

A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE "MODELAGEM MATEMÁTICA EM
FINANÇAS"

**RISCO DE CRÉDITO E ALOCAÇÃO ÓTIMA PARA UMA
CARTEIRA DE DEBÊNTURES**

André Cadime de Godói

Orientador: Professor Dr. Joe Akira Yoshino (FEA-USP)

Co-orientador: Dr. Rogério de Deus Oliveira

São Paulo
2005

T332.6 G588r

T88291



200002873



Powered by repositorio.usp.br - www.ligproceeds.usp.br

T332.6
G588J

DEDALUS - Acervo - FEA



20600028673

**RISCO DE CRÉDITO E ALOCAÇÃO ÓTIMA PARA UMA
CARTEIRA DE DEBÊNTURES**



André Cadime de Godói

Dissertação apresentada à
Faculdade de Economia,
Administração e Contabilidade e
ao Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Mestre.

Orientador: Professor Dr. Joe
Akira Yoshino (FEA-USP)

Co-orientador: Dr. Rogério de
Deus Oliveira

USP - FEA - SBD
DATA DA DEFESA 17/10/05

São Paulo
2005



88291

75799

Resumo

O risco de crédito é a incerteza envolvendo a capacidade de uma firma de honrar seus compromissos financeiros e suas dívidas. Apesar da relevância deste tipo de risco, apenas recentemente as instituições financeiras passaram a se preocupar em testar modelos mais rigorosos e sofisticados para a correta apuração do risco de crédito que provém de suas linhas de negócios. De maneira a colaborar com o recente desenvolvimento do tema de modelagem do risco de default, essa dissertação propõe um modelo para quantificar este risco em um nível agregado. A abordagem utilizada é baseada no modelo de Merton [1974] para o apreçamento de títulos corporativos e utiliza técnicas de otimização de forma a estimar o risco de um portfolio composto por debêntures. Como resultado, encontra-se uma medida de risco mais conservadora que o value at risk (VaR), usando um modelo simples e de baixo custo computacional. Neste trabalho, também é resolvido o problema de alocação ótima para a carteira de debêntures citada.

Abstract

Credit risk is the uncertainty surrounding a firm's ability to accomplish its financial obligations. Despite the historical relevance of this kind of risk, only recently the financial institutions are more concerned about implementing sophisticated systems in an attempt to model correctly the credit risk arising from their business lines. In order to collaborate with the recent development of credit risk modeling, this dissertation proposes a methodology to quantify default risk in a cross-section of corporate bonds. The approach is based both on the Merton's corporate bond pricing model [1974] and on optimization techniques in order to calculate the risk of a portfolio composed by corporate bonds. As a result, we find a risk measure that is more conservative than value at risk (VaR), using a simple and low-cost model. In this work, we also solve the problem of optimal portfolio allocation under default risk.

Dedico esta dissertação à minha querida esposa, Juliana.

**Sua companhia foi uma grande motivação e seu apoio
foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.**

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Dr. Joe Akira Yoshino, por sua contribuição formal e por suas intervenções, as quais foram decisivas para o êxito deste trabalho. Ao meu co-orientador, Dr. Rogério de Deus Oliveira, por sua ajuda na escolha do tema desenvolvido neste trabalho e por seu relevante apoio no entendimento das técnicas usadas nesta dissertação.

Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística da USP e da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP, por tudo o que aprendi neste mestrado.

Ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica, centro de ensino responsável pela minha graduação, por sua contribuição indelével na minha formação acadêmica e moral.

Ao Banco Santander Brasil, pelo patrocínio financeiro e por sua importante política de incentivo no desenvolvimento de seus funcionários.

Aos meus pais, Acéli e Marlene, por seu apoio incondicional e por sempre me incentivarem na busca por conhecimento. À minha irmã, Flávia, e à minha avó, Isolina, pelo carinho que nunca faltou. À minha esposa, Juliana, pela compreensão e, acima de tudo, cumplicidade. Aos amigos, que são a família que escolhemos durante a vida, e a Deus.

Conteúdo

Capítulo 1 - Introdução.....	1
Capítulo 2 - Apresentação dos Modelos de Perda Máxima e de Merton para o apreçamento de títulos corporativos.....	12
2.1. Função de Perda Máxima (PM).....	12
2.2. Modelo de Merton Estendido.....	16
Capítulo 3 - Cálculo do Risco de crédito agregado para uma carteira de debêntures .	21
Capítulo 4 - Minimização do Risco e Obtenção do Portfolio Ótimo	26
Capítulo 5 - Cálculo da Função Perda Máxima e Determinação da Carteira Ótima para uma Carteira de Debêntures	33
5.1. Dados de Mercado.....	33
5.2. Cálculo do Risco de Crédito do portfolio.....	44
5.3. Portfolio Ótimo.....	53
Capítulo 6 - Análise dos Resultados.....	56
6.1. VaR.....	56
6.2. Implementação do modelo de default.....	59
Capítulo 7 - Conclusão	69
Bibliografia.....	72
Apêndice I - Apreçamento de Debêntures	74

Capítulo 1 - Introdução

O risco de crédito é um dos riscos mais antigos dos quais os bancos procuram se proteger. Apesar da dimensão que esse tipo de risco representa entre as várias incertezas que as instituições financeiras estão sujeitas para manter a sua capacidade operacional, grande parte delas não dispõem de um tratamento mais claro e abrangente do risco de crédito em suas práticas de controle. A ausência de uma visão de portfolio no gerenciamento do risco e a falta de uma medida quantitativa de risco mais completa, que inclua outras variáveis além da exposição ao crédito, são exemplos de limitações no processo de controle de risco que podem afetar a saúde financeira da instituição credora.

Risco de crédito pode ser definido como o risco ao qual a instituição credora está exposta caso alguma de suas contrapartes venha a falhar no cumprimento de suas obrigações contratuais de crédito. Esse evento, também chamado de inadimplência ou default, é raro de ocorrer, mas pode levar a perdas substanciais para o credor, principalmente se ele não respeitar uma política de crédito prudente, evitando carteiras concentradas e compostas por poucas contrapartes, bem como evitando operações com contrapartes de fraca qualidade creditícia. Assim, para se obter um gerenciamento eficaz do risco de crédito, é recomendável a manutenção dos níveis de exposição ao crédito sob parâmetros aceitáveis, a realização de uma análise detalhada das contrapartes, e também a prática de um controle do risco agregado do portfolio.

Para a maioria das instituições, os empréstimos são as fontes mais comuns de risco de crédito, não somente para pessoas físicas como também para empresas, mas não são as únicas. O risco de crédito proveniente de operações com derivativos, por exemplo, vem crescendo nos últimos anos proporcionalmente ao desenvolvimento destes instrumentos. Portanto, se faz necessário um nível cada vez maior de especialização por parte dos formuladores das metodologias de controle deste tipo de incerteza nos bancos.

Para o foco deste trabalho, que é o risco de crédito corporativo, os modelos mais sofisticados são recentes e começaram a surgir após o acordo de capital da Basileia desenvolvido pelo BIS (Bank for International Settlements), o qual propõe a alocação de capital para a proteção contra exposições de crédito comercial, de varejo, interbancário e soberano. Conclui-se que quanto mais precisa for a medição do risco de crédito, menor será a chance de uma alocação de capital desnecessária, daí o investimento cada vez maior no desenvolvimento de novos modelos de crédito. Os métodos mais utilizados pelas instituições financeiras podem ser divididos em dois grupos segundo a forma com que abordam o conceito de risco de inadimplência de empresas. São eles:

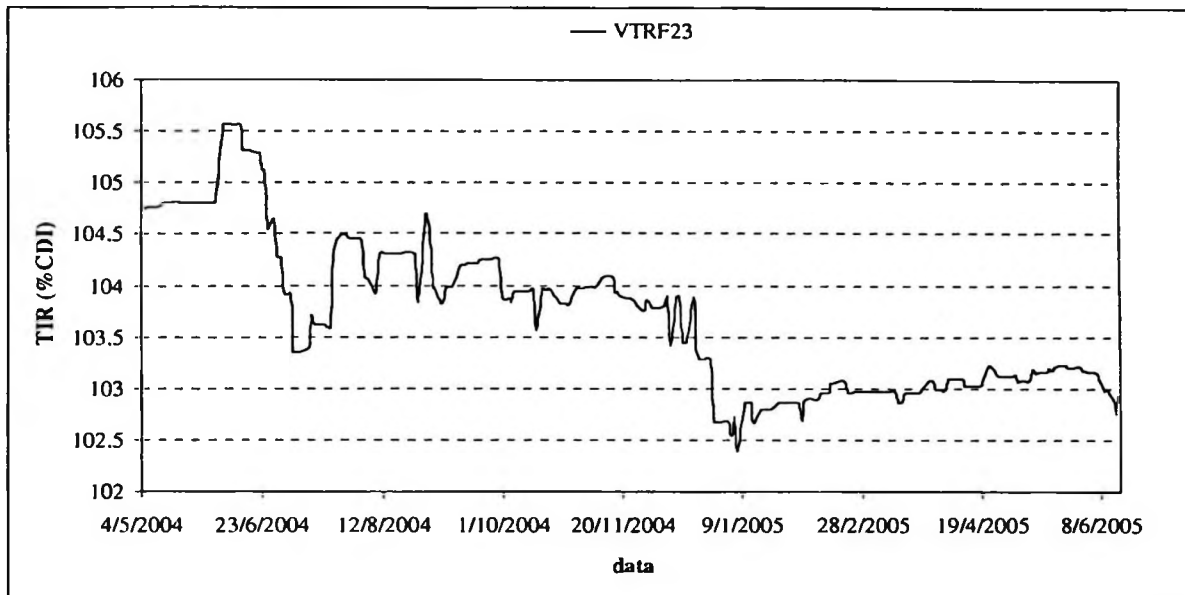
- i) Modelos de spread: Estes modelos são mais adequados para portfólios onde os spreads de crédito das contrapartes podem ser negociados e marcados a mercado, como ocorre para portfólios compostos de bônus, debêntures ou derivativos de crédito. Neste caso, o risco de crédito está diretamente ligado ao impacto que as variações de mercado dos spreads de crédito dos produtos componentes da carteira causam sobre o retorno desta. Tais métodos modelam o risco segundo técnicas de risco de mercado, como o value at risk.

- ii) Modelos de default: Estes modelos tratam o risco de crédito segundo o seu conceito mais tradicional, ou seja, como o risco de que um mutuário se torne inapto a cumprir com suas obrigações financeiras. Para estes modelos, no evento de default, o credor sofre uma perda equivalente ao montante devido menos uma fração recuperada como resultado da liquidação ou da reestruturação da dívida do devedor. Tais métodos são adequados para quaisquer produtos que ofereçam risco de inadimplência.

Neste trabalho, o objetivo principal é a determinação do risco de crédito para um portfólio composto de debêntures, o que nos permite a utilização de uma abordagem mais voltada para o mercado ou para o impacto que as variações de spread causam sobre o retorno da carteira. Aqui, toma-se como pressuposto que os preços e a dinâmica do mercado antecipam riscos, turbulências e dificuldades que possam ocorrer no futuro da firma emissora de um título.

Para um melhor entendimento do impacto que a uma mudança na percepção do risco de crédito causa sobre o preço de uma emissão privada, tomemos o caso da debênture VTRF23, emitida pela empresa *Votorantim Finanças S.A.* Analisando o gráfico a seguir, podemos notar claramente a variação no prêmio de risco de crédito ou *spread* cobrado por parte dos investidores para “carregar” o papel, cuja taxa interna de retorno é expressa na figura em % do CDI. Essa melhora no spread de crédito do papel é consequência das elevações dos *ratings* e das perspectivas atribuídas à empresa emissora por agências classificadoras de risco de crédito, como a Moody’s e a Standard & Poor’s, durante o período considerado.

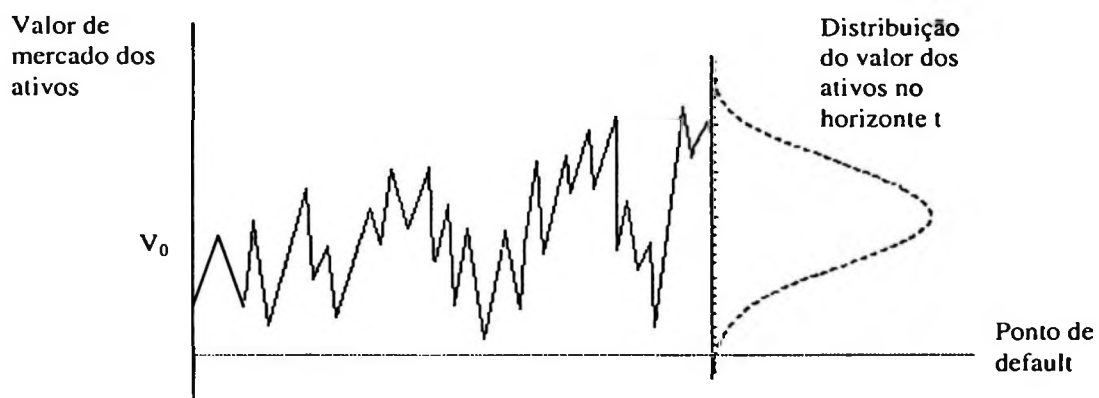
Figura 1.1: Evolução de taxas internas de retorno



Segundo Saito [2005], além da classificação ou *rating* de crédito da emissora, outras variáveis influenciam significativamente o comportamento do spread, como a qualidade deste rating e até mesmo a expectativa do mercado internacional com relação ao ambiente econômico brasileiro. Mas o que aconteceria caso essa diferença, ou prêmio de risco, assumisse uma trajetória de alta, sofrendo o impacto da variação de alguma dessas variáveis? Certamente esse comportamento causaria uma perda no portfólio e é exatamente a pior perda do portfólio causada por movimentos extremos na qualidade creditícia das contrapartes que estamos interessados em calcular. No exemplo exposto, a variável que explica a capacidade financeira da empresa é o spread de crédito. No problema que iremos resolver, a variável em questão será o valor de mercado dos ativos da empresa, mesma variável utilizada pelo modelo KMV (ver Crosbie [2005]).

Segundo o KMV [2005], um elemento importante que determina a probabilidade com que uma empresa venha a inadimplir é o comportamento do valor dos ativos da empresa ao longo de sua vida. O conceito em questão é o mesmo utilizado por Merton [1974] ao formular seu modelo de apreçamento de títulos corporativos: que uma empresa, no momento em que precisará honrar algum compromisso financeiro, só conseguirá fazê-lo caso possua um nível de ativos superior ao nível de endividamento. Caso contrário, estaria configurada uma situação de default. Portanto, a estrutura do método tem como alicerce a estimação do "valor de mercado" dos ativos da empresa em análise, para que este sirva de parâmetro na determinação do risco de crédito individual.

Figura 1.2: Evolução dos ativos da empresa



Pelo modelo de Merton [1974], o valor de mercado dos ativos e sua volatilidade são variáveis não observáveis. Elas são obtidas implicitamente segundo uma abordagem de apreçamento de opções, onde fazer um empréstimo ou possuir um título ou debênture é o mesmo que lançar uma opção de venda (put) no valor dos ativos do tomador do crédito

ou emissor do título, sendo que o preço de exercício da opção equivale ao valor de face do empréstimo. Cabe aqui um comentário salientando que o KMV [2005] utiliza dados de balanço das empresas, como patrimônio líquido e endividamento, para a determinação dos valores de mercado dos ativos. Apesar de concordar com a tese de que os mercados nem sempre são eficientes em suas avaliações, existe o problema de que nem todas as empresas analisadas neste trabalho possuem balanços publicados para uso público. Além disso, mesmo as que publicam seus balanços, somente o fazem trimestralmente, dificultando a apuração de uma série histórica com dados suficientes. Portanto, seguiremos a abordagem proposta por Merton [1974] de que o passivo da empresa devedora se resume ao valor do crédito analisado e adotaremos o valor futuro da debênture como proxy para o "ponto de default" da empresa emissora.

