

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE
"MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS"

Distribuição de probabilidade dos retornos com base no modelo de Heston

Charles Mann de Toledo

Dissertação apresentada à Faculdade
de Economia, Administração e Contabilidade
e ao Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre

Orientadores

Prof. Dr. Renato Vicente

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

São Paulo

Julho - 2003

Resumo

O trabalho é um estudo baseado no modelo de volatilidade estocástica de Heston (também conhecido como Cox-Ingersoll-Ross ou Feller). Adotamos a solução semi-analítica proposta por Dragulescu e Yakovenko para explicar as distribuições condicionais de retornos do Ibovespa (índice Bovespa). Verificamos que a distribuição resultante do modelo se ajusta muito bem à distribuição observada, de escalas que vão de 1 minuto a 100 dias. Os resultados têm relevância para as áreas de gerenciamento de risco e para a prática de negociação no mercado acionário e derivativos.

Abstract

The work is a study based on the stochastic volatility model of Heston (also known as Cox-Ingersoll-Ross or Feller model). We use the semi-analytic solution developed by Dragulescu and Yakovenko to explain the conditional distribution of the returns of the Ibovespa (Bovespa index). We verify that the resulting distribution of the model fits very well the observed distribution, in scales that go from 1 minute to 100 days. The results are relevant for risk management and for the practice of the stock market and derivatives trading.

Agradecimentos

Registro meus agradecimentos a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para o resultado deste trabalho.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Renato Vicente, que sugeriu o tema e que sem as suas sugestões e seus aconselhamentos não teria obtido esses resultados, e Prof. Dr. Rogério Rosenfeld, pela sua disponibilidade sempre que precisei.

A todos os professores do curso - os quais resgataram uma antiga paixão pela matemática e provocaram uma nova pela física - e em particular ao Prof. Dr. Joe Yoshino, pela sua insistência e incentivo.

Ao pessoal da Bovespa pelo apoio e acesso aos dados.

Ao Professor Victor Yakovenko pelos esclarecimentos e pelas sugestões.

Ao Christian Silva e Gilles Daniel, pelo envio dos scripts de seus trabalhos.

Ao Prof. Dr. Luiz Martins que, não fosse sua sugestão, não teria decidido fazer o curso.

E em especial à Jaci, Adriana e Gabriel pelo incentivo, paciência e compreensão.

Índice

1	Introdução	5
2	A volatilidade no Modelo de Black-Scholes	7
2.1	O modelo Black-Scholes	7
2.2	Evolução do Modelo Black-Scholes	8
2.3	O Modelo Black-Scholes no mercado brasileiro	9
2.4	Modelos com volatilidade estocástica	12
2.4.1	Modelo de Hull-White	13
2.4.2	Modelo de Stein & Stein	14
2.5	Modelo de Heston	14
3	A solução de Dragulescu e Yakovenko	18
3.1	Derivação da Fórmula	18
3.2	Incorporação da média ao modelo	21
3.3	A importância da correlação	24
4	Aplicação ao Ibovespa	29
4.1	Séries utilizadas	29
4.1.1	Série Completa - Baixa frequência - Jan/68 a Dez/02	29
4.1.2	Série 5 anos - Baixa frequência - Jan-98 a Dez-02	30
4.1.3	Série de alta-frequência - 01/11/02 a 14/02/03	31

4.2	O descarte dos <i>outliers</i> e a reutilização dos dados	32
4.3	Resultados com o Ibovespa	36
4.3.1	Etapas para a aplicação do modelo	36
4.3.2	Parâmetros conseguidos com a minimização	38
5	Conclusões	42
	Referência Bibliográfica	45

Capítulo 1

Introdução

Uma das premissas do modelo desenvolvido em conjunto por Fischer Black e Myron Scholes[1973] é que os preços das ações têm distribuição log-normal, o que é equivalente a dizer que a distribuição dos logaritmos dos retornos (log-retornos) têm distribuição normal. Mas o que se verifica na prática são distribuições dos log-retornos leptocúrticas e com caudas pesadas. Várias foram as tentativas de construção de modelos que conseguissem representar esse comportamento, particularmente levando em conta a volatilidade com um componente estocástico. No Capítulo 2, apresentamos os modelos fundamentais que levam em conta a incorporação desta estocasticidade.

Estudamos um deles, o modelo de Heston. A razão é que além de apresentar resultados de apreçamento de opções melhor do que o modelo de Black-Scholes - o que justifica como um modelo a ser considerado - recentemente foi publicado um trabalho de dois físicos, Adrian Dragulescu e Victor Yakovenko[2002], com a derivação de uma fórmula analítica para a função densidade da probabilidade dos retornos para o referido modelo. Como o objetivo de Dragulescu e Yakovenko foi o de investigar se os preços do mercado de ações têm o comportamento estocástico previsto pelo modelo de Heston, o trabalho foi duplamente original, pois além de derivarem a fórmula semi-analítica, concluíram que o modelo, aplicado ao índice Dow Jones, se ajusta muito bem para a distribuição dos retornos de 1 a 250 dias. A derivação da

solução de Dragulescu e Yakovenko, com comentários sobre as melhorias por nós incorporadas, estão no Capítulo 3.

Nossa dissertação é uma extensão do trabalho de Dragulescu e Yakovenko, incorporando nele o fenômeno da alavancagem - a correlação entre os preços e a volatilidade - com base nos trabalhos de Bouchaud, Perreló e Masoliver, e a aplicação dos parâmetros do modelo em escalas intra-dia. No Capítulo 4 demonstramos que o modelo se ajusta aos vários períodos de retornos do Ibovespa, podendo seus parâmetros serem usados tanto em séries de baixa frequência como de alta-frequência, com ticks a cada 1 minuto.

Mesmo sendo considerado um modelo relativamente simples, concluímos que modelo de Heston consegue representar muito bem a distribuição de probabilidade dos retornos do Ibovespa. No capítulo das conclusões, Capítulo 5, sugerimos que o modelo pode ser aprimorado incorporando-se os desenvolvimentos mais recentes de Perreló e Masoliver. Julgamos que os resultados credenciam o modelo como uma alternativa a ser considerada pelas áreas de risco e de *trading* de mercado acionário e derivativos.

Capítulo 2

A volatilidade no Modelo de Black-Scholes

Neste capítulo, fazemos uma introdução do modelo Black-Scholes e de alguns dos modelos que surgiram a partir deste marco (dentre eles o de Heston), especialmente levando em conta a questão da volatilidade.

2.1 O modelo Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes representou um enorme avanço na moderna teoria de finanças do ponto de vista geral, e no apreçamento de opções em particular. Após a publicação do trabalho de Black e Scholes, houve uma verdadeira avalanche de estudos publicados, fruto da intensa pesquisa que se seguiu.

O modelo Black-Scholes leva em conta que o processo do preço do ativo S_t é a solução para a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (2.1)$$

com W_t representando o movimento browniano, μ a média, e σ a volatilidade, sendo os dois últimos constantes (conforme premissa *b* da nota de rodapé 1)¹. A equação

¹ As premissas do modelo original de Black-Scholes são: a) os mercados têm negociação contínua, i.e., a qualquer tempo há a possibilidade de realização de um negócio; b) o ativo objeto da opção segue um comportamento log-normal, com média μ e volatilidade σ constantes; c) a taxa de juros livre de risco é conhecida e constante; d) o ativo objeto não paga dividendos; e) não há custos de negociação e impostos; f) há a possibilidade de venda a descoberto, sem qualquer custo adicional; g) os mercados são competitivos, sendo que os preços são ajustados de tal forma que não há possibilidade de arbitragem.

tem como solução:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} \quad (2.2)$$

Assumindo que o ativo objeto obedece à Equação (2.2) e que há um ativo sem risco B que se valoriza a uma taxa livre de risco r ($dB = rBdt$), e adotando outras premissas originais do modelo, Black e Scholes chegaram à sua popular fórmula de apreçamento de opções².

No modelo Black-Scholes, o parâmetro de volatilidade se refere à volatilidade do ativo objeto até o vencimento da opção, sendo que esta deve ser constante durante o período. A volatilidade do preço do ativo objeto é o único parâmetro que não é observado diretamente. Vários foram os testes empíricos realizados comparando o preço teórico do Black-Scholes aos preços praticados de mercado, logo evidenciando que as premissas nas quais o modelo se baseava estavam longe de refletir a realidade.

2.2 Evolução do Modelo Black-Scholes

Mesmo tendo sido derivada exclusivamente para opções européias, a facilidade que o modelo Black-Scholes trouxe ao dispor de uma fórmula analítica para o seu cálculo, acabou servindo de incentivo para a busca por melhorias em sua formulação. Com isso, vários foram os aprimoramentos introduzidos de forma a conseguir modelos que representassem melhor a realidade do mercado.

² Para a derivação completa do modelo Black-Scholes, ver Hull[1999] e Wilmott[2000].

