

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE “MODELAGEM MATEMÁTICA EM
FINANÇAS”

Aplicação de Metodologias Spline na Estrutura a Termo para o Mercado Brasileiro

Héctor Ramírez Mateos

Nelson Kuhl

São Paulo
2002

Título Aplicação de Metodologias Spline na
Estrutura a Termo para o Mercado Brasileiro

Autor Héctor Ramírez Mateos

Dissertação apresentada à
Faculdade de Economia,
Administração e Contabilidade e ao
Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de
Mestre.

Orientador Nelson Kuhl

São Paulo
2002

Agradecimentos

Primeiramente em Espanhol

Después de una larga jornada de trabajo e innumerable número de versiones me gustaría agradecer a las siguientes personas, porque forman gran parte de mi vida. A mis padres; Gracias por el apoyo incondicional (y teledirigido) que en todo momento me alentaron a continuar aun cuando estaba cansado y sin fuerzas. Pa, gracias por el gran ejemplo que eres y siempre has sido, tu honestidad e iniciativa que siempre te han caracterizado. Ma, por siempre guiarme en la perene búsqueda del equilibrio, a ser responsable y a tener la cabeza junto con el corazón. A mis hermanos Sandy, German y la Flaca que aun lejos en distancia siempre estan cerca de mi.

A Nallely, a mi compañera y gran amor, por esperarme dos largos años. Por aguantar mis malhumores y tranquilizar mis desesperos. Por dejarme ir atras de mis sueños por locos que sean, siempre, siempre conmigo.

Por dejar todo atras y venir conmigo a un lugar totalmente desconocido, y por todo lo que representas para mi.

A Jaime Mackern de JP Morgan por impulsar mi carrera profesional y por la confianza que deposito desde el comienzo de mi carrera profesional.

Agora em Português:

A Nelson por me ajudar e aceitar o desafio de orientar a um Mexicano, pela paciência em cada uma das tantas reuniões que tivemos nas quais aprendi muito. Por revisar todas as versões deste trabalho e sempre de bom humor.

A Humberto Dantas que ajudou na tradução do português para português, corrigiu as minhas frases inteligíveis (e em espanhol) em um português legível. Quem nunca desistiu ainda que o Scientific word parou de funcionar, caiu ou o sistema perdeu informação muitas mas muitas vezes.

Em fim Obrigado a Todos!

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Revisao Bibliográfica	2
1.2	Porque tentar modelar a estrutura a termo?	2
1.2.1	Interpolação Vs Aproximação	3
1.3	Quão bons sao os modelos de taxas de juros?	3
2	Conceitos Básicos	5
2.1	Taxas de Juros	5
2.1.1	Conceituação e comportamento da estrutura a termo	7
2.1.2	Taxas de Juros Fixas e Flutuantes	8
2.2	Estimativa da curva a termo	9
2.3	Conceito de plenitude e eficiencia de mercado	10
2.4	Hipótese de Expectativas	10
2.5	Condição de não arbitragem	11
2.6	Incerteza	13
2.6.1	Ausência de oportunidades de arbitragem na incerteza	15
2.7	Precificação, formulas e terminologia	16
2.7.1	Valor presente de um preco no seguinte periodo	18
2.7.2	Valor presente com ajuste na media do preço	19
2.7.3	Taxas de desconto e spot	22
2.7.4	Curva Par	24
2.7.5	Taxas Forwards	26
3	Metodologias	30
3.1	Polinômios e interpolação	34
3.1.1	Teoremas de erro em uma aproximação polinomial	36
3.2	Splines	37
3.2.1	Metodologia de splines aplicada por Mc Culloch	38
3.2.2	Notação dos Splines	41
3.3	Interpolação linear por partes de Splines	42
3.4	Interpolação Cúbica por Partes - Spline	44
3.5	B- Splines (Basis Splines)	46
3.5.1	Propriedades dos B-Splines	48
3.5.2	Teorema de Curry e Schorenberg	49
3.6	Minimos quadrados	50
3.6.1	Interpolação com Splines	52
3.7	"New Knot"	53
3.7.1	A distância de uma função contínua	53
3.7.2	Posicionamento dos Nós	55

3.8 Aproximação Cúbica com Suavização (Cubic Smoothing Splines)	58
3.9 Aproximação Cúbica com Suavização e Tolerancia	59
4 Metodologias e Resultados	61
4.1 Foco no mercado Brasileiro	61
4.2 Liquidez	62
4.2.1 Teoria de preferência de Liquidez	62
4.2.2 Mercado de Derivativos	63
4.2.3 Segmentação do Mercado	63
4.3 Critérios Gerais do trabalho	64
4.4 Metodologia de Comparação entre modelos de estrutura a termo	65
4.4.1 Seleção do Método	66
4.4.2 Critérios Analíticos	67
4.4.3 Reamostragem	67
4.4.4 Cross Validation	68
4.4.5 Critério Adotado	69
4.4.6 Fórmula de Erro Local	69
4.4.7 Fórmula de Erro Geral	70
4.5 Dados	71
4.6 Resultados	71
4.6.1 Erro quadrático Medio Local	71
4.6.1 Erro quadrático Medio Geral	73
5 Conclusão	81
6 Bibliografia	83

1. Introdução

O foco principal deste trabalho está concentrado na adequação de alguns métodos empíricos, partindo de um preceito de cálculo ex-ante, para a estimativa da estrutura a termo das taxas de juros, considerando a utilização e a análise do desempenho de uma série de modelos. Normalmente os métodos empíricos diferem, sobretudo na qualidade do ajuste da curva - o que chamaremos de parcimoniosos. Com a finalidade de criar uma estimativa da curva de juros, algumas mudanças e spreads fornecerão informações de curto e de longo prazos para complementarem pontos ausentes da curva. Ressalva-se que a estrutura a termo terá mudanças no período de estimação, determinando o grau de erro possível, uma vez que no curto prazo é muito mais líquido e que as mudanças na curva têm uma natureza comum (ou seja, causam impacto em mais de um período), afetando papéis similares com a mesma magnitude.

Desta maneira, o principal objetivo deste estudo é aplicar metodologias ex-ante para mensurar, com uma relativa exatidão, o desempenho de três diferentes tipos de modelos de estimativa da estrutura a termo, sendo que cada um destes modelos contém três variações, totalizando nove testes. Estas metodologias poderão ser consideradas de “não arbitragem” ou de equilíbrio parcial, onde a condição de não arbitragem, empiricamente, determina: a) a forma da estrutura a termo a partir do preço; b) a data dos títulos individuais. Os três métodos e suas variações utilizam Splines Cúbicos para aproximar a estrutura a termo, variando na escolha da função em que é usado o spline e o grau de liberdade das informações. Os métodos splines foram aplicados em instrumentos sem cupom, assim seu desempenho pode ser observado diretamente nos diferentes pontos da curva. A análise do desempenho foi realizada em uma seqüência de datas ordenadas pela: data de transação, data do vencimento e estimativa da projeção.

Para o cumprimento destes objetivos este trabalho foi dividido em cinco capítulos, incluindo a parte introdutória, que além de descrever resumidamente o intuito desta dissertação, faz uma breve revisão bibliográfica e justifica a escolha das

metodologias utilizadas. O Capítulo 2 consiste em uma revisão de conceitos, tanto econômicos quanto financeiros. Serão apresentadas as diferenças entre os tipos de taxas, as relações entre elas e os pressupostos sobre os quais estará baseado este trabalho. O Capítulo 3 contém uma breve explicação das metodologias comumente aplicadas. Além disso, os splines e suas variáveis são detalhadamente expostos junto a uma breve compilação matemática sobre splines e polinômios em geral. O Capítulo 4 apresenta as metodologias e os dados utilizados para testar os diferentes modelos analisados. Os resultados desses testes são exibidos na segunda parte desse capítulo. As conclusões estão no Capítulo 5, seguidas pela bibliografia utilizada.

1.1 Revisão Bibliográfica

A modelagem de estrutura a termo das taxas de juros tem sido objeto de uma grande quantidade de livros e artigos em finanças, caracterizando-a em função da data de vencimento da informação sobre eventos futuros da taxa de juros e com efeitos diretos sobre a economia real. No mundo financeiro, a estrutura a termo é crucial para a valoração de dívidas em períodos futuros e derivativos de renda fixa. Ainda que muitos modelos impliquem em formas particulares para a estrutura a termo, grande parte da literatura tem sido dedicada a modelos que ajustam a informação para demonstrar as relações entre os preços e as taxas. Existe um vácuo entre as predições teóricas complexas e os métodos empíricos derivados dos diferentes modelos de estimativa da estrutura a termo.

No começo de cada capítulo tera uma breve compilação bibliografica referente a cada um dos temas.

1.2 Porque tentar modelar a estrutura a termo?

A metodologia da estrutura a termo baseia-se na necessidade de se gerar informações quantitativas que descrevam o cenário para compreender e mensurar os movimentos nas taxas de juros e estimar o valor dos instrumentos. O propósito de modelar a estrutura é compreender o comportamento das taxas de juros. Ajustando

um modelo às informações de mercado é possível determinar as dinâmicas das taxas de juros e como estas afetam os mais diferentes produtos, tais como os derivativos. Ainda que grande parte das investigações tenha sido dedicada a previsão das taxas de juros, ainda não se chegou a uma conclusão de como estimar as taxas futuras por meio de uma metodologia robusta. A análise dos movimentos, ainda que não seja tão almejada como a previsão, é significativamente complexa, sendo afetada por diversos fatores que se alteram em ordem e hierarquia.

O objetivo final deste trabalho não é prever as taxas de juros e sim mostrar e descrever as propriedades das distribuições dos movimentos das taxas. Os modelos estão sustentados em métodos numéricos que analisam as propriedades de distribuições das taxas sobre certas condições e seus valores. Por exemplo, a partir da utilização dos métodos numéricos é possível medir o erro quadrático médio ou a distância de um conjunto de dados que será comparado com um outro grupo de informações, servindo como base para a verificação ou não da robustez do modelo.

1.2.1 Interpolação Vs Aproximação

As metodologias utilizadas para a criação da estrutura a termos utilizam tanto métodos de aproximação quanto de interpolação. A diferença entre ambos baseia-se em que na interpolação são utilizados diretamente os vértices conhecidos para estimar um ponto intermediário, sempre passando pelo vértice, enquanto que na aproximação utilizam-se os os vértices como referência e os pontos tanto intermediários como extremos e não forçosamente passam pelos vértices. Também é importante clarificar a diferença com a extrapolação sendo esta a estimação de um valor estendendo uma sequência de valores conhecidos a uma área não conhecida.

1.3 Quão bons são os modelos de taxas de juros?

É difícil comparar o desempenho de um modelo, já que existem diferentes circunstâncias sob as quais ele pode ser considerado ótimo. Em muitos casos as informações disponíveis para os testes são esparsas ou de qualidade duvidosa,

criando uma falsa perspectiva de que vários modelos ajustam corretamente a informação disponível. Outro fator limitante é a grande variabilidade das informações e das condições de mercado ao longo do tempo: testes de regressão para cada ano nas últimas duas décadas podem gerar resultados totalmente diferentes.

Uma alternativa poderia ser a de se trabalhar com informações históricas, mas atualmente o modelo tem que ser capaz de se adaptar e refletir corretamente as condições do mercado. O modelo deve ser simples de se calibrar e de se comparar com instrumentos similares ou de datas diferentes, para verificação da sua precisão. Além disso, ele deverá ser continuamente refinado e testado para verificar seu ajuste às condições atuais.

Um modelo considerado completo trabalha sob as seguintes premissas:

- Valorações exatas em instrumentos líquidos: é essencial que o modelo gere informações exatas nos pontos mais líquidos do mercado, já que normalmente são instrumentos utilizados como base para construir pontos não conhecidos;
- Calibragem: a velocidade e a precisão de calibragem são críticos em um mercado dinâmico. Porém, a metodologia e a frequência de calibragem têm que ser determinadas para assegurar a qualidade do modelo;
- Robustez: é extremamente necessária, já que está intimamente relacionada com a calibragem. Um modelo tem que ser rapidamente adaptável às mudanças do mercado sem que haja alterações nas principais premissas sobre as quais foi fundamentado.
- Flexibilidade: A habilidade de poder colocar novos instrumentos dentro do modelo lhe dará uma maior vida, também permitindo estimativas de novos instrumentos. Muitos instrumentos atípicos não podem ser estimados com modelos simples, mas sim com adaptações ao modelo original.

2 Conceitos Básicos

2.1 Taxas de Juros

A grande maioria das empresas de capital privado e as companhias controladas pelo Governo depositam especial atenção ao formato da curva da taxa de juros, considerado um determinante da política econômica adotada e diretamente responsável por ocorrências na economia do país como um todo. No mundo econômico existem momentos em que alguns agentes apresentam um excessivo fluxo de caixa e/ou não precisam da utilização de recursos de curto prazo. Nesse momento, recorrem a uma instituição financeira, que atua como intermediária entre os agentes que estão ofertando recursos e aqueles que estão demandando empréstimos.

Ainda que os temas relacionados com a política econômica e com os multiplicadores de liquidez não representem a preocupação central deste trabalho, apresentaremos a seguir as ferramentas de análise do comportamento da estrutura a termo.

Estrutura a termo pode ser definida como a relação entre a taxa de juros livre de risco dos instrumentos de renda fixa e as datas de vencimento dos fluxos de caixa - neste caso em particular, com um só pagamento. A relação entre as taxas de juros sobre instrumentos de desconto e as datas de vencimento dos fluxos de caixa, associados com essas taxas de juros, determinam os fluxos futuros a serem pagos.

No cálculo do preço de um papel, teoricamente estará refletido, diariamente, o fato de que a data de vencimento se aproxima, e os juros decorridos serão conhecidos e amortizados. É prática comum no mercado o reconhecimento proporcional do total dos juros diários. Para conhecermos o valor presente de um papel teremos então que utilizar um fator de desconto para converter o valor futuro em valor presente. Desta

maneira, o período no qual os papéis estiveram sob juros é indispensável para o cálculo de seu valor. O que significa que o valor do papel será conhecido mediante o cálculo dos juros durante um determinado período de tempo, normalmente um ano. Para o cálculo dos juros são necessárias: a quantidade de dias para o vencimento dos papéis e a definição da convenção de dias – fator que será explicado mais adiante.

O tipo de papel mais simples é aquele que não tem cupom (também chamados de cupom zero) e tem um pagamento único na data de vencimento. Em contrapartida, um título de crédito com uma série de pagamentos periódicos de juros (cupom) e um pagamento final corresponde ao principal tipo de papel encontrado.

Um título de crédito livre de risco é aquele para o qual há a certeza de que os pagamentos serão feitos por completo e no momento acordado. Os únicos títulos de crédito que se encaixam nesta categoria são os do tesouro norte-americano. Normalmente estes “treasuries” têm um vencimento igual ou superior a dois anos e pagam juros duas vezes por ano. No mercado americano é comum o fechamento de transações sobre o valor do cupom, que é considerado como independente e também chamado de STRIPS .

Tanto os papéis como os títulos de créditos possuem datas de vencimento distintas, às quais são atribuídas diferentes taxas de juros. Por exemplo, títulos de crédito com vencimento daqui cinco anos costumam ter taxas de juros maiores que aqueles com vencimento previsto para dois anos; o que demonstra que é prática comum compensar períodos menores com taxas de juros inferiores e atesta a relação existente entre taxas e vencimentos.

É importante destacar que com o intuito de manter o foco deste trabalho na relação existente entre taxas de juros e vencimento, uma série de fatores que podem afetar a taxa do título de crédito não será contemplada nesta dissertação. Por exemplo: a) a possibilidade de risco existente nos títulos de crédito emitidos por empresas privadas ou pelo governo; b) os efeitos causados por variáveis exógenas, tais como vantagens fiscais e; c) títulos de crédito com características especiais como os “Callable bonds”.

2.1.1 Conceituação e comportamento da estrutura a termo

A estrutura a termo pode tomar uma grande variedade de formas para os diferentes horizontes de investimentos, períodos e vencimentos. É comum no mercado considerar sua forma como uma função crescente e côncava, ou seja, quanto maiores os prazos, maiores as taxas de juros. As fontes de utilização da estrutura a termo dependem de diferentes fatores e os pontos de referência são tomados distintamente, partindo do princípio de que existe uma curva, ou estrutura, para cada um dos instrumentos base. Assim, poderemos falar de uma curva para título de crédito, para futuros, para swap etc. Por exemplo, no mercado de capitais existem vários preços onde é possível derivar as taxas para os diferentes instrumentos - que serão descritos a seguir.

Nos instrumentos over, normalmente o mercado busca informações para os períodos de curto prazo, que variam entre uma semana e três meses. Nesse tipo de instrumento é comum que o cupom seja zero (sem pagamentos intermediários) e atue sobre ele uma função de desconto nas taxas de juros. Em alguns países o mercado over não é incluído na estrutura a termo, uma vez que está sujeito a inúmeras pressões do mercado, sendo a sua volatilidade muito grande em períodos curtos e, em alguns casos, sua movimentação é incoerente com o mercado ou com o restante da curva (este assunto será pormenorizado adiante).

Já os instrumento futuros, que tem prazos menores (cerca de um mês), contam com liquidez em períodos de até um ano. São contratos que emprestam ou tomam dinheiro e são sensíveis às variações nos prazos mais curtos, refletindo quase imediatamente os efeitos nos períodos subseqüentes. Em alguns países o mercado de futuros chega a ter liquidez de até três anos. Internacionalmente este instrumento costuma deter informações confiáveis sobre a estrutura a termo nos seus diferentes vencimentos.

Com maior liquidez que os instrumentos futuros, os swaps predominam nos mercados entre um ano e três anos.

Finalmente, temos os instrumentos colocados no mercado europeu, onde existem vencimentos longos de até 10 anos; nesses casos o problema aumenta quando são integrados custos de liquidez, de emissão e de risco soberano.

Mais adiante serão analisados os obstáculos de cada um destes instrumentos, assim como as diferentes mudanças a serem consideradas na criação da estrutura a termo.

É possível notar a existência de significativas disparidades em termos de magnitude, volatilidade e comprimento da curva. Entretanto, este trabalho está restrito ao mercado brasileiro e, desta forma, a análise, as estimativas e as conclusões sobre a estrutura a termo utilizando splines serão construídas somente para o caso do Brasil.

Normalmente, no mercado de futuros a estrutura a termo é parcial, uma vez que não há disponibilidade de preços dos instrumentos com desconto e com vencimento contínuo. Nestes casos será necessário estimar uma estrutura a termo, aplicando metodologias baseadas nos instrumentos existentes.

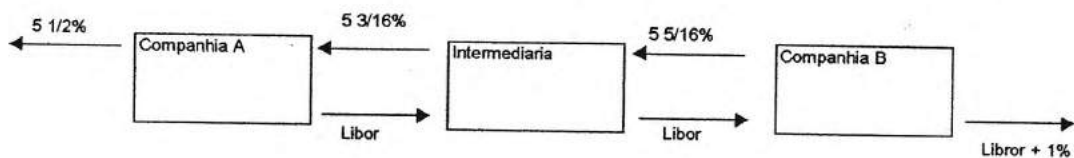
2.1.2 Taxas de Juros Fixas e Flutuantes

Um empréstimo pode ser tomado a uma taxa fixa ou flutuante. No primeiro caso os pagamentos podem ser previamente conhecidos. Porém, sob uma taxa flutuante os cupons são projetados periodicamente de acordo com o vencimento, ou seja, com base na última taxa conhecida, dependendo do valor de mercado e das características do instrumento. Neste sentido a taxa é utilizada apenas como referência, como por exemplo, Libor.

