

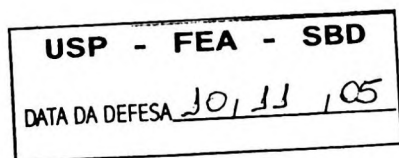
"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ADMINISTRAÇÃO E ECONOMIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE: “MODELAGEM MATEMÁTICA
FINANCEIRA”

Um Modelo Matemático para controle ótimo da Taxa de Câmbio em um contexto de Metas Inflacionarias.

Murilo Menezes Pisciotto

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Belitsky



São Paulo
2005

Um Modelo Matemático para o Controle Ótimo da Taxa de Câmbio em um Contexto de Metas Inflacionárias.

Murilo Menezes Pisciotto

Dissertação apresentada à Faculdade de
Economia, Administração e Contabilidade e ao
Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo para Obtenção do
Título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Belitsky

São Paulo
2005

“Estes são homens com idéias corajosas, mas muito críticos das suas próprias idéias; eles tentam verificar se elas estão corretas através da tentativa de achá-las, antes de tudo, talvez erradas. Eles trabalham com conjecturas corajosas e tentativas severas de refutá-las”.

Sir Karl Pope

Abstract

This paper intends to suggest a new intervention methodology in the exchange rate market and thus, becoming an alternative to the traditional intervention methods in the spot foreign exchange market and also, in the short-term nominal interest rates. The final goal is to decrease oscillations on the growth rate and to add new financial derivatives in order to fight inflation.

Resumo

Este trabalho propôs uma nova metodologia de intervenção no mercado de câmbio, sendo uma alternativa aos métodos tradicionais de intervenção no mercado à vista de moedas e também na taxa de juro nominal de curto prazo. Tendo como objetivo final, diminuir as flutuações na taxa de crescimento do produto e incorporar novos instrumentos financeiros ao combate a inflação.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Nelson Ithiro Tanaka, que desde muito tempo aceitou orientar este trabalho e fez importantes contribuições e sem dúvida, sem ele não teria sido possível a conclusão. Ao Prof. Dr. Gustavo Monteiro Athayde que se dedicou no aconselhamento e acompanhamento deste projeto. Gostaria também de agradecer a minha esposa Roselise e ao meu filho Caio, que abriram mão do precioso convívio familiar para que eu pudesse completar esse projeto. Ao Banco Itaú S.A. que me apoiou e incentivou.

Índice

Abstract	4
Resumo	4
Agradecimentos	5
Índice de Figuras.....	7
Motivação	9
CAPÍTULO I	11
Situação brasileira pré-desvalorização de janeiro de 1999.....	11
CAPÍTULO II.....	18
Metodologia e construção econômica/financeira do modelo	18
CAPÍTULO III	25
Modelo Matemático para o Controle Ótimo da Taxa de Câmbio	25
a) Método de Solução de Mundaca e Øksendal(1998)	30
b) Método de Solução do Projeto.....	36
CAPÍTULO IV.....	43
Resultados da Simulação	43
a.1.) 10% Delta - Strikes com volatilidade alta.....	49
a.2.) 25% Delta - Strikes com volatilidade alta.....	52
a.3.) 50% Delta - Strikes com volatilidade alta.....	55
a.4.) 75% Delta - Strikes com volatilidade alta.....	57
b.1.) 10% Delta - Strikes com volatilidade baixa.....	60
b.2.) 25% Delta - Strikes com volatilidade baixa.....	63
b.3.) 50% Delta - Strikes com volatilidade baixa.....	65
b.4.) 75% Delta - Strikes com volatilidade baixa.....	67
c.) Considerações Adicionais.....	70
d.) Conclusão	81
CAPÍTULO V	87
Metas de Inflação e Controle Cambial	87
CAPÍTULO VI.....	97
Conclusão Final	97
CAPÍTULO VII.....	98
Possíveis extensões de pesquisa	98
Apêndices.....	99
Apêndice A	100
Apêndice B.....	104
BIBLIOGRAFIA	111

Lista de Figuras

Gráfico 1 – Tradeables x Non-tradeables.....	11
Gráfico 2 – Taxa de Câmbio.....	12
Gráfico 3 – Balança Comercial.....	13
Gráfico 4 – Reservas Internacionais.....	15
Gráfico 5 – Dívida Líquida em percentual do PIB.....	16
Gráfico 6 – Expectativa de Inflação versus Câmbio Realizado.....	17
Gráfico 7 – Efeito dos Juros.....	27
Gráfico 8 – Efeito da Intervenção.....	28
Gráfico 9 – Browniano com Volatilidade Baixa.....	38
Gráfico 10 – Browniano com Volatilidade Alta.....	39
Gráfico 11 - Bandas.....	39
Gráfico 12 - Smile.....	44
Gráfico 13 – Superfície de Volatilidade.....	45
Gráfico 14 – Payoff Call.....	48
Gráfico 15 – Payoff Put.....	48
Gráfico 16 – Realização Processo Volatilidade Alta.....	49
Gráfico 17 – Resultado Banco Central caso a.1.....	50
Gráfico 18 – Histograma de Resultados do Banco Central caso a.1.....	51
Gráfico 19 – Resultado das Intervenções caso a.1.....	52
Gráfico 20 - Realização Processo Volatilidade Alta.....	52
Gráfico 21 - Resultado Banco Central caso a.2.....	53
Gráfico 22 – Histograma de Resultados do Banco Central caso a.2.....	54
Gráfico 23 – Resultado das Intervenções caso a.2.....	54
Gráfico 24 – Realização do Processo Volatilidade Alta.....	55
Gráfico 25 - Resultado Banco Central caso a.3.....	56
Gráfico 26 - Histograma de Resultados do Banco Central caso a.3.....	56
Gráfico 27 – Resultado das Intervenções caso a.3.....	57
Gráfico 28 – Realização do Processo Volatilidade Alta.....	58
Gráfico 30 - Resultado Banco Central caso a.4.....	59
Gráfico 32 - Histograma de Resultados do Banco Central caso a.4.....	60
Gráfico 33 - Resultado das Intervenções caso a.4.....	60
Gráfico 34 – Realização do Processo Volatilidade baixa.....	61
Gráfico 35 - Resultado Banco Central caso b.1.....	61
Gráfico 36 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.1.....	62
Gráfico 37 - Resultado das Intervenções caso b.1.....	62
Gráfico 38 – Realização do Processo Volatilidade Baixa.....	63
Gráfico 39 - Resultado Banco Central caso b.2.....	64
Gráfico 40 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.2.....	64
Gráfico 41 - Resultado das Intervenções caso b.2.....	65
Gráfico 42 – Realização do Processo Volatilidade Baixa.....	65
Gráfico 43 - Resultado Banco Central caso b.3.....	66
Gráfico 44 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.3.....	66
Gráfico 45 - Resultado das Intervenções caso b.3.....	67
Gráfico 46 – Realização do Processo Volatilidade Baixa.....	68
Gráfico 47 - Resultado Banco Central caso b.4.....	69
Gráfico 48 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.4.....	69
Gráfico 49 - Resultado das Intervenções caso b.4.....	70
Gráfico 50 – Distribuição Função Resposta = 0,00.....	71
Gráfico 52 – Comparação entre as Funções Respostas.....	73
Gráfico 53 – Volatilidades com as Funções Respostas.....	74
Gráfico 54 – Distribuição dos Retornos, Função Resposta = 0,00.....	75
Gráfico 55 - Distribuição dos Retornos, Função Resposta = 0,01.....	75
Gráfico 56 - Distribuição dos Retornos, Função Resposta = 1,00.....	76
Gráfico 57 – Histograma dos Retornos – Série Realizada.....	77
Gráfico 58 - Histograma dos Retornos – Série Função Resposta = 0,00.....	78

Gráfico 59 - Histograma dos Retornos – Série Função Resposta = 0,01	79
Gráfico 60 - Histograma dos Retornos – Série Função Resposta = 1,00	79
Gráfico 61 – Volatilidades Implícitas	80
Gráfico 62 – Volatilidades Implícitas	81
Tabela 1 – Resultados das Intervenções.....	82
Gráfico 63 – Percentual de Sucesso das Intervenções	83
Gráfico 64 – Percentual de Intervenções.....	84
Tabela 2 – Desempenho do <i>Inflation Target</i>	88
Gráfico 65 – Gráfico dos Desempenhos	89
FIGURA 1 – Mecanismo de Transmissão	94
Gráfico 66- Delta	104
Gráfico 67 - Gama	105
Gráfico 68 – Gama ao longo do tempo	106
Gráfico 70 –Vega nas extremidades	108
Gráfico 71 - Teta.....	109
Gráfico 72 – Teta nas diferentes moneyness.....	110

Motivação

O tema a ser estudado neste projeto é uma junção da Teoria Econômica, mais especificamente o ramo da economia que se preocupa com as grandes variáveis econômicas, tais como taxa de câmbio, taxa de juros e inflação (Macroeconomia) e a Estatística, tratando o controle ótimo da taxa de câmbio. No nosso contexto o controle será estocástico, uma vez que consideraremos a trajetória da taxa de câmbio ao longo do tempo como sendo a realização de um processo estocástico. Além do mais, a moderna teoria de finanças mostra que esta trajetória no curto prazo pode ser encarada como sendo uma variável aleatória tipo *random-walk*.

Esta é uma área de grande potencial de desenvolvimento, porque se admitimos que economia seja uma ciência baseada no somatório dos comportamentos de cada indivíduo, realizar previsões tendo como pano de fundo este contexto é uma tarefa difícil. O comportamento humano não é totalmente previsível e uma maneira de superar esta dificuldade é atribuir aleatoriedade e calcular probabilidades em vários cenários. Neste sentido, as técnicas estatísticas adequam-se perfeitamente a esses propósitos.

É sabido que a desvalorização de uma moeda gera inflação. Desta maneira, compreender a dinâmica que rege o comportamento da moeda é útil para prover meios de combate à inflação. Como será tratado no conjunto da dissertação mais adiante, este projeto tem uma oportunidade de prestar uma contribuição para a nova conjuntura econômica brasileira, porque trabalhando com o controle estocástico da taxa de câmbio em um contexto de metas inflacionárias, é possível, em certas circunstâncias, reduzir a volatilidade taxa de crescimento do produto, mesmo que por vias indiretas atuando nas expectativas dos agentes econômicos em relação ao controle inflacionário.

É muito difícil testar modelos econômicos na prática, porque eles normalmente geram conseqüências nem sempre desejáveis (fenômenos econômicos não são facilmente controlados ou analisados – eles são frutos de muitas variáveis, muitas delas impossíveis de se dimensionar ou modelar). Além disto, como vamos estudar um processo de desvalorização/valorização *ex-post*, mesmo que involuntariamente teríamos um certo viés. Sendo assim, optamos por utilizar simulações para testar a nossa hipótese central.

A presente dissertação tem a seguinte estrutura. Na primeira sessão apresentaremos o contexto brasileiro anterior à desvalorização cambial ocorrida em janeiro de 1999. Na segunda sessão mostraremos a metodologia e a teoria econômica do modelo do controle.

Por sua vez, na terceira sessão apresentaremos o modelo matemático. A quarta sessão será dedicada à aos resultados da simulação. Na quinta parte do projeto detalharemos a relação entre metas inflacionarias e controle cambial. Na sexta sessão apresentaremos as nossas conclusões e na seqüência as referências bibliográficas que utilizamos ao longo do projeto.

CAPÍTULO I

Situação brasileira pré-desvalorização de janeiro de 1999

A economia brasileira ao longo da década de 90 sofreu inúmeras mudanças, tanto de cunho econômico como político. Talvez a maior de todas as mudanças tenha sido a introdução do real em junho de 1994. Com ele, a economia livrou-se de um problema que a perseguia por anos e no qual tanto esforço fora despendido para saná-la, a inflação.

O Plano Real, como ficou sendo conhecido, foi muito bem sucedido no tocante a estabilização monetária. Para tanto ele ficou apoiado no que ficou conhecido como âncora cambial nominal, ou seja, a manutenção em um primeiro instante de uma taxa de paridade real/dólar americano valorizada, tendo um papel fundamental para o processo de estabilização, uma vez que ela possibilitou uma maior oferta de produtos, para suprir o aumento da demanda agregada, via diferencial de paridade cambial. Assim, o preço dos produtos importados ficou competitivo, inibindo tentativas de repasse para preços aumentos

Tradebles x Non-tradebles

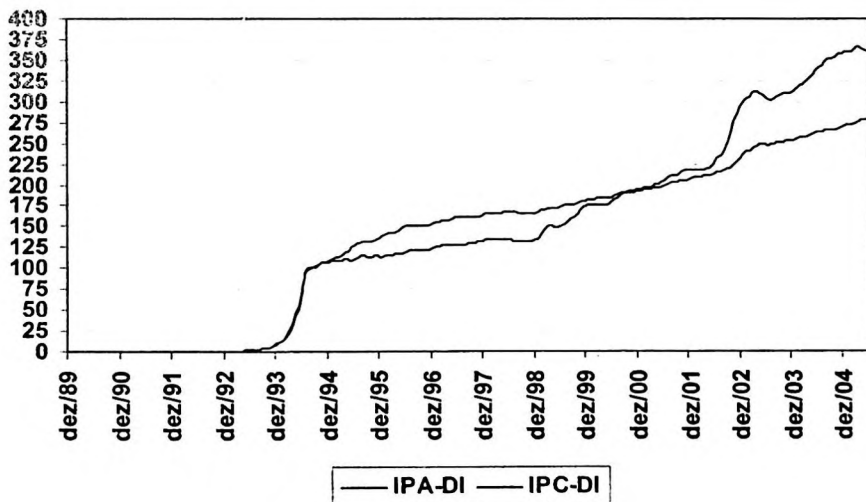


Gráfico 1 – Tradeables x Non-tradeables

de quaisquer natureza, o que acabou por ser a pedra angular no controle da inflação naquele momento (Gráfico 1)¹.

Aqui vale ressaltar um ponto importante. Como a taxa de câmbio permaneceu por muito tempo valorizada, o país começou a enfrentar problemas no Balanço de Pagamentos. O mais importante foi o crescente do déficit comercial. Para enfrentar este problema, o governo da época se viu forçado a adotar uma política cambial de desvalorizações constantes, fazendo o real depreciar-se a uma taxa ao redor de 6,5% a 7,0% ao ano (*crawling peg*).

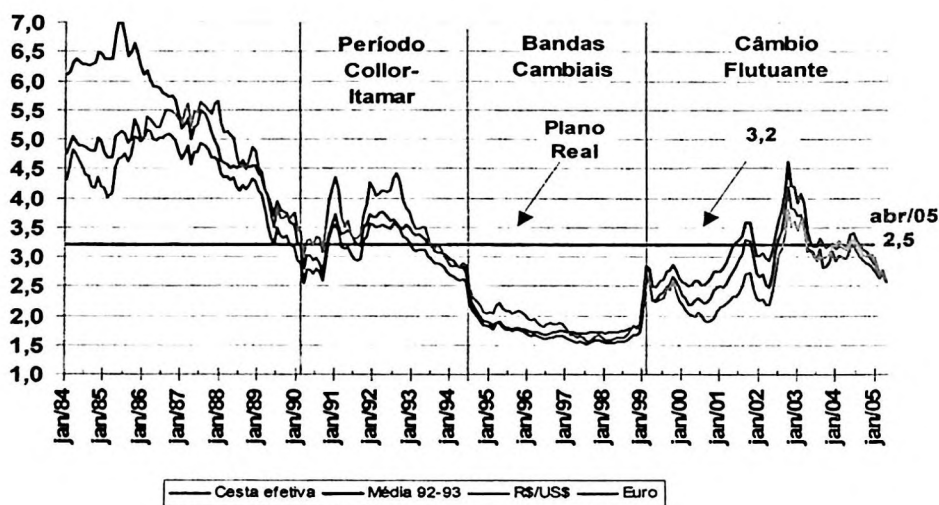


Gráfico 2 – Taxa de Câmbio

Contudo, este ritmo de depreciação adotado não foi suficiente para deixar o real numa cotação equilibrada em termos (Gráfico 2 - repare que a 1ª fase do plano real produziu a taxa de câmbio real mais apreciada dos últimos 32 anos), implicando na persistência do déficit comercial (Gráfico 3). Somando-se ao problema na balança comercial, o já constante déficit fiscal começou a tornar-se preocupante². Além da variável taxa de juros, o déficit

¹ O gráfico 1 mostra claramente o papel da âncora cambial nominal em funcionamento. Na primeira fase do Plano Real, jul/94 - jan/99, vê-se que a relação de tradables versus non-tradables ficou favorável aos non-tradables, ou seja graças a este diferencial de preços relativos foi possível suprir o aumento que a demanda agregada teve quando da redução da inflação, lançando uma massa de consumidores "novos" para dentro do mercado. Possibilitando assim, atender a esta demanda represada por anos de inflação alta.

² A necessidade de manter o real valorizado, via taxa de juros elevada, provocou um aumento no montante pago referente ao serviço da dívida pública federal.

fiscal antes do plano real ficava maquiado devido ao efeito que a inflação provoca nas contas públicas³. Deste modo tínhamos o que é conhecido na literatura econômica como déficits gêmeos, ou seja, déficit nas contas externas e nas contas públicas. Esta associação foi ruim para a economia do país, uma vez que tínhamos que ser financiados, isto é, tínhamos que tomar recursos emprestados para poder fechar o balanço que o déficit gerava. Desta forma, a taxa de juros neste período foi mantida alta, tanto para contornar esta dificuldade, quanto para atenuar os constantes ataques especulativos que o real sofreu. As pressões ao longo do tempo (1995-1998) foram aumentando e vieram três crises em escala mundial, a do México (1995), a Asiática (1997) e a da Rússia (1998). Devido a esta política de câmbio semi-fixo, isto é, desvalorizações administradas, toda vez que havia uma pressão cambial aumentava-se a taxa de juro⁴ e vendia-se a moeda americana, gastando reservas, para tentar manter esta taxa cambial valorizada.

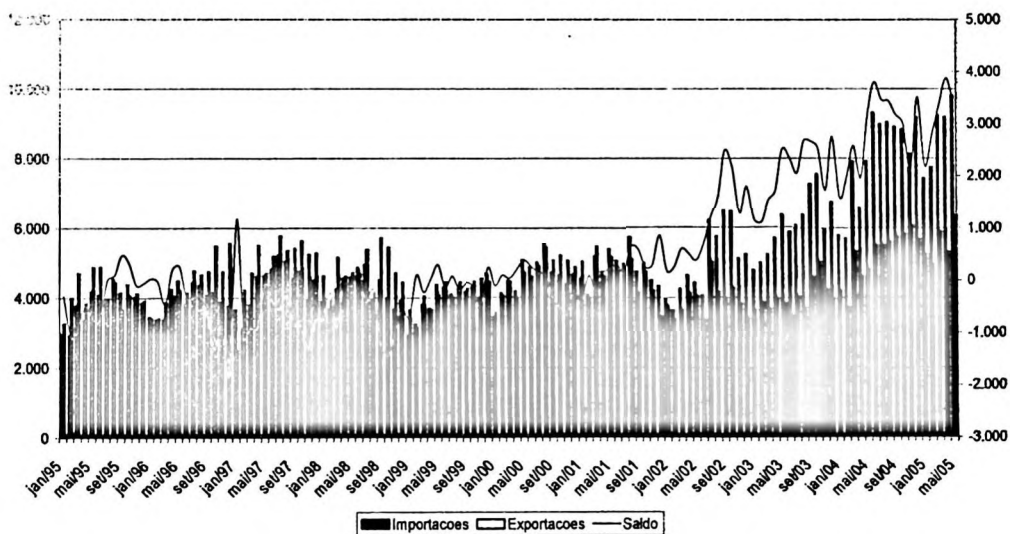


Gráfico 3 – Balança Comercial

³ Pela diferença temporal existente entre a data que o governo recebe recursos da sociedade e realiza seus pagamentos, o valor monetário destes é menor por causa da corrosão que a inflação causa.

⁴ Este aumento da taxa de juro era de tal magnitude, que fazia com que o cupom cambial ficasse tão atraente para o capital estrangeiro de curto prazo, que depois da crise russa(1998) o país chegou a ter quase US\$ 70,0 bilhões em reservas

Porém, depois da crise russa em agosto de 1998, a situação econômica e de certa forma também a incerteza política - vale a pena notar que era um ano eleitoral, geraram uma deterioração do cenário, que resultaram numa piora das expectativas. Houve uma brutal perda de reservas (Gráfico 4) na tentativa da manutenção da política cambial em vigor à época e por sua vez as taxas de juros permaneceram alta por um tempo significativo, gerando discussão sobre a solvência da dívida brasileira (Gráfico 5). Então, em meados de janeiro de 1999, devido a uma grande incerteza no cenário interno e externo, associado a pressões políticas, houve a mudança da política cambial. Em meio a uma confusão no anúncio e na implementação do novo sistema, adotou-se um mecanismo que permitia uma flutuação dentro de uma banda um tanto quanto larga, e uma vez que o limite tanto superior, quanto inferior desta banda fosse atingido havia um movimento de auto-ajuste⁵. Contudo esta política de bandas não vingou e foi trocada por um sistema de flutuação suja (a moeda não flutua totalmente livre, o Banco Central intervém quando achar interessante) o qual permanece até agora.

Um pensamento de Krugman (1998) parece-nos bastante atual: “uma crise cambial é essencialmente o resultado de políticas inconsistentes com a manutenção de uma taxa de câmbio fixa no longo prazo”. Basicamente, há uma crise cambial porque há uma falta de confiança por parte dos investidores na moeda. Entretanto, as conseqüências desta crise cambial são muito diferentes dependendo do país em que ocorra, como exemplo Europa versus América Latina e em alguns caso Ásia.

É interessante perceber que o modelo que o Brasil se enquadrava até então, é o que ficou conhecido como Modelo de Crise Cambial Canônico⁶. A crise pode ser explicada, de acordo com este modelo como sendo um resultado de uma inconsistência entre políticas domésticas, isto é, um déficit fiscal persistente e uma manutenção de uma taxa de câmbio fixa. Esta inconsistência pode ser superada temporariamente via venda de moeda estrangeira pelo Banco Central. Logicamente este processo tem um limite bem claro, isto é, a exaustão das reservas internacionais. Quando isto acontece, a conseqüência é quase certamente a desvalorização. Veja que este modelo não incorpora o déficit na balança comercial, como era o caso brasileiro em 1999. Então a situação brasileira era mais

⁵ Ficou conhecido como sistema de banda diagonal endógeno, implementado pelo presidente do Banco Central do Brasil à época o Dr. Francisco Lopes.

