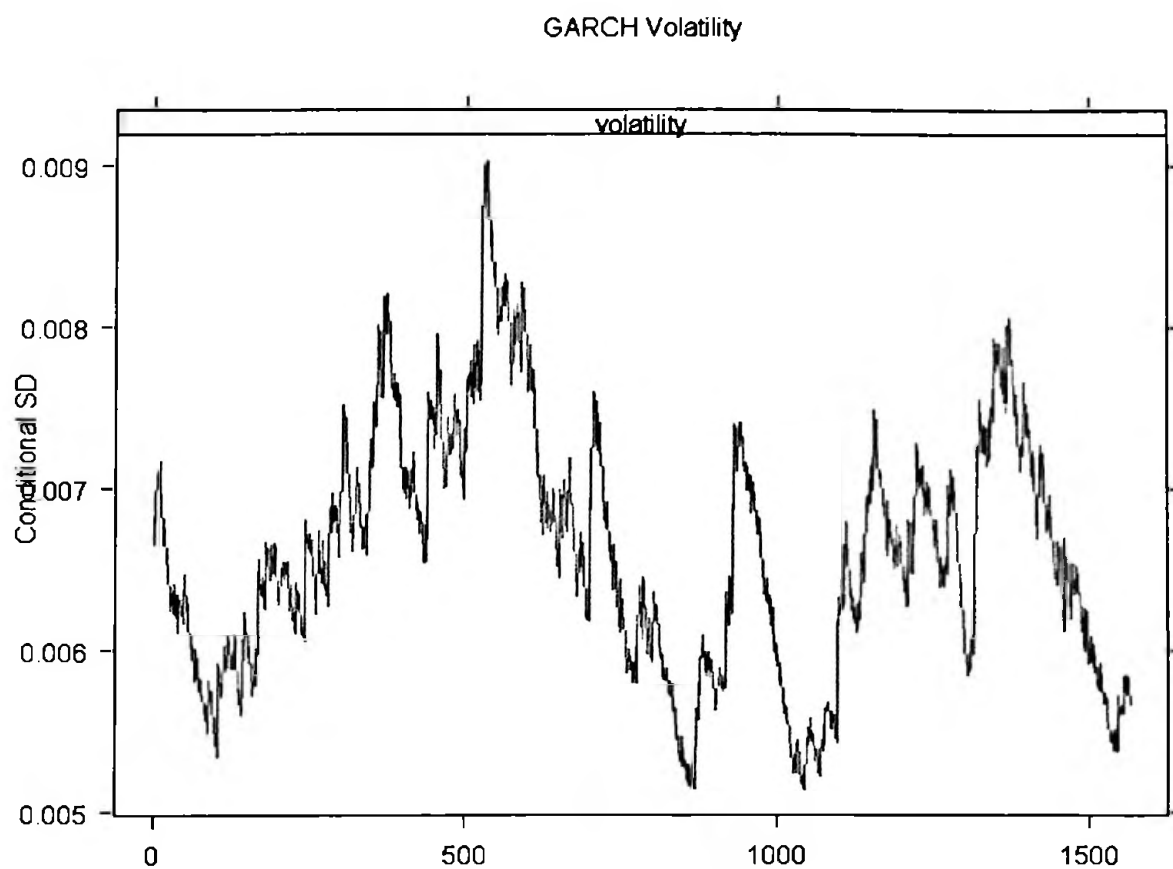


Figura 3.2.1.9 – Volatilidade Estimada Log Retorno– Euro



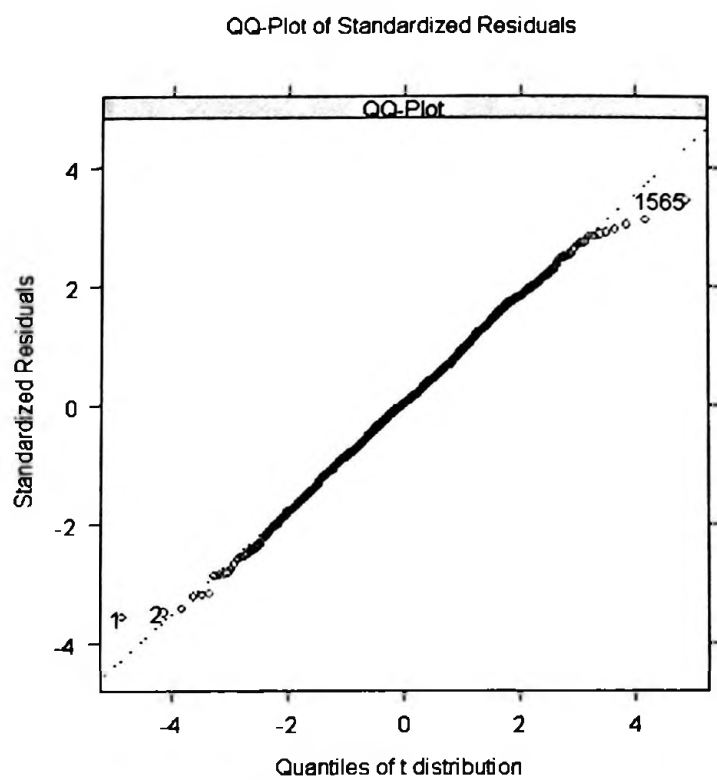


Figura 3.2.1.10 – Ajuste dos Resíduos Log Retorno – Euro

### 3.2.2 Ien

A seguir apresentamos a série do Ien, nas figuras 3.2.2.1 e 3.2.2.2.

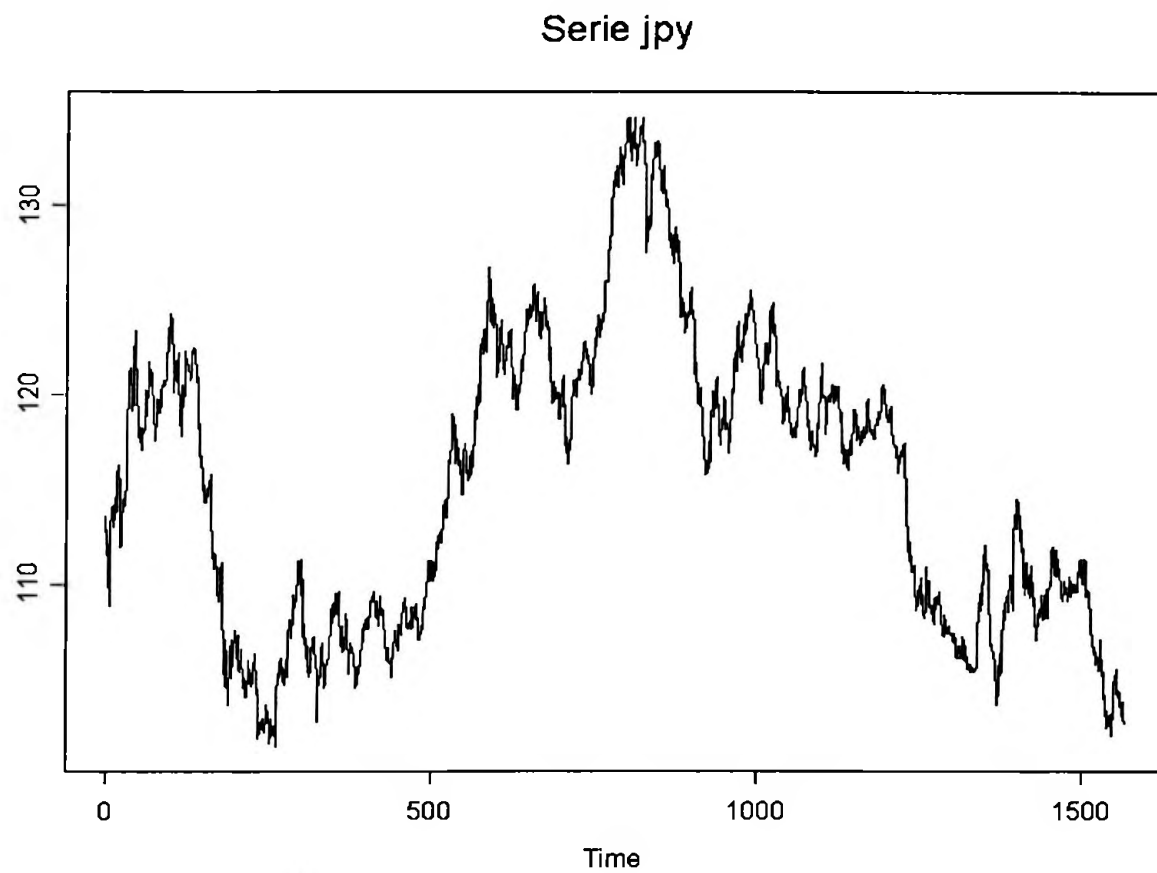


Figura 3.2.2.1 – Série Ien

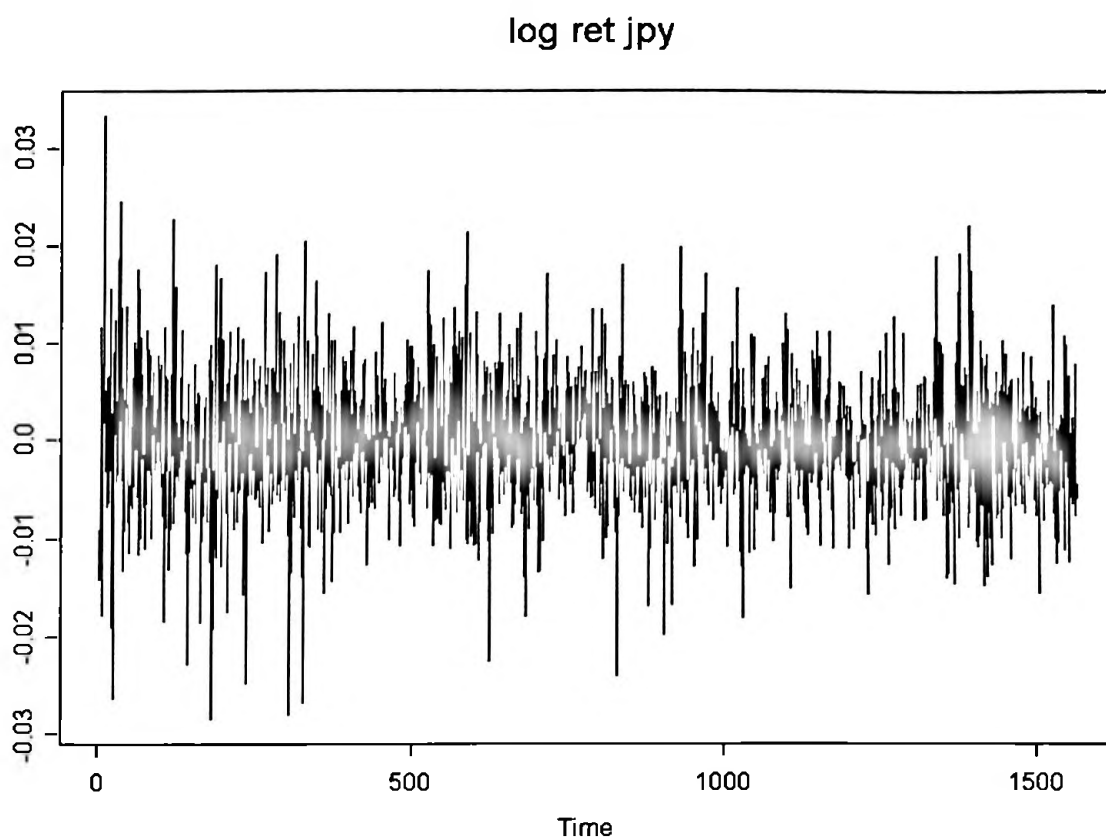


Figura 3.2.2.2 – Série Log Retorno - Ien

A série de retornos apresentou as seguintes estatísticas:

**Sample Quantiles:**

min	1Q	median	3Q	max
-0.02846	-0.003914	-0.00008311	0.003762	0.03333

**Sample Moments:**

mean	std	skewness	kurtosis
-0.00006489	0.006453	-0.04223	4.763

**Number of Observations:** 1565

Ao contrário do Euro, esta série de retornos já apresenta uma curtose significativa acima de três. Também os histogramas e gráficos *qq* sugerem não se tratar de uma série de retornos normal, como podemos observar pelos gráficos das figuras 3.2.2.3 e 3.2.2.4:

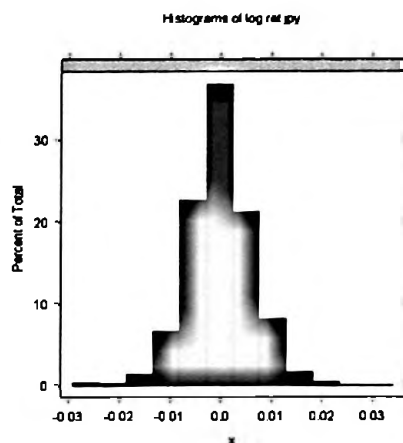


Figura 3.2.2.3 - Histograma Log Retorno – Ien

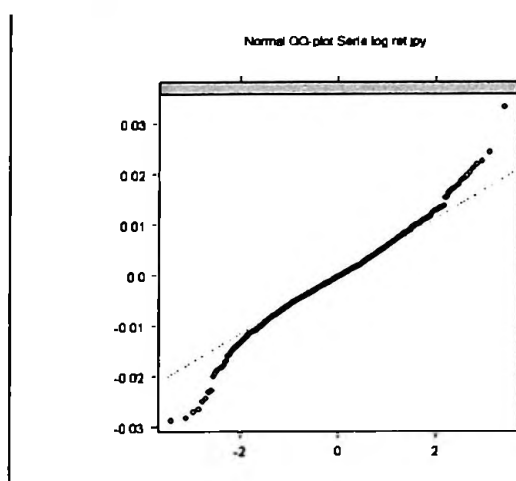


Figura 3.2.2.4 - *qq Plot* Normal Log Retorno - Ien

Já os gráficos *qq* utilizando uma *t-Student* pareceram melhor ajustar a série, figuras 3.2.2.5 e 3.2.2.6

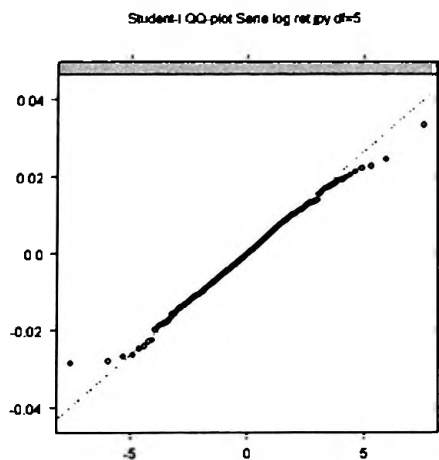


Figura 3.2.2.5 - *qq Plot t-Student 5 Log Retorno - Ien*

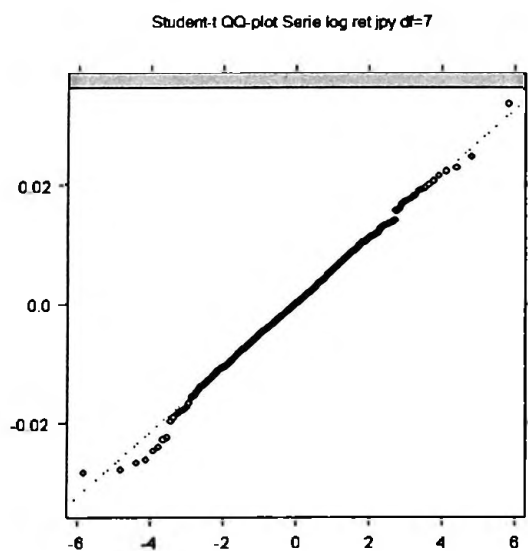


Figura 3.2.2.6 - *qq Plot t-Student 7 Log Retorno - Ien*

As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial (figuras 3.2.2.7 e 3.2.2.8) sugerem utilizarmos inicialmente um modelo ARMA (1,0) ou ARMA (!5,0).

