

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bibfea@usp.br](mailto:bibfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE ECONOMIA ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE “MODELAGEM MATEMÁTICA EM  
FINANÇAS”

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EUROPÉIAS DE MOEDAS COM TAXAS DE  
JUROS DOMÉSTICAS E EXTERNAS ESTOCÁSTICAS: APLICAÇÃO NO  
MERCADO DE CÂMBIO BRASILEIRO

DÉCIO CUNHA JÚNIOR

Orientador: Prof. Dr. Gérson Francisco

São Paulo  
2002

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EUROPÉIAS DE MOEDAS COM TAXAS DE JUROS DOMÉSTICAS E EXTERNAS ESTOCÁSTICAS: APLICAÇÃO NO MERCADO DE CÂMBIO BRASILEIRO

DÉCIO CUNHA JÚNIOR

Orientador: Prof. Dr. Gérson Francisco

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre.

São Paulo  
2002

## **Agradecimentos**

Ao Prof. e Orientador Gérson Francisco pelas discussões e auxílio nesta dissertação.

Ao meu segundo pai e consultor de todas as horas, Eduardo Facó Lemgruber, pelos ensinamentos e convívio ao longo de anos de trabalho.

Aos Professores Henrique von Dreifus, Joe Yoshino e Pedro Paulo Schirmer pela audácia na criação deste mestrado e pela dedicação ao mesmo.

À minha namorada Patrícia pela paciência e compreensão ao longo do mestrado.

Aos meus pais e irmãos pelo incentivo em todos os meus anos de estudo.

Aos colegas de turma pelo excelente convívio durante todo o curso.

Ao pessoal da secretaria da FIPE pela presteza e dedicação.

## Resumo

As opções européias em moeda estrangeira são precificadas no Brasil pelo método tradicional, o modelo de Garman & Kohlhagen, que nada mais é do que o modelo de Black & Scholes para ações acrescentando-se os dividendos ou a remuneração da moeda no exterior e onde há apenas um fator de risco que é a cotação da moeda estrangeira. O método proposto neste trabalho é um modelo de precificação que leva em conta além da volatilidade da moeda, as volatilidades das taxas de juros local e externa, bem como a correlação entre estes três fatores de risco.

O objetivo desta dissertação é a comparação entre as duas metodologias para o período compreendido de janeiro de 1998 a dezembro de 2001 das opções de compra européias de dólar negociadas na BM&F. Devido às volatilidades dos cupons do papel indexado ao dólar e da taxa de juro local, este estudo pode mostrar diferenças significativas de precificação entre os modelos, apresentar possibilidades de arbitragem no mercado de derivativos, além de contribuir para a evolução deste mercado no país.

## **Abstract**

The vanilla foreign exchange options are priced in Brazil by the traditional method, the Garman & Kohlhagen model's, which is the Black & Scholes model for equities including the dividends or the coupon that is the interest rate of the bond in the country of this currency. In this model there is only one factor that is stochastic, which is the price of the foreign currency. The proposed method in this work is a model that considers besides the volatility of the currency, other two volatilities: the domestic interest rates and the foreign interest rates, and the correlation among these three risk factors.

The target of this dissertation is to compare these two methodologies for the period corresponding from 04/01/1998 until 28/12/2001 of the european call options indexed to US\$ dollar negotiated in BM&F. Due the volatilities of the local interest rates and the foreign bond, this work could show significant differences between the Garman & Kolhagen model and the proposed model, therefore it could give possibilities of arbitrage in the derivatives market and contribute in the evolution of the financial market in this country.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	1
1. REVISÃO DA LITERATURA ACADÊMICA.....	5
2. DESCRIÇÃO DO MODELO A SER UTILIZADO.....	17
3. VERIFICAÇÃO DA FÓRMULA ATRAVÉS DA MONTAGEM DE UM PORTFÓLIO REPLICANTE.....	22
4. TESTES EMPÍRICOS.....	34
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS.....	61
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	63
APÊNDICE.....	68

## INTRODUÇÃO

### I.1 - Definição do problema

Os objetos de estudos são as opções européias em moeda estrangeira negociadas no mercado brasileiro, especificamente as referenciadas ao dólar. Convém mencionar que este derivativo apenas pode ser exercido no seu vencimento. No modelo padrão de opções de Black & Scholes (1973), o ativo-subjetivo é uma ação que não remunera dividendos. Garman & Kohlhagen (1983) mencionam que a diferença entre os dois ativos é notada quando há a comparação com os preços *forward*. Quando as taxas de juros são constantes, seguindo as premissas de B&S, o preço do *forward* das ações deve ser, por arbitragem, igual à taxa de juro. Mas no mercado de moedas, os preços dos termos podem envolver prêmios ou descontos. Isto se deve ao fato do termo de moeda estar relacionado com o preço dos *bonds* livres de risco em cada país. A relação de arbitragem (paridade de taxa de juro) pressupõe que a taxa a termo de moeda tenha um prêmio que deverá ser igual ao diferencial de taxa de juro entre os dois países em questão.

Existem diversos autores, incluindo os últimos citados, que discutem o problema de avaliação de opções com dividendos. A maioria deles se empenha na solução analítica em que os dividendos são constantes. Hull (1983) cita o problema da estocasticidade, porém menciona que no vencimento este problema não existirá. Outros evoluem o problema para a análise de opções com taxas de juro estocásticas. Os primeiros a mencioná-los foram Feiger & Jacquillat (1979), porém não obtiveram uma solução fechada. A seguir vieram Grabbe (1983), Hillard, Madura e Tucker (1991), Amin & Jarrow (1991) e Yue-Kuen Knok (1998).

Existem diversas formas de se precificar este tipo de ativo, partindo do modelo mais simplificado para o mais sofisticado, veja a Tabela 1 na página seguinte.



**Tabela 1: Modelos de precificação de opções de moedas classificados pelo comportamento dos fatores de risco envolvidos**

Volatilidade do Ativo-objeto	Taxa de Juro local e externa	Principais Modelos
Constante	Constantes	Garman & Kohlagen (1983).
Estocástica	Constantes	Melino (1987), Turnbull (1988), Chesney & Scott (1989) e Heston (1993).
Constante	Estocásticas	Grabbe (1983), Amin & Jarrow (1991), Hillard, Madura & Tucker (1991) e Kwok (1998).
Estocástica	Estocásticas	Doffou & Hilliard (2001).

Esta dissertação se foca apenas em 2 tipos de modelos: o modelo de volatilidade do ativo-objeto e taxas de juro local e externa constantes, e o modelo de volatilidade do ativo-objeto constante e taxas de juro local e externa estocásticas. Garman & Kohlhagen (1983) utiliza basicamente o B&S de ações com a inclusão dos dividendos constantes. Hull (1997) sugere que: "Se os dividendos não são constantes durante a vida da opção a fórmula de dividendo constante ainda é válida e está correta". Hull (1997) menciona que se determine o dividendo médio esperado e se traz a valor presente o ativo-objeto,  $Se^{-div.T}$ , já que no vencimento não haverá mais dividendos a serem pagos e a volatilidade do ativo no vencimento é a mesma que ele teria se não existissem dividendos<sup>1</sup>. Assim, a função dos dividendos seria apenas atualizar o valor presente.

Kwok (1998) sugere que a volatilidade usada seja a volatilidade do preço calculada pela volatilidade do sintético,  $Se^{-div.T}$ , com T constante, isto é, a combinação das

<sup>1</sup> Hull, John ; "Option, Futures and Other Derivatives", pag 263, Third Edition, Prentice Hall.

volatilidades do dólar ( $\sigma_s$ ), e da volatilidade do cupom ( $-T\sigma_{div}$ )<sup>2</sup>, incluindo a correlação entre elas. Este processo assume que o prazo não se altera até o vencimento. Este é a principal deficiência do modelo.

Por último, Hillard, Madura & Tucker (1991) antecipam Kwok (1998) e propõem usar para o cálculo de volatilidades a variância condicional seguindo a aproximação do dividendo vezes o prazo ao quadrado dividido pela raiz de 3. Este resultado vem do cálculo de:

$$v^2 = \sigma_s^2 \tau + \frac{\tau^3}{3} (\sigma_r^2 + \sigma_f^2 - 2\sigma_{rf}) + \tau^2 (\sigma_{sr} - \sigma_{sf}) \quad (1)$$

É sobre este último modelo é que se desenvolve esta dissertação.

## I.2 - Objetivo da dissertação

Como no Brasil as volatilidades da moeda, no caso específico do dólar, das taxas de juros locais e dos cupons cambiais são altas e também porque o modelo proposto utiliza a correlação entre estes fatores surgiu o interesse em se comparar estas duas metodologias e tentar estabelecer uma alternativa adicional de precificação desta classe de ativos no país. O principal objetivo desta dissertação é a comparação do modelo de precificação de opções europeias de compra de dólar via metodologia sugerida por Garman & Kolhagen (1983), com a modelagem proposta, onde além do fator de risco moeda, as taxas de juro e do cupom são consideradas estocásticas. Convém citar, que as análises são feitas apenas para as opções de compra, contudo uma analogia pode ser feita utilizando o *Put-Call Parity*. Em seguida, são analisados empiricamente os valores indicados pelos modelos comparando-os aos valores efetivamente negociados pelo mercado no período de 04/01/1998 a 28/12/2001.

---

<sup>2</sup> Observe que o risco é sempre positivo e que o sinal negativo à esquerda da fórmula indica apenas que o principal (PU) responde inversamente às oscilações da taxa do cupom.

### **I.3 - Descrição do trabalho**

Na primeira parte é feita a revisão bibliográfica de artigos e trabalhos relacionados ao tema, onde os mesmos estão dispostos cronologicamente. Após a revisão são apresentados os dois modelos. Na segunda parte, descrevem-se as premissas utilizadas no modelo, a descrição dos processos estocásticos do dólar, do juro local e do cupom de dólar. São feitas as derivações das equações diferenciais e também a proposta da formulação analítica do modelo em questão.

Na terceira parte são mostrados: o processo de simulação dos resultados, a montagem do *hedge* sintético, a comparação dos resultados analíticos com os simulados e a análise das convergências obtidas. Na parte seguinte, há a descrição da amostra utilizada, ou seja, o banco de dados. Nesta base de dados são feitos testes empíricos onde se faz a comparação entre os preços calculados pelo modelo tradicional e o efetivamente negociado e os preços calculados pelo modelo estocástico e o efetivamente negociado.

A quinta parte é a conclusão final do trabalho, onde também há menção de outros pontos que podem ser tratados futuramente, como por exemplo, modelagens de opções americanas e modelagem utilizando precificação de taxas de juros mais complexas como Hull & White (1990), Black, Derman e Toy (1990) entre outros.

## 1. REVISÃO DA LITERATURA ACADÊMICA

O objetivo deste capítulo é analisar o desenvolvimento de modelos de avaliação de opções de moedas, em ordem cronológica, inicia-se pelo modelo que trata da assunção de dividendos constantes. Existem diversos autores, incluindo Garman & Kohlhagen (1983), que discutem o problema de avaliação de opções com dividendos. A maioria deles se empenha na solução analítica em que os dividendos são constantes. Outros evoluem a matéria para a análise de opções mais estocásticas como, por exemplo, opções do máximo entre dois ativos, sugerida por Margrabe (1978) e expandida por Johnson (1981).

A literatura sobre a precificação de opções de moedas pode ser dividida em quatro categorias (veja Tabela 1), porém este trabalho contempla apenas os modelos que apresentam volatilidade da moeda constante. Dentro desta categoria, estão os modelos os quais tanto as taxas de juros local quanto as externas são constantes, e no outro modelo, ambas as taxas de juros são estocásticas. Modelos de avaliação que assumem que as taxas de juros são constantes são os mais usados por serem mais fáceis de serem implantados e amplamente conhecidos pelo mercado (veja Wei<sup>3</sup>). Estes modelos não consideram a diferença entre preços dos futuros e o preço à vista, ignorando as complicações associadas com a marcação a mercado, como sugerem Jarrow e Oldfield (1981). A segunda classe de modelo incorpora a estocasticidade das taxas de juro e dos cupons. Primeiramente serão mostrados os fundamentos destas duas categorias de modelos, sendo a última categoria a que fundamenta este trabalho.

---

<sup>3</sup> Wei, Jason Z., "Frontiers in Derivatives.", pag 116, capítulo 5, McGraw Hill.

## 1.1 – Modelo com Dividendos Constantes

No modelo padrão de opções de Black & Scholes (1973), o ativo subjeto é uma ação que não remunera dividendos. A diferença entre os dois ativos, a ação e a moeda, é notada quando há a comparação com os preços *forward*. Quando as taxas de juros são constantes, seguindo as premissas de B&S, o preço do *forward* das ações deve ser, por arbitragem, igual à taxa de juro. Mas no mercado de moedas, os preços dos termos podem envolver prêmios ou descontos. Isto se deve ao fato do termo de moeda estar relacionado com o preço dos *bonds* livre de risco em cada país. A relação de arbitragem (paridade de taxa de juro) pressupõe que a taxa a termo de moeda tenha um prêmio que deverá ser igual ao diferencial de taxa de juro entre os dois países. Então, tanto as taxas de juros locais quanto às externas afetam o preço deste termo, e também influenciam o preço das opções. A seguir se mostra resumidamente o modelo de Garman & Kohlhagen e se utiliza a seguinte notação:

$S$  = preço à vista da moeda estrangeira em moeda local por unidade de moeda estrangeira

$F$  = preço do termo de moeda estrangeira no vencimento da opção

$K$  = preço de exercício da opção em moeda local

$T$  = prazo da opção

$C(S,T)$  = preço da opção de compra de moeda estrangeira em moeda local

$P(S,T)$  = preço da opção de venda de moeda estrangeira em moeda local

$r_D$  = taxa de juro doméstica livre de risco

$r_F$  = taxa de juro externa livre de risco

$\sigma$  = volatilidade do preço à vista da moeda

$\mu$  = tendência do preço à vista da moeda

$N(\cdot)$  = função acumulada da distribuição normal

$\alpha$  = a taxa de retorno esperada do ativo

E as premissas são:

1. O Movimento Geométrico Browniano governa o preço à vista da moeda, isto é a representação diferencial do preço à vista é  $dS = \mu S dt + \sigma S dZ$ , onde  $Z$  é um processo padrão de Wiener.

2. Os preços das opções estão em função de uma única variável estocástica ( $S$ )

3. Os mercados não apresentam custos de transação.

4. Ambas as taxas de juros, local e externa, são constantes.

A chave para compreender uma opção de moedas passa pelas taxas de juros doméstica e externa. São comparadas a compra de uma opção com a moeda à vista. Sabe-se que o retorno esperado de um ativo ajustado ao risco tem que ser idêntico a um ativo livre de risco em uma economia sem arbitragem. Então, tem se:

$$\frac{\alpha - r_D}{\sigma} = \lambda, \text{ para todo } i \quad (2)$$

onde  $\lambda$  não depende do ativo em questão. Aplicando esta premissa para o comprador da opção, então:

$$\frac{(\mu + r_F) - r_D}{\sigma} = \lambda \quad (3)$$

Tem-se que o retorno esperado da moeda é  $\mu$ , mais o capital aplicado à taxa livre da moeda estrangeira, como por exemplo, títulos do governo pagando uma taxa  $r_F$ . O denominador à esquerda da equação (3) é o  $\sigma$ , que é o desvio padrão da taxa de retorno da moeda. Então,  $C(S,T)$  da opção européia será:

$$\frac{\alpha_C - r_D}{\sigma_C} = \lambda \quad (4)$$

onde  $\alpha_C$  e  $\sigma_C$  são o retorno esperado da opção e o desvio padrão, respectivamente.

Pelo lema de Itô:

$$\alpha_C C = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) + \mu S \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) - \left( \frac{\partial C}{\partial T} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_C = \sigma S^2 \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (4):

$$\lambda = \frac{\left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) + \mu S \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) - \left( \frac{\partial C}{\partial T} \right) - r_D C \right)}{\sigma S \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right)} \quad (4a)$$

Então com (3) e (4) resultará:

$$\left( \frac{\sigma^2}{2} \right) S^2 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) - r_D C + (r_D S - r_F S) \left( \frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial C}{\partial T} \quad (7)$$

Esta última equação é remanescente do modelo de Samuelson (1965), na qual o dividendo de uma ação é proporcional ao preço da mesma, é utilizada também para o caso de opções de moedas, então se assume  $r_F$  como o dividendo da moeda, porém para converter para valores locais deve-se multiplicar pela taxa de câmbio (S). Este modelo assume que uma empresa acompanha constantemente o preço de sua ação, e a taxa de dividendos é continuamente ajustada e é paga em uma fração proporcional ao preço, o que na prática não é possível de se aplicar às ações, mas que para moedas pode ser muito bem assumido.

A solução de (7) para uma opção de compra europeia de moedas obedece além disto a seguinte condição de fronteira que  $C(S,0) = \max[0, S-K]$ , levando a :

$$C(S,T) = e^{-r_F T} S N(x + \sigma \sqrt{T}) - e^{r_D T} K N(x), \text{ onde} \quad (8)$$

$$x = \frac{\left( \ln \left( \frac{S}{K} \right) + \left( r_D - r_F - \left( \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) T \right)}{\sigma \sqrt{T}} \quad (9)$$

Nota-se que tanto  $r_F$  quanto o diferencial de taxa de juro,  $r_D - r_F$ , apresentam funções distintas na solução. Claro que a equação (7) satisfaz as suposições originais. Então, a opção de venda também segue esta equação diferencial com a condição de fronteira  $P(S,0) = \max[0, K-S]$ . Portanto a solução da opção de venda europeia de moeda é:

$$P(S,T) = e^{-r_F T} S \left[ N(x + \sigma \sqrt{T}) - 1 \right] - e^{r_D T} K \left[ N(x) - 1 \right], \quad (10)$$

onde  $x$  é o mesmo da opção de compra.

O preço do termo resulta em:

$$F = e^{(r_D - r_F) T} S \quad (11)$$

Substituindo em (8) tem-se:

$$C(F,T) = \left\{ FN\left(x + \sigma\sqrt{T}\right) - KN(x) \right\} e^{-r_D T} \quad (12)$$

$$x = \frac{\left( \ln\left(\frac{F}{K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T \right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Vê-se que nesta substituição, o valor da opção de compra depende somente de F e  $r_D$ ; porém existe um elo em F ligando a S e  $r_F$ , que neste caso foi eliminado. Com isto, dado a taxa de juro local, a informação relevante na precificação de uma opção de moeda é o nível de taxa de juro externa e o preço à vista, que está refletido no preço a termo. O preço da opção europeia de venda é analogamente:

$$P(F,T) = \left\{ F\left[N\left(x + \sigma\sqrt{T}\right) - 1\right] - K\left[N(x) - 1\right] \right\} e^{-r_D T} \quad (13)$$

A precificação de opção europeia depende tanto das taxas de juros domésticas e externas. Este estudo trata da proporcionalidade dos dividendos quando o preço à vista é fornecido, e da precificação quando o preço futuro é dado. Outro ponto, mostrado é a variação dos preços das opções quando se altera os preços à vista ou a termo.

Biger e Hull (1983) mostram o Black e Scholes sob o ponto de vista da teoria das expectativas das taxas de câmbio e o CAPM utilizando um portfólio replicante (veja Apêndice A) pelo termo da moeda. Sabe-se que o preço da call e da put dependem de F, K,  $\sigma$ , T e  $r_D$ , com isto, o investidor pode montar uma posição sem risco combinando uma posição comprada de contratos a termo com posição vendida de opções de compra.

## 1.2 – Modelo com Taxas de Juro e Dividendos Estocásticos

Um dos artigos que mais influenciou o modelo a ser proposto nesta dissertação foi o de Feiger e Jacquillat (1979), pois os autores buscam uma modelagem diferenciada da precificação de Garman e Kohlhagen para opções de moedas. Nele há a



precificação de dois tipos de ativos, as opções de *bonds* em moeda estrangeira e, as opções de compra e venda em moedas à vista. As premissas de mercado são as mesmas do modelo com dividendos constantes, mas os autores não conseguem uma fórmula fechada para este tipo de problema.

Tem-se uma opção de bond em moeda estrangeira que é indexada em duas moedas (\$ e ¥), que são *zero coupon bonds*. A opção na maturidade (T) pagará \$1 ou ¥y, e o valor em \$ de:

$$\max \{1, y.S^{\text{¥}}(T)\}, \quad (14)$$

onde:

$S^{\text{¥}}(T)$  é o preço em \$ do ¥ à vista na data T. Então:

$C^{\text{¥}} = 1/y$ , é a taxa de câmbio de T do contrato de *bond*.

$F^{\text{¥}}(\tau, T)$  é o preço do termo em  $\tau$  para entrega de ¥1 em T. Tem-se as opções européias de compra e venda dos contratos a termo com preço de exercício  $K^{\text{¥}}(T)$ .

Considera-se que o portfólio tem os seguintes ativos:

- (i) um \$ *zero coupon bond*, valendo \$1 em T
- (ii) y opções de compra do termo de ¥ com preço de exercício:

$$K^{\text{¥}}(T) = 1/y = C^{\text{¥}}$$

Na data T o retorno do portfólio será em \$:

$$\begin{aligned} 1 + y[S^{\text{¥}}(T) - C^{\text{¥}}]^+ &= \max \{1, 1 + y[S^{\text{¥}}(T) - 1/y]\} \\ &= \max \{1, y.S^{\text{¥}}(T)\} \end{aligned}$$

Com isto se reproduz o preço da opção do *bond* em moeda na maturidade. Note que uma opção de um contrato a termo no vencimento é igual a uma opção à vista com maturidade na data do termo.

Será chamado de  $P^{\text{\$}}[\tau, T; y^{\text{¥}}]$  o preço em  $\tau$  do *bond* em moeda estrangeira definido em (1),  $g^{\text{\$}}[\tau, T; K^{\text{¥}}]$  o preço em dólar em  $\tau$  de uma opção do termo de ¥ de preço de exercício  $K^{\text{¥}}$  e  $B^{\text{\$}}(\tau, T)$  o preço em dólar em T de um *zero coupon bond* que paga \$1 na data T. Então o preço desta opção de compra será:

$$g^{\text{\$}}[\tau, T; y] = [P^{\text{\$}}(\tau, T; y^{\text{¥}}) - B^{\text{\$}}(\tau, T)]/y \quad (15)$$

A equação acima fornece a estrutura implícita dos preços das opções de compra dos termos de moedas com relação a todas as possíveis taxas de juros e preços de

exercícios. Também, analogamente, se existe a opção de compra, pode-se fazer a opção de venda. Denomina-se de  $h^{\$}[\tau, T; K^{\$}]$  o preço da opção de venda,  $B^{\$}(\tau, T)$  o preço em iene na data  $\tau$  de um *zero coupon bond* que paga ¥1 na data T. Então, por arbitragem:

$$0 = B^{\$}(\tau, T).F^{\$}(\tau, T) + h^{\$}[\tau, T; K^{\$}(\tau, T)] - g^{\$}[\tau, T; K^{\$}(\tau, T)] \quad (16)$$

$$h^{\$}[\tau, T; K^{\$}(\tau, T)] = B^{\$}(\tau, T).F^{\$}(\tau, T) + g^{\$}[\tau, T; K^{\$}(\tau, T)] \quad (17)$$

Considerando o preço da opção do *bond* em moeda estrangeira pagando (14) em termos de ¥, a lógica é que o portfólio equivalente contém:

(i)  $y$  *zero coupon bonds* em ¥, cada pagando ¥1 na data T;

(ii) uma opção de compra do termo de \$ lançada com preço de exercício de  $y$

Obviamente foi obtida a precificação da opção de compra em iene referenciada no termo de dólar.

$$g^{\$}[\tau, T; y] = P^{\$}(\tau, T; y^{\$}) - yB^{\$}(\tau, T) \quad (18)$$

A opção do *bond* de moeda deverá ser a mesma:

$$S^{\$}(\tau)P^{\$}(\tau, T; y^{\$}) = P^{\$}(\tau, T; y^{\$}) \quad (19)$$

Portanto, a segunda implicação disto é a seguinte relação para cada data e para os diversos preços de exercício:

$$S^{\$}(\tau) = ((B^{\$}(\tau, T) + yg^{\$}(\tau, T; 1/y)) / (yB^{\$}(\tau, T) + g^{\$}(\tau, T; y))) \quad (20)$$

Esta é uma condição de lucro zero que relaciona o preço da opção com o preço à vista e a taxa de juro, que é análogo a:

$$S^{\$}(\tau) = B^{\$}(\tau, T).[F^{\$}(\tau, T)/B^{\$}(\tau, T)] \quad (21)$$

A condição (21) vincula as taxas de juros do termo e o preço à vista para todos os T's, e a condição (20) é mais complexa, pois inclui os preços de exercício. Veja Apêndice B para melhores explicações.