Apenas em caráter informativo, cabem algumas palavras sobre o mercado de debêntures no Brasil e sobre as características gerais deste título. A debênture, hoje, é um dos mais flexíveis instrumentos de recursos disponível no mercado de capitais por ajustar-se com facilidade aos objetivos de cada empresa, sejam eles de financiamento de longo prazo, de investimento ou de reestruturação financeira. Como instrumento financeiro, a debênture tornou-se mais atrativa nos últimos anos. Na década de oitenta, incontáveis alterações de ordem tributária contribuíram para a estagnação do mercado, que somente voltou a se aquecer após a resolução do Banco Central de 1987, que equiparou a debênture às demais aplicações de renda fixa para efeito de Imposto de Renda.

Nos últimos anos, houve uma mudança no perfil das empresas emissoras. A predominância de empresas estatais cedeu espaço às companhias abertas, empresas de

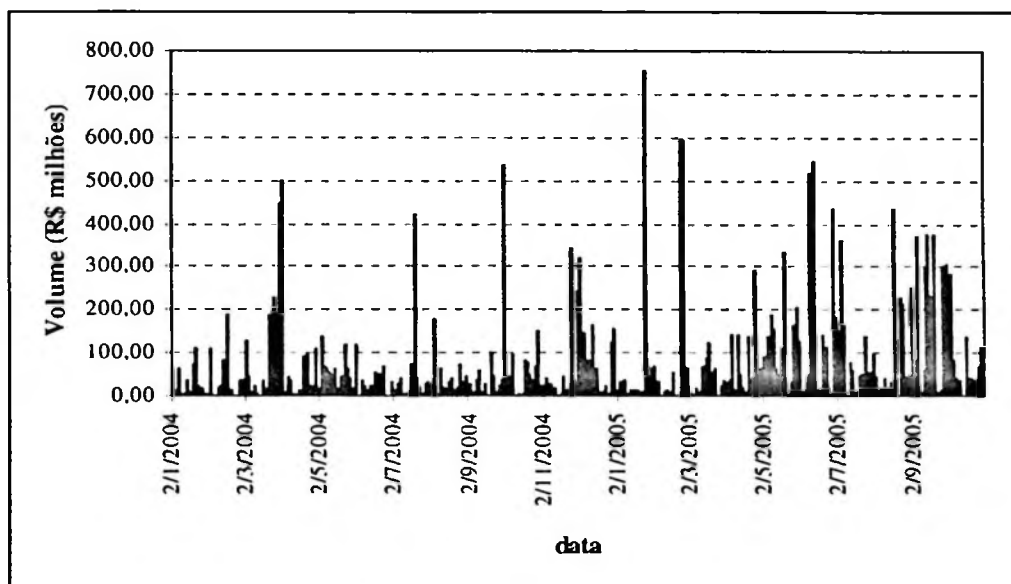
leasing e empresas de participação. Em outubro de 2005, o estoque de emissões ativas no SND (Sistema Nacional de Debêntures), que processa eletronicamente o registro, a custódia e a liquidação financeira destes títulos, atingiu a marca histórica de R\$ 77,5 bilhões. De janeiro a outubro de 2005 foram aprovados R\$ 34 bilhões em lançamentos de debêntures pela CVM, o que corresponde a um crescimento de 280% com relação ao volume do mesmo período de 2004. Historicamente, mais de 300 empresas já registraram suas emissões no SND, totalizando cerca de US\$ 43 bilhões. Aproximadamente 70% deste montante foi registrado depois da implantação do Plano Real, a despeito de crises ocorridas neste período, como a asiática em 1997. Esse fato reflete o grau de amadurecimento do mercado e a confiança depositada no papel por emissores e investidores. Também é evidente o aumento da liquidez no mercado secundário de debêntures. O volume médio diário de janeiro a outubro de 2005 apresentou um crescimento de 75% com relação ao volume médio diário do ano de 2004.

Tabela 1.1: Volume médio diário no mercado secundário de debêntures

Ano	Volume médio diário (R\$ milhões)
2003	56,09
2004	44,61
2005 (janeiro a outubro)	78,39

Fonte: Sistema Nacional de Debêntures

Figura 1.3: Volume diário no mercado secundário de debêntures (período de 02/01/05 a 31/10/05)

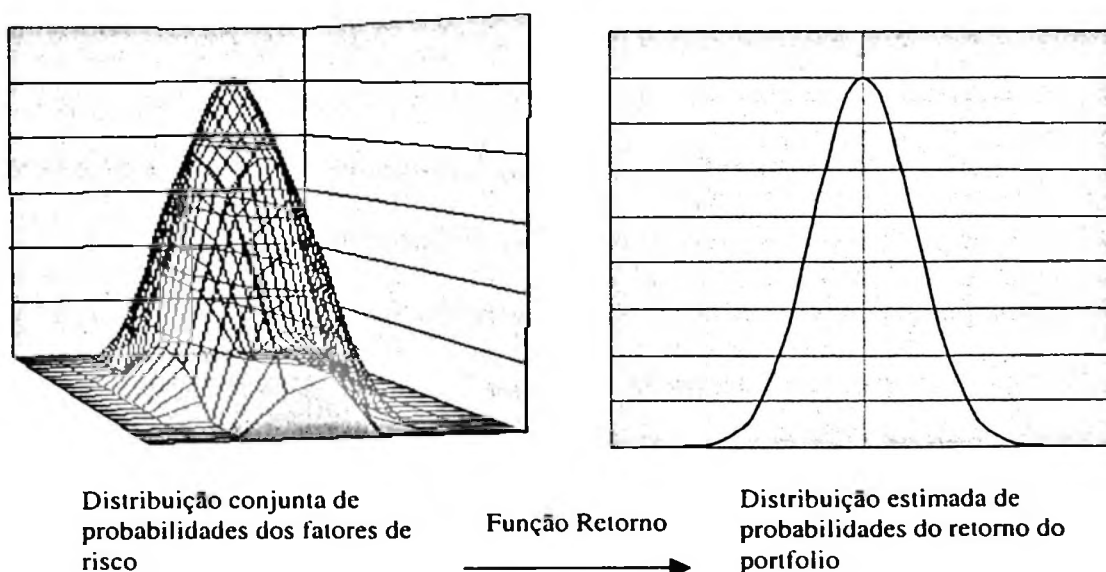


Fonte: Sistema Nacional de Debêntures

Hoje, a versatilidade é um dos principais atrativos deste título, tanto para os emissores quanto para os investidores. Estruturas de pagamento das mais diversas, uma gama razoável de indexadores usados na remuneração dos papéis e a possibilidade de inclusão de garantias nas operações são exemplos da flexibilidade da debênture e ratificam a capacidade do título de adaptar-se às mudanças ocorridas na economia e às necessidades dos agentes. Outros atrativos a serem destacados são a transparência das informações sobre as empresas emissoras, exigida durante a estruturação de cada operação, e as taxas menores que são obtidas em comparação a outros instrumentos de captação, como os empréstimos bancários. Este último ponto torna a debênture um instrumento interessante para as empresas que não conseguem captar recursos com taxas mais baixas no mercado externo.

Pensando agora na mensuração do risco, é conhecido o fato de que sistemas de gerenciamento de risco são baseados em modelos que avaliam o impacto das mudanças nos "fatores de risco" sobre o valor do portfólio. Estes fatores de risco podem ser preços de ações, índices ou taxas de câmbio, por exemplo. Ao se gerar cenários futuros para cada fator de risco, pode-se inferir as mudanças no valor de um portfólio composto por ativos regidos por tais fatores. Uma forma de gerar estes cenários é parametrizando as distribuições de probabilidade de cada fator de risco a partir de seus comportamentos passados. Uma vez especificados os cenários e as probabilidades para cada um dos fatores de risco, pode-se estimar o comportamento da função retorno do portfólio e determinar valores extremos desse retorno, obtendo assim o risco do portfólio. Vale ressaltar que este método considera as correlações entre os fatores de risco individuais.

Figura 1.4: Método paramétrico de obtenção do risco



O grande problema deste método reside no fato de que muitas vezes a distribuição de probabilidades da função retorno do portfolio não pode ser parametrizada. Em uma carteira de opções, por exemplo, não existe uma relação linear entre os fatores de risco e o retorno do portfolio e, portanto, não se pode assumir como normal a distribuição de retornos do portfolio, caso os fatores de risco possuam uma distribuição conjunta de probabilidades normal multivariada. No caso de portfolios não lineares, geralmente estima-se o risco a partir de simulações de Monte-Carlo, o que torna o processo custoso em termos computacionais. Para evitar este problema, pode-se adotar uma terceira abordagem denominada “perda máxima”, que será utilizada neste trabalho e cuja definição detalhada será apresentada no próximo capítulo. Neste método, não se assume nenhuma distribuição de probabilidades do retorno do portfolio e resolve-se um problema de minimização da função *Profit and Loss (P&L)*, onde a restrição é que os fatores de risco permanecerão confinados em um conjunto fechado de probabilidade conhecida.

No nosso problema, os fatores de risco são os valores de mercado dos ativos. Portanto, estaremos interessados em saber qual a máxima perda, ou risco do portfolio, caso estes fatores de risco assumam valores extremos, caracterizando assim o risco de crédito da carteira. Obter uma medida quantitativa de risco agregado a partir da função de perda máxima (PM) é nosso objetivo principal, mas não o único. Como a determinação de (PM) é um problema de minimização de risco por média-variância, iremos apresentar como extensão do trabalho a otimização do portfolio a partir de uma composição que corresponda à fronteira eficiente. Como resultados, além do alcance dos objetivos descritos, obtivemos uma medida de risco para o portfolio mais conservadora

do que o value at risk (VaR), a partir de um modelo simples e de baixo custo computacional.

Para uma melhor exposição das ferramentas usadas e dos resultados obtidos na resolução dos problemas citados, esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

Após esta introdução, será apresentada no segundo capítulo a base teórica do trabalho, com a descrição detalhada do modelo de Merton [1974] e sua aplicação para o cálculo de preços de debêntures e com a apresentação do conceito de risco a partir da otimização da função de perda máxima (PM).

No terceiro capítulo, serão utilizadas as ferramentas metodológicas apresentadas no capítulo anterior para a elaboração do problema de minimização da função retorno e para a sua solução, tomando como base uma carteira composta apenas de debêntures.

No quarto capítulo, será apresentada a extensão do trabalho com a formulação do problema de otimização da carteira de crédito. O objetivo deste capítulo é identificar a fronteira eficiente do portfolio de crédito.

No quinto capítulo, serão apresentadas as aplicações dos problemas para ativos reais, no sexto capítulo, serão apresentadas as análises dos resultados obtidos e, por fim, as conclusões serão expostas no sétimo e último capítulo.

Esta dissertação dispõe ainda de um apêndice que trata do apreçamento de debêntures.

Capítulo 2 - Apresentação dos Modelos de Perda Máxima e de Merton para o apreçamento de títulos corporativos.

2.1. Função de Perda Máxima (PM)

Um dos objetivos deste trabalho é testar uma metodologia alternativa ao já amplamente conhecido método Value at Risk (VaR) para a mensuração de risco. A razão para isso é que no nosso problema, a distribuição de probabilidades dos retornos do portfólio agregado não se assemelha a uma distribuição normal e, para a determinação do VaR, seria necessário utilizar simulações de Monte Carlo, que trariam como consequência um razoável custo computacional. De forma a evitar esta abordagem, agregaremos o risco de crédito do portfólio de teste a partir da minimização da função Retorno, a qual descreveremos a seguir. Em seu artigo, Struder [1995] utiliza este método para calcular o risco de portfólios compostos por ativos cuja relação “fator de risco x Profit & Loss (P&L)” não é linear e comprova seu maior conservadorismo com relação à metodologia VaR. Dado que o comportamento da carteira que iremos testar é não-linear nas debêntures que a compõem, usaremos o método PM para a determinação do risco. Vale ressaltar que, nos casos em que a função retorno do portfólio é linear com relação aos fatores de risco, Struder [1995] demonstra que as duas metodologias coincidem.

Portanto, uma forma de se medir o risco de um portfólio é a partir da função “perda máxima” (PM), definida como a máxima perda:

- i) Tal que os fatores de risco permaneçam confinados em uma região de confiança (A_t), $(Pr(w | w \in A_t) = \alpha$, onde (α) é o nível de confiança.
- ii) Para um horizonte de tempo (t).

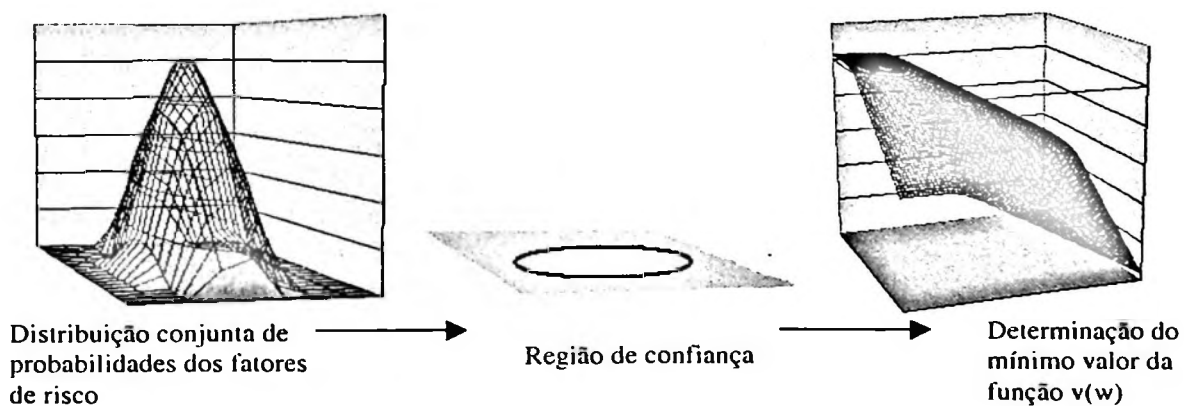
Podemos resumir essa definição com a equação:

$$PM = \min v(w) \quad (2.1)$$

s.t $w \in A_t$, onde $Pr(A_t) = \alpha$

onde ($v(w)$) é a função P&L (profit and loss) e (w) é o fator de risco. Em contraste com a definição do VaR (value at risk) paramétrico, cuja medida depende do horizonte de tempo (t) e do nível de confiança (α), (PM) possui um grau de liberdade suplementar, que é a região de confiança (A_t). Qualquer conjunto fechado no espaço (Ω) de fatores de risco com probabilidade igual a (α) é uma região de confiança válida.

Figura 2.1: Método PM de obtenção do risco



Regiões de confiança podem ser definidas com o auxílio da função densidade de probabilidade conjunta ($f_i(w)$). Assumindo que os fatores de risco [w_1, \dots, w_M] são variáveis aleatórias multinormais com média μ e matriz de covariância igual a (Σ_i), segundo James [2002], a função densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$f_i(w) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det \Sigma_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} (w - \mu)^T \Sigma_i^{-1} (w - \mu)\right) \quad (2.2)$$

Nosso objetivo é encontrar uma região de confiança (A_i) compatível com a restrição de $\Pr(A_i) = \alpha$ e que inclua o cenário $w = 0$. Uma opção é determinar uma constante (c) tal que $\Pr(w \mid f_i(w) > c) = \alpha$. Ou seja, dada a equação (2.2), nosso objetivo se transforma em resolver:

$$\Pr(w \mid (w - \mu)^T \Sigma^{-1} (w - \mu) \leq c_\alpha) = \alpha \quad (2.3)$$

Fazendo a decomposição de Cholesky para a matriz (Σ_i), temos que

$$(w - \mu)^T \Sigma^{-1} (w - \mu) = (w - \mu)^T U^{-1} U^{-T} (w - \mu) = (U^{-T} (w - \mu))^T (U^{-T} (w - \mu)) \quad (2.4)$$

onde $\Sigma_i = U^T U$. Porém, temos que:

$$E(U^{-T} (w - \mu)) = U^{-T} E(w) - \mu = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(U^{-T}(w-\mu)) &= E\left[(U^{-T}(w-\mu))(U^{-T}(w-\mu))^T\right] \\
&= U^{-T} E[(w-E(w))(w-E(w))] U^{-1} \\
&= U^{-T} U^T U U^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Com isso, $U^{-T}(w-\mu) \sim N(0,1)$ e

$$(w-\mu)^T \Sigma^{-1}(w-\mu) = \sum_{i=1}^M X_i^2 \quad (2.6)$$

onde (X_i) são variáveis normais independentes. Portanto, $\sum_{i=1}^M X_i^2$ possui distribuição qui-quadrada com (M) graus de liberdade. Conseqüentemente, uma região de confiança válida é obtida escolhendo:

$$A_\alpha = \{w \mid (w-\mu)^T \Sigma^{-1}(w-\mu) \leq c_\alpha\} \quad (2.7)$$

onde (c_α) é o α -quantil de uma distribuição qui-quadrada com (M) graus de liberdade.