Com o decorrer das pesquisas, uma a uma as premissas foram sendo deixadas de lado, fazendo com que as fórmulas encontradas, nem sempre analíticas, conseguissem um melhor apreçamento das opções. Surgiram, então, modelos para opções de ações com pagamento de dividendos, modelos que levam em conta custos de negociação, modelos para opções americanas, modelos com taxa de juros estocástica, modelos com volatilidade estocástica, etc³. Desenvolveram-se também modelos mais gerais, que procuraram contemplar as várias possibilidades de tratamento das variáveis do Black-Scholes, como o elaborado por Bakshi, Chao e Chen [1997].

Em função do *crash* que o mercado de ações sofreu em 1987, a importância da volatilidade aumentou consideravelmente no gerenciamento de risco. Devido à dificuldade em estimá-la, por esta não ser uma variável observável, ela tem sido alvo da maioria dos estudos referentes à apreçamento de ativos.

2.3 O Modelo Black-Scholes no mercado brasileiro

A popularidade do modelo Black-Scholes observada nos mercados mais desenvolvidos não é diferente no Brasil. Apesar de nosso mercado apresentar uma maior volatilidade, comparando-a com países mais desenvolvidos, o modelo é largamente utilizado por quem participa do mercado de opções no Brasil.

Os fenômenos verificados nas distribuições dos retornos nos outros mercados também ocorrem aqui. Ao analisarmos a distribuição dos retornos do Ibovespa desde

³ Para uma clara exposição sobre esta evolução, ver Wilmott[2000].

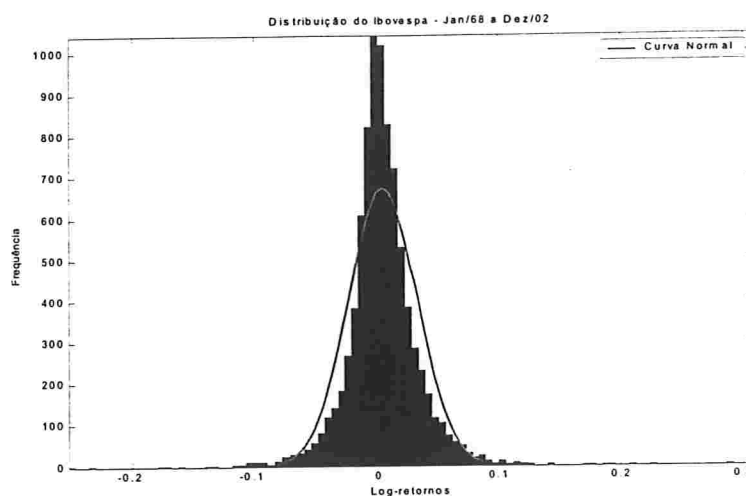


Figura 2.1: **Histograma dos Log-retornos do Ibovespa - Jan/68 a Dez/02**

a sua criação, constatamos que é muito diferente de uma normal. Comparando a distribuição dos log-retornos do índice com uma distribuição normal, com mesma média e mesma variância, verificamos na Figura 2.1 uma grande concentração de retornos próxima da média e uma frequência maior do que se esperaria de uma normal nas suas caudas⁴.

Além de rejeitarmos visualmente a hipótese de normalidade dos log-retornos, os testes de Jarque-Bera do Ibovespa também rejeitam esta hipótese com 5% de nível de significância para a distribuição dos logaritmos dos retornos.⁵

⁴ Para estudar particularidades das distribuições de séries financeiras, ver Alexander[2001], Bouchaud[2001], Dacorogna[2001], Mantegna[2000] e Takayasu[2000].

⁵ Para testes estatísticos com Matlab, ver Martinez[2002].

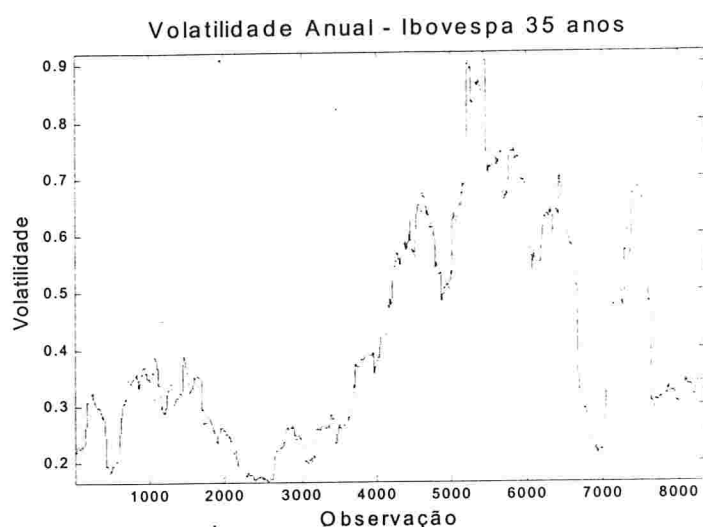


Figura 2.2: Volatilidade do Ibovespa de Jan/68 a Dez/02.

Numa distribuição de probabilidade normal, a volatilidade seria constante, mas não é isso o que ocorre na prática. A Figura 2.2 apresenta a evolução da volatilidade histórica anual do Ibovespa no período de 35 anos. Essa volatilidade não constante é o que faz com que eventos nos extremos da distribuição ocorram um número de vezes maior do que suporia uma distribuição normal. Está provado que ao introduzir-se um componente estocástico na trajetória da volatilidade, consegue-se explicar boa parte das distorções da distribuição.

Mas se o modelo Black-Scholes não consegue representar o comportamento real do mercado de ações, o que faz com que continue tão popular e tão largamente utilizado? A resposta é que o modelo, ao se adotar a volatilidade implícita capturada no próprio mercado, propicia, com sua fórmula fechada, uma maneira rápida, prática

e barata de calcular opções, oferecendo uma referência que permite participar deste dinâmico mercado. Além disso, apresenta resultados satisfatórios para opções no dinheiro. Mas fora desta situação, é necessário lançar mão de outros modelos que consigam explicar as distorções verificadas, pois os riscos de se apreçar erradamente são enormes.

No trabalho em que apresentam seu modelo, Bakshi, Chao e Chen, com base em dados de mercado, concluem que a simples introdução de volatilidade estocástica no modelo permite evitar erros de apreçamento do Black-Scholes da ordem de até 60%.

Isto posto, fica evidente a importância da busca por um modelo que consiga incorporar o comportamento estocástico da volatilidade. Isto requereu - e ainda requer - formulações alternativas para melhor poder refletir o comportamento desta variável.

2.4 Modelos com volatilidade estocástica

Vários foram os modelos desenvolvidos objetivando introduzir um componente estocástico na volatilidade. A pesquisa é muito rica neste sentido, havendo inúmeras abordagens do problema. Dentre os modelos que levam em conta volatilidade estocástica, destacam-se os seguintes:

2.4.1 Modelo de Hull-White

John Hull e Alan White foram um dos primeiros a estudar modelos com volatilidade estocástica, e em 1988, após terem apresentado um primeiro modelo que garantia uma volatilidade sempre positiva, porém sem reversão à média, desenvolveram seu segundo modelo, já incorporando esta importante característica da volatilidade.⁶

Adotando a notação dos autores, este modelo leva em conta que:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sqrt{V}dW_S \quad (2.3)$$

$$dV = a(b - V)dt + \xi V^\alpha S dW_V \quad (2.4)$$

onde,

S = preço do ativo

a , b e ξ e α = são constantes

V = taxa da variância do ativo objeto, sendo esta o quadrado da volatilidade

r = taxa de juros livre de risco determinística

dW_S e dW_V = processos estocásticos para S e V , respectivamente

O modelo prevê uma volatilidade com reversão à média b a uma taxa a . Quando dW_S e dW_V não são correlacionados, o preço da opção é o de Black-Scholes integrado sobre a distribuição de probabilidade da média da variância até o vencimento da opção.

⁶ Para ver detalhes dos dois modelos, ver Hull e White[1987 e 1988].

Uma das entraves deste modelo é que, quando os dois processos estocásticos são correlacionados, não há uma solução analítica.

2.4.2 Modelo de Stein & Stein

O modelo desenvolvido por Stein e Stein [1991] pressupõe que a volatilidade obedece um processo de Ornstein-Uhlenbeck⁷. A volatilidade tem o seguinte comportamento:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_1 \quad (2.5)$$

$$d\sigma = -\delta(\sigma - \theta)dt + k dW_2 \quad (2.6)$$

onde S é o preço da ação, σ é a volatilidade da ação, k , μ , δ e θ são constantes, e dW_1 e dW_2 são dois processos brownianos independentes.

Este modelo tem a propriedade da reversão à média mas não impede que a variância se torne negativa. Os autores se justificaram afirmando que a probabilidade de $\sigma = 0$ é tão pequena que não deveria ser levado em conta.

2.5 Modelo de Heston

O modelo de Heston é assim chamado por conta de seu autor, Steven L. Heston[1993]. É também denominado por alguns de modelo Feller, de William Feller[1971], o matemático e estatístico que originalmente desenvolveu a idéia do processo estocás-

⁷ Para aplicação do processo Ornstein-Uhlenbeck em dinâmica de preços, ver Perreló[2003b] e Schobel[1999].

tico fundamental do modelo, ou como modelo de Cox, Ingersoll e Ross[1985], pois esses autores foram os primeiros a aplicar a teoria de Feller em finanças, para a taxa de juros de curto prazo, trabalho no qual Heston se referenciou. O processo estocástico no qual o modelo de Heston se baseia, também já tinha sido estudado por Hull e White (ver a seção 2.4.1 Modelo de Hull-White), sendo um caso particular deste (ao se fazer $\alpha = 0.5$ na Equação 2.4). Entretanto, Heston teve o mérito de encontrar uma fórmula fechada para o modelo⁸.

