

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

Universidade de São Paulo

Comparação de Metodologias para Estimação de
Volatilidades para Cálculo do VaR - Valor-no-Risco e
Modelagem de Perdas Não Previstas pelo VaR em
Momentos de Crise

Sandro Magalhães Manteiga

Áreas de Concentração: Séries Temporais Financeiras
Orientador: Prof. Pedro A Morettin

São Paulo, Março de 2002

Sumário

INTRODUÇÃO	I
A IMPORTÂNCIA ESTRATÉGICA DA GESTÃO DE RISCO	1
AS ABORDAGENS NA DETERMINAÇÃO DO VALOR-NO-RISCO – VAR.....	11
1 HISTÓRICO, CONCEITOS E DEFINIÇÕES PRELIMINARES	1
1.1 BREVE PERSPECTIVA HISTÓRICA DO VAR.....	1
1.2 DERIVATIVOS.....	1
1.3 RISCO DE MERCADO.....	2
1.4 DEFINIÇÕES DE PREÇOS E RETORNOS.....	2
1.5 MODELAGEM DE PREÇOS E RETORNOS.....	4
2 O MODELO DO PASSEIO CASUAL	6
2.1 PROPRIEDADES DEPENDENTES DO TEMPO DO MODELO DO PASSEIO CASUAL.....	6
2.2 A VERIFICAÇÃO DAS PREMISSAS DO MODELO DO PASSEIO CASUAL	7
2.3 DISTRIBUIÇÕES DE RETORNOS DAS SÉRIES TEMPORAIS DE LOG-RETORNOS.....	12
3 A MODELAGEM DAS VOLATILIDADES	16
3.1 MÉDIAS MÓVEIS.....	17
3.2 A ABORDAGEM DO RISKMETRICS – MODELO EWMA	18
3.3 PREVISÕES PARA MÚLTIPLOS DIAS.....	19
3.4 ESTIMANDO OS PARÂMETROS DO MODELO EWMA	21
3.5 A ESTIMAÇÃO DE VOLATILIDADE ATRAVÉS DE MODELOS GARCH.....	24
3.6 KERNEL - ESTIMAÇÃO NÃO-PARAMÉTRICA DE DENSIDADE	27
4 AVALIAÇÃO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE	31
4.1 A PREPARAÇÃO DOS DADOS PARA A PREVISÃO FORA DA AMOSTRA	31
4.2 COMENTÁRIOS SOBRE OS MODELOS GARCH.....	32
4.3 OS RESULTADOS DA PREVISÃO FORA DA AMOSTRA.....	44
5 UMA EXTENSÃO AO RISKMETRICS	51
5.1 A CRÍTICA AO RISKMETRICS.....	51
5.2 OS 5% RESTANTES - A MODELAGEM DAS PERDAS NÃO PREVISTAS PELO VAR - RISKMETRICS.....	51
5.3 PREVISÃO FORA DA AMOSTRA DA MODELAGEM DE PERDAS NÃO PREVISTAS - IBOVESPA	54
5.4 MODELAGEM DAS PERDAS NÃO PREVISTAS PELO VAR – EWMA PARA O S&P 500.....	56
5.5 MODELAGEM DAS PERDAS NÃO PREVISTAS PELO VAR E CAPM.....	59
6 CONCLUSÕES	62
7 APÊNDICE	64
7.1 GRÁFICOS DAS SÉRIES TEMPORAIS.....	64
7.2 AUTOCORRELAÇÕES DE LOG-RETORNOS E DE QUADRADOS DE LOG-RETORNOS.....	69
7.3 ESTACIONARIEDADE DOS LOG-RETORNOS	74
7.4 OBSERVAÇÕES HISTÓRICAS DAS DISTRIBUIÇÕES DOS LOG-RETORNOS.....	84
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89

Agradecimentos

A meus pais, em especial à Fátima, por todo incentivo e apoio sempre incondicionais.

A todos os mestres que colaboraram ativamente para despertar meu prazer pela busca do conhecimento.

À Lilian, pela compreensão e incentivo, sempre presentes, apesar das muitas horas exigidas de estudo e dedicação para a realização desse projeto.

Resumo

Neste estudo, aplicado à séries financeiras brasileiras, apresentamos e discutimos alternativas de modelagem de volatilidade para cálculo de VaR – Valor-No-Risco. Damos especial ênfase à verificação das hipóteses subjacentes das diferentes abordagens: a paramétrica que inclui o EWMA do RiskMetrics e os modelos de volatilidade estocástica GARCH e a não-paramétrica através da utilização de Kernel Gaussiano.

Também, apresentamos uma proposta de metodologia para quantificação de perdas não previstas pelo VaR em momentos de crise. Nessa nova proposta, apresentamos um extensão à modelagem proposta pelo RiskMetrics e avaliamos modelos paramétricos e não-paramétricos para as perdas não previstas pelo VaR.

Introdução

A Importância Estratégica da Gestão de Risco

Pode ainda haver muita discussão a respeito de quais deveriam ser as principais prioridades estratégicas e subseqüentes relações de subordinações das metas de uma empresa. Certamente, a maximização da riqueza dos acionistas é uma delas. Contudo, dadas as incertezas de mercado, o alcance dessa meta de maximização deve incorporar práticas de gestão de risco para ser mais efetiva.

A inclusão da gestão de risco na gestão das empresas pode ser justificada para qualquer negócio que vise a maximização de riqueza. Essa meta consiste na obtenção de retornos que superem o custo de capital ponderado, no caso de acionistas de uma empresa, ou que igualem ou superem a expectativa de ganho com relação a uma referência de mercado como CDI ou o IBOVESPA, por exemplo, no caso de investidores de fundos de investimento. Em qualquer caso, esse retorno será obtido, necessariamente, mediante a uma exposição a risco. Portanto, todo gestor que integrar, de maneira ativa, o componente de risco a seu “modus operandi”, disporá de um recurso valioso que o auxiliará a atingir sua meta de maximização de riqueza de maneira mais consistente.

A prática de gestão de risco fornece ferramentas para lidar, de modo estruturado, com a dinâmica dos mercados. Essa dinâmica traz uma incerteza, ou seja, risco em relação aos resultados esperados vinculados aos valores de ativos ou de passivos de interesse. Contudo, essas ferramentas possibilitam o desenho de estratégias de hedges para evitar movimentos do mercado adversos ao negócio.

Jorion (1998) define *Risco* como a *volatilidade* dos resultados dos ativos ou passivos em questão. *Volatilidade* é o conceito central deste estudo, visto que discutimos e comparamos três diferentes abordagens para determinação da mesma, a saber: EWMA (método paramétrico de *médias móveis com ponderação exponencial*) que é utilizado pelo RiskMetrics para cálculo do VaR, GARCH (modelo paramétrico *Autoregressivo Heterocedástico Condicional Generalizado*) e Kernel (método para obtenção de distribuições não-paramétricas de log-retornos).

É a partir do conceito de *volatilidade* de um ativo que o VaR é calculado segundo diferentes métodos que podem fazer uso de qualquer uma das três abordagens para cálculo de *volatilidade* já mencionadas. Segundo Jorion (1998), são os seguintes os métodos para cálculo do VaR: Delta-Normal, Simulação Histórica e Monte-Carlo Estruturado. Aliados a esses três métodos, recomenda-se a prática de Testes de Stress para complementar análises de risco.

Apesar do enfoque deste estudo ser o cálculo de *volatilidades*, apresentaremos, de maneira mais breve, os métodos para cálculo do VaR aplicados à series de ações negociadas na BOVESPA, além do próprio IBOVESPA. São elas: Acesita, Gerdau, Belgo, Usiminas, Petrobrás, Itau e Votorantin. Além dessas séries, também incluímos o dólar cotado pelo PTAX de venda. Também aplicamos as diferentes abordagens para cálculo de volatilidades seguidas da determinação do VaR para uma carteira hipotética composta pelos ativos já mencionados.

Complementando o estudo das *volatilidades*, propomos uma metodologia de mensuração de perdas potenciais que complementa o VaR, na medida em que apresentamos uma modelagem que visa a quantificar as perdas potenciais nos casos não previstos pelo VaR.

Ainda segundo Jorion (1998), as empresas estão expostas a três classes de risco: operacional, estratégico e financeiro. Neste estudo, estaremos abordando exclusivamente os *riscos financeiros*, que estão ligados às oscilações de variáveis financeiras, tais como taxas de câmbio e de juros, que podem acarretar perdas financeiras.

Contudo, segundo Jorion (1998), os *riscos financeiros* ainda podem ser subdivididos nas seguintes categorias: risco de crédito, risco operacional, risco de liquidez, risco legal e risco de mercado. Em nosso estudo, estaremos tratando, na classe de *riscos financeiros* apenas a categoria de *risco de mercado*.

O *risco de mercado* está relacionado às perdas potenciais associadas ao comportamento do mercado.

Finalmente, de agora em diante, quando nos referirmos à *Gestão de Risco*, estaremos nos referindo à *gestão de risco de mercado*. O objetivo da *Gestão de Risco* é a aplicação efetiva de metodologias que propiciem a minimização das perdas financeiras potenciais às quais as organizações estão expostas, visando à proteção e à maximização da riqueza.

Finalmente, Jorion (1998) define que:

“O VaR sintetiza a maior (ou pior) perda esperada dentro de determinado período de tempo e intervalo de confiança.”

As Abordagens na Determinação do Valor-no-Risco – VaR

Em geral, no mercado financeiro, estaremos interessados na determinação do VaR de carteiras. Lembramos, que o estudo aqui apresentado, tem um enfoque mais fundamental: a determinação de volatilidades e de modelos de volatilidades que foram aplicados para séries de ações, de dólar (PTAX) e de uma carteira hipotética construída a partir desses ativos.

Contudo, a partir da escolha de uma metodologia para cálculo de volatilidade: EWMA, GARCH ou Kernel, através da integração com uma das abordagens para o cálculo de VaR de instrumentos financeiros mais sofisticados, como opções, é possível construir um sistema completo para cálculo do VaR de carteiras.

Apresentamos, rapidamente, uma síntese de abordagens para determinação do VaR baseadas em Jorion (1998). São elas: o método Delta-Normal, o método de Simulação Histórica e o Monte-Carlo Estruturado, abordagens complementados pelo Teste de Stress.

Método Delta-Normal

A suposição fundamental do Delta-Normal é que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal. Como já foi visto, nesse caso, o retorno de uma carteira será uma combinação linear de variáveis normais e, por consequência, será normalmente distribuída. Assim, a variância de uma carteira pode ser facilmente calculada a partir de matriz de

correlação dos ativos que a compõem e da alocação em cada ativo que a compõe da seguinte maneira:

$$[\text{Eq. 4 - 1}] \quad \text{Variância}(\Pi) = \mathbf{w}' \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{w},$$

onde:

\mathbf{w} é o vetor-coluna com as alocações dos ativos que compõem a carteira.

\mathbf{S} é a matriz de variância-covariância dos ativos que compõem a carteira.

Destacamos que a matriz \mathbf{S} pode ser estimada usando-se dados históricos, dados baseados em volatilidade implícitas de opções ou uma combinação de ambos.

O Método Delta-Normal apresenta, basicamente, três deficiências. Primeiro, não modela o risco de eventos extremos, visto que, em crises, a matriz de variância-covariância \mathbf{S} altera-se radicalmente. Segundo, como é baseado na premissa de distribuição normal para os log-retornos dos preços, não modela adequadamente as “caudas pesadas” que caracterizam as distribuições reais, conforme já discutido. Finalmente, o Delta-Normal não é adequada para modelagem de risco de instrumentos não-lineares como opções, por exemplo. Para as opções, além da grega *delta*, que mede a variação linear do preço da opção em relação ao preço do ativo base, as outras gregas não lineares com o ativo base, medem a sensibilidade do preço da opção em relação a movimentos de taxas de juros ou à convexidade, por exemplo. E essas não-linearidades não são capturadas de modo conveniente pelo Delta-Normal. Contudo, o Método Delta-Normal é bastante razoável quando as posições em opções de uma carteira não são muito significativas.

Método de Simulação Histórica

Ao contrário do método Delta-Normal, o método de Simulação Histórica não assume que a distribuição dos log-retornos da carteira segue uma distribuição normal. O que se faz na Simulação Histórica é determinar os retornos históricos da carteira a partir dos log-retornos históricos dos ativos que a compõem. Então, a partir da série histórica sintetizada de log-retornos da carteiras, calcula-se o VaR a partir de distribuição completa da amostra em questão. Ao contrário do Delta-Normal, a simulação histórica incorpora não-linearidades e “caudas pesadas” da distribuição dos preços da carteira, bem como é imune aos modelos de precificação.

Uma importante questão que surge na utilização desse método é a seleção do tamanho da amostra. Nesse estudo apresentamos a abordagem do RiskMetrics para determinação do tamanho da amostra vinculado ao grau de confiança que impomos ao VaR.

Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo - MC - é o mais sofisticado de todos, porém demanda um custo computacional bastante alto. O Monte Carlo requer a especificação de processos estocásticos que expliquem a dinâmica temporal das variáveis financeiras básicas, necessários à precificação dos ativos que formam as carteiras. Esses modelos estocásticos, mais uma vez, podem ser derivados de dados históricos ou de volatilidades implícitas de opções.

Após a especificação dos modelos, são feitas muitas simulações aleatórias das trajetórias de todas as variáveis financeiras básicas levando-se em conta suas eventuais correlações. A partir de cada realização, os ativos que compõem a carteira são precificados. Uma vez que os ativos estejam precificados, é possível determinar uma distribuição de retornos para a carteira e calcular o VaR para a mesma.

O Monte-Carlo integra o cálculo de VaR para instrumentos lineares e não-lineares, as “caudas pesadas” das distribuições de log-retornos reais e cenários de stress. Obviamente, se os modelos estocásticos que serão simulados não estiverem bem especificados, então o Monte-Carlo não resultará em resultados consistentes.

Testes de Stress

Segundo Jorion (1998), os *Testes de Stress* são também conhecidos como *Análise de Cenários*. O objetivo dessa técnica é avaliar o impacto (Perdas & Lucros), na carteira, a partir de movimentos arbitrários de variáveis financeiras básicas tais como: taxas de juros e câmbio, por exemplo.

Em geral, cada mercado deve definir intervalos de variações que sejam adequados à uma previsão de eventos extremos que faça sentido.

Capítulo 1

1 Histórico, Conceitos e Definições Preliminares

1.1 Breve Perspectiva Histórica do VaR

A preocupação das instituições financeiras com o risco de mercado é relativamente recente e data da década de 90. Isso é uma decorrência de alterações que ocorreram nos mercados financeiros nos últimos 25 anos. Essas mudanças incluem desde a securitização de instrumentos financeiros para torná-los mais líquidos; melhorias em processamento e transmissão de dados eletrônicos online, que permitiu, por exemplo, a substituição da atualização contábil pelo “marking-to-market”; até o desenvolvimento de novas medidas de performance como índices, por exemplo.

Além dessas mudanças, o mercado também sentiu a necessidade de desenvolver e padronizar medidas de risco. Ou seja, a informação de retorno precisa ser associada ao risco subjacente. Assim, duas abordagens foram desenvolvidas para avaliação de risco. Ver Jorion (1998).

A primeira, que é uma abordagem estatística, baseia-se na utilização de probabilidade e de modelos estatísticos para a previsão de distribuições de retornos de carteiras. A segunda abordagem consiste na análise de cenários que reavalia carteiras para diferentes taxas e preços de mercado. É nesse contexto que se inserem os cenários ou testes de stress, quando taxas e preços futuros podem ser definidos arbitrariamente por meio de um comitê da instituição. É vital salientar que essas duas abordagens não são excludentes, mas sim complementares.

As medidas de risco elaboradas a partir do VaR são baseadas no “marking-to-market” e não em atualizações contábeis. Isso representou uma evolução em relação à prática anterior de ALM (“Asset/Liability Management”), que era baseada em atualizações contábeis com horizontes de tempo mais longos que os utilizados pelo VaR.

Finalmente, ressaltamos que, neste estudo, o VaR que apresentamos não é o VaR expresso através de uma unidade financeira definida por uma moeda arbitrária, mas sim o VaR percentual, ou o RaR, o Retorno-no-Risco, que expressa, para um dado nível de confiança a maior perda percentual da posição em estudo. Optamos por utilizar uma medida percentual, para maior clareza de nossa exposição, visto que para conhecer o VaR expresso em moeda, basta multiplicar o VaR percentual ou o RaR pelo financeiro total da posição em questão.

1.2 Derivativos

Nessa altura, julgamos conveniente traçar algumas considerações sobre *derivativos*. Os derivativos são instrumentos financeiros muito utilizados em gestão de risco, pois propiciam “hedge” contra riscos financeiros. Entre os derivativos mais conhecidos podemos citar as opções, os swaps e os futuros. O “hedge” pode ser entendido como uma forma de fazermos um seguro contra efeitos indesejáveis das variáveis de mercado sobre as carteiras de interesse. A liquidez desse mercado complementa-se com os especuladores que tomam a contraparte e os arbitradores que efetuam operações de arbitragem obtendo ganhos sem risco.

Os mercados globais para derivativos superaram a cifra de 50 trilhões de dólares. E continuam a crescer devido a maior volatilidade da economia global, às mudanças tecnológicas na computação, telecomunicações e teoria de finanças; e devido a eventos políticos.

Outro tópico muito importante para a uso de derivativos na gestão de risco é o conhecimento das “gregas”. Segundo Hull (2000), as gregas medem diferentes dimensões do risco de posição em opções. Matematicamente, as gregas são as derivadas do preço do derivativo em relação ao ativo base, ao tempo e à taxa de juros, por exemplo. Portanto, medem a sensibilidade do preço do derivativo em relação às variáveis que determinam sua precificação. A gestão de risco deve garantir que as gregas estejam dentro de parâmetros aceitáveis de risco.

1.3 Risco de Mercado

O risco de mercado surge de alterações nos preços ou volatilidades dos componentes de uma carteira, que tem alterado o valor das posições em aberto ou nos ganhos.

Segundo Jorion (1998), o risco de mercado pode ser de dois tipos: *risco absoluto*, medido pela perda expressa em moeda (Reais, por exemplo) e o *risco relativo*, vinculado a um índice de referência. Essa distinção apenas informa que o primeiro trata da volatilidade dos retornos totais, enquanto o segundo mensura o risco em termos da variação em relação a algum índice.

1.4 Definições de Preços e Retornos

A mensuração de risco é freqüentemente feita em termos de mudanças nos preços. Dessa maneira, podemos calcular essas mudanças de preços em termos dos preços absolutos, preços relativos e logaritmo dos preços. O *retorno* é definido como a razão de uma mudança de preço pelo preço inicial.

Na seqüência, fazemos algumas definições, que são conhecidas no mercado e, portanto, serão utilizadas em nosso estudo:

1.4.1 Horizonte de um dia

P_t é o preço de um ativo na data t . Em nosso estudo, t é medido sempre em dias úteis de trabalho. O mudança de preço absoluto do ativo entre as datas t e $t-1$ (um dia útil) é dada por:

$$[\text{Def. 1 - 1}] \quad D_t = P_t - P_{t-1}.$$

A mudança relativa de preço, ou retorno percentual, R_t , para o mesmo período é:

$$[\text{Def. 1 - 2}] \quad R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Se o retorno bruto de um ativo é $1 + R_t$, então o log da mudança de preço, também conhecida como retorno continuamente composto, r_t , é definida como o logaritmo natural do retorno bruto.

$$\text{[Def. 1 - 3]} \quad r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1},$$

onde $p_t = \ln(P_t)$ é o logaritmo natural de P_t . Como, para u pequeno, $\ln(1 + u) \approx u$, os retornos R_t e r_t são bastante próximos.

1.4.2 Horizonte de Dias Múltiplos

O retorno percentual para dias múltiplos para k dias, $R_t(k)$ é dado por:

$$\begin{aligned} 1 + R_t(k) &= (1 + R_t) \cdot (1 + R_{t-1}) \cdot \dots \cdot (1 + R_{t-k+1}) \\ \text{[Def. 1 - 4]} \quad &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}}. \end{aligned}$$

Observe que, na equação acima, o retorno para k dias é composto discretamente. Para retornos compostos continuamente, o retorno para múltiplos dias $r_t(k)$ é definido como:

$$\text{[Def. 1 - 5]} \quad r_t(k) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right).$$

O retorno continuamente composto $r_t(k)$ é a soma dos k retornos continuamente compostos de 1 dia, pois:

$$\text{[Def. 1 - 6]} \quad r_t(k) = \ln[1 + R_t(k)] = \ln[(1 + R_t) \cdot (1 + R_{t-1}) \cdot \dots \cdot (1 + R_{t-k+1})] = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}.$$

1.4.3 Percentual e Composição Contínua em Retornos Agregados

Seja uma carteira Π com n instrumentos. Sejam r_i e R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) os retornos continuamente compostos e percentuais, respectivamente. Seja w_i a ponderação de cada ativo i , ou seja, a fração do valor total da carteira alocada no i -ésimo instrumento, assumindo que não há posições vendidas. Então,

$$\text{[Def. 1 - 7]} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Seja P_0 o valor inicial deste portfólio Π . Então, o preço dessa carteira no período seguinte com retornos continuamente compostos é:

$$\text{[Eq. 1 - 1]} \quad P_1 = w_1 \cdot P_0 \cdot e^{r_1} + w_2 \cdot P_0 \cdot e^{r_2} + \dots + w_n \cdot P_0 \cdot e^{r_n} = P_0 \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot e^{r_i}.$$

Lembrando que o retorno da carteira é $r_t = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$, substituindo na equação acima, temos o retorno continuamente composto da carteira:

$$[\text{Eq. 1 - 2}] \quad r_p = \ln\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot e^{r_i}\right).$$

O preço da carteira, um período depois, usando composição discreta, ou seja, retornos percentuais é:

$$[\text{Eq. 1 - 3}] \quad P_1 = P_0 \cdot \sum_{i=1}^n w_i \cdot (1 + r_i).$$

O retorno percentual da carteira, também conhecido como o retorno da carteira, é dado por:

$$[\text{Eq. 1 - 4}] \quad R_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i.$$

Finalmente, como será visto mais adiante, o RiskMetrics (1996) adota uma aproximação para o cálculo do retorno da carteira que é a seguinte:

$$[\text{Def. 1 - 8}] \quad r_{pt} \equiv \sum_{i=1}^n w_i \cdot r_{it}.$$

1.5 Modelagem de Preços e Retornos

O objetivo de um modelo de mensuração de risco é capturar a mudança no valor de uma carteira. Usualmente, isso é feito através de previsões determinadas a partir de valores passados. Para atingir tal intento, é necessário que modelemos a dinâmica temporal dos retornos e a distribuição dos retornos.

Em finanças, a grande maioria das classes de modelos utilizadas são fundamentadas na premissa de que os preços dos ativos financeiros seguem um passeio casual. Ver Mills (1993). Trataremos em mais detalhes do modelo do passeio casual no tópico seguinte. Nesse momento, pretendemos apenas apresentar algumas relações que serão utilizadas no decorrer deste estudo.

1.5.1 Modelo do Passeio Casual para "Ativos de Preço Único"

Nesse tópico, definiremos "Ativos de Preço Único" como todos aqueles não vinculados à renda fixa, tais como taxas de câmbio, commodities e ações, para os quais existe apenas uma único preço por ativo. Abaixo, escrevemos um modelo de passeio casual para modelar a dinâmica do preço desses ativos:

$$[\text{Def. 1 - 9}] \quad p_t - p_{t-1} = \mu + \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim IID \quad N(0,1).$$

onde $N(0,1)$ é a distribuição normal com média 0 e variância 1 e IID significa "identicamente e independentemente distribuída". Esse modelo, construído a partir dos log preços, garante que não haverá preços negativos. O que obviamente seria um evento impossível de ocorrer no mercado. Também ressaltamos o fato do modelo incorporar uma volatilidade σ , que não é constante, podendo variar no tempo, como é observado nos mercados.

Resta acrescentar que o RiskMetrics (1996) utiliza-se do modelo acima, porém com a média μ ajustada para zero.

1.5.2 Passeio Casual para Instrumentos de Renda Fixa

Lembramos que os instrumentos de renda fixa, à medida que se aproximam da maturidade, apresentam volatilidade que converge para zero, visto que seus preços convergem para seus valores de face.

Para instrumentos de renda fixa, o usual é modelar os ganhos ao invés dos preços. Seja Y_t o ganho de um título de renda fixa. O RiskMetrics (1996) adota a premissa de que Y_t apresenta distribuição lognormal para os retornos. Seja ainda $y_t = \ln(Y_t)$, assim:

[Def. 1 - 10]
$$y_t = \mu + y_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim IID \quad N(0,1).$$

Capítulo 2

2 O Modelo do Passeio Casual

2.1 Propriedades Dependentes do Tempo do Modelo do Passeio Casual

Para começarmos a apresentação das propriedades do modelo do Passeio Casual, consideremos o seguinte modelo a seguir:

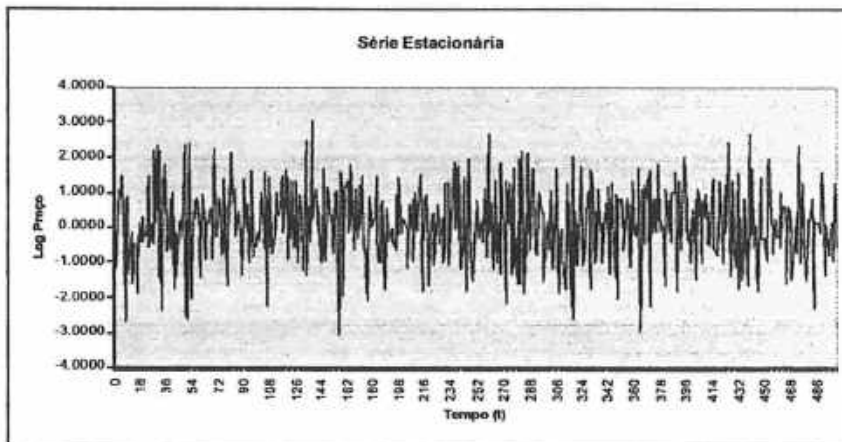
$$[\text{Def. 2 - 1}] \quad p_t = \mu + \phi \cdot p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID } N(0,1), p_0 = 0,$$

onde μ e ϕ são parâmetros constantes. Sabemos que, para processo acima ser estacionário, devemos ter $|\phi| < 1$. Ou seja, as séries estacionárias apresentam a propriedade de *reversão à média*. Em contrapartida, as séries não estacionárias apresentam tendência ao longo do tempo. Os gráficos a seguir ilustram esse dois casos.

Seja o exemplo do seguinte processo simulado para 500 inovações de uma série estacionária.

$$[\text{Eq. 2 - 1}] \quad p_t = 0,02 - 0,35 \cdot p_{t-1} + \varepsilon_t .$$

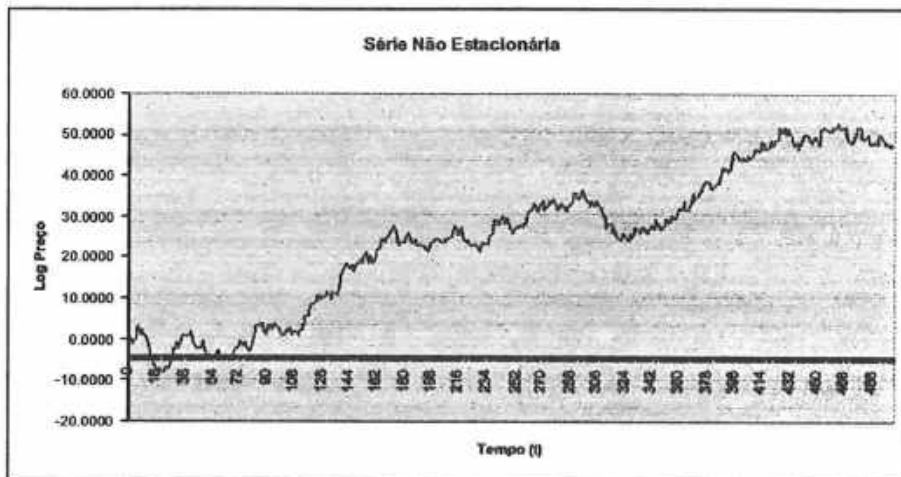
Gráfico 2 - 1: Série Estacionária Simulada



Vejamos, agora, o exemplo do seguinte processo simulado para 500 inovações de uma série estacionária:

$$[Eq. 2 - 2] \quad p_t = 0,05 + p_{t-1} + \varepsilon_t,$$

Gráfico 2 - 2: Série Não-Estacionária Simulada



Tomamos, aqui, $\mu = 0,05$ e $\phi = 1$, obtendo-se um *passeio casual* (ou aleatório) com *tendência* (ou “drift”). Se $\mu = 0$, temos um *passeio casual* sem *tendência*.

2.2 A Verificação das Premissas do Modelo do Passeio Casual

A partir de agora, verificaremos as premissas dos modelos apresentados contrapondo os resultados das observações experimentais.

2.2.1 A Hipótese de Média 0 e Variância σ^2 Constante

Essa premissa significa que a média e a variância dos log-retornos, ou retornos continuamente compostos, são constantes ao longo do tempo, ou seja, que os mesmos apresentam comportamento *homocedástico*.

A inspeção visual das séries dos retornos a seguir, permitem verificar que as séries analisadas apresentam variância que se altera com o tempo. Há, nitidamente, agrupamentos com baixas volatilidades e outros com altas volatilidades.

Gráfico 2 - 3: Série de Log-retornos do IBOVESPA

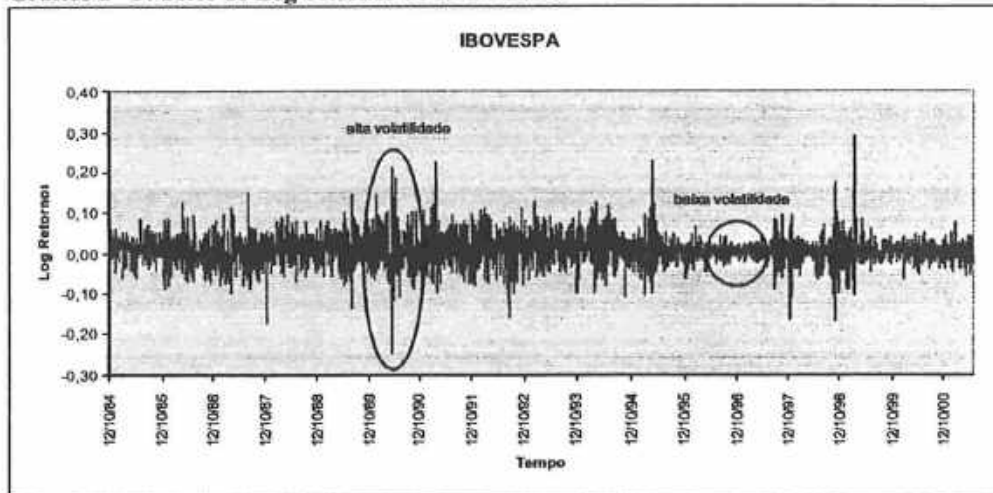
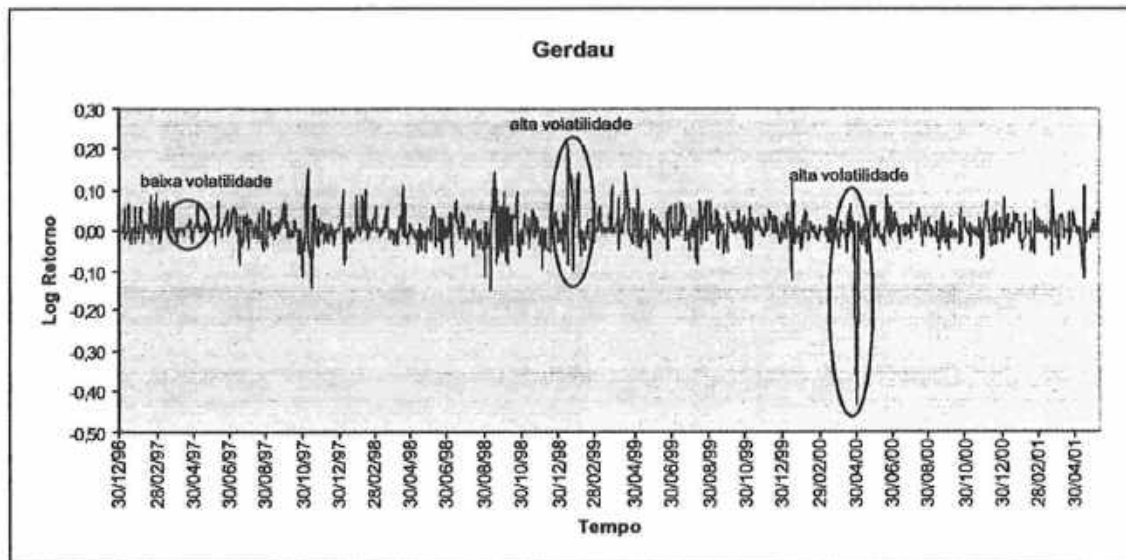


Gráfico 2 - 4: Série de Log-retornos da GERDAU



Dessa forma, verificamos que as séries financeiras analisadas nesse estudo apresentam heterocedasticidade, sendo válida portanto a premissa de que os log-retornos não sejam homocedásticos.