Portanto, dado o portfolio de ativos de crédito, um dos objetivos deste trabalho será resolver o problema de minimização abaixo:

$$\begin{aligned}
PM &= \min v(w) \\
s.t \quad &(w-\mu)^T \Sigma^{-1}(w-\mu) \leq \chi_{1-\alpha, DF}^2
\end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $v(w)$ é a função retorno do portfólio. No nosso caso, o vetor (w) de fatores de risco será formado pelos valores de mercado dos ativos das empresas emissoras das debêntures componentes da carteira teste.

Um resultado importante demonstrado por Struder [1995] em seu artigo é o fato de que a medida de risco (PM) será sempre mais conservadora do que o (VaR). E para portfólios lineares com fatores de risco possuindo distribuição Normal, sempre será possível ajustar o nível de confiança (α) de (PM) tal que esta medida se iguale ao (VaR). Assim, com a troca do (VaR) por (PM) no nosso trabalho, conseguimos uma medida mais conservadora de risco, além de evitarmos o custo computacional da realização de simulações de Monte Carlo.

2.2. Modelo de Merton Estendido

O modelo de Merton [1974] para risco de crédito inspirou uma vasta teoria e um amplo desenvolvimento do tema de apreçamento de títulos corporativos. Neste trabalho pioneiro, Merton propôs um modelo que parte da hipótese que fazer um empréstimo é o mesmo que lançar uma opção de venda (put) no valor dos ativos do tomador, sendo que preço de exercício da opção equivale ao valor de face do empréstimo. Esse raciocínio considera que se o valor de mercado dos ativos da empresa (V) no vencimento seja menor do que o passivo da empresa (F), representado pelo valor de face do empréstimo, a empresa devedora entra em default. Com isso, o ganho (*payoff*) do credor no vencimento seria:

$$P(T, T) = F - \max\{0, F - V\}, \quad (2.9)$$

Utilizando o modelo de Black-Scholes para o apreçamento de opções européias, temos que o valor presente do crédito é dado por:

$$P(0, T) = Fe^{-rT} - (Fe^{-rT} N(-d_2) - V_0 N(-d_1)) \quad (2.10)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{F}\right) + (r + \sigma_v^2 / 2)t}{\sigma_v \sqrt{t}};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{t}$$

(r) é a taxa livre de risco e (σ_v) é a volatilidade do ativo.

Desenvolvendo a equação (2.10) e considerando que $N(d_2) = 1 - N(-d_2)$, podemos escrever que:

$$P(0, T) = V_0 N(-d_1) + Fe^{-rT} N(d_2) \quad (2.11)$$

Essa é uma forma intuitiva de apresentar a equação clássica do modelo de Merton [1974] para o preço de ativos com risco de crédito. Em seu artigo, Merton derivou esta expressão a partir de uma equação diferencial parcial obtida segundo o Modelo de Black-Scholes, a qual será descrita a seguir:

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV} + (rV)F_V - rF + F_t = 0 \quad (2.12)$$

onde (σ) é a volatilidade dos ativos, (F_V) e (F_{VV}) são respectivamente a primeira e a segunda derivada de (F) com relação a (V) , (F_t) é a primeira derivada de (F) com relação ao tempo e (r) é a taxa de juros. A equação (2.12) é válida para qualquer ativo de risco cujo valor possa ser expresso em função do valor dos ativos e do tempo. A solução desta equação é exatamente a equação (2.11).

O grande problema para a utilização do modelo neste trabalho é o fato que ele é válido apenas para títulos do tipo zero-cupom. Como o portfólio a ser testado é composto por debêntures, precisaríamos de um modelo que contemplasse a presença dos pagamentos de juros periódicos que fazem parte da estrutura das debêntures.

Para isso, utilizaremos uma extensão do modelo de Merton [1974], testado por Eom, Helwege, Huang [2003]. Nesta versão do modelo, o título que possui pagamento de juros intermediários é considerado como um portfólio de títulos zero-cupom, sendo que cada um deles é apreçado pela versão clássica do Modelo de Merton [1974]. O somatório dos fluxos resulta em uma fórmula que será descrita a seguir.

Consideremos uma debênture, sujeita a risco de crédito do emissor, com prazo de vencimento (T) , com valor de face unitária e que paga um cupom semi-anual a uma taxa anual igual a (c) . Sejam (T_i) ; $i = 1, \dots, T$; as datas de pagamento de cupom. No modelo de Eom, Helwege, Huang [2003] (Merton estendido), parte-se do pressuposto que o default pode ocorrer nas datas de pagamento de cupom, ao invés de somente no vencimento do

título. Logo, o ponto de default (K) deve contemplar a possibilidade de o credor receber o mínimo valor entre o ativo da empresa e o cupom em cada pagamento de juros. Portanto, o preço de um título sujeito a default pode ser escrito como:

$$P(0, T) = \sum_{i=1}^{T-1} D(0, T_i) E^Q \left[(c/2) I_{\{V_{T_i} \geq K\}} + \min(c/2, V_{T_i}) I_{\{V_{T_i} < K\}} \right] + D(0, T) E^Q \left[(1 + c/2) I_{\{V_T \geq K\}} + \min((1 + c/2), V_T) I_{\{V_T < K\}} \right] \quad (2.13)$$

onde $(D(0, T_i))$ denota o valor presente de um bônus “zero-cupom” com vencimento em (T_i) , $I\{\cdot\}$ é a função “indicador” e $E^Q[\cdot]$ é a expectativa no instante atual sob a medida neutra ao risco. Temos ainda que:

$$E^Q [I_{\{V_t \geq K\}}] = N(d_2(K, t))$$

$$E^Q [I_{\{V_t < K\}} \min(\psi, V_t)] = V_0 D(0, t)^{-1} e^{-\delta t} N(-d_1(\psi, t)) + \psi [N(d_2(\psi, t)) - N(d_2(K, t))] \quad (2.14)$$

onde $(\psi) \in [0, K]$, $N(\cdot)$ representa a função normal padrão acumulada e

$$d_1(x, t) = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{x}\right) + (D(0, t)^{-1} - \delta + \sigma_v^2 / 2)t}{\sigma_v \sqrt{t}}; \quad d_2(x, t) = d_1(x, t) - \sigma_v \sqrt{t} \quad (2.15)$$

Substituindo as equações (2.14) e (2.15) em (2.13) e após algum algebrismo, podemos escrever a equação (2.13) para o caso sem dividendo da seguinte forma:

$$P(0,T) = \sum_{i=1}^{T-1} D(0,T_i) \left[(c/2)N(d_2(c/2,T_i)) + V_0 N(-d_1(c/2,T_i)) D^{-1}(0,T_i) \right] + D(0,T) \left[(1+c/2)N(d_2(1+c/2,T)) + V_0 N(-d_1(1+c/2,T)) D^{-1}(0,T) \right] \quad (2.16)$$

Essa é a equação que usaremos para o apreçamento das debêntures que utilizaremos no nosso problema de otimização.

Capítulo 3 - Cálculo do Risco de crédito agregado para uma carteira de debêntures

Conforme foi exposto no capítulo anterior, temos que pelo modelo de Merton estendido (ver Eom, Helwege, Huang [2003]), o preço de uma debênture com prazo de vencimento (T), com valor de face unitária e que paga um cupom semi-anual a uma taxa anual igual a (c) é dado pela equação (2.16).

Como o nosso objetivo é calcular o risco de crédito do portfolio para um horizonte de tempo de um ano, devemos inicialmente expressar o preço de cada debênture em função do valor do ativo da empresa emissora para o prazo de um ano e da volatilidade deste valor. Aproveitando a equação (2.16), temos:

$$P(1,T) = \sum_{i=1}^{2T-1} D(1,T_i) \left[(c/2)N(d_2(c/2,T_i)) + V_1 N(-d_1(c/2,T_i)) D^{-1}(1,T_i) \right] + D(1,T) \left[(1+c/2)N(d_2(1+c/2,T)) + V_1 N(-d_1(1+c/2,T)) D^{-1}(1,T) \right] \quad (3.1)$$

onde (V_1) é o valor de mercado dos ativos da empresa emissora no horizonte de um ano, ($D(1, T_i)$) denota o valor presente em $t=1$ de um bônus “zero-cupom” com vencimento em (T_i), (c) é o cupom, (T) é a maturidade da debênture, $N(\cdot)$ representa a função normal padrão acumulada e

$$d_1(x,t) = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{x}\right) + (D(0,t)^{-1} + \sigma_v^2 / 2)t}{\sigma_v \sqrt{t}};$$

$$d_2(x,t) = d_1(x,t) - \sigma_v \sqrt{t}$$

onde (σ_v) é a volatilidade dos ativos da empresa. Considerando o vetor $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]$ como o vetor dos pesos de cada debênture no portfólio de teste, temos que o retorno do portfólio para o prazo de um ano pode ser expresso como:

$$RT = \sum_i \alpha_i \left[\frac{P_i(1,T)}{P_i(0,T)} - 1 \right] \quad (3.2)$$

onde os pesos (α_i) e os preços $(P_i(0, T))$ são conhecidos para cada debênture (i) . Considerando que nossos fatores de risco são os log-retornos dos ativos das empresas emissoras das debêntures e que o conjunto destes fatores têm distribuição normal multivariada com matriz de covariância (Σ) , para a determinação do risco de crédito do portfólio para um nível de confiança de 99%, teremos que resolver o seguinte problema de otimização:

$$PM = \min_v RT(V_1)$$

$$s.a. \quad (v - \mu)^T \Sigma^{-1} (v - \mu) \leq \chi_{1\alpha, N}^2 \quad (3.3)$$

onde $v = \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$ e $(\chi^2_{1\%,N})$ é o quantil 1% da distribuição qui-quadrada com (N) graus de liberdade. Intuitivamente, o que queremos determinar é a maior perda que a carteira possa vir a sofrer caso haja variações extremas nos valores dos fatores de risco. Conhecendo essa medida, o investidor poderá tomar medidas para se proteger deste risco.

Assim, para resolvermos o problema de otimização (3.3), devemos inicialmente determinar o lagrangeano:

$$\ell(v, \lambda) = RT + \lambda \left(\chi^2_{1\%} - (v - \mu)^T \Sigma^{-1} (v - \mu) \right) \quad (3.4)$$

onde $(\lambda) > 0$ é o multiplicador de Kuhn-Tucker da equação. Logo, as condições de primeira ordem para cada debênture (i) são dadas por:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \lambda 2e^T \Sigma^{-1} (v - \mu) \quad (3.5)$$

Onde (e^T) é o vetor canônico transposto. Utilizando a equação (3.3), podemos escrever:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} \left[\frac{\partial P_i(1,T)}{\partial v_i} \right] \quad (3.6)$$

Pela regra da cadeia, podemos escrever:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} \frac{\partial P_i(1,T)}{\partial V_{1,i}} \frac{\partial V_{1,i}}{\partial v_i} \quad (3.7)$$

Como $P_i(1,T)$ é o preço de uma put sobre o valor dos ativos da empresa (V_i), temos que $\frac{\partial P_i(1,T)}{\partial V_i}$ é o delta da opção, que vale $N(-d_1(V_{1,i}, T))$. Além disso, temos que:

$$\frac{\partial V_{1,i}}{\partial v_i} = \frac{1}{\frac{\partial v_i}{\partial V_{1,i}}} = \frac{1}{\frac{1}{V_{1,i}}} = V_{1,i} \quad (3.8)$$

Substituindo tudo na equação (3.8), temos que:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} N(-d_1(V_{1,i}, T)) V_{1,i} \quad (3.9)$$

Voltando na equação (3.6), podemos escrever:

$$\frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} N(-d_1(V_{1,i}, T)) V_{1,i} = \lambda 2e^T \Sigma^{-1} (v - \mu) \quad (3.10)$$

Da equação (3.10) podemos achar $V_{i,i} = f(\lambda)$ e substituir os valores na restrição do problema para acharmos a constante (λ). De posse desta constante, basta voltarmos à equação (3.10) para determinarmos os valores de mercado dos ativos, que serão usados na equação (3.2) para a determinação da medida PM ou risco do portfólio para um nível de confiança de 99%.

Capítulo 4 - Minimização do Risco e Obtenção do Portfolio Ótimo

No capítulo anterior, nos preocupamos em resolver o programa de minimização da função retorno total (RT), para a obtenção da função (PM), que representa o risco de crédito do portfolio, cuja composição é fixa. Neste capítulo, nosso objetivo será otimizar a função PM mexendo na composição inicial da carteira, de forma a obtermos o mínimo risco dado um retorno esperado (μ) fixo. Fazendo isso, estaremos determinando a composição ótima da carteira, que minimiza o risco para um retorno esperado (μ).

Neste caso, usaremos a abordagem clássica de média-variância proposta por Markowitz em 1952. Essa teoria permite ao investidor alocar os seus recursos entre vários ativos financeiros, buscando um compromisso ótimo entre retorno e risco. Essa teoria é desenvolvida seguindo a hipótese de que os investidores avaliam suas carteiras com base apenas no valor esperado e na variância das taxas de retorno dos ativos que a compõem, escolhendo sempre as carteiras com maior retorno ou menor risco.

No nosso problema, para determinarmos a alocação ótima, teremos que resolver dois problemas de otimização simultaneamente. Um para o cálculo do risco:

$$\begin{aligned} PM &= \min_v RT(V_1) \\ \text{s.a. } & (v - \mu)^T \Sigma^{-1} (v - \mu) \leq \chi_{1\alpha, N}^2 \end{aligned} \tag{P1}$$

onde (v) é o vetor de log-retornos dos ativos, (Σ) é a matriz de covariância, $(\chi^2_{1\%,N})$ é o quantil 1% da distribuição qui-quadrada com (N) graus de liberdade e o retorno total (RT) , como vimos no capítulo anterior, é dado por:

$$RT = \sum_i \alpha_i \left[\frac{P_i(1,T)}{P_i(0,T)} - 1 \right]$$

e outro para a minimização deste risco para um valor fixo de (μ) .

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} PM \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i \alpha_i r_i = \mu \\ & \sum_i \alpha_i = 1 \end{aligned} \tag{P2}$$

onde (r_i) são os retornos esperados de cada debênture para o horizonte de tempo de um ano e (μ) é o retorno esperado do portfólio para o mesmo prazo.

Intuitivamente, após determinarmos a pior perda que a carteira pode sofrer dado um nível de confiança escolhido, queremos saber qual a composição que minimizaria essa perda, diminuindo o risco que um investidor estaria exposto caso alocasse recursos neste portfólio.