⁶ O modelo de crise canônico deriva do trabalho realizado por Stephen Salant em meados de 1970 quando este trabalhava no Federal Reserve's International Finance Section. Este trabalho foi originalmente construído para analisar o preço internacional das commodities.

complexa do que o contemplado originalmente pelo modelo. Observe que este modelo de crise cambial é um tanto restrito e simplista. Existem modelos mais sofisticados como os de "segunda-geração". Quem talvez melhor apresente este tipo de modelo, seja Obstfeld (1994). Além do mais é possível montar uma situação na qual os modelos de "segunda-geração" tornem-se um modelo canônico, ver Krugman (1996). Sendo assim, o modelo canônico nos dá uma ferramenta útil de análise e entendimento da formação de crises cambiais.

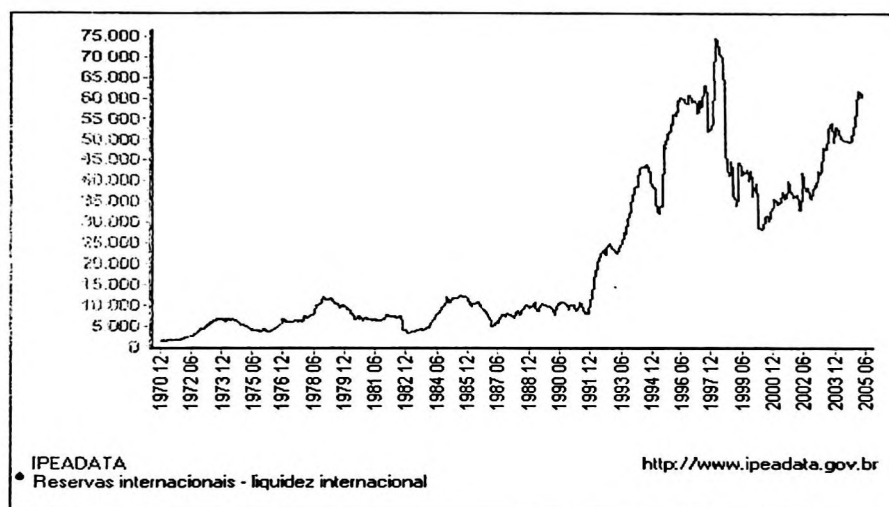


Gráfico 4 – Reservas Internacionais

Neste novo cenário com taxa de câmbio flutuante, cria-se uma grande incerteza em relação ao futuro. Neste sentido a atuação do Banco Central na formação das expectativas é fundamental para que empresas, famílias e o próprio governo possam criar de maneira correta as suas projeções. Neste contexto, dois problemas foram sanados em relação ao modelo antigo. Não há *a priori* necessidade de perder reservas (via venda direta de moeda estrangeira para manutenção de uma taxa de câmbio fixa) e nem aumentar a taxa de juros tão constantemente e quando houver a necessidade de aumento, a magnitude será menor.

Mas como já disse Friedman, não há almoço grátis, ou seja, nada em economia vem de graça. Então, se por um lado resolveu-se aparentemente estes dois problemas, criou-se um novo: a administração da criação das expectativas em relação a inflação.

Depois de uma depreciação, é de se esperar que haja um certo grau de inflação. O que pode ser comprovado empiricamente com a situação brasileira atual. Estudos feitos recentemente em países que tiveram desvalorizações apontam que a inflação surge, no ano seguinte da depreciação - Goldfajn (1999). Além disto, as expectativas em relação à inflação futura está intimamente ligada ao processo de evolução da taxa de câmbio, isto é, quanto mais o real desvaloriza-se perante o dólar americano, mais há a tendência ao repasse desta depreciação para o preço, ou seja, quanto maior for o grau de *pass-through* vigente no sistema econômico maior será o impacto da desvalorização na taxa de inflação. Logo, quando o real entra em uma tendência de depreciação, começa a haver um movimento por parte dos produtores, principalmente aqueles que trabalham com insumos importados, de reajustar os seus preços internamente, levando em consideração os novos preços segundo uma nova taxa de câmbio, mais depreciada, formando assim, um choque de oferta.

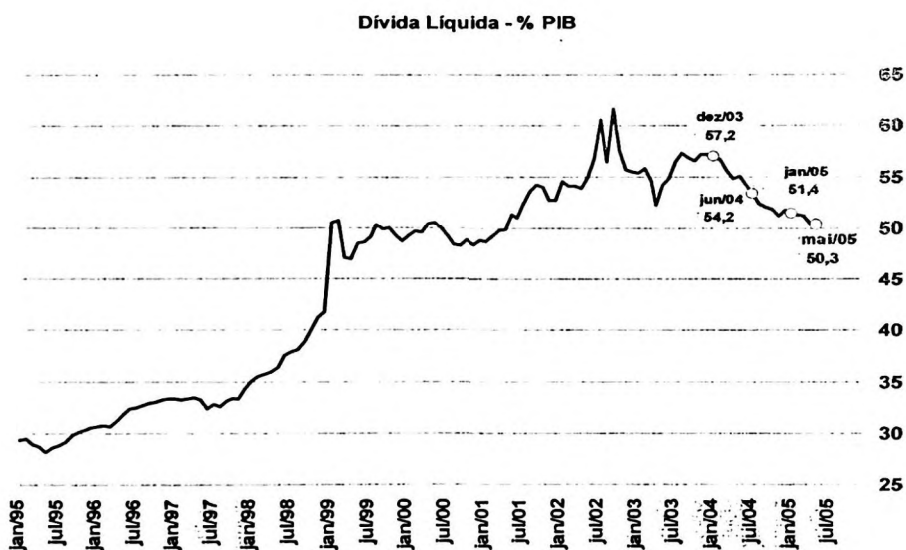


Gráfico 5 – Dívida Líquida em percentual do PIB

Sendo assim, ter um modelo no qual a taxa de câmbio apresenta uma volatilidade mais baixa e que fundamentalmente haja a percepção por parte dos agentes econômicos que o Banco Central está ciente e "administrando" as flutuações da taxa de câmbio de forma que,

o impacto destas seja controlável, isto é, as expectativas não se perdem, nos parece ser desejável.

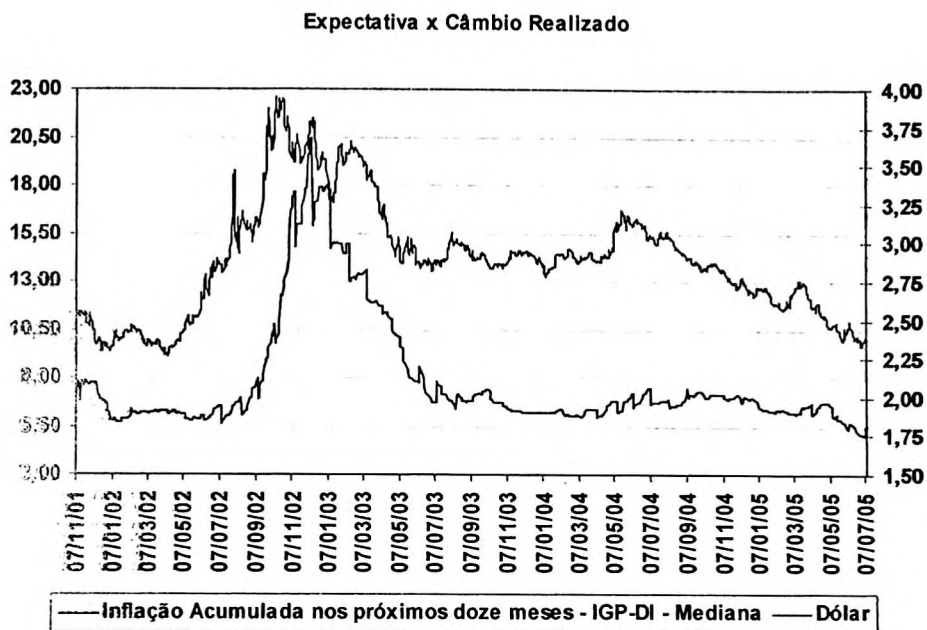


Gráfico 6 – Expectativa de Inflação versus Câmbio Realizado

CAPÍTULO II

Metodologia e construção econômica/financeira do modelo

O pano de fundo para o nosso modelo é o choque que produz algum efeito transitório ou permanente na taxa de câmbio nominal, isto é, toda vez que houver um choque de qualquer natureza e que produza um efeito qualquer na relação de equilíbrio existente e a Autoridade Monetária achar que existam as condições necessárias e suficientes para que haja um processo de intervenção, o nosso modelo começa a ser implementado. Não vamos *à priori* distinguir se o choque foi causado por um fato gerado pelo lado da oferta agregada ou da demanda agregada. Muito embora, dependendo do fato gerador os “remédios” que tendem a serem receitados sejam diferentes. Lógico que é possível que o fato gerador do choque seja um fato externo, tal como uma crise do petróleo provocado por uma situação ou expectativa de uma guerra na região do Golfo Pérsico. Porém o fato relevante para o nosso estudo é que isto resultará em um deslocamento da curva de oferta agregada, sendo assim a simplificação assumida no nosso trabalho não prejudica a análise, no sentido que o importante para o nosso trabalho é o passo seguinte ao choque. Sendo assim, vamos considerar primeiramente o choque negativo, dado que aparentemente o choque positivo deveria ser análogo ao choque negativo, mas em direção oposta. Logo, espera-se que haja uma depreciação do real. Neste sentido, o que vamos estudar é o seguinte:

- a) Qual é o mecanismo de ajuste, ou seja, a que nível será dado o novo ponto de equilíbrio, pode ser que para situações diferentes nós encontremos pontos de equilíbrios diferentes;
- b) Este ponto de equilíbrio é o ponto ótimo? A definição de ponto ótimo será dada um pouco mais à frente;
- c) Determinar a dinâmica ótima da taxa de câmbio brasileira;
- d) Estudar um método de intervenção por parte do Banco Central no mercado de câmbio, via venda de opções de compra e venda de dólar americano (à semelhança do modelo Mexicano⁷)⁸.

⁷ Do trabalho de Medina, Manuel G; Castilla, Javier D.G.; Tamés, Alonso G. “*Una Estrategia de Acumulacion de Reservas Mediante Opciones de Venta de Dolares: El Caso de Banco de Mexico*”

⁸ Contudo, reduzir a volatilidade da taxa de câmbio, ou deixá-la mais suave gera oportunidades de arbitragens. Estudos recentes, Guembel e Sussman(2001), sugerem que não é possível para o Banco Central suavizar a

Claro que, infelizmente nem todas essas perguntas tem uma resposta fechada, isto é, não existe uma solução analítica para todas. Desta maneira, no nosso trabalho o que poderemos fazer é via as simulações encontrar algumas respostas para essas nossas perguntas.

Antes de entrarmos nos aspectos teóricos da análise seria interessante introduzir a metodologia adotada para construção do modelo e o trabalho no qual está baseado.

O texto base que estamos usando é o artigo da Mundaca e Øksendal (1998), onde eles analisam uma situação que dado um choque inicial à autoridade monetária irá reagir de acordo com as seguintes situações:

Eles admitem que o governo tem dois modos de influenciar sua taxa de câmbio:

- a) Em todos os instantes(t) o governo pode escolher a taxa de juros doméstica r_t (controle contínuo).
- b) Em determinados instantes de tempo, o governo pode intervir na taxa de câmbio (mercado de câmbio) através da compra e venda da moeda estrangeira (controle de impulsos).

Sendo assim, é assumido que existem certos custos que necessitam estarem embutidos neste modelo, para torná-lo mais robusto e condizente com a realidade. Assim a pergunta que eles querem responder com o seu trabalho seria: como pode, o Banco Central utilizando os seus dois modos de intervenção manter a taxa de câmbio mais estável possível (perto de uma paridade central m) com o menor custo esperado?

Desta forma, eles construíram um modelo de política de intervenção ótima para o Banco Central em uma pequena economia para descobrir o desvio ótimo da taxa de câmbio a partir da paridade central m de uma banda definida endogenamente no modelo. Continuando eles derivaram um diferencial de taxa de juro ótimo entre a taxa local e a externa e o tempo e a quantidade ótima da intervenção no mercado de moedas. Não é discutida se esta intervenção neste caso é ou não esterilizada.⁹

volatilidade da taxa de câmbio e impedir as arbitragens concomitantemente. Como saída, eles argumentam que o imposto de Tobin possa ser uma solução.

⁹ Quando o Banco Central compra ou vende moeda estrangeira gera um impacto na base monetária, assim sendo caso o Banco Central procure neutralizar os efeitos de sua intervenção no mercado de moedas, ele estaria esterilizando sua intervenção.

O problema foi matematicamente formulado e resolvido como uma combinação dos dois controles acima e dadas certas condições suficientes e de contorno.

Antes de continuarmos é necessário e interessante introduzir uma série de conceitos que utilizaremos mais à frente, tanto na explicação do modelo da Mundaca e Øksendal (1998), quanto no nosso próprio projeto.

Conceito de banda cambial: a taxa de câmbio poderá/deverá flutuar em um dado intervalo e o Banco Central (BC) atuará diretamente quando os limites da banda (teto, piso) forem atingidos; não necessariamente a banda é divulgada publicamente e mesmo porque no quesito influenciar expectativas caso a banda seja pública, os riscos envolvidos de mantê-la crível podem se tornar altos ou mesmo inviáveis¹⁰. Esta taxa de câmbio atual é função dos fundamentos macroeconômicos e da expectativa em relação ao seu valor futuro. Há uma vasta literatura sobre este tema e não é o nosso propósito fazer uma ampla revisão deste tópico, contudo é necessário ao menos apresentar uma certa linha de pesquisa que vem se desenvolvendo desde os trabalhos do Krugman(1987, 1991). Na continuação Svensson(1992b) analisa um modelo de políticas de intervenções ótimas em uma pequena economia aberta, onde o banco central minimiza uma soma ponderada de taxas de juros e oscilações na taxa de câmbio usando somente um instrumento de intervenção, o mercado de moedas. Neste trabalho ele assume existir um *trade-off* negativo entre a taxa de juros e a taxa de câmbio e conclui que há um ponto ótimo deste *trade-off*. Na tentativa de achar uma banda cambial ótima o custo de intervenção no mercado de moedas é proporcional ao tamanho de sua intervenção, sendo assim como política ótima é recomendado que se fique dentro de uma dada banda cambial, usando intervenções marginais e infinitesimais nas bordas para se obter uma barreira reflexiva.

Em um sentido oposto destes trabalhos, Mundaca e Øksendal (1998) trabalham com um modelo onde o custo de cada intervenção é maior do que um número mínimo positivo e fixo, não importando o tamanho da intervenção. O que de acordo com eles leva a uma política ótima com intervenções discretas

¹⁰ O modelo inicial de Krugman (1987, 1991) era baseado em certas hipóteses cruciais, uma delas era que a banda cambial fosse perfeitamente crível, ou seja os agentes econômicos acreditavam que o teto e o piso dela ficariam imutáveis ad infinitum. Um outro ponto crítico nestes trabalhos do Krugman, é a questão das intervenções. Somente haveria intervenção nos limites superior e inferior.

Uma outra contribuição foi dada pelo trabalho de Jeanblanc-Picqué (1993). Nela é usado um modelo matemático que usa a teoria do controle de impulso para mostrar que existe uma política de intervenção ótima, a qual sob certas condições, como o custo de intervenção, força o processo de difusão da taxa de câmbio a permanecer dentro de uma banda cambial.

Porém o trabalho de Mundaca e Øksendal (1998), que nós utilizamos como trabalho de base para a formulação do nosso modelo, é diferente do trabalho de Jeanblanc-Picqué (1993) em basicamente dois pontos. Primeiramente o modelo deles não necessariamente requer que o processo fique dentro de uma banda dada *ad hoc*, mas existe uma dada função que determina o custo de deixar/manter uma banda cambial implícita. O outro ponto é que o modelo foi construído de tal maneira que é permitido dois tipos de controle: intervenções em tempo discreto no mercado cambial e um controle contínuo da taxa de juro. Eles também colocaram um fator de flexibilização, onde a banda cambial não é necessariamente crível, isto é, ela pode sofrer ataques especulativos.

De acordo com a formulação original, o banco central ou a autoridade monetária pode permitir que a taxa de juro suba a um certo nível acima da taxa de juro internacional. Quando um nível ótimo é atingido o banco central exerce seu segundo instrumento de controle para afetar a taxa de câmbio - intervenção no mercado cambial. Em seguida é derivado um tempo ótimo e quantidade para tal intervenção. Após estes passos, é formulada uma distância ótima da taxa de câmbio em relação a uma paridade central, onde as intervenções são efetuadas e o custo total de aplicar ambos os instrumentos.

Tendo apresentado a literatura e o modelo base com o qual vamos trabalhar é apropriado introduzir o nosso modelo.

Vamos assumir, como já discutimos anteriormente, que houve um choque inicial, fazendo com que a taxa de câmbio fosse desviada da sua paridade central *m*, ou *melhor*, dizendo, de seu equilíbrio instantâneo. A taxa de câmbio, que vamos determinar como sendo um movimento Browniano, vai continuar flutuando e caso seja atingida um dos pontos da banda, tanto o teto quanto o piso, o banco central exercerá somente um tipo de controle, podendo ser tanto contínuo quanto discreto¹¹ que será a venda de opções de

¹¹ Neste contexto específico, o sentido de contínuo ou discreto é em relação ao horizonte temporal de intervenção, como por exemplo: caso o Banco Central efetuasse diariamente intervenções no mercado de moedas durante o mês, nós diríamos que foi uma intervenção contínua dentro deste determinado mês; por sua vez, se o Banco Central tivesse feito intervenções apenas em 10 dias esporádicos durante o mês e não contínuos, diríamos que neste determinado mês houve uma intervenção discreta.

compra/venda (*call/put*). Nós não utilizaremos o controle contínuo, como aquele proposto por Mundaca e Øksendal(1998), de taxa de juro. A quantidade de opções a ser ofertada será fixa¹².

A motivação que nos levou a não utilizar o instrumento taxa de juro é que primeiramente e principalmente, nós queremos apresentar uma formulação alternativa aos instrumentos clássicos de controle do mercado de câmbio. Além de que como é sabido, oscilações na taxa de juros, levam a oscilações na taxa de crescimento do PIB. O que não é o objetivo que se quer atingir. Além disso, a não utilização da taxa de juros, deixa livre a variável dinâmica da dívida pública brasileira, que nos dias atuais é fortemente atrelada ao comportamento da Selic¹³. Logo, um aumento do juro gera uma certa preocupação com a solvência do país, em casos extremos. Por isso, o superávit fiscal está tão fortemente correlacionado com as oscilações na taxa de juros, ou seja, há e tem de haver uma preocupação constante na geração de caixa suficiente para pagar os compromissos assumidos para o financiamento da dívida pública. Dessa forma, como os impactos são tão variados e complexos de serem analisados, que fogem do escopo do trabalho. Assim, nos limitaremos às intervenções na taxa de câmbio usando opções.

Um outro ponto que deve ser considerado, é que o nosso trabalho se distingue do de Mundaca e Øksendal (1998) no que se refere ao controle discreto. Eles utilizaram a intervenção direta no mercado cambial à vista. O nosso modelo, como mencionado anteriormente, estudará uma forma de intervenção diferente, isto é a venda de *call/put* utilizando-se de vários tipos de *moneyness* e diferentes graus de impactos¹⁴. Com isto a nossa abordagem ganha uma flexibilidade de análise, no sentido que é conseguimos cobrir todos os possíveis casos de intervenções com opções. Assim, temos condições de estudar de forma mais precisa os impactos de cada tipo de intervenção, e não só o efeito de uma *call* ou uma *put*, mas de todas as suas possíveis combinações, no limite.

¹² Claramente, essa quantidade fixa a ser ofertada, exercerá um resultado final na intervenção diretamente proporcional a esse volume ofertado.

¹³ Há um alto grau de LFT's no portfólio da dívida do Tesouro Nacional. Assim sendo, um aumento da taxa de juros - Selic - causaria um aumento no montante da dívida pública federal, que no limite causa especulação a respeito da sustentabilidade desta no longo prazo. O que pode causar questionamentos de curto prazo em relação a solvência do país.

¹⁴ *Moneyness* nada mais é o termo que descreve o efeito do preço do *strike* em relação ao preço do ativo objeto. Podemos considerar que quando $\frac{\text{Strike}}{\text{Spot}} = 1$, *Moneyness*=1, a opção é dita estar *at-the-money*.

Na formulação deste modelo de intervenção um outro ponto interessante, muito embora tenha impacto operacional e não acadêmico, é que resultado líquido financeiro destas intervenções será dado em moeda local corrente, ou seja, não há perda de reservas internacionais como quando há uma intervenção no mercado cambial à vista. Isto é, todas as operações serão liquidadas em reais (R\$), não tendo a negociação do dólar americano (US\$). Logo, há uma clara redução na pressão existente nas intervenções clássicas de venda de moeda estrangeira, que é a perda de reservas internacionais; não gerando desta maneira a ansiedade da perda da capacidade de pagamento de compromissos assumidos no exterior pelo governo. Não é do nosso intuito discutir todas as relações e correlações econômicas existentes neste tipo específico de abordagem. Porém, faz-se necessário mencionar que com este tipo de intervenção é possível que a intervenção seja esterilizada ou não. Em ambos os casos há conseqüências para os agregados econômicos. Caso a autoridade monetária deseje esterilizar a intervenção, gerará um aumento da dívida pública federal, caso contrário irá gerar um aumento da base monetária. Para se ter uma noção exata destes dois tipos de política de atuação seria necessária estimar uma curva IS-LM, com todas as suas componentes. Porém, mais uma vez deveremos assumir certas simplificações, para podermos testar as nossas hipóteses. Assim sendo, esta estimação da curva IS-LM foge do escopo do projeto. Portanto, vamos assumir que as intervenções sempre serão esterilizadas.

Existe uma discussão se venda de títulos públicos federais indexados a variação da moeda americana pode ser considerada uma forma de intervenção nos moldes clássicos. A venda de papel gera uma intervenção indireta no sentido que é aproximadamente uma venda de um dólar americano futuro. Assim sendo, o governo oferece um ativo em variação cambial para aqueles agentes econômicos que por algum motivo qualquer necessitem deste tipo de *hedge*. Fazendo isto, teoricamente, ou pelo menos é válido supor que existe uma diminuição na pressão pela compra da moeda americana a vista. Contudo, nós não vamos considerar esta abordagem como um tipo de intervenção e nem vamos analisá-la, porque em países onde há acordos com instituições tais como o FMI, a variável nível de endividamento público é controlada e altos níveis de exposição cambial geralmente não é bem visto/aceito. Sendo assim, acreditamos que este tipo de intervenção pode ser deixado de lado, ou pode ser tratado como um tópico especial de intervenção, caso haja necessidade.