O modelo agrega as características positivas dos anteriores: a reversão à média e a variância maior ou igual a zero. A dinâmica do preço da ação e da volatilidade, no modelo de Heston, obedecem ao seguinte processo:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sqrt{v_t}dW_1) \quad (2.7)$$

$$dv_t = -\gamma(v_t - \theta)dt + k\sqrt{v_t}dW_2 \quad (2.8)$$

onde

S_t = é o preço do ativo no instante t

v_t = é a variância no instante t

k = é o ruído da volatilidade

dW_1 e dW_2 = são os processos brownianos, respectivamente da ação e da

volatilidade

θ = é a média da variância de longo prazo, sendo que $\theta > 0$

⁸ Para maiores detalhes sobre o modelo de Heston, ver Epps[2000], Faulhaber[2002], Kluge[2002], Theodorakakos[2001] e Winkler[2001].

$\gamma = k$ é a taxa de reversão à média, sendo que $k > 0$

ρ = correlação entre dW_1 e dW_2 .

A equação (2.8) é a que traz o processo de volatilidade estocástica com reversão à média. Heston demonstrou que ao se adotar um modelo com processo estocástico tem-se uma flexibilidade maior na distribuição dos retornos. Um aumento da correlação ρ gera uma assimetria na distribuição e uma alteração da volatilidade da variância faz com que se consiga distribuições com uma maior curtose.

Após Heston ter publicado seu trabalho, vários foram os desenvolvimentos que tomaram o seu como base. Bates[1996] introduziu nele saltos de volatilidade. Seu modelo é conhecido como modelo de difusão estocástica com saltos de volatilidade. Ele descreve as alterações de preço e a volatilidade estocástica usando o movimento geométrico browniano e um processo de reversão à média quadrática. Para grandes saltos de preços, seja para um lado ou outro, são imputadas uma baixa probabilidade e estes são tratados como eventos de um processo de Poisson. Bates conseguiu mostrar que seu modelo explica o *smile* de volatilidade sob a condição de volatilidade extremamente alta.

Já Bakshi, Chao e Chen[1997] levaram em conta a estocasticidade da volatilidade, das taxas de juros e saltos nos preços. Este é um modelo geral e que incorpora os modelos anteriores: o modelo Black-Scholes, taxa de juros estocástica, volatilidade estocástica, volatilidade e taxa de juros estocásticas, saltos aleatórios com volatilidade estocástica, e volatilidade estocástica com taxa de juros estocás-

tica com saltos aleatórios. Em suas conclusões, os autores destacaram que dentre todos os fatores, o mais importante a ser incorporado no modelo Black-Scholes é o da volatilidade estocástica.

O modelo de Heston é relativamente simples e contempla as características fundamentais e necessárias para explicar o comportamento estocástico da volatilidade. Resta saber se o ativo que se pretende estudar, tem ou não o comportamento previsto teoricamente pelo modelo. Dragulescu e Yakovenko [2002], dois físicos da Universidade de Maryland, ao derivarem a fórmula analítica para a função densidade da probabilidade dos retornos para o modelo de Heston, viabilizaram a comparação dos retornos observados com os retornos teóricos do modelo.

Capítulo 3

A solução de Dragulescu e Yakovenko

Baseando-se no modelo de Heston, Adrian Dragulescu e Victor Yakovenko [2002] desenvolveram uma fórmula analítica para a função densidade da probabilidade para os log-retornos de preços de ações. Os autores demonstraram que seu modelo, aplicado a um período de 20 anos do índice Dow Jones, consegue um ajuste excelente para a distribuição de retornos de 1 a 250 dias. Neste capítulo, além de reproduzirmos como se dá a derivação da fórmula, destacamos os problemas encontrados e as adaptações necessárias para a sua aplicação ao Ibovespa.

3.1 Derivação da Fórmula

Abaixo, reproduzimos o desenvolvimento da derivação, conforme descreve Daniel [2003a].

Considere-se uma ação, cujo preço seja S_t , obedece a seguinte equação diferencial estocástica de um movimento geométrico browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \quad (3.1)$$

O subscrito t indica a dependência com relação ao tempo, μ é o parâmetro de tendência, $W_t^{(1)}$ é o movimento estocástico browniano padrão, e σ_t é a volatilidade depen-

dente do tempo. Pelo lema de Ito temos⁹:

$$d \log S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t^{(1)} + o(dt) \quad (3.2)$$

Substituindo-se a variável S_t por $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$, temos:

$$dr_t = \left(\mu - \frac{v_t}{2}\right)dt + \sqrt{v_t}dW_t^{(1)} \quad (3.3)$$

e eliminando-se a tendência com $x_t = r_t - \mu t$,

$$dx_t = -\frac{v_t}{2}dt + \sqrt{v_t}dW_t^{(1)} \quad (3.4)$$

Por conveniência, adotamos $v_t = \sigma_t^2$ que é a variância.

Assumimos que a variância v_t obedece à seguinte equação diferencial estocástica com reversão à média:

$$dv_t = -\gamma(v_t - \theta)dt + k\sqrt{v_t}dW_t^{(2)} \quad (3.5)$$

Nessa equação, θ é a média de longo prazo de v_t , γ é a taxa de relaxamento desta média, $W_t^{(2)}$ é um processo de Wiener padrão, e k é a volatilidade da variância.

No modelo, $W_t^{(1)}$ e $W_t^{(2)}$ apresentam correlação da seguinte ordem:

$$dW_t^{(2)} = \rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2}dZ_t \quad (3.6)$$

onde Z_t é um processo de Wiener independente de $W_t^{(1)}$, e $\rho \in [-1,1]$ é o coeficiente de correlação. O caso de uma correlação negativa é conhecido como o efeito de alavancagem. Mais à frente isto será tratado com mais detalhe.

⁹ Como referência para cálculo estocástico, ver Klebaner[1998] e Mikosch[1998]

A equações 3.4 e 3.5 são a base do modelo de Heston. Conforme descreve Silva[2002], a equação de Fokker-Planck para o modelo de Heston é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}P = \gamma \frac{\partial}{\partial v}[(v-\theta)P] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(vP) + \rho k \frac{\partial^2}{\partial x \partial v}(vP) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(vP) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2}(vP) \quad (3.7)$$

Dragulescu e Yakovenko, através de uma transformada de Fourier resolveram analiticamente a equação, obtendo a distribuição de probabilidade centrada em x e uma transformada de Laplace em v . Após uma série de derivações, os autores chegaram à seguinte integral de Fourier:

$$P_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{ip_x + F_t(p_x)} \quad (3.8)$$

sendo que

$$F_t(p_x) = \frac{\gamma \Gamma \theta t}{k^2} - \frac{2\gamma \theta}{k^2} \ln \left[\frac{\cosh \frac{\Omega t}{2} + \frac{\gamma}{\Omega} \sinh \frac{\Omega t}{2}}{\cosh \frac{\Omega t}{2} + \frac{\Gamma}{\Omega} \sinh \frac{\Omega t}{2}} \right] \quad (3.9)$$

$$- \frac{2\gamma \theta}{k^2} \ln \left[\cosh \frac{\Omega t}{2} + \sinh \frac{\Omega t}{2} \left(\frac{\Omega^2 - \Gamma^2 + 2\gamma \Gamma}{2\gamma \Omega} \right) \right] \quad (3.10)$$

onde $\Gamma = \gamma + i\rho k p_x$,

ρ sendo a correlação entre $W_t^{(1)}$ e $W_t^{(2)}$,

$\Omega = \sqrt{\Gamma^2 + k^2(p_x^2 - ip_x)}$, e

γ, θ, k e μ são parâmetros do modelo de Heston.

O resultado pode então ser comparado com os dados reais dos retornos. Dragulescu e Yakovenko, no paper original, adotaram a correlação $\rho = 0$, pois argumentaram não ter encontrado grande influência de ρ nos resultados. Isto simplifica a expressão e reduz uma variável do modelo.

A análise assintótica do modelo mostra que este apresenta uma distribuição Gaussiana para valores pequenos de $|x|$ e uma distribuição exponencial e dependente do tempo para valores grandes de $|x|$.

O próximo passo é confrontar os log-retornos observados da amostra com o modelo, minimizando a diferença de forma a conseguir os melhores parâmetros de Heston, γ (Gamma), θ (Theta), k (Kappa), ρ (Ro) e μ (Mu). Esta minimização se observa na média do quadrado dos desvios de todos os log-retornos disponíveis nos vários intervalos de tempo, de forma que:

$$\text{Minimização} = \sum_{x,t} |\log P_t^*(x) - \log P_t(x)|^2 \quad (3.11)$$

sendo que $P_t^*(x)$ é a densidade de probabilidade empírica (dos pontos observados) e $P_t(x)$ é a resultante do modelo.