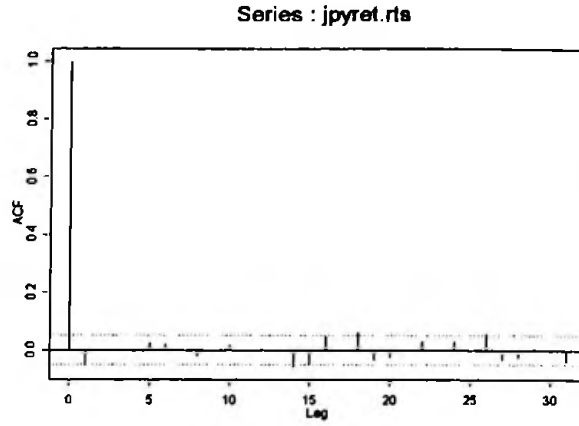


Figura 3.2.2.7 - *fac* Log Retorno - Ien

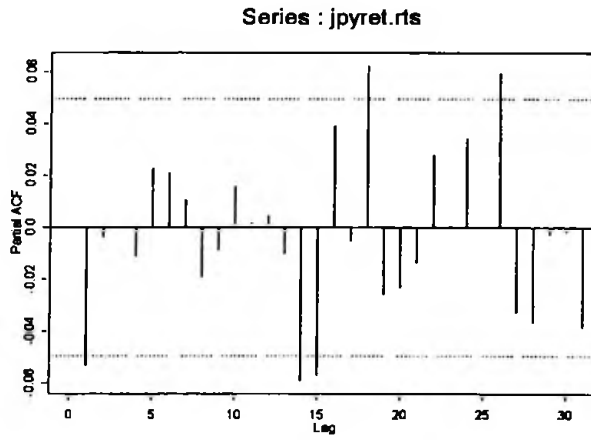


Figura 3.2.2.8 - *facp* Log Retorno - Ien

**ARMA (1,0)**

```
Call: arima.mle(x = jpyret.rts, model = list(order = c(1, 0, 0),
n.cond = 3)) Method: Maximum Likelihood Model : 1 0 0
```

```
Coefficients: AR : -0.05307
```

```
Variance-Covariance Matrix:
```

```
          ar(1)
ar(1) 0.0006375854
```

```
Optimizer has converged Convergence Type: relative function
convergence AIC: -11343.87556
```

```
> std.errs
      ar(1)
0.02525045
```

A seguir, analisamos a *fac* dos quadrados dos retornos para verificar a existência de heteroscedasticidade:

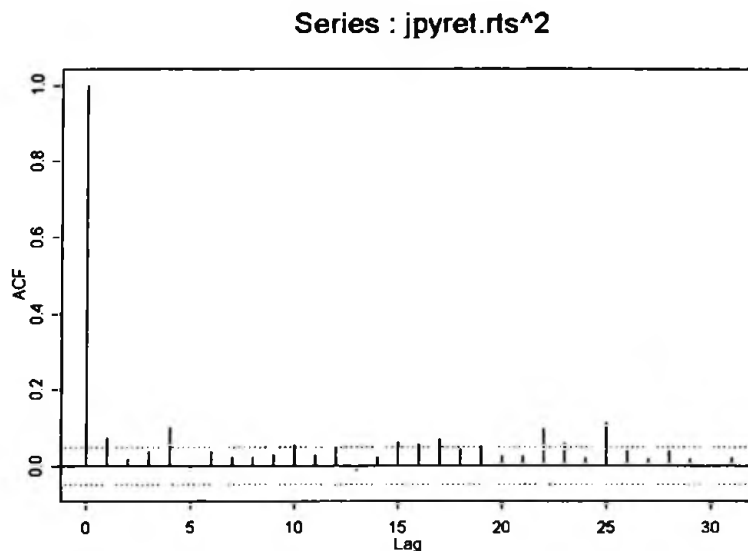


Figura 3.2.2.9 – *fac* dos quadrados do Log Retorno - Ien

Notamos valores significativos na *fac*, o que foi confirmado pelo teste LM a seguir:

**Test for ARCH Effects: LM Test**

**Null Hypothesis: no ARCH effects**

**Test Statistics:**

**Test Stat 87.846**

**p.value 0.000**

**Dist. under Null: chi-square with 31 degrees of freedom**

**Total Observ.: 1565**

Como o p-valor é praticamente zero, temos que modelos ARCH-GARCH poderiam melhor ajustar a volatilidade do Ien. Novamente apresentamos apenas aqueles modelos que apresentaram significância estatística, inclusive as variações do GARCH.



## ARMA (15,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t-Student* sem o parâmetro *C*

Mean Equation: `jpyret.rts ~ + arma(19,0)`

Conditional Variance Equation: `~ garch(1,1)`

Conditional Distribution: *t* with estimated parameter 6.7914 and standard error 1.017

---

### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
AR(1)	-6.010e-002	2.393e-002	-2.511	0.00606373
AR(14)	-5.334e-002	2.393e-002	-2.229	0.01299328
AR(15)	-4.606e-002	2.421e-002	-1.903	0.02861873
A	6.593e-007	3.165e-007	2.083	0.01869727
ARCH(1)	3.290e-002	8.181e-003	4.021	0.00003034
GARCH(1)	9.507e-001	1.175e-002	80.880	0.00000000

---

AIC(7) = -11468 BIC(7) = -11430

### Normality Test:

---

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
139.9	0	0.9817	0.00003759

### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
5.211	0.9505	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
6.317	0.8993	12

### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.5754	-0.7238	1.067	-1.905	-1.169	-0.2924	-0.6181	0.1582	-0.4061	-0.4676
Lag 11	Lag 12	C							
0.5728	-0.3825	-0.4409							

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
8.14	0.7741	0.7439	0.8063

$$Y_t = -0,00601Y_{t-1} - 0,05334Y_{t-14} - 0,04606Y_{t-15} + X_t,$$

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 6,9003,$$

$$h_t = 0,0000006593 + 0,03290X_{t-1}^2 + 0,9507h_{t-1}$$

A seguir apresentamos as volatilidades geradas pelo modelo bem como os gráficos *qq* dos seus resíduos padronizados que apresentam bom ajuste à distribuição *t-Student*:

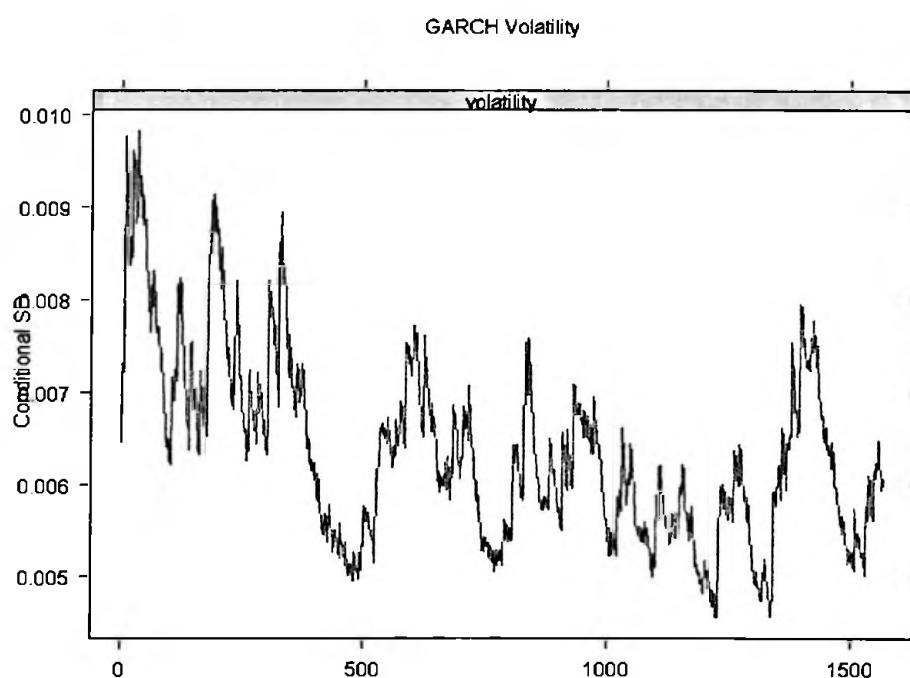


Figura 3.2.2.11 – Volatilidade Estimada Log Retorno GARCH I - Ien

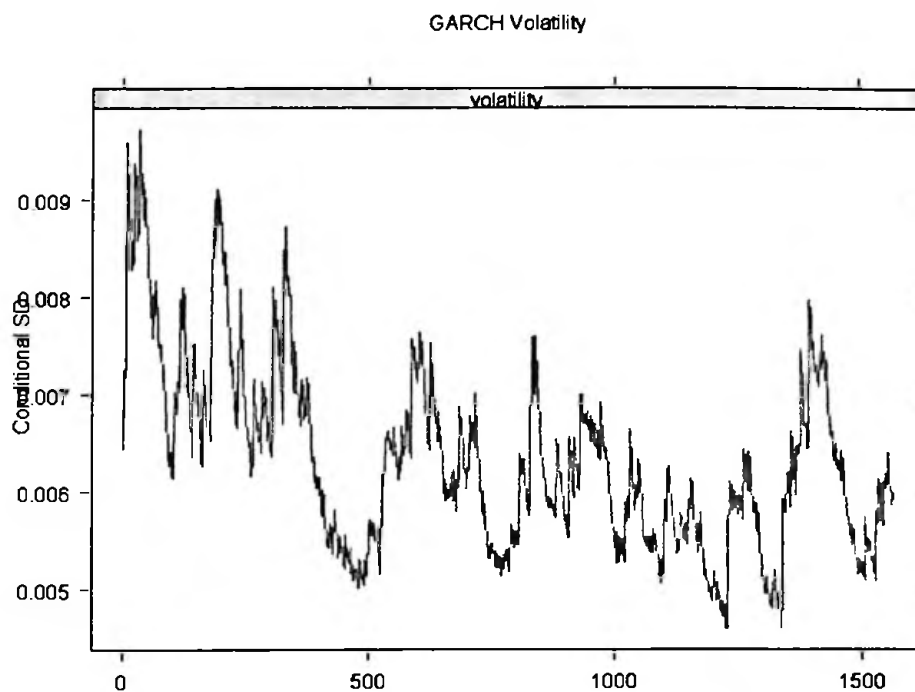


Figura 3.2.2.12 – Volatilidade Estimada Log Retorno GARCH II - Ien

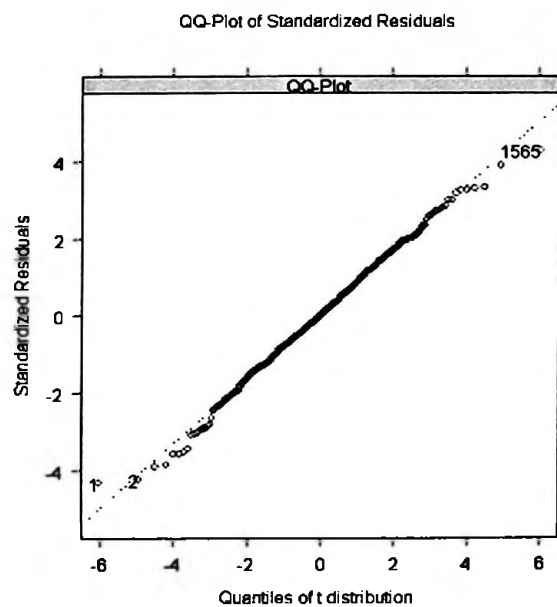


Figura 3.2.2.13 – Ajuste dos Resíduos Log Retorno GARCH I – Euro

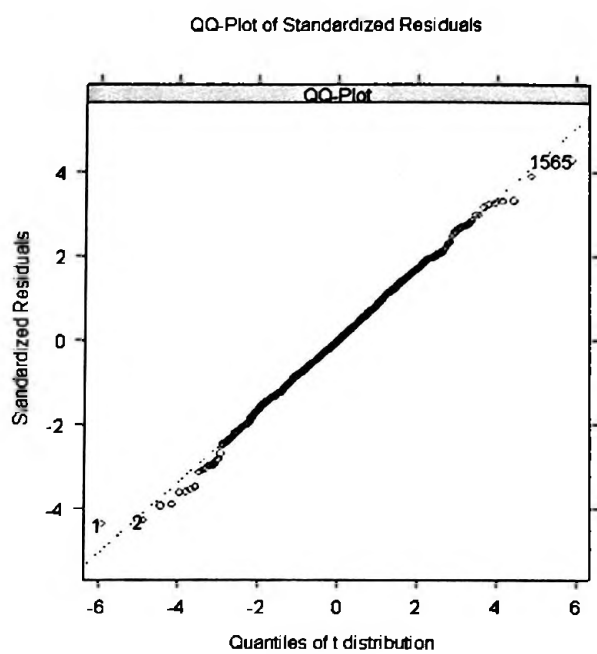


Figura 3.2.2.14 – Ajuste dos Resíduos Log Retorno GARCH II – Euro

### 3.3 Países Emergentes

Até este ponto analisamos a volatilidade de duas moedas cujo comportamento esperado poderia ser explicado por modelos relativamente simples como de fato aconteceu. Nesta seção analisamos a volatilidade das quatro moedas emergentes para verificar se de fato estas necessitaram de modelos mais complexos para ajuste da volatilidade e, verificamos que para o Won isto não foi verdade, mas para o Zar, o Peso e o Real, sim.

#### 3.3.1 Won

A série e os retornos estão nas figuras 3.3.1.1 e 3.3.1.2.

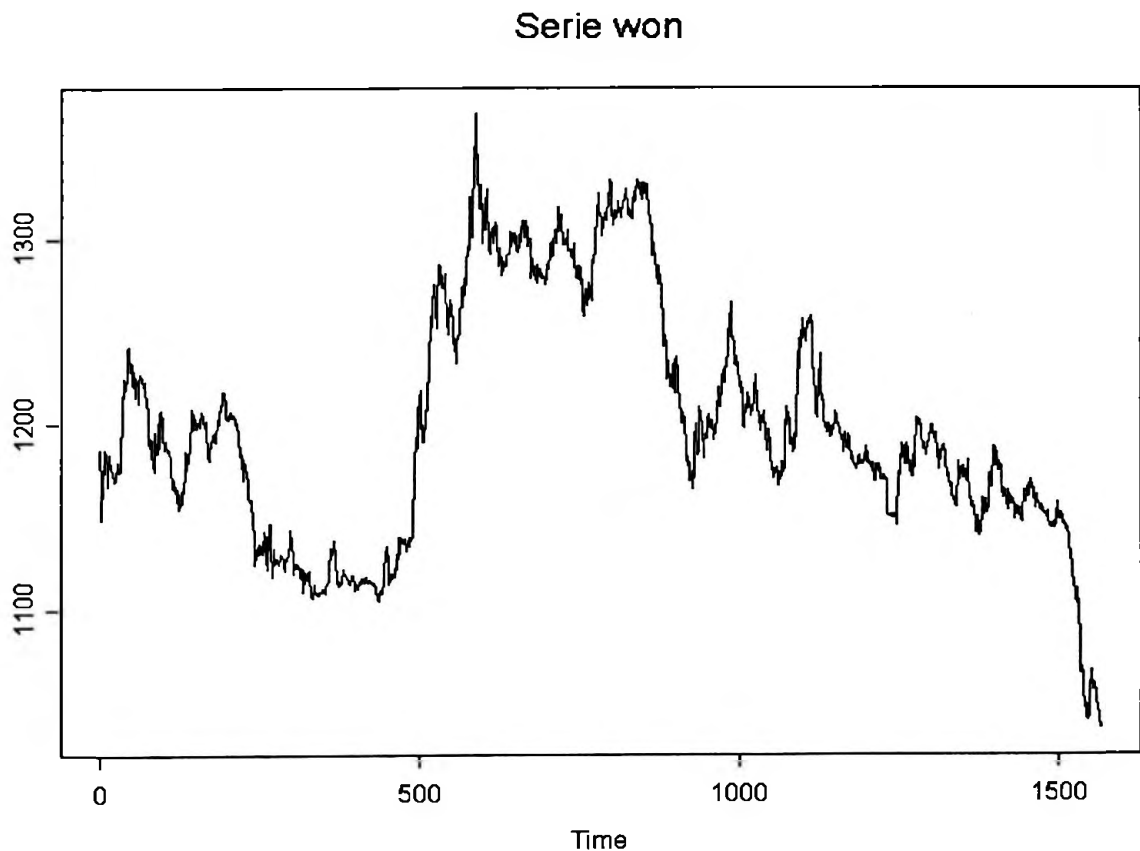


Figura 3.3.1.1 – Série Won

Analisando os retornos temos:

