"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Instituto de Matemática e Estatística

Mestrado Profissionalizante: "Modelagem Matemática em Finanças"

# Apreçamento e *Hedging* de Opções com Barreira. Incorporação do Sorriso de Volatilidade

**Carlos Eduardo de Souza Lara**

Orientador: Prof. Dr. Joe Akira Yoshino

2003

# Apreçamento e *Hedging* de Opções com Barreira. Incorporação do Sorriso de Volatilidade

**Carlos Eduardo de Souza Lara**

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para Obtenção do Título de Mestre.

Orientador: Prof.Dr. Joe Akira Yoshino

Co-orientador: Prof.Dr. Gustavo Monteiro de Athayde

São Paulo

2003

# *Abstract*

This paper intends to verify the suitability or not of practical procedures used in the market for pricing and hedging of Barrier Options. The main idea is to compare two different pricing strategies, in a known enviroment, under control. Both strategies are parametric, and the task is to compare the performance of two different models, finding whether a relevant difference does exist. A discussion on barrier options pricing and hedging, with uses of Girsanov´s Theorem and the reflexion principle is presented and used as subside for the argument we want to check empirically, but under a controled enviroment. For the studied cases, incorporanting the volatility smile doesn´t lead to much better results than using flat volatility in the Black&Scholes´s approach.

**Resumo**

Este trabalho objetiva verificar a aplicabilidade ou não dos procedimentos adotados no mercado financeiro para o apreçamento e *hedging* de opções com barreira. A ideia básica é a de comparar, em um ambiente controlado, duas alternativas de apreçamento, ambas paramétricas, e avaliar se existe ou não diferença significativa entre elas. Uma discussão sobre a modelagem de opções com barreira, que envolve aplicações do terorema de Girsanov e da reflexividade, é apresentada como subsídio para o argumento que se quer testar empiricamente, mas num ambiente controlado. Para os casos estudados, a incorporação do Sorriso de volatilidades não

levou a resultados muito melhores que a utilização de uma volatilidade constante na abordagem de Black&Scholes.

# Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Joe Akira Yoshino, que aceitou orientar este trabalho e fez importantes contribuições, aos Drs. Gustavo Monteiro de Athayde e Ruben Merendi Damião, que investiram muitas horas em discussões sobre este tema, ao Prof. Dr. Pedro Paulo Schirmer, que foi de grande ajuda nas dificuldades encontradas, ao Prof. Dr. Rogério Rosenfeld que fez críticas importantes, aos Profs Drs. Eduardo Facó Lemgruber e José Roberto Securato que contribuiram para minha formação na área de derivativos e finalmente, a meus pais, minha esposa e principalmente minhas filhas Giovanna e Gabriella, que deram sua cota de contribuição abrindo mão do convívio familiar, tão importante nos seus primeiros anos de vida, para que este trabalho pudesse chegar a bom termo.

# Índice

**1 Introdução** ..... **1**

**2 Opções com Barreira** ..... **5**

2.1 Apreçamento da Opção com Barreira Monitorada Continuamente. ..... 7

2.2 Caso em Estudo: Call Down&Out sem Rebate e Barreira menor que o Exercício ..... 20

**3 Distribuições de retorno não gaussianas e sorriso de volatilidade** ... **23**

3.1 Sorriso de Volatilidade ..... 29

3.2 Amostragem da distribuição proposta ..... 34

3.3 Simulação de Monte Carlo ..... 36

3.4 Experimento proposto ..... 37

**4 Análise Comparativa do Desempenho dos Modelos** ..... **42**

4.1 Casos estudados ..... 42

4.2 Resultados da simulação ..... 46

4.3 Análise dos Resultados ..... 47

**5 Conclusão** ..... **50**

**Referências Bibliográficas** ..... **52**

**A Densidade de probabilidade do processo $Z_t$** ..... **55**

**B Densidade de probabilidade dos processos que cruzam a barreira e retornam.** ..... **57**

**C Princípio da reflexão de Désiré André** ..... **63**

**D Função densidade para o tempo de passagem pela barreira.** ..... **67**

**E Cálculo do valor presente esperado do rebate** ..... **71**

# Lista de Figuras


1.1 Preço da Call DO em função da volatilidade . . . . . 4

2.2 Perfil de retorno de uma opção de compra européia com barreira avaliada apenas no vencimento. . . . . 17

2.3 Posição comprada em opção de compra. . . . . 18

2.4 Posição vendida em opção de compra . . . . . 18

2.5 Posição vendida em opção binária ou digital. . . . . 19

2.6 Resultante das três posições. . . . . 19

3.7 Processo da Volatilidade Histórica do Ibovespa . . . . . 24

3.8 Cone de Volatilidades do Ibovespa . . . . . 25

3.9 Histograma dos Log-retornos do Ibovespa . . . . . 27

3.10 Sorriso de Volatilidades das Opções sobre o Ibovespa. . . . . 30

3.11 Exemplo de realização para processo de volatilidade estocástica. . . . . 35

3.12 Exemplo de Realização de processo do preço, com volatilidade volátil . . . . . 36

3.13 Diagrama de Blocos do Experimento Proposto . . . . . 38

3.14 Exemplos de processos estocásticos para a variância. . . . . 41

3.15 Processo estocástico do preço. . . . . 41

4.16 Sem volatilidade estocástica, vol=20%aa . . . . . 43

4.17 Sorriso de volatilidades para 20% aa . . . . . 43

4.18 Sem volatilidade estocástica, vol 30%aa . . . . . 44

4.19 Sorriso de volatilidades para 30% aa . . . . . 44

4.20 Sem volatilidade estocástica, vol 40% aa . . . . . 45

4.21 Sorriso de volatilidades para 40%aa . . . . . 45

4.22 Tabela de Resultados . . . . . 46

4.23 Dispersão dos resultados em torno do valor justo de referência para a CDO. . . . . 48

4.24 Erro relativo em função do valor justo de referência para a CDO . . . . . 49

5.25 Processo original e processo espelho . . . . . 64

5.26 Ilustração do princípio da reflexão . . . . . 65

# Capítulo 1
# Introdução

Derivativos exóticos[1] tem se tornado cada dia mais comuns no cotidiano do mundo das finanças. Em particular as opções com barreiras têm se difundido muito rapidamente pricipalmente nos mercados de balcão, devido a suas caracterísitcas que permitem adequá-las ao perfil de rentabilidade e risco desejado pelas contrapartes. Além disso, por representarem uma exposição a riscos de menor amplitude que uma opção *plain vanilla*[2], normalmente as opções com barreira apresentam custos menores, podendo moldar-se mais facilmente as necessidade de cada cliente. No Brasil, tanto a BM&F[3] como a CETIP[4] oferecem produtos[5] que mesmo que não tenham o nome de opções com barreira, funcionam como tal. A BM&F além de oferecer o registro dos contratos ainda oferece o serviço de prestação de garantia, ou cobertura do risco de crédito, exigindo, para tal, margens de garantia. Para fazê-lo, a BM&F utiliza modelos de avalição dos contratos, de maneira a poder avaliá-los nos cenários de interesse para mensuração do seu risco de variação de preço. Já a CETIP não oferece o serviços de prestação de garantias para o risco de crédito, mas permite o registro dos contratos firmados entre as partes interessadas.

---

1 Derivativos Exóticos são aqueles com retornos mais complicados que as opções Européias ou Americanas simples, normalmente referidas como opções Plain Vanilla

2 Plain Vanilla: nomenclatura para designar as opções mais simples e tradicionais, de compra ou de venda, Européias ou Americanas.

3 BM&F: Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo

4 CETIP: Central de Registro de Títulos Privados, gerenciada pela ANDIMA.

5 Os contratos de opções flexíveis de compra e de venda sobre o Índice BOVESPA podem ser encontrados no Website da BM&F: www.bmf.com.br.

O apreçamento das opções com barreira apresenta dificuldades, principalmente quando se deseja obter uma solução paramétrica, através de fórmula fechada. Uma formulação bastante difundida nos meios financeiros baseia-se no princípio da imagem especular, ou seja da aplicação de reflexos e mudanças de variáveis, para obter uma fórmula fechada para o preço das opções com barreira com a mesma abordagem usada nas fórmulas de Black&Scholes.

Considerando que o mundo real, via de regra, não apresenta retornos normalmente distribuídos, os agentes do mercado, segundo suas próprias percepções sobre as reais distribuições de probabilidades dos retornos, introduzem uma correção nas volatilidades conforme a diferença entre o preço de exercício e o preço atual do ativo objeto, também conhecido como "*moneyness*" e o prazo para adequar sua expectativa de retornos aos preços praticados no mercado. A esta função dá-se o nome de Sorriso de Volatilidades[6].

**Motivação**

A motivação para este trabalho surgiu de um problema real enfrentado nas mesas de operações financeiras, qual seja, o apreçamento e hedging de opções com barreira sobre o Índice Bovespa. Por se tratarem de contratos de balcão e raramente negociados, praticamente não há dados históricos de mercado para referenciar os preços. Por outro lado, existe um mercado de opções *plain vanilla* sobre o Índice Bovespa, onde pode-se observar diariamente os preços praticados ou atribuídos aos contratos pelos participantes deste mercado através da troca de *spreads*[7] e apregoações de compra e de venda, e através da

[6] Sorriso de Volatilidades, no idioma inglês "Volatility Smile", tem este nome porque frequentemente apresenta uma concavidade voltada para cima, lembrando a forma de um sorriso.

[7] troca de Spreads: procedimento através do qual dois participantes fazem ofertas de compra e de venda simultâneas sobre o mesmo contrato objetivando chegar a um preço o mais justo possível para a celebração

observação destes preços pode-se constatar que os agentes do mercado atribuem preços conforme um sorriso de volatilidades, ou seja, para diferentes preços de exercício utilizam diferentes níveis de volatilidade.

Para o apreçamento de uma opção *plain vanilla*, uma estratégia conservadora típica para oferecer preços de compra ou de venda aos clientes consiste em adicionar à volatilidade encontrada no mercado uma margem para permitir uma cobertura de risco em uma opção disponível no mercado, mas não exatamente igual, e ainda permitir algum lucro, de maneira que para vender opções, se adiciona uma margem e para comprar se subtrai uma mergem em termos de volatilidades, dado que para as opções plain vanilla, a relação entre a volatilidade implícita e o preço é uma função monotônica. Porém, para as opções com barreira, utilizando-se uma fórmula fechada, não existe esta monotonicidade na relação entre a volatilidade implícita e o preço (vide gráfico 1.1), de maneira que a estratégia de se adicionar ou subtrair uma margem nem sempre funciona, ou traz o benefício desejado.

O gráfico 1.1 traz um exemplo onde os dados para avaliação da opção são, T=0.1667 anos, r= 20%aa, S=1, barreira 0.905, e preço de exercício 0.95.

Surgiu naturalmente a seguinte questão: Utilizar o sorriso de volatilidades na fórmula fechada para as opções com barreira levaria a melhores resultados?

**Objetivos**

Nossos objetivos neste trabalho foram os de entender em detalhes a formulação paramétrica das opções com barreira, de maneira a permitir verificar a viabilidade da incorporação do sorriso de volatilidade na formulação paramétrica das opções com barreira

---

de um negócio com aquele contrato

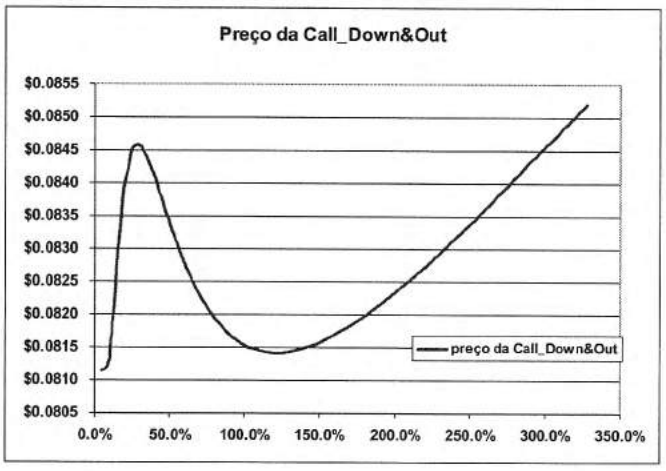


Fig. 1.1. Preço da Call DO em função da volatilidade

e comparar a metodologia em proposta com utilização de volatilidade constante na formulação paramétrica.

Desta forma, neste trabalho procuramos ir um pouco além na aplicação da fórmula fechada, e nossa contribuição está em procurar incorporar ao apreçamento e hedging, um Sorriso de volatilidades. Porém, como a quase totalidade das opções com barreira são negociadas em balcão, e portanto não há dados públicos disponíveis e representativos dos preços praticados no mercado, optamos por fazer uma simulação controlada e testar o desempenho do modelo original e da alternativa proposta que incorpora o sorriso de volatilidades para o apreçamento e hedging de opções com barreira, conforme apresentado no decorrer deste texto.

# Capítulo 2
# Opções com Barreira

As Opções tradicionais (ou plain vanilla) são contratos financeiros que dão ao titular(detentor) o direito, mas não a obrigação, de negociar (comprar ou vender) determinado ativo (objeto do contrato) em uma data futura (ou até uma data futura) a um preço previamente determinado no contrato. Uma Opção Tradicional pode ser de Compra (CALL[8]) ou de Venda (PUT[9]). Quanto a temporalidade do Exercício pode ser Européia quando o direito ao exercício ocorre apenas no Vencimento, ou Americana quando pode ser exercçida em qualquer momento do início até o vencimento.

As opções com barreira, são uma extensão dos contratos de opções tradicionais, no sentido em que apresentam uma funcionalidade adicional, qual seja, passam a existir ou deixam de existir quando um valor de referência é atingido. A este valor de referência, estabelecido no contrato da opção dá-se o nome de Barreira.

As opções com barreira podem ser de 2 tipos basicamente:

1)**Knock-In (KI):** quando uma opção tradicional passa a existir se e somente se a barreira é atingida durante a vida do contrato, e ao término do contrato apresenta o mesmo retorno que uma opção tradicional.

2) **Knock-Out (KO)**: quando uma opção tradiconal deixa de existir se a barreira foi atinida ao menos uma vez durante a vida útil do contrato, e termina sem valor.

---

8 CALL: no Inglês, opção de compra

9 PUT: no Inglês, opção de venda

Quando a Barreira é estabelecida em um valor acima do preço atual do ativo objeto, diz-se que a opção é do tipo "UP and IN "(UI), quando ao ser atingida a barreira o direito passa a existir, ou "UP and OUT "(UO), quando ao ser atingida a barreira o direito deixa de existir.

Da mesma forma, quando a Barreira é estabelecida em um valor inferior ao preço atual do ativo objeto diz-se que a opção é do tipo "Down and IN "(DI) ou "Down and OUT "(DO).

Outra funcionalidade muito encontrada nos contratos de opções com Barreira é o Rebate. O Rebate consiste em um valor previamente acordado que é devolvido ao comprador da opção no caso de uma opção do tipo KO ter a barreira atingida e portanto perder seu valor, ou ainda no caso de uma opção do tipo KI nunca atingir sua Barreira e portanto também expirar sem valor.

A maneira como se monitora a condição de atingimento da Barreira é muito importante. A frequência de monitoração pode ser contínua, diária nos fechamentos ou em algum outro horário, semanal, mensal etc. Neste trabalho utilizaremos a hipótese de monitoramento contínuo da barreira. Esta hipótese é realista para os contratos de opções flexíveis sobre o índice Bovespa registrados na BM&F.

As opções com Barreira podem ser classificadas na categoria de contratos "dependentes do caminho " ou "path-dependents " no sentido em que seu valor ao final do contrato depende de quais valores o ativo objeto atingiu durante sua vida útil, e não apenas no vencimento. O monitoramento, ao longo da vida da opção, para aferir se a barreira foi atingida ou não, é que determina esta dependência em relação aos valores assumidos ao longo da

vida útil do contrato. Existe na engenharia financeira uma grande preocupação com a dependência do caminho, mas dependência no sentido de poder-se aplicar ou não recursão reversa[10] como instrumento para o apreçamento de derivativos. Isto por que a recursão reversa é muito mais eficiente computacionalmente em comparação com o chamado método de simulação de Monte Carlo.

## 2.1 Apreçamento da Opção com Barreira Monitorada Continuamente.

Conforme anteriomente explicitado, iremos abordar apenas o caso de barreira monitorada continuamente, conforme apresentado em Berger (1996), (pags 219-227). Esta hipótese simplifica a modelagem, permitindo a utilização de uma abordagem paramétrica. Modelos discretizados, como os de árvores binomiais, são mais adequados à aplicações com barreiras monitoradas em intervalos discretamente determinados. Para os fins deste trabalho, consideraremos, realisticamente que a hipótese de monitoração contínua da barreira não compromete o desempenho do modelo. A notação adotada procura estar o mais próximo da encontrada nos textos relacionados ao tema.

**Definições**

A seguir apresentamos as principais definições e notações para variáveis de interesse no modelo:

$r$ taxa de juros livre de risco composta continuamente.

---

[10] Recusão Reversa: no Inglês, Backward Recursion.

$q$ taxa de dividendos (dividend yield) proporcionados pelo ativo objeto, composta continuamente.

$S_t$ Processo gerado pela evolução temporal sem restrições dos preços do ativo objeto. Assume-se aqui uma distribuição lognormal dos preços, compatível com uma distribuição normal de retornos, da seguinte forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t \tag{2.1}$$

com $\sigma > 0$.