Dragulescu e Yakovenko fizeram a minimização levando em conta os log-retornos para os intervalos de 1, 5, 20, 40 e 250 dias, sendo que os parâmetros resultantes conseguem se ajustar para qualquer desses intervalos.

Isto posto, discorreremos sobre alguns problemas encontrados neste modelo e a forma como nós os abordamos.

3.2 Incorporação da média ao modelo

Em seu trabalho, Dragulescu e Yakovenko dão um tratamento simplista ao parâmetro μ , o chamado *drift*, ou média dos preços no período. Eles calcularam a média com

base numa regressão linear simples entre o índice e o tempo. Esta abordagem não teve influência no resultado obtido pois o período do Dow Jones analisado foi de crescimento praticamente uniforme, somente apresentando uma anomalia em outubro de 1987, época do *crash* da bolsa de Nova Iorque, que mesmo assim, em seguida apresentou uma recuperação muito rápida. No estudo subsequente, Silva e Yakovenko[2002] constataram a dificuldade de se incorporar o parâmetro μ quando a série apresenta comportamento irregular. No referido trabalho, foram objeto de estimação de parâmetros o próprio Dow Jones, o S&P500 e o índice Nasdaq. A diferença é que nestas séries foi incorporado o período de janeiro de 2001 a dezembro de 2002, caracterizado por um nítido comportamento de queda dos índices.

Esta é a razão alegada dos ajustes dos parâmetros não terem sido tão bons quanto os do trabalho original. A sugestão, encontrada nas conclusões do trabalho de Silva e Yakovenko, é de que, como o parâmetro μ é exógeno e foi considerado como constante apenas para simplificação, deve-se desenvolver um modelo levando em conta o alisamento dessa variável com o decorrer do tempo.

Em nosso trabalho houve a necessidade de se pensar numa solução alternativa para a incorporação do parâmetro μ ao modelo. O índice Bovespa tem um comportamento irregular, não apresentando uma tendência nítida para o período analisado. A solução encontrada foi incorporar o parâmetro μ como sendo 0 (zero), na medida em que se subtrai a média de cada uma das observações da série.

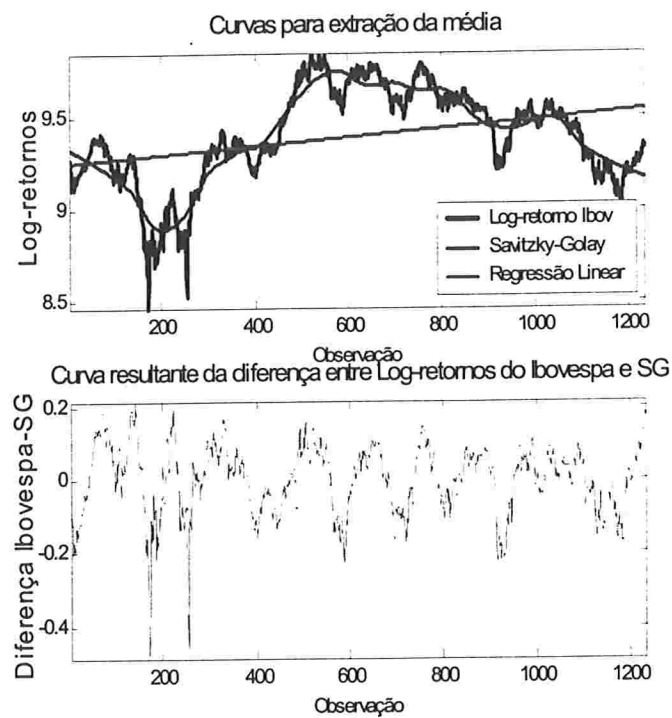


Figura 3.1: Extração da média dos Log-retornos pelo método de Savitzky-Golay

Como nosso objetivo é obter uma explicação e um ajuste para o comportamento da variação dos preços desconsiderando uma eventual tendência embutida em sua trajetória, percebe-se que isto não pode ser conseguido através de uma regressão linear (ver o primeiro gráfico da Figura 3.1). Não faz sentido utilizarmos um *drift* linear numa série com comportamento parabólico. Adotamos então o procedimento de subtrair a média de todas as observações, ficando somente com a diferença, i.e., as perturbações acima e abaixo da média.

O método adotado para definirmos a média foi o alisamento de Savitzky-Golay¹⁰. Os parâmetros do método, tamanho da janela e ordem do polinômio, foram escolhidos de forma que a média pudesse capturar as flutuações da série. A série resultante deste processo é traçada no segundo gráfico da Figura 3.1.

3.3 A importância da correlação

O parâmetro ρ (R_0) é a correlação entre os dois movimentos brownianos do modelo, do preço do ativo e sua volatilidade. Dragulescu e Yakovenko, após realizarem algumas minimizações levando em conta esta correlação, concluíram que ela era irrelevante para explicar os retornos e simplificaram o modelo considerando $\rho = 0$, ficando somente com os parâmetros restantes γ , θ , k e μ .

A questão da correlação entre o preço do ativo e sua volatilidade tem sido alvo de um grande número de estudos. Recentemente, Bouchaud, Potters e Matacz[2001] chegaram a algumas conclusões sobre o chamado efeito da alavancagem, i.e., um fenômeno observado empiricamente, onde a volatilidade varia inversamente ao nível de preços. Analisando várias e longas séries de ações e índices, descobriram que a correlação entre retornos passados e volatilidade futura é negativa e que é decrescente com o tempo. A segunda constatação é de que a volatilidade passada não tem

¹⁰ A lógica deste procedimento consiste em que para cada observação se calcula os parâmetros de um polinômio através de mínimos quadrados que melhor representa o comportamento de uma janela de tempo pré-definida, permitindo que se gere um novo ponto, que passa a ser a média para aquela determinada observação inicial. Fazendo isso para cada uma das observações da amostra, sucessivamente, têm-se um vetor que representa a "média" de toda a série. Para detalhes sobre o alisamento de Savitzky-Golay, ver Numerical Recipes in Fortran 77.

correlação com retornos futuros. Isto os levou à conclusão de que o aumento da volatilidade é causada pela queda dos preços das ações, e não o contrário, a de que o aumento da volatilidade é que causa uma queda dos preços. O estudo tem um aspecto importante e que eventualmente pode ser incorporado ao modelo em foco, na medida em que considera o período T como o tempo necessário para que a correlação entre a volatilidade e os preços volte a ser zero, o que representaria o nosso tempo de relaxação $1/\gamma$, ou também denominado de velocidade de reversão à média.

Para chegar ao cálculo da alavancagem, Bouchaud, Potters e Maticz levaram em conta o preço absoluto das ações e dos índices pesquisados, sendo que $\delta S_i(t) = S_i(t+1) - S_i(t)$, onde $S_i(t)$ é o preço da ação i no instante t . A mudança relativa do preço é dada por $\delta x_i(t) = \delta S_i(t)/S_i(t)$. Os autores derivaram a função da correlação do cálculo da assimetria da distribuição da mudança dos preços relativos para o período T , chegando à Equação (3.12) de medida da alavancagem:

$$L(\tau) = \frac{1}{Z} \langle [\delta x_i(t+\tau)]^2 \delta x_i(t) \rangle \quad (3.12)$$

Esta mede a correlação entre as mudanças do preço no tempo t e uma medida do quadrado da volatilidade no instante $t + \tau$, sendo que Z é um coeficiente de normalização igual a $\langle \delta x_i(t)^2 \rangle^2$. A média da alavancagem dos vários ativos i pode ser calculada com a Equação (3.13):

$$\bar{L}_{S,I}(\tau) = -A_{S,I} \exp\left(-\frac{\tau}{T_{S,I}}\right) \quad (3.13)$$

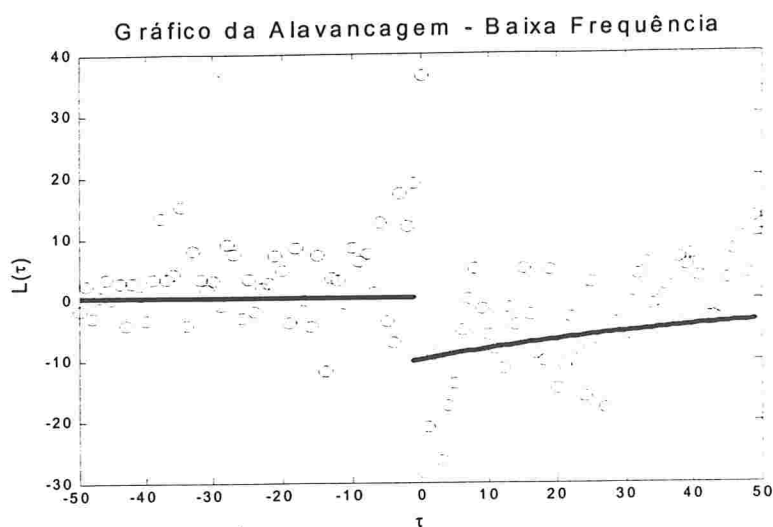


Figura 3.2: Gráfico sobre o efeito da alavancagem - Série de retornos diários do Ibovespa - Jan/98 a Dez/02

Esta é a equação que pode ser útil ao nosso modelo, pois conforme adiantamos, $T_{S,I}$ pode ser considerado como o tempo de relaxação $1/\gamma$, permitindo que tenhamos uma variável a menos no nosso processo de otimização. A análise das várias séries permitiu aos autores concluir sobre a causalidade em função, já que quando $\tau < 1$, isto é, nos períodos passados, a função apresenta valores muito pequenos, próximos a zero.