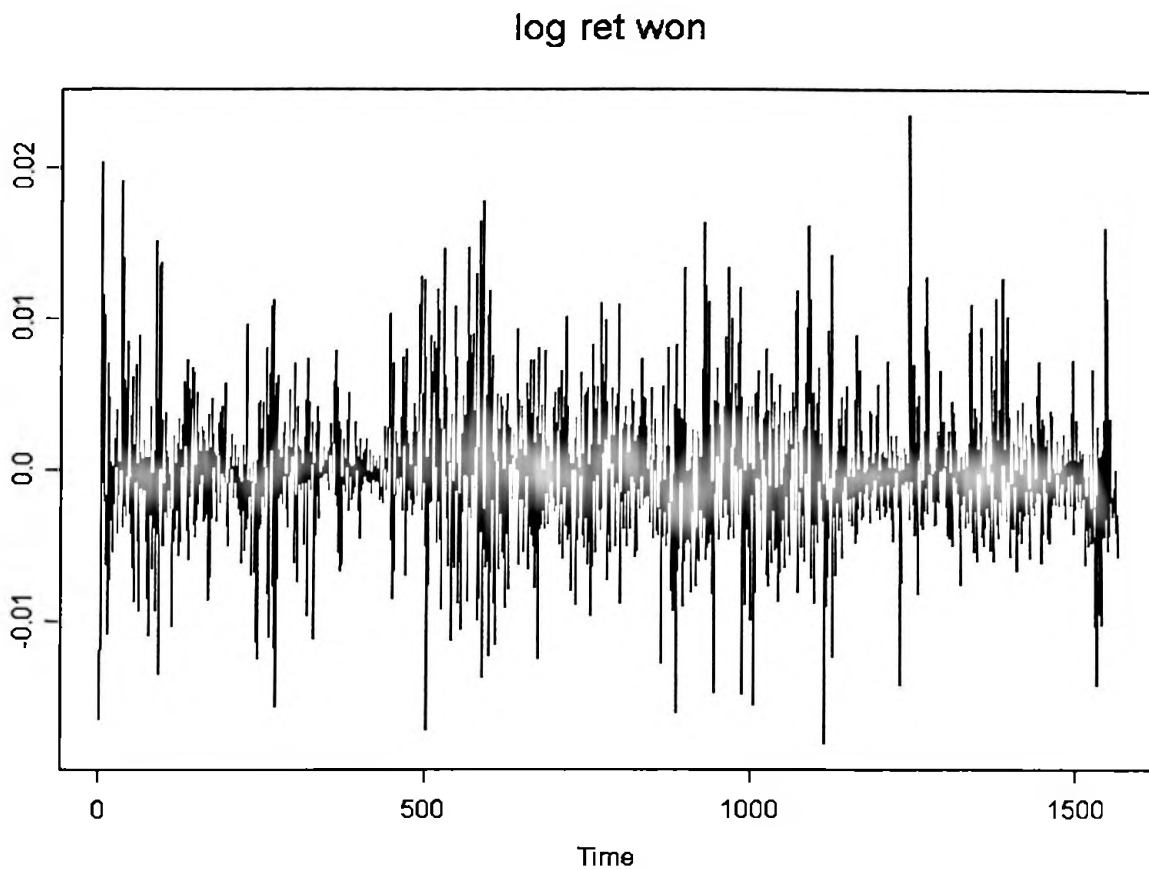


Figura 3.3.1.2 – Série Log Retorno - Won

A série de retornos apresentou as seguintes estatísticas:

**Sample Quantiles:**

min	1Q	median	3Q	max
-0.01805	-0.002477	-0.0002603	0.001921	0.02348

**Sample Moments:**

mean	std	skewness	kurtosis
-0.0000872	0.004521	0.3873	5.456

**Number of Observations:** 1563

e também parecem sugerir uma outra distribuição que não a Normal, como mostram o histograma e o *qq-plot* nas figuras 3.3.1.3 e 3.3.1.4:

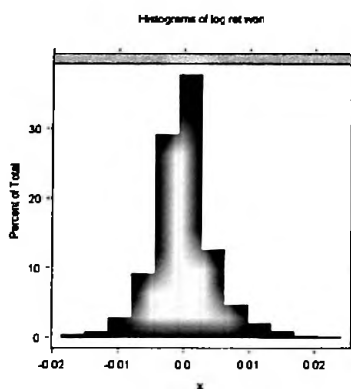


Figura 3.3.1.3 - Histograma Log Retorno - Won

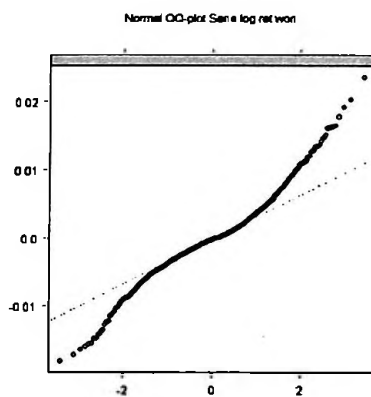


Figura 3.3.1.4 - *qq Plot* Normal Log Retorno - Euro

Test for Normality: Jarque-Bera

Null Hypothesis: data is normally distributed

Test Statistics: Test Stat 431.9 p.value 0.0

Dist. under Null: chi-square with 2 degrees of freedom Total Observ.: 1563

Já uma distribuição *t-Student* parece ser uma melhor escolha, como ilustram as figuras 3.3.1.5 e 3.3.1.6:

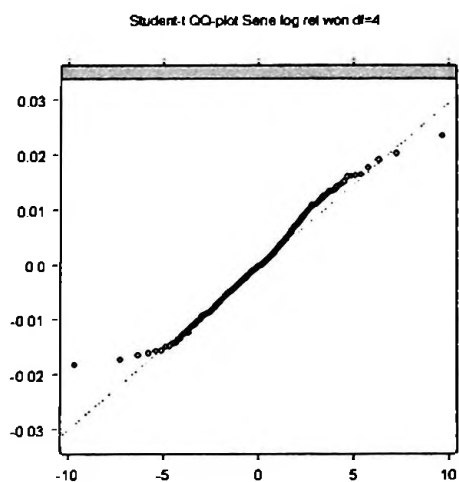


Figura 3.3.1.5 - *qq Plot t-Student 4 Log Retorno - Won*

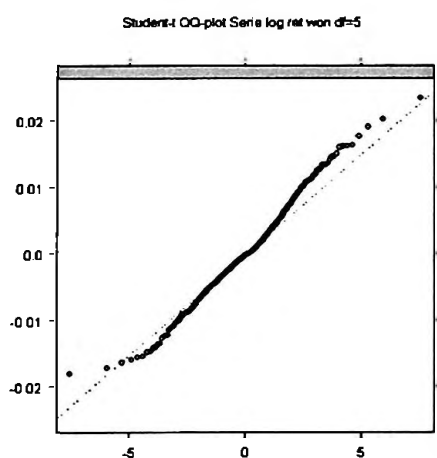
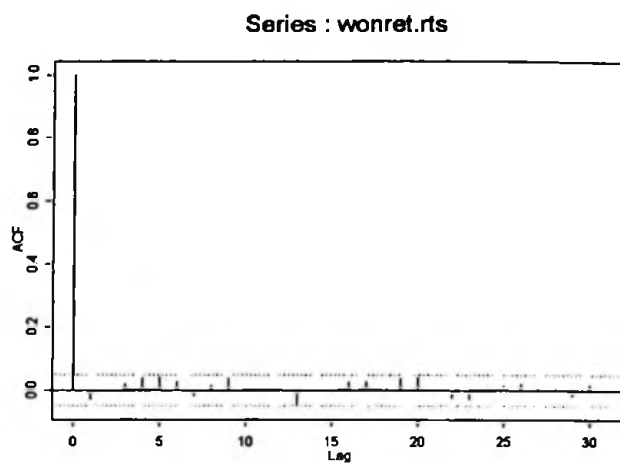
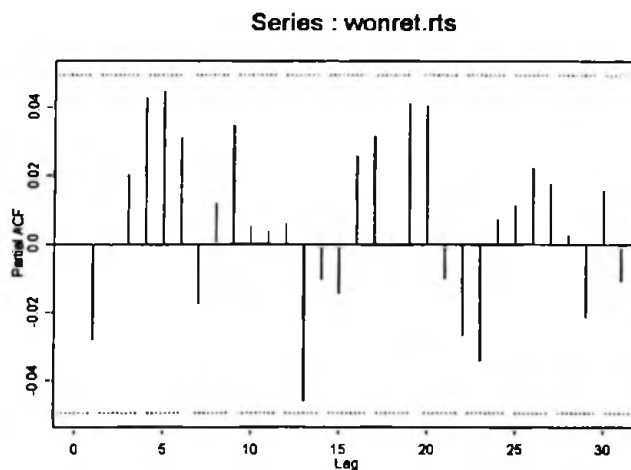


Figura 3.3.1.6 - *qq Plot t-Student 5 Log Retorno - Won*

Ao contrário das séries do Euro e Ien, as *fac* e *facp* não sugerem a necessidade de ajustes de modelos ARMA: a série é não correlacionada:



Figura 3.3.1.7 - *fac* Log Retorno - WonFigura 3.3.1.8 - *facp* Log Retorno - Won

Já a *fac* dos quadrados dos retornos apresenta comportamento exponencial condizente com a utilização de modelos GARCH, fato comprovado pelo teste de efeitos ARCH:

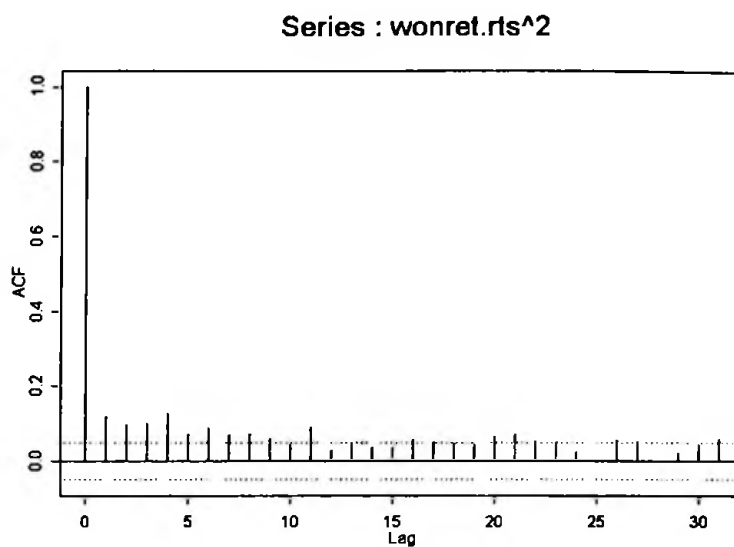


Figura 3.3.1.9 – *fac* dos quadrados do Log Retorno - Won

**Test for ARCH Effects: LM Test**

**Null Hypothesis: no ARCH effects**

**Test Statistics:**

**Test Stat 97.071**  
**p.value 0.000**

**Dist. under Null: chi-square with 31 degrees of freedom**  
**Total Observ.: 1563**

A seguir apresentamos os dois modelos simples GARCH que melhor ajustaram a série de retornos do Won:

### ARMA (0,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation:  $wonret.rts \sim + arna(0,0)$

Conditional Variance Equation:  $\sim garch(1,1)$

Conditional Distribution: *t* with estimated parameter 3.7284 and standard error 0.336

-----  
Estimated Coefficients:

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
C	-2.616e-004	7.824e-005	-3.343	0.0004243
A	3.894e-007	2.972e-007	1.310	0.0951742
ARCH(1)	1.304e-001	4.123e-002	3.163	0.0007949
GARCH(1)	8.753e-001	4.255e-002	20.571	0.0000000

-----  
AIC(5) = -12781 BIC(5) = -12754

Normality Test:

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
1710	0	0.9666	0

Ljung-Box test for standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
14.46	0.2723	12

Ljung-Box test for squared standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
8.363	0.7562	12

Lagrange multiplier test:

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.1882	-1.206	-0.7365	-0.9552	-0.6295	-0.6654	-1.196	-0.9048	-1.221	-0.1654

Lag 11	Lag 12	C
-1.771	-0.1706	-0.6329

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
9.763	0.6367	0.8932	0.6586

## ARMA (0,0) + GARCH (1,1) - distribuição Normal

Mean Equation:  $wonret.rts \sim + arna(0,0)$   
 Conditional Variance Equation:  $\sim garch(1,1)$

Conditional Distribution: gaussian

---

### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
C	-6.619e-005	1.032e-004	-0.6412	2.607e-001
A	5.294e-007	3.189e-007	1.6604	4.852e-002
ARCH(1)	6.713e-002	1.518e-002	4.4228	5.209e-006
GARCH(1)	9.077e-001	2.412e-002	37.6321	0.000e+000

---

AIC(4) = -12598 BIC(4) = -12577

### Normality Test:

---

Jarque-Bera P-value	Shapiro-Wilk P-value
810.5	0
	0.97
	0

### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
14.42	0.2748	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
5.568	0.9363	12

### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
0.44	-0.797	0.3147	-0.3968	0.025	-0.1762	-0.7263	-0.4405	-0.9198	0.4619

Lag 11	Lag 12	C
-1.654	-0.2207	0.3398

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
5.835	0.9242	0.5324	0.962

e como aconteceu com o Euro e o Ien, os testes de alavancagem e assimetria também não foram significativos para EGARCH, PGARCH e TGARCH:

O quadro a seguir resume os resultados calculados:

Modelo	AIC	BIC
ARMA(0,0) + GARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-12781	-12754
ARMA(0,0) + GARCH (1,1) distribuição Normal	-12598	-12577

O modelo ARMA (0,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t-Student* - foi o que melhor ajustou a série e temos a seguinte equação:

$$Y_t = -0,0002616 + X_t,$$

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 3,7284$$

$$h_t = 0,0000003894 + 0,1304 X_{t-1}^2 + 0,8753 h_{t-1}$$

que gerou a seguinte volatilidade:

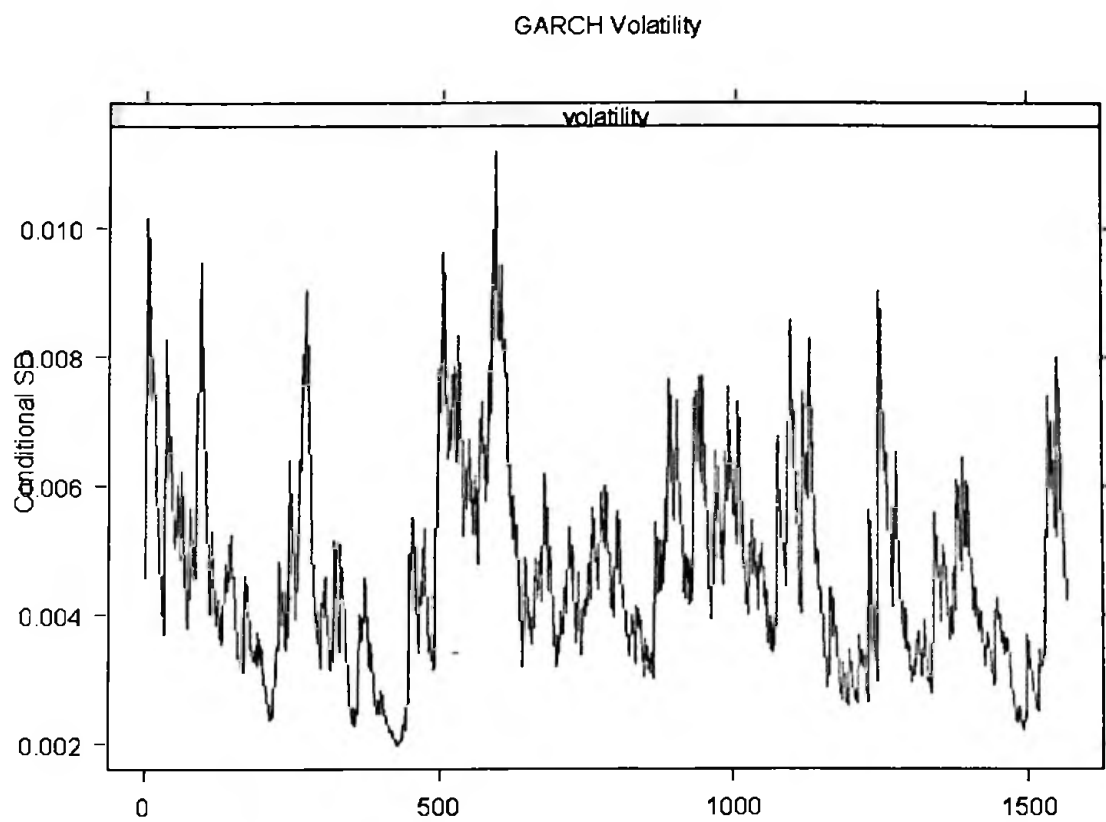


Figura 3.3.1.10 – Volatilidade Estimada Log Retorno – Won

e com bons ajustes dos resíduos padronizados:

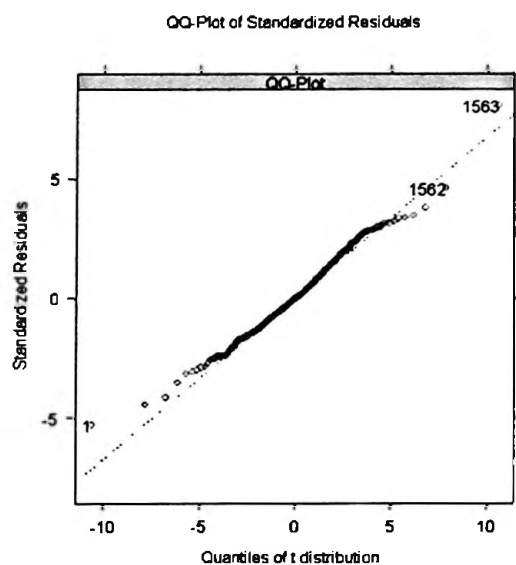


Figura 3.3.1.11 – Ajuste dos Resíduos Log Retorno – Won

### 3.3.2 Zar

A série e os retornos estão nas figuras 3.3.1.1 e 3.3.1.2.