Grabbe (1983) também mostra que o Black & Scholes é inadequado para a modelagem de opções de moedas porque este tipo de derivativo apresenta certas peculiaridades diferentes da precificação de ações. O ponto chave é que as taxas de juros são estocásticas, e o autor mostra um exemplo de um *hedge* no qual apresenta zero de resultado se o mesmo for feito continuamente. A construção do *hedge* leva a uma equação diferencial parcial cuja solução é o valor da opção europeia de compra,

e, por analogia, o preço da opção de venda também é obtido. Ele menciona no artigo tanto opções européias quanto americanas. Com relação às últimas, o autor também mostra que para valores altos da taxa à vista da moeda em relação ao preço de exercício, as opções americanas de compra serão exercidas antes do vencimento, e, portanto, este tipo de opção terá valores maiores do que a opção européia. No entanto, o objetivo desta dissertação não é tratar das opções americanas, mas focar apenas os assuntos inerentes às opções européias.

Neste artigo, além das premissas anteriores de mercado, Grabbe (1983) afirma que o teorema da paridade de taxa de juro é válido e as variáveis seguem um processo difusivo. São definidas duas estratégias de negociação: a primeira, a compra da *call* e X quantidades de *bonds* em moeda local e a outra a compra do *bond* em moeda estrangeira pelo preço em moeda local, todos com vencimento em T.

Em um exemplo no qual a taxa de juro do *bond* local seja maior do que a do *bond* externo, tem-se que o preço da opção de compra será igual, pelo menos, à diferença entre a taxa a termo de câmbio e o preço de exercício trazido a valor presente. Assumindo a teoria da paridade de taxa de juro, e se considerar  $F > K$ , um comprador de uma opção de compra européia poderá vender o termo da moeda  $F(t,T)$  mesmo que o preço seja K. Então esta opção terá um valor maior que a diferença  $F-K$ , descontada a valor presente.

Grabbe (1983) também faz a análise para um portfólio comprado em uma *put*, com a emissão de um *bond* em moeda estrangeira ( $B_2$ ), a compra de X quantidades de *bonds* em moeda local ( $B_1$ ) e a compra da opção de compra.

Como as estratégias têm o mesmo *payoff*, então os preços deverão ser iguais.

$$P(S(t), K, t, T) = C(S(t), K, t, T) - S(t)B_2(t, T) + XB_1(t, T) \quad (22)$$

Com isto, o preço da opção de venda é totalmente determinado pelo preço da opção de compra, da taxa de câmbio e dos preços dos *bonds* nas duas moedas.

Partindo-se do teorema de paridade de taxa de juro e substituindo-o na equação acima, tem-se que:

$$P(S(t), K, t, T) = C(S(t), K, t, T) + B_1(t, T)[K - F(t, T)] \quad (23)$$

O preço da opção de venda difere da opção de compra devido ao fator que representa a taxa de desconto entre o preço de exercício e a taxa de câmbio a termo.

Por não-arbitragem o valor do portfólio (vide Apêndice C) será:

$$V = C - (\partial C / \partial G) G - B_1 = 0 \quad (24)$$

Onde:  $G = SB_2$

E a solução da opção de compra européia é (vide Apêndice C):

$$C(t) = S(t)B_2(t, T)N(d1) - XB_1(t, T)N(d2) \quad (25)$$

e

$$\sigma^2 = \int_0^t \frac{1}{T} \left[ \sigma_G^2(t+T-u, u) + \sigma_{B_1}^2(t+T-u, u) - 2\rho_{GB_1}(t+T-u, u)\sigma_G(t+T-u, u)\sigma_{B_1}(t+T-u, u) \right] du$$

Esta equação difere do B&S para opções de ações em três aspectos. Primeiramente, existem duas taxas de juro e não apenas uma. Estas taxas estão representadas nos preços dos *bonds* em moeda local e estrangeira. No modelo de Black & Scholes, o *bond* remunera juros, o que não ocorre com as ações. Portanto, não há possibilidade de se receber juros se a opção for exercida, enquanto em uma opção de moedas isto não é verdade, pois as taxas de juros locais e externas estão presentes e fazem parte do retorno esperado da opção. Segundo, o modelo de B&S assume a taxa de juro constante e com isto são excluídos o movimento de correlação entre os preços das ações e o das taxas de juros. Apesar disto ser uma simplificação, a mesma não é apropriada para se precificar ativos em moeda estrangeira, onde alterações em taxas de juros levam a variações no preço à vista e nos termos. Por último, a assimetria entre o pagamento de juros (positivo) e a ação (zero de juros, ignorando os dividendos) significa que uma opção americana de compra em ações vale mais vigente do que não, e ela não será exercida prematuramente. Então a opção americana de ação tem o mesmo preço da européia. Entretanto, a opção americana de compra de moedas tem valor superior à européia, porém este ponto será apenas mencionado nesta dissertação.

Usando a relação de paridade das taxas de juros ( $S(t)B_2(t, T) = F(t, T)B_1(t, T)$ ), a fórmula de precificação da opção de compra européia é:

$$C(t) = B_1(t,T)[F(t,T)N(d_1)-KN(d_2)] \quad (26)$$

$$\sigma^2 = \int_0^t \left(\frac{1}{T}\right) \sigma_F^2(t+T-u, u) du$$

O que pode ser mencionado em relação à equação anterior (25) é o desaparecimento da taxa à vista (B), isto porque toda informação a respeito da taxa à vista e da taxa de desconto do *bond* em moeda estrangeira está refletida no preço do termo de moeda, justamente por não haver independência entre o termo e a taxa à vista. No caso da opção de venda, o processo é análogo ao descrito anteriormente.

Da equação (25) são mostradas as derivadas parciais da equação, e com isto torna-se possível observar a sensibilidade dos diferentes componentes da precificação deste tipo de opção.

O preço da opção decrescerá com relação à variação do preço do *bond* doméstico:

$$\partial C/\partial B_1 = -KN(d_2) < 0 \quad (27)$$

O preço da opção aumentará com relação à variação do preço do *bond* estrangeiro:

$$\partial C/\partial B_2 = SN(d_1) > 0 \quad (28)$$

O preço da opção aumentará com respeito ao preço em moeda local do *bond* em moeda estrangeira ( $G = SB_2$ ):

$$\partial C/\partial G = N(d_1) > 0 \quad (29)$$

O preço da opção decrescerá com relação ao preço de exercício:

$$\partial C/\partial K = -B_1N(d_2) < 0 \quad (30)$$

O preço da opção aumentará com respeito ao preço à vista ou do termo ( $F=SB_2/B_1$ ):

$$\partial C/\partial S = B_2N(d_1) > 0 \quad (31)$$

$$\partial C/\partial F = B_1N(d_1) > 0 \quad (32)$$

A derivada parcial com respeito ao vencimento:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right) = \left(\frac{SB_1N'(d_1)}{2\sigma\sqrt{T}}\right) \left[\sigma_G^2 + \sigma_{B_1}^2 - 2\rho_{GB_1}\sigma_G\sigma_{B_1}\right] > 0 \quad (33)$$

O fato de  $\partial C/\partial T > 0$  não significa necessariamente que o preço da opção C aumenta estritamente com o vencimento. Pelo contrário, pela relação  $\partial C/\partial T = 1/2\phi$  (veja Apêndice C), a mudança incremental no valor da opção,  $dC$ , é independente de sua derivada parcial. Tem-se:

$$\begin{aligned}
dC &= (\partial C/\partial G)dG + dB + dT - (1/2)\phi dT \\
&= N(d_1)dG - KN(d_2)dB_1
\end{aligned}
\tag{34}$$

Então o fato é que  $dC > 0$  se  $dG > K(N(d_2))/(N(d_1))dB_1$ . Se a taxa de juro externa for muito elevada ( $dG$  alto para  $S$  fixo) em relação ao aumento da taxa de juro local ( $dB$ ), então o preço da opção europeia diminuirá com um aumento da maturidade (lembrando que  $dT = -dt$ ).

Finalmente, define-se  $\sigma$  como  $\sigma \equiv \frac{(\sigma^2 T)^{1/2}}{\sqrt{T}}$  e

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \sigma}\right) = \sqrt{T} S B_1 N'(d_1) > 0
\tag{35}$$

O preço da opção aumentará em função da média do desvio padrão da taxa instantânea do termo, onde o tempo médio será dado pelo intervalo  $(t, t+T)$  para os contratos a termo vencendo em  $t+T$ .

As derivadas parciais acima foram derivadas da equação (25). Um resultado adicional é obtido achando a derivada parcial em relação ao *bond* em moeda local da equação (26):

$$(\partial C/\partial B_1)|_{F=F} = (C/B_1) > 0
\tag{36}$$

Na equação (27) a taxa à vista é mantida constante, enquanto na equação (36) o termo é constante. A derivada de (36) é positiva porque se o preço do *bond* doméstico subir (a taxa cair) com o termo constante, então pela paridade de taxa de juro, sabe-se que o preço do *bond* referenciado em moeda estrangeira em moeda local ( $G = SB_2$ ) aumentará, elevando conseqüentemente o valor da opção (equação 33). Grabbe (1983) também fez uma simulação de uma posição comprada em um *bond* em moeda estrangeira. O valor em moeda local será  $G = S(t)B_2(t, T)$ , então a equação (28) poder ser reescrita como:

$$G + [(\partial C/\partial B_1)/(\partial C/\partial G)]B_1 - [1/(\partial C/\partial G)]C = 0
\tag{37}$$

Então para cada unidade em moeda local da posição comprada do *bond* em moeda estrangeira, para se fazer o *hedge*, compra-se  $[(\partial C/\partial B_1)/(\partial C/\partial G)]$  unidades do *bond* em moeda local e emite-se  $[1/(\partial C/\partial G)]$  opções de compra. Este *hedge* terá valor zero

se for continuamente ajustado. Analogamente, pode ser feito um *hedge* para opção de venda.

Amin e Jarrow (1991) tratam de uma fórmula fechada de opções europeias de moedas e futuros de moedas assumindo que as volatilidades e correlações são determinísticas. Também mostram um exemplo de um processo de precificação de um *bond* (doméstico e externo) consistente com a formulação de Grabbe. Em seu livro *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Kwok (1998) também trata da precificação das opções europeias de moedas, construindo um portfólio com este tipo de derivativo. O autor menciona que normalmente, a correlação  $\rho_{SB_2}$  não é zero, pois é plausível que haja efeitos no preço do *bond* se houver alteração na taxa de câmbio. Outro ponto citado, é que nestas opções, há uma função de linearidade entre o preço de S e o preço de exercício K (em moeda local), e que esta relação continua sendo verdadeira, porém entre  $SB_2$  e  $KB_1$ , e conseqüentemente entre G e  $B_1$ . O autor também menciona que na precificação, os valores de  $\mu_G$ ,  $\mu_{B_1}$  e a taxa livre de risco não interferem no resultado final.

O termo F parece ser melhor escolha do que o preço à vista de S. Os efeitos da estocasticidade na taxa do *bond* são naturalmente incorporados em uma única variável estocástica. O preço do *bond* doméstico  $B_1(\tau)$  somente aparece para trazer a valor presente o preço da opção de compra. A relação de *put-call parity* continua válida mesmo quando as taxas local e externa dos *bonds* são estocásticas.

Opções europeias de *spot* e futuros têm o mesmo preço quando o contrato de opção vence simultaneamente com o de futuros. Usando este resultado, Hilliard, Madura e Tucker (1991) mostram que o preço da opção europeia de moedas é regido pela estocasticidade das taxas de juros quando a paridade das taxas existe, e assumindo que o preço dos *bonds* doméstico e externo tem variância que dependem somente do tempo e não dos outros estados de variáveis, como o nível das taxas de juros de curto prazo. É no modelo destes três autores que se baseia esta dissertação, e o mesmo será explicado mais especificamente no próximo capítulo.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO A SER UTILIZADO

O modelo de precificação a ser desenvolvido foi proposto por Hillard, Madura & Tucker e é próximo ao de Black para opções de Futuros, exceto a variância, que na fórmula de Black é  $\sigma^2 T$  e nesta é substituída por  $\int_0^T \sigma_s^2 dS$ , onde  $\tau$  é o tempo para o vencimento e  $\sigma_s^2$  depende de como é o modelo de precificação do *bond*. A seguir tem-se a descrição da notação, das premissas e das relações de valores dos parâmetros.

$S(t) \equiv$  câmbio (moeda estrangeira/moeda local)

$F(t, T) \equiv$  taxa forward de câmbio no instante  $t$  p/ vencimento em  $T$

$B_1(t, T) \equiv$  O *bond* local em moeda local c/ vencimento em  $T$  e valor de face 1

$B_2(t, T) \equiv$  O *bond* em moeda estrangeira c/ vencimento em  $T$  e valor de face 1

$C(t, T) \equiv$  Preço da *Call* europeia c/ exercício =  $K$

$P(t, T) \equiv$  Preço da *Put* europeia c/ exercício =  $K$

$r(t, T) \equiv$  taxa de juro de curto prazo em moeda local

$f(t, T) \equiv$  taxa de juro de curto prazo em moeda estrangeira

Premissas e relações:

$F(t, T) = S(t)B_2(t, T)/B_1(t, T) \Rightarrow$  paridade de taxas de juros

$(dS/S) = \mu_s(t).dt + \sigma_s dZ_s$ ; Browniano da taxa de câmbio *spot*

$(dB_1/B_1) = \mu_1 .dt + \sigma_1(t, T)dZ_1$ ; Browniano do *bond* em moeda local

$(dB_2/B_2) = \mu_2 .dt + \sigma_2(t, T)dZ_2$ ; Browniano do *bond* em moeda estrangeira

$dr = \alpha(r, t).dt + \sigma_r dZ_r$ ; Browniano da taxa de juro de curto prazo em moeda local

$df = \mu(f, t).dt + \sigma_f dZ_f$ ; Browniano da taxa de curto prazo em moeda estrangeira



Percebe-se que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  dependem do tempo e de outras variáveis estocásticas. O vetor de incrementos,  $dZ \equiv (dZ_S, dZ_1, dZ_2)$ , é um multivariado Wiener-Levy e a volatilidade instantânea dos termos depende do tempo. As distribuições das taxas instantâneas  $r$  e  $f$  dependem das premissas de  $\alpha$  e  $\mu$ . As relações entre  $dZ_1(dZ_2)$  e  $dZ_r(dZ_f)$  serão discutidas posteriormente. Agora serão feitas as derivações, assumindo mercados sem atrito e utilizando o princípio da neutralidade ao risco. Existe a possibilidade de se montar portfólios auto-financiáveis e que exista *hedge* para este portfólio com taxa livre de risco. Desde que as premissas acima sejam seguidas, uma opção de compra europeia pode ser computada descontando o valor esperado do fluxo de caixa da opção pela taxa de juro do *bond* doméstico. Como em Grabbe (1983), chama-se  $G \equiv SB_2$  e o preço da *call*  $C = C(G, B_1, t)$ . De um portfólio  $V$  composto de  $G$ ,  $B_1$ , e  $C$ , tem-se:

$$V = C + \gamma B_1 + \alpha G \quad (38)$$

$$\text{onde: } \gamma = (-\partial C / \partial B_1) \text{ e } \alpha = (-\partial C / \partial G)$$

$$V = C(-\partial C / \partial B_1) B_1 + (-\partial C / \partial G) G \quad (38a)$$

Desde que  $V$  não requer investimento inicial e  $dV$  não tem componentes estocásticos, conclue-se que  $dV = 0$ . Usando este resultado e aplicando o lema de Itô na equação (38) resulta em:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \left[ \left(\frac{\partial^2 C}{\partial B_1^2}\right) B_1^2 \sigma_{B_1}^2 + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial G^2}\right) G^2 \sigma_G^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial B_1 \partial G^2}\right) \rho [dG, dB_1] \right] - \left(\frac{\partial^2 C}{\tau}\right) = 0 \quad (39)$$

onde:  $\tau \equiv T - t$  e  $dG = (\dot{\phantom{G}})dt + G(\sigma_S dZ_S + \sigma_2(t, T) dZ_2)$

A equação (39) é idêntica à equação estocástica de taxas de juros derivada por Merton (1973), no modelo de opções de troca de Margrabe (1978), no de opções de moedas de Grabbe (1983) e no de Feiger e Jacquillat (1979). Então como o preço da equação (39) é independente das preferências, a solução pode ser obtida aplicando o princípio da neutralidade ao risco de Cox & Ross (1976) com condições de fronteira:

$$\text{Max}[0, S_T - K] = \text{Max}[0, F_T - K]$$

Então, o preço de equilíbrio da *call* será:

$$C(t, T, F) = B_1(t, T) \hat{E} [\text{Max}\{0, F_T - K\}], \quad (40)$$

Onde:  $\hat{E}$  é o operador esperança na probabilidade de risco neutro na variável  $F$ .

Os autores descrevem a distribuição de Risco Neutro nas taxas *forward* de moedas como um processo de difusão  $dF/F$  usando a paridade das taxas de juros e o lema de Itô, dado por:

$$(dF/F) = (\cdot)dt + (dS/S) + (dB_1/B_1) - (dB_2/B_2); \quad (41)$$

onde  $(\cdot)$  é uma função.

Em uma economia de neutralidade ao risco, as taxas *forward* têm expectativa de *drift* igual a zero. Isto implica que o processo ajustado ao risco, denominado por  $(\sim)$  será:

$$((d\tilde{F})/\tilde{F}) = \sigma_S dZ_S + \sigma_1(t,T)dZ_1 - \sigma_2(t,T)dZ_2 \quad (42)$$

Para uma difusão Log-normal,  $\text{Var}[\log(F_T/F_t)|F_t] = \int_t^T \text{Var}[dF/F]$ , então a variância condicional de  $\log(F_T/F_t)$  será:

$$v^2 \equiv \text{Var}[\log(F_T/F_t)|F_t] = \int_t^T (\sigma_S \sigma_1 - \sigma_2)' \text{Cov}(|dZ, dZ'|) (\sigma_S \sigma_1 - \sigma_2) \quad (43)$$

onde  $'$  denota o transposto, e  $\sigma_1, \sigma_2$  são funções do tempo, e a matriz de covariâncias será:

$$\text{Cov}(dZ, dZ') = \text{Corr}(dZ, dZ') dt = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{S1} & \rho_{S2} \\ \rho_{S1} & 1 & \rho_{12} \\ \rho_{S2} & \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} dt \quad (44)$$

A equação (43) pode ser provada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \log \left( \frac{F_T}{F_t} \right) \middle| F_t \right] &= \text{Var} \left[ \log \left( \frac{F_{\Delta t}}{F_0} \right) \left( \frac{F_{2\Delta t}}{F_{\Delta t}} \right) \left( \frac{F_{3\Delta t}}{F_{2\Delta t}} \right) \left( \frac{F_{n\Delta t}}{F_{(n-1)\Delta t}} \right) \right] \middle| F_0; n\Delta t = T \\ &= \text{Var} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\log(F_{(1+i)\Delta t})}{F_{i\Delta t}} \middle| F_0 \right] \\ &= \left\langle \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\log(F_{(1+i)\Delta t})}{F_{i\Delta t}} \right)^2 \middle| F_0 \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\log(F_{(1+i)\Delta t})}{F_{i\Delta t}} \right\rangle^2 \\ &\cong \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\Delta F_i}{F_{i\Delta t}} \right\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \text{Var} \left\langle \frac{\Delta F_i}{F_{i\Delta t}} \middle| F_0 \right\rangle \end{aligned}$$

No limite  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$\text{Var}[\log(F_T/F_0)|F_0] = \int_0^T \text{Var}[dF/F]$$

$$\langle ((dF)/F) \rangle^2 = [\sigma_S \sigma_1 - \sigma_2] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{S1} & \rho_{S2} \\ \rho_{S1} & 1 & \rho_{12} \\ \rho_{S2} & \rho_{12} & 1 \end{bmatrix} dt$$

onde:  $\langle dZ_S dZ_1 \rangle = \rho_{S1} dt$ ;  $\langle dZ_S dZ_2 \rangle = \rho_{S2} dt$ ;  $\langle dZ_1 dZ_2 \rangle = \rho_{12} dt$

A integral de (43) depende somente de  $\sigma_1 = \sigma_1(t, T)$  e  $\sigma_2 = \sigma_2(t, T)$  desde que se assuma  $\sigma_S$  e a matriz de correlação invariantes no tempo. Ambas  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são determinadas pelos preços dos *bonds* doméstico e externo. Obtendo as esperanças na fórmula (40) do processo difusivo da distribuição Log-normal na equação (42) se encontra o preço de equilíbrio da *call*:

$$C(t, T, F) = B_1(t, T)[F(t, T)N(d1) - KN(d2)] \quad (45)$$

$$d1 = [\text{Log}(F/K) + 0,5v^2] / v \text{ e } d2 = d1 - v$$

Pelo *Put-Call Parity* se acha o preço da opção de venda.

$$P + Se^{-\int_0^T f dt} = C + Ke^{-\int_0^T r dt}$$

$$P = C + Ke^{-\int_0^T r dt} - Se^{-\int_0^T f dt} \quad (46)$$

Para obter a forma funcional da variância integrada ( $v^2$ ) se utiliza Vasicek (veja Apêndice D) para os dois *bonds*. Rabinovitch (1989) também usou este modelo para derivar o modelo estocástico de taxas de juros para opções de ações e *bonds*. O modelo de Vasicek assume mercado sem fricção e uma única variável: a taxa instantânea de juros de curto prazo.

$$dr = \alpha(\theta - r)dt + \sigma_r dZ_r \quad (47)$$

Onde:  $\sigma_r$  = variância constante;  $\alpha$  = coeficiente de reversão à média

$\theta$  = tendência de longo prazo de  $r(t)$

Utilizando o argumento da arbitragem, Vasicek desenvolveu um modelo de precificação de *bond* expresso como:

$$B(t, T) = A(t, T) \exp(D(t, T) r(t)) \quad (48)$$

O processo de difusão de (48) segue a equação (47), e com Itô:

$$dB/B = (\cdot)dt + \sigma_r D(t, T) dZ_r \quad (49)$$

Comparando (48) com  $((dB_1)/(B_1))$

$$\Sigma_1(t,T)dZ_1 = \sigma_r d(t,T) dZ_r \quad (50)$$

Então:  $dZ_1 = dZ_r$  e  $\sigma_1(t,T) = \sigma_r d(t,T)$

A forma do parâmetro  $d(t, T)$  determina o valor de  $v^2$  e usando Vasicek será:

$$D(t,T) = -\alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha\tau}); \quad (51)$$

onde:  $\tau = T-t$

$$D(t,T) = -\tau \quad (52)$$

Que é exato para  $\alpha \rightarrow 0$ , e integrando (43) resulta em:

$$v^2 = \sigma_s^2.T + \frac{T^3}{3}[\sigma_r^2 + \sigma_f^2 - 2.\rho_{r,f}.\sigma_r.\sigma_f] + T^2[\rho_{s,r}.\sigma_s.\sigma_r - \rho_{s,f}.\sigma_s.\sigma_f] \quad (53)$$

E consequentemente, a volatilidade é:

$$v = \sqrt{\sigma_s^2.T + \frac{T^3}{3}[\sigma_r^2 + \sigma_f^2 - 2.\rho_{r,f}.\sigma_r.\sigma_f] + T^2[\rho_{s,r}.\sigma_s.\sigma_r - \rho_{s,f}.\sigma_s.\sigma_f]} \quad (54)$$

onde as covariâncias são:

$$\rho_{r,f}.\sigma_r.\sigma_f \equiv \sigma_{r,f}; \quad \rho_{s,f}.\sigma_s.\sigma_f \equiv \sigma_{s,f}; \quad \rho_{s,q}.\sigma_s.\sigma_q \equiv \sigma_{s,q}$$

Assume-se que as taxas de juros de curto prazo seguem um processo de passeio aleatório aritmético que terá o mesmo valor de  $v^2$ . Os coeficientes de velocidade de ajuste das economias são iguais a zero, com isto, as taxas de juro local e externa de curto prazo podem ser negativas. Este tipo de modelo apresenta a vantagem da simplicidade, portanto, evita estimações não lineares dos coeficientes de velocidade de ajuste das duas economias. Na verdade, o modelo proposto para as taxas de curto prazo fica entre o modelo de taxas de juro constantes e o modelo geral de Vasicek. Para o mundo de taxas de juros constantes a equação (53) se torna:

$$v^2 = \sigma_s^2.T \quad (55)$$

### 3. VERIFICAÇÃO DA FÓRMULA ATRAVÉS DA MONTAGEM DE UM PORTFÓLIO REPLICANTE

O objetivo deste capítulo é mostrar através da metodologia de portfólios replicantes que a fórmula de precificação proposta está correta. Para isto, utiliza-se uma planilha Excel com preços e valores fictícios simulados para o ativo-objeto, a taxa de juro e o cupom cambial. Boyle e Vorst (1992) demonstram utilizando modelos binomiais que uma opção pode sinteticamente ser reproduzida por uma carteira composta por investimentos com risco no ativo subjetivo e sem risco no ativo de renda fixa. Neste trabalho cria-se sinteticamente um *forward* da moeda e uma opção de compra com o dividendo e a taxa de juro estocástica. Na simulação, o ativo segue um comportamento explicado pelo movimento geométrico browniano descrito no capítulo 2, e as taxas de juro e do cupom cambial seguem um comportamento descrito na equação (49).

