

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bibfea@usp.br](mailto:bibfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM "MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS"

# Otimização de Portfólios de Renda Fixa Através da Alocação Estratégica Intertemporal de Ativos

Paulo Sergio Tai

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer

SÃO PAULO

2003

# Otimização de Portfólios de Renda Fixa Através da Alocação Estratégica Intertemporal de Ativos

Paulo Sergio Tai

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Economia,  
Administração e Contabilidade e ao  
Instituto de Matemática e Estatística  
da Universidade de São Paulo para  
obtenção do Título de Mestre.

Orientador: Prof. Pedro Paulo Schirmer

SÃO PAULO

2003

# Resumo

Atualmente no Brasil temos observado um grande aumento de categorias de tipos de fundos de investimento, tais como: fundos overnight (títulos de curtíssimo prazo pós-fixados), fundos DI (títulos pós-fixados de médio e longo prazo), fundos renda fixa ativa (mix de títulos prefixados e pós fixados), fundos derivativos (qualquer tipo de ativo podendo alavancar a carteira), fundos de ações, entre outros.

Entretanto, a utilização de modelos de alocação de ativos ainda é incipiente, mas altamente crescente, principalmente para fundos de ações.

O nosso estudo vai se basear em um fundo que denominaremos de renda fixa ativa, onde o gestor busca aumentar a rentabilidade do seu fundo alocando da melhor forma ativos prefixados e pós-fixados.

A maioria dos gestores aloca mais ou menos títulos prefixados de acordo com suas expectativas em relação à economia, isto é, faz de acordo com o seu feeling, utilizando ferramentas de stress testing, duration e convexidade da carteira de títulos.

Ao utilizar, por exemplo o método de stress, o gestor, ao alocar um percentual de ativos prefixados a uma determinada taxa de juros quer saber qual será o resultado em termos de rentabilidade, caso a taxa de juros de mercado alcance o nível de stress determinado por ele.

Temos então uma carência de ferramentas que nos permita fazer uma alocação de forma mais adequada, o que nos motivou a estudar a metodologia de otimização que iremos demonstrar a seguir

# Abstract

Nowadays in Brazil we have been observing a great increase of categories of types of investment funds, such as overnight funds (short period indexed titles), DI funds (medium and long period indexed titles), active fixed income funds (mix of discount titles and indexed titles), derivative funds (any kind of assets and being able to leverage the fund), stock funds, among others.

However the use of models of asset allocation is still incipient but highly growing, mainly for stock funds.

Our study will base on a fund that we will denominate of active fixed income fund, where the manager target to increase the profitability of his fund allocating in the best way fixed income and indexed assets.

Most of the portfolio managers allocates more or less fixed income assets in agreement with their expectations in relation to the economy, that is, does according

to his feeling, using tools of stress testing, duration and convexity of titles of their funds.

When using, for instance the stress method, the portfolio manager, when allocating a percentile of fixed income assets to a certain interest rate wants to know which will be the result in profitability terms, case the market interest rate reaches the level of stress foreseen for him.

We have a lack of tools then to allow to do us an allocation in a more appropriate way, what motivated us to study the optimization methodology that we will demonstrate to proceed.

# Agradecimentos

Sempre acreditei que não há recompensa sem sacrifícios. Nada é conquistado, se não há empenho, dedicação e vontade. Muitas vezes para chegarmos à realização de um objetivo temos que nos privar de muitas coisas agradáveis, mas ao alcançar a linha de chegada surge um sentimento de dever cumprido que nos enche o ego.

Não foi fácil dividir o meu tempo entre trabalhar durante o dia e freqüentar o curso de mestrado à noite. Não foi fácil perder noites, fins de semana, férias e até horário de almoço para estudar e fazer intermináveis listas de exercícios, preparar seminários e enfim terminar a dissertação, concluindo com a sua defesa perante uma banca de três brilhantes professores doutores.

E não foi só eu quem teve privações, minha família e meus amigos também tiveram que privar-se de mim.

Terminado o desabafo, gostaria de elogiar o curso de Mestrado Profissionalizante em Modelagem Matemática em Finanças que trouxe para mim uma nova



visão sobre modelagem e que me fez conhecer novas e poderosas ferramentas que serão úteis no meu dia a dia como gestor de fundos de investimentos do Banco Itaú.

Aliás, agradeço ao Banco Itaú, na figura de nosso vice-presidente Alfredo Setúbal, pela bolsa concedida para realização deste mestrado e pela confiança que tem depositado em mim nestes últimos anos principalmente na figura de meu chefe, Aguinaldo Antônio Andreo da Fonseca, o qual agradeço de coração o apoio dado nestes últimos anos, e que logo a Superintendência de Operações de Renda Fixa estará colhendo os frutos deste investimento.

Agradeço ao meu amigo e colega de trabalho de classe e de muitos trabalhos e listas de exercícios, Michael Viriato Araújo pelo seu companheirismo, espírito coletivo e motivação com o qual levamos este curso do começo ao fim.

Peço perdão à minha esposa Elza Hideco Makimore pelos momentos que não pude dar-lhe a atenção devida, pelos passeios, viagens e festas que deixamos de fazer e principalmente pelo mau humor que me dominava, quando não conseguia entender um assunto do curso de muita dificuldade.

À minha querida mãe, dona Laurinda Pereira Tai, que tanto reclamou nestes últimos dois anos que eu estava indo a sua casa cada vez menos e que eu a estava deixando de lado. Ao meu pai, seu Tai Tong Wah pela sua infinita paciência oriental comigo bem como os seus cuidados. Aliás, meus pais ainda me tratam como se eu fosse uma criança muito grande, mas o incentivo e o seu amor sempre me motivaram a não desistir de nada que eu pudesse alcançar.

Para finalizar, gostaria de fazer um agradecimento em especial para o Prof. Pedro Paulo Schirmer, meu orientador nesta dissertação, pela sua dedicação, atenção, motivação e pró-atividade que demonstrou não só comigo mas com todos os seus alunos orientado. Acrescentou-me muito as reuniões que tivemos para discutir sobre o tema de minha dissertação e onde pude aprender muito mais sobre modelagem em finanças. Agradeço também a sua imensa paciência comigo ao discutir assuntos puramente matemáticos que de início fugiam à minha compreensão, devido à minha formação em Administração de Empresas, mas que graças à sua didática consegui

ter o domínio dos mesmo. Agradeço não só por ter sido meu orientador como pela sua amizade franca e sincera.

# Índice

<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Conceitos, Características e Instrumentos Básicos de Renda Fixa</b> .....	<b>2</b>
1.1 Introdução .....	2
1.2 Terminologia Básica .....	2
1.3 Taxa de Juros Forward .....	6
1.4 Análise de Componentes Principais.....	8
1.5 Medidas de Risco em Taxas de Juros .....	12
1.5.1 Duration .....	13
1.5.2 Modify Duration.....	18
1.5.3 Convexidade .....	19
<b>2 Modelagem da Taxa de Juros</b> .....	<b>22</b>
2.1 Introdução .....	22
2.2 Classificação dos Modelos de Taxas de Juros: Equilíbrio x Não Arbitragem e Unifatoriais x Multifatoriais .....	23
2.3 Merton (1973) .....	25
2.4 Vasicek (1977).....	27
2.5 Cox-Ingersoll-Ross (CIR)(1985).....	28
2.6 Ho-Lee (1986) .....	30

2.7 Hull-White(1990) .....	32
2.8 Black-Derman-Toy (1990).....	33
2.9 Black-Karasinski (1991) .....	34
2.10 Heath-Jarrow-Morton (1992). ....	35
<b>3 Teoria da Utilidade.....</b>	<b>38</b>
3.1 Introdução .....	38
3.2 Noção de Utilidade .....	39
3.3 Utilidade Esperada .....	43
3.4 Funções Utilidade .....	44
3.5 Propriedade Econômicas da Função Utilidade .....	45
3.5.1 Aversão ao Risco do Investidor .....	48
<b>4 Programação Dinâmica .....</b>	<b>56</b>
<b>5 Modelos Intertemporais em Finanças .....</b>	<b>63</b>
5.1 Introdução .....	63
5.2 Problema da Alocação de Ativos de Renda Fixa .....	64
<b>6 Aplicações em Gestão de Fundos de Renda Fixa .....</b>	<b>79</b>
6.1 Simulações de Carteiras .....	82
<b>Conclusão .....</b>	<b>96</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>99</b>

# Lista de Figuras

1.1	Curva de Juros .....	4
1.2	Portfólio A .....	15
1.3	Portfólio B .....	16
1.4	Cálculo Duration Portfólio A .....	16
1.5	Cálculo Duration Portfólio B .....	16
1.6	Varição do Portfólio A .....	17
1.7	Varição do Portfólio B .....	17
1.8	Portfólios de Renda Fixa com diferentes convexidades .....	20
3.9	Curvas de Indiferença .....	42
3.10	Utilidade Crescente .....	42
3.11	Implicações da Atitude em Relação ao Risco .....	47
3.12	Mudanças na Aversão Absoluta ao Risco com Riqueza .....	50
3.13	Mudanças na Aversão ao Risco Relativa com Riqueza .....	51
4.14	Exemplo de Processo Multiestágio .....	58
5.15	Carteira de Mínima Variância .....	65
6.16	Curva de Juros de Mercado .....	81

6.17	Influência do Índice de Aversão ao Risco .....	84
6.18	.....	85
6.19	Influência do Prêmio de Risco .....	86
6.20	Influência da Volatilidade .....	87
6.21	Influência de $\kappa$ .....	88
6.22	Simulação 2 - Resultado Utilizando a Taxa Mínima .....	89
6.23	Simulação 2 - Resultado Utilizando a Taxa Máxima .....	90
6.24	Simulação 3 - Resultado Utilizando a Taxa Mínima .....	92
6.25	Simulação 3 - Resultado Utilizando a Taxa Máxima .....	92
6.26	Simulação 4 - Resultado Utilizando a Taxa Mínima .....	94
6.27	Simulação 4 - Resultado Utilizando a Taxa Máxima .....	94

# Introdução

Esta dissertação possui como tema a Otimização de Portfólios de Renda Fixa Através da Alocação Estratégica Intertemporal de Ativos. Está dividida da seguinte maneira:

**Capítulo 1:** Descrição de alguns conceitos básicos necessários para entendermos as ferramentas de modelagem de renda fixa utilizadas nesta dissertação. Será uma breve apresentação de alguns temas, como Terminologia de Taxas de Juros, Taxa Spot (à vista), Taxa a Termo, Taxa Instantânea, Análise dos Componentes Principais, Medidas de Risco em Taxa de Juros.

**Capítulo 2:** Apresentação de alguns dos modelos mais importantes de um fator para taxa de juros, a saber, de Merton (1973), Vasicek (1977), Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985), Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), Black-Karasinski (1991) e Heath-Jarrow-Morton (1992).

**Capítulo 3:** Neste capítulo abordaremos a Teoria da Utilidade clássica numa economia sem incerteza, e depois introduziremos os conceitos da Teoria da Utilidade numa economia com incerteza. Mostraremos algumas das mais importantes funções de utili-



dade e faremos uma análise das propriedades econômicas que envolve as funções utilidade numa economia com incerteza.

**Capítulo 4:** Neste capítulo daremos uma introdução na Programação Dinâmica, utilizando o Princípio de Bellman que é uma poderosa ferramenta para resolver problemas de portfólios dinâmicos, porque permite a transformação de um problema de otimização dinâmico em uma equação diferencial, para a qual existem vários métodos de solução.

**Capítulo 5:** Neste capítulo vamos demonstrar como chegar num modelo intertemporal para alocação ótima de ativos prefixados utilizando todos os conceitos de modelos de taxas de juros, função utilidade e programação dinâmica, a qual utilizaremos o princípio de Bellman, discutidos nos capítulos anteriores.

**Capítulo 6:** Aqui iremos fazer algumas aplicações em gestão de fundos de renda fixa fazendo simulações de carteiras montadas a partir do modelo de alocação demonstrado no capítulo anterior. As simulações serão feitas utilizando o modelo de Vasicek para gerar taxas de juros que vão remunerar as carteiras.

**Conclusão:** A dissertação é concluída onde são feitos os prós e contras da utilização do modelo.

# Capítulo 1

## Conceitos, Características e Instrumentos Básicos de Renda Fixa

### 1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo pretendemos apresentar alguns conceitos básicos necessários para entendermos as ferramentas de modelagem de renda fixa utilizadas nesta dissertação. Será uma breve apresentação de alguns temas, como Terminologia de Taxas de Juros, Taxa Spot (à vista), Taxa a Termo, Taxa Instantânea, Análise dos Componentes Principais, Medidas de Risco em Taxa de Juros (Duration e Convexidade).

### 1.2 Terminologia Básica

Nesta seção descreveremos as principais definições relativas a taxas de juros em tempo contínuo, ressaltando os inter-relacionamentos existentes entre taxas spot, taxas a termo e preços de títulos de renda fixa e outros conceitos igualmente importantes.

Primeiramente definiremos o horizonte de tempo como o intervalo entre  $t = 0$  e  $t = T$ , em que  $t$  é sempre a data analisada, a data atual e que portanto  $0 < t < T$ , onde  $T$  seria a data final.

Vamos agora definir um título descontado, sem pagamentos intermediários, o qual denotamos por  $P(t, T)$ , a denotação do preço deste título na data  $t$  que paga na data  $T$ , com  $t < T$ , uma unidade de moeda ao seu detentor, e logo  $P(T, T) = 1$ .

Para este título não há risco de crédito, ou seja o emissor não deixará de pagar o valor de face ao detentor deste título na data de vencimento  $T$ . Este título paga ao seu detentor um rendimento entre as datas  $t$  e  $T$ , de modo que, seu valor cresça de  $P(t, T) < 1$  até  $P(T, T) = 1$  em sua data de vencimento  $T$ . Este rendimento será definido como a taxa continuamente composta até o vencimento ou yield to maturity  $Y(t, T)$  para este título zero-coupon  $P(t, T)$ . Para este valor de  $Y(t, T)$ , vale:

$$P(t, T) = e^{-Y(t, T)(T-t)} \quad (1.1)$$

Deduzimos a expressão de  $Y(t, T)$  a partir de  $P(t, T)$  como:

$$Y(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t} \quad (1.2)$$

Uma das maneiras para a representação da estrutura temporal das taxas de juros ou curva de taxas de juros é observar, numa data  $t$  qualquer, rendimentos  $Y(t, T)$  de títulos com datas de vencimento  $T$  distintas. Esta estrutura temporal das taxas de juros ou curva de taxas de juros tem o seu formato influenciado pela volatilidade das taxas e o grau de correlação entre as taxas de curto e longo prazo, gerando inclinações positivas ou negativas da curva, ser plana, com curvatura, pontos de inflexão. Como podemos observar o maior desafio na modelagem de renda fixa é capturar o comportamento estocástico da curva de juros.

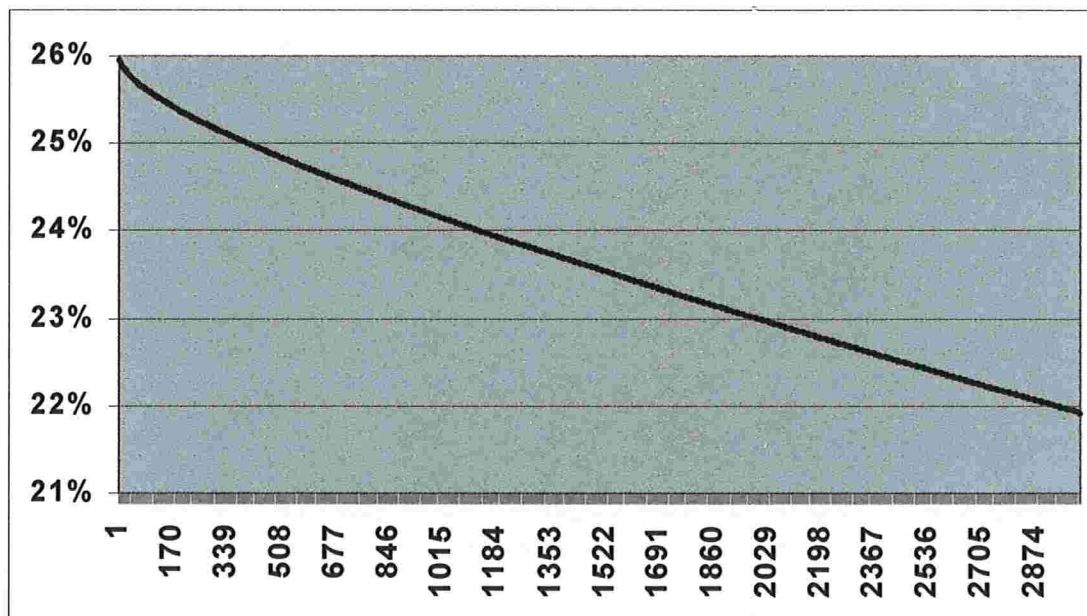


Fig. 1.1. Curva de Juros

Atualmente no Brasil a curva de juros é construída utilizando instrumentos financeiros tais como os preços dos contratos futuros de DI negociados na BM&F (Bolsa Mercantil & de Futuros) e as taxas de swap Pré x CDI. Ao construir esta curva de juros é muito importante levar em conta a liquidez destes instrumentos bem como a qualidade da informação nos preços destes instrumentos e escolher o método de interpolação desta curva.