É isto o que observamos nos gráficos de alavancagem da nossa série de 5 anos e da série de alta-frequência, conforme as Figuras 3.2 e 3.3.

Quando $\tau > 1$, isto é, nos períodos futuros, os gráficos apresentam uma correlação negativa. Esta constatação permitiu, na etapa de minimização, tomarmos como pressuposto que a correlação ρ é negativa.

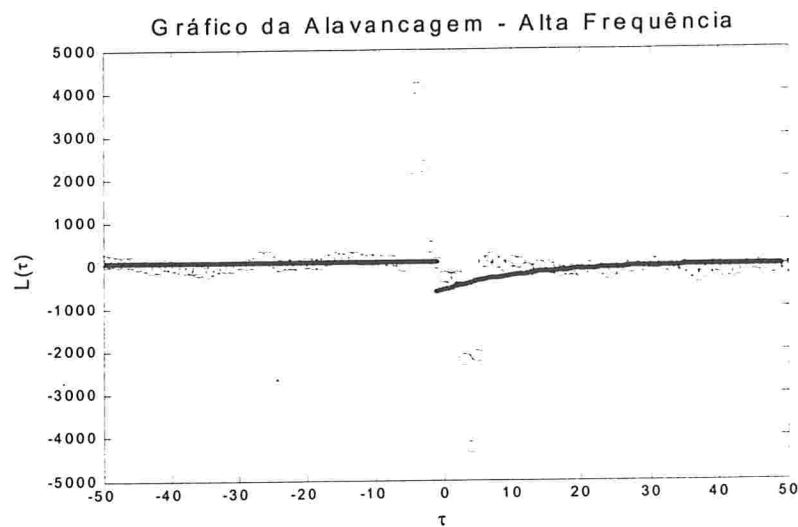


Figura 3.3: Gráfico sobre o efeito da alavancagem - Série de retornos de 1 minuto do Ibovespa

Perrelló, Masoliver *et alli* [2002, 2003a, 2003b, 2003c], baseados no trabalho de Bouchaud, Potters e Matacz, foram mais além e desenvolveram uma maneira de calcular algumas das variáveis de vários modelos de volatilidade estocástica em função da alavancagem. Dentre os modelos, apresentam o cálculo da alavancagem para o modelo de Heston quando $\tau > 1$, como sendo:

$$L(\tau) = 4 \frac{\rho\gamma}{k} e^{-\gamma\tau} \quad (3.14)$$

Deixamos o cálculo desses parâmetros pelo método de Perelló para um estudo futuro. Em nosso trabalho, levando em conta a importância da correlação entre o ativo objeto e volatilidade e as evidências acima, incorporamo-la ao modelo

como $\rho < 0$, e diferentemente de Dragulescu e Yakovenko, esta passa a ser um dos parâmetros a ser estimados.

Capítulo 4

Aplicação ao Ibovespa

Nosso objetivo foi de verificar o comportamento do Ibovespa com relação ao modelo formulado por Dragulescu e Yakovenko. Além de usarmos os retornos diários do Ibovespa, usamos dados de alta-frequência, com intervalos de observações (ticks) de até 30 segundos.

4.1 Séries utilizadas

São duas, basicamente, as séries do Índice Bovespa (Ibovespa) utilizadas. O índice foi criado em janeiro de 1968, e a série completa de fechamentos diários do Ibovespa até dezembro de 2002 é a primeira de nossas séries. A segunda é a série de alta frequência, com ticks de 30 em 30 segundos, do período compreendido de 01 de novembro de 2002 a 14 de fevereiro de 2003.

4.1.1 Série Completa - Baixa frequência - Jan/68 a Dez/02

Esta compreende os preços de fechamentos diários do Ibovespa de janeiro de 1968 a dezembro de 2002, com um total de 8.601 observações. No primeiro gráfico da Figura 4.1, observamos como o histórico de alta-inflação provocou mudanças na ordem de medida do índice. Para se ter uma idéia disso, a primeira observação do

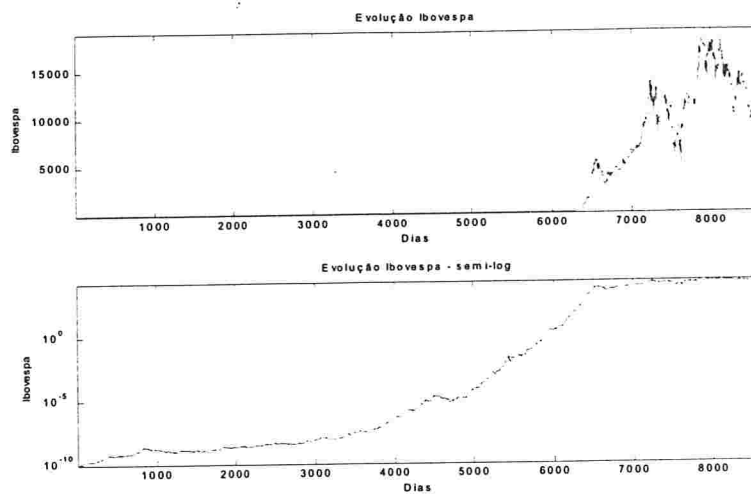


Figura 4.1: Evolução do Ibovespa - Jan/68 a Dez/02

número índice equivale a 1.0^{-10} . No segundo gráfico, temos a mesma série em escala logarítmica.

4.1.2 Série 5 anos - Baixa frequência - Jan-98 a Dez-02

Esta série é um sub-produto da série anterior, com um total de 1.235 observações. Foi a partir desta série que estimamos os parâmetros do modelo. Conforme se pode observar no gráfico da Figura 4.2, comparando-se os log-retornos da série com uma curva normal, construída com a mesma média e desvio padrão, ela apresenta leptocurtose e tem caudas pesadas, semelhante à série de 35 anos, apresentada na Figura 2.1.

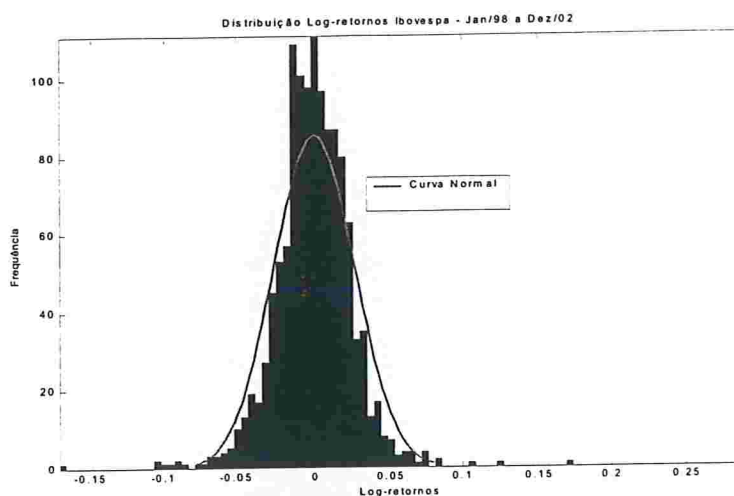


Figura 4.2: Distribuição dos log-retornos do Ibovespa - Jan/98 a Dez/02

4.1.3 Série de alta-frequência - 01/11/02 a 14/02/03

Esta série é a evolução do Ibovespa com *ticks* de 30 em 30 segundos, compreendendo 70 dias de negociação, com 842 *ticks* por dia. O total da amostra é de 58.940 *ticks*. Na maioria das vezes, em decorrência dos leilões de fechamento, a negociação da Bovespa se estende por vários minutos além do horário regular de negociação. Mantivemos uma uniformidade do número de *ticks*, limitando-os a 842 por dia, o equivalente a 7 horas e 1 minuto de negociação, eliminando da amostra os dias nos quais foi constatado um período de negociação menor do que este. Não haveria prejuízo em mantê-los, porém, desta forma têm-se uma amostra uniforme, o que, eventualmente, poderia ser útil na análise dos resultados. A Figura 4.3 traz o gráfico com a

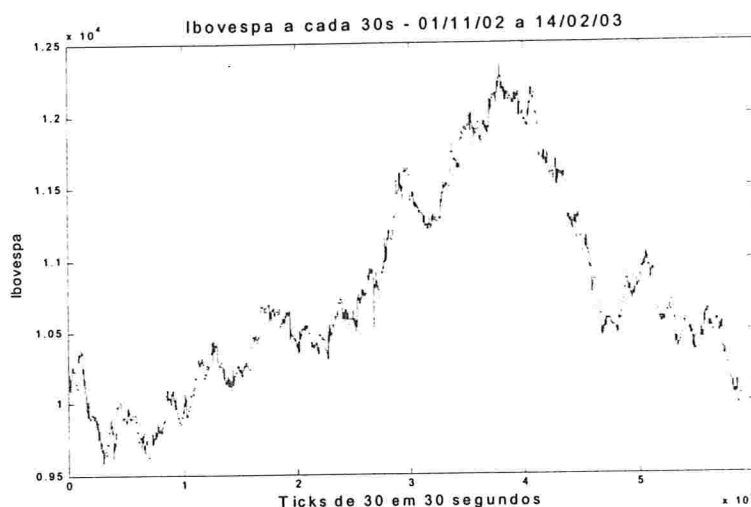


Figura 4.3: Ibovespa com ticks de 30 segundos - 01/11/02 a 14/02/2003

evolução do índice neste período, e como se pode perceber, dado que as observações são de alta-frequência, há um comportamento bastante errático.