Serie zar

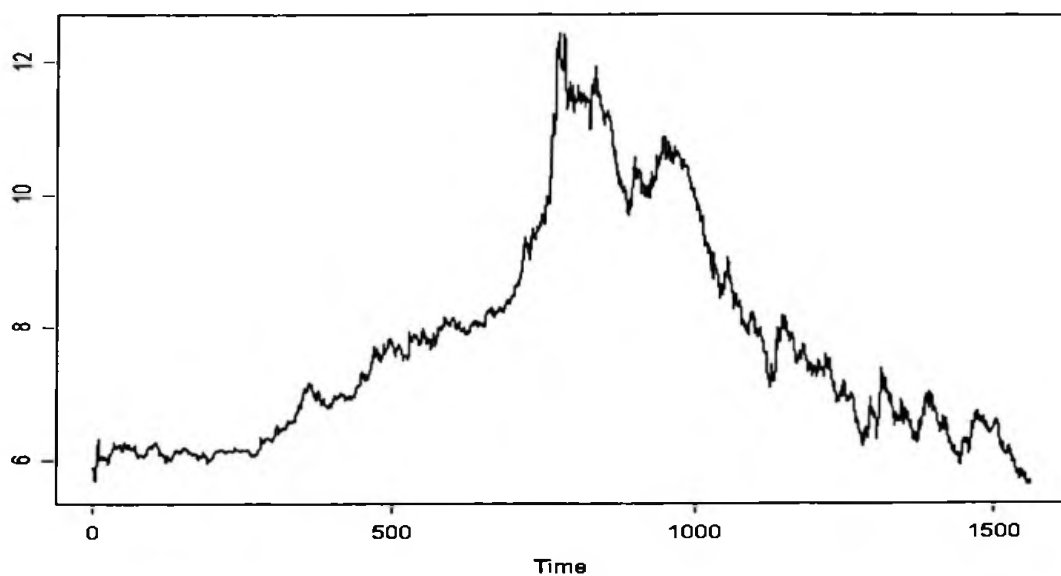


Figura 3.3.2.1 – Série Zar

## log ret zar

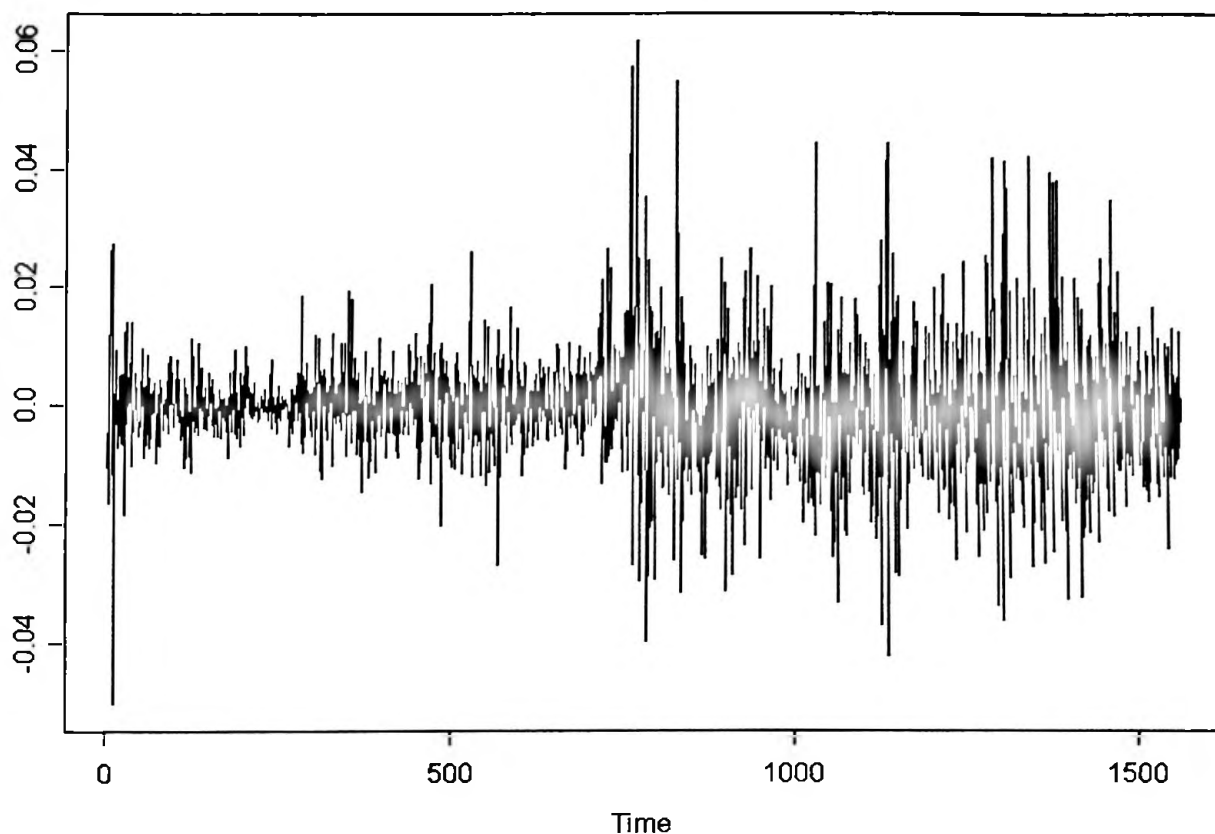


Figura 3.3.2.2 – Série Log Retorno - Zar

As estatísticas dos retornos são dadas a seguir:

## Sample Quantiles:

min	1Q	median	3Q	max
-0.05025	-0.005025	0	0.004766	0.06167

## Sample Moments:

mean	std	skewness	kurtosis
-0.00002498	0.01039	0.4361	7.152

Number of Observations: 1561

e mais uma vez, como na série de retornos do Won, parece sugerir outra distribuição que não a Normal:



Test for Normality: Jarque-Bera

Null Hypothesis: data is normally distributed

Test Statistics: Test Stat 1170.8 p.value 0.0

Dist. under Null: chi-square with 2 degrees of freedom Total Observ.: 1561

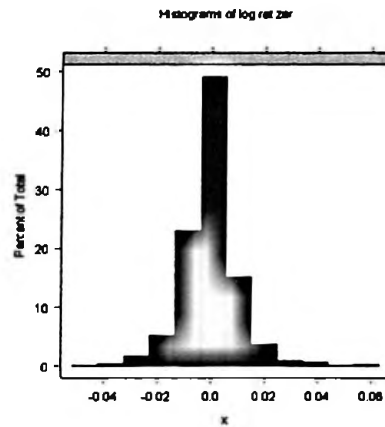


Figura 3.3.2.3 - Histograma Log Retorno - Zar

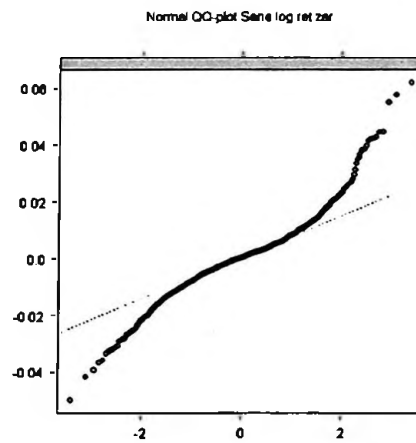


Figura 3.3.2.4 - qq Plot Normal Log Retorno - Zar

Novamente temos a distribuição *t-Student* como melhor alternativa, conforme as figuras 3.3.2.5 e 3.3.2.6:

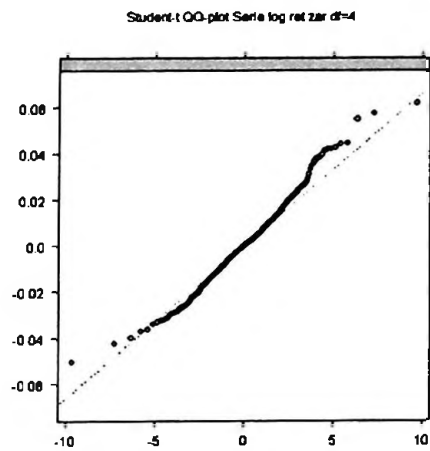


Figura 3.3.2.5 - qq Plot *t-Student* 4 Log Retorno - Zar

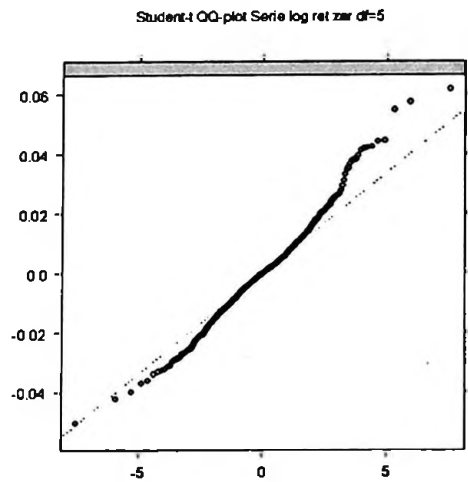


Figura 3.3.2.6 - qq Plot *t-Student* 5 Log Retorno - Zar

A *facp* sugere um modelo ARMA (19,0) e a *fac* dos quadrados dos retornos sugere presença de heteroscedasticidade. Este fato (heteroscedasticidade) é comprovado pelo teste LM, que rejeita a hipótese de ausência de efeitos ARCH, pois apresenta um p-valor quase nulo:

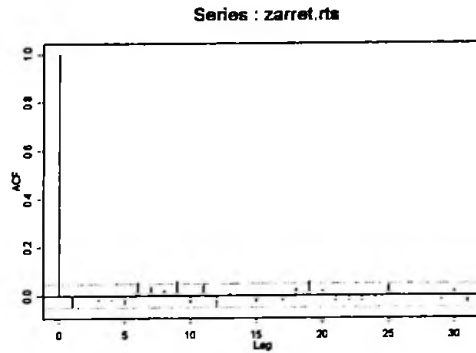


Figura 3.3.2.7 - *fac* Log Retorno - Zar

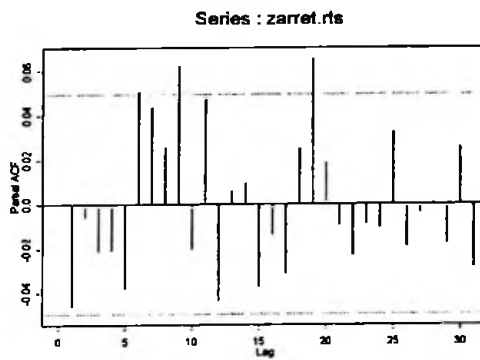


Figura 3.3.2.8 - *facp* Log Retorno - Euro

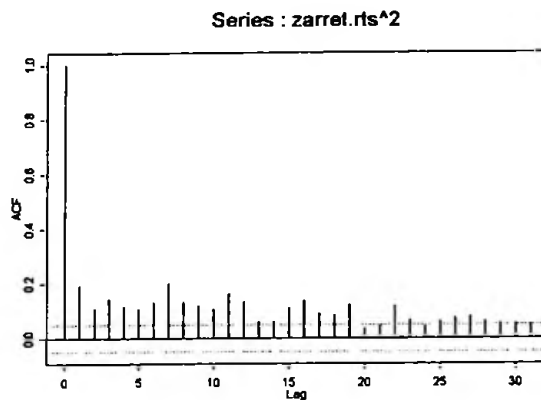


Figura 3.3.2.9 - *fac* dos quadrados do Log Retorno - Euro

Test for ARCH Effects: LM Test

Null Hypothesis: no ARCH effects

Test Statistics:

Test Stat 97.071

p.value 0.000

Dist. under Null: chi-square with 31 degrees of freedom

Total Observ.: 1563

A seguir apresentamos os dois modelos simples GARCH que melhor ajustaram a série de retornos do Zar:

### ARMA (0,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t-Student*

Mean Equation: zarret.rts ~ + arma(0, 0) Conditional Variance Equation: ~ garch(1,1)

Conditional Distribution: t with estimated parameter 6.4003 and standard error 0.92809

-----  
Estimated Coefficients:

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
C	5.206e-005	1.517e-004	0.3431	3.658e-001
A	3.106e-007	2.209e-007	1.4060	7.997e-002
ARCH(1)	9.572e-002	1.965e-002	4.8702	6.141e-007
GARCH(1)	9.087e-001	1.602e-002	56.7188	0.000e+000

-----  
AIC(5) = -10441 BIC(5) = -10414

Normality Test:

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
167.5	0	0.9796	3.195e-008

Ljung-Box test for standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
14.62	0.2631	12

Ljung-Box test for squared standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
8.414	0.752	12

Lagrange multiplier test:

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9
-0.3612	-0.5476	1.356	-0.7415	-0.5274	-0.04402	0.1776	-0.04465	-0.6528

Lag 10	Lag 11	Lag 12	C
1.543	-1.107	-0.2325	1.102

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
8.031	0.7827	0.7339	0.8156

## ARMA (19,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation: zarret.rts ~ + arna(19, 0)

Conditional Variance Equation: ~ garch(1,1)

Conditional Distribution: t with estimated parameter 6.3168 and standard error 0.90932

---

### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
AR(2)	-4.194e-002	2.516e-002	-1.667	4.789e-002
AR(19)	5.410e-002	2.452e-002	2.207	1.374e-002
A	3.210e-007	2.259e-007	1.421	7.770e-002
ARCH(1)	9.599e-002	1.929e-002	4.977	3.584e-007
GARCH(1)	9.083e-001	1.573e-002	57.730	0.000e+000

---

AIC(6) = -10447 BIC(6) = -10415

### Normality Test:

---

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
171.4	0	0.9792	4.78e-009

### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
15.12	0.2351	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
7.806	0.8001	12

### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.3352	-0.5732	1.239	-0.6436	-0.6456	-0.03066	0.1482	-0.2428	-0.3978	1.454

Lag 11	Lag 12	C
-1.184	-0.2274	1.032

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
7.362	0.8328	0.6725	0.8703

Mais uma vez, os testes de alavancagem e assimetria, assim como quando analisamos o Euro, Ien e Won, não foram significativos para EGARCH, PGARCH e TGARCH:

## EGARCH: ARMA (0,0) + EGARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation: zarret.rts ~ + arna(0,0) Conditional Variance Equation: ~ egarch(1,1)

Conditional Distribution: t with estimated parameter 6.3752 and standard error 0.95317

---

### Estimated Coefficients:

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
C	0.00005487	0.0001628	0.3372	3.680e-001
A	-0.30292177	0.0904109	-3.3505	4.130e-004
ARCH(1)	0.20628129	0.0366903	5.6222	1.115e-008
GARCH(1)	0.98445733	0.0074295	132.5070	0.000e+000
LEV(1)	0.05703821	0.0821614	0.6942	2.438e-001****

---

AIC(6) = -10441 BIC(6) = -10409

### Normality Test:

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
199.1	0	0.98	1.343e-007

### Ljung-Box test for standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
14.42	0.2744	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
8.49	0.7458	12

### Lagrange multiplier test:

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.44	-0.09075	0.9234	-0.5765	-0.06291	0.6307	0.7379	-0.1398	-0.2993	2.074

Lag 11	Lag 12	C
-0.6959	-0.2164	0.6422

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
7.757	0.8038	0.7088	0.8388

## TGARCH: ARMA (0,0) + TGARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation: zarret.rts ~ + arna(0,0) Conditional Variance Equation: ~ tgarch(1,1)

Conditional Distribution: t with estimated parameter 6.5027 and standard error 0.95611