Quando o intervalo de tempo  $(t, T)$  tende a zero, a taxa  $Y(t, T)$  é denominada taxa de juros instantânea ou taxa de juros de curto prazo e corresponde à taxa de juros livre de risco na data  $t$  para captação ou empréstimos para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , ou seja com vencimento em  $t + dt$ :

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T) = Y(t, t) \quad (1.3)$$

Desta definição da taxa de juros instantânea  $r_t$ , podemos criar um título que pague o acúmulo contínuo das taxas de juros de curto prazo em um horizonte de tempo definido em  $t$ . Definindo  $B_t$  como o valor de uma conta bancária no tempo  $t \geq 0$ , cujo depósito inicial  $B_0 = 1$  é reinvestido à taxa de juros livre de risco de curto prazo  $r_t$ , obtemos para a variação do depósito a seguinte equação:

$$dB_t = r_t B_t dt \quad (1.4)$$

Como podemos observar a equação (1.4) é uma equação diferencial ordinária (EDO)

cuja solução é:

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (1.5)$$

### 1.3 Taxa de Juros Forward

As taxa forwards são caracterizadas por três instantes de tempo, onde um deles é o tempo  $t$  o qual a taxa de juros é considerada, o tempo intermediário qualquer  $T$  e o vencimento  $S$ , com  $t < T < S$ . Taxas forward são taxas de juros que podem ser travadas hoje para um investimento num período de tempo futuro, e são formadas consequentemente com a estrutura a termo corrente de fatores de desconto. Dado um vencimento  $S > T$  teremos dois títulos:

$$P(t, S) = e^{-Y(t, S)(S-t)} \quad (1.6)$$

$$P(t, T) = e^{-Y(t, T)(T-t)} \quad (1.7)$$

Conhecendo as expressões acima, a taxa forward será definida pela seguinte equação:

$$F(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \left( \frac{P(t, S)}{P(t, T)} - 1 \right) \quad (1.8)$$

O que temos na expressão 1.8 é uma taxa de juros definida para o período que inicia a partir do período futuro  $T > t$  e vence no período  $S > T > t$ .

No limite, quando intervalo de tempo entre  $S$  e  $T$  tende a zero, definimos a taxa a termo instantânea como a taxa de juros livre de risco, acordada no tempo  $t$  e válida para um intervalo de tempo infinitesimal futuro que se inicia em  $T$ , isto é:

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) &= \lim_{S \rightarrow T^+} - \frac{1}{P(t, S)} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{S - T} = \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} \\ &= - \frac{\ln \partial P(t, T)}{\partial T} \end{aligned}$$

Portanto:

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = - \frac{\ln \partial P(t, T)}{\partial T} \quad (1.9)$$

Podemos verificar que se tomarmos  $T = t$ , chegamos à conclusão que:

$$f(t, t) = r_t \quad (1.10)$$

Integrando-se a equação (1.8) entre  $t$  e  $T$  temos que:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right) \quad (1.11)$$

O preço do discount bond  $P(t, T)$ , além de ser uma função de seu rendimento composto continuamente  $Y(t, T)$ , também é expresso através do acúmulo das taxas a termo instantâneas  $f(t, T)$ .

Portanto, de acordo com a relação entre  $Y(t, T)$ ,  $f(t, T)$ ,  $P(t, T)$ , a estrutura temporal das taxas de juro pode ser montada a partir de qualquer um dos três conceitos.

## 1.4 Análise de Componentes Principais

O apreçamento de instrumentos de renda fixa depende do movimento da curva de juros, sendo portanto, indispensável o desenvolvimento de um modelo viável para descrever a dinâmica da curva de juros.

Esta curva de juros é obtida a partir de um certo número de instrumentos, os quais não são independentes, são correlacionados entre si. A análise de componentes principais



(PCA) escolhe novas variáveis sem correlações. O PCA é um método padrão para extrair as mais importantes fontes não correlacionadas de variação em um sistema multivariado.

O PCA é um método estatístico aplicado a um conjunto de dados com muita aplicação de álgebra linear, pois é baseado na análise de autovetores e autovalores. Cada componente principal é uma combinação linear destas colunas, onde as ponderações são escolhidas da seguinte forma:

- \* o primeiro componente principal explica a maior parte de variação de um variável em  $X$ , o segundo componente explica a maior parte da variação remanescente, e assim por diante;
- \* os componentes principais são não-correlatos entre si

O PCA estima uma matriz que transforma os eixos iniciais de maneira a eliminar a correlação entre os dados. Esta transformação preserva a ortogonalidade entre os eixos e as novas coordenadas podem ser ordenadas pela variância.

O componente principal possui a maior variância. Os componentes com pequena variância não tem relevância para descrição dos dados. Os componentes principais podem ser classificados em ordem decrescente de variância. Geralmente apenas as primeiras

serão responsáveis por grande parte da variância total. Essas carregam a grande parte da informação relevante. Pode-se então aproximar o sistema como descrito apenas por essas variáveis de maior variância.

O PCA é um ótimo método de aproximação da descrição de um sistema com um número menor de variáveis, com redução de dimensionalidade. Os fatores alimentados são independentes do tempo e portanto são determinísticos

Suponha que estamos observando taxas de juros spot no tempo  $t_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$ , e as taxa de juros  $r_{t_i}(\tau_j), j = 1, 2, \dots, k$ . O procedimento para encontrar os componentes principais é:

1. Calcular as diferenças  $d_{i,j} = r_{t_{i+1}}(\tau_j) - r_{t_i}(\tau_j)$ . Os termos  $d_{i,j}$  são considerados as observções de uma variável aleatória  $d_j$ .
2. Formar a matriz de covariância  $\Sigma = cov(d_1, \dots, d_k)$ . Escrever  $\Sigma = \sum_{i,j}$  onde  $\sum_{i,j} = cov(d_i, d_j)$ .

- 3 Encontrar uma matriz  $P$  tal que  $P' = P^{-1}$  e  $P \Sigma P'$  é diagonal. (Assumir que  $\Sigma$  é não degenerada). Podemos supor que  $P$  foi escolhido de forma que

$$P \Sigma P' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k),$$

com  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ . Escrevemos  $P = \{p_{i,j}\}$ .

- 4 Monta-se:

$$e_i = \sum p_{i,j} d_j, i = 1, \dots, k.$$

$e_i$  é uma variável aleatória e

$$\begin{aligned} \text{cov}(e_i, e_j) &= \text{cov}\left(\sum_p p_{i,p} d_p, \sum_q p_{j,q} d_q\right) \\ &= \sum_{p,q} p_{i,p} \text{cov}(d_p, d_q) p_{j,q} \\ &= \delta_{i,j} \lambda_j, \end{aligned}$$

onde  $\delta_{i,j}$  é o delta Kronecker,  $e_i$  e  $e_j$  são não correlatos a não ser que  $i = j$ , quando

$$\text{var}(e_j) = \lambda_j.$$

Os componentes principais são os  $k$  vetores  $\{p_{i,j}\}_{j=1,2,\dots,k}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Cada vetor de dados introduzidos podem ser escrito como a combinação linear de componentes principais. Esta é a representação dos componentes principais das var-

iáveis originais que ficam com núcleo dos modelos de PCA. Frequentemente apenas alguns primeiros componentes principais são utilizados para representar cada uma das variáveis de input, porque são suficiente para explicar a maioria das variações do sistema.

## **1.5 Medidas de Risco em Taxas de Juros**

Desconsiderando as modificações no crédito do emissor, a única fonte de alteração no preço de um ativo de renda fixa em uma data  $t$  qualquer é decorrente de alterações da Estrutura a Termos das Taxas de Juros.

Este é o Risco de Mercado para os ativos de renda fixa, onde iremos considerar os seguintes casos de mudanças nos juros de mercado:

- \* Estrutura Flat e pequena mudança
- \* Estrutura Flat e grande mudança
- \* Estrutura não Flat e mudança paralela
- \* Estrutura não Flat e alteração das inclinações

### 1.5.1 Duration

Na administração de uma carteira de títulos de renda fixa é importante que o investidor possa determinar a sensibilidade do rendimento em função da oscilação da taxa de juros. A elevação ou queda da taxa de juros tem efeito direto em portfólio de renda fixa, e este efeito se manifesta no próprio valor de mercado deste portfólio.

Esta relação pode ser avaliada estimando-se o valor de mercado da carteira e acompanhando a evolução deste valor segundo a mudança das taxas de juros de mercado.

Em 1939, Frederick Macaulay introduziu o conceito de duration. A idéia foi "re-descoberta" nos anos 70 e transformou-se numa das ferramentas mais utilizadas para a administração de títulos de renda fixa.

A definição de duration é a média ponderada dos prazos a decorrer dos títulos de um portfólio em função de seus fluxos de caixa (valores de resgate), trazidos a valor presente.

A fórmula é a seguinte:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{C_t \times t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+i)^t}} \quad (1.13)$$

onde:

$D$  =Duration

$C_t$  = cash flow ou pagamento de juros ou principal no tempo  $t$ .

$t$  = qualquer ponto no tempo onde ocorra algum pagamento (juros ou principal).

$i$  = taxa de juros paga pelo título. Se o título estiver sendo contabilizado pelo seu valor de mercado, a taxa a ser utilizada aqui é a taxa de mercado para o prazo de vencimento do título.

A duration mede o tempo que leva para uma carteira recuperar o seu valor na curva (principal + juros reaplicados) após uma alteração na taxa de juros.

Pode-se interpretar matematicamente a duration como a elasticidade da curva do portfólio de um determinado nível de juros. A elasticidade representa a mudança percentual em uma variável dependente dada uma oscilação percentual na variável independente.

No caso de um portfólio de títulos de renda fixa, a elasticidade é negativa, ou seja, uma elevação na taxa de juros provocará queda no valor do portfólio e vice-versa.

Em função disso, sabendo-se que  $P$  é o valor do portfólio;  $\Delta P$ , a variação nesse valor;  $\Delta i$ , a variação na taxa de juros, pode-se estabelecer a seguinte relação entre  $\Delta P$  e

$\Delta i$ :

$$\alpha = -\frac{\frac{\Delta P}{P}}{\frac{\Delta i}{(1+i)}} \quad (1.14)$$

$$\alpha = -\frac{\Delta P (1+i)}{\Delta i P}$$

onde  $\alpha$  é exatamente a duration.

Da equação 1.1 tem-se que:

$$\Delta P = -P \times D \times \frac{\Delta i}{(1+i)} \quad (1.15)$$

ou seja, através da duration pode-se estimar a variação do valor do portfólio em função da variação da taxa de juros. Em outras palavras, a duration permite medir a sensibilidade do valor de um portfólio diante de variações na taxa de juros.

A seguir daremos um exemplo de cálculo de Duration onde temos dois portfólios de renda fixa A e B:

<b>Título</b>	<b>Prazo para o vencimento</b>	<b>Valor no vencimento</b>	<b>Taxa de juros de mercado</b>
1	40 dias úteis	R\$1.000.000	25% aa
2	20 dias úteis	R\$ 500.000	23% aa
3	5 dias úteis	R\$2.000.000	21% aa

Fig. 1.2. Portfólio A

Título	Prazo para o vencimento	Valor no vencimento	Taxa de juros de mercado
1	40 dias úteis	R\$1.000.000	25% aa
2	20 dias úteis	R\$2.000.000	23% aa
3	5 dias úteis	R\$ 500.000	21% aa

Fig. 1.3. Portfólio B

Vamos calcular a duration do portfólio A e B:

$$\text{Duration} = \frac{\sum_{t=1}^n C_t \times t}{\sum_{t=1}^n C_t} = \frac{1.000 \times 40}{(1+0,25)^{40/252}} + \frac{500 \times 20}{(1+0,23)^{20/252}} + \frac{2.000 \times 5}{(1+0,21)^{5/252}} \Rightarrow$$

$$\frac{1.000}{(1+0,25)^{40/252}} + \frac{500}{(1+0,23)^{20/252}} + \frac{2.000}{(1+0,21)^{5/252}}$$

$$\text{Duration} = \frac{38.608,01 + 9.837,05 + 9.962,25}{965,20 + 491,85 + 1.992,45} = 16,93$$

Fig. 1.4. Cálculo Duration Portfólio A

$$\text{Duration} = \frac{\sum_{t=1}^n C_t \times t}{\sum_{t=1}^n C_t} = \frac{1.000 \times 40}{(1+0,25)^{40/252}} + \frac{2.000 \times 20}{(1+0,23)^{20/252}} + \frac{500 \times 5}{(1+0,21)^{5/252}} \Rightarrow$$

$$\frac{1.000}{(1+0,25)^{40/252}} + \frac{2.000}{(1+0,23)^{20/252}} + \frac{500}{(1+0,21)^{5/252}}$$

$$\text{Duration} = \frac{38.608,01 + 39.348,18 + 2.490,56}{965,20 + 1.967,41 + 498,11} = 23,45$$

Fig. 1.5. Cálculo Duration Portfólio B



Vamos imaginar que a curva de juros aumente 1000 basis points. O Cálculo da variação do preço em função desta variação para os dois portfólios será:

$$A_{\text{antes}} = \frac{1.000}{(1+0,25)^{40/252}} + \frac{500}{(1+0,23)^{20/252}} + \frac{2.000}{(1+0,21)^{5/252}} = 965,20 + 491,85 + 1.992,45 = 3.449,50$$

$$A_{\text{depois}} = \frac{1.000}{(1+0,35)^{40/252}} + \frac{500}{(1+0,33)^{20/252}} + \frac{2.000}{(1+0,31)^{5/252}} = 953,48 + 488,81 + 1.989,31 = 3.431,60$$

$$\Delta_A = \left( \frac{3.431,60}{3.449,50} - 1 \right) \times 100 = -0,52\%$$

Fig. 1.6. Variação do Portfólio A

$$B_{\text{antes}} = \frac{1.000}{(1+0,25)^{40/252}} + \frac{2.000}{(1+0,23)^{20/252}} + \frac{500}{(1+0,21)^{5/252}} = 965,20 + 1.967,41 + 498,11 = 3.430,72$$

$$B_{\text{depois}} = \frac{1.000}{(1+0,35)^{40/252}} + \frac{2.000}{(1+0,33)^{20/252}} + \frac{500}{(1+0,31)^{5/252}} = 953,48 + 1.955,24 + 497,33 = 3.406,05$$

$$\Delta_B = \left( \frac{3.406,05}{3.430,72} - 1 \right) \times 100 = -0,72\%$$

Fig. 1.7. Variação do Portfólio B

Podemos observar que a desvalorização do portfólio B foi maior, por ter maior duration, o que mostra ser esta uma medida do risco de um portfólio de renda fixa. Quanto maior a duration, maior a sensibilidade à variação das taxas de juros, e vice-versa.

### 1.5.2 Modify Duration

A modify duration ou duration modificada é uma transformação algébrica da duration, que permite relacionar diretamente a oscilação do preço de um título com a oscilação das taxas de juros. A duration modificada tem a seguinte equação:

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)} \quad (1.16)$$

onde:

$D$  = Duration

$i$  = Taxa anual de juros

$n$  = número de pagamentos feito durante um ano (cupons)

E a relação entre a duration modificada e a variação da taxa de juros é dada pela seguinte equação:

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100 \cong -D_{\text{mod}} \times \Delta i \quad (1.17)$$

$\frac{\Delta P}{P}$  = variação percentual no preço do título

$D_{\text{mod}}$  = duration modificada

$\Delta i$  = variação na taxa de juros anual

### 1.5.3 Convexidade

A duration é a primeira aproximação de como o preço de um bond ou valor de um portfólio mudará quando a taxa de juros muda. Uma segunda aproximação pode ser usada para melhorar a estimação dos preços modificados obtidos do cálculo de duration.

Esta segunda aproximação é chamada convexidade. Mais especificamente, a medida de convexidade pode ser computada, e então o ajuste de convexidade para mudança percentual de preço pode ser feita. Por ajuste significa que a mudança percentual de preço aproximada como a calculada pela duration pode ser ajustada.

Para pequenos movimentos paralelos na curva de juros a variação do valor de um portfólio depende somente da duration mas, quando variações das taxas de juros são moderadas ou grandes, a análise da convexidade é muito mais importante.