O gráfico da Figura 4.4 apresenta a distribuição dos log-retornos do período. Verificamos uma concentração muito grande próxima à média e um número elevado de observações nos extremos da distribuição, caracterizando, uma vez mais, a leptocurtose com caudas pesadas.

4.2 O descarte dos *outliers* e a reutilização dos dados

Em estudo recente de Daniel[2003a e 2003b], há uma crítica ao trabalho de Dragulescu e Yakovenko com relação ao tratamento dos dados. Daniel comparou o modelo de Dragulescu e Yakovenko com a distribuição normal, usando o resultado de

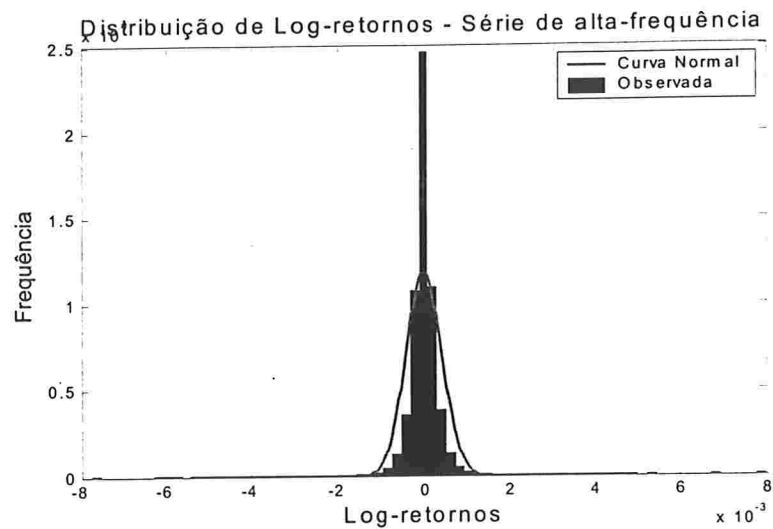


Figura 4.4: **Distribuição dos log-retornos de ticks de 30 segundos**

uma rede neural como a distribuição ideal e como referência, ou *benchmark*. Ele conclui que o modelo de Dragulescu e Yakovenko se ajusta melhor do que a gaussiana para qualquer dos intervalos de tempo escolhidos, porém, defende que para intervalos maiores do que 40 dias a gaussiana deveria ser utilizada, pois além de ser menos complexa, as distribuições a partir deste intervalo deixam de apresentar curtose e caudas pesadas.

Daniel centra suas críticas na forma como Dragulescu e Yakovenko prepararam os dados primários. Segundo ele, os autores conseguiram o resultado devido a dois procedimentos que considera injustos. O primeiro se refere ao que ele denomina de reutilização dos dados na construção da séries dos retornos, pois os autores tomaram, para cada intervalo de tempo escolhido (janela), os respectivos log-retornos, movendo

a janela a cada preço de fechamento. Sua alegação é que a forma utilizada por Dragulescu e Yakovenko faz com que a influência de observações extremas tenham um peso maior do que deveriam. Daniel propõe que os log-retornos devem ser calculados levando em conta janelas fixas de tempo, i.e., para o caso de retornos de cinco dias, o primeiro cálculo de retorno deveria se dar entre a 6^a observação e a primeira, a segunda da 11^a e a 6^a, e assim sucessivamente. Não concordamos com esta sugestão, pois o método alternativo proposto por Daniel, além de não resolver o problema abordado, reduz a amostra consideravelmente quando da utilização de retornos com janelas maiores.

O segundo questionamento é com relação ao chamado *trimming* (eliminação) das observações consideradas *outliers*. Para ele, os autores não deveriam ter excluído nenhuma das observações, já que todas as observações deveriam estar presentes para permitir uma comparação completa do ajuste do modelo.

Em qualquer série financeira que se pretenda estudar, é provável que se encontre observações que distam muito da média da série, os chamados pontos aberrantes. Neste caso, dependendo de qual o objetivo do estudo, uma das alternativas é, criteriosamente, desconsiderar estes pontos. Normalmente essas observações estão relacionadas com fatos macro-econômicos ou qualificadas como desastres, os quais não fazem parte do objeto deste estudo.¹¹

¹¹ Para teoria sobre pontos aberrantes, ver Mills[1999] e Tsay[2002]

Data	Índice	Variação	Evento
27/08/98	6.616,7	-9,949%	Crise da Ásia/Rússia.
10/09/98	4.760,5	-15,824%	A possibilidade de impeachment do presidente Bill Clinton (foto) derruba a bolsa de Nova York, que cai 3,17% num dia e Brasil eleva os juros de 29,75% para 49,75% ao ano, após a bolsa de São Paulo ter despencado 15,82%, a maior baixa desde o Plano Collor, em 1990. Deixam o país US\$ 2 bilhões num único dia. Faltam dólares nas casas de câmbio. As bolsas caem 13,3% na Argentina e 9,82% no México. O peso é desvalorizado em 7,38% no Chile.
11/09/98	5.398,1	13,394%	Recuperação evento anterior.
15/09/98	6.905,3	18,676%	Vários fatores contribuíram para o desempenho, entre eles o rumor sobre um empréstimo de US\$ 150 bilhões à América Latina. O mercado também avaliou o leilão da Gerasul como positivo.
23/09/98	7.280,3	10,985%	As declarações do presidente do Federal Reserve, banco central dos EUA, Alan Greenspan, trouxeram esperanças de queda nos juros norte-americanos. A Bolsa de Valores de Nova York subiu 3,26%; a de São Paulo, 10,98%.
01/10/98	5.960,4	-9,598%	Acompanhou o tombo nos mercados de ações de todo o mundo. Os resultados de bancos e empresas trazem uma certeza aos investidores: o mundo, inclusive Europa e EUA, caminha para uma recessão.
14/01/99	5.057,1	-9,968%	Desvalorização do Real.
15/01/99	6.746,7	33,410%	Desvalorização do Real.
11/09/01	10.827,9	-9,179%	Ataque terrorista.

Figura 4.5: Eventos correspondentes aos outliers da série do Ibovespa de Jan/98 a Dez/02.

No seu conjunto, entendemos que o trabalho de Daniel tem um direcionamento equivocado. Dragulescu e Yakovenko em nenhum momento afirmam que o modelo incorpora eventos extremos. Pelo contrário, afirmam que, com o intuito de deixar o modelo o menos complicado possível, optaram por adotar o modelo de Heston, considerado simples, deixando de lado outros mais complexos e derivados desse, conforme já descrevemos no capítulo anterior.

Nas séries estudadas adotamos o critério de eliminação dos *outliers*, eliminando menos de 2% das observações. No quadro da Figura 4.5, apresentamos as maiores variações do Ibovespa no período compreendido entre Janeiro de 1998 a

Dezembro de 2002 com os respectivos eventos mencionados nas notícias publicadas na Folha de São Paulo.

Por conta disso, não vimos necessidade de fazermos diferente do adotado por Dragulescu e Yakovenko com relação à reutilização dos dados e ao *trimming*.

4.3 Resultados com o Ibovespa

Conforme já foi dito, utilizamos a série de 5 anos do Ibovespa como base para realizarmos a etapa de minimização (Equação 3.11). Lembramos que são cinco os parâmetros do modelo de Heston, γ , θ , k , ρ , e μ , respectivamente o tempo de reversão à média, a média da variância de longo prazo, a volatilidade da variância, a correlação entre o preço do ativo e a volatilidade e a média ou drift dos preços, sendo que este último definimos como sendo igual a 0 (zero). Conseguimos os parâmetros, pudemos construir as curvas teóricas das distribuições dos retornos de forma a compará-las com as distribuições realizadas.