---

### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
C	6.887e-005	1.551e-004	0.4439	0.32858805
A	2.816e-007	2.050e-007	1.3736	0.08488174
ARCH(1)	1.037e-001	2.593e-002	3.9998	0.00003318
GARCH(1)	9.109e-001	1.640e-002	55.5399	0.00000000
GAMMA(1)	-2.162e-002	2.149e-002	-1.0061	0.15725321****

---

AIC(6) = -10439 BIC(6) = -10407

### Normality Test:

---

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
170.6	0	0.98	1.479e-007

### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
14.24	0.2856	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
7.302	0.837	12

### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9
-0.3438	-0.4902	1.119	-0.7452	-0.5231	-0.005258	0.1895	0.01577	-0.6794

Lag 10	Lag 11	Lag 12	C
1.462	-1.099	-0.2228	1.034

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
7.061	0.8536	0.6448	0.8926



## PGARCH: ARMA (0,0) + PGARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation: zarret.rts ~ + arma(0,0) Conditional Variance Equation: ~ garch(1,1)

Conditional Distribution: t with estimated parameter 6.3929 and standard error 1.016

---

### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
C	6.432e-005	1.554e-004	0.4139	3.395e-001
A	3.351e-007	2.355e-007	1.4229	7.748e-002
ARCH(1)	9.443e-002	2.065e-002	4.5738	2.585e-006
GARCH(1)	9.099e-001	1.678e-002	54.2304	0.000e+000
LEV(1)	4.921e-002	5.509e-002	0.8934	1.859e-001****

---

AIC(6) = -10439 BIC(6) = -10407

### Normality Test:

---

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
170.4	0	0.9801	1.845e-007

### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
14.33	0.2802	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
7.442	0.8271	12

### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.3451	-0.4565	1.143	-0.7489	-0.4992	0.004627	0.2095	0.01554	-0.6702	1.524

Lag 11	Lag 12	C
-1.093	-0.2281	0.9936

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
7.159	0.8469	0.6538	0.8855

## MODELO

GARCH I: AIC(5) = -10441 BIC(5) = -10414

GARCH II: AIC(6) = -10447 BIC(6) = -10415

\*\*\*\*: Modelos com Asymmetric Leverage Effects sao nao significativos

O quadro a seguir resume os resultados calculados:

Modelo	AIC	BIC
ARMA(0,0) + GARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-10441	-10414
ARMA(19,0) + GARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i> sem o parâmetro C	-10447	-10415

O modelo ARMA (19,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t-Student* - foi o que melhor ajustou a série e temos a seguinte equação:

$$Y_t = -0,04194Y_{t-2} + 0,05410Y_{t-19} + X_t,$$

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 6,3168,$$

$$h_t = 0,0000003210 + 0,09599X_{t-1}^2 + 0,09803h_{t-1}$$

que gerou a seguinte volatilidade:

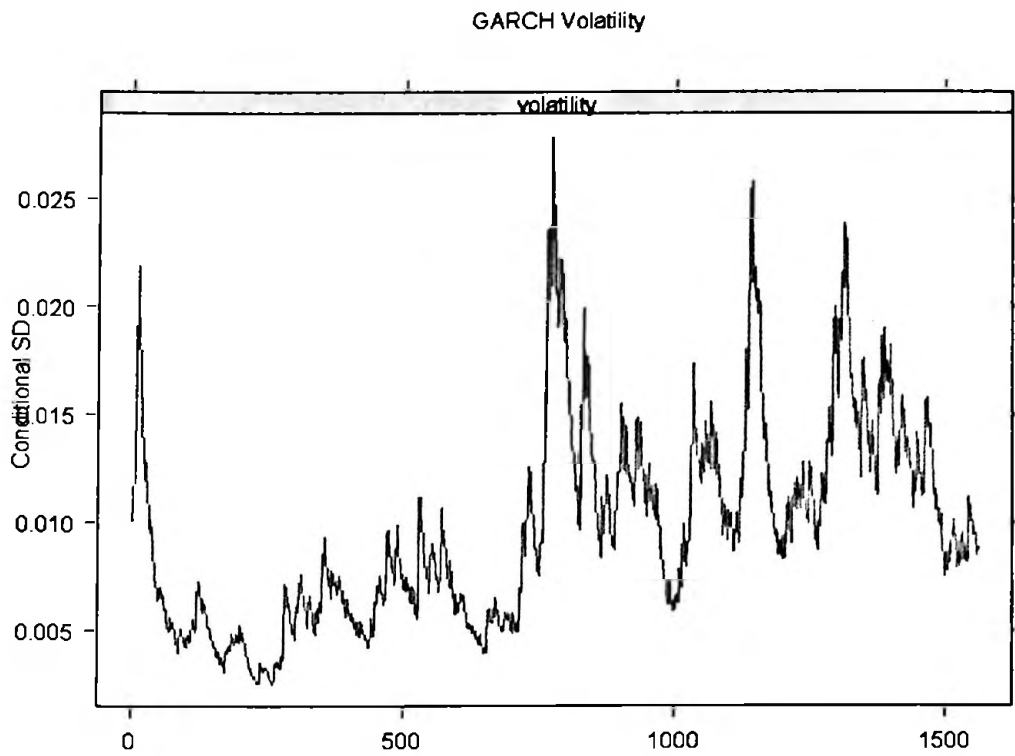


Figura 3.3.2.10 – Volatilidade Estimada Log Retorno – Zar

e com bons ajustes dos resíduos padronizados, conforme a figura 3.3.2.11.

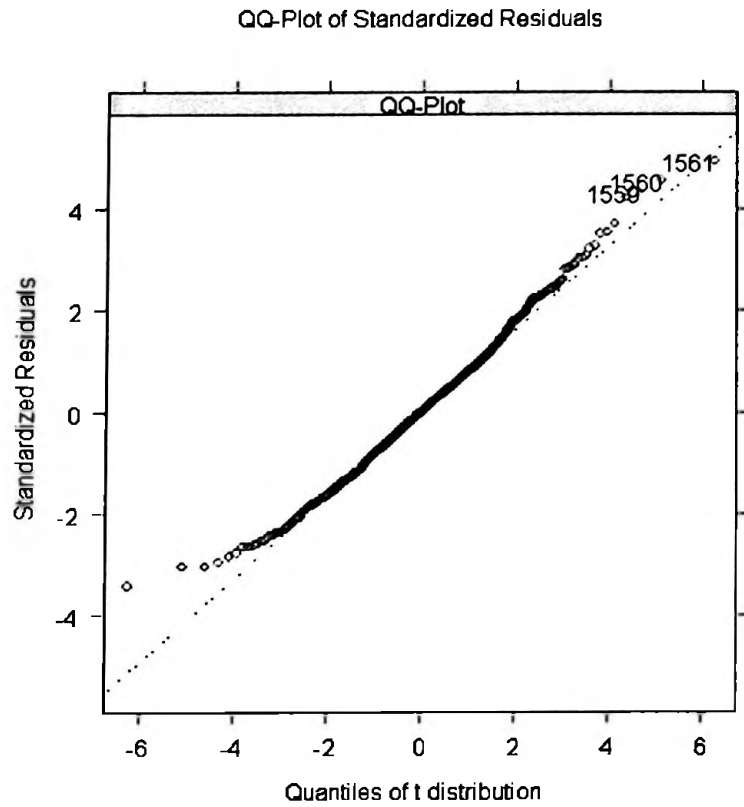


Figura 3.3.2.11 – Ajuste dos Resíduos Log Retorno – Zar

### 3.3.3 Peso

Na série de retornos do Peso Mexicano, assim como na do Real, os efeitos alavancagem e assimetria que acreditávamos estarem presentes nas quatro moedas emergentes, finalmente aparecem, como apresentado a seguir.

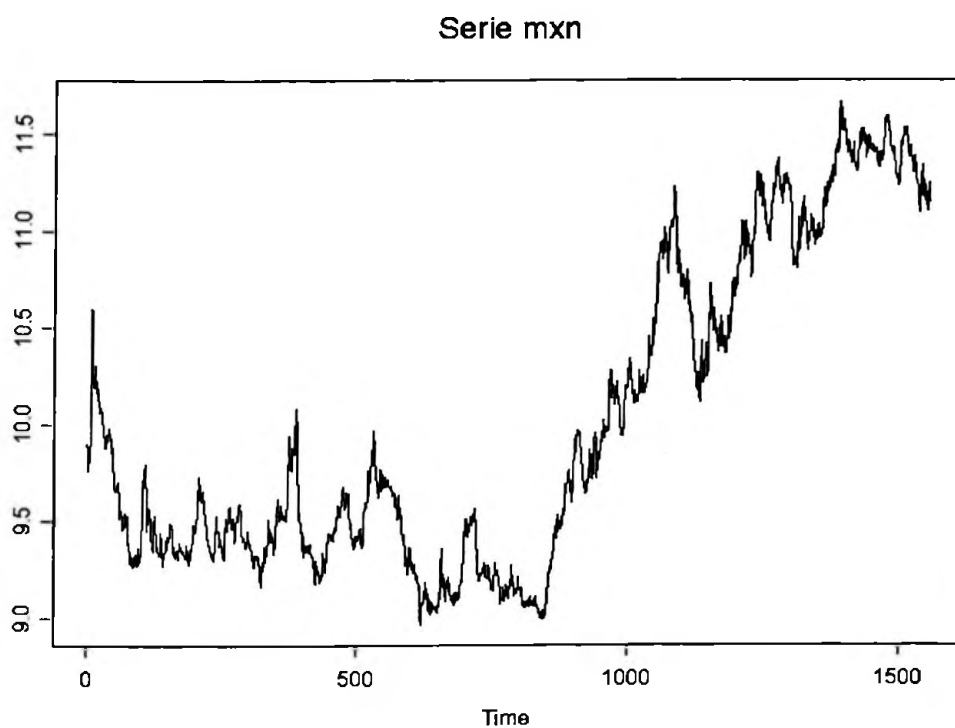


Figura 3.3.3.1 – Série Peso

Analisando os retornos temos as seguintes estatísticas :

Sample Quantiles:

min	1Q	median	3Q	max
-0.03555	-0.002876	-0.0001085	0.002734	0.03955

Sample Moments:

mean	std	skewness	kurtosis
0.00007572	0.005204	0.3558	7.76

Number of Observations: 1560

log ret mxn

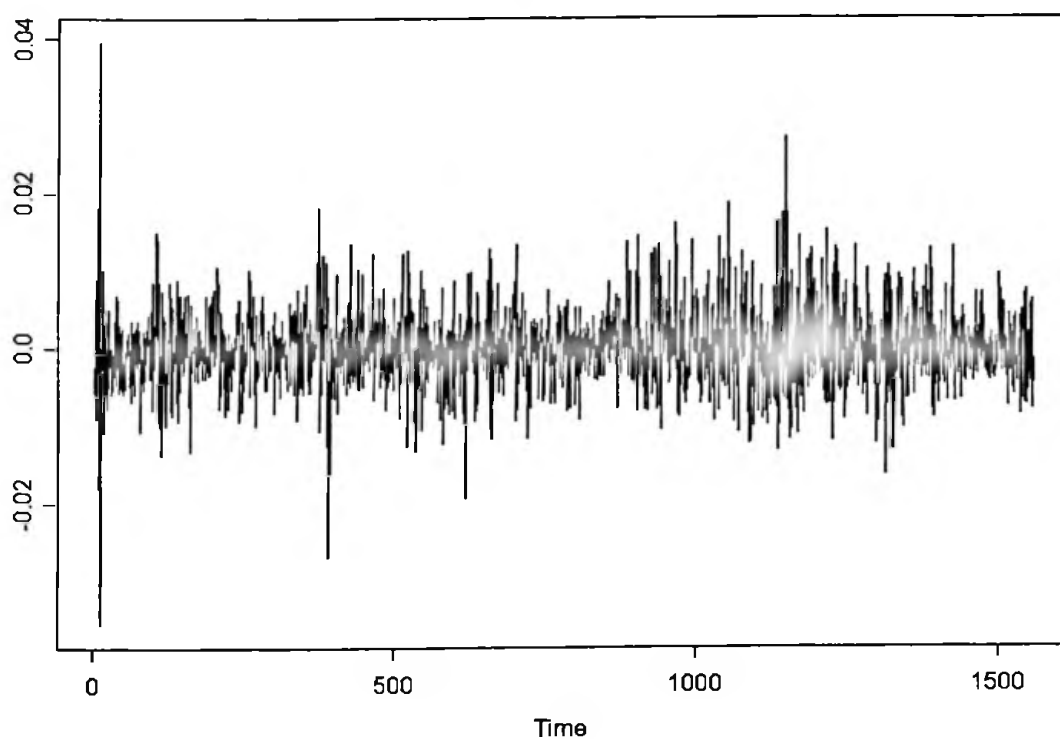


Figura 3.3.3.2 – Série Log Retorno - Peso

e mais uma vez, como nas demais séries, outra distribuição que não a Normal deve melhor ajustar a série:

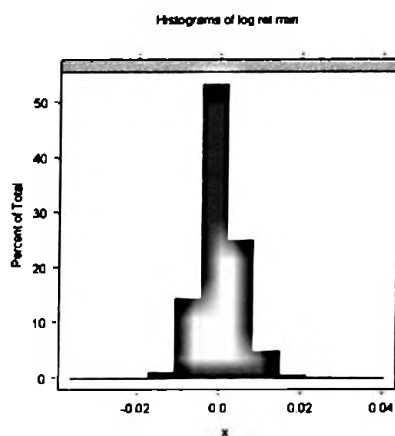


Figura 3.3.3.3 - Histograma Log Retorno – Peso

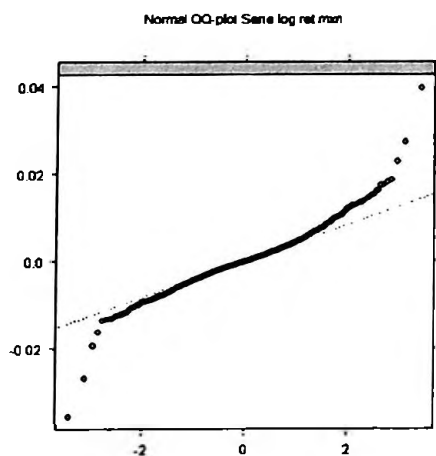


Figura 3.3.3.4 - *qq Plot* Normal Log Retorno – Peso

A distribuição *t-Student* parece ser uma alternativa adequada:

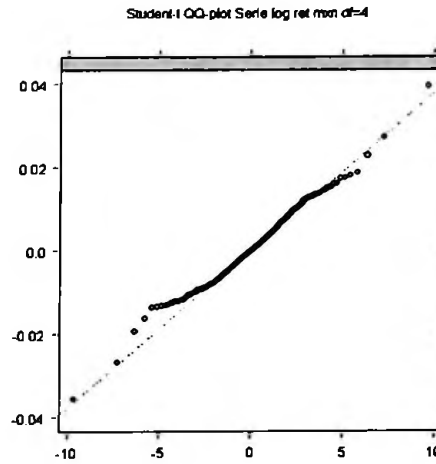


Figura 3.3.3.5 - qq Plot *t-Student* 4 Log Retorno – Peso

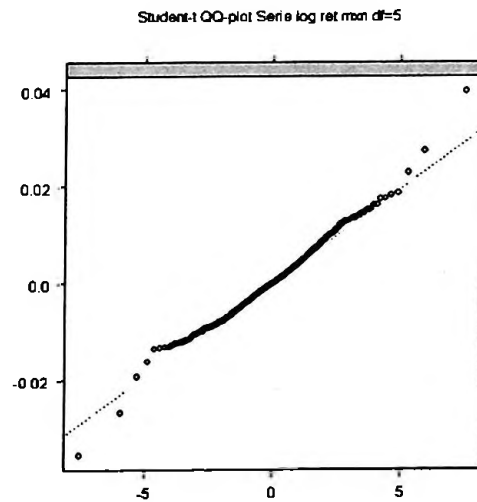


Figura 3.3.3.6 - qq Plot *t-Student* 4 Log Retorno - Peso

**Test for Normality: Jarque-Bera**

**Null Hypothesis: data is normally distributed**

**Test Statistics: Test Stat 1505.8 p.value 0.0**

**Dist. under Null: chi-square with 2 degrees of freedom Total Observ.: 1560**



A *fac* e a *facp* sugerem que a série é não correlacionada

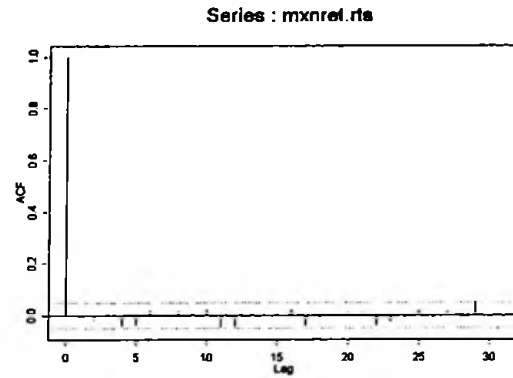


Figura 3.3.3.7 - *fac* Log Retorno - Peso

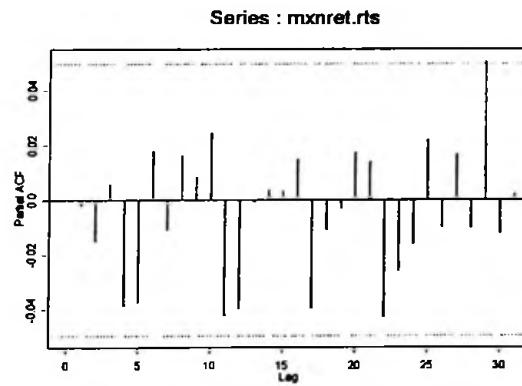


Figura 3.3.3.8 - *facp* Log Retorno - Peso

A *fac* dos quadrados dos retornos apresentou comportamento mostrado na figura 3.3.3.1, sugerindo a presença de heteroscedasticidade:

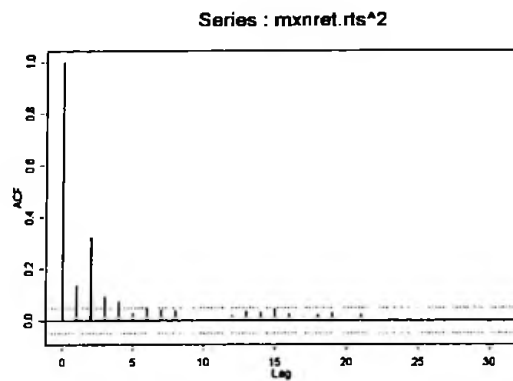


Figura 3.3.3.9 – *fac* dos quadrados do Log Retorno - Peso

De fato, o teste LM rejeitou a hipótese de ausência de efeitos ARCH, pois mais uma vez o p-valor foi quase nulo.