A coexistência das taxas fixas e das taxas flutuantes originou instrumentos como os swaps de taxas de juros, com aproximadamente 30 anos no mercado internacional. O princípio gerador deste instrumento é muito simples e baseia-se na diferença de taxas de mercado obtidas pelos mais diversos agentes. Por exemplo, se uma empresa A toma um empréstimo por cinco anos a uma taxa fixa de 5.5% e concede um empréstimo à companhia B a uma taxa flutuante de Libor mais 0.5%, quando esta só

tinha acesso a taxas flutuantes de Libor mais 1% e fixas de 6.5% pelo mesmo período de 5 anos, as companhias A, B e uma intermediária (instituição financeira) se beneficiariam ao fechar uma operação cruzada entre os dois tipos de taxas (swap). A companhia A pagara Libor ao intermediário em troca do recebimento de uma taxa fixa de 5.3/16%, a Companhia B pagará ao intermediário uma taxa fixa de 5.5/16% em troca de Libor. O benefício pode ser entendido da seguinte forma: a companhia A paga Libor mais 5/16% ao invés de Libor mais 0.5%, B paga uma taxa fixa de 6.5/16% ao invés de 6.5% e o intermediário leva 1/8% de taxa fixa.

Se inicialmente esta troca parece um bom negócio para as partes envolvidas, existem alguns fatores que podem afetar a operação, como por exemplo, o risco de inadimplência, explicado pelos diferentes patamares de juros de cada companhia. Habitualmente, o risco de crédito é transferido ao intermediador, que lucra pelo diferencial das taxas de ambas as empresas sem necessariamente utilizar capital.



2.2 Estimativa da curva a termo

A utilização de métodos para a estimativa da curva a termo se divide em dois grupos: teórica e empírica. Os teóricos baseiam-se em uma estrutura explícita, cujos valores dependem de uma série de parâmetros orientados pelo pressuposto de reversão à média e volatilidade da chamada taxa de juros no curto prazo. Normalmente, utilizam vários tipos de regressões para determinar o valor dos parâmetros e tentam explicar a evolução da estrutura a termo durante o tempo. Os principais expositores destes métodos são Vasicek (1977, 1982) e Cox (1985).

Os métodos empíricos independem de qualquer modelo de informação histórica e de seu comportamento. O principal objetivo é chegar a uma representação fechada da estrutura a termo. Dentro dos métodos empíricos está a utilização de procedimentos

conhecidos como bootstrapping, aplicações de splines (Fischer, Nitzza and Servos 1994), exponenciais com polinomiais (Nelson and Siegel 1992) e métodos de máximo alisamento (Adams and Van deventer, 1994).

2.3 Conceito de plenitude e eficiência de mercado

Um mercado é considerado eficiente quando compradores e vendedores têm acesso a toda informação que afetaria um possível movimento das taxas nos mais diferentes prazos. A informação utilizada funciona como uma fotografia, onde figura um grupo de preços e taxas observadas num dado momento. Nesse sentido, a atualização é indispensável, cabendo a cada um dos agentes determinar, de acordo com sua necessidade, qual o período ideal de sua ocorrência: se semanal, diária ou imediata. Para alguns, determinados períodos de atualização são suficientes, mas existem aqueles que demandam informações em um ritmo, muitas vezes, não atendido pelo mercado.

2.4 Hipótese de Expectativas

Hipótese de Expectativas, historicamente, foi a ferramenta mais utilizada para compreender a estrutura a termo. A hipótese de expectativa da estrutura a termo significa que a taxa no longo prazo é igual à média da taxa em um determinado período, assumindo que a taxa é crescente de uma forma constante. Isto cria um problema, já que a estrutura a termo pode ter distintos tipos de comportamento em diferentes partes da curva. Por exemplo, crescente no curto prazo, nulo no médio prazo e decrescente no longo prazo.

Um outro problema está em supor como constantes os efeitos dos juros sobre a curva e aplicá-los à curva toda. Neste caso, a vantagem é que a hipótese pode ser modificada, evitando a ocorrência de erros sistemáticos, já que os preços flutuam através do tempo e existe incerteza em relação ao retorno dos títulos de longo prazo - o que nos leva a considerar que tal incerteza aumenta diretamente com o prazo de vencimento de um título.

Existem testes empíricos que demonstram que esta teoria tem papel importante na determinação de mudanças nas formas das taxas de juros, e podem ser comprovados em alguns casos específicos do comportamento da curva de juros. O problema desta hipótese não reside no fato dela não se importar com as expectativas das taxas de juros e sim porque acredita que nenhum outro fator seja relevante. Há uma explicação razoável às tendências de longo prazo que tem relação com a incerteza implícita de uma posição comprada em títulos de crédito. Aumentos no nível de incerteza levam a:

1) aumentos no prêmio de risco que incrementam a inclinação da curva no curto prazo

2) diminuição da inclinação no longo prazo em virtude do efeito de concavidade, também conhecido como desigualdade de Jensen, que vem de uma relação não linear entre as taxas dos títulos de crédito e os preços. Como consequência de um incremento no nível de incerteza, onde os preços dos títulos de crédito sobem e as taxas diminuem, isto é simples de se identificar nos períodos curtos, mas complexo de ser mensurado nos períodos mais longos.

Para analisar a forma de uma curva de juros e a consistência em relação à forma esperada é importante examinar a relação das expectativas, o prêmio ao risco e a convexidade.

A regressão clássica utilizada para testar a hipótese de expectativa é:

$$y(t+1, t+2) - y(t, t+2) = \beta_0 + \beta_1(y(t, t+2) - y(t, t+1)) + \epsilon$$

Onde ϵ é o erro aleatório. Uma mudança no prêmio de risco mudaria $y(t, t+2)$ sem mudar $y(t, t+1)$ ou $y(t+1, t+2)$. Se o efeito é dominante a regressão como todo pode ser negativa. Por exemplo, $\beta_1 < 0$.

2.5 Condição de não arbitragem

Como foi visto anteriormente, a hipótese de expectativa não é a ferramenta ideal para o estudo da estrutura a termo. O problema fundamental está em não assumir a

existência de incertezas em um mundo dinâmico. A hipótese de expectativa parte da premissa de inexistência de oportunidades de arbitragem.

A partir de agora a expectativa de hipótese será analisada em um mundo com incerteza, onde será possível detectar efeitos exógenos mais complexos. Nos últimos anos a teoria financeira tem produzido respostas mais sofisticadas que permitem a aplicação de condições que garantem a ausência de oportunidades de arbitragem em um mundo incerto. A ferramenta apareceu a partir de um dos supostos da fórmula de Black-Scholes ⁽¹⁾ para a precificação de opções. Originalmente aplicada na estimativa de ativos, através do tempo houve uma utilização na estimativa de títulos de crédito e, conseqüentemente, na estrutura a termo. Arbitragem envolve a compra e a venda de ativos de tal forma que se tornou possível gerar riqueza a partir do nada. Porém, as condições que garantem a ausência de arbitragem têm relação com os preços dos títulos de crédito e não com a estrutura a termo. Ironicamente, para compreender o comportamento da estrutura a termo (taxas de títulos de crédito) é necessário se afastar da hipótese de expectativa (que trata diretamente com as taxas de juros) e focar com mais atenção o preço dos títulos de crédito. E a ferramenta mais importante para a compreensão da estrutura a termo é a ausência de oportunidades de arbitragem.

Em um mercado ativo e líquido como o Americano, as oportunidades de arbitragem são eliminadas quase imediatamente. Para compreender melhor as condições que garantem a ausência de oportunidades de arbitragem, supõem-se que os ativos financeiros são dívidas que dependem do Estado para ser pagas. Em princípio cada um dos fluxos de caixa de um ativo financeiro tem um valor diferente. Examinados de um ponto de vista distinto, o preço do ativo é a soma dos fluxos de caixa. Porém sempre que um pagamento apresentar fluxo positivo, não existirão oportunidades de arbitragem. Em poucas palavras, as oportunidades de arbitragem aparecem somente se um ou vários fluxos de caixa são negativos ou iguais a zero.

A importância da arbitragem está fundamentada, principalmente, na correlação entre diferentes ativos. Dois ativos que têm pouca ou nenhuma correlação são de

pouca importância para a estimativa de uma oportunidade de arbitragem. Por outro lado, em uma opção, a movimentação do ativo base é muito importante; a ausência de arbitragem entre a opção e o ativo base determinam o preço da opção. No caso da estrutura a termo dois papéis que estão significativamente relacionados criam fontes de risco e volatilidade. Os fluxos de caixa entre eles são altamente correlacionados, porém a ausência de arbitragem é indispensável. A diferença para opções é que o cálculo do preço é relativamente simples de se obter (utilizando Black-Scholes), mas para a estrutura a termo cada país opera com uma taxa determinada, o que implica que o preço de um ativo, assim que os investidores tomam distintas atitudes, altera o comportamento futuro das taxas de juros.

2.6 Incerteza

Até agora foram assumidos a utilização de taxas livres de risco e o fato de que todos os pagamentos comprometidos serão pagos por completo no devido momento. Mas existe um risco indissociável até o dia do vencimento: os títulos de crédito podem perder ou ganhar valor. A incerteza dos preços desses títulos está ligada à incerteza inerente das taxas de juros. Como foi visto anteriormente, a ausência de arbitragem é baseada na estimativa do valor de um título de crédito no período subsequente. Mas o que aconteceria com os fluxos de caixa, que podem ser positivos ou negativos, se o valor fosse desconhecido no período seguinte? Neste caso não se está falando de uma arbitragem. As condições para a determinação de ausência de oportunidades de arbitragem não são suficientemente restritivas para estabelecer uma relação entre o preço de hoje e o preço do próximo período, onde existe o fator de incerteza. No entanto, é possível criar uma estrutura de preços de títulos de crédito que originem resultados úteis.

Agora, suponhamos a existência de movimentos uniformes nos preços desses títulos de crédito, em outras palavras, se os preços caem todos os períodos acompanham este resultado. Além disso, consideremos que existam apenas dois movimentos possíveis, de subida e de queda, com igual probabilidade de ocorrência

para o próximo período. Em suma, ao adquirir um título de crédito com vencimento em n -períodos, existiriam duas possibilidades de valorização no próximo período ($n-1$), que seria o resultado de um sorteio aleatório com probabilidade de 50% de subida e 50% de descida.⁽²⁾ Simplificando a notação, considere que só existam dois momentos no tempo hoje (t) e amanhã ($t + 1$) e o preço hoje de um título de crédito a n -períodos p_n . Se o resultado do “sorteio” for de subida, o preço amanhã será de p_{n-1}^u . Se, por um acaso, for de queda, seu valor será de p_{n-1}^d . Sendo p_{n-1}^* o preço médio do título de crédito no próximo período.

Notação:

$p(t, n)$ é o valor no tempo t de um título de crédito com n períodos (com vencimento na data $t + n$) ou neste caso \bar{p}_n é o valor médio de um título de crédito com $(n - 1)$ períodos $r(t)$ é a taxa de um período, sendo que

$$1 + r(t) = 1/p(t, 1) - 1$$

$$\bar{p}_{n-1} = \frac{p_{n-1}^u + p_{n-1}^d}{2}$$

Então, a volatilidade do preço do título de crédito no período seguinte estará representada como σ_{n-1}^p

$$\sigma_{n-1}^p = \frac{p_{n-1}^u + p_{n-1}^d}{2}$$

Sendo a volatilidade a medida de risco do investimento que está relacionada com a variância e o desvio padrão, a variância equivale ao desvio padrão da média ao quadrado, ou seja:

$$\frac{1}{2}(p_{n-1}^u - \bar{p})^2 + \frac{1}{2}(p_{n-1}^d - \bar{p})^2 = (\sigma_{n-1}^p)^2$$

Os dois valores possíveis no próximo período, sendo iguais as probabilidades de subida e de queda são:

Subida

$$p_{n-1}^u = p_{n-1} + \sigma_{n-1}^p$$

Queda

$$p_{n-1}^d = p_{n-1} - \sigma_{n-1}^p$$

2.6.1 Ausência de oportunidades de arbitragem na incerteza

A arbitragem é uma estratégia de negócios que gera riqueza sem risco. No momento em que foi introduzida a noção de incerteza tornou-se necessário rever o que representa a ausência de arbitragem. Imaginemos uma estratégia de negócios com fluxo de caixa zero hoje, sem custo nenhum. A condição para que haja ausência de arbitragem será determinada em termos do fluxo de caixa no próximo período, da seguinte forma:

1. Ambos os fluxos são iguais a zero, como no caso de ausência de incerteza.
2. Um fluxo é positivo e o outro é negativo.

Para que isto seja comprovado deve-se supor o contrario como verdadeiro:

- A. Que ambos os fluxos sejam positivos ou negativos
- B. Que ambos os fluxos sejam iguais a zero

A e B resultariam uma arbitragem. Retomando o caso em que a condição de não arbitragem foi determinada, a partir de agora o fator de incerteza será incluído. Para tanto, será aplicada a seguinte estratégia de negócios: compra-se um título com vencimento em n-períodos e financia-se tal compra com um empréstimo no próximo período. É importante ressaltar que o fluxo de caixa hoje é igual a zero e que no próximo período podem ocorrer dois casos: $p_{n-1}^u - (1+r)p_n$ e $p_{n-1}^d - (1+r)p_n$. Já que há existência de incerteza, tem-se que $p_{n-1}^u \neq p_{n-1}^d$ porém os fluxos líquidos de caixa não podem ser zero. Então a condição de não arbitragem implica que $(1+r)p_n$ fica em um lugar intermediário entre p_{n-1}^u e p_{n-1}^d , garantindo que pelo menos um dos valores dos fluxos de caixa seja positivo ou negativo.

Hoje (momento t)

seguinte periodo (momento $t + 1$)

Alta

Queda

$$p_{n-1}^u - (1+r)p_n$$

$$p_{n-1}^d - (1+r)p_n$$

O próximo passo será proceder ao exame da interação entre dois títulos de crédito, para verificar a ausência de oportunidades de arbitragem. Suponhamos que dois instrumentos com diferentes vencimentos foram comprados ou vendidos simultaneamente, formando assim um portfólio livre de risco. Intrinsecamente isso significa a garantia de ausência de arbitragem concomitantemente à importância na relação entre estes títulos de crédito.

Considerando a posse desses dois títulos de crédito, compra-se (ou vende-se) um título de crédito de n-períodos e vende-se (ou compra-se) um título com m-períodos sendo que m e n são diferentes, porém o custo do portfólio hoje é determinado por:

$$P_n + bP_m$$

O preço pode ser positivo, negativo ou igual a zero. Sendo π^u e π^d a representação de possíveis valores deste portfólio para o período seguinte, tem-se:

Alta	Queda
$\pi^u = p_{n-1}^u + bP_{m-1}^u$	$\pi^d = p_{n-1}^d + bP_{m-1}^d$

É importante lembrar que cada um dos títulos de crédito tem o seu próprio risco, mas como ambos compartilham a mesma fonte de incerteza, é possível combiná-los de tal forma que haja redução do risco total. De fato, existe um valor b^* para o qual é possível criar um portfólio completamente livre de risco. Em outras palavras, o valor do portfólio no próximo período é o mesmo em ambos os estados do mundo e então $\pi^u = \pi^d$. Naturalmente que para esta condição ser satisfeita, o seguinte fator tem de ser verificado

$$p_{n-1}^u + b^*p_{n-1}^u = p_{n-1}^d + bP_{m-1}^d$$

Resolvendo em termos de b tem-se:

$$b^* = -\frac{p_{n-1}^u - p_{n-1}^d}{p_{n-1}^u - p_{n-1}^d} = -\frac{\sigma_{n-1}^p}{\sigma_{m-1}^p}$$

Já que neste caso b^* é negativo, conclui-se que é necessária a venda de alguns títulos de m-períodos. Em outras palavras, pode-se considerar b^* como o “ratio of

hedge” que vai apontar como utilizar um título de crédito para cobrir algum outro, eliminando um possível risco (termo também utilizado em opções e conhecido como delta hedging). Utilizando-se π^* , b^* pode ser resolvido em ambos os lados da equação e deve ser igual à média. Assim:

$$\pi^* = \hat{P}_{n-1} + b^* \hat{P}_{m-1}$$

2.7 Precificação, formulas e terminologia.

Valor Presente

Valor presente de um fluxo futuro é a quantidade de dinheiro que deve ser despendida se o pagamento tiver que ser liquidado imediatamente, e é determinado por três variáveis:

1. O fator de desconto: que é a taxa de juros aplicada para trazer a valor presente um pagamento futuro.
2. Data de vencimento: que é o intervalo de tempo entre a data atual e a data de pagamento.
3. Frequência: que é a quantidade de vezes que os juros serão pagos durante a vida do instrumento.

Podendo também ser representado pela seguinte notação:

$$PV(x) = \frac{x}{(1+z)^m}$$

A fórmula acima apresentada é o cálculo do valor presente de um determinado instrumento com um pagamento só, em uma data futura, onde o valor x é trazido a valor presente por um período m . O valor z é a taxa de juros spot para um período com vencimento m .

No entanto, geralmente, para trazer a valor presente um cupom, tem-se:

$$PV(\text{periodom}) = \frac{c}{(1+z_1)} + \frac{c}{(1+z_2)^2} + \dots + \frac{c+r}{(1+z_m)^m}$$

2.7.1 Valor presente de um preço no período seguinte

A partir de agora será examinada a relação entre os preços dos títulos de crédito de hoje e de um próximo período ($t + 1$). Será analisada a disponibilidade, hoje, de um portfolio com custo zero e o valor deste num período futuro. Primeiro compra-se um título com n -períodos até o vencimento e financia-se a compra por meio de um empréstimo com taxa livre de risco para o próximo período. No momento t o fluxo de caixa é zero, já no instante seguinte o título é vendido no longo prazo e a dívida é saldada (com a adição dos respectivos juros). Tal movimento, expresso algebricamente resultaria:

Hoje (momento t)	Periodo Seguinte (momento $t + 1$)
0	$p(t + 1, n - 1) - (1 + r(t))p(t, n)$

É sabido que $p(t + 1, n - 1)$ é maior do que $(1 + r(t))p(t, n)$, desta forma a estratégia é uma arbitragem, já que ocorreu o recebimento de algum benefício com um custo atual igual a zero. Por outro lado, agora é conhecido que $p(t + 1, n - 1)$ é menor do que $(1 + r(t))p(t, n)$, o que indica que pode-se mudar a estratégia para realizar-se uma arbitragem, o que resulta em ficar vendido em títulos. Se, no entanto, ocorrer uma condição de ausência de arbitragem, o preço tem que ser igual em ambas as estratégias, para equilibrar o mercado. Nestes casos, tem-se:

$$p(t + 1, n - 1) - (1 + r(t))p(t, n) = 0$$

Resolvendo em termos do preço do título de crédito em longo prazo, tem-se:

$$p(t, n) = \frac{p(t + 1, n - 1)}{1 + r(t)}$$

O preço do título de crédito hoje é o valor presente do preço no próximo período. Expressando a equação em relação à taxa livre de risco temos:

$$\frac{p(t+1, n-1) - p(t, n)}{p(t, n)} = r(t)$$

2.7.2 Valor presente de um preço no período seguinte com ajuste na média do preço

Como foi demonstrado no item acima existe uma relação entre o preço de hoje e o do próximo período, mas nesse caso o fator de incerteza não foi contemplado. O jeito mais simples de incluí-lo dentro da fórmula de preço de um título de crédito de longo prazo é considerar que o preço dele não pode ser indeterminado ou incerto, sendo substituído pela média do preço no próximo período. Resultando em:

$$P_n = \frac{\hat{P}_n - 1}{1 + r}$$

Onde \hat{P}_n é a média dos preços e $r = r(t)$ significando que o valor do título é igual aos preços presente e esperado amanhã, podendo ser escrito como:

$$\frac{\hat{P}_{n-1} - P_n}{P_n} = r$$

Significando que o valor esperado de um título de longo prazo é igual à taxa livre de risco. Existe, no entanto, um paradoxo segundo o qual: “ao mesmo tempo que todo investidor, sujeito a um risco diferente nos instrumentos de base (securities), espera benefícios mais elevados quanto maior for o risco do instrumento, ele é obrigado a considerar que a incerteza associada à apropriação dos títulos reduz o risco do conjunto desses títulos, levando-o a aceitar taxas que sejam iguais ou menores que as taxas livres de risco”.