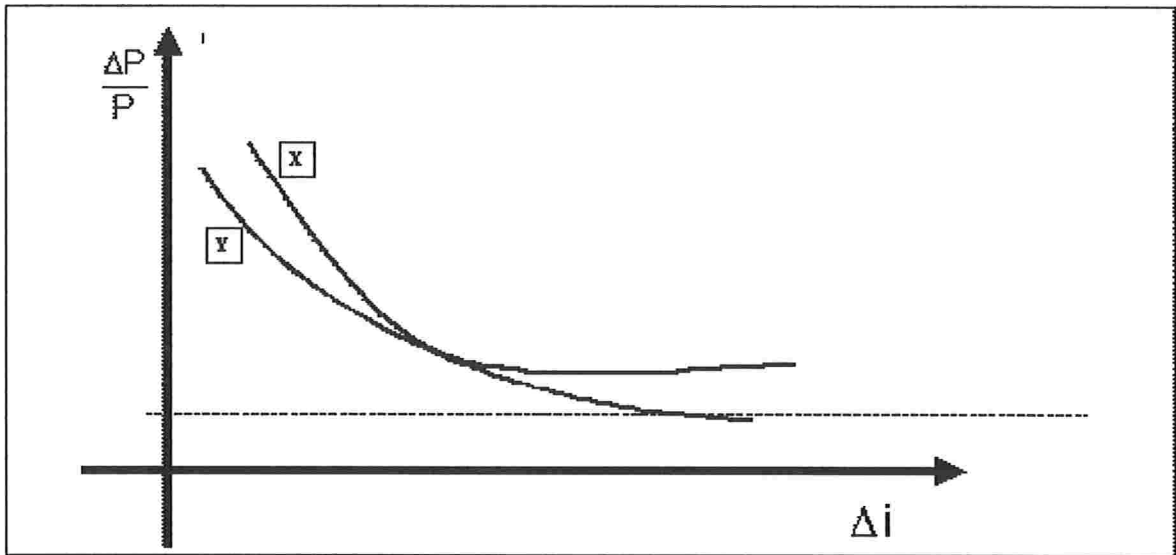


Fig. 1.8. Portfólios de Renda Fixa com diferentes convexidades

No gráfico anterior temos dois portfólios X e Y com a mesma duration, podemos constatar que para pequenas variações na taxa de juros teremos a mesma variação percentual dos portfólios. Entretanto para grandes variações nas taxas de juros, observamos que os portfólios comportam-se diferentemente.

O portfólio X tem mais convexidade (ou curvatura) que o portfólio Y. O valor do portfólio X aumenta num percentual maior que do portfólio Y quando a taxa de juros cai, cai menos que o valor portfólio Y quando a taxa de juros aumenta.

A medida da convexidade é dada pela seguinte expressão:

$$C = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{c_i t_i^2}{(1+i)^{t_i}}}{P} \quad (1.18)$$

# Capítulo 2

## Modelagem da Taxa de Juros

### 2.1 Introdução

Neste capítulo faremos a apresentação de alguns dos modelos de taxas de juros mais importantes de forma bem resumida. Discutiremos conceitos de modelos de equilíbrio e não arbitragem, modelos de um fator e multifatoriais. Vamos apresentar alguns modelos de um fator para taxa de juros como os modelos de Merton (1973), Vasicek (1977), Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985), Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), Black-Karasinski (1991) e Heath-Jarrow-Morton (1992).

## 2.2 Classificação dos Modelos de Taxas de Juros: Equilíbrio x Não

### Arbitragem e Unifatoriais x Multifatoriais

Inicialmente é necessário determinar qual será a variável estocástica a ser modelada, onde há três a serem seguidas: a modelagem dos preços dos títulos  $P(t, T)$ , da taxa de juros spot  $r_t$  e da taxa a termo instantânea  $f(t, T)$ .

Os modelos de equilíbrio são caracterizados por colocar a determinação da taxa de juros como resultado de um equilíbrio econômico. A determinação da taxa de juros é endógena. Na prática, em modelos de equilíbrio a estrutura temporal das taxas de juros é resultado do modelo e não é exatamente igual à curva de taxa de juros atualizada e verificada no mercado, constituindo-se num grande inconveniente para o apreçamento de ativos derivados de taxas de juros, pois se a curva de juros de mercado, que é a principal variável para o cálculo do preço dos ativos derivados de taxas de juros, não é reproduzida, o preço destes ativos embutirão uma grande margem de incerteza.

Os modelos de Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox-Ingersoll-Ross (CIR) (1985) pertencem à classe destes modelos de equilíbrio.

Os modelos de não arbitragem possuem termos dependentes do tempo, o que permite a modelagem exata das estruturas a termo de taxas de juros e de volatilidades, que são os inputs para o modelo. Esta característica torna estes modelos implementáveis do ponto de vista prático e com grande aceitação por parte dos usuários.

Os principais modelos desta categoria são Ho-Lee (1986), Hull-White (1990), Black-Derman-Toy (1990), Black-Karasinski (1991) e Heath-Jarrow-Morton (1992).

A modelagem também requer um número determinado de variáveis de estado para o processo estocástico das taxas de juros e, nesse caso, a escolha recai sobre modelos unifatoriais ou modelos multifatoriais.

Os modelos unifatoriais ou de um fator assumem que apenas uma variável de estado determina toda a estrutura a termo de taxa de juros, na maioria dos casos a taxa de juros spot  $r_t$ . Esta hipótese implica em correlação perfeita entre títulos para qualquer prazo de vencimento, evidenciando que qualquer deslocamento da curva de juros será paralelo.

Os resultados conhecidos da análise de componentes principais justificam essa decisão pelo fato de o primeiro fator, o nível de taxa de juros, explicar entre 85%-90% da variação dos juros. Dessa forma, à primeira vista, a praticidade em usar um fator no mod-



elo de taxa de juros parece bem argumentada e pode ser empregada para os derivativos que não dependam da correlação entre as taxas spot ou a termo. Por outro lado, os mesmos resultados de componentes principais indicam que 90-95% da estrutura a termo é explicada com dois fatores, o nível e a inclinação da curva de juros. Dessa forma, um modelo de dois fatores é o mais recomendado para aqueles derivativos de juros que dependam em maior intensidade do grau de correlação entre duas taxas diferentes.

O que é observado no mercado em alguns momentos são variações acentuadas de inclinação e curvatura da curva de juros, o que justifica o uso da modelagem multifatorial. Entretanto ao optar por esta modelagem a complexidade computacional é muito maior. O modelo de Heath-Jarrow-Morton é um dos principais modelos multifatoriais.

### 2.3 Merton (1973)

A primeira proposta de modelagem do processo estocástico de taxas de juros surgiu no clássico artigo de Merton, publicado em 1973. Considerando a medida de probabilidade natural  $P$ , o comportamento da taxa de juros em tempo contínuo é descrito pela equação a seguir:

$$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.1)$$

Os termos  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes positivas e  $W_t$  é o movimento browniano, definido na medida  $P$ , o qual é responsável pela incerteza do comportamento futuro das taxas de juros. O modelo de Merton é considerado unifatorial por ter apenas um componente aleatório  $W_t$  envolvido, e pertence à categoria de modelos de equilíbrio porque gera a curva de juros, não reproduzindo fielmente a curva de juros encontrada no mercado. Calculando a solução para a equação diferencial estocástica de Merton, podemos analisar também a função de distribuição de probabilidade para as taxas de juros.

$$r_t = r_s + \mu dt + \sigma \int_s^t dW_u \quad (2.2)$$

Uma das vantagens do modelo é sua tratabilidade analítica ao fornecer fórmulas fechadas para o preço dos ativos derivados de taxas de juros. Pelo fato da distribuição do modelo ser Gaussiana, existe a possibilidade de gerar taxas de juros negativas.

Devido ao modelo gerar a curva de juros endogenamente, o mesmo não consegue reproduzir os preços negociados em mercado para os títulos de renda fixa sem cupons. O caráter de instabilidade da média e da variância, as quais podem assumir valores infinitos

à medida que a diferença  $(t - s)$  aumenta, contribui negativamente para a avaliação do modelo, ficando a implementação prática deste modelo totalmente comprometida.

## 2.4 Vasicek (1977)

No artigo de 1977, Vasicek aplicou o processo de Ornstein-Uhlenbeck para a dinâmica estocástica das taxas de juros de curto prazo:

$$dr_t = \kappa (\theta - r_t) dt + \sigma dW_t \quad (2.3)$$

O termo  $\theta$  representa a expectativa de longo prazo para a média de taxa de juros de curto prazo  $r_t$ , de outra forma poderíamos dizer que se espera que as taxas  $r_t$  revertam para o patamar  $\theta$ . Sempre que o termo  $\theta - r_t$  for positivo, o parâmetro de velocidade de reversão à média indicará qual a intensidade e a força do ajuste que levará a taxa de juros  $r_t$  subir e aproximar-se de  $\theta$  a longo prazo. Similarmente quando o contrário ocorrer, ou seja, quando  $\theta - r_t$  for negativo, indicará a velocidade de realização do ajuste que conduzirá a taxa de juros  $r_t$  a cair e atingir níveis próximos a  $\theta$  no longo prazo. A solução da equação estocástica 2.3 é:

$$r_t = \theta + (r_s - \theta) e^{-\kappa(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u \quad (2.4)$$

A equação diferencial estocástica que descreve o comportamento dos preços dos títulos de renda fixa é determinada pela aplicação do lema de Itô a  $P(r_t, t, T)$  em conjunto com 2.4:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = (r_t + b(t, T) \lambda \sigma) dt + b(t, T) \sigma dZ_t \quad (2.5)$$

Dentre as vantagens da utilização do modelo de Vasicek há o fato de  $r_t$  ser Gaussiana e assim existir fórmulas fechadas para preços de ativos derivados de taxas de juros. A introdução da reversão à média evita a presença de taxas explosivas, ao contrário do modelo de Merton. Entretanto, por ser um modelo de equilíbrio, o seu uso para apreçamento é perigoso visto que o mesmo não consegue calcular o preço do título de renda fixa subjacente e verificado no mercado. As variações de formato que a curva gerada pelo modelo de Vasicek permite são bastante limitadas não possibilitando, por exemplo, dupla curvatura na curva de juros. Existe também o problema das taxas de juros serem negativas. A implementação é difícil por depender de parâmetros não observáveis no mercado.

## 2.5 Cox-Ingersoll-Ross (CIR)(1985)

Num contexto de equilíbrio geral intertemporal no mercado de ativos, com os agentes econômicos com funções de utilidades bem definidas, e do lado da produção as oportu-

nidades sendo influenciadas pela evolução do estado da tecnologia, as taxas de juros são determinadas endogenamente através do equilíbrio geral que ocorre entre a oferta e a demanda pelos ativos da economia. Desta forma, por meio de uma construção elegante da teoria microeconômica de equilíbrio geral, Cox, Ingersoll e Ross (CIR) propõem a fórmula para a dinâmica da taxa de juros em tempo contínuo:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (2.6)$$

Os termos  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes positivas e  $W_t$  é o movimento browniano, definido na medida P. CIR também é um modelo em que os preços dos títulos de renda fixa para qualquer prazo de vencimento, são determinados somente pela taxa de juros de curto prazo  $r_t$ . Como no modelo de Vasicek, CIR possui a mesma característica de reversão à média onde a taxa de juros tende para um nível  $\theta$  no longo prazo, cuja velocidade de ajuste é dada por  $\kappa$ .

O grande avanço neste modelo e diferença em relação a Vasicek é que a possibilidade de taxa de juros é excluída devido ao termo  $\sigma\sqrt{r_t}$ . A variância total de  $r_t$  cresce se a taxa de juros crescer, sendo portanto proporcional. A função de densidade de probabilidade para a taxa de juros é uma qui-quadrado não central, cujos valores esperados condicionais para a

média e variância são:

$$E [r_t | r_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \quad (2.7)$$

$$Var [r_t | r_s] = r_s \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-2\kappa(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 \quad (2.8)$$

Nas duas expressões anteriores, a medida que o tempo  $t$  aproxima-se do infinito, a taxa de juros tende para o valor de  $\theta$  e a variância de  $r_t$  tende a  $\theta \frac{\sigma^2}{2\kappa}$ , o que implica em estacionariedade da distribuição de probabilidade. O modelo também fornece fórmulas fechadas para ativos de renda fixa e opções europeias. A grande desvantagem é não se ajustar à curva de juros de mercado. Sua implementação também tem problemas por depender de parâmetros não observáveis em mercado.

## 2.6 Ho-Lee (1986)

No pioneirismo da construção de um modelo de não-arbitragem para a estrutura a termo das taxas de juros destacaram Thomas Ho e Sang-Bin Lee (HL) em 1986. HL criaram um modelo binomial discreto multiperíodo que replica a estrutura inteira das taxas de juros negociadas no mercado. Esta árvore binomial descreve a evolução de toda a estrutura a termo

durante um período de tempo, não se limitando aos preços de títulos. Esta contribuição à modelagem de renda fixa, permitiu uma passagem dos modelos de equilíbrio para os modelos de não-arbitragem, os quais corrigem a limitação dos primeiros por produzir uma estrutura a termo que corresponde àquela observada no mercado. A transformação do modelo discreto para tempo contínuo segue na equação a seguir:

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t^Q \quad (2.9)$$

onde  $\theta_t$  é uma função dependente do tempo e que se ajusta para reproduzir os preços dos títulos descontados,  $\sigma$  é a volatilidade da taxa de juros de curto prazo e  $W_t^Q$  é um processo estocástico na medida de probabilidade neutra ao risco Q. Como a árvore binomial calcula preços livres de arbitragem por meio das probabilidade neutras ao risco, sua transformação para o tempo contínuo é diretamente para a medida Q. O modelo HL nada mais é que uma versão modificada do modelo de Merton, diferenciando-se apenas porque possui o termo  $\theta$  para a tendência dependente do tempo.

A grande vantagem do modelo é a possibilidade de reproduzir a curva das taxas de juros de mercado. A distribuição gaussiana facilita o uso para cálculo de preços de títulos, opções européias sobre títulos descontados e sobre títulos que pagam cupom. Já ,

a implementação de árvore binomial torna possível a avaliação de derivativos de taxas de juros ligeiramente mais complexos, como opções americanas. A inexistência de reversão à média constitui-se um retrocesso em relação aos modelos de Vasicek e CIR, que somada à distribuição normal para  $r_t$ , tornando relevante a preocupação com taxas de juros negativas.

## 2.7 Hull-White(1990)

John Hull e Alan White apresentam uma formulação mais abrangente para o processo estocástico de taxas de juros de curto prazo, dentro do contexto de modelo com um fator de incerteza

$$dr_t = [\theta_t - a_t(b - r_t)] dt + \sigma_t r_t^\beta dW_t \quad (2.10)$$

Este modelo incorpora tanto a reversão à média (Vasicek) como a consistência com a curva de juros observada no mercado (Ho-Lee). O modelo Hull-White traz uma novidade que é permitir que todos os parâmetros sejam dependentes do tempo e assim, reproduzir as estruturas a termo das taxas de juros e de volatilidades.

O processo estocástico direciona a taxa de juros de curto prazo para um nível médio  $\theta_t = a_t + b$ , com velocidade de reversão  $\theta_t$  e volatilidade  $\sigma_t r_t^\beta$ . Com relação a cada um dos termos da equação 2.10, a função  $\theta_t$  é a responsável por ajustar-se exatamente à estrutura a



termos inicial das taxas de juros  $\sigma_t$  ajusta-se a estrutura a termos da volatilidade e a função  $a_t$  representa a velocidade de reversão à média. Para o caso em que  $\beta = 0$  e  $\beta = 0.5$ , Hull e White denominaram dois modelos, respectivamente Vasicek Extendido e Cox-Ingersoll-Ross Extendido.

## 2.8 Black-Derman-Toy (1990)

O modelo de Black, Derman e Toy (BDT) é um modelo Markoviano de um fator, isto é, apenas o valor atual da taxa de juros de curto prazo  $r_t$  determina a estrutura a termo vigente bem como sua evolução no tempo. BDT mostram como implementar o modelo em uma árvore binomial e destacam a facilidade em replicar a estrutura a termo de juros com volatilidade constante ou replicar as duas estruturas a termo simultaneamente. BDT, também, é uma evolução clara em relação ao modelo de Ho-Lee, pois este último assume volatilidade constante para as taxas de juros de qualquer prazo. A vantagem de BDT, não é somente, a possibilidade de ajustar uma estrutura a termo de volatilidades das taxas de juros. Mas também, ao adotar a hipótese de que  $r_t$  possui distribuição lognormal, BDT evita a ocorrência de taxas de juros negativas e resolve um inconveniente da maioria dos

modelos de um fator que assumem a distribuição gaussiana para a taxa de juros de curto prazo.

A lognormalidade para  $r_t$ , todavia reduz a tratabilidade analítica do modelo, pois não é mais possível obter soluções fechadas para precificar títulos e opções europeias, havendo a necessidade de esquemas numéricos para resolver as taxas de juros, volatilidades e preços de títulos em cada nó da árvore.

Em tempo contínuo, podemos analisar algumas características analíticas do modelo.

$$d \ln (r_t) = \left[ \theta_t - \frac{\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}}{\sigma_t} \ln (r_t) \right] dt + \sigma_t dW_t \quad (2.11)$$

onde  $\frac{\partial \sigma_t}{\partial t}$  é a velocidade de reversão à média, e  $\theta_t$  dividido por este fator é um nível de reverão à média dependente do tempo.