Test for ARCH Effects: LM Test

Null Hypothesis: no ARCH effects

Test Statistics:

Test Stat 72.17

p.value 0.00

Dist. under Null: chi-square with 31 degrees of freedom

Total Observ.: 1560

A seguir apresentamos o modelo simples GARCH que melhor ajustou as volatilidades da série bem como as suas três variações.

### ARMA (0,0) + GARCH (1,1) - distribuição *t-Student*

Mean Equation:  $\text{mxmret.rts} \sim + \text{arma}(0, 0)$

Conditional Variance Equation:  $\sim \text{garch}(1, 1)$

Conditional Distribution:  $t$  with estimated parameter 5.8546 and standard error 0.85679

-----  
Estimated Coefficients:

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )	
A	2.274e-006	1.769e-006	1.285	9.949e-002	**FICA INESTAVEL SE A=0
ARCH(1)	1.012e-001	4.207e-002	2.405	8.148e-003	
GARCH(1)	8.161e-001	1.014e-001	8.050	8.882e-016	

-----  
AIC(4) = -12194 BIC(4) = -12173

Normality Test:

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
177	0	0.9786	4.056e-010

Ljung-Box test for standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
12.68	0.3926	12

Ljung-Box test for squared standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
9.72	0.6406	12

Lagrange multiplier test:

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.7096	-1.099	0.4514	-0.801	-1.506	-0.3428	-0.02848	-0.7031	-1.007	-1.465

Lag 11	Lag 12	C
0.4486	-0.5374	-0.08583

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
8.952	0.7071	0.8185	0.7332

## EGARCH: ARMA (0,0) + EGARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation:  $\text{mxnret.rts} \sim + \text{arma}(0, 0)$

Conditional Variance Equation:  $\sim \text{egarch}(1, 1)$

Conditional Distribution:  $t$  with estimated parameter 6 and standard error 0.86278

---

### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
A	-2.0831	2.04421	-1.019	1.542e-001
ARCH(1)	0.2206	0.08101	2.723	3.266e-003
GARCH(1)	0.8196	0.18755	4.370	6.614e-006
LEV(1)	0.6471	0.17018	3.802	7.443e-005

---

AIC(5) = -12209 BIC(5) = -12182

### Normality Test:

---

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
179.5	0	0.9834	0.003077

### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
13.81	0.313	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
7.579	0.8171	12

### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.816	-0.8998	0.9035	0.2088	0.3977	0.4147	0.1696	0.2007	0.2123	-0.7455

Lag 11	Lag 12	C
2.043	-0.4461	-0.5741

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
7.939	0.7899	0.7254	0.8235

## TGARCH: ARMA (0,0) + TGARCH (1,1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation:  $\text{mxnret.rts} \sim \text{arma}(0, 0)$   
 Conditional Variance Equation:  $\sim \text{tgarch}(1, 1)$

Conditional Distribution: *t* with estimated parameter 6.2859 and standard error 0.92552

---

### Estimated Coefficients:

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
A	1.979e-006	1.228e-006	1.612	0.053595
ARCH(1)	1.474e-001	5.527e-002	2.667	0.003868
GARCH(1)	8.419e-001	7.475e-002	11.263	0.000000
GAMMA(1)	-1.364e-001	5.035e-002	-2.708	0.003418

AIC(5) = -12214 BIC(5) = -12187

### Normality Test:

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
151.7	0	0.9813	0.00001218

### Ljung-Box test for standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
12.59	0.3994	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
9.657	0.646	12

### Lagrange multiplier test:

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
-0.9226	-1.026	0.7194	-0.5251	-1.476	-0.7108	-0.475	-0.3805	-0.6632	-1.512

Lag 11	Lag 12	C
0.9247	-0.4228	0.1647

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
9.569	0.6537	0.8753	0.6764

Observamos que, ao contrário das demais séries aqui estudadas, esta apresenta efeito alavancagem assimétrico significativo, do ponto de vista estatístico.

O quadro a seguir resume os resultados calculados:

Modelo	AIC	BIC
ARMA(0,0) + GARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-12194	-12173
ARMA(0,0) + EGARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-12209	-12182
ARMA(0,0) + TGARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-12214	-12187

O modelo ARMA (0,0) + TGARCH (1,1) foi o que melhor ajustou a série e temos a seguinte equação:

**ARMA (0,0) + TGARCH (1,1)**

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_v, \quad v = 6,2859,$$

$$h_t = 0,000001979 + 0,1474 X_{t-1}^2 - 0,1364 X_{t-1}^2 d_{t-1} + 0,8419 h_{t-1}$$

Os gráficos da volatilidades encontram-se na figura 3.3.3.10:

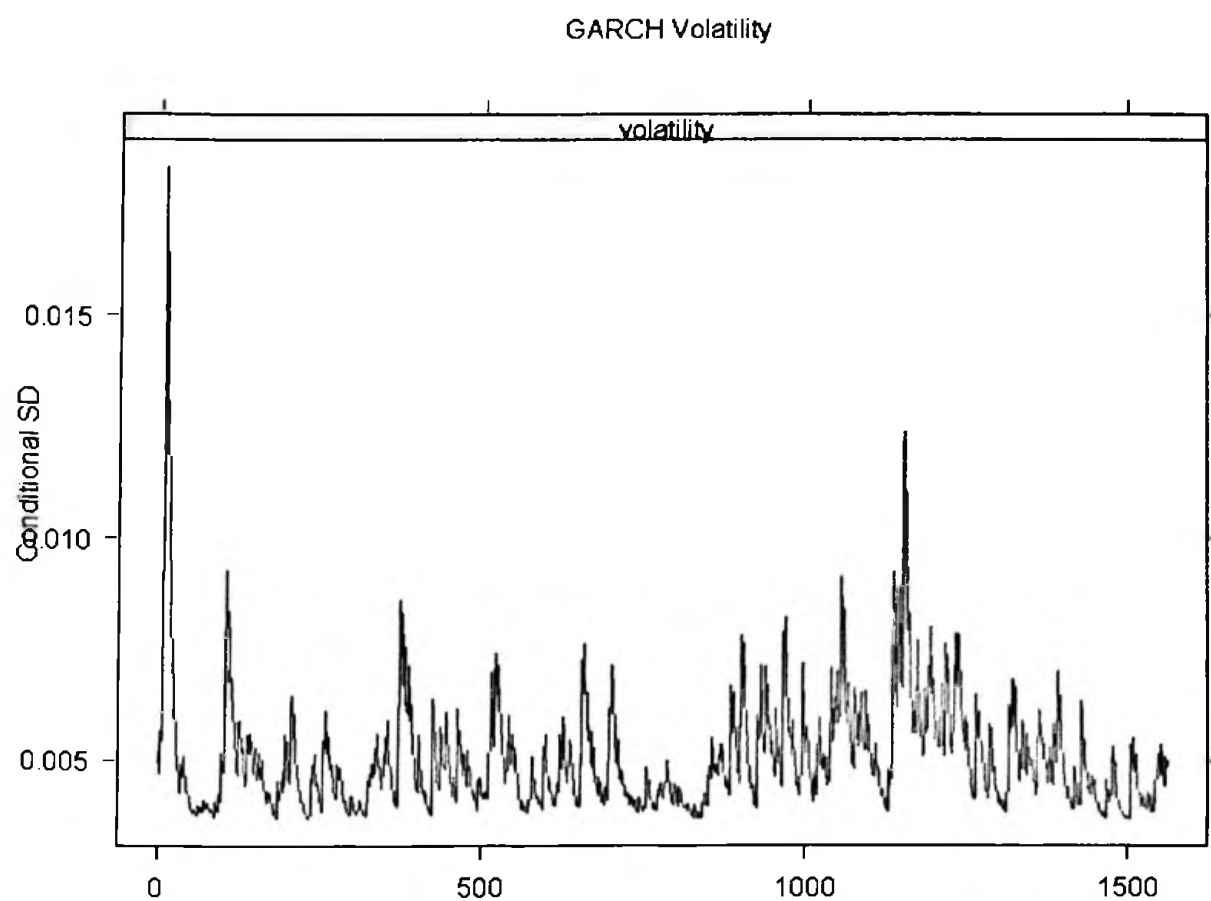


Figura 3.3.3.10 – Volatilidade Estimada TGARCH Log Retorno – Peso

O gráficos *qq*-plot dos resíduos padronizados encontram-se nas figuras 3.3.3.11. Ele sugere um ajustes razoável para a volatilidade:

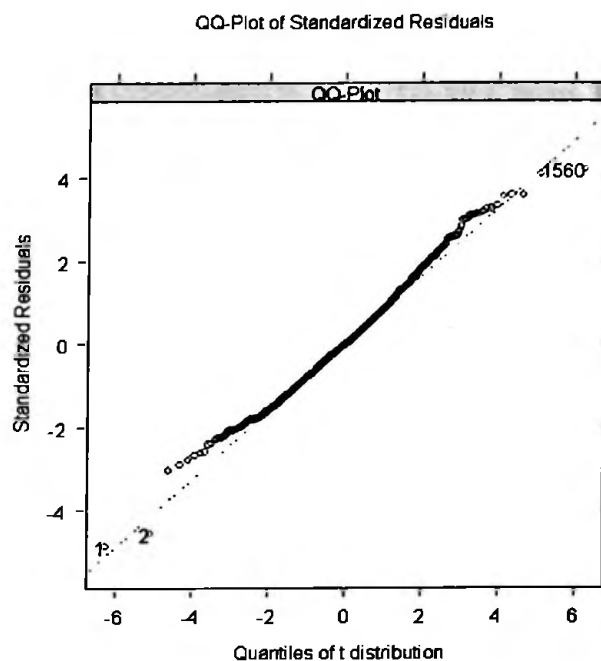


Figura 3.3.3.11 – Ajuste dos Resíduos TGARCH Log Retorno – Peso

### 3.3.4 Real

Finalmente chegamos à análise da série do Real que se mostrou a mais incomum em termos de assimetria, valores extremos entre outros. A série e os retornos estão nas figuras 3.3.4.1 e 3.3.4.2.



Serie brl

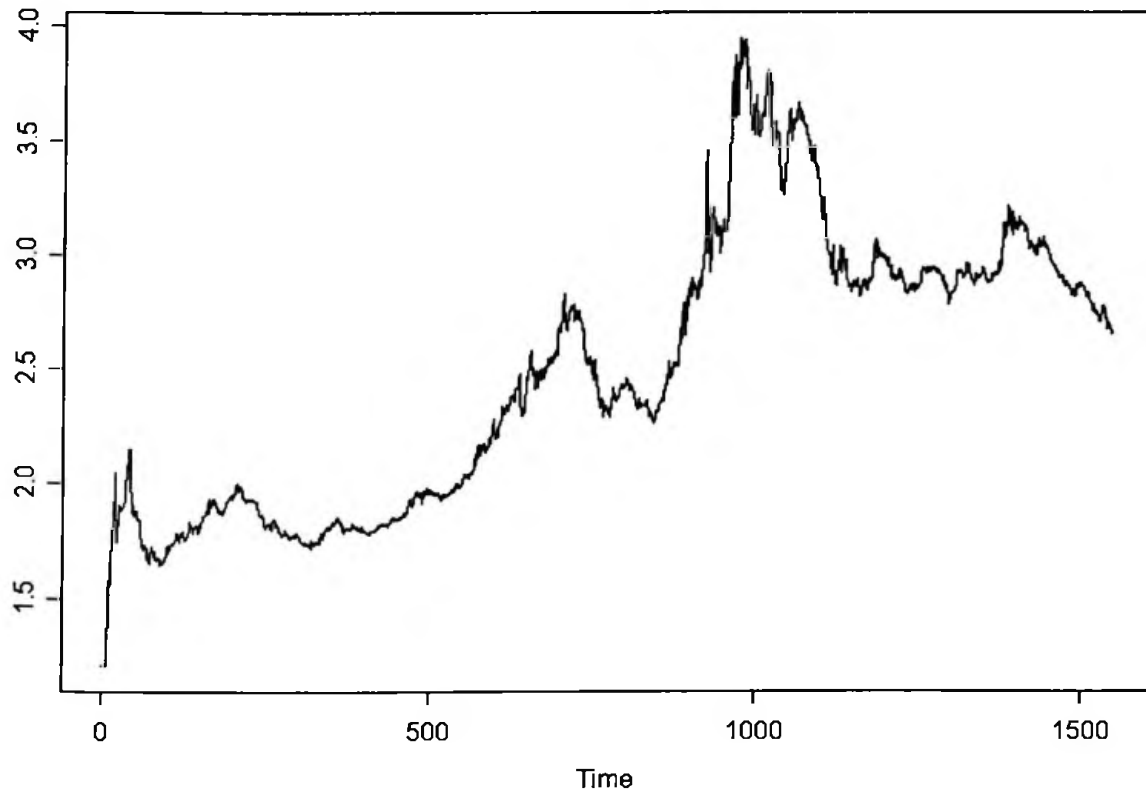


Figura 3.3.4.1 – Série Real

A série de retornos apresentou as seguintes estatísticas:

**Sample Quantiles:**

min	1Q	median	3Q	max
-0.1034	-0.00433	0.0002085	0.00499	0.09975

**Sample Moments:**

mean	std	skewness	kurtosis
0.0005086	0.01206	0.3076	18.47

Number of Observations: 1550

log ret brl

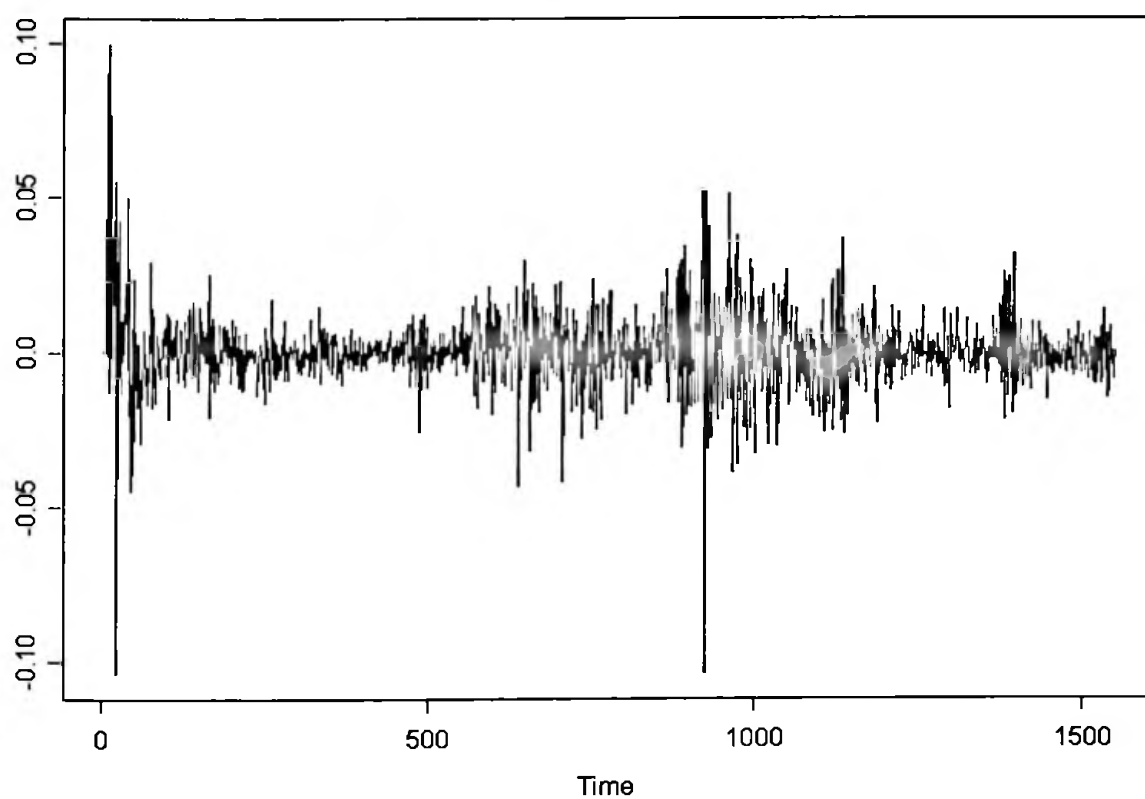


Figura 3.3.4.2 – Série Log Retorno - Real

O histograma e o gráfico *qq-plot* mostram a não-normalidade dos retornos, fato comprovado pelo teste de Jarque-Bera.