2.2.2 A Hipótese de que os Log-retornos são Não-Correlacionados

Para verificar a hipótese de não-correlação, verificaremos o comportamento das séries analisadas em nosso estudo no que se refere à autocorrelação dos log-retornos e dos seus quadrados. Caso os retornos fossem estatisticamente independentes ao longo do tempo, não deveriam apresentar correlação diferente de zero.

A seguir apresentamos as definições necessárias para o cálculo das auto-correlações, bem como da estatística Ljung-Box para teste de autocorrelação até o lag k .

Sejam variáveis aleatórias X com média μ_x e Y com média μ_y .

A variância da variável aleatória X é definida como:

$$[\text{Def. 2 - 2}] \quad \sigma_x^2 = E[(X - \mu_x)^2].$$

Como consequência dessa definição, temos:

$$[\text{Def. 2 - 3}] \quad \sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2.$$

A covariância entre variáveis aleatórias X e Y é definida como:

$$[\text{Def. 2 - 4}] \quad \sigma_{xy} = E[(X - \mu_x) \cdot (Y - \mu_y)].$$

Como consequência dessa definição, temos:

$$[\text{Def. 2 - 5}] \quad \sigma_{xy} = E(X \cdot Y) - \mu_x \cdot \mu_y.$$

O coeficiente de correlação entre variáveis aleatórias X e Y é definido a seguir:

$$[\text{Def. 2 - 6}] \quad \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Segue-se que $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$.

Consideremos, agora, uma série temporal de log-retornos $\{r_t, t \in Z\}$, onde $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, suposta estacionária, com $E(r_t) = \mu$. Definamos a função de auto-correlação de $\{r_t\}$.

$$[\text{Def. 2 - 7}] \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

onde γ_k é a função de auto-covariância dos log-retornos, definida por:

$$[\text{Def. 2 - 8}] \quad \gamma_k = \text{Cov}\{r_t, r_{t-k}\} = E(r_t \cdot r_{t-k}) - \mu^2.$$

Segue-se que:

$$[\text{Def. 2 - 9}] \quad \gamma_0 = \text{var}\{r_t\}.$$

Para uma dada amostra de retornos, $r_t, t = 1, \dots, T$, estimamos a auto-correlação por meio de:

$$[\text{Def. 2 - 10}] \quad \hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T \{(r_t - \bar{r}) \cdot (r_{t-k} - \bar{r})\}}{\sum_{t=1}^T \{(r_t - \bar{r})^2\}},$$

onde k = número de lags em dias, $\bar{r} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T r_i$ é a média amostral e $\sum_{i=1}^T \frac{(r_i - \bar{r})^2}{(T-1)}$ é a variância amostral.

Se a série de retornos não for autocorrelacionada, então as estimativas de $\hat{\rho}_k$ não serão significativamente diferentes de 0, para $k \neq 0$. Para testarmos, estatisticamente, se aceitamos ou rejeitamos a autocorrelação dos retornos, utilizamos a estatística de Ljung-Box (RiskMetrics, 1996, pág. 58) que é dada por:

$$\text{[Eq. 2 - 3]} \quad Q_{LB}(m) = T \cdot (T + 2) \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\hat{\rho}_j^2}{T - j}.$$

A hipótese nula desse teste é que a série é **não** autocorrelacionada. $Q_{LB}(m)$ segue uma distribuição χ^2 com k graus de liberdade, onde m denota o número de auto-correlações menos o número de parâmetros estimados para calcular a estatística.

Para o cálculo das auto-correlações dos retornos, verificamos que, estatisticamente, os retornos das séries financeiras têm média igual a zero. Isso facilita o cálculo das variâncias e autocovariâncias, resultando:

$$\text{[Eq. 2 - 4]} \quad \sigma_r^2 = E[r_t - E(r_t)]^2 = E(r_t^2).$$

Mais genericamente, a autocovariância para um lag k é dada por:

$$\text{[Eq. 2 - 5]} \quad \gamma_k = E(r_t \cdot r_{t-k}).$$

As autocorrelações amostrais serão dadas por:

$$\text{[Eq. 2 - 6]} \quad \hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T r_t \cdot r_{t-k}}{\sum_{t=1}^T r_t^2}.$$

Calculamos as auto-correlações dos retornos, bem como as estatísticas Ljung-Box até o lag de ordem 15. A escolha do lag de ordem 15 foi devido a observação de que as auto-correlações a partir do lag 15 não se alteravam substancialmente. As tabelas que ilustram as auto-correlações e as estatísticas Ljung-Box encontram-se no Apêndice 7.2 **Autocorrelações de Log-Retornos e de Quadrados de Log-Retornos** para as séries do IBOVESPA, DÓLAR, ACESITA, BELGO, GERDAU, USIMINAS, PETROBRÁS, ITAÚ e VOTORANTIM e da CARTEIRA que foi composta a partir desses ativos. Os cálculos foram feitos com dados de retornos diários a partir de 01/01/1997 até 29/12/2000, que representam quatro anos de amostragem. Os dados eventualmente faltantes na amostragem foram estimados através de regressão linear simples (Vasconcellos, Alves et al, 2000). O software utilizado nos cálculos das auto-correlações e das estatísticas Ljung-Box foi o EViews.

Segundo o RiskMetrics, 1996, pág. 57-62, as séries de retornos analisadas por eles apresentam fraca evidência de autocorrelação para os retornos.

Com relação à autocorrelação dos log-retornos, nosso estudo ilustra que as séries analisadas podem ou não apresentar autocorrelação. Para as séries de ACES4, BELG4, VCPA4 e PTAX não podemos rejeitar a hipótese de não autocorrelação, ao passo que para as séries IBOVESPA, GGBR4, USIM5, PETR4, ITAU4 e CARTEIRA, podemos rejeitar a hipótese de não autocorrelação conforme a Tabela 2-1.

Contudo, verificamos que, para todas as séries dos quadrados dos log-retornos, podemos rejeitar a hipótese de não autocorrelação. Essa constatação está de acordo com a hipótese do RiskMetrics.

Havendo autocorrelação nos retornos, antes de modelarmos a variância condicional, é necessário modelarmos a parte linear da série.

A existência de autocorrelação nos quadrados dos retornos implica na necessidade de considerarmos a volatilidade condicional nas séries.

Tabela 2 - 1: Auto-correlações de Log-Retornos e de Quadrados de Log-Retornos

Série	Rejeita Hipótese Nula de Não Autocorrelação nos Log-Retornos? (Ljung-Box)	Rejeita Hipótese Nula de Não Autocorrelação nos Quadrados dos Log-Retornos? (Ljung-Box)
IBOVESPA	SIM	SIM
ACES4	NÃO	SIM
BELG4	NÃO	SIM
GGBR4	SIM	SIM
USIM5	SIM	SIM
PETR4	SIM	SIM
ITAU4	SIM	SIM
VCPA4	NÃO	SIM
PTAX	NÃO	SIM
CARTEIRA	SIM	SIM

2.2.3 A Covariância entre as Séries de Log-Retornos

Agora, que já estudamos as propriedades de séries temporais que nos interessam, prosseguiremos com o estudo da correlação entre as séries de tempo, que faremos através da análise da covariância entre as séries de log-retornos.

Para tal, suponhamos duas séries de log-retornos $\{r_{1,t}\}$ e $\{r_{2,t}\}$. Temos a seguinte definição para a covariância no tempo t :

$$[\text{Def. 2 - 11}] \quad \sigma_{1-2,t} = E\left\{[r_{1,t} - E(r_{1,t})] \cdot [r_{2,t} - E(r_{2,t})]\right\} = E(r_{1,t} \cdot r_{2,t}) - E(r_{1,t}) \cdot E(r_{2,t}).$$

Se assumirmos que a média dos log-retornos é zero para as séries $\{r_{1,t}\}$ e $\{r_{2,t}\}$, resulta:

$$[\text{Def. 2 - 12}] \quad \sigma_{1-2,t} = E(r_{1,t} \cdot r_{2,t}).$$

2.3 Distribuições de Retornos das Séries Temporais de Log-Retornos

Em geral, na área financeira, a distribuição normal é freqüentemente usada para modelar log-retornos. Também usamos inovações com distribuições normais em nossos modelos de passeios casuais.

Nessa seção, iremos estudar em maior profundidade a distribuição normal além da log-normal, t-student e as distribuições estáveis.

Os dados coletados das séries de retorno analisadas nesse estudo nos permitem fazer as observações gerais expostas a seguir, com relação às propriedades empíricas observadas.

- As séries de log-retornos tem *caudas pesadas*, o que implica em maiores probabilidades de ocorrência de retornos extremos.
- As distribuições observadas apresentam características de distribuições *leptocúrticas*, ou seja, apresentam caudas pesadas associadas a um pico mais alto na média da distribuição quando comparado a uma distribuição normal.
- Os quadrados dos log-retornos apresentam maior auto-correlação que os log-retornos. Em nossas séries de estudo, todas apresentaram auto-correlações estatisticamente significativas para os quadrados de log-retornos.

Apresentamos os dados empíricos que comprovam todas as conclusões acima no Apêndice 7.4 **Observações Históricas das Distribuições dos Log-Retornos**, onde os gráficos dos histogramas distribuições das observações das séries de log-retornos e do kernel são plotados contra a distribuição normal.

2.3.1 A Distribuição Normal

2.3.1.1 Definições

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória $\{r_t\}$ com distribuição normal de média μ e variância σ^2 é dada por:

$$[\text{Def. 2 - 13}] \quad f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(r_t - \mu)^2}.$$

Ressaltamos que a distribuição normal exposta acima é *incondicional* em relação ao tempo, ou seja, depende apenas de μ e σ^2 para ser completamente descrita.

A *assimetria* é uma medida que informa a assimetria da distribuição ao redor da média. É definida assim:

$$[\text{Def. 2 - 14}] \quad s^3 = E[(r_t - \mu)^3].$$

Para uma distribuição normal, a *assimetria* é zero. Também definimos o *coeficiente de assimetria* por:

[Def. 2 - 15]
$$\gamma = \frac{E[(r_i - \mu)^3]}{\sigma^3}.$$

Outra medida que definiremos é a *curtose*. Basicamente, a curtose mede o quão estreito ou largo é o pico da distribuição ao redor da média.

[Def. 2 - 16]
$$s^4 = E[(r_i - \mu)^4].$$

A seguir, também definimos o coeficiente de curtose:

[Def. 2 - 17]
$$\kappa = \frac{E[(r_i - \mu)^4]}{\sigma^4}.$$

Para uma distribuição normal o *coeficiente de curtose* é igual a 3.

2.3.1.2 Agregações de Variáveis Aleatórias Normais

Sabemos que a soma de variáveis aleatórias normais independentes resulta em uma distribuição normal. Suponhamos ainda, que dispomos de uma carteira Π com n ativos $\{r_{1,t}\}, \{r_{2,t}\}, \dots, \{r_{n,t}\}$. Essa carteira representaremos por $\{r_{n,t}\}$.

Vamos supor ainda que, os log-retornos dos n ativos sigam o seguinte modelo de passeio aleatório:

[Def. 2 - 18]
$$r_{i,t} = \mu_i + \sigma_{i,t} \cdot \varepsilon_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$, supomos que ε_t segue uma distribuição normal multi-variada, ou seja:

[Def. 2 - 19]
$$\mathbf{e}_t = MVN(\mathbf{0}, \mathbf{S}_t),$$

onde a matriz $\mathbf{0}$ representa uma matriz coluna com n elementos 0 e matriz $\mathbf{S}_{n \times n}$ é a matriz de correlação dos \mathbf{e}_t , dada por:

[Def. 2 - 20]
$$\mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \rho_{1-n,t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1,t} & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

O retorno da carteira Π é dado por:

[Eq. 2 - 7]
$$r_{\Pi,t} = \mathbf{w}'_t \cdot \mathbf{r}_t,$$

onde \mathbf{w}_t é o vetor coluna com a ponderação alocada em cada ativo i , $i = 1 \dots n$, ou seja,

$$\text{[Def. 2 - 21]} \quad \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{1,i} \\ \vdots \\ w_{n,i} \end{bmatrix}.$$

Analogamente, \mathbf{r}_i é o vetor coluna com os retornos de cada ativo i , $i = 1 \dots n$, ou seja:

$$\text{[Def. 2 - 22]} \quad \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} r_{1,i} \\ \vdots \\ r_{n,i} \end{bmatrix}.$$

A média de \mathbf{r}_i é $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{1,i}, \dots, \mu_{n,i})'$ e a variância da carteira Π é dada por:

$$\text{[Def. 2 - 23]} \quad \sigma_{\Pi,i}^2 = \mathbf{w}_i' \cdot \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{w}_i.$$

Segue que, a carteira Π tem distribuição normal $N(\boldsymbol{\mu}_{\Pi,i}, \sigma_{\Pi,i}^2)$.

2.3.2 A Distribuição Log-Normal

O estudo da distribuição Log-Normal é relevante porque, dado que os log-retornos são normalmente distribuídos, o preço é distribuído segundo uma log-normal.

A função densidade de probabilidade de uma Log-Normal é dada por

$$\text{[Def. 2 - 24]} \quad f(P_i) = \frac{1}{P_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln P_{t-1} - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right].$$

A média de P_i é dada por

$$\text{[Def. 2 - 25]} \quad E[P_i] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right).$$

E variância dada por

$$\text{[Def. 2 - 26]} \quad \text{var}(P_i) = \exp(2\mu + \sigma_i^2) \cdot [\exp(\sigma_i^2) - 1].$$

2.3.3 O Modelo de Retornos Financeiros do RiskMetrics

As séries temporais de log-retornos que analisamos neste estudo apresentaram as mesmas propriedades resumidas em RiskMetrics, 1996, pág. 73, que são as seguintes:

- As variâncias condicionais dos log-retornos são heterocedásticas e auto-correlacionadas.
- As covariâncias condicionais dos log-retornos são auto-correlacionadas e possuem características dinâmicas.

- A premissa de que os log-retornos são normalmente distribuídos pode ser útil pelas seguintes razões: somente a média e a variância são necessárias para descrever a distribuição e também devido às propriedades de agregação de variáveis normais que resultam em variáveis normais.

Ainda em RiskMetrics, 1996, pág. 73, é proposto o seguinte modelo para os log-retornos:

$$\begin{aligned} \text{[Def. 2 - 27]} \quad r_t &= s_t \cdot e_t, \quad t = 1, \dots, n, \\ e_t &\sim iid \quad N(0,1) \end{aligned}$$

Aqui, σ_t^2 é a variância condicional, dada por:

$$\text{[Def. 2 - 28]} \quad \sigma_t^2 = E(r_t^2 / \mathfrak{S}_{t-1})$$

onde \mathfrak{S}_{t-1} é a informação disponível até $t-1$.

Capítulo 3

3 A Modelagem das Volatilidades

Após avaliarmos as questões pertinentes ao modelo de passeio casual e às distribuições dos retornos das séries financeiras de log-retornos, iniciaremos o estudo de estimação dos parâmetros dos modelos e a previsão de volatilidades a partir de variâncias e covariâncias, ambas condicionais.

A previsão de variâncias e de covariâncias de log-retornos nos permite a previsão da mudança de valor financeiro de uma carteira para um dado horizonte de tempo que pode variar de um dia a vários meses.

Informamos que, na indústria financeira, o termo *volatilidade* refere-se aos movimentos de preços e de taxas de mercado. Em nosso estudo, o termo *volatilidade* é o desvio-padrão de retornos financeiros continuamente compostos (ou seja, os log-retornos).

Um último ponto a ser discutido nessa introdução da modelagem dos riscos é a questão referente à metodologia de previsão a ser utilizada. Basicamente, Jorion (1998) e RiskMetrics (1996) destacam duas metodologias: a de volatilidade implícita e a de volatilidade histórica.

Jorion (1998) defende o uso da metodologia de volatilidade implícita para previsão como sendo superior, ao passo que RiskMetrics (1996) suporta o uso da volatilidade histórica como superior à implícita.

Apesar de, em nosso estudo, trabalharmos exclusivamente com volatilidades históricas, não podemos afirmar que, para o mercado financeiro brasileiro, uma seja superior a outra. Contudo, apresentamos duas razões que nos levaram a escolher trabalhar com volatilidades históricas e não implícitas.

A primeira é que a metodologia de volatilidade implícita baseia-se inteiramente nas expectativas dado um determinado modelo de precificação de opções. Uma limitação evidente dessa abordagem é que a maioria dos modelos de precificação de opções pressupõe desvio-padrão constante ao longo do tempo, ou seja, a volatilidade implícita não conduzirá a boas previsões se o modelo de precificação de opções não levar esse item em conta. Além disso, a volatilidade implícita está associada a um horizonte de tempo fixo. Ou seja, qualquer previsão feita nessas condições é válida apenas para esse horizonte de tempo.

Finalmente, a segunda razão da escolha da metodologia baseada na volatilidade histórica tem uma motivação de cunho mais prático. O mercado brasileiro dispõe de poucos instrumentos para derivar volatilidades implícitas por razões de liquidez. Essa indisponibilidade de dados, por si só, dificulta muito a utilização de metodologias de previsão baseadas em volatilidades implícitas. Contudo, a metodologia baseada em volatilidades históricas não depende disso e nos permite elaborar previsões.

Apesar desses argumentos, acreditamos que seria interessante desenvolver um trabalho a partir de volatilidades implícitas para cálculo de ativos que tenham liquidez para que se fizesse uma comparação entre histórica e implícita.

Uma vez justificado porque utilizaremos volatilidades históricas, cabe definirmos as metodologias de previsões que analisaremos nesse estudo. São elas: Método EWMA (Médias Móveis com Ponderação Exponencial, utilizado pelo RiskMetrics), modelos GARCH e método KERNEL.

Para compararmos essas abordagens, iremos especificar o modelo, fazer a estimação de seus parâmetros com dados históricos e testar a acurácia das previsões através da metodologia de previsão fora da amostra por meio do critério de minimização de erros quadráticos.

Esse procedimento pode ser visualizado sinteticamente através da figura 3-1:

Figura 3 - 1: Procedimento para Estabelecer Comparações entre EWMA, GARCH e KERNEL



3.1 Médias Móveis

Seja uma série de retornos diários $\{r_t\}$ que consiste de T observações históricas. Para um modelo de Médias Móveis definimos o estimador $\hat{\sigma}_{MM}$ da volatilidade de $\{r_t\}$ assim:

$$[\text{Def. 3 - 1}] \quad \hat{\sigma}_{MM} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}.$$

O estimador de covariância entre as séries de retornos diários $\{r_{x,t}\}$ e $\{r_{y,t}\}$ é dada por:

$$[\text{Def. 3 - 2}] \quad \hat{\sigma}_{xy} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{x,t} - \bar{r}_x) \cdot (r_{y,t} - \bar{r}_y).$$

O estimador da correlação entre as séries de retornos diários $\{r_{x,t}\}$ e $\{r_{y,t}\}$ é definida como:

$$[\text{Def. 3 - 3}] \quad \hat{\rho}_{xy} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_y}.$$

3.2 A Abordagem do RiskMetrics – Modelo EWMA

O modelo de médias móveis, como veremos, é apenas um caso particular do EWMA. Seja uma série de retornos diários $\{r_t\}$ que consiste de T observações históricas. Seja ainda $\lambda, 0 < \lambda < 1$ definido como *fator de decaimento*. A série $\{r_t\}$ com ponderação exponencial λ fica: $r_1, \lambda \cdot r_2, \lambda^2 \cdot r_3, \dots, \lambda^{T-1} \cdot r_T$, onde r_1 é a observação mais antiga no tempo e r_T é a mais recente.

Assim, o peso de cada observação r_T resulta:

$$\text{[Def. 3 - 4]} \quad \frac{\lambda^{T-1}}{\sum_{j=1}^T \lambda^{j-1}}.$$

Observe que quando $\lambda \rightarrow 1$ temos:

$$\text{[Def. 3 - 5]} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\lambda^{T-1}}{\sum_{j=1}^T \lambda^{j-1}} = \frac{1}{T},$$

que é o caso de Médias Móveis.

Se supuséssemos ainda que T seja suficientemente grande, ou seja, quando $T \rightarrow +\infty$, a soma dos pesos para as observações resulta em:

$$\text{[Def. 3 - 6]} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{T-1}}{\sum_{j=1}^T \lambda^{j-1}} = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Para um modelo EWMA (Médias Móveis Exponencialmente Ponderadas) definimos o estimador $\hat{\sigma}_{EWMA}$ da volatilidade de $\{r_t\}$ assim, supondo T suficientemente grande:

$$\text{[Def. 3 - 7]} \quad \hat{\sigma}_{EWMA} = \sqrt{(1-\lambda) \cdot \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} \cdot (r_t - \bar{r})^2}.$$

Agora, vamos derivar uma relação recursiva para a previsão da volatilidade. Sabemos, a partir da definição acima, assumindo que a média amostral é zero ($\bar{r} = 0$), que:

$$\begin{aligned} \text{[Eq. 3 - 1]} \quad \hat{\sigma}_{t+\psi}^2 &= (1-\lambda) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \cdot r_{t-i}^2 = (1-\lambda) \cdot (r_t^2 + \lambda r_{t-1}^2 + \lambda^2 r_{t-2}^2 + \dots) \\ \hat{\sigma}_{t+\psi}^2 &= (1-\lambda) r_t^2 + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot (r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \dots) = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_t^2 \end{aligned}$$

Portanto, a previsão recursiva de volatilidade para um dia é dada por:

$$\text{[Eq. 3 - 2]} \quad \hat{\sigma}_{t+\psi} = \sqrt{\lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_t^2}.$$

A previsão de covariâncias entre as séries de retornos diários $\{r_{x,t}\}$ e $\{r_{y,t}\}$ é definida por:

$$[\text{Def. 3 - 8}] \quad \hat{\sigma}_{xy} = (1-\lambda) \cdot \sum_{j=1}^T \lambda^{j-1} (r_{x,t} - \bar{r}_x)(r_{y,t} - \bar{r}_y).$$

Contudo, da mesma maneira como fizemos para a variância, podemos definir uma fórmula recursiva para cálculo das covariâncias, assumindo a premissa de que $\{r_{x,t}\}$ e $\{r_{y,t}\}$ têm médias $\bar{r}_x = 0$ e $\bar{r}_y = 0$. Assim, temos:

$$[\text{Eq. 3 - 3}] \quad \begin{aligned} \hat{\sigma}_{xy,t+\psi} &= (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{x,t-i} \cdot r_{y,t-i} \\ \hat{\sigma}_{xy,t+\psi} &= (1-\lambda)(r_{x,t} \cdot r_{y,t} + \lambda r_{x,t-1} \cdot r_{y,t-1} + \lambda^2 r_{x,t-2} \cdot r_{y,t-2} + \dots) \\ \hat{\sigma}_{xy,t+\psi} &= (1-\lambda) \cdot (r_{x,t} \cdot r_{y,t}) + \lambda(1-\lambda) \cdot (r_{x,t-1} \cdot r_{y,t-1} + \lambda r_{x,t-2} \cdot r_{y,t-2} + \dots) \\ \hat{\sigma}_{xy,t+\psi} &= \lambda \sigma_{xy,t-1} + (1-\lambda) r_{x,t-1} \cdot r_{y,t-1} \end{aligned}$$

A previsão da correlação para um dia das séries de retornos diários $\{r_{x,t}\}$ e $\{r_{y,t}\}$ é definida como:

$$[\text{Def. 3 - 9}] \quad \hat{\rho}_{xy,t+\psi} = \frac{\hat{\sigma}_{xy,t+\psi}}{\hat{\sigma}_{x,t+\psi} \cdot \hat{\sigma}_{y,t+\psi}}.$$

3.3 Previsões para Múltiplos Dias

Até este ponto, apresentamos previsões de um dia que são definidas para um período de t até $t + 1$, onde t representa um dia útil. Contudo, em diversas situações, estamos interessados em horizontes de tempo superiores a um dia. Agora, demonstraremos como construir as previsões de variâncias e covariâncias para o modelo EWMA para horizontes de tempo maiores.

Lembremos que o RiskMetrics adota o seguinte modelo para os log-preços:

$$[\text{Eq. 3 - 4}] \quad \begin{aligned} p_{x,t} &= p_{x,t-1} + \sigma_{x,t} \mathcal{E}_{x,t}, \\ \mathcal{E}_{x,t} &\sim IID \quad N(0,1). \end{aligned}$$

Resolvendo recursivamente a equação acima, considerando um horizonte de tempo T_{HORIZ} , e escrevendo em termos dos log-retornos, temos:

$$[\text{Eq. 3 - 5}] \quad r_{x,t+T_{HORIZ}} = \sum_{s=1}^{T_{HORIZ}} \sigma_{x,t+s} \mathcal{E}_{x,t+s}.$$

Tomando a variância condicional da equação acima, no tempo t , implica a expressão seguinte para a previsão da variância:

$$[\text{Eq. 3 - 6}] \quad \sigma_{x,t+T_{HORIZ}}^2 = E_t[r_{x,t+T_{HORIZ}}^2] = \sum_{s=1}^{T_{HORIZ}} E_t[\sigma_{x,t+s}^2].$$

Analogamente, podemos concluir que a previsão da covariância condicional T_{HORIZ} dias à frente é dada por:

$$[\text{Eq. 3 - 7}] \quad \sigma_{xy,t+T_{HORIZ}} = E_t[r_{x,t+T_{HORIZ}} \cdot r_{y,t+T_{HORIZ}}] = \sum_{s=1}^{T_{HORIZ}} E_t[\sigma_{xy,t+s}].$$

Vamos trabalhar um pouco mais as equações anteriores. Consideremos duas séries de log-retornos correlacionados compostas por $\{r_x\}$ e $\{r_y\}$. Vamos fazer os cálculos usando notação matricial para as previsões de um dia para as variâncias e covariância:

$$[\text{Eq. 3 - 8}] \quad \sigma_{t+1}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{x,t+1}^2 \\ \sigma_{xy,t+1} \\ \sigma_{y,t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x,t}^2 \\ \sigma_{xy,t} \\ \sigma_{y,t}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{x,t}^2 \\ r_{x,t} \cdot r_{y,t} \\ r_{y,t}^2 \end{bmatrix}.$$

Usando o operador esperança no tempo t , escrevemos a previsão ao longo dos s dias:

$$[\text{Eq. 3 - 9}] \quad E_t[\sigma_{t+s}^2] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t[\sigma_{x,t+s-1}^2] \\ E_t[\sigma_{xy,t+s-1}] \\ E_t[\sigma_{y,t+s-1}^2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t[r_{x,t+s-1}^2] \\ E_t[r_{x,t+s-1} \cdot r_{y,t+s-1}] \\ E_t[r_{y,t+s-1}^2] \end{bmatrix}.$$

Avaliando as esperanças dos retornos quadrados e seus produtos cruzados, resulta:

$$[\text{Eq. 3 - 10}] \quad E_t[\sigma_{t+s}^2] = \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} E_t[\sigma_{x,t+s-1}^2] \\ E_t[\sigma_{xy,t+s-1}] \\ E_t[\sigma_{y,t+s-1}^2] \end{bmatrix} = E_t[\sigma_{t+s-1}^2].$$

De onde concluímos que as previsões da variância para dois períodos consecutivos são a mesma. Portanto, a previsão para um período T_{HORIZ} é definida como:

$$[\text{Def. 3 - 10}] \quad \sigma_{t+T_{HORIZ}}^2 = \sum_{s=1}^{T_{HORIZ}} E_t[\sigma_{t+s}^2] = T_{HORIZ} \cdot E_t[\sigma_{t+1}^2] = T_{HORIZ} \cdot \sigma_{t+1}^2,$$

que resulta na relação da “raiz quadrada do tempo” para as previsões do desvio-padrão:

$$[\text{Def. 3 - 11}] \quad \sigma_{x,t+T_{HORIZ}} = \sqrt{T_{HORIZ}} \cdot \sigma_{x,t+1}.$$

Na prática, as previsões de volatilidade feitas dessa maneira podem não fazer muito sentido. As razões dos problemas decorrentes são as seguintes:

- as taxas/preços podem apresentar reversão à média.

- limites operacionais, políticos ou econômicos podem restringir o movimento potencial nas taxas e preços.
- quando estimativas de volatilidades otimizadas para previsões ao longo de um horizonte de tempo particular são usadas para outro horizonte (de diário para mensal, por exemplo).

3.4 Estimando os Parâmetros do Modelo EWMA

3.4.1 Tamanho da Amostra e Estimação

Sempre que desejamos estimar ou fazer previsões de médias, desvios-padrões e correlações, estamos interessados em conhecer o grau de confiança das medidas, que é mensurado através de erros padronizados. Quanto menor o erro padrão, mais confiança temos nos valores das medidas de interesse. Na seqüência, iremos estudar as propriedades de médias, desvios-padrões e correlações.

3.4.1.1 A Média Amostral

Um ponto importante a ser destacado é que estimadores de amostras igualmente ponderadas não dependem diretamente do número de observações na amostra. Por exemplo, lembremos que o log-retorno diário é definido como:

$$[\text{Def. 3 - 12}] \quad r_t = \ln(P_t / P_{t-1}) = p_t - p_{t-1}.$$

A média amostral para os log-retornos para o período $t = 1 \dots T$ é dada por:

$$[\text{Eq. 3 - 11}] \quad \bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (p_t - p_{t-1}) = \frac{1}{T} (p_T - p_0).$$

Verificamos que o estimador da média depende apenas da diferença entre a primeira e a última observações da amostra e do tamanho da mesma. O mesmo acontece com o erro padrão da média.

Contudo, para reduzirmos as incertezas e imprecisões da média estimada, é mais acurado assumirmos um valor para a média das séries de log-retornos que seja consistente com a teoria financeira. O RiskMetrics (1996) assume que o valor médio dos log-retornos diários é zero. Ou seja, as estimativas dos desvios-padrões são centrados ao redor de zero, ao invés da média amostral. Semelhantemente, quando calcularmos as covariâncias, os desvios dos retornos serão tomados ao redor de zero e não ao redor da média amostral.