## 2.9 Black-Karasinski (1991)

Da equação geral para o modelo de Black-Karasinski (BK), podemos concluir que o modelo BDT é um caso particular de BK.

$$d \ln (r_t) = [\theta_t - a_t \ln (r_t)] dt + \sigma_t dW_t \quad (2.12)$$

Ao acrescentar um termo dependente do tempo  $a_t$ , que caracteriza a velocidade de reversão à média, BK deixam três graus de liberdade para o ajuste simultâneo das curvas de taxas de juros, de volatilidade e dos caps. Em seu artigo, ocorre a demonstração da implementação do modelo em uma árvore binomial, na qual, o espaçamento de tempo da árvore é variável, e,  $e$ , é o parâmetro que se ajusta para replicar os preços do mercado para os caps. Semelhante à BDT, para evitar distorções, é preciso usar uma curva de volatilidade que seja declinante com a passagem do tempo.

## **2.10 Heath-Jarrow-Morton (1992).**

David Heath, Robert Jarrow e Andrew Morton (HJM-1992) desenvolveram, seguindo a mesma linha de encadeamento lógico de Ho-Lee, uma nova abordagem para modelos de taxas de juros com a finalidade de apreçar títulos de maneira consistente com o mercado e tratar a evolução de toda a curva de juros, não somente a de curto prazo. O modelo de HJM é um marco na modelagem de taxas de juros, pois sua constituição abrange toda a classe de modelos de um fator por meio da evolução completa das taxas forwards instantâneas em tempo contínuo, variando-se apenas as especificações do termo de tendência (drift) e da volatilidade.

Formulação original em termos da taxa forward:

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T, f(t, T)) dW_i \quad (2.13)$$

Formulação em termos de preços de zeros:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sum_{i=1}^n v_i(t, T) dW_{ti} \quad (2.14)$$

$$v_i = - \int_t^T \sigma_i(t, \xi) d\xi \quad (2.15)$$

É possível resumir a maioria dos modelos unifatoriais de taxas de juros a partir da formulação HJM. Modificando-se somente a especificação funcional da variância, é possível deduzir modelos como Ho-Lee, CIR, Hull-White, e outros, a partir do modelo geral de Heath-Jarrow-Morton. Nesse caso, fica demonstrada a abrangência de HJM ao englobar todos estes modelos, e mostrar que podem ser derivados a partir dele.

HJM é bastante flexível por aceitar diversas formas funcionais para a estrutura da volatilidade, e pela possibilidade de inclusão de mais fatores (versão multifatorial). Estas características ajudam o modelo HJM a fornecer uma descrição mais precisa da yield curve e de seus movimentos. Para o apreçamento de derivativos mais complexos, do tipo path-dependent (dependentes do caminho), ou que sejam influenciados pela correlação entre os

pontos diferentes na curva de juros, com certeza, a versão multifatorial de HJM é a mais indicada.

# Capítulo 3

## Teoria da Utilidade

### 3.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos inicialmente a Noção de Utilidade clássica, segundo a teoria econômica clássica, onde estamos num ambiente de economia sem incerteza, voltado apenas para o consumo de bens.

A seguir estenderemos o conceito de utilidade, onde agora o objetivo é maximizá-la em situações envolvendo risco, ou seja, vamos analisar a utilidade num contexto de economia com incerteza, onde os agentes econômicos agora tomam decisões conhecendo as probabilidades de ocorrência de eventos relevantes. O enfoque da função utilidade será a satisfação dos agentes quanto ao seu nível de riqueza.

Analisaremos também algumas das funções utilidades mais utilizadas e as propriedades econômicas por trás destas funções.

### 3.2 Noção de Utilidade

Autores clássicos consideravam a utilidade como sendo a satisfação obtida pelo fato de várias quantidades ou unidades de um bem ou diversos bens terem sido consumidas. A utilidade significa a capacidade de satisfação das necessidades sentidas, inerentes aos bens. Portanto utilidade para um indivíduo qualquer, que possuísse doses de determinados bens, seria a satisfação que estes bens lhe dariam ao serem consumidos. Esta seria a base da teoria cardinal do consumidor.

Quando o consumidor comporta-se racionalmente, calcula deliberadamente, escolhe conscientemente e tenta maximizar a sua satisfação ou a utilidade. A continuidade do consumo de determinado bem propicia o aumento da sua utilidade que é equivalente à redução do seu estado de insatisfação. Denomina-se utilidade marginal de um bem qualquer a variação da utilidade em decorrência da variação do seu consumo. Como a insatisfação tende a ser sanada, tendendo a zero, a utilidade do bem tende a atingir um ponto máximo. À medida que o consumo do bem vai aumentando uma utilidade cada vez menor é atribuída às novas doses.

Na abordagem ordinal da teoria do consumidor, pode-se admitir que o consumidor, pela comparação de utilidade, possa ter sua escala de preferência perfeitamente definida, sendo possível construir um índice cardinal de utilidade que represente uma função real das quantidades de bens consumidos, constituindo assim uma função utilidade ordinal.

Chegamos enfim ao estudo das tabelas e curvas de indiferença. A curva de indiferença nada mais é do que uma curva de nível que pretende representar determinado grau de utilidade ou satisfação, sendo portanto, a representação gráfica de uma tabela de indiferença.

Tabela de indiferença é uma listagem de combinações possíveis entre dois bens, feitas de tal forma que, para o consumidor, qualquer combinação é indiferente pois a utilidade que lhes proporcionam é a mesma.

Dada uma função utilidade contínua  $U = f(q_1, q_2)$ , o nível de utilidade  $U_0$  é o conjunto das infinitas combinações  $(q_1, q_2)$  todas elas correspondendo ao nível de utilidade  $U_0$ , isto é  $\{(q_1, q_2) \mid U_0 = f(q_1, q_2)\}$ .

A curva de indiferença é uma linha de fronteira entre situações preferidas e não preferidas, representando uma posição em que o consumidor nem prefere e nem deixa



de preferir, sendo portanto indiferente a qualquer combinação. Dados dois bens, temos infinitas curvas de indiferença em relação a estes bens. Ao deslocarmos da esquerda para a direita no gráfico de curvas de indiferença, estamos aumentando a utilidade do consumidor. Portanto, usando o conceito de curva de indiferença e admitindo que a escala de preferências do consumidor seja representada não apenas por uma, mas por diversas curvas de indiferença, introduzir-se-ia a noção de mapa de indiferença, que é o conjunto de curvas de indiferença, representando cada uma um nível de utilidade.

Assim, à medida que nos afastamos da origem dos eixos, ter-se-iam curvas de indiferença representando níveis de utilidade cada vez maiores; o comportamento inverso revela redução do nível de satisfação.

Na figura 3.9 temos um exemplo de curvas de indiferença, e na figura 3.10 temos as mesmas curvas de indiferença mostrando que uma curva mais distante da origem demonstra uma utilidade maior, uma satisfação maior do consumidor, ou seja, quanto mais distante a curva de indiferença, mais satisfeito o consumidor está.

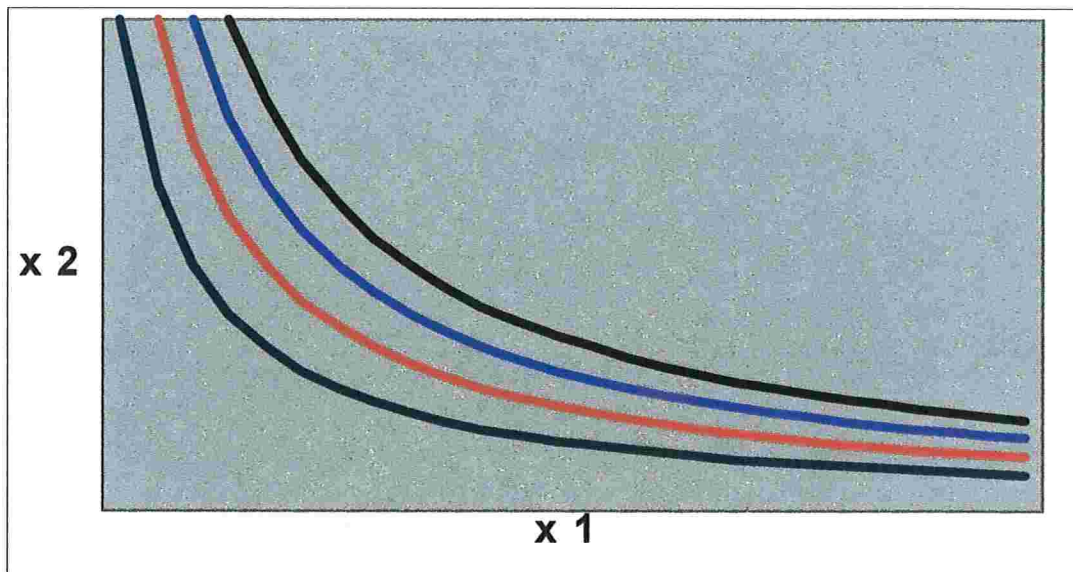


Fig. 3.9. Curvas de Indiferença

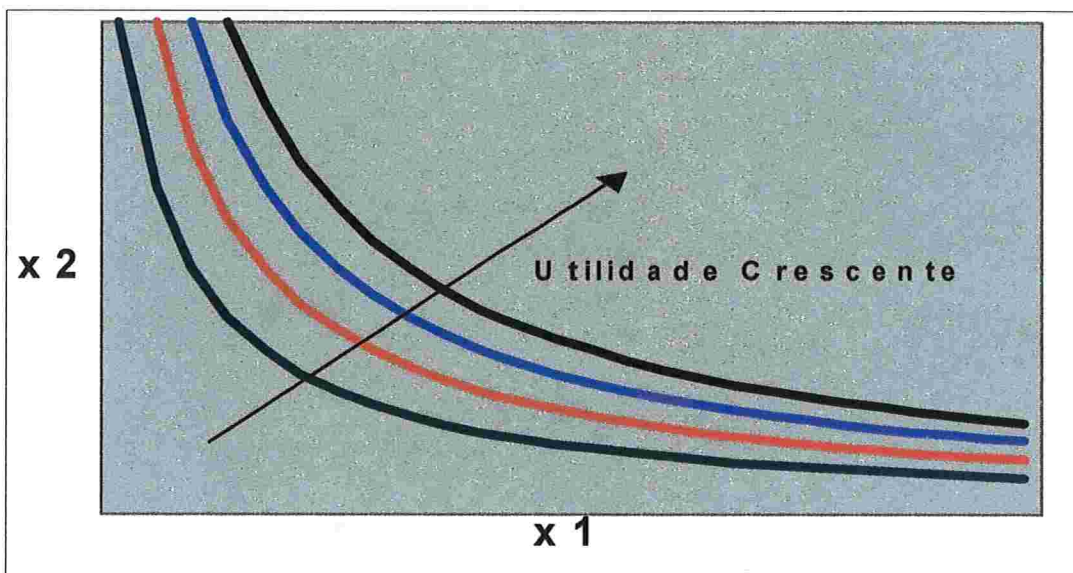


Fig. 3.10. Utilidade Crescente

### 3.3 Utilidade Esperada

Vamos supor que houvesse um número de diferentes oportunidades de investimento que pudessem influenciar a riqueza de um investidor no final de um período. Uma vez decidido como alocar os recursos do investidor entre estas alternativas, a riqueza futura é dirigida por variáveis aleatórias correspondentes. Se os resultados de todas as alternativas fossem certas, seria fácil selecioná-las e selecionaríamos a que produzisse a maior riqueza. Num caso aleatório geral, esta escolha não é tão simples, é necessário um procedimento para selecionar níveis aleatórios de riqueza. A função utilidade fornece tais procedimentos.

Uma função utilidade é uma função  $U$  definida sobre um número real (representando possíveis níveis de riqueza) dado um valor real. Em problemas financeiros é mais comum expressar resultados em valores monetários com utilidade medindo a satisfação associada com um particular nível de riqueza. Uma vez que a função utilidade é definida, todos os níveis de riqueza aleatórias alternativas são selecionadas pelos seus valores de utilidades esperada. Especificamente compara-se dois resultados aleatórios de variáveis riqueza  $x$  e  $y$  comparando os valores correspondentes  $E[U(x)]$  e  $E[U(y)]$ ; o maior valor será o escolhido.

Uma específica função utilidade usada entre vários agentes econômicos depende de suas tolerâncias individuais ao risco e de seus ambientes financeiros individuais.

Uma restrição geral que é colocada sob a forma da função utilidade é que seja uma função contínua crescente e pode ter, pelo menos em teoria, qualquer forma.

### 3.4 Funções Utilidade

Na prática certos tipos padrões são bastante utilizados. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. Utilidade Exponencial:

$$U(x) = -\exp(-ax) \quad (3.1)$$

Para alguns valores do parâmetro  $a > 0$ . Esta função utilidade tem valores negativos. Esta negatividade não importa, já que somente os valores relativos são importantes. A função é crescente em direção a zero.

Exemplo 2. Utilidade Logarítmica:

$$U(x) = \ln(x) \quad (3.2)$$

A função acima só é definida para  $x > 0$ . É uma severa penalidade para  $x \approx 0$ . De fato, se existe alguma probabilidade positiva de obter um resultado 0 para  $x$ , a utilidade esperada será  $-\infty$ .

Exemplo 3. Utilidade Potência:

$$U(x) = \frac{x^b}{b} \quad (3.3)$$

A função acima só tem existência para parâmetros  $b \leq 0, b \neq 0$ . É também chamada de utilidade risco neutra para  $b = 1$ .

Exemplo 4. Utilidade Quadrática:

$$U(x) = x - bx^2 \quad (3.4)$$

A função acima é definida apenas para algum parâmetro  $b > 0$ , e é crescente somente para  $x < \frac{1}{2b}$ .

### 3.5 Propriedade Econômicas da Função Utilidade

A primeira restrição colocada sobre uma função utilidade é que a mesma seja consistente com o mais preferível que o menos.

Assim, se quisermos escolher entre dois certos investimentos, sempre escolheremos um com o melhor resultado, ou seja, é preferível mais riqueza do que menos riqueza. Uma primeira propriedade sobre uma função utilidade é que se a utilidade aumenta quando riqueza aumenta então a primeira derivada da utilidade, em relação a riqueza, é positiva. Assim, a primeira restrição colocada sobre a função utilidade é uma primeira derivada positiva.

A segunda propriedade de uma função utilidade é a hipótese sobre o gosto do investidor pelo risco, e está relacionada com a segunda derivada da função utilidade onde uma função  $U(W)$  é estritamente côncava com relação a  $W$  se  $U''(W) < 0$ . Aqui três hipóteses são possíveis: o investidor é averso ao risco, o investidor é neutro ao risco, o investidor é avesso ao risco. Estas três categorias de risco podem ser definidas em termos de um jogo honesto.

Aversão ao risco quer dizer que um investidor rejeitará um jogo honesto. Aversão ao risco implica que a segunda derivada da utilidade em relação à riqueza é negativa. Se  $U(W)$  é a função utilidade e  $U''(W)$  é a segunda derivada, então a aversão ao risco é usualmente equacionado com a hipótese que  $U''(W) < 0$ .

A hipótese de aversão ao risco significa que um investidor rejeitará um jogo honesto porque a desutilidade de perder é maior que a utilidade de um ganho equivalente. Funções que exibem tais propriedades devem ter a segunda derivada negativa.

Risco neutro significa que um investidor é indiferente se participa ou não de um jogo honesto, implicando numa segunda derivada igual a zero.

A preferência pelo risco quer dizer que um investidor selecionaria um jogo honesto, ou seja, escolheria investir. A propensão pelo risco tem funções utilidade com segunda derivada positiva.

Na tabela a seguir temos o resumo das condições citadas anteriormente.

	Condição	Definição	Implicação
1	Aversão ao Risco	Rejeita o jogo honesto	$U''(0) < 0$
2	Risco Neutro	Indiferente ao jogo	$U''(0) = 0$
3	Propensão ao Risco	Escolhe um jogo honesto	$U''(0) > 0$

Fig. 3.11. Implicações da Atitude em Relação ao Risco

Matematicamente falando, a principal proposta de uma função utilidade é prover um meio sistemático de selecionar alternativas que capture o princípio de aversão ao risco. Isto é realizado sempre que a função utilidade é côncava.

**Função Utilidade e Aversão ao Risco:** uma função  $U$  definida sobre um intervalo  $[a, b]$  de números reais é dita côncava se para qualquer  $\alpha$  com  $0 \leq \alpha \leq 1$  e qualquer  $x$  e  $y$  em  $[a, b]$  considera que:

$$U[\alpha x + (1 - \alpha)y] \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) \quad (3.5)$$

Uma função utilidade  $U$  é dita ser aversa ao risco sobre  $[a, b]$  se é côncava sobre  $[a, b]$ .

Se  $U$  é côncava em todo o seu intervalo então é aversa ao risco.

### 3.5.1 Aversão ao Risco do Investidor

Uma terceira propriedade das funções utilidade é a hipótese sobre como as preferências do investidor mudam com a variação de sua riqueza. Será que se a riqueza de um investidor aumenta, mais ou menos riqueza será investida em ativos de risco?