Uma posição *forward* pode ser replicada pela compra do ativo-objeto financiado por um pré-fixado de mesmo prazo, como sugerido por Hull (1997), sendo:

$$F_t = S_t - \$ \{ e^{-Rf_t(T-t)} \}, \text{ onde:}$$

$F_t$ , é o valor do forward de S para o prazo T-t na data t,  $Rf_t$  é o valor da taxa de juro pré-fixada para o prazo. A equação acima é equivalente a  $F_t = S_t - \$ \{ B_{1,t} \}$ . O \$ na frente das chaves indica o valor monetário ou o dinheiro com remuneração ou custo igual à taxa livre de risco, e o sinal negativo indica uma captação.

Uma posição de investimento em uma opção de compra, como mostrado em Becker, Felício e Lemgruber (1991) pode ser substituída por:

$$C_t = \Delta_{S_t} S_t + \$ \{ C_t - \Delta_{S_t} S_t \}$$

ou

$$C_t = \Delta_t F_t + \$ \{ C_t - \Delta_t F_t \},$$

onde:  $\Delta_t = e^{-Rf_t} \Delta_{S_t}$  ou  $\Delta_t = B_1 \Delta_{S_t}$

(56)

Na simulação, o prazo da opção foi subdividido em 1000 intervalos de tempo de tal forma que o comportamento dos ativos simulados fosse o mais próximo de um movimento desenvolvido em tempo contínuo. Número de intervalos menores foram testados e os resultados foram semelhantes aos que serão reportados a seguir.

Nesta parte do trabalho faz-se a montagem do *hedge* baseado no termo da moeda, e a criação de um portfólio replicante mostrando a validade da fórmula proposta. Como instrumentos auxiliares utiliza-se a simulação de Monte Carlo para a geração dos n°s aleatórios e a decomposição de Cholesky.

### Quadro 1: Parâmetros utilizados para simular o portfólio replicante

N. passos	1000		S obs	100,00	
T	7	dias	Vol S	30,00%	aa
dt	0,0070	dia	Vol S (dt)	0,15811%	ao dt
Strike	100,24		$\mu$ S	0,0001%	ao dt
			Rf	20,00%	aa
			Rf (dt)	0,0005%	ao dt
			Vol Rf	2,00%	aa
			Vol Rf (dt)	0,0001%	ao dt
			q (cupom)	10,00%	ao ano
			q (cupom_dt)	0,00026%	ao dt
			Vol cupom	1,0000%	ao ano
			Vol cupom (dt)	0,00004%	ao dt

S	q	rf
1	0,45	-0,23
0,45	1	0,35
-0,23	0,35	1

Onde:

N passos = n° de passos ou intervalos de tempo no processo de geração dos n° aleatórios para as opções e o portfólio replicante;

T = prazo em dias úteis para o vencimento;

dt = fração de cada intervalo de tempo;

*Strike* = preço de exercício;

S obs = preço do ativo no momento inicial;

Vol S = volatilidade diária anualizada do ativo para 252 du;

Vol S (dt) = volatilidade do ativo em fração do intervalo dt;

$\mu_s$  = taxa de tendência do ativo S do processo geométrico browniano para o intervalo dt;

Rf = taxa anual de juros doméstica livre de risco em base 252;

$Rf(dt)$  = taxa de juro doméstica livre de risco ao  $dt$ ;

Vol  $Rf$  = volatilidade diária anualizada (252  $du$ ) da taxa de juro doméstica livre de risco;

Vol  $Rf(dt)$  = volatilidade da taxa de juro doméstica livre de risco ao  $dt$ ;

$q$  (cupom) = taxa do cupom em moeda estrangeira em base 252;

$q$  (cupom\_  $dt$ ) = taxa do cupom em moeda estrangeira ao  $dt$ ;

Vol cupom = volatilidade diária anualizada (base 252  $du$ ) da taxa do cupom em moeda estrangeira;

Vol cupom ( $dt$ ) = volatilidade da taxa do cupom em moeda estrangeira ao  $dt$ ;

O quadro mostra à direita, a matriz de correlações entre o ativo  $S$ , a taxa de juro local ( $Rf$ ) e o cupom em moeda estrangeira ( $q$ ). Convém salientar que os *inputs* do problema são:  $N$ ,  $T$ ,  $Strike$ ,  $S$  obs, Vol  $S$ ,  $Rf$ , Vol  $Rf$ ,  $q$  (cupom), Vol  $q$ ,  $\rho_{Rf,q}$ ,  $\rho_{S,Rf}$ ,  $\rho_{S,q}$ , e os demais são calculados da seguinte forma:

Transformação da volatilidade do ativo ao ano para  $dt$ .

$$Vol(dt) = \frac{Vol(aa)}{\sqrt{252} * \sqrt{dt}} \quad (57)$$

Transformação da volatilidade da taxa de juro interna para  $dt$ .

$$Vol_{Rf}(dt) = \frac{Vol_{Rf}(aa)}{\sqrt{252} * \sqrt{dt}} * dt$$

Transformação da volatilidade da taxa de juro externa para  $dt$ . (58)

$$Volq(dt) = \frac{Volq(aa)}{\sqrt{252} * \sqrt{dt}} * dt$$

Transformação da taxa de juro local ao ano em  $dt$ .

$$Rf(dt) = \frac{\ln(1 + Rf(aa))}{252} * dt$$

Transformação da taxa de juro externa ao ano em  $dt$ . (59)

$$q(dt) = \frac{\ln(1 + q(aa))}{252} * dt$$

Para o exemplo em questão, a Tabela 2 que segue apresenta os 10 primeiros valores simulados e os últimos seis valores.

**Tabela 2: Valores gerados em cada intervalo de tempo**

dts	erros S	S	$\eta_3$	erro Rf	Rf	B1	$\eta_2$	erro q	q	B2	G
0		100,00			0,0005%	0,99495			0,00026%	0,997355997	99,74
1	0,300	100,05	-2,103	(1,76)	0,0004%	0,99624	0,112	0,235	0,0003%	0,997272245	99,77
2	-1,672	99,78	0,192	1,20	0,0005%	0,99537	1,284	0,394	0,0003%	0,997130135	99,50
3	1,013	99,94	-0,117	(1,27)	0,0004%	0,99631	-1,853	-1,199	0,0002%	0,997572963	99,70
4	0,587	100,04	1,190	1,02	0,0004%	0,99556	0,332	0,561	0,0003%	0,997369905	99,77
5	-0,103	100,02	0,678	0,32	0,0005%	0,99534	-0,533	-0,523	0,0002%	0,997563896	99,78
6	0,339	100,07	2,559	1,59	0,0006%	0,99418	-0,902	-0,653	0,0002%	0,997805334	99,85
7	0,400	100,14	-1,608	(1,74)	0,0005%	0,99545	-0,612	-0,366	0,0002%	0,997941519	99,93
8	-0,145	100,11	0,566	0,25	0,0005%	0,99527	-0,493	-0,506	0,0002%	0,99812835	99,93
9	1,571	100,36	-0,509	(0,70)	0,0004%	0,99579	0,159	0,849	0,0002%	0,997820489	100,14
10	0,123	100,38	-2,177	(1,23)	0,0003%	0,99669	1,197	1,124	0,0003%	0,997413039	100,12
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
995	-0,709	97,05	0,808	0,07	0,0015%	0,99993	-1,505	-1,663	0,0001%	0,999997116	97,05
996	1,147	97,22	0,614	(0,06)	0,0015%	0,99994	-0,611	-0,030	0,0001%	0,999997736	97,22
997	0,658	97,33	1,544	0,90	0,0015%	0,99995	-0,455	-0,110	0,0001%	0,999998424	97,33
998	-0,215	97,29	-1,494	(1,50)	0,0014%	0,99997	-0,617	-0,648	0,0000%	0,999999427	97,29
999	0,126	97,31	-0,426	(0,34)	0,0014%	0,99999	0,083	0,131	0,0000%	0,999999665	97,31
1000	-0,684	97,21	0,693	0,24	0,0014%	1,00000	-0,967	-1,171	0,0000%	1	97,21
COL(1)	COL(2)	COL(3)	COL(4)	COL(5)	COL(6)	COL(7)	COL(8)	COL(9)	COL(10)	COL(11)	COL(12)

A primeira coluna representa a evolução dos dts, as segunda, quarta e oitava colunas, respectivamente, erro S,  $\eta_3$  e  $\eta_2$  mostram os números aleatórios gerados no processo com a distribuição da Normal (0,1), este processo é descrito em Clewlow e Strickland (1999). As colunas, três (S), seis (Rf) e dez (q) apresentam as trajetórias destes ativos descritas a seguir:

$$S_1 = S_0 * e^{(\mu_S + \text{erro}_S * Vol_{Sdt})} \quad (60)$$

$$Rf_1 = r = Rf_0 + \text{erro}_{Rf} * Vol_{Rf\_dt}$$

$$q_1 = q_0 + \text{erro}_q * Vol_{q\_dt} \quad (61)$$

A quinta coluna (erro Rf) e a nona (erro q) foram geradas via decomposição de Cholesky<sup>4</sup>.

A sétima coluna (B<sub>1</sub>) e a décima primeira (B<sub>2</sub>), são respectivamente os valores do *bond* em moeda local e o *bond* em moeda estrangeira trazidos a valor presente, e na

<sup>4</sup> Veja Apêndice E.



última coluna é o *bond* G, composto pelo ativo S e o *bond* B<sub>2</sub>. Abaixo, há um exemplo para o *bond* em moeda local. Para fazer para B<sub>2</sub> basta substituir Rf por q.

$$\begin{aligned}
 B_1 &= e^{(-Rf_{dt} * (N - \sum dt))} \\
 B_2 &= e^{(-q_{dt} * (N - \sum dt))} \\
 G &= SB_2
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

A Tabela 3 utiliza os dados da tabela anterior para calcular a diferença de preços e taxas para os ativos simulados: S, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, e G. Abaixo, tem-se as variações dos retornos em *dt* do ativo (*dS*), taxa de juro local (*dRf*), cupom (*dq*) e de B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, e G, respectivamente: *dB*<sub>1</sub>, *dB*<sub>2</sub>, e *dG*. Lembrando que para os ativos expressos em PU (S, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> e G), os cálculos dos retornos diários serão:

$$\begin{aligned}
 dS &= \ln \frac{S_1}{S_0} \\
 dB_1 &= \ln \frac{B_{1,1}}{B_{1,0}} \\
 dB_2 &= \ln \frac{B_{2,1}}{B_{2,0}} \\
 dG &= \ln \frac{G_1}{G_0}
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

E para os demais será apenas a diferença das taxas, pois o retorno em *dt* já está expresso em logaritmo natural.

$$\begin{aligned}
 dRf &= Rf_1 - Rf_0 \\
 dq &= q_1 - q_0
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

**Tabela 3: Retornos dos fatores de risco para cada intervalo de tempo**

dtS	dS	dRf	dq	dB1	dB2	dG
0						
1	0,00048	-0,000130%	0,000009%	0,130081%	-8,39771E-05	0,000392199
2	-0,0026	0,000088%	0,000015%	-0,087689%	-0,000142509	-0,002784996
3	0,0016	-0,000094%	-0,000044%	0,093964%	0,000444003	0,002046218
4	0,00093	0,000075%	0,000021%	-0,074716%	-0,000203573	0,000725042
5	-0,0002	0,000023%	-0,000019%	-0,022768%	0,000194484	3,20666E-05
6	0,00054	0,000117%	-0,000024%	-0,116006%	0,000241998	0,000778757
7	0,00063	-0,000128%	-0,000014%	0,127935%	0,000136476	0,000770191
8	-0,0002	0,000019%	-0,000019%	-0,018026%	0,000187198	-4,06565E-05
9	0,00249	-0,000052%	0,000031%	0,051899%	-0,000308486	0,002177184
10	0,0002	-0,000091%	0,000041%	0,090092%	-0,000408423	-0,000212566
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
995	-0,0011	0,000005%	-0,000061%	0,001431%	4,25871E-06	-0,001116047
996	0,00181	-0,000005%	-0,000001%	0,001480%	6,20496E-07	0,00181561
997	0,00104	0,000066%	-0,000004%	0,001258%	6,87474E-07	0,001042695
998	-0,0003	-0,000111%	-0,000024%	0,001745%	1,00345E-06	-0,000337597
999	0,0002	-0,000025%	0,000005%	0,001437%	2,38072E-07	0,000201192
1000	-0,0011	0,000018%	-0,000043%	0,001387%	3,34976E-07	-0,00107985

A Tabela 4 apresenta a evolução do *forward* sintético de S, cuja equação é:

$$Forward = \frac{G}{B_1} \quad (65)$$

Na coluna seguinte, a forma de cálculo de  $dF$  é a mesma descrita anteriormente para os retornos em cada intervalo de tempo. As colunas 4 e 5 apresentam as volatilidades verdadeira e estimada deste sintético a ser usada na fórmula de avaliação (54). A volatilidade verdadeira para o conjunto de dados simulados é obtida do seguinte modo:

$$\sum F_{dt} = \left\{ \sum_{i=dt}^{T=1000} \frac{(dF_{dt} - d\bar{F})^2}{(T-i-1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (66)$$

Note que a cada  $dt$  o valor da volatilidade se modifica e vai se reduzindo até o vencimento da opção. A série de volatilidade apresentada na coluna 5 é obtida a partir da simulação gerada, veja quadro 1, e vem da equação (54) inserindo apenas o  $dt$ .

$$\Sigma = \left\{ VolS_{dt}^2 * (T-dt) + \frac{(T^3-dt)}{3} [VolRf_{dt}^2 + Volq_{dt}^2 - 2 * \rho_{Rf,q} * VolRf_{dt} * Volq_{dt}] \right.$$

$$\left. (T-dt)^2 [\rho_{S,Rf} * VolS_{dt} * VolRf_{dt} - \rho_{Sq} * VolS_{dt} * Volq_{dt}] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Onde para o caso T = 1000

Veja que as colunas 4 e 5 apresentam valores muito próximos.

**Tabela 4: Forward de S e volatilidades reais e simuladas**

dts	Forward de S	dF	Σ F Verdadeira base dt	Σ F Estimada base dt
0	100,2420		<b>4,63194%</b>	<b>4,61790%</b>
1	100,1510	-0,090862%	<b>4,62963%</b>	4,615812%
2	99,9600	-0,190811%	<b>4,62879%</b>	4,613722%
3	100,0707	0,110658%	<b>4,62498%</b>	4,611632%
4	100,2181	0,147220%	<b>4,62358%</b>	4,609540%
5	100,2442	0,025975%	<b>4,62114%</b>	4,607448%
6	100,4387	0,193882%	<b>4,62105%</b>	4,605354%
7	100,3876	-0,050916%	<b>4,61685%</b>	4,603259%
8	100,4016	0,013960%	<b>4,61660%</b>	4,601164%
9	100,5682	0,165820%	<b>4,61657%</b>	4,599067%
10	100,4563	-0,111349%	<b>4,61347%</b>	4,596969%
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
995	97,0548	-0,113035%	<b>0,26281%</b>	0,353366%
996	97,2297	0,180081%	<b>0,22735%</b>	0,316094%
997	97,3299	0,103012%	<b>0,15508%</b>	0,273774%
998	97,2954	-0,035505%	<b>0,09090%</b>	0,223559%
999	97,3136	0,018682%	<b>0,09055%</b>	0,158097%
1000	97,2072	-0,109372%		

A Tabela 5 indica os valores do portfólio replicante nas colunas 4 a 7 para o *forward* de S. Esta carteira se compõe de uma aplicação à vista no *bond* G para a data futura e uma captação de igual valor em pré-fixado representado pelo B<sub>1</sub>, indicado na equação seguinte:

$$Forward_t = G_t - \{G_t\}\$$$

A partir do termo criado e fazendo o ajuste para um contrato pelo termo, replica-se um portfólio ao qual não apresenta resultado. Se isto ocorrer, mostra que o sintético

criado possui as mesmas características do *bond* G. Este título deverá render em t+1 um ajuste idêntico ao ajuste pelo forward de S. O ajuste para um contrato será feito da seguinte forma:

$$Ajuste_{1contrato} = (Forward_1 - Forward_0) * B_{1,1} \quad (67)$$

O preço do portfólio replicante em t+1 é função do novo valor de G, da nova taxa de juro de  $B_{1,t+1}$  e do investimento no momento anterior t. Onde  $B_{1,1}$  é o preço do *bond*  $B_1$  em  $dt^5$ .

O ajuste para a posição de G será feito da seguinte forma:

$$Ajuste_{G1} = G_1 - G_0 - G_0 * \left( \frac{B_1}{B_0} - 1 \right) \quad (68)$$

O resultado será a diferença entre o ajuste para um contrato do termo e o ajuste para um contrato de G. Com isto, se vê que o *forward* replica perfeitamente o *bond* G. O próximo passo será a precificação das opções pelo método proposto pelo modelo.

**Tabela 5: Sintético do Forward de S**

mts	Forward de S	Ajuste p/	G	B1	Ajuste	Resultado
0	100,2420	1 contrato	99,7356	(99,7356)		
1	100,1510	(0,0907)	99,7747	(99,7747)	(0,0907)	0,0000
2	99,9600	(0,1900)	99,4972	(99,4972)	(0,1900)	0,0000
3	100,0707	0,1103	99,7010	(99,7010)	0,1103	(0,0000)
4	100,2181	0,1468	99,7734	(99,7734)	0,1468	(0,0000)
5	100,2442	0,0259	99,7766	(99,7766)	0,0259	(0,0000)
6	100,4387	0,1934	99,8543	(99,8543)	0,1934	0,0000
7	100,3876	(0,0509)	99,9312	(99,9312)	(0,0509)	(0,0000)
8	100,4016	0,0139	99,9272	(99,9272)	0,0139	0,0000
9	100,5682	0,1659	100,1450	(100,1450)	0,1659	(0,0000)
10	100,4563	(0,1115)	100,1237	(100,1237)	(0,1115)	(0,0000)
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
995	97,0548	(0,1098)	97,0477	(97,0477)	(0,1098)	(0,0000)
996	97,2297	0,1749	97,2241	(97,2241)	0,1749	0,0000
997	97,3299	0,1002	97,3255	(97,3255)	0,1002	(0,0000)
998	97,2954	(0,0345)	97,2926	(97,2926)	(0,0345)	0,0000
999	97,3136	0,0182	97,3122	(97,3122)	0,0182	(0,0000)
1000	97,2072	(0,1064)	97,2072	(97,2072)	(0,1064)	0,0000

<sup>5</sup> Repare que o ajuste deste contrato não é igual ao ajuste dos contratos futuros na bolsa, pois o mesmo será no final, enquanto o dos futuros é diário.

A Tabela 6 mostra os cálculos do delta e do preço da *call* pela volatilidade na metodologia proposta em (54) e também os valores calculados pela volatilidade de G. Nota-se que os preços são muito próximos, o que mostra a consistência da metodologia proposta, corroborando o que foi apresentado na Tabela 4.

**Tabela 6: Comparação entre as *calls* pela metodologia proposta e via *bond G***

dtS	Call Met. Prop.	Delta Met. Prop.	Call	Delta G
0	1,8373	0,5066	1,8428	0,5092
1	1,7930	0,4995	1,7985	0,5014
2	1,6969	0,4826	1,7028	0,4850
3	1,7516	0,4926	1,7569	0,4945
4	1,8230	0,5049	1,8286	0,5072
5	1,8349	0,5070	1,8404	0,5094
6	1,9321	0,5231	1,9383	0,5261
7	1,9071	0,5194	1,9125	0,5217
8	1,9132	0,5205	1,9193	0,5229
9	2,0013	0,5350	2,0083	0,5372
10	1,9429	0,5259	1,9494	0,5276
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
995	-	-	-	-
996	-	-	-	-
997	-	-	-	-
998	-	-	-	-
999	-	-	-	-
1000	-	-	-	-

Na tabela acima, nas colunas 2 e 3 têm-se o cálculo do prêmio da opção e o respectivo delta, efetuados pela metodologia proposta, e nas duas colunas seguintes, o prêmio e o delta tomando-se como parâmetro o *bond G*. Note que a opção simulada termina fora do dinheiro e que os últimos valores são nulos.

A Tabela 7, parte dos cálculos das opções de compra feitas de G e cria-se um portfólio replicante com uma *call* sintética e o resultado obtido é mostrado na coluna 9. A diferença com relação ao que foi feito na Tabela 5, refere-se ao fato de que nesta tabela fez-se um portfólio replicante apenas para S. A partir da coluna 7 é mostrado o resultado obtido deste portfólio (Grana) e o preço da *call* sintética, e na última coluna a diferença de preço entre a *call* de G e a sintética.