3.4.1.2 Volatilidade e Correlação

As previsões de volatilidade e de correlação baseados no modelo EWMA requerem que escolhamos um valor apropriado para o fator de decaimento λ . Porém, antes de calcularmos λ , determinaremos o número efetivo de observações históricas que serão usadas nas previsões de volatilidade e de correlação. Para tanto, definimos a seguinte métrica:

$$[\text{Eq. 3 - 12}] \quad \Omega_K^- = (1 - \lambda) \sum_{t=K}^{\infty} \lambda^t.$$

Impondo Ω_K^- igual ao valor – o nível de tolerância (γ_L) – podemos resolver para K , o efetivo número de dias de dados usados no EWMA. A fórmula para calcular K é derivada da equação abaixo:

$$[\text{Eq. 3 - 13}] \quad \Omega_K^- = (1 - \lambda) \sum_{t=K}^{\infty} \lambda^t = \gamma_L \Rightarrow \lambda^K (1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \gamma_L.$$

Donde resulta K :

$$[\text{Eq. 3 - 14}] \quad K = \frac{\ln(\gamma_L)}{\ln(\lambda)}.$$

Veja na tabela a seguir os tamanhos das amostras para γ_L e λ :

Tabela 3 - 1: Número de observações históricas usadas pelo modelo EWMA

Fator de Decaimento	Dias de Dados Históricos no Nível de Tolerância					
	0,001%	0,01%	0,1%	1%	5%	10%
0,80	52	42	31	21	14	11
0,81	55	44	33	22	15	11
0,82	59	47	35	24	16	12
0,83	62	50	38	25	17	13
0,84	67	53	40	27	18	14
0,85	71	57	43	29	19	15
0,86	77	62	46	31	20	16
0,87	83	67	50	34	22	17
0,88	91	73	55	37	24	19
0,89	99	80	60	40	26	20
0,90	110	88	66	44	29	22
0,91	123	98	74	49	32	25
0,92	139	111	83	56	36	28
0,93	159	127	96	64	42	32
0,94	187	149	112	75	49	38
0,95	225	180	135	90	59	45
0,96	283	226	170	113	74	57
0,97	378	303	227	152	99	76
0,98	570	456	342	228	149	114
0,99	1146	917	688	459	299	230

3.4.2 A Escolha do Fator de Decaimento (λ):

RiskMetrics (1996) mostra que a escolha do λ “ótimo” deve ser obtido para todas as séries financeiras em conjunto. Isso porque a matriz de variância-covariância S a ser obtida, além de positiva definida, deve apresentar valores positivos para as variâncias e correlações condicionais entre os ativos. RiskMetrics (1996) menciona que, embora seja possível construir uma matriz positiva definida escolhendo um fator de decaimento “ótimo” para cada série, esse matriz está sujeita a ser viesada. Além disso, há considerações de custo-benefício computacionais que são mais favoráveis para o trabalho com um único fator de decaimento para toda a matriz de variância-covariância. Na seqüência, descrevemos a

metodologia utilizada pelo RiskMetrics (1996) para o cálculo do fator de decaimento “ótimo”.

3.4.2.1 Critério da Raiz do Erro Quadrático Médio (REQM)

Lembramos que, a definição no tempo $t + 1$, da previsão da variância do retorno r_{t+1} , feita um período antes, é dada por:

$$[\text{Def. 3 - 13}] \quad E_t[r_{t+1}^2] = \sigma_{t+1|t}^2.$$

Analogamente, a previsão para a covariância entre duas séries de retorno $\{r_x\}$ e $\{r_y\}$ é dada por:

$$[\text{Def. 3 - 14}] \quad E_t[r_{x,t+1} \cdot r_{y,t+1}] = \sigma_{xy,t+1|t}.$$

Agora, definimos o erro de previsão como:

$$[\text{Def. 3 - 15}] \quad \varepsilon_{t+1|t} = r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2 \Rightarrow E_t[\varepsilon_{t+1|t}] = E_t[r_{t+1}^2] - \sigma_{t+1|t}^2 = 0.$$

O que resulta na escolha do fator de decaimento (λ) que minimiza a média dos erros quadráticos como definido a seguir:

$$[\text{Def. 3 - 16}] \quad REQM_{\text{variância}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{t+1}^2 - \hat{\sigma}_{t+1|t}^2(\lambda))^2}.$$

Analogamente, temos a definição do REQM para a covariância:

$$[\text{Def. 3 - 17}] \quad REQM_{\text{covariância}} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{x,t+1} \cdot r_{y,t+1} - \hat{\sigma}_{xy,t+1|t}(\lambda))^2}.$$

Seja o conjunto de ativos financeiros composto por N ($i = 1, 2, \dots, N$) séries. Seja $\hat{\lambda}_i$ o fator de decaimento ótimo da i -ésima série. Seja τ_i o i -ésimo REQM associado a $\hat{\lambda}_i$, ou seja, τ_i é o mínimo REQM para a i -ésima série. Finalmente, RiskMetrics (1996) adota os seguintes passos para escolha do fator de decaimento “ótimo” para todas as séries financeiras.

1. Encontre Π , a soma de todos os N mínimos REQMs τ_i :

$$[\text{Def. 3 - 18}] \quad \Pi = \sum_{i=1}^N \tau_i.$$

2. Defina a medida de erro relativo:

$$[\text{Def. 3 - 19}] \quad \theta_i = \frac{\tau_i}{\left(\sum_{i=1}^N \tau_i \right)}.$$

3. Defina o peso ϕ_i :

$$[\text{Def. 3 - 20}] \quad \phi_i = \frac{\theta_i^{-1}}{\sum_{i=1}^N \theta_i^{-1}},$$

onde: $\sum_{i=1}^N \phi_i = 1$

4. O fator de decaimento “ótimo” $\tilde{\lambda}$ é definido como:

$$[\text{Def. 3 - 21}] \quad \tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^N \phi_i \hat{\lambda}_i.$$

Ressaltamos que o RiskMetrics (1996) propõe a utilização de um fator de decaimento diário λ igual a 0,94. Seguimos o procedimento proposto pelo RiskMetrics e obtivemos o fator de decaimento “ótimo” $\tilde{\lambda} = 0,88$ para o conjunto de séries que utilizamos nesse estudo. Contudo, verificamos que a utilização desse fator de decaimento “ótimo” não melhora a performance do EWMA da previsão fora da amostra. Também pelo fato do mercado adotar o valor de 0,94, estaremos mantendo esse valor em nosso estudo.

Tabela 3 - 2: Fator de Decaimento “Ótimo” das Séries

Lambdas Calculados por Otimização (RiskMetrics)									
IBOVESPA	ACES4	BELG4	GGBR4	USIM5	PETRA	ITAU4	VCPA4	PTAX	CARTEIRA
0.91	0.97	0.99	0.84	0.90	0.83	0.87	0.92	0.88	0.91

3.5 A Estimação de Volatilidade através de Modelos GARCH

Antes de iniciarmos propriamente o desenvolvimento da modelagem GARCH, é conveniente introduzirmos o conceito do operador de defasagem L .

Dadas as séries de tempo $\{r_{x,t}\}$ e $\{r_{y,t}\}$, temos que:

$$[\text{Def. 3 - 22}] \quad Lr_{x,t} \equiv r_{x,t-1}.$$

A aplicação recursiva desse operador de defasagem L , nos conduz à seguinte definição:

$$[\text{Def. 3 - 23}] \quad L(Lr_{x,t}) = L^2(r_{x,t}) = L(r_{x,t-1}) = r_{x,t-2} \Rightarrow L^k r_{x,t} = r_{x,t-k}.$$

Outras duas propriedades do operador de defasagem L são dadas pelas duas definições a seguir:

$$[\text{Def. 3 - 24}] \quad L(\beta \cdot r_{x,t}) = \beta \cdot Lr_{x,t},$$

$$[\text{Def. 3 - 25}] \quad L(r_{x,t} + r_{y,t}) = Lr_{x,t} + Lr_{y,t}.$$

Segundo Hamilton (1994), um processo auto-regressivo de ordem p (denotado $AR(p)$) para uma série de retornos $\{r_t\}$ é definido da seguinte maneira:

$$[\text{Def. 3 - 26}] \quad r_t = c + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \dots + \phi_p r_{t-p} + u_t,$$

onde u_t é o ruído branco, com as seguintes características:

$$[\text{Def. 3 - 27}] \quad E(u_t) = 0, E(u_t u_\tau) = \begin{cases} \sigma^2, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$

Esse processo apresenta covariância estacionária desde que as raízes da equação a seguir estejam fora do círculo unitário.

$$[\text{Eq. 3 - 15}] \quad 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0.$$

A previsão linear ótima de r_t é dada por:

$$[\text{Eq. 3 - 16}] \quad \hat{E}(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots) = c + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \dots + \phi_p r_{t-p}.$$

Observe que a esperança $\hat{E}(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$ é uma esperança condicional, que muda ao longo do tempo de acordo com a equação anterior, ao passo que a média incondicional para r_t é dada por:

$$[\text{Eq. 3 - 17}] \quad E(r_t) = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}.$$

Como já foi destacado anteriormente, para mensuração de risco em finanças, estamos interessados especialmente na previsão das variâncias e covariâncias. Segundo Hamilton (1994), uma variância que se altere ao longo do tempo também tem implicações para a validade e eficiência da inferência estatística dos parâmetros $(c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ que descrevem a dinâmica do nível r_t .

Embora a definição [3-27] implique que a variância incondicional de u_t seja σ^2 constante, a variância condicional de u_t pode mudar ao longo do tempo. Uma abordagem é descrever o quadrado de u_t seguindo um processo $AR(m)$:

$$[\text{Eq. 3 - 18}] \quad u_t^2 = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + v_t$$

$$E(v_t) = 0$$

onde v_t é um novo ruído branco com:

$$E(v_t \cdot v_\tau) = \begin{cases} \delta^2, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$

Um ruído branco u_t , satisfazendo a equação anterior é descrito como um processo *auto-regressivo heterocedástico condicional* de ordem m , denotado por $u_t \sim ARCH(m)$. Essa classe de processos foi introduzida por Engle (1982).

É sempre adequado usarmos uma representação alternativa para um processo $ARCH(m)$ que imponha uma premissa sobre a dependência serial de u_t . Suponhamos que:

$$[\text{Def. 3 - 28}] \quad u_t = \sqrt{h_t} \cdot \eta_t,$$

onde $\{\eta_t\}$ é uma sequência IID com média zero e variância unitária:

$$[\text{Def. 3 - 29}] \quad E(\eta_t) = 0, E(\eta_t^2) = 1.$$

Se h_t evolui de acordo com o seguinte processo:

$$[\text{Def. 3 - 30}] \quad h_t = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2,$$

e

$$[\text{Def. 3 - 31}] \quad E(u_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = \zeta + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2,$$

dizemos que, u_t segue um processo $ARCH(m)$.

3.5.1 Modelos GARCH –Autoregressivo Heterocedástico Condicional Generalizado

Finalmente, com as definições acima, podemos prosseguir na conceituação dos modelos GARCH – Autoregressivos Heterocedásticos Condicionais Generalizados. Para isso, basta que imaginemos um processo para o qual a variância condicional dependa de um número infinito de defasagens de u_{t-j}^2 :

$$[\text{Def. 3 - 32}] \quad h_t = \zeta + \pi(L)u_t^2,$$

$$\text{onde } \pi(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j L^j.$$

Segundo Hamilton (1994) é intuitiva a idéia de parametrizarmos $\pi(L)$ como a razão entre dois polinômios de ordem finita:

$$[\text{Def. 3 - 33}] \quad \pi(L) = \frac{\alpha(L)}{1 - \delta(L)} = \frac{\alpha_1 L^1 + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_m L^m}{1 - \delta_1 L^1 - \delta_2 L^2 - \dots - \delta_r L^r},$$

onde assumimos que as raízes do polinômio $1 - \delta(z) = 0$ estejam fora do círculo unitário. Se multiplicarmos a definição de h_t por $1 - \delta(L)$, obtemos:

$$[\text{Eq. 3 - 19}] \quad [1 - \delta(L)]h_t = [1 - \delta(L)]\zeta + \alpha(L)u_t^2$$

ou

$$[\text{Eq. 3 - 20}] \quad h_t = \kappa + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \dots + \delta_r h_{t-r} + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2,$$

onde $\kappa \equiv [1 - \delta_1 - \delta_2 - \dots - \delta_r]\zeta$.

Assim, obtemos modelo de *Auto-regressivo Condicional Heterocedástico Generalizado*, denotado por $u_t \sim \text{GARCH}(r, m)$, proposto por Bollerslev (1986).

3.5.2 IGARCH – GARCH Integrado

Suponhamos que $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$, onde v_t é IID com média zero e variância unitária e h_t obedece à especificação do $\text{GARCH}(r, m)$.

Se, para esse modelo tivermos ainda a seguinte restrição:

$$[\text{Def. 3 - 34}] \quad \sum_{j=1}^r \delta_j + \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1,$$

obtemos um processo GARCH *integrado*, denotado por IGARCH (Engle e Bollerslev, 1986). Contudo, vale lembrar que o modelo EWMA é um caso particular do IGARCH cujos coeficientes somam um.

3.6 KERNEL - Estimação Não-Paramétrica de Densidade

A estimação não-paramétrica de densidade de funções densidade de probabilidade é um tópico muito extenso. Em nosso estudo comparativo, utilizamos os métodos baseados em kernel disponibilizados através da biblioteca *sm* para o S-PLUS que foi desenvolvida por Bowman & Azzalini (1997).

Evidentemente, o histograma é a ferramenta mais simples para ilustrar a forma da distribuição de uma série temporal de log-retornos. Assim, para apresentarmos o conceito de kernel, partiremos da construção de histogramas. Esses iniciam-se pela divisão do espaço amostral em um número de subintervalos. Cada elemento do espaço amostral, no caso os log-retornos, é alocado em seu subintervalo apropriado para a contabilização das frequências. Se y é um ponto onde desejamos estimar a densidade $f(y)$, então o histograma pode ser escrito como:

$$[\text{Eq. 3 - 21}] \quad \tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^n I(y - \tilde{y}_i; h),$$

onde $\{y_1, \dots, y_n\}$ representa a série temporal dos log-retornos, \tilde{y}_i denota o centro do intervalo onde y_i se encontra e $I(z; h)$ é a função indicador do intervalo $[-h; h]$. Lembramos que é necessário trabalhar com frequências relativas para que \tilde{f} tenha integral unitária.

Contudo, o histograma apresenta as seguintes desvantagens:

- Informação foi desprezada quando trocamos y_i pelo ponto central do intervalo onde o mesmo se encontra.
- Geralmente, esperamos que a função densidade seja suave, mas o histograma não o é.
- O comportamento do histograma é dependente da escolha do tamanho dos intervalos utilizados e, também, até certa medida da posição inicial dos mesmos.

O objetivo da abordagem do kernel é, exatamente, tratar das primeiras duas desvantagens. Através dessa abordagem, uma função kernel suave é usada como bloco básico de construção da função densidade. Além disso, o kernel é centrado diretamente em cada observação.

O estimador kernel é da forma:

$$[\text{Eq. 3 - 22}] \quad \hat{f}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(y - y_i; h),$$

onde ω é uma função densidade, definida com função kernel, cuja variância é controlada pelo parâmetro h .

É natural adotarmos uma função ω que seja simétrica com média 0. Destacamos que, segundo Bowman & Azzalini (1997), é geralmente aceito que a forma exata do kernel não é muito relevante. Usualmente, utiliza-se para ω uma função densidade normal, de tal modo que:

$$[\text{Eq. 3 - 23}] \quad \omega(y - y_i; h) = N(y - y_i; h),$$

onde $N(z; h)$ denota uma função densidade normal em z com média 0 e desvio-padrão h . Por causa do papel que h desempenha na determinação da maneira como a probabilidade associada a cada distribuição é propagada à vizinhança do espaço amostral, h é denominado de *parâmetro de alisamento* ou *largura de banda*. Nesse texto, sempre nos referiremos a h como *largura de banda*. Uma vez que as propriedades de ω são herdadas por \hat{f} , escolhendo um ω suave iremos obter um estimador que também é suave.

A terceira crítica ao histograma não é resolvida pelo kernel, uma vez que o comportamento da densidade é afetada pela escolha da largura de banda escolhida para o kernel. Ou seja, quando h é pequeno, o estimador ilustra uma variação associada com observações individuais ao invés da estrutura subjacente a toda a amostra. O oposto ocorre quando h é grande, ou seja, a estrutura subjacente é fica diluída pelo alisamento dos dados ao longo de uma região muito extensa.

3.6.1 Propriedades Básicas dos Estimadores de Densidade

A média de um estimador de densidade pode ser escrita como:

$$[\text{Eq. 3 - 24}] \quad E\{\hat{f}(y)\} = \int \omega(y - z; h) f(z) dz.$$

A equação acima é uma convolução da verdadeira função de densidade f com a função kernel ω .

É conveniente usarmos uma função kernel que, com uma pequena mudança de notação, pode ser parametrizada na forma

$$[\text{Eq. 3 - 25}] \quad (1/h)\omega(z/h).$$

A expansão em série de Taylor produz a seguinte aproximação:

$$[\text{Eq. 3 - 26}] \quad E\{\hat{f}(y)\} \approx f(y) + \frac{h^2}{2} \sigma_\omega^2 f''(y),$$

onde σ_ω^2 denota a variância da função kernel, ou seja:

$$[\text{Eq. 3 - 27}] \quad \sigma_\omega^2 = \int z^2 \omega(z) dz.$$

Como $f''(y)$ mede a taxa de curvatura da função densidade, então sabemos que \hat{f} superestima f nos picos e subestima caso contrário. A extensão do viés é afetado pelo parâmetro de alisamento h . O componente σ_ω^2 será reduzida a 1 se a função kernel escolhida tiver variância unitária.

Através de outra aproximação em série de Taylor, o estimador da variância da densidade resulta:

$$[\text{Eq. 3 - 28}] \quad \text{var}\{\hat{f}(y)\} \approx \frac{1}{nh} f(y) \alpha(\omega),$$

onde

$$[\text{Eq. 3 - 29}] \quad \alpha(\omega) = \int \omega^2(z) dz.$$

Como já esperávamos, a variância é inversamente proporcional ao tamanho da amostra. O termo nh pode ser visto como governando o tamanho local da amostra, uma vez que h controla o número de observações cuja ponderação do kernel contribui para o estimador em y . É relevante salientar que a variância é aproximadamente proporcional à altura da verdadeira função densidade.

Estas expressões aproximadas para a média e variância do estimador da densidade encapsulam o efeito do parâmetro de alisamento. Quando h decresce, o viés diminui enquanto variância aumenta. E o oposto ocorre quando h cresce. O efeito combinado destas propriedades é que, para produzir um estimador que convirja para a verdadeira função densidade f , é necessário que ambos h e $1/nh$ decresçam à medida que o tamanho da amostra aumente. Através da utilização do Teorema Central do Limite, podemos provar que a distribuição do estimador é assintoticamente normal.

Finalmente, uma medida geral de quão eficiente \hat{f} é na estimação de f pode ser dada pelo *erro quadrático integrado médio* (EQIM) que é definido como:

$$\text{[Eq. 3 - 30]} \quad EQIM(\hat{f}) = E\left\{\int [\hat{f}(y) - f(y)]^2 dy\right\} = \int [E\{\hat{f}(y)\} - f(y)]^2 dy + \int \text{var}\{\hat{f}(y)\} dy.$$

Essa combinação de viés e variância, integrada ao longo do espaço amostral, tem sido a mais extensamente utilizada na literatura. Em particular, as aproximações em série de Taylor descritas anteriormente, nos permitem aproximar a equação acima pela seguinte expressão:

$$\text{[Eq. 3 - 31]} \quad EQIM(\hat{f}) \approx \frac{1}{4} h^4 \sigma_w^4 \int f''(y)^2 dy + \frac{1}{nh} \alpha(\omega).$$

Capítulo 4

4 Avaliação dos Modelos de Volatilidade

4.1 A Preparação dos Dados para a Previsão Fora da Amostra

Como já foi mencionado, utilizamos a abordagem de previsão fora da amostra para avaliação de performance dos modelos. A previsão fora da amostra baseia-se na premissa de que, se o modelo estimado a partir de um horizonte de estimação apresentar resultados coerentes com seu nível de confiança esperado, então, o modelo deverá ter performance similar para horizontes futuros. No caso de estimação de volatilidades para o cálculo do VaR, a experiência do mercado financeiro confirma a validade da previsão fora da amostra, mesmo levando-se em conta os momentos de crise.

Os dados para a série de preços do PTAX, taxa de conversão do dólar para reais, foram extraídos a partir do Banco Central do Brasil. As demais séries de preços de ações foram obtidas da BOVESPA – Bolsa de Valores de São Paulo. A série de preços da CARTEIRA foi obtida a partir da seguinte alocação de ativos, que foi mantida constante durante todo o período.

Tabela 4 - 1: Alocação de Ativos para a série CARTEIRA

Carteira	Alocação
IBOVESPA	15%
ACES4	10%
BELG4	10%
GGBR4	10%
USIM5	10%
PETR4	5%
ITAU4	10%
VCPA4	10%
PTAX	20%
TOTAL	100%

Os dados históricos para todas as séries compreendem um período desde 02/01/1997 até 28/12/2001, ou seja, um total de 1235 dados diários de preços de fechamento para cada uma das séries.

Para todas as séries e para as três metodologias para estimação de volatilidades aqui propostas, realizamos a previsão fora da amostra para um horizonte de seis meses, compreendendo o período de 02/07/2001 a 28/12/2001, ou seja, um período com 123 observações de dados diários. Lembramos que, nesse período, houve a ocorrência da crise Argentina e do atentado terrorista ao World Trade Center em Nova Iorque que afetaram significativamente o mercado brasileiro.

Com relação aos horizontes, tanto para a estimação das volatilidades a partir do EWMA e do KERNEL, utilizamos janelas móveis de observação que compreendiam o dia imediatamente anterior até 150 dias anteriores. Para a estimação dos parâmetros dos

modelos GARCH utilizamos um horizonte de estimação bem superior, visto que horizontes mais curtos não conseguiam capturar, de forma robusta, a dinâmica das séries. Portanto, para os modelos GARCH, utilizamos um horizonte de estimação de parâmetros que compreendeu dados históricos de 02/01/1997 até 29/06/2001, ou seja, um conjunto de 1111 dados diários.

Com base nisso, para cada metodologia, determinamos a volatilidade e calculamos o VaR diário correspondente a cada série. Cabe ressaltar que nosso estudo é adimensional no sentido que não calculamos o VaR como uma quantidade financeira, mas sim como uma medida percentual. Assim, para o EWMA e o GARCH, supondo que estamos no instante t e temos informação também disponível até o instante t , calculamos o VaR de acordo com a equação:

$$[\text{Eq. 4 - 1}] \quad VaR = q(0,95) \cdot \hat{\sigma}_{t+1},$$

onde $q(0,95)$ corresponde ao quantil da distribuição normal com nível de confiança de 95%. No caso, $q(0,95) \approx 1,65$. O nível de confiança de 95% foi utilizado em todos os procedimentos, salvo menção explícita em contrário.

No caso do KERNEL, recalculamos a densidade não-paramétrica da distribuição dos log-retornos para cada dia de observação do horizonte de previsão fora da amostra. Então, calculamos, numericamente, a integral dessa densidade não-paramétrica dos limites de 0% a 5%, que corresponde a uma densidade complementar de 95%. O módulo do quantil obtido multiplicado pela volatilidade da distribuição é a medida direta do VaR segundo a metodologia do KERNEL.

Então, para completarmos a previsão fora da amostra, era necessário comparar, em cada dia, para todas as séries, seus respectivos log-retornos, com o VaR estimado a partir de dados passados até o dia imediatamente anterior.

Como, em finanças, a preocupação é com a queda dos preços dos ativos, então nosso objetivo é o de verificar a frequência com que o módulo de um log-retorno negativo diário supera o VaR diário. De acordo com os modelos, essa frequência não deveria ser superior a 5%, visto que o nível de significância escolhido foi de 95%.

Já apresentamos a definição dos modelos GARCH(1,1). A seguir, expandimos um pouco mais esse tópico, apresentando um modelo mais geral, o AR(1) GARCH(1,1), ou seja, com um termo auto-regressivo.

4.2 Comentários Sobre os Modelos GARCH

Aqui, resumimos as características dos modelos GARCH(1,1) ou AR(1) GARCH(1,1) que foram obtidos através do EVIEWS. O EVIEWS retorna os coeficientes para duas equações. A primeira é a equação da média:

$$[\text{Eq. 4 - 2}] \quad r_{t+1} = c_{\text{média}} + \phi \cdot r_t + \varepsilon_t,$$

onde $c_{\text{média}}$ é uma constante, ϕ é o coeficiente do termo autoregressivo AR(1), que é igual a zero para o modelo GARCH(1,1) e $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

A segunda equação é a do termo de variância condicional:

$$[\text{Eq. 4 - 3}] \quad \sigma_{t+1}^2 = c_{vol} + \alpha \cdot \varepsilon_t^2 + \beta \cdot \sigma_t^2,$$

onde α é o coeficiente do termo ARCH e β é o coeficiente do termo GARCH.

Uma das premissas do modelo GARCH é que a série subjacente seja estacionária. Para todas as séries realizamos o Teste de Raízes Unitárias, segundo o procedimento “Augmented Dickey-Fuller”, conforme Hamilton (1994). Os detalhes encontram-se no Apêndice 7.3 **Estacionariedade dos Log Retornos**. Verificamos que as séries podem ser consideradas estacionárias.

A seguir, apresentamos a tabela com os parâmetros estimados para todas as séries:

Tabela 4 - 2: Parâmetros Estimados dos Modelos GARCH(1,1) ou AR(1) GARCH(1,1)

	Parâmetros do Modelo GARCH(1,1)									
	IBOVESPA	ACES4	BELG4	GGBR4	USIM5	PETR4	ITAU4	VCPA4	PTAX	CARTEIRA
Constante - média	0.001814	-0.000887	0.000611	0.001040	0.000601	0.002445	0.002360	0.000295	0.000360	0.001646
Termo AR(1)	0.058591	-	-	0.179709	0.092404	0.101834	0.136710	-	-	0.131505
Constante - variância	0.000036	0.000080	0.000191	0.000289	0.000116	0.000030	0.000080	0.000539	0.000004	0.000032
Termo ARCH	0.191663	0.145471	0.060680	0.234575	0.169956	0.128291	0.157277	0.247722	0.176463	0.219300
Termo GARCH	0.765670	0.819452	0.763974	0.519180	0.749505	0.847863	0.751229	0.250400	0.772894	0.687948

Verificamos que as séries IBOVESPA, GGBR4, USIM5, PETR4, ITAU4 e CARTEIRA necessitaram de um termo auto-regressivo, AR(1), para serem ajustadas.

Outro ponto importante que foi verificado para todos os modelos GARCH ajustados era a autocorrelação dos resíduos que não deveria ser significativa. As Q-estatísticas das autocorrelações foram avaliadas para os resíduos e verificamos que nenhum dos modelos ajustados apresenta autocorrelação serial, o que está de acordo com sua especificação.

Contudo, a estimação dos parâmetros dos modelos GARCH pressupõe uma distribuição normal para os resíduos. Para verificar essa premissa, realizamos um teste de normalidade dos resíduos utilizando o teste de Jarque-Bera, cuja hipótese nula é a hipótese de normalidade. Como já era esperado, para todos os modelos ajustados, *rejeitamos* a hipótese de normalidade, devido às altas estatísticas obtidas com o teste.

Os detalhes de cada modelo GARCH(1,1) ou AR(1) GARCH(1,1) são dados na seção seguinte.