$S_t^*$ Processo gerado pela evolução temporal, sujeita a restrições, dos preços do ativo objeto. Este processo assume o valor da barreira H se em algum momento durante o prazo de duração do contrato o ativo objeto assume o valor H, o que equivale a interceptar a barreira, e assumindo este valor daí em diante pelo resto do tempo do processo, funcionando como se fosse uma memória sinalizadora de que a barreira foi atingida em algum momento passado. Formalmente: $S_t^* = H$ se $S_u = H$ para algum $t_0 < u \leq t$. $S_t^*$ é dito possuir uma barreira absorvente em $H$.

$S \equiv S_{t_0}$ o valor do ativo objeto (índice) no instante $t = t_0$.

$T$ o instante final do contrato ou maturidade, quando expira a opção. $(T - t_0)$ é o prazo até o vencimento.

$Z_t \equiv \ln(S_t/S)$ é o processo do retorno composto continuamente para $S_t$, sendo $S_t = Se^{Z_t}$.

$\mu \equiv r - q - \frac{\sigma^2}{2}$ é o o deslizamento risco-neutro para $Z_t$ sendo $dZ_t = \mu dt + \sigma dW_t$.

$Z_t^* \equiv \ln(S_t^*/S)$ é o processo do retorno composto continuamente para $S_t^*$, sendo $S_t^* = Se^{Z_t^*}$.

$F(z,t) \equiv \text{Prob}(Z_{t_o+t} \leq z)$ é a função de distribuição de probabilidade ajustada ao risco para $Z_t$.

$f(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial z}(F(z,t))$é a função densidade de probabilidade de ajustada ao risco.

$H$ é o valor da barreira.

$b \equiv \ln(H/S)$ é o valor da barreira visto pelo processo de retorno $Z_t$.

$K$ é o valor do preço de exercício da opção. (Strike Price)

$k \equiv \ln(K/S)$ é o valor do preço de exercício visto pelo processo do retorno $Z_t$ .

$R$ é o valor do rebate.

$G(z,t)$ é o função de distribuição de probabilidade ajustada ao risco para os processos que cruzam a barreira e retornam.

Para os casos em que $S_{t_0} < H$ ,que equivalem a $z < b$ , $G(z,t) = \text{Prob}(Z_{t_0+t} \leq z$ e $\sup_{0 \leq u \leq t} Z_{t_0+t} > b)$

Para os casos em que $S_{t_0} > H$ ,que equivalem a $z > b$ , $G(z,t) = \text{Prob}(Z_{t_0+t} \leq z$ e $\inf_{0 \leq u \leq t} Z_{t_0+t} < b)$

$g(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial z}(F(z,t))$ é a função densidade de probabilidade associada a função $G(z,t)$.

$p(z,t)$ é função densidade de probabilidade ajustada ao risco para $Z_t$

$\tau$,$\tau_b$ é a variável aleatória para o tempo em que o processo intercepta pela primeira vez a barreira.

Formalmente, se o processo segue o caminho $\omega$, então se $S < H$,

$\tau(\omega) = \sup_{t_0 \leq t}\{t - t_0 | S_t(\omega) < H\}$

ou, alternativamente se $Z < b$ então

$\tau(\omega) = \sup_{t_0 \leq t}\{t - t_0 | Z_t(\omega) < b\}$

e, se $S > H$ então

$\tau(\omega) = \sup_{t_0 \leq t}\{t - t_0 | S_t(\omega) > H\}$

ou, alternativamente, se $Z > b$ então

$\tau(\omega) = \sup_{t_0 \leq t}\{t - t_0 | Z_t(\omega) > b\}$

$h(\tau), h(\tau, b)$ é função densidade de probabilidade para $\tau$, o tempo para a primeira interceptação da barreira.

$n(x) = \frac{e^{-(\frac{x^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}}$ é a função densidade de probabilidade para a distribuição gaussiana normalizada (média=0, variância=1).

$N(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} n(s)ds$ é a ditribuição de probabilidade acumulada para a normal n(x)

$\phi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\sqrt[2]{\gamma}} + \beta\sqrt[2]{\gamma}$ é uma definição conveniente para os desenvolvimentos

$\eta = +1$ se a barreira é atingida por baixo, e $\eta = -1$ se a barreira é atingida por cima. $\eta = sgn(b)$

$\psi = 1$ para opção de compra e, $\psi = -1$ para opção de venda

$\epsilon$ é uma variável aleatória amostrada de uma distribuição normal padrão (com média=0 e variância=1), $\epsilon \sim N(0, 1)$

**Fórmulas de apreçamento**

Para desenvolver fórmulas paramétricas que descrevam o modelo desejado, precisaremos primeiramente definir e calcular algumas funções densidade, para calcular as probabilidades dos principais processos envolvidos.

**Densidade de probabilidade do processo $Z_t$**

A função densidade de probabilidade que, quando acumulada, representa o valor da probabilidade de que o processo assuma valores menores que um determinado valor z é dada pela fórmula 2.2, cujo desenvolvimento encontra-se no apêndice A.

$$f(z,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{t}} n(\frac{z-\mu(t)}{\sigma\sqrt[2]{t}}) \tag{2.2}$$

**Densidade de probabilidade dos processos que cruzam a barreira e retornam.**

A função densidade de probabilidade dos processos que cruzam a barreira e retornam, tanto de baixo para cima como de cima para baixo é dada pela fórmula 2.3, cujo desenvolvimento está apresentado no apêndice B.

$$G'(z) = g(z) = \frac{\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}} n(\frac{z-2b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}) \tag{2.3}$$

**Função $p(z,t)$ densidade de $Z_T^*$ (processo estocástico do retorno do ativo S)**

Por definição,

$$p(z,t) = f(z,t) - g(z,t) \tag{2.4}$$

ou seja, é a diferença entre a f.d.p do processo $Z_t$ sem restrições e a f.d.p. dos processos de $Z_T$ que cruzam a barreira e retornam. Esta densidade de probabilidade é útil pois separa os casos que cruzaram a barreira e retornaram, ou seja, diz respeito apenas aos casos mais simples em que a barreira não foi atingida ou que foi atingida e ultrapassada, ou seja os casos mais óbvios.

**Função densidade $h(\tau)$ para o tempo $\tau$ da primeira passagem de $Z_t$ pela barreira.**

A fórmula 2.5 apresenta a f.d.p. do tempo de passagem $\tau$ pela barreira, que permite o cálculo da probabilidade de que a barreira seja atingida antes de determinado instante T $Prob[\tau < T] = E[1_{[\tau<T]}] = \int_0^T h(s)ds$ e tem seu desenvolvimento no apêndice D.

$$h(T) = \frac{|b|}{\sigma\,(T-t_0)^{(3/2)}} n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] \tag{2.5}$$

**Valor presente esperado do rebate**

Como já foi dito anteriormente o rebate $R$ é um valor que é pago ao comprador da opção no caso de a barreira ser atingida.

Sendo assim, há duas possibilidades, uma para as opções do tipo Knock Out (KO) outra para opções do tipo Knock In (KI), conforme apresentado no apêndice E

O Valor Presente do Rebate VP(R) para as KO é dado pela fórmula 2.6, e o VP(R) para as KI é dado pela fórmula 2.7.

$$VP_{KO}(R) = R\left[(\frac{H}{S})^{A+B} N(\frac{-\eta b - \eta B\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}) + (\frac{H}{S})^{A-B} N(\frac{-\eta b + \eta B\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}})\right] \tag{2.6}$$

$$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[N(\frac{\eta(b-\mu t)}{\sigma\sqrt{t}} - \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})N(\frac{-\eta(b+\mu t)}{\sigma\sqrt{t}})] \tag{2.7}$$

Podemos agora calcular os retornos no vencimento das opções para depois finalmente calcular as fórmulas de precificação completas.

**Cálculo de uma Knock Out (KO)**

Nos casos em que a barreira foi atingida durante a vigência do contrato, a opção expira sem valor, e portanto, os casos de interesse são aqueles em que a bareira não foi atingida durante a vida útil do contrato. O retorno de uma opção do tipo KO que não teve sua barreira atingida durante a vigência do contrato, calculado no vencimento em uma medida de probabilidade ajustada ao risco, pode ser escrito da seginte forma:

Lembrando que $\psi = 1$ para opção de compra e, $\psi = -1$ para opção de venda, e fazendo as seguintes definições:

| | UO | UO | DO | DO |
|---|---|---|---|---|
| | K>0 | K<H | K>H | K<H |
| opção de compra (CALL) | - | $\alpha = k\,, \beta = b$ | $\alpha = k\,, \beta = \infty$ | $\alpha = b\,, \beta = \infty$ |
| opção de venda (PUT) | $\alpha = -\infty\,, \beta = b$ | $\alpha = -\infty\,, \beta = k$ | $\alpha = b\,, \beta = k$ | - |

$\int_\alpha^\beta \psi.(S\exp(z) - K).p(z)dz = \int_\alpha^\beta \psi.(S\exp(z) - K).(f(z) - g(z))dz =$

$\psi \int_\alpha^\beta (S\exp(z) - K).(f(z) - g(z))dz =$

$\psi S(\int_\alpha^\beta \exp(z)f(z)dz - \int_\alpha^\beta \exp(z)g(z)dz) - \psi K(\int_\alpha^\beta f(z)dz - \int_\alpha^\beta g(z)dz)$

$\int_\alpha^\beta \exp(z)f(z)dz = \int_\alpha^\beta \exp(z)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}n(\frac{z-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})dz$

usando a identidade

$\exp(z)n(\frac{z-\alpha-\mu T}{\sigma\sqrt{t}}) = \exp(\alpha)\exp((\mu + \sigma^2/2)T)n(\frac{z-\alpha-\mu T}{\sigma\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t})$

$= \exp(\mu + \sigma^2/2)t \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}n(\frac{z-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})dz =$

$$= \exp(\mu + \sigma^2/2)t[N(\frac{\beta - (\mu + \sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{\alpha - (\mu + \sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}) \equiv \mathbf{J}_1 \tag{2.8}$$

$\int_\alpha^\beta \exp(z)g(z)dz = \int_\alpha^\beta \exp(z)(\frac{1}{\sigma\sqrt{t}})\exp(2\mu b/\sigma^2)n(\frac{z-2b-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})dz$

$=\exp(2\mu b/\sigma^2)\exp(2b)\exp((\mu + \sigma^2/2)t)\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}n(\frac{z-2b-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})dz =$

$$= \exp(2\mu b/\sigma^2)\exp(2b)\exp((\mu+\sigma^2/2)t)[N(\frac{\beta-2b-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}) \quad (2.9)$$

$$N(\frac{\alpha-2b-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})] \equiv \mathbf{J}_2$$

$$\int_\alpha^\beta f(z)dz = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}n(\frac{z-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})dz = [N(\frac{\beta-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{\alpha-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})] \equiv \mathbf{J}_3 \quad (2.10)$$

e

$$\int_\alpha^\beta g(z)dz = \int_\alpha^\beta \frac{\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})}{\sigma\sqrt{t}}n(\frac{z-2b-\mu(t)}{\sigma\sqrt{t}})dz =$$

$$= \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})[N(\frac{\beta-2b-\mu(t)}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{\alpha-2b-\mu(t)}{\sigma\sqrt{t}})] \equiv \mathbf{J}_4 \quad (2.11)$$

$$\int_\alpha^\beta \psi.(S\exp(z)-K).p(z)dz = \psi S(J_1-J_2) - \psi K(J_3-J_4) \quad (2.12)$$

Então podemos calcular o premio de uma KO européia com rebate R como sendo $KO_E(R)$ apresentado na fórmula 2.13:

$$KO_E(R) \equiv KO_E(H,R,S,K,t_0,T,r,q,\sigma) = VP(\psi S(J_1-J_2)-\psi K(J_3-J_4))+VP_{KO}(R) \quad (2.13)$$

**Cálculo das opções Knock IN**

Um argumento interessante e importante na precificação das opções do tipo KI é o de um portfólio livre de risco, na mesma linha de argumentação das fórmulas de apreçamento propostas por Fischer Black e Myron Scholes. Se constituirmos uma carteira composta por uma opção de compra do tipo KO, mais uma opção com as mesmas características

mas do tipo KI, no vencimento, se a barreira não tiver sido antigida a KO termina com o valor de uma opção de compra (CALL) simples e a KI termina com valor nulo mais o valor do respectivo rebate $R_{KI}$. Se a barreira tiver sido atingida, a KO termina sem valor, mas recebe o valor do respectivo rebate $R_{KO}$ e a KI termina com o mesmo valor que uma Opção de compra. Desta forma, se constituirmos um portfólio composto por uma posição comprada numa call KI européia com rebate, mais uma call KO com rebate nulo, este porttem o mesmo valor que uma opção de compra sem barreira (plain vanilla) mais uma posição comprada no rebate da KI.

O mesmo raciocínio vale para o caso de uma opção de venda (PUT) Européia.

Lembrando que o o valor do prêmio dado pela fórmula proposta por Black&Scholes (B&S) é dada por:

Prêmio B&S = $PBS = VP(E^Q[\psi(S-K)]) =$

$= \exp(-rt)\psi[S\exp((r-q)t)N(\psi d_1) - KN(\psi d_2))] = PBS(S, K, r, q, t_0, T, \sigma)$

com $t = T - t_0$ , $d_1 = \frac{-k+(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$ e $d_2 = \frac{-k+\mu t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{-k+(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

podemos escrever o premio de uma opção KI européia com rebate R como sendo

$KI_E(H, R, S, K, t_0, T, r, q, \sigma) =$

$= PBS(S, K, r, q, t_0, T, \sigma) - KO_E(H, R = 0, S, K, t_0, T, r, q, \sigma) + VP_{KI}(R)$

ou simplificadamente

$$KI_E(R) = PBS - KO_E(0) + VP_{KI}(R) \tag{2.14}$$

O mesmo argumento pode ser usado de maneira reversa para calcular o premio de uma $KO_E(R)$ como função de uma $KI(0)$ e uma opção plain vanilla.

Pode-se perceber pelo que foi desenvolvido até aqui, que para o cálculo das fórmulas fechadas para os valores dos prêmios das Opções Européias com Barreira foram utilizadas, por diversas vezes, probabilidades obtidas a partir de distribuições Normais acumuladas (N(z)), como consequência natural da hipótese de distribuição gaussiana dos retornos. Diversos trabalhos tem sido desenvolvidos no sentido de mostrar que as distribuições de retornos de ativos financeiros não são exatamente gaussianas, mas que mesmo com distribuições de retorno que não sejam exatamente gaussianas, apresentando algum tipo de distorção, como leptocurtose, ou pequenas diferenças nos momentos de ordem maior que o da variância, a formulação de B&S pode ser facilmente adaptada, incorporando-se as distorções em relação a uma distribuição gaussiana, ao que se convencionou chamar de sorriso de volatilidade, ou no inglês, *Volatility Smile*. Esta técnica, amplamente utilizada nas mesas de operações dos principais participantes profissionais dos mercados de opções, consiste em atribuir diferentes níveis de volatilidade para diferentes níveis de relação entre o valor esperado do ativo objeto e o valor de exercício da opção. Esta relação, comumente denominada *Moneyness* nos textos em inglês, sera denominada neste texto como **Exercibilidade** da Opção, dando a noção de que uma opção **dentro do dinheiro** tem seu exercício praticamente certo, enquanto que uma opção **fora do dinheiro** muito provavelmente não será exercida. Quando a opção está exatamente sobre o valor de maior dúvida, diz-se que a opção está **no dinheiro**[11].

**Portfólio Replicante Livre de Risco e Apreçamento por Não-Arbitragem.**

---

[11] Os termos em inglês para dentro do dinheiro, fora do dinheiro, ou no dinheiro, são rspectivamente IN-THE-MONEY, OUT-OF-THE-MONEY, e AT-THE-MONEY.

Outro argumento importante e de interesse para este trabalho é o de carteira replicante que está diretamente ligado a uma estratégia de hedge.

Tomemos a título de exemplo o caso de uma opção de compra Européia com preço de exercício $K_1$ e com barreira $K_2 > K_1$ do tipo KO mas cuja barreira seja avaliada apenas no vencimento, e que apresente rebate igual a $(K_2 - K_1)/2$ .

O gráfico 2.2 abaixo ilustra o valor do contrato no vencimento em função do preço do ativo objeto para $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $R = 1/2$.

A função de Heaviside,que também é conhecida como degrau unitário, retorna zero para argumentos negativos e 1 para os demais casos.

$$m(x, y, z, w) = \max((x - y), 0) - \max((x - z), 0) - w\,\text{Heaviside}(x - z)$$

$$m(x, 1, 2, 1/2)$$

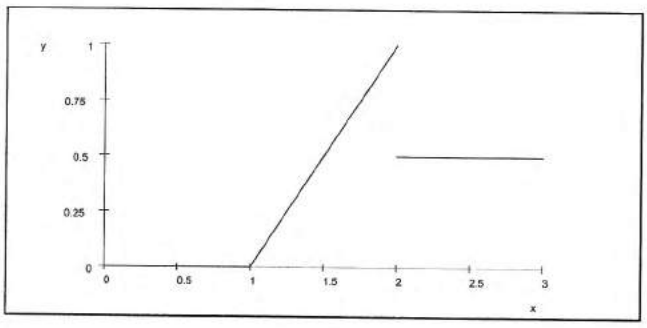


Fig. 2.2. Perfil de retorno de uma opção de compra européia com barreira avaliada apenas no vencimento.