Assim, pode-se determinar uma fórmula que explique como os investidores reagem aos riscos apresentados a eles, incorporando um termo de ajuste (a_{n-1}) na fórmula de preço de um título.

$$P_n = \frac{\hat{P}_{n-1} - a_{n-1}}{1 + r}$$

Lembrando que $\hat{P}_{n-1} - a_{n-1}$ refere-se ao preço ajustado. De acordo com a equação acima apresentada o preço de hoje é o valor presente do preço médio ajustado para o próximo período. Porém, reajustando a equação e expressando o retorno esperado do título, tem-se:

$$\frac{\hat{P}_{n-1} - P_n}{P_n} = r \frac{a_{n-1}}{P_n}$$

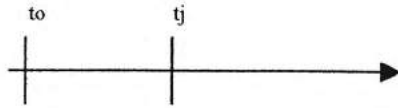
A fórmula acima diz que o retorno do período no qual foi mantida a posição em títulos é igual a uma taxa livre de risco somada a um termo que, de algum modo, expressa o tipo de risco envolvido. O ajuste pode ser positivo, negativo ou igual a zero, proporcionando flexibilidade em algumas destas direções. Como foi visto anteriormente, a função $(1+r)P_n$ fica entre P_{n-1}^u e P_{n-1}^d , evitando possibilidades de arbitragem. Dados estes limites, qualquer preço do título de crédito pode ser obtido se escolhido apropriadamente o termo a ser ajustado. Em outras palavras, a teoria de estimativa de preço de um título, provido de incerteza, fica longe de dar uma estrutura adequada para a determinação de um preço.

Para converter um valor futuro em termos atuais deve-se utilizar o fator de desconto. Esse fator é expresso como uma função da taxa de juros e é determinado pela aplicação de um fator específico para cada período escolhido até o pagamento do fluxo. É padrão no mercado a utilização de taxas anuais, facilitando os cálculos e padronizando as convenções.

Para determinar o período aplicável do fator de desconto deve-se efetuar a contagem do momento atual até a data de vencimento. Expressando isto numa fórmula, tem-se que t_0 é hoje e que a data de recebimento do fluxo é t_j que por regra está sendo definido por $t_j > 0$. Supondo que o período compreendido entre ambas as datas é equivalente a seis meses, tem-se:

$$T = t_j - t_0$$

Numa representação gráfica poderemos observar o período da seguinte maneira:



A tarefa mais complexa é padronizar a contagem de dias entre duas datas, já que o resultado é crucial para determinar o valor presente. Para fins de padronização e conhecimento da metodologia de contagem de dias, serão apresentadas as diferentes bases de contagem.

Além de definir o número de dias em um ano, a escolha de uma convenção de contagem é indispensável para determinar o cálculo entre duas datas, a quantidade de dias para o pagamento dos cupons e o número de dias até um determinado vencimento.

Alguns exemplos das possíveis bases existentes são:

- Corridos/Corridos: Baseado na contagem real de dias entre uma data e outra
- Corridos/360: contagem real entre duas datas sobre uma base de 360 dias
- Corridos/365: contagem real entre duas datas sobre uma base de 365 dias
- Úteis/252: contagem de dias úteis entre duas datas sobre uma base de 252 dias - o mais utilizado no Brasil.

Devido aos longos períodos de vencimento os prazos internacionais são medidos em anos, enquanto no Brasil eles são contados tanto em anos quanto em dias.

Um outro determinante da estimativa do preço de um papel é o cálculo dos juros amortizados. A amortização de um cupom é a proporção de tempo transcorrido entre o último pagamento desse cupom e o próximo, expresso em dinheiro. Normalmente, na compra ou na venda de um instrumento com cupom, o comprador pagará a parte proporcional até o dia da transação. A cotação é denominada "clean" quando no preço do instrumento não estão incluídos os juros amortizados e denominada "dirty" quando traz consigo esses juros. Sendo que o preço "dirty" deve ser ajustado pelos dias decorridos. Na prática, já que não é fácil prever os juros (principalmente para períodos longos da curva), a cotação será "clean" para facilitar o fluxo e a velocidade

das transações.

O cálculo dos juros pode variar entre os diferentes países, existindo práticas particulares em alguns deles. Por exemplo, nos Estados Unidos um mês tem sempre 30 dias sobre uma base de 360; no Reino Unido é utilizada uma base de 365 dias; enquanto no Brasil é usada uma contagem de 252 dias úteis, onde são excluídos os sábados, os domingos e os feriados.

As diferenças não implicam simplesmente no número de dias, mas também na equação do cálculo do preço do título, uma vez que não terá um número exato de cupons no futuro. Uma outra diferença importante é a forma de calcular os juros, também conhecida como fórmula de estimativa de preço de um título. A partir desta fórmula existe uma série de casos ou eventos que podem mudar ou complicar o cálculo, como: pagamentos de cupom em períodos diferentes, restrições em datas de pagamento (feriados), efeitos de liquidez em momentos que antecedem o pagamento do cupom etc. Este trabalho, no entanto, não aprofundará o estudo dos instrumentos de cupom, já que no mercado brasileiro este não é o determinante da liquidez.

Sem pormenorizar os cupons, a partir de agora o objetivo central será demonstrar que a estrutura a termo pode ser representada de três modos diferentes:

Taxa de desconto

Taxa Forward

Taxa Spot (também conhecida como curva zero)

Taxa Par

2.7.3 Taxas de desconto e spot

Fator de desconto é a taxa aplicada para descontar algum pagamento no futuro. Para poder conhecer e/ou determinar o valor presente de um pagamento que acontecerá no futuro será utilizado um fator de desconto para converter este pagamento até o dia de hoje. O fator é uma função da taxa de juros do tempo presente até a data de vencimento onde o pagamento é efetuado. É prática comum que as taxas estejam expressas em termos anuais.

Dado que t_0 é a variável que representa o tempo presente e t_j uma variável que representa algum pagamento no tempo futuro, dado que $t_j > 0$ e $t_j > t_0$.

Os instrumentos a desconto são aqueles que tem um pagamento só no vencimento. A taxa spot, ou cupom zero de um título, equivale à taxa de desconto, sendo que $z(t_j, f)$ representa a taxa de juros spot com vencimento t_j e compoe juros com a frequência f . A taxa spot é a taxa anual de juros que no final tem que chegar a um valor igual a 1 no momento t_j , se for composta f vezes no ano.

$$P(t_j)(1 + z(t_j, f)/f)^{t_j f} = 1$$

Operacionalizando algebricamente, tem-se:

$$Pv(x) = \left[\frac{1}{(1 + z(t)^t)^t} \right]. x$$

O instrumento mostrado poderia referir-se a um cupom zero, já que seria exatamente o mesmo. Duas características interessantes de uma taxa cupom zero podem ser destacadas:

1) Um valor equivalente a R\$1.00, a ser entregue imediatamente, tem como valor R\$1.00, já que $P(t_j, 0) = 1$

2) Um valor equivalente a R\$1.00, a ser entregue no infinito, é igual a zero, já $\lim_{n \rightarrow \infty} P(t_j, n) = 0$ (supondo que as taxas são sempre positivas)

A taxa spot que acumula juros discretamente é conhecida como curva de juros spot, que representa a relação entre as taxas spot a (t_j, f) e o vencimento t_j . Na realidade, poderíamos criar diferentes curvas spot, dependendo da periodicidade em que as taxas são compostas. Uma das características da taxa de desconto é que a quantidade de vezes que ela é composta por ano é recíproca à data de vencimento. Por exemplo, se a taxa de desconto paga R\$1.00 em t_j anos, quando ela for composta com uma frequência $1/t_j$ tem-se:

$$P(t_j)(1 + z(t_j, t_j^{-1})t_j) = 1eP(t_j) = 1/(1 + z(t_j, t_j^{-1})t_j)$$

Uma curva spot continuamente composta é conhecida como Curva Spot Contínua, que representa a relação entre a taxa spot $z t_j$ e a data de maturidade t_j . Em relação à curva spot discreta, a diferença é que só existe uma curva contínua spot.

No caso dos juros contínuos temos que a expressão $(1 + z(t_j, f)/f)^{t_j f}$ passa a ser $\exp(z(t_j)t_j)$ em outras palavras: a primeira expressão converge para a segunda quando f se aproxima de infinito. Sendo assim, pode-se escrever a taxa de desconto como:

$$p(t_j) = \exp(-z(t_j)t_j)$$

Como será visto mais adiante, os ajustes sobre uma taxa a desconto resultam em uma função contínua através do tempo. E sendo o modelo linear, é possível fazer regressões através do método de mínimos quadrados.

2.7.4 Curva Par

Existe um outro tipo de curva conhecida no mercado que reflete a taxa de juros sobre papéis de cupom estimados sobre valor de face. A diferença em relação à curva spot (ou zero) concentra-se em mudanças nas condições de mercado. As variações entre o valor de face e o valor de mercado poderão ser significativas, criando fortes efeitos econômicos. Mas tanto a metodologia de cálculo como as fórmulas, são as mesmas que apresentadas na curva zero. A principal variação é percebida nos dados utilizados para o cálculo da mesma. Existem vários mercados de títulos de crédito nos quais a liquidez é limitada e a quantidade disponível de instrumentos com cupom é ainda menor. Nesses mercados as curvas de cupom zero poderão ser um pouco diferentes daquelas com cupom. Por isso, muitos agentes de mercados verificam o valor da taxa par.

Um instrumento é considerado capaz de estimar a taxa par R se for possível chegar ao valor de face a partir da fórmula básica dos instrumentos com cupom (do preço do instrumento com cupom), onde verifica-se que:

$$R = \sum_{j=1}^n \frac{x}{(1+z)^m} + \frac{R}{(1+z)^n}$$

Significando que para um instrumento ser transacionado a taxa par, no vencimento a taxa tem que ser igual a seu cupom. Sendo assim, a taxa par pode ser derivada para qualquer período m , dada uma série de fatores de desconto $d_1 \dots d_m$ e definindo o cupom como $C = y_m$ e o preço como $P = R$. Neste caso, tem-se:

$$R = y_m \sum_{j=1}^m d_j + d_m R$$

Portanto, isolando y_m tem-se:

$$y_m = \frac{R(1 - d_m)}{\sum_{j=1}^m d_j}$$

A continuação segue a aproximação da forma contínua da curva par:

$$y(t_m) = \frac{R(1 - z(t_j))}{\int_0^{t_j} F(s) ds}$$

A curva $y(t_m)$ descreve a taxa de cupom requerida num cupom hipotético, para um período de vencimento t_m a ser transacionado com taxa par. De fato, na ausência de uma taxa de risco de referência, a taxa par é equivalente à taxa swap, já que a estimativa de um cupom de swap é calculada exatamente do mesmo jeito que a taxa par. Neste caso, a comparação entre a taxa par derivada dos instrumentos de governo e a curva de swaps, proporciona uma idéia da qualidade de crédito das emissões - tanto governamentais como privadas. Efeitos de liquidez e anomalias no mercado de títulos de crédito serão diferenciados, unicamente, em relação às taxas de risco. No caso da Inglaterra e dos Estados Unidos a taxa governamental é considerada como livre de risco e menor que aquelas dos setores privados. Contrariamente, nos mercados emergentes como Brasil, México ou Argentina, tal fator tem ordem inversa.

A seguir serão destacados alguns pontos a ser considerados na utilização de taxas

nominais e reais forward:

- Tanto os títulos de crédito convencionais como os indexados são emitidos para um período determinado de vencimento. Porém, existem problemas nas concentrações de títulos em períodos específicos que levam à procura por informações que ajudem na criação de uma curva contínua.

- O valor real dos fluxos de um título de crédito indexado não é necessariamente conhecido. Assim, a estimativa de criar uma taxa real requer a utilização de uma metodologia de aproximação dos valores destes fluxos.

- Ambas as taxas - nominal e real - carecem de informações nos períodos mais longos (superiores a 5 anos).

2.7.5 Taxas Forward

A relação entre as taxas spot e as taxas forward, serão explicadas partindo de uma base de cálculo de juros contínuos. A taxa de juros futura, assumindo a composição de juros discretos, é a taxa anual contratada no momento t_0 a ser paga no momento t_1 e t_2 composta f número de vezes durante um ano. A taxa forward será então determinada como $F(t_1, t_2, f)$. Esta taxa é simplesmente a taxa de juros efetiva em um período futuro. Igualmente à taxa spot, a taxa forward é influenciada diretamente pelo número de vezes que é composta e pela data de vencimento.

Aplicando a taxa contínua à taxa de juros forward, em termos de curto prazo $z(t_1)$, e de longo prazo $z(t_2)$ tem-se:

$$\exp(z(t_1) \cdot t_1) \cdot \exp(F_2(t_{2,1}) \cdot t_{2,1}) = \exp(z(t_2) \cdot t_{2,1})$$

Sendo que $t_{2,1}$ representa o tempo transcorrido entre t_1 e t_2 e $F_2(t_{2,1})$ é continuamente composto.

Resolvendo para $F_2(t_{2,1})$ tem-se:

$$F_2(t_{2,1}) = z(t_2) + \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} \cdot t_1 = z(t_2) + \alpha(t_1, t_2) \cdot t_1$$

O termo $a(t_1, t_2)$ representa a taxa de crescimento da taxa spot contínua. No limite, quando $t_2(z(t_2))$ se aproxima de $t_1(z(t_1))$ a curva forward para um período muito curto será:

$$F(t_1) = z(t_2) + \frac{dz(t_1)}{dt_1} \cdot t_1$$

Onde $F(t_1)$ representa a taxa instantânea forward para o vencimento t_1 . Em suma, a taxa instantânea forward descreve a taxa de retorno num período curtíssimo no momento t_j . Sendo assim, pode-se determinar a relação entre uma taxa spot, uma taxa forward e uma taxa de desconto.

Primeiramente tira-se o log da fórmula de desconto contínua, obtendo-se:

$$-\log(p(t_j)) = z(t_j)t_j$$

Em seguida, diferencia-se em relação ao vencimento t_j

$$\frac{d}{dt_j} \log(p(t_j)) = z_j + \frac{dz}{dt_j} \cdot t_j$$

Agora se comprova que a partir da equação da taxa instantânea forward tem-se:

$$F(t_j) = z_j + \frac{dz}{dt_j} \cdot t_j$$

Porém,

$$F(t_j) = \frac{d}{dt_j} \log(p(t_j))$$

Simplificando,

$$dt_j F(t_j) = d - \log(p(t_j))$$

Integrando de 0 ate t_j e elevando ao exponencial tem-se:

$$\exp\left(-\int_0^{t_j} F(s)ds\right) = p(t_j)$$

Assim, chegou-se à taxa instantânea futura a partir de uma função a desconto. O que possibilita concluir que as taxas forward existem em qualquer momento do tempo 0 até $t_{\{j\}}$. A relação entre as taxas spot e forward pode ser definida tirando o logaritmo natural e resolvendo para $z(t_{\{j\}})$. As taxas forward implícitas são consideradas como as taxas marginais de retorno que os investidores requerem para manter os investimentos (títulos de crédito) até o vencimento.

$$z(t_j) = \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} F(s) ds$$

A última equação apresentada mostra que as taxas spot são uma média das taxas forward instantâneas no período t_j e 0.

No caso de um instrumento com cupom existe uma série de fluxos de caixa que tem que ser descontados, mas para poder observar o preço com base em uma função de desconto tem-se que:

$$P(c_j, t_j, i, \dots, n) = \sum_{i=1}^n c_j B(t_j)$$

Sendo c_j os fluxos de caixa com vencimento no momento t_j e n o número de pagamentos pendentes. O preço do título de crédito pode ser expressado como:

Se juntadas as três representações equivalentes da curva de desconto, de uma forward e de uma cupom zero, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n c_j B(t_j) = \sum_{j=1}^n c_j \exp(-t_j Z(t_j)) = \sum_{j=1}^n \exp(-\int_0^{t_j} f(s) ds)$$

Primeiramente destacam-se as diferenças entre as taxas spot e as taxas forward. A primeira descreve as taxas de juros desde uma data presente até um momento determinado no futuro, enquanto a segunda descreve as taxas de juros para o próximo período em diferentes intervalos de tempo no futuro. Uma outra forma de diferenciar

a estrutura a termo é por meio da função de desconto, que especifica o valor presente de uma unidade no futuro. A taxa de desconto normalmente é uma curva decrescente com um formato tipicamente exponencial. Uma das razões pela qual um título é representado como uma taxa de desconto é pelo simples cálculo do valor do título, que é dado pela multiplicação entre os pagamentos e o valor presente.

Por outro lado, os preceitos de taxas forward levam ao conceito de taxas implícitas ou de projeção de taxas. As ditas projeções de mercado podem ser consideradas como expectativas das taxas spot pelos participantes do mercado e verificadas de acordo com a seguinte notação matemática:

$M_{t,s}$ de uma taxa com vencimento s determinado para uma data futura t que é equivalente ao valor total do retorno do investimento sobre a taxa R_t para t períodos reinvestidos na taxa $M_{t,s}$ para s períodos adicionais com o investimento para $t+s$ períodos na taxa spot R_{t+s} o que numa fórmula ficaria expresso como:

$$n(1 + R)^t(1 + M_{t,s})^s = (1 + R_{t+s})^{t+s}$$

A fórmula acima apresenta uma série de propriedades interessantes. A primeira é que quando um contrato futuro está disponível para um período futuro, a taxa desse contrato é igual à taxa implícita de mercado. Sempre será enquanto não existirem forças especulativas de mercado; e não sendo verificadas tais forças, haverá uma arbitragem de taxas livres de risco. Outra característica está relacionada ao período transcorrido na posição, que é exatamente o mesmo para qualquer ativo livre de risco. Sem importar o vencimento, ele será igual ao período de tendência no portfólio do título.

3 Metodologias

Como mostramos anteriormente a curva de juros pode ser estimada por meio da utilização de métodos teóricos ou métodos empíricos. O primeiro utiliza ferramentas estatísticas de alisamento das séries para descrever a curva futura sem considerar alguns dos fatores de provável influência. O segundo baseia-se em modelos que consideram a evolução das variáveis e as metodologias para estimar os instrumentos base, dos quais serão obtidos os pontos que definirão a curva.

Inicialmente, ao invés da estrutura a termo, os estudiosos utilizavam as datas de vencimento para estimar as curvas de juros. Harry Guthmann's, considerado o precursor da estimativa da estrutura a termo, apresentou, em 1929, um novo método em um trabalho intitulado: "A relação entre o vencimento e as diferenças dos investimentos em renda fixa"⁽³⁾. Em 1942, Durand utilizou-se desse método em um trabalho onde foi examinado um período de 40 anos. Outros estudiosos seguiram a mesma linha, procurando um padrão para a estimativa da curva de juros. Após 24 anos, Cohen, Kramer e Waugh (1966) e Fisher (1966) analisaram o trabalho de Guthmann's utilizando o método de mínimos quadrados.

A iniciativa de considerar os títulos de crédito de longo prazo como uma taxa futura média é atribuída a Irving Fisher (1907-1930). Meiselman (1962) utilizou a metodologia de Durand para estimar as taxas futuras como se fossem uma taxa de cupom zero. O grande problema da teoria de Durand foi que o método utilizado por ele não considerava os efeitos dos cupons. Fisher e Weil (1971) é que adaptaram o modelo para eliminar estes problemas. A publicação de Mc Culloch em 1971 sobre a estimativa da estrutura a termo orientou as diretrizes das investigações posteriores. Seu trabalho é considerado o ponto de partida para a análise da curva tal como a estimamos nos dias de hoje.