4.2.1 Modelagem GARCH para as séries financeiras

4.2.1.1 GARCH para IBOVESPA

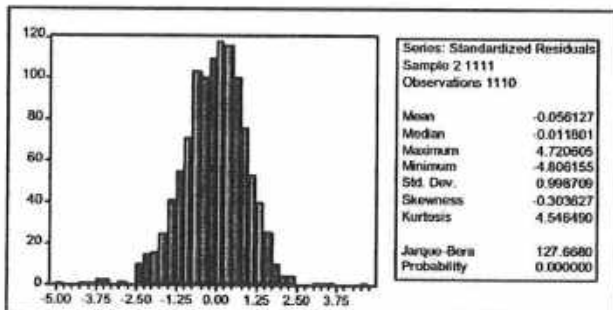
Tabela Modelo GARCH - 1: IBOVESPA

Dependent Variable: IBOVESPA				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/20/02 Time: 14:56				
Sample(adjusted): 2 1111				
Included observations: 1110 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 15 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001814	0.000691	2.627231	0.0086
AR(1)	0.058591	0.031931	1.834919	0.0665
Variance Equation				
C	3.58E-05	7.72E-06	4.630888	0
ARCH(1)	0.191663	0.019835	9.662651	0
GARCH(1)	0.76567	0.024981	30.65014	0
R-squared	-0.000188	Mean dependent var	0.00066	
Adjusted R-squared	-0.003809	S.D. dependent var	0.028598	
S.E. of regression	0.028653	Akaike info criterion	-4.650342	
Sum squared resid	0.907168	Schwarz criterion	-4.627765	
Log likelihood	2585.94	Durbin-Watson stat	2.031099	
Inverted AR Roots	0.06			

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 1: GARCH IBOVESPA

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.035	0.035	1.373	
2	0.000	-0.001	1.373	0.241
3	0.022	0.022	1.890	0.389
4	-0.022	-0.024	2.451	0.484
5	-0.036	-0.034	3.891	0.421
6	-0.018	-0.016	4.265	0.512
7	0.003	0.006	4.278	0.639
8	0.023	0.024	4.874	0.675
9	0.010	0.008	4.997	0.758
10	0.098	0.096	15.764	0.072
11	0.038	0.030	17.401	0.066
12	-0.021	-0.023	17.905	0.084
13	0.009	0.008	17.995	0.116
14	0.085	0.089	26.066	0.017
15	-0.001	0.003	26.067	0.025

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 1: GARCH IBOVESPA



4.2.1.2 GARCH para ACESITA

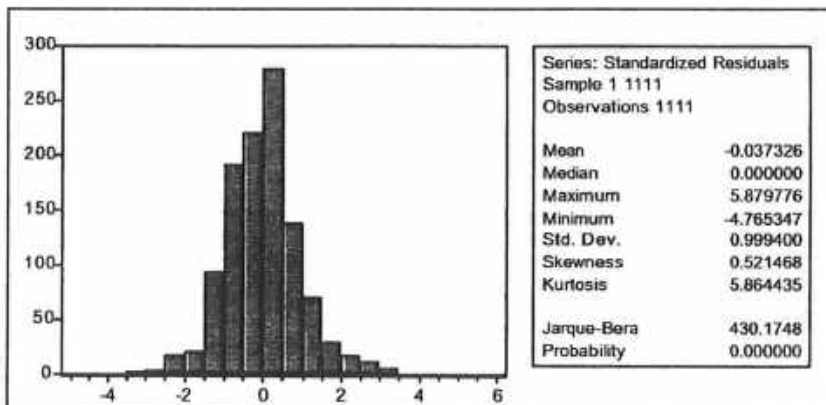
Tabela Modelo GARCH - 2: ACESITA

Dependent Variable: ACES4				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/25/02 Time: 14:24				
Sample: 1 1111				
Included observations: 1111				
Convergence achieved after 27 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	7.86E-05	1.45E-05	5.428828	0
ARCH(1)	0.145466	0.018964	7.670716	0
GARCH(1)	0.82048	0.017596	46.63007	0
R-squared	-0.00077	Mean dependent var		-0.00114
Adjusted R-squared	-0.00258	S.D. dependent var		0.041113
S.E. of regression	0.041166	Akaike info criterion		-3.66901
Sum squared resid	1.877673	Schwarz criterion		-3.65548
Log likelihood	2041.137	Durbin-Watson stat		1.911917

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 2: GARCH ACESITA

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.024	0.024	0.6491	0.420
2	0.054	0.054	3.933	0.140
3	0.001	-0.001	3.9346	0.269
4	0.007	0.005	3.9966	0.406
5	-0.024	-0.024	4.644	0.461
6	0.01	0.011	4.7561	0.575
7	0.003	0.006	4.7689	0.688
8	0.031	0.03	5.8298	0.666
9	-0.013	-0.015	6.0161	0.738
10	0.028	0.025	6.8793	0.737
11	0.003	0.004	6.8912	0.808
12	-0.015	-0.018	7.1358	0.849
13	0.013	0.014	7.3127	0.885
14	0.039	0.038	8.9949	0.831
15	0.046	0.044	11.39	0.725

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 2: GARCH ACESITA



4.2.1.3 GARCH para BELGO

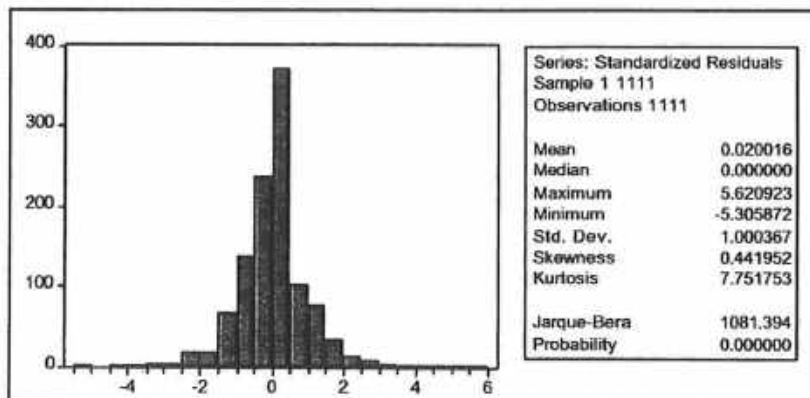
Tabela Modelo GARCH - 3: BELGO

Dependent Variable: BELG4				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/25/02 Time: 14:31				
Sample: 1 1111				
Included observations: 1111				
Convergence achieved after 18 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	0.000197	5.33E-05	3.69885	0.0002
ARCH(1)	0.061849	0.013726	4.505828	0
GARCH(1)	0.756939	0.059132	12.80073	0
R-squared	-0.000366	Mean dependent var		0.00063
Adjusted R-squared	-0.002172	S.D. dependent var		0.032926
S.E. of regression	0.032962	Akaike info criterion		-4.00795
Sum squared resid	1.203815	Schwarz criterion		-3.99441
Log likelihood	2229.414	Durbin-Watson stat		1.919933

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 3: BELGO

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.026	0.026	0.7416	0.389
2	0.021	0.02	1.23	0.541
3	-0.029	-0.03	2.1701	0.538
4	0.017	0.019	2.5095	0.643
5	-0.004	-0.004	2.5316	0.772
6	-0.047	-0.048	4.9727	0.547
7	0.038	0.042	6.5969	0.472
8	-0.017	-0.018	6.9367	0.543
9	0.015	0.012	7.1897	0.617
10	0.019	0.023	7.577	0.67
11	0.014	0.01	7.809	0.73
12	0.01	0.009	7.9329	0.79
13	-0.014	-0.01	8.1419	0.834
14	0.011	0.008	8.2859	0.874
15	-0.045	-0.042	10.532	0.785

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 3: BELGO



4.2.1.4 GARCH para GERDAU

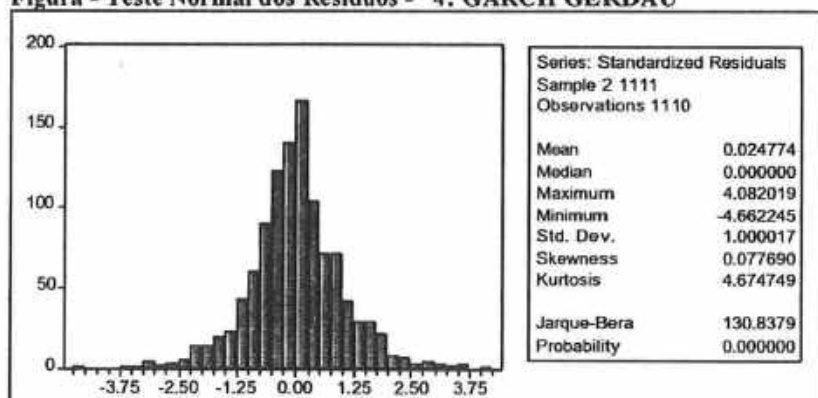
Tabela Modelo GARCH - 4: GERDAU

Dependent Variable: GGBR4				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/25/02 Time: 14:38				
Sample(adjusted): 2 1111				
Included observations: 1110 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 14 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.180491	0.03608	5.002522	0
Variance Equation				
C	0.000302	4.98E-05	6.054353	0
ARCH(1)	0.24322	0.029069	8.366994	0
GARCH(1)	0.501166	0.059746	8.38826	0
R-squared	0.026661	Mean dependent var	0.001274	
Adjusted R-squared	0.02402	S.D. dependent var	0.034971	
S.E. of regression	0.034548	Akaike info criterion	-4.03616	
Sum squared resid	1.320101	Schwarz criterion	-4.01809	
Log likelihood	2244.066	Durbin-Watson stat	2.032946	
Inverted AR Roots	0.18			

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 4: GARCH GERDAU

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.003	-0.003	0.0078	
2	0.033	0.033	1.2306	0.267
3	-0.001	-0.001	1.2326	0.540
4	-0.037	-0.038	2.7709	0.428
5	-0.07	-0.071	8.3044	0.081
6	0.044	0.047	10.491	0.062
7	0.011	0.017	10.636	0.100
8	0.049	0.045	13.351	0.064
9	-0.018	-0.024	13.716	0.089
10	0.046	0.041	16.06	0.066
11	-0.041	-0.033	17.961	0.056
12	0.022	0.023	18.496	0.071
13	0.006	0.012	18.54	0.100
14	0.023	0.018	19.144	0.119
15	0.022	0.025	19.67	0.141

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 4: GARCH GERDAU



4.2.1.5 GARCH para USIMINAS

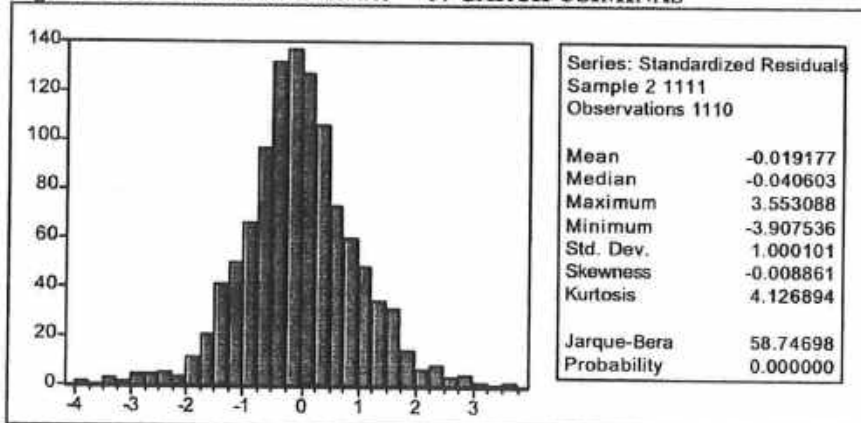
Tabela Modelo GARCH - 5: USIMINAS

Dependent Variable: USIM5				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/25/02 Time: 14:43				
Sample(adjusted): 2 1111				
Included observations: 1110 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 20 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.092323	0.034546	2.672473	0.0075
Variance Equation				
C	0.000117	2.21E-05	5.319273	0
ARCH(1)	0.170028	0.025144	6.76219	0
GARCH(1)	0.748397	0.03221	23.2348	0
R-squared	0.012073	Mean dependent var	-0.00043	
Adjusted R-squared	0.009393	S.D. dependent var	0.037583	
S.E. of regression	0.037406	Akaike info criterion	-3.89295	
Sum squared resid	1.547524	Schwarz criterion	-3.87489	
Log likelihood	2164.589	Durbin-Watson stat	1.960462	
Inverted AR Roots	0.09			

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 5: GARCH USIMINAS

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.023	0.023	0.5856	
2	0.037	0.036	2.0797	0.149
3	0.018	0.016	2.4422	0.295
4	-0.035	-0.038	3.8389	0.279
5	-0.08	-0.08	11.028	0.026
6	0.009	0.015	11.128	0.049
7	-0.002	0.005	11.133	0.084
8	0.025	0.026	11.835	0.106
9	0.071	0.064	17.474	0.026
10	0.052	0.043	20.558	0.015
11	0.007	0.001	20.609	0.024
12	-0.034	-0.04	21.908	0.025
13	-0.006	0.001	21.952	0.038
14	0.051	0.068	24.849	0.024
15	-0.006	0	24.887	0.036

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 5: GARCH USIMINAS



4.2.1.6 GARCH para PETROBRÁS

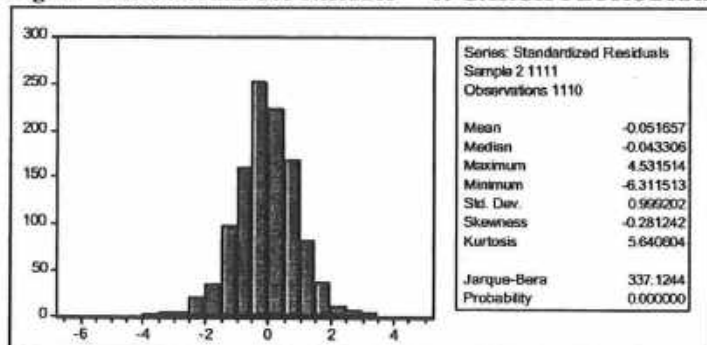
Tabela Modelo GARCH - 6: PETROBRÁS

Dependent Variable: PETR4				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/20/02 Time: 13:17				
Sample(adjusted): 2 1111				
Included observations: 1110 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 28 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.002445	0.000852	2.870322	0.0041
AR(1)	0.101834	0.033169	3.070131	0.0021
Variance Equation				
C	2.97E-05	7.04E-06	4.217157	0
ARCH(1)	0.128291	0.010836	11.83938	0
GARCH(1)	0.847863	0.012149	69.79124	0
R-squared	0.008178	Mean dependent var		0.001054
Adjusted R-squared	0.004588	S.D. dependent var		0.033496
S.E. of regression	0.033419	Akaike info criterion		-4.25217
Sum squared resid	1.234072	Schwarz criterion		-4.22959
Log likelihood	2364.952	F-statistic		2.277861
Durbin-Watson stat	1.997657	Prob(F-statistic)		0.059075
Inverted AR Roots	0.1			

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 6: GARCH PETROBRÁS

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.028	0.028	0.873	
2	0.031	0.030	1.947	0.163
3	-0.020	-0.021	2.371	0.306
4	0.014	0.014	2.585	0.460
5	-0.012	-0.012	2.757	0.599
6	-0.018	-0.019	3.114	0.682
7	0.010	0.013	3.231	0.779
8	-0.003	-0.003	3.238	0.862
9	0.032	0.031	4.360	0.823
10	0.104	0.103	16.436	0.058
11	0.022	0.014	16.992	0.075
12	0.006	0.001	17.038	0.107
13	0.022	0.025	17.580	0.129
14	0.043	0.040	19.637	0.105
15	-0.051	-0.052	22.608	0.067

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 6: GARCH PETROBRÁS



4.2.1.7 GARCH para ITAÚ

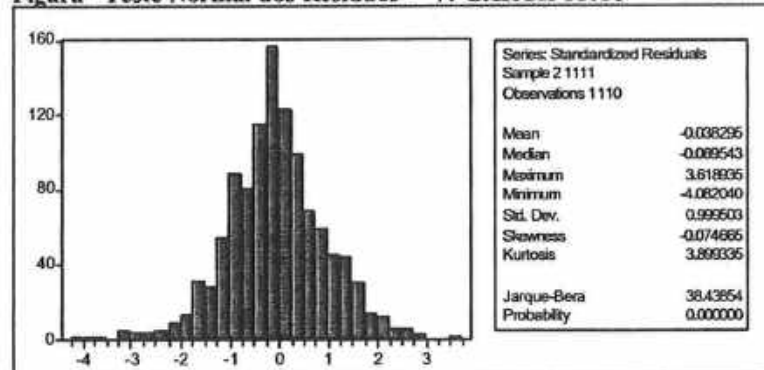
Tabela Modelo GARCH - 7: ITAÚ

Dependent Variable: ITAU4				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/20/02 Time: 13:18				
Sample(adjusted): 2 1111				
Included observations: 1110 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 13 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.00236	0.000912	2.588284	0.0096
AR(1)	0.13671	0.033801	4.044505	0.0001
Variance Equation				
C	7.99E-05	1.79E-05	4.462466	0
ARCH(1)	0.157277	0.027556	5.707451	0
GARCH(1)	0.751229	0.040017	18.77265	0
R-squared	0.025001	Mean dependent var	0.001394	
Adjusted R-squared	0.021471	S.D. dependent var	0.029832	
S.E. of regression	0.02951	Akaike info criterion	-4.34779	
Sum squared resid	0.962296	Schwarz criterion	-4.32521	
Log likelihood	2418.022	F-statistic	7.083498	
Durbin-Watson stat	1.925152	Prob(F-statistic)	0.000012	
Inverted AR Roots	0.14			

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 7: GARCH ITAÚ

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.030	0.030	1.004	
2	-0.017	-0.018	1.338	0.247
3	-0.007	-0.005	1.386	0.500
4	-0.028	-0.028	2.277	0.517
5	-0.061	-0.059	6.388	0.172
6	0.003	0.006	6.398	0.269
7	0.006	0.003	6.436	0.376
8	0.007	0.005	6.487	0.484
9	-0.003	-0.006	6.496	0.592
10	0.030	0.027	7.499	0.585
11	-0.007	-0.008	7.561	0.672
12	-0.019	-0.017	7.976	0.715
13	-0.036	-0.035	9.475	0.662
14	0.027	0.030	10.325	0.667
15	-0.035	-0.036	11.741	0.627

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 7: GARCH ITAÚ



4.2.1.8 GARCH para VOTORANTIM

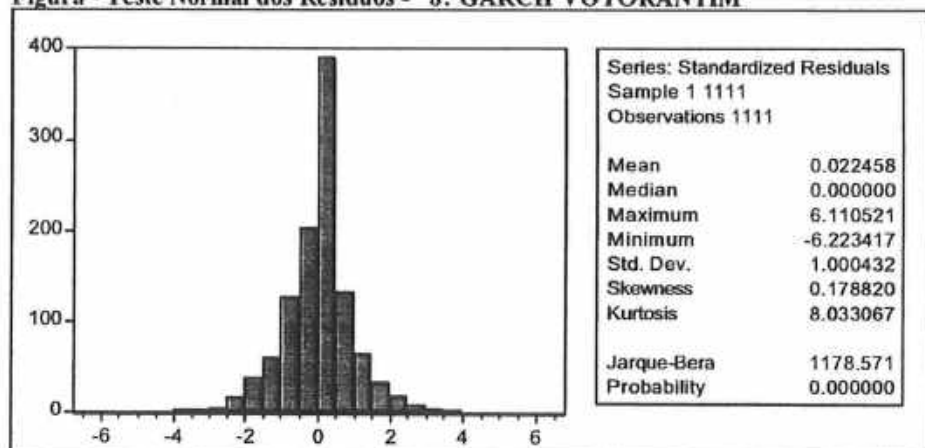
Tabela Modelo GARCH - 8: VOTORANTIM

Dependent Variable: VCPA4				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/25/02 Time: 14:57				
Sample: 1 1111				
Included observations: 1111				
Convergence achieved after 12 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	0.00054	4.84E-05	11.15072	0
ARCH(1)	0.248472	0.037517	6.622912	0
GARCH(1)	0.249351	0.054415	4.58241	0
R-squared	-0.00124	Mean dependent var		0.00117
Adjusted R-squared	-0.00305	S.D. dependent var		0.033255
S.E. of regression	0.033305	Akaike info criterion		-4.09503
Sum squared resid	1.22904	Schwarz criterion		-4.08149
Log likelihood	2277.788	Durbin-Watson stat		1.904951

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 8: GARCH VOTORANTIM

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.041	0.041	1.828	0.176
2	0.057	0.056	5.502	0.064
3	0.061	0.057	9.709	0.021
4	0.019	0.011	10.101	0.039
5	-0.011	-0.019	10.244	0.069
6	-0.030	-0.034	11.230	0.082
7	-0.043	-0.042	13.340	0.064
8	-0.042	-0.034	15.310	0.053
9	0.048	0.061	17.946	0.036
10	-0.012	-0.006	18.118	0.053
11	-0.039	-0.039	19.796	0.048
12	0.035	0.031	21.142	0.048
13	-0.053	-0.056	24.264	0.029
14	0.063	0.066	28.691	0.012
15	-0.004	-0.006	28.711	0.018

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 8: GARCH VOTORANTIM



4.2.1.9 GARCH para PTAX

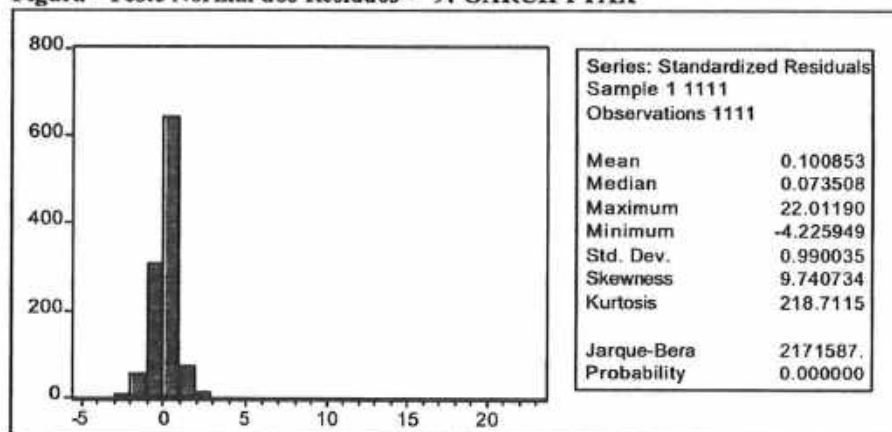
Tabela Modelo GARCH - 9: PTAX

Dependent Variable: PTAX				
Method: ML - ARCH				
Date: 01/25/02 Time: 15:03				
Sample: 1 1111				
Included observations: 1111				
Convergence achieved after 177 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	2.52E-06	2.89E-07	8.700855	0
ARCH(1)	0.128153	0.015789	8.116526	0
GARCH(1)	0.830776	0.019308	43.02749	0
R-squared	-0.00642	Mean dependent var	0.000717	
Adjusted R-squared	-0.00824	S.D. dependent var	0.008953	
S.E. of regression	0.00899	Akaike info criterion	-7.53058	
Sum squared resid	0.08954	Schwarz criterion	-7.51705	
Log likelihood	4186.239	Durbin-Watson stat	1.620538	

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 9: GARCH PTAX

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.026	0.026	0.740	0.390
2	0.050	0.050	3.576	0.167
3	0.032	0.029	4.709	0.194
4	0.005	0.001	4.740	0.315
5	-0.016	-0.019	5.013	0.414
6	0.038	0.037	6.602	0.359
7	0.031	0.031	7.650	0.364
8	0.082	0.079	15.220	0.055
9	-0.029	-0.039	16.193	0.063
10	0.024	0.015	16.824	0.078
11	0.051	0.050	19.744	0.049
12	0.004	0.002	19.763	0.072
13	-0.054	-0.060	23.057	0.041
14	0.003	-0.006	23.068	0.059
15	0.036	0.041	24.569	0.056

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 9: GARCH PTAX



4.2.1.10 GARCH para CARTEIRA

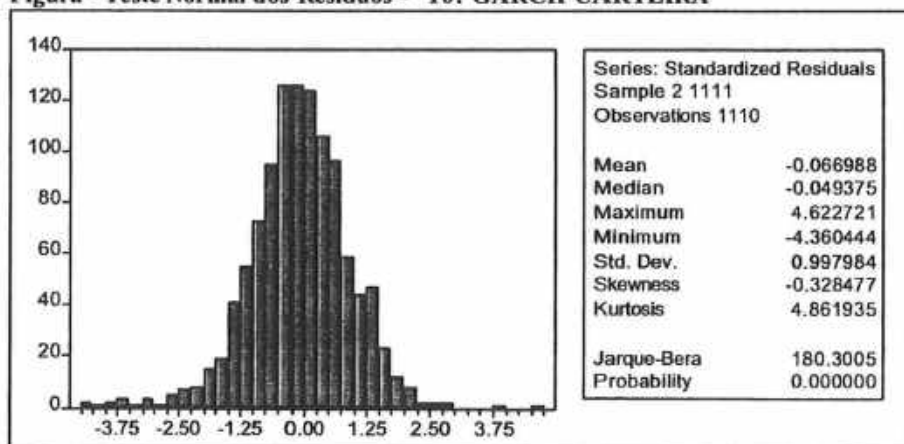
Tabela Modelo GARCH - 10: CARTEIRA

Dependent Variable: CARTEIRA				
Method: ML - ARCH				
Date: 02/16/02 Time: 18:12				
Sample(adjusted): 2 1111				
Included observations: 1110 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 14 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001646	0.000546	3.012687	0.0026
AR(1)	0.131505	0.035544	3.699745	0.0002
Variance Equation				
C	3.19E-05	5.01E-06	6.362642	0
ARCH(1)	0.2193	0.026225	8.362192	0
GARCH(1)	0.687948	0.031846	21.60243	0
R-squared	0.017976	Mean dependent var		0.000581
Adjusted R-squared	0.014421	S.D. dependent var		0.018208
S.E. of regression	0.018077	Akaike info criterion		-5.41589
Sum squared resid	0.361071	Schwarz criterion		-5.39331
Log likelihood	3010.819	F-statistic		5.056778
Durbin-Watson stat	1.975069	Prob(F-statistic)		0.000485
Inverted AR Roots	0.13			

Tabela de Autocorrelação de Resíduos - 10: GARCH CARTEIRA

LAG	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.024	0.024	0.840	
2	0.056	0.056	4.182	0.041
3	0.048	0.045	6.700	0.035
4	-0.006	-0.011	6.744	0.081
5	-0.043	-0.048	8.788	0.067
6	0.004	0.005	8.806	0.117
7	0.015	0.021	9.055	0.171
8	0.024	0.027	9.707	0.206
9	0.040	0.036	11.502	0.175
10	0.087	0.080	20.091	0.017
11	0.030	0.021	21.074	0.021
12	0.022	0.011	21.642	0.027
13	0.007	-0.002	21.693	0.041
14	0.079	0.081	28.804	0.007
15	-0.004	-0.001	28.825	0.011

Figura - Teste Normal dos Resíduos - 10: GARCH CARTEIRA



4.3 Os Resultados da Previsão Fora da Amostra

4.3.1 Percentual de Acerto na Previsão Fora da Amostra

A maneira mais intuitiva de avaliarmos a performance dos modelos pode ser feita através da comparação de seu percentual de acerto esperado, no caso 95%, em relação ao percentual realmente obtido. Na tabela a seguir, apresentamos os resultados obtidos para as abordagens EWMA, KERNEL e GARCH.

Tabela 4 - 3: Resultados da Previsão fora da amostra – Nível de Confiança de 95%

	Percentuais de Acerto no Backtest dos Modelos									
	IBOVESPA	ACES4	BELG4	GGBR4	USIM5	PETR4	ITAU4	VCPA4	PTAX	CARTEIRA
EWMA	93.50%	95.93%	93.50%	94.31%	97.56%	92.68%	94.31%	94.31%	92.68%	92.68%
KERNEL	99.19%	97.56%	96.75%	99.19%	99.19%	96.75%	99.19%	99.19%	97.56%	100.00%
GARCH	94.31%	96.75%	96.75%	94.31%	98.37%	92.68%	95.12%	95.93%	92.68%	93.50%

Em geral, todos os modelos tiveram uma performance muito próxima do que era esperado. Contudo, EWMA foi o modelo com a performance inferior nesse quesito, seguido do GARCH. Destacamos a performance do KERNEL, consistentemente acima do nível de confiança especificado de 95%.

4.3.2 O Critério de Minimização do Erro-Quadrático

A ideia do critério de minimização é mostrar o quanto de “aderência” a metodologia empregada apresenta. Ou seja, é muito fácil aumentar a performance de um método embutindo mais coeficientes de segurança nos cálculos, porém isso irá aumentar a distância do VaR em relação aos log-retornos reais. Sob o ponto-de-vista financeiro, o ideal é que essa “distância” seja a menor possível, visto que os custos de carregamento com provisões são diretamente proporcionais à essa medida de risco. Ou seja, o critério de minimização do erro-quadrático é uma tentativa de obter um balanço entre capacidade de acerto e de minimização do erro para minimizar os custos de carregamento com provisões financeiras para perdas.

Tabela 5 - 1: Critério de Erro-Quadrático Médio – Nível de Confiança de 95%

	Critério de Erro Quadrático Médio									
	IBOVESPA	ACES4	BELG4	GGBR4	USIM5	PETR4	ITAU4	VCPA4	PTAX	CARTEIRA
EWMA	0.129	0.467	0.181	0.254	0.289	0.139	0.161	0.218	0.032	0.063
KERNEL	0.146	0.364	0.200	0.333	0.359	0.151	0.190	0.216	0.041	0.148
GARCH	0.141	0.535	0.268	0.282	0.349	0.150	0.173	0.263	0.028	0.068

A tabela anterior mostra que, em geral, o EWMA apresentou melhor performance segundo esse critério, seguido do GARCH. A metodologia do KERNEL apresentou pior performance. Esse resultado está coerente com o resultado do critério do percentual acerto,

mostrando que o sucesso relativo do KERNEL foi à custa da estimativa de um VaR maior que o estimado pelo EWMA e GARCH.