Oliveira e Almeida [2003] oferecem uma solução para dois programas parecidos, a qual poderá ser aproveitada no nosso caso. Começemos, inicialmente, determinando as

condições de primeira ordem do problema (P2). O Lagrangeano pode ser expresso da seguinte forma:

$$\ell(\lambda_\mu, \lambda_2, \alpha_i) = PM + \lambda_\mu \left(\mu - \sum_i \alpha_i r_i \right) + \lambda_2 \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) \quad (4.1)$$

onde (λ_μ) e (λ_2) são os multiplicadores de Lagrange de (4.1). As condições de primeira ordem do problema são:

$$\frac{\partial PM}{\partial \alpha_i} = \lambda_\mu r_i + \lambda_2 \quad (4.2)$$

Usaremos, agora, o Teorema do Envelope para (P1). O teorema diz:

Proposição 1: Seja (f) uma função contínua e diferenciável de $(n+k)$ variáveis. Define-se uma função (V) de (k) variáveis tal que:

$$V(r) = \min_x f(x, r),$$

onde (x) é um vetor de dimensão (n) e (r) é um vetor de dimensão (k) . Se a solução do problema de minimização é uma função contínua e diferenciável $(x^*(r))$, então:

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r_i} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r_i}$$

Aplicando o teorema no problema (P1), temos que:

$$\frac{\partial PM}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{P_i(1,T)}{P_i(0,T)} - 1 \right] \quad (4.3)$$

Igualando (4.2) e (4.3), podemos escrever:

$$\left[\frac{P_i(1,T)}{P_i(0,T)} - 1 \right] = \lambda_\mu r_i + \lambda_2 \quad (4.4)$$

$$P_i(1,T) = P_i(0,T)(1 + \lambda_\mu r_i + \lambda_2) \quad (4.5)$$

$$V_{1,i} = P_i(1,T)^{-1} \{P_i(0,T)(1 + \lambda_\mu r_i + \lambda_2)\} \quad (4.6)$$

$$V_{1,i} = f_i(\lambda_\mu, \lambda_2) \quad (4.7)$$

Ou seja, na equação (4.7) podemos escrever ($V_{1,i}$) em função dos valores dos multiplicadores de Lagrange.

Voltemos nossa atenção agora para o problema (P1). No capítulo anterior, vimos que as condições de primeira ordem do problema são dadas por:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \lambda 2e^T \Sigma^{-1} (v - \mu) \quad (4.8)$$

onde $(\lambda) > 0$ é o multiplicador de Kuhn-Tucker. Precisamos, portanto, calcular as derivadas da função RT com relação aos fatores de risco v_i . Sabemos que:

$$RT = \sum_i \alpha_i \left[\frac{P_i(1,T)}{P_i(0,T)} - 1 \right]$$

Logo:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \left[\frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} \frac{\partial P_i(1,T)}{\partial v_i} \right] \quad (4.9)$$

Aplicando a regra da cadeia, podemos escrever a equação (4.9) como:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \left[\frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} \frac{\partial P_i(1,T)}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \right] \quad (4.10)$$

Sabemos que a derivada $\frac{\partial P_i}{\partial V_i}$ é o delta da opção, que vale $N(-d_1)$, e que:

$$\frac{\partial V_{1,i}}{\partial v_i} = \frac{1}{\frac{\partial v_i}{\partial V_{1,i}}} = \frac{1}{V_{1,i}} = V_{1,i}$$

Logo:

$$\frac{\partial RT}{\partial v_i} = \frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} N(-d_1(v_{1,i}, T)) v_{1,i} \quad (4.11)$$

Substituindo (4.7) e (4.8) em (4.11), temos:

$$\frac{\alpha_i}{P_i(0,T)} N(-d_1(f_i(\lambda_\mu, \lambda_2), T)) f_i(\lambda_\mu, \lambda_2) = \lambda 2e^T \Sigma^{-1} (v - \mu) \quad (4.12)$$

$$\alpha_i = \frac{\lambda 2e^T \Sigma^{-1} (v - \mu) P_i(0,T)}{N(-d_1(f_i(\lambda_\mu, \lambda_2), T)) f_i(\lambda_\mu, \lambda_2)} \quad (4.13)$$

$$\alpha_i = \lambda g_i(\lambda_\mu, \lambda_2) \quad (4.14)$$

Ou seja, na equação (4.13) podemos escrever (α_i) em função dos multiplicadores de Lagrange de (P1) e de (P2). Substituindo a equação (4.14) nas restrições de (P2), temos:

$$\begin{aligned} \lambda \sum_i g_i(\lambda_\mu, \lambda_2) r_i &= \mu \\ \lambda \sum_i g_i(\lambda_\mu, \lambda_2) &= 1 \end{aligned}$$

Dividindo as duas equações acima, temos:

$$\frac{\sum_i g_i(\lambda_\mu, \lambda_2) r_i}{\sum_i g_i(\lambda_\mu, \lambda_2)} = \mu \quad (4.15)$$

Logo, com as equações (4.7) e (4.15) chegamos a um sistema de duas equações e duas incógnitas. Ao resolvê-lo, conseguimos determinar os multiplicadores de Lagrange que, usados nas equações (4.7) e (4.14), nos permite obter a composição ótima (vetor α) que minimiza a perda por crédito da carteira.

Capítulo 5 - Cálculo da Função Perda Máxima e Determinação da Carteira Ótima para uma Carteira de Debêntures

5.1. Dados de Mercado

Este capítulo tem como principal objetivo expor os testes realizados com os modelos propostos nos capítulos anteriores, a partir de dados de mercado de debêntures. Para isso, foram avaliadas 32 emissões que faziam parte em 16/10/2004 do conjunto de debêntures com taxas referenciais divulgadas diariamente pela Andima. Dentro deste universo de títulos, cujas características podem ser conferidas na tabela 5.1, foram selecionados os papéis que farão parte da carteira de análise. Os critérios desta seleção serão descritos a seguir:

- i) Prazo: Dado o horizonte de tempo de 1 ano escolhido para a nossa análise, foram descartadas as debêntures com maturidade menor do que este prazo.
- ii) Estrutura: Foram selecionadas emissões que possuem fluxos de pagamento de juros e principal semelhantes. Foram descartadas aquelas corrigidas por correção monetária.
- iii) Taxas: Foram descartadas aquelas emissões cujos prêmios de risco ou *spreads* derivados das taxas referenciais possuem volatilidade histórica excessiva ou incoerente com o perfil de risco da empresa emissora.



Alguns exemplos são as debêntures cuja referência "livre de risco" possui pouca liquidez e, com isso, um certo grau de subjetividade na obtenção de seu preço. Há também o problema da diversidade de ratings atribuídos por agências distintas à mesma emissão. Segundo Saito [2005], essa discrepância afeta o valor do spread e pode causar uma volatilidade espúria. Em função deste critério, quase todas as emissões indexadas ao IGPM foram descartadas.

No final, foram escolhidas oito emissões, cujas características podem ser vistas na tabela 5.2:

Tabela 5.1 - Características das debêntures presentes na pesquisa diária de preços da Andima.

Código	Nome	Emissão	Próxima Repactuação	Vencimento	Índice/ Correção
ALLG13	AMERICA LATINA LOGISTICA	01/06/2004		01/06/2007	110% do DI
BRTO13	BRASIL TELECOM	01/12/2002		01/12/2004	109% do DI
CSNA12	CSN	01/12/2003		01/12/2006	107% do DI
CSNA13	CSN	01/12/2003		01/12/2006	106.5% DI
PALF12	CPFL - COMPANHIA PAULISTA DE FORÇA E LUZ	01/07/2004		01/07/2009	109 % do DI
TMAR14	TELEMAR PARTICIPAÇÕES	01/06/2003		01/06/2005	109.5% DI
TMAR24	TELEMAR PARTICIPAÇÕES	01/06/2003		01/06/2006	109,5% DI
VTRF13	VOTORANTIM FINANÇAS	20/12/2001	01/12/2004	01/12/2005	103% do DI
VTRF23	VOTORANTIM FINANÇAS	20/12/2001	20/06/2005	20/06/2006	102.8% DI
BRKM11	BRASKEM S.A.	01/12/2003		01/12/2007	DI + 4.50 %
BRTO14	BRASIL TELECOM	05/07/2004		05/07/2009	DI + 1.00%
CPEL22	COMPANHIA PARANAENSE DE ENERGIA - COPEL	01/03/2002	01/03/2005	01/03/2007	DI + 1.75%
LAME12	LOJAS AMERICANAS	01/01/2004		01/01/2007	DI + 0.90%

MRLM11	COMPANHIA PETROLIFERA MARLIM	01/12/2000		01/12/2005	DI + 0,34%
NVML12	NOVAMARLIM PETROLEO	01/12/2001		01/12/2006	DI + 1,10%
SBES16	SABESP	01/09/2004		01/09/2007	DI + 1,75%
TNLP11	TELE NORTE LESTE	01/06/2001		01/06/2006	DI + 0.70%
CMIG11	CEMIG - COMPANHIA ENERGETICA DE MINAS GERAIS	01/11/2001	01/11/2005	01/11/2009	IGPM + 12.7%
CMIG13	CEMIG - COMPANHIA ENERGETICA DE MINAS GERAIS	01/06/2004		02/06/2014	IGPM + 10,5%
CMIG21	CEMIG - COMPANHIA ENERGETICA DE MINAS GERAIS	01/11/2001	01/11/2006	01/11/2011	IGPM + 12,7%
CPEL32	COMPANHIA PARANAENSE DE ENERGIA - COPEL	01/03/2002		01/03/2007	IGPM + 13,25%
CSNA23	CSN	01/12/2003		01/12/2008	IGPM + 10,0%
LAME22	LOJAS AMERICANAS	01/01/2004		01/01/2009	IGPM + 9,9%
MRLM21	COMPANHIA PETROLIFERA MARLIM	01/12/2000		01/12/2005	IGPM + 10,7%
NDUT11	CONCESSIONARIA DA RODOVIA PRESIDENTE DUTRA	01/07/2004		01/07/2010	IGPM + 9,5%
NDUT21	CONCESSIONARIA DA RODOVIA PRESIDENTE DUTRA	01/07/2004		01/07/2010	IGPM + 9,50%
NVML22	NOVAMARLIM PETROLEO	01/12/2001		01/12/2008	IGPM + 12,25%
PALF22	CPFL - COMPANHIA PAULISTA DE FORÇA E LUZ	01/07/2004		01/07/2009	IGPM + 9.80%
PETR12	PETROLEO BRASILEIRO S/A - PETROBRAS	01/08/2002		01/08/2012	IGPM + 11.0%
PETR13	PETROLEO BRASILEIRO S/A - PETROBRAS	01/10/2002		01/10/2010	IGPM + 10.3%
SBES26	SABESP - CIA DE SANEAMENTO BÁSICO DO ESTADO DE SP	01/09/2004		01/09/2009	IGPM + 11.0%
SUZB13	SUZANO BAHIA SUL PAPEL E CELULOSE	01/04/2004		01/04/2014	IGPM + 8.00%

Fonte: Andima

Tabela 5.2 - Características das debêntures selecionadas

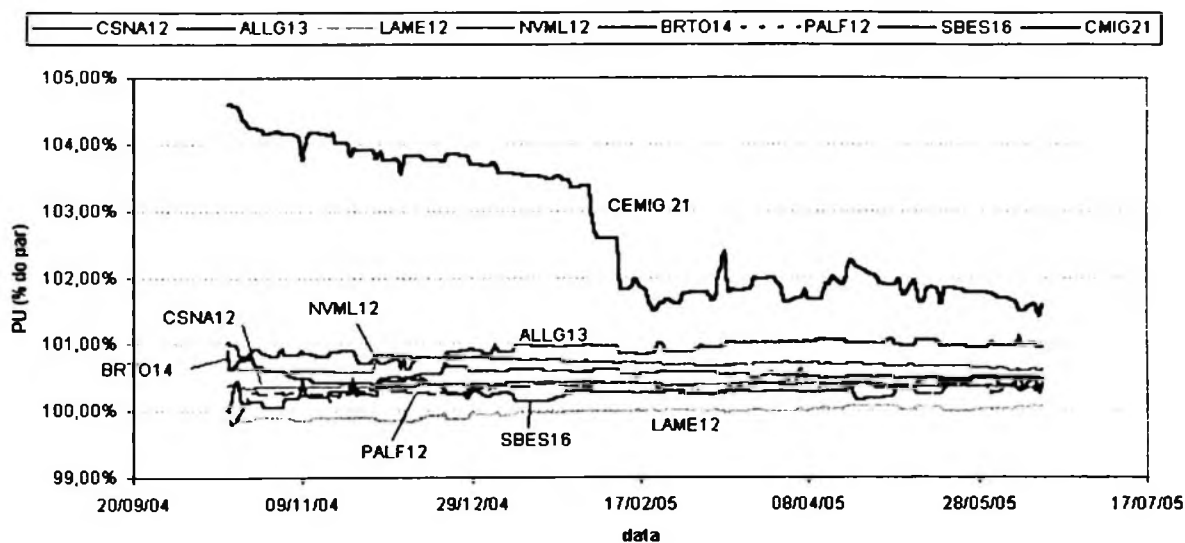
papel	empresa	nominal	data de vencimento	indexador	cupom	periodicidade de juros	amortização
CSNA12	CSN	10000	01/12/06	CDI	107%	semestral	no vencimento
ALLG13	AMERICA LATINA LOGISTICA	10000	01/06/07	CDI	110%	semestral	no vencimento
LAME12	LOJAS AMERICANAS	10000	01/01/07	CDI	0,90%	semestral	no vencimento
NVML12	NOVAMARLIM	2000	01/12/06	CDI	1,10%	anual	anual
BRTO14	BRASIL TELECOM	10000	05/07/09	CDI	1,15%	semestral	no vencimento
PALF12	CPFL PAULISTA	10000	01/07/09	CDI	109%	semestral	no vencimento
SBES16	SABESP	1000	01/09/2007	CDI	1,75%	semestral	no vcto.
CMIG21	CEMIG	10000	01/11/06	IGPM	12,70%	anual	no vcto.

Fonte: Andima

Para estas oito emissões, foram coletadas as taxas referenciais da Andima¹ para um período de 18/10/2004 até 16/06/2005. A partir das taxas, foram determinados os preços unitários (PU) de mercado para cada uma das emissões, segundo as regras especificadas no manual de apuração CONFERE de debêntures [2005] desenvolvido pela Andima. O comportamento histórico destes PUs, expressos em % de seus valores ao par (ver apêndice I), pode ser conferido na figura 5.1.

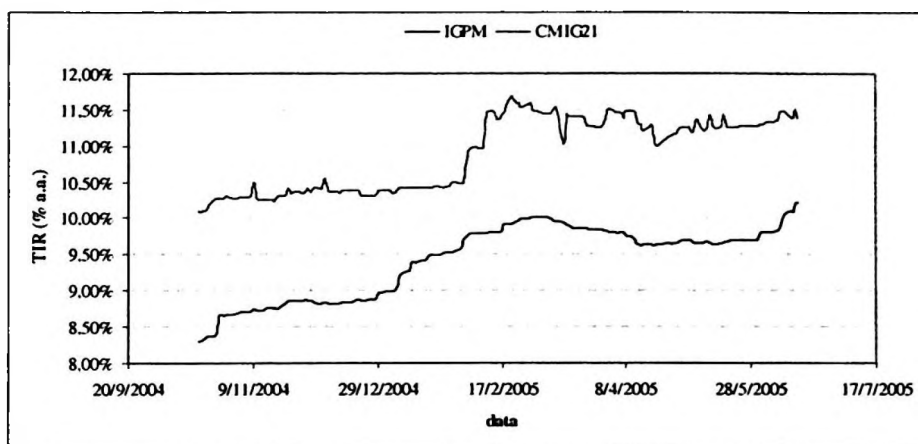
¹ A pesquisa de taxas da Andima é divulgada desde maio de 2005, porém esta só se tornou mais madura com a adesão de mais contribuidores, o que ocorreu alguns meses depois.