As Funções Splines Polinomiais foram usadas para estimar a estrutura a termo, primeiramente, em trabalhos dirigidos por Mc Culloch, que não atentou para a uniformidade no espaçamento dos pontos de quebra, considerando, igualmente,

intervalos diferentes. Carleton e Cooper (1976) corrigiram esta limitação. Eles realizaram estudos onde as informações apresentam espaçamento uniforme e estimaram a estrutura a termo para as taxas de juros norte-americanas. O estudo foi baseado no fato de que os juros dos cupons deste mercado são pagos, somente, em quatro dias (datas) no ano. A distância equiparável entre os pontos significa que os fatores de desconto podem ser estimados diretamente, utilizando mínimos quadrados - com vencimentos em até 7 anos - porém evitando a necessidade de aproximar as funções (Mc Culloch). Ainda que Carleton e Cooper não tenham colocado nenhuma restrição na função de desconto, na maioria dos casos é necessária a utilização de alguma. O principal problema está em confiar na obtenção de informações regularmente espaçadas e com pagamentos nas mesmas datas, algo inaplicável na maioria dos mercados. Além disso, esta metodologia não impõe suavização nenhuma na função de desconto, resultando formas não usuais ou descontinuidades quando convertidas para uma taxa futura.. Ficou claro que na ausência de informações que respeitem a uniformidade do espaçamento é necessária uma estimativa ou aproximação das funções.

Uma das implementações utilizadas por Mc Culloch (1971) foi restringir os movimentos abruptos, para que a solução seja uniforme, tendo como condição que as informações estejam espaçadas regularmente, caso contrário, dependendo da concentração de dados, existe a possibilidade de ajustes insatisfatórios no curto ou no longo prazo.

Uma alternativa para solucionar este empecilho é incrementar o grau do polinômio, mas isso pode gerar instabilidade na estimativa dos parâmetros. Para resolver este problema Mc Culloch sugeriu uma interpolação por peças, ou Splines, aproximando a função de desconto e estimando os parâmetros por meio de uma metodologia de mínimos quadrados.

Segundo Rice (1969) a utilização de Splines é uma forma adequada para aproximar funções estáveis. Um Spline Polinomial pode ser descrito como uma série de funções polinomiais unidas suavemente em um ponto chamado de nó ou ponto de

quebra. Utilizando esta metodologia (polinomial por partes) o grau do polinômio pode ser muito menor, resultando uma curva muito mais estável. Uma das vantagens deste método é a flexibilidade para modelar concavidades ou curvaturas especiais em diferentes regiões da estrutura a termo.

Mc Culloch utilizou um Spline quadrático para estimar a função de desconto por este apresentar propriedades superiores a um polinomial simples. Entretanto, tal opção apresenta restrições, como a possibilidade de criação de descontinuidade na curva forward. Quando temos uma função quadrática descontínua na segunda derivada, obtemos como resultado uma curva forward descontínua na primeira derivada.

Uma possível solução para este problema é aumentar o grau para determinar a função. Esta solução é suficiente para modelar razoavelmente qualquer função de desconto, inclusive a curva de juros. Entretanto, nesse caso, poderemos obter demasiada flexibilidade, criando formas e estruturas economicamente desprovidas de sentido, como por exemplo: funções não crescentes ou funções negativas. Além disso, quando ocorre aplicação de Spline cúbico em um grande número de nós há tendência de oscilação. E um excessivo número de oscilações, particularmente em prazos longos da curva, são considerados como irrealis.

Schaefer, em 1981, estendeu a análise de Mc Culloch e definiu o efeito dos impostos nas taxas dos títulos de crédito. Seu estudo sugeriu que uma função Spline pode ser restringida determinando-se o grau de função de desconto, que em alguns casos pode apresentar uma tendência negativa em toda a extensão da curva. Por sua vez, Shea, em 1984, fez um resumo das primeiras tentativas de aplicações dos métodos Splines e demonstrou que muitas delas apresentavam falhas, pois as restrições não eram adequadamente definidas⁽⁴⁾. Vasicek e Fong, em 1982, ajustaram um Spline exponencial de terceiro grau a uma função de desconto sobre papéis do tesouro dos Estados Unidos, atingindo resultados satisfatórios. Infelizmente, os dados empíricos não são apresentados no paper. Além disso, os autores excluem grande parte das flutuações das informações iniciais, já que a metodologia aplicada por eles

(mínimos quadrados) é extremamente sensível a outliers. Shea, em 1985, conclui que não existem vantagens significativas na utilização de Splines exponenciais em relação aos Splines polinomiais. Além disso, a utilização do primeiro modelo, por não ser linear, gera maiores dificuldades.

Outros autores aceitam esta conclusão, como por exemplo: Buono, Gregory-Allen e Yaari (1992). Em seu trabalho, os resultados das simulações Monte Carlo mostram que para formas complexas da estrutura a termo, o método de mínimos quadrados é mais robusto do que o polinomial exponencial - apesar desse último captar satisfatoriamente a forma básica e resultar em curvas forward mais suaves. Tuckman, em 1995, utilizou um polinômio por partes para um grupo de informações cupom zero em títulos de crédito norte-americanos. O maior obstáculo detectado foi a queda inexplicável nas taxas forward no longo prazo, que ele atribuiu ao prêmio de liquidez dos títulos de crédito de emissão mais recente. Fisher, Nychka e Zervos, em 1995, descreveram o ajuste de um Spline suavizado incorporando uma restrição de oscilação. Esse trabalho será descrito, pormenorizadamente, mais adiante.

O uso de Splines descrito por Mastronikola (1991) mostra que, diferentemente de Mc Culloch, são utilizadas funções cúbicas para definir a função base através do tempo. Além disso, o autor propõe o uso de uma série de funções cúbicas em um sub intervalo da curva (a ser discutido mais adiante) e de restrições na segunda derivada, para que o resultado seja exatamente igual nos próximos pontos e produza uma curva suave e dotada de sentido econômico. O fato de restringir duplamente as pontas da curva e a segunda derivada resulta uma curva única. No curto prazo, a curva é restringida para apresentar aceleração constante e no longo prazo, uma aceleração mais tênue. A estimativa do número de nós e os vencimentos utilizados por Mc Culloch foram fixos.

Nos últimos 5 anos, concomitante às investigações lideradas por diversos bancos centrais, foram feitas descobertas e análises relevantes para o desenvolvimento deste estudo. Um exemplo são os trabalhos de Svensson (1994), que levaram à estimativa das taxas de longo prazo na Inglaterra e determinaram a concavidade e as variações

da curva. Um outro trabalho destacável é a análise parcimoniosa da curva de juros (Journal of Finance 1987) produzida por Nelson e Siegel, apresentada em 1987. Finalmente, os estudos baseados em métodos Spline, guiados pelo trabalho de McCulloch, abriram as portas para análises extensivas do formato da curva. Waggoner, por sua vez, em artigo publicado em 1997 para o Banco da Reserva de Atlanta, propõe variações dos "smoothed splines" com uma certa penalidade de suavização, com diferentes impactos em distintas datas de vencimento. Comparada à metodologia utilizada por McCulloch, o autor recomenda a utilização do método com salvaguardas na determinação do grau de penalização.

3.1 Polinômios e interpolação

Shoenberg, com seu trabalho apresentado em 1940, é considerado o pai dos Splines, aplicando algumas idéias fundamentais que remetem a Euler. A utilização de polinômios foi estudada pelas propriedades de ajuste da curva per se. Inicialmente, a palavra Spline foi utilizada unicamente para funções cúbicas por partes com até duas derivadas contínuas. Com o tempo, a definição tornou-se mais abrangente e passou a considerar qualquer polinomial. Atualmente, alguns estudiosos utilizam os Splines para qualquer função definida por partes, sendo que todas as funções padrão podem ser consideradas em partes. Além das aplicações para ajustes de curvas, os splines são amplamente utilizados nas aproximações numéricas e na estimativa de soluções de equações diferenciais. É importante ressaltar que apesar de utilizados no mercado financeiro, os Splines ainda são objetos de debates, estudos e investigações acadêmicas. Inicialmente definiremos a notação dos polinomiais e, em seguida, aprofundaremos a análise dos Splines.

Dado um conjunto de dados $(x_i, f(x_i))$ para $i = 1, 2, \dots, N$ sendo $\{x_i\}$ diferente dois a dois, existe exatamente um polinômio $p_N(x)$ de grau menor que $n-1$.

$$p_N(x_i) = f(x_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots, N$$

Apresentaremos alguns exemplos, onde consideraremos P_n como um polinomial de grau menor que n :

$$P_N(x_i) = \{\text{polinômio de grau estritamente menor que } N\}$$

Com a condicionante de que $p_N(x)$ é determinado somente para um grupo de dados. Existem muitas formas de representarmos a interpolação polinomial, vejamos alguns exemplos:

Lagrange:

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) L_{i,N}(x)$$

onde

$$L_{i,N}(x) = \sum_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Apesar da expressão escrita sob o formato de Lagrange ser mais elegante do ponto de vista matemático, em termos de avaliação e de interpolação esta notação nem sempre é a mais eficiente. O sistema de equações não está bem definido, o que exige um esforço maior na sua resolução.

Vejamos então a notação Monomial:

$$p_N(x) = c_1 + c_2x + \dots + c_Nx^{N-1}$$

Por ser a forma de representação mais simples, esta é também a notação comumente utilizada. Não obstante o modo de apresentar os coeficientes $\{c_i\}$, a forma Monomial exige a resolução de um sistema linear que parte de uma interpolação sobre as condições mostradas na fórmula de Lagrange. Entretanto, algumas vezes o sistema de equações torna-se mais complexo e requer a utilização de

outros métodos, como por exemplo uma combinação das notações apresentadas acima, que pode ser descrita da seguinte maneira:

$$p_N(x) = p_N(x) + [x_1, x_2, \dots, x_N] f(x - x_1) \dots (x - x_N)$$

3.1.1 Teoremas de erro em uma aproximação polinomial

É importante ressaltar que uma interpolação polinomial com pontos escolhidos apropriadamente (por exemplo, utilizando a metodologia de Chebyshev) produz uma aproximação que, para propósitos práticos, difere muito pouco da melhor aproximação possível - utilizando polinomiais da mesma ordem. Esta observação tornará viável ilustrarmos as limitações essenciais de uma aproximação polinomial.

Se a função a ser aproximada tem um comportamento anormal em alguma parte do intervalo, teremos um resultado impreciso em qualquer ponto. Existe uma dependência global em propriedades locais que poderia ser evitada utilizando uma aproximação por partes. A forma padrão do teorema do erro para uma interpolação polinomial assume que f tem n derivadas contínuas.

Teorema 1 se $f \in C^N[a, b]$ para cada $\{x_i\}$ no intervalo $[a, b]$ então existe um ξ_x no menor intervalo que contém x_1, \dots, x_N e x onde f tem N derivadas contínuas no intervalo $[a, b]$ de maneira que:

$$f(x) - p_N(x) = f^{(N)}(\xi_x)(x - x_1) \dots (x - x_N)/N!$$

Antes do resultado, vejamos qual a melhor aproximação para $f(x)$ a partir de P_N .

$$\|f\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Dado que P_N é finito e unidimensional para todo f no intervalo $C[a, b]$, existe uma aproximação melhor a partir de P_N para f , por exemplo:

$$\|f - P_N\|_{[a,b]} = \min_{P \in P_n} \|f - P\|_{[a,b]}$$

Teorema 2 se $f \in C^k[a, b]$ para $k < N - 1$, então:

$$\|f - P_N\|_{[a,b]} \leq c_k \left(\frac{b-a}{N-1}\right)^k \|f^{(k)}\|_{[a,b]}$$

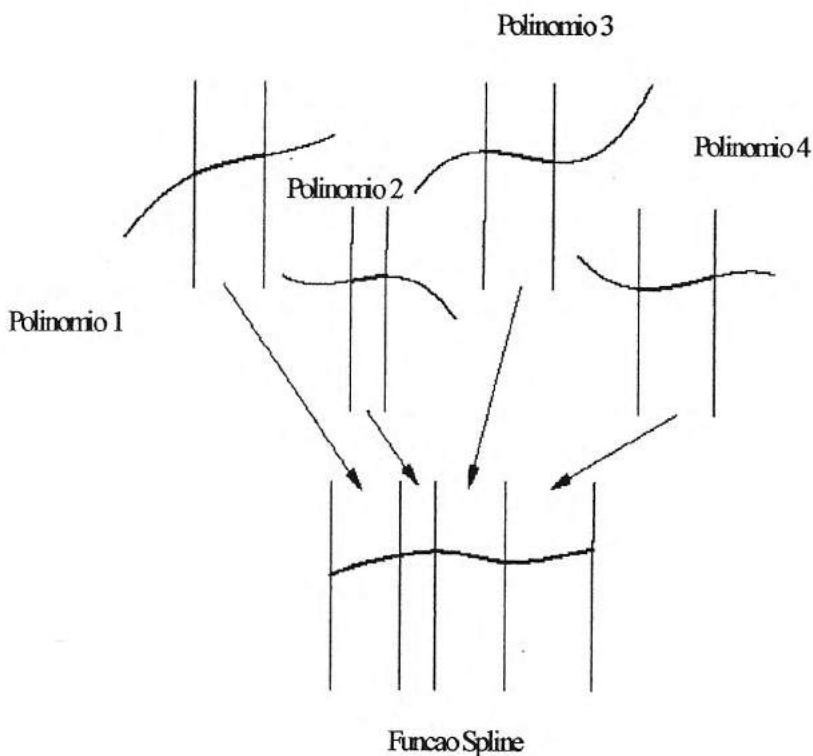
Ambos os teoremas apresentam possíveis problemas quando $N \rightarrow \infty$ se a derivada de f cresce rapidamente com N , ou k se for o caso, e forem fixos, a convergência de $(b-a) \rightarrow 0$ fica garantida. Isto sugere possíveis vantagens de um polinômio por partes com funções com derivadas crescentes.

3.2 Splines

A utilização de metodologias para estimar a estrutura a termo vem evoluindo aceleradamente, tornando-se cada vez mais comum a utilização de técnicas sofisticadas, sendo os Splines o maior exemplo desses avanços. Splines podem ser caracterizados como funções compostas, normalmente (e sobretudo em finanças), por polinomiais de baixo grau. A análise da literatura existente aponta que a utilização de Splines não implica no uso de uma fórmula padrão. Em muitos casos, os Splines foram descartados pelas oscilações criadas na curva futura - consideradas como anormais ou fora de mercado. O objetivo desta seção é encontrar uma função Spline capaz de refletir corretamente, em uma só curva, o mercado brasileiro de dinheiro, de futuros e swaps.

A interpolação dos Splines polinomiais (também chamada de local), normalmente requer um grande número de observações ou espaçamento uniforme, caso contrário podem ocorrer oscilações economicamente inválidas⁽⁵⁾. Aliás, algumas funções consideradas como suaves, tais como as exponenciais, em certos casos podem ser aproximadas erroneamente pelos polinomiais. Existem diferentes

alternativas para tentar diminuir os efeitos anormais da curva. Quando os períodos de vencimento são divididos em pequenos intervalos é possível ajustar a curva sem a necessidade de utilizar-se um polinomial de grau alto. O resultado é uma função agrupada e conhecida como polinomial por partes. No momento em que o polinômio por partes não apresenta movimentos abruptos nos pontos base, ele é chamado de Spline. Agora vejamos uma ilustração de uma construção de um spline de quatro partes, cada um especificado por uma função polinomial.



3.2.1 Metodologia de splines aplicada por Mc Culloch

Devido à importância das investigações de Mc Culloch apresentaremos, primeiramente, as diferentes aproximações utilizadas por ele e, no momento seguinte, analisaremos as metodologias mais recentes.

As investigações de Mc Culloch partiram do ajuste da curva por meio de uma

Função de Desconto. Os estudiosos prosseguiram utilizando este método, sobretudo, nos casos extremos de limitação de fluxos de caixa de diferentes títulos de crédito. Nestes casos, os títulos seriam descontados no mesmo momento e com a mesma taxa, porém a metodologia de fator de desconto pode derivar da estrutura a termo. Originalmente, Mc Culloch utilizou a fórmula de um título de crédito com cupom, taxa contínua de desconto e assumiu juros compostos.

Mc Culloch (1971-1975) também foi o primeiro a introduzir o método empírico de aproximar a função de desconto por meio de polinomiais e Splines. Estudos posteriores detalham o modo como os pagamentos de cupom são feitos em intervalos de cupom, assim como fluxos de caixa.

Partindo da fórmula do preço de um título de crédito com cupom, temos que:

$$P_i(\tau) = \sum_{j=1}^n C_i(t+j)Pd(t+j) + Pd(\tau) + \epsilon_i$$

O preço verdadeiro diverge do preço teórico pelo fator ϵ_j , que representa o erro. Esse erro não é simplesmente estatístico, dado que é obtido por meio de uma aproximação de diversos fatores, tais como: os custos de transação, os erros de precificação, a ausência de liquidez etc.

No trabalho de Mc Culloch, a função da taxa de desconto (utilizemos a notação do autor - $Pd(\tau)$) toma a forma de um Spline cúbico - que significa que se dividirmos o nosso grupo de vencimentos por um número de intervalos $Pd(T)$ teremos um resultado diferente em cada ponto, com características de um polinomial de terceiro grau. Considerando o polinomial por partes, os nós são unidos de tal forma que os Splines de primeira e de segunda ordem são iguais nesses pontos. Uma representação parametrizada deste tipo de aproximação é dada por:

$$P(t_j) = 1 + b_1 + b_2t_j + b_3t_j^2 + b_4t_j^3 \dots\dots\dots$$

- Combinando a fórmula do preço do título de crédito com a fórmula apresentada acima, temos:

$$Pd(T) = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4K_1 + b_5K_2 + b_6K_3 + \dots + \epsilon_i$$

Na fórmula apresentada, X_j equivale às funções dos fluxos de caixa $C_i(t+j)$ em termos da data de vencimento τ , já que k_i representa o número de nós dos Splines e da função de X . O Parâmetro b_0 é igual a um dado de valor presente igual a \$1 no momento zero. Mc Culloch determinou os parâmetros da função de desconto otimizando a soma quadrada dos erros, por meio da aplicação de mínimos quadrados na fórmula.

Os residuais são ponderados pelos inversos: do preço do título de crédito, do spread e dos custos de transação - representados na seguinte fórmula:

$$V_i = \frac{(P_i^a - P_i^b)}{2 + b}$$

Dado que P_i^a é o Preço de compra e P_i^b é o Preço de venda.

O ajuste tem como finalidade estimar os efeitos criados por grandes erros gerados a partir de transações isoladas. Mc Culloch determinou a quantidade de nós (k_j) tal que exista um número igual de títulos de crédito em cada intervalo. Aproximada à função de desconto a partir de uma função Spline, a fórmula permite criar mais flexibilidade na aproximação de formas mais complexas, já que os parâmetros da curva são dados a partir de um intervalo fechado e fortemente influenciados pelas observações de cada intervalo.

Com esta flexibilização, o formato da curva pode gerar resultados não razoáveis, como taxas negativas (apresentadas pelo próprio Mc Culloch). Shea (1984) critica o modelo e impõe restrições ao Spline, variando o número de pontos de quebra como uma solução potencial a este problema.

Na fórmula de sistemas de equações podemos aplicar mínimos quadrados e estimar a função a ser utilizada. Uma vez determinados os pontos da curva, as taxas de forward, zero e par podem ser estimadas.

Para a aplicação do modelo de Mc Culloch é necessária a especificação da função base $f_j(m)$. A escolha dos parâmetros vai determinar os níveis de flexibilização e suavização da curva, sendo necessário, porém, um conhecimento prévio do formato de tal curva para a aplicação desta metodologia. Apesar de nos remeter a um procedimento subjetivo (de intuição de tal formato), algumas das propriedades desse modelo são essenciais, como por exemplo: a curva tem que ser monotônica (a fim de evitar taxas forward negativas) e deve apresentar unicidade no momento $t = 0$, ou seja, o valor presente de \$1.00 a receber hoje é equivalente a \$1.00.

3.2.2 Notação dos Splines

$\xi = (\xi_i)_1^{\ell+1}$ é uma seqüência estritamente crescente do ponto, além de definir os pontos de quebra (break point). k é um integral positivo e P_1, \dots, P_ℓ uma seqüência de ℓ polinomiais, de ordem k (por exemplo de grau $< k$). Podemos então definir o polinomial por partes como uma função *pp* de orden f e k . Desta maneira, por definição, temos:

$$f(x) = P_i(x) \text{ se } \xi_i < x < \xi_{i+1}; \quad \text{dado que } i=1, \dots, \ell$$

Os pontos ξ_i são também chamados de pontos de quebra de f .