Pode-se facilmente perceber que este perfil de resultado é equivalente a um portfólio composto por uma call com preço de exercício $K_1 = 1$ , uma posição vendida numa opção de compra com preço de exercício $K_2$ e mais uma posição vendida numa opção digital, ou

binária com preço de exercício $K_2$ todas européias. Isto pode ser visto nos gráficos 2.3 , 2.4 e 2.5 abaixo que apresentam os resultados separadamente de cada uma das opções:

posição comprada em call com preço de exercício $K_1$

$\max(x-1,0)$

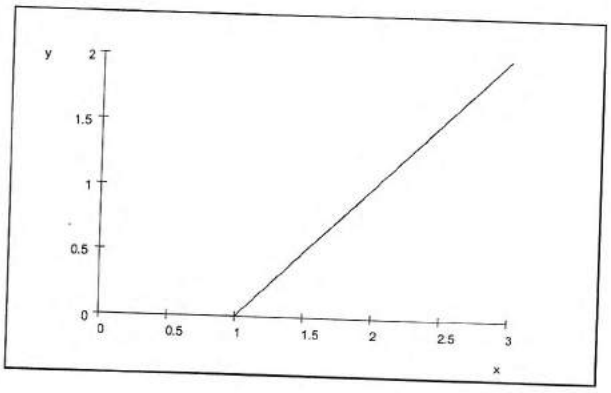


Fig. 2.3. Posição comprada em opção de compra.

posição vendida em call com preço de exercício $K_2$

$-\max(x-2,0)$

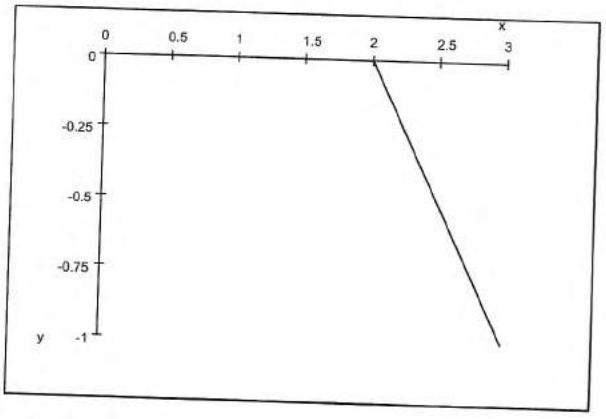


Fig. 2.4. Posição vendida em opção de compra

posição vendida em 1/2 de uma digital com preço de exercício $K_2 = 2$

$-(1/2)\,\text{Heaviside}(x-2)$

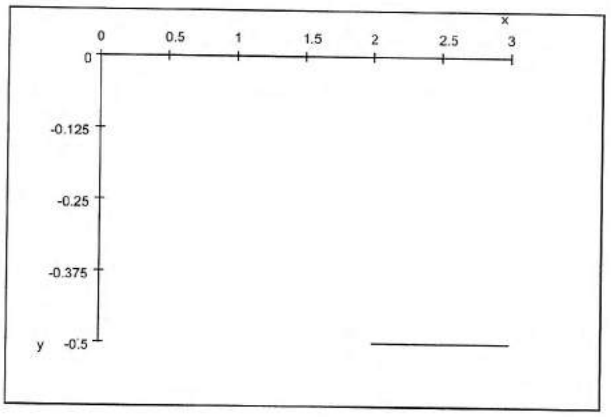


Fig. 2.5. Posição vendida em opção binária ou digital.

a soma dos tres acima produz:

$\max(x-1,0) - \max(x-2,0) - (1/2)\,\text{Heaviside}(x-2)$

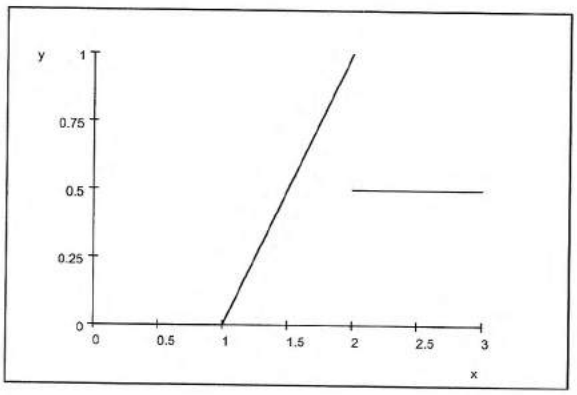


Fig. 2.6. Resultante das três posições.

Sendo assim, por um critério de não arbitragem o valor presente da opção com barreira deve ser igual ao do portfólio equivalente.

Se por algum motivo os preços dos ativos avaliados separadamente, se avaliados pela fórmula de Black&Scholes, apresentarem volatilidades $\sigma$ diferentes para cada uma das opções, então de alguma forma a opção que é equivalente deve de alguma forma incorporar estas diferenças para que seu preço seja tal que não dê oportunidades de arbitragem num mercado perfeito.

Esta idéia é a base deste trabalho, que consiste em verificar a aplicabilidade desta metodologia de maneira empírica através da simulação de Monte Carlo gerando um ambiente de comportamento conhecido e controlado.

## 2.2 Caso em Estudo: Call Down&Out sem Rebate e Barreira menor que o Exercício

Neste trabalho nos restringiremos apenas a análise de um caso, uma Call Down and Out com Barreira Inferior (menor) do que o Preço de exercício , ou seja uma opção de compra européia com barreira abaixo do preço atual do ativo e que deixa de existir caso a barreira seja atingida e neste caso não devolve nenhum valor a título de Rebate.

A fórmula para tal opção, conforme apresentado anteriormente é dada por:

$$KO_E(H, R, S, K, t_0, T, r, q, \sigma, \psi) = VP(\psi S(J_1 - J_2) - \psi K(J_3 - J_4)) + VP_{KO}(R)$$

com

$$\psi = 1 \text{ , e } K > H \text{ , } \alpha = k, \text{ e } \beta = \infty \text{ , } \eta = -1 \text{ , } \mu = r - q - \sigma^2/2 \text{ , } R = 0$$

$$CKO_E(H, R, S, K, t_0, T, r, q, \sigma) = VP(S(J_1 - J_2) - K(J_3 - J_4)) + VP_{KO}(R)$$

$$J_1(\alpha = k, \beta = \infty, \mu, \sigma, t) = e^{((r-q-\sigma^2/2+\sigma^2/2)t)}[N(\frac{\infty-(r-q-\sigma^2/2+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})-$$

$$N(\frac{k-(r-q-\sigma^2/2+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})] = e^{((r-q)t)}[N(\frac{-k+(r-q+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}})] = \exp((r-q)t)N(d_1)$$

$$J_2(\alpha, \beta, \mu, \sigma, t) = \exp(2b)\exp(2(r-q-\sigma^2/2)b/\sigma^2)$$

$$\exp((r-q)t[N(\frac{\infty-2b-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{k-2b-((r-q-\sigma^2/2)+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})] = \frac{1}{\sigma^2}(2br - 2bq - b\sigma^2)$$

$$J_3(\alpha, \beta, \mu, \sigma, t) = [N(\frac{\beta-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{\alpha-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})]$$

$$J_4(\alpha, \beta, \mu, \sigma, t) = \exp(2\mu b/\sigma^2)[N(\frac{\beta-2b-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{\alpha-2b-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})]$$

$$CKO_E(H, R, S, K, t_0, T, r, q, \sigma) =$$

$$=\exp(-rt)\{([S(e^{((\mu+\sigma^2/2)t)}[N(\frac{\infty-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{k-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})]]$$

$$-[\exp(2b)\exp(2\mu b/\sigma^2)\exp(\mu+\sigma^2/2)t[N(\frac{\infty-2b-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})-$$

$$N(\frac{k-2b-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})]]) - K([[N(\frac{\infty-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{k-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})]]$$

$$-[\exp(2\mu b/\sigma^2)[N(\frac{\infty-2b-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}) - N(\frac{k-2b-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})]]))\}$$

$$+\{0 \cdot \left[ \begin{array}{l} (\frac{H}{S})^{(\mu/\sigma^2+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r/\sigma^2})} N(\frac{-(-1)b-(-1)B\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}) + \\ +(\frac{H}{S})^{(\mu/\sigma^2-\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r/\sigma^2})} N(\frac{-(-1)b+(-1)B\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}) \end{array} \right]\}$$

$$CKO_E(H, R, S, K, t_0, T, r, q, \sigma) =$$

$$= \exp(-rt)\{([S(e^{((\mu+\sigma^2/2)t)}[1 - N(\frac{k-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})]]-$$

$$[\exp(2b)\exp(2\mu b/\sigma^2)\exp(\mu+\sigma^2/2)t[1 - N(\frac{k-2b-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})]])-$$

$$K([[1 - N(\frac{k-(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}})]] - [\exp(2\mu b/\sigma^2)[1 - N(\frac{k-2b-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})]]))\}$$

lembrando que:

$$\mu = r - q - \sigma^2/2$$

$$k = \ln(K/S) = -\ln(S/K)$$

$$d_1 = \frac{-k+(\mu+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln(S/K)+(r-q+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{-k+(\mu-\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln(S/K)+(r-q-\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$CKO_E$ pode ser reescrito e interpretado como sendo:

$$C_{DO}(S,K,\sigma,t,H) = C_{BS}(S,K,\sigma,t) - (\tfrac{H}{S})^{2(\hat{r}/\sigma^2)-1} C_{BS}(H^2/S,K,\sigma,t)$$

ou alternativamente, lembrando que

$$C_{BS}(\lambda S,\lambda K,\sigma,t) = \lambda C_{BS}(S,K,\sigma,t) \tag{2.15}$$

$$C_{DO}(S,K,\sigma,t,H) = C_{BS}(S,K,\sigma,t) - (\frac{H}{S})^{2(\hat{r}/\sigma^2)+1} C_{BS}(S,KS^2/H^2,\sigma,t) \tag{2.16}$$

Desta forma podemos identificar claramente nesta fórmula, 2 opções de compra de Black&Scholes, com preços de exercício diferentes e com um fator de correção. A formulação acima também pode ser interpretada como sendo uma precificação relativa entre a $C_{DO}$ e duas outras opções do tipo B&S, uma com strike em $K$, e outra com strike em $KS^2/H^2$ corrigida por uma fator dado por $F = (\frac{H}{S})^{2(\hat{r}/\sigma^2)+1}$. Desta forma, uma primeira aproximação para o hedge de uma posição vendida em um contrato de $C_{DO}$ seria uma posição comprada em uma $C_{BS}(S,K,\sigma,t)$ e uma posição vendida em $F$ contratos de uma opção $C_{BS}(S,KS^2/H^2,\sigma,t)$.Este modelo de apreçamento relativo será utilizado adiante neste trabalho.

# Capítulo 3
# Distribuições de retorno não gaussianas e sorriso de volatilidade

**Distribuições não Gaussianas**

Apesar das distribuições de probabilidade Gaussianas serem de grande importância e utilidade nos mais diversos ramos do conhecimento humano, tanto pelas suas propriedades quanto pela quantidade de situações que ela pode modelar, inclusive na área de finanças, nem todos os casos aparentemente normais, podem ser bem modelados por distribuições gaussianas, levando as pesquisas a caminhar além, no sentido de desenvolver modelos capazes de incorporar características específicas e importantes da realidade que se deseja modelar.

A figura 3.7 apresenta uma evolução da volatilidade histórica do Índice Bovespa[12] calculado em janelas de 20 dias úteis e de 200 dias úteis, utilizando-se dados referentes ao período compreendido entre 2/jan/2002 e 18/jun/2003. Nota-se que a volatilidade avaliada no curto prazo é muito mais instável que para um prazo mais longo.

---

12 Índice Bovespa ou Ibovespa: Índice calculado com base nos preços de uma cesta composta pelas ações mais negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo.

Fig. 3.7. Processo da Volatilidade Histórica do Ibovespa

Isto pode ser melhor visto no Diagrama 3.8 que mostra a volatilidade em função do período da amostra, chamado Cone de Volatilidades. Pode-se provar que a dispersão da volatilidade decai com $(1/\sqrt{N})$ onde N é o número de dias úteis do período utilizado para cálculo da volatilidade. Mas ao mesmo tempo percebe-se que a volatilidade apresenta um atrator de longo prazo e oscila muito no curto prazo.

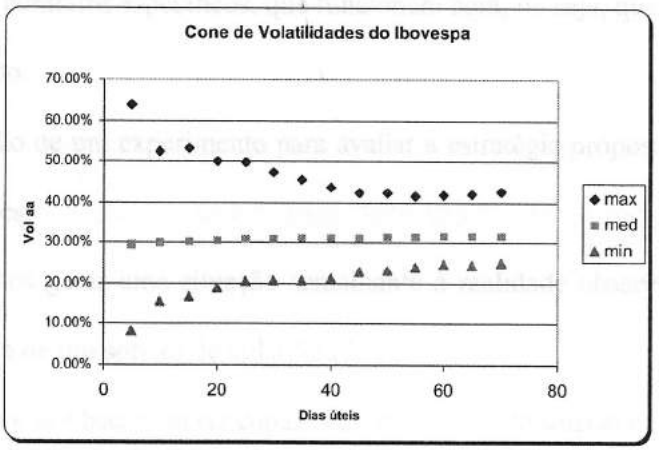


Fig. 3.8. Cone de Volatilidades do Ibovespa

Quanto aos processos estocásticos dos preços e dos retornos dos ativos em geral, muito se tem estudado a respeito destas características de "não-normalidade " e de como os modelos podem incorparar estas características, e mais ainda, que tipos ou famílias de distribuição são estáveis, ou seja se um processo originado por uma sequência ou soma de eventos de determinada família de distribuições resulta numa distribuição da mesma família, porém este não é o objetivo deste estudo.

No que se refere aos processos de retorno de ativos financeiros, tem-se verificado empiricamente que não são exatamente normais, pelos mais diversos motivos, incluindo características de imperfeição dos mercados, que não iremos abordar neste trabalho.

O que nos interessa para os fins deste trabalho é a relação entre a não-normalidade, ou seja, os desvios da hipótese básica de distribuições de retornos gaussianas, e os efeitos sobre a modelagem utilizada, na linha do que foi originalmente proposto por Black&Scholes, com o objetivo prático e específico de escolher estratégias de apreçamento para carteiras

de derivativos ou contratos específicos, que funcionem bem, ou seja, que atendam a algum critério de precisão.

A proposição de um experimento para avaliar a estratégia proposta deve atender as seguintes restrições:

1) Precisamos gerar uma situação semelhante à realidade observável, onde verificamos a existência de um sorriso de volatilidades,

2) Precisamos conhecer, ou ser capazes de construir este sorriso de volatilidades,

3) Precisamos de uma referência correta ou justa para o valor do contrato da opção CDO,

4) Precisamos gerar situações comparáveis para submeter as diferentes estratégias que desejamos testar,

5) Precisamos gerar uma situação tal que um observador simplista possa observar e decidir sobre um valor de volatilidade média, e que um outro abservador mais refinado, observar as curvas ou sorrisos de volatilidade.

Várias alternativas foram analisadas para encontrar uma situação em que existe uma relação conhecida entre o sorriso de volatilidade e o tipo de distribuição.Alternativas como as distribuições de Johnson(1949), expansões de Edgeworth (HALL,1992), Levy(1954) e Tsallis(Borland, 2002) foram algumas das alternativas de distribuições de probabilidade com média e desvio padrão conhecidos, e que apresentam momentos de ordens maiores, fazendo com que a o comportamento não possa ser modelado apenas através de uma distribuição normal.

Na prática as distribuições de retornos de ativos financeiros apresentam leptocurtose ou caudas pesadas, ou seja, eventos extremos são mais frequentes do que uma distribuição normal gaussiana poderia prever, de maneira que características adicionais são necessárias para melhorar a modelagem dos dados reais. A título de exemplo a figura 3.9 apresenta um histograma com os log-retornos ($log(P_i/P_{i-1})$) calculados com base nos preços de fechamento do Ibovespa no período de jan/2002 a junho/2003. Comparando a distribuição real com a distribuição Normal disposta no mesmo gráfico pode-se perceber que em algumas regiões a distribuição normal subestima as ocorrências encontradas e em outras superestima. Em outras palavras, poderia-se dizer que a distribuição apresenta momentos de ordens além daqueles presentes nas distribuições gaussianas, tais como Assimetria e Curtose, calculados para estes dados como sendo respectivamente -0,1947 e 0,3014.

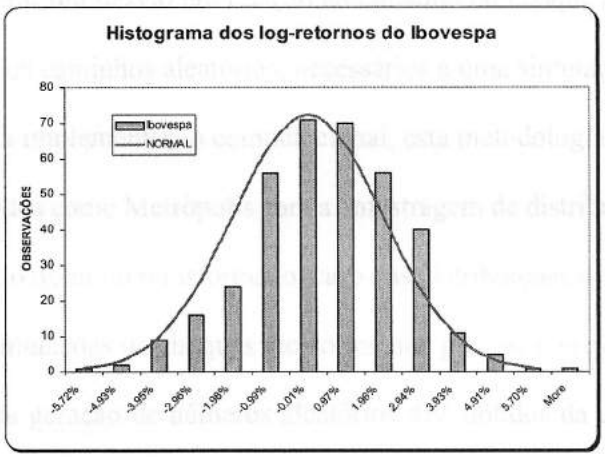


Fig. 3.9. Histograma dos Log-retornos do Ibovespa

Uma outra linha de modelagem que leva a características semelhantes é a de modelagem através de volatilidade volátil conforme descrito em HULL-WHITE (1996) e em

FOUQUE-PAPANICOLAOU-SIRCAR (2000), ou seja, um parâmetro de dispersão para o processo do retorno, com um erro, incerteza ou dipersão conhecida sobre este valor. Neste caso, conhecemos a média, conhecemos o valor esperado da variância e conhecemos a variância da variância. Esta abordagem foi escolhida para gerar o ambiente de distribuição de retornos necessário para o experimento. Decidimos pela utilização desta abordagem por considerações de ordem prática do ponto de vista da geração de um experimento com média e variância conhecidos, e que gerem um comportamento que reconhecidamente gere um efeito de sorriso de volatilidade.