4.3.3 Gráficos de Previsão fora da amostra – Nível de Confiança de 95%

Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 1: IBOVESPA

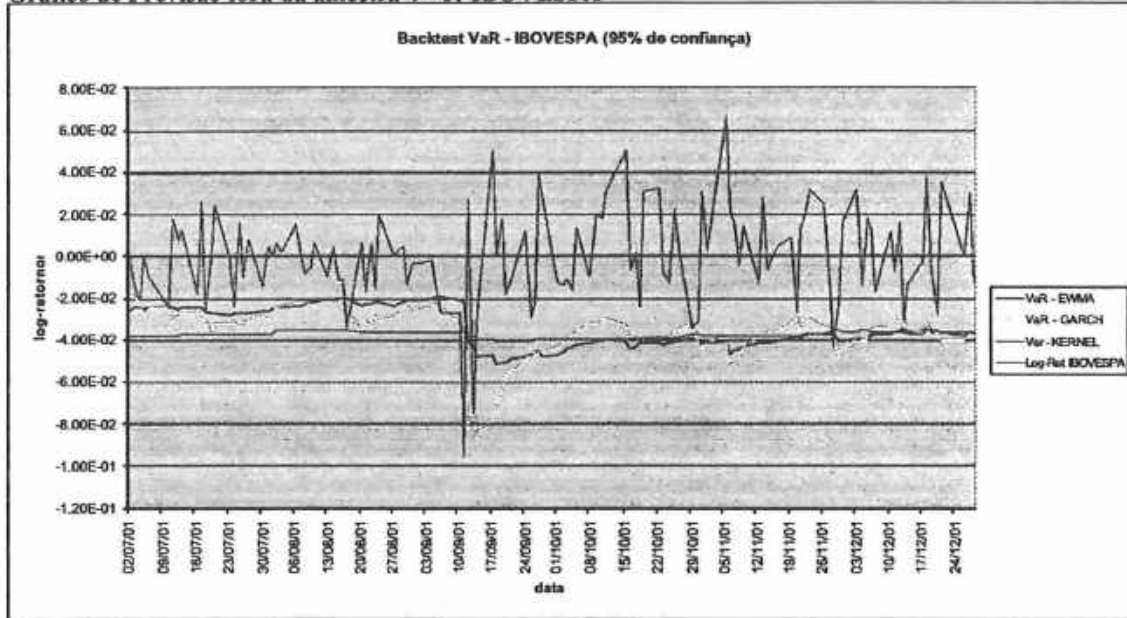


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 2: ACESITA

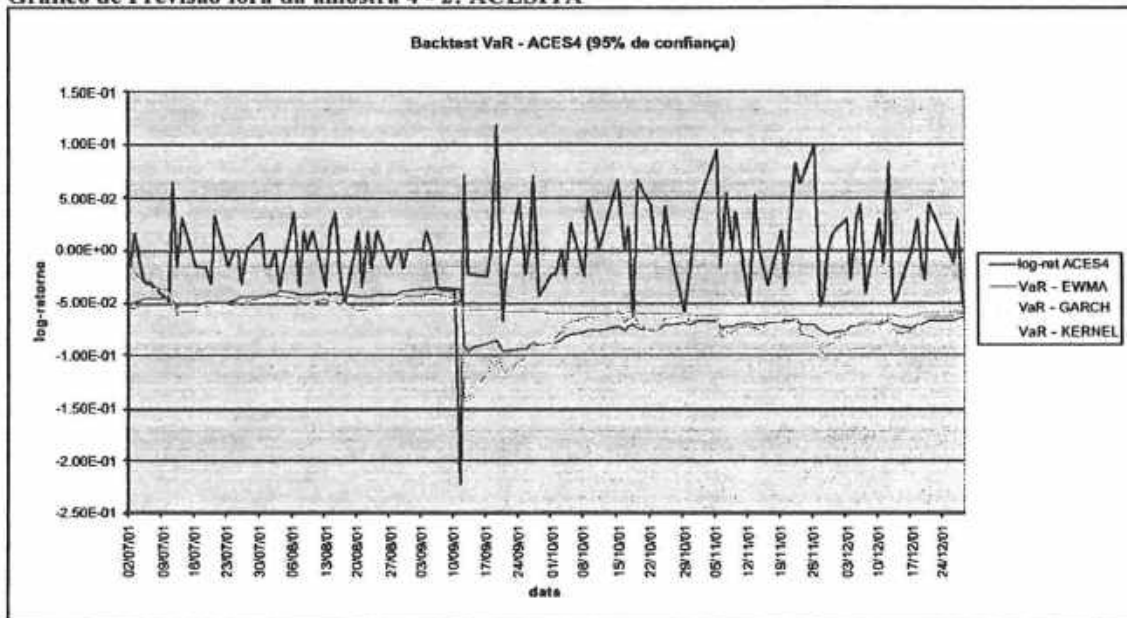


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 3: BELGO

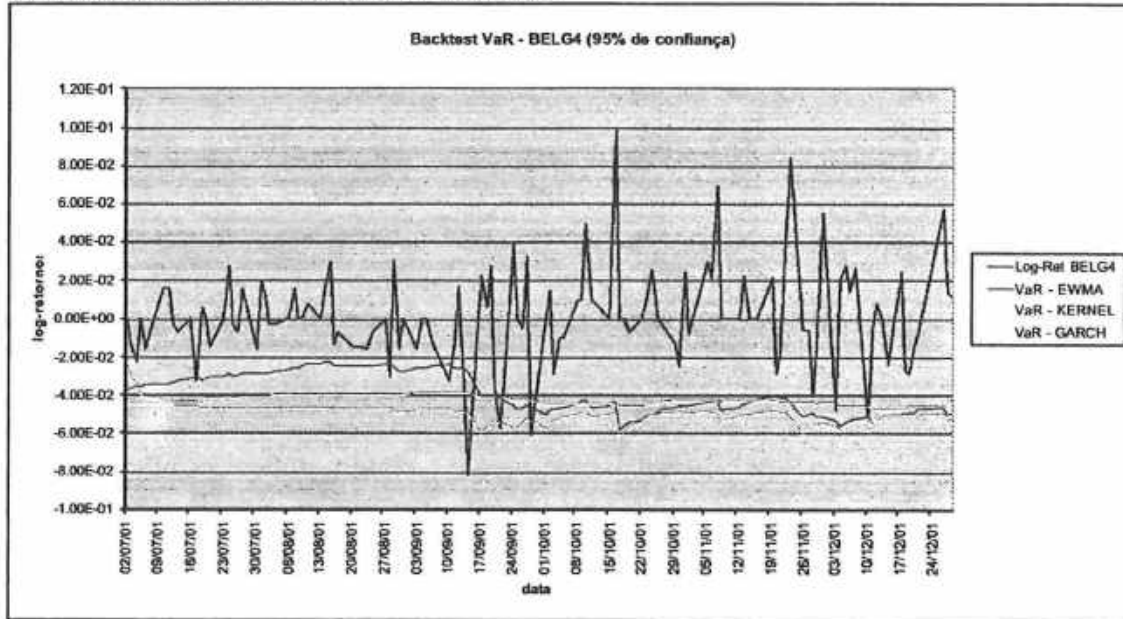


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 4: VOTORANTIM

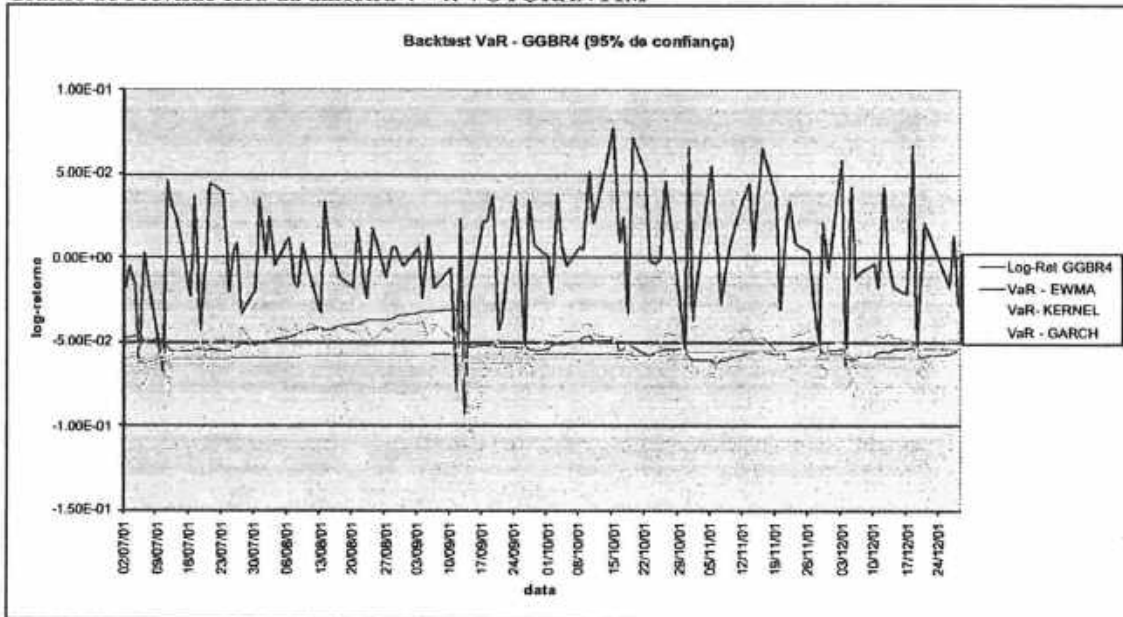


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 5: USIMINAS

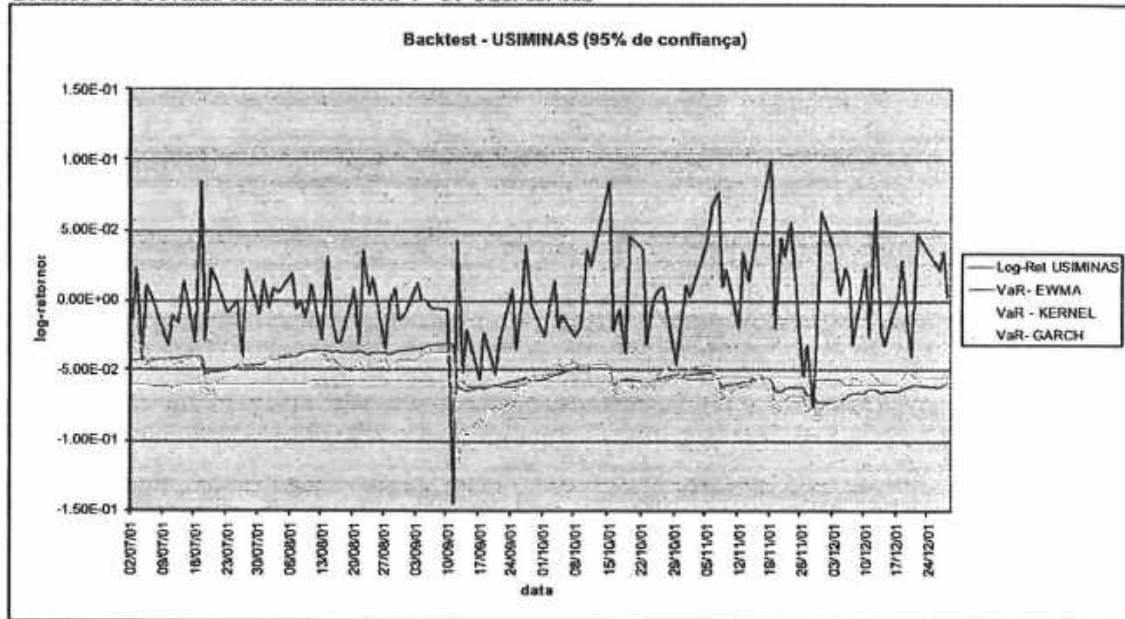


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 6: PETROBRÁS

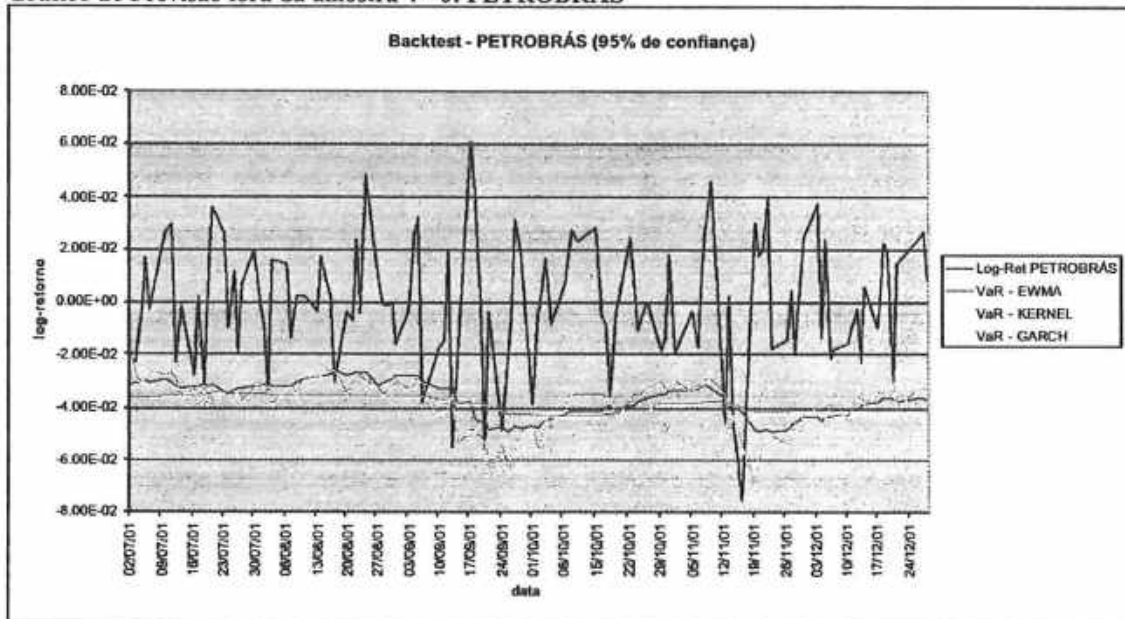


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 7: ITAÚ

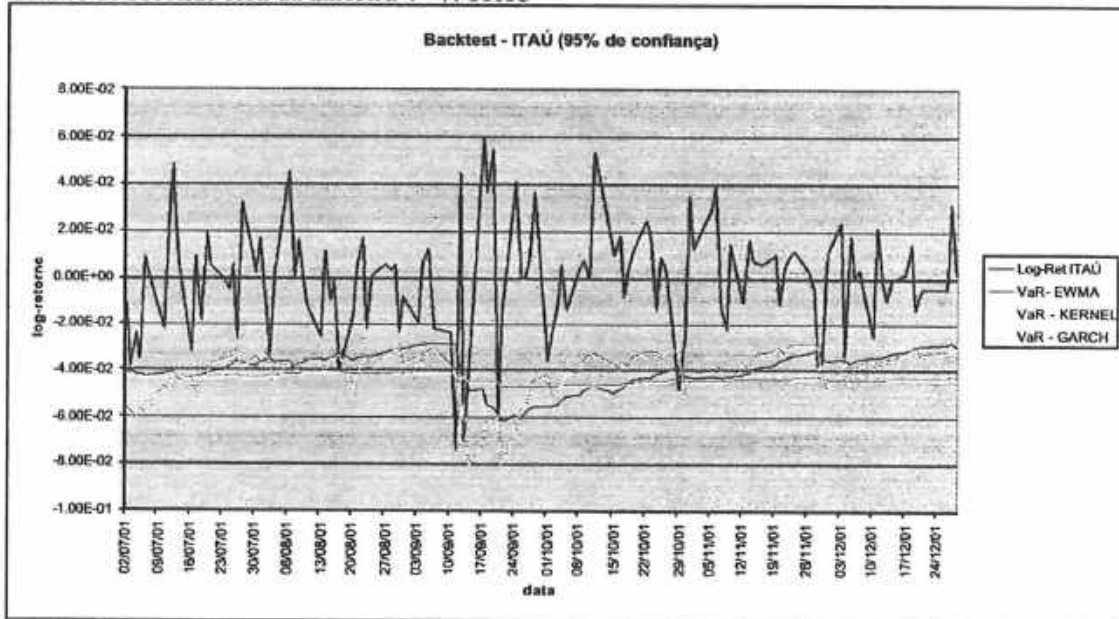


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 8: VOTORANTIM

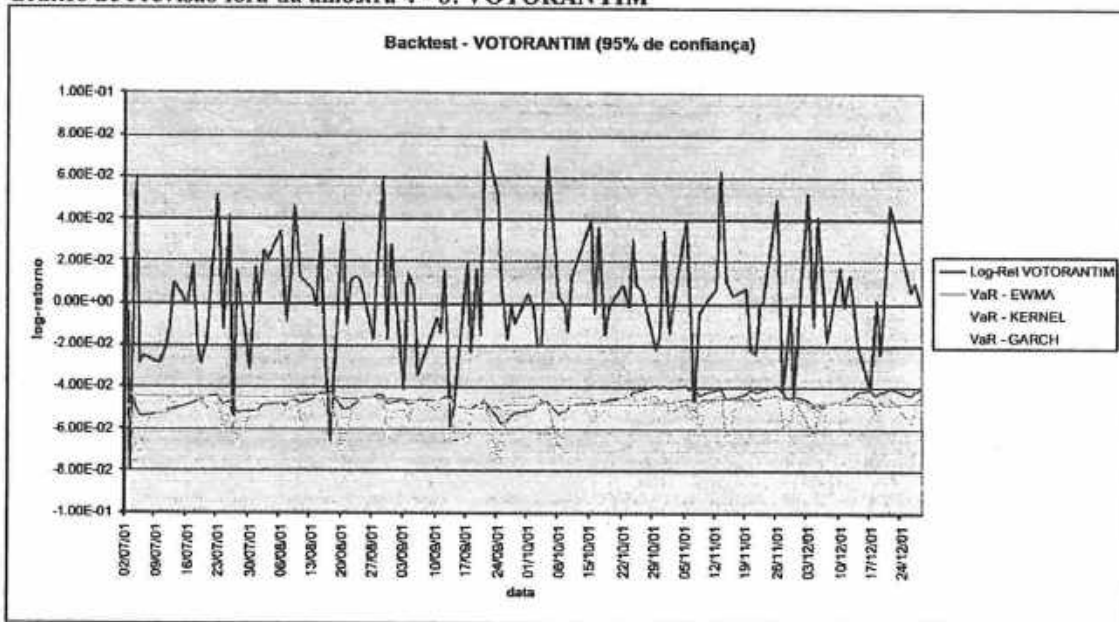


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 9: PTAX

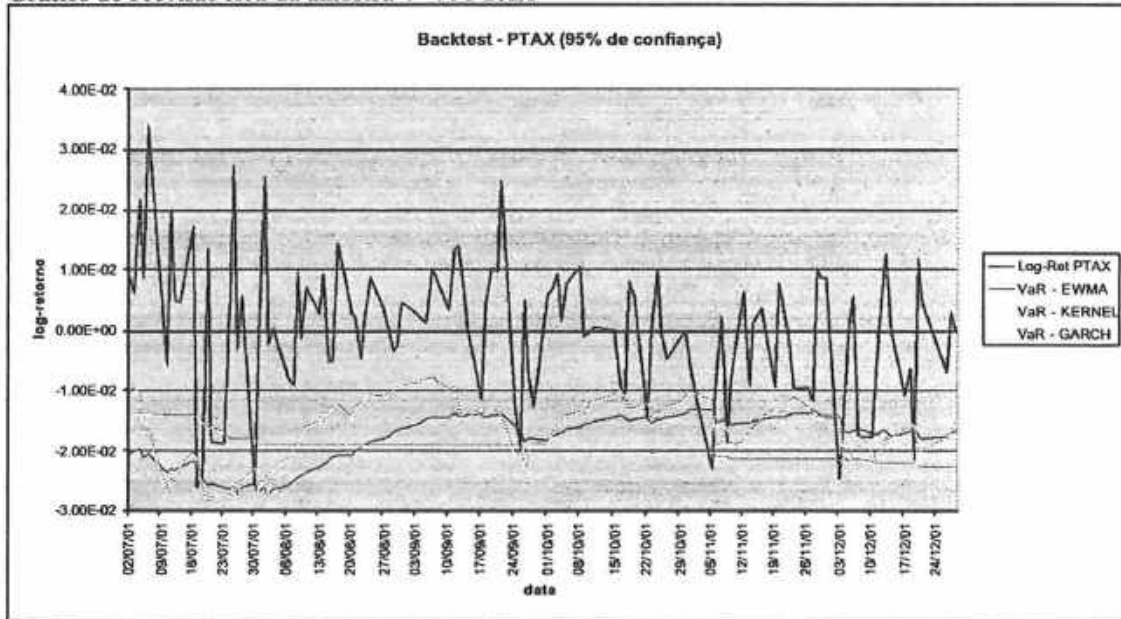
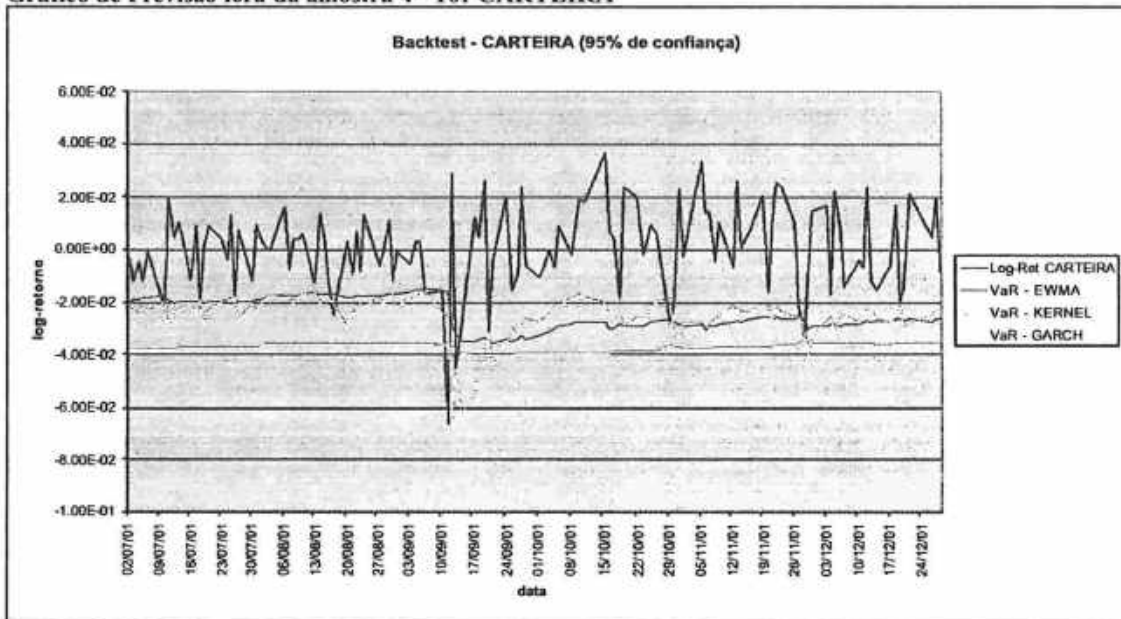


Gráfico de Previsão fora da amostra 4 - 10: CARTEIRA



Capítulo 5

5 Uma Extensão ao RiskMetrics

5.1 A Crítica ao RiskMetrics

Apesar de termos visto, através das previsões fora da amostra, que a abordagem do RiskMetrics é razoavelmente satisfatória para a gestão de risco de mercado em condições normais, ainda restam log-retornos indesejáveis da ordem de 5%, para um nível de confiança de 95%. Em geral, uma organização poderá ter realmente problemas, quando incorrer numa perda não prevista por suas práticas de risco. Essas perdas estão exatamente nesses 5% que, em geral, são assumidos pelas organizações como um nível de risco tolerável. É um consenso, no mercado financeiro, que perdas e subseqüentes problemas de liquidez são mais difíceis de se gerenciar em momentos de stress, que não são previstos pela abordagem do RiskMetrics.

5.2 Os 5% Restantes - A Modelagem das Perdas Não Previstas pelo VaR - RiskMetrics

Nesse capítulo, inspirados ainda pela analogia *volatilidade-risco*, apresentamos uma metodologia para modelar os 5% restantes, ou seja, as perdas potenciais não previstas pelo VaR.

Nosso objetivo é modelar os retornos de stress não previstos pelo VaR, na tentativa de oferecer uma ferramenta que possa auxiliar na mensuração de perdas potenciais em momentos de stress.

É importante salientar que essa proposta é uma abordagem mais estruturada que a proposta de Testes de Stress, visto que estaremos preocupados em quantificar as perdas potenciais, dado um nível de confiança pré-estabelecido e não simplesmente na avaliação de cenários.

Ressaltamos que essa metodologia é uma extensão ao VaR do RiskMetrics, na medida em que se utiliza de medidas de VaR mensuradas segundo o RiskMetrics como ponto de partida.

Finalmente, é importante salientar que a metodologia de perdas não previstas não substitui, mas é mais uma prática a ser acrescida às demais já mencionadas nesse estudo para auxiliar em uma gestão de risco mais aprimorada.

Definimos as perdas não previstas a partir do VaR assim:

$$[\text{Def. 5 - 1}] \quad \delta_t = |r_t^*| - VaR_t, \quad \text{se } |r_t^*| > VaR_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

onde r_t^* é um log-retorno negativo, cujo módulo excede a medida de VaR para o mesmo ativo, no mesmo instante de tempo; T é o total de observações do ativo e n é o número de observações para as quais $|r_t^*| > VaR_t$.

Em termos percentuais, as perdas não previstas podem ser calculadas assim:

$$[\text{Def. 5 - 2}] \quad \Theta_i = -(e^{\delta_i} - 1), \quad i = 1, \dots, n..$$

Então, temos a série $\{\delta_i\}, i = 1, \dots, n$, que consiste apenas de uma medida dos log-retornos negativos que superaram o VaR, em módulo. Portanto, temos uma série que amostra exatamente os 5% que excedem o VaR.

O passo seguinte é determinação da função densidade da distribuição de $\{\delta_i\}$. Nesse, estudo, comparamos a abordagem não-paramétrica com a paramétrica. Tanto para a estimação não-paramétrica e paramétrica da densidade utilizamos dados do IBOVESPA de 02/01/1992 a 29/06/2001, o equivalente a 2344 dados diários. Para o horizonte de previsão fora da amostra utilizamos a janela de 02/07/2001 a 23/01/2002.

É interessante ressaltar que, dada a definição que fizemos para $\{\delta_i\}$ e, também, através da observação visual do histograma correspondente, já antecipávamos que a distribuição log-normal seria mais adequada para modelar as perdas não previstas pelo VaR através da abordagem paramétrica. A distribuição normal foi descartada de início, porque a variável $\{\delta_i\}$ não pode assumir valores negativos por definição.

Em relação à abordagem não-paramétrica, utilizamos um kernel gaussiano, embora com o cuidado de calcularmos uma função densidade que excluísse valores negativos do domínio.

Gráfico 5 - 1: Perdas Não Previstas do IBOVESPA

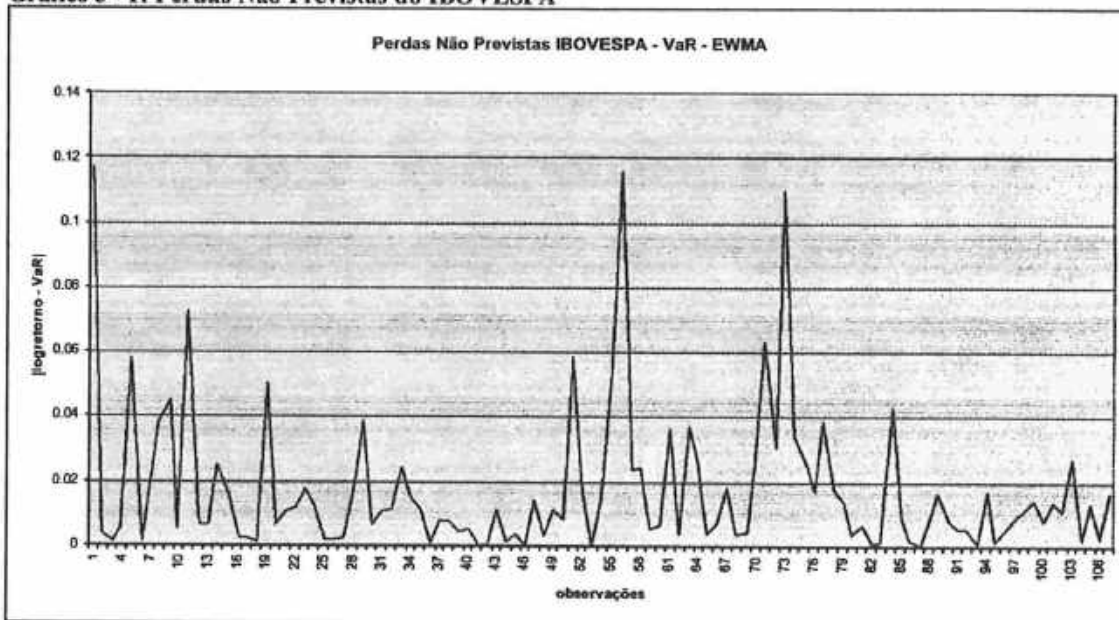


Gráfico 5 - 2: Estimação Não-Paramétrica da Densidade das Perdas Não Previstas pelo VaR - IBOVESPA

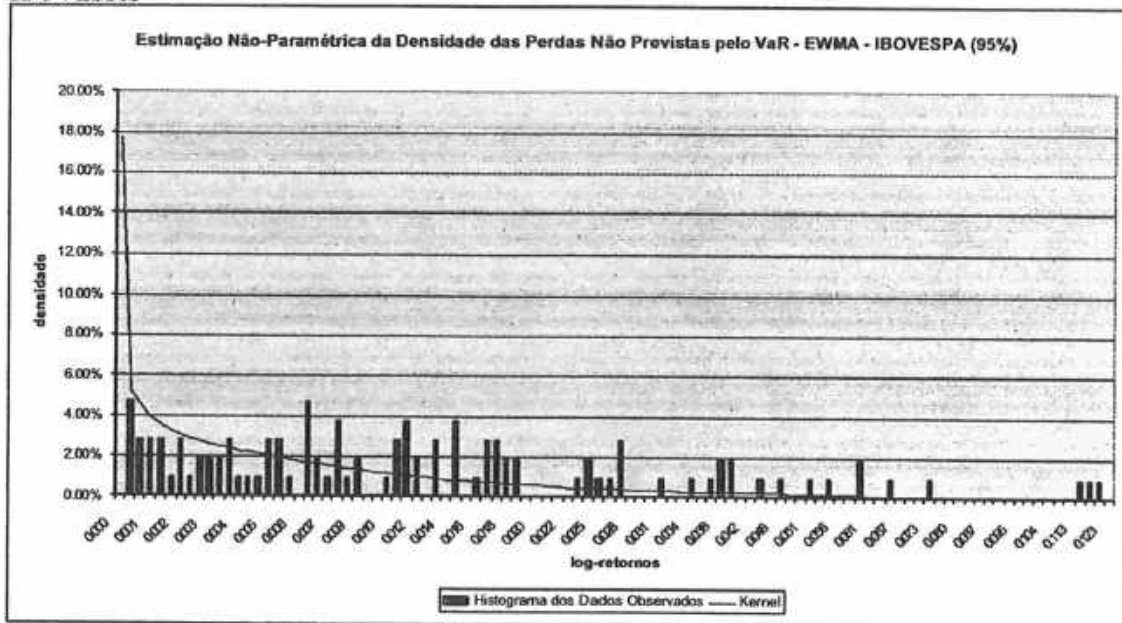
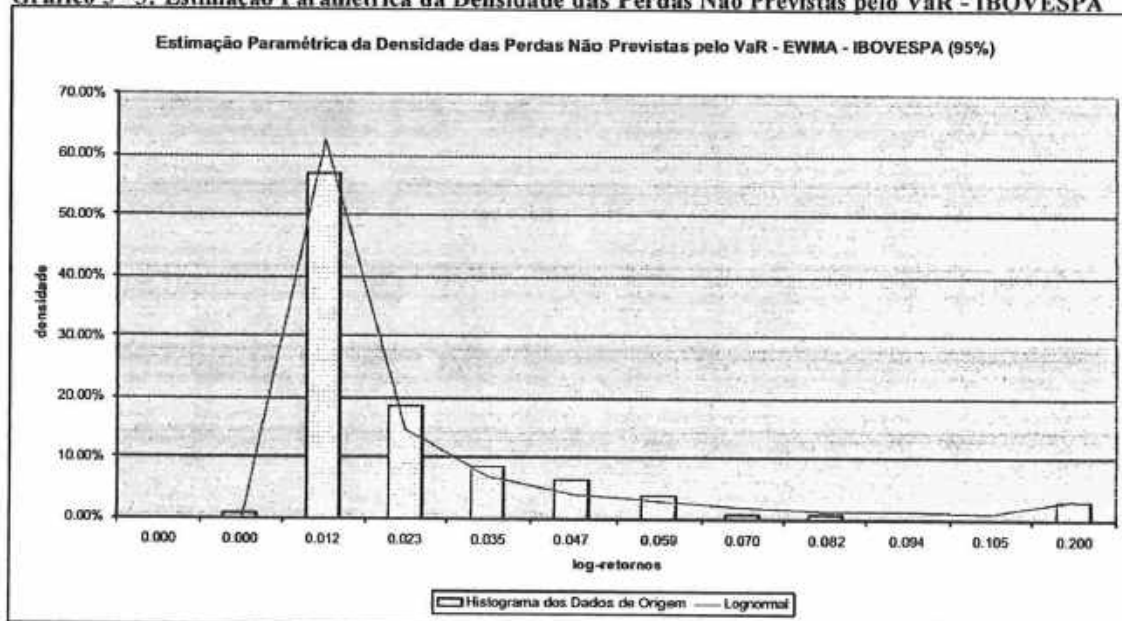


Gráfico 5 - 3: Estimação Paramétrica da Densidade das Perdas Não Previstas pelo VaR - IBOVESPA



Podemos observar que a forma da distribuição das perdas não previstas pelo VaR é assimétrica e com caudas pesadas. Nosso interesse é, estimar, com 95% de confiança, qual seria a perda máxima não prevista pelo VaR.

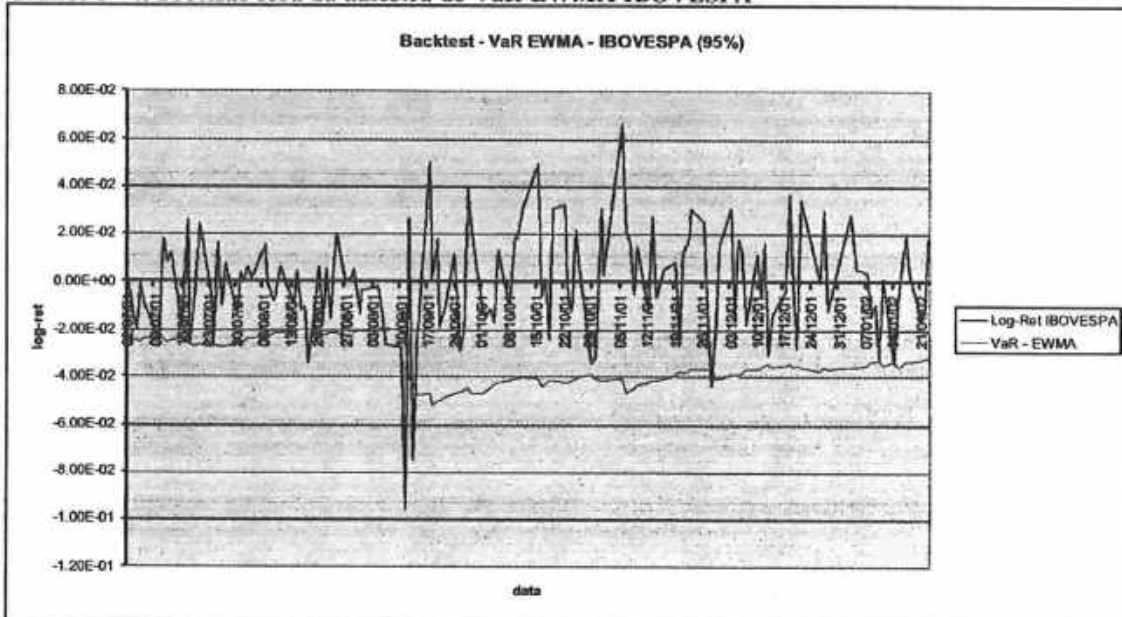
Através da integração numérica da densidade não-paramétrica da distribuição entre os limites de 0% a 95%, obtivemos o quantil aproximado de 0,0284, equivalente a uma perda não prevista de -2,88%. Se determinássemos o quantil através de um procedimento mais simples, o percentil, teríamos encontrado o quantil aproximadamente igual a 0,0581 que é equivalente a perda não prevista de -5,98%. Finalmente, o quantil calculado através da densidade paramétrica lognormal foi substancialmente maior, 0,108. Esse quantil corresponde a uma perda não prevista pelo VaR de -11,42%.

5.3 Previsão Fora da Amostra da Modelagem de Perdas Não Previstas - IBOVESPA

Apresentamos os resultados da previsão fora da amostra para avaliar a performance do modelo proposta no caso do IBOVESPA.

Inicialmente, ilustramos os resultados da previsão fora da amostra do VaR – EWMA para o IBOVESPA. Observamos os valores de log-retornos, no horizonte de previsão fora da amostra, que ficaram abaixo do VaR previsto e, portanto, representaram um perda não prevista. Finalmente comparamos essas perdas não previstas, segundo a definição apresentada com o q-quantil calculados através do Kernel e através de percentil.