Por exemplo, suponha que um investidor tenha \$10.000 e invista \$5.000 em ativos de risco e após algum tempo sua riqueza aumente para \$20.000 devido aos retornos deste investimento. Quanto será que o investidor investirá em ativos de risco? Mais, menos ou os mesmos \$5.000 serão aplicados em ativos de risco? Se o investidor aumenta o volume



investido em ativos de risco com sua riqueza aumentando, então este investidor demonstra uma aversão absoluta ao risco decrescente. Se os investimentos deste investidor não mudam quando sua riqueza aumenta, então este demonstra uma aversão absoluta ao risco constante. Finalmente, se o investidor investe menos em ativos de risco quando sua riqueza aumenta, então este investidor demonstra uma aversão absoluta ao risco crescente.

Se  $U'(W)$  e  $U''(W)$  são a primeira e segunda derivada da função utilidade num nível de riqueza  $W$ , então teremos o grau de aversão ao risco formalmente definido pelo Coeficiente de Aversão ao Risco de Arrow-Pratt:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (3.6)$$

Basicamente, a função coeficiente  $A(W)$  mostra como a aversão ao risco muda com o nível de riqueza. Para muitos indivíduos, a aversão ao risco cai quando suas riquezas aumentam, refletindo o fato que eles são mais desejosos por risco quando estão financeiramente seguros.

Um apropriada medida de como a aversão ao risco absoluta comporta-se com a variação na riqueza é a primeira derivada  $A'(W)$ , de  $A(W)$  em relação a  $W$ . A tabela a seguir resume as importantes relações entre  $A'(W)$  e variações na aversão ao risco:

Condição	Definição	Implicação
Aversão ao Risco Absoluta Crescente	Se a riqueza aumenta investe menos em ativos de risco	$A'(0) > 0$
Aversão ao Risco Absoluta Constante	Se a riqueza aumenta investe o mesmo volume em ativos de risco	$A'(0) = 0$
Aversão ao Risco Absoluta Decrescente	Se a riqueza aumenta investe mais em ativos de risco	$A'(0) < 0$

Fig. 3.12. Mudanças na Aversão Absoluta ao Risco com Riqueza

Uma final característica que é usada para restringir a função utilidade do investidor é como o percentual da riqueza varia quando a riqueza varia. Por exemplo, se um investidor põe 50% de sua riqueza em ativos de risco quando a mesma é \$10.000, ele ainda investiria 50% de sua riqueza em ativos de riscos caso a mesma aumentasse para \$20.000? Se o fizer, o seu comportamento é caracterizado por uma aversão ao risco relativa constante. Se investir maiores porcentagens de sua riqueza em ativos de risco demonstrará ter uma aversão ao risco relativa decrescente, e se investir porcentagens menores demonstrará er uma aversão ao risco relativa crescente.

Aversão ao risco relativa é proximamente relacionada com o aversão ao risco absoluta. Aversão ao risco relativa refere-se a variações do percentual investido em ativos de risco quando o nível de riqueza varia. A medida de aversão ao risco relativa é dada pela expressão:

$$R(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} = WA(W) \quad (3.7)$$

Seja  $R'(W)$  a primeira derivada de  $W$ , então  $R'(W) < 0$  indica que a função utilidade demonstra aversão ao risco relativa decrescente. Se  $R'(W) = 0$  então a função utilidade demonstra aversão ao risco relativa constante. Finalmente se  $R'(W) > 0$  então a função utilidade demonstra aversão ao risco relativa crescente. Estas definições estão resumidas na tabela a seguir:

Condição	Definição	Implicação
Aversão ao Risco Relativa Crescente	% investido em ativos de risco diminui se a riqueza aumenta	$R'(0) > 0$
Aversão ao Risco Relativa Constante	% investido em ativos de risco é o mesmo se a riqueza aumenta	$R'(0) = 0$
Aversão ao Risco Relativa Decrescente	% investido em ativos de risco aumenta se a riqueza aumenta	$R'(0) < 0$

Fig. 3.13. Mudanças na Aversão ao Risco Relativa com Riqueza

Para exemplificar vamos examinar algumas funções utilidade que são utilizadas na literatura de finanças e economia para descrever o comportamento do investidor e explorar as características de cada um.

Uma das mais freqüentes funções utilizadas é a função quadrática:

$$U(W) = W - bW^2 \quad (3.8)$$

Agora vamos calcular a primeira e a segunda derivada desta função:

$$U'(W) = 1 - 2bW \quad (3.9)$$

$$U''(W) = -2b \quad (3.10)$$

Se o investidor mostra uma função utilidade que mostra aversão ao risco, então segunda derivada deve ser negativa. Se o investidor assumir que quer investir mais em ativos de risco que menos, então a derivada deve ser positiva. Não importa quão pequeno seja  $b$ , enquanto o mesmo é positivo existe sempre algum valor de  $W$  que fará a primeira derivada ser negativa. Assim, para investidores que preferem investir mais que menos, a função util-

idade quadrática poderia representar seus desejos de investir mais somente em um intervalo de riqueza. Para ser consistente com a não satisfação, a seguinte restrição de ser colocada sobre  $W$ :

$$1 - 2bW > 0$$

$$W < \frac{1}{2b}$$

A Aversão ao Risco Absoluta da função quadrática será

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(-2b)}{(1-2bW)} = \frac{2b}{(1-2bW)}$$
$$A'(W) = \frac{4b^2}{(1-2bW)^2} > 0$$

Analisando a função Aversão ao Risco Absoluta, vemos que a função mostra uma aversão ao risco absoluta crescente. Assim a função quadrática é consistente com investidores que diminuam seus investimentos em ativos de risco quando sua riqueza aumenta.

$$R(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} = -W \frac{(-2b)}{(1-2bW)} = \frac{2bW}{(1-2bW)}$$
$$R'(W) = \frac{4b^2W}{(1-2bW)^2} + \frac{2b(1-2bW)}{(1-2bW)^2} = \frac{2b}{(1-2bW)^2} > 0$$

Como vimos anteriormente, se o investidor diminui os seus investimentos, o percentual investido também diminui. Assim, a função utilidade quadrática deve mostrar aversão ao risco relativa crescente também.

Como um segundo exemplo de função utilidade vamos considerar a seguinte função logarítmica.

$$U(W) = \log(W)$$

Agora vamos calcular a primeira e a segunda derivada desta função:

$$U'(W) = W^{-1}$$

$$U''(W) = -W^{-2}$$

Uma análise da primeira derivada mostra que a mesma é positiva para todos os valores de  $W$ , e o exame da segunda derivada mostra que é negativa sobre todos os valores de  $W$ . Assim, a função log é um candidato para um investidor que prefere investir mais em ativos de risco quando sua riqueza aumenta, e é portanto averso ao risco.

A Aversão ao Risco Absoluta e Relativa da função logarítmica serão:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(-W^{-2})}{W^{-1}} = W^{-1}$$

$$A'(W) = -W^{-2} < 0$$

$$R(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} = -W \frac{(-W^{-2})}{W^{-1}} = 1$$

$$R'(W) = 0$$

A função log, mostra uma aversão ao risco absoluta decrescente e aversão ao risco relativa constante. A função log é consistente com o comportamento de investidores aversos ao risco que preferem mais investimentos em ativos de risco do que menos e cujo percentual investido permanece constante quando sua riqueza aumenta.

# Capítulo 4

## Programação Dinâmica

A motivação para escrever este capítulo surgiu devido estarmos procurando uma metodologia para otimizar um portfólio de renda fixa em tempo contínuo. O desenvolvimento de um modelo de programação dinâmica para otimizar o consumo e um portfólio em tempo contínuo foi introduzido originalmente por Merton, onde é utilizado o princípio de optimalidade de Bellman, que é uma poderosa ferramenta para resolver problemas de portfólios dinâmicos, porque permite a transformação de um problema de otimização dinâmico em uma equação diferencial, para a qual existem vários métodos de solução.

A Programação Dinâmica é uma abordagem para se otimizar processos de decisão multiestágios.

Um processo de decisão multiestágio é um processo que pode ser desdobrado segundo um certo número de etapas seqüenciais, ou estágios, os quais podem ser completados de uma ou diversas maneiras. As opções para se completarem os estágios são chamadas de decisões. Uma política é uma seqüência de decisões (uma decisão para cada estágio



de processo). A condição do processo num dado estágio é dita o estado neste estágio. Cada decisão efetua uma transição do estado corrente para o estado associado ao estágio seguinte. Um processo de decisão multiestágio é finito se houver apenas um número finito de estágios no processo e um número finito de estágios associados a cada estágio.

Muitos processos de decisão multiestágios apresentam retornos (custos ou benefícios) associados a cada estágio de decisão e estes retornos podem variar, simultaneamente, com o estágio e o estado do processo. O objetivo da análise de tais processo é a determinação de uma política ótima, que resulta no melhor retorno total.

Um processo de decisão multiestágios é determinístico se o resultado de cada decisão (em particular, o estado produzido pela decisão) for conhecido exatamente.

A Programação Dinâmica baseia-se no Princípio de Condição de Ótimo de Bellman que declara que uma política ótima apresenta a propriedade segundo a qual, a despeito das decisões tomadas para se assumir um estado particular num certo estágio, as decisões restantes a partir deste estado devem constituir uma política ótima.

Para se implementar este princípio, parte-se do último estágio de um processo de  $n$  estágios e se determina a melhor política para se deixar aquele estado e completar o processo,

supondo-se que todos os estágios anteriores tenham sido completados. Desloca-se então ao longo do processo, de trás para adiante, estágio por estágio. Em cada estágio determina-se a melhor política para se deixar cada estado e se completar o processo, supondo-se que todos os estágios precedentes foram concluídos e utilizando-se os resultados já obtidos para o estágio seguinte. Fazendo-se isto, calculam-se os elementos da figura 4.14, onde:

$u \equiv$  variável de estado cujos valores especificam os estados.

$m_j(u) \equiv$  retorno ótimo para se completar o processo começando-se no estágio  $j$  com estado  $u$ .

$d_i(u) \equiv$  decisão tomada no estágio  $j$  que obtém  $m_j(u)$ .

	u				
	0	1	2	3	-----
$m_n(u)$					
$d_n(u)$					
$m_{n-1}(u)$					
$d_{n-1}(u)$					
-----	-----				
$m_1(u)$					
$d_1(u)$					

Fig. 4.14. Exemplo de Processo Multiestágio

Os elementos correspondentes ao último estágio do processo,  $m_n(u)$  e  $d_n(u)$  são, geralmente, computados diretamente. Os elementos restantes são obtidos de forma recursiva, isto é, os elementos do  $j$ -ésimo estágio ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ) são determinados em função dos elementos do estágio ( $j + 1$ ) a expressão de recorrência depende do problema em pauta e deve ser obtida de novo para cada tipo diferente de processo multiestágio.

Por simplicidade, esboçou-se a tabela descrita na figura 4.14 como se cada estágio tivesse o mesmo conjunto de estados. Embora isto sempre possa ser feito, de certo modo, artificialmente (penalizando-se convenientemente as funções retorno  $m_j(u)$ ) é, quase sempre, mais natural utilizar variáveis de estado diferentes, cada uma delas com seu domínio próprio de valores, para os diferentes estágios. Tal utilização, é óbvio, não altera de forma alguma a aplicação do Princípio da Condição de Ótimo.

Quando um processo de decisão de multiestágios é estocástico, o resultado relacionado com ao menos uma decisão do processo é aleatório. Esta aleatoriedade geralmente ocorre de uma das duas maneiras: ambos os estados são unicamente determinados pelas decisões, mas os resultados relacionados com um ou mais estados se dão ao acaso ou os re-

sultados são unicamente determinados pelos estados resultantes de uma ou mais decisões que se dão ao acaso.

Se as distribuições de probabilidades que governam os eventos aleatórios são conhecidas e se o número de estágios é finito, então a programação dinâmica é útil para a otimização de um processo de decisão multiestágios estocásticos. O procedimento geral é otimizar o valor esperado do resultado. Nos casos em que a aleatoriedade ocorre exclusivamente nos resultados relacionados com os estados senão nos estados resultantes de decisões, este procedimento tem o efeito da transformação de um processo estocástico em um determinístico.

A Programação Dinâmica foi originada por R. Bellman no início dos anos 50. É uma técnica matemática para fazer uma seqüência de decisões inter-relacionadas que podem ser aplicadas para muitos problemas de otimização, incluindo problemas de controle ótimo. A idéia básica deste método aplicado para controle ótimo é considerar uma família de problemas de controle ótimo com diferentes estados e tempos iniciais e estabelecer relações entre estes problemas via equação Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), que é não linear de primeira ordem no caso determinístico ou é uma equação diferencial parcial de segunda

ordem, no caso estocástico. Se a equação HJB tem solução analítica ou numérica, então pode-se obter um controle ótimo pegando o maximizador/minimizador do Hamiltoniano ou Hamiltoniano generalizado envolvido na equação HJB.

Digamos que temos um modelo e sua dinâmica seja representada por:

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X(t), \alpha(t)) dt + \sigma(t, X(t), \alpha(t)) dW_t \\ X(t) = x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{—} \end{cases} \quad (4.1)$$

Para o sistema de controle estocástico temos a seguinte utilidade indireta:

$$J(t, x) = \sup_{\alpha \in A_{t, T, x}} E \left[ \int_t^T U(X_\alpha(s), \alpha(s)) ds \mid X_t = x \right] \quad (4.2)$$

Em qualquer tempo de parada  $\tau < T$  vale:

$$J(t, x) = \sup_{\alpha \in A_{t, T}} E \left[ \int_t^\tau U(X_\alpha(s), \alpha(s)) ds + J(\tau, X_\alpha(\tau)) \right] \quad (4.3)$$

Temos que a utilidade indireta  $J(t, x)$  é solução de:

$$J_t + H(x, J_x, J_{xx}) = 0 \quad (4.4)$$

onde:

$$H(x, p, \xi) = \sup_{a \in A} \left[ U(x, a) + f(x, a)p + \frac{1}{2} \sigma^2 \xi \right] \quad (4.5)$$

Seguindo o Princípio de Bellman usando o lema de Itô:

$$d[J(s, x(s))] = J_s ds + J_x dx + \frac{1}{2} J_{xx} (dx)^2 \quad (4.6)$$

e por  $s < t$ :

$$J(s, x(s)) = J(s, x) + \int_t^s (J_u + f(x, \alpha) J_x) du + \int_t^s J_x \sigma_u dW_u + \frac{1}{2} \int_t^s J_{xx} (\sigma_u dW_u)^2 \quad (4.7)$$

Aplicando o valor esperado temos:

$$E[J(s, x(s))] = J(s, x) + E \left[ \int_t^s \left( J_u + f(x, \alpha) J_x + \frac{1}{2} J_{xx} \sigma_u^2 \right) du \right] \quad (4.8)$$

# Capítulo 5

## Modelos Intertemporais em Finanças

### 5.1 Introdução

Sabemos que as oportunidades de investimentos não são constantes o tempo todo, e mesmo que os retornos excessivos esperados sobre os ativos de riscos fossem constantes, uma variação nas taxas de juros seriam suficientes para gerar grandes diferenças entre portfólios de curto e longo prazo.

Temos portanto que otimizar os recursos que estamos aplicando hoje e reaplicá-los novamente numa data  $t$  qualquer numa taxa aleatória, a qual desconhecemos. Este é o processo contínuo de reinvestimento das aplicações feitas em períodos anteriores sob condições que podem ser diferentes das iniciais, podendo ser melhores ou piores. O objetivo é maximizar a riqueza esperada tendo como condições básicas o perfil do investidor, isto é, a sua propensão a correr risco, a sua função utilidade e o horizonte de investimento.

## **5.2 Problema da Alocação de Ativos de Renda Fixa**

O problema da alocação de ativos de renda fixa será tratado como se fosse um problema de alocação de Markowitz de média e variância envolvendo um ativo de risco e um ativo sem risco cujo rendimento é igual a taxa de juros de mercado livre de risco. Ou seja, a idéia é maximizar a riqueza do investidor, encontrando a carteira de mínima variância, combinando dois ou mais ativos. O mais lógico é maximizar a riqueza correndo menos risco, já que sabemos que a máxima do mundo das finanças é quanto maior risco maior o retorno.

Como podemos observar na figura abaixo temos situações em que podemos ter para o mesmo nível de risco dois níveis de retorno, um maior que o outro.