Além disso, a geração de cenários e caminhos aleatórios atendendo a esta característica é relativamente simples, bastando para isto amostrar não apenas uma distribuição normal para gerar o efeito do choque aleatório, mas também realizando uma segunda amostragem para gerar um desvio em relação ao tamanho do choque estocástico que será utilizado para gerar os caminhos aleatórios, necessários a uma simulação de Monte Carlo. Do ponto de vista da implementação computacional, esta metodologia é mais simples que a utilização de métodos como Metrópolis para a amostragem de distribuições quaisquer, ou ainda amostragens no domínio transformado, caso das distribuições de Levy.

Nas nossas simulações os choques aleatórios nos preços, representados por $dZ$ podem ser obtidos pela geração de números aleatórios $dW$ obtidos da amostragem de uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão unitário, mais uma segunda componente também aleatória, tal que

$$dS_t = S\mu dt + S\sigma_1 dW_{1t} \tag{3.1}$$

com $\sigma_1^2 = V$ , onde $V$ é a variância, cujo processo estocástico tem um comportamento do tipo Ornstein-Uhlenbeck, no sentido em que descreve o fenômeno de reversão à média , com a característica adicional da positividade, apresentado na literatura como modelo de Feller ou Cox-Ingersoll-Ross, conforme a seguinte expressão:

$$dV = k(a - V)dt + \delta\sqrt{V}dW_{2t} \tag{3.2}$$

onde $a$ é o atrator da variância, $k$ é a velocidade de reversão à média e $\delta$ é o desvio padrão da volatilidade ao quadrado, ou seja, a variância,

$W_1$ e $W_2$ são normalmente distribuídos com média nula e variância unitária e $dW_1$ e $dW_2$ são os choques incrementais destes brownianos, por hipótese e construção, considerados descorrelacionados, ou seja, $\rho(W_1 , W_2) = 0$ é a correlação entre $W_1$ e $W_2$ , nula para fins deste trabalho.

O modelo acima foi proposto por Ball-Roma(1994), sendo mais simples que o modelo proposto por Heston(1993), o qual incorpora a correlação entre os dois Brownianos, ou seja o modelo proposto por Ball-Roma pode ser considerado um modelo de Heston com $\rho = 0$.

## 3.1 Sorriso de Volatilidade

**Impacto sobre o apreçamento de opções tradicionais**

O gráfico 3.10 ilustra o comportamento das volatilidades implícitas nos preços das opções de compra sobre o Ibovespa observadas em alguns pregões consecutivos entre os dias 11 e 17/junho/2003, e portanto comparáveis. Nele podemos perceber que as volatili-

dades implícitas das opções mais fora do dinheiro ou de menor exercibilidade são menores que as volatilidades implícitas das opções mais dentro do dinheiro ou seja, com maior probabilidade de serem exercidas.

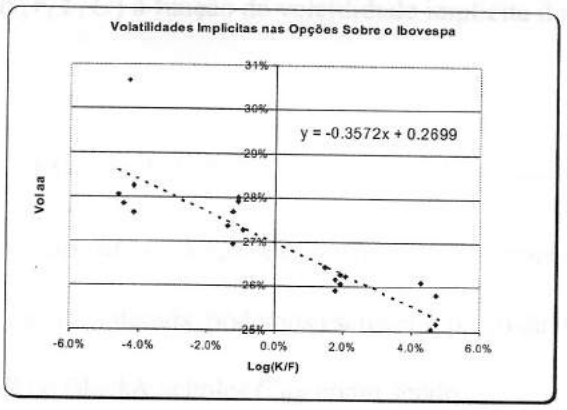


Fig. 3.10. Sorriso de Volatilidades das Opções sobre o Ibovespa.

Este comportamento tem suas origens basicamente no fato de que os agentes, por algum motivo, atribuem uma menor probabilidade de exercício para as opções fora do dinheiro, ou da mesma forma, uma maior probabilidade de exercício para as opções dentro do dinheiro, do que seria previsto por um modelo gaussiano de retornos, conforme uma das hipóteses básicas do modelo de Black&Scholes. Para as opções muito fora do dinheiro, os custos transacionais, somados ao fato de que ninguém dá nada de graça para ninguém, fazem com que as volatilidades implícitas voltem a subir, o que formaria a outra parte do Sorriso, não representado nos dados do gráfico.

**Volatilidade Estocástica e Sorriso de Volatilidades**

Procuramos, a seguir, mostrar que a existência de volatilidade volátil leva necessariamente a existência de Sorriso de volatilidade, conforme apresentado em SCHIRMER(2002), e portanto é útil para gerar distribuições com sorriso de volatilidade.

Seja $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(S, K, r, T, C)$ a função de volatilidade implícita do modelo geral:

$$C_{BS}(S, K, r, T, \bar{\sigma}(S, K, r, T, C)) = C_{observado} \tag{3.3}$$

Supondo um processo para os preços e as variâncias conforme descrito por 3.1 e 3.2, e aplicando a Lei da esperança iterada, podemos escrever o preço de uma Opção de compra em termos de uma Call de Black&Scholes $C_{BS}$ como sendo:

$C(t, \sigma_t) = \int_0^\infty C_{BS}(t, v) f(v|\sigma_t) dv$

onde

$t = T - t_0$

e $v$ é variância do processo.

Fazendo uma expansão em série de Taylor ao redor da variância média, e nos atendo apenas às parcelas com maior influência, teremos:

$C(t, \sigma_t) = \int_0^\infty [C_{BS}(t, \sqrt{E_t[\bar{V}_{t,T}]}) +$

$\frac{\partial C_{BS}}{\partial v}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]}(v - E_t[\bar{V}_{t,T}]) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial v^2}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]}(v - E_t[\bar{V}_{t,T}])^2] f(v) dv$

$$\begin{aligned} C(t, \sigma_t) &= C_{BS}(t, \sqrt{E_t[\bar{V}_{t,T}]}) \int_0^\infty f(v) dv + \\ &\frac{\partial C_{BS}}{\partial v}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]} \int_0^\infty (v - E_t[\bar{V}_{t,T}]) f(v) dv + \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial v^2}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]} \int_0^\infty (v - E_t[\bar{V}_{t,T}])^2 f(v) dv \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$C(t,\sigma_t) = C(\bar{\sigma}^2) = C_{BS}(t,\sqrt{E_t[\bar{V}_{t,T}]}) + \frac{\partial C_{BS}}{\partial v}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]}(\bar{\sigma}^2 - E_t[\bar{V}_{t,T}]) \tag{3.5}$$

fazendo um aproximação em série de Taylor em torno da variância média e igualando as duas expressões, obtemos

$$C_{BS}(t,\sqrt{E_t[\bar{V}_{t,T}]}) + \tfrac{\partial C_{BS}}{\partial v}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]}(\bar{\sigma}^2 - E_t[\bar{V}_{t,T}]) =$$
$$= C_{BS}(t,\sqrt{E_t[\bar{V}_{t,T}]}) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 C_{BS}}{\partial v^2}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]}\sigma^2[\bar{V}_{t,T}]$$

que leva a uma expressão aproximada, válida apenas para pequenos desvios de $\bar{V}$ para a volatilidade, que corrige os efeitos da estocasticidade da volatilidade em uma modelagem do tipo Black&Scholes, ou seja o descreve um Sorriso de Volatilidades, conforme a fórmula abaixo:

$$\bar{\sigma}^2 \approx E_t[\bar{V}_{t,T}] + \frac{1}{2}\sigma^2[\bar{V}_{t,T}]\frac{\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial v^2}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]}}{\frac{\partial C_{BS}}{\partial v}|_{E_t[\bar{V}_{t,T}]}} \tag{3.6}$$

Nesta expressão pode-se observar que a volatilidade a ser utilizada deve ser a esperança da volatilidade para o período em questão somado de uma parcela que é dada pela semi-variância da volatilidade multiplicada por um fator dado pela relação entre a derivada segunda do preço da opção de Black&Scholes em relação à variância e a derivada primeira do preço da opção de Black&Scholes em relação à variância, ou seja, um fator de convexidade, de maneira que o efeito da volatilidade estocástica é tanto maior quanto maior for este fator.

Em nossa simulação utilizamos a volatilidade estocástica como forma de obter distribuições de retorno não gaussianas, ou seja que gerem um sorriso de volatilidade ao realizar o apreçamento de opções utilizando o modelo de Black&Scholes.

**Impactos sobre o apreçamento de opções com barreira**

Dado que no caso específico da $\text{Call}_{DO}$ utilizamos uma decomposição em basicamente duas Calls de Black&Scholes, sendo uma delas corrigida por coeficiente de ajuste, utilizamos o efeito do Sorriso de volatilidade conforme apresentado individualmente para cada uma das Calls em função de sua exercibilidade, e procuramos verificar se esta abordagem leva a melhores resultados que aqueles utilizando apenas uma volatilidade média esperada na abordagem através de duas opções de Black&Scholes. Desta forma iremos testar a seguinte fórmula em comparação com a da equação 2.16:

$$C_{DO-hipotese}(S, K, \sigma_1, \sigma_2, t, H) = C_{BS}(S, K, \sigma_1, t) - (\frac{H}{S})^{2(\hat{r}/\sigma_2^2)+1} C_{BS}(S, KS^2/H^2, \sigma_2, t) \tag{3.7}$$

com $\sigma_1$ = volatilidade implícita em uma opção de strike $K$ ou seja que satisfaz $C(S, K)_{obs} = C_{BS}(S, K, \sigma_1, t)$

e

com $\sigma_2$ = volatilidade implícita em uma opção de strike $KS^2/H^2$ ou seja que satisfaz $C(S, KS^2/H^2)_{obs} = C_{BS}(S, KS^2/H^2, \sigma_2, t)$

Desta forma, o mesmo procedimento utilizado para incorporação do sorriso de volatilidades em função de sua exercibilidade a uma opção Plain Vanilla é aplicado por partes sobre o modelo de apreçamento de uma opção de compra com barreira do tipo Down&Out.

## 3.2 Amostragem da distribuição proposta

Conforme já foi explicitado anteriormente, para modelar a volatilidade estocástica que leva a um sorriso de volatilidades, são necessários dois processos Brownianos. Neste trabalho, por simplicidade, os dois Brownianos são por hipótese e construção não-correlacionados.

Para amostragem da distribuição normal utilizamos um gerador de números aleatórios do Excel e/ou Matlab. Para cada passo são gerados 2 sorteios de Distribuição Normal$\sim N(0,1)$, correspondendo a $dW_1$ e $dW_2$, não correlacionados.

Para o cálculo da série de preços é preciso, encadeadamente, calcular a série de volatilidades $\sigma$, sendo que na prática utilizamos a variância $V = \sigma^2$, pela fórmula

$$V_{i+1} = V_i \exp(k(a - V_i)dt + \delta\sqrt{V_i}dW_{2i}) \tag{3.8}$$

com $a = \bar{V}$, e $V_0 = \bar{V}$

para então calcular a série de preços pela fórmula:

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{V_i}{2})dt + \sqrt{V_i}\sqrt{dt}dW_{1i}) \tag{3.9}$$

lembrando que por hipótese não temos custos de carregamento para o ativo objeto (q=0).

A figura 3.11 ilustra um exemplo de processo conforme descrito, para a volatilidade ao longo de um período de 252 unidades de tempo dt.

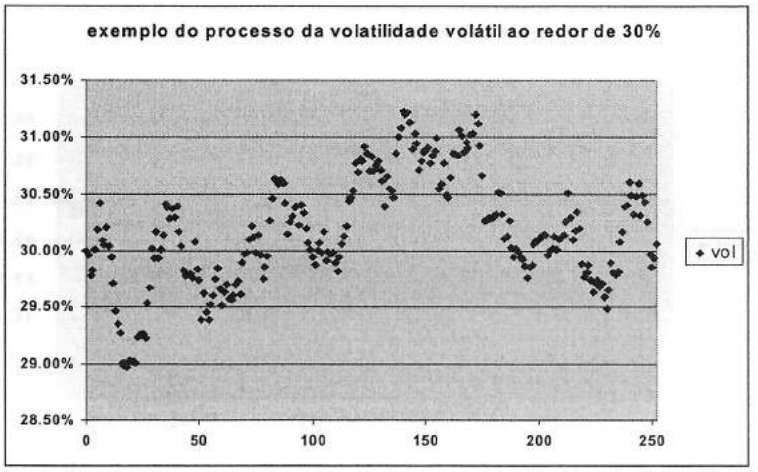


Fig. 3.11. Exemplo de realização para processo de volatilidade estocástica.

Neste processo pode-se perceber a reversão para média ou seja, o processo não escorrega, nem escapa indefinidamente para nenhum lado, ao contrário ocupa uma região no entorno da volatilidade média no caso do exemplo de 30% aa. É importante notar que uma das hipótese para o apreçamento de opções proposto por Black&Scholes é a de que a volatilidade é constante, o que corresponderia neste gráfico a uma reta horizontal, indicando um único valor para a volatilidade ao longo do tempo.

A figura 3.12 ilustra um exemplo de processo para o preço obtido a partir deste cenário de volatilidade estocástica:

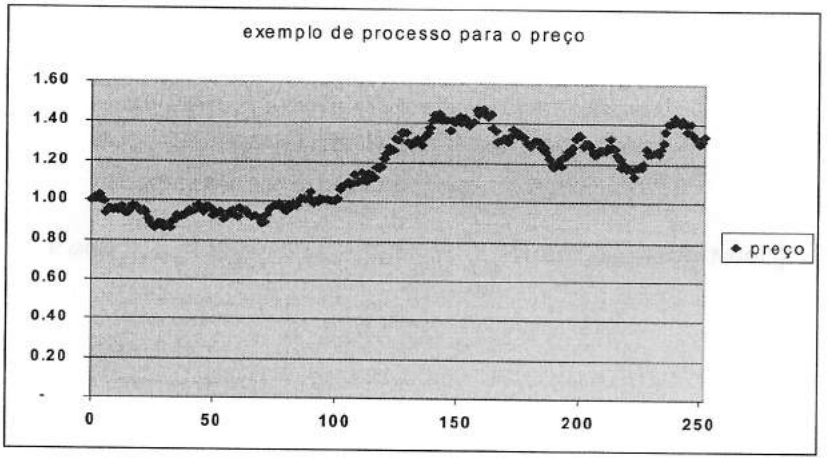


Fig. 3.12. Exemplo de Realização de processo do preço, com volatilidade volátil

Neste exemplo podemos perceber que os pontos estão mais espaçados nos períodos onde a volatilidade é maior, estando mais agrupados nos períodos de menor volatilidade.

## 3.3 Simulação de Monte Carlo

Como referência de preços justo utilizaremos uma integração numérica conhecida como simulação de Monte Carlo, onde um número muito grande N de caminhos aleatórios são gerados segundo a distribuição proposta e sobre estes caminhos são calculados os derivativos, neste caso a $C_{DO}$ e as Opções $C_{BS}$ com preço de exercício em $K$ e em $KS^2/H^2$. Para cada derivativo, somam-se os preços obtidos ao final de cada caminho e divide-se por N, obtendo-se assim um preço médio final. Este preço médio final é trazido a valor presente pela taxa de juros livre de risco $r$, para obter finalmente o preço justo para o derivativo.

$$Valor_{justo} = \exp(-r(T - t_0))[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Valor_{final}(caminho_i)] \tag{3.10}$$

onde

$caminho_i$ indica a série de preços $(S_{t0}, ..., S_T)$ obtida na i-ésima simulação sobre a qual se avalia o contrato derivativo.

## 3.4 Experimento proposto

A figura 3.13 ilustra de maneira simples o experimento proposto, descrevendo a sequência lógica utilizada para obter os preços aplicando as fórmulas de apreçamento já apresentadas. A idéia básica é a de comparar duas estratégias diferentes de apreçamento, ambas paramétricas, onde a realidade é obtida por simulação, e as diferentes estratégias correspondem a duas interpretações diferentes sobre a mesma realidade:

1) a primeira, que olha apenas para o longo prazo e utiliza o modelo de Black&Scholes com esta volatilidade, e

2) a segunda, que procura capturar e incorporar o Sorriso de volatilidades presente nas opções plain vanilla do mercado, supondo que este sorriso esteja condizente com a realidade da distribuição dos retornos.