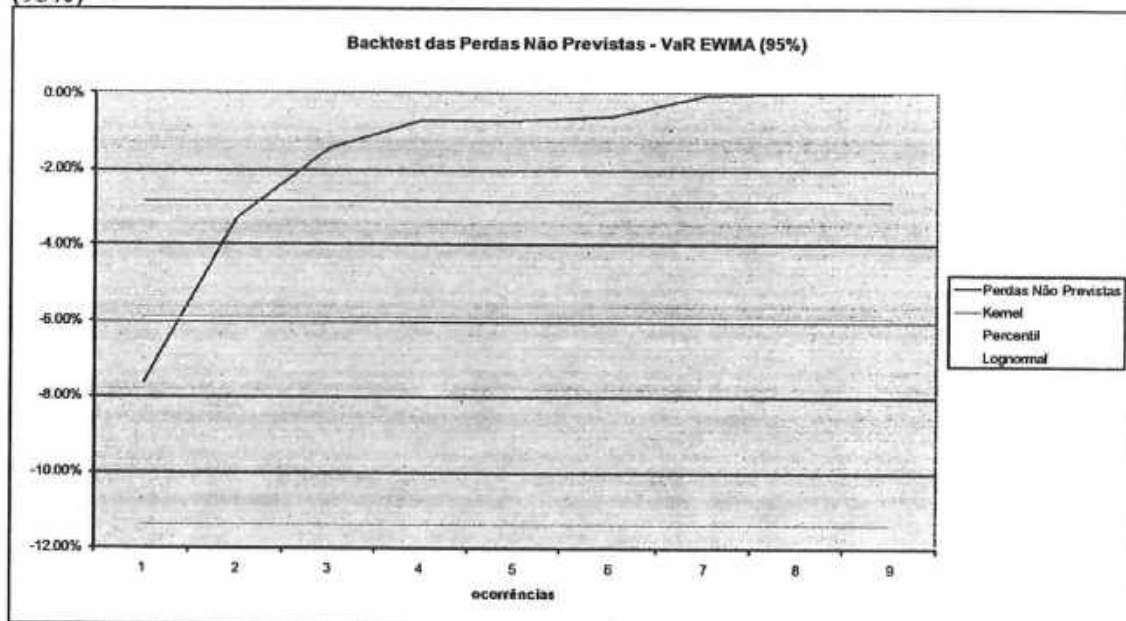
Gráfico 5 - 4: Previsão fora da amostra do VaR-EWMA IBOVESPA



O VaR-EWMA apresentou, no horizonte de previsão fora da amostra, um percentual de acerto de 93,48%. Ou seja, 6,52% das perdas não foram devidamente previstas pelo VaR-EWMA.

A seguir, apresentamos os resultados da previsão fora da amostra da modelagem para as perdas não previstas.

Gráfico 5 - 5: Previsão fora da amostra das Perdas Não Previstas pelo VaR – EWMA – IBOVESPA (95%)



No horizonte de previsão fora da amostra, observamos apenas 9 ocorrências, correspondentes a 6,52%, para serem comparadas com o quantil determinado através do Kernel, do Percentil e da Lognormal.

O Kernel foi a abordagem que apresentou a menor taxa de acerto de 77,78%. O Percentil resultou numa taxa de acerto de 88,89%, ao passo que a abordagem paramétrica apresentou uma taxa de acerto de 100%. Apesar do tamanho reduzido da amostra de previsão fora da amostra, os resultados, principalmente da abordagem paramétrica, comprovam que é razoável a abordagem para perdas não previstas pelo VaR proposta nesse estudo.

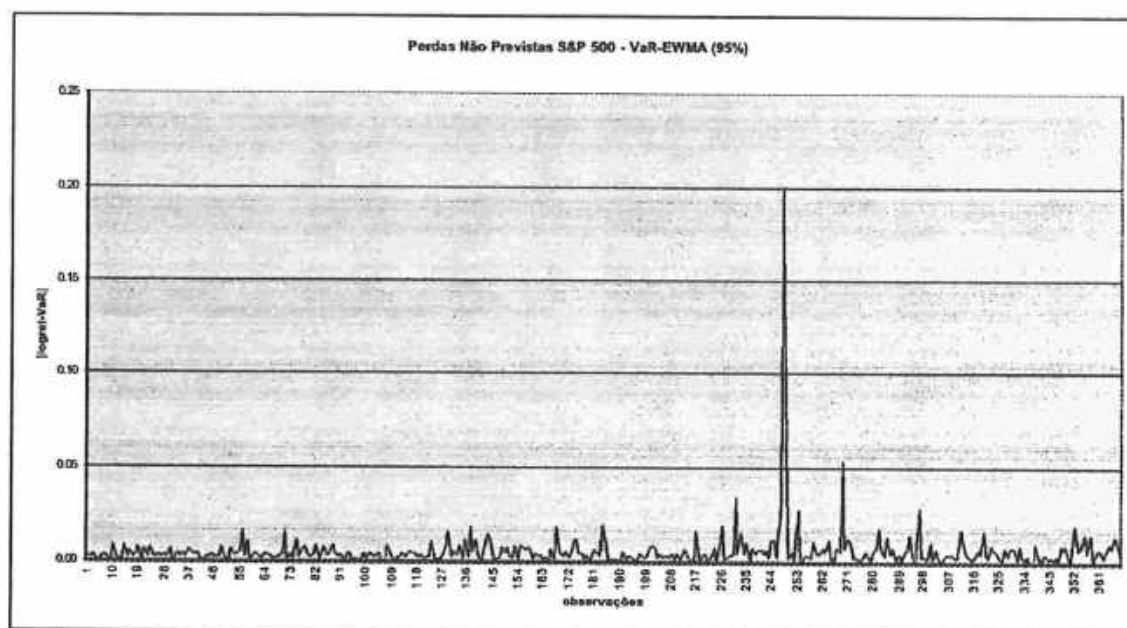
5.4 Modelagem das Perdas Não Previstas pelo VaR – EWMA para o S&P 500

Com o intuito de comprovarmos que a modelagem sugerida é realmente robusta, realizamos uma verificação da mesma aplicada ao S&P 500. A razão dessa escolha ocorre em função das séries financeiras brasileiras serem mais curtas. O caso do PTAX é um exemplo, não em função da disponibilidade dos dados, mas em função das mudanças de regimes cambiais que afetam a dinâmica estrutural da variável em observação.

No caso de ações negociadas na BOVESPA, ilustramos o uso dessa modelagem lançando mão do CAPM – Capital Asset Pricing Model, como será detalhado na seção subsequente.

A seguir, apresentamos o comportamento das perdas não previstas pelo VaR-EWMA para o S&P 500. A partir da observação do gráfico, que inclui dados de 02/01/1970 até 18/07/1997, podemos verificar que a série apresenta um comportamento razoavelmente heterocedástico, visto que a variância em períodos mais recentes é maior que a de períodos mais antigos. Essa observação nos leva a optar por um período menos extenso para estimação do quantil a 95% de confiança de maneira a evitar a subestimação desse parâmetro. Portanto, escolhemos um horizonte de estimação que compreende dados diários de 02/01/1986 a 18/07/1997, um total de 2920 log-retornos. O horizonte de previsão fora da amostra compreende dados diários de 21/07/1997 a 23/01/2002, portanto um conjunto com 1135 dados diários.

Gráfico 5 - 6: Perdas Não Previstas do S&P 500



Na seqüência, apresentamos os gráficos da estimação não-paramétrica de densidade para as perdas não previstas pelo VaR-EWMA para o S&P 500.

Gráfico 5 - 7: Estimação Não-Paramétrica da Densidade das Perdas Não Previstas pelo VaR S&P 500

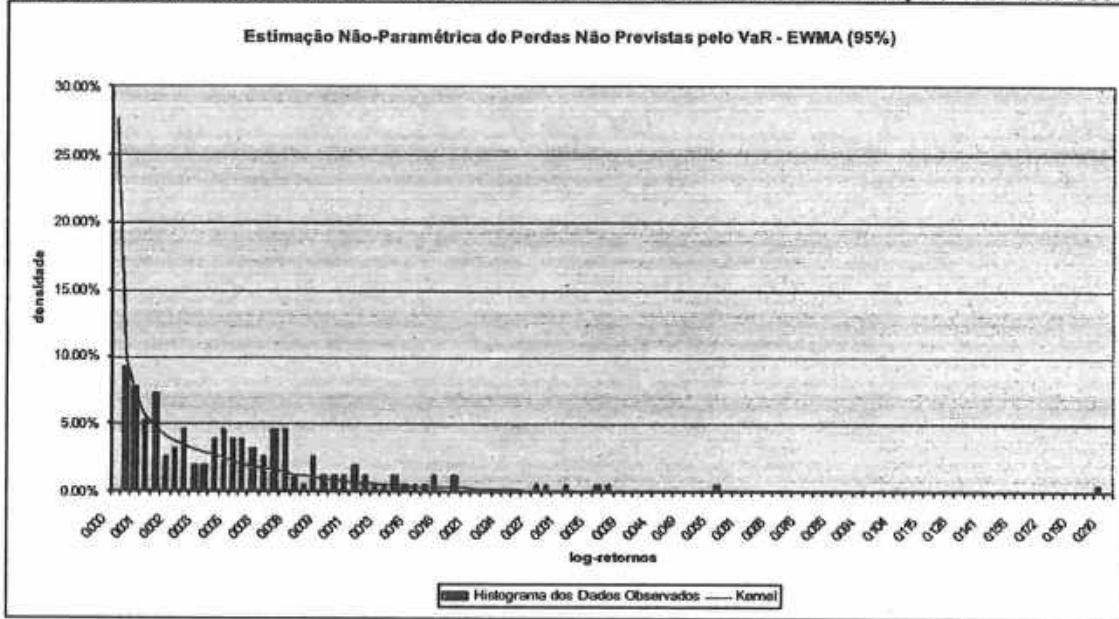
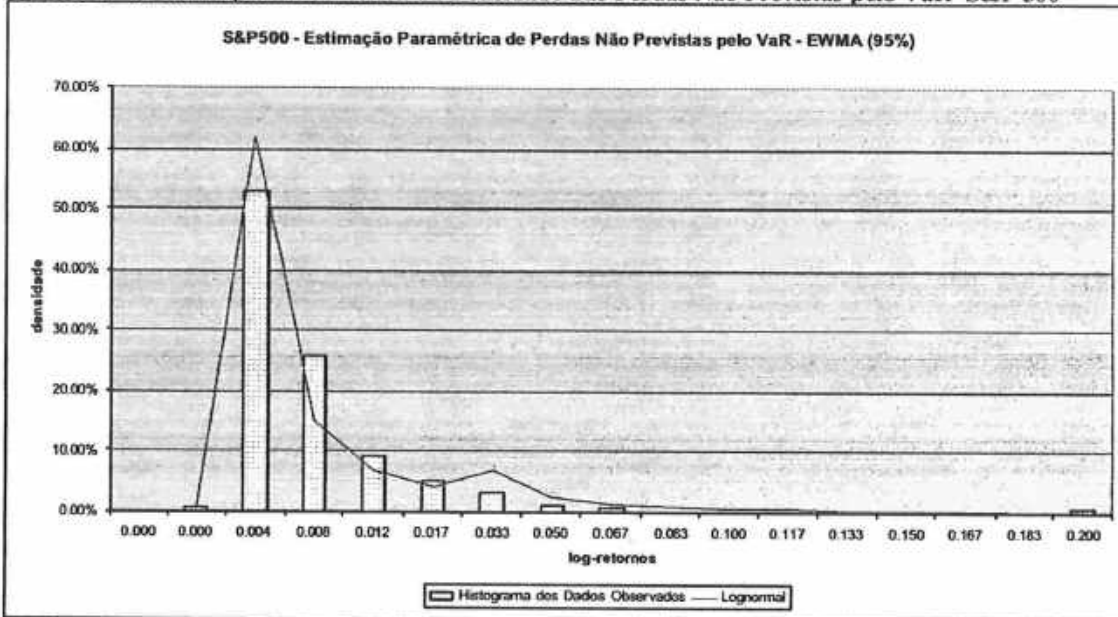


Gráfico 5 - 8: Estimação Paramétrica da Densidade das Perdas Não Previstas pelo VaR S&P 500



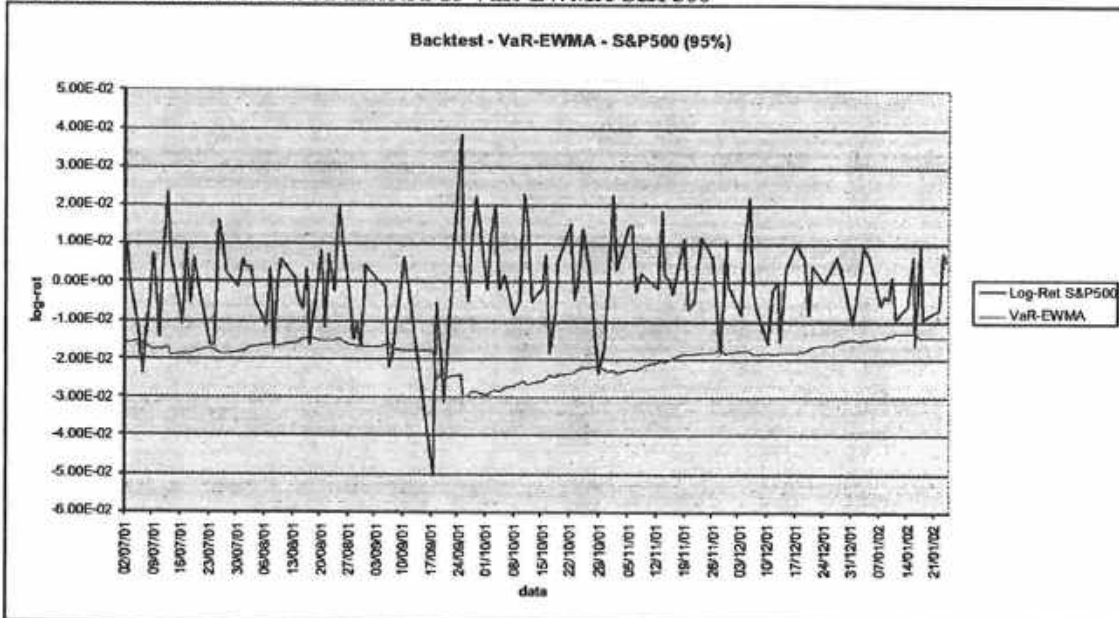
Podemos observar que a forma da distribuição das perdas não previstas pelo VaR é assimétrica e com caudas pesadas, da mesma maneira que para a série do IBOVESPA. Nosso interesse é, estimar, com 95% de confiança, qual seria a perda máxima não prevista pelo VaR.

Através da integração numérica da densidade não-paramétrica da distribuição entre os limites de 0% a 95%, obtivemos o quantil aproximado de 0,0125, equivalente a uma perda não prevista de -1,26%. Se determinássemos o quantil através de um procedimento mais simples, o percentil, teríamos encontrado o p-valor aproximadamente igual a 0,0187 que é equivalente a perda não prevista de -1,51%. Para a abordagem paramétrica lognormal, calculamos um quantil igual a 0.0384, que corresponde a uma perda não prevista pelo VaR de -3,92%, substancialmente maior que as previstas através do kernel e do percentil.

5.4.1 Previsão fora da amostra da Modelagem de Perdas Não Previstas – S&P500

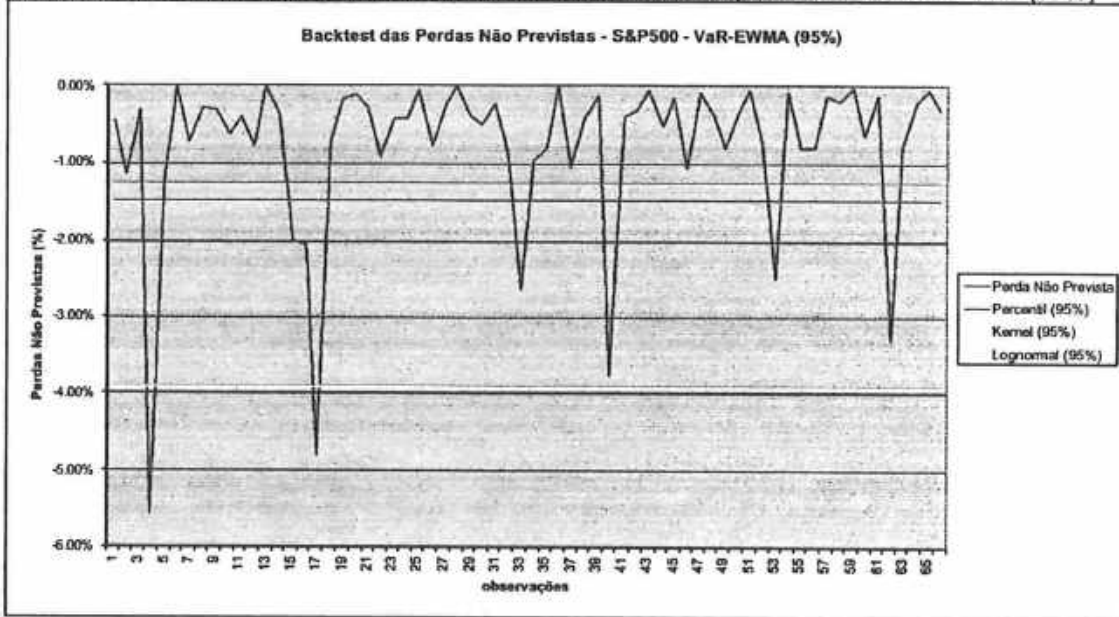
Seguindo os mesmos procedimentos desenvolvidos para o IBOVESPA, obtivemos uma taxa de acerto na previsão fora da amostra do VaR-EWMA com 95% de confiança igual a 92,09%. Nesse caso, foi uma performance ainda inferior a do VaR-EWMA para o IBOVESPA. Contudo, ainda é uma performance razoável apesar de não ter previsto o VaR para 7,91% dos log-retornos negativos.

Gráfico 5 - 9: Previsão fora da amostra do VaR-EWMA S&P500



Vejamos como foi a previsão fora da amostra para as perdas não previstas para o Kernel e o Percentil.

Gráfico 5 - 10: Previsão fora da amostra das Perdas Não Previstas pelo VaR – EWMA – S&P (95%)



No horizonte de previsão fora da amostra, observamos um total de 66 ocorrências, correspondentes a 7,91%, para serem comparadas com o quantil determinado através do Kernel, do Percentil e da Lognormal. Essa é uma amostra razoavelmente superior que a obtida para o IBOVESPA. Para um nível de confiança de 95%, obtivemos para o percentil e para o kernel taxas de acerto idênticas de 87,88%. Para a abordagem paramétrica lognormal obtivemos uma taxa de acerto de 96,97%.

Novamente, comprovamos através do S&P500 a consistência da abordagem proposta nesse estudo para perdas não previstas pelo VaR.

5.5 Modelagem das Perdas Não Previstas pelo VaR e CAPM

Já salientamos que, no Brasil, em geral, as séries financeiras são mais curtas quando comparadas às séries norte-americanas. Horizontes de estimação curtos e freqüentes mudanças econômicas estruturais criam dificuldades para as modelagens.

Nessa seção, aplicaremos a modelagem de perdas não previstas pelo VaR baseados no CAPM – Capital Asset Pricing Model, para as séries de ações deste estudo. A utilização do CAPM permite “mapear” uma determinada ação numa cesta de ações que represente adequadamente o mercado, no caso o IBOVESPA.

O CAPM foi desenvolvido por Sharpe (1964). A versão inicial propunha uma regressão linear do retorno de um determinado ativo em função do retorno de mercado, baseado em retornos percentuais. Estaremos seguindo a mesma idéia de Sharpe, porém utilizando log-retornos para fazer a regressão. Vejamos a equação do modelo do CAPM para log-retornos a seguir.

$$[Eq. 5 - 1] \quad r_i = r_{LR} + \beta_i \cdot (r_M - r_{LR}),$$

onde r_i é o log-retorno do i -ésimo ativo, r_{LR} é o retorno *livre-de-risco*, no caso adotamos como o retorno *livre-de-risco* o retorno do CDI – certificado de depósito interbancário, r_M é o retorno representativo do mercado, no caso o retorno do IBOVESPA, β_i , uma constante, representa a sensibilidade dos retornos i -ésimo ativo em relação ao retorno de mercado e a quantidade $(r_M - r_{LR})$ representa o excesso de retorno do mercado em relação ao retorno livre-de-risco, ou seja o prêmio de risco exigido pelo investidor.

Visto que a variância do retorno livre-de-risco é muito próxima de zero em relação a qualquer outro ativo do mercado, é razoável admitir que a variância do retorno livre-de-risco é zero. Disso, lembrando que β_i é uma constante, é fácil compreender que podemos calcular o VaR-EWMA para o i -ésimo ativo através da seguinte equação:

$$[\text{Eq. 5 - 2}] \quad VaR_i = \beta_i \cdot VaR_{IBOVESPA}$$

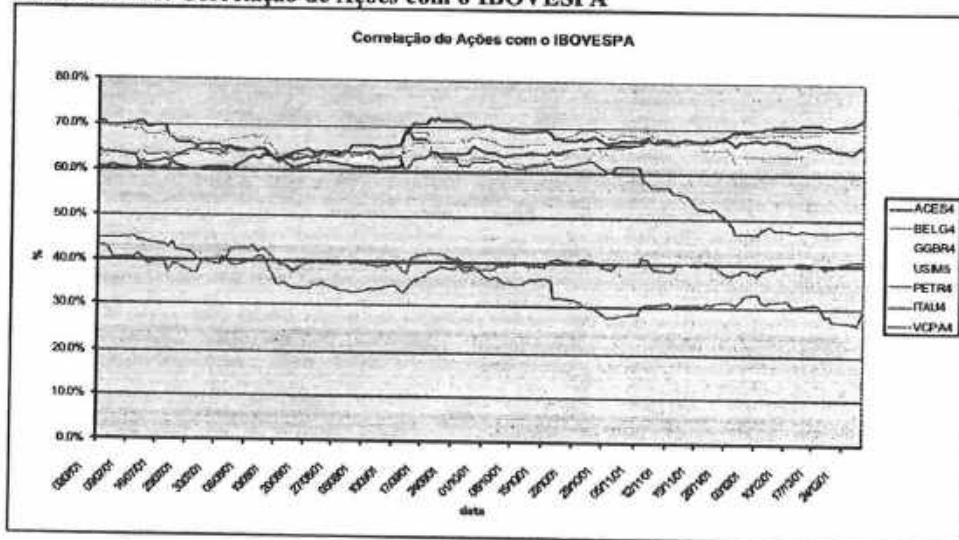
Portanto, generalizamos a Def. 6 – 2 da seguinte maneira:

$$[\text{Def. 5 - 3}] \quad \Theta_i = -\beta_i \cdot (e^{\delta_i} - 1).$$

Ressaltamos que quando o i -ésimo ativo é a própria carteira de mercado, o IBOVESPA, a Def. 5 – 3 reduz-se à Def. 5 – 2, visto que, nesse caso $\beta_i = \beta_M = \beta_{IBOVESPA} = 1$.

Antes de prosseguirmos na aplicação do modelo de perdas não previstas pelo VaR, convém ressaltar o caráter dinâmico das correlações, ou seja, o β_i entre o i -ésimo ativo e o retorno de mercado. Isso ocorre por algumas razões, entre elas a mudança na composição do IBOVESPA, restrições de liquidez e variáveis econômicas que afetam mais profundamente determinados setores e não toda a economia. O gráfico a seguir, ilustra essa dinâmica mostrando a variação no tempo das correlações entre cada ação e o IBOVESPA.

Gráfico 5 - 11: Correlação de Ações com o IBOVESPA



Outra verificação importante, consiste na avaliação do cálculo do VaR para ações a partir do CAPM. Podemos fazer isso, porque já calculamos anteriormente o VaR para as ações desse estudo baseados em suas próprias séries de preços. Vejamos os resultados comparativos na tabela a seguir:

Tabela 5 - 2: Comparação VaR calculada diretamente na série da ação vs. Calculado via CAPM

Percentual de Acerto							
VaR - EWMA	95.93%	93.50%	94.31%	97.56%	92.68%	94.31%	94.31%
VaR - CAPM	73.17%	70.73%	76.42%	77.24%	79.67%	78.86%	70.73%

Como já esperávamos, o CAPM apresentou uma taxa de acerto inferior ao VaR calculado diretamente com os dados de preços das séries de ações. Contudo, esse experimento teve o objetivo propiciar uma avaliação qualitativa e quantitativa da validade da extrapolação do uso do CAPM, não para o cálculo do VaR, mas para a modelagem das perdas não previstas pela VaR, para verificarmos se a abordagem através do CAPM era razoável, como verificamos ser.

O procedimento que seguimos é o do cálculo do VaR através das séries de preços das ações, como já ilustrado anteriormente, porém utilizando o CAPM para vincular o quantil calculado a partir do horizonte mais longo disponível para o IBOVESPA. Evidentemente, essa abordagem somente deve ser adotada quando não dispusermos de horizontes de estimação longos o suficiente para determinarmos quantis realmente representativos para os ativos de interesse.

Finalmente, realizamos a previsão fora da amostra para a modelo de perdas não previstas pelo VaR, para o período de 02/07/2001 a 28/12/2001.

Vejamos a sumarização dos resultados na tabela a seguir:

Tabela 5 - 3: Percentuais de Acerto do Modelo de Perdas Não Previstas pelo VaR - CAPM

	Percentuais de Acerto do Modelo de Perdas Não Previstas pelo VaR - CAPM						
	ACES4	BELG4	GGBR4	USIM5	PETR4	ITAU4	VCPA4
Kernel (95%)	78.0%	88.6%	84.6%	80.5%	89.4%	88.6%	87.8%
Percentil (95%)	96.7%	98.4%	95.9%	98.4%	99.2%	97.6%	97.6%
Lognormal (95%)	99.19%	100.00%	100.00%	99.19%	100.00%	100.00%	100.00%

Observamos que as taxas de acerto do modelo não-paramétrico ficaram aquém do nível de confiança especificado. Contudo, tanto o percentil, quanto a abordagem paramétrica lognormal, apresentaram performance de acerto condizente com o nível de confiança de 95% que foi definido para a modelagem de perdas não previstas pelo VaR em conjunto com o CAPM, com destaque especial para os resultados apresentados pela abordagem paramétrica lognormal.

6 Conclusões

Verificamos que, para o caso das séries de preços de ações da BOVESPA, do índice IBOVESPA, do PTAX e da carteira montada a partir dessas séries, a metodologia do VaR proposta pelo RiskMetrics apresentou performance razoavelmente de acordo com as previsões do modelo.

A modelagem GARCH não ofereceu uma relação custo-benefício superior à abordagem EWMA. Até porque o EWMA é um caso especial da família GARCH, ou seja, um IGARCH.

Contudo, a abordagem GARCH permitiria a elaboração de modelos de volatilidade mais elaborados para serem utilizados em simulação de Monte Carlo, por exemplo, para o cálculo de VaR de instrumentos financeiros mais sofisticados.

As boas performances dos modelos nas previsões fora da amostra comprovam, de uma maneira geral, que as hipóteses adotadas, apesar das simplificações, permitem a obtenção de bons resultados.

Isso tudo, considerando-se um período de previsão fora da amostra de seis meses que incluíram as crises da Argentina e o atentado terrorista ao World Trade Center em Nova Iorque.

Finalmente, procurando estender a abordagem do RiskMetrics, propusemos uma metodologia para modelagem dos retornos não previstos pelo VaR do RiskMetrics. É importante lembrar que, apesar de podermos especificar e trabalhar arbitrariamente com um determinado nível de confiança, um nível maior de confiança implica em bandas de VaR mais “pesadas”, ou seja, mais restritivas em relação à exposição a risco de mercado que a instituição deveria levar em conta. E isso, certamente, tem consequências diretas na gestão e na competitividade da instituição.

A proposta de modelagem de perdas não previstas pelo VaR é uma metodologia que permitiria às instituições trabalharem com níveis de confiança mais condizentes com a necessidade de realizar operações mais competitivas, porém agregando a capacidade de mensurar, também com um nível de confiança pré-estabelecido, perdas potenciais não previstas pelo VaR. Ou seja, essa metodologia, com base nos resultados desse estudo, fornece uma abordagem a ser mais detalhadamente estudada em outros mercados, para mensurar a probabilidade e a extensão de eventos extremos que ocorrem durante os períodos de crise. Pois é exatamente nesses momentos que ocorrem as maiores perdas.

Damos especial ênfase à excelente performance da abordagem paramétrica lognormal para as perdas não previstas pelo VaR e, também, para a simplicidade eficiente do cálculo simples dos percentis. Contudo, a relativa performance inferior da modelagem não-paramétrica ocorreu devido à utilização de um kernel gaussiano com restrição de não-negatividade para os módulos dos log-retornos não previstos pelo VaR.

Finalmente, ressaltamos que seria interessante avaliar o critério que define um perda não prevista pelo VaR aqui apresentado em conjunção com a Teoria de Valores Extremos para modelagem das caudas pesadas das distribuições.