$P_{K,\xi}$ é o espaço linear das funções polinomias. Sua dimensão e $k\ell$ são elementos contidos em ℓ polinômios por partes, tendo cada uma delas k graus livres. Em outras palavras $P_{K,\xi}$ é a soma de ℓ vezes P_k .

A ordem é o número de conjuntos necessários para se especificar uma parte polinomial, e portanto é igual ao grau máximo admitido menos 1.

Uma definição abrangente de Splines considera estes como sendo qualquer função polinomial por partes (6)

$V = (V_i)_2^l$ representa uma seqüência de inteiros não negativos.

Esta seqüência especifica condições de regularidade para as partes polinômias e mantêm-se nos pontos interiores de quebra.

$P_{k,\xi,v}$ é o sub-espaço de $P_{k,\xi}$ formado pelos elementos sutis, exigindo as seguintes condições de continuidade especificados por v :

$D^s f$ é contínua em ξ para $s = 0, \dots, v_i - 1$, e $i = 2, \dots, l$

Sendo que v_i é a quantidade de condições impostas em ξ_i ($V_i = 0$ demonstrando a inexistência de imposições):

$$\dim P_{W,\xi,v} = kl - \sum_{i=2}^l v_i$$

3.3 Interpolação linear por partes de Splines

Começaremos apresentando a interpolação contínua polinomial por partes de menor grau - Spline linear.

Partimos do pressuposto que:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

E determinamos que:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \text{ dado que } h = \max_i h_i$$

Sendo que, para cada (x_i, x_{i+1}) temos:

$$s(x) = f(x_i) \frac{x - x_i + 1}{x_i - x_i + 1} + f(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_i + 1 - x_i} = f(x_i) + [x_i, x_{i+1}] f''(x) (x - x_i)$$

A primeira parte da fórmula equivale a forma de Lagrange e a segunda remete à representação de Newton. O erro na fronteira para $s(x)$ vem da fórmula da teoria do menor erro:

$$\| f - s \|_{[x_i, x_{i+1}]} \leq \| f'' \|_{[x_i, x_{i+1}]} \| (x - x_i)(x - x_{i+1}) \|_{[x_i, x_{i+1}]} / 2! \leq \| f'' \|_{[x_i, x_{i+1}]} h_i^2 / 8$$

Um outro resultado poderia ser obtido se maximizado para i :

$$\| f - s \|_{[a, b]} \leq \| f'' \|_{[a, b]} h_i^2 / 8$$

Como podemos observar a convergência é garantida, já que $h \rightarrow 0$. A maior desvantagem dos Splines lineares é a sua descontinuidade. Para o estudo do erro a melhor aproximação de f para S é o espaço de splines contínuos com pontos de quebra em $\{x_i\}$. Definido o operador M , onde $C\{x_1, x_n\} \rightarrow S$, teremos:

$Mf =$ ao interpolante do Spline linear de f onde $\{x_i\}$, então:

$$\| Mf \|_{[x_i, x_{i+1}]} \left\{ \begin{array}{l} = \max_{[x_i, x_{i+1}]} | f(x_i)(x_{i+1} - x) + f(x_{i+1})(x - x_i) / h_i | \\ \leq \| f \|_{[x_i, x_{i+1}]} / h_i + (x - x_i) / h_i | \\ = \| f \|_{[x_i, x_{i+1}]} \end{array} \right.$$

De tal forma que $\| M \|_{[x_i, x_{i+1}]} \leq 1$ é de fato possível, já que M produz linhas. Porém, em todo o intervalo $[a, b]$, dado que $\| M \| = 1$, I é a melhor aproximação

para f em S , por exemplo:

$$\|f - l\| \left(\begin{array}{l} \|f - Mf\| = \|f - Mf + Ml - l\| \\ = \|(1 - M)(f - l)\| \\ \leq (1 + \|M\|) \|f - l\| = 2 \|f - l\| \end{array} \right)$$

É possível notar o considerável esforço para se calcular a melhor aproximação para l . Tal exercício, provavelmente, não seja justificado, uma vez que o interpolante Mf apresenta pelo menos o dobro do erro.

3.4 Interpolação Cúbica por Partes - Spline

A diferença desta em relação às outras interpolações é que as curvaturas s_2, \dots, s_{n-1} são determinadas pela condição de que f tem que ter uma derivada duas vezes contínua - mantendo assim sua curvatura. Isto nos oferece as condições para $i = 2, \dots, n-1$, ou seja:

$$P''_{i-1}(t_i) = P''_i(t_i)$$

Apresentando de uma outra forma:

$$2C_{3,i-1} + 6C_{4,i-1}\Delta T_{i-1} = 2C_{3,i}$$

Ou

$$2([T_{i-1}, T_i]g - s_{i-1})/\Delta T_{i-1} + 4C_{4,i-1}\Delta T_{i-1} = 2([T_i, T_{i+1}]g - s_i)/\Delta T_i - 2C_{4,i}\Delta T_i$$

Ou

$$s_{i-1}s_{i-1}\Delta T_i + s_i^2(\Delta T_{i-1} - \Delta T_i) + s_{i+1}\Delta T_{i-1} = b_i$$

dado que:

$$b_i = 3(\Delta T_i[T_{i-1}, T_i]g + \Delta T_{i-1}[T_i, T_{i+1}]g$$

Assumindo que os dois parâmetros que ficaram livres (s_1 e s_n) foram escolhidos

de alguma maneira, pela última equação apresentada temos um sistema linear tridiagonal de $n-1$ equações para $n-2$ incógnitas, que é estritamente uma linha diagonal dominante. Porém, o sistema tem exatamente uma solução, que não mostra-se muito complexa quando utilizamos o método de Gauss.

Condições de contorno

Há várias escolhas para s_1 e s_n para a interpolação cúbica spline, são elas:

i) Se g' é conhecido no momento T_1 e T_n então a escolha natural seria $s_1 = g'(T_1)$ e $s_n = g'(T_n)$ e o resultado seria um spline interpolante

$$f = I_4 g$$

que concorda com g no T_0, \dots, T_{n+1} e que também é chamado de interpolação cúbica spline completa para g

ii) Se g'' é conhecida nos extremos, então podemos resolver para a seguinte expressão $f'' = g''$ no final dos pontos e adicionar na equação:

$$2s_1 + 2s_n = 3[T_{n-1}, T_n]g + (\Delta T_i)g''(T_1)/2$$

iii) Os chamados splines naturais⁽⁷⁾ são aqueles que têm condições livres nos extremos:

$$f''(T_1) = f''(T_n) = 0$$

Ainda que o nome “splines natural” seja muito atraente, em termos de aproximação tem pouco a ser recomendado do ponto de vista teórico e numérico. A determinação arbitrária produz erros nos extremos, a menos que seja igualada $g''(T_1) = g''(T_n) = 0$, o que resulta numa redução da taxa de convergência no método de interpolação.

iv) Se não há informação sobre o comportamento nos extremos, podemos usar a condição conhecida “not a knot”. Onde é escolhido s_1 e s_n para que $P_1 = P_2$ e $P_{n-2} = P_{n-1}$. Isso, no entanto, requer que f'' seja contínua no T_2 e T_{n-1} , o que resultaria em adicionar na equação:

$$s_1 \Delta T_2 + s_2 (T_3 - T_1) = \frac{(\Delta T_1 + 2(T_3 - T_1)) \Delta T_2 (T_1, T_2) g(\Delta T_1)^2 (T_2, T_3) g}{T_3 - T_1}$$

Uma metodologia alternativa implica em requerer tanto ao primeiro quanto ao último polinômio que interpole g em um ponto adicional que não seja o ponto de quebra. Isto significa que existem $n-3$ partes do polinômio ao invés de $n-1$ no primeiro pedaço $P_1(T_i) = g(T_i)$ dado que $i = 1, 2, 3$, porém $P'_1(T_3) = s_3$ e similarmente será aplicado no outro extremo (última parte).

Dado P_{n-3} , f ficaria no intervalo $[T_{n-2}, T_n]$ para $P'_{n-3}(T_i) = g(T_i)$ para $i = n-2, n-1, n$ e $P'_{n-3}(T_{n-2}) = s_{n-2}$. Isso muda ligeiramente o sistema linear de equações, mas o resultado em função de f será idêntico ao apresentado anteriormente.

v) Uma técnica diferente na falta de informação da derivada no limite, consiste em estimar g', g'' ou até g''' no limite para os pontos a e b calculando a derivada correspondente do polinômio cúbico mais próximo que seja igual a g nos quatro pontos mais próximos da condição de contorno, e então resolvendo para f de tal forma que seja igual ao valor da derivada.

vi) Existe uma outra condição de contorno ainda não mencionada que devido ao seu atrativo prático merece ser incluída. Trata-se da fixação do período cumprido da curva, onde a priori é decidido que à primeira, ou à segunda derivada, possam ser impostas restrições para atender às últimas duas condições. Os bonos de longo prazo são comumente muito sensíveis aos movimentos da taxa de juros de curto prazo. Porém, uma interpolação spline natural produzirá, muito provavelmente, grandes ondas no final da estrutura a termo, já que conforme aumenta o intervalo de tempo, maior se torna o espaçamento entre cada um dos instrumentos.

3.5 B- Splines (Basis Splines)

Basis Splines são uma classe particular das funções Spline que podem ser

aplicadas para estimar a estrutura a termo das taxas de juros. Os principais representantes desta metodologia são Fisher et. al (8) . Os B-splines despertaram certo interesse devido ao fato de que evitam algumas das dificuldades associadas à estimação dos parâmetros dos splines polinomiais comentada anteriormente.

Como foi visto, temos que $P_{k,\xi}$ é um espaço de um polinomial de grau k com pontos de quebra $(\xi_1, \dots, \xi_{l+1})$, dado que $s \in P_{k,\xi}$ se e somente se $s \in P_{k,\xi}$ em cada (ξ_j, ξ_{j+1}) . Tendo $P_{k,\xi}$ na dimensão ℓk . Para adquirir a suavidade de s é necessário outro vetor, também chamado de vetor de incidência, $v = (v_1, \dots, v_\ell)$. Então $s \in P_{k,\xi,v}$ se e somente se $s \in P_{k,\xi}$ e

$$s^{(j-1)}(\xi_i^+) = s^{(j-1)}(\xi_i^-) \quad j = 1, 2, \dots, v_i$$

Um exemplo no espaço dos splines de Hermite

$$P_{4,\xi,v} \text{ com } v = (2, 2, \dots, 2)$$

Agora vejamos como seria no espaço dos "smooth cubic splines"

$$P_{4,\xi,v} \text{ com } v = (3, 3, \dots, 3)$$

Geralmente a dimensão de $P_{k,\xi,v}$ se encontra em $n = \ell k - \sum_{i=2}^l v_i$. O que se busca é a base para $P_{k,\xi,v}$ que consiste em n funções linearmente independentes, as quais devem apresentar as seguintes propriedades:

- I) Ter a capacidade de serem recriadas por um algoritmo computacional eficiente
- II) Ser bem condicionadas
- III) Ter algoritmos estáveis

Uma das razões pelas quais os B-splines do tipo $(B_{i,k,t})$ têm grande aceitação é

porque cumprem com os requisitos acima mencionados. Dada uma série de nós $t = (t_1, \dots, t_{n+k})$ onde $t_i \leq t_{i+k} \quad \forall i$ definido por:

$$B_{i,k,t}(x) = (t_{i+k} - t_i)[t_1, \dots, t_{i+k}](-X)_+^{k-1}$$

Notas

i) Alguns, ou todos os subscritos de $B(x)$ foram omitidos, caso não ficasse claro no contexto quais seriam os seus valores

ii) o subscrito + significa "a parte positiva"

3.5.1 Propriedades dos B-Splines

$t = (t_i)$ seqüência não decrescente de números reais (onde podem haver repetições). Os B-Splines de ordem K , com seqüência de nós (k nós - não confundir com os pontos de quebra), $B_{i,k}$ e t satisfazem as seguintes propriedades, assumindo que $t_i < t_{i+k}$ para fins práticos:

i) $B_{i,w,t}(x) = 0$ para $X \notin [t_i, t_{i+k}]$

Convergência: no intervalo $[t_i, t_{i+k}]$, somente os k B-splines de ordem K $B_{j-w+1}, B_{j-w+2}, \dots, B_j$ podem ser não nulos

ii) $\sum_i B_i(x) = \sum_{i=x-w+1}^{x-1} B_i(x) = 1$ para todo $t_r < x < t_s$

iii) $B_i(x) > 0$ para $t_i < x < t_{i+k}$

- $B_{i,k,t}(x)$ é uma função polinomial por partes de ordem k , com pontos de quebra dados pelos pontos distintos da seqüência $\{t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}\}$

- A multiplicidade dos nós direciona a suavidade da seguinte forma: se o número n ocorre exatamente n vezes na seqüência $t_1, \dots, t_{l-1} - w$, então $B_{i,k}$ e suas primeiras $k - r - 1$ derivadas são contínuas no ponto de quebra γ , enquanto que a derivada de ordem $k - m$ tem salto em γ .

$$S_{k,t} = \left\{ \sum_i \alpha_i B_{i,k,t} : \alpha_i \in R \right\}$$

Representa o espaço dos splines de ordem K com seqüência de nós t

Para obtermos a relação dos B-splines com $P_{k,\xi,v}$ temos o importante teorema abaixo:

3.5.2 Teorema de Curry e Schoenberg

Dadas,

- Uma seqüência $\xi = (\xi_i)^{l+1}$ estritamente crescente
- Uma seqüência $v = (v_i)_2^l$ de inteiros $0 \leq v_i \leq k$

Onde define-se

$$h = k + \sum_{i=2}^l (k - v_i) = kl - \sum_{i=2}^l v_i = \dim P_{k,\xi,v}$$

de tal forma que

$t = (t_i)_1^{n+k}$ seja uma seqüência não decrescente e:

a) $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq \xi_1$ e $\xi_{l+1} \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+w}$

b) para $i = 2, \dots, l$ o número ξ_i ocorre exatamente $k - v_i$ vezes em t

então a seqüência B_1, \dots, B_n de b-splines de ordem K com nós tem uma base

para $P_{k,\xi,v}$ considerado como funções em $[t_k, t_{n+1}]$, isto é,

$$\mathcal{S}_{k,t} = P_{k,\xi,v} \text{ em } [t_k, t_{n+1}]$$

número de condições de continuidade em ξ_i + número de nós em $\xi_i = k$
 número de condições v_i ; continuidade em $\xi_i + (k - v_i)$ número de nós em $\xi_i = k$
 número de condições $k - r_i$; continuidade em $\xi_i + r_i$ número de nós em $\xi_i = k$

Em particular, um nó de multiplicidade $k(v_i = 0)$ corresponde a nenhuma condição de continuidade, enquanto no outro extremo nenhum nó em ξ_i coincide.

Observação: Note que $t_i < t_{i+k}$, pois nenhum ponto tem multiplicidade maior do que k

Uma escolha conveniente para lidar com a arbitrariedade dos k primeiros e últimos nós é dada pela seguinte convenção:

$$t_i = t_2 = \dots = t_k = \xi_1 \quad \text{e} \quad t_{i+1} = t_{n+2} = \dots = t_{n+w} = \xi_{l+1}$$

note que usando $v_i = v_{l+1} = 0$ as fórmulas continuam válidas.

3.6 Mínimos quadrados

Seja $\tau_i = (\tau_i)_1^n$ uma seqüência de pontos não decrescentes pelo produto interno, temos:

$$\langle g, h \rangle = \sum_{i=1}^n w_i g(\tau_i) h(\tau_i)$$

A aproximação de uma função g por funções em $\mathcal{S}_{k,t}$ (splines de ordem k com nos

$t = (t_i)^{n+k}$, dado que $t_i < t_{i+k}$ para todo i e $t_1 = \dots = t_k = a$, $t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b$ é:

$$[a, b] = [t_k, t_{n+1}]$$

Dado que $(B_i) = B_{i,k,t}$, $i = 1, \dots, n$, e dado $\$ = \$_{k,t}$

Utilizando as propriedades dos B-Splines $(B_i)_i^k$ que têm como característica a divisão local não negativa de $[a, b]$ e que

para $t_i < t_{i+1}$ o valor do spline $f = \sum_j \alpha_j B_j$ no ponto x é estritamente convexo nos k números $\alpha_{i+1-k}, \dots, \alpha_i$

Os valores do spline em $\sum \alpha_j B_j$ no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ são determinados pelo tamanho de k coeficientes e B-Spline está diretamente ligado aos valores aproximados de f .

A escolha de B-splines como base parece ser conveniente, pois ela é relativamente bem conhecida para estimar um k não muito genérico.

Dado que $(B_i)_i^k$ é relativamente estável para $\$,$ existe uma constante positiva $D_{k,\infty}$ que depende apenas de k e não da seqüência particular de nós t , tal que:

$$D_{k,\infty}^{-1} \|\alpha\| \leq \|\alpha_j B_j\|_\infty \leq \|\infty\| = \max_j |\alpha_j|$$

Os valores mínimos que $D_{k,\infty}$ podem assumir são

Alguns valores	k	2	3	4	5
	$D_{w,\infty}$	1	3	5	$11 \frac{2}{3}$

e que geralmente é

$$D_{k,\infty} \sim 2^{k-3/2}$$

Note que a matriz de coeficientes do sistema normal

$$\sum_{j=1}^n (B_i, B_j) \alpha_j = (B_i, |g|) \quad i = 1$$

Sendo o problema minimizar $\langle g - f, g - f \rangle = \sum_{i=1}^n w_i [g(\tau_i) - f(\tau_i)]^2 \quad f \in \mathcal{S}_{k,t}$

E tem banda menor do que $k(\langle B_i, B_j \rangle) = 0$ se $|i - j| \geq k$, é simétrico definido semi positivo

$$\|f\| = [\sum_i w_i f(\tau_i)^2]^{1/2} \text{ com } w_i > 0$$

é uma norma em $\mathcal{S}_{k,t}$ se e somente se algum $1 \leq i \leq j \leq n$;

$$t_i < \tau_{ii} < t_{i+n}, \quad i = 1, \dots, n$$

Quando o sistema normal é Singular

A estratégia utilizada por de Boor aplica a base $(B_i)_1^n$ e é linearmente dependente de τ, i . Pelo menos um dos B_i dependem de τ_i , e linearmente de $w_i(B_i)$ s, que os precedem na seqüência. A solução é escolhida resolvendo para que os coeficientes D, t_i, B_i sejam iguais a zero.

3.6.1 Interpolação com splines

Sendo $t = (t_i)_1^{n+k}$ uma seqüência de nós não decrescentes com $t_i \leq t_{i+k}$

$(B_i)_1^n$ uma seqüência correspondente dos B-splines de ordem k

Dado que $\mathcal{S}_{k,t}$ é n dimensional

$\tau = (\tau_i)_1^n$: seqüência inteiramente crescente de pontos dados.

Agora vejamos o seguinte problema: dada uma função g , como encontrar o spline em $\mathcal{S}_{k,t}$ que interpola $(\tau_i, g(\tau_i))$, determinando que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(\tau_i) = g(\tau_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

3.7 "New Knot"

Utilizaremos uma variação dos splines de Shoenberg, junto com outras metodologias, para estabelecer quão boa é a aproximação por splines de qualquer ordem. Os resultados podem nos dar uma idéia da medida ótima com a qual pode ser avaliado o desempenho de todas as aproximações spline.

Partindo de uma seqüência de nós:

$$t = (t_i)_{i=1}^{n+k} \text{ sendo que } t_i < t_{i+k} \text{ para todo } i \text{ e } t_i = \dots = t_k = a \text{ e } t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = b$$

porém temos:

$$[a, b] = [t_k, t_{n+1}]$$

É de nosso interesse aproximar uma função g em $[a, b]$ com splines da ordem k com a seqüência de nós igual a t (por exemplo) e com os $\$_{k,t}$. Resumindo,

$$\|g\| := \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

E expressa continuamente:

$$w(g, h) = \max\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \leq h, \quad x, y \in [a, b]\}$$

3.7.1 A distância de uma função contínua

Escolhemos $t_1 \leq \dots \leq t_n$ dentro do intervalo $[a, b]$ que considera os splines de k -ésimo grau Ag da função contínua g dentro de $[a, b]$, resumida na seguinte expressão:

$$Ag := \sum_{i=1}^n g(t_i) B_i \text{ no intervalo } [a, b].$$

tomado g como uma constante. Para estimar o erro utilizamos uma propriedade dos B-splines: os B-splines são sempre positivos e a soma dos valores é igual a um.

Utilizando esta analogia é fácil estabelecer uma aproximação do erro.

Tomando um ponto X^\wedge em um intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ no conjunto $[a, b]$ então:

$$\sum_{i=j+1-k}^j g(t_i)B_i(\hat{x})$$

Utilizando a propriedade que determina que a soma dos B-splines é igual a um, temos que:

$$g(x^\wedge) - Ag(x^\wedge) = \sum_{i=j+1-k}^j ((g(\hat{x}) - g(t_i))B_i(\hat{x}))$$

Tomando o valor absoluto em ambos os lados e utilizando a não negatividade dos B-splines, teremos:

$$|g(x^\wedge) - Ag(x^\wedge)| \leq \sum_{i=j+1-k}^j |g(\hat{x}) - g(t_i)| B_i(\hat{x}) \leq \max\{|g(\hat{x}) - g(t_i)| : j-k < i \leq j\}$$

Agora escolhendo os t_i apropriadamente perto do suporte B_i , de onde escolhemos

$$T^i = t_{i+k/2} \quad i = 1, \dots, n$$

onde é declarado que:

$$t_{i+k/2} := (t_{i+(k-1)/2} + t_{i+(k+1)/2})/2$$

A liberdade de movimento da seqüência de nós é dada por:

$$\|g - Ag\| \leq [(k+1)/2]w(g; |t|)$$

E portanto temos:

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t}) \leq \|g - s\| \quad s \in \mathcal{S}_{k,t} \leq \text{const}_k w(g; |t|).$$

Se escolhermos $\tau_i = t_i = \frac{t_{i+1} + \dots + t_{i+k-1}}{(k-1)}$

Para todo i a transformação converte-se no método "variation diminishing" que aplicado, resulta a seguinte estimativa:

$$dist(g, \mathcal{S}_{k,t}) \leq \|g - Vg\| \leq 2w(g; \min\{\frac{b-a}{\sqrt{2k-2}}, |t|(\sqrt{\frac{k}{12}})\})$$

O que significa que a distância entre qualquer função contínua g de $\mathcal{S}_{k,t}$ tende a zero quando a malha é de tamanho $|t|$. Isso significa que podemos aproximar satisfatoriamente qualquer função arbitrariamente utilizando splines de uma ordem fixa, caso estejamos dispostos a utilizar muitos nós. A estimativa também mostra que $dist(g, \mathcal{S}_{k,t})$ tende a zero com pelo menos a velocidade do módulo de continuidade $w(g; |t|)$ de g até $|t|$ indo a zero acompanhando o tamanho da grade $|t|$. Isso quer dizer que qualquer função contínua pode ser arbitrariamente bem aproximada por splines de um grau fixo se houver a liberdade de utilizarmos qualquer quantidade de nós. A estimativa mostra que $dist(g, \mathcal{S}_{k,t})$ vai a zero pelo menos tão rápido quanto o $w(g; |t|)$ de g no ponto $|t|$ vai a zero com $|t|$.

3.7.2 Posicionamento dos Nós.

As aproximações spline na metodologia de New Knot são locais, o que ajuda na intuição sobre o efeito do posicionamento dos nós para atingirmos a precisão de uma aproximação por splines. Para tanto, utilizaremos o resultado das condições de contorno $dist(g, \mathcal{S}_{k,t})$ em termos do tamanho global da grade $|t| = \max_i \Delta t$.

Mas não é possível achar os nós ótimos sem que conheçamos a função g suficientemente boa para avaliar $\|g - f\|$. Em geral, g pode ser estimada aproximadamente ou implicitamente, ainda que tivéssemos um método para escolher a seqüência de nós t apropriadamente. Não é factível esperar que a colocação de cada nó seja ótima, mas podemos esperar obter uma distribuição ótima de densidade. Caso tal distribuição seja ótima, tomaremos algumas liberdades sobre a colocação de nós individuais. Primeiro agrupemos os nós em um intervalo aberto $]a, b[$, em sub-grupos

$k-1$ com multiplicidade $k-1$. Se, por acaso, tal medida não resultar o efeito esperado, alguns pontos adicionais poderão ser utilizados. A fim de identificar os nós adicionados, os apresentamos no intervalo aberto $]a,b[$ como $\zeta_1 = a, \zeta_{m+1} := b$. Desta forma temos:

$$\|g - Ag\|_{[\zeta_j, \zeta_{j+1}]} \leq \text{const}_k \|g^k\|_{[\zeta_j, \zeta_{j+1}]} |\Delta_{\zeta_j}|^k \quad j = 1, \dots, m$$

Sugerindo que seja colocado ζ_2, \dots, ζ_n para assim minimizar:

$$\max_j \|g^k\|_{[\zeta_j, \zeta_{j+1}]} |\Delta_{\zeta_j}|^k$$

Já que $s(\alpha, \beta) = \|g^k\|_{[\alpha, \beta]} |\beta - \alpha|^k$ é uma função contínua de α e de β e decrescente em α , sendo minimizada quando determinamos ζ_2, \dots, ζ_n de maneira que:

$$\|g^k\|_{[\zeta_j, \zeta_{j+1}]} |\Delta_{\zeta_j}|^k \text{ constante para}$$

$$j = 1, \dots, m$$

O valor exato de ζ_2, \dots, ζ_m é difícil de ser calculado, mas de maneira equivalente temos:

$$\|g^k\|_{[\zeta_j, \zeta_{j+1}]}^{1/k} \Delta_{\zeta_j} \text{ constante para } j = 1, \dots, m$$

Que assintoticamente tem a mesma distribuição de ζ_j dando a oportunidade de ser determinado.

Desta maneira, resolvemos substituindo a função $\|g^k\|$ por uma aproximação constante ζ_2, \dots, ζ_m como:

$$\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} |g^{(k)}(x)|^{1/k} dx = \frac{1}{m} \int_a^b |g^{(k)}(x)|^{1/k} dx, \quad j = 1, \dots, m$$

A técnica consiste em substituir $g^{(k)}$ por uma aproximação h constante por partes. Sendo que f é uma aproximação pp de ordem k para g calculada.

Denotada por $\phi_{i+1/2} = D^{k-1}f$ em $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ para todo i

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \frac{|\Delta\phi_{3/\alpha}|}{|\xi_{i+1} - \xi_i|} & \text{em } [\xi_1, \xi_\alpha] \\ \frac{|\Delta\phi_{1-1/\alpha}|}{|\xi_{i+1} - \xi_i|} + \frac{|\Delta\phi_{1-1/\alpha}|}{|\xi_{i+1} - \xi_i|} & \text{em } [\xi_1, \xi_{+1}], \alpha \leq i \leq m-1 \\ \alpha \frac{|\Delta\phi_{m-1/\alpha}|}{|\xi_{i+1} - \xi_i|} & \text{em } [\xi_m, \xi_{m+1}] \end{array} \right\}$$

Agora o problema está em aproximar h da função $|g^k|$. Burchard propõe calcular primeiro algumas aproximação da ordem $k+1$ até g utilizando o valor absoluto da k -ésima derivada para aproximar h . Tal método não se mostrará tão complicado sempre e quando realmente se aproximar h de $|g^k|$.

Agora consideremos brevemente o quão bem uma função pode ser aproximada por splines de uma ordem dada com um número determinado de nós colocados apropriadamente.

$$dist(g, \mathcal{S}_{k,n})$$

Onde $m_{k,n}$ é a amostra de todos os splines de ordem k com uma seqüência de nós igual a $t = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ com $t_1 = \dots = t_k = a$, $t_{k+1} = \dots = t_{n+k} = b$ com n fixa.

Os resultados destas premissas levaram Rice [1969], Buchard [1974], Dodson [1972] e de Boor [1973] à seguinte conclusão:

Assumindo que a função g é contínua no intervalo $[a,b]$ e k vezes derivável em todos os pontos finitos de $[a,b]$, onde $|D^k g|$ é monotônica e a k -ésima raiz de $D^k g$ é diferenciável, temos:

$$\int_b^a |D^k g(x)|^{1/k} dx < \infty$$

Caso o número de nós seja limitado ou a quarta ou a quinta derivada sejam mínimas, o impacto de novo nó será relativo, restringindo o número de iterações e resultando em melhorias relativas a outras metodologias, como mínimos quadrados.

3.8 Aproximação Cúbica com Suavização (Cubic Smoothing Splines)

Um spline em geral é um polinômio por partes. Na construção, tanto da curva quanto da primeira derivada, eles são contínuos em todos os pontos. Isto coloca restrições nos coeficientes de um dos segmentos do polinomial, dando maior atenção para funções cúbicas (resultantes em um spline cúbico). Em outras palavras, em uma função spline cúbica é requerido, forçosamente, que passemos através de todas as observações. Um spline cúbico suavizado é menos estrito, mas por outro lado, devemos salientar que temos um ponto de quebra em cada uma das observações, que ajusta um polinômio cúbico entre cada uma das quebras. Um spline cúbico suavizado f , dados os parâmetros de suavização $q \in [0 \dots 1]$, minimiza a seguinte expressão:

$$q \sum_{i=1}^n w_i [f(r_i) - (r_i)]^2 + (1 - q) \int_{x=1}^{x(n)} (D^2 f(t))^2 dt$$

Como podemos observar, a parte esquerda da equação (cubic smoothing) mede a distância aproximada da função w_i que são os pesos para cada taxa spot i e o índice que representa o número de vértices da série. O lado direito representa a medida de irregularidade baseada na segunda derivada da função spline, sendo que todas as observações se encontram dentro dos limites de integração para x .

O parâmetro de suavização $q = 1$, junto com os pesos w_i para todo $x \dots x(n)$, resulta em uma regressão por mínimos quadrados, quando no outro extremo é

utilizado $q = 0$. O valor da interpolação cúbica com suavização corresponde a um spline com condições de contorno iguais ao condicional, ou seja, os valores da segunda derivada são iguais a zero. Segundo de Boor ⁽⁹⁾, e considerando uma avaliação numérica, temos que o melhor q a ser utilizado fica próximo de:

$$q = \frac{1}{(1 + h^3)/6}$$

Onde h representa o espaçamento médio do tempo (x), ainda que a escolha do valor do parâmetro represente um problema sutil. Já que existe um equilíbrio entre a eliminação de ruído e a extração de dados relevantes.

3.9 Aproximação Cúbica com Suavização e Tolerancia

A aproximação cúbica com suavização e tolerância parte dos princípios mostrados no modelo de interpolação cúbica com suavização, mas contém uma variante que controla o grau de liberdade da função. Nela é incluído um parâmetro que controla as oscilações, impondo uma penalidade na função objetivo, ao invés de diminuir o número de vértices. O nível de tolerância é calculado a partir da seguinte função:

$$F(D^m f) = \int_{x(1)}^{x(end)} \lambda(t) D^m f(t)^2 dt$$

Sendo que a constante λ determina o equilíbrio entre o ajuste e a suavidade, também chamado de grau de penalização. Conforme incrementa-se λ a função tende a ser linear. A flexibilidade do spline é determinada tanto pelo espaçamento dos nós quanto pela magnitude do λ . No entanto, se λ cresce demais, o espaçamento perde a relevância. O valor de m será 2, o que nos leva a um spline cúbico. Se escolhessemos

1 ou 3, teríamos como resultado, respectivamente, um spline linear ou quántico. O parâmetro de tolerância controla o excesso das oscilações ao mesmo tempo que utiliza a flexibilidade de uma suavização sem distanciar-se demais dos pontos originais, controlando o grau de liberdade da função.

4 Metodologias e Resultados_____

4.1 Foco no mercado Brasileiro

Enquanto nos Estados Unidos, onde é escrita grande parte da literatura financeira e o mercado é mais líquido, existem informações históricas de longo prazo e uma fronteira maior de investimento; no Brasil as informações utilizadas como base para criar a curva de juros partem das taxas de curto prazo, dos futuros e dos swaps. A vantagem é que no mercado local os produtos com cupom não são tão representativos no mercado, sendo desconsiderados na criação da curva de juros. Isto ajuda nos cálculos, evitando um problema comum de metodologia de bootstrapping e tornando possível a utilização direta das taxas.

As junções destes diferentes elementos provêm as ferramentas necessárias para traçar uma curva que represente o mercado de juros Brasileiro. Mesmo assim, existem problemas de alcance, como no caso do último vencimento dos swaps (situado próximo dos três anos) que resulta uma carência de informações no longo prazo. Um dos objetivos deste trabalho, além de testar as diferentes metodologias de união dos mais significativos benchmarks, é estimar uma curva de juros brasileira capaz de refletir a realidade do mercado.

Ao tomar uma variedade de instrumentos para determinar esta curva de juros, nos deparamos com uma serie de problemas, tais como a desigualdade do comportamento, os diferentes tipos de precificação e a distinta sensibilidade ao mercado. Tais fatores servem de exemplo de como são afetadas as informações no caso dos swaps e, mais especificamente, o risco de crédito que vem embutido na curva de juros de swap.

Existe também, e merece destaque, uma grande restrição que será comentada adiante: a escassa liquidez dos instrumentos criam variações, oportunidades de arbitragem e, ao contrario da literatura americana que trabalha com mercados

completos e equilibrados, diferenças significativas nas metodologias e resultados dos testes.

4.2 Liquidez

Já que normalmente as emissões de papel governamental são suficientemente grandes para assegurar o livre fluxo de mercado, elas permitem que as compras e as vendas sejam realizadas com margens muito pequenas, sendo utilizadas algumas dessas emissões como referência. A existência de papel com vencimentos específicos e grande liquidez atraem mais investidores do que aqueles que talvez sejam mais difíceis de serem vendidos, criando uma variação em spread e dificultando a precificação destes instrumentos. A liquidez é refletida diretamente na margem de compra e venda, tornando mais complicada a operação recíproca em caso de haver uma operação em aberto. Em algumas situações o excesso de liquidez pode criar anormalidades, como por exemplo: um papel com três anos de vencimento apresentar uma taxa menor que um instrumento com um ano. Isto faz com que existam diferentes perspectivas de como criar uma estrutura a termo, já que se tomamos unicamente os papéis mais líquidos, poderemos incorrer no erro de criarmos uma curva significativamente menor do que o resto dos papéis. Geralmente as pessoas concordam que os pontos líquidos representam o benchmark para uma representação fiel do mercado. Outros pensam que criando curvas inteiras sobre produtos específicos através do tempo, têm uma melhor perspectiva da situação real do mercado. No entanto, é difícil simplesmente utilizar benchmarks para a realização de uma estimativa da curva de juros, uma vez que existem relativamente poucos pontos líquidos.

4.2.1 Teoria de preferência de Liquidez

Hicks⁽¹⁰⁾ propôs na sua teoria de preferência de liquidez que os empréstimos sejam tipicamente tomados para financiar projetos no longo prazo, e que os contratantes preferem emitir instrumentos ou papéis que cubram o risco de flutuação

na taxa de juros, para assim não perder valor ao longo do tempo. Os credores preferem manter papéis no médio prazo para evitar flutuações no valor associadas a valores colocados no longo prazo. O comportamento de cobertura de riscos de taxa vem a partir da teoria de aversão ao risco, sendo que tanto o contratante como o credor estão dispostos a pagar mais e receber menos (respectivamente) a fim de evitar riscos. Isto nos leva a assumir que a teoria de preferência de liquidez implica que os contratantes estão dispostos a pagar um prêmio de liquidez nas taxas de curto prazo e que esse prêmio se incrementa em relação direta com o tempo.

O modelo de Hicks depende de uma distribuição particular das preferências dos períodos, já que se os credores tivessem preferências diferentes a relação seria rompida e teria que existir algum outro modo de se manter esta teoria. Considerando a relevância do princípio de prêmio de liquidez é interessante analisarmos os fundamentos sobre os quais está baseado.

4.2.2 Mercado de Derivativos

Notamos a existência de títulos de crédito atrelados à operações de derivativos, além de inclusos em um contrato bem estipulado à entrega física do título de crédito ou da cesta de títulos. O que não parece claro é como a existência de contratos de derivativos afetam os instrumentos base, já que os futuros são comumente sobre títulos de crédito considerados benchmark em datas específicas. A existência de um mercado de futuros incrementa a liquidez do instrumento, já que além de vender o instrumento per se, pode-se também vender o futuro. Como efeito desse mercado, todos os instrumentos que têm derivativos são mais voláteis, baseados na crença de que os investidores requerem uma taxa maior para cobrir a alta volatilidade do mercado.

4.2.3 Segmentação do Mercado

A dificuldade para a determinação da estrutura a termo reside na existência de

”habitats preferidos” ⁽¹¹⁾ que efetivamente segregam o mercado. São preferências de investimentos segundo o tipo de cliente, como por exemplo: os bancos procuram o curto prazo enquanto os fundos de pensão procuram períodos mais longos. Estas classes de investidores podem afetar os preços dos instrumentos, pois o incremento simultâneo da demanda a reduz em grande quantidade. Apesar das diferenças entre perspectivas e fronteiras de investimento partimos da premissa de que a disparidade criada por estas concentrações é dissipada pelos intermediários que aproveitam oportunidades de arbitragem e fecham as possíveis brechas entre ambos os grupos. Segundo Modigliani e Sutch (1966) os participantes de ambos os mercados têm vários períodos de vencimento no quais operam normalmente, mas vão operar fora dos limites comuns se o diferencial das taxas for suficiente. Desta maneira, os prazos antigamente preferidos vão passar a ser os mesmos (a preferência de ambos por um prazo meio), criando excesso de demanda. Os autores chegaram a conclusão de que os prêmios da estrutura a termo são uma função suave do período e não necessariamente monotônica. Posteriormente eles assumem que a estrutura de prêmio terá movimentos paralelos ao longo do tempo com a distribuição de habitats preferidos.

4.3 Critérios Gerais do trabalho

Os critérios para determinar os melhores métodos respeitam as seguintes características:

- **Suavidade:** O resultado deve ser uma curva relativamente suave. Ao invés de tentar ajustar cada um dos pontos, será considerada a significância de cada um. O objetivo deste trabalho é fornecer ao mercado uma referência para a cotação de pontos da curva. Buscaremos o melhor ajuste da maioria dos dados obtidos para apresentar uma curva que seja significativa para o mercado financeiro.
- **Flexibilidade:** A robustez do modelo será ratificado pela flexibilidade para se adaptar aos diferentes acontecimentos do mercado. O objetivo é que o modelo seja suficientemente flexível para capturar os movimentos da curva, sendo mais sensível

nos pontos mais curtos - já que tanto a liquidez quanto as informações ajudam a definir a forma e a inclinação do restante da curva.

- **Estabilidade:** A estimativa e o ajuste têm que ser estáveis em cada ponto da curva, independente da data de vencimento. Tal estabilidade deve garantir que pequenas mudanças nas informações ou em um ponto específico não criem nichos ou desvios no restante da curva.

A meta é de achar a estrutura a termo que dá como resultado uma curva confiável e útil para avaliar títulos em qualquer ponto e não em um ponto particular. O modelo tem que proporcionar informações que devem funcionar em diferentes períodos de tempo e não por um período só.

4.4 Metodologia de Comparação entre modelos de estrutura a termo

Existe uma série de fatores, além da informação dos instrumentos, que influi no valor de mercado de um instrumento (como foi comentado no primeiro capítulo): impostos, mercados derivativos, consideração dos papéis como referência etc. são elementos que afetam a relação entre o valor de um instrumento e a estimativa da estrutura a termo. Tais fatores serão decisivos na criação de uma curva para um mercado particular. É importante haver um equilíbrio entre os modelos, que são muito flexíveis, se sobre-ajustam às informações. Apesar disso, é possível obtermos uma curva suavizada que seja inflexível e incapaz de capturar o comportamento do mercado. Este trabalho tem por objetivo testar as restrições impostas a um modelo em particular e analisá-las ex ante para um mercado específico.

Como foi comentado no primeiro capítulo, a estrutura a termo pode ser criada a partir de diferentes instrumentos representativos para vários períodos. Isto remete a alguns problemas e dúvidas, tais como: os instrumentos têm um comportamento consistente durante a vida toda; existe um conjunto de datas de vencimento onde a fronteira de um instrumento e outro é muito sutil. Qual o risco embutido dentro do

preço? Qual o tamanho de mercado? O produto é suscetível a manipulações no preço?

O objetivo é fazer uma estimativa a partir de um método empírico da estrutura a termo para ajustar a curva forward sempre e quando o ajuste for bom e a função resultante for suave. Além disso, é importante demonstrar e comprovar como os resultados fazem sentido no mercado atuante, neste caso no brasileiro.

No total, dez metodologias serão implementadas. Nesta secção o objetivo é quantificar a sensibilidade de nove funções baseadas em metodologias spline e uma em interpolação exponencial.

4.4.1 Seleção do Método

A proposição do melhor método, que acompanhe os movimentos da curva de juros e que seja suficientemente robusto, deve estar de acordo com os critérios gerais do trabalho para a estimativa da curva de juros durante um período definido de dias. Primeiramente serão analisados os critérios de seleção de modelos e posteriormente os métodos de seleção, que serão apresentados na forma de regras objetivas com o intuito de determinar o melhor desempenho durante o período estudado. No final, apresentaremos um modelo que melhor aproxime os parâmetros estimados para o período t . É importante salientar que consideraremos como o melhor método aquele que mostre um desempenho superior em todas as curvas do período analisado.

O objetivo final é chegar em um modelo suficientemente robusto para se ajustar aos períodos atuais e futuros sem câmbios fortes nos parâmetros, e não simplesmente analisar a minimização de erros de datas históricas. De fato a minimização dos erros da população pode levar a conclusões errôneas, já que a amostra pode conter ruídos que impertinentes à população. Utilizaremos, como a maioria dos estudos que aplicam estas metodologias, o erro quadrático médio.

Para evitar que o modelo capture ruído é preciso verificar sua eficiência de filtragem, cuja primeira definição é a capacidade de explicar os dados observados sem erro. Estatisticamente é conhecido como "seleção de modelo" a tarefa de

escolher um modelo de complexidade que seja o melhor, a partir de uma amostra finita de dados. Neste caso, existem dois caminhos estatísticos: o analítico e a re-amostragem. Ambos tem a característica de controlar a complexidade em um momento posterior da estimação.

4.4.2 Critérios Analíticos

Estes critérios buscam penalizar a medida de ajuste dos dados na estimação de acordo com o aumento da complexidade. Hardle(1988) mostra que todos os critérios conhecidos para avaliar estimadores lineares de regressão podem ser escritos como uma função de erro quadrático médio. Estes, por sua vez, apresentam dois tipos de problema. Primeiramente todos eles são motivados por argumentos assintóticos para estimadores lineares e, em segundo lugar, são válidos unicamente para amostras grandes. Neste caso, como sabemos, o número de contratos líquidos negociados diariamente no Brasil não pode ser considerado como tal (grande).

4.4.3 Reamostragem

As técnicas partem de um princípio simples: dividir a amostra em duas partes, sendo uma para a estimação dos parâmetros e outra para testar o modelo. Testar o modelo significa avaliar a medida de desempenho sobre os dados não observados na estimação ou avaliar os erros de previsão. Tendo a amostra n elementos, $n_{\{i\}}$ será a cardinalidade do conjunto de teste e k a cardinalidade do conjunto de validação que pode ser resumido na seguinte fórmula:

$$n = n_i + k$$

A estratégia mais simples de reamostragem divide os dados em duas partes: geralmente treinamento e para validação sendo que as porcentagens destes pode variar. A hipótese vem da distribuição de probabilidade $P(x,y)$ desconhecida, o que é

razoável para grandes amostras, mas não para as pequenas. A estratégia de definição da amostra é relevante para determinar a exatidão da estimação do modelo, sendo que a sub-amostra assume um papel importante.

4.4.4 Cross Validation

Cross validation é uma metodologia de reamostragem que consiste em estimar o modelo em todas as combinações possíveis de partições e avaliar o desempenho do modelo na média. Uma abordagem prática da cross validation é a k-fold-cross validation que divide as amostras em k sub-amostras de iguais tamanhos. O que é de nosso interesse é calcular os valores para o número de amostras omitido e computar o erro contra o valor real. Caso que k seja igual ao tamanho da amostra, o cross validation é chamado de "leave one out". Existem outras variantes como "leave v out" onde são eliminados diferentes subgrupos dos v casos. Cross validation é diferente a "split sample". Já que esta última é utilizada unicamente em um subgrupo (grupo de validação) para estimar o erro. Cross validation é considerado como um bom método para estimar o erro geral para funções contínuas. Especialmente erro quadrático (O principal motivo da escolha de esta metodologia). É considerado como um bom estimador quando existem limitantes da quantidade de informação. Kohavi (1995) obteve bons resultados utilizando o leave one out de tipo 10-fold para arvoreamento de decisão; mas explica que se tiver um k de 2 ou até 5 é melhor utilizar k-splits randômicos. Em alguns casos chegase a comparar o leave one out cross validation com o teste de AIC. A qual tem a propriedade de ter uma probabilidade assintótica de um se e escolhido um "boom" subgrupo e de menos um se e escolhido o "melhor" subgrupo (Stone 1979). E que do mesmo jeito tende a sobreestimar amostras pequenas.

O procedimento é o seguinte:

- 1.- Estimar os parâmetros em toda a amostra;
2. - Estimar os parâmetros em toda a amostra exceto na subamostra S;
3. - Testar o modelo sobre s e calcular o erro quadrado das previsões;

4. - Repetir os três passos acima para as k-1 sub-amostras restantes;
5. - Calcular o erro quadrado médio.

O tipo mais popular é o leave one out, k=1 de Stone (1974). É importante salientar que "leave k out cross validation" junta cada uma das k sub-amostras em apenas um elemento. Breiman e Spector (1992) apresentaram evidencia de que o k-fold cross obtém melhores resultados que o leave k fold cross, que por sua vez obtém melhores resultados que o leave one out.

A principal vantagem da reamostragem sobre os critérios analíticos é que esta não depende de hipóteses estatísticas dos dados e nem de propriedades específicas das funções aproximadoras, apesar de apresentar um alto custo computacional.

4.4.5 Critério Adotado

A fim de manter a consistência na curva de juros e devido à pequena quantidade de pontos (10) foi decidido que leave k out cross validation one out é bom o suficiente para esta avaliação. Implementaremos algumas restrições para a aplicação do modelo. Primeiro: limitaremos o valor máximo de k, já que, por exemplo, os splines reúnem pelo menos dois pontos (extremos) para que haja consistência. Segundo: as combinações estarão restritas a tirar um ponto por vez em cada um dos vértice. Isso significa que em 9 vértices, em uma determinada data, somente 7 pontos poderão ser retirados. O cálculo foi determinado como Beta, onde:

4.4.6 FÓRMULA DE ERRO LOCAL

Aproximação co todas as partes S

Aproximação escolhada a j-ésima parte S^j ; $2 \leq j \leq u - 1$

$$\ell = \left(\sum_{i=2}^{n-1} w l_j^2 \right)^{1/2}$$

$$\ell_j = | S(t_i) - S^j(t_i) |$$

Será definido como o melhor método de interpolação para o dia t aquele que apresentar o menor valor para o erro quadrático médio em relação a todas as

previsões geradas.

Podemos também estabelecer o critério de seleção. Define-se como o melhor método de interpolação para o período T aquele que obtiver o menor valor na função.

4.4.7 FÓRMULA DE DE ERRO GERAL

Também é importante medirmos o erro, tanto localmente como geralmente, pois como estamos trabalhando com splines o fato de diminuir o erro local pode ter um efeito na curva toda. Apesar disso, avaliaremos este desvio - agora chamado de erro geral, onde:

Aproximação co todas as partes S

Aproximação escolhada a j-ésima parte S^j ; $2 \leq j \leq u - 1$

$$g^{(j)} = \sum_{i=1}^n (w_i [S(t_i) - S^j(t_i)]^2)^{1/2}$$

$$g = [\sum_{j=2}^n (g^j)^2]^{1/2}$$

Um último critério adotado é a medição do comprimento da curva, já que muitas oscilações e um comprimento muito grande são especialmente negativos nos períodos compridos da curva. Isso porque é esperada uma curva monotônica e suave, segundo os critérios gerais do trabalho. Deve existir um balanço entre o erro e o comprimento da curva, já que a curva pode estar fora da realidade por ficar muito longe de um ponto crítico. Além disso, os pontos com ruído podem gerar oscilações não reais.

Primeiramente criaremos uma grade, ou seja, uma discretização para medir o espaçamento da curva, definindo um espaço de 100 pontos entre cada um dos vértices, o que nesse caso significa a criação de uma grade de 900 pontos. Onde temos:

Será considerado melhor aquele modelo que resulte em uma curva menor.

Concluindo: será escolhido como o melhor modelo aquele que apresentar os melhores resultados do erro local, erro geral e menor cumprimentos

4.5 Dados

O período de análise abrange de 3 de Janeiro de 2000 a 3 de Março de 2002. A curva de juros é composta pelas taxas de juros à vista atualizadas e convertidas para taxas forward. Os primeiros 5 pontos são futuros de DI e finalmente os últimos 4 vértices são swaps pré. O regime de capitalização é exponencial na base de dias úteis. Apenas os contratos mais representativos foram selecionados. Já que está intrínseco ao mercado brasileiro, como explicado no capítulo 2, se a base fosse diferente de 252 dias úteis os resultados não apresentariam qualquer consistência. Como o comportamento das taxas over é volátil, além de ser vítima de especulação, os efeitos para incluir a taxa CDI podem alterar significativamente os resultados.

Agrupação dos métodos

Interpolação	Mínimos Quadrados	Smoothing Splines
Variacional	Min Quad 1 Quebra	Suavização Geral
Not a Knot	Min Quad 2 Quebra	Nível de Tolerancia
	Min Quad 3 Quebra	Suavização por Vértice
	New Knot	

4.6 Resultados

4.6.1 Erro Quadratico Medio Local

Em um primeiro momento verificaremos os resultados obtidos ao analisar os erros Locais. Aplicamos a metodologia de cross validation tirando um ponto vértice por vez e comparando o resultado de cada método com o ponto verdadeiro. Um total

de 7 pontos foi substituído para manter a consistência das metodologias spline. A tabela 1 mostra o erro médio e o desvio padrão para cada método. O melhor critério de seleção de método adotado foi o spline que utiliza a metodologia de Suavização por Tolerancia (Smoothing Spline with Toelrance). Isso ocorre devido ao fato de que as estimativas têm uma melhor previsão quando comparadas aos valores verdadeiros. Em geral, não apresenta viés e tem o menor desvio-padrão entre os demais. O método de Mínimos quadrados com 1 quebra por partes é ligeiramente inferior, tanto na média de erro como no desvio padrão. Por outro lado, vemos que o restante apresenta um desempenho variando de médio a ruim, e que tanto a metodologias de Interpolação quanto a metodologia de New Knot, dos quais se esperava um desempenho mais significativo, têm problemas de ajuste.

Erro Quadrado Mínimo Local

	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Minimos Quad	Novo No
Media	0.02967	0.03012	0.02967	0.02862	0.03457
Desvio Padrao	0.02516	0.02396	0.02516	0.02321	0.03005
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	MIN Quad 1 Quebra	MIN Quad 3 Quebra
Media	0.02282	0.02404	0.02349	0.02542	0.02888
Desvio Padrao	0.01351	0.02217	0.02163	0.01899	0.02632

A principal função da análise do erro quadrático médio é verificar a previsão e a quantidade de acertos sobre os pontos que foram retirados, estimados e depois comparados com o número real. Neste caso, consideramos todos aqueles que tiveram um desempenho menor que .01 e o tomamos como se fosse um acerto. Isto servirá para comparar e verificar se a estimativa e as metodologias têm pelo menos um grau aceitavel de previsao. De acordo com a tabela 2, temos que a metodologia de Suavização por Vértice chega a apresentar 28% de acerto segundo nossos parâmetros de aceitação. Os demais têm uma porcentagem relativamente aceitável, todos variando entre 12 e 28%. Caso consideremos os spreads (Compra-venda), o índice de acertos será muito maior, já que tal medida pode ser afetada pela liquidez do mercado. Neste caso, optamos por não utilizá-la, já que poderia dar um vies

dependendo do horário (neste caso fechamento).

Porcentagem de Acertos

	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Minimos Quad	Novo No
Vezes	17%	14%	17%	14%	15%
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	MIN Quad 1 Quebra	WIN Quad 3 Quebra
Vezes	16%	25%	28%	12%	15%

Erro quadratico Medio Geral

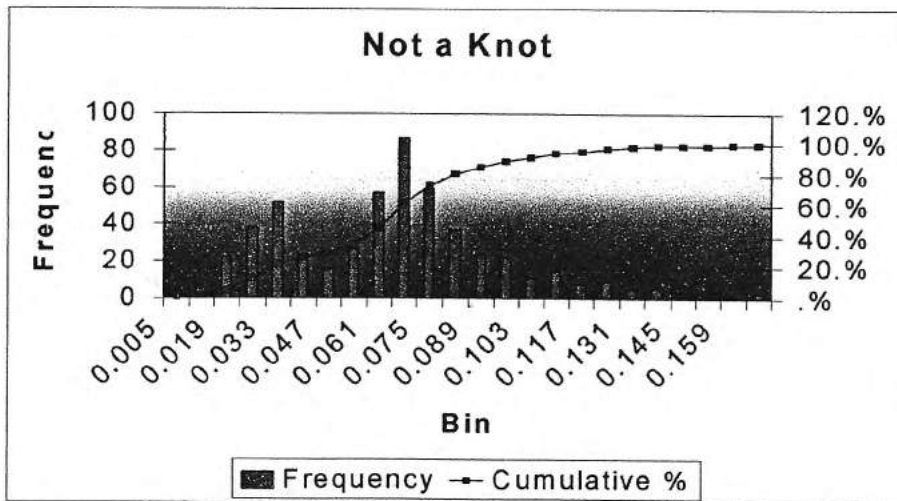
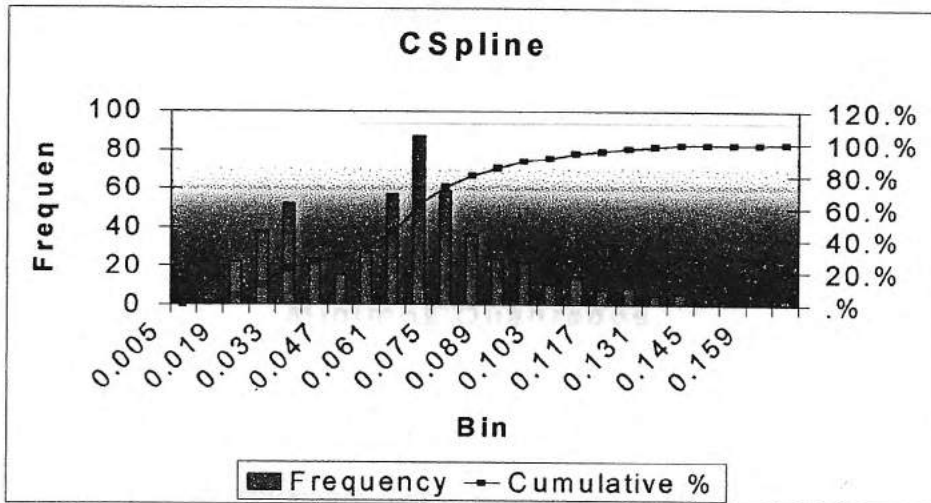
Em alguns erro quadrado médio Local pode ser considerado uma metodologia viesada, já que os efeitos de previsão não afetam apenas uma parte da curva. Isso ocorre porque as metodologias spline estão baseadas na utilização de pelo menos quatro pontos (neste estudo em específico) e desta forma o ajuste no restante da curva é afetado. A despeito dessa colocação verificaremos o erro geral de toda a curva a cada vez que um ponto for retirado. Os resultados mostram que o melhor desempenho passa ser o da Suavização com Tolerância, com um comportamento mais consistente tanto na média dos erros como no desvio padrão. As metodologias mais afetadas pelo novo tipo de análise foram: a dos mínimos quadrados, New Knot e os Mínimos quadrados s com duas e três quebras, as quais demonstraram significativas piores no erro quadrático médio e no desvio padrão, devido a que tem um efeito no comportamento geral.

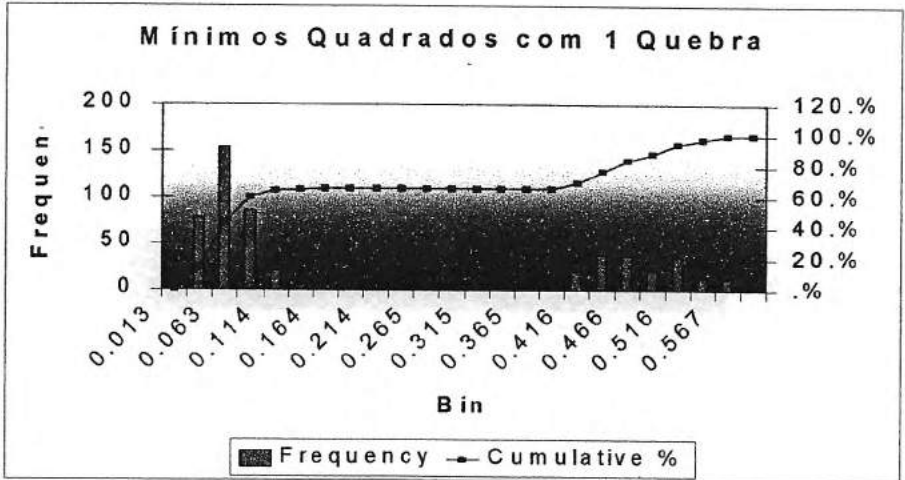
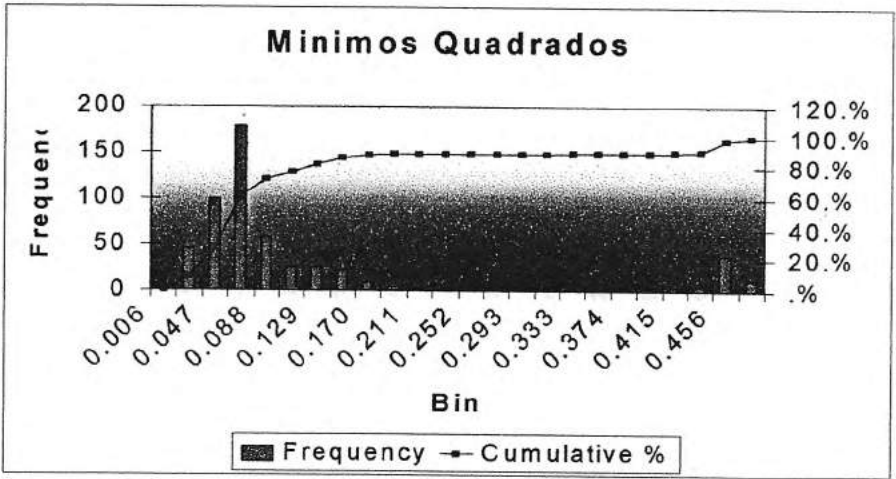
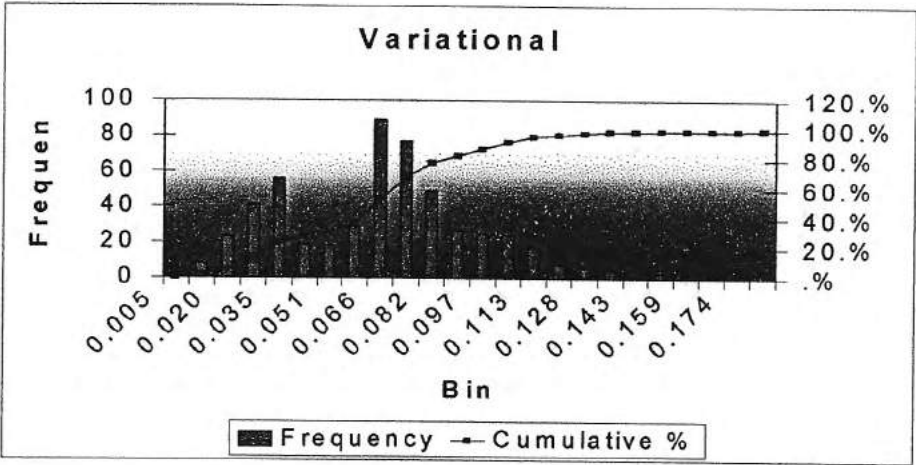
Media e Desvio Padrao do erro Geral

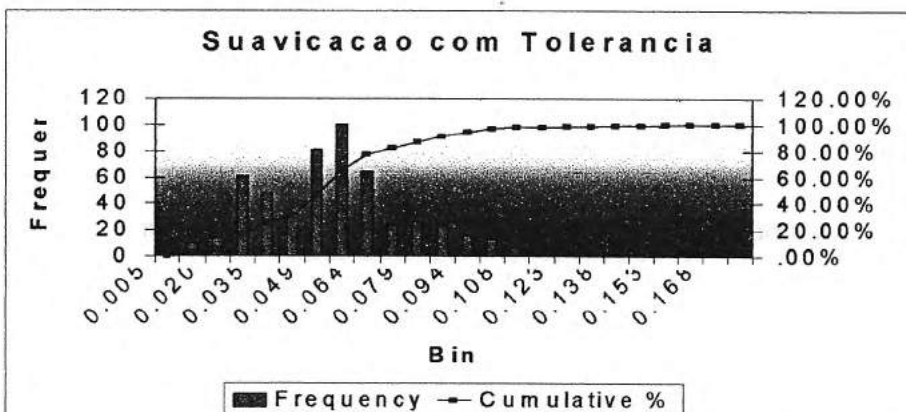
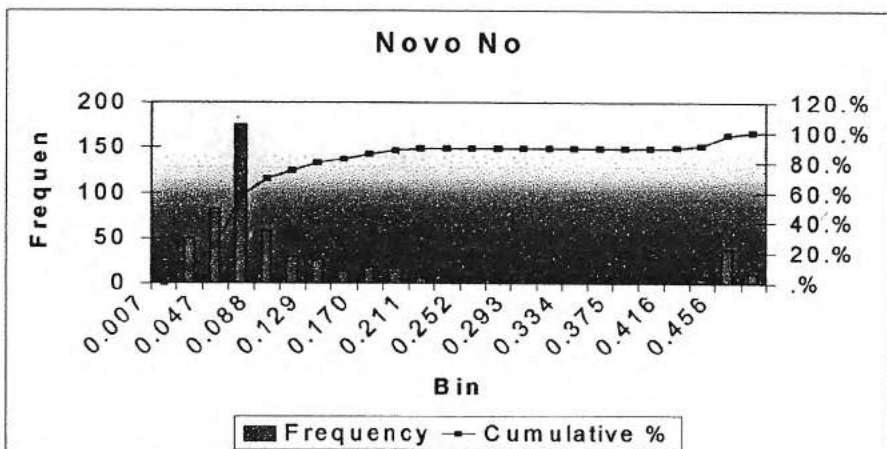
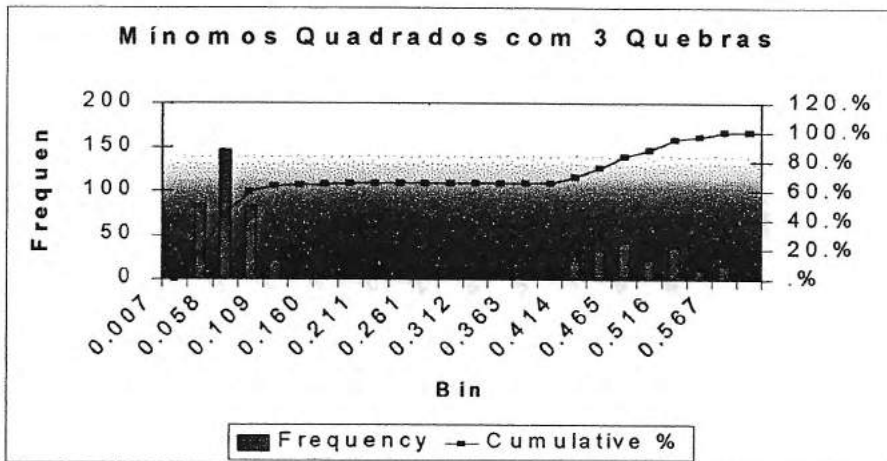
	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Minimos Quad	Novo No
Media	0.05549	0.05518	0.05549	0.19715	0.20017
Desvio Padrao	0.02782	0.02745	0.02782	0.20056	0.19940
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	Min Quad 1 Quebra	Min Quad 3 Quebra
Media	0.04541	0.18988	0.18952	0.19835	0.19552
Desvio Padrao	0.01971	0.20407	0.20429	0.19932	0.20151

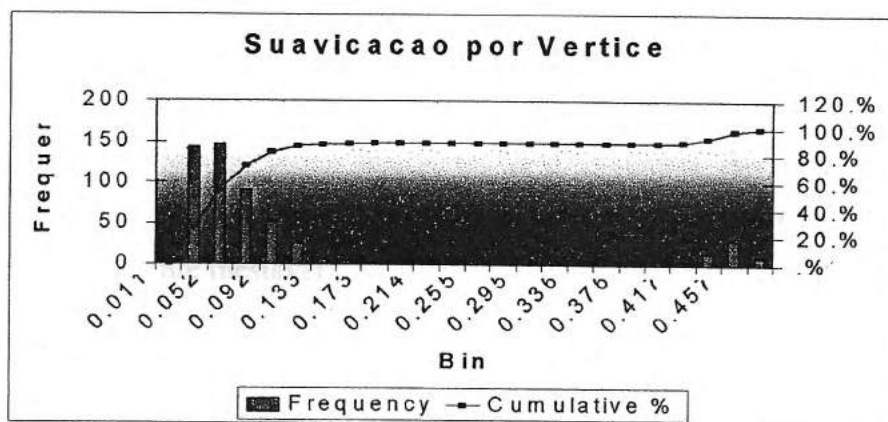
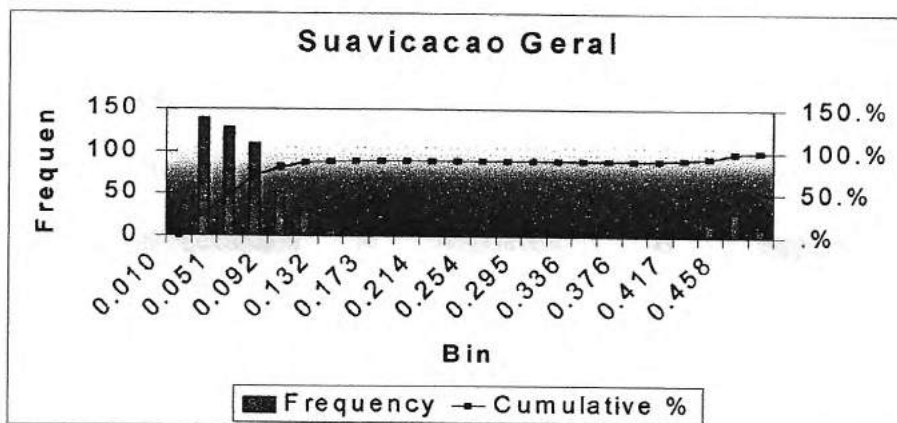
Para chegarmos a alguma conclusão é necessária a realização de uma análise detalhada na distribuição dos erros. Para tanto construímos um histograma com os

resultados, a fim de observar a distribuição dos erros e encontrar alguma metodologia que se assemelhe a uma distribuição normal. Os gráficos mostram tanto a frequência de cada patamar dos erros quanto a porcentagem acumulativa dos erros.









Como temos uma idéia da distribuição dos erros para cada uma das metodologias, vamos fazer um outro tipo de análise, neste caso não tão estatística, mas sim quantitativa. Veremos agora a quantidade de vezes que uma metodologia demonstra o mínimo erro quadrático para cada dia de toda a amostra. Trabalhando sobre os resultados dos erros quadráticos gerais, temos que a Suavização por vértice foi, em 116 vezes, a metodologia que apresentou perto da metodologia que apresentou o menor erro, Suavização por Tolerancia. A proximidade dos resultados tanto dos erros quadráticos como na quantidade de mínimos é relevante e será abordada mas adiante. Esta análise esbarra na provável possibilidade desta suavização não se ajustar corretamente aos movimentos do mercado.

Quantidade de Vezes que o procedimento foi o mínimo

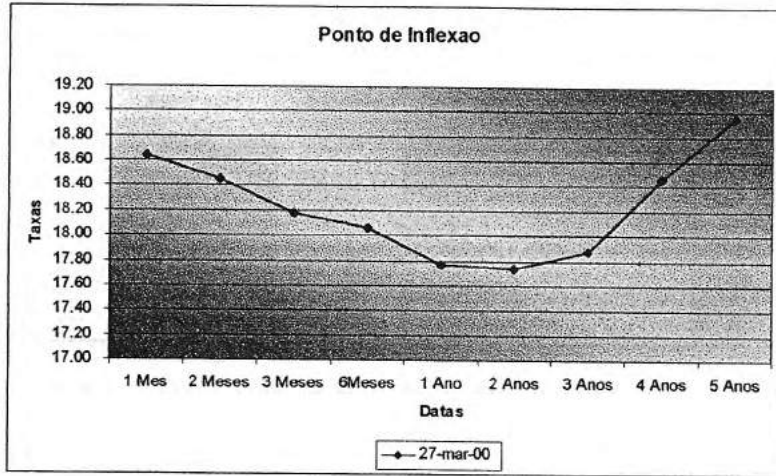
	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Minimos Quad	Novo No
Vezes	18 6	9 10	18 6	11 8	13 7
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	Min Quad 1 Quebra	Min Quad 3 Quebra
Vezes	138 1	36 5	116 3	43 4	10 9

Dando prosseguimento à análise dos resultados do quadro anterior e procurando uma justificativa para os resultados até agora obtidos, vejamos qual o impacto de somar a diferença entre o erro quadrático mínimo para cada uma das datas em cada uma das metodologias. Esta análise não consiste em simplesmente descobrir a volatilidade das metodologias, mas sim complementar o estudo do erro médio e a análise da distribuição dos erros. mantemos a consistencia da superioridade da metodologia de suavização or tolerancia e a percepção de que o erro das suavização por vertice e sumamente instavel.

Total desvio comparado contra o minimo

	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Minimos Quad	Novo No
Valor	-8.9496	-8.7835	-8.9496	-84.0274	-85.6279
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	C Spline 2 Quebra	C Spline 3 Quebras
Valor	-3.6054	-80.1781	-79.9854	-84.6656	-83.1649

O quadro do desvio comparativo entre o erro quadrático mínimo e o resultado de todas as metodologias mostra a volatilidade de cada grupo. No quadro que mede a quantidade de vezes que algum procedimento foi mínimo Suavização por vértice apareceu como uma das melhores metodologias, segundo apreciamos que tanto a metodologia de minims quadrados como de suavização por vértice fica relativamente distante da melhor metodologia. Esta metodologia tem grandes variações ao erro mínimo, o que demonstra a inflexibilidade de se adaptar às diferentes condições de mercado.



A razão pela qual o modelo de Suavização por vértices apresenta problemas de ajuste aos movimentos de mercado está relacionada à existência de períodos de inflexão, ou seja, períodos curtos onde as taxas de médio prazo têm comportamentos anormais. O quadro acima mostra um exemplo (Março 27, 2000) onde as taxas de um, dois e três anos são menores que as taxas de curto e de longo prazo. Tal constatação exige uma recalibragem do modelo, para que este se ajuste ao mercado atual. Como partimos do pressuposto de que nenhum modelo será recalibrado, devemos desconsiderar aqueles que sejam fixos, que precisam de ajustes ou que se mostram pouco flexíveis.

Quitando periodos de inflexão

	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Minimos Quad	Novo No
Media	0.05214	0.05201	0.05214	0.19298	0.19619
Desvio Padrao	0.02502	0.02496	0.02502	0.20156	0.20019
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	C Spline 2 Quebra	C Spline 3 Quebras
Media	0.04270	0.18624	0.18391	0.19479	0.19123
Desvio Padrao	0.01685	0.20509	0.20328	0.20015	0.20256

Agora verifiquemos os resultados eliminando os pontos de inflexão durante o período de amostra - três períodos de aproximadamente dez dias. Os resultados continuam favorecendo a Suavização com Tolerância, o que demonstra que nem só os fatores especiais afetam os resultados, mas existe uma certa consistência. Outras metodologias são marginalmente beneficiadas na eliminação destes períodos (nas

medias principalmente), como a dos mínimos quadrados, o New Knot.

Cumprimento da Curva

	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Mínimos Quad	Novo No
Tamanho Medio	0.108	0.108	0.108	0.088	0.083
Desvio Padrao	0.067	0.066	0.067	0.059	0.055
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	Min Quad 1 Queb	Min Quad 3 Queb
Tamanho Medio	0.089	0.095	0.093	0.084	0.091
Desvio Padrao	0.059	0.062	0.062	0.056	0.059

Na determinação das metodologias e critérios de análise do comportamento dessas metodologias spline está incluso o α que mede o comprimento da curva. Um dos principais problemas das metodologias Spline é a criação de flutuações inexistentes na curva de juros. Porém, é de crucial importância a análise do comprimento da curva. Como era de esperar, os métodos que utilizam mínimos quadrados mostraram o menor tamanho da curva. A liderança mostrada pelo New Knot seguido de perto do Mínimos quadrados com 1 queabra, tanto no tamanho médio como no desvio padrão do comprimento, está sintonizada com os resultados esperados. Em segundo lugar aparece a Suavização com Tolerância, seguido pelo método de Suavização Geral, os quais vêm mostrando uma consistência satisfatória dos resultados.

5 Conclusão

Primeiramente foram apresentados os fundamentos dos juros e aqueles necessários para a criação da estrutura a termo. Também foi apresentada uma breve compilação das distintas metodologias de aplicação de splines, considerando fatores como: a inexistência de cortes de cupom, o pequeno número de contratos e a volatilidade perene característica deste mercado. Apesar de trabalhar sobre um entorno completamente diferente de onde os modelos foram criados, os resultados obtidos nos levaram a uma solução consistente. A principal utilização deste material é a aplicação ao mercado Brasileiro. Para tanto foram selecionados alguns métodos que mais se adaptaram às especificidades da curva de juros brasileira. Também foram testadas novas metodologias, nunca antes utilizadas, a fim de encontrar novas alternativas para a solução de um problema existente há muitos anos. Os splines Cúbicos representados por spline natural, spline variacional e Not a Knot cumprem com a função de criar curvas contínuas e suaves, sendo levemente representativo. As metodologias baseadas em mínimos quadrados mostraram poucas características atraentes, assim como resultados pouco aproveitáveis. As variações dos Mínimos Quadrados (com quebras) não atingiram inteiramente os resultados que se esperavam neste trabalho. Estas aplicações costumam funcionar com uma relativa força nos mercados desenvolvidos, mas, em nosso caso, tiveram algumas inconsistências. A boa surpresa deste estudo foram as metodologias de suavização, que além de mostrarem-se robustas, flexíveis e estáveis adaptaram-se facilmente ao mercado volátil como o brasileiro. Segundo o critério estabelecido (Cross Validation, leave k out) o melhor método na amostra inteira é a metodologia de Suavização com tolerância, como é apresentado no quadro do Ranking Geral.

Ranking Geral

	Cubic Spline	Variacional	Not a No	Minimos Quad	Novo No
Desv Pad	3	2	3	7	9
Erro Quad Med	3	2	3	6	5
Quant Minimos	5	9	5	7	6
Comprimento	9	8	9	3	1
Resultado Geral	20	21	20	23	21
	Suav Tolerancia	Suav Geral	Suav Vertice	Min Quad 1 Queb	Min Quad 3 Queb
Desv Pad	1	5	4	8	6
Erro Quad Med	1	8	9	4	7
Quant Minimos	1	4	2	3	8
Comprimento	4	7	6	2	5
Resultado Geral	7	24	21	17	26

Tanto no desvio padrão, erro quadratico medio e superior ao resto das metodologias mostrando ter flexibilidade, suavidade e estabilidade (consideradas como principais dentro deste trabalho). Nas outras analises aplicadas como a quantidade de mínimos e comprimento da curva, o modelo mostrou ficar dentro dos primeiros. Conclui-se que a superioridade da metodologia Spline suavizada com Tolerância, frente ao restante ja tem a capacidade de adaptarse a um mercado como o Brasileiro.

No periodo analisado o desempenho das demais metodologias varia dependendo do periodo, volatilidade nas distintas partes da curva, requerendo ajustes para refletir uma curva economicamente significativa.

6 Bibliografia

Anderson N et al, **Estimating and interpreting the Yield Curve**, John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, England.

Bekdache B and Baum C.F., **The Ex-Ante predictive Accuracy of alternative models of the Term structure of Interest Rates**, Thessis, August 19, 1997, Boston College.

Bliss, R.R (1996). **Testing term structure estimation methods**, Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta 96(12) 1-43

Diebold F and Li Canlin, **Modeling and Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields**, Working paper, University of Pennsylvania, December 2000, pp 1-44.

D'Almeida Monteiro A. e Monteiro de Salles F. **Interpolacao da curva de juros brasileira: metodos e medidas de desempenho**, Artigo Técnico, Resenha BM&F no 147 pag 1-15.

De Boor (1978). **A practical Guide to Splines**, Springer, New York.

De Boor (1992). **Matlab Spline Toolbox**, The MathWorks Inc.

Fisher, M., **Forces that Shape the Yield Curve**, Working Paper, Federal Reserve Bank of Atlanta, First Quarter 2001, pp 1-15.

Fisher, M. , Nichka D. and Zervos D. (1995). **Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines**, Working Paper, Finance and Economics Discussion

Series, Federal Reserve Board, Washington.

Hull, J. (1997) **Options, Futures and other Derivatives**, 3rd Edn, Prentice Hall International, Upper Saddle River, New Jersey.

Malkiel, **Term Structure of Interest Rates**, pp.17-24.

Mc Culloch, J.H (1971) **Measuring the term structure of interest rates**, Journal of Business 44, 19-31.

Nelson, C.R. and Siegel, A.F.(1987). **Parsimonious Modelling of yield curves**, Journal of Business 60:474-489.

Pruess S., **Splines and Their Applications**, Working Paper, Colorado School of Mines, Colorado, May 29,1987, pp1-18.

Shea, G.S. **Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines**, Journal of Finance,40(March 1985),pp.1319-325.

Svensson, L.E.O. (1994).**Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994**, NBER Working paper (No 4871).

Vasicek, o. A. and Fong, H. G. (1982). **Term structure modeling using exponential splines**, Journal of Finance 37(2): 339-348.

Waggoner D.F., **Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices**, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working paper ,97-10, pp1-20.

Zangari P. **An investigation into term structure estimation methods for RiskMetrics**,

Working paper, Third quarter 1997 3-31