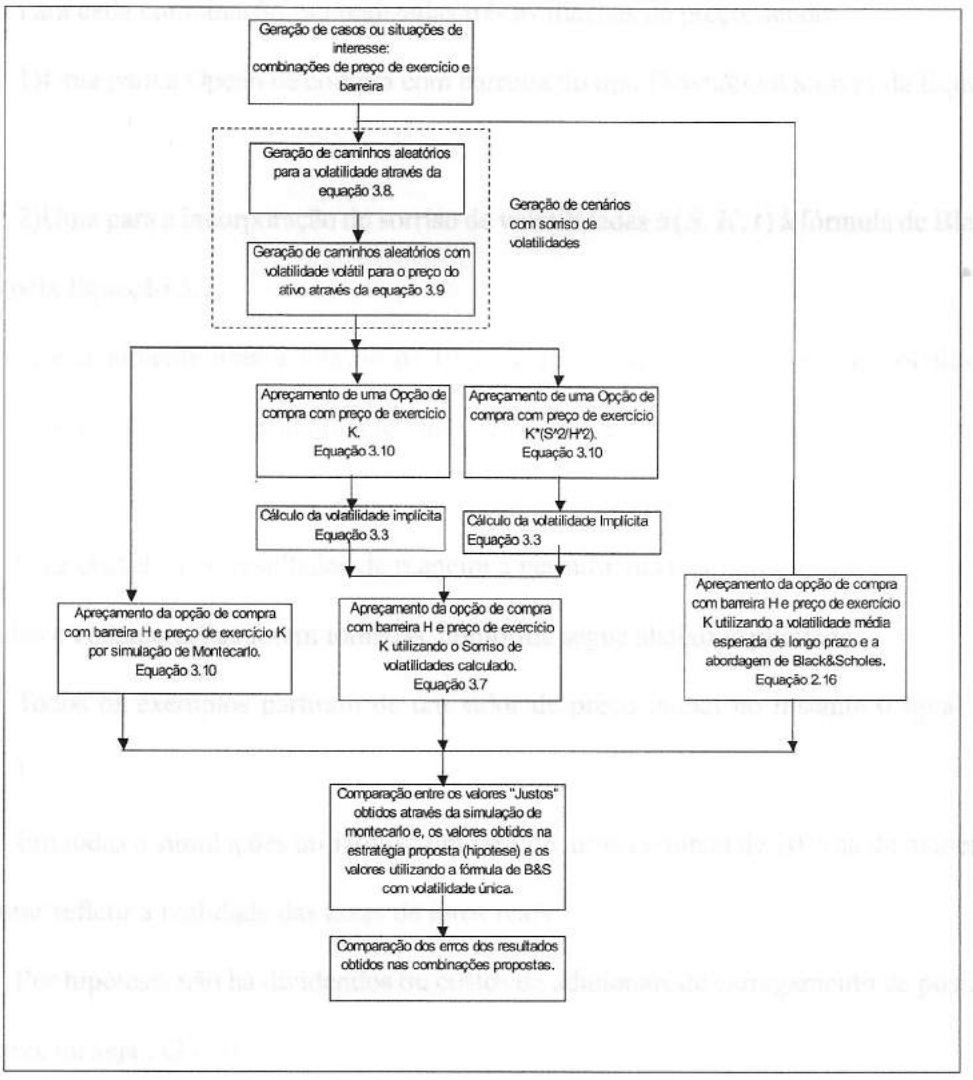


Fig. 3.13. Diagrama de Blocos do Experimento Proposto

Os casos de interesse procuraram cobrir diversas combinações entre níveis de volatilidade, níveis de preço de exercício, e níveis de barreira, sempre procurando uma região onde é possível a convergência para os cálculos das volatilidades implícitas, ou seja no entorno de log(K/S) =1

Para cada combinação são realizadas três avaliações de preço, sendo:

1)Uma para a Opção de compra com barreira do tipo Down&Out através da Equação 3.10,

2)Uma para a incorporação do sorriso de volatilidades $\bar{\sigma}(S, K, t)$ à fórmula de Black&Scholes dada pela Equação 3.7,

3) e finalmente uma avaliação de Black&scholes, mas utilizando uma volatilidade única e constante igual a volatilidade média esperada de longo prazo através da Equação 2.16.

Para organizar os resultados de maneira a permitir sua análise comparativa, algumas medidas e considerações foram tomadas, conforme segue abaixo explicitado:

Todos os exemplos partiram de um valor de preço inicial no instante 0 igual a 1, $S_0 = 1$,

Em todas a simulações utilizou-se um taxa de juros contínua de 20% aa de maneira a procurar refletir a realidade das taxas de juros reais,

Por hipótese, não há dividendos ou custos de adicionais de carregamento de posições no ativo, ou seja , $Q = 0$,

Todos os processos de volatilidade estocástica utilizaram a mesma variância inicial igual à variância média de longo prazo,

Todos os processos utilizam a mesma velocidade de reversão à média $k$.

Em todos os processos, a volatilidade implícita foi calculada utilizando um método de Newton-Rapson para busca de zero de função e apenas utilizamos os casos onde este processo convergiu dentro de um período de tempo aceitável dadas as precisões.

Em todos os apreçamentos do experimento proposto foram utilizados 1100 caminhos diferentes de preços com volatilidade estocástica, compostos de 42 passos correspondendo aos intervalos de tempo $dt = 1/252$ anos ou 1 dia útil, procurando refletir o período de dois meses tal que $(T - t_0) = 42/252$.

Para gerar um sorriso de volatilidades utilizamos como parâmetro de reversão à média $k = 60$ e desvio da variância $\delta = 12$.

É importante destacar aqui que nosso objetivo não é o de estudar volatilidades estocásticas mas sim gerar cenários de volatilidade que impliquem em um sorriso de volatilidades.

Os demais conjuntos de dados estão apresentados na tabela em anexo no apêndice 3, onde pode-se verificar que foram utilizados preços de exercício entre 95% e 105% do preço inicial, e valores de barreira entre 89,39% e 98,35% do valor inicial, sempre lembrando que no caso deste exercício, apenas barreiras abaixo do preço inicial $(S > H)$ fazem sentido e apenas preços de exercício acima da barreira $(K > H)$ fazem sentido.

Foram utilizados ainda 3 níveis de volatilidade de longo prazo, a saber, 20%aa, 30%aa, e 40% aa no sentido de estarmos próximos a níveis reais de volatilidade para ativos de renda variável.

O gráfico 3.14 apresenta alguns exemplos de trajetória de variância volátil utilizados.

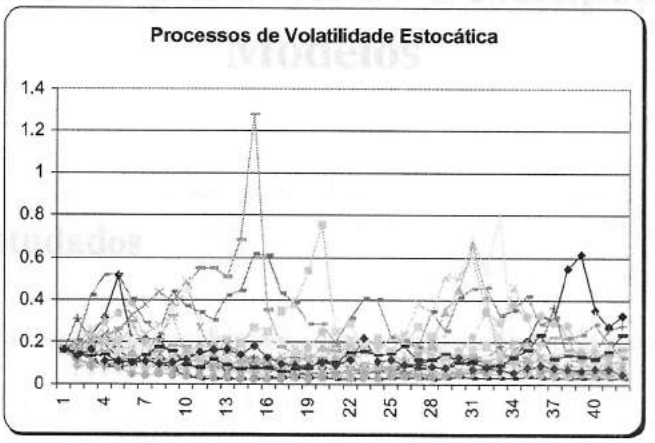


Fig. 3.14. Exemplos de processos estocásticos para a variância.

O gráfico 3.15 apresenta alguns exemplos de trajetórias de preços com volatilidade estocástica.

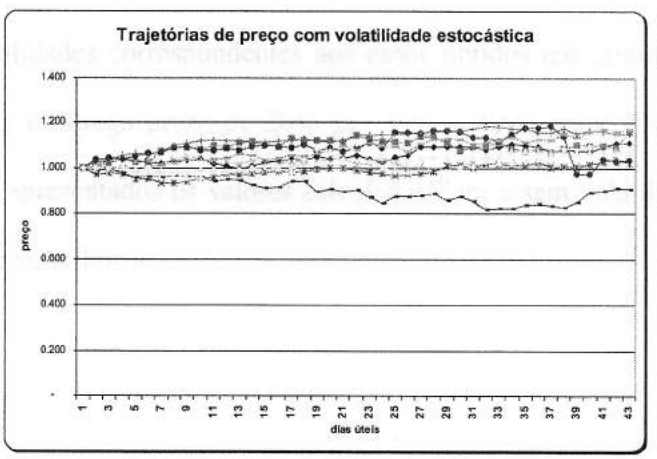


Fig. 3.15. Processo estocástico do preço.

O capítulo seguinte apresenta uma análise dos resultados obtidos

# Capítulo 4
# Análise Comparativa do Desempenho dos Modelos

## 4.1 Casos estudados

Sobre os casos estudados neste experimento cabe ressaltar que foram escolhidos de maneira a permitir convergência no caso da volatilidade implícita das opções, ou seja foram escolhidos no entorno dos preços de exercício iguais ao valor inicial $S_0 = 1$, dado que, para valores de preços de exercício muito fora do dinheiro ou muito dentro do dinheiro, problemas de ordem numérica impedem que se encontre uma volatilidade implícita necessária para construir o sorriso de volatilidades.

Os gráficos 4.16,4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, apresentados a seguir apresentam os Sorrisos de Volatilidades correspondentes aos casos obtidos nas simulações, utilizando volatilidade média de longo prazo de 20% aa., 30% e 40%, respectivamente. A título de referência são apresentados os valores calculados com e sem volatilidade estocástica, para cada nível de volatilidade.