7 Apêndice

7.1 Gráficos das Séries Temporais

Gráfico de Série Temporal - 1:

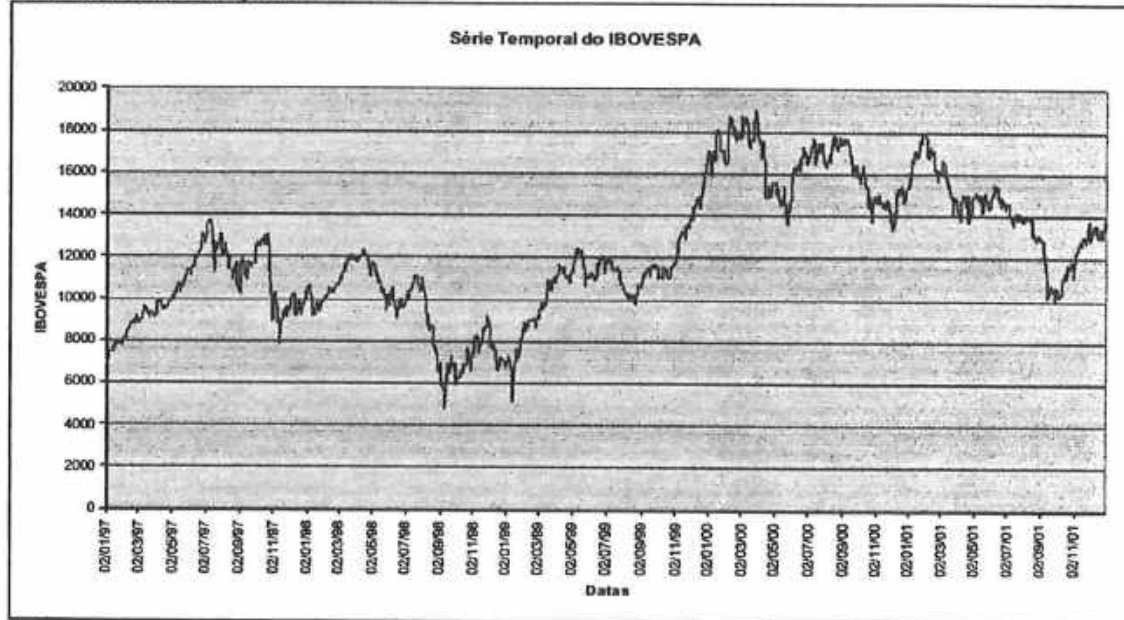


Gráfico de Série Temporal - 2:

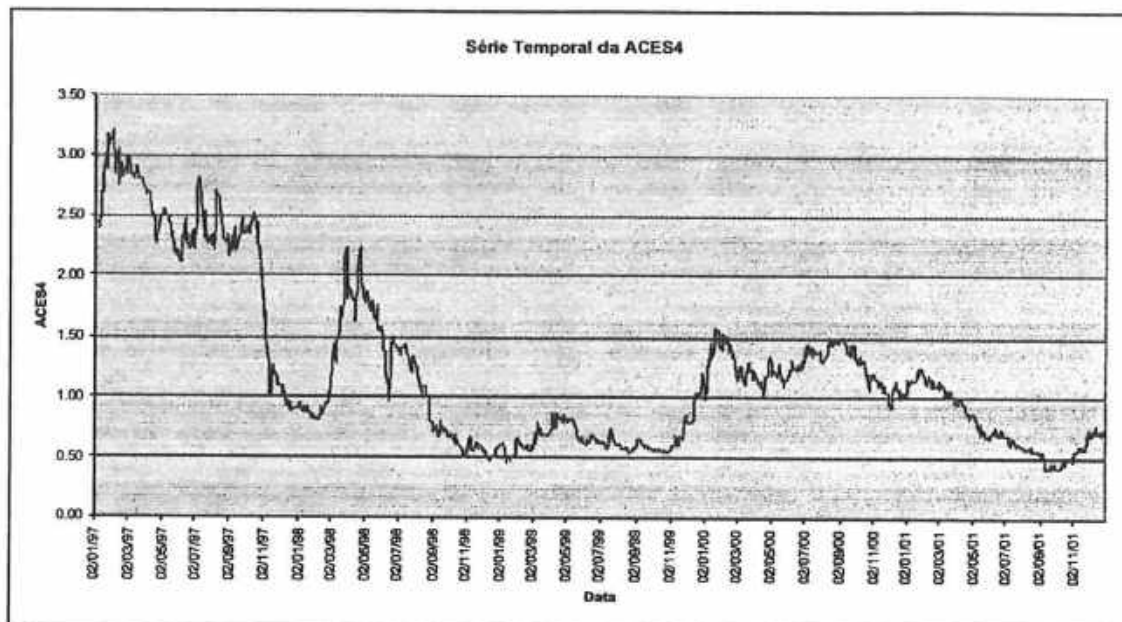


Gráfico de Série Temporal - 3:

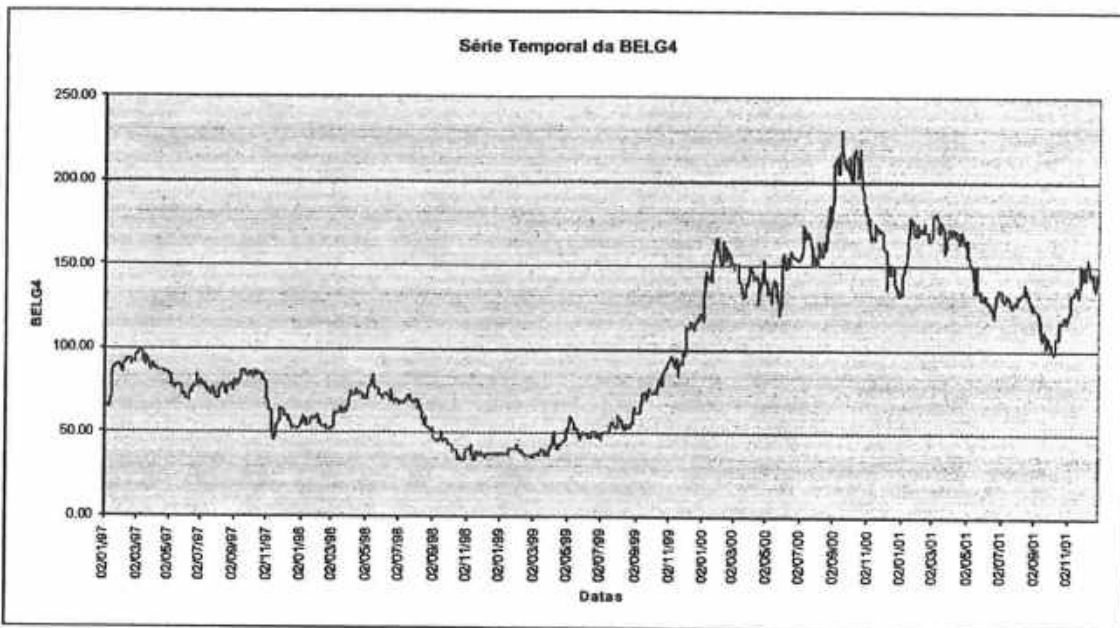


Gráfico de Série Temporal - 4:



Gráfico de Série Temporal - 5:

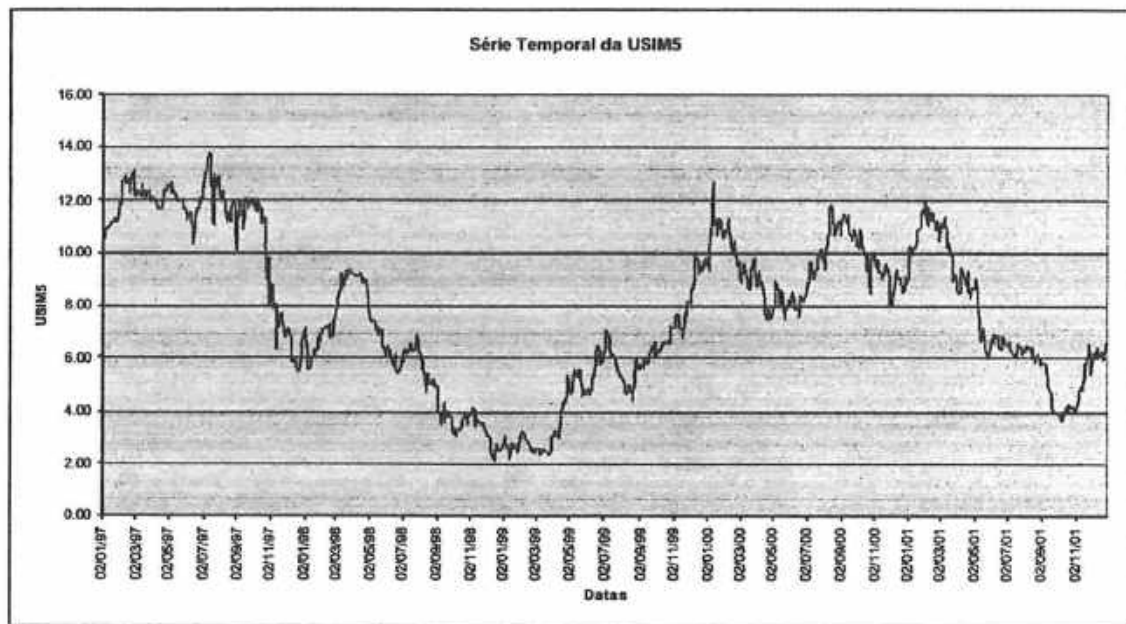


Gráfico de Série Temporal - 6:

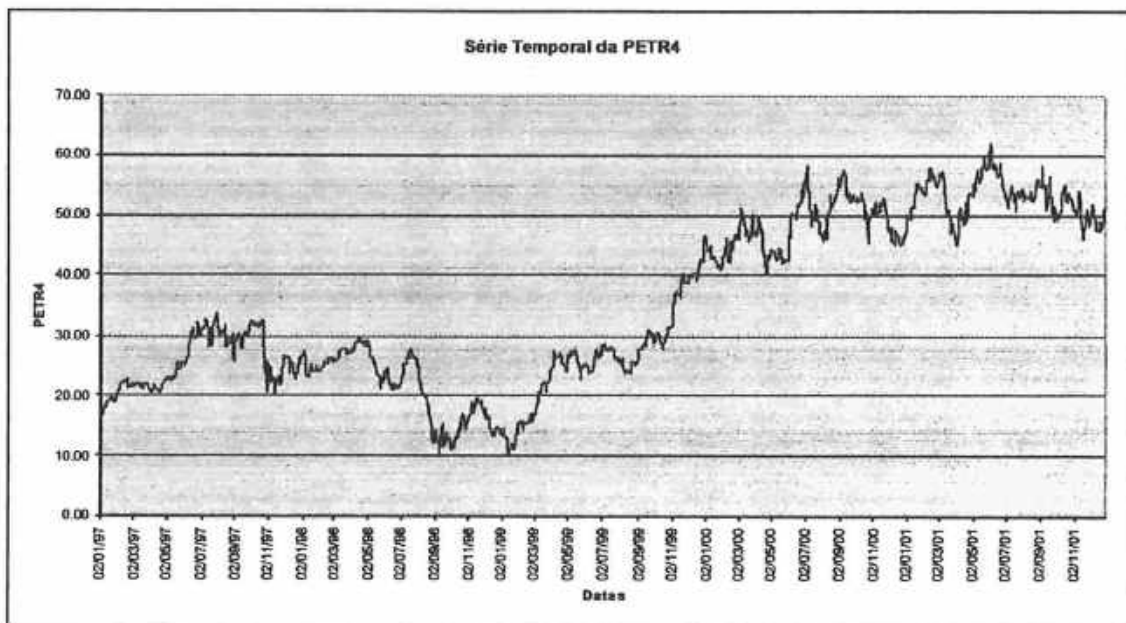


Gráfico de Série Temporal - 7:

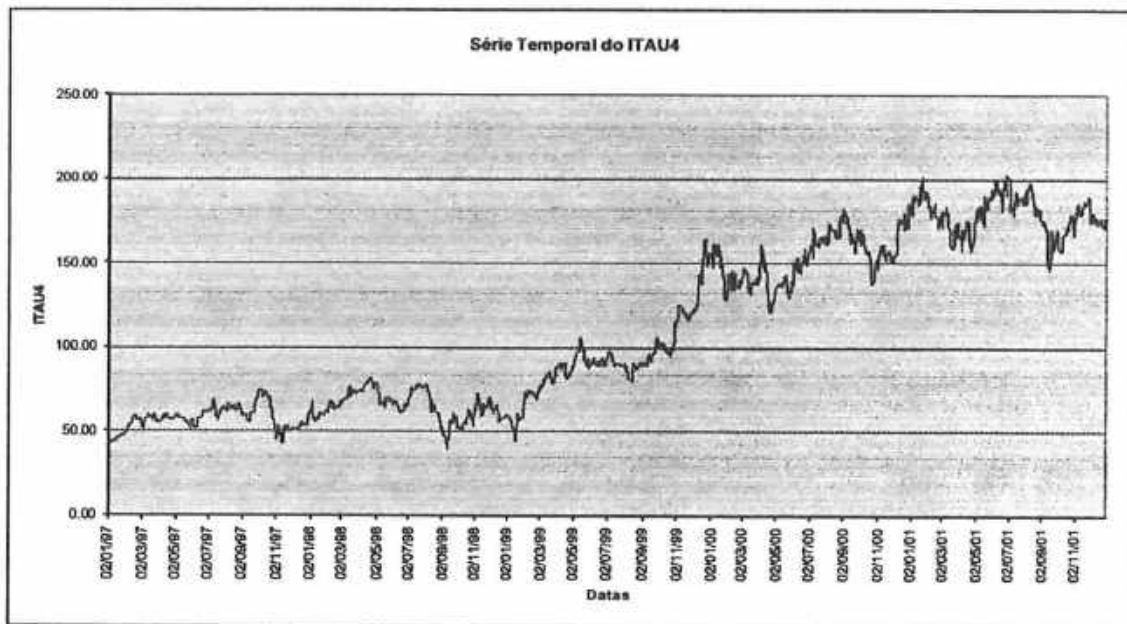


Gráfico de Série Temporal - 8:

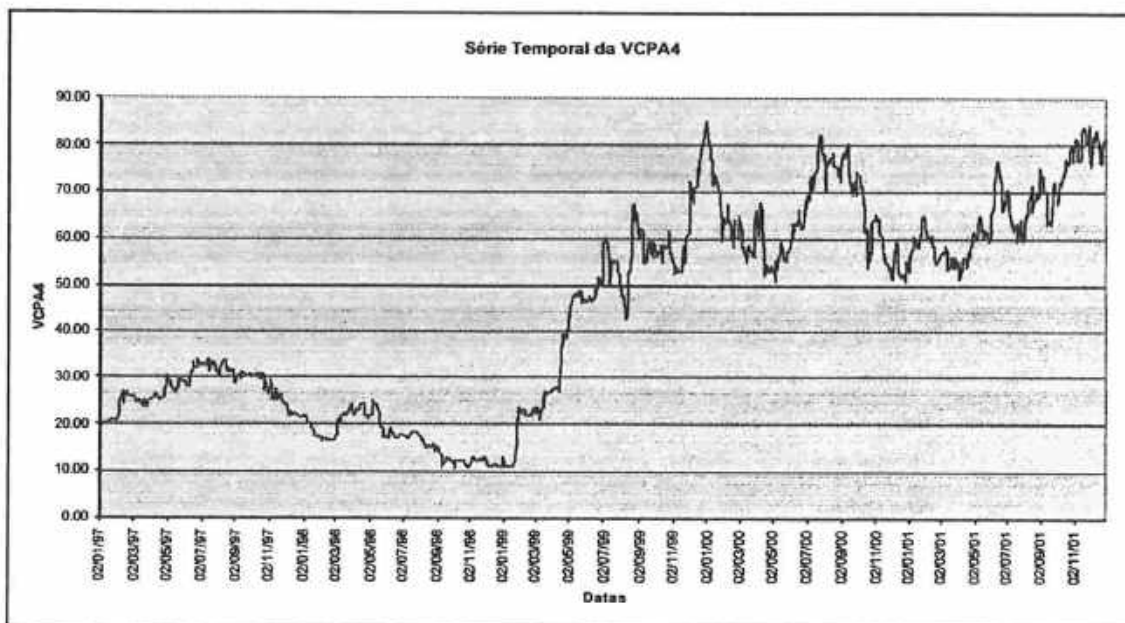
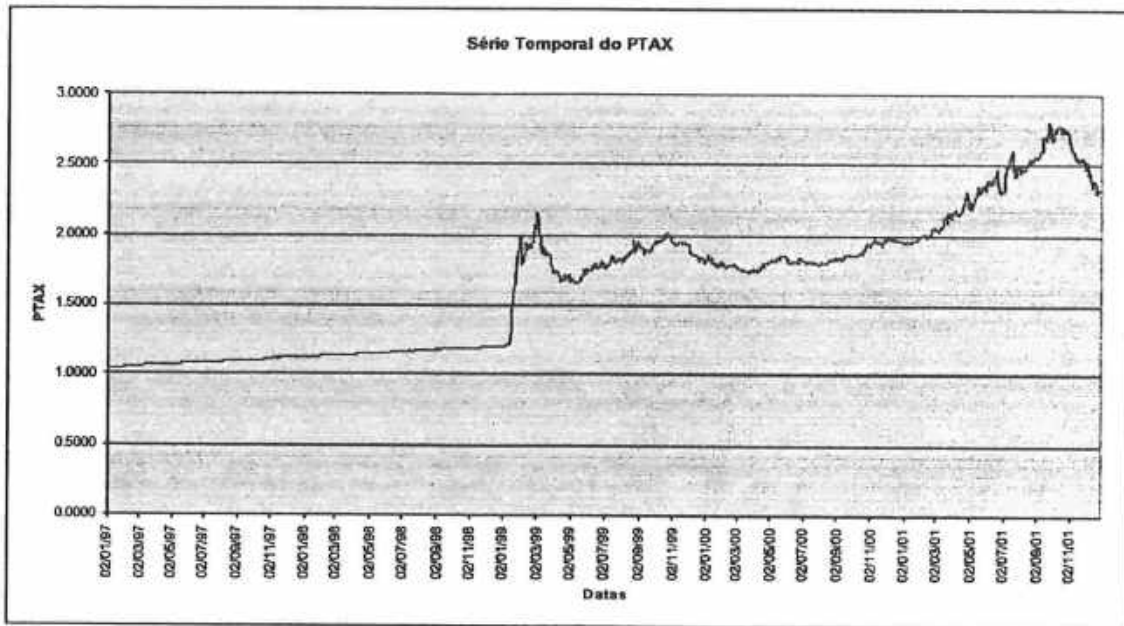


Gráfico de Série Temporal - 9:



7.2 Autocorrelações de Log-Retornos e de Quadrados de Log-Retornos

Tabela de Autocorrelações - 1: Estatísticas Ljung-Box IBOVESPA

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.040	1.784	0.182	1	0.195	42.196	0.000
2	-0.021	2.283	0.319	2	0.137	62.977	0.000
3	-0.014	2.489	0.477	3	0.189	102.890	0.000
4	-0.053	5.620	0.229	4	0.080	110.020	0.000
5	-0.055	9.036	0.108	5	0.066	114.900	0.000
6	-0.057	12.728	0.048	6	0.117	130.260	0.000
7	0.002	12.731	0.079	7	0.069	135.640	0.000
8	0.062	16.994	0.030	8	0.036	137.120	0.000
9	0.064	21.657	0.010	9	0.096	147.410	0.000
10	0.110	35.164	0.000	10	0.083	155.060	0.000
11	-0.021	35.649	0.000	11	0.026	155.830	0.000
12	-0.056	39.201	0.000	12	0.091	165.200	0.000
13	-0.024	39.839	0.000	13	0.023	165.810	0.000
14	0.014	40.053	0.000	14	0.058	169.540	0.000
15	0.048	42.691	0.000	15	0.079	176.510	0.000

Tabela de Autocorrelações - 2: Estatísticas Ljung-Box ACESITA

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob		AC	Q-Stat	Prob
1	0.043	2.089	0.148	1	0.154	26.444	0.000
2	0.031	3.154	0.207	2	0.130	45.419	0.000
3	-0.021	3.646	0.302	3	0.103	57.194	0.000
4	-0.015	3.907	0.419	4	0.041	59.061	0.000
5	-0.039	5.565	0.351	5	0.054	62.323	0.000
6	-0.002	5.570	0.473	6	0.052	65.376	0.000
7	0.004	5.592	0.588	7	0.040	67.213	0.000
8	0.053	8.700	0.368	8	-0.002	67.216	0.000
9	-0.009	8.795	0.456	9	0.069	72.482	0.000
10	0.023	9.392	0.495	10	0.021	72.987	0.000
11	-0.005	9.419	0.583	11	0.042	74.967	0.000
12	-0.040	11.239	0.509	12	0.038	76.567	0.000
13	0.033	12.434	0.492	13	0.009	76.661	0.000
14	0.030	13.445	0.492	14	0.033	77.918	0.000
15	0.065	18.148	0.255	15	0.054	81.225	0

Tabela de Autocorrelações - 3: Estatísticas Ljung-Box BELGO

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.039	1.716	0.190	1	0.101	11.306	0.001
2	0.016	1.997	0.368	2	-0.005	11.331	0.003
3	-0.036	3.459	0.326	3	-0.008	11.395	0.010
4	0.020	3.901	0.420	4	0.026	12.135	0.016
5	-0.010	4.018	0.547	5	0.043	14.251	0.014
6	-0.059	7.927	0.244	6	0.128	32.693	0.000
7	0.038	9.524	0.217	7	0.014	32.927	0.000
8	-0.020	9.985	0.266	8	0.004	32.940	0.000
9	0.012	10.155	0.338	9	-0.016	33.230	0.000
10	0.008	10.228	0.421	10	-0.015	33.473	0.000
11	0.007	10.275	0.506	11	0.028	34.327	0.000
12	0.012	10.435	0.578	12	0.038	35.949	0.000
13	-0.019	10.835	0.625	13	0.009	36.040	0.001
14	0.016	11.124	0.676	14	-0.013	36.217	0.001
15	-0.042	13.074	0.597	15	-0.044	38.382	0.001

Tabela de Autocorrelações - 4: Estatísticas Ljung-Box GERDAU

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.166	30.866	0.000	1	0.275	84.354	0.000
2	0.053	34.055	0.000	2	0.220	138.340	0.000
3	-0.036	35.504	0.000	3	0.152	164.180	0.000
4	-0.081	42.906	0.000	4	0.123	181.050	0.000
5	-0.087	51.418	0.000	5	0.131	200.260	0.000
6	0.016	51.694	0.000	6	0.134	220.340	0.000
7	0.049	54.353	0.000	7	0.159	248.520	0.000
8	0.081	61.751	0.000	8	0.093	258.280	0.000
9	-0.001	61.752	0.000	9	0.106	270.920	0.000
10	0.052	64.831	0.000	10	0.144	294.180	0.000
11	-0.053	67.940	0.000	11	0.021	294.660	0.000
12	0.015	68.185	0.000	12	0.054	297.960	0.000
13	0.006	68.226	0.000	13	0.072	303.770	0.000
14	0.031	69.343	0.000	14	0.041	305.700	0.000
15	0.016	69.648	0	15	-0.014	305.93	0

Tabela de Autocorrelações - 5: Estatísticas Ljung-Box USIMINAS

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.112	14.002	0.000	1	0.222	54.869	0.000
2	0.018	14.362	0.001	2	0.236	116.850	0.000
3	-0.016	14.660	0.002	3	0.246	184.450	0.000
4	-0.066	19.491	0.001	4	0.123	201.410	0.000
5	-0.088	28.161	0.000	5	0.103	213.180	0.000
6	-0.035	29.545	0.000	6	0.038	214.800	0.000
7	-0.007	29.594	0.000	7	0.080	222.040	0.000
8	0.050	32.432	0.000	8	0.076	228.430	0.000
9	0.096	42.683	0.000	9	0.133	248.300	0.000
10	0.078	49.599	0.000	10	0.117	263.780	0.000
11	0.005	49.624	0.000	11	0.116	279.020	0.000
12	-0.056	53.136	0.000	12	0.156	306.360	0.000
13	-0.007	53.186	0.000	13	0.075	312.660	0.000
14	0.022	53.756	0.000	14	0.069	318.020	0.000
15	-0.004	53.774	0	15	0.075	324.33	0

Tabela de Autocorrelações - 6: Estatísticas Ljung-Box PETROBRÁS

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.098	10.674	0.001	1	0.308	105.490	0.000
2	-0.025	11.396	0.003	2	0.306	209.680	0.000
3	-0.063	15.851	0.001	3	0.315	320.060	0.000
4	-0.006	15.889	0.003	4	0.184	357.740	0.000
5	-0.020	16.319	0.006	5	0.267	437.380	0.000
6	-0.028	17.221	0.009	6	0.151	462.990	0.000
7	0.024	17.888	0.012	7	0.167	494.260	0.000
8	0.039	19.561	0.012	8	0.125	511.830	0.000
9	0.074	25.742	0.002	9	0.214	563.330	0.000
10	0.069	31.080	0.001	10	0.160	592.230	0.000
11	-0.006	31.121	0.001	11	0.107	605.080	0.000
12	-0.035	32.475	0.001	12	0.201	650.760	0.000
13	0.001	32.475	0.002	13	0.095	660.870	0.000
14	0.041	34.386	0.002	14	0.137	682.090	0.000
15	-0.012	34.551	0.003	15	0.11	695.63	0

Tabela de Autocorrelações - 7: Estatísticas Ljung-Box ITAÚ

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.162	29.416	0.000	1	0.206	47.252	0.000
2	-0.044	31.601	0.000	2	0.271	129.190	0.000
3	-0.030	32.606	0.000	3	0.192	170.350	0.000
4	-0.051	35.495	0.000	4	0.069	175.600	0.000
5	-0.086	43.806	0.000	5	0.169	207.500	0.000
6	-0.038	45.452	0.000	6	0.125	225.100	0.000
7	-0.004	45.467	0.000	7	0.112	239.030	0.000
8	0.038	47.104	0.000	8	0.039	240.720	0.000
9	0.037	48.638	0.000	9	0.226	298.210	0.000
10	0.021	49.128	0.000	10	0.068	303.410	0.000
11	-0.057	52.742	0.000	11	0.197	346.920	0.000
12	-0.040	54.558	0.000	12	0.090	356.070	0.000
13	-0.029	55.506	0.000	13	0.016	356.350	0.000
14	0.012	55.678	0.000	14	0.095	366.430	0.000
15	-0.029	56.62	0	15	0.021	366.93	0

Tabela de Autocorrelações - 8: Estatísticas Ljung-Box VOTORANTIM

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.044	2.155	0.142	1	0.313	109.330	0.000
2	0.099	13.006	0.001	2	0.131	128.490	0.000
3	0.088	21.706	0.000	3	0.099	139.390	0.000
4	0.025	22.388	0.000	4	-0.016	139.670	0.000
5	-0.008	22.455	0.000	5	-0.035	141.030	0.000
6	-0.021	22.960	0.001	6	-0.006	141.080	0.000
7	-0.038	24.540	0.001	7	-0.035	142.430	0.000
8	-0.035	25.890	0.001	8	-0.038	144.020	0.000
9	0.043	27.928	0.001	9	-0.016	144.300	0.000
10	-0.023	28.514	0.001	10	-0.032	145.420	0.000
11	-0.042	30.541	0.001	11	-0.027	146.230	0.000
12	0.031	31.645	0.002	12	-0.022	146.800	0.000
13	-0.069	37.063	0.000	13	-0.020	147.260	0.000
14	0.051	39.989	0.000	14	0.005	147.290	0.000
15	-0.027	40.819	0	15	0.078	154.22	0

Tabela de Autocorrelações - 9: Estatísticas Ljung-Box PTAX

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.184	37.881	0.000	1	0.116	14.957	0.000
2	0.121	54.165	0.000	2	0.356	156.550	0.000
3	0.139	75.822	0.000	3	0.129	175.080	0.000
4	0.087	84.294	0.000	4	0.114	189.570	0.000
5	-0.059	88.212	0.000	5	0.334	314.060	0.000
6	0.158	116.250	0.000	6	0.372	468.890	0.000
7	0.060	120.230	0.000	7	0.097	479.480	0.000
8	0.121	136.650	0.000	8	0.222	534.830	0.000
9	0.016	136.930	0.000	9	0.044	537.030	0.000
10	0.021	137.450	0.000	10	0.095	547.240	0.000
11	-0.036	138.910	0.000	11	0.274	631.800	0.000
12	-0.038	140.570	0.000	12	0.024	632.440	0.000
13	-0.047	143.060	0.000	13	0.213	683.480	0.000
14	0.055	146.490	0.000	14	0.009	683.570	0.000
15	0.074	152.67	0	15	0.042	685.54	0

Tabela de Autocorrelações - 10: Estatísticas Ljung-Box CARTEIRA

Auto-Correlações dos Log-retornos				Auto-Correlações dos Quadrados dos Log-Retornos			
LAG	AC	Q-Stat	Prob	LAG	AC	Q-Stat	Prob
1	0.041	1.896	0.169	1	0.195	42.278	0.000
2	-0.021	2.379	0.304	2	0.137	63.174	0.000
3	-0.014	2.583	0.460	3	0.189	103.140	0.000
4	-0.053	5.681	0.224	4	0.080	110.300	0.000
5	-0.055	9.091	0.106	5	0.066	115.210	0.000
6	-0.057	12.757	0.047	6	0.117	130.630	0.000
7	0.002	12.761	0.078	7	0.070	136.070	0.000
8	0.062	17.030	0.030	8	0.036	137.540	0.000
9	0.065	21.725	0.010	9	0.096	147.940	0.000
10	0.110	35.303	0.000	10	0.083	155.690	0.000
11	-0.021	35.781	0.000	11	0.026	156.470	0.000
12	-0.056	39.313	0.000	12	0.092	166.000	0.000
13	-0.024	39.941	0.000	13	0.023	166.600	0.000
14	0.014	40.158	0.000	14	0.058	170.380	0.000
15	0.048	42.716	0	15	0.078	177.33	0

7.3 Estacionariedade dos Log-Retornos

Tabela de Estacionariedade - 1: Augumented Dickey-Fuller IBOVESPA

ADF Test Statistic	-16.43789	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(BOVESPA)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:42				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
BOVESPA(-1)	-1.101671	0.06702	-16.43789	0
D(BOVESPA(-1))	0.138037	0.05916	2.333273	0.0198
D(BOVESPA(-2))	0.113514	0.051106	2.221169	0.0265
D(BOVESPA(-3))	0.10242	0.041694	2.456456	0.0142
D(BOVESPA(-4))	0.051927	0.030098	1.725256	0.0848
C	0.000674	0.000861	0.783151	0.4337
R-squared	0.483619	Mean dependent var	7.24E-06	
Adjusted R-squared	0.481272	S.D. dependent var	0.039691	
S.E. of regression	0.028587	Akaike info criterion	-4.266331	
Sum squared resid	0.898928	Schwarz criterion	-4.23916	
Log likelihood	2365.281	F-statistic	206.0421	
Durbin-Watson stat	2.005768	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 2: Augumented Dickey-Fuller BELGO

ADF Test Statistic	-15.4466	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(ACES4)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:43				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
ACES4(-1)	-0.99924	0.064689	-15.44664	0
D(ACES4(-1))	0.041095	0.057805	0.710916	0.4773
D(ACES4(-2))	0.070799	0.050213	1.40998	0.1588
D(ACES4(-3))	0.048876	0.041731	1.171223	0.2418
D(ACES4(-4))	0.036041	0.03014	1.195817	0.232
C	-0.00113	0.001241	-0.912939	0.3615
R-squared	0.479874	Mean dependent var	3.78E-06	
Adjusted R-squared	0.477509	S.D. dependent var	0.056996	
S.E. of regression	0.041199	Akaike info criterion	-3.53539	
Sum squared resid	1.867097	Schwarz criterion	-3.50822	
Log likelihood	1961.073	F-statistic	202.9742	
Durbin-Watson stat	1.999433	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 3: Augumented Dickey-Fuller BELGO

ADF Test Statistic	-14.85812	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(BELG4)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:45				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
BELG4(-1)	-0.970952	0.065348	-14.85812	0
D(BELG4(-1))	0.011347	0.058604	0.193621	0.8465
D(BELG4(-2))	0.026406	0.050567	0.522189	0.6016
D(BELG4(-3))	-0.011898	0.041787	-0.284739	0.7759
D(BELG4(-4))	0.010756	0.030143	0.356839	0.7213
C	0.000654	0.000993	0.658306	0.5105
R-squared	0.481527	Mean dependent var	6.47E-06	
Adjusted R-squared	0.47917	S.D. dependent var	0.04572	
S.E. of regression	0.032995	Akaike info criterion	-3.9795	
Sum squared resid	1.197546	Schwarz criterion	-3.95233	
Log likelihood	2206.665	F-statistic	204.323	
Durbin-Watson stat	2.001248	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 4: Augumented Dickey-Fuller GERDAU

ADF Test Statistic	-16.38358	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(GGBR4)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:44				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
GGBR4(-1)	-0.968529	0.059116	-16.38358	0
D(GGBR4(-1))	0.125065	0.052427	2.385495	0.0172
D(GGBR4(-2))	0.159603	0.045968	3.472017	0.0005
D(GGBR4(-3))	0.123276	0.039254	3.140453	0.0017
D(GGBR4(-4))	0.061539	0.030103	2.044263	0.0412
C	0.001211	0.001036	1.169143	0.2426
R-squared	0.422981	Mean dependent var	6.51E-05	
Adjusted R-squared	0.420358	S.D. dependent var	0.045144	
S.E. of regression	0.03437	Akaike info criterion	-3.89784	
Sum squared resid	1.299441	Schwarz criterion	-3.87067	
Log likelihood	2161.508	F-statistic	161.2698	
Durbin-Watson stat	1.992949	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 5: Augumented Dickey-Fuller USIMINAS