**Tabela 7: Portfólio replicante com *call* sintética**

dt	Call	Delta G	Quan G	Negoc G	Cx Corrig	Grana	Call Sintética	Diferença
0	1,8428	0,5092	0,5092	(48,9464)	-	(48,9464)	1,8428	-
1	1,7985	0,5014	0,5014	0,7816	(48,9466)	(48,1650)	1,8625	(0,0640)
2	1,7028	0,4850	0,4850	1,6362	(48,1652)	(46,5290)	1,7232	(0,0204)
3	1,7569	0,4945	0,4945	(0,9486)	(46,5292)	(47,4778)	1,8218	(0,0649)
4	1,8286	0,5072	0,5072	(1,2666)	(47,4780)	(48,7446)	1,8574	(0,0288)
5	1,8404	0,5094	0,5094	(0,2231)	(48,7448)	(48,9679)	1,8588	(0,0184)
6	1,9383	0,5261	0,5261	(1,6696)	(48,9681)	(50,6377)	1,8982	0,0402
7	1,9125	0,5217	0,5217	0,4382	(50,6380)	(50,1998)	1,9384	(0,0259)
8	1,9193	0,5229	0,5229	(0,1204)	(50,2001)	(50,3204)	1,9360	(0,0167)
9	2,0083	0,5372	0,5372	(1,4309)	(50,3207)	(51,7515)	2,0497	(0,0414)
10	1,9494	0,5276	0,5276	0,9596	(51,7518)	(50,7922)	2,0380	(0,0886)
11	1,8040	0,5032	0,5032	2,4452	(50,7924)	(48,3471)	1,9184	(0,1144)
12	1,8623	0,5133	0,5133	(1,0108)	(48,3472)	(49,3580)	2,0402	(0,1779)
13	1,8082	0,5042	0,5042	0,9041	(49,3581)	(48,4540)	1,9757	(0,1676)
14	1,8403	0,5099	0,5099	(0,5722)	(48,4541)	(49,0263)	1,9824	(0,1421)
15	1,8687	0,5147	0,5147	(0,4783)	(49,0264)	(49,5047)	2,0217	(0,1530)
COL(1)	COL(2)	COL(3)	COL(4)	COL(5)	COL(6)	COL(7)	COL(8)	COL(9)

A quinta coluna é calculada da seguinte forma:

$$\text{Para o 1º dia: } \text{Negoc}_G = \text{Call}_0 - \Delta_0 * G_0 \quad (69)$$

$$\text{Para os demais dias: } \text{Negoc}_G = -(\Delta_1 - \Delta_0) * G_0 \quad (70)$$

A sexta coluna, caixa corrigido, nada mais é do que a grana do dia anterior (7ª coluna) ajustada pelo Rf do dt em questão. A grana é o somatório de Negoc G e Cx Corrig.

$$\text{A call sintética é: } \text{Call}_{\text{Sint}} = \text{Grana} + \Delta G * G \quad (71)$$

E por fim a última coluna é a diferença entre a *call* de G e a *call* sintética.

Na Tabela 8 é conduzida uma análise análoga à anterior, a diferença é que o *Forward* será utilizado para se fazer o portfólio replicante ao invés do *bond* G.

**Tabela 8: Portfólio replicante via *Forward***

dt	Quan F	\$ F e call	Ajuste F	Cx Corrig	Grana	Call Sint	Diferença
0	0,5092	1,8428		-	1,8428	1,8428	-
1	0,5014	-	(0,0462)	1,8452	1,7990	1,7990	(0,00057)
2	0,4850	-	(0,0953)	1,7975	1,7022	1,7022	0,00066
3	0,4945	-	0,0535	1,7038	1,7573	1,7573	(0,00033)
4	0,5072	-	0,0726	1,7560	1,8285	1,8285	0,00005
5	0,5094	-	0,0131	1,8281	1,8413	1,8413	(0,00089)
6	0,5261	-	0,0985	1,8391	1,9376	1,9376	0,00069
7	0,5217	-	(0,0268)	1,9401	1,9133	1,9133	(0,00087)
8	0,5229	-	0,0073	1,9130	1,9203	1,9203	(0,00096)
9	0,5372	-	0,0868	1,9213	2,0080	2,0080	0,00020
10	0,5276	-	(0,0599)	2,0099	1,9499	1,9499	(0,00049)
11	0,5032	-	(0,1495)	1,9510	1,8015	1,8015	0,00247
12	0,5133	-	0,0588	1,8038	1,8626	1,8626	(0,00033)
13	0,5042	-	(0,0536)	1,8622	1,8087	1,8087	(0,00048)
14	0,5099	-	0,0333	1,8077	1,8410	1,8410	(0,00074)
15	0,5147	-	0,0281	1,8414	1,8695	1,8695	(0,00081)
COL(1)	COL(2)	COL(3)	COL(4)	COL(5)	COL(6)	COL(7)	COL(8)

Na coluna 2, a quantidade de F é igual ao  $\Delta G$ . Na coluna 3 apenas na data inicial do portfólio é que o mesmo apresenta valor, pois houve a compra da *call*, a partir dos dias seguintes serão efetuados os ajustes nas posições pelo *forward*. A quarta coluna, o ajuste F será feito da seguinte forma:

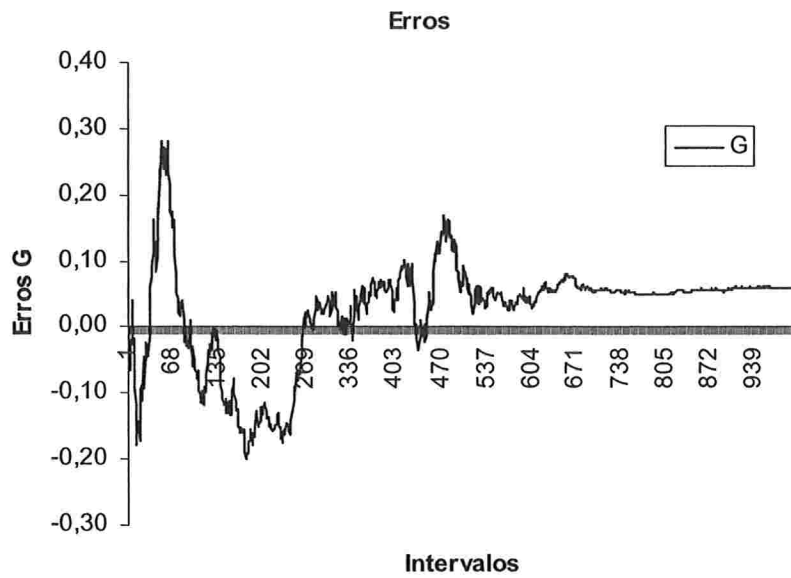
$$Ajuste_F = \Delta G * (F_1 - F_0) * B_1 \quad (72)$$

O caixa corrigido será:

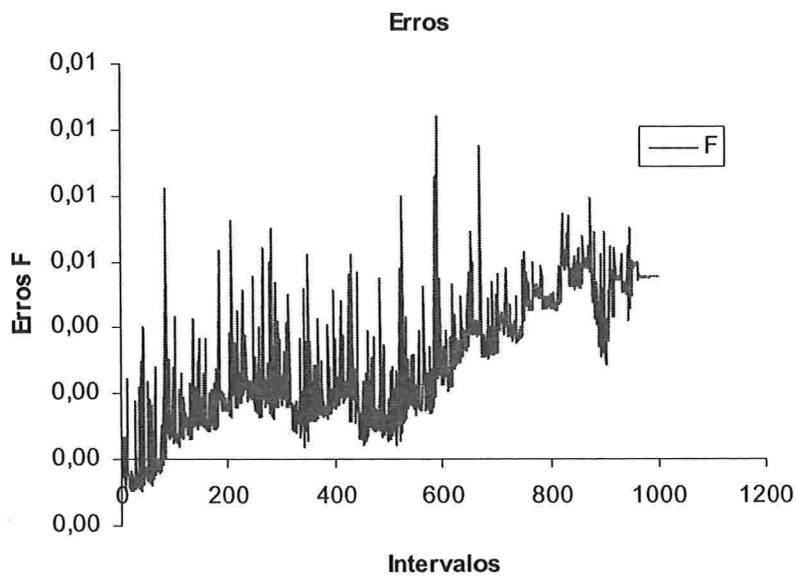
$$CxCorrig_F = Grana_{D0} * \frac{B_1}{B_0} \quad (73)$$

A Grana será o somatório das colunas 3 a 5 que também é a *call* sintética. E por fim a última coluna é a diferença entre as *calls*. O gráfico abaixo mostra para o exemplo dado, os erros entre a modelagem via *Forward*, e a modelagem partindo de G. Pelas Tabelas 7 e 8 observa-se que em ambos o erro absoluto é pequeno, tanto o portfólio replicante pelo *Forward* ou por G são consistentes, no entanto, a metodologia usada pelo termo apresenta erros relativos inferiores quando comparados a G. Veja gráficos 1 e 2 a seguir.

**Gráfico 1: Diferença de valores no portfólio replicante via *bond G***



**Gráfico 2: Diferença de valores no portfólio replicante via *Forward***





## 4. TESTES EMPÍRICOS

### 4.1 - Descrição da Amostra

Foi utilizada a base de dados da BM&F com os preços médios das opções de compra européias de dólar sobre o mercado à vista de 02/01/1998 a 28/12/2001; ao todo foram 7809 preços de fechamento de opções negociados. É conveniente ressaltar que o ativo objeto é a cotação média de venda (PTAX 800) divulgada pelo BACEN. O lote padrão de cada contrato é de US\$ 50.000,00 e o preço informado está referenciado em milhares de reais.

As informações relativas às taxas de juros locais e em moeda estrangeira foram também obtidas na BM&F, *swaps* em pré-fixados e *swaps* com variação cambial mais um cupom cambial sujo indexado ao dólar, para maiores detalhes ver Cunha e Lemgruber (1999). Nos cálculos de volatilidades e correlações de Ptax, juro local e cupom cambial foi usado o método de alisamento exponencial com fator de decaimento de 0.94<sup>6</sup>, e as interpolações das taxas de juros efetuadas pelo critério *flat-forward*<sup>7</sup>. Foram considerados como erros de divulgação e, portanto excluídas da base de dados 32 observações em que os preços negociados ficaram acima de 200% conjuntamente em relação ao B&S e do modelo proposto.

O critério de avaliação consiste em se comparar o último preço efetivamente negociado com a precificação do modelo com taxas de juro interna e externa estocástica, e também o último preço efetivamente negociado com a modelagem tradicional. O objetivo é identificar através de análise estatística qual das duas modelagens apresenta maior aderência em relação ao preço efetivamente negociado.

---

<sup>6</sup> Veja trabalho de Lemgruber e Ohanian (1997).

<sup>7</sup> Vide trabalho de Cunha e Lemgruber (2001).

## 4.2 - Comparação dos resultados

### 4.2.1 - Análise 1: Período de 04/01/1998 a 28/12/2001

Primeiramente é mostrada uma análise em toda a base de dados no total de 7809 observações. Com relação à liquidez das opções não se adota nenhuma premissa como proposto no artigo de Barros e Lemgruber (1997). O Gráfico 3, mostra a regressão entre os erros relativos da precificação pelo modelo proposto com o valor efetivamente negociado e a precificação via B&S com o efetivamente negociado. A variável dependente é o erro relativo entre o modelo proposto e o B&S e a variável independente é a volatilidade calculada por cada método. Calcula-se o erro relativo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{erro relativo}_{\text{Modelo Estoc.}} &= \frac{(\$neg - \$Mod.Estoc.)}{\$neg} \\ \text{erro relativo}_{\text{Modelo Trad.}} &= \frac{(\$neg - \$Mod.Trad.)}{\$neg} \end{aligned} \quad (74)$$

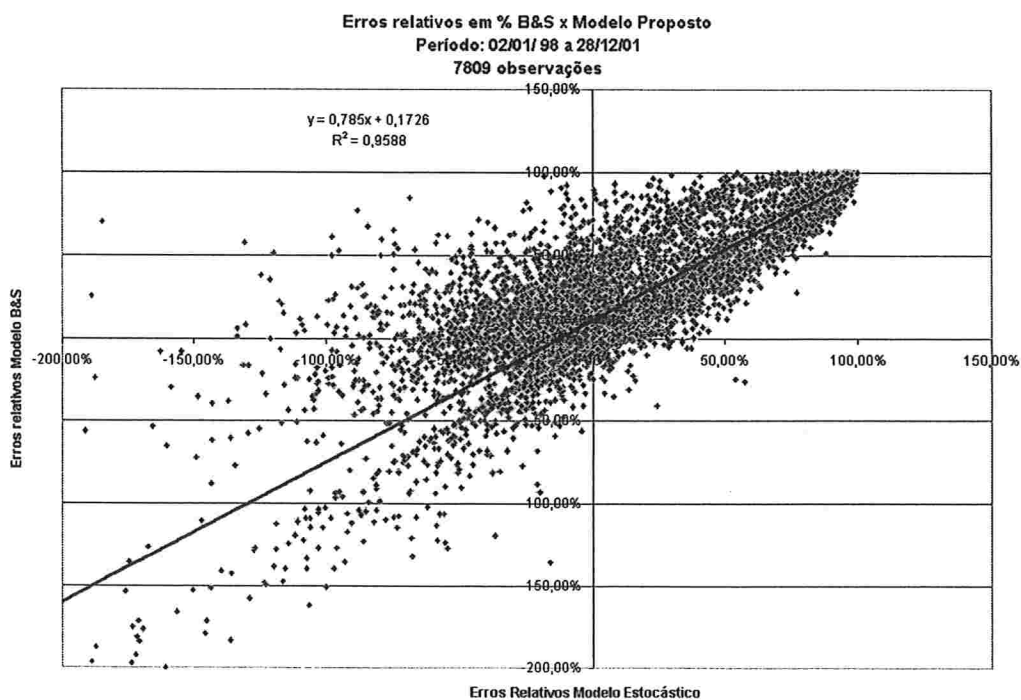
Onde:

$\$neg$  = preço de fechamento da opção;

$\$Mod.Estoc.$  = preço calculado pelo modelo estocástico;

$\$Mod.Trad.$  = preço calculado pelo modelo tradicional.

**Gráfico 3: Erros relativos Método Tradicional x Modelo Proposto**



O que se observa é o alto valor de  $R^2$  indicando que os erros dos modelos podem ser explicados razoavelmente por uma regressão linear e estão sistematicamente relacionados. Também indica um alto poder de explicação, e a uma pequena diferença entre os erros dos mesmos. Outro ponto é o valor do intercepto que passa no eixo do modelo tradicional mostrando a existência de um erro maior nesta modelagem. Por fim, se nota a inclinação positiva da reta, significando que em ambos os modelos os erros estão no mesmo sentido, por exemplo, o modelo proposto subavalia uma opção o mesmo ocorrendo com o modelo padrão. Em seguida, tem-se a Tabela 9, com o resumo da estatística:

**Tabela 9: Estatística Análise 1**

Período: 02/01/98 a 28/12/2001

Erro Modelo Proposto = f(vol)				Razão erros = f(razao vol)			
	Const	Vol Mod. Prop.		Const	Razão Vols		
	2	1		2	1		
1	0,429575599	-6,810946444	1	3,572152533	-2,370904548		
2	0,032769221	0,617853348	2	2,012571361	1,697735645		
3	2,076339129	0,01532682	3	39,37379195	0,000249744		
4	7807	121,5189816	4	7807	1,950239755		
5	33657,41487	523,8907108	5	12103156,91	3023,447902		
t	13,10911846	-11,02356483	t	1,774919688	-1,396509848		
Erro BS = f(vol)				Erro Médio Mod. Prop.		Erro Médio BS	
	Const	Vol BS					
	2	1					
1	0,511091879	-6,380004457		0,177778716		0,312135148	
2	0,026477732	0,596427255					
3	1,665316186	0,014445201		0,0000%			
4	7807	114,4266021					
5	21650,98134	317,3367782					
t	19,30270577	-10,69703707					
				Erro Médio Mod. Prop.	7,50850		16,44417
				t teste			
				p-value	0,000%		0,000%

Nº de Observações: 7809

A Tabela 9 apresenta três regressões, a regressão da parte superior à esquerda, é a regressão dos erros relativos do modelo proposto com a volatilidade calculada por este método, sendo esta última a variável independente. Na parte inferior, há a regressão dos erros relativos do modelo tradicional com a sua respectiva volatilidade. À direita da tabela, se têm uma regressão feita pelos erros relativos entre os 2 modelos e a razão das volatilidades. Na parte inferior, se observa o erro médio relativo de cada modelagem e o *p-value* entre os erros do modelo proposto e do

tradicional, testando a hipótese dos modelos não serem iguais. Por fim, embaixo, há o teste t e o *p-value* para cada método. Nesta parte é feita uma comparação dos erros de cada modelagem, e se eles são diferentes de zero ou os preços são equivalentes ao preço de fechamento. A seguir tem-se a explicação detalhada dos n<sup>os</sup> de 1 a 5 e da letra t que aparecem na Tabela 9.

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente (volatilidade do modelo).

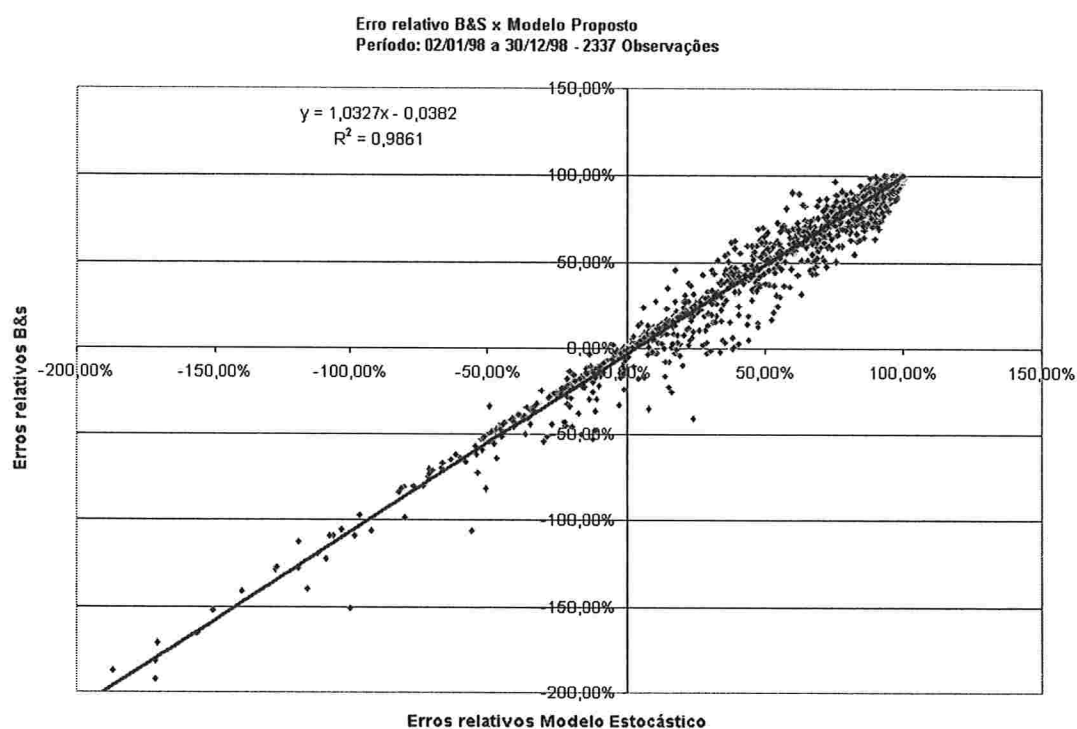
A volatilidade calculada pela modelagem proposta explica melhor o modelo do que a volatilidade calculada no B&S, pois apresenta maior valor absoluto de t. O erro médio do primeiro modelo é menor. Pelo *p-value* entre ambos se conclue que eles não são iguais. Finalmente, pelo teste t de cada erro relativo, se vê que os erros são diferentes de zero, e que o modelo tradicional apresenta significância maior.

#### **4.2.2 - Análise 2: Período anterior ao regime de flutuação cambial**

Nesta análise se faz a segregação da base para o período de 02/01/1998 a 28/12/1998, equivalente a 2337 vencimentos de opções de compra negociados, período no qual o câmbio no Brasil era controlado pelo Banco Central. Com relação à liquidez das opções nenhuma premissa é adotada. O gráfico a seguir, mostra a regressão entre os erros relativos da precificação pelo modelo proposto com o valor efetivamente negociado e a precificação via B&S com o efetivamente negociado. Nota-se que a regressão, como na análise inicial, também apresenta um coeficiente  $R^2$  significativo, e ligeiramente maior que o anterior. A dispersão dos erros é menor do que a primeira análise, fato explicado pela baixa volatilidade do dólar no período (em torno de 1% ao ano), e a volatilidade da moeda é o fator de maior peso neste tipo de modelagem,

apesar de que neste período as taxas de juros local e externa apresentavam volatilidades consideráveis. A maturidade das opções neste período era muito curta, em média de 22 dias úteis, devido a fatores internos, como ano eleitoral no Brasil, e externos, como a: crise da Ásia no final de 1997 e crise da Rússia em meados de 1998 que contribuíram com este quadro.

**Gráfico 4: Período anterior ao regime de flutuação cambial**



A tabela a seguir mostra a estatística para este período.

Tabela 10: Estatística 2

Período: 04/01/98 a 30/12/98

Erro Modelo Proposto = f(vol)			Razão erros = f(razao vol)		
	Const	Vol Mod. Prop.		Const	Razão Vols
	2	1		2	1
1	0,739415464	-10,98993732	1	1,139320117	-0,144097881
2	0,019804778	4,234261164	2	0,373063738	0,347828124
3	0,586135381	0,002876717	3	4,732186965	7,34966E-05
4	2335	6,73651294	4	2335	0,171627074
5	802,2001895	2,314360581	5	52289,04075	3,843346931
t	37,33520612	-2,595479328	t	3,053955667	-0,414278981

Erro BS = f(vol)			Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
	Const	Vol BS		
	2	1		
1	0,758824016	-22,00254742		0,698771342
2	0,028492551	7,45805449	P-value	0,683436922
3	0,609281797	0,003713575		0,0000%
4	2335	8,703517903	Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
5	866,8087608	3,230957417	t teste	57,56174
			p-value	0,000%
t	26,63236503	-2,950172521		

Nº de Observações: 2337

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

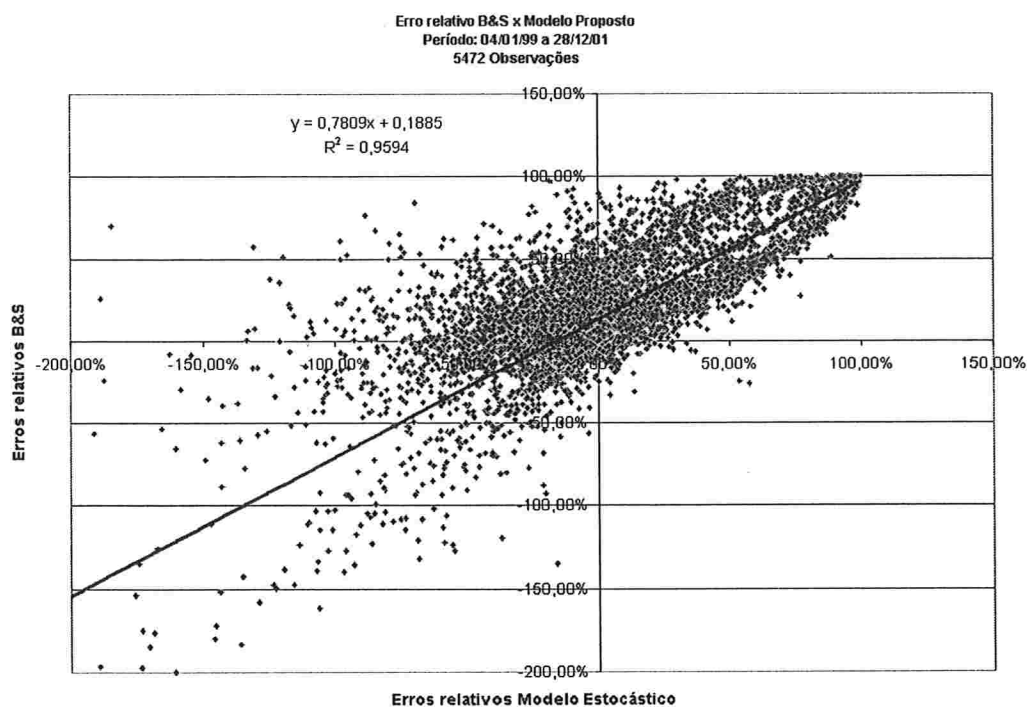
Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente.