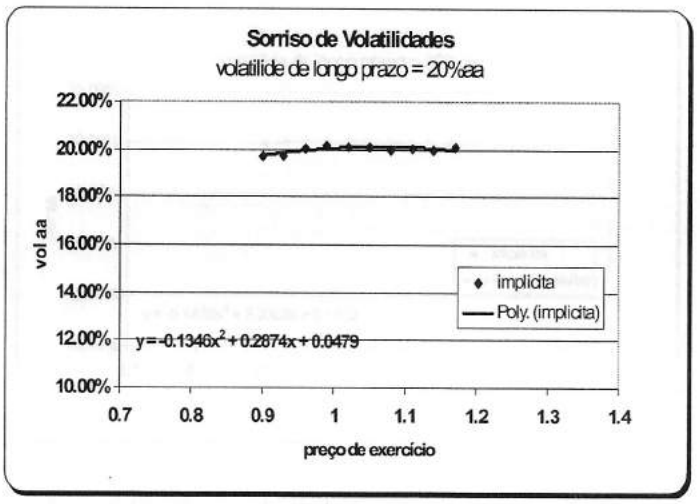


Fig. 4.16. Sem volatilidade estocástica, vol=20%aa

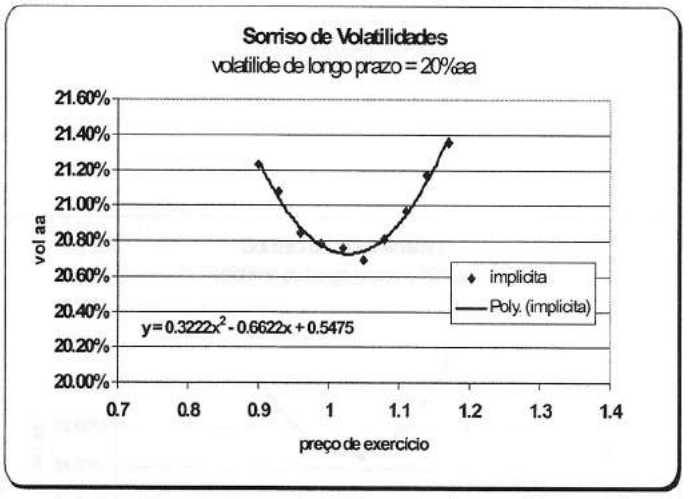


Fig. 4.17. Sorriso de volatilidades para 20% aa

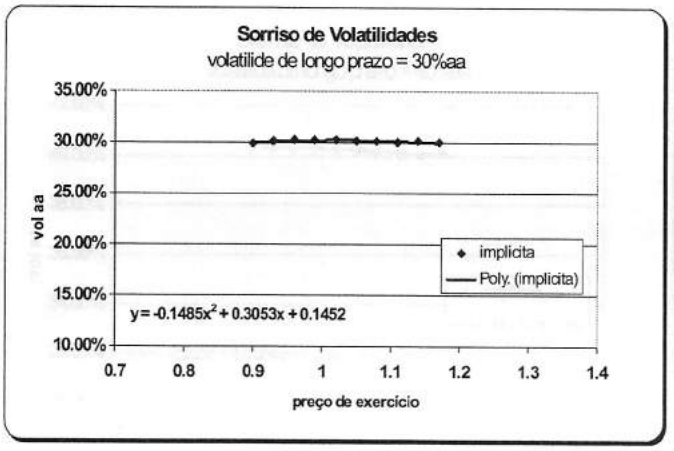


Fig. 4.18. Sem volatilidade estocástica, vol 30%aa

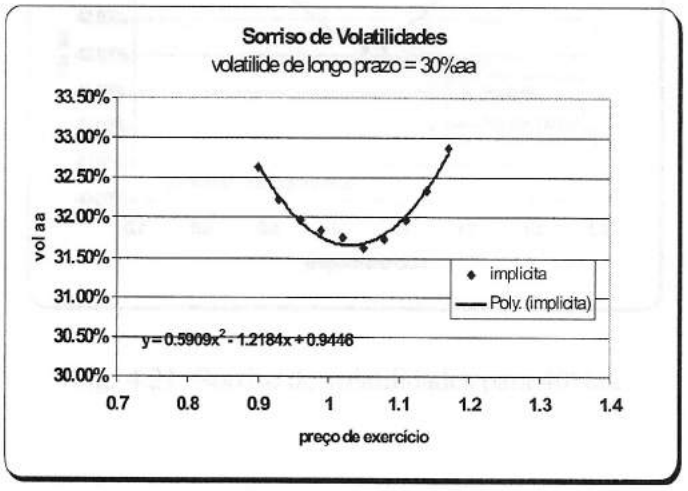


Fig. 4.19. Sorriso de volatilidades para 30% aa

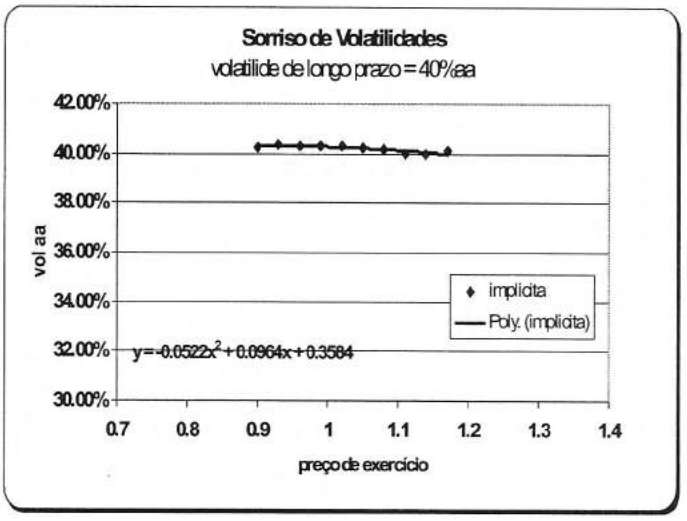


Fig. 4.20. Sem volatilidade estocástica, vol 40% aa

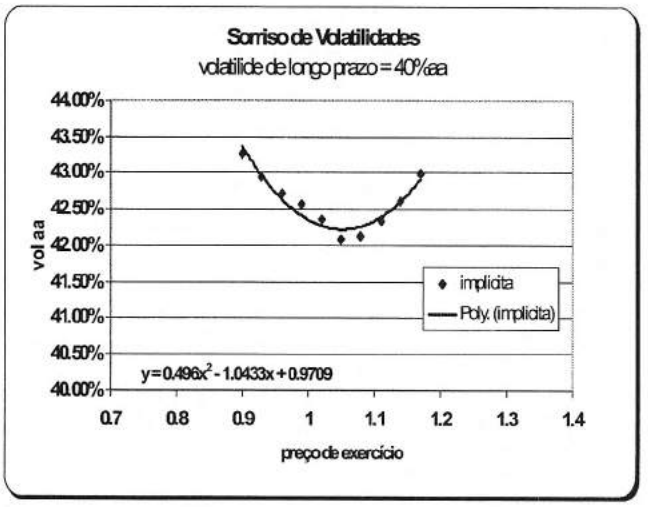


Fig. 4.21. Sorriso de volatilidades para 40%aa

## 4.2 Resultados da simulação

| situações | vol | strikeK | barreira H | b= K(S^2)/(H^2) | implícita K | implícita b | implícita de H | CDD justo | CDD hipótese | CDD bás | erro Hpot | erro BS | inclinação do smile | com sorriso é melhor | SD CDDjusto | SE CDDjusto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 40% | 0.9500 | 0.8939 | 1.2012 | 42.78% | 43.39% | 42.43% | 0.1065 | 0.0987 | 0.0983 | 7.62% | 7.97% | 2.28% | sim | 0.1451 | 0.0044 |
| 2 | 40% | 0.9750 | 0.9056 | 1.2012 | 42.64% | 43.39% | 42.30% | 0.0999 | 0.0926 | 0.0923 | 8.44% | 8.87% | 3.17% | sim | 0.1363 | 0.0041 |
| 3 | 40% | 1.0000 | 0.9171 | 1.2012 | 42.50% | 43.39% | 42.19% | 0.0745 | 0.0680 | 0.0677 | 9.25% | 9.68% | 4.25% | sim | 0.1245 | 0.0038 |
| 4 | 40% | 1.0250 | 0.9285 | 1.2012 | 42.31% | 43.39% | 42.12% | 0.0611 | 0.0545 | 0.0545 | 11.33% | 11.36% | 5.99% | sim | 0.1155 | 0.0035 |
| 5 | 40% | 1.0500 | 0.9397 | 1.2012 | 42.08% | 43.39% | 42.07% | 0.0481 | 0.0424 | 0.0428 | 12.65% | 11.71% | 8.44% | não | 0.1050 | 0.0032 |
| 6 | 40% | 0.9500 | 0.9140 | 1.1814 | 42.78% | 42.59% | 42.22% | 0.0992 | 0.0910 | 0.0906 | 9.79% | 10.26% | -0.83% | sim | 0.1398 | 0.0042 |
| 7 | 40% | 0.9750 | 0.9259 | 1.1814 | 42.64% | 42.59% | 42.13% | 0.0829 | 0.0736 | 0.0731 | 11.94% | 12.56% | -0.21% | sim | 0.1307 | 0.0039 |
| 8 | 40% | 1.0000 | 0.9377 | 1.1814 | 42.50% | 42.59% | 42.09% | 0.0670 | 0.0595 | 0.0581 | 13.57% | 14.25% | 0.52% | sim | 0.1215 | 0.0037 |
| 9 | 40% | 1.0250 | 0.9494 | 1.1814 | 42.31% | 42.59% | 42.07% | 0.0535 | 0.0447 | 0.0445 | 18.14% | 18.50% | 1.82% | sim | 0.1107 | 0.0033 |
| 10 | 40% | 1.0500 | 0.9609 | 1.1814 | 42.08% | 42.59% | 42.14% | 0.0411 | 0.0321 | 0.0323 | 24.70% | 23.96% | 3.96% | não | 0.1011 | 0.0030 |
| 11 | 40% | 0.9500 | 0.9355 | 1.1618 | 42.78% | 42.15% | 42.10% | 0.0880 | 0.0763 | 0.0758 | 14.23% | 14.86% | -2.99% | sim | 0.1374 | 0.0041 |
| 12 | 40% | 0.9750 | 0.9477 | 1.1618 | 42.64% | 42.15% | 42.07% | 0.0710 | 0.0593 | 0.0587 | 18.02% | 18.92% | -2.59% | sim | 0.1259 | 0.0038 |
| 13 | 40% | 1.0000 | 0.9598 | 1.1618 | 42.50% | 42.15% | 42.13% | 0.0557 | 0.0436 | 0.0431 | 24.59% | 25.74% | -2.14% | sim | 0.1153 | 0.0035 |
| 14 | 40% | 1.0250 | 0.9717 | 1.1618 | 42.31% | 42.15% | 42.28% | 0.0410 | 0.0291 | 0.0288 | 34.20% | 35.27% | -1.14% | sim | 0.1039 | 0.0031 |
| 15 | 40% | 1.0500 | 0.9835 | 1.1618 | 42.08% | 42.15% | 42.39% | 0.0235 | 0.0159 | 0.0160 | 61.63% | 61.36% | 0.66% | não | 0.0986 | 0.0028 |
| 16 | 30% | 0.9500 | 0.8939 | 1.2012 | 32.65% | 33.18% | 32.05% | 0.0986 | 0.0940 | 0.0937 | 2.74% | 3.05% | 4.49% | sim | 0.1100 | 0.0033 |
| 17 | 30% | 0.9750 | 0.9056 | 1.2012 | 31.93% | 33.18% | 31.92% | 0.0791 | 0.0768 | 0.0764 | 3.00% | 3.47% | 5.62% | sim | 0.1029 | 0.0031 |
| 18 | 30% | 1.0000 | 0.9171 | 1.2012 | 31.82% | 33.18% | 31.80% | 0.0647 | 0.0614 | 0.0610 | 5.28% | 5.91% | 6.71% | sim | 0.0959 | 0.0029 |
| 19 | 30% | 1.0250 | 0.9285 | 1.2012 | 31.71% | 33.18% | 31.72% | 0.0515 | 0.0478 | 0.0475 | 7.53% | 8.04% | 8.23% | sim | 0.0887 | 0.0027 |
| 20 | 30% | 1.0500 | 0.9397 | 1.2012 | 31.62% | 33.18% | 31.65% | 0.0395 | 0.0359 | 0.0359 | 9.61% | 9.68% | 10.28% | sim | 0.0783 | 0.0024 |
| 21 | 30% | 0.9500 | 0.9140 | 1.1814 | 32.65% | 32.30% | 31.83% | 0.0932 | 0.0884 | 0.0883 | 5.21% | 5.30% | 1.09% | sim | 0.1101 | 0.0033 |
| 22 | 30% | 0.9750 | 0.9259 | 1.1814 | 31.93% | 32.30% | 31.73% | 0.0764 | 0.0709 | 0.0707 | 7.54% | 7.75% | 1.92% | sim | 0.1034 | 0.0031 |
| 23 | 30% | 1.0000 | 0.9377 | 1.1814 | 31.82% | 32.30% | 31.69% | 0.0603 | 0.0551 | 0.0549 | 9.10% | 9.46% | 2.62% | sim | 0.0934 | 0.0028 |
| 24 | 30% | 1.0250 | 0.9494 | 1.1814 | 31.71% | 32.30% | 31.63% | 0.0459 | 0.0410 | 0.0410 | 11.14% | 11.33% | 3.74% | sim | 0.0830 | 0.0025 |
| 25 | 30% | 1.0500 | 0.9609 | 1.1814 | 31.62% | 32.30% | 31.62% | 0.0339 | 0.0288 | 0.0289 | 16.34% | 15.91% | 5.17% | não | 0.0729 | 0.0022 |
| 26 | 30% | 0.9500 | 0.9355 | 1.1618 | 32.65% | 31.77% | 31.69% | 0.0861 | 0.0779 | 0.0780 | 9.93% | 9.90% | -1.32% | não | 0.1094 | 0.0033 |
| 27 | 30% | 0.9750 | 0.9477 | 1.1618 | 31.93% | 31.77% | 31.63% | 0.0669 | 0.0597 | 0.0596 | 11.46% | 11.52% | -0.73% | sim | 0.0989 | 0.0030 |
| 28 | 30% | 1.0000 | 0.9598 | 1.1618 | 31.82% | 31.77% | 31.62% | 0.0513 | 0.0432 | 0.0430 | 17.27% | 17.57% | -0.36% | sim | 0.0882 | 0.0027 |
| 29 | 30% | 1.0250 | 0.9717 | 1.1618 | 31.71% | 31.77% | 31.69% | 0.0366 | 0.0283 | 0.0283 | 25.63% | 25.86% | 0.38% | sim | 0.0779 | 0.0023 |
| 30 | 30% | 1.0500 | 0.9835 | 1.1618 | 31.62% | 31.77% | 31.75% | 0.0239 | 0.0153 | 0.0154 | 44.87% | 44.27% | 1.31% | não | 0.0665 | 0.0020 |
| 31 | 20% | 0.9500 | 0.8939 | 1.2012 | 20.87% | 21.50% | 21.02% | 0.0875 | 0.0873 | 0.0868 | 0.23% | 0.82% | 2.48% | sim | 0.0739 | 0.0022 |
| 32 | 20% | 0.9750 | 0.9056 | 1.2012 | 20.79% | 21.50% | 20.93% | 0.0680 | 0.0681 | 0.0674 | -0.09% | 0.85% | 3.15% | sim | 0.0686 | 0.0021 |
| 33 | 20% | 1.0000 | 0.9171 | 1.2012 | 20.78% | 21.50% | 20.84% | 0.0514 | 0.0512 | 0.0505 | 0.28% | 1.81% | 3.57% | sim | 0.0621 | 0.0019 |
| 34 | 20% | 1.0250 | 0.9285 | 1.2012 | 20.73% | 21.50% | 20.80% | 0.0372 | 0.0370 | 0.0362 | 0.62% | 2.73% | 4.38% | sim | 0.0548 | 0.0017 |
| 35 | 20% | 1.0500 | 0.9397 | 1.2012 | 20.69% | 21.50% | 20.72% | 0.0258 | 0.0255 | 0.0248 | 1.21% | 3.87% | 5.37% | sim | 0.0470 | 0.0014 |
| 36 | 20% | 0.9500 | 0.9140 | 1.1814 | 20.87% | 21.16% | 20.83% | 0.0853 | 0.0855 | 0.0853 | 0.95% | 1.19% | 1.21% | sim | 0.0744 | 0.0022 |
| 37 | 20% | 0.9750 | 0.9259 | 1.1814 | 20.79% | 21.16% | 20.81% | 0.0668 | 0.0660 | 0.0657 | 1.03% | 1.53% | 1.79% | sim | 0.0691 | 0.0021 |
| 38 | 20% | 1.0000 | 0.9377 | 1.1814 | 20.78% | 21.16% | 20.74% | 0.0500 | 0.0489 | 0.0485 | 2.11% | 2.98% | 2.07% | sim | 0.0623 | 0.0019 |
| 39 | 20% | 1.0250 | 0.9494 | 1.1814 | 20.73% | 21.16% | 20.70% | 0.0361 | 0.0344 | 0.0340 | 4.69% | 5.83% | 2.74% | sim | 0.0547 | 0.0016 |
| 40 | 20% | 1.0500 | 0.9609 | 1.1814 | 20.69% | 21.16% | 20.65% | 0.0240 | 0.0226 | 0.0223 | 6.18% | 7.37% | 3.57% | sim | 0.0457 | 0.0014 |
| 41 | 20% | 0.9500 | 0.9355 | 1.1618 | 20.87% | 20.82% | 20.79% | 0.0827 | 0.0803 | 0.0804 | 2.93% | 2.78% | -0.27% | não | 0.0761 | 0.0023 |
| 42 | 20% | 0.9750 | 0.9477 | 1.1618 | 20.79% | 20.82% | 20.71% | 0.0633 | 0.0601 | 0.0601 | 5.30% | 5.23% | 0.17% | não | 0.0700 | 0.0021 |
| 43 | 20% | 1.0000 | 0.9598 | 1.1618 | 20.78% | 20.82% | 20.68% | 0.0460 | 0.0421 | 0.0420 | 8.74% | 8.93% | 0.23% | sim | 0.0618 | 0.0019 |
| 44 | 20% | 1.0250 | 0.9717 | 1.1618 | 20.73% | 20.82% | 20.70% | 0.0301 | 0.0267 | 0.0266 | 12.20% | 12.52% | 0.66% | sim | 0.0520 | 0.0016 |
| 45 | 20% | 1.0500 | 0.9835 | 1.1618 | 20.69% | 20.82% | 20.77% | 0.0179 | 0.0138 | 0.0138 | 25.74% | 25.64% | 1.16% | não | 0.0420 | 0.0013 |

Fig. 4.22. Tabela de Resultados

A tabela 4.22 apresenta os resultados obtido para o preço da CDO através da simulação de Monte Carlo na coluna **CDOjusto**. Este valor foi adotado como referência em relação ao qual foram calculados os erros dos cálculos dos modelos sendo avaliados.

A coluna **CDOhipótese** traz os resultados obtidos pela fórmula que incorpora o sorriso de volatilidades, conforme a equação 3.7.

A coluna **CDOb&s** traz os resultados obtidos utilizando-se a equação 2.16, com a volatilidade igual a volatilidade de longo prazo

Na coluna onde se lê **Implicita K** estão apresentados os valores da volatilidade Implícita para uma opção de preço de exercício K para o cenário em questão.

Na coluna onde se lê **Implícita b** estão apresentados os valores da volatilidade implícita para uma opção com preço de exercício $KS^2/H^2$ Estes valores são utilizados na Equação 3.7 para incorporar o sorriso de volatilidades.

## 4.3 Análise dos Resultados

O gráfico 4.23 apresenta uma dispersão entre os valores de referência e os valores obtidos nos modelos testados. Se os modelos resultassem todos em respostas iguais aos valores de referência, seria observada apenas uma linha correspondente a reta y=x .Pode-se perceber que à primeira vista, ambos os modelos acompanham bem o valor justo de referência, no sentido em que não há grandes desvios para os casos estudados.

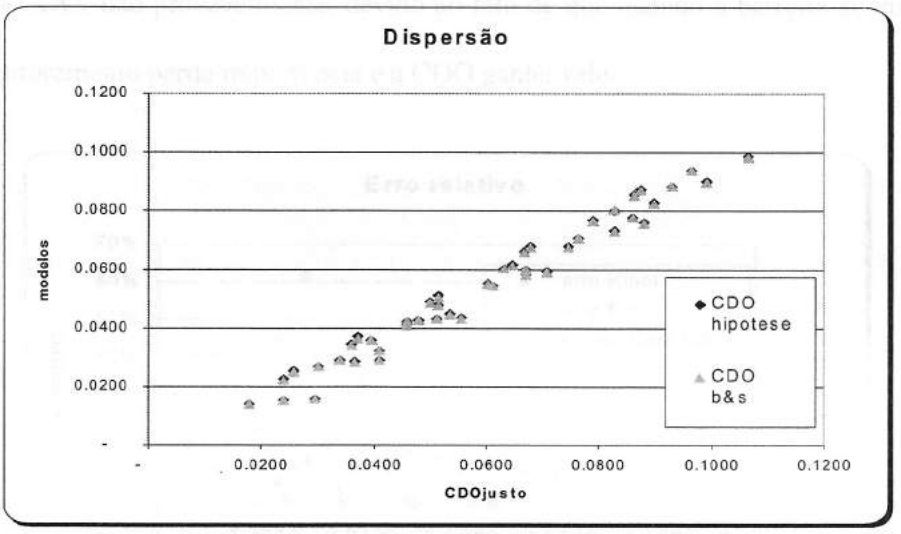


Fig. 4.23. Dispersão dos resultados em torno do valor justo de referência para a CDO.

O gráfico 4.24 apresenta os erros relativos calculados como sendo o logarítmo da relação entre o preço de referência e o preço do modelo ln(CDOjusto/Preço do modelo). Neste gráfico também percebe-se que para os casos estudados, apesar da pequena melhora, o modelo da hipótese que incorpora o sorriso de volatilidades não leva a ganhos significativos em relação a utilização de volatilidade constante na Equação 2.13.

Percebe-se que em ambas as estratégias há um viés de Subestimar o valor da CDO, o que pode ser percebido pelos valores dos erros todos no semiplano positivo do gráfico. Este viés, pode estar sendo causado pelo fato de estarmos comparando fórmulas de monitoramento contínuo da barreira , com um valor da simulação de Monte Carlo, que é por construção discreto, e em nossas simulações foram adotados intervalos de tempo de 1 dia. Além disso, pode-se perceber que ambos os modelos erram menos a medida que cresce o

valor da CDO. Isto provavelmente, devido ao fato de que quando a barreira se distância, seu monitoramento perde importância e a CDO ganha valor.

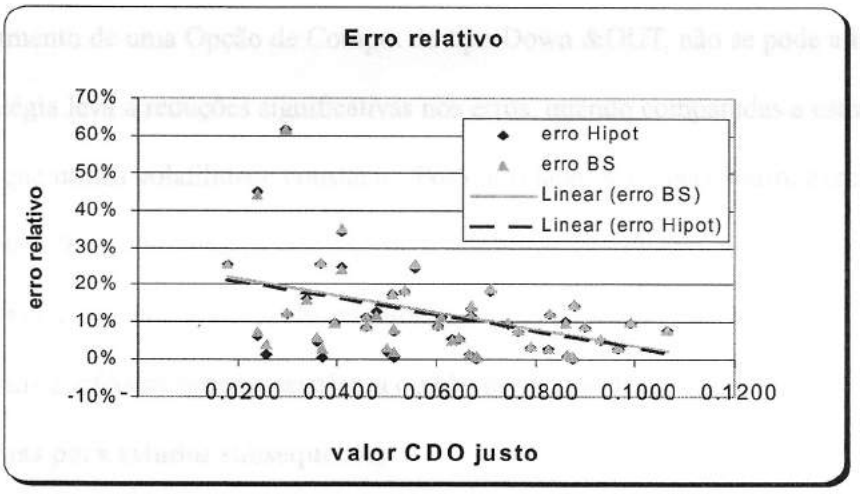


Fig. 4.24. Erro relativo em função do valor justo de referência para a CDO

# Capítulo 5
# Conclusão

Apesar do melhor desempenho da estratégia que incorpora o Sorriso de volatilidades no apreçamento de uma Opção de Compra do tipo Down &OUT, não se pode afirmar que esta estratégia leva a reduções significativas nos erros, quando comparadas a estratégia alternativa que utiliza volatilidade constante. Por outro lado, seria necessário, executar simulações mais finas no tempo (e portanto mais consumidoras de recursos computacionais) para aproximar melhor o efeito do monitoramento contínuo da barreira e permitir conclusões mais confiáveis sobre a existência ou não deste viés de apreçamento..

**Temas para estudos subsequentes.**

Algumas linhas de estudos surgem naturalmente como continuação para este trabalho. A primeira e mais natural delas pode ser a extensão para outros tipos de opção com barreira, além da Call Down&OUT sem rebate, que obviamente é um caso bastante simples, bem como para Opções sobre diferenciais (Spread Options), ou opções Asiáticas.Talvez os casos de maior relevância sejam justamente aqueles referentes aos rebates, onde a descontinuidade leva a dificuldades ainda maiores para o hedge dinãmico destas posições. A utilização de técnicas de refinamento da simulção de Monte Carlo, bem como a utilização de técnicas de otimização e redução de erros são outra linha possível de estudos.

Outra linha de trabalho pode ir na direção de encontrar uma alteração na escala de medida de probabilidade, que permita corrigir a subestimação do valor do contrato. Conjunta-

mente, a utilização de outras funções densidade de probabilidade não gaussianas, poderiam ser utilizadas para se atingir este objetivo. A comparação com uma metodologia incorporando os fatores de volatilidade estocástica também poderia ser interessante.

# Referências Bibliográficas


BALL,C., ROMA,A. - Stochastic volatility option pricing.-J.Financial and Quantitative Analisys 29(4):589-607.

BAXTER, M.; RENNIE, A. - Financial calculus, an introduction to derivative pricing, Cambridge University Press, 1996.

BERGER, E. - Barrier Options, in The Handbook of Exotic Options, 1996

BLACK, F. and M. SCHOLES. - "The pricing of options and corporate liabilities", in journal of Political Economy, Vol. 81 (May-june 1973).

BLACK, F. - "The pricing of commodity contracts", in journal of Financial Economics, Vol. 3 (january-March 1976).

BORLAND,L. - A Theory of Non_Gaussian Option Pricing - Quantitative Finance Vol 2 (2002) 415-431.

BOUCHAUD, J.P.; POTTERS, M. - Theory of Financial Risk, From Data Analysis to Risk Management, Draft 1999.

CHORAFAS, D.N. - Managing derivatives risk, Irwin, U.S.A., 1995.

CLEWLOW,L; STRICKLAND,C. - Implementing Derivatives Models, Wiley 1998.

COX, J.C., RUBINSTEIN, M. - Options markets.

DERMAN, E.; KANI, I. - The Ins and outs of Barrier Options - Quantitative Strategies Reseach Notes, Goldman Sachs 1993.