ADF Test Statistic	-16.55588	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(USIM5)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:45				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
USIM5(-1)	-1.02812	0.0621	-16.55588	0
D(USIM5(-1))	0.133897	0.055061	2.431786	0.0152
D(USIM5(-2))	0.141084	0.048103	2.932954	0.0034
D(USIM5(-3))	0.129264	0.040201	3.215456	0.0013
D(USIM5(-4))	0.074732	0.030066	2.48556	0.0131
C	-0.000466	0.001122	-0.415078	0.6782
R-squared	0.449408	Mean dependent var	4.20E-06	
Adjusted R-squared	0.446906	S.D. dependent var	0.050156	
S.E. of regression	0.037301	Akaike info criterion	-3.73417	
Sum squared resid	1.530515	Schwarz criterion	-3.707	
Log likelihood	2070.998	F-statistic	179.5702	
Durbin-Watson stat	2.002146	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 6: Augumented Dickey-Fuller PETROBRÁS

ADF Test Statistic	-15.5464	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(PETR4)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:46				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
PETR4(-1)	-1.00673	0.064757	-15.54641	0
D(PETR4(-1))	0.10504	0.057566	1.824672	0.0683
D(PETR4(-2))	0.074204	0.049296	1.50527	0.1325
D(PETR4(-3))	0.01551	0.040554	0.382453	0.7022
D(PETR4(-4))	0.023336	0.030135	0.774381	0.4389
C	0.001017	0.001005	1.011777	0.3119
R-squared	0.454594	Mean dependent var	2.84E-05	
Adjusted R-squared	0.452115	S.D. dependent var	0.045057	
S.E. of regression	0.033351	Akaike info criterion	-3.95807	
Sum squared resid	1.223495	Schwarz criterion	-3.9309	
Log likelihood	2194.811	F-statistic	183.3695	
Durbin-Watson stat	2.001041	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 7: Augumented Dickey-Fuller ITAU

ADF Test Statistic	-16.59895	1% Critical Value*	-3.439
		5% Critical Value	-2.8646
		10% Critical Value	-2.5684
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.			
Augmented Dickey-Fuller Test Equation			
Dependent Variable: D(ITAU4)			
Method: Least Squares			
Date: 01/20/02 Time: 14:46			
Sample(adjusted): 6 1111			
Included observations: 1106 after adjusting endpoints			
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.
ITAU4(-1)	-1.022621	0.061608	-16.59895 0
D(ITAU4(-1))	0.192234	0.05457	3.522729 0.0004
D(ITAU4(-2))	0.118568	0.047495	2.496427 0.0127
D(ITAU4(-3))	0.110477	0.039038	2.830019 0.0047
D(ITAU4(-4))	0.074411	0.030105	2.471682 0.0136
C	0.001418	0.000886	1.600063 0.1099
R-squared	0.425858	Mean dependent var	4.48E-05
Adjusted R-squared	0.423249	S.D. dependent var	0.038642
S.E. of regression	0.029346	Akaike info criterion	-4.21388
Sum squared resid	0.947336	Schwarz criterion	-4.18671
Log likelihood	2336.275	F-statistic	163.1807
Durbin-Watson stat	2.001087	Prob(F-statistic)	0

Tabela de Estacionariedade - 8: Augumented Dickey-Fuller VOTORANTIM

ADF Test Statistic	-13.5781	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(VCPA4)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:47				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
VCPA4(-1)	-0.80426	0.059232	-13.57812	0
D(VCPA4(-1))	-0.16453	0.054689	-3.008454	0.0027
D(VCPA4(-2))	-0.06927	0.049472	-1.400085	0.1618
D(VCPA4(-3))	0.015457	0.04194	0.368543	0.7125
D(VCPA4(-4))	0.02574	0.030091	0.855405	0.3925
C	0.000921	0.000995	0.925504	0.3549
R-squared	0.486639	Mean dependent var	3.12E-05	
Adjusted R-squared	0.484306	S.D. dependent var	0.045973	
S.E. of regression	0.033014	Akaike info criterion	-3.97834	
Sum squared resid	1.198943	Schwarz criterion	-3.95117	
Log likelihood	2206.021	F-statistic	208.5485	
Durbin-Watson stat	2.000986	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 9: Augumented Dickey-Fuller PTAX

ADF Test Statistic	-13.6271	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(PTAX)				
Method: Least Squares				
Date: 01/20/02 Time: 14:47				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PTAX(-1)	-0.70602	0.05181	-13.62712	0
D(PTAX(-1))	-0.13561	0.04939	-2.745613	0.0061
D(PTAX(-2))	-0.05601	0.045454	-1.232206	0.2181
D(PTAX(-3))	0.052588	0.039289	1.338513	0.181
D(PTAX(-4))	0.108162	0.030062	3.597919	0.0003
C	0.000508	0.000264	1.92364	0.0547
R-squared	0.426831	Mean dependent var	4.52E-06	
Adjusted R-squared	0.424226	S.D. dependent var	0.011459	
S.E. of regression	0.008695	Akaike info criterion	-6.64667	
Sum squared resid	0.083168	Schwarz criterion	-6.6195	
Log likelihood	3681.608	F-statistic	163.8311	
Durbin-Watson stat	1.96317	Prob(F-statistic)	0	

Tabela de Estacionariedade - 10: Augmented Dickey-Fuller CARTEIRA

ADF Test Statistic	-14.8981	1% Critical Value*	-3.439	
		5% Critical Value	-2.8646	
		10% Critical Value	-2.5684	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(CARTEIRA)				
Method: Least Squares				
Date: 02/16/02 Time: 18:19				
Sample(adjusted): 6 1111				
Included observations: 1106 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic Prob.	
CARTEIRA(-1)	-0.87624	0.058815	-14.89806	0
D(CARTEIRA(-1))	0.016221	0.053297	0.304349	0.7609
D(CARTEIRA(-2))	0.038058	0.047075	0.808445	4.19E-01
D(CARTEIRA(-3))	0.047137	0.039732	1.186347	0.2357
D(CARTEIRA(-4))	0.04171	0.030134	1.384151	1.67E-01
C	0.000501	0.000544	0.920892	0.3573
R-squared	0.429375	Mean dependent var	1.90E-05	
Adjusted R-squared	0.426781	S.D. dependent var	0.023863	
S.E. of regression	0.018067	Akaike info criterion	-5.18408	
Sum squared resid	0.359048	Schwarz criterion	-5.15691	
Log likelihood	2872.795	F-statistic	165.5423	
Durbin-Watson stat	1.999537	Prob(F-statistic)	0	

7.4 Observações Históricas das Distribuições dos Log-Retornos

Gráfico Distribuição - 1: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos do IBOVESPA

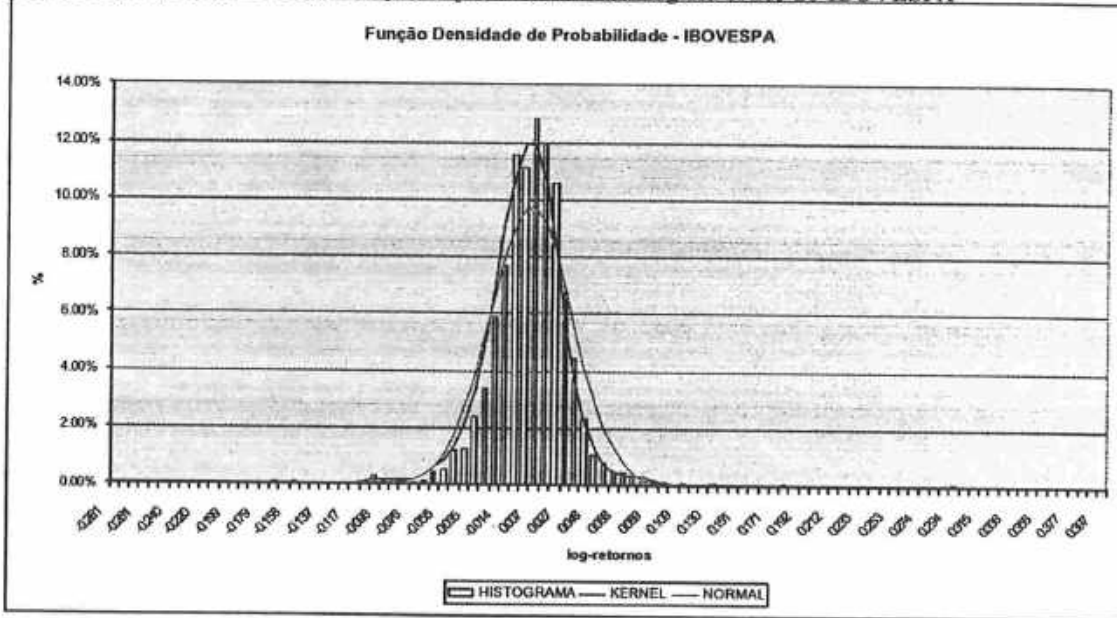


Gráfico Distribuição - 2: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos da ACESITA

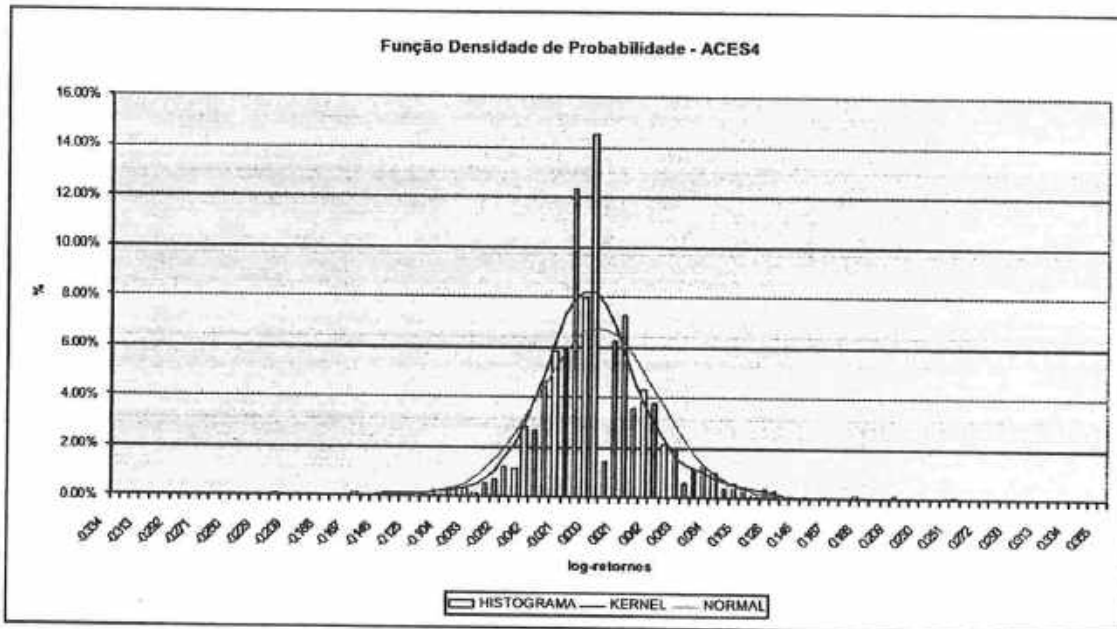


Gráfico Distribuição - 3: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos da BELGO

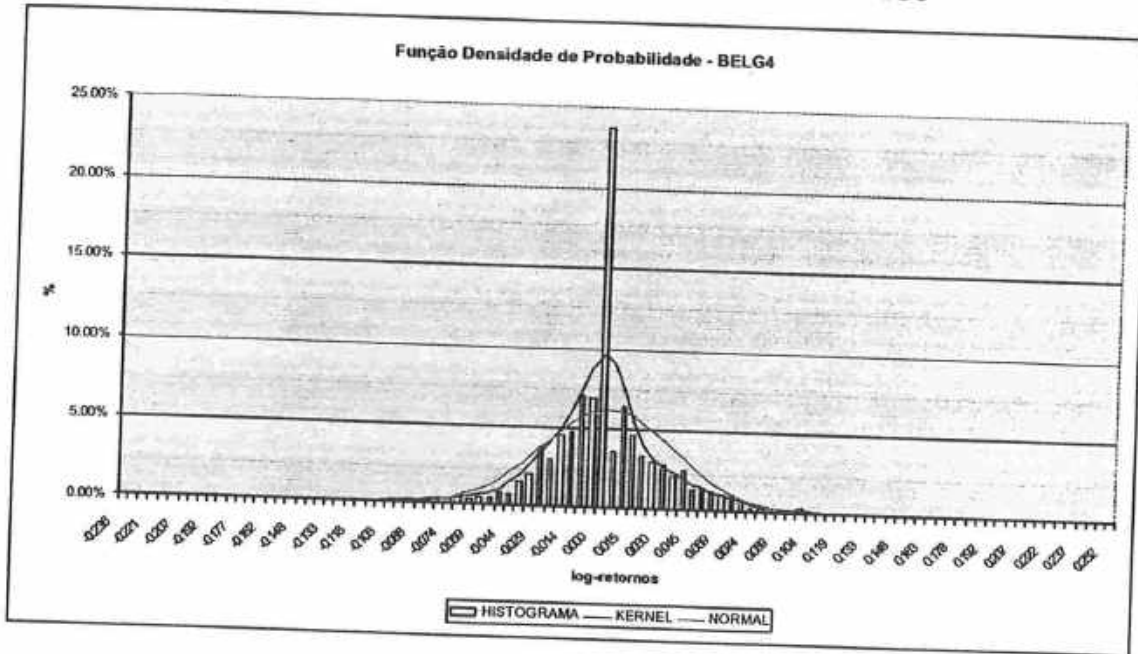


Gráfico Distribuição - 4: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos da GERDAU

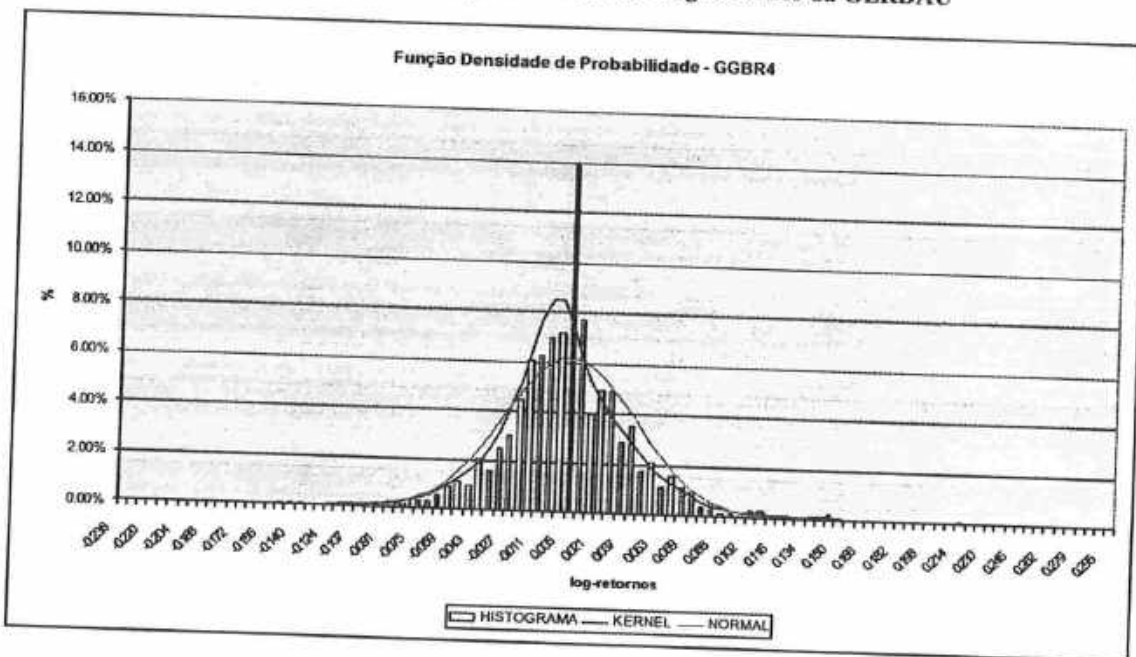


Gráfico Distribuição - 5: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos da USIMINAS

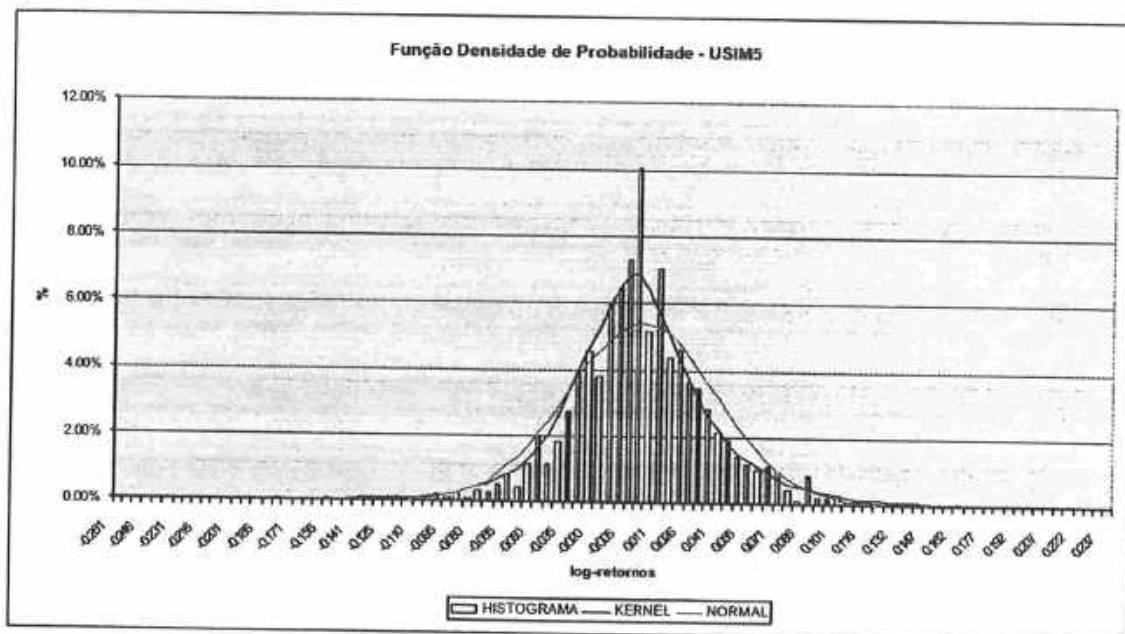


Gráfico Distribuição - 6: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos da PETROBRÁS

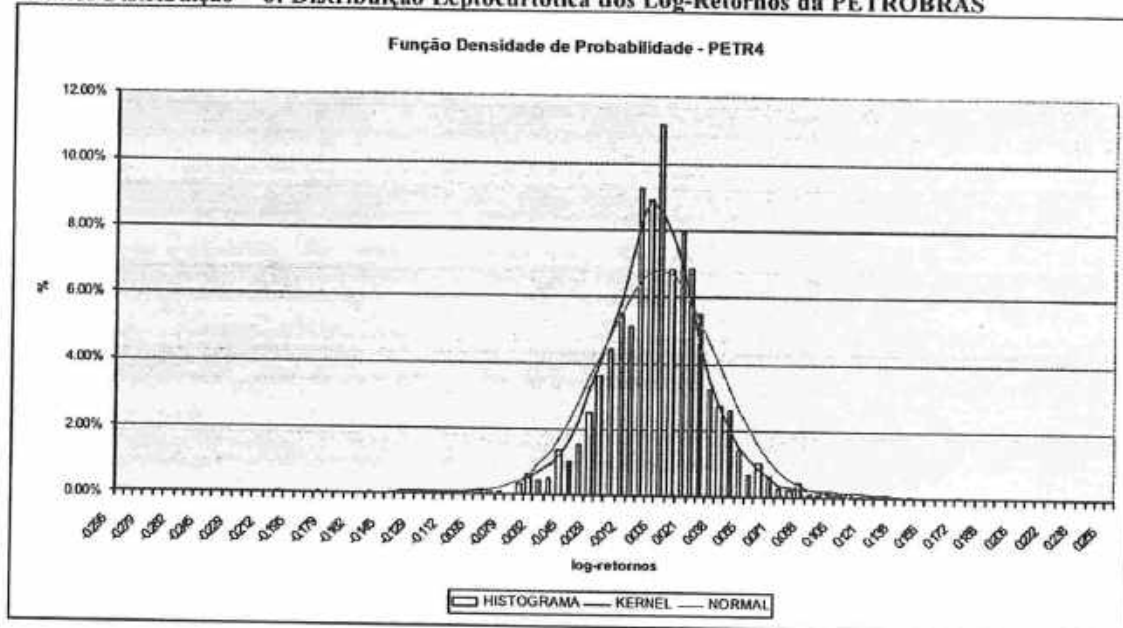


Gráfico Distribuição - 7: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos do ITAÚ

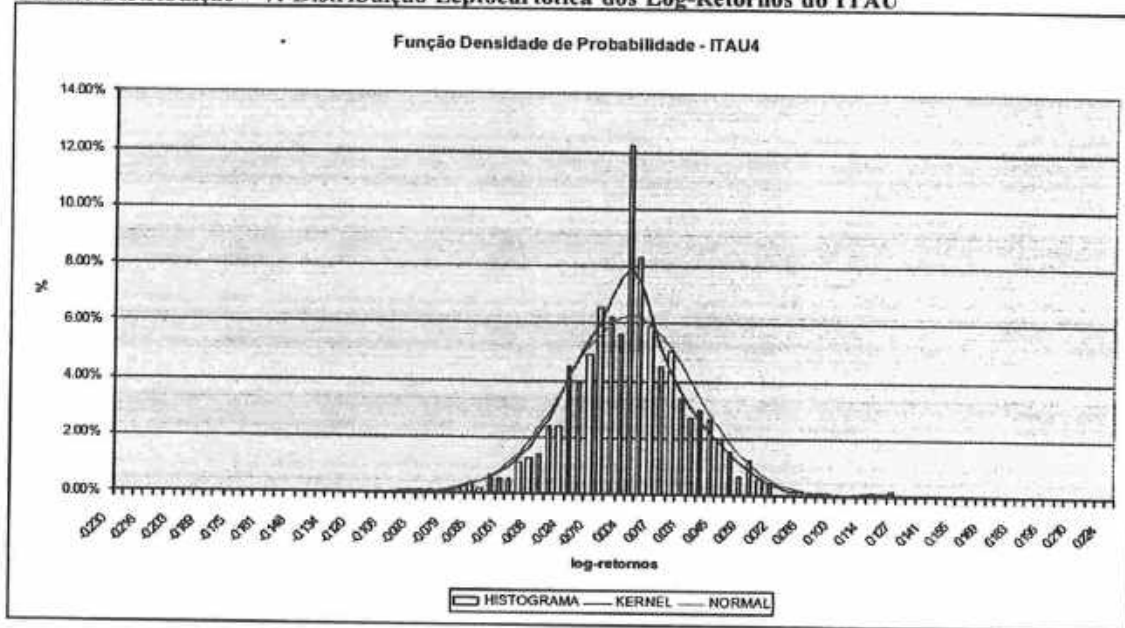


Gráfico Distribuição - 8: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos da VOTORANTIM

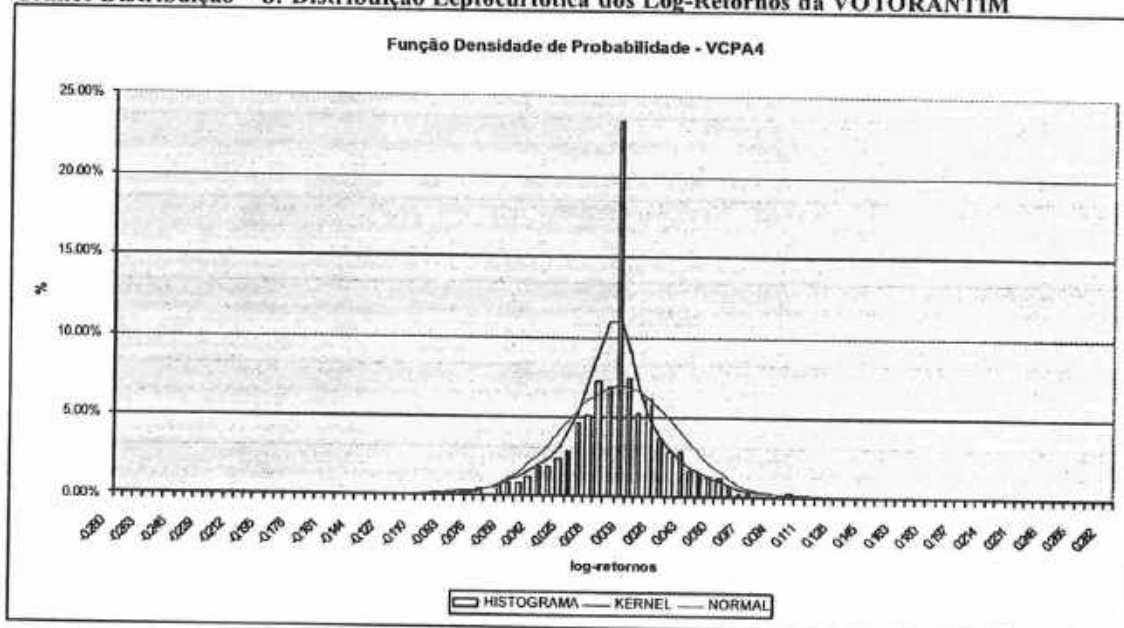


Gráfico Distribuição - 9: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos do PTAX

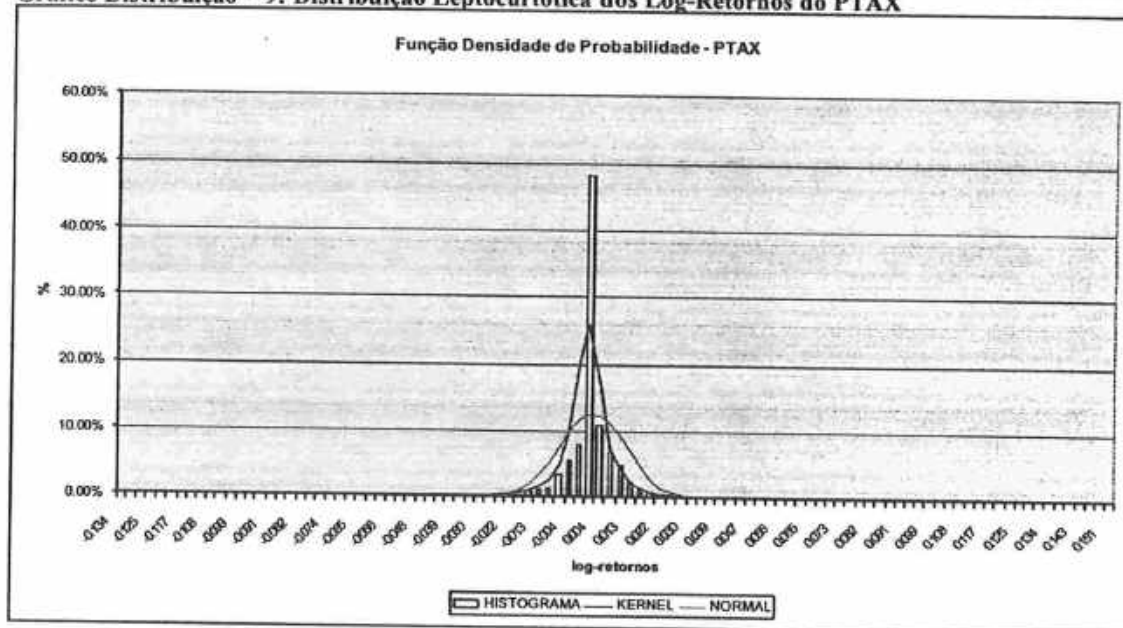
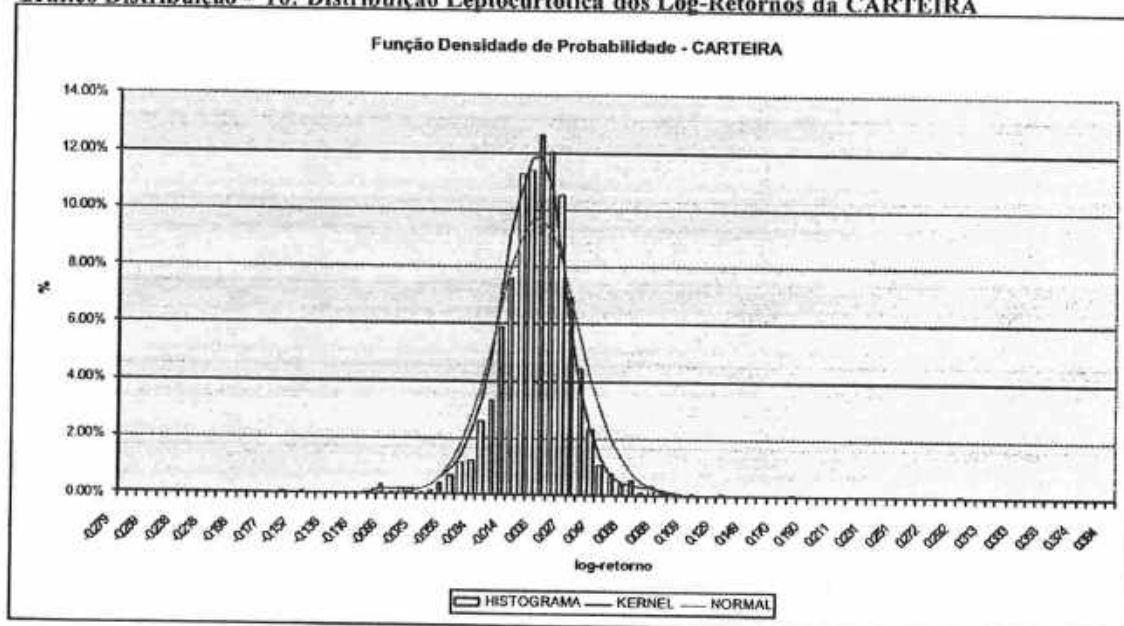


Gráfico Distribuição - 10: Distribuição Leptocurtótica dos Log-Retornos da CARTEIRA



Referências Bibliográficas

- [1] Bollerslev, T. (1986). "Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, 51:307-327.
- [2] Bollerslev, T., Chou, R. Y. and Kroner, K. F. (1992). "Arch Modeling in Finance: a Review of The Theory and Empirical Evidence". *Journal of Econometrics*, 52:5-59.
- [3] Bowman, Adrian W. and Azzalini, Adelchi. (1997). *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*. Clarendon Press – Oxford.
- [4] Campbell, Y.; Lo, A. W. and MacKinlay, A. C.. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- [5] Engle, R. F.. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation". *Econometrica*, 50:987-1007.
- [6] Hamilton, James D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- [7] Hull, John C. (2000). *Options, Futures & Other Derivatives*. Prentice-Hall.
- [8] Jorion, Philippe. (1998). *Value at Risk*. BM&F.
- [9] Kennedy, Peter. (1998). *A Guide to Econometrics*. MIT Press.
- [10] Mills, Terence C. (1993). *The Econometric Modeling of Financial Time Series*. Cambridge University Press.
- [11] Mood, M. , Graybill, F. A. and Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill.
- [12] Nelson, Daniel B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". *Econometrica* 59:347-70.
- [13] Morgan, J. P. and Reuters. (1996). *RiskMetrics Technical Document*.
- [14] Pindyck, R. S. and Rubinfeld, D. (1998). *Econometric Models and Economic Forecasts*. McGraw-Hill.
- [15] Ross, Sheldon R. (2000). *Introduction to Probability Models*. Harcourt Academic Press.
- [16] Sharpe, William; Alexander, Gordon J. and Bailey, Jeffrey V.(1998) *Investments*. Prentice Hall.
- [17] Vasconcellos, Marco A. S., Alves, Denisard et al. (1999). *Manual de Econometria*. Editora Atlas.
- [18] Venables, W. N. and Ripley, B. D. (1999). *Modern Applied Statistics with S-Plus*. Springer.
- [19] Ziegelmann, F. A. (1996). "Modelos de Variabilidade Estocástica e Deformação Temporal". *Dissertação de Mestrado, USP/IME*.