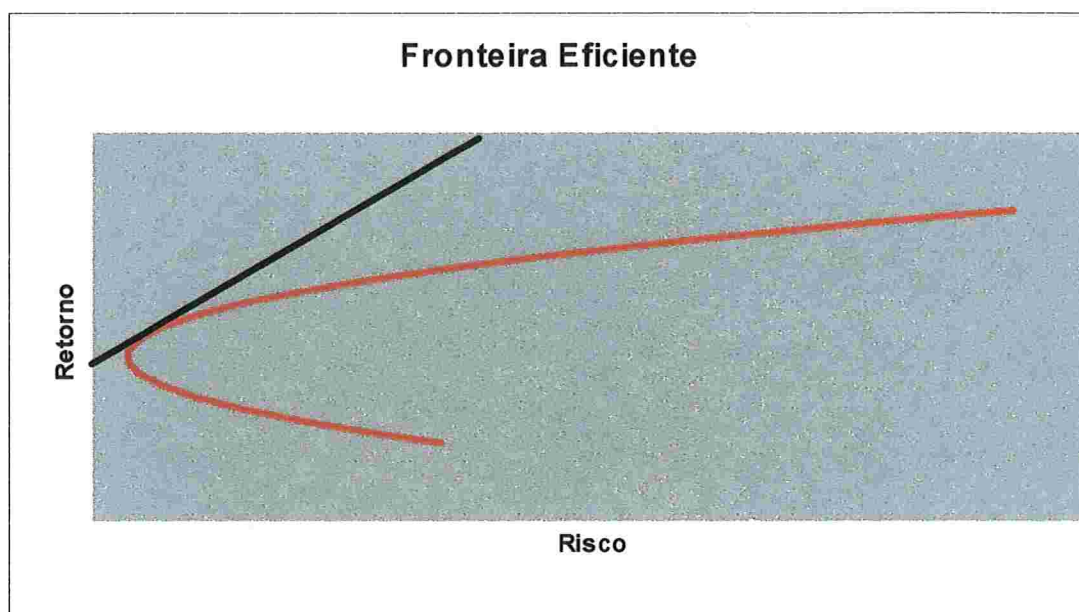


Fig. 5.15. Carteira de Mínima Variância

No nosso estudo o ativo de risco será um bond com rentabilidade prefixada (corre risco de elevação de taxa de juros), e o ativo de livre risco será um bond com rentabilidade pós-fixada.

Dada uma riqueza inicial  $W_0$  de um investidor qualquer, esta mesma riqueza será aplicada num Fundo de Investimentos ou uma Carteira Administrada com perfil ativo onde o objetivo do gestor é a maximização desta riqueza esperada ( $\max(E[W_t])$ ). Um fundo de investimentos tem prazo de vencimento infinito, sendo encerrado apenas quando todos os seus cotistas resolverem resgatar os seus recursos para aplicar em outros ativos ou fundos

que tenham uma expectativa melhor de rentabilidade ou gastar em consumo. Um fundo é uma entidade dinâmica que tem aplicações e resgates de diferentes cotistas diariamente, compra e vende títulos com vencimentos variados, e renova estes mesmos títulos quando os mesmos vencem.

Em nosso modelo pode-se analisar dois casos distintos, onde no primeiro caso nos preocupamos com o nível de riqueza a cada instante de tempo, e um segundo caso em que temos um fundo mais agressivo, onde temos um horizonte de tempo  $T_1 < T$ . Estaremos analisando neste trabalho apenas o primeiro caso, onde a preocupação é com o nível de riqueza a cada instante de tempo, deixando o segundo caso para um estudo posterior.

Como podemos observar, um fundo de investimentos é intertemporal, e portanto, para otimizar a alocação dos recursos dos investidores aplicados nele, visando maximizar suas riquezas, utilizaremos um modelo de alocação estratégica intertemporal contínuo. É importante lembrarmos que os títulos da carteira de um fundo tem vencimento finito e portanto estaremos analisando a sua contribuição para o aumento da riqueza num determinado horizonte de vencimento  $T_1 \leq T$ , onde  $T$  é o vencimento deste título.

O modelo de alocação estratégica intertemporal estudado dará ênfase para ativos de renda fixa, os quais, como já foi dito anteriormente, dividiremos em ativos das categorias de prefixados e pós-fixados.

E neste modelo, como já foi dito anteriormente, os títulos prefixados serão os ativos de risco enquanto o pós-fixados serão os ativos livres de risco.

Dada uma riqueza inicial  $W_0$ , digamos  $W_0 = 1$ , faremos a seguinte alocação de ativos de renda fixa, onde alocaremos uma fração  $\alpha\%$  em risco prefixado e  $(1 - \alpha)\%$  de fração alocada em ativos pós-fixados.

Para encontrarmos esta alocação ótima temos também que recorrer à Teoria da Utilidade, visto que o nosso objetivo é otimizar a riqueza do investidor. Teremos então uma Utilidade da Riqueza que vai medir a satisfação do investidor associada com um particular nível de riqueza. Escolhida esta Função Utilidade poderemos também incluir o nível de aversão ao risco do investidor. Para o nosso modelo utilizaremos a função potência:

$$U(W) = e^{-\beta t} \frac{W^\gamma}{\gamma} \quad (5.1)$$

onde  $e^{-\beta t}$  é o fator de impaciência, ou seja, o investidor não quer ficar rico no futuro, ele tem impaciência, quer ficar rico hoje.

O próximo passo agora será como modelar a curva de juros e sua dinâmica futura ao longo do tempo. Para tornar a nosso estudo um pouco mais fácil, o modelo escolhido que explicará a dinâmica dos juros será dada pelo modelo de Vasicek (1977):

$$dr = \kappa (\theta - r) dt + \sigma dZ_t \quad (5.2)$$

Como utilizaremos o modelo de Vasicek para juros, então, a dinâmica para retorno de um Bond pelo princípio de não arbitragem, será dado pela expressão abaixo:

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = (r_t + b(t, T) \lambda \sigma) dt - b(t, T) \sigma dZ_t \quad (5.3)$$

onde  $\lambda > 0$  determina o prêmio de risco sobre o bond. Assim bonds reais neste modelo tem uma constante de retorno excessivo esperado igual a  $\lambda b(t, T)$  e uma constante de volatilidade de retorno instantâneo igual a  $b(t, T) \sigma$ . Existe apenas uma fonte de incerteza neste modelo, e os retornos dos bonds são perfeitamente correlacionados negativamente com a taxa de juros real de curto prazo a termo.

Um título prefixado com vencimento em  $T$  terá o seguinte valor em  $t$  dado pela expressão abaixo:

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-b(t, T)r_t} \quad (5.4)$$

Onde a expressão abaixo:

$$b(t, T) = \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \quad (5.5)$$

é chamada de Duration do Modelo de Vasicek

Para otimizar um fundo ou carteira durante um intervalo de tempo qualquer, iremos utilizar conceitos de otimização/programação dinâmica, usando o Princípio de Condição de Ótimo de Bellman.

A dinâmica da variação da riqueza no tempo virá dos retornos das alocações estratégicas em uma carteira de títulos prefixados e pós-fixado. Esta dinâmica, ponderada pela alocação estratégica de títulos prefixados e pós-fixados, será representada pela equação diferencial abaixo:

$$\frac{dW}{W} = \alpha \frac{dP}{P} + (1 - \alpha) r dt \quad (5.6)$$

Substituindo  $\frac{dP}{P}$  por 5.3:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{W} &= \alpha ((r + b(t, T) \lambda \sigma) dt - b(t, T) \sigma dZ_t) + (1 - \alpha) r dt \\ &= \alpha r dt + \alpha b(t, T) \lambda \sigma dt - \alpha b(t, T) \sigma dZ_t + r dt - \alpha r dt \\ &= \alpha b(t, T) \lambda \sigma dt - \alpha b(t, T) \sigma dZ_t + r dt \end{aligned}$$

$$\frac{dW}{W} = [\alpha b(t, T) \lambda \sigma dt + r] dt - \alpha b(t, T) \sigma dZ_t \quad (5.7)$$

O controle do nosso fundo de investimento será feito através da variável  $\alpha$  que controla a fração da exposição em risco prefixado.

Esta variável será a variável de controle do nosso modelo de programação dinâmica.

O objetivo do modelo será a maximização da rentabilidade do fundo ou carteira de renda fixa para um título com duration  $T > 0$ .

Esta otimização/maximização será dado pela expressão abaixo:

$$\max_{\alpha} E [U (W_T)] \rightarrow \textit{Princípio de Bellmann} \quad (5.8)$$

Pressupondo a existência da utilidade indireta teremos:

$$J(t, W, r) = \max_{\alpha} E_t [U (W_T) | W_t = W, r_t = r] \quad (5.9)$$

$$J(t, W, r) = \max_{\alpha} E \left[ J(t + dt, W + dW, r + dr) + \int_t^{t+dt} U(W_s) ds \right] \quad (5.10)$$

Utilizando a expansão de Taylor para  $J(\cdot)$  e o lema de Itô obtemos:

$$\begin{aligned}
 J(t + dt, W + dW, r + dr) &= J(t, W, r) + J_t dt + J_w dW + J_r dr + \frac{1}{2} J_{ww} (dW)^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} J_{rr} (dr)^2 + J_{wr} dW dr
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Usando o fato que:

$$\frac{dW}{W} = [\alpha b(t, T) \lambda \sigma + r] dt - \alpha b(t, T) \sigma dZ_t$$

temos que:

$$(dW)^2 = (W \alpha b \sigma)^2 (dt) \tag{5.12}$$

Também sabemos que a equação 5.2 representa a dinâmica de juros de Vasicek:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dZ_t \tag{5.2}$$

Daqui segue diretamente que:

$$(dr)^2 = \sigma^2 dt \tag{5.13}$$

Substituindo as equações 5.7, 5.12 e 5.13 na equação 5.1 e aplicando o lema de Itô

obtemos:

$$\begin{aligned}
 J(t + dt, W + dW, r + dr) &= J(t, W, r) + J_t dt + J_w W [(\alpha b \lambda \sigma + r) dt - \alpha b \sigma dZ_t] + \\
 &+ J_r (\mu dt + \sigma dZ_t) + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 dt + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 dt + \\
 &+ J_{wr} W [(\alpha b \lambda \sigma dt + r) dt - \alpha b \sigma dZ_t] (\mu dt + \sigma dZ_t)
 \end{aligned}$$

Expandindo os termos da expressão e eliminando os termos nulos obtemos:

$$\begin{aligned}
 J(t + dt, W + dW, r + dr) &= J(t, W, r) + J_t dt + J_w W [(\alpha b \lambda \sigma + r) dt - \alpha b \sigma dZ_t] + \\
 &+ J_r (\mu dt + \sigma dZ_t) + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 dt + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 dt + \\
 &+ W \alpha b \sigma^2 dZ_t^2)
 \end{aligned}$$

Finalizando a simplificação da expressão anterior temos:

$$\begin{aligned}
 J(t + dt, W + dW, r + dr) &= J(t, W, r) + J_t dt + J_w W [(\alpha b \lambda \sigma + r) dt - \alpha b \sigma dZ_t] + \\
 &+ J_r (\mu dt + \sigma dZ_t) + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 dt + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 dt + \\
 &+ J_{wr} W \alpha b \sigma^2 dt
 \end{aligned}$$



Chegamos na equação de Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB) para o nosso problema:

$$0 = \max_{T, \alpha} \left( U(W) + J_t + J_w W (\alpha b \lambda \sigma + r) + J_r \mu + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 + J_{wr} (W \alpha b \sigma^2) \right)$$

$$J_t + \max_{T, \alpha} \left( U(W) + J_w W (\alpha b \lambda \sigma + r) + J_r \mu + \frac{1}{2} J_{ww} (W \alpha b \sigma)^2 + \frac{1}{2} J_{rr} \sigma^2 + J_{wr} (W \alpha b \sigma^2) \right) = 0$$

$$J_t + H(t, W, r, J_w, J_r, J_{ww}, J_{rr}, J_{wr}) = 0 \quad (5.14)$$

Onde:

$$h = H(t, W, r, J_w, J_r, J_{ww}, J_{rr}, J_{wr}) \quad (5.15)$$

Vamos procurar a solução particular selecionando  $\alpha^*$  ótimo, ou seja, a alocação estratégica ótima. Para isto vamos calcular a derivada parcial da função  $h$  em relação a  $\alpha$ :

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0$$

$$J_w W b \lambda \sigma + J_{ww} W^2 \alpha b^2 \sigma^2 + J_{wr} W b \sigma^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{-J_w \lambda - J_{wr} \sigma}{J_{ww} W b \sigma} = \frac{-J_w \lambda}{J_{ww} W b \sigma} + \frac{-J_{wr}}{J_{ww} W b}$$

$$\alpha = (\lambda) \left( \frac{1}{\sigma} \right) \frac{1}{\left( -\frac{J_{ww}}{J_w} W \right)} \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \frac{-J_{wr}}{J_{ww} W} \frac{J_w}{J_w}$$

$$\alpha^* = \underbrace{(\lambda) \left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{1}{\left(-\frac{J_{ww}}{J_w} W\right)} \frac{1}{b}}_{\text{Alocação Miópica}} + \frac{1}{b} \underbrace{\frac{\left(\frac{J_{wr}}{J_w}\right)}{\left(-\frac{J_{ww}}{J_w} W\right)}}_{\text{Alocação Intertemporal}} \quad (5.15)$$

Observando o resultado da alocação ótima de  $\alpha^*$ , já podemos tirar conclusões econômicas a respeito da parcela a ser aplicada em títulos prefixados. Como podemos ver acima, obtivemos a medida de aversão de risco relativo  $R(W) = -\frac{J_{ww}}{J_w} W$  na alocação ótima  $\alpha^*$ .

Substituindo na equação acima teremos:

$$\alpha^* = \underbrace{(\lambda) \left(\frac{1}{\sigma}\right) \frac{1}{R(W)} \frac{1}{b}}_{\text{Alocação Miópica}} + \frac{1}{b} \underbrace{\frac{\left(\frac{J_{wr}}{J_w}\right)}{R(W)}}_{\text{Alocação Intertemporal}}$$

Isolando a medida de aversão ao risco relativa temos:

$$\alpha^* = \frac{1}{R(W)} \frac{1}{b} \left( \underbrace{(\lambda) \left(\frac{1}{\sigma}\right)}_{\text{Alocação Miópica}} + \underbrace{\left(\frac{J_{wr}}{J_w}\right)}_{\text{Alocação Intertemporal}} \right) \quad (5.16)$$

Pela expressão encontrada acima, podemos observar que a alocação miópica é um termo estático, onde a alocação é diretamente proporcional ao prêmio de risco e inversamente proporcional à volatilidade. Também é facilmente visto que a alocação miópica é decrescente em  $\gamma$  e independente do horizonte de tempo  $T$  ou  $T_1$ .

O investidor infinitamente averso ao risco quer somente manter seu dinheiro em caixa, mas o retorno de manter o dinheiro em caixa é também um risco, porque a taxa de juros de curto prazo muda no tempo. Portanto, o investidor se protegerá contra o risco de taxa de curto prazo investindo em títulos. A contribuição da alocação intertemporal será qualitativamente diferente entre os riscos associados com as taxas de curto prazo e aqueles não associados a estas taxas. A alocação intertemporal encontrada na expressão acima é o termo dinâmico no tempo que sempre aumenta com a aversão ao risco.

Ao analisar o resultado obtido na expressão observamos que quanto maior o prêmio de risco  $\lambda$ , maior vai ser a alocação em títulos prefixados, enquanto que quanto maior a volatilidade  $\sigma$  do mercado de juros, ou maior a aversão ao risco relativo  $R(W)$  do investidor, ou maior o horizonte de investimento  $b$ , menor será a alocação em títulos prefixados

Finalizando nossa análise inicial observamos que quando o prêmio  $\lambda$  cai, a alocação em títulos prefixados também diminui e quando a volatilidade  $\sigma$  do mercado de juros diminui, e a aversão de risco relativo  $R(W)$  do investidor é pequena ou o horizonte de investimento  $b$  diminui, aumenta-se a alocação em títulos prefixados.

Agora vamos calcular a utilidade indireta e substituí-la em nossa equação HJB para o nosso problema:

$$\begin{cases} J_t + H(t, W, r, J_w, J_r, J_{ww}, J_{rr}, J_{wr}) = 0 \\ J(T, W, r) = \frac{W^\gamma}{\gamma} \end{cases}$$

Vamos procurar na solução  $J(T, W, r)$  do problema acima na forma  $J(T, W, r) = \frac{W^\gamma}{\gamma} f(t, r)$ , com  $f(t, r) = 1$  para podermos resolver a equação:

$$f(t, r) = e^{c(t)+d(t)r+\frac{1}{2}Q(t)r^2} \quad (5.17)$$

Segundo o prof. Jun Liu [12], resolvendo as equações diferenciais a seguir darão a solução explícita fechada para o nosso problema de alocação estratégica em títulos prefixados:

$$\begin{cases} \dot{c} + \left( \kappa\theta + \left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right) \sigma\lambda \right) d + \frac{1}{2}\sigma^2 d^2 + \left( \frac{1-\gamma}{2\gamma^2} \right) \lambda^2 = 0 \\ \dot{d} - \kappa d + \frac{1-\gamma}{\gamma} = 0 \\ \dot{Q} - 2\kappa Q = 0 \\ c(T) = 0 \\ d(T) = 0 \\ Q(T) = 0 \end{cases}$$

Dadas as condições iniciais acima as equações resultaram nas seguintes soluções:

$$\begin{aligned}
c = & \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)^2 \sigma^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \right) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\kappa\theta + \frac{1-\gamma}{\gamma^2}\sigma\lambda}{\sigma^2\kappa} \right) (T-t) - \right. \\
& \left. - \left( \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\kappa\theta + \frac{1-\gamma}{\gamma^2}\sigma\lambda}{\sigma^2\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} \right) \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \frac{1}{4} \frac{1}{\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right] \\
d = & \frac{1-\gamma}{\gamma\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\
Q = & 0
\end{aligned}$$

Considerando os valores encontrados acima e substituindo na equação de utilidade indireta chegamos na alocação ótima em títulos prefixados:

$$\alpha^* = \frac{1}{\gamma} \left( \underbrace{\lambda \frac{1}{\sigma} \frac{\kappa}{(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})}}_{\text{Alocação Miópica}} - \underbrace{(1-\gamma) \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})}}_{\text{Alocação Intertemporal}} \right) \quad (5.16)$$

Como havíamos citado no início, estamos estudando o caso em que estamos preocupados com o nível de riqueza a cada instante de tempo, onde o horizonte de investimento é igual ao vencimento dos títulos prefixados.