Pelo teste t se observa que a volatilidade do modelo tradicional explica mais o modelo do que este coeficiente no modelo estocástico. O erro relativo médio do método tradicional é ligeiramente inferior ao modelo proposto. Como na análise inicial, se vê que os modelos não são significativamente iguais ( $p\text{-value}=0\%$ ). Com relação aos erros relativos de cada metodologia, tabela da direita, se nota que em ambos os casos podem ser considerados que não são iguais aos preços reais de mercado.

### 4.2.3 - Análise 3: Base a partir de 99

Em seguida há uma análise para o período de 04/01/1999 a 28/12/2001, com o total de 5472 preços de fechamento do contrato de opções de compra. O motivo desta segregação é que a partir de 13/01/1999 o regime de câmbio fixo no país deixou de existir, passando a ser flutuante, com isto, houve um incremento considerável da volatilidade no mercado cambial e onde poderá haver uma possibilidade maior de se notar alguma diferença entre as duas modelagens.

**Gráfico 5: Erros relativos base a partir de 99**



Pela regressão no Gráfico 5, se nota a semelhança entre os coeficientes da mesma com as duas regressões obtidas anteriormente (Análise 1 e 2). Do gráfico acima se nota a inclinação positiva da reta, significando que ambos os modelos erram no mesmo sentido. Foi constatada a seguinte distribuição dos erros por quadrante:

1º quadrante: 2653

2º quadrante: 1473

3º quadrante: 1251

4º quadrante: 95

Os erros do 1º quadrante significam que os dois casos apresentam preços menores do que o preço efetivamente negociado. Os erros dos 2º e 4º quadrantes mostram as divergências entre as modelagens. No 2º quadrante o modelo tradicional apresenta preços menores do que o efetivamente negociado, enquanto o modelo proposto superavalia, sendo o contrário para o 4º quadrante. Já no 1º e 3º quadrantes se vê que os modelos erram no mesmo sentido, ou para menos (1º quadrante) ou para mais (3º quadrante). Pela distribuição nos quadrantes, nota-se no 2º quadrante um conjunto de pontos muito superior ao 4º quadrante, isto mostra, que o modelo proposto superavalia em relação ao modelo tradicional. Veja o Quadro 2 abaixo para melhor visualização.

**Quadro 2: Quadrantes**

Quadrantes	
II Mod. Prop. > Preço Neg. B&S < Preço Neg.	I Mod. Prop < Preço Neg. B&S < Preço Neg.
III Mod. Prop. > Preço Neg. B&S > Preço Neg.	IV Mod. Prop < Preço Neg. B&S > Preço Neg.

Na tabela a seguir, se têm à estatística dos modelos, a volatilidade do B&S tem um coeficiente de explicação maior do que no outro modelo. O erro médio do método proposto foi menor indicando que na média ele erra menos do que o outro modelo, e que enquanto o modelo subavalia e o modelo estocástico superavalia. Pelo *p-value* não se pode afirmar que os modelos são iguais. O fato mais relevante é que pelo *p-value* há o risco de se rejeitar a hipótese nula indevidamente em 8,72%, e pode-se admitir que o preço do modelo proposto não é diferente de zero.



**Tabela 11: Estatística 3**

Período: 04/01/99 a 28/12/01

Erro Modelo Proposto = f(vol)			Razão erros = f(razao vol)		
	Const	Vol Mod. Prop.		Const	Razão Vols
	2	1		2	1
1	0,082825511	-2,492313023	1	5,470528419	-3,897442469
2	0,055954881	0,884175741	2	3,31288448	2,692292839
3	2,434689734	0,001450475	3	46,93374516	0,000382967
4	5470	7,945623528	4	5470	2,095631097
5	32424,43632	47,09915249	5	12049187,1	4616,206797
t	1,480219579	-2,818798242	t	1,651288613	-1,447629475

Erro BS = f(vol)			Erro Médio Mod. Prop.		Erro Médio BS	
	Const	Vol BS				
	2	1				
1	0,279046023	-2,915642865		-0,044728551		0,153558348
2	0,044990509	0,8492875	P-value	0,0000%		
3	1,940340208	0,002149993				
4	5470	11,78580329	Erro Médio Mod. Prop.	(1,35813)	Erro Médio BS	5,84845
5	20594,11307	44,37260798	t teste	8,724%		0,000%
t	6,202330828	-3,433045775	p-value			

Nº de Observações: 5.472

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

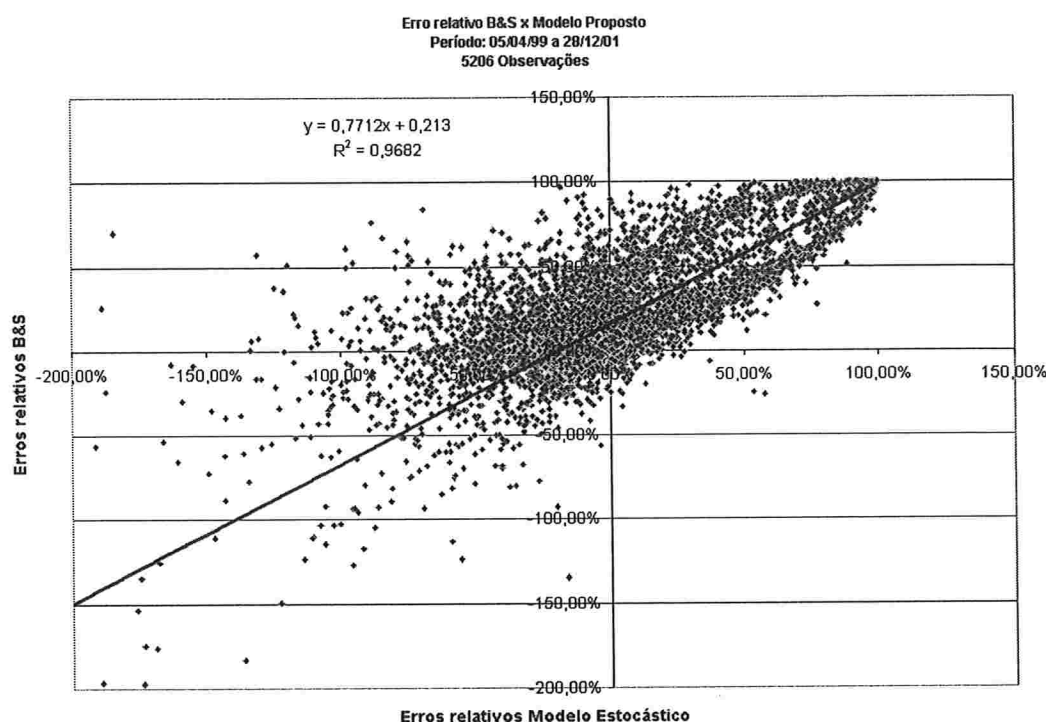
Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente.

#### 4.2.4 - Análise 4: Base a partir do 2º trimestre de 99

Uma nova análise é feita expurgando o primeiro trimestre de 1999, ou seja, para o período de 05/04/1999 a 28/12/2001 com 5206 observações, pois com a mudança do regime cambial em 13/01/1999 o mercado financeiro passou por momentos conturbados, o Banco Central atuou tanto no mercado de câmbio interbancário e no *open market* e utilizou-se de política monetária restritiva via aumento de juros e compulsórios. Neste período houve uma elevada desvalorização do Real (apenas em janeiro ele caiu 64,13%), com isto, aconteceu um incremento das volatilidades,

principalmente da Ptax. A volatilidade ao ano calculada diariamente deste indicador antes da desvalorização cambial era em torno de 1% e atingiu 65,60%<sup>8</sup>. Outro ponto é que neste período em alguns dias não houve a divulgação dos cupons cambiais e de swap pré-fixado da BM&F, diante destes fatos, surgiu o interesse em se expurgar o 1º trimestre da amostragem.

**Gráfico 6: Erros relativos a partir do 2º trimestre de 1999**



Como nas análises anteriores o  $R^2$  continua alto, a volatilidade calculada pelo método proposto explica melhor o modelo do que a volatilidade usada no modelo padrão. O erro médio do modelo estocástico é praticamente nulo, e o modelo proposto superavalia em relação ao preço efetivamente negociado, enquanto no modelo usual é o oposto. Também pode-se afirmar que os modelos não são iguais. Contudo, o ponto mais importante é que esta análise repete a Análise 3, a probabilidade de se rejeitar a hipótese nula indevidamente é de 19,15%, com o risco de rejeição tão alto, é melhor admitir a possibilidade do erro do modelo proposto não ser diferente de zero. Por último, a estatística mostra um descolamento grande entre os modelos, veja Tabela 12 nos dados à esquerda.

<sup>8</sup>Calculada pelo método de Alisamento Exponencial com fator de decaimento de 0,94.

**Tabela 12: Estatística 4**

Período: 05/04/99 a 28/12/01

Erro Modelo Proposto = f(vol)			Razão erros = f(razao vol)		
	Const	Vol Mod. Prop.	Const	Razão Vols	
	2	1	2	1	
1	0,078053389	-2,199596805	5,083336662	-3,615836741	
2	0,059128219	0,981220582	3,553155089	2,85839086	
3	2,474022083	0,000964709	47,67291153	0,0003074	
4	5204	5,025194333	5204	1,600200485	
5	31852,56654	30,75813545	11827164,59	3636,786034	
t	1,32007002	-2,241694523	1,430654316	-1,26499031	

Erro BS = f(vol)			Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
	Const	Vol BS		
	2	1		
1	0,209392706	-0,488106266	-0,029930895	0,189878732
2	0,050709547	1,075467416		
3	1,939815546	3,95804E-05	P-value	0,0000%
4	5204	0,205984362		
5	19582,05018	0,775095335		
t	4,129256072	-0,453855002		

	Erro Médio Mod. Prop.	Erro Médio BS
t teste	(0,87257)	7,06319
p-value	19,147%	0,000%

Nº de Observações: 5.206

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

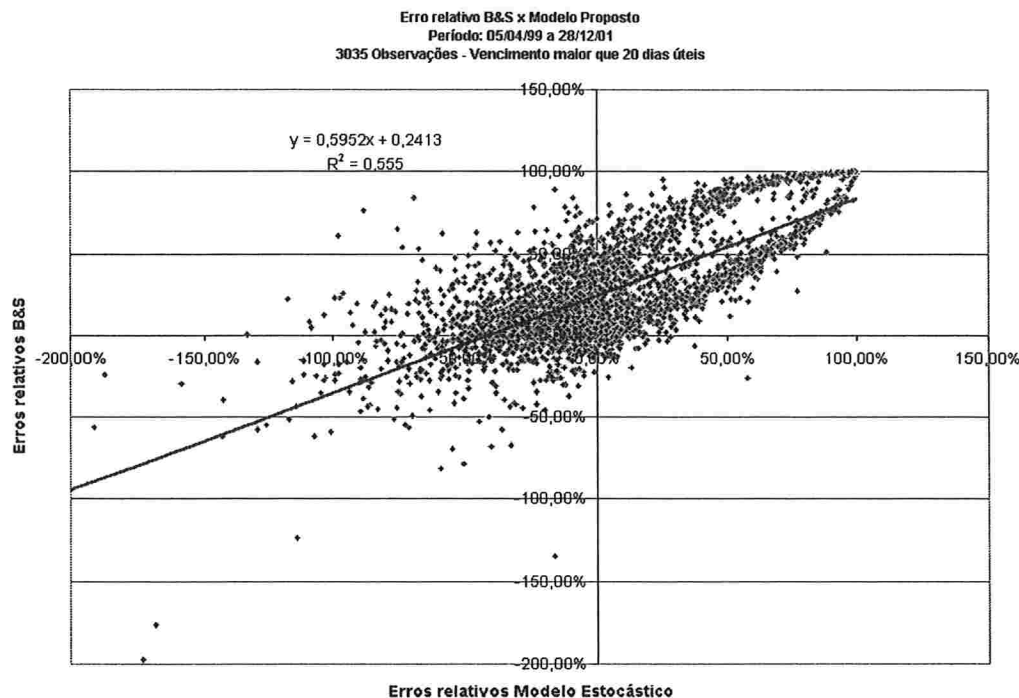
Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente.

#### 4.2.5 - Análise 5: Base a partir do 2º trimestre de 99, operações $\geq$ 21 dias úteis

Esta análise e as seguintes, também utilizam a base de dados do 2º trimestre de 1999, no total de 3035 observações, e nesta em particular, apenas as opções com vencimentos superiores a 20 dias úteis. A finalidade é descobrir alguma diferença nas metodologias quando se leva em consideração o efeito da maturidade. Vale mencionar que no processo de interpolação dos dados, o primeiro vértice informado pela BM&F é o de 21 dias úteis, e para a precificação das opções se utiliza o cupom

sujo<sup>9</sup>. Com isto, o objetivo desta análise é eliminar algum erro de precificação que exista devido a processos de extrapolação em operações com prazo inferior ao mencionado.

**Gráfico 7: Base a partir do 2º trimestre de 99, operações  $\geq$  21 dias úteis**



Pelo gráfico 7, se observa pela primeira vez uma alteração significativa do  $R^2$ , inclusive a explicação fornecida pela regressão foi baixa. Pela Tabela 13, nota-se que a volatilidade calculada pelo modelo proposto explica melhor a regressão do que a volatilidade usada na metodologia tradicional que possui apenas um fator de risco. Outro ponto, é que o erro relativo médio do modelo proposto é menor, e ambos os modelos erram no mesmo sentido. Também se pode mencionar que as metodologias continuam não sendo iguais. O teste t para os erros individuais mostra que nos dois casos os erros são diferentes de zero, inclusive revelando um poder de explicação maior para o modelo padrão. Foi constatada a seguinte distribuição dos erros por quadrante:

<sup>9</sup> Veja trabalho de Baranowsky, Cunha e Lemgruber (1999)

1º quadrante: 1402

2º quadrante: 1064

3º quadrante: 514

4º quadrante: 55

Os erros do 1º quadrante significam que os dois casos apresentam preços menores do que o preço efetivamente negociado. Os erros dos 2º e 4º quadrantes mostram as divergências entre as modelagens. No 2º quadrante o modelo tradicional apresenta preços menores do que o efetivamente negociado. Enquanto o modelo proposto super avalia, sendo o contrário para o 4º quadrante. Já no 1º e 3º quadrantes se vê que os modelos erram no mesmo sentido, ou para menos (1º quadrante) ou para mais (3º quadrante). Pela distribuição nos quadrantes, nota-se no 2º quadrante um conjunto de pontos muito superior ao 4º quadrante, isto mostra, que o modelo proposto superavalia em relação ao modelo tradicional.

**Tabela 13: Estatística 5**

Período: 05/04/99 a 28/12/01  
Vencimento maior que 20 dias úteis

Erro Modelo Proposto = f(vol)			Razão erros = f(razao vol)		
	Const	Vol Mod. Prop.	Const	Razão Vols	
	2	1	2	1	
1	0,309384483	-4,483716951	5,434781197		-4,63004954
2	0,013659021	0,187727829	4,314649621		3,375311434
3	0,397623993	0,158307076	45,27792667		0,000620014
4	3033	570,4519392	3033		1,881670492
5	479,5319786	90,19121236	6217924,923		3857,59507
t	22,65055997	-23,88413572	1,259611249		-1,371739951

Erro BS = f(vol)			Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
	Const	Vol BS		
	2	1		
1	0,461087808	-4,041205398	0,032416015	0,26060784
2	0,012661692	0,225022286	P-value	0,0000%
3	0,329179609	0,096119078		
4	3033	322,5304972	Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
5	328,6534993	34,94915151	t teste	4,12112      41,47258
			p-value	0,002%      0,000%
t	36,41597051	-17,95913409		

Nº de Observações: 3.035

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

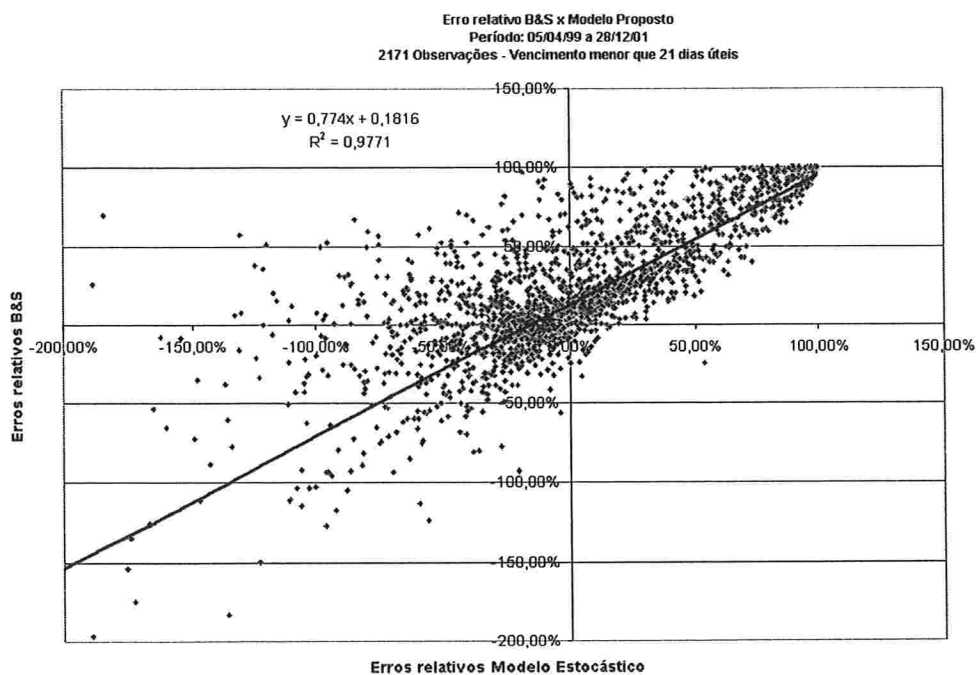
Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente

#### 4.2.6 - Análise 6: Base a partir do 2º trimestre de 99, operações <s 21 dias úteis

Este estudo utiliza apenas as opções com vencimento inferior a 21 dias úteis, o tamanho da amostra é de 2171 observações, e a finalidade é encontrar alguma diferença nas metodologias quando as maturidades são curtas. Vale lembrar que no processo de interpolação dos dados, o primeiro vértice informado pela BM&F é o de 21 dias úteis, e que pode haver algum erro ocasionado principalmente pelo processo de extrapolação da taxa.

Gráfico 8: Base a partir do 2º trimestre de 99, operações <s 21 dias úteis



A estatística da Tabela 14 mostra uma diferença significativa das estatísticas em relação às análises anteriores. Em ambos, o teste t tanto para a volatilidade calculada como para a constante não foram significativos. Os erros também ocorrem em

sentidos opostos, o B&S erra para menos, enquanto que o modelo proposto para mais, porém o primeiro apresenta erros absolutos em média inferiores. O único ponto em comum em relação às outras análises é o *p-value* continua mostrando que os modelos não são iguais. Os baixos t estatísticos, no teste de diferença de zero, indicam que os erros não são diferentes de zero a um nível de segurança de 95%.

**Tabela 14: Estatística 6**

Período: 05/04/99 a 28/12/01  
Vencimento menor que 21 dias úteis

Erro Modelo Proposto = f(vol.)			Razão erros = f(razao vol)		
	Const	Vol Mod. Prop.	Const	Razão Vols	
	2	1		2	1
1	-0,134026483	0,539931802	1	1,059804803	0,906350867
2	0,163978193	4,536074231	2	6,383754723	5,355235344
3	3,797860838	6,53213E-06	3	50,81645987	1,3206E-05
4	2169	0,014168292	4	2169	0,028644127
5	31285,10713	0,204359864	5	5601036,016	73,9680892
t	-0,817343331	0,119030636	t	0,166015903	0,169245758

Erro BS = f(vol)			Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
	Const	Vol BS		
	2	1		
1	-0,036210057	4,797451276		-0,117090209
2	0,135089107	4,490389314		0,09100133
3	2,973117974	0,000525975	P-value	0,0000%
4	2169	1,141440174		
5	19172,72473	10,08968107	Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
t	-0,268045724	1,068382036	t teste	(1,43685)
			p-value	7,545%

Nº de Observações: 2.171

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

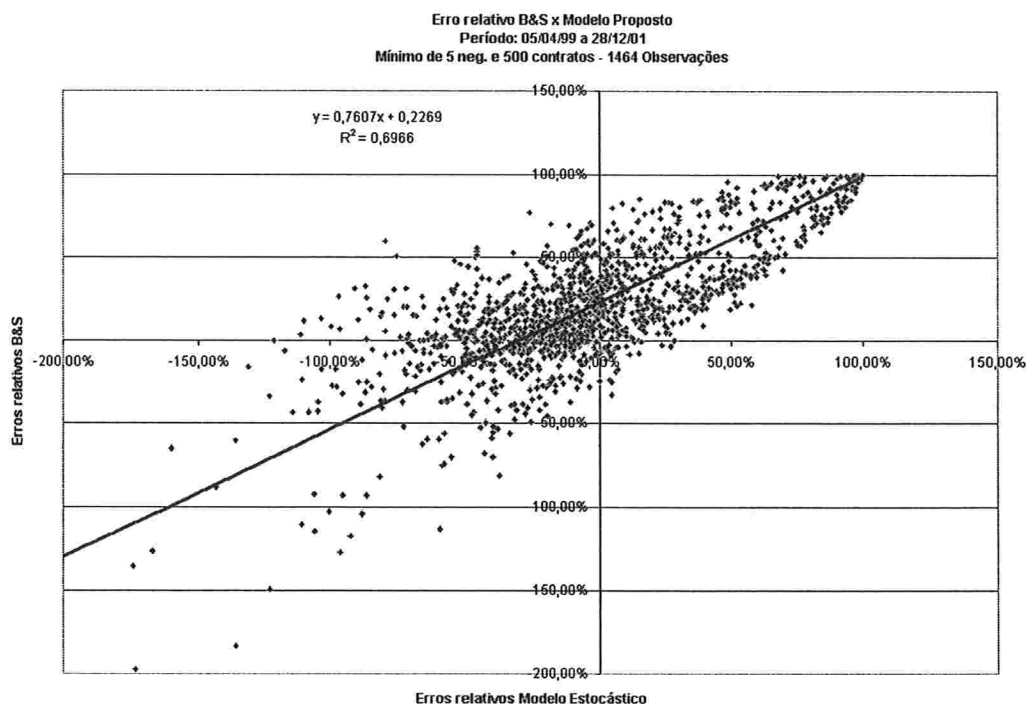
Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente

#### 4.2.7 - Análise 7: Base a partir do 2º trim de 99, mínimo de 5 neg. e 500 lotes

Nesta análise existe um critério empírico de liquidez, no qual são consideradas apenas as séries de opções com no mínimo 500 lotes negociados e número mínimo de registros de negócios de 5 operações no dia. O número total de observações é de 1464. A finalidade é ver se os erros são influenciados pela baixa liquidez em alguns negócios, ou se existe a influência da liquidez nos preços da bolsa. Pelo que se observa no Gráfico 9, existe uma nítida diferença da regressão feita com esta premissa e a regressão feita da Análise 3 que não coloca estes parâmetros de liquidez.