Figura 5.1: Comportamento histórico dos PUs das debêntures.



É interessante notar uma queda brusca no preço da debênture CMIG21. Este movimento pode ser explicado pela alta da taxa interna de retorno do papel, em linha com o aumento da taxa de juros indexadas ao IGPM (cupom IGPM) observado a partir do comportamento da taxa interna de retorno de uma NTN-C com *duration* semelhante. Essa comparação pode ser vista na figura 5.2. Os preços das demais emissões apresentaram um perfil mais comportado no período.

Figura 5.2: Comparação entre taxas internas de retorno.



Com os preços e características dos papéis em mãos e utilizando a fórmula de Merton apresentada no capítulo 2, foi possível a obtenção implícita da série histórica dos valores de mercado dos ativos das empresas emissoras das debêntures. Para isso, utilizou-se o mesmo procedimento do modelo KMV [2005], que faz uso de um método recursivo para a obtenção da série e da volatilidade dos retornos dos ativos.

O modelo estipula uma estimativa inicial para a volatilidade de cada série de retornos e determina as séries de valores dos ativos. As volatilidades resultantes dos retornos dos ativos servirão como entrada ou estimativa para a próxima interação do procedimento, que determina um novo conjunto de valores dos ativos e, portanto, uma nova série de retornos. O método segue até que se encontre uma convergência entre as estimativas e os valores reais das volatilidades das séries. Cabem aqui duas observações: a primeira é que a fórmula utilizada para o cálculo dos retornos neste trabalho é dada pelo logaritmo neperiano da razão entre os valores atual e imediatamente anterior, de forma a se obter consistência com a hipótese do Modelo

de Merton [1974] de que a série de log-retornos do ativo subjacente possui distribuição Normal. A segunda é o fato de que o modelo KMV [2005] adota a hipótese de volatilidade constante para as séries, o que não necessariamente reflete a realidade e constitui-se em um ponto fraco do método. O comportamento histórico dos log-retornos dos ativos de cada empresa emissora pode ser conferido na figura 5.3.

Como foi observado anteriormente, para que se possa utilizar corretamente o modelo de Merton [1974], as séries dos log-retornos devem possuir distribuição de probabilidades Normal. Além disso, uma das hipóteses do modelo Perda Máxima (PM) de cálculo de risco é que os fatores de risco devem possuir distribuição conjunta Normal multivariada. Com base nisso, usamos testes estatísticos, como o Jarke-Bera e gráficos quantil-quantil², em cada uma das séries para verificarmos para quais delas podemos aceitar a hipótese nula de distribuição Normal. Verificamos também os valores de assimetria e curtose das distribuições. Os resultados podem ser vistos na figura 5.4.

² Nos testes de Jarke-Bera, adotamos um p-valor mínimo de 0,1 como corte. Já nos gráficos quantil-quantil, levamos em conta que os perfis deveriam se aproximar ao máximo de uma reta.

Figura 5.3: Comportamento histórico dos log-retornos dos ativos das empresas emissoras das debêntures (18/10/04 a 16/06/05).

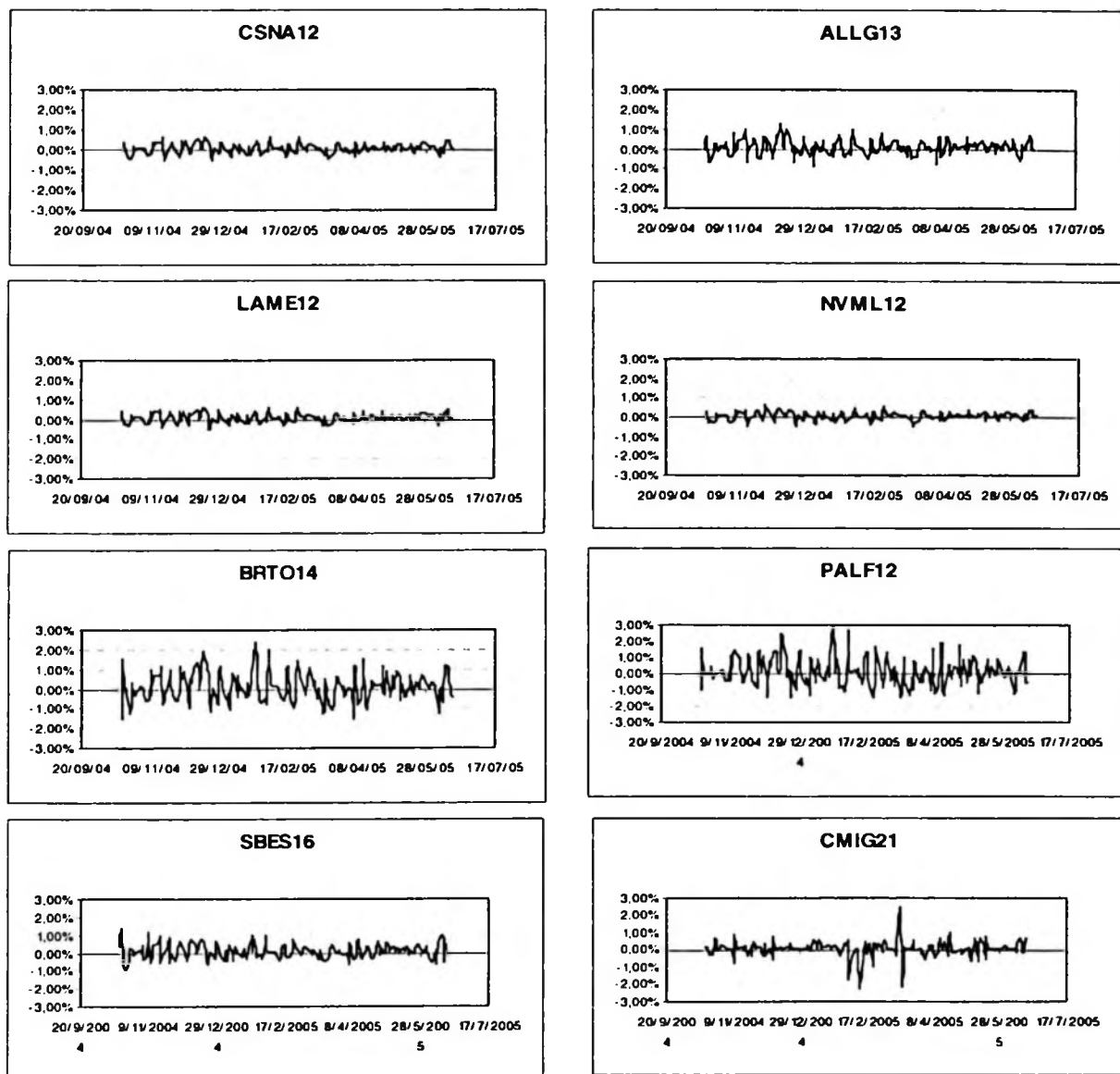
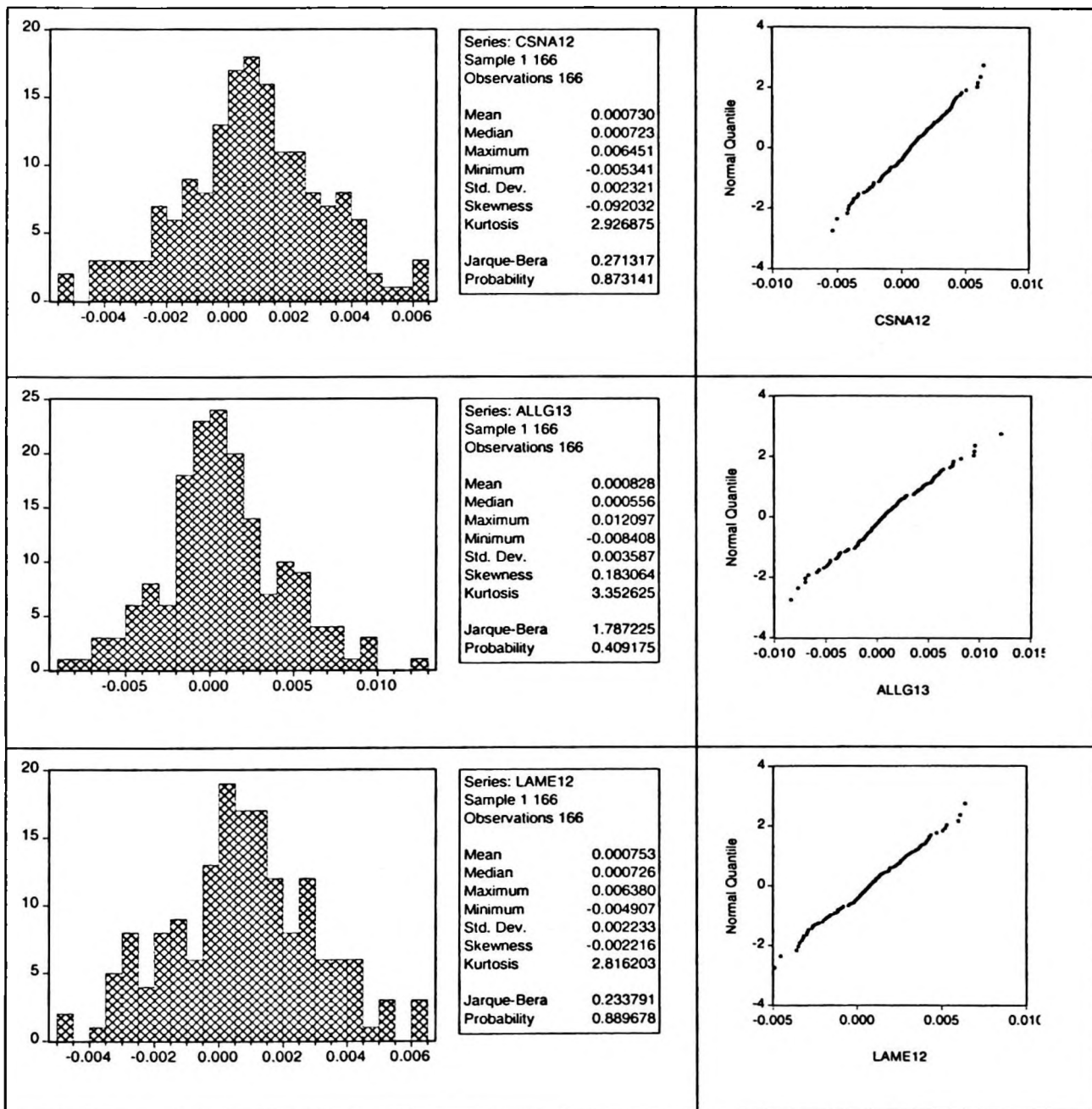
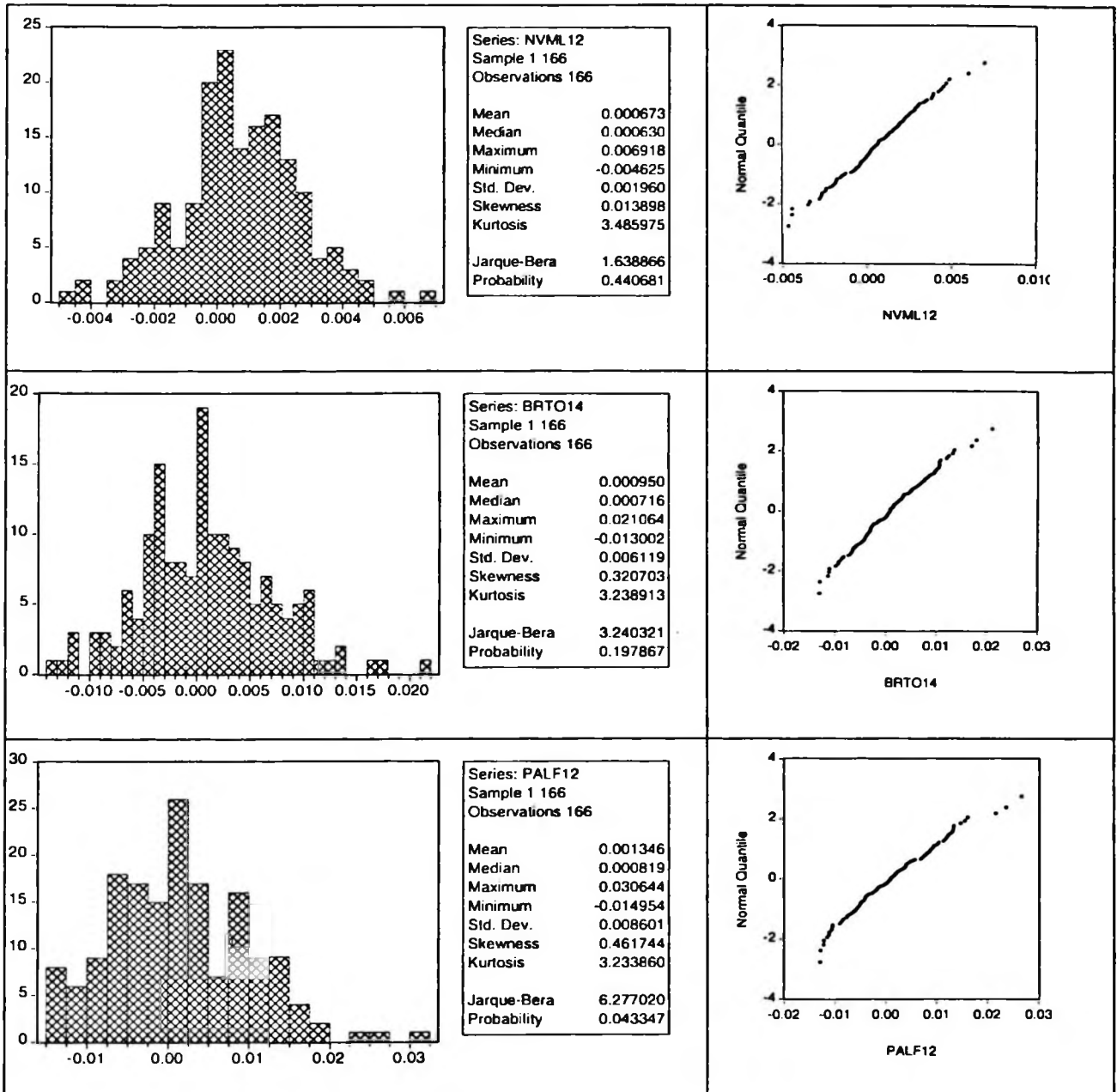
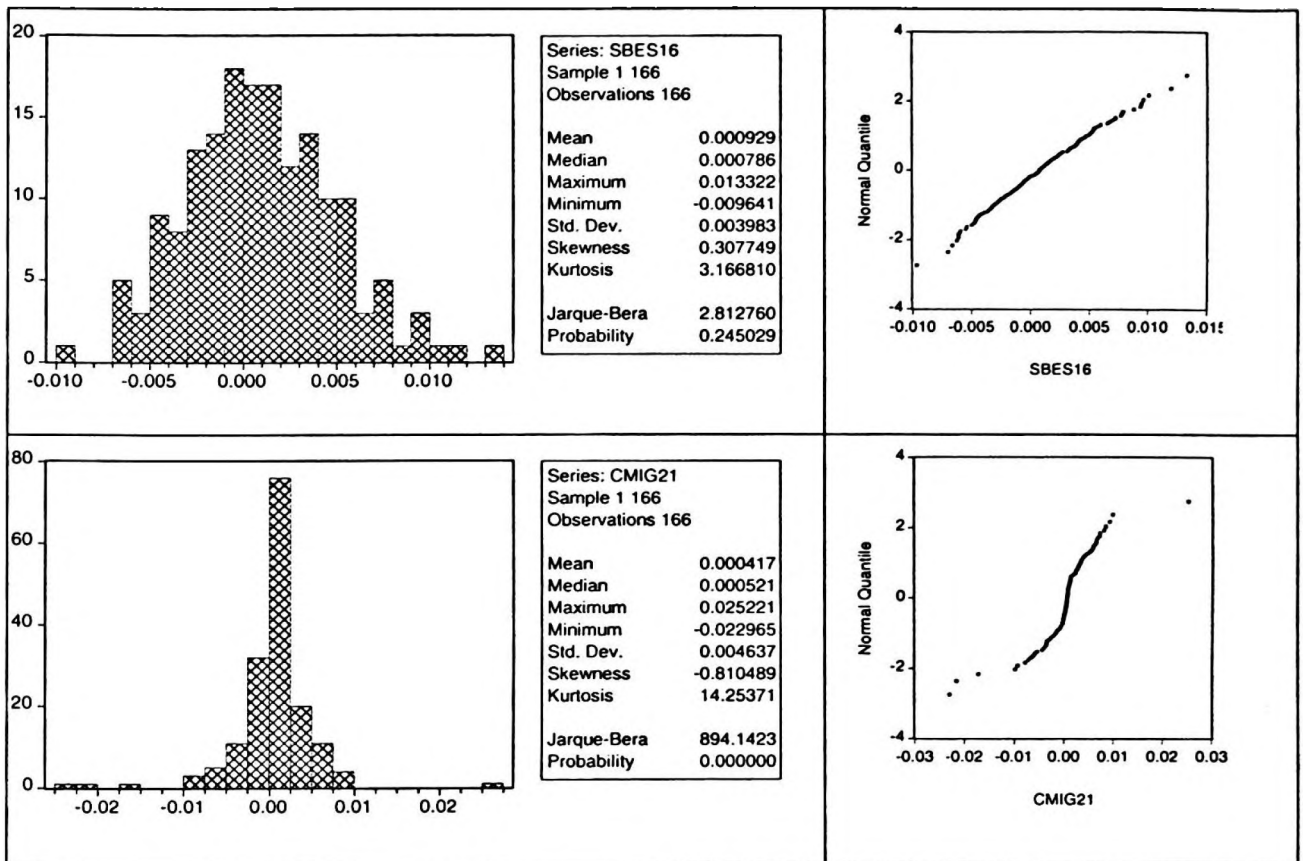


Figura 5.4: Testes de Normalidade para as séries de log-retornos dos ativos das debêntures.