4.3.1 Etapas para a aplicação do modelo

Todos os processos de tratamento de dados, scripts para minimização, e de plotagem dos gráficos foram realizados com o software Matlab. Para melhor compreensão sobre como chegamos nos resultados, descrevemos as etapas seguidas:

1) Extraímos a média do logaritmo da série utilizando o alisamento de Savitzky-Golay. Para isso adotamos uma janela de 542 dias para cada ponto e um polinômio de ordem 2;

2) Fizemos os ajustes necessários na série resultante em termos de *trimming* e de eliminação dos pontos aberrantes (*outliers*);

3) Calculamos os log-retornos dos vários intervalos que se pretendeu estudar. Escolhemos na série de baixa frequência, os intervalos (t) de 1, 5, 10, 40, 80, 100, 150 e 250 dias, procurando incluir intervalos com diferentes regimes, i.e., $\gamma t \ll 1$, $\gamma t \approx 1$, e $\gamma t \gg 1$. Para a série de alta frequência escolhemos t de 30 segundos, 1, 2, 5, 10, 15, 20, 40, 50 minutos e 1, 2, 3 e 4 horas;

4) Calculamos a função densidade da probabilidade para cada intervalo escolhido. Primeiro distribuimos os log-retornos em n intervalos iguais Δr (chamados de *bins*), eliminando todos os *bins* com menos que 3 observações. Em seguida, dividimos o número de observações de cada *bin* por Δr e pelo número total de observações que restaram. O resultado nos dá a densidade da probabilidade de cada t ;

5) Comparamos e minimizamos a diferença entre a distribuição teórica do modelo, pressupondo ergodicidade, i.e., que a média da distribuição do modelo no tempo é equivalente à média resultante dos vários t , e a distribuição observada, de forma que no final do processo temos a melhor estimacão dos parâmetros que determinam esta otimização;

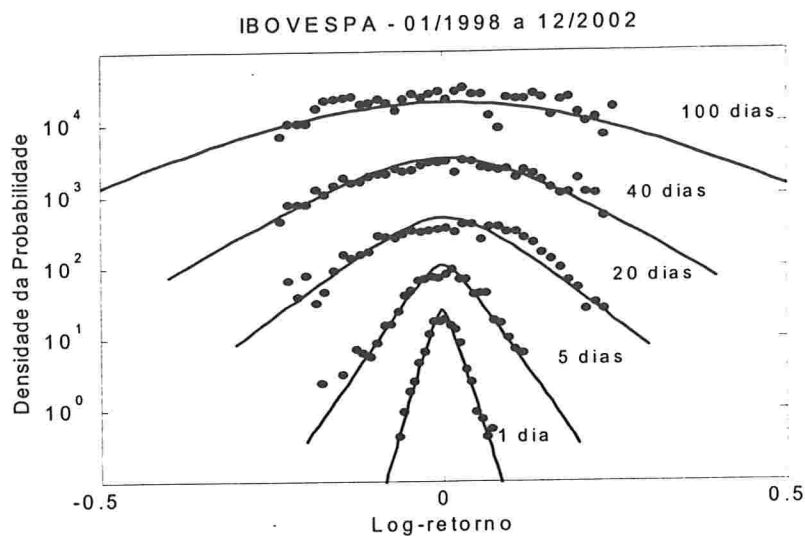


Figura 4.6: Distribuições de Probabilidade dos log-retornos para a série Ibovespa 5 anos. Cada uma das curvas foi plotada distando verticalmente 10 unidades uma da outra.

6) Com os parâmetros estimados, traçamos os gráficos para analisarmos visualmente o resultado.

4.3.2 Parâmetros conseguidos com a minimização

Adotando a série do Ibovespa de 5 anos como nossa série de referência, após o cumprimento das etapas descritas na sub-seção anterior, chegamos à seguinte estimação dos parâmetros:

Unidade	γ	θ	k	ρ	μ
1/dia	5.5×10^{-2}	4.82×10^{-4}	6.28×10^{-3}	-4.97×10^{-2}	0
1/ano	13.86	0.1214	1.5828	-4.97×10^{-2}	0

Usando os parâmetros acima, o ajuste para as distribuições de 1, 5, 20, 40 e 100 dias são apresentados na Figura 4.6.

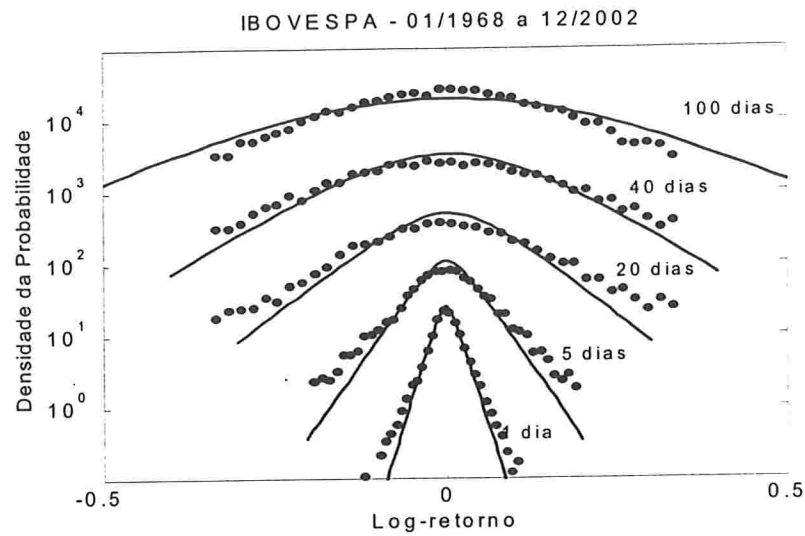


Figura 4.7: Distribuições de Probabilidade dos log-retornos para a série Ibovespa 35 anos. Cada uma das curvas foi plotada distando verticalmente 10 unidades uma da outra.

No gráfico da Figura 4.6 e nos que se seguem, os pontos representam a probabilidade observada dos log-retornos dos respectivos intervalos e as curvas representam as probabilidades teóricas dos intervalos conseguidas com o modelo. Usando os mesmos parâmetros para a série completa do Ibovespa de 35 anos, de janeiro de 1968 a dezembro de 2002, obtivemos as distribuições da Figura 4.7. A série que tomamos como base para a estimação dos parâmetros é apenas 1/7 da série completa e mesmo assim os parâmetros conseguem um excelente ajuste das distribuições.

Vale notar que, dentre as variáveis, ρ (R_0), é adimensional, sendo seu valor sempre o mesmo, independente da escala usada. Com relação às demais variáveis, a Equação 3.5 do modelo de Heston ($dv_t = -\gamma(v_t - \theta)dt + k\sqrt{v_t}dW_2$), mostra que dv

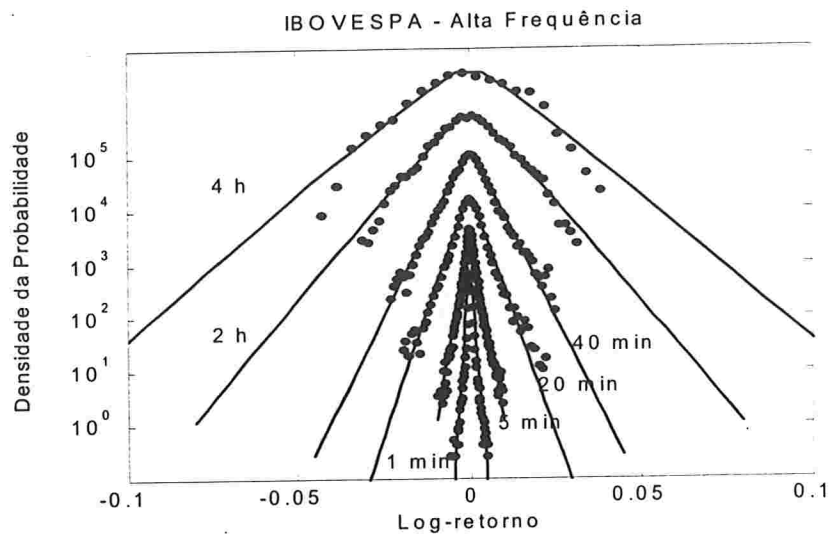


Figura 4.8: Distribuições de Probabilidade dos log-retornos para a série de alta-frequência do Ibovespa. Cada uma das curvas foi plotada distando verticalmente 10 unidades uma da outra.

tem dimensão $1/\text{tempo}$, v e θ têm dimensão de $1/\text{tempo}$ por estarem multiplicados por dt , dW tem dimensão \sqrt{t} e $\sqrt{v_t}$ tem dimensão $1/\sqrt{t}$, fazendo com que γ e k tenham dimensão $1/\text{tempo}$, homogeneizando a equação. Portanto, Gamma (γ), Theta (θ) e Kappa (k) têm mesma dimensão de tempo.

Para a distribuição de alta-frequência, dividimos os valores encontrados para 1 dia por 700. Os parâmetros encontrados foram os seguintes:

Unidade	γ	θ	k	ρ	μ
dia/700	7.8571e-005	6.8857e-007	8.9714e-006	-4.97×10^{-2}	0

Adotando estes parâmetros para a série de alta-frequência de 01/11/02 a 14/02/03, obtemos o gráfico de representação dos ajustes na Figura 4.8.

O gráfico da Figura 4.8 evidencia que o ajuste encontrado é muito bom. Apesar disso, acreditamos que os ajustes podem ser aprimorados, pois o fator de escala dos parâmetros deve ser uma fração ideal do período de negociação de 1 dia.