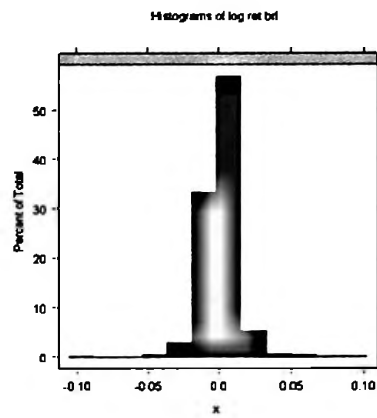


Figura 3.3.4.3 - Histograma Log Retorno - Real

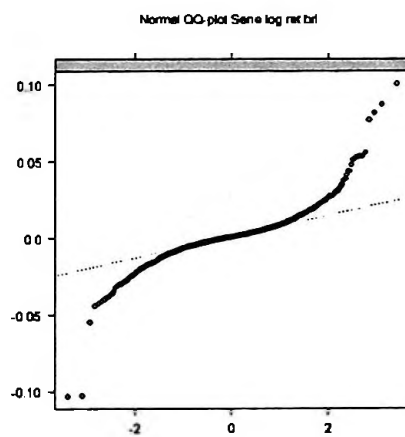


Figura 3.3.4.4 - *qq Plot* Normal Log Retorno – Real

**Test for Normality: Jarque-Bera**

**Null Hypothesis: data is normally distributed**

**Test Statistics: Test Stat 15476.2 p.value 0.0**

**Dist. under Null: chi-square with 2 degrees of freedom Total Observ.: 1550**

Novamente utilizamos a distribuição *t-Student* como alternativa à Normal.

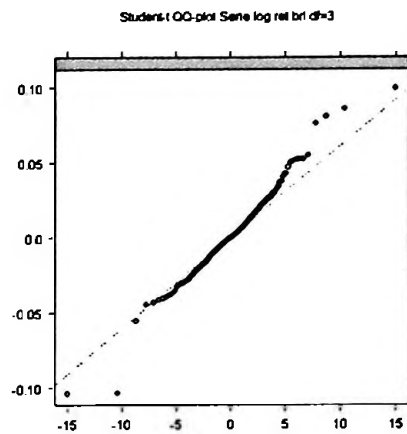


Figura 3.3.4.5 - qq Plot *t-Student* 3 Log Retorno – Real

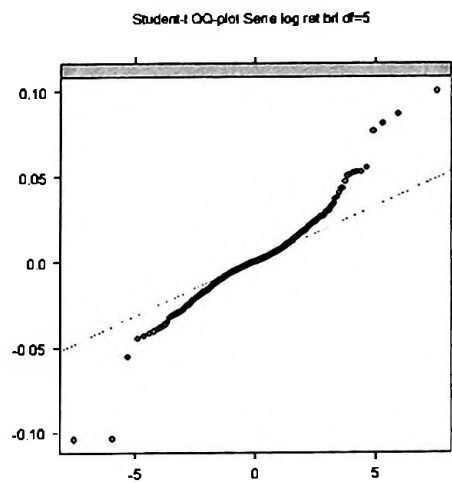


Figura 3.3.4.6 - qq Plot *t-Student* 5 Log Retorno – Real

A *facp* sugere um modelo ARMA(16,0).

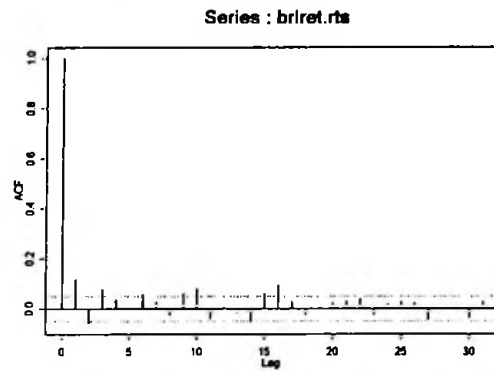


Figura 3.3.4.7 - *fac* Log Retorno - Real

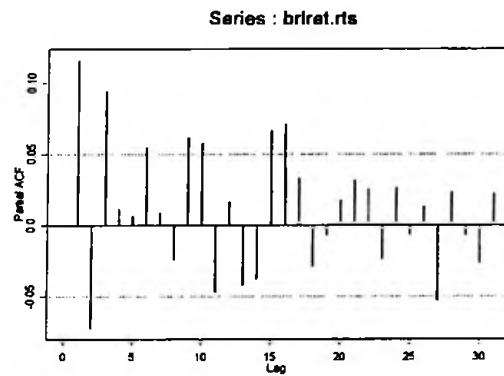


Figura 3.3.4.8 - *facp* Log Retorno - Real

Observamos que a *fac* do quadrado dos retornos apresentou comportamento condizente com a presença de heteroscedasticidade, o que é mostrado no teste LM a seguir.

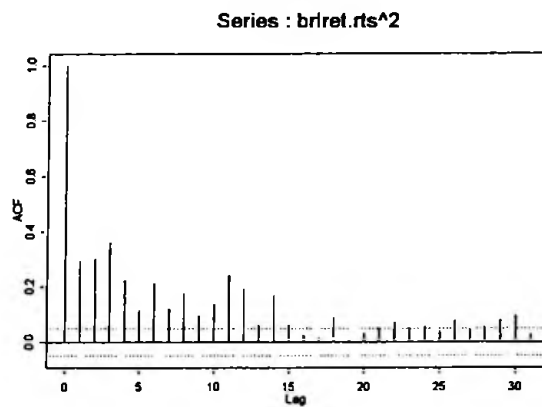


Figura 3.3.4.9 - *fac* dos quadrados do Log Retorno - Real

Test for ARCH Effects: LM Test

Null Hypothesis: no ARCH effects

Test Statistics:

Test Stat 385.77

p.value 0.00

Dist. under Null: chi-square with 31 degrees of freedom

Total Observ.: 1550

A seguir apresentamos os modelo GARCH bem como as suas três variações:

### GARCH: ARMA (16, 0) + GARCH (1, 1) - distribuição *t-Student*

Mean Equation: brlret ~ 1 + arma(16, 0) Conditional Variance Equation: ~ garch(1, 1)

Conditional Distribution: t with estimated parameter 6 and standard error 1.2489

---

#### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
AR(6)	0.04860958	2.466e-002	1.971	0.02444039
AR(10)	0.05045317	2.248e-002	2.244	0.01248867
AR(13)	0.03754422	2.188e-002	1.716	0.04318724
AR(16)	0.06064629	2.177e-002	2.785	0.00270521
A	0.00000113	5.139e-007	2.199	0.01403076
ARCH(1)	0.15416463	3.875e-002	3.978	0.00003631
GARCH(1)	0.84834422	3.478e-002	24.392	0.00000000

---

AIC(8) = -10452                      GAUSSIANA AIC(7) = -10322  
 BIC(8) = -10409

#### Normality Test:

---

Jarque-Bera	P-value	Shapiro-Wilk	P-value
6364	0	0.9734	0

#### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
10.83	0.5432	12

#### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
5.827	0.9245	12

#### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
1.204	3.346	-1.142	-0.8489	-0.1606	-0.3367	-0.1641	-0.2824	-0.6275	-0.5704
Lag 11	Lag 12	C							
0.7062	-1.719	0.5277							

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
16.48	0.1701	1.515	0.2229

## EGARCH: ARMA (16, 0) + EGARCH (1, 1) - distribuição *t*-Student

Mean Equation:  $\text{brlret} = 1 + \text{arma}(16, 0)$  Conditional Variance Equation:  $\sigma^2 = \text{egarch}(1, 1)$

Conditional Distribution:  $t$  with estimated parameter 5.9835 and standard error 1.1577

---

### Estimated Coefficients:

---

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
AR(6)	0.04973	0.024700	2.013	2.212e-002
AR(10)	0.05716	0.022209	2.574	5.080e-003
AR(13)	0.04118	0.021606	1.906	2.840e-002
AR(16)	0.07340	0.021316	3.444	2.946e-004
A	-0.50397	0.114695	-4.394	5.945e-006
ARCH(1)	0.29038	0.041100	7.065	1.210e-012
GARCH(1)	0.97019	0.009558	101.505	0.000e+000
LEV(1)	0.24443	0.071112	3.437	3.015e-004

---

AIC(9) = -10458 BIC(9) = -10410

### Normality Test:

---

Jarque-Bera P-value	Shapiro-Wilk P-value
20182	0
	0.9609
	0

### Ljung-Box test for standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
9.557	0.6548	12

### Ljung-Box test for squared standardized residuals:

---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
0.9778	1	12

### Lagrange multiplier test:

---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
0.8931	2.746	-0.9915	-0.6	0.08586	-0.593	-0.04262	-0.1332	-0.354	-0.3327
Lag 11	Lag 12	C							
0.6709	-2.397	0.9691							

TR <sup>2</sup> P-value	F-stat	P-value
11.86	0.4569	1.087
		0.4803



**PGARCH: ARMA (16,0) + PGARCH (1,1,1) - distribuição *t*-Student**

Mean Equation:  $\text{brlret} \sim 1 + \text{arma}(16, 0)$  Conditional Variance Equation:  $\sim \text{garch}(1, 1)$

Conditional Distribution: *t* with estimated parameter 6.109 and standard error 1.1067

---

**Estimated Coefficients:**


---

	Value	Std.Error	t value	Pr(> t )
AR(6)	4.785e-002	2.478e-002	1.931	0.02685152
AR(10)	5.753e-002	2.262e-002	2.543	0.00554706
AR(13)	3.951e-002	2.203e-002	1.793	0.03655384
AR(16)	6.484e-002	2.208e-002	2.936	0.00168441
A	1.167e-006	5.038e-007	2.315	0.01035986
ARCH(1)	1.377e-001	3.228e-002	4.266	0.00001053
GARCH(1)	8.547e-001	3.158e-002	27.064	0.00000000
LEV(1)	1.936e-001	5.382e-002	3.597	0.00016588

---

AIC(9) = -10463 BIC(9) = -10415

**Normality Test:**


---

Jarque-Bera P-value	Shapiro-Wilk P-value
5336	0
	0.9754
	0

**Ljung-Box test for standardized residuals:**


---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
9.858	0.6285	12

**Ljung-Box test for squared standardized residuals:**


---

Statistic	P-value	Chi <sup>2</sup> -d.f.
3.929	0.9847	12

**Lagrange multiplier test:**


---

Lag 1	Lag 2	Lag 3	Lag 4	Lag 5	Lag 6	Lag 7	Lag 8	Lag 9	Lag 10
0.7199	2.59	-1.091	-0.8163	-0.273	-0.5481	0.02806	-0.1475	-0.7813	-0.1471
Lag 11	Lag 12	C							
0.7085	-1.729	0.3647							

TR <sup>2</sup>	P-value	F-stat	P-value
10.89	0.6382	0.9973	0.5586

Observamos que, como no Peso, esta série apresenta efeito alavancagem assimétrico significativo, do ponto de vista estatístico.

O quadro a seguir resume os resultados calculados:

Modelo	AIC	BIC
ARMA(16,0) + GARCH (1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-12194	-12173
ARMA(16,0) +EGARCH(1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-12209	-12182
ARMA(16,0) +PGARCH(1,1) distribuição <i>t-Student</i>	-12214	-12187

O modelo ARMA (0,0) + PGARCH (1,1) foi o que melhor ajustou a série e temos a seguinte equação:

#### PGARCH (1,1,1)

$$Y_t = 0,04785Y_{t-6} + 0,05753Y_{t-10} + 0,03950Y_{t-13} + 0,06484Y_{t-16} + X_t,$$

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 6,1090,$$

$$h_t = 0,000001164 + 0,1377 * (|X_{t-1}| + 0,1936 X_{t-1}) + 0,8547 h_{t-1}$$

As figuras 3.3.4.10 e 3.3.4.11 apresentam a volatilidade gerada bem como os ajustes residuais.