Com a expressão 5.16 encontramos a solução para o caso geral de alocação ótima de títulos prefixados. É primordial mensurar o quanto o investidor é propenso ao risco, ou

seja qual o seu Índice de Aversão ao Risco, para que se possa fazer a alocação em títulos prefixados ao nível de risco que o investidor gostaria de correr.

A alocação ótima em títulos prefixados, utilizando a expressão 5.16 é muito mais sensível ao Índice de Aversão ao Risco que pelas outras variáveis. Por exemplo, mesmo que o prêmio de risco  $\lambda$  seja muito recompensador com um nível de volatilidade  $\sigma$  muito baixo, o investidor conservador não se sentirá tentado a arriscar, a não ser que não exista risco nenhum. Pela solução encontrada em 5.16 podemos que o Índice de Aversão ao Risco  $\gamma$  não pode ser igual a zero, devendo portanto ser um número real maior que zero.

# Capítulo 6

## Aplicações em Gestão de Fundos de Renda Fixa

Neste capítulo vamos fazer algumas simulações utilizando a solução fechada que da a Alocação Estratégica Ótima de Ativos Prefixados demonstrado no capítulo anterior. A idéia é montar fundos de investimento de renda fixa ativa e fazer as alocações utilizando as variáveis volatilidade de juros  $\sigma$ , prêmio de risco  $\lambda$  e a velocidade de reversão à média  $\kappa$ , onde uma delas vai sofrer variações e as restantes ficarão fixas. Posteriormente serão montadas algumas carteiras baseadas nestes parâmetros, que depois serão comparadas com as rentabilidades obtidas de taxas de juros extraídas do modelo de Vasicek. Os resultados serão comparados apenas no fim do período de cada aplicação, ou seja o modelo calculará a alocação ótima e compararemos o resultado ex-post.

Como já vimos anteriormente a dinâmica das taxas de juros é dada pela expressão abaixo:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dZ_t \quad (5.2)$$

Onde integrando a equação acima obtemos, para  $s \leq t$ :

$$r_t = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta (1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u \quad (6.1)$$

de forma que  $r_t$  condicionada a  $r_s$  é normalmente distribuída com média e variância dadas pelas seguintes expressões:

$$E[r_t | r_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta (1 - e^{-\kappa(t-s)}) \quad (6.2)$$

$$Var[r_t | r_s] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)}) \quad (6.3)$$

Os dados de taxas de juros utilizados neste trabalho foram obtidos da BM&F - Bolsa Mercantil e de Futuros. Posteriormente calculou-se a volatilidades para os vértices de 63, 126, 252 e 504 dias úteis, utilizando o método GARCH.

Os parâmetros do modelo de Vasicek não serão calibrados neste modelo, apesar de que o mais correto seria calibrar o modelo. Isto se deve ao fato de que a calibração de qualquer modelo de taxa de juros não é assim tão simples, é necessário a utilização de sofisticadas técnicas de estimação, o que fugiria do escopo de nosso estudo. Para a implementação do nosso modelo de alocação utilizaremos parâmetros já calculados no mercado.



O prêmio de risco  $\lambda$  veio de históricos do mercado de juros brasileiro, e para melhor exemplificar, temos a seguir uma tabela de títulos com prazos, taxas de mercado e % destas taxas e os respectivos prêmios calculados.

	A	B	A x B
Prazo	Taxa Ano	% Curva	Prêmio Ano
63	25,66%	1,00%	0,26%
126	24,50%	2,00%	0,49%
252	23,46%	2,50%	0,59%
504	22,88%	4,00%	0,92%

Fig. 6.16. Curva de Juros de Mercado

Vamos iniciar as simulações utilizando a expressão 5.16 demonstrada no capítulo anterior:

$$\alpha^* = \frac{1}{\gamma} \left( \lambda \frac{1}{\sigma} \frac{\kappa}{(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})} - (1 - \gamma) \frac{(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{(1 - e^{-\kappa(T_1-t)})} \right) \quad (5.16)$$

Para simplificar combinaremos títulos prefixados quaisquer (LTN - Letra do Tesouro Nacional, CDB - Certificado de Depósito Bancário) com títulos pós-fixados (LFT - Letra Financeira do Tesouro) para compor a carteira de um fundo de investimentos.

## 6.1 Simulações de Carteiras

A seguir faremos a primeira simulação, escolhendo uma data de início e um vencimento qualquer. Utilizando o modelo de Vasicek foram feitas 3000 simulações para a taxa de juros para 121 dias úteis e também calculamos a taxa que iremos utilizar para rentabilizar nosso ativo prefixado utilizando a expressão 6.2.

O parâmetros utilizados para calcular a taxa de juros esperada para 121 dias foram:

Taxa CDI $r_0$	26.00%
Reversão à Média	18.92%
$\kappa$	2.50%
$\theta$	18.92%

$$E[r_{121}|r_0 = 26.00\%] = 0.26e^{-0.025(121-0)} + 0.1892(1 - e^{-0.025(121-0)}) = 25.91\%$$

Resultando na taxa de juros esperada de 25.91% ao ano calculada anteriormente.

<b>Simulação 1</b>	
Início	28-nov-2002
Vencimento	27-mai-2003
Prazo em dias corridos	180
Taxa CDI final de período para 180 dias	25.91%
Prêmio de Risco $\lambda$	0.52%
Volatilidade $\sigma$ aa (base252)	0.13%
$\kappa$	2.50%
Horizonte de Investimento Dias Úteis	121
Prazo Médio Bonds Dias Úteis	121
Propensão ao Risco $\gamma$	0.90
Alocação Estratégica em Títulos Prefixados	0.00%

Substituímos os parâmetros acima na expressão 5.16 que calcula alocação  $\alpha^*$  ótima em ativos prefixados. Nesta primeira simulação com propensão ao risco  $\gamma$  em 0.90 obtivemos uma alocação com valor nulo, o qual podemos interpretar que o investidor com este nível de propensão ao risco não quer correr nenhum risco de possível elevação de taxas de juros, preferindo a segurança de um título pós-fixada.

A seguir mostraremos uma análise gráfica onde, mantendo todas as variáveis do modelo fixas, menos o Índice de Aversão ao risco, onde vamos obter o seguinte comportamento da alocação em títulos prefixados que é mostrada no gráfico a seguir:

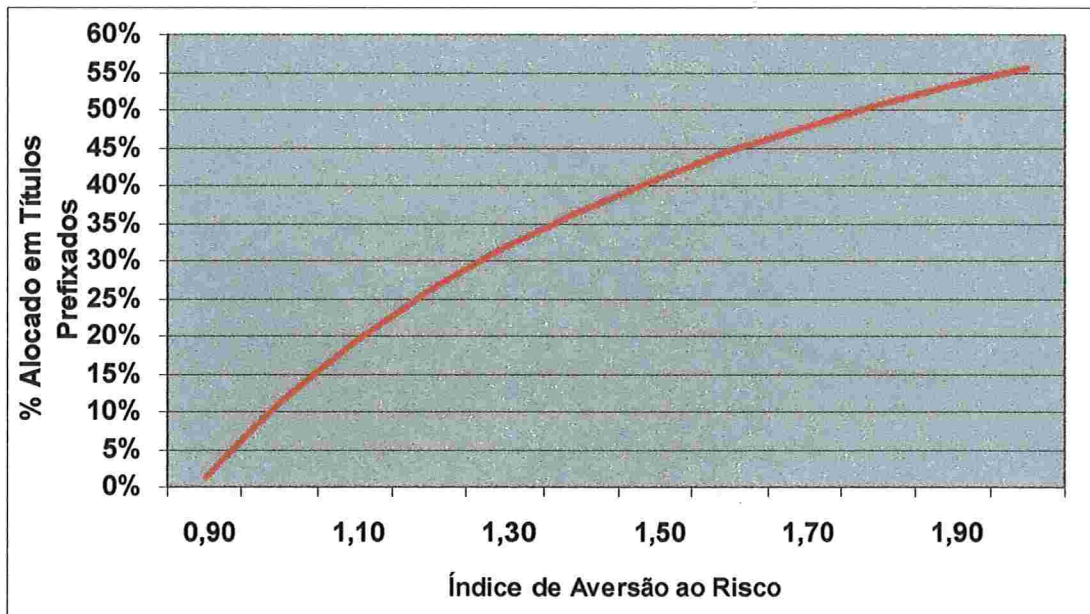


Fig. 6.17. Influência do Índice de Aversão ao Risco

Como podemos observar no gráfico anterior, quanto maior o Índice de Aversão ao Risco, mais propenso a correr risco de juro estará o investidor, e portanto, mais títulos prefixados serão alocados na carteira do fundo. Isto a princípio soa muito estranho, porque se, o Índice de Aversão ao Risco do Investidor aumenta, deveria-se diminuir a alocação em títulos prefixados e não o contrário, entretanto, isto é válido quando tratar-se de uma política miópica, porque quando incluímos o termo de alocação intertemporal a alocação em títulos prefixados aumenta.

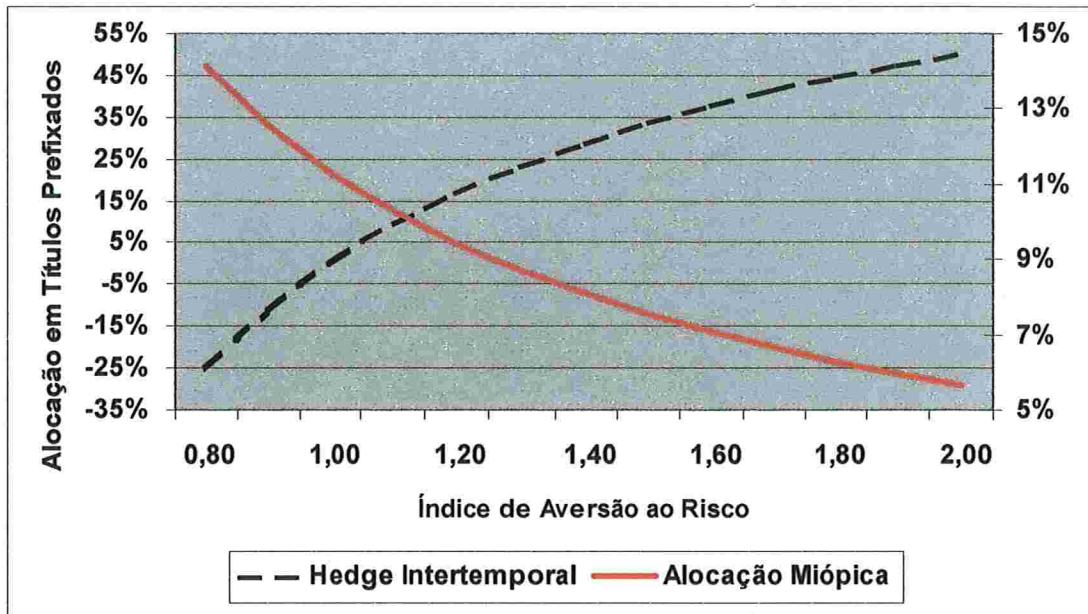


Fig. 6.18.

Como podemos observar, a Alocação Miópica diminui com o aumento do Índice de Aversão ao Risco, enquanto que o Hedge Intertemporal tem um comportamento totalmente contrário. O resultado da soma dos dois termos faz a indicação do aumento da alocação em títulos prefixados. Como já analisamos anteriormente, a grande sacada do modelo é mensurar de forma precisa o Índice de Aversão ao Risco para que se possa ter uma alocação confiável.

Continuando nossas análises, vamos manter todas as variáveis fixas, e o Índice de Aversão ao Risco em 1,2, e variar apenas o prêmio de risco. Feito isto, obtivemos os seguintes resultados no gráfico seguinte:

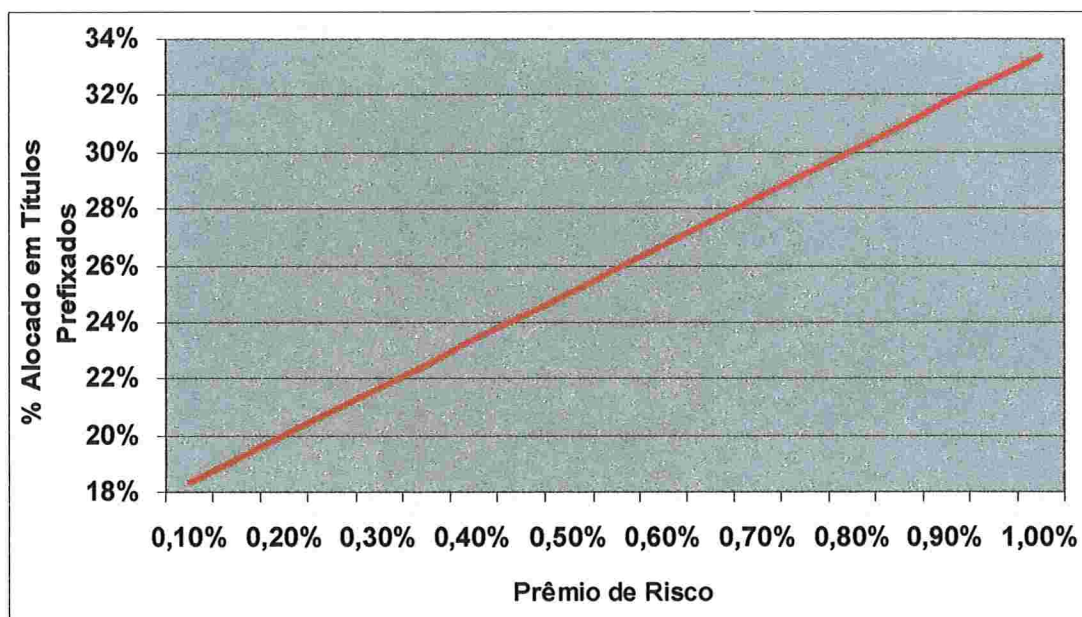


Fig. 6.19. Influência do Prêmio de Risco

O resultado é óbvio, porque quanto maior o prêmio de risco maior, será a alocação em títulos prefixados.