FABOZZI, F. e MODIGLIANI, F. - Capital markets institutions and instruments, Englewood, New Jersey, U.S.A., 1992.

FOUQUE,J ; PAPANICOLAOU, G. ; SIRCAR,K. - Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility, Cambridge 2000.

GRUBER, M.J., e ELTON, E.J. - Modern portfolio theory and investment analysis, Wiley & sons, U.S.A., 1995.

HALL,P. - The Bootstrap and Edgeworth Expansion - Springer-Verlag 1992

HAUG,E. - Options Pricing Formulas, McGraw Hill 1998.

HESTON,S. -A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.-Review of Financial Studies6(2):327-43.

HULL, J.C. - Options, futures and other derivative securities, Prentice Hall, New York, U.S.A., 1993.

HULL, J.C. - Options, futures, and other derivative securities, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1989.

HULL,J. , WHITE,A - Hull-White on Derivatives, RISK, 1996.

JOHNSON,N.L. - Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation-Biometrika,36, 1949, pp.149-76.

JONES, R. A., and R. L. JACOBS. - "History dependent financial claims: Monte Carlo valuation', Working paper, Simon Fraser University and Wells Fargo Bank.

JORION, P. - Value at risk: the new benchmark for controlling derivatives risk, Irwin, Chicago, U.S.A., 1997.

KARATZAS, I. ; SHREVE, S. - Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1991.

KOHN, M., - Money, Banking and financial markets, Dryden Press, U.S.A., 1993.

LEVY,P. - Theorie de láddition de variables aléatoires, Gauthier Villars, 1937-1954.

MERTON, R. - Continuous Time Finance, Blackwell, 1990.

METROPOLIS, N., A. W. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. H. Teller and E. Teller, "Equation of state calculations by fast computing machines", J. Chem. Phys. 21, 1087 (1953).

MIKOSCH, T. - Elementary Stochastic calculus, with finance in view , World Scientific, 1998.

MONTEIRO,P. - Introdução à integração estocástica, EPGE-FGV-RJ - 1999..

MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY, RiskMetrics " - Technical Document, 4th edition, New York, U.S.A., 1996.

MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY, VaR methodolgy for portfolios that include options, RiskMetries monitor, New York, U.S.A., January 1996.

MORGAN GUARANTY TRUST COMPANY, REUTERS Ltd, Testing RiskMetrics ' volatility forecasts on emerging markets data, RiskMetriCS TI monitor, New York, U.S.A., December, 1996.

OKSENDAL, B. - Sthocastic Differential Equations An Introduction with applications.1998.

POSNER, S. , MILEVSKY, M. - Valuing Exotic Options by Approximating the SPD with Higher Moments, The Journal of Financial Engineering Vol 7 - N. 2 - pages 109-125

SAUNDERS, A. - Managing market risk in banks, apostila de curso, 1995.

SCHIRMER,P.P. -Notas de Aula -Mestrado Profissionalizante em Modelagem Matemática Aplicada a Finanças - 2002.

TSALLISi,C. , BUCKMAN,D.J. - Physics Review - E54 R.2197, 1996.

WILMOTT,P. ; HOWISON, S. ; DEWYNNE, J. - The Mathematics of Financial Derivatives, A Student Introduction, Cambridge University Press, 1995.

# Apendice A
# Densidade de probabilidade do processo $Z_t$

**Cálculo da Densidade de probabilidade do processo $Z_t$**

Utilizando-se as definições de variáveis apresentadas no corpo principal do texto, e assumindo que o processo do retorno pode ser descrito por uma tendência temporal, adicionada de choques estocásticos, conforme a expressão a seguir:

$$Z_t = \mu(t - t_0) + \sigma W_t$$

, com $W_{t_o} = 0$ e $W_t = \epsilon\sqrt[2]{t - t_0}$ , onde $\epsilon$ representa um sorteio amostrado de uma distribuição normal padronizada $\epsilon \sim N(0,1)$ ou seja uma distribuição gaussiana com média zero e variância unitária.

Podemos calcular a probabilidade de que a variável aleatória $Z_t$, que descreve o processo aletório do retorno, seja menor que um valor fixado z, durante um período de observação T, como sendo

$$F(z,T) \equiv F(z) = \text{Prob}[Z_T \leq z]$$

$$= \text{Prob}[\mu(T - t_0) + \sigma W_t \leq z]$$

$$= \text{Prob}[\mu(T - t_0) + \sigma\epsilon\sqrt[2]{T - t_0} \leq z]$$

$= \text{Prob}[\epsilon \leq \frac{z-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]$ e como $\epsilon$ tem distribuição normal,

$$F(z,T) = N[\frac{z-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]$$

logo, podemos calcular a densidade de probabilidade $f(z) = F'(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z}$

$$f(z) = F'(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}} n(\frac{z-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})$$

e chamando $t = T - t_0$

podemos escrever

$$f(z,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{t}} n(\frac{z-\mu(t)}{\sigma\sqrt[2]{t}}) \tag{A.1}$$

que é a função densidade de probabilidade que, quando acumulada, representa o valor da probabilidade de que o processo assuma valores menores que um determinado valor z.

# Apendice B
# Densidade de probabilidade dos processos que cruzam a barreira e retornam.

**Cálculo da Densidade de probabilidade dos processos que cruzam a barreira e retornam.**

Ainda utilizando as definições de variáveis do corpo principal do texto, seja P a medida original de probabilidade e seja Q a medida de probabilidade ajustada ao risco, dada pelo teorema de Girsanov.

Sob o referencial de medida Q, o processo Z não apresenta tendência (drift).

Definindo para qualquer grandeza y o operador $\hat{y} \equiv y/\sigma$ que basicamente faz uma normalização ajustando a grandeza a sua variabilidade, podemos escrever inicialmente o seguinte caso:

**caso1: barreira atingida por baixo (S<H) ou (b>0)**

Neste caso, o processo evolui a partir de valores menores que o valor da barreira e em algum momento antes do final da obervação (t<T), $Z_t$ assume valores maiores que um valor determinado z, que independe do tempo e constitui a barreira que se quer estabelecer para o processo $Z_t$.

Desta forma, se quisermos calcular a probabilidade de que o processo Z atinja a barreira (ultrapasse-a) e retorne antes do término do período de observação, podemos definir esta probabilidade como sendo $G(z,T)$, uma vez que trata-se de uma função que depende

essencialmente do valor da barreira, e do período de obervação, já que por definição estamos tratando de processos que partem do valor zero no instante inicial.

$G(z,T) \equiv G(z)$=Prob$^P[\ Z_T \leq z$ e $\sup_{t_0 \leq t \leq T} Z_t > b]$

É a probabilidade na medida original de que Z seja menor que um valor determinado z ao final do período, mas durante este período Z assumiu pelo menos uma vez valores maiores do que z.

Lembrando que $Z_t = \mu(t - t_0) + \sigma W_t$

com $W_{t_o} = 0$ e $W_t = \epsilon\sqrt[2]{t - t_0}$

$G(z,T) \equiv \text{Prob}^P[\ \mu(t - t_0) + \sigma W_t \leq z$ e $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mu(t - t_0) + \sigma W_t > b]$

$G(z,T) \equiv \text{Prob}^P[\ \frac{\mu}{\sigma}(t - t_0) + W_t \leq \frac{z}{\sigma}$ e $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \frac{\mu}{\sigma}(t - t_0) + W_t > \frac{b}{\sigma}]$

Definindo a função indicadora $1_{[condicão]}$, como sendo um função que retorna o valor 1 para os casos em que a condição é verdadeira e zero em todos os demais casos, podemos escrever a fórmula acima, em termos desta função indicadora como sendo:

$G(z,T) \equiv E^P[\ 1_{[\hat{z}_T \leq \hat{z}]} \cdot 1_{[\tau \leq T]}]$

que é o valor esperado, na medida original de probabilidade, dos casos em que o processo assumiu valores maiores do que z e terminou abaixo de z durante o período entre $t_0$ e $T$.

Podemos ainda, lembrando que $\mu \equiv r - q - \frac{\sigma^2}{2}$ e utilizando o teorema de Girsanov (Monteiro,(1999), pág 40 ou Mikosh,(1998) pág178), calcular G(z,T) como sendo:

$G(z,T) \equiv E^Q[\ 1_{[\hat{z}_T \leq \hat{z}]} \cdot 1_{[\tau \leq T]} \cdot \exp(\hat{\mu}\hat{Z}_T - \frac{1}{2}\hat{\mu}^2(T - t_0))]$

onde o fator $\exp(\hat{\mu}\hat{Z}_T - \frac{1}{2}\hat{\mu}(T - t_0))$ , também conhecido como derivada de Radon-Nykodin, retira a tendência do processo, tornando-o simétrico em relação ao zero.

Aplicando o Princípio da reflexão de Désiré André (Lévy (1948), p.293), apresentado no apêndice C, à equação anterior obtemos:

$$G(z,T) \equiv E^Q[\, 1_{[\hat{z}_T \leq \hat{z}]} \cdot 1_{[\tau \leq T]} \cdot \exp(\hat{\mu}\hat{Z}_T - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t_0))]$$

lembrando que o simétrico de $\hat{Z}_T$ em relação a $\hat{b}$ é $2\hat{b} - \hat{Z}_T$

$$G(z,T) \equiv E^Q[\, 1_{[\hat{z}_T \geq 2\hat{b}-\hat{z}]} \exp(\hat{\mu}(2\hat{b} - \hat{Z}_T) - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t_0))]$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b})E^Q[\, 1_{[\hat{z}_T \geq 2\hat{b}-\hat{z}]} \exp((-\hat{\mu}\hat{Z}_T) - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t_0))]$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b})E^Q[\, 1_{[\hat{z}_T \leq \hat{z}-2\hat{b}]} \exp((\hat{\mu}\hat{Z}_T) - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t_0))]$$

agora lembrando da definição do operador $\phi(\alpha,\beta,\gamma) = ((\alpha+\beta\gamma)/\sqrt[2]{\gamma})$

e que $n(x) = \frac{\exp(-(\frac{x^2}{2}))}{\sqrt[2]{2\pi}}$ é a f.d.p da distribuição normal padronizada, podemos escrever

$$\phi(x,-\mu,T-t_0) = ((x-\mu(T-t_0))/\sqrt[2]{(T-t_0)})$$

$$\phi^2(x,-\mu,T-t_0) = (2(\tfrac{x^2}{2(T-t_0)} - \mu x + \tfrac{1}{2}\mu^2(T-t_0))$$

$$n(\phi(x,-\mu,T-t_0)) = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2(T-t_0)} + \mu x - \frac{1}{2}\mu^2(T-t_0))}{\sqrt[2]{2\pi}}$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) \int_{-\infty}^{\hat{z}-2\hat{b}} n(\phi(x,-\mu,T-t_0))\phi_x(x,-\mu,T-t_0)dx$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) \int_{-\infty}^{\hat{z}-2\hat{b}} n(\phi(x,-\mu,T-t_0))\phi_x(x,-\mu,T-t_0)dx$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) \int_{-\infty}^{\phi(\hat{z}-2\hat{b},-\mu,T-t_0)} n(u)du$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b})N(\phi(\hat{z}-2\hat{b},-\mu,T-t_0))$$

$$G(z,T) \equiv \exp(\tfrac{2\mu b}{\sigma^2})N(\tfrac{z-2b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})$$

derivando em relação a z obtemos

$$G'(z) = g(z) = \frac{\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}} n(\tfrac{z-2b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})$$

que a função densidade de probabilidade dos processos que cruzam a barreira de baixo para cima.

**caso2: barreira atingida por cima (S>H) ou (b<0)**

Este caso é semelhante ao anterior, diferindo apenas que neste caso, o processo evolui a partir de valores maiores que o valor da barreira e em algum momento antes do final da obervação $(t < T)$, $Z_t$ assume valores menores que um valor determinado $z$, que independe do tempo e constitui a barreira que se quer estabelecer para o processo $Z_t$.

Desta forma, se quisermos calcular a probabilidade de que o processo $Z$ atinja a barreira (ultrapasse-a para baixo) e retorne para cima antes do término do período de observação, podemos, da mesma forma como no caso anterior, definir esta probabilidade como sendo $G(z,T)$ e da mesma forma estamos tratando de processos que partem do valor zero no instante inicial.

$G(z,T) \equiv G(z)$=Prob$^P[\ Z_T \geq z$ e $\inf_{t_0 \leq t \leq T} Z_t < b]$

É a probabilidade na medida original de que $Z$ seja maior que um valor determinado $z$ ao final do período, mas durante este período, $Z$ assumiu pelo menos uma vez valores menores do que $z$.

Sendo $Z_t = \mu(t - t_0) + \sigma W_t$

, com $W_{t_o} = 0$ e $W_t = \epsilon \sqrt[2]{t - t_0}$

$G(z,T) \equiv \text{Prob}^P[\ \mu(t - t_0) + \sigma W_t \geq z$ e $\inf_{t_0 \leq t \leq T} \mu(t - t_0) + \sigma W_t < b]$

$G(z,T) \equiv \text{Prob}^P[\ \frac{\mu}{\sigma}(t - t_0) + W_t \geq \frac{z}{\sigma}$ e $\inf_{t_0 \leq t \leq T} \frac{\mu}{\sigma}(t - t_0) + W_t < \frac{b}{\sigma}]$

$G(z,T) \equiv E^P[\ 1_{[\hat{z}_T \geq \hat{z}]} \cdot 1_{[\tau \leq T]}]$

que é o valor esperado, na medida original de probabilidade, dos casos em que o processo assumiu valores menores do que z e terminou acima de z durante o período entre $t_0$ e $T$.

Aplicando o terorema de Girsanov

$$G(z,T) \equiv E^Q[\, 1_{[\hat{z}_T \geq \hat{z}]} \cdot 1_{[\tau \leq T]} \cdot \exp(\hat{\mu}\hat{Z}_T - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t_0))]$$

Aplicando o princípio da reflexão e lembrando que o simétrico de $\hat{Z}_T$ em relação a $\hat{b}$ é $2\hat{b} - \hat{Z}_T$ vale também para valores de $b$ negativos,

$$G(z,T) \equiv E^Q[\, 1_{[\hat{z}_T \leq 2\hat{b}-\hat{z}]} \exp(\hat{\mu}(2\hat{b} - \hat{Z}_T) - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t_0))]$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) E^Q[\, 1_{[\hat{z}_T \leq 2\hat{b}-\hat{z}]} \exp((-\hat{\mu}\hat{Z}_T) - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}^2(T-t_0))]$$

$$\phi(x,\mu,T-t_0) = ((x+\mu(T-t_0))/\sqrt[2]{(T-t_0)})$$

$$\phi^2(x,+\mu,T-t_0) = (2(\tfrac{x^2}{2(T-t_0)} + \mu x + \tfrac{1}{2}\mu^2(T-t_0))$$

$$n(\phi(x,+\mu,T-t_0)) = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2(T-t_0)} - \mu x - \frac{1}{2}\mu^2(T-t_0))}{\sqrt[2]{2\pi}}$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) \int_{2\hat{b}-\hat{z}}^{\infty} n(\phi(x,\mu,T-t_0))\phi_x(x,\mu,T-t_0)dx$$

que por simetria da gaussiana, $\int_a^b n(x)dx = -\int_b^a n(x)dx = \int_{-b}^{-a} n(x)dx = -\int_{-a}^{-b} n(x)dx$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) \int_{-\infty}^{\hat{z}-2\hat{b}} n(\phi(x,\mu,T-t_0))\phi_x(x,\mu,T-t_0)dx$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) \int_{-\infty}^{\phi(\hat{z}-2\hat{b},\mu,T-t_0)} n(u)du$$

$$G(z,T) \equiv \exp(2\hat{\mu}\hat{b}) N(\phi(\hat{z}-2\hat{b},\mu,T-t_0))$$

$$G(z,T) \equiv \exp(\tfrac{2\mu b}{\sigma^2}) N(\tfrac{z-2b+\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})$$

derivando em relação a z obtemos

$$G'(z) = g(z) = \frac{\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}} n(\tfrac{z-2b+\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})$$

que é a função densidade de probabilidade dos processos que cruzam a barreira de cima para baixo e voltam a subir.

# Apendice C
# Princípio da reflexão de Désiré André

**Princípio da reflexão de Désiré André (Lévy (1948), p.293):**

Apresentaremos aqui, apenas um argumento heurístico, sendo que uma apresentação mais rigorosa pode ser encontrada em Karatzas, Shreve (1991), p.79 e seguintes)

O princípio da reflexão para um movimento Browniano pode ser apresentado como segue:

Seja $\{B_t, F_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ um movimento Browniano padrão unidimensional no espaço dado por $(\Omega, F, P^0)$.

Então para b>0, temos

$P^0[T_b < t] = P^0[T_b < t, B_t > b] + P^0[T_b < t, B_t < b]$

ou seja a probabilidade do processo $B_t$ ter atingido b antes do instante t é igual a soma das probabilidades dos casos em que o processo termina acima e abaixo do valor b, que compõe a totalidade dos casos possíveis.

Mas a probabilidade do processo ter atingido b antes de t e ter teminado acima de b é igual a probabilidade do processo ter terminado acima de b, uma vez que não há como terminar o processo acima de b sem ter cruzado o valor b em algum momento entre 0 e t.

Logo, $P^0[T_b < t, B_t > b] = P^0[B_t > b]$

Verificando o outro caso com relação a $B_t < b$, se $T_b < t$ e $B_t < b$, em algum momento durante o processo e antes do do instante $t$, o movimento Browniano atingiu o

nível $b$, pelo menos uma vez e no intervalo de tempo restante percorreu o caminho de $b$ até $c$ (nível abaixo de $b$, $c < b$).