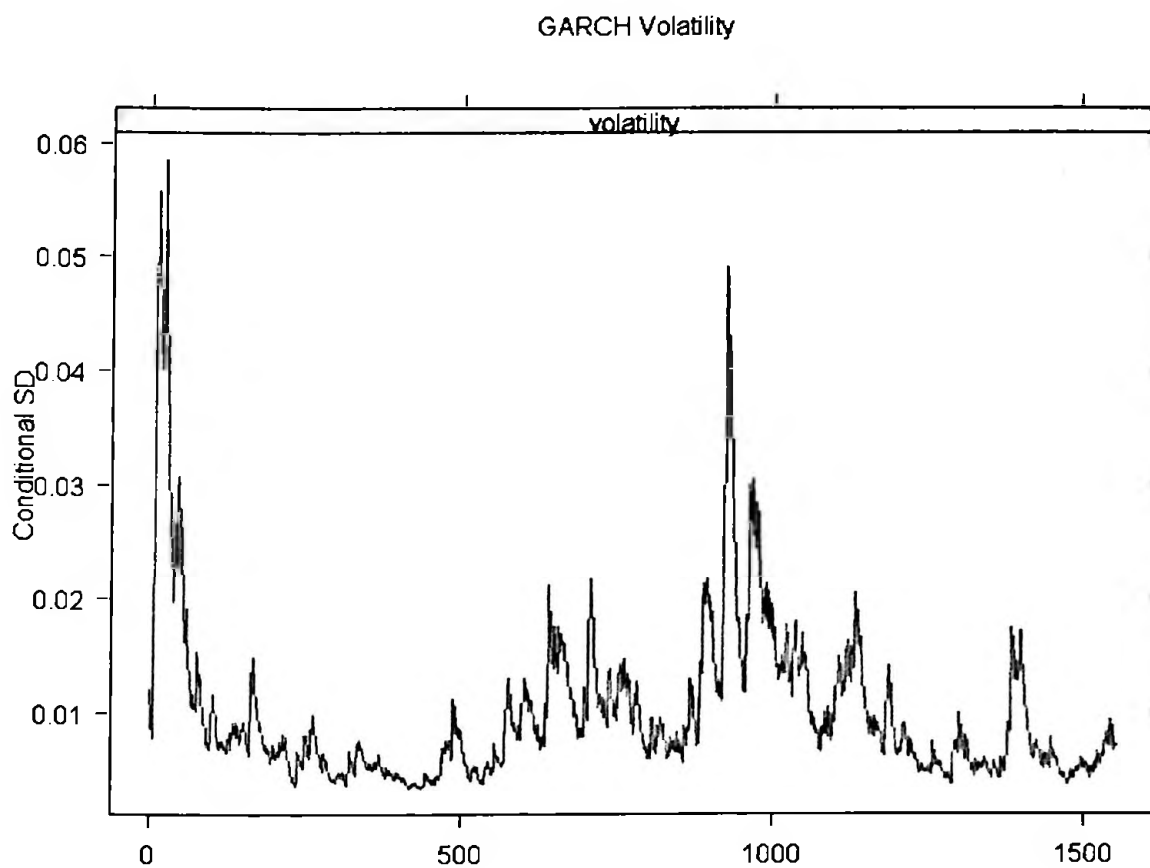


Figura 3.3.4.10 – Volatilidade Estimada PGARCH Log Retorno – Real

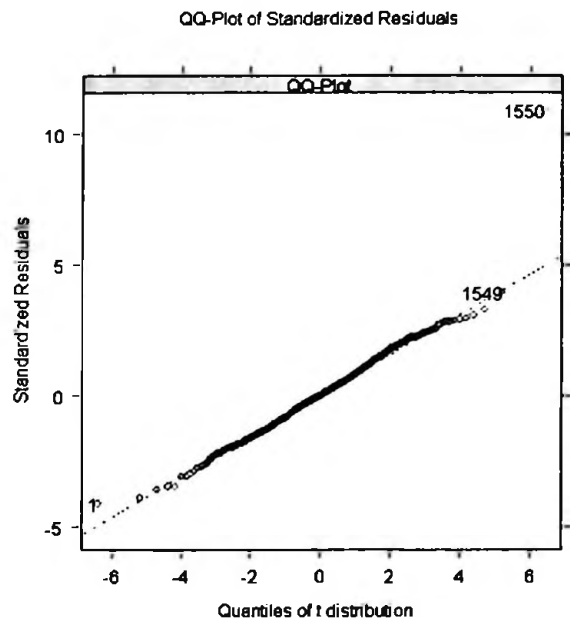
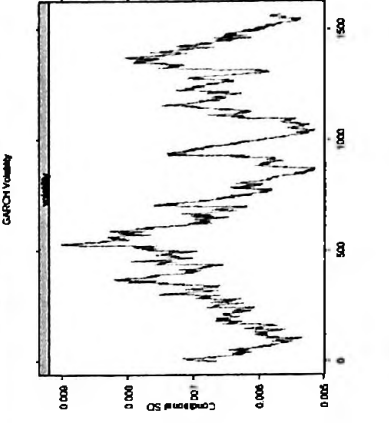
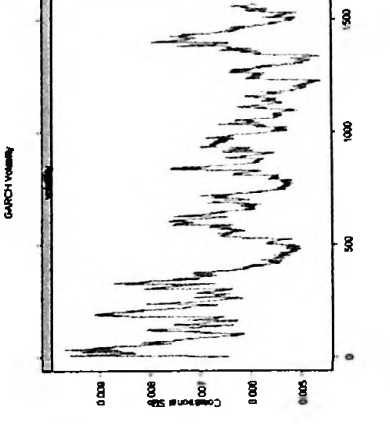
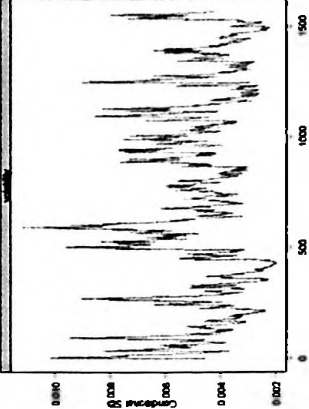
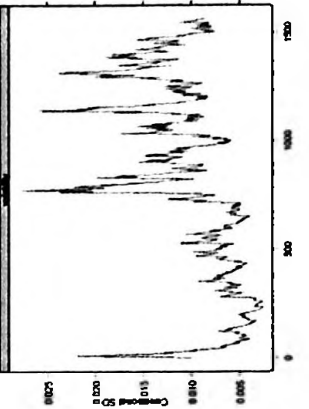


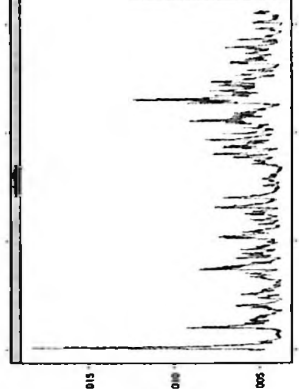
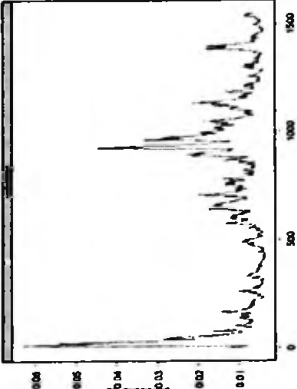
Figura 3.3.4.11 – Ajuste dos Resíduos PGARCH Log Retorno – Real

#### 4 Conclusões

A seguir, apresentamos um resumo dos modelos ajustados para todas as séries de retornos:

Modelo	Volatilidade
<p><i>Euro</i>: ARMA(1,0) + GARCH(1,1)</p> $Y_t = 0,07785Y_{t-1} + X_t,$ $X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 10,122,$ $h_t = 0,0000004402 + 0,02434X_{t-1}^2 + 0,9658h_{t-1}$	 <p>A line graph showing the volatility of the Euro series over 1500 observations. The y-axis is labeled 'GARCH Volatility' and ranges from 0 to 0.008. The x-axis ranges from 0 to 1500. The plot shows a highly volatile time series with several peaks, notably around 250, 750, and 1250 observations.</p>
<p><i>Ien</i>: ARMA(15,0) + GARCH(1,1)</p> $Y_t = -0,00601Y_{t-1} - 0,05334Y_{t-14} - 0,04606Y_{t-15} + X_t,$ $X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 6,9003,$ $h_t = 0,0000006593 + 0,03290X_{t-1}^2 + 0,9507h_{t-1}$	 <p>A line graph showing the volatility of the Ien series over 1500 observations. The y-axis is labeled 'GARCH Volatility' and ranges from 0 to 0.008. The x-axis ranges from 0 to 1500. The plot shows a highly volatile time series with several peaks, notably around 250, 750, and 1250 observations.</p>

Modelo	Volatilidade
<p><i>Won</i> : <math>ARMA(0,0) + GARCH(1,1)</math></p> $Y_t = -0,0002616 + X_t,$ $X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 3,7284,$ $h_t = 0,0000003894 + 0,1304X_{t-1}^2 + 0,8753h_{t-1}$	 <p>A time series plot showing GARCH volatility for the Won market. The x-axis represents time from 0 to 1500, and the y-axis represents volatility from 0.000 to 0.010. The plot shows a highly volatile time series with several sharp peaks, notably around time 200, 400, 600, and 1000.</p>
<p><i>Zar</i> : <math>ARMA(19,0) + GARCH(1,1)</math></p> $Y_t = -0,04194Y_{t-2} + 0,05410Y_{t-19} + X_t,$ $X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 6,3168,$ $h_t = 0,0000003210 + 0,09599X_{t-1}^2 + 0,09803h_{t-1}$	 <p>A time series plot showing GARCH volatility for the Zar market. The x-axis represents time from 0 to 1500, and the y-axis represents volatility from 0.000 to 0.020. The plot shows a highly volatile time series with several sharp peaks, notably around time 200, 400, 600, and 1000.</p>

Modelo	Volatilidade
<p><i>Peso</i> : <math>ARMA(0,0) + TGARCH(1,1)</math></p> $X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 6,2859,$ $h_t = 0,000001979 + 0,1474X_{t-1}^2 - 0,1364X_{t-1}^2 d_{t-1} + 0,8419h_{t-1}$	
<p><i>Real</i> : <math>ARMA(16,0) + PGARCH(1,1,1)</math></p> $Y_t = 0,04785Y_{t-6} + 0,05753Y_{t-10} + 0,03950Y_{t-13} + 0,06484Y_{t-16} + X_t,$ $X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim t_\nu, \quad \nu = 6,1090,$ $h_t = 0,000001164 + 0,1377 * ( X_{t-1}  + 0,1936X_{t-1}) + 0,8547h_{t-1}$	

Utilizando os preços dos forwards de um mês, estimamos as propriedades das distribuições dos retornos de várias moedas. Descobrimos que o retorno do forward do Euro parece ser normalmente distribuído e as demais moedas possuem distribuições assimétricas e caudas longas (leptocúrticas). A assimetria e a curtose são mais pronunciadas para o Real e para o Peso, que apresentam caudas longas positivas (pré-disposição para enfraquecimento da moeda). Já o Ien apresenta uma cauda longa negativa (pré-disposição para fortalecimento da moeda).

As estimativas empíricas da curtose foram utilizadas para selecionar a função de distribuição de probabilidade para os retornos da distribuição – normal ou *t-Student*. Modelos de volatilidade da família GARCH foram estimados fazendo uso destes preços e suas respectivas distribuições para os retornos (vide quadro acima).

Descobrimos que para o período considerado, apenas a volatilidade do Won pôde ser modelada através de um GARCH (1,1) simples. Já o Peso e Real foram modelados através de suas variações PGARCH e TGARCH, que permitem maior persistência da volatilidade bem como os seus efeitos assimétricos. Finalmente, o Zar também foi modelado através de um processo GARCH (1,1), mas que exigiu um ajuste ARMA (19,0) inicial.

De posse destes modelos, é possível construir distribuições dos preços dos forwards e até mesmo fazer previsões da volatilidade futura de cada moeda e até compará-la com a volatilidade implícita operada pelo mercado.

## 5 Estudos Adicionais

Uma continuação lógica da abordagem de modelagem de volatilidade através de processos GARCH seria a utilização dos modelos FIGARCH que possuem memória longa, bem como processos GARCH multivariados, modelos de volatilidade estocástica e modelos fatoriais.

Outra linha de estudo que pode ser seguida é de aplicarmos os mesmos modelos apresentados neste trabalho, mas com a utilização de distribuições outras que não as tradicionais Normal e *t-Student*. Em outras palavras, modelar  $\varepsilon_t$  através de distribuições tais como Normal assimétrica e *t-Student* assimétricas.



Finalmente, os modelos sugeridos para as diversas séries podem ser usados para fazer previsões.

### 5.1 Modelos com memória longa

O modelo FIGARCH (1,d,1) tem a forma:

$$[1 - \beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - \phi(L)(1 - L)^d] u_t^2$$

onde  $L$  é o operador de defasagem e  $(1 - L)^d$  é o operador de diferenciação fracional. A equação acima tem a seguinte representação em equivalente ARCH:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{1 - \beta} \omega + (\phi - \beta + d) u_{t-1}^2 + \left[ \beta(\phi - \beta + d) + \left( \frac{1-d}{2} - \phi \right) d \right] u_{t-2}^2$$

onde  $u_{t-1}^2$  é o quadrado do retorno do forward de um período passado,  $u_{t-2}^2$  é o quadrado do retorno do forward de dois períodos passados e os demais parâmetros são estimados através da maximização do operador de máxima-verossimilhança. O parâmetro  $d$ ,  $0 < d < 1$ , fornece informações a respeito do grau com que um choque no processo de volatilidade se propaga no futuro. Quando  $d = 1$ , o processo é equivalente ao modelo IGARCH e um choque na variância condicional,  $\sigma_t^2$ , no instante  $t$ , propaga-se indefinidamente no futuro.

### 5.2 Modelos GARCH Multivariados

Um modelo GARCH multivariado estima o processo da covariância conjunta de uma cesta de moedas. Ele permite que o investidor capture a correlação e contágios entre as volatilidades das moedas e é útil, por exemplo, para *portfolio managers* de ativos da América Latina ou do Leste Europeu. Entretanto, devemos ressaltar que o ajuste deste modelo é muito complicado do ponto de vista prático já que o número de parâmetros a serem estimados é muito grande.

Definimos primeiramente o estimador de covariância ponderado exponencialmente, ou EWMA, que tem a forma

$$\Omega_t = (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + \lambda\Omega_{t-1}$$

Na prática, o valor de  $\lambda$  é escolhido *ad hoc* e se assumirmos que  $\varepsilon$  segue uma distribuição normal multivariada com média zero a função de log-verossimilhança da série observada pode ser escrita como

$$\log L = -\frac{kT}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T |\Omega_t| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T (y_t - c)' \Omega_t^{-1}$$

onde  $y$  é o vetor das  $n$  séries temporais.

No contexto univariado, o modelo EWMA se reduz a

$$\Omega_t = (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}^2 + \lambda\Omega_{t-1}$$

que é um modelo simples GARCH (1,1) com  $a = 1 - \lambda$ ,  $b = \lambda$  e portanto  $a + b = 1$ .

### 5.3 Modelos de Volatilidade Estocástica

Os modelos ARCH pressupõem que a variância condicional depende de retornos passados. Já o modelo de volatilidade estocástica tem como premissa o fato que a volatilidade presente depende de seus valores passados, mas não depende dos retornos passados. Dizemos que a série  $y_t$  segue um modelo de volatilidade estocástica se

$$Y_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t = e^{h_t/2},$$

em que  $\varepsilon_t$  é uma seqüência estacionária, com média zero e variância um, e  $h_t$  é uma seqüência que pode ser estacionária ou não.

A formulação mais simples do modelo supõe que o logaritmo da volatilidade,  $h_t$ , seja dado por

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t,$$

na qual  $\eta_t$  é uma seqüência estacionária gaussiana, de médias zero e variância  $\sigma_\eta^2$  independente de  $\varepsilon_t$ . Segue-se que devemos ter  $|\alpha_1| < 1$ .

#### 5.4 Modelos Fatoriais

Uma outra opção consiste nos modelos fatoriais nos quais a volatilidade das séries é modelada como sendo a soma de dois componentes. O primeiro consiste em componentes comuns aos ativos, enquanto o segundo, a componentes idiossincráticos a cada um dos ativos. Engle & Kozicki (1994) desenvolveram um teste LM para saber se há componentes comuns na volatilidade das séries. Em Lin (1992) discute-se detalhadamente como deve ser feita a estimação deste tipo de modelo.

#### 6 Referências

Akaike, H. (1973). Maximum likelihood identification of Gaussian autoregressive moving average models. *Biometrika*, **60**, 255-265.

Akaike, H. (1977). *Applications of Statistics*. Ed. P. R. Krishnaiah. Amsterdam: North-Holland.

Bera, A.K. and Jarque, C.M. (1981). An efficient large sample test for normality of observations and regression residuals. Working paper in Econometrics No. 40, Australian National University, Canberra.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.

Bollerslev, T., Engle, R.F. and Nelson, D.B. (1984). Arch models. In Handbook of Econometrics, Vol. IV (eds. R.F. Engle and D.L. McFadden), 2959-3038. New York: North Holland.

Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Third Edition. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Correia, M.M.R da L. (1998). Memória Longa, Agrupamento de Valores Extremos e Assimetrias em Séries Financeiras. Dissertação de Mestrado, FEA-USP.

Ding, Z., Granger, C.W.J. and Engle, R.F. (1993). A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance* **1**, 83-106.

Enders, W. (1995). *Applied Econometric Analysis*. New York; Wiley.

Engle, R.F. (1982). Autoregressive Conditional heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* **50**, 987-1007.

Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993). Relationship between expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.

Hannan, E.J. (1980). The estimation of the order of an ARMA process. *The Annals of Statistics*, **8**, 1071-1081.

- Ling, S. and McAleer, M. (2001). Necessary and Sufficient Moment Conditions for the GARCH (r, s) and Asymmetric Power GARCH (r, s) Models. Discussion Paper 534, The Institute of Social and Economic Research: Osaka University.
- Ljung, G. and Box, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, **65**, 297-303.
- Morettin, P.A. and Toloi, C.M.C. (2004). *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, Projeto Fisher.
- Morettin, P.A. (2004). *Econometria Financeira – Um curso em Séries Temporais Financeiras*. São Paulo: IME-USP
- Pereira, P.L.V., Hotta, L.K., Souza, L.A.R. and Almeida, N.M.C.G. (2000). *Alternative Models to Extract Asset Volatility: A Comparative Study*. Special Section in Volatility: XX Brazilian Econometric Meeting.
- Pereira, P.L.V. (2005). *Estimação de Volatilidades*. RiskTech.com – Portal Brasileiro de Risco.
- Rissanen, J. (1978). Modeling by the Shortest Data Description. *Automática* **14**, 465-471.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *Annals of Statistics* **6**, 461-464.
- Tsay, R.S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. New York: Wiley.
- Zakoian, J.M. (1994). Threshold Heteroskedastic Models. *Journal of Economic Dynamics and Control* **18**, 931-955.
- Zivot, E. and Wang, J. (2003). *Modeling Financial Time Series with S-Plus*. New York: Springer.