Mantendo todas as variáveis fixas, e variando apenas a volatilidade de juros obtivemos os resultados que são apresentados no gráfico seguinte:

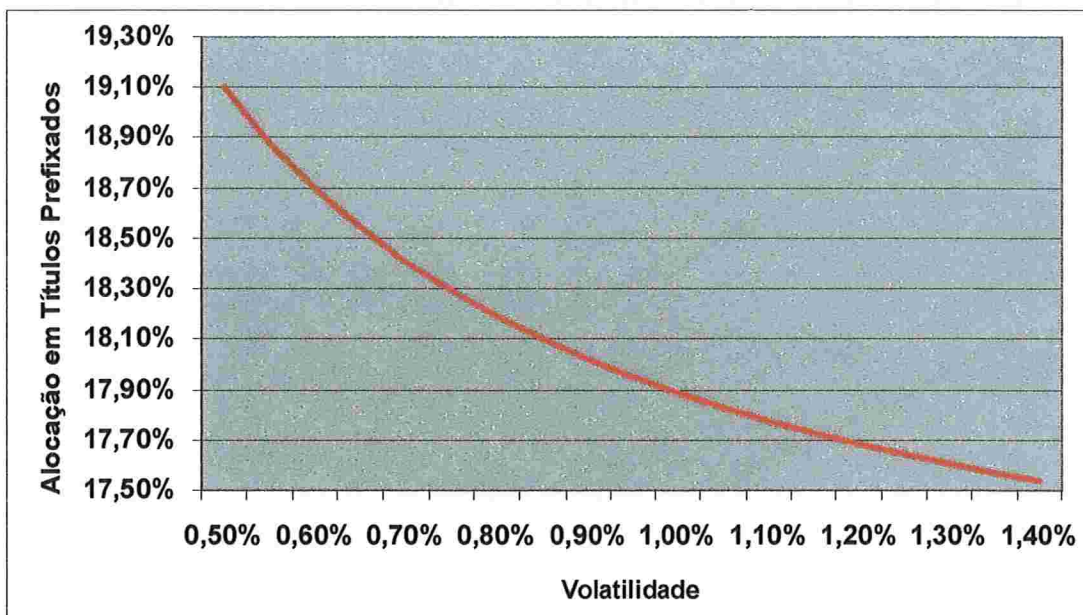
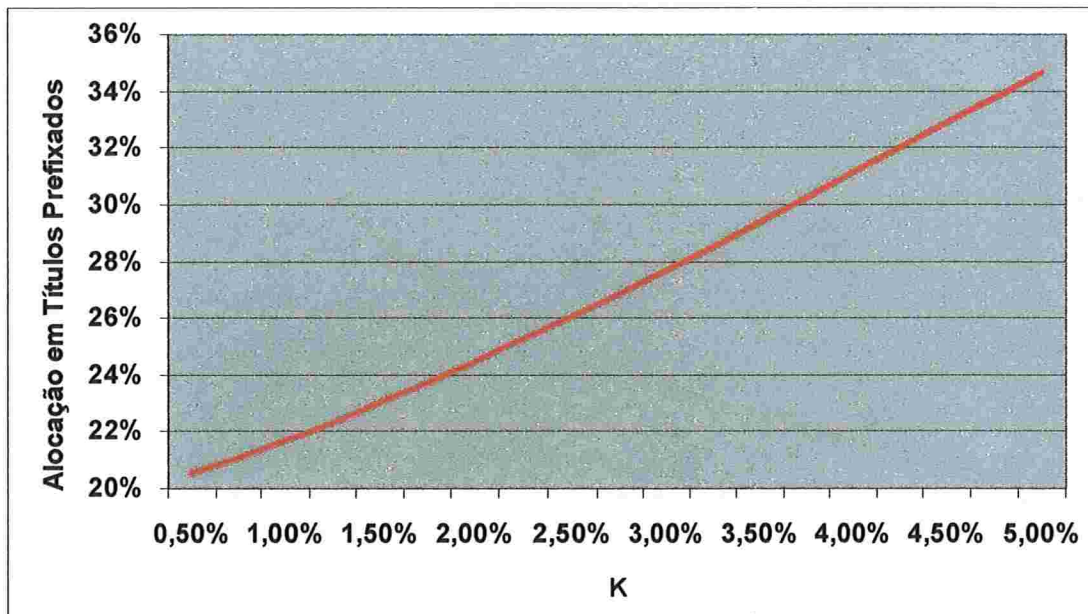


Fig. 6.20. Influência da Volatilidade

Novamente temos o resultado óbvio, que é a diminuição da alocação em títulos prefixados quando aumenta-se a volatilidade do mercado de juros.

Para finalizar, agora vamos manter todas as variáveis fixas, e variar apenas a velocidade de reversão à média e analisar os resultados no gráfico seguinte:

Fig. 6.21. Influência de  $\kappa$ 

Como podemos observar no gráfico anterior, quanto mais aumenta-se  $\kappa$  mais se aloca em títulos prefixados.

Nesta primeira análise pudemos analisar o comportamento das principais variáveis e sua influência na alocação estratégica de ativos prefixados. A seguir faremos simulações de carteiras utilizando taxas de juros e rentabilidade obtidas do modelo de Vasicek e iremos analisar cada operação com relação ao comportamento das variáveis do modelo.

Como havíamos citado anteriormente foram feitas 3000 simulações para 180 dias corridos com 120 úteis utilizando o modelo de Vasicek. Escolhemos dentre estas simu-



lações os valores máximo e mínimo de taxas de juros. Para a taxa mínima de 25.61% de fim de período obtivemos o seguinte resultado:

<b>Simulação 2</b>	
Início	28-nov-2002
Vencimento	27-mai-2003
Prazo em dias corridos	180
Taxa CDI final de período para 180 dias	25.61%
Prêmio de Risco $\lambda$	0.52%
Volatilidade $\sigma$ aa (base252)	0.13%
$\kappa$	2.50%
Horizonte de Investimento Dias Úteis	121
Prazo Médio Bonds Dias Úteis	121
Propensão ao Risco $\gamma$	1.50
Alocação Estratégica em Títulos Prefixados	40.32%
Taxa Aplicada em Título Prefixado	25.91%

Ao fazer uma alocação de 40.32% da carteira em títulos prefixados na taxa esperada calculada anteriormente de 25.91% a.a , e o restante da carteira com títulos pós-fixados indexados à taxa do CDI, o seguinte resultado no vencimento:

Títulos	% Carteira	Taxa Aplicada	Taxa Efetiva
Prefixado	40,32%	25,91%	11,70%
Pós-fixado	59,68%	25,61%	11,57%
Total Carteira	100,00%	25,73%	11,62%
CDI médio		25,61%	11,57%
% da Rentabilidade em Relação ao CDI ==>			100,45%

Fig. 6.22. Simulação 2 - Resultado Utilizando a Taxa Mínima

Agora vamos comparar rentabilidade da carteira utilizando a taxa máxima calculada nas 3000 simulações no modelo de Vasicek. O resultado foi:

Títulos	% Carteira	Taxa Aplicada	Taxa Efetiva
Prefixado	40,32%	25,91%	11,70%
Pós-fixado	59,68%	26,24%	11,84%
Total Carteira	100,00%	26,11%	11,78%
CDI médio		26,24%	11,84%
% da Rentabilidade em Relação ao CDI ==>			99,52%

Fig. 6.23. Simulação 2 - Resultado Utilizando a Taxa Máxima

Pelo que podemos observar nas duas simulações acima, as rentabilidades geradas não foram tão atrativas. Como estamos fazendo simulações utilizando o modelo de Vasicek, a princípio o gestor não aplicaria cerca de 40% dos seus recursos em ativos que rendem tanto quanto o ativo livre de risco. A análise de rentabilidade relativa é a simples divisão da rentabilidade efetiva da carteira pela rentabilidade efetiva do CDI, ou seja:

$$\text{Simulação 2 - Resultado Utilizando a Taxa Máxima} = \frac{11,78}{11,84} \times 100 = 99,52\%$$

Se calcularmos a duration da carteira e dar um choque de juros de 1 ponto percentual na carteira teremos um efeito negativo da carteira. Portanto, um resultado com rentabilidade tão próxima dos ativos livres de risco é melhor aplicar em ativos pós-fixados.

Vamos fazer uma nova simulação aumentando a volatilidade para 2.35% e comparar as rentabilidades das carteiras com as taxas de fim de período máxima e mínima obtidas na simulação do modelo de Vasicek.

Simulação 3	
Início	28-nov-2002
Vencimento	27-mai-2003
Prazo em dias corridos	180
Taxa CDI final de período para 180 dias	19.79%
Prêmio de Risco $\lambda$	0.52%
Volatilidade $\sigma$ aa (base252)	2.53%
$\kappa$	2.50%
Horizonte de Investimento Dias Úteis	121
Prazo Médio Bonds Dias Úteis	121
Propensão ao Risco $\gamma$	1.50
Alocação Estratégica em Títulos Prefixados	33.69%
Taxa Aplicada em Título Prefixado	25.91%

Como era esperado ao aumentarmos a volatilidade, diminuiu a alocação em títulos prefixados, caindo para 33.69%. Comparando a rentabilidade da carteira com a taxa mínima de fim de período obtivemos o seguinte resultado:

Títulos	% Carteira	Taxa Aplicada	Taxa Efetiva
Prefixado	33,69%	25,91%	11,70%
Pós-fixado	66,31%	19,79%	9,06%
Total Carteira	100,00%	21,85%	9,95%
CDI médio		19,79%	9,06%
% da Rentabilidade em Relação ao CDI ==>			109,83%

Fig. 6.24. Simulação 3 - Resultado Utilizando a Taxa Mínima

Agora vamos comparar o resultado da alocação com a taxa máxima de 32.43% a.a.

na tabela abaixo:

Títulos	% Carteira	Taxa Aplicada	Taxa Efetiva
Prefixado	33,69%	25,91%	11,70%
Pós-fixado	66,31%	32,43%	14,44%
Total Carteira	100,00%	30,23%	13,52%
CDI médio		32,43%	14,44%
% da Rentabilidade em Relação ao CDI ==>			93,60%

Fig. 6.25. Simulação 3 - Resultado Utilizando a Taxa Máxima

Ao comparar os dois resultados observamos que com o aumento da volatilidade houve uma maior dispersão entre a taxa máxima e a mínima, gerando uma rentabilidade 6.40% abaixo do CDI ao comparar-se com a taxa máxima, e um ganho de 9.83% acima do

CDI. Numa primeira análise parece atrativo, pois alocou-se menos em ativos de risco com um potencial de ganho maior que o de perda.

Agora fazer mais uma simulação e vamos ser mais ousados e vamos ampliar o horizonte de investimento para um ano, aumentar mais um pouco a volatilidade e a velocidade de reversão à média. Recalculando a taxa média esperada para o título prefixado de um ano chegamos à taxa de 25.65% aa.

Simulação 4	
Início	02-jan-2002
Vencimento	02-jan-2003
Prazo em dias corridos	365
Taxa CDI final de período para 180 dias	14.99%
Prêmio de Risco $\lambda$	0.52%
Volatilidade $\sigma$ aa (base252)	2.83%
$\kappa$	5.00%
Horizonte de Investimento Dias Úteis	253
Prazo Médio Bonds Dias Úteis	253
Propensão ao Risco $\gamma$	1.50
Alocação Estratégica em Títulos Prefixados	33.94%
Taxa Aplicada em Título Prefixado	25.65%

Ao utilizarmos a nova taxa mínima calculada com os novos parâmetros obtivemos o seguinte resultado:

Títulos	% Carteira	Taxa Aplicada	Taxa Efetiva
Prefixado	33,94%	25,65%	25,76%
Pós-fixado	66,06%	14,99%	15,05%
Total Carteira	100,00%	18,61%	18,69%

CDI médio	14,99%	15,05%
-----------	--------	--------

% da Rentabilidade em Relação ao CDI ==>	124,15%
--	---------

Fig. 6.26. Simulação 4 - Resultado Utilizando a Taxa Mínima

Utilizando a taxa máxima obtivemos o seguinte resultado:

Títulos	% Carteira	Taxa Aplicada	Taxa Efetiva
Prefixado	33,94%	25,65%	25,76%
Pós-fixado	66,06%	36,47%	36,64%
Total Carteira	100,00%	32,80%	32,95%

CDI médio	36,47%	36,64%
-----------	--------	--------

% da Rentabilidade em Relação ao CDI ==>	89,93%
--	--------

Fig. 6.27. Simulação 4 - Resultado Utilizando a Taxa Máxima

Pelo que pudemos observar o aumento do horizonte não influenciou em aumento ou diminuição da alocação em ativos prefixados, e o aumento da volatilidade não diminuiu a alocação, visto que, dobramos o valor da velocidade de reversão à média. Entretanto, com o aumento da volatilidade o modelo aumentou a dispersão das taxas de juros geradas,

com uma diferença de mais de dez pontos percentuais entre a taxa máxima e a mínima. Ao comparar a rentabilidade da carteira em relação à taxa mínima temos um ganho excepcional em relação ao CDI de 33.96% e ao compararmos com a taxa máxima temos uma perda de 14.17%. Analisando estes números desta simulação podemos ver que é muito atraente o ganho, visto que pelos números do modelo a perda não é tão considerável. Mas temos que ficar atentos ao nível de volatilidade, porque o ganho potencial é grande mas a perda tem que ser comparada com o que o investidor está disposto a perder.

## Conclusão

Pelo que pudemos analisar o modelo é muito sensível à ação da volatilidade e do prêmio de risco e ambos têm comportamentos contrários quanto a alocação estratégica de ativos prefixados, isto é, quando a volatilidade aumenta indica diminuição de alocação, enquanto quando o prêmio aumenta a alocação aumenta e vice-versa.

Quanto ao comportamento do Índice de Aversão ao Risco do Investidor, temos que ter muito bem mensurado tal índice, porque o mesmo também é uma das principais chaves para uma alocação estratégica ótima em títulos prefixados e não pode ser calculado de forma exata. Entretanto mensurar este índice não é uma tarefa tão simples, visto que o mesmo não é exato e não sai de nenhuma fórmula matemática, vem de uma fonte muito complicada que é o sentimento do ser humano que é totalmente diferente de investidor para investidor.

Como obter então este índice????

Muitos bancos e empresas de asset management tem elaborado questionários como por exemplo, segundo Luenberger [13], a Fidelity Investments, que tem um questionário com o título "WHAT'S YOUR INVESTMENT "RQ" - RISK QUOTIENT", que visa ten-



tar medir a atitude do investidor em relação ao risco e direcioná-lo ao tipo de investimento adequado ao seu perfil de risco.

Utilizando dados volatilidades históricas obtivemos resultados empíricos com resultados, de certa forma, esperados, segundo as premissas do modelo.

Na simulação 2 tivemos um alta alocação em títulos prefixados devido à baixa volatilidade usada no modelo, ou seja, menos risco mais alocação. Isto é uma atitude racional, mas quando temos baixa volatilidade temos um mercado eficiente, todos os agentes tem a mesma expectativa futura de preços, e portanto não temos arbitragem, gerando portanto uma volatilidade baixa.

A expectativa de grandes lucros ou prejuízos está na incerteza, quando os agentes tem expectativas diferentes entre si, gerando arbitragens, distorções de preços, prêmios mais altos, altas volatilidades. Entretanto quando temos alta volatilidade, mesmo com grandes prêmios, o modelo sugere uma alocação menor em títulos prefixados.

Ao seguir o modelo e fazer grandes alocações em títulos prefixados, quando a volatilidade está muito baixa, pode ser um risco muito grande, porque qualquer alta de taxa de juros no mercado poderá gerar grandes prejuízos. Isto acontece também na mensuração do

risco utilizando Var (Value at Risk), que libera mais limite para alocar mais recursos em determinado ativo quando a volatilidade diminui e corta limite quando a mesma aumenta. Entretanto com uma volatilidade alta, que oferece possibilidade de altos ganhos, faz com que o gestor ou investidor analise com cuidado a situação porque a volatilidade alta hoje pode estar muito mais alta amanhã. É preciso tomar cuidado com a indução do modelo em motivar alocar recursos em ativos prefixados mesmo que o mesmo mostre que há probabilidade de altos ganhos com uma alocação pequena.

Outro problema é que o modelo de Vasicek quando gerou taxas de juros, mais ou menos cinquenta por cento das taxas geradas foram acima da taxa média esperada e o restante abaixo desta mesma taxa. Temos que lembrar que o modelo pode gerar taxas negativas por ser um modelo Gaussiano.

O modelo entretanto deve ser melhor testado em situações reais e também devemos escolher um outro modelo de juros mais robusto com mais fatores de risco.

# Bibliografia

- [1] Alexander, Carol (2001): "Market Models - A Guide to Financial Data Analysis ",  
Primeira Edição, John Wiley & Sons
- [2] Bertsekas, Dimitri P. (2001): "Dynamic Programming and Optimal Control: 2nd Edition (Volumes 1 and 2)", Segunda Edição, Athena Scientific
- [3] Brigo, Damiano e Fabio Mercurio (2002): "Interest Rate Models", Primeira Edição,  
Springer Verlag
- [4] Campbell, John Y e Luis M. Viceira (2001): "Strategic Asset Allocation Portfolio  
Choice for Long-Term Investors", Primeira Edição
- [5] Copeland, Thomas E. e J. Fred Weston (1988): "Financial Theory and Corporate Policy", Terceira Edição, Addison-Wesley Pub Co
- [6] Duffie, J. Darrell Duffie (2001): "Dynamic Asset Pricing Theory", Terceira Edição,  
Princeton Univ Press

- [7] Elton, Edwin J. e Martin J. Gruber (1995): "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", Quinta Edição, 1995, John Wiley & Sons
- [8] Fabozzi, Frank J. (1999): "Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures", Primeira Edição, John Wiley & Sons"
- [9] Hull, John C. (2000): "Options, Futures, and Other Derivatives", Prentice Hall
- [10] Ingersoll, Jonathan E. Jr (1997): "Theory of Financial Making", Primeira Edição, Rowman & Littlefield
- [11] James, Jessica & Nick Webber (2000): "Interest Rate Modelling", Primeira Edição, John Wiley & Sons
- [12] Liu, Jun (april 30, 2001): "Portfolio Selection In Stochastic Enviroments", paper
- [13] Luenberger, David G. (1998): "Investment Science", Primeira Edição, Oxford University Press
- [14] Mikosch, Thomas (1999): "Elementary Stochastic Calculus With Finance in View (Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, Vol 6)", Primeira Edição

- [15] Neftci, Salih N. (2000): "Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives",  
Segunda Edição, Academic Press
- [16] Oksendal, Bernt K, (2002): "Stochastic Differential Equations", Quinta Edição, Springer  
Verlag
- [17] Rebonnato, Riccardo (1996), "Interest-Rate Option Models", Segunda Edição, John  
Wiley & Sons
- [18] Schirmer, Pedro Paulo e Christian Johannes Zimmer (2002): "Apreçamento de Ativos",  
Versão Draft
- [19] Tuckman, Bruce (2002): "Fixed Income Securities: Tools for Today's Market ", Se-  
gunda Edição, John Wiley & Sons
- [20] Yong, Jiongmin e Xun Yu Zhou (1999): "Stochastic Controls", Primeira Edição,  
Springer Verlag