Gráfico 9: Base a partir do 2º trimestre de 99, mínimo de 5 neg. e 500 lotes



Pela Tabela 15, se vê que a volatilidade do modelo proposto explica melhor a regressão do que a do modelo tradicional, e o primeiro modelo é superior ao B&S, pois seu erro médio é próximo de zero. Esta análise repete a Análise 6, com o modelo estocástico precisando mais e o B&S para menos. Pelo teste t entre os modelos se afirmou que os mesmos não são iguais. Por último, pelo *p-value* dos erros



de cada modelo, se vê que eles são diferentes de zero, porém o modelo proposto apresenta um resultado ligeiramente superior.

**Tabela 15: Estatística 7**

Período: 05/04/99 a 28/12/01  
Mínimo de 5 neg. e 500 contratos

Erro Modelo Proposto = f(vol,)			Razão erros = f(razao vol)		
	Const	Vol Mod. Prop.		Const	Razão Vols
	2	1		2	1
1	0,157734636	-4,718415466	1	7,362690028	-4,652560226
2	0,02569118	0,541221893	2	9,385246365	7,599479683
3	0,51607229	0,049417859	3	64,82853587	0,000256305
4	1462	76,00490924	4	1462	0,37481442
5	389,3753498	20,24243374	5	6144404,51	1575,247204
t	6,139641547	-8,718079447	t	0,784496191	-0,612220892

Erro BS = f(vol)			Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS	
	Const	Vol BS		
	2	1		
1	0,360123829	-4,697261077	-0,032893884	0,201842586
2	0,024965372	0,643294174	P-value	0,0000%
3	0,473877458	0,035185725	Erro Médio Mod. Prop.	Erro Médio BS
4	1462	53,31754724	t teste	(2,37858)
5	328,3064938	11,97298016	p-value	0,875%
t	14,42493343	-7,301886553		

Nº de Observações: 1.464

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente

#### 4.2.8 - Análise 8: Critério *MONEYNESS*

Esta análise consiste na criação de um critério estabelecendo uma relação entre o preço do ativo subjetivo e o preço de exercício da opção, e com isto, ter uma referência se a opção está no dinheiro, fora do dinheiro ou dentro do dinheiro. Outro ponto a mencionar, é que a partir desta análise, além da variável independente

volatilidade, foram inseridas mais duas variáveis: *moneyness* e a maturidade da opção. A seguir é mostrado o cálculo deste novo critério.

$$Moneyness = \left[ \frac{(Ptax_{d-1} e^{-qT})}{K e^{-R_f T}} \right] \quad (75)$$

Onde:

$Ptax_{d-1}$  = cotação da Ptax 800 do dia anterior divulgado pelo BACEN;

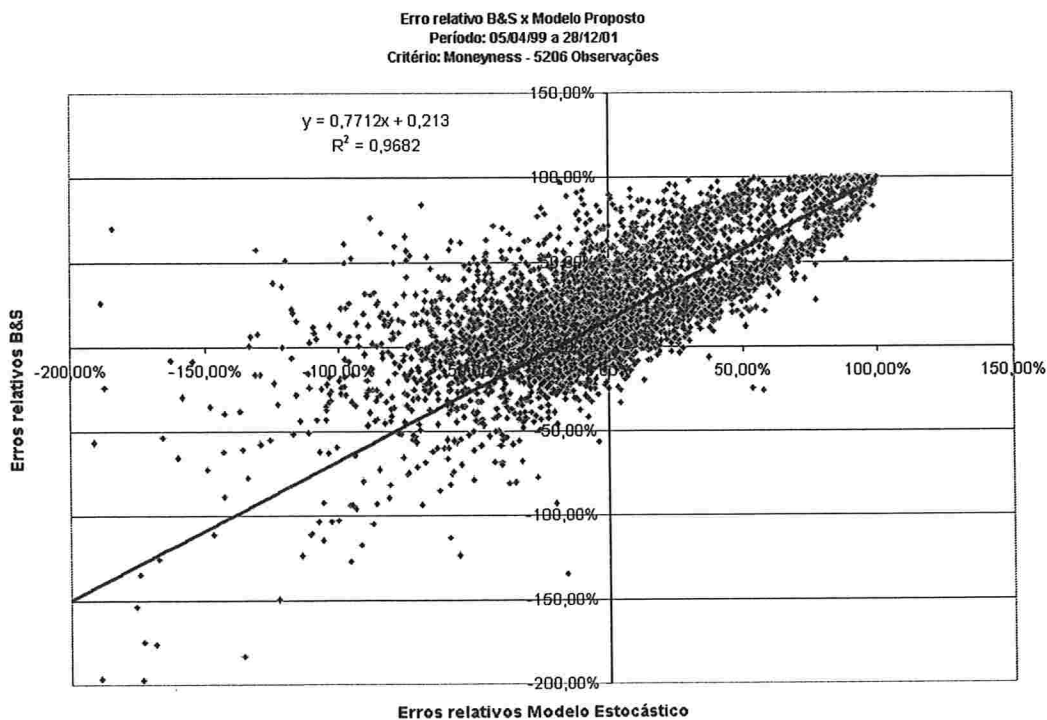
K = preço de exercício;

$R_f$  = taxa de juro interna;

q = taxa de juro do cupom cambial.

O gráfico 10 é idêntico ao gráfico 5 já que a base de dados é a mesma, o que se altera é apenas a Tabela 16 com a inclusão das duas novas variáveis independentes.

**Gráfico 10: Critério *MONEYNESS***



**Tabela 16: Estatística 8**

Período: 05/04/99 a 28/12/01  
 Critério : Moneyness

Erro Modelo Proposto = f(vol,moneyness, maturity)					Razão erros = f(razao vol, moneyness, maturity)				
	Const	Moneyness	Vol Mod. Prop.	Maturity		Const	Razão Vols	Moneyness	Maturity
	4	3	2	1		4	3	2	1
1	2,6107643	-2,578958937	-5,180381925	0,057961278	1	-20,23638754	-4,398969601	27,37513039	-0,06535
2	0,57508319	0,576522194	1,171151187	0,023276373	2	11,30980574	2,871560512	11,18238843	0,389686
3			2,465495715	0,008220219	3			47,64678941	0,001786
4			5202	14,3720004	4			5202	3,103219
5			31621,23677	262,0879051	5			11809666,44	21134,93
t	4,53980287	-4,473303829	-4,423324659	2,490133538	t	-1,789278084	-1,531909073	2,448057546	-0,1677

Erro B&S = f(vol,moneyness, maturity)				
	Const	Moneyness	Vol BS	Maturity
	4	3	2	1
1	3,60030065	-3,399524376	-3,775606139	0,010199118
2	0,45347442	0,452317114	1,342931622	0,018774762
3			1,928174298	0,012385226
4			5202	21,74530258
5			19340,28755	242,5377191
t	7,93936878	-7,515798704	-2,811465661	0,543235526

Erro Médio Mod. Prop	Erro Médio BS
-0,029930895	0,189878732
P-value	0,0000%

Erro Médio Mod. Prop	Erro Médio BS
t teste (0,87257)	7,06319
p-value	19,147%

Nº de Observações: 5.206

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o R<sup>2</sup>;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente

Pela Tabela 16 se observa o critério de *moneyness* é significativo nos dois modelos, porém no B&S apresenta maior valor. A maturidade tem significância no modelo proposto e não tem no B&S, este ponto é importante, pois faz todo sentido já que a medida que o prazo aumenta, há o incremento da volatilidade no modelo proposto via volatilidades e correlações entre o dólar e as taxas de juro prefixadas locais e os cupons cambiais.

A partir desta análise será inserida mais uma tabela (Tabela 17) apresentando alguns dados adicionais como: o nº mínimo de negócios da amostra (coluna 1), os erros médios (colunas 2 e 3), os *p-values* dos erros individuais (colunas 4 e 5) o *p-value* entre os modelos (coluna 6), e o nº de observações (coluna 7). Esta tabela mostra os

parâmetros mencionados anteriormente, como: o erro relativo médio de cada modelo, o *p-value* dos erros individuais em relação ao preço negociado e o *p-value* entre os erros dos modelos, e também o tamanho da amostra quando se variar o número de negócios. Através desta nova tabela pode-se notar o efeito da liquidez nas estatísticas. Na coluna 1 quando se vê n° de negócios igual a 1, refere-se a toda a base de dados, e quando é mostrado 2, somente estão na amostra os contratos que tiveram no mínimo 2 negócios no dia.

Na Tabela 17 se vê que os erros médios do modelo proposto são sempre inferiores ao modelo tradicional independentemente do tamanho da amostra. Na coluna 4, nota-se que na maioria das vezes pode-se considerar que os erros do modelo proposto não são diferentes de zero para o nível de significância de 5%, o que não acontece no modelo convencional. E a coluna 6 afirma que os dois modelos não são iguais.

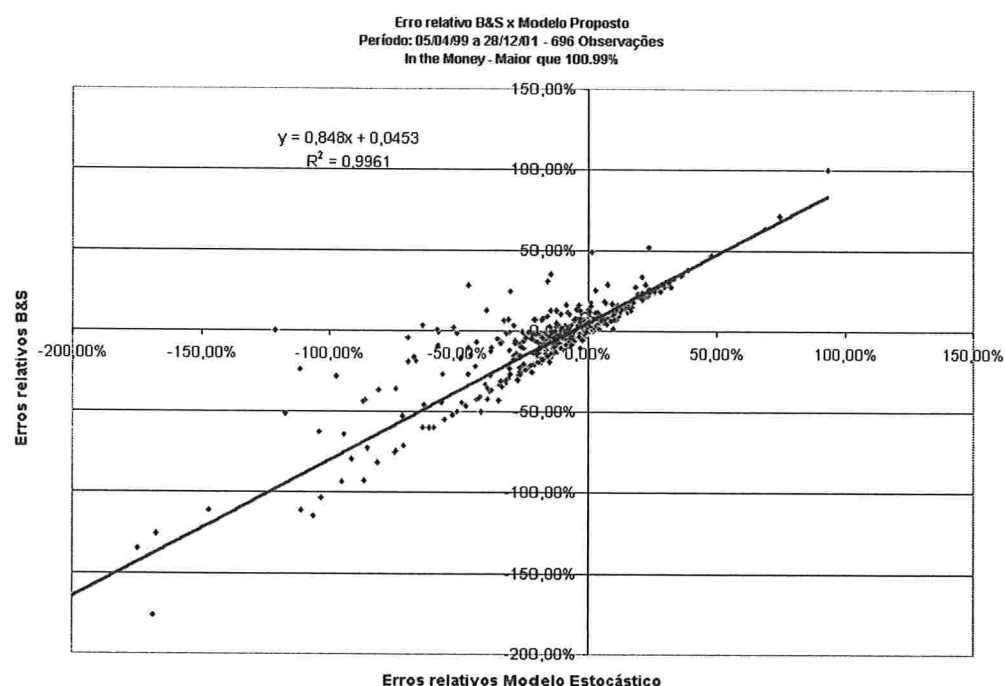
**Tabela 17: Estatística alternando o n° de negócios no dia**

N° Neg.	Erro Médio		Mod. Prop.	pValue		Amostra
	Mod. Prop.	BS		B&S	Dif.Médias	
1	-2,9931%	18,9879%	19,1469%	0,0000%	0,0000%	5.206
2	-0,1608%	21,1377%	45,1437%	0,0000%	0,0000%	3.385
3	-1,1133%	20,8699%	16,9894%	0,0000%	0,0000%	2.502
4	-1,8471%	20,3711%	7,7775%	0,0000%	0,0000%	1.996
5	-1,9472%	20,3332%	6,6926%	0,0000%	0,0000%	1.633
6	-2,8787%	19,6894%	2,4560%	0,0000%	0,0000%	1.347
7	-3,3847%	19,1881%	1,5869%	0,0000%	0,0000%	1.132
8	-3,2706%	19,1516%	2,5264%	0,0000%	0,0000%	946
9	-3,7462%	18,4677%	1,8978%	0,0000%	0,0000%	805
10	-5,3693%	17,3506%	0,2548%	0,0000%	0,0000%	681
11	-5,0363%	18,6041%	0,2085%	0,0000%	0,0000%	581
12	-5,7416%	18,0109%	0,1078%	0,0000%	0,0000%	507
13	-3,9223%	19,6192%	1,5784%	0,0000%	0,0000%	435
14	-3,6393%	19,9084%	2,8658%	0,0000%	0,0000%	390
15	-2,5170%	20,8325%	9,9188%	0,0000%	0,0000%	349
16	-3,7223%	19,8577%	3,1869%	0,0000%	0,0000%	306
17	-2,7916%	20,8790%	9,8591%	0,0000%	0,0000%	268
18	-2,7806%	21,6314%	11,3982%	0,0000%	0,0000%	239
19	-1,2452%	23,2273%	30,3610%	0,0000%	0,0000%	218
20	-0,3768%	24,8188%	44,1978%	0,0000%	0,0000%	192
21	-2,4810%	23,2414%	18,3783%	0,0000%	0,0000%	162
22	-0,6894%	25,1792%	40,7022%	0,0000%	0,0000%	145
23	-2,1404%	24,1030%	25,0863%	0,0000%	0,0000%	126
24	-1,1847%	24,3333%	36,0098%	0,0000%	0,0000%	111
25	-3,4116%	23,5383%	18,2470%	0,0000%	0,0000%	90
26	-2,5968%	25,0460%	25,9021%	0,0000%	0,0000%	81
27	-2,1809%	25,7644%	29,0284%	0,0000%	0,0000%	74
28	-0,7660%	27,4845%	42,7829%	0,0000%	0,0000%	65
29	-0,4589%	26,5501%	45,9310%	0,0000%	0,0000%	59
30	2,1734%	26,8486%	32,9965%	0,0000%	0,0000%	52

#### 4.2.9 - Análise 9: *In the Money*: Maior que 100,99%

A partir do critério de *moneyness* da análise anterior se definem três categorias de opções: *in the money*, *at the money* e *out of the money*. Esta análise é válida somente para as opções *in the money* que foram definidas como tendo *moneyness* maior que 100,99%. O total de observações da base de dados é de 696.

Gráfico 11: *In the Money*: Maior que 100,99%



O que se nota no gráfico 11 é o aumento do  $R^2$  e a diminuição da constante do intercepto, ou seja o erro do B&S diminui em relação todas as análises anteriores. Com relação à Tabela 18, se vê que em todas as variáveis independentes o modelo proposto explicam melhor a regressão do que o modelo tradicional, porém nos dois casos os testes t das variáveis não foram significativos. O que pode ser mencionado é que o erro médio do B&S foi inferior ao modelo estocástico, e ambos estão no mesmo sentido, precificando para mais em relação ao preço negociado. Outro ponto é que os modelos continuam não sendo iguais. No modelo tradicional em alguns casos, para o nível de significância de 5%, pode-se afirmar que os seus erros não são diferentes de zero. A Tabela 19 confirma os pontos mencionados acima, mesmo

quando há a mudança no número de negócios. O problema desta análise é que houve uma redução acentuada do número de observações em relação às anteriores.

**Tabela 18: Estatística 9**

Período: 05/04/99 a 28/12/01  
Critério : In the Money - Maior que 100,99

Erro Modelo Proposto = f(vol, moneyness, maturity)					Razão erros = f(razao vol, moneyness, maturity)				
Const	Money	Vol Mod. Prop.	Maturity		Const	Razão Vols	Money	Maturity	
4	3	2	1		4	3	2	1	
1	-1,78337539	1,342784433	-2,806475056	0,234137645	1	-31,5797589	12,25471444	22,4697673	-2,84754376
2	1,723016289	1,685409814	7,259038961	0,232068455	2	24,26058205	10,12725047	23,87231782	2,186727387
3			3,450581665	0,003367371	3			52,0280929	0,005702835
4			692	0,779364769	4			692	1,32298751
5			8239,307569	27,83855221	5			1873190,336	10743,76506
t	-1,03503107	0,796710937	-0,38661799	1,008916293	t	-1,30169007	1,210073206	0,941247828	-1,30219422

Erro B&S = f(vol, moneyness, maturity)				
Const	Money	Vol BS	Maturity	
4	3	2	1	
1	-1,00281722	0,631860092	1,537353128	0,111383387
2	1,404774975	1,373170239	8,105919142	0,182600919
3			2,932533351	0,002907626
4			692	0,672648272
5			5951,026284	17,35382467
t	-0,71386325	0,460146946	0,189658088	0,609982623

Erro Médio Mod. Prop.	Erro Médio BS
-0,261825093	-0,176702287
P-value	
0,0058%	
t teste	Erro Médio Mod. Prop. Erro Médio BS
	(2,00277) (1,59078)
p-value	2,279% 5,606%

Nº de Observações: 696

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o R<sup>2</sup>;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente

**Tabela 19: Estatística alternando o nº de negócios no dia**

Nº Neg.	Erro Médio		Mod. Prop.	pValue		Amostra
	Mod. Prop.	BS		B&S	Dif. Médias	
1	-26,1825%	-17,6702%	2,2795%	5,6056%	0,0058%	696
2	-22,3225%	-13,3547%	0,0003%	0,2547%	0,0000%	322
3	-23,5657%	-11,9662%	0,0000%	0,0230%	0,0000%	188
4	-29,1906%	-15,3383%	0,0000%	0,0696%	0,0000%	127
5	-38,1296%	-21,2751%	0,0000%	0,0735%	0,0000%	89
6	-44,1808%	-25,4211%	0,0001%	0,1019%	0,0000%	70
7	-47,1969%	-28,9341%	0,0008%	0,2024%	0,0000%	56
8	-47,7483%	-28,8801%	0,0185%	1,0074%	0,0006%	43
9	-49,2414%	-28,5948%	0,1550%	3,3442%	0,0054%	33
10	-49,3199%	-31,3306%	0,8125%	6,4482%	0,2743%	23
11	-45,8913%	-21,4783%	0,3269%	8,3189%	0,2688%	16
12	-51,2064%	-24,9485%	0,3579%	7,9699%	0,4267%	14
13	-41,1862%	-8,5740%	0,1279%	5,1961%	0,7976%	9
14	-41,1862%	-8,5740%	0,1279%	5,1961%	0,7976%	9
15	-31,2975%	-3,7239%	0,5437%	27,4568%	5,7362%	6

#### 4.2.10 - Análise 10: *At the Money*: Maior que 99% e menor que 101%

Esta análise é válida somente para as opções *at the money* que foram definidas como tendo *moneyness* nos intervalos abertos de 99% e 101%. O total de observações da base de dados é de 694.

Gráfico 12: *At the Money*: Maior que 99 e menor que 101

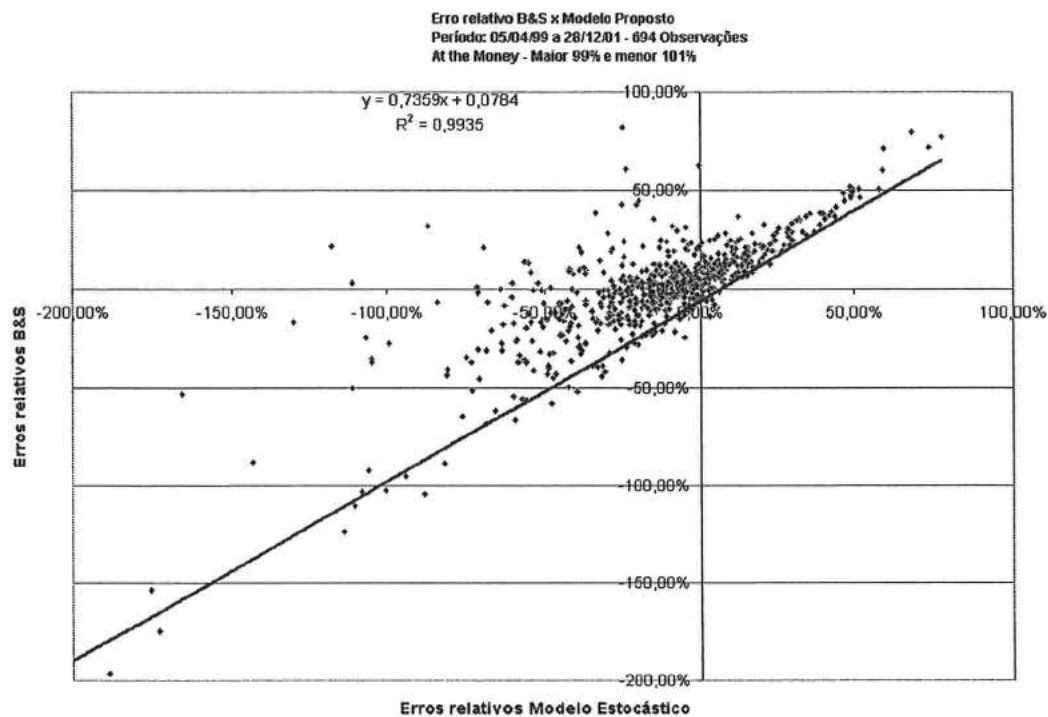


Tabela 20: Estatística 10

Período: 05/04/99 a 28/12/01  
Critério : At the Money - Maior que 99% e menor que 101%

Erro Modelo Proposto = f(vol, moneyness, maturity)					Razão erros = f(razão vol, moneyness, maturity)				
Const	Moneyness	Vol Mod. Prop	Maturity		Const	Razão Vols	Moneyness	Maturity	
4	3	2	1		4	3	2	1	
1	52,98089141	-54,12332388	3,700570213	0,513910551	1	466,7288	-3,11685718	-459,6416921	-0,077686873
2	37,11485336	37,16026273	11,91355787	0,399805418	2	525,4649	14,74630063	524,9655337	4,709217379
3			5,538760751	0,008630594	3			78,5984926	0,001157099
4			690	2,002317886	4			690	0,266441096
5			21167,73076	184,2805474	5			4262628,897	4937,997692
t	1,427484864	-1,456483886	0,317333433	1,285401669	t	0,888221	-0,211365363	-0,875582145	-0,016496769

Erro B&S = f(vol, moneyness, maturity)				
Const	Moneyness	Vol BS	Maturity	
4	3	2	1	
1	46,4404334	-47,3479801	8,326130915	0,365816081
2	27,37380542	27,40896278	10,90581602	0,289030006
3			4,082374148	0,011883538
4			690	2,766084642
5			11499,38729	138,2968634
t	1,69652822	-1,727400379	0,763457856	1,25568177

Erro Médio Mod. Prop.	Erro Médio BS
-0,461223047	-0,260984504
P-value	0,0477%

t teste	Erro Médio Mod. Prop.	Erro Médio BS
	(2,18896)	(1,67775)
p-value	1,447%	4,692%

Nº de Observações: 694

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o  $R^2$ ;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente

**Tabela 21: Estatística alternando o n° de negócios no dia**

N° Neg.	Erro Médio		Mod. Prop.	pValue		Amostra
	Mod. Prop.	BS		B&S	Dif.Médias	
1	-46,1223%	-26,0985%	1,4466%	4,6923%	0,0477%	694
2	-111,6221%	-60,2207%	7,7870%	14,6745%	1,6812%	184
3	-148,7738%	-81,3133%	9,8689%	16,6280%	3,2940%	125
4	-148,7738%	-81,3133%	9,8689%	16,6280%	3,2940%	125
5	-148,7738%	-81,3133%	9,8689%	16,6280%	3,2940%	125
6	-148,7738%	-81,3133%	9,8689%	16,6280%	3,2940%	125
7	-152,6528%	-83,9192%	10,0240%	16,6550%	3,5428%	121
8	-225,9172%	-134,9313%	12,3880%	17,1270%	8,8802%	74
9	-225,9172%	-134,9313%	12,3880%	17,1270%	8,8802%	74
10	-225,9172%	-134,9313%	12,3880%	17,1270%	8,8802%	74
11	-225,9172%	-134,9313%	12,3880%	17,1270%	8,8802%	74
12	-228,9181%	-136,7822%	12,3995%	17,1289%	8,9143%	73
13	-282,0759%	-171,9546%	12,9416%	17,2015%	10,6818%	58
14	-282,0759%	-171,9546%	12,9416%	17,2015%	10,6818%	58
15	-282,0759%	-171,9546%	12,9416%	17,2015%	10,6818%	58
16	-282,0759%	-171,9546%	12,9416%	17,2015%	10,6818%	58
17	-286,4422%	-174,9431%	12,9935%	17,2092%	10,8603%	57