Capítulo 5

Conclusões

Em vista das evidências apresentadas no capítulo anterior, a primeira conclusão do trabalho é de que o modelo de Dragulescu e Yakovenko se ajusta muito bem ao Ibovespa, tanto em baixa frequência como alta frequência, e certamente merece análise detalhada de suas características. Os gráficos das Figuras 4.5, 4.6 e 4.7 resumem, de certa forma, o resultado do modelo, na medida que mostram como que as distribuições resultantes do modelo se ajustam às distribuições observadas, com escalas que vão de 1 minuto a 100 dias, nas três séries estudadas. O resultado ratifica, com dados do mercado brasileiro, o obtido por Dragulescu e Yakovenko e Silva e Yakovenko para o Dow Jones, SP500 e Nasdaq.

Mostramos que o modelo tem potencial para descrever, com o mesmos parâmetros, escalas de tempo que vão de 1 minuto a 100 dias. O exato fator de conversão dos parâmetros para os ajustes intra-dia ainda precisa de análise.

No processo de otimização, verificamos que adotando-se condições iniciais distintas, surgiram outros valores de parâmetros no processo de otimização e com muito bons ajustes às distribuições. Uma das possíveis explicações, além de haverem vários mínimos locais, é de que há variáveis demais para a otimização. Isto significa que os valores dos parâmetros resultantes do trabalho não são necessariamente os melhores, havendo margem para um ajuste ainda melhor.

Como nosso γ estimado foi de 5.5×10^{-2} , isto equivale a dizer que o tempo de relaxação - ou a velocidade de reversão à média ($1/\gamma$) - encontrado foi de 18,18 dias. Desconhecemos qualquer trabalho anterior referente à estimação do γ para o Ibovespa que pudesse servir de comparação. Apesar disso, consideramo-lo como razoável, levando em conta resultados de estudos com índices de outros mercados. Como exemplo, temos o próprio resultado de Dragulescu e Yakovenko[2002], que para o Dow Jones encontraram uma velocidade de reversão à média igual a 22,22 dias.

No processo de minimização obtivemos o parâmetro referente à média da variância de longo prazo (θ) igual a 4.82×10^{-4} . A variância do modelo está em unidades de 1/tempo. Obtém-se a variância anual multiplicando-se o valor ajustado em 1/dia por 252 dias, conseguindo-se um resultado adimensional. A volatilidade será então a raiz quadrada da variância. O valor encontrado equivale a uma volatilidade anual de 34,85%. A média da volatilidade histórica anual da série de 5 anos é de 33,0% e da série de 35 anos é de 34,06%, valores muito próximos do resultado da otimização. Isto significa dizer que, eventualmente, a média da volatilidade da série poderá ser usada como um parâmetro pré-determinado no processo de otimização, simplificando os cálculos.

Este modelo pode ser também aprimorado através do cálculo da alavancagem de Bouchaud, Potters e Matacz[2001]. Apesar de termos tentado calculá-lo, sem obter um resultado satisfatório, deve ser um caminho a ser insistido, pois significa

obtermos a correlação de forma quase direta, não sendo necessário incluí-la no processo de minimização.

Um avanço ainda mais considerável, seria seguir o caminho proposto por Perelló e Masoliver para calcular outras variáveis do modelo. Os trabalhos de Perelló e Masoliver[2002, 2003a, 2003b e 2003c], junto com os de Yakovenko (trabalhos em conjunto com Dragulescu e Silva), representam um grande passo para um maior conhecimento dos modelos com volatilidade estocástica, e a aplicação de suas conclusões devem trazer resultados ainda melhores do que os até agora alcançados.

Como tema para um próximo estudo, será interessante verificar o comportamento do modelo na distribuição de retornos para ações individuais, tanto para baixa como alta frequência.

Os resultados credenciam o modelo para ser utilizado pelas áreas de gerenciamento de risco e pelas áreas que atuam em negociação no mercado acionário e derivativos. Além dos ajustes que podem ser conseguidos, existe a vantagem advinda da possibilidade de se fazer a estimação para diferentes intervalos de tempo usando os mesmos parâmetros. Alternativamente, os parâmetros podem ser obtidos a partir de dados de alta-frequência, permitindo um ajuste fino no controle de risco intra-dia e oferecendo uma maior precisão nas extrapolações para intervalos maiores de tempo.

Referência Bibliográfica

- [1] Alexander, Carol, 2001. *Market models: a guide to financial data analysis*, John Wiley & Sons Ltd.
- [2] Bakshi, Gurdip, Cao, Charles, Chen, Zhiwu, 1997. *Empirical performance of alternative option pricing models*, The Journal of Finance - volume 42.
- [3] Bates, David, 1996. *Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutschemark options*, Review of Financial Studies, vol 9.
- [4] Black, F., Scholes, M., 1973. *The pricing of option and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, vol. 81.
- [5] Bouchaud, Jean-Philippe, Potters, Marc, 2001. *Theory of Financial Risks*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Bouchaud, Jean-Philippe, Potters, Marc, Matacz, Andrew. 2001. *The leverage effect in financial markets: retarded volatility and market panic*, cond-mat/0101120v2.
- [7] Cox. J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A., 1985. *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, vol.53.
- [8] Dacorogna, Michel M., Gençay, Ramazan, Müller, Ulrich, Olsen, Richard B., Pictet, Olivier V., 2001. *An Introduction to High-Frequency Finance*, Academic Press.
- [9] Daniel, Gilles, 2003a. *Stochastic volatility in a quantitative model of stock market returns* - Tese no Departamento de Ciência da Computação - Universidade de Manchester.
- [10] Daniel, Gilles, Bré, David S., Joseph, Nathan L. 2003b. *Goodness-off-fit of the Heston model*, arXiv:cs:CE/0305055 v1.
- [11] Dragulescu, Adrian A., Yakovenko, Victor M., 2002. *Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility*, Quantitative Finance, v. 2.

- [12] Epps, T. W., 2000. *Pricing Derivative Securities*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [13] Faulhaber, Oliver, 2002. *Analytic methods for pricing double barrier options in the presence of stochastic volatility* - Tese no Departamento de Matemática da Universidade de Kaiserlauten, Alemanha.
- [14] Feller, William, 1971. *An introduction to probability and its applications*, John Wiley & Sons, Inc.
- [15] Heston, S., 1993. *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options*, The Review of Financial Studies, vol. 6.
- [16] Hull, John, White, Alan, 1987. *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, Journal of Finance, 42.
- [17] Hull, John, White, Alan, 1988. *An analysis of the bias in option pricing caused by a stochastic volatility*, Advances in Futures and Options Research. Vol. 3.
- [18] Hull, John C., 1999. *Options, futures, and other derivatives*, Prentice-Hall, Inc.
- [19] Klebaner, Fima C., 1998. *Introduction to stochastic calculus with applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [20] Kluge, Tino, 2002. *Pricing derivatives in stochastic volatility models using the finite difference method* - Tese no Departamento de Matemática da Universidade de Chemnitz, Alemanha.
- [21] Mantegna, Rosario N., Stanley, H. Eugene, 2000. *An introduction to Econophysics - Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press.
- [22] Martinez, Wendy L., Martinez, Angel R., 2002. *Computational Statistics Handbook with MATLAB*, Chapman & Hall/CRC.
- [23] Mikosch, Thomas, 1998. *Elementary stochastic calculus*, World Scientific Publishing Ltd.

- [24] Mills, Terence C., 1999. *The econometric modelling of financial time series*, Cambridge University Press.
- [25] Numerical Recipes in Fortran 77 - Cambridge University Press, <http://www.nr.com>.
- [26] Perelló, Josep, Masoliver, Jaume, 2002. *Stochastic volatility and leverage effect*, cond-mat/0202203.
- [27] Perelló, Josep, Masoliver, Jaume, 2003a. *Multiple time scales in volatility and leverage correlations: An stochastic volatility model*, cond-mat/0302095.
- [28] Perelló, Josep, Masoliver, Jaume, 2003b. *A correlated stochastic volatility model measuring leverage and other stylized facts*, cond-mat/0111334.
- [29] Perelló, Josep, Masoliver, Jaume, Bouchaud, Jean-Philippe, 2003c. *Stochastic volatility and leverage effect*, cond-mat/0202203.
- [30] Schöbel, Rainer, Zhu, Jianwei, 1999. *Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension*, European Finance Review, volume 3.
- [31] Silva, A. Christian, Yakovenko, Victor M, 2002. *Comparison between the probability distribution of returns in the Heston Model and empirical data for stock indices*, a ser publicado em Physica A.
- [32] Stein, Elias M., Stein, Jeremy C., Stock, 1991. *Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach*, The Review of Financial Studies - volume 4.
- [33] Takayasu, H (Ed), 2000. *Empirical science of financial fluctuations - The advent of Econophysics*, Springer-Verlag Tokyo
- [34] Theodorakakos, Yannis, 2001. *On alternative option pricing models and the effects of modelling volatility within a stochastic context as observed in FTSE-100 index options* - Tese na Manchester School of Management, University of Manchester Institute of Science and Technology.
- [35] Tsay, Ruey S., 2002. *Analysis of financial time series*, John Wiley & Sons, Inc.
- [36] Wilmott, Paul, 2000. *Paul Wilmott in Quantitative Finance*, John Wiley & Sons Ltd.

- [37] Winkler, Gunter, Apel, Thomas, Wystup, Uwe, 2001. *Valuation of options in Heston's stochastic volatility model using finite element methods*, em Foreign Exchange Risk, Risk Publications, London.