Analisando os testes, concluímos que para apenas seis das oito séries temos um p-valor razoável no teste Jarque-Bera para a adoção da hipótese de normalidade. Com isso, a carteira teste será composta por essas seis emissões: CSNA12, ALLG13, LAME12, NVML12, BRTO14 e SBES16³. Para esta carteira serão calculados o risco de crédito e a composição ótima que minimiza o risco e corresponde à fronteira eficiente.

³ A hipótese de normalidade é exigida para que haja coerência com as hipóteses do Modelo de Merton [1974]. Todavia, as três emissões descartadas poderiam ser aproveitadas e suas distribuições de probabilidades estimadas por algum método alternativo, como o *Generalized Method of Moments* (GMM).

5.2. Cálculo do Risco de Crédito do portfólio

Conforme vimos no capítulo 3, o risco de crédito agregado do portfólio pode ser obtido com a resolução do problema de minimização descrito pela equação (3.4). A carteira a ser testada é formada pelas seis emissões citadas anteriormente. De início serão atribuídos pesos iguais para cada uma delas e depois, a composição será alterada para que se possa observar o comportamento do risco.

Tabela 5.3 – Composição da Carteira Teste

emissões	valor investido (R\$)	composição	P(0,T)*	V0**
CSNA12	1000000	16,67%	10118,96	7877,60
ALLG13	1000000	16,67%	10181,10	7360,87
LAME12	1000000	16,67%	10858,02	7773,67
NVML12	1000000	16,67%	2220,11	1567,00
BRTO14	1000000	16,67%	10898,02	5693,77
SBES16	1000000	16,67%	1062,85	691,84

* Preço da debênture com vencimento em T no instante inicial $t=0$; ** Valor de mercado dos ativos da empresa emissora no instante inicial $t=0$.

Antes que entremos na discussão sobre o cálculo do risco, é necessário que entendamos melhor o comportamento do preço unitário (PU) ao longo do tempo. A equação (3.2) nos fornece uma medida do (PU) pelo Modelo de Eom, Helwege, Huang [2003] para o horizonte de tempo estipulado, mas vale observar que esta é uma medida expressa em percentual do preço ao par. Para que se determine a medida correta do (PU) de mercado da debênture, deve-se multiplicar esta medida pelo valor

nominal corrigido (VNA) e pelo fator acumulado de juros remuneratórios, pactuados na emissão. No apêndice I, detalhamos melhor este cálculo para a determinação do (PU).

Voltando para as debêntures da carteira teste, os valores nominais corrigidos para um horizonte de tempo de um ano (PU no par) foram obtidos com a incidência do cupom de emissão dos títulos sobre a taxa de juros em reais a termo, projetada para um prazo futuro de 252 dias úteis a partir da data de referência para os nossos cálculos (16/06/2005). Podemos conferir estes valores na próxima tabela.

Tabela 5.4 – PU par estimado para o horizonte de tempo de um ano

emissões	PU do Par (t=0)	pré (%a.a.)*	cupom	juros**	PU do Par (t=1)
CSNA12	10084,46	18,29%	107% do CDI	19,69%	12069,86
ALLG13	10086,84	18,29%	110% do CDI	20,29%	12133,67
LAME12	10851,06	18,29%	CDI + 0,90%	19,35%	12951,15
NVML12	2206,49	18,29%	CDI +1,10%	19,59%	2638,75
BRTO14	10848,06	18,29%	CDI +1,15%	19,65%	12979,65
SBES16	1058,59	18,29%	109% do CDI	20,36%	1274,11

* taxa de juros em reais a termo para o prazo de 252 dias úteis. (fonte: BM&F); ** juros remuneratórios estimados o prazo de 252 dias ⁴

A partir das séries históricas de (PUs), foi possível chegar implicitamente aos valores de média, volatilidade e à matriz de covariância dos log-retornos dos ativos,

⁴ Juros remuneratórios = (1 + pré) x (1 + cupom)

conforme foi descrito anteriormente. Estes valores podem ser conferidos nas próximas tabelas.

Tabela 5.5 – Médias e volatilidades anualizadas dos log-retornos dos ativos (período de 18/10/2004 a 16/06/2005)

emissões	volatilidades dos ativos	Médias dos ativos
CSNA12	3,69%	20,18%
ALLG13	5,69%	23,21%
LAME12	3,54%	20,91%
NVML12	3,11%	18,49%
BRTO14	11,04%	28,17%
SBES16	6,32%	26,37%

Tabela 5.6 – Matriz de covariância (período de 18/10/2004 a 16/06/2005)⁵

	CSNA12	ALLG13	LAME12	NVML12	BRTO14	SBES16
CSNA12	0,13%	0,19%	0,13%	0,10%	0,34%	0,20%
ALLG13	0,19%	0,32%	0,18%	0,14%	0,51%	0,30%
LAME12	0,13%	0,18%	0,12%	0,10%	0,32%	0,19%
NVML12	0,10%	0,14%	0,10%	0,10%	0,25%	0,15%
BRTO14	0,34%	0,51%	0,32%	0,25%	1,21%	0,57%
SBES16	0,20%	0,30%	0,19%	0,15%	0,57%	0,40%

⁵ Obtida implicitamente pela equação (3.2)

Estes valores e estimativas expostos anteriormente nos dão a base para a solução do problema de minimização. Para tanto, foi utilizado um algoritmo de minimização disponível no pacote de otimização do aplicativo Excel (Microsoft Office). Sabendo que o retorno agregado do portfólio pode ser expresso por:

$$\text{Retorno do portfólio} = \sum_i w_i r_i \quad (5.1)$$

onde (w_i) são os pesos de cada debênture (i) na composição da carteira e (r_i) são os retornos esperados para cada debênture (i) no horizonte de tempo de um ano, procurou-se determinar o valor mínimo deste retorno variando os valores dos ativos (V_i) de forma que o retorno agregado destes ativos, expresso por:

$$\text{Retorno dos ativos} = \sum_i w_i v_i \quad (5.2)$$

onde (v_i) são os log-retornos dos ativos no horizonte de tempo de um ano, fosse igual ao quantil 1% da distribuição qui-quadrada para 6 graus de liberdade, cujo valor é igual a 16,81. Com base nisso, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 5.7 – Resultados do primeiro problema de otimização

emissões	composição	V(t=1)*	ret V**	PU (t=0)***	PU (t=1)+	ret PU++
CSNA12	16,67%	8327,141	-14,63%	10118,96	10987,73	8,6%
ALLG13	16,67%	7476,627	-21,65%	10181,10	10977,03	7,8%
LAME12	16,67%	8338,526	-13,89%	10858,02	11950,77	10,1%
NVML12	16,67%	1685,5	-11,20%	2220,11	2442,478	10,0%
BRTO14	16,67%	4968,131	-41,80%	10898,02	11651,29	6,9%
SBES16	16,67%	708,8347	-23,95%	1062,85	1153,091	8,5%

* Valor dos ativos no horizonte de tempo t=1 ano; ** log-retorno dos ativos; *** preço unitário das debêntures no instante atual; + preço unitário das debêntures em t=1 ano; ++ retorno mínimo de cada debênture.⁶

Retorno acumulado dos ativos (equação 5.2) = 16,81

quantil 1% da distribuição qui-quadrada = 16,81

Retorno agregado mínimo (equação 5.1) = 8,6%

Descontando do retorno mínimo um valor esperado para o custo de carregamento de 18,29%⁷, estimado pelo valor da taxa de juros em reais a termo para o prazo de um ano, temos que a perda máxima do portfólio é dada por:

PERDA MÁXIMA = 8,65% - 18,29% = -9,64%

⁶ $\text{ret PU} = \text{PU}(t=1)/\text{PU}(t=0) - 1$

⁷ Valor obtido a partir das cotações de fechamento do dia para contratos de Futuro D11. Fonte: BM&F.

Este é o risco do portfolio para a composição escolhida inicialmente. Em caráter informativo, podemos conferir na próxima tabela os valores de índice Sharpe⁸ para cada debênture e o índice Sharpe da carteira para a composição inicial:

Tabela 5.8 – Índices Sharpe para as debêntures (período de 18/10/2004 a 16/06/2005)

emissões	composição	Índices Sharpe
CSNA12	16,67%	-7,2%
ALLG13	16,67%	0,2%
LAME12	16,67%	1,3%
NVML12	16,67%	-93,1%
BRTO14	16,67%	-6,4%
SBES16	16,67%	13,5%

Índice Sharpe da carteira = -18,79%

Índice Sharpe do Ibovespa = -0,63%

Um exercício interessante é verificar como se comporta o risco quando alteramos a composição da carteira, mantendo inalterado o valor esperado do retorno do portfolio. Para isso, necessitamos calcular o valor esperado do retorno agregado, que

⁸ Índice Sharpe foi medido pelo excesso de retorno real histórico da debênture com relação ao CDI sobre o desvio padrão da série de retornos reais desta debênture para o período considerado.

só pode ser determinado com os valores esperados dos preços das debêntures para o horizonte de um ano. Para a estimação destes preços médios, partiu-se da expressão do preço de uma debênture em um instante (t) qualquer, segundo o modelo de Eom, Helwege, Huang [2003]:

$$P(t, T) = \sum_{i=1}^{T-1} D(t, T_i) \left[(c/2) N(d_2(c/2, T_i)) + V_i N(-d_1(c/2, T_i)) D^{-1}(t, T_i) \right] + D(t, T) \left[(1 + c/2) N(d_2(1 + c/2, T)) + V_T N(-d_1(1 + c/2, T)) D^{-1}(t, T) \right] \quad (5.3)$$

onde

$$d_1(x, t^*) = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{x}\right) + (D(t, t^*)^{-1} + \sigma_v^2 / 2)(t^* - t)}{\sigma_v \sqrt{t^* - t}};$$

$$d_2(x, t^*) = d_1(x, t^*) - \sigma_v \sqrt{t^* - t}$$

(D(1, T_i)) denota o valor presente em no instante (t) de um bônus “zero-cupom” com vencimento em (T_i), (c) é o cupom, (T) é a maturidade da debênture e N(.) representa a função normal padrão acumulada. O primeiro passo para a estimação foi a geração números aleatórios segundo uma distribuição normal padrão, de forma a simular cenários futuros para os valores de mercado dos ativos (V) das empresas emissoras. Partindo da hipótese que o comportamento futuro destes valores são regidos pela equação:

$$V = V_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma_v \sqrt{t}\varepsilon\right\} \quad (5.4)$$

onde $\varepsilon \sim N(0,1)$, (μ) é a média e (σ_v) é a volatilidade histórica dos ativos, podemos estimar os valores de (V) para cada um dos cenários gerados. Para cada um dos 10 mil valores de (V) estimados para todos emissores dos títulos da carteira no instante de tempo $t = 1$ ano, foram calculados os preços dos títulos segundo a expressão (5.3) e foram calculadas médias para a determinação dos valores esperados. Os valores esperados dos preços no horizonte de um ano e o valor esperado do retorno do portfólio podem ser conferidos na próxima tabela:

Tabela 5.9 – Valores esperados dos retornos para o horizonte de um ano

emissões	PU _s (t=0)	PU _s esperados (t=1)	retornos esperados ⁹
CSNA12	10118.96	12089	19,47%
ALLG13	10181,10	12219.5	20.02%
LAME12	10858,02	12833.3	18.19%
NVML12	2220,11	2626.91	18.32%
BRTO14	10898.02	13111,7	20.31%
SBES16	1062.85	1281.08	20.53%

Valor esperado do retorno do portfólio (μ): 19,48%

⁹ retorno esperado = PU esperado (t=1) / PU (t=0) -1

Voltando ao exercício proposto, foram repetidos os cálculos para a determinação do mínimo retorno para algumas composições diferentes de carteira, respeitando o mesmo valor (μ) de retorno esperado. Os resultados podem ser vistos na próxima tabela:

Tabela 5.10– Retornos mínimos para diversas composições com μ constante

	Composição 1	Composição 2	Composição 3	Composição 4
CSNA12	10,46%	16,67%	9,96%	13,59%
ALLG13	27,99%	16,67%	10,59%	20,45%
LAME12	10,46%	16,67%	18,64%	14,91%
NVML12	24,36%	16,67%	18,78%	19,66%
BRTO14	9,14%	16,67%	20,90%	11,38%
SBES16	17,59%	16,67%	21,13%	20,01%
Ret. Esperado	19,48%	19,48%	19,48%	19,48%
Retorno Mínimo	8,62%	8,65%	8,67%	8,70%
Perda Máxima	-9,67%	-9,64%	-9,62%	-9,59%
Índice Sharpe¹⁰	-23,21%	-18,79%	-19,75%	-19,23%

É interessante notar a melhora do Sharpe em linha com a queda do risco. Verificando este comportamento do risco, é natural que se queira determinar qual a composição ótima da carteira, que nos leva ao menor risco dado um mesmo valor de

¹⁰ Vale observar que o índice Sharpe reflete uma realidade histórica e os valores de retorno esperado e perda máxima obtidos com o modelo PM são "forward-looking".

retorno. É exatamente essa questão que desejamos resolver com o segundo programa de otimização deste trabalho.

5.3. Portfolio Ótimo

A composição ótima da carteira teste, que propicia o menor risco de crédito agregado, pode ser obtida com a resolução simultânea de dois problemas de minimização, expressos pelas equações (P1) e (P2) do capítulo 4.