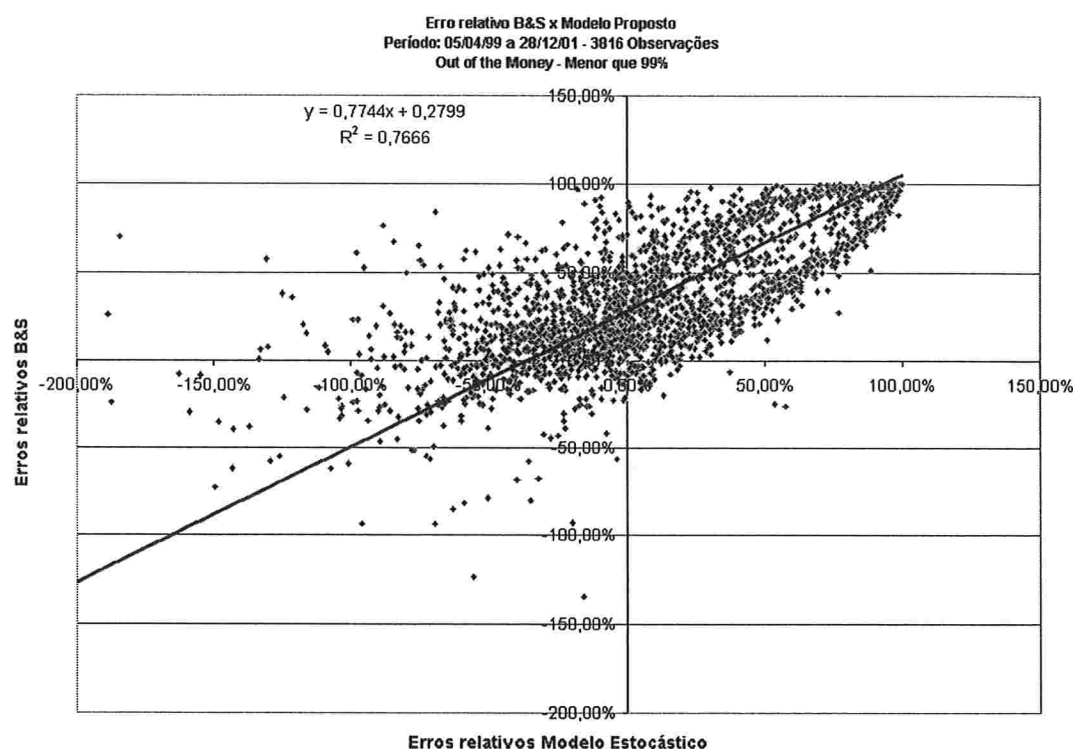
Pelo Gráfico 12, se observa pouca diferença nas regressões das opções *at the money* e *in the money*. A conclusão é muito parecida com a da análise 9, as diferenças estão no fato que na análise anterior, independente do tamanho da amostra, o modelo proposto apresenta *p-value* inferior a 5% enquanto que nesta não; o modelo pode apresentar valores não diferentes de zero com nível de significância de 5% a partir de no mínimo 2 negócios por dia. Outro ponto é que com no mínimo 8 negócios, os modelos são significativamente iguais. Contudo, deve-se tomar cuidado, pois como na análise 9, a base de dados também foi muito reduzida em relação às anteriores.



#### 4.2.11 - Análise 11: *Out of the Money*: Menor que 99%

Esta análise é válida somente para as opções *out of the money* que foram definidas como tendo *moneyness* menor que 99%. O total de observações da base de dados é de 3916.

Gráfico 13: *Out of the Money*: Menor que 99%



Pelo Gráfico 13, se observa muita diferença desta regressão em relação aos outros 2 critérios de *moneyness* das opções *at the money* e *in the money*, repare como o valor  $R^2$  caiu fortemente. Já pela Tabela 22, a variável independente *moneyness* em ambas as regressões explica os modelos de forma praticamente igual, a volatilidade apresenta significância maior no modelo proposto, enquanto a maturidade explica melhor o modelo tradicional. O erro médio do modelo proposto foi menor e em ambos os modelos no mesmo sentido. Outro ponto, é que pelo *p-value* entre os modelos, eles continuam não sendo iguais. Pelos *p-values* individuais se nota que os erros dos modelos são diferentes de zero e que os erros do modelo padrão tem maior

poder explicativo. A Tabela 23 confirma o que foi mencionado em todos os tamanhos de amostra. Observe que a partir do mínimo de 10 negócios em um dia, os erros relativos do modelo de volatilidade estocástica para um *p-value* de 5%, podem ser considerados não diferentes de zero.

**Tabela 22: Estatística 11**

Período: 05/04/99 a 28/12/01  
Critério : Out of the Money - Menor que 99%

Erro Modelo Proposto = f(vol, moneyness, maturity)					Razão erros = f(razao vol, moneyness, maturity)				
	Const	Moneyness	Vol Mod. Prop.	Maturity		Const	Razão Vols	Moneyness	Maturity
	4	3	2	1		4	3	2	1
1	7,837571858	-7,694951944	-10,17333546	0,00885131	1	15,25834225	-6,150903652	-8,417841167	-0,24682018
2	0,294557957	0,301957674	0,351520275	0,006372955	2	16,77048546	2,639423476	17,22234236	0,357479717
3			0,6421519	0,230218152	3			38,48245035	0,001542211
4			3812	380,0174469	4			3812	1,962653516
5			1571,912748	470,110915	5			5645186,93	8719,519224
t	26,60791063	-25,46354491	-28,94096356	1,38886363		0,909833068	-2,330396659	-0,488774465	-0,69044528

Erro B&S = f(vol, moneyness, maturity)				
	Const	Moneyness	Vol BS	Maturity
	4	3	2	1
1	7,73238039	-7,326560393	-10,88741192	-0,02075885
2	0,276662477	0,282232553	0,486269591	0,006053973
3			0,593053561	0,191161997
4			3812	300,3112025
5			1340,728148	316,8697189
t	27,94876614	-25,96930308	-22,38966228	-3,42896296

	Erro Médio Mod. Prop.	Erro Médio BS
	0,090801578	0,338736037
P-value	0,0000%	

	Erro Médio Mod. Prop.	Erro Médio BS
t teste	7,66681	31,74485
p-value	0,000%	0,000%

Nº de Observações: 3.816

Linha 1: valor da constante e a inclinações da reta;

Linha 2: valor de erro padrão para a constante e para o coeficiente;

Linha 3: o erro da estimativa da regressão e o R<sup>2</sup>;

Linha 4: o grau de liberdade e o valor da estatística F;

Linha 5: a soma do quadrado dos resíduos e a soma dos quadrados da regressão;

Linha t: o valor da estatística t para a constante e para o coeficiente

**Tabela 23: Estatística alternando o nº de negócios no dia**

Nº Neg.	Erro Médio		Mod. Prop.	pValue		Amostra
	Mod. Prop.	BS		B&S	Dif. Médias	
1	9,0802%	33,8736%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	3.816
2	7,0327%	31,1958%	0,0002%	0,0000%	0,0000%	3.816
3	5,6032%	30,0946%	0,0016%	0,0000%	0,0000%	2.544
4	4,3953%	28,6775%	0,1887%	0,0000%	0,0000%	1.901
5	4,8197%	28,9090%	0,0391%	0,0000%	0,0000%	1.531
6	4,3495%	28,5158%	0,3262%	0,0000%	0,0000%	1.255
7	3,6719%	27,8485%	1,3822%	0,0000%	0,0000%	1.032
8	3,8488%	27,6719%	1,0959%	0,0000%	0,0000%	874
9	3,5989%	26,9690%	2,0660%	0,0000%	0,0000%	741
10	1,9658%	25,9906%	13,9836%	0,0000%	0,0000%	629
11	0,7994%	25,4467%	33,5826%	0,0000%	0,0000%	533
12	0,1286%	24,6998%	47,4155%	0,0000%	0,0000%	459
13	-0,0379%	24,2312%	49,2617%	0,0000%	0,0000%	399
14	0,4860%	24,4856%	41,0359%	0,0000%	0,0000%	352
15	1,7094%	25,2881%	21,6498%	0,0000%	0,0000%	316
16	0,5592%	24,1725%	40,0791%	0,0000%	0,0000%	285
17	1,8466%	25,6524%	22,1373%	0,0000%	0,0000%	249
18	2,2038%	26,9431%	19,5588%	0,0000%	0,0000%	217
19	3,8049%	28,5476%	7,9813%	0,0000%	0,0000%	191
20	4,3239%	29,6813%	6,3723%	0,0000%	0,0000%	174
21	1,8743%	27,8080%	26,6659%	0,0000%	0,0000%	156
22	4,1253%	30,1273%	9,4055%	0,0000%	0,0000%	132
23	3,0454%	29,3640%	18,9299%	0,0000%	0,0000%	119
24	4,1638%	29,7490%	11,7980%	0,0000%	0,0000%	102
25	2,1843%	29,4528%	29,3193%	0,0000%	0,0000%	90
26	2,9856%	30,8230%	24,2606%	0,0000%	0,0000%	72
27	1,4111%	30,3923%	37,4327%	0,0000%	0,0000%	66
28	2,3746%	31,7317%	30,6173%	0,0000%	0,0000%	62
29	3,1289%	31,1266%	26,8453%	0,0000%	0,0000%	55
30	6,2271%	31,6115%	13,2199%	0,0000%	0,0000%	49

## 5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Na média, o modelo é superior ao de Black & Scholes, pois na maioria das análises ele se comportou melhor do que o modelo tradicional. O modelo proposto apresenta erros menores do que o modelo padrão, e em alguns casos estes erros podem ser considerados não diferentes de zero em relação ao preço efetivamente negociado. Este resultado em princípio parece resolver o problema de avaliações de moedas com taxas estocásticas. Entretanto, isto não é verdade, quando a amostra foi estratificada para análise utilizando o critério de *moneyness*. Dos 3 tipos de opções derivadas deste critério: *at-the-money*, *in-the-money* e *out-of-the-money*, o modelo sugerido é inferior nas duas primeiras. O modelo proposto superavalia em todas as classes de *moneyness* em relação ao modelo tradicional, e em relação ao preço efetivamente negociado, apenas subavalia nas *out-of-the-money*. Com relação à maturidade, esta variável independente mostra um poder maior de explicação na regressão do modelo proposto do que no modelo tradicional. Isto faz sentido, pois no modelo proposto existe o efeito da duração na volatilidade das taxas de juros local e externa. Com relação ao *moneyness*, esta variável mostrou um poder explicativo melhor no modelo usual do que no modelo proposto.

Um ponto a ser mencionado é que o cálculo da volatilidade depende do fator de decaimento e, portanto, este fator influencia os resultados obtidos. *Lambdas* maiores devem ser usados quando houver estabilidade no mercado, pois permitirá uma distribuição de pesos mais uniforme na amostra. Em casos de não estabilidade, pode-se trabalhar com *lambdas* menores. Não foi o propósito deste trabalho avaliar qual o melhor *lambda* que deve ser usado no caso brasileiro.

Apesar deste estudo ter sido feito em opções de compra, pode ser facilmente adaptado para opções de venda. A conclusão deste trabalho é que o modelo estocástico pode ser utilizado no Brasil, pois ele insere as volatilidades das taxas de juro local e externa bem como as correlações entre elas, e a inclusão destes fatores de

risco conduzem a uma redução nos erros observados na avaliação dos preços das opções de compra de moeda.

Outro aspecto não analisado nesta dissertação diz respeito a modelagem de taxa de juros, o modelo utilizado foi o Vasicek simplificado com coeficiente de ajuste zero. Na verdade, o modelo proposto para as taxas de curto prazo fica entre o modelo de taxas de juro constante e o modelo geral de Vasicek. Modelos mais sofisticados de determinação da curva de taxas de juros tais como Hull & White (1990), Heath, Jarrow & Morton (1992), entre outros, poderão ser feitos em pesquisas futuras. Finalmente, este trabalho se limitou ao estudo das opções europeias, contudo fica também como sugestão o desenvolvimento de um trabalho para as opções americanas de moedas. Lembrando que o exercício antecipado das opções americanas na maioria dos casos não é compensatório, e para se chegar a um preço da opção haverá necessidade de se recorrer a métodos numéricos.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Adams, P.D e S.B. Wyatt. "Biases in Option Prices – Evidence from the Foreign Currency Option Market." *The Journal of Banking and Finance* 11,549-562.

Bailey, W. "An Empirical Investigation of the Market for Comex Gold Futures Options." *The Journal of Finance* 42, No.5.

Bakshi, G.S e Z. Chen. "Equilibrium Valuation of Foreign Exchange Claims." *The Journal of Finance* 52, No.2.

Baranowski, J.A., Cunha Jr., D. e Lemgruber, E.F. "Comportamento dos cupons cambiais e implicações na avaliação de risco de produtos indexados ao dólar. Trabalho não publicado apresentado na reunião de risco da ABBC. São Paulo, set 1999. Disponível em : [www.egroups.com/docvault/risco-de-mercado/apresentações](http://www.egroups.com/docvault/risco-de-mercado/apresentações) referência: ABBC\_Lemgruber\_cupom\_cambial\_28-9-99.

Barros, P.S e Lemgruber, E.F. "Análise da Relação entre Liquidez e Ganhos de Arbitragem no Mercado de Opções de Telebrás após o Plano Real." *ENANPAD-97*.

Becker, J.L, Felício, R.F e Lemgruber, E.F "Seguro Dinâmico de Portfólio." Cap 3, *Gestão de Risco e Derivativos – Coleção COPPEAD – Ed.Atlas 2001*

Becker, J.L, e Lemgruber, E.F. "OPTE: sistema de apoio à decisão para o mercado de opções." *Porto Alegre:PPGA/UFRGS,1987. 41 p. (Documento para estudo, nº 6.)*

Black, F. "The Pricing of Commodity Contracts." *Journal of Financial Economics*, 4 (Jan/Mar 1976), 167-179.

Black, F. e M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973), 637-654.

Black, F., E.Derman, e W.Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysts Journal*, January-February 1990, 33-39.

Biger, N., e J. Hull. "The Valuation of Currency Options." *Financial Management*, 12 (Spring 1983), 24-28.

Brenner, M., Courtadon, G. e Subrahmaniam, M. "Options on the Spot and Options on Futures." *The Journal of Finance*, Vol XL, Nº 5, December 1985, 1303-1317.

Chesney, M. e Scott, L. "Pricing European Currency Options: A Comparison of the modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 267-284.

Clelow, L. e Strickland, C. *Implementing Derivatives Models*. Wiley 1998.

Cox, J. e S.Ross. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process." *Journal of Financial Economics*, 3 (Jan/Mar 1976), 145-166.

Cunha Jr., D., Lemgruber, E.F., "Comparação das Metodologias de Mapeamento Sugeridas pelo RiskMetrics para o Cálculo de Risco de Mercado de Títulos Préfixados no Brasil." Cap 8, *Gestão de Risco e Derivativos – Coleção COPPEAD – Ed. Atlas 2001*

Doffou, A. e J.E.Hilliard. "Pricing Currency Options Under Stochastic Interest Rates and Jump-Diffusion Process." *The Journal of Financial Research*, Vol. XXIV, nº 4, 565-585.

Feiger, G., e B.Jacquillat. "Currency Option Bonds, Puts and Calls on Spot Exchange and the Hedging of Contingent Foreign Earnings." *Journal of Finance*, 34 (Dec. 1979), 1129-139.

Garman, M. e S.Kohlhagen. "Foreign Currency Options Values." *Journal of International Money and Finance*, 2 (Dec. 1983), 231-237.

Geske, R. "The Pricing of Options with Stochastic Dividend Yield." *The Journal of Finance* 33, No.2.

Gihman, I.I., e Skorohod, A.Y. "Stochastic Differential Equations." *Springer Verlag, New York, 1972.*

Grabbe, J.O. "Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange." *Journal of International Money and Finance* 2, 239-253.

Hilliard, J.E, J.Madura e A.L.Tucker. "Currency Option Pricing with Stochastic Domestic and Foreign Interest Rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 26, No.2

Hull, J. *Options, Futures and Other Derivatives Securities. Third Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1997.*

Hull, J., e A.White. "Pricing Interest Rate Derivatives Securities," *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990), 573-592.

Heat, D., Jarrow, R., Morton, A. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation." *Econometrica* 60:77.



Jarrow, R.A, e K. Amin. "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates." *Journal of International Money and Finance* 10, 310-329.

Jarrow, R e Oldfield, G., "Forward Contracts and Futures Contracts", *Journal of Financial Economics*, December 1981, 9: 373-382.

Johnson, H. "Option on the Maximum or the Minimum of Several Assets." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22 (Sept. 1987), 277-283

Jorion, P. *Value at Risk: the new benchmark to manage financial risk. Second Edition*, 2000, Mc Graw Hill

Kishimoto, N. "Pricing Contingent Claims under Interest Rate and Asset Price Risk." *The Journal of Finance* 44, No.3.

Kwok, Y.K. *Mathematical Models of Financial Derivatives. Springer, Singapore (1998).*

Lemgruber, E.F, Ohanian, G. "O Modelo de Projeção de Volatilidade do RiskMetrics e a Hipótese de Distribuição Normal Condicional para Alguns Fatores de Risco no Brasil." Cap 7, *Gestão de Risco e Derivativos – Coleção COPPEAD – Ed. Atlas 2001*

Margrabe, W."The Value of an Option to Exchange One Asset for Another." *Journal of Finance*, 33 (March 1978), 177-186.

Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing." *Bell Journal of Economics* 4 (Spring 1973) 141-183.

Ogden, J.P. "An Analysis of Yield Curve Notes." *The Journal of Finance* 42 No. 1.

Rabinovitch, R. "Pricing Stock and Bond Options when the Default-Free Rate is Stochastic." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (Dec. 1989), 447-457.

Samuelson, P.A, "Rational Theory of Warrant Pricing", *Industrial Management Review*, vol.6 (1965), 13-31.

Shastri, K e K. Wethyavivorn."Pricing of Foreign Currency Options for Arbitrary Stochastic Process." *The Journal of Business & Accounting* 17, 323-334.

Vasicek, O. "An Equilibrium Characterization of the Tern Structure." *Journal of Financial Economics*, 5 (Jan./Mar. 1977), 177-188

Whaley, R.E. "Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks." *Journal of Finance Economics* 10(1982) 29-58.

## APÊNDICE

### Apêndice A: Montagem de um portfólio replicante via contratos a termo

Nesta parte é simulada a montagem de um portfólio replicante via contratos a termo de moeda. O portfólio é constituído de uma posição comprada em contrato a termo e vendida em opção de compra de moeda para o mesmo vencimento. Então, a taxa de ajuste do contrato a termo para cada opção vendida será  $\partial C/\partial F_1$ , onde:  $F_1 = Fe^{-r(T-t)}$ . Este *hedge* explica-se pois quando  $F$  aumenta de  $\partial F$  o valor do termo aumenta de  $\partial Fe^{-r(T-t)}$ . As premissas são que a moeda segue o Movimento Geométrico Browniano, mercado contínuo e sem custos de transação e as taxas de juro interna e externa são constantes.

$$C = F_1.N \left\{ \frac{\ln\left(\frac{F_1}{K}\right) + \left[ r + \left( \frac{\sigma_F^2}{2} \right) \right] T}{\sigma_F \sqrt{T}} \right\} - e^{-rT} K.N \left\{ \frac{\ln\left(\frac{F_1}{K}\right) + \left[ r - \left( \frac{\sigma_F^2}{2} \right) \right] T}{\sigma_F \sqrt{T}} \right\} \quad (A1)$$

onde:  $\sigma_F$  é o desvio padrão de  $F=F_t$ .

Então como  $F_1 = Fe^{-r(T-t)}$  em  $t = 0$ , a equação (A1) fica:

$$C = e^{-rT} F_1.N \left\{ \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left( \frac{\sigma_F^2}{2} \right) T}{\sigma_F \sqrt{T}} \right\} - e^{-rT} K.N \left\{ \frac{\ln\left(\frac{F_1}{K}\right) - \left( \frac{\sigma_F^2}{2} \right) T}{\sigma_F \sqrt{T}} \right\} \quad (A2)$$

A única diferença do processo usual foi a troca de  $\sigma$  por  $\sigma_F$ . Quando se faz a premissa que a taxa de juro externa livre de risco é constante,  $F$  segue um Browniano, se  $S$  também seguir, e  $\sigma = \sigma_F$ . Logo, o resultado de (A2) torna-se equivalente ao B & S original.

**APÊNDICE B: Precificando Opções de *Bonds* em Moedas Usando um Portfólio com um único *Bond* com Retorno Equivalente**

O comportamento estocástico dos preços é:

$$(dS^{\$/\$/}) = \mu_S dt + \sigma_S dZ_S' \quad (B1)$$

$$(dB^{\$/\$/}) = \mu_{\$/} dt + \sigma_{\$/} dZ_{\$/} \quad (B2)$$

$$(dB^{\$/\$/}) = \mu_{\$/} dt + \sigma_{\$/} dZ_{\$/} \quad (B3)$$

onde  $\Sigma = [\rho_{ij}]$  é a matriz de correlações entre os processos de difusão  $Z_j$ . Os coeficientes  $\sigma$  e  $\mu$  dependem apenas do tempo e dos valores de  $S^{\$/}$ ,  $B^{\$/}$  e  $B^{\$/}$ , e assume-se que  $\Sigma$  é constante. Chama-se de  $S^{\$/}(\tau)B^{\$/}(\tau,T) \equiv V^{\$/}(\tau,T) = \$/$ , o preço em  $\tau$  de um *zero coupon bond* que paga  $\$/1$  em  $T$ . Se Mostra que para fazer o *hedge* do portfólio de um *bond* em moeda estrangeira descrito em (21) pode ser feito construindo com *bonds* em moeda dólar mais o valor em dólar,  $V^{\$/}$ , dos *bonds* em iene. Aplicando o Lema de Itô no produto  $S^{\$/}B^{\$/}$ , resulta em:

$$d(S^{\$/}B^{\$/})/(S^{\$/}B^{\$/}) = [(\mu_S + \mu_{\$/}) + \rho_{S\$/}\sigma_S\sigma_{\$/}]dt + \sigma_S dZ_S + \sigma_{\$/} dZ_{\$/} \quad (B4)$$

Formalmente será:

$$(dV^{\$/}/V^{\$/}) = \mu_V dt + \sigma_V dZ_V \quad (B5)$$

A partir de agora serão usados apenas os processos (B2) e (B5). O objetivo será montar um portfólio de um *bond* em moeda estrangeira mostrando que ele pode ser replicado usando  $B^{\$/}$  e  $V^{\$/}$ . Para replicar perfeitamente a opção de *bond* em moeda estrangeira, o portfólio de *hedge* deverá ter as seguintes características:

- (i) o mesmo valor final dado em (21);
- (ii) ser auto-financiável, ou seja, em nenhuma fase do *hedge* haverá aporte de capital ou qualquer lucro.