De uma maneira geral, podemos resumir a nossa abordagem inicial desta maneira:

Vamos assumir que em um determinado ponto no tempo exista um ponto inicial x_0 qualquer $x_n \in \mathfrak{R}$, $\{x_0, x_1, \dots, x_{251}\}$, onde n é o número de dias úteis no ano de acordo com a convenção do BCB, no nosso modelo arbitramos este x_0 na paridade de 2.50 reais por 1 dólar americano. Faremos as simulações em um horizonte temporal de 62 dias úteis, isto é, admitiremos que cada vez que houver uma intervenção a maturidade das opções que serão negociadas será de 62 dias úteis. $x_n \sim N(\mu, \sigma^2 \sqrt{t})$, $n \in A = \{0, 1, 2, \dots, 61\}$. Para efeito de simulação assumiremos que $t=1 \therefore \sigma^2 \sqrt{t} \equiv \sigma^2$. Onde A será repetido 500 vezes.

Nós iremos fixar *à priori* uma determinada faixa de flutuação, ou espaçamento intra-banda, definidos pelos deltas¹⁵ das opções que o Banco Central vai estar vendendo $F = \{0.10, 0.25, 0.50, 0.75\}$, onde F é o delta das opções, para x_n , $n \in A = \{0, 1, 2, \dots, 61\} \sim N(\mu, \sigma^2)$ e um certo nível de volatilidade, $V = \{6\%, 12\%\}$ de x_n , $n \in A = \{0, 1, 2, \dots, 61\} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Consideraremos que este nível V de volatilidade, que pode ser entendido como uma taxa de oscilação do movimento Browniano, pode ser interpretado como sendo dois cenários possíveis de ocorrência, isto é, um cenário de baixa volatilidade ($V=6\%$) e o de $V=12\%$ de volatilidade alta. A separação em cenários é interessante para podermos incorporar na nossa abordagem uma representação mais próxima a realidade de mercado, onde temos períodos de maior tranquilidade (V baixo) e outros de volatilidade mais altos. Contudo, a autoridade monetária não sabe *à priori* em qual destes dois cenários o mercado está oscilando.

¹⁵ Olhar o apêndice para uma discussão mais detalhada sobre o delta e demais “gregas” relevantes para o nosso projeto.

CAPÍTULO III

Modelo Matemático para o Controle Ótimo da Taxa de Câmbio

Tendo apresentando a argumentação econômico/financeira da nossa abordagem, resta-nos introduzir o modelo matemático que nós desenvolvemos. Antes, porém, faremos uma rápida abordagem do modelo que nós nos baseamos, Mundaca e Øksendal (1998)¹⁶, para depois discutirmos em detalhes o nosso.

Sejam: Y_t = a taxa de câmbio no instante t (sendo uma moeda tipo A ¹⁷)

m = Paridade Central

Temos então os possíveis controles que o governo pode exercer:

- 1) Escolher uma taxa de juros doméstica a qualquer instante r_t ; aumentar r_t se Y_t deprecia-se. Neste caso, os investidores que possuem moeda local poderão aplicar seus recursos em uma taxa de juros doméstica $r = (r_t) \quad t \in R_+$ > $\bar{r} = (\bar{r}_t) \quad t \in R_+$, onde \bar{r}_t representa a taxa de juros praticada no mercado internacional. Assim sendo, será mais atrativo para aqueles agentes econômicos possuírem a moeda local do que a estrangeira, fazendo desta maneira que ocorra um movimento de apreciação da moeda local; e vice-versa. O tipo de controle $r = (r_t) \quad t \in R$ é chamado controle contínuo. O conjunto de todos os possíveis controles é denotado por U.
- 2) Em determinados instantes de tempo, o BC pode usar suas reservas internacionais para intervir no mercado de câmbio. Este controle é aplicado somente discretamente em instantes de tempo selecionados θ_j e com uma quantidade selecionada ξ_j nesses instantes. A dupla seqüência $v = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ é chamada de controle de impulso/ intervenção, onde $n \leq \infty, \theta_k \leq \theta_{k+1}$ e $\theta_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow n$ (assim se n é finito, então $\theta_n = \infty$). O conjunto de todos os controles do impulso é denotado V.

¹⁶ Mais detalhes da formalização matemática pode ser encontrado em Brekke e Øksendal(1996).

¹⁷ Moeda tipo A é aquela que na sua forma de representação indica quanto que é necessário em moeda local para comprar a moeda estrangeira. A moeda tipo B, é simplesmente o inverso $\therefore B = 1/A$, ou seja,

O par $w = (r, v) \in UxV$ é chamado controle estocástico combinado. Foi assumido que $W = UxV$.

Talvez a grande motivação por trás desta sofisticada modelagem esteja o desejo de tentar controlar, ou ao menos fazer com que a volatilidade realizada da taxa de câmbio seja reduzida. Uma moeda que oscila muito e tem um comportamento aleatório (caracterizado como sendo um Movimento Browniano), por definição a sua trajetória não pode ser determinada *à priori*, o que não é uma característica desejável de uma moeda apresentar. Não só porque eleva a incerteza dos *players* do mercado, mas como também em um contexto de alta volatilidade, é possível que a taxa de câmbio deprecie-se com grande rapidez, trazendo como consequência um possível processo inflacionário. Com a intenção de evitar que a inflação saia fora de controle o Banco Central, que terá/tem como mandato defender o valor da moeda local adotará uma política monetária apertada, isto é, aumentará a taxa de juro. Contudo, como sabemos a autoridade monetária tem controle sobre a taxa de juro nominal de curto prazo, a taxa overnight. Mas também é sabido que oscilações promovidas pelo governo na taxa overnight tem impacto, via canal das expectativas na taxa de juros de longo prazo. E como é a taxa de juros de longo prazo que "ditam" a taxa de crescimento do produto, um aumento da taxa de juro de curto prazo, terá um impacto altista nas taxas de juros de longo prazo, comprimindo, desta forma o crescimento econômico. Logo, é perfeitamente aplicável ou desejável ter algum tipo de controle.

Contudo, um controle da forma $w = (r, v) \in UxV$ tem custos para a sociedade.

Assuma \bar{r}_t como taxa de juros externa em t . Foi assumido que se $r_t = \bar{r}_t$ e não houver intervenção por parte do BC no mercado de câmbio, a taxa de câmbio Y_t irá se comportar como um Movimento Browniano, B_t e pode-se esperar um regime de pura flutuação de taxa de câmbio.

Vamos admitir $F(r_t - \bar{r}_t)$ como sendo o efeito do juro na taxa de câmbio produzido pelo diferencial $r_t - \bar{r}_t$.

representa quanto de moeda estrangeira é necessário ter para poder comprar a moeda local. Como exemplos de moeda tipo A temos o real brasileiro e como tipo B a libra esterlina da Grã-Bretanha.

Graficamente teríamos a seguinte situação, em extremos:

Efeito de aumento de juros - juro internacional fixo

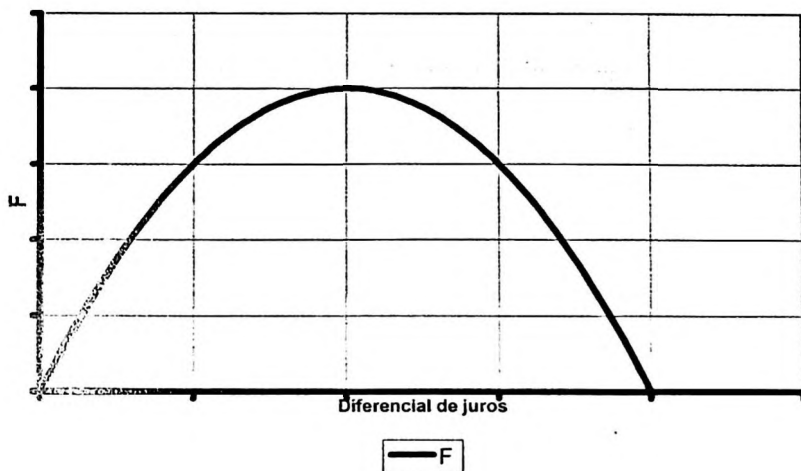


Gráfico 7 – Efeito dos Juros

$$F(r - \bar{r}) > 0 \leftrightarrow r - \bar{r} > 0$$

Veja que $F(r - \bar{r})$ é côncava e crescente só até um determinado ponto, assim incrementos adicionais na taxa de juros em relação a uma dada taxa de juros externa passam a ter efeitos adicionais menores. Assim em determinados níveis de taxa de juros doméstica em relação a uma dada taxa de juros externa, aumentos adicionais não surtem o efeito desejado e é até possível que tenham um efeito em sentido oposto, ou seja, aumentos marginais na taxa de juro produzem uma depreciação da moeda local. Nesse ponto, quando começa haver dúvidas quanto à solvência do país o BC deve considerar a interferência direta no mercado de câmbio. Vale ressaltar que são situações limite, onde o fator expectativa tem um papel muito importante e que não estamos levando em consideração, por não ser o tema de estudo. Talvez seja até mesmo difícil de incluir esta variável na modelagem.

Sendo assim vamos chamar de $\gamma(\xi)$ o efeito na taxa de câmbio obtido através da intervenção pela compra (se $\xi > 0$) ou venda (se $\xi < 0$) da quantidade ξ de moeda externa.

Aqui esta função γ é côncava, talvez até mesmo linear. Além disto $\gamma(\xi) > 0 \leftrightarrow \xi > 0$.

Graficamente temos uma situação muito semelhante ao caso anterior.

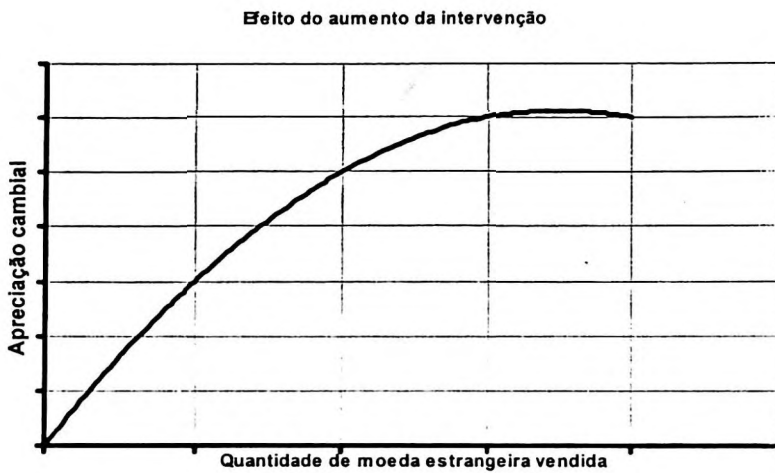


Gráfico 8 – Efeito da Intervenção

Como podemos visualizar, aumentos marginais na quantidade vendida de moeda estrangeira tem efeitos cada vez mais limitados. Também é possível haver situações onde um aumento da quantidade vendida leva-nos a uma depreciação cambial. Outra vez é válido mencionar o efeito das expectativas neste tipo de intervenção. Assim neste caso teríamos : $\gamma(\xi) > 0 \leftrightarrow \xi > 0 \Rightarrow \gamma(\xi_2) > \gamma(\xi_1), t = 2 > t = 1$, não necessariamente $\xi_2 - \xi_1 > 0$.

Então, se aplicarmos o controle combinado estocástico $\omega = (r_t, (\theta_1, \theta_2, \dots; \xi_1, \xi_2, \dots))$ na taxa de câmbio Y_t , nós temos a seguinte equação:

$$Y_t := Y_t^{(\omega)} := y - \int_0^t F(r_s - \bar{r}_s) ds + \sigma B_t(\omega) + \sum_{j: \theta_j \leq t} \gamma(\xi_j) \quad (1)$$

onde, $\sigma > 0$ é uma constante, \bar{r}_s é a taxa de juros praticada no mercado internacional e $B_t(\omega)$; $\omega \in \Omega$ denota o movimento Browniano.

Vamos admitir também que exista uma taxa de desconto na economia $\rho > 0$ e que a taxa de custo para a sociedade ter a taxa de câmbio Y_t é $K(Y_t - m)$, onde $K(x) \geq 0 \forall x$. Também vamos assumir que $R(r_t - \bar{r}_t) \geq 0$ é a taxa de custo para ter o diferencial de taxa de juros $(r_t - \bar{r}_t)$ e suponha que o custo de aplicar o controle de impulso ξ_j no instante de tempo θ_j é dado por $L(\xi_j) > 0$.

Defina $x = (s, y)$. Então o custo total esperado descontado de aplicar o controle de intervenção combinado $\omega = (r_t, (\theta_1, \theta_2, \dots; \xi_1, \xi_2, \dots))$ é:

$$J^\omega(s, y) = E^y \left[\int_s^T e^{-\rho t} \left(K(Y_t - m) + R(r_t - \bar{r}_t) \right) dt + \sum_{j: \theta_j \leq T} L(\xi_j) e^{-\rho \theta_j} \right] \quad (2)$$

onde, $T \leq \infty$ é um dado instante de tempo fixo no futuro e E^y denota a expectativa em relação a lei de probabilidade de Y_t começando em y . *A priori*, não foi feita nenhuma distinção se a intervenção iria ser para estabilizar a moeda quando ela estivesse apreciando-se ou quando ela estivesse depreciando-se. Claramente o custo de intervenção quando a moeda está em uma tendência de perda de valor é maior do que ao contrário, uma vez que há perda de reservas internacionais quando a moeda está se depreciando, neste tipo de modelagem.

Sendo assim, o que nos interessa é minimizar a equação (2), que é justamente a função que representa o custo total esperado quando começando do estado inicial $x = (s, y)$ e aplicando o controle ω . Logo, se encontrarmos a função:

$$\Lambda(x) := \inf_{\omega \in \mathcal{W}} J^\omega(x) \quad (3),$$

estaremos, assim representando o custo total esperado mínimo quando o sistema é inicializado em x . $\Lambda(x)$ é chamado de *valor* do sistema no estado x .

Uma vez tendo a função custo total esperado (equação (2)) e a função custo total esperado mínimo (equação (3)), Mundaca e Øksendal (1998) derivam um método de solução para o problema da equação (3).

Entretanto, o que realmente nós interessa são alguns conceitos e teoremas que Mundaca e Øksendal (1998) utilizaram para a resolução do problema proposto por eles. Assim sendo, vamos apresentar a solução do problema original e na seqüência formalizaremos a nossa proposta.

a) Método de Solução de Mundaca e Øksendal (1998)

Vamos admitir a partir de agora que $\bar{r}_t = \bar{r}(t)$ é determinístico e nós vamos considerar somente controles de taxa de juros do tipo de *Markov*, isto é controle da forma

$$r_t(\omega) = r(t, Y_t(\omega))$$

para alguma função do tipo $r : R^2 \rightarrow R$.

Então, caso não haja o controle de impulso, isto é intervenções no mercado de câmbio pela autoridade monetária, o processo

$$X_t = X_t^{(r)} = \begin{bmatrix} s+t \\ Y_t^{(r)} \end{bmatrix}; t \geq 0; X_0 = \begin{bmatrix} s \\ y \end{bmatrix} = x \quad (4)$$

será uma difusão de Itô cujo gerador $A^{(r)}$ coincide (no espaço $C_0^2(R^2)$ de uma função duplamente continua e diferenciável no R^2 com suporte compacto) com o operador de diferenças parciais

$$L^r(s, y) = L^{r(s, y)} f(s, y) = \frac{\partial f}{\partial s} - F \left(r(s, y) - \bar{r}(s) \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (5)$$

a qual está definida para todas as funções $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para as quais as derivadas envolvidas existam em $x=(s,y)$.

Se $w=(r,v)$ é um controle estocástico combinado então,

$$X_t^{(w)} = \begin{bmatrix} s+t \\ Y_t^{(w)} \end{bmatrix}; t \geq 0; X_0 = \begin{bmatrix} s \\ y \end{bmatrix} = x$$

A lei de probabilidade de $X_t^{(w)}$ é denotada por $Q^{x,w}$ e a esperança em relação a $Q^{x,w}$ é denotada por $E^{x,w}$.

Uma função contínua $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *estocasticamente* C^2 em relação a difusão de Itô $X_t = X_t^{(r)}$ se a seguinte *fórmula generalizada de Dynkin* valer:

$$E^{x,w} [\phi(X_{\tau'})] = E^{x,w} [\phi(X_\tau)] + E^{x,w} \left[\int_\tau^{\tau'} L^{(x,t)} \phi(X_t) dt \right] \quad (6)$$

para todos os *tempos de parada* $\tau(\omega), \tau'(\omega)$ satisfazendo

$$\tau \leq \tau' \leq \min\{R, \inf\{t > 0; |X_t| > R\}\}$$

para algum $R < \infty$.

Este conceito foi inicialmente introduzido em Brekke e Øksendal(1991), onde foi provado que, sob certas condições iniciais, uma função ϕ sendo C^1 (continuamente diferenciável) em todo lugar e C^2 (duas vezes continuamente diferenciável) fora de um conjunto "pequeno" (em relação a medida de Green $G(\cdot)$ de X_t) é estocasticamente C^2 .

Definindo o operador de mudança M por:

$$M h(s, y) = \inf_{\xi} \{h(s, y + \gamma(\xi)) + L(\xi) e^{-\rho s}\} \quad (7)$$

para todas as funções de Borel $h: R^2 \rightarrow R$, M é um operador não linear, $h \rightarrow Mh$, o mapeamento das funções mensuráveis limitadas em funções mensuráveis limitadas. Suponha que para cada (s, y) o ínfimo da equação (7) é atingido por pelo menos um $\hat{\xi} = \xi(s, y) \in R$ e considere $\hat{\xi} = S_h(s, y)$ como sendo uma solução mensurável de $\hat{\xi}_s$.

Se h é a função de custo então nós podemos nos referir a $Mh(x)$ como sendo o custo mínimo que podemos atingir através de uma intervenção no mercado de câmbio em x assumindo que o Banco Central tem que intervir. Tal intervenção de tamanho ξ transforma o estado de y em $y + \gamma(\xi)$.

Usando um resultado de Brekke e Øksendal (1996) nós temos o seguinte:

Teorema 1. (I) Suponha que exista uma função contínua $\phi: R^2 \rightarrow [0, \infty)$ com as seguintes propriedades:

$$i) \phi \text{ é estocasticamente } C^2 \text{ em relação a } X_t^{(r)} \text{ para todo } r: R^2 \rightarrow R \quad (8)$$

$$ii) \phi \leq M\phi \text{ em } R^2 \quad (9)$$

$$iii) L^r \phi(s, y) + e^{-\rho s} \left(K(y - m) + R(r - \bar{r}) \right) \geq 0$$

$$(10)$$

para quase todo (s, y) em relação a medida de Green para $X_t^{(r)}$, para todo

$$r = r(s, y): R^2 \rightarrow R.$$

Então,

$$\phi(x) \leq J^w(x) \text{ para todo } w \in W.$$

(II) Suponha que, além das equações (8), (9) e (10), exista uma função $\hat{r}: R^2 \rightarrow R$ tal que o valor mínimo zero do lado esquerdo da equação (10) seja atingido, isto é:

$$L^{\hat{r}(s, y)} \phi(s, y) + e^{-\rho s} \left(K(y - m) + R(\hat{r}(s, y) + \bar{r}_s) \right) = 0 \quad (11)$$

para todo $(s, y) \in D$, onde

$$D := \{x; \phi(x) < M \phi(x)\} \quad (12)$$

Vamos definir o seguinte controle de impulso

$\hat{v} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots; \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots)$ indutivamente de acordo com a seguinte regra: Coloque

$$\hat{\theta}_0 = 0 \text{ e}$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \inf \left\{ t > \hat{\theta}_k; X_t^{(k)} \notin D \right\}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

onde $X_t^{(k)}$ é resultado da aplicação do controle

$$\left(r_t, \left(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k, \infty; \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_k \right) \right)$$

em X_t , e

$$\hat{\xi}_{k+1} = S_\phi \left(X_{\hat{\theta}_{k+1}}^{(k)} \right); k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

(onde $X_{\hat{\theta}_{k+1}} = \lim_{t \uparrow \hat{\theta}_{k+1}} X_t$).

Ponha $\hat{w} = (\hat{u}, \hat{v})$ e suponha que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \infty \text{ quase certamente, } Q^{\hat{w}} \text{ para todo } x \in R \quad (15)$$

e que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E^x \left[\phi \left(X_{\hat{\theta}_{k+1}}^{\hat{w}} \right) \right] = 0, \text{ para todo } x \in R \quad (16)$$

Assim,

$$\Phi(x) = \Lambda(x) \quad (17)$$

e o controle estocástico combinado ótimo é:

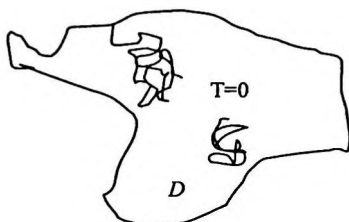
$$w^* = \hat{w} \in W \quad (18)$$

Lembrete: o espaço D definido na equação (13) é chamado de *região de continuação*. Não há intervenção no mercado de taxa de câmbio enquanto X_t estiver dentro do espaço D . Neste caso, somente o controle contínuo ótimo (diferencial de taxa de juros) \hat{r}_t .

Quando X_t atingir ∂D é aplicado o controle de impulso, de acordo com a equação (15), a qual fará com que X_t volte para dentro do espaço D , isto é, dentro da banda cambial. Assim, a quantidade ótima a ser vendida/comprada no tempo $\hat{\theta}_{k+1}$ é o valor de ξ que representa o mínimo da seguinte função:

$$g(\xi) := \phi\left(\theta_{k+1}, X_{\theta_{k+1}}^{(k)} + \gamma(\xi)\right) + L(\xi)e^{-\rho\theta_{k+1}} \quad (19)$$

Graficamente,



Observação: No problema original de Mundaca e Øksendal (1998), existem algumas dificuldades que infelizmente, mesmo usando algumas hipóteses simplificadoras, eles não foram capazes de encontrar uma solução exata, analítica ao problema proposto. Contudo, eles conseguiram descrever uma série de características da estratégia ótima. Vale mencionar alguns delas:

¹⁸ A prova desta equação está em Brekke e Øksendal (1996, Teorema 3.1).

1.) $r^*(y)$ não é máximo no *trigger level* η para a intervenção, mas antes deste ponto ser alcançado pela desvalorização cambial. Isto significa, de acordo com o modelo originalmente proposto, que o controle da taxa de juro r_i^* fica relativamente mais custoso e ineficiente e portanto, deve ser reduzido, a medida que a taxa de câmbio desvaloriza-se além de um determinado ponto \hat{y} e aproxima-se do *trigger level* para a intervenção. Claramente que esse resultado obtido por eles, depende de uma série de hipóteses iniciais¹⁹, e não deve ser generalizado, mas é um importante aliado da nossa escolha de deixar de lado o controle da taxa de câmbio via política monetária e propor uma alternativa.

2.) A estratégia ótima, depende em ultima instancia, de acordo com a modulação do problema, do mínimo custo de intervenção c . Implicando que, o valor da função é mais sensível à um aumento no custo mínimo de intervenção c (pelo controle de impulso) no mercado de câmbio perto do *trigger level* η do que em algum ponto intrabanda y_1 . Isto parece ser razoável, uma vez que, a medida que a taxa de câmbio aproxima-se do *trigger level* η , a intervenção passa a ser indispensável e dessa forma, o custo fixo c torna-se relevante.

3.) Obedecendo-se a certas condições, não importa quão pequeno o mínimo custo de intervenção $c > 0$ for, a estratégia ótima permanece sendo o controle do impulso - com o tamanho do impacto da intervenção diferente de zero. Aqui, outra vez, vemos mais uma motivação para termos escolhido estudar e propor um modelo baseado apenas na intervenção no mercado cambial (controle de impulso).

Como conclusão do trabalho de Mundaca e Øksendal(1998) temos o seguinte: A hipótese inicial era de que o custo mínimo de intervenção $c=0$. Nesse contexto é razoável supor que a estratégia ótima a ser implementada, seria de intervenções infinitesimais, a toda momento que o *trigger level* $\pm \bar{y}$ fosse atingido²⁰. Se essa afirmação realmente valer, deveríamos esperar que $y_1(0) = \eta(0) = \bar{y}$ e conseqüentemente, o processo da taxa de

¹⁹ Ver Mundaca e Øksendal(1998, pág. 240-241).

²⁰ Veja Krugman (1991), Froot e Obstfeld(1991a) e Davis e Normann(1990).

câmbio ótima resultante seria um Movimento Browniano em $\left[-\tilde{y}, \tilde{y}\right]$ refletido nos limites $\pm \tilde{y}$.²¹ Entretanto, é bom ressaltar que, a solução alcançada por eles atende ao propósito de solucionar um modelo matemático que combina controle estocástico/impulso e para tanto, foram dadas condições suficientes para a solução, em termos de inequações quase-variacionais de Hamilton-Jacobi-Bellman. Contudo, em linhas gerais, encontrar uma solução analítica para o problema proposto é uma tarefa difícil.

b) Método de Solução do Projeto

A parte: a.) Método de Solução de Mundaca e Øksendal(1998), desempenhou um papel fundamental na nossa escolha sobre o tema do presente projeto. Vimos que, diferentemente do que encontramos nos livros-textos de macroeconomia, controlar a taxa de câmbio usando somente a política monetária, parece não ser a política ótima de controle da mesma. Visto que, além de ser ineficiente em determinados casos, também é custoso. Sem entrar nos detalhes da questão, de quão difícil é mensurar essa estrutura de “custo social” da intervenção, a idéia que devemos ter em mente é que existe um custo de intervenção mínimo $c > 0$. Por menor que seja, o *policy maker*, tem que levar em consideração esse “custo social” mínimo de intervenção quando ele estiver analisando as opções disponíveis para controlar as oscilações da taxa de câmbio. Sendo assim, como já foi mostrado por Mundaca e Øksendal (1998), o controle do impulso é a estratégia ótima de atuação.

Vamos apenas fazer algumas modificações de maneira a incluir o controle de impulso da taxa de câmbio, usando as opções de compra/venda de moeda americana.

É importante notar que, assim como Mundaca e Øksendal (1998), não chegaram a uma fórmula analítica para o problema deles, nós também não vamos chegar a essa fórmula. Vamos sim, encontrar uma função que avaliará, em última instância, se a intervenção é interessante ou não.

²¹ Se $c > 0$, então intervenções infinitesimais não são ótimas, ver Mundaca e Øksendal(1998, pág. 241).

Vamos então, apresentar o nosso método de solução.

Roteiro:

1. Testar o modelo sob diferentes níveis de volatilidade do Movimento Browniano;
2. Determinação da *money* ótima de intervenção.

A sistemática de atuação do Banco Central no nosso modelo será a seguinte: Dado um determinado espaçamento das bandas, sempre que a taxa de câmbio ultrapassar essa barreira o Banco Central atuará na posição oposto ao movimento, ou seja, caso a taxa de câmbio esteja em uma tendência de depreciação e a barreira superior for rompida, o Banco Central anunciará um leilão de venda de opções de compra (*calls*) de moeda estrangeira. Logicamente, quando for o caso de uma apreciação cambial, o Banco Central fará um leilão de venda de opções de venda de moeda estrangeira (*puts*).

Repare no gráfico abaixo, um exemplo de uma realização de um processo do Movimento Browniano²² (no nosso caso, podemos entender o Movimento Browniano como sendo a trajetória da taxa de câmbio, com uma baixa volatilidade do ativo base).

²² De acordo com o modelo proposto, achamos mais conveniente usarmos um Movimento Browniano Geométrico.

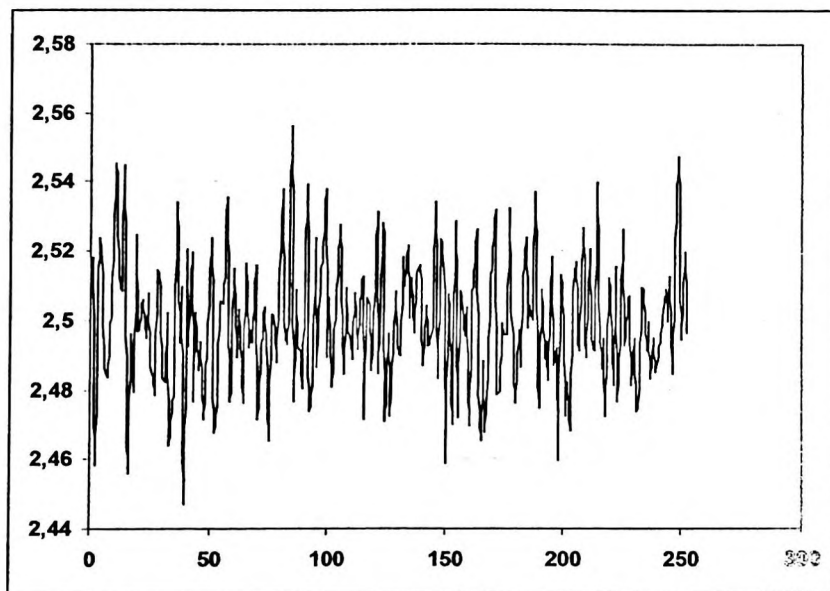


Gráfico 9 – Browniano com Volatilidade Baixa

Veja no gráfico abaixo, um exemplo do Movimento Browniano com volatilidade alta (repare na amplitude dos movimentos vis-à-vis o gráfico acima).

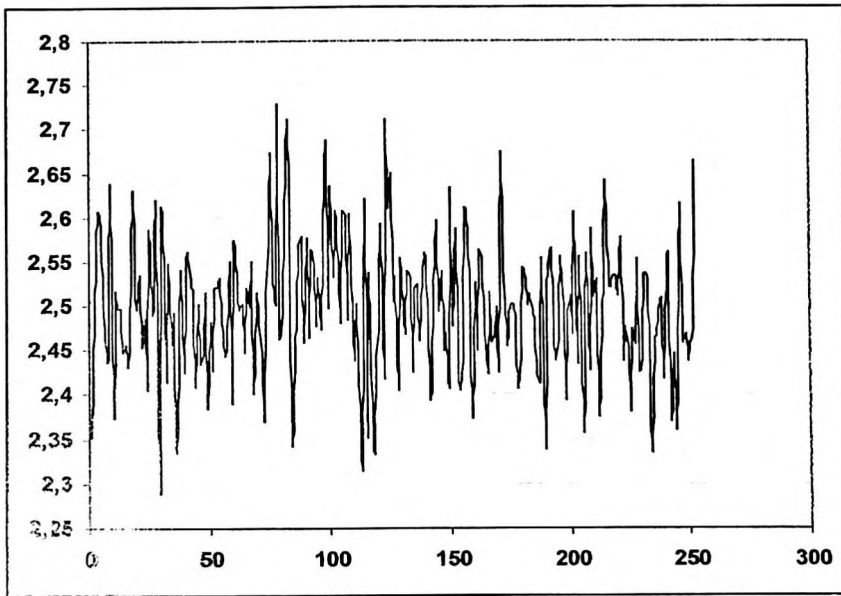


Gráfico 10 - Browniano com Volatilidade Alta

Gráficamente, as bandas poderiam ser entendidas como abaixo.

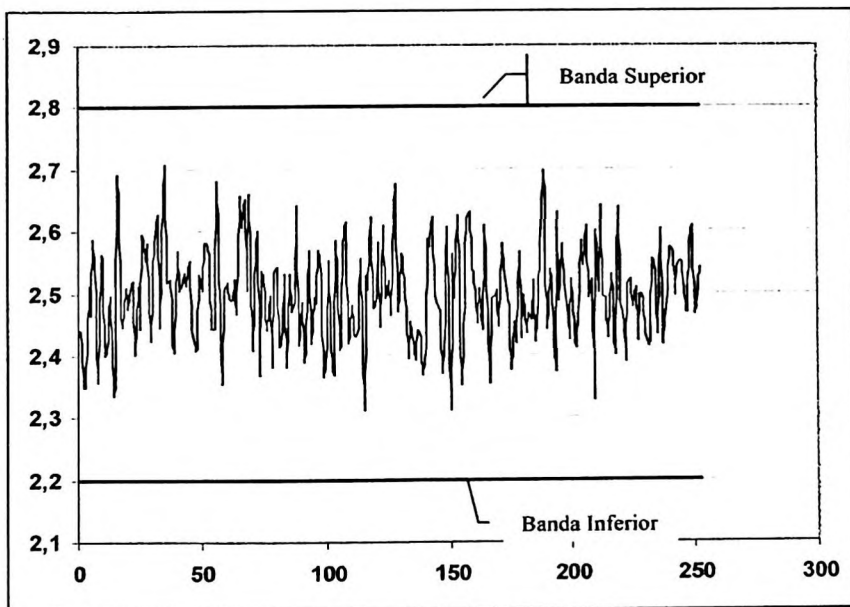


Gráfico 11 - Bandas

Assim sendo, para podermos operacionalizar o nosso modelo, precisaremos de algumas funções complementares, tais como: a função reação do mercado ao anúncio, função resposta da intervenção (que depende do tamanho da mesma e da própria incerteza em relação ao anúncio e da não antecipação do mercado da forma como o Banco Central atua).

Como essas funções são difíceis de se modelar por envolverem toda uma cadeia de eventos e expectativas, faremos que ambas sejam colocadas dentro de uma mesma função reação, que chamaremos genericamente, de função resposta ao impulso. Para deixar o modelo mais realístico, permitiremos que a função resposta ao impulso possa assumir vários valores, assim sendo, estaremos na prática testando a elasticidade de reação do mercado às intervenções do Banco Central.

Tendo em mente a idéia de Mundaca e Øksendal (1998), de que toda intervenção tem um “custo social”, vamos propor no nosso modelo uma mudança em relação ao “custo social”. O nosso “custo social” vai ser dado pela função lucro do Banco Central, dessa forma, diferentemente de Mundaca e Øksendal (1998), onde eles procuravam o ínfimo de uma função “custo social”, nós procuraremos maximizar essa função lucro do Banco Central. A motivação é: dado que o processo de flutuação da taxa de câmbio pode trazer algumas conseqüências indesejáveis para a sociedade, cabe ao Banco Central, como autoridade monetária, controlar esse processo. Logo, isso implica que ele tenha certas regras de atuação, como qualquer outro *player* do mercado sem, claramente deixar de reconhecer que o Banco Central é um *player* com informações mais completas do que os outros. Independentemente disso, assumiremos que esse *player*, na condição de autoridade monetária, tenha a prerrogativa de usar todas as informações disponíveis a seu alcance para determinar os dois fatores que nos apresentamos no roteiro. Sendo assim, a função lucro do Banco Central será dada pela seguinte sentença:

$$\Pi(\Delta) = \sum_{t=1}^T y_t(\Delta) e^{-r(T-t)} ;$$

onde,

$\Pi(\Delta)$ é a função lucro do Banco Central para cada seqüência de intervenções e

$\sum_{i=1}^T y_i$ é a valor das opções vendidas pelo Banco Central durante o período de intervenções.

e

$$y_i = e^{-r(t-t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(S_{t_0} e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-t_0) + \sigma\sqrt{(t-t_0)}x\right) - K_0}, 0) n(x) dx$$

onde,

x é uma variável aleatória com distribuição log-normal²³ e K_0 é o *strike* inicial definido em t_0 e $N(d1)$ e $N(d2)$ são as probabilidades de ocorrência dos valores de S e K dado que a distribuição subjacente do ativo base segue uma Normal.

A equação acima é a representação da equação de Black-Sholes dada a segundo a interpretação de neutralidade ao risco.

A solução para a integral acima é um pouco tediosa, mas requer apenas algumas manipulações algébricas. Vamos assumir que o valor da *call*, será dado pela seguinte expressão:

$$C = e^{-rt} S_0 N(d1) - e^{-rt} K N(d2),$$

com

$$d1 = \frac{\left[\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + d)t \right]}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

$$d2 = \frac{\left[\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + d)t \right]}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

Por sua vez o valor da *put* é facilmente extraído via paridade *put/call*.

Dessa maneira, o nosso problema é:

$$J^* = \underset{\Delta}{\text{máx}} \sum_{\text{intervenções}} \Pi(\Delta) \quad ,$$

No nosso caso, simulamos sempre um horizonte temporal de sessenta e dois dias úteis.

Devemos lembrar que o J^* , depende da seqüência de eventos descrito no “Roteiro”, ou seja, vamos especificar varias situações (diferentes: volatilidades e *moneyness*) e comparar o desempenho do J^* sob essas condições.

²³ Veja no Apêndice A, uma breve explicação sobre alguns fatos sobre o apreçamento de opções. Nesse caso, o uso da distribuição log-normal justifica-se pelo fato de termos utilizado como instrumento das simulações um Browniano Geométrico.

CAPÍTULO IV

Simulação

Vamos fazer uma descrição do método de simulação.

Foi criado um Monte Carlo com quinhentas trajetórias para a taxa de câmbio, usando uma determinada volatilidade. Assim que, uma certa barreira fosse atingida, usaríamos o nosso método de controle, isto é, a venda de *calls* e *puts* para um determinado prazo fixo (no caso, 62 dias úteis). O Banco Central continuaria chamando leilões enquanto a taxa de câmbio estiver longe de um determinado valor ótimo m e fora das bandas com as quais ele trabalha, mas o mercado não sabe *à priori*.

Para entendermos a dinâmica financeira do modelo, precisamos compreender os fatores que estarão envolvidos na operação.

Vamos examinar como se comportam as opções que o Banco Central vai leiloar²⁴. Pela fórmula de Black-Scholes podemos determinar cinco fatores que compõe o preço de uma opção de compra – *call*.

$C(S, K, r, t, \sigma)$, onde

S -> *Spot* ou valor do ativo base no qual o derivativo se origina;

K -> Preço de *strike* (preço de exercício);

r -> de maneira genérica, representa o diferencial de juros envolvido na operação;

t -> tempo da operação;

σ -> volatilidade do ativo base.

Desses cinco fatores, no nosso caso, estaremos interessados em dois deles especificamente, K e σ . Isto não significa que os outros fatores não nos interessam, mas

²⁴ Para uma discussão mais profunda, ver Apêndices A e B.

esse K e σ , nos possibilitarão implementar o controle de impulso no mercado de câmbio. Isto porque com o K , poderemos escolher o delta da intervenção, fazendo com que ela se parece mais com uma intervenção tradicional, por exemplo, com um delta próximo de 1, ou uma intervenção mais sofisticada, via venda de volatilidade operando com delta²⁵ ao redor de 0,5.

No mundo de neutralidade ao risco, nas hipóteses de Black-Scholes, nos deveríamos usar apenas uma única volatilidade implícita para todo o universo de K . Contudo, sem entrarmos em detalhes, sabemos hoje em dia que essa hipótese não é válida. Sendo assim, essa dupla tem uma relação matemática no universo das opções. Dado um determinado nível de K , temos outro de σ . Essa dispersão ficou sendo conhecida como *smile*²⁶.

Smile

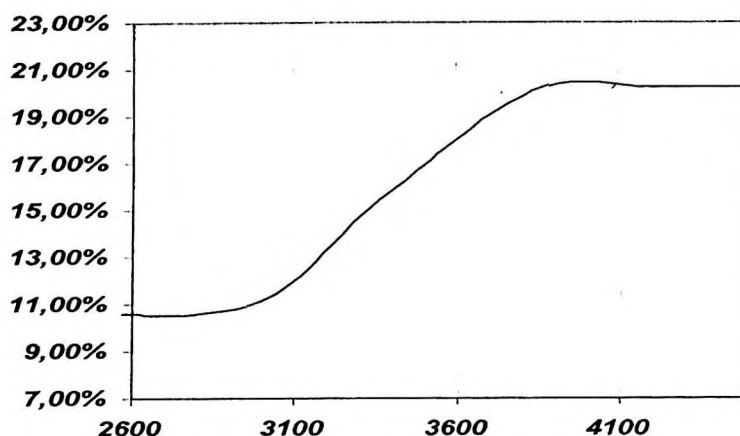


Gráfico 12 - Smile

O gráfico abaixo mostra os vários *smiles*²⁷, compondo uma superfície de volatilidade (também chamada de Dupire-Derman-Kani).

²⁵ Para uma definição mais precisa sobre o delta, ver Apêndice B.

²⁶ A representação gráfica que iremos apresentar nesse trabalho sempre será a de vários níveis do *strike* (K) no eixo das abscissas e a volatilidade no eixo das ordenadas. Vale ressaltar que essa configuração da função *smile* depende de cada ativo base que estamos analisando, por exemplo: para ativos tais como moedas, quanto mais depreciada a moeda for, maior será o nível da volatilidade. Por outro lado, ativos como ações apresentam a função *smile* opostas a das moedas, isto é, quanto menor o valor da ação, maior será o nível da volatilidade. Como conceito é igual, porem na representação gráfica é diferente.

²⁷ O *smile* na verdade é um corte seccional da superfície de volatilidade.

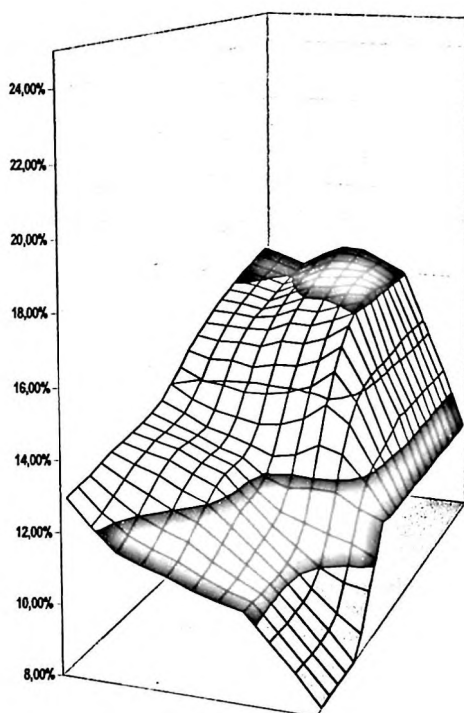


Gráfico 13 – Superfície de Volatilidade²⁸

O *smile*, nada mais é do que a representação em termos de volatilidade implícita da distribuição subjacente do ativo base.

Logo, esse efeito do *smile* pode ser dividido em duas partes: as *caudas* e a *assimetria*. As *caudas* podem se definidas como sendo a diferença da volatilidade implícita entre a opção *at-the-money* (*no-dinheiro*) com as *out-of-the-money* (*fora-do-dinheiro*), ou

²⁸ No gráfico as ordenadas nos dão o nível da volatilidade, as abscissas são os diferentes níveis do *strike* e o eixo z é o tempo.

seja, a *cauda* será representada pelo preço da “asa” enquanto a *assimetria*²⁹ irá medir o grau de assimetria da distribuição do ativo base.

A principal razão para haver uma volatilidade mais alta nas opções *out-of-the-money* e nas *in-the-money* (diferentemente do que a teoria de Black-Scholes sugeriria) é o fenômeno conhecido pela “volatilidade da volatilidade”, que está relacionado com o quarto momento central de uma série (curtose³⁰). Uma outra razão que podemos levantar para explicar as *caudas* é a convexidade do vega³¹. De maneira geral, as séries no mercado financeiro apresentam uma curtose mais alta, ou seja, caudas pesadas, do que o era de se esperar, assumindo uma hipótese de log-normalidade.

Entretanto, é difícil estabelecer uma dependência entre o preço do ativo base e a volatilidade. Claro que, sabemos que há uma correlação entre eles, mas é de uma maneira não-linear. Essas correlações, geralmente valem para pequenos movimentos, mas podem ser o inverso quando observamos movimentos de longo prazo. Além disso, é sabido que a volatilidade está associada a um determinado *intervalo* e não ao preço em si ou a sua variação.

Devemos lembrar também que, uma “volatilidade volátil”, gera as *caudas gordas ou pesadas*, porque existe uma probabilidade condicional do preço do ativo base sobre o estado da natureza da volatilidade. Isto é, dado que estamos na *cauda*, o estado da natureza mais provável para a volatilidade é de ir para um valor mais alto. Um estado da natureza com uma alta volatilidade pode mais facilmente levar o mercado para as *caudas*, do que um de baixa volatilidade. Sendo assim, as *caudas* serão mais “gordas”, por causa da volatilidade maior.

Com isso em mente, caso o Banco Central faça os leilões usando opções com de delta baixo, digamos 0,25, ele estará provendo o mercado de convexidade no vega e talvez, no limite, seja essa uma alternativa razoável de atuação por parte do Banco Central, porque

²⁹ É a medida de simetria, ou melhor dizendo, da falta de simetria de uma série de dados. Intuitivamente, o *assimetria* expressa a correlação entre o movimento da variável aleatória x_t e a sua volatilidade x_t^2 .

³⁰ A curtose é uma medida de quão estável uma série é em relação a uma distribuição normal, ou seja, se a série em questão apresenta “picos” de valor ou se ela é igualmente distribuída. Podemos afirmar que, séries com uma alta curtose, tendem a apresentar um “pico” próximo da média e declinando rapidamente – apresentando caudas leves. Por sua vez, uma série com uma baixa curtose, tem um “pico” pouco pronunciado (a distribuição uniforme é o seu caso mais emblemático) e uma cauda mais pesada.

³¹ Veja no Apêndice uma discussão sobre o vega e convexidade.

além de intervir para controlar a taxa de câmbio, sempre que o Banco Central atua no mercado de câmbio, ele promove um aumento na volatilidade como instrumento de mensuração de incertezas.

Tomando o preço de uma *call* tipo européia, como sendo

$$C = e^{-rt} S_0 N(d1) - e^{-rt} KN(d2),$$

com

$$d1 = \frac{\left[\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + d)t \right]}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

$$d2 = \frac{\left[\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + d)t \right]}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

onde $N(d1)$ e $N(d2)$ é a normal acumulada para cada d . O resultado padrão no vencimento para essa estrutura pode ser entendido pelo gráfico abaixo (no eixo das abscissas variamos o preço do ativo no dia do vencimento e nas ordenadas o resultado esperado);

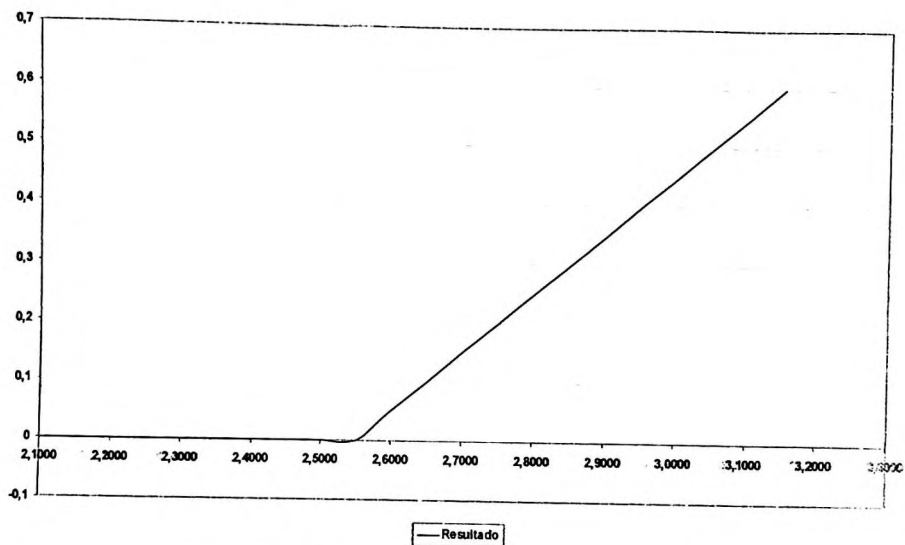


Gráfico 14 – Payoff Call
no caso de uma *put* tipo europeia,

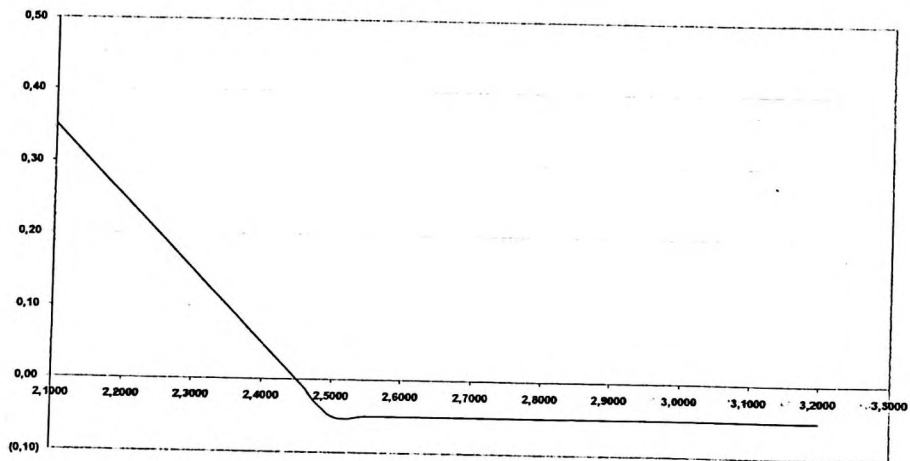


Gráfico 15 – Payoff Put

a.1.) 10% Delta - Strikes com volatilidade alta

Repare no gráfico, como os *strikes*, tanto o superior quanto o inferior estão longe do que seria uma flutuação razoavelmente volátil, dado o horizonte temporal (relativamente curto). Usamos nesse caso, *strikes* de 10% de *delta*.

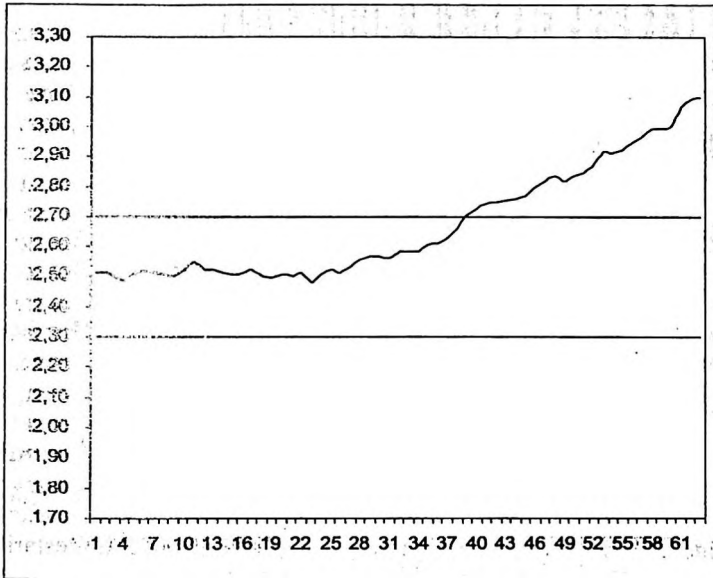


Gráfico 16 – Realização Processo Volatilidade Alta

O *payoff* do Banco Central nesse caso, de volatilidade alta (12% a.a. – média) com *strikes* em 10% de *delta* é o seguinte:

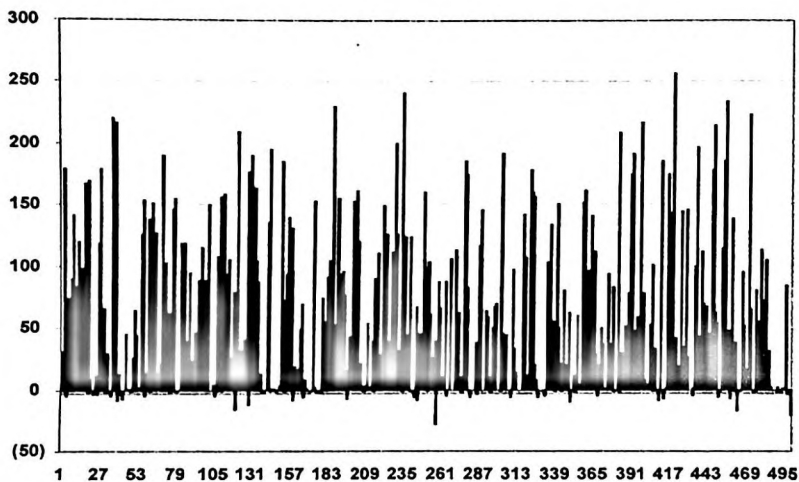


Gráfico 17 – Resultado Banco Central caso a.1.(em toda a seqüência de “Resultado Banco Central”, o eixo das abscissas representa a simulação n , $1 \leq n \leq 500$ e as ordenadas representa o resultado do Banco Central para cada simulação n .)

Nesse caso, é até intuitivo que o Banco Central obtenha um resultado positivo significativo, uma vez que pela alta amplitude dos movimentos e *strikes* bem fora do “dinheiro”, vão fazer com que as intervenções sejam em pontos muito distantes, logo fazendo com que a probabilidade de volta a média, seja alta. Logo, o Banco Central estaria vendido³² em opções *out-of-the-money* e não tendo sido exercido em grande parte dessas vendas, ele vai estar apropriando toda a venda desse prêmio de risco.

Veja um histograma dos resultados.

³² Estar “vendido” é um jargão usado no mercado financeiro que denota o ato de vender algum ativo, sendo assim, nesse caso o Banco Central depois de ter realizado um leilão de moedas, onde ele oferta opções de compra e venda, assumiu uma posição vendida nessas opções. Assim sendo, para o mercado o Banco Central esta “vendido”. Bem como existe a situação onde o Banco Central esta “comprado”.

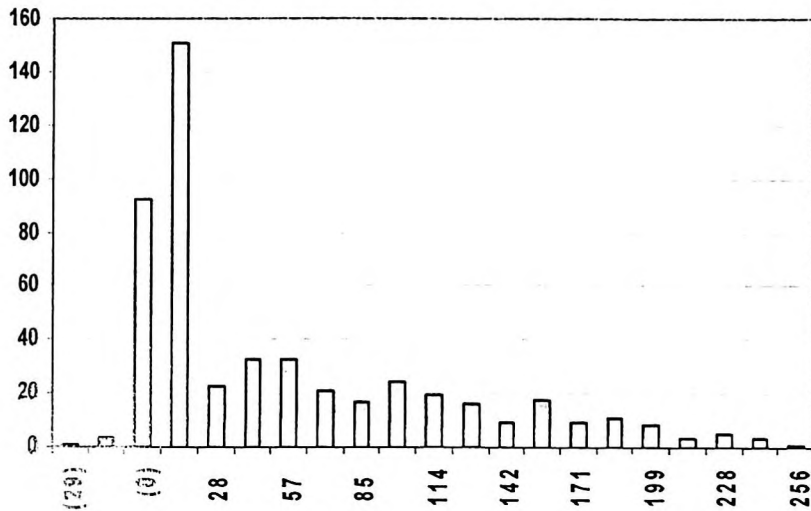


Gráfico 18 – Histograma de Resultados do Banco Central caso a.l.(Nesse tipo de representação gráfica, mostraremos no eixo das abscissas os resultados do Banco Central e nas ordenadas o número de ocorrências).

Claro que, a grande concentração de resultados está ao redor do zero, mas veja como existe uma forte probabilidade de ocorrer valores³³ positivos, relativamente altos.

Para uma medida fácil de performance, podemos usar o seguinte tipo de tabela gráfica.

³³ As unidades aqui usadas são simplesmente a aplicação da fórmula da função lucro do Banco Central, ou seja, não estamos levando em consideração nenhuma unidade monetária e nenhum tipo de multiplicador financeiro.

Resultado das Intervenções

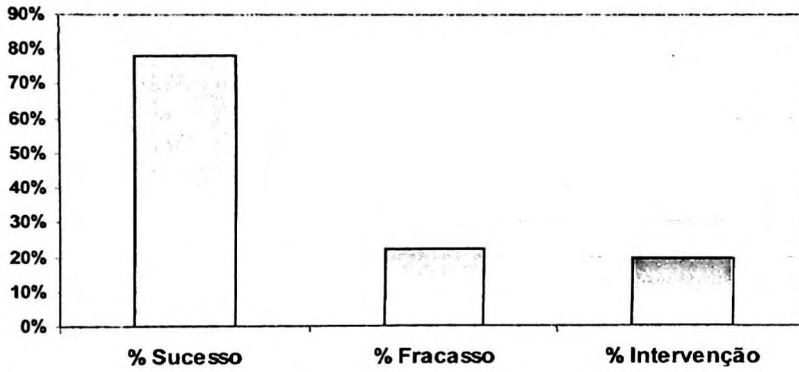


Gráfico 19 – Resultado das Intervenções caso a.1.

a.2.) 25% Delta - Strikes com volatilidade alta

Veja que, com um delta maior, as bandas se estreitaram.

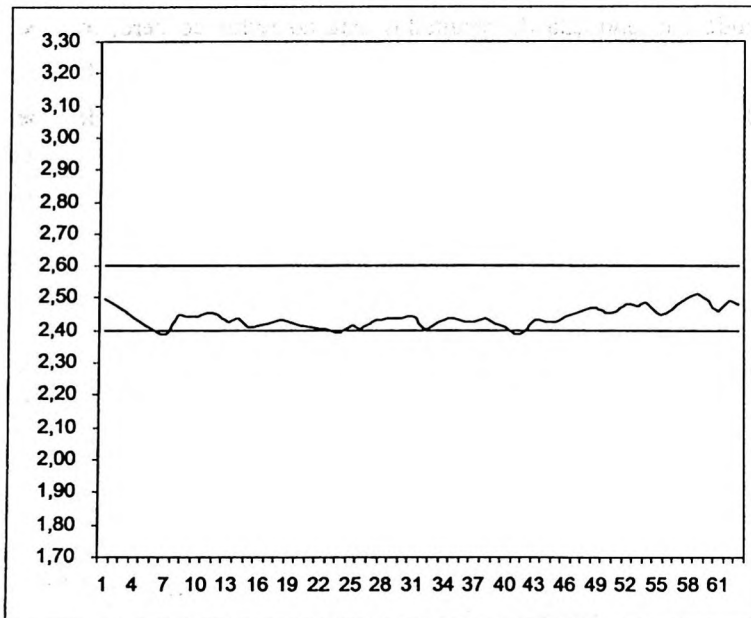


Gráfico 20 - Realização Processo Volatilidade Alta

O *payoff* do Banco Central nesse caso, de volatilidade alta (12% a.a. – média) com *strikes* em 25% de delta é o seguinte:

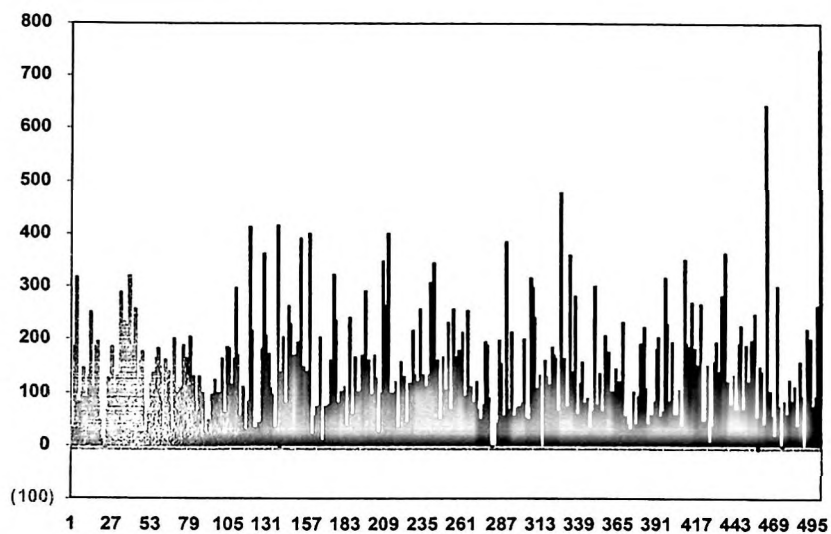


Gráfico 21 - Resultado Banco Central caso a.2.
Abaixo, o histograma do resultado do Banco Central.

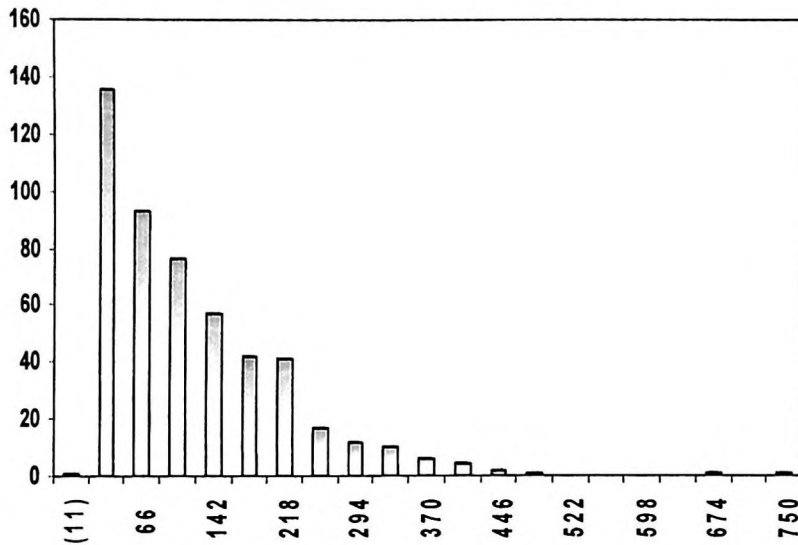


Gráfico 22 – Histograma de Resultados do Banco Central caso a.2.

Veja que nesse caso, a distribuição tem um “pico” próximo do zero, mas com poucos valores negativos e uma grande quantidade de valores positivos.

Resumindo:

Resultado das Intervenções

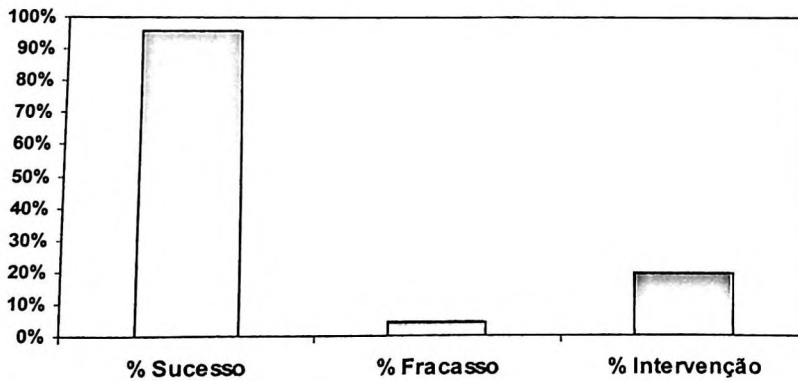


Gráfico 23 – Resultado das Intervenções caso a.2.

a.3.) 50% Delta - Strikes com volatilidade alta

Nesse caso, só existe uma banda, já que tanto a *call* quanto *put*, terão o mesmo valor de *strike*, já que estamos trabalhando com o *forward* e não com a taxa *spot*.

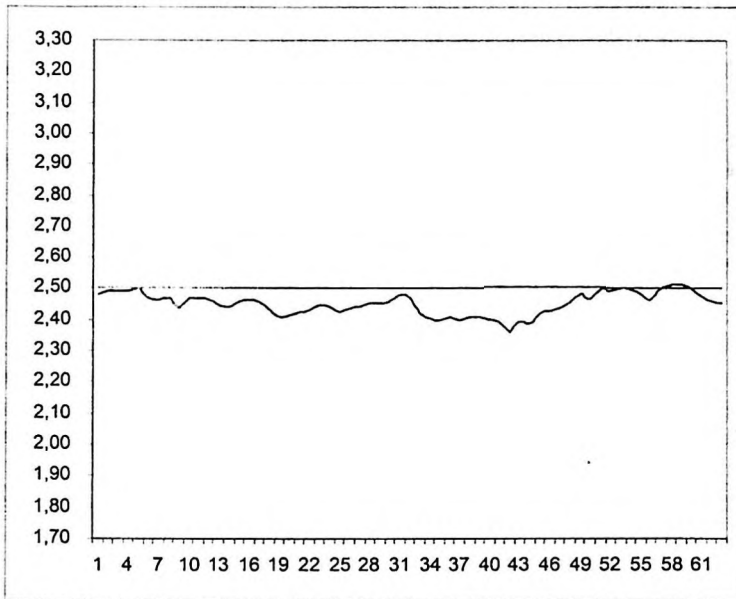


Gráfico 24 – Realização do Processo Volatilidade Alta

O resultado do Banco Central é dado por:

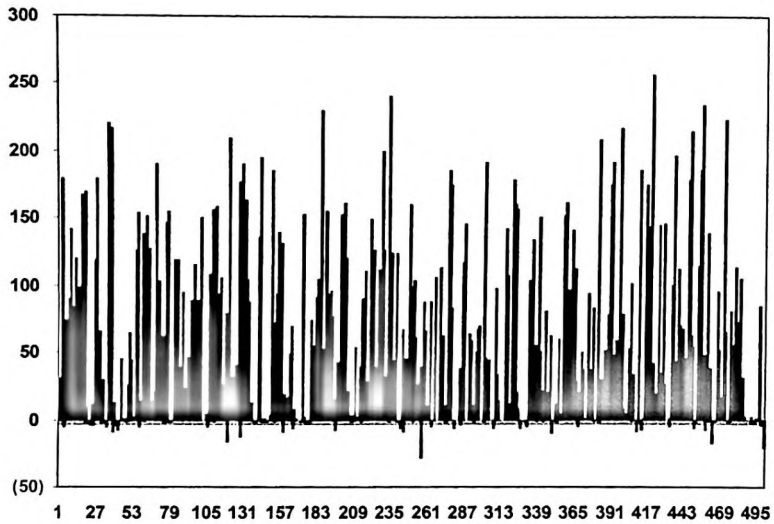


Gráfico 25 - Resultado Banco Central caso a.3.

O histograma de resultados,

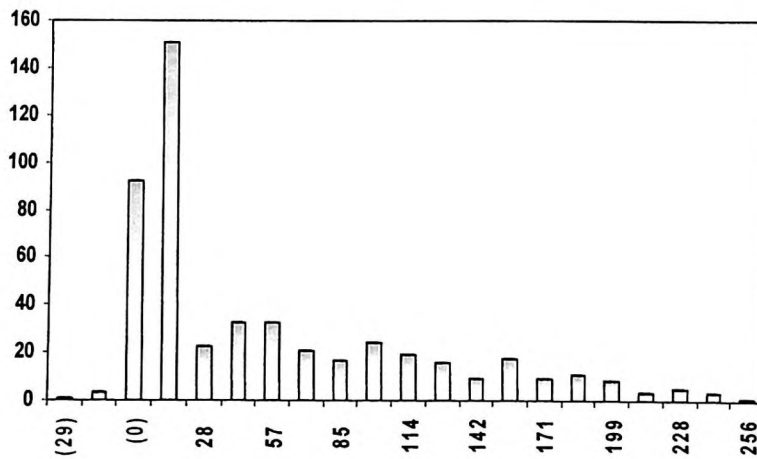


Gráfico 26 - Histograma de Resultados do Banco Central caso a.3.

Aqui, como no caso a.1.), temos a maioria dos resultados centrado no zero e alguns na parte da direita da distribuição.

Resumidamente:

Resultado das Intervenções

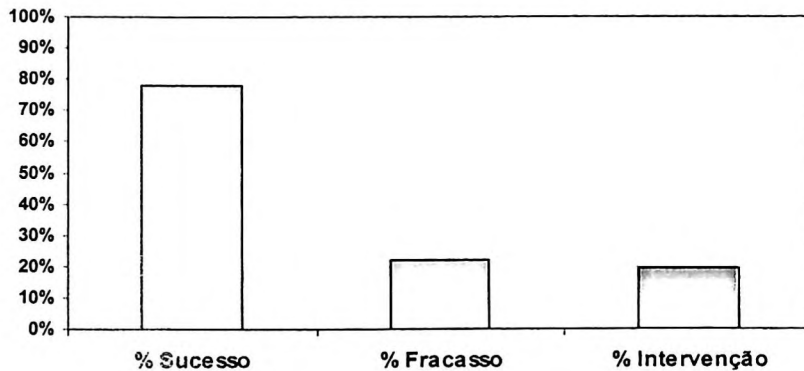


Gráfico 27 – Resultado das Intervenções caso a.3.

a.4.) 75% Delta - Strikes com volatilidade alta

Nesse caso, temos que as bandas são invertidas, ou seja, o *strike* da *call*, vai ser mais baixo do que o *strike* da *put*.

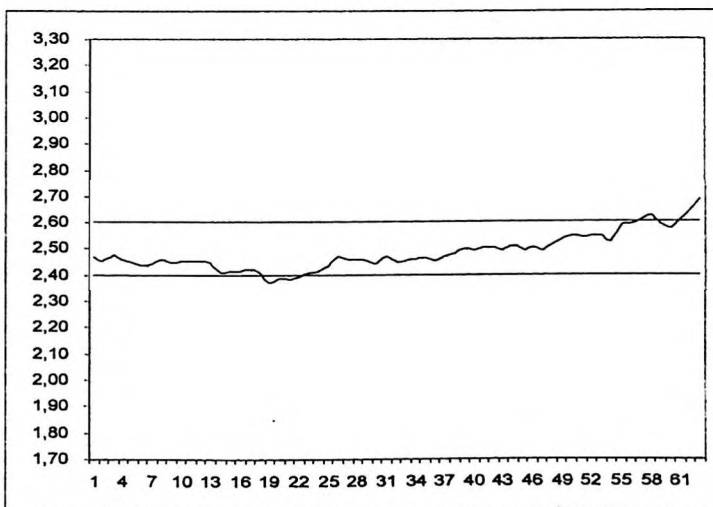


Gráfico 28 – Realização do Processo Volatilidade Alta

Veja que, nesse caso o resultado do Banco Central é mais “aleatório”, já que operar com um *delta* alto, é praticamente igual a um futuro e assim, resulta em uma configuração de resultados parecido com uma distribuição normal, ou no limite, a distribuição subjacente do ativo base. Existem ainda alguns valores positivos grandes, porque o prêmio pago pelo mercado ao Banco Central para terem esse direito é alto – dado o *delta*. Assim, o mercado pago um valor alto, mas, com pouco componente de prêmio e muito de valor intrínseco da opção³⁴.

³⁴ A função prêmio pode ser visualizada assim,

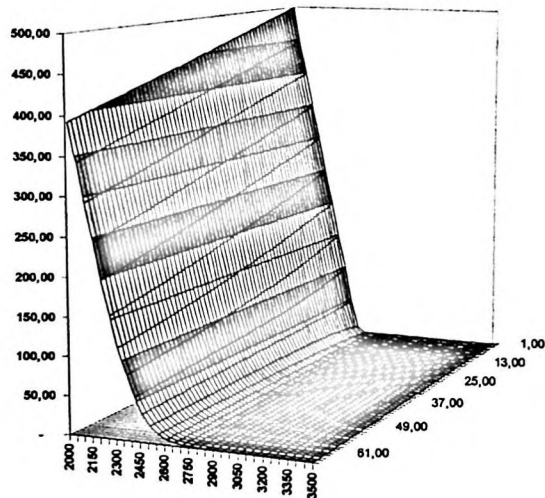


Gráfico 29 – Função Prêmio – As abscissas são os vários valores do *strike*, nas ordenadas temos o valor do prêmio das opções e no eixo z as diferentes maturidades.

Contudo, repare na relação prêmio/intrínseco,

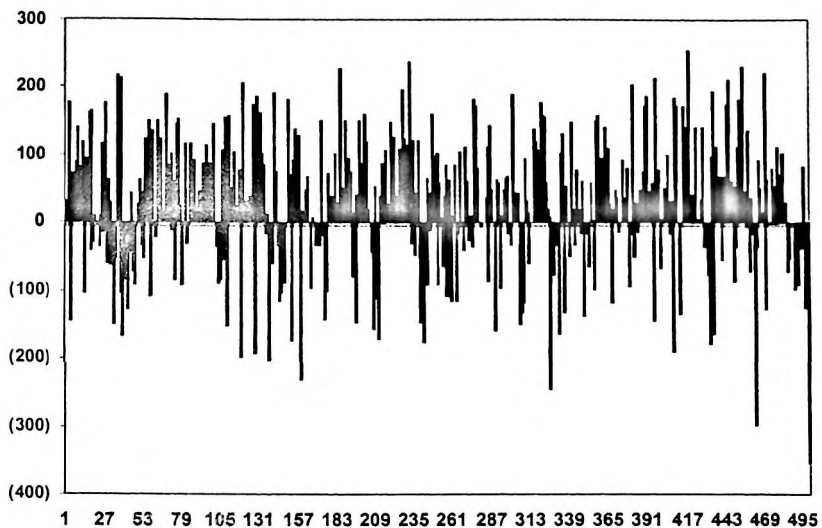


Gráfico 30 - Resultado Banco Central caso a.4.

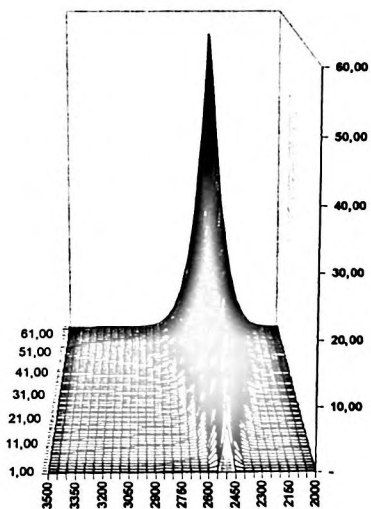


Gráfico 31 – Função Prêmio de Risco - As abscissas são os vários valores do *strike*, nas ordenadas temos o valor do prêmio das opções e no eixo z as diferentes maturidades.

ou seja, as opções *in-the-money*, embora apresentem um valor alto, o componente prêmio é baixo. O prêmio é máximo quando estamos operando uma opção *at-the-money* longa.

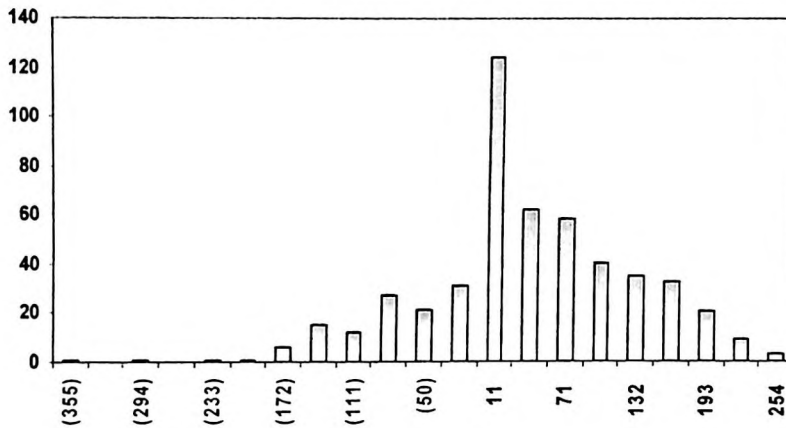


Gráfico 32 - Histograma de Resultados do Banco Central caso a.4.

Resultado das Intervenções

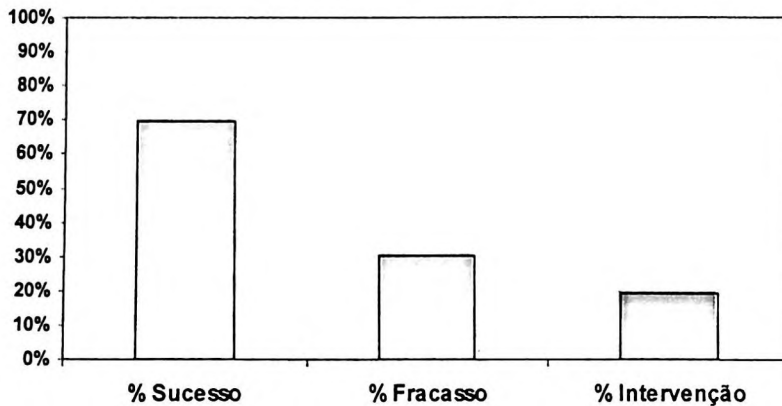


Gráfico 33 - Resultado das Intervenções caso a.4.

b.1.) 10% Delta - Strikes com volatilidade baixa

Veja como a simulação do comportamento do ativo base com uma volatilidade mais baixa, faz com que os movimentos fiquem mais suaves.

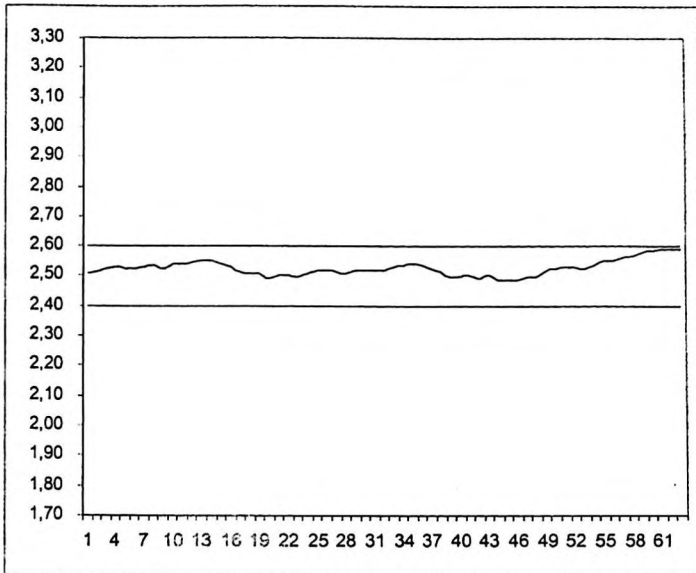


Gráfico 34 – Realização do Processo Volatilidade baixa

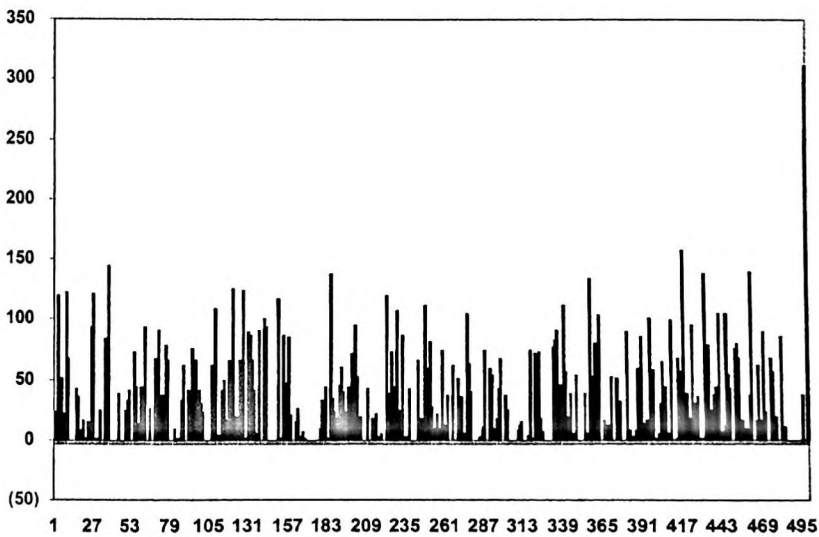


Gráfico 35 - Resultado Banco Central caso b.1.

Podemos perceber essa característica também na função lucro do Banco Central que se torna menos ampla, isto é, os resultados ficam mais estáveis.

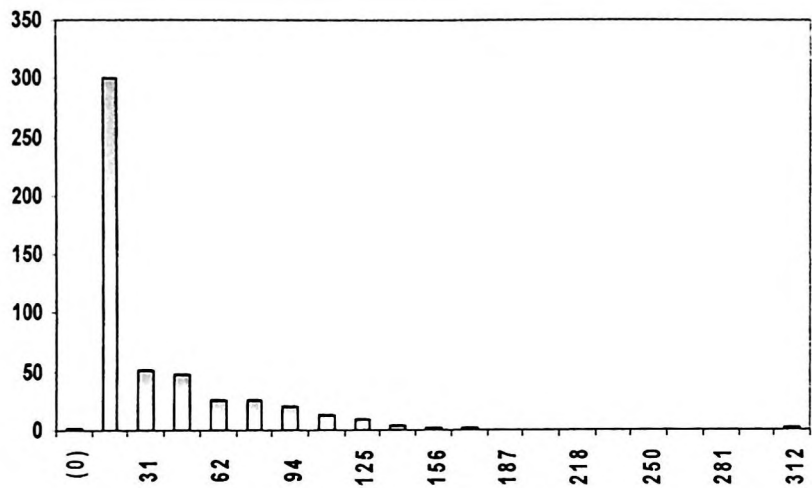


Gráfico 36 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.1.

Resultado das Intervenções

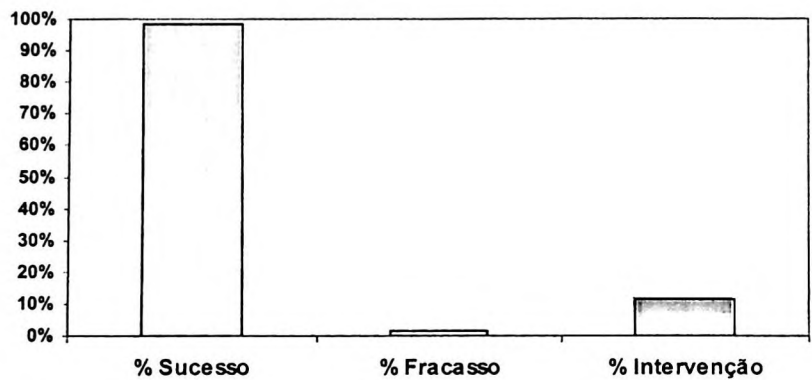


Gráfico 37 - Resultado das Intervenções caso b.1.

b.2.) 25% Delta - Strikes com volatilidade baixa

Aqui temos uma típica realização dessa simulação.

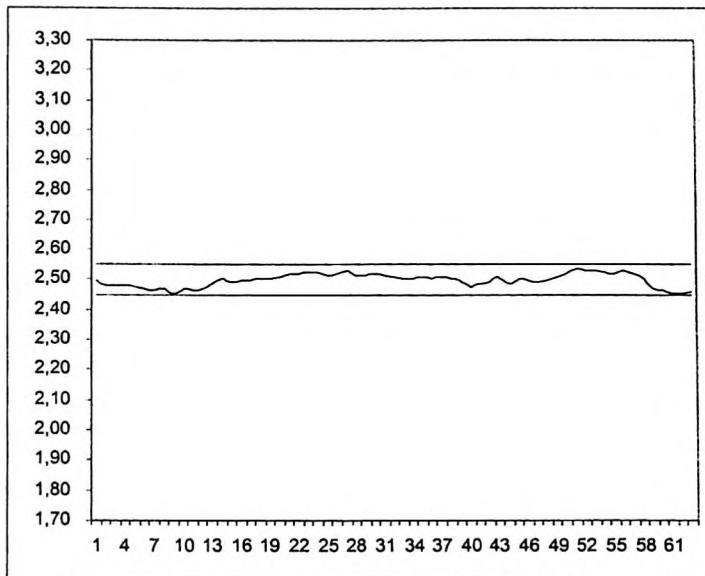


Gráfico 38 – Realização do Processo Volatilidade Baixa

Com os seguintes resultados.

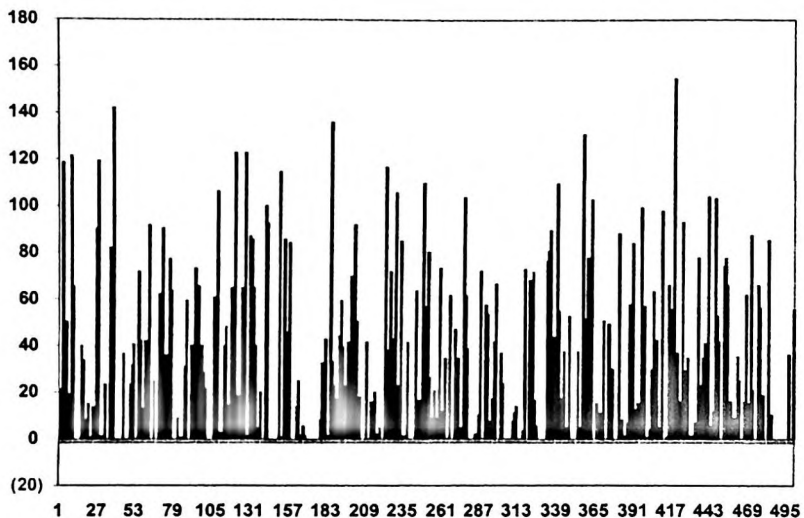


Gráfico 39 - Resultado Banco Central caso b.2.

E o histograma abaixo.

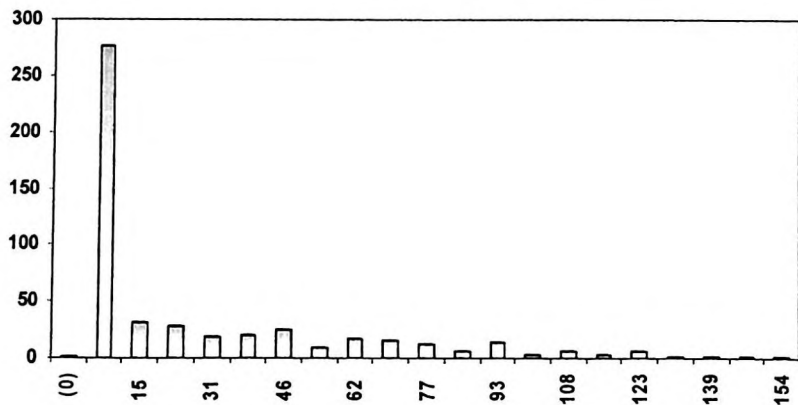


Gráfico 40 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.2.

Veja que nessa situação, o resultado volta a ficar próximo de zero, com pequenos valores positivos com uma probabilidade mais alta.

Resumidamente.

Resultado das Intervenções

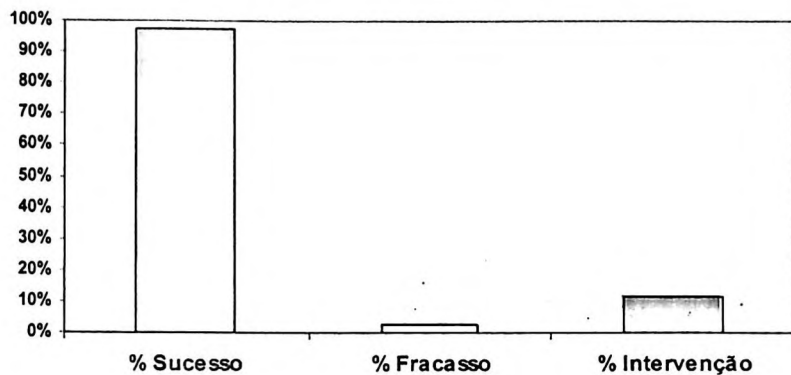


Gráfico 41 - Resultado das Intervenções caso b.2.

b.3.) 50% Delta - Strikes com volatilidade baixa

Aqui, voltamos àquela situação onde o *strike* da *call* é igual ao da *put*.

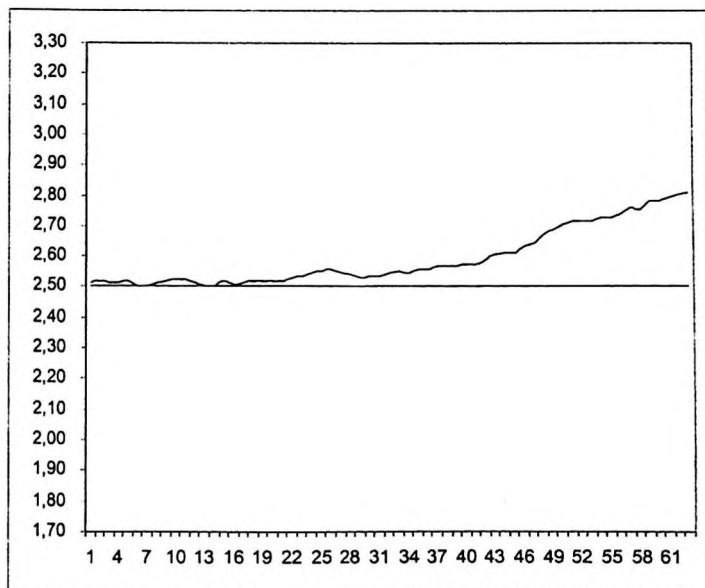


Gráfico 42 – Realização do Processo Volatilidade Baixa

Temos os seguintes resultados.

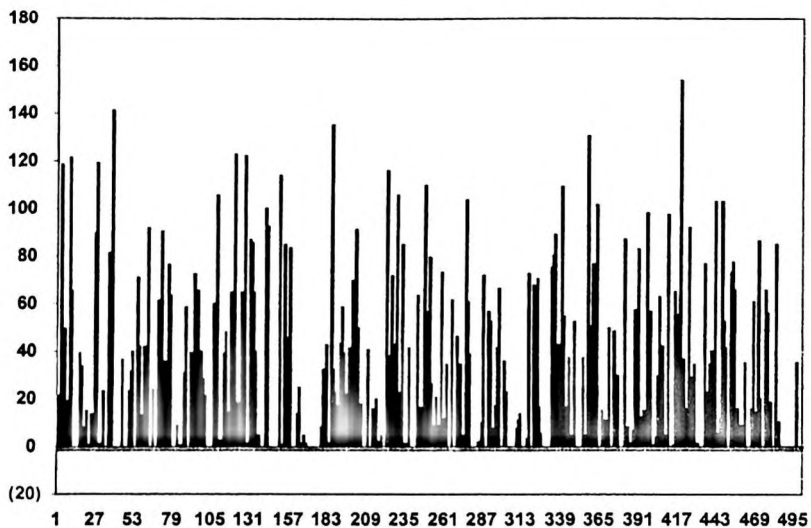


Gráfico 43 - Resultado Banco Central caso b.3.

O histograma.

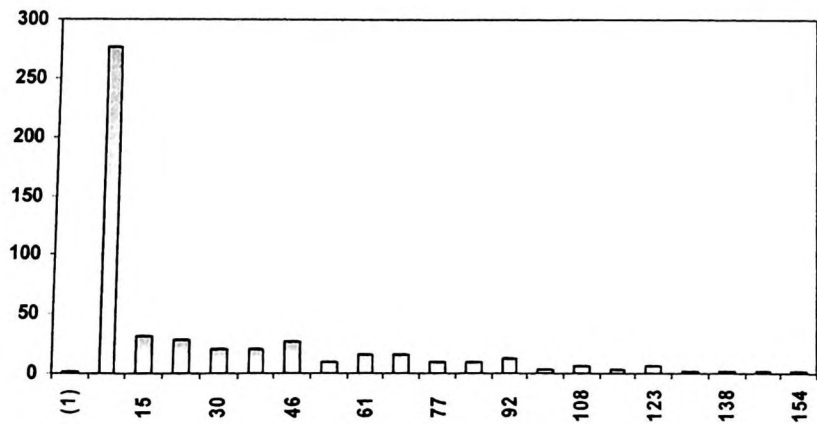


Gráfico 44 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.3.

Nesse caso, novamente temos um “pico” ao redor dos valores próximos de zero e alguns valores positivos, embora pequenos. Também podemos observar que a probabilidade haver retornos altos é muito pequena.

Resultado das Intervenções

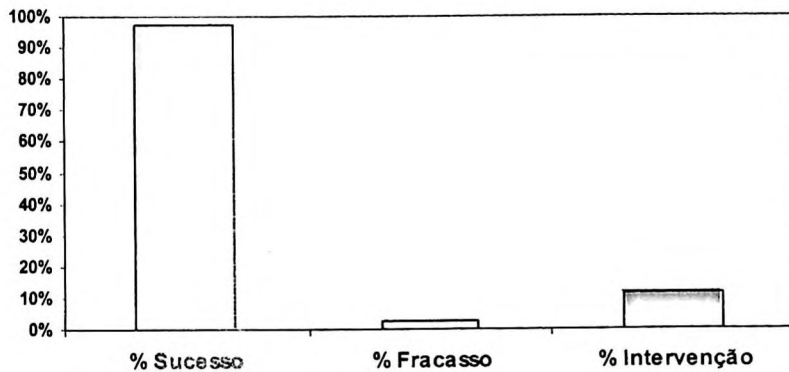


Gráfico 45 - Resultado das Intervenções caso b.3.

b.4.) 75% Delta - Strikes com volatilidade baixa

O processo é:

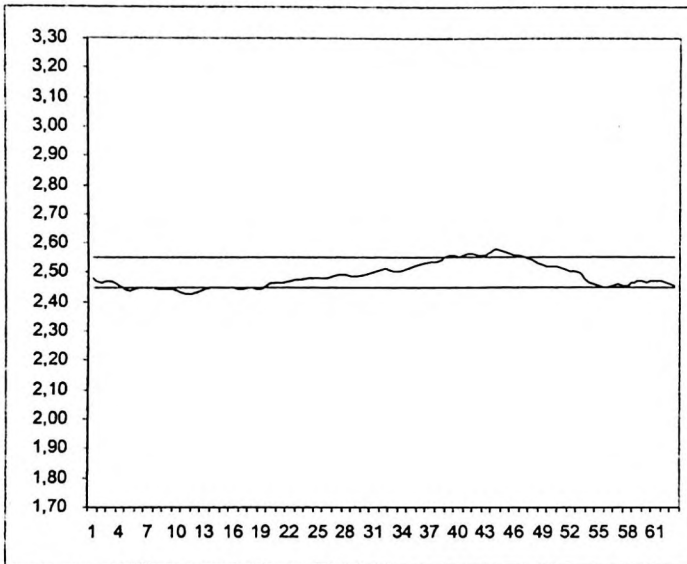


Gráfico 46 – Realização do Processo Volatilidade Baixa

Com os seguintes resultados.

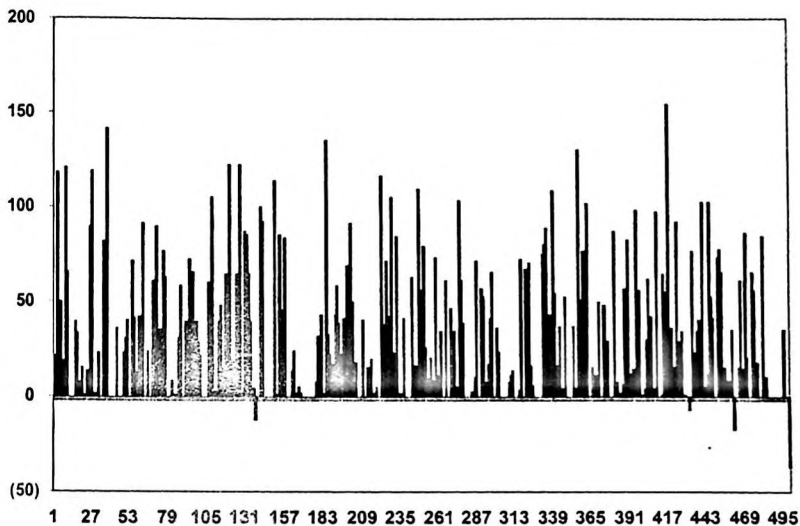


Gráfico 47 - Resultado Banco Central caso b.4.

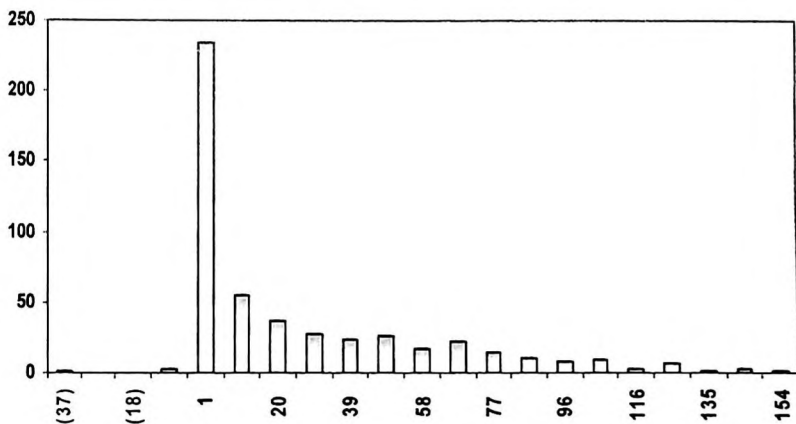


Gráfico 48 - Histograma de Resultados do Banco Central caso b.4.

Veja que aqui, aparecem com uma probabilidade pequena de ocorrência, valores negativos. Isto primordialmente porque o Banco Central esta vendendo *calls* e *puts* com delta alto, o que implica em a probabilidade de exercício ser maior.

Resultado das Intervenções

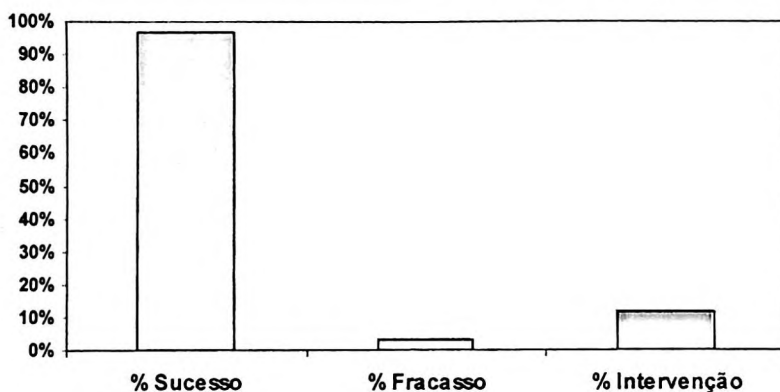


Gráfico 49 – Resultado das Intervenções caso b.4.

c.) Considerações Adicionais

Para chegarmos a esses resultados, como já foi mencionado anteriormente, utilizamos uma técnica de simulação, para replicar a realização do processo estocástico que rege o comportamento do ativo base, isto é, a taxa de câmbio nominal.

Dessa forma, para implementarmos o nosso modelo, além de termos que simular a realização do processo, nos também tivemos que desenvolver as ferramentas para controlar o processo. Logo, como foi descrito pelo modelo matemático apresentado, existe uma “função resposta” que precisamos arbitrar. Contudo, essa “função resposta” é a pedra angular do modelo, visto que é ela que dita qual vai ser o comportamento do mercado pos-intervenção. Assim sendo, dado que ela é sensível e testar vários níveis para essa “função resposta” parece ser irreal, já que essa “função resposta” nem o Banco Central e nem o mercado sabem *à priori*. A melhor maneira que encontramos para fazê-la ser vista é mostrar a capacidade dessa função de distorcer a distribuição subjacente do ativo base.

A “função resposta” da maneira como a criamos, resulta em um controle sobre a realização do processo. Assim, dado os parâmetros iniciais, toda vez que houver um rompimento das bandas e o Banco Central começar com a sua política de intervenções, essa

função dirá como o mercado ira reagir a esses estímulos. Logo, há uma deturpação na realização inicial do processo, fazendo com que o controle seja, na pratica, exercido.

Repare no gráfico abaixo, como seria de se esperar a distribuição da realização, caso a “função resposta” não tivesse nenhum efeito sobre o mercado.

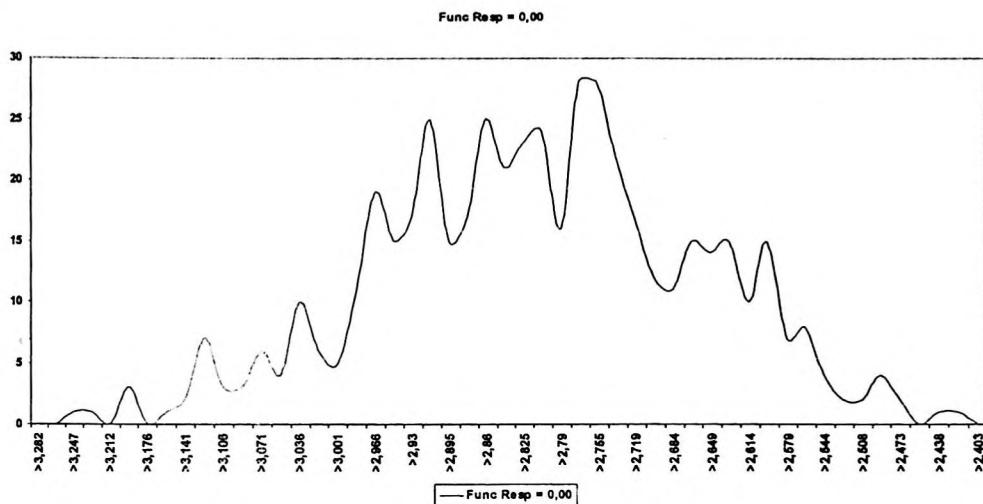


Gráfico 50 – Distribuição Função Resposta = 0,00

Como podemos observar, essa seria uma distribuição próxima a uma normal, que é a hipótese básica da maioria dos modelos que descrevem o funcionamento do mercado financeiro.

Contudo, veja como fica a distribuição do ativo base, quando a “função resposta” passa a exercer influencia, mesmo que seja pequena.

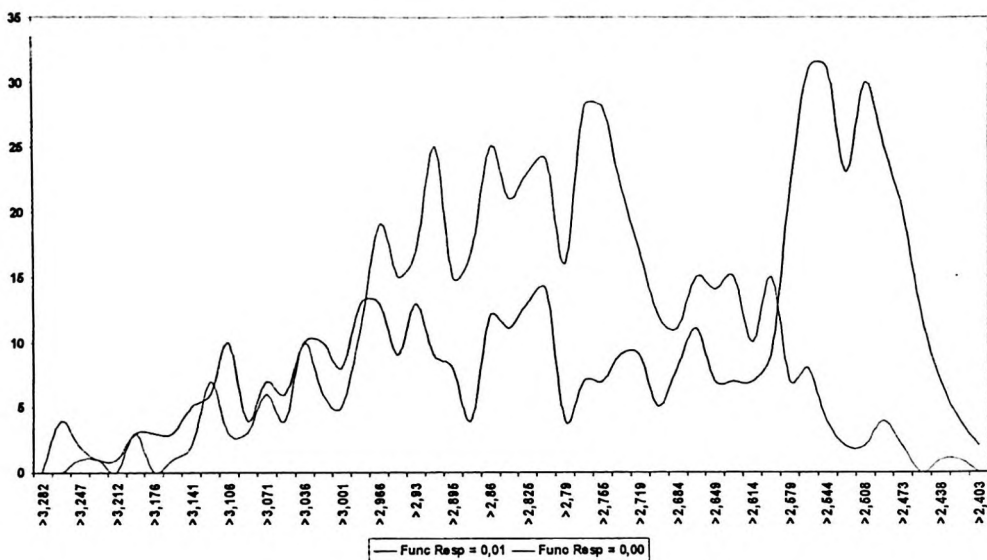


Gráfico 51 – Comparação entre as Funções Respostas

Veja como a distribuição foi “deslocada” para a direita, isto é, o controle faz com que uma grande parte dos valores da realização do processo passem a ser cada vez menores. Devemos lembrar que, a distribuição do ativo base, no nosso caso, a taxa de câmbio R\$/USD, apresenta um *assimetria* positiva, isto é, de maneira geral, depreciações são mais freqüentes e com maior intensidade. Logo o controle, esta fazendo com que, tanto a curtose quanto essa assimetria, sejam deslocados. Assim, a lógica fica sendo a seguinte: como, em um processo de flutuação limpa, a assimetria deveria ser significativamente positiva³⁵, o controle (função resposta) exercera influencia justamente na direção oposta, isto é, fazer com que a assimetria passe a ser negativa.

Repare como no limite, a “função resposta” desloca a distribuição para a “direita”. Nesse caso a “direita” significa que a moeda esta se apreciando. Isso ocorre pelo fato de que a paridade central m que, no nosso caso foi definida como sendo em R\$ 2,50 / USD estar em um ponto diferente daquele que seria a media sem a função resposta. Além disso as bandas estão relativamente próximas desse nível m fazendo com que as atuações do Banco Central sejam mais freqüentes nesses níveis, logo, auxiliando para que haja uma distorção na distribuição de probabilidade. Assim, existe uma “força de atração” para que o

processo termine a realização dentro da banda e mais especificamente junto à paridade central m e isso fará com que exista essa deformação na distribuição de probabilidade, que poderá ser maior ou menor dependendo do poder da função resposta. Como pode ser visto no gráfico abaixo, quanto mais sensível for a “função resposta”, maior será a “força atratora”.

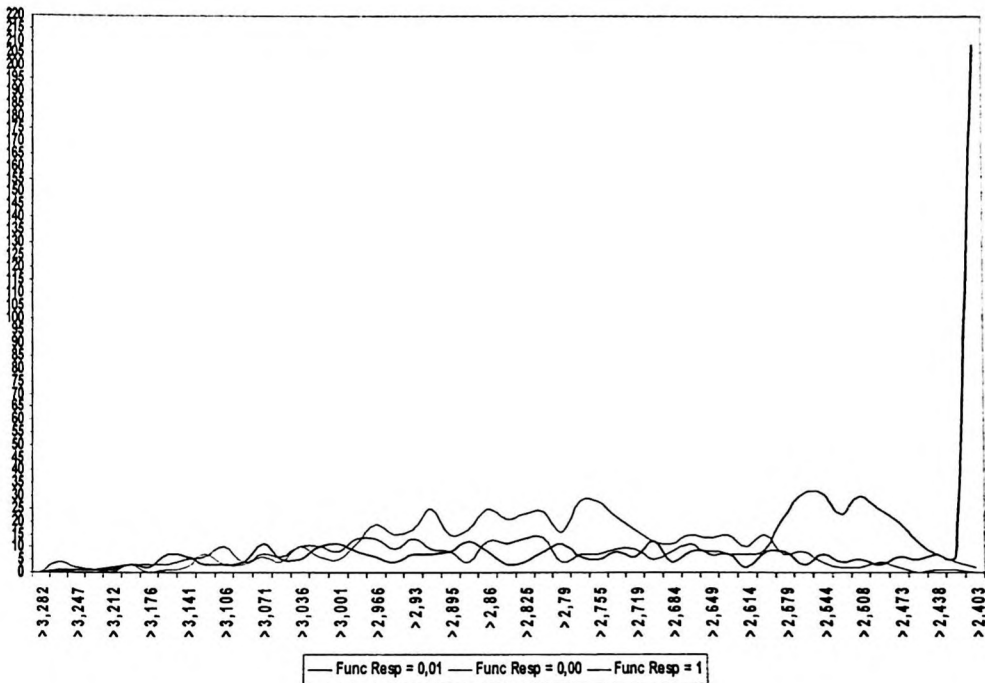


Gráfico 52 – Comparação entre as Funções Respostas

Vamos analisar como essas mudanças causadas pela “função resposta”, que esta alterando a distribuição subjacente, impacta via curtose e assimetria a volatilidade teórica das opções. Devemos considerar que nesse caso, o processo realizado, vai nos dar os dados necessários para derivarmos o *smile* histórico.

Como já foi dito anteriormente, toda intervenção que o Banco Central faz nos mercados de uma maneira geral, elevam a volatilidade, uma vez que aumenta a incerteza em relação ao comportamento futuro do mercado em questão. Veja no gráfico abaixo,

³⁵ No caso brasileiro justifica-se o termo significativamente positiva, em outros pares de moedas com um comportamento mais estável, os valores observados não justificariam usar o termo significativamente.

como as volatilidades (medidas via o desvio padrão da série) são alteradas quando há a presença do Banco Central no mercado.

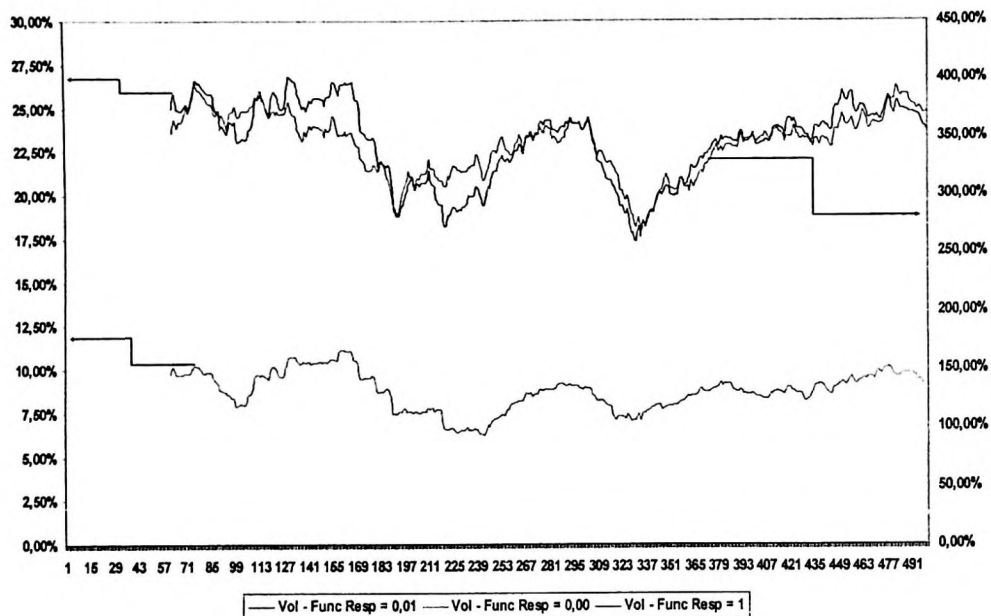


Gráfico 53 – Volatilidades com as Funções Respostas

Vejam como a distribuição dos retornos das realizações sofrem modificações também.

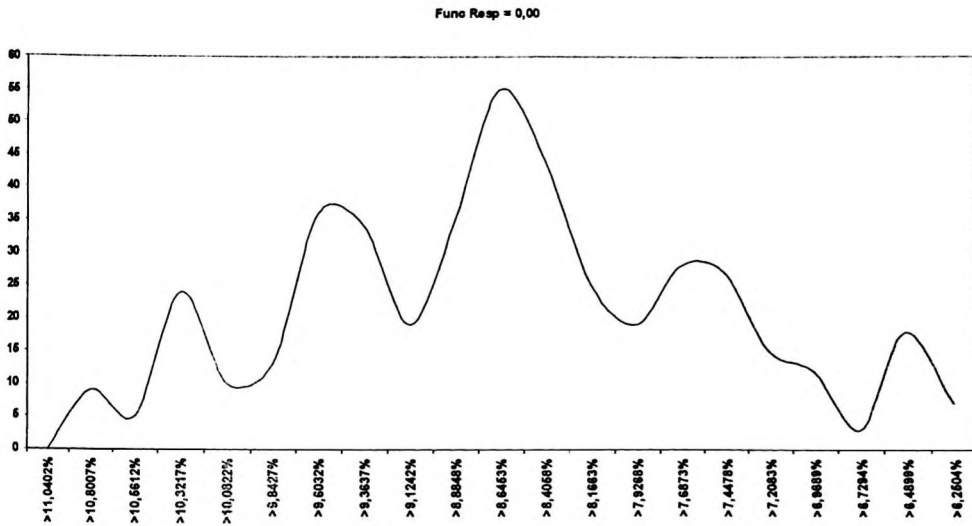


Gráfico 54 – Distribuição dos Retornos, Função Resposta = 0,00

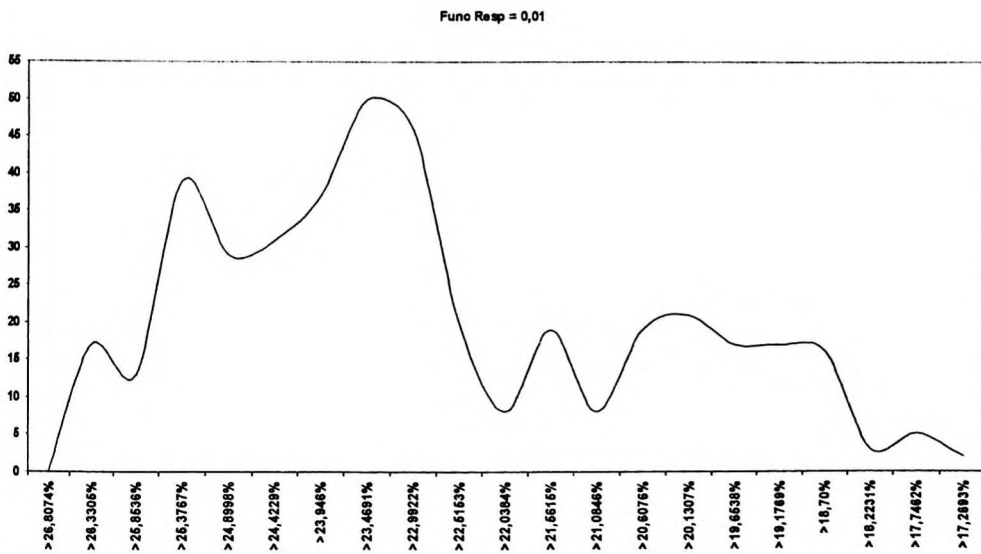


Gráfico 55 - Distribuição dos Retornos, Função Resposta = 0,01

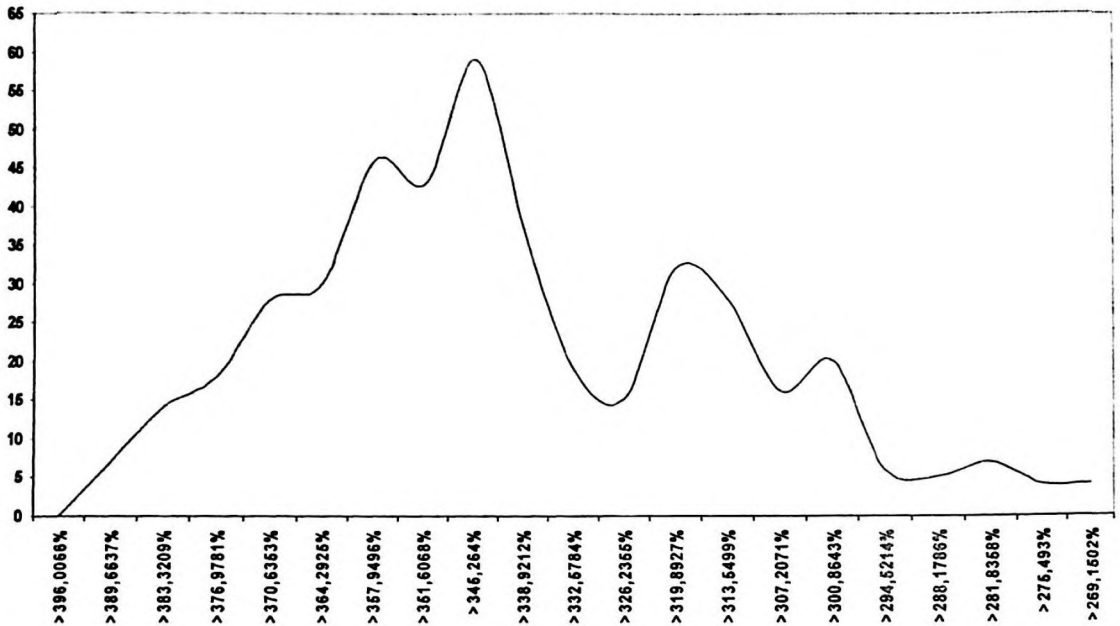


Gráfico 56 - Distribuição dos Retornos, Função Resposta = 1,00

Claro que toda essa transformação tanto no nível, quanto na diferença nessas series, resultam em uma mudança no *smile*. Repare na seqüência abaixo como, no nosso caso, tanto a curtose como a assimetria das várias distribuições é alterada em relação à série observada. Além disso, o resultado mais visível é a mudança total da assimetria. Na distribuição observada, há uma assimetria no sentido de uma depreciação do real frente ao dólar americano. Agora, no nosso modelo, dado que a paridade central m e as bandas estão relativamente próximas ao nível de R\$ 2,50 / USD, a assimetria inverte o sentido e passa a ser “sentida” em uma apreciação do real frente ao dólar americano.

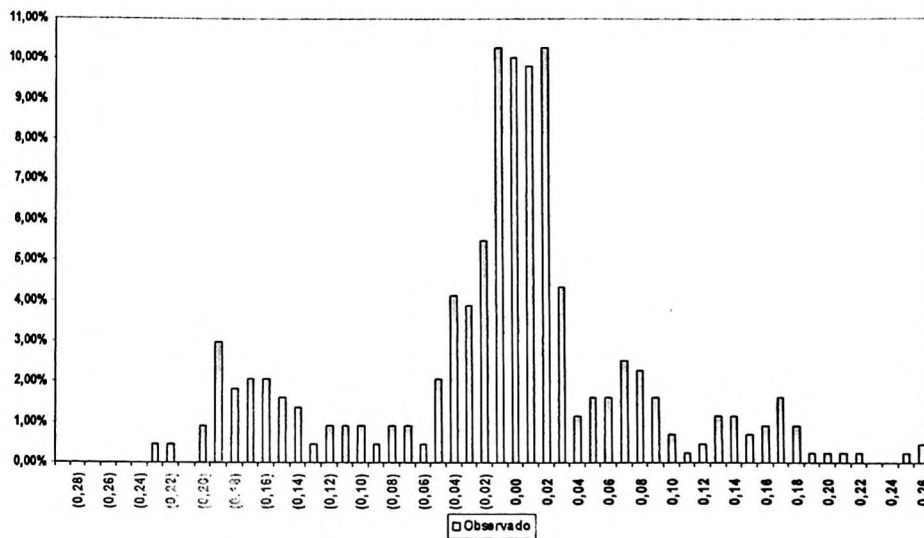


Gráfico 57 – Histograma dos Retornos – Série Realizada

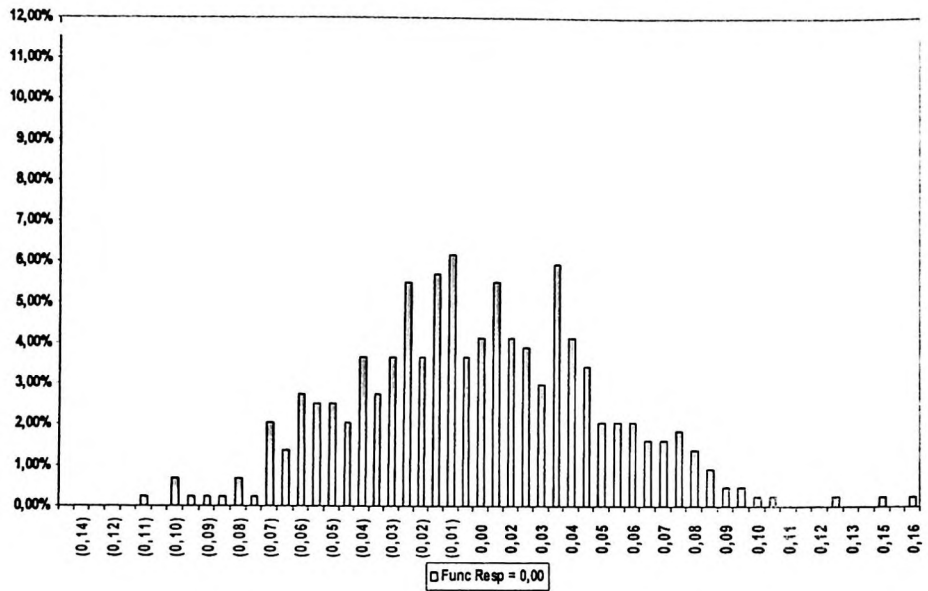


Gráfico 58 - Histograma dos Retornos – Série Função Resposta = 0,00

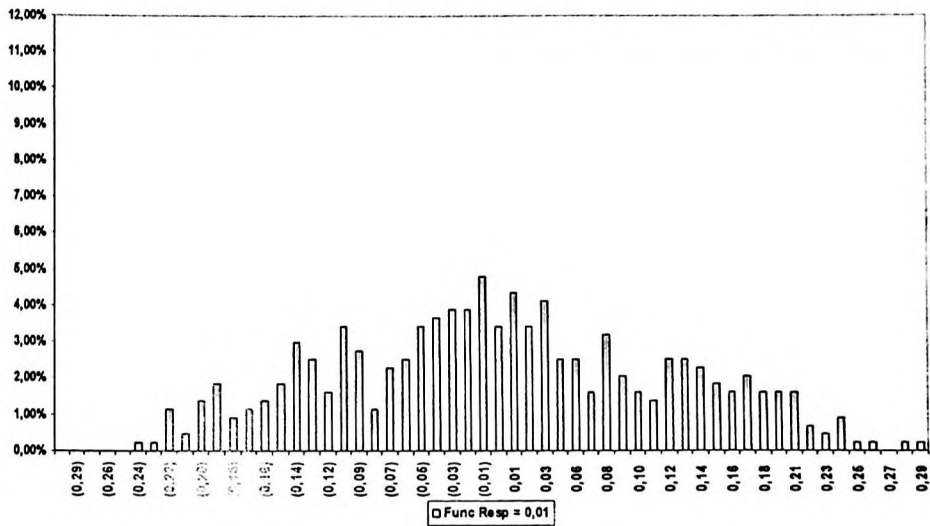


Gráfico 59 - Histograma dos Retornos – Série Função Resposta = 0,01

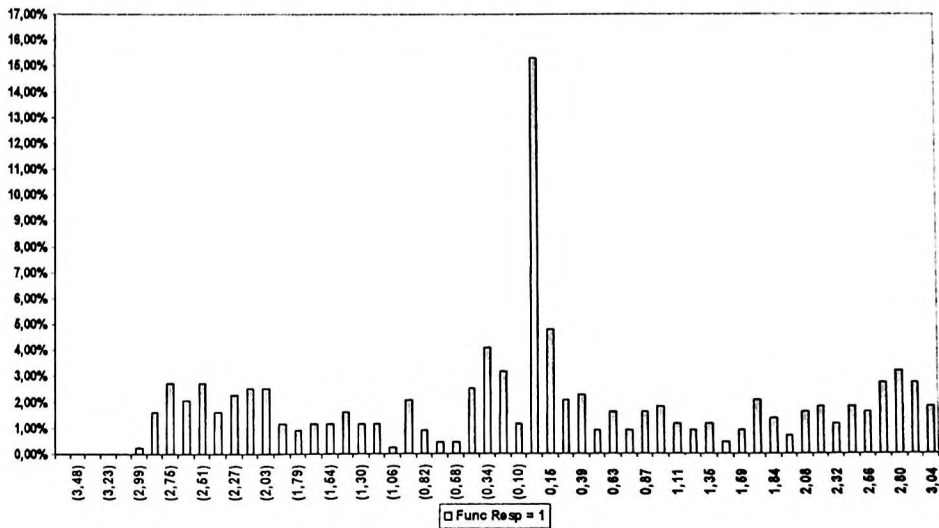


Gráfico 60 - Histograma dos Retornos – Série Função Resposta = 1,00

Vejam como a introdução das “funções respostas” alterou a estrutura do *smile*. É válido lembrar que, esse *smile* apresentado aqui, é extraído da própria distribuição e sendo assim, é diferente de uma *smile* de volatilidade implícitas.

O primeiro gráfico abaixo, onde usamos o conceito de prêmio limpo, isto é, para chegarmos ao valor da volatilidade implícita, usamos apenas o valor no tempo de uma opção. Já no gráfico mais abaixo, usamos o conceito de prêmio total, onde usamos o valor total da opção, isto é, não descontamos o valor intrínseco da opção para chegarmos a uma volatilidade implícita. Sendo assim, no gráfico logo abaixo, para *strikes*, com valores menor do que o *forward* há um decremento no valor da volatilidade implícita. Por sua vez, no gráfico mais abaixo, o valor da volatilidade implícita é crescente, dado que o valor intrínseco da opção de uma *call* vai crescendo à medida que vamos entrando na *moneyness*.

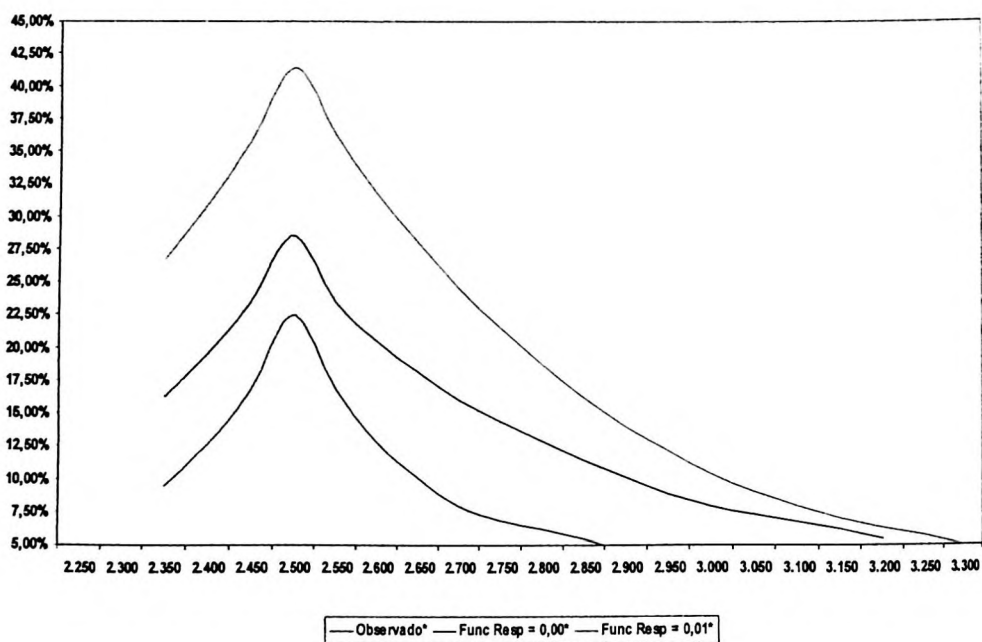


Gráfico 61 – Volatilidades Implícitas

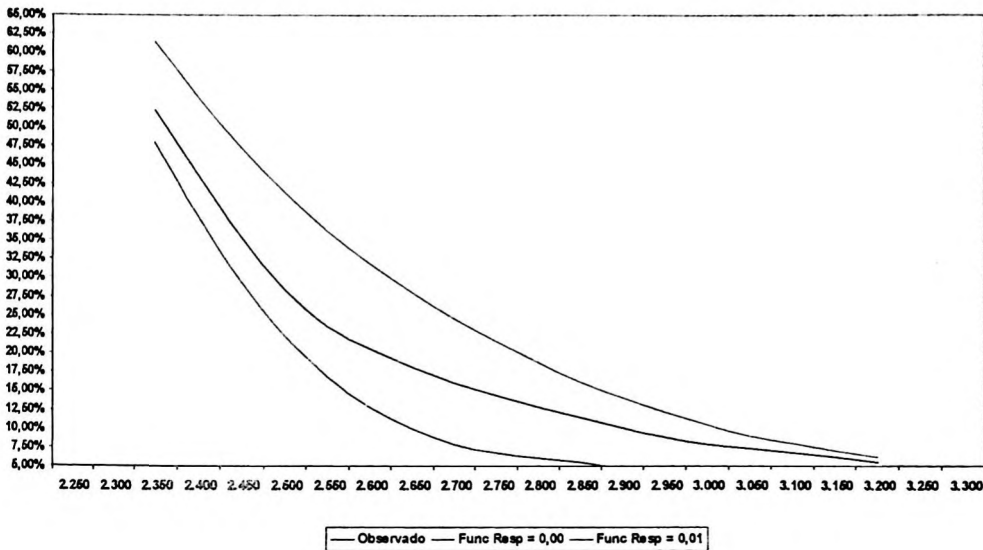


Gráfico 62 – Volatilidades Implícitas

d.) Conclusão

O interessante de se notar em ambos os casos, é que com a introdução da “função resposta”, houve, como já tínhamos visto em relação à diferença da série (volatilidade medida através do desvio padrão), um aumento na volatilidade implícita das opções *at-the-money*. Isto está associado ao efeito da intervenção do Banco Central, que à medida que ele intervém, ele altera de alguma maneira a expectativa dos agentes econômicos e assim, distorce a própria distribuição de probabilidade da série, fazendo com que valores próximos da paridade central m fiquem com volatilidade significativamente maiores. Claro que durante esse processo de intervenção o Banco Central também aumenta a volatilidade dos outros tipos de opções, *out-of-the-money* e *in-the-money*. Contudo, como podemos observar pelos gráficos 61 e 62 ao redor dos *at-the-money* o efeito é mais pronunciado. Além do mais, como sabemos opções *at-the-money* tem os maiores vegas, gamas e tetras. Dessa forma, garantindo o maior impacto possível.

Uma outra conclusão interessante, é que o valor realmente observado no mercado, ficou no meio daquilo que seria uma distribuição teórica correta (distribuição normal – sem

nenhum fator humano para distorcê-la) e aquilo que seria uma distribuição com intervenções. Logo, podemos entender esse fato como sendo um prêmio adicional que o mercado cobra em cima daquilo que seria um “preço justo” – dada a distribuição de probabilidade subjacente do ativo em questão. Assim, quando há intervenções por parte do Banco Central, existe um extra-prêmio, porque a própria volatilidade do mercado vai elevar-se e conseqüentemente a volatilidade implícita também.

Além disso, repare que, quando há intervenção a probabilidade de ocorrência da paridade central m aumenta e logo, o valor da volatilidade implícita para esse *stike m* também. Assim como os extremos da distribuição também tem a sua probabilidade de ocorrência majorada. Desta maneira, no limite, o que vemos é que as caudas ficam cada vez mais “gordas” e assim como a curtose fica proeminente.

Já para classificarmos a melhor forma de intervenção devemos dividi-la em dois aspectos, isto é, em percentual de sucesso (entendido como sendo o número de vezes que uma vez feita a intervenção, esta apresenta um resultado positivo, dividida pelo numero total de intervenções) e em percentual de intervenções (numero de vezes que o Banco Central interveio no mercado, dividido pelo numero de observações). Assim temos as seguintes situações representadas na tabela abaixo.

% Sucesso				
Volatilidade\Delta	10%	25%	50%	75%
Alta	94,80%	96,00%	78,00%	69,40%
Baixa	98,40%	97,60%	97,20%	96,80%

% Intervenção				
Volatilidade\Delta	10,00%	25,00%	50,00%	75,00%
Alta	19,14%	19,14%	19,14%	19,14%
Baixa	11,59%	11,59%	11,59%	11,59%

Tabela 1 – Resultados das Intervenções

Graficamente temos

³⁶ Aqui devemos lembrar que o termo volatilidade baixa foi fixada em 6%a.a. e alta em 12%a.a.

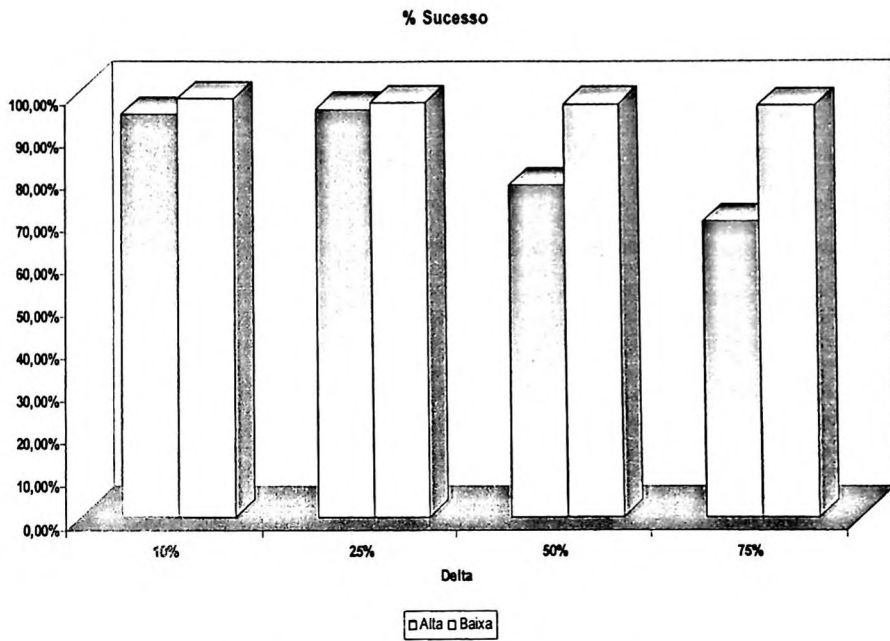


Gráfico 63 – Percentual de Sucesso das Intervenções

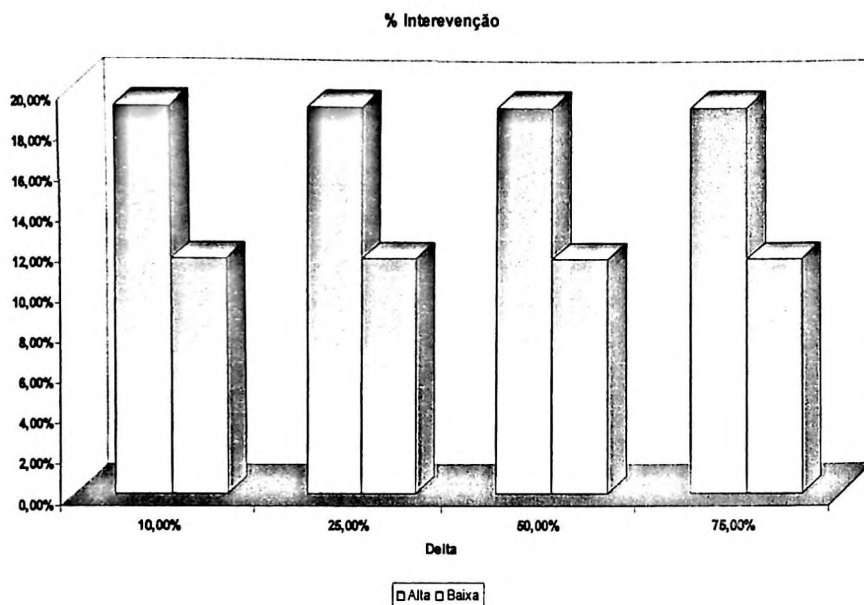


Gráfico 64 – Percentual de Intervensões

Assim para definirmos qual é o melhor cenário, ou seja, qual deve ser a política ótima de intervenção do Banco Central usando opções, antes de decidir qual a opção que ele vai usar, é preciso definir em qual volatilidade o mercado esta trabalhando. Podemos convencionar que, quando há uma baixa volatilidade, existe uma propensão marginal a não atuar no mercado de câmbio, visto que se a autoridade monetária tem como meta a manutenção do valor da moeda e quando o Banco Central intervém, há um aumento na volatilidade, devemos esperar que não existam intervenções quando o mercado estiver operando com volatilidade baixa – evitando dessa forma introduzir volatilidade, mas de qualquer forma, é necessária a verificação do nível de volatilidade, porque os resultados obtidos são diferentes. Claro que, o que realmente importa nesse quesito volatilidade não é a volatilidade corrente do mercado, mas sim qual será a volatilidade que vai ser observada durante o período da intervenção até o vencimento da