Uma vez apresentado o procedimento para a resolução do problema no capítulo 4, recaímos em um sistema de duas equações e duas incógnitas, que foi resolvido com auxílio do algoritmo *solver* do aplicativo Excel (Microsoft Office). Após esta consideração, podemos conferir a composição ótima da carteira na tabela abaixo:

Tabela 5.11 – Composição Ótima da carteira

retorno esperado do portfolio = 19,48%

emissões	composição	retornos*
CSNA12	0,01%	8,78%
ALLG13	10,34%	8,17%
LAME12	24,52%	10,19%
NVML12	18,66%	10,04%
BRTO14	8,26%	7,85%
SBES16	38,21%	7,61%

* retorno individual mínimo de cada debênture

Índice Sharpe da carteira: -8,62%

Descontando o custo de carregamento estimado de 18,29% do valor do retorno, temos que a perda máxima do portfólio é dada por:

$$\text{PERDA MÁXIMA} = 8,78\% - 18,29\% = - 9,51\%$$

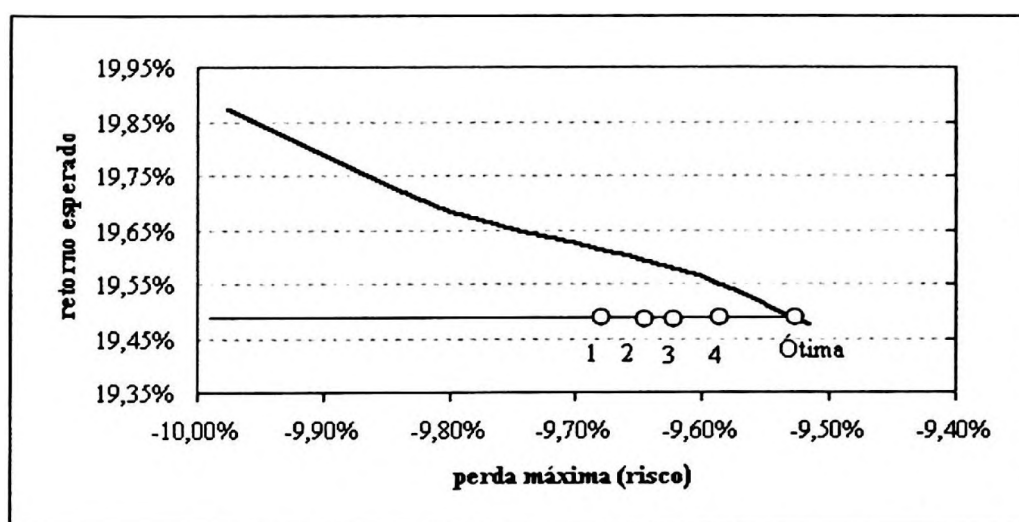
Como esperávamos, a composição ótima apresentada é a que possui o menor risco e o maior Sharpe. Generalizando o problema e implementando o programa para outras composições que resultem em valores de (μ) distintos, chegamos ao seguinte resultado:

Tabela 5.12– Composições ótimas para carteiras com μ distintos.

	Comp. Ótima 1	Comp. Ótima 2	Comp. Ótima 3	Comp. Ótima 4	Comp. Ótima 5
CSNA12	0,01%	4,46%	11,68%	16,24%	19,96%
ALLG13	10,34%	10,85%	11,74%	12,37%	12,88%
LAME12	24,52%	19,99%	12,58%	7,82%	3,94%
NVML12	18,66%	17,33%	15,06%	13,52%	12,26%
BRTO14	8,26%	8,35%	8,51%	8,64%	8,74%
SBES16	38,21%	39,02%	40,43%	41,41%	42,21%
μ	19,48%	19,58%	19,68%	19,78%	19,88%
Ret. Mínimo	8,78%	8,67%	8,51%	8,40%	8,31%
Perda Máx.	-9,51%	-9,62%	-9,78%	-9,89%	-9,98%
Sharpe	-8,62%	-7,39%	-5,23%	-3,74%	-2,55%

Dados os valores de risco obtidos nos itens 2 e 3 deste capítulo, podemos traçar o gráfico a seguir.

Figura 5.4: Fronteira Eficiente



Do gráfico acima, podemos verificar a curva que identifica outras composições de mínima variância, para valores de retorno esperado do portfólio diferentes. Ela é condizente com a premissa de que para o alcance de retornos maiores, o investidor deve assumir riscos maiores.

Capítulo 6 - Análise dos Resultados

Até o momento, conseguimos comprovar a eficácia e objetividade do método, cuja solução obtivemos com um sistema de apenas duas equações e duas incógnitas. Falta também comprovar a outra vantagem deste método, que é obter uma medida de risco mais conservadora do que o value at risk (VaR) através da função perda máxima (PM).

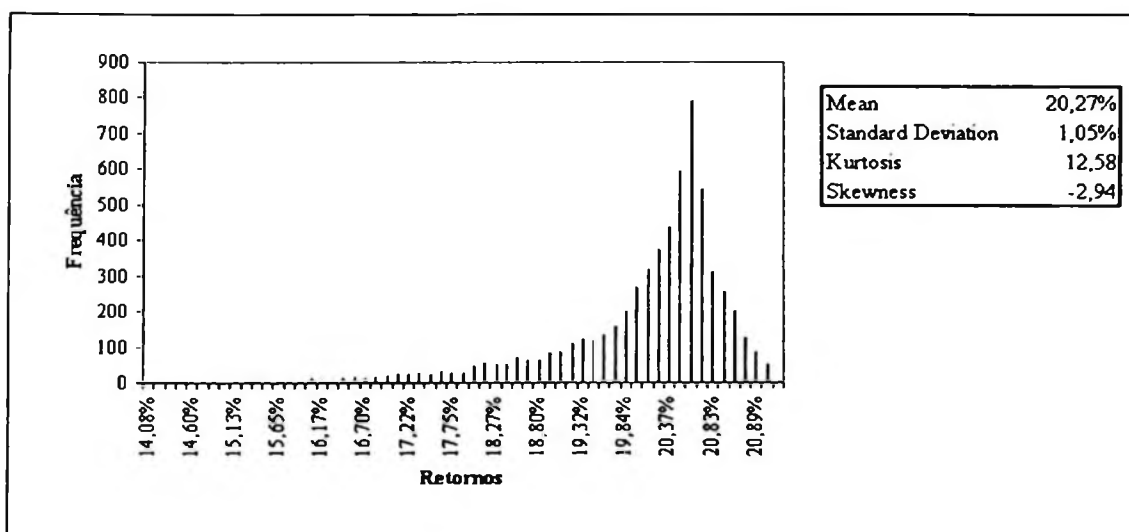
Além disso, apesar de termos obtido resultados coerentes com o uso do método, precisamos verificar se estes resultados condizem com a realidade. Portanto, seria interessante validarmos o modelo com a implementação de uma metodologia alternativa àquela proposta por este trabalho. Por utilizarmos uma abordagem voltada ao comportamento de preços, adotaremos um modelo de default para a validação do nosso método.

6.1. VaR

Para a prova empírica do resultado de Struder [1995] de que o (PM) é mais conservador do que o (VaR), repetimos o uso do modelo de Eom, Helwege, Huang [2003] (Merton estendido) para a verificação do comportamento histórico dos ativos das empresas, mas usamos os parâmetros obtidos nesta análise para simularmos cenários

futuros para estes ativos por Monte Carlo.¹¹ Com os cenários futuros estimados, foi possível o cálculo dos preços das debêntures no horizonte de tempo de um ano. E considerando a composição ótima obtida na resolução do problema anterior, chegamos a uma distribuição de probabilidades para o retorno agregado do portfolio no horizonte de tempo estipulado. Esta distribuição pode ser conferida na figura a seguir.

Figura 6.1–Histograma para a função retorno do portfolio.



Atribuindo um peso igual para cada valor de retorno calculado nas dez mil simulações, conseguimos achar o retorno mínimo para um nível de confiança de 99%, que corresponde ao (VaR).

¹¹ Fizemos dez mil simulações de cenários futuros para os ativos de cada empresa emissora, para cem passos no futuro, e consideramos a correlação histórica entre os ativos de forma a vincular as variáveis aleatórias geradas para as seis empresas emissoras.

Tabela 6.1 – Determinação do quantil 1% da distribuição de retornos do portfolio

simulação	retorno	prob. individual*	prob acumulada**
79	13,95%	0,000125	0,963%
80	14,33%	0,000125	0,975%
81	14,36%	0,000125	0,988%
82	14,38%	0,000125	1,000%
83	14,39%	0,000125	1,013%
84	14,44%	0,000125	1,025%

* probabilidade de cada retorno simulado; ** probabilidade acumulada para cada retorno simulado.

Como pode ser observado na tabela anterior, o valor de retorno correspondente ao quantil 1% da distribuição é igual a 14,38%. Descontando o custo de carregamento estimado de 18,29% do valor do retorno, temos que a perda máxima do portfolio calculada pelo VaR é dada por:

$$\text{PERDA MÁXIMA} = 14,38\% - 18,29\% = - 3,94\%$$

Comparando na tabela 6.2 o valor obtido pelo VaR com o resultado da otimização da função PM, podemos comprovar que o risco medido pelo VaR é menor do que o risco medido pela função PM e, portanto, PM é uma medida de risco mais conservadora. Assim, conseguimos atestar empiricamente o resultado provado por Struder [1995].

Tabela 6.2 – Comparação entre o VaR e PM para o portfólio de debêntures (nível de confiança = 99%)

$\alpha = 99\%$	Risco
VaR	-3,94%
ML	-9,51%

6.2. Implementação do modelo de default

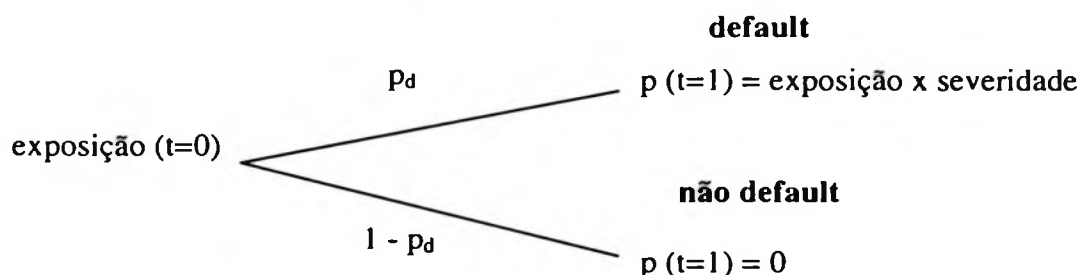
Voltando agora as atenções para a validação do método proposto neste trabalho, procuramos tratar o problema segundo uma abordagem alternativa, ou seja, determinando o risco de crédito a partir de um modelo de default e não mais através de um modelo de spread. Alguns modelos, como o CreditRisk+ [1997], consideram o risco de spread como um componente do risco de mercado e se concentram na determinação dos valores esperado e inesperado das perdas resultantes de um evento de default.

O modelo alternativo que adotaremos (ver Saunders [2002], p. 98), muito similar ao CreditRisk+ [1997], trabalha com dois estados possíveis: default / não default. Nestes estados, a variável “perda de crédito” pode assumir os valores *zero* no estado “não default” e *p* no estado “default”. O valor (*p*) é função de três variáveis, exposição, severidade e probabilidade de default, as quais serão descritas a seguir:

- i) Exposição: É o montante financeiro que o credor perderia em um evento de inadimplência, caso o devedor não pagasse nenhum valor residual do crédito tomado.
- ii) Severidade: É o montante financeiro que o credor não consegue reaver, caso o devedor pague parte de sua dívida em um evento de default.
- iii) Probabilidade de default (p_d): É a probabilidade de que uma contraparte não cumpra suas obrigações de crédito.

Assim, podemos definir a perda por crédito p como uma variável aleatória igual à exposição vezes a severidade no estado “default”.

Figura 6.2 – Evento de inadimplência



Assim, o valor esperado da variável perda, também chamado de perda esperada, pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 E[\text{perda}] &= p_d \times E[\text{exposição} \times \text{severidade}] + (1 - p_d) \times 0 \\
 &= p_d \times E[\text{exposição}] \times E[\text{severidade}] = p_d \times e \times s
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

onde (e) é o valor esperado da exposição e (s) é o valor esperado da severidade.

Já a variância desta variável, ou perda inesperada, pode ser obtida da seguinte forma:

$$\text{var}(perda) = E[perda^2] - E^2[perda] \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(perda) &= p_d E[\text{exposição}^2 \times \text{severidade}^2] - (p_d \times e \times s)^2 \\ &= p_d E[\text{exposição}^2] \times E[\text{severidade}^2] - (p_d \times e \times s)^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} E[\text{exposição}] = e &\Rightarrow E[\text{exposição}^2] = \sigma_e^2 + e^2 \\ E[\text{severidade}] = s &\Rightarrow E[\text{severidade}^2] = \sigma_s^2 + s^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \text{var}(\text{exposição}) \\ \sigma_s^2 &= \text{var}(\text{severidade}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Substituindo (6.5) em (6.4), temos que:

$$\text{var}(perda) = p_d \times (\sigma_e^2 + e^2) \times (\sigma_s^2 + s^2) - p_d^2 \times e^2 \times s^2 \quad (6.6)$$

$$\text{var}(perda) = e^2 s^2 p_d (1 - p_d) + \sigma_e^2 s^2 p + \sigma_s^2 e^2 p + \sigma_e^2 \sigma_s^2 p \quad (6.7)$$

Assumindo a hipótese de que a variação da exposição é muito pequena, podemos afirmar que $\sigma_e \rightarrow 0$. Com isso, podemos expressar a perda inesperada como:

$$perda_inesperada = \sqrt{\text{var}(perda)} = \sqrt{e^2 s^2 p_d (1 - p_d) + \sigma_s^2 e^2 p} \quad (6.8)$$

Para aplicarmos essas definições nos nossos exemplos, devemos estimar os valores de cada uma das variáveis que definem a perda. Para a probabilidade de default, utilizamos uma matriz de migração acumulada de ratings divulgada pela agência de classificação Moody's¹². Podemos conferi-la na próxima tabela:

Tabela 6.3 – Taxas médias de default acumuladas por Rating e por prazo (1983-2004)

Rating	1 ano	2 anos	3 anos	4 anos	5 anos
Aaa	0,00%	0,00%	0,00%	0,06%	0,18%
Aa1	0,00%	0,00%	0,00%	0,15%	0,15%
Aa2	0,00%	0,00%	0,04%	0,13%	0,28%
Aa3	0,00%	0,00%	0,05%	0,11%	0,18%
A1	0,00%	0,00%	0,19%	0,30%	0,38%
A2	0,03%	0,08%	0,22%	0,47%	0,68%
A3	0,03%	0,21%	0,37%	0,50%	0,65%
Baa1	0,17%	0,50%	0,84%	1,14%	1,46%
Baa2	0,12%	0,40%	0,81%	1,52%	2,11%
Baa3	0,41%	1,07%	1,70%	2,66%	3,60%
Ba1	0,66%	2,07%	3,55%	5,23%	6,76%
Ba2	0,62%	2,22%	4,48%	6,84%	8,82%
Ba3	2,23%	6,10%	10,62%	15,03%	19,14%
B1	3,03%	8,89%	14,81%	20,09%	25,27%
B2	5,93%	13,73%	20,58%	26,58%	31,24%
B3	10,77%	20,43%	29,01%	36,82%	43,55%
Caa-C	22,24%	35,80%	46,75%	54,60%	60,40%

Fonte: Moody's

¹² Dados de inadimplência coletados entre os anos de 1983 e 2004.

Para a severidade, consideramos valores de taxas de recuperação também divulgadas pela agência Moody's (ver Hamilton [2004]), as quais podemos verificar na tabela a seguir:

Tabela 6.4 – Estatísticas sobre taxas de Recuperação por prioridade sobre a estrutura de capital da empresa

Instrumentos	Média	Mediana	Mín	Máx	Desvio	Observações
Empréstimos						
Com garantias	64,6	82,9	11,9	100,8	35,5	21
Sem garantias	80,0	80,0	80,0	80,0	N/A	1
Títulos						
Sênior c/ garantias	60,3	64,5	1,3	100,5	32,9	9
Sênior s/ garantias	41,2	34,0	0,1	99,5	24,7	34
Sênior subordinado	36,6	40,9	0,8	94,5	20,2	17
Subordinado	12,3	11,5	3,0	25,1	8,1	5
Ações Preferenciais	1,1	N/A	N/A	N/A	N/A	1

Fonte: Moody's

Com esses dados em mãos, podemos estimar os valores esperados e as variâncias das perdas por crédito para cada uma das debêntures da carteira teste. Os resultados podem ser conferidos nas próximas tabelas.

Tabela 6.5 – Características das emissões:

	exposição*	rating **	Prazo aproximado	espécie
CSNA12	632	A3	1 ano	Quirografária
ALLG13	620115	A3	2 anos	Quirografária
LAME12	1470948	A2	2 anos	Subordinada
NVML12	1119684	Aa3	1 ano	Garantia Real
BRTO14	495744	Aa1	4 anos	Quirografária
SBES16	2292876	A2	2 anos	Quirografária

* valor investido em R\$¹³; ** classificação da empresa segundo a agência Moody's.

Uma das características dos títulos citadas na tabela anterior, as espécies de debêntures, podem ser classificadas pelas modalidades de garantias oferecidas.

Temos:

- i) Com garantia real: Garantidas por bens integrantes do ativo da companhia emissora.
- ii) Com garantia flutuante: Asseguram o privilégio geral sobre o ativo da emissora em caso de falência.
- iii) Quirografária: Não oferecem privilégio algum sobre o ativo da emissora.
- iv) Subordinada: Na hipótese de liquidação da companhia, oferecem preferência de pagamento somente sobre o crédito dos acionistas.

Segundo Saito [2005], no caso de insolvência de uma empresa emissora, é pouco provável que os credores recebam suas garantias devido à hierarquia prevista na Lei

¹³ Reflete a mesma composição de carteira usada no problema de otimização PM.

de Falências. Com isso, usaremos a taxa de recuperação mínima apresentada na tabela 6.4 como referência para a severidade no modelo de default. Consultando a tabela 6.3 para os valores de probabilidade de default, temos todos os elementos necessários para a determinação da perda esperada e inesperada para cada debênture.

Os resultados podem ser conferidos na tabela 6.6:

Tabela 6.6 – Perdas Individuais por crédito¹⁴

	taxa de recuperação	taxa de severidade ¹⁵	vol da severidade	probab. default	perda esper.	desvio padrão
CSNA12	12,3%	87,7%	8,1%	0,03%	0,2	9,6
ALLG13	12,3%	87,7%	8,1%	0,21%	1142,1	25001,9
LAME12	12,3%	87,7%	8,1%	0,08%	1032,0	36628,1
NVML12	12,3%	87,7%	8,1%	0,00%	98,2	9860,9
BRTO14	12,3%	87,7%	8,1%	0,15%	652,2	16897,6
SBES16	12,3%	87,7%	8,1%	0,08%	1608,7	57094,9

Até aqui, conseguimos determinar os valores de perda inesperada para cada debênture, mas precisamos de uma medida agregada ao portfolio. Para isso, precisaríamos considerar as correlações de default entre as contrapartes emissoras das debêntures, o que esbarra em um sério problema que temos que é falta de um

¹⁴ As estatísticas contidas na tabela 6.6 foram extraídas da agência Moody's e refletem o mercado norte-americano de bônus corporativo.

¹⁵ Taxa de severidade = 1 – taxa de recuperação.

banco de dados confiável para a apuração destas estatísticas. Como a nossa intenção é validar o modelo proposto pelo trabalho e não chegar a um valor exato de risco, agregamos o risco do portfolio segundo três cenários de correlação média entre as contrapartes. Para cada um destes cenários, determinamos qual a volatilidade agregada da carteira. Com os valores de média e variância para cada cenário, parametrizamos a distribuição de probabilidades da função perda de crédito por uma distribuição “gama”, assim como no método CreditRisk+ [1997]. Com todas as variáveis necessárias em mãos, foi possível determinar o risco de crédito da carteira de debêntures para cada um dos cenários. Os resultados podem ser verificados na tabela a seguir:

Tabela 6.7 – Valores de Risco estimados pelo modelo de default

	correlação média*	volatilidade**	desvios***	Perda (R\$)+	Perda (%)++
cenário 1	0%	74895,3	4,6	349051,7	5,82%
cenário 2	50%	115709,8	4,5	525568,5	8,76%
cenário 3	100%	145493,1	4,2	613715,8	10,23%

* correlação de default média entre as contrapartes; ** desvio padrão agregado da carteira (considerando as correlações médias); *** número de desvios considerando uma distribuição gama ($\mu, \sigma^2, \alpha, \beta$) de probabilidades, onde $\alpha = \mu/\sigma^2$ e $\beta = \sigma^2/\mu$; + perda de crédito da carteira em R\$¹⁶; ++ perda de crédito da carteira em (%).

Se levarmos em conta o critério adotado no problema de otimização, devemos descontar do retorno esperado da carteira as perdas obtidas no modelo de default e

¹⁶ Perda da carteira = perda esperada + perda inesperada

depois, descontar o custo de carregamento do valor obtido. Os resultados podem ser verificados na tabela a seguir:

Tabela 6.8 – Comparação entre os resultados da otimização e do modelo de default

	retorno esperado*	Perda MD**	Perda da carteira***	Risco MD+	Risco PM++
cenário 1	19,48%	5,82%	13,66%	-4,63%	-9,51%
cenário 2	19,48%	8,76%	10,72%	-7,57%	-9,51%
cenário 3	19,48%	10,23%	9,25%	-9,04%	-9,51%

* retorno esperado da carteira de debêntures para o horizonte $t = 1$ ano; ** valores de perda de crédito estimados no modelo de default; *** retorno mínimo da carteira de debêntures pelo modelo de default¹⁷; + risco medido pelo modelo de default¹⁸; ++ risco medido pela otimização da função PM.

Pelos resultados exibidos na tabela anterior, vemos que a ordem de grandeza dos riscos medidos pelos dois modelos (PM) e (MD) é bem semelhante. Os valores não são muito próximos uma vez que no modelo de default, utilizamos valores de probabilidade de default divulgados pela agência Moody's, os quais não refletem a realidade brasileira e certamente não possuem relação com o comportamento histórico dos ativos obtidos a partir das séries de preços de debêntures adotadas neste trabalho.

Além disso, as taxas de severidade utilizadas também não refletem a realidade brasileira. Por vários problemas locais, inclusive de legislação, a parcela de crédito recuperada em um evento de default no Brasil é muito pequena. Portanto, é bastante

¹⁷ Retorno mínimo = retorno esperado – perda de crédito.

¹⁸ Risco = perda da carteira – custo de carregamento (18,29%).

razoável imaginar que as medidas de risco obtidas com o modelo de default sejam menos conservadoras do que as obtidas pela variável PM.

Estimativas de probabilidade de default e de severidade poderiam ser extraídas destas séries de preços, o que abriria caminho para um teste de validação mais rigoroso do modelo. Esta é uma sugestão para desenvolvimentos futuros do método apresentado neste trabalho.

Capítulo 7 - Conclusão

Foram apresentados neste trabalho dois problemas de otimização - um para o cálculo do risco de crédito para um portfolio de debêntures e outro para a obtenção da composição ótima da carteira, que minimiza o risco de crédito calculado anteriormente – e suas soluções. A motivação para se trabalhar com estes modelos foi a busca de uma alternativa simples para o cálculo do risco de crédito agregado. Para isso, buscou-se adaptar o modelo de Merton [1974] para o apreçamento de títulos corporativos e utilizou-se o método da otimização da perda máxima para a obtenção do risco.

Com base nos resultados obtidos, pudemos concluir que a abordagem proposta é viável, objetiva, dado que não exige análises subjetivas das empresas envolvidas, e apresenta pouco custo computacional. O problema da alocação ótima do portfolio, por exemplo, impõe uma dupla otimização que, a princípio, parece complicar o problema. Porém, a solução se restringe a um sistema 2×2 cujas variáveis são os multiplicadores de Lagrange. A solução alternativa seria computar o risco por Simulação de Monte Carlo, calculando o (VaR) em seguida. Todavia, além de introduzir erro de simulação, o problema se tornaria intensamente numérico e exigiria bastante em termos computacionais.

Além disso, vimos que o método apresenta outra vantagem com relação ao (VaR), por ser mais conservadora. Concluimos também que o método é factível, uma vez que fornece valores de risco semelhantes aos fornecidos por uma metodologia alternativa.

É inquestionável o fato que a pouca liquidez do mercado secundário de debêntures pode trazer imperfeições na apuração dos dados de mercado, o que compromete a eficácia do método. Mas com o desenvolvimento de um mercado secundário mais ativo para debêntures, o que já vem acontecendo com a divulgação diária das taxas de referência e com a organização de fóruns de debate entre especialistas feitos pela Andima, o método apresentado pode se tornar uma alternativa interessante ao já consagrado KMV [2005].

Algumas hipóteses consideradas na execução deste trabalho são questionáveis. A adoção de uma volatilidade constante para as séries de log-retornos dos ativos, por exemplo, pode ser facilmente contestada com um teste de raiz unitária. Todavia, para manter a fidelidade ao modelo KMV [2005], não foi testado um método alternativo para a modelagem da volatilidade. Outra hipótese considerada, de que a aparente normalidade das séries históricas das emissões testadas garantiria uma distribuição conjunta multinormal para o portfólio, não é necessariamente verdadeira. Todavia, segundo Johnson & Wichern [2002], é bastante difícil construir um teste eficiente de normalidade conjunta para mais do que duas dimensões, o que dificulta a comprovação da hipótese. Portanto, fica como sugestão para futuros desenvolvimentos deste trabalho o teste dessa hipótese.

O objetivo da dissertação, que era testar um modelo alternativo de risco de crédito, foi atingido. Porém, há muito ainda a ser desenvolvido no modelo apresentado, principalmente com a realização de mais testes para portfólios maiores e compostos de mais emissões e para um histórico de preços mais maduro do que o utilizado neste trabalho. Algumas extensões e desenvolvimentos deste trabalho podem ser realizados,

principalmente com a adaptação do método para quaisquer produtos de crédito e não somente para uma carteira de debêntures. Neste caso, poder-se-ia utilizar a idéia de "distance to default" utilizada no KMV [2005] para a determinação de probabilidades de default, que seriam estimadas a partir dos dados de mercado de debêntures. Também seria de grande utilidade a realização de algum teste de aderência ou *backtest* do modelo para dados não contemplados em sua calibração, de forma a avaliar a qualidade do modelo na previsão do risco de crédito.

Quaisquer avanços no tema de modelagem de risco de crédito são bem-vindos, dado que o campo de pesquisa é muito extenso e ainda há muito a ser desenvolvido nesta área.

Bibliografia

- [1] Associação Nacional das Instituições do Mercado Aberto (Andima), 2005, *Confere de Debêntures: Metodologia*, Rio de Janeiro, disponível em <<http://www.andima.com.br>>.
- [2] Associação Nacional das Instituições do Mercado Aberto (Andima), 1998, *Estudos Especiais; SND – Sistema Nacional de Debêntures*, Rio de Janeiro, disponível em <<http://www.debentures.com.br>>.
- [3] Basle Committee on Banking Supervision, 1999, *Credit Risk Modeling: Current Practices and Applications*, Basle.
- [4] Costa, O. L. V. e Assunção, H. G. V., 2004, *Análise de Risco e Retorno em investimentos financeiros*, Editora Manole Ltda.
- [5] Credit Suisse First Boston International, 1997, *Credit Risk⁺ - A Credit Risk Management Framework*.
- [6] Crosbie, P. & Bohn, J., 2005, *Modeling Default Risk*, Moody's KMV Company.
- [7] Eom, Y. H., Helwege, J. & Huang, J., 2003, *Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis*, Review of Financial Studies.
- [8] Hamilton, D. et al, 2004, *Default & Recovery Rates of Corporate Bond Issuers*, Moodys's Investors Service – Global Credit Research, disponível em <<http://www.moodys.com>>.
- [9] Hull, J., 1993, *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 4th Edition.

- [10] James, B. R., 2002, *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2ª Edição.
- [11] Johnson, R. & Wichern, D., 2002, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall, 5th Edition.
- [12] Jorion, P., 1997, *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, Mc Graw Hill.
- [13] Kealhofer, S., 2003, *Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation*, AIMR, pp. 78-92.
- [14] Merton, R.C., 1974, *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, Journal of Finance, pp. 449-470.
- [15] Mina, J. & Xiao, J. Y., 2001, *Return to Risk Metrics: The Evolution of a Standard*, Risk Metrics Group.
- [16] Oliveira, R. D. e de Almeida, C. I. R., 2003, *Alocação de Carteiras Sujeitas a Risco de Crédito*, Revista Brasileira de Finanças, v. 1, n^o 2, pp. 301-339.
- [17] Saito, R. e Sheng, H.H., 2005, *Determinantes de Spread das Debêntures no Mercado Brasileiro*, Revista de Administração / Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, v.40, n^o 2, pp. 193 – 205.
- [18] Saunders, A. and Allen, L., 2002, *Credit Risk Measurement – New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*, John Wiley & Sons, 2nd Edition.
- [19] Struder, G., 1995, *Value At Risk and Maximum Loss Optimization*, RiskLab Technical Report.

Apêndice I – Apreçamento de debêntures

O manual de apreçamento CONFERE de debêntures [2005] desenvolvido pela Andima é a referência utilizada neste trabalho para o cálculo dos preços unitários (PU) das debêntures utilizadas em nossa análise. O manual explica detalhadamente os passos necessários para se obter o valor dos (PUs) e é a referência mais adequada para uma consulta mais minuciosa por parte do leitor. O objetivo deste apêndice é apenas dar uma visão geral de como os (PUs) são calculados. Assim, podemos dividir o roteiro em duas partes:

- i) Cálculo do PU no Par – Incidência dos juros pactuados na emissão sobre o valor nominal atualizado. Assim, temos que:

$$PU \text{ no PAR} = VNA \times \text{Fator de juros} \quad (I.1)$$

onde (PU) no par é o valor nominal de emissão acrescido da remuneração acumulada desde o último evento de pagamento de juros até a data de referência e (VNA) é o valor nominal atualizado da debênture, que será igual ao valor nominal de emissão quando não houver amortizações de principal.

Já o fator de juros varia de acordo com o indexador. O manual explica com detalhes o cálculo destes fatores para debêntures indexadas à Taxa DI e ao IGPM.

- ii) Cálculo do PU de mercado: O PU da debênture é o somatório dos pagamentos de juros e de principal, trazidos a valor presente pela taxa de juros correspondente ao indexador do papel (taxa futura de juros em reais para as emissões indexadas à taxa DI e cupom futuro de IGPM para as indexados ao IGPM) acrescida de um spread ou prêmio de risco que reflete a qualidade creditícia da empresa emissora. Assim, podemos resumir esta definição com a fórmula abaixo:

$$PU = \sum_i \frac{\text{PagamentoJuros}_i + \text{PagamentoPrincpal}_i}{[(1 + \text{mercado}) \times (1 + \text{spread})]^{\frac{du_i}{252}}} \quad (1.2)$$

onde:

PagamentoJuros corresponde ao VNA multiplicado pelos juros devidos entre dois pagamentos i e $i-1$. Em alguns casos, devem ser embutidas expectativas futuras de juros para a determinação desta variável.

PagamentoPrincpal corresponde ao montante referente à alguma parcela de amortização antecipada.

Uma forma de se expressar o (PU) da debênture é em % do (PU) no par. Essa é a forma mais adequada para estudar o comportamento do (PU) durante o tempo e para monitorar o impacto de variações no spread de crédito cobrado sobre o (PU) da emissão. Com isso, podemos escrever:

$$PU = PU \text{ no PAR} \times (PU_{\alpha \text{Par}}) \quad (1.3)$$