Então será definida uma nova tendência ajustada ao processo estocástico  $B^*(t)$ ,  $V^*(t)$ :

$$dB^*(t)/(B^*) = \mu_{\$/} dt + \sigma_{\$/} dZ_{\$/}, (dV^*(t)/V^*(t)) = \sigma_V dZ_V \quad (B6)$$

As condições de fronteira serão:

$$b \equiv B^{\$/}(t)$$

$$v \equiv V^{\$}(t)$$

A função P é o valor da opção de *bond* em moeda estrangeira definida por:

$$P(b,v,t) \equiv E\{\max[B^*(T),V^*(t)]|B^*(t)=b,V^*(t)=v\} \quad (B7)$$

Substituindo  $V^*$  e  $B^*$  por  $V$  e  $B$  em um mundo de neutralidade ao risco, equivale a ter a real medida original e substituir por uma equivalente martingal; se o *hedge* perfeito for possível (B7), haverá a validação.

Afirmção (1): P tem o mesmo valor do *bond* em moeda local ou o *bond* em moeda estrangeira e a cotação da moeda.

Prova:

$$\begin{aligned} P[B^{\$}(T),V^{\$}(T),T] &\equiv E\{\max[B^*(T),yV^*(T)]|B^*(T)=b,V^*(T)=v\} = \\ &\max[1,y.S^{\$}(T)] \text{ e } B^{\$}(T) = 1, V^{\$}(T) = 1.S^{\$}(T) \end{aligned} \quad \text{cq d}$$

Afirmção (2): A função P satisfaz a função geradora<sup>10</sup>:

$$(1/(2[P_{11}(\mu_{\$}B^*)^2 + \mu_{\$} + 2P_{12}\rho_{\$V}\sigma_{\$}\sigma_V B^*V^* + P_{22}(\sigma_V V^*)^2])) + ((\partial P)/(\partial t)) = 0 \quad (B8)$$

Hipótese:  $\sigma_{\$}$  e  $\sigma_V$  são homogêneos de grau zero em  $B^{\$}$  e  $V^{\$}$

Afirmção(3): Se  $\sigma_{\$}$  e  $\sigma_V$  são homogêneos de grau zero em  $B^{\$}$  e  $V^{\$}$ , então a distribuição de  $B^*(T), V^*(T)$  é homogênea de grau 1 significando:

$$\Pr\{[B^*(T),V^*(T)] \leq (\lambda x, \lambda q) | B^*(t) = \lambda b, V^*(t) = \lambda v\} \quad (B9)$$

$$\Pr\{[B^*(T),V^*(T)] \leq (x, q) | B^*(t) = b, V^*(t) = v\}$$

Assumindo retornos estocásticos constantes das taxas de juros e da taxa de câmbio. Em termos concretos isto significa que a taxa de retorno dos processos é independente dos valores iniciais. Outra forma de expressar (B9) é:

$$\Pr\{[(B^*(T))/(B^*(t))], [(V^*(T))/(V^*(t))] \leq (x, q) | B^*(t) = b, V^*(t) = v\} \quad (B10)$$

$$\Pr\{[(B^*(T))/(B^*(t))], [(V^*(T))/(V^*(t))] \leq (x, q) | B^*(t) = \lambda b, V^*(t) = \lambda v\}$$

Afirmção(4): Se a distribuição de  $[B^*(T), V^*(T)]$  é homogênea de grau 1 então  $P(b,v,t)$  é homogênea de grau 1 em  $b$  e  $v$ .

Prova:

$$\begin{aligned} P(\lambda b, \lambda v, t) &= \int_x \int_q \max[\lambda x, \lambda q] \Pr_{\lambda b, \lambda v} \{B^*(T) \in d(\lambda x), V^*(T) \in d(\lambda q)\} \\ &= \lambda \int_x \int_q \max[x, q] \Pr_{b, v} \{B^*(T) \in d(x), V^*(T) \in dq\} \\ &= \lambda \cdot P(b, v, t) \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Ver Gihman e Skorohod

Denomina-se de  $P_1(b,v,t)$  a derivada parcial de  $P(b,v,t)$  em relação ao primeiro argumento, e  $P_2(b,v,t)$  a derivada parcial em relação ao segundo argumento. Como consequência, desde que  $P(b,v,t)$  é homogêneo de grau 1 em  $b$  e  $v$  e aplicando o Teorema de Euler:

$$P(b,v,t) = P_1 \cdot b + P_2 \cdot v \quad (B11)$$

A quantidade de *bonds* em dólar no portfólio de *hedge* será dado por  $\alpha^{\$}(b,v,t)$  e a quantidade de *bonds* em iene no portfólio de *hedge* será  $\alpha^V(b,v,t)$ . Então:

$$\alpha^{\$}(b,v,t) = P_1(b,v,t), \alpha^V(b,v,t) = P_2(b,v,t) \quad (B12)$$

Então pela conclusão,  $\alpha^{\$}b + \alpha^Vv = P$

Afirmção (5): o portfólio constituído de  $\alpha^{\$}(b,v,t)$ ,  $\alpha^V(b,v,t)$  na data  $t$  tem o mesmo valor das duas moedas e da opção de *bond* em moeda estrangeira.

Prova: o portfólio na data  $T$  é:

$$\alpha^{\$}(b,v,t) b(T) + \alpha^V(b,v,t) V(T) = P_1 b + P_2 v = P(T) \text{ de (20)}$$

Afirmção(6): o portfólio constituído de  $\alpha^{\$}(b,v,t)$ ,  $\alpha^V(b,v,t)$  onde  $\alpha^{\$}$  e  $\alpha^V$  são definidos em (B12) é um portfólio auto-financiável.

Prova:

$$dP = B \cdot d\alpha^{\$} + V \cdot d\alpha^V + dB \cdot \alpha^{\$} + dV \cdot \alpha^V + dV \cdot d\alpha^{\$} + dB \cdot d\alpha^{\$} \quad (B13)$$

Para isto é necessário que  $P$  mude somente com ganho de capitais, então  $P$  deverá satisfazer:

$$dp = dB \cdot \alpha^{\$} + dV \cdot \alpha^V \quad (B14)$$

Por Lema de Itô:

$$dp = P_1 dB + P_2 dV + (\partial P / \partial t) dt + (1/2 [P_{11} (dB)^2 + P_{22} (dV)^2 + 2P_{12} (dB)(dV)]) \quad (B15)$$

Então, usando (B11) para definir  $\alpha^{\$}$  e  $\alpha^V$ , é suficiente mostrar que:

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial P / \partial t) dt + (1/2 [P_{11} (dB)^2 + P_{22} (dV)^2 + 2P_{12} (dB)(dV)]) \\ &= dt \{ (\partial P / \partial t) + (1/2 [P_{11} \sigma_{\$}^2 B^2 + P_{22} \sigma_V^2 V^2 + 2P_{12} \rho_{\$V} \sigma_{\$} \sigma_V V \cdot B]) \} \end{aligned}$$

Que é verdadeiro por (21)

Temos as equações diferenciais estocásticas:

$$dB = B \cdot \sigma_{\$} dZ_{\$}; \quad dV = V \cdot \sigma_V dZ_V \quad (B16)$$

onde:  $Z_{\$}$  e  $Z_V$  são movimentos brownianos correlacionados, sujeitos à condição para o intervalo  $[t, T]$ :

$$B_*(t) = b, V_*(t) = v \quad (B17)$$

Os preços dos dois *bonds* terão seus preços dados por (B7). Para achar o valor esperado precisa-se conhecer a distribuição de probabilidades nos pontos finais dos processos estocásticos descritos em (B16) e (B17).

Afirmção (7): Para qualquer  $s$  no intervalo  $d[t, T]$ , tem se que:

$$B_*(s) = B_*(t).e^{X^s(s)} = b(t).e^{X^s(s)} \quad (B18)$$

$$V_*(s) = V_*(t).e^{V^s(s)} = v(t).e^{V^s(s)} \quad (B19)$$

onde:

$$dX^s = m^s dt + \sigma_s dZ_s \quad (B20)$$

$$dV^s = m^v dt + \sigma_v dZ_v$$

e no intervalo  $[t, T]$  sujeito a condição inicial  $X^s(t) = V^s(t) = 0$  e

$$m^s = -(1/(2(\sigma^s)^2)), m^v = -(1/(2(\sigma^v)^2)) \quad (B21)$$

E reescrevendo (B18) obtêm-se,  $B_*(s) = f(X^s)$

Então por Itô:

$$\begin{aligned} dB_* &= f(X^s)dX^s + (1/2f''(X^s)(dX^s)^2) \\ &= B_*(t).e^{X^s(s)} \left[ -1/2\sigma_s^2 dt + \sigma_s dZ_s \right] + 1/2B_*(t).e^{X^s} \left[ -1/2\sigma_s^2 dt + \sigma_s dZ_s \right]^2 \\ &= B_*(s) \left[ -(1/(2\sigma_s^2)dt + \sigma_s dZ_s) + (1/(2\sigma_s^2)dt) \right] \\ &= B_*(s)\sigma_s dZ_s \end{aligned}$$

A distribuição em  $T$  de  $(X^s, V^s)$  é normal com média

$$\left( -(1/2)\sigma_s^2(T-t), -(1/2)\sigma_v^2(T-t) \right) \quad (B22)$$

e matriz de covariâncias

$$\begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s \sigma_v \rho_{sv} \\ \sigma_s \sigma_v \rho_{sv} & \sigma_v^2 \end{bmatrix} \quad (B23)$$

O valor de  $P$  pode ser computado numericamente por causa da normalidade das distribuições.

$$\begin{aligned} P(b, v, t) &= E\{\max[B_*(T), yV_*(T)] | B_*(t) = b, V_*(t) = v\} \\ &= E\left\{ \max \left[ b \cdot e^{X^s(T)}, y \cdot v \cdot e^{V^s(T)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \max\{b.e^\theta, y.v.e^\theta\} \Psi(\theta, \phi) d\theta d\phi$$

onde  $\Psi(\cdot, \cdot)$  denota a função de densidade conjunta de  $X^{\mathcal{S}}(T)$  e  $V^{\mathcal{S}}(T)$ .



**APÊNDICE C: Determinação de equações de precificação de opções européias de compra e venda**

O valor de uma opção européia é função de  $S(t)B_2(t,T)$ ,  $B_1(t,T)$ ,  $X$ ,  $T$ . A primeira premissa é que  $C$  tem uma forma genérica igual a  $C=C(S(t)B_2(t,T), B_1(t,T), K, T)$ , com esta função sujeita as seguintes condições de fronteiras:

$$C(S(t+T), 1, X, 0) = \max(0, S(t+T) - K) \quad (C1)$$

$$C(0, B_1(t,T), K, T) = 0 \quad (C2)$$

A primeira condição de fronteira é o valor final da opção de compra, que será o maior valor entre zero e o valor de exercício. A segunda condição diz que quando o valor da taxa de câmbio é zero, a opção de compra também tem este valor.

A segunda premissa tem a ver com a dinâmica de  $S$ ,  $B_2$  e  $B_1$ . São chamados de  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  do processo padrão de Wiener, com variância instantânea e matriz de correlações igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{SB_2} & \rho_{SB_1} \\ \rho_{SB_2} & 1 & \rho_{B_1B_2} \\ \rho_{SB_1} & \rho_{B_1B_2} & 1 \end{bmatrix} dt$$

onde  $\rho_{ij} = \rho_{ij}(t, T)$  está em função de  $t$  e a data de vencimento do *bond* ( $T$ ). Então,  $S$ ,  $B_1$  e  $B_2$  assumem o seguinte processo difusivo.

$$(dS/S) = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dx$$

$$(dB_2/B_2) = \mu_{B_2}(t, T)dt + \sigma_{B_2}(t, T)dy$$

$$(dB_1/B_1) = \mu_{B_1}(t, T)dt + \sigma_{B_1}(t, T)dz$$

Com base nestas variáveis define-se a nova variável  $dG$ ,  $dw$  como

$$\begin{aligned} (dG/G) &= (d(SB_2)/SB_2) = (\mu_S + \mu_{B_2} + \rho_{SB_2}\sigma_S\sigma_{B_2})dt + \sigma_S dx + \sigma_{B_2} dy \\ &\equiv \mu_G(t, T)dt + \sigma_G(t, T)dw \end{aligned}$$

e a matriz de correlações  $dw$ ,  $dz$  como:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{GB_1} \\ \rho_{GB_1} & 1 \end{bmatrix} dt$$

onde  $\rho_{GB_1} = \rho_{GB_1}(t, T)$

Aplicando o Lema de Itô na função  $C(SB_2, B_1, K, T) = C(G, B_1, K, T)$ , resultará na dinâmica da opção, para  $C > S - K > 0$  ou  $C > 0 > S - K$ ,

$$\begin{aligned} dC &= (\partial C / \partial G) dG + dB_1 + dT - (1/2) \left( (\partial^2 C / \partial G^2) G^2 \sigma_G^2 + (\partial^2 C / \partial B_1^2) B_1^2 \sigma_{B_1}^2 + \right. \\ & \quad \left. 2(\partial^2 C / (\partial B_1 \partial G)) G B_1 \rho_{GB_1} \sigma_{B_1} \sigma_G \right) dT \\ &= (\partial C / \partial G) dG + dB_1 + dT - (1/2) \varphi dT \end{aligned}$$

onde  $\varphi$  representa os elementos relacionados à segunda derivada, e a relação  $dt = -dT$  será utilizada.

Chamar-se-á de  $V$  o portfólio composto por uma opção,  $b$  quantidades de  $G$ , e quantidades de  $B$ :

$$V = C + bG + eB$$

A dinâmica deste portfólio será:

$$dV = dC + bdG + edB_1$$

Sendo:  $b = (\partial C / \partial G)$ ;  $e = -(\partial C / \partial B_1)$

Então:  $dV = (\partial C / \partial T) - (1/2) \varphi dT$

Por não-arbitragem:

$$V = C - (\partial C / \partial G) G - B_1 = 0 \tag{C3}$$

Então  $dV = 0$ , implicando que

$$(\partial C / \partial T) = (1/2) \varphi \tag{C4}$$

E a solução da opção de compra européia é:

$$C(t) = S(t) B_2(t, T) N(d_1) - K B_1(t, T) N(d_2) \tag{C5}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^t \frac{1}{T} \left[ \sigma_G^2(t+T-u, u) + \sigma_{B_1}^2(t+T-u, u) \right. \\ & \quad \left. - 2\rho_{GB_1}(t+T-u, u) \sigma_G(t+T-u, u) \cdot \sigma_{B_1}(t+T-u, u) \right] du \end{aligned}$$

## APÊNDICE D: Modelo de Taxa de juro de Vasicek

O modelo de Vasicek (1977) é um modelo que está incluído na classe dos modelos de equilíbrio. Estes modelos assumem as premissas das variáveis econômicas e vêm de um processo de taxas de juros de curto prazo,  $r$ . Com isto, podem ser utilizados na precificação de *bonds* e opções. A taxa  $r$  é definida como a taxa relativa a um período infinitesimal de tempo ( $t$ ), ou mesmo instantâneo. É importante destacar que os preços dependem somente do processo de  $r$  em um mundo de neutralidade ao risco.

Define-se  $P(t,T)$  como o preço em  $t$  de um *bond* descontado que paga \$1 em  $T$ . Sabe-se que o valor de um derivativo que  $F_T$  em  $T$  é

$$\hat{E}\left[e^{-r(T-t)} F_T\right] \quad (D1)$$

$$P(t, T) = \hat{E}\left[e^{-r(T-t)} F_T\right] \quad (D2)$$

Se  $R(t,T)$  é uma composição contínua de taxa de juro em  $t$  para o termo  $T-t$ ,

$$P(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \quad (D3)$$

Então:

$$R(t, T) = \left(\frac{-1}{(T-t)}\right) \ln P(t, T) \quad (D4)$$

E da equação (D2),

$$R(t, T) = \left(\frac{-1}{(T-t)}\right) \ln \hat{E}\left[e^{-r(T-t)}\right] \quad (D5)$$

Esta equação permite que a estrutura de taxa de juro para qualquer tempo possa ser obtida do valor de  $r$  naquela data no mundo de neutralidade ao risco e com isto sabe-se como ela evolui. O modelo de Vasicek também é um modelo de um fator, ou seja, envolve apenas um tipo de incerteza. Geralmente a taxa de curto prazo em um mundo de neutralidade ao risco segue um processo de Itô da seguinte forma:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

A tendência instantânea,  $m$ , e o desvio padrão instantâneo,  $s$ , assumem serem funções de  $r$ , mas independentes do tempo. Um modelo de um fator implica que

todas as taxas se movem na mesma direção em qualquer intervalo de tempo, não necessariamente com o mesmo valor. Isto implica que a estrutura a termo pode ter padrões diferentes. O modelo de Vasicek para um processo de neutralidade ao risco é:

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dz$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  são constantes. Este modelo incorpora a reversão à média. A taxa de juro de curto prazo é levada para o nível de  $b$  a taxa  $a$ . Supõe-se que esta variação apresenta distribuição normal do termo estocástico  $\sigma dz$ . Vasicek mostra que a equação (D2) pode ser usada para se obter a função que chega ao preço do *bond* que paga \$1 em  $T$ .

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (D6)$$

$$B(t, T) = \left( \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \quad (D7)$$

onde  $r(t)$  é o valor de  $r$  em  $t$ .

$$A(t, T) = \exp \left[ (B(t, T) - T + t) \left( \frac{a^2 b - \sigma^2}{2} \right) - \left( \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right) \right] \quad (D8)$$

Quando  $a = 0$ ,  $B(t, T) = T - t$  e  $A(t, T) = \exp[\sigma^2(T-t)^3/6]$

Usando a equação (D4) teremos:

$$R(t, T) = \left( \frac{-1}{(T-t)} \right) \ln A(t, T) + \left( \frac{1}{(T-t)} \right) B(t, T) \cdot r(t) \quad (D9)$$

Toda a estrutura pode ser determinada a partir de  $r(t)$  dado  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$ . A última equação mostra que  $R(t, T)$  é linearmente dependente de  $r(t)$ . Isto significa que o valor de  $r(t)$  determina o nível da estrutura a termo em  $t$ . O formato da estrutura a termo em  $t$  é independente de  $r(t)$ , porém depende de  $t$ .

Vasicek é adaptado para o modelo proposto na dissertação. Supondo que a taxa de juro de curto prazo seja o parâmetro para o preço dos *bonds*. Além disto, a taxa de juro de curto prazo doméstica ( $r$ ) e a externa ( $f$ ) é:

$$dr = \alpha(\theta-r) dt + \sigma_r dZ_r,$$

Vasicek mostra que

$$dr = \alpha(\theta-r) dt + \sigma_r dZ_r,$$

$$df = \mu(\theta_f - f)dt + \sigma_f dZ_f$$

Em um mercado sem custos de transação, os preços dos *bonds* são:

$$B(t, T, r) = A(t, T) \exp(D(t, T)r(t)), \text{ onde}$$

$$D(t, T) = -\alpha^{-1}(1 - \exp(-\alpha\tau)),$$

$$A(t, T) = \exp[-\alpha^{-1}(1 - \exp(-\alpha\tau))] \cdot R(\infty) - \tau \cdot R(\infty) - (\rho/(4\alpha^3)) [1 - \exp(-\alpha\tau)]^2,$$

$\tau \equiv T - t$  e  $R(\infty)$  é função de  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\sigma_r$  e o preço de mercado.

$$\sigma_1(t, T) = (\sigma_r/\alpha)(1 - \exp(-\alpha\tau)).$$

Analogamente para o *bond* em moeda estrangeira, obtêm-se:

$$\Sigma_2(t, T) = (\sigma_f/\mu)(1 - \exp(-\mu\tau)).$$

Para calcular o preço das opções, acha-se a variância condicional do log dos preços forward,

$$\begin{aligned} v^2 &= \int_t^T (\sigma_S \sigma_1 - \sigma_2) \text{Cov}(dZ_1, dZ_2') (\sigma_S \sigma_1 - \sigma_2)' ds \\ &= \int_t^T [\sigma_S^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(\rho_{S1} \sigma_S \sigma_1 - \sigma_S \sigma_2 \rho_{S2} - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12})] ds \end{aligned} \quad (D10)$$

Serão usadas as três últimas equações para se resolver as integrais do tipo:

$$I_1 \equiv \int_0^\tau [((\sigma_r)/\alpha)(1 - \exp(-\alpha v))] dv, \quad (D11)$$

$$I_2 \equiv \int_0^\tau [((\sigma_r)/\alpha)(1 - \exp(-\alpha v))]^2 dv, \quad (D12)$$

$$I_3 \equiv \int_0^\tau [((\sigma_r)/\alpha)(1 - \exp(-\alpha v))] \cdot [(\sigma_f/\mu)(1 - \exp(-\mu v))] dv, \quad (D13)$$

e as integrais  $I_1$  e  $I_2$  correspondem aos parâmetros para a economia interna.

As soluções das integrais são:

$$I_1 = (\sigma_r/\alpha) \tau - [((1 - \exp(-\alpha\tau))/\alpha)], \quad (D14)$$

$$I_2 = [(\sigma_r/\alpha) \tau]^2 [\tau - (2/\alpha)(1 - \exp(-\alpha\tau)) + (1/(2\alpha))(1 - \exp(-2\alpha\tau))], \text{ e} \quad (D15)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= [(\sigma_r \sigma_f / \alpha \mu)] [\tau - (1/\alpha)(1 - \exp(-\alpha\tau)) - (1/\mu)(1 - \exp(-\mu\tau)) \\ &\quad + (1/(\alpha + \mu))(1 - \exp(-(\alpha + \mu)\tau))] \end{aligned} \quad (D16)$$

Denomina-se  $I_4$  e  $I_5$  como análogos a  $I_1$  e  $I_2$ , porém com os parâmetros para a economia externa. Usando as equações (D10) e (D14) em (D16) acha-se a variância condicional:

$$v^2 = \sigma_S^2 \tau + I_2 + I_5 + 2(\rho_{S1} \sigma_S I_1 - \rho_{S2} \sigma_S I_4 - \rho_{12} I_3). \quad (D17)$$

## APÊNDICE E: Decomposição de Cholesky

Têm-se 3 séries de n° aleatórios, erros S,  $\eta_2$  e  $\eta_3$ , gerados com distribuição N(0,1). O primeiro termo está relacionado ao ativo S, o segundo com o cupom cambial (q) e o terceiro com a taxa livre de risco ( $R_f$ ). Como mencionado no capítulo 3, o ativo S segue o browniano:

$$S_1 = S_0 * e^{(\mu_S + erro_S * Vol_{Sdt})} \quad (E1)$$

$$\text{Onde: } \mu_S = \left( Rf_{dt} - q_{dt} - \frac{Vol_{Sdt}^2}{2} \right)$$

Apenas como lembrança, as volatilidades e correlações foram fornecidas no início do exemplo, e se considera como se fossem reais. Da série de  $\eta_2$  gerada e usando o  $erro_S$  e a correlação entre o cupom e o ativo S se calcula os erros do cupom:

$$erro_{qdt} = \rho_{Sq} erro_S + \left( \sqrt{1 - \rho_{Sq}^2} \right) \eta_2 \quad (E2)$$

Para o cálculo do  $erro_{Rfdt}$  além dos fatores descritos acima, são necessárias as outras correlações e o  $\eta_3$ , resultando em:

$$erro_{Rfdt} = \frac{\eta_3}{\sqrt{\frac{\sqrt{1 - \sigma_{Sq}^2}}{(1 - \rho_{Sq}^2 - \rho_{SRf}^2 - \rho_{qRf}^2 + 2\rho_{Sq}\rho_{SRf}\rho_{qRf})}}}} + \sqrt{\frac{1}{(1 - \rho_{Sq}^2)}} (\rho_{qRf} - \rho_{SRf}\rho_{Sq}) \eta_2 + erro_S \rho_{SRf} \quad (E3)$$