Lembrando que o movimento Browniano é o resultado de sucessivos choques aleatórios, que são aplicados ao estado anterior, podemos aqui por simplicidade, invocar um argumento de simetria em relação a $b$ para um movimento Browniano com estado inicial em $b$, para afirmar que a probabilidade do percurso de $b$ até $c$ é a mesma do percurso que sai de $b$ e atinge $2b-c$, que é o ponto simétrico em relação a $b$, ou seja, se colocassemos um espelho em $b$, os mesmos caminhos que saem de $b$ e chegam a $c$, possuem uma respectiva imagem especular que leva de $b$ até $2b-c$. Isto sugere, mas não prova, a igualdade entre as duas probabilidades, o que pode ser comprovado em Lévy (1948), p.293, uma vez que sabemos que a probabilidade de um único caminho é essencialmente nula, e o tipo de simetria a ser comprovada não é óbvia. Poder-se-ia levantar a questão do tipo de espelhamento, como por exemplo o caso de um espelho com distorção que ao invés de levar $x$ em $-x$ , leva $x$ em $-f(x)$. Não entraremos em maiores detalhes sobre esta questão.

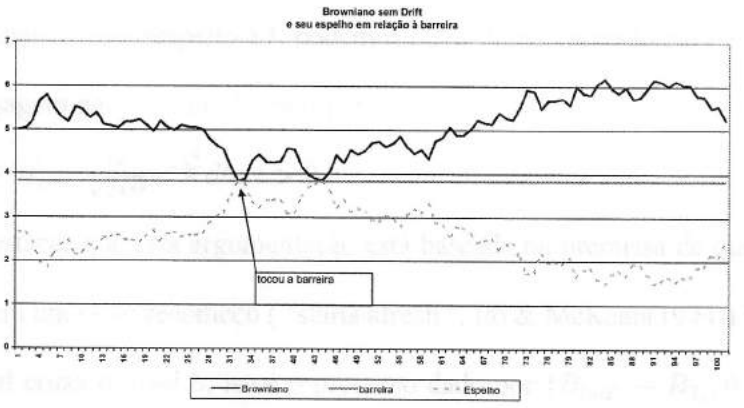


Fig. 5.25. Processo original e processo espelho

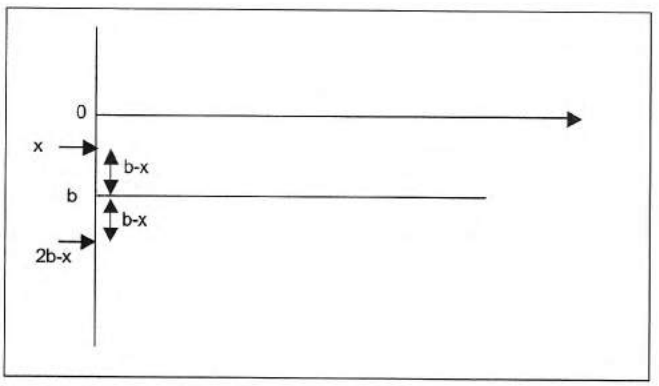


Fig. 5.26. Ilustração do princípio da reflexão

Se aceitarmos o argumento acima podemos seguir adiante, já que ele nos leva á seguinte equação:

$$P^0[T_b < t, B_t < b] = P^0[T_b < t, B_t > b] = P^0[B_t > b]$$

que implica em

$$P^0[T_b < t] = 2P^0[B_t > b] = \sqrt[2]{\frac{2}{\pi}} \int_{bt^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

que é a integração da gaussiana do movimento Browniano nos caso de interesse dados pelos limites de integração em que $B_t > b$.

Diferenciando com respeito a $t$, podemos obter uma expressão para a densidade do tempo de passagem pela barreira $b$, dado por

$$P^0[T_b \in dt] = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{2t}} dt \; ; t > 0$$

Cabe destacar que esta argumentação está baseada na premissa de que movimento Browniano, tem um novo recomeço ( "starts afresh ", Itô & McKean(1974)) no instante de parada no qual cruza o nível b, istoé o processo dado por $\{B_{t+T_b} - B_{T_b}; 0 \leq t < \infty)$ é também um movimento Browniano independentemente da $\sigma$-algebra utilizada $F_{T_b}$.

Das propriedades do movimento Browniano pode-se dizer que, se $T_b$ é substituido por uma constante arbitrária, o processo continua sendo um Browniano, porém, se substituirmos $T_b$ por uma variavel aleatória, isto pode não ser verificado. Os casos em que a afirmativa pode ser considerada verdadeira são aqueles em que $T_b$ é consequência de uma propriedade de Markov no sentido forte, para o o movimento Browniano.

Não discutiremos aqui sobre processos e familias de Markov no sentido forte, o que pode ser encontrado em Karatzas Shreve 1991 Brownian Motion and Stochastic Calculus, mas a maioria dos casos de interesse neste texto atendem a esta propriedade.

# Apendice D
# Função densidade para o tempo de passagem pela barreira.

**Função densidade $h(\tau)$ para o tempo $\tau$ da primeira passagem de $Z_t$ pela barreira.**

Tomemos inicialmento o caso da barreira sendo atingida por baixo ou seja $H > S$ ou $b > 0$.Temos interesse nos casos em que o maior valor de $\tau$ fique abaixo de $T$, então:

$Prob[\tau < T] = E[1_{[\tau<T]}] = \int_0^T h(s)ds$

dado que a função indicadora assume o valor 1 nos casos de interesse, de maneira que o cálculo da média da função indicadora captura apenas os casos de interesse da probabilidade em questão e a probabilidade neste caso pode ser expressa como uma soma, na verdade uma integral da densidade $h(T)$

$h(T) = \frac{\partial}{\partial t} Prob[\tau < T]$ pela definição de densidade

$h(T) = \frac{\partial}{\partial t} Prob[\sup_{t_0<u\leq T} Z_u > b]$ dado que queremos o maior valor de $u$ no intervalo de $t_0$ a $T$ tal que o processo $Z_t$ atingiu a barreira, ou seja, assumiu valor maior (ou maior e igual, dado que a probabilidade do caso Z extamaente igual a b é nula) que $b$.

Lembrando da definição de g(z,t) correspondente aos casos que cruzam a barreira, os casos de interesse, ou seja os processos que cruzaram a barreira, podem ser separados em duas situações: 1) o processo terminou acima da barreira, ou 2) o processo terminou abaixo da barreira, ou seja, atingiu a barreira e retornou.

$h(T) = \frac{\partial}{\partial t}[Prob[Z_T > b] + \int_{-\infty}^{b} g(u,T)du]$

Lembrando da definição de $F(z,t)$

$$h(T) = \frac{\partial}{\partial t}[F(+\infty,T) - F(b,T) + G(b,T) - G(-\infty,T)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[1 - F(b,T) + G(b,T) - G(-\infty,T)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[1] - \frac{\partial}{\partial t}[F(b,T)] + \frac{\partial}{\partial t}[G(b,T)] - \frac{\partial}{\partial t}[G(-\infty,T)]$$

$$= 0 - \frac{\partial}{\partial t}[F(b,T)] + \frac{\partial}{\partial t}[G(b,T)] - 0$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}[N[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]] + \frac{\partial}{\partial t}[\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})N(\frac{b-2b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})]$$

$$= -n[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}] + \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})n(\frac{b-2b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b-2b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]$$

$$h(T) = -n[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}] + \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})n(\frac{-b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]$$

lembrando que $n(\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} - \beta\sqrt{\gamma}) = \exp(2\alpha\beta)n(\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \beta\sqrt{\gamma})$

e que n(x)=n(-x) (simetria da gaussiana) e reescrevendo, temos:

$$h(T) = -n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] +$$

$$\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})n(\frac{-b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]$$

$$= -n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] +$$

$$\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})n(\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} + (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]$$

$$= -n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] +$$

$$n(\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]$$

calculando

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] = -\frac{1}{2\sigma}\frac{\mu}{\sqrt{T-t_0}} - \frac{1}{2}\frac{b}{\sigma(T-t_0)^{(3/2)}}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] = -\frac{1}{2\sigma}\frac{\mu}{\sqrt{T-t_0}} + \frac{1}{2}\frac{b}{\sigma(T-t_0)^{(3/2)}}$$

Obtemos

$$h(T) = \frac{b}{\sigma(T-t_0)^{(3/2)}}n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]$$

**Tomando agora o caso em que a barreira é atingida de cima para baixo temos:**

$Prob[\tau < T] = E[1_{[\tau<T]}] = \int_0^T h(s)ds$

da mesma forma que no caso anterior,

$h(T) = \frac{\partial}{\partial t} Prob[\tau < T]$

$h(T) = \frac{\partial}{\partial t} Prob[\inf_{t_0<u\leq T} Z_u < b]$ dado que queremos o maior valor de $u$ no intervalo de $t_0$ a $T$ tal que o processo $Z_t$ atingiu a barreira, ou seja, assumiu valor menor que $b$.

Temos, da mesma forma, 2 casos de interesse, quais sejam, 1) o processo terminou abaixo da barreira, ou 2) o processo terminou acima da barreira, ou seja, atingiu a barreira e retornou.

$h(T) = \frac{\partial}{\partial t}[Prob[Z_T < b] + \int_b^{+\infty} g(u,T)du]$

$= \frac{\partial}{\partial t}[F(b,T) - F(-\infty,T) + G(+\infty,T) - G(b,T)]$

$= \frac{\partial}{\partial t}[F(b,T) - F(-\infty,T) + G(+\infty,T) - G(b,T)]$

$= \frac{\partial}{\partial t}[F(b,T)] - \frac{\partial}{\partial t}[F(-\infty,T)] + \frac{\partial}{\partial t}[G(+\infty,T)] - \frac{\partial}{\partial t}[G(b,T)]$

$= \frac{\partial}{\partial t}[F(b,T)] - 0 + 0 - \frac{\partial}{\partial t}[G(b,T)]$

$= \frac{\partial}{\partial t}[N[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]] - \frac{\partial}{\partial t}[\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})N(\frac{b-2b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})]$

$= n[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}] - \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})n(\frac{-b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b-\mu(T-t_0)}{\sigma\sqrt[2]{T-t_0}}]$

$= n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]$

$- \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})n(\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]$

lembrando que

$n(\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} - \beta\sqrt{\gamma}) = \exp(2\alpha\beta)n(\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \beta\sqrt{\gamma})$

e que $n(x) = n(-x)$ (pela simetria da gaussiana) e reescrevendo, temos:

$h(T) = n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]-$

$\exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})n(\frac{+b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} + (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]$

$= n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]-$

$n(\frac{+b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)})]\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]$

$= n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}](\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]-$

$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}])$

calculando

$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] = -\frac{1}{2\sigma}\frac{\mu}{\sqrt{T-t_0}} - \frac{1}{2}\frac{b}{\sigma(T-t_0)^{(3/2)}}$

e

$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{-b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] = -\frac{1}{2\sigma}\frac{\mu}{\sqrt{T-t_0}} + \frac{1}{2}\frac{b}{\sigma(T-t_0)^{(3/2)}}$

Obtemos

$h(T) = -\frac{b}{\sigma(T-t_0)^{(3/2)}}n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}]$

ou de maneira genérica

$$h(T) = \frac{|b|}{\sigma\,(T-t_0)^{(3/2)}}n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{T-t_0}} - (\mu/\sigma)\sqrt{(T-t_0)}] \tag{D.1}$$

# Apendice E
# Cálculo do valor presente esperado do rebate

**Cálculo do valor presente esperado do rebate**

Como já foi dito anteriormente o rebate $R$ é um valor que é pago ao comprador da opção no caso de a barreira ser atingida.

Sendo assim, há duas possibilidades, uma para as opções do tipo Knock Out (KO) outra para opções do tipo Knock In (KI)

Valor Presente do Rebate VP(.) para as KO:

Seja $t = T - t_0$

$VP_{KO}(R) = \int_0^t R\exp(-rs)h(s)ds$

$VP_{KO}(R) = \int_0^t R\exp(-rs)(\frac{|b|}{\sigma(s)^{(3/2)}}n[\frac{b/\sigma}{\sqrt{s}} - (\mu/\sigma)\sqrt{s}])ds$

$VP_{KO}(R) = \frac{|b|}{\sigma}R\int_0^t \exp(rs)\frac{1}{s^{(3/2)}}n[\phi(b/\sigma,(\mu/\sigma),s)]ds$

mas

$\exp(-\gamma s)n(\frac{\alpha}{\sqrt{s}} - \beta\sqrt{s}) = \exp(-\alpha\beta + \alpha\sqrt{\beta^2+2\gamma})n(\frac{\alpha}{\sqrt{s}} + \sqrt{\beta^2+2\gamma}\sqrt{s})$

então

$VP_{KO}(R) = \frac{|b|}{\sigma}R\exp(\frac{b\mu}{\sigma}+\frac{b}{\sigma^2}\sqrt{(\mu)^2+2\sigma^2 r})\int_0^t \frac{1}{s^{(3/2)}}n[\phi(b/\sigma,(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma),s)]ds$

mas lembrando que

$\int_0^t \frac{1}{s^{(3/2)}}n(\frac{\alpha}{\sqrt{s}} - \beta\sqrt{s})ds = \frac{1}{|\alpha|}\{N[\frac{-|\alpha|}{\sqrt{t}} - \text{signum}(\alpha)\beta\sqrt{t}]+$

$\exp(-2\alpha\beta)N[\frac{-|\alpha|}{\sqrt{t}} + \text{signum}(\alpha)\beta\sqrt{t}]\}$

então

$VP_{KO}(R) = \frac{|b|}{\sigma}R\exp(\frac{b\mu}{\sigma} + \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{(\mu)^2+2\sigma^2 r})\frac{1}{|b/\sigma|}\{N[\frac{-|b/\sigma|}{\sqrt{t}}-$

$\text{signum}(b/\sigma)(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma)\sqrt{t}] + \exp(-2b/\sigma(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma))$

$N[\frac{-|b/\sigma|}{\sqrt{t}} + \text{signum}(b/\sigma)(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma)\sqrt{t}]\}$

como $\sigma$ é sempre positivo, $\sigma > 0$

$VP_{KO}(R) = \frac{|b|}{\sigma}\frac{\sigma}{|b|}R\exp(\frac{b\mu}{\sigma} + \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{(\mu)^2+2\sigma^2 r})\{N[\frac{-|b|}{\sigma\sqrt{t}} -$

$\text{signum}(b)(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma)\sqrt{t}] +$

$+\exp(-2b/\sigma(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma))N[\frac{-|b|}{\sigma\sqrt{t}} + \text{signum}(b)(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma)\sqrt{t}]\}$

$VP_{KO}(R) = R\exp(\frac{b\mu}{\sigma} + \frac{b}{\sigma^2}\sqrt{(\mu)^2+2\sigma^2 r})\{N[\frac{-|b|}{\sigma\sqrt{t}} -$

$\text{signum}(b)(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma)\sqrt{t}] +$

$+\exp(-2b/\sigma(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma))N[\frac{-|b|}{\sigma\sqrt{t}} + \text{signum}(b)(\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma)\sqrt{t}]\}$

lembrando que,

$\eta = +1$ se a barreira é atingida por baixo, e

$\eta = -1$ se a barreira é atingida por cima,

então $\eta = sgn(b)$,

e sendo $b = \ln(H/S)$

e ainda definindo $A = \mu/\sigma^2$ e $B = \sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}/\sigma^2$

podemos escrever

$VP_{KO}(R) = R\left[(\frac{H}{S})^{A+B}N(\frac{-\eta b-\eta B\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}) + (\frac{H}{S})^{A-B}N(\frac{-\eta b+\eta B\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}})\right]$

Para o caso da Knock In (KI) temos, no caso da UP and IN, que o rebate apenas ocorre caso a barreira não seja atingida, portanto os casos de interesse são todos aqueles para os quais $Z_t$ assume valores no intervalo de -$\infty$ até b, e portanto

$VP_{KI}(R) = \int_{-\infty}^{b} R\exp(-rt)p(z)dz$

pela definição de $p(z) = (f(z) - g(z))$

$VP_{KI}(R) = \int_{-\infty}^{b} R\exp(-rt)(f(z) - g(z))dz$

$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[\int_{-\infty}^{b} f(z)dz - \int_{-\infty}^{b} g(z)dz]$

$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[F(b,t) - G(b,t)]$

$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[N(\frac{\eta(b-\mu t)}{\sigma\sqrt{t}} - \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})N(\frac{-\eta(b+\mu t)}{\sigma\sqrt{t}})]$

Para o caso KI Down and In (DI) temos $b < 0$ e teremos basicamente o mesmo resultado, dado que as ocorrencias de b são substituidas por $\eta b$ e as ocorrências de $\mu$ são substituídas por $\eta\mu$.

$VP_{KI}(R) = \int_{b}^{+\infty} R\exp(-rt)p(z)dz$

pela definição de $p(z) = (f(z) - g(z))$

$VP_{KI}(R) = \int_{b}^{\infty} R\exp(-rt)(f(z) - g(z))dz$

$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[\int_{b}^{\infty} f(z)dz - \int_{b}^{\infty} g(z)dz]$

$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[\int_{-\infty}^{-b} f(z)dz - G(\infty,t) + G(b,t)]$

$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[-F(b,t) + G(b,t)]$

$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[F(-b,t) - G(-b,t)]$

$$VP_{KI}(R) = R\exp(-rt)[N(\frac{\eta(b-\mu t)}{\sigma\sqrt{t}} - \exp(\frac{2\mu b}{\sigma^2})N(\frac{-\eta(b+\mu t)}{\sigma\sqrt{t}})] \qquad \text{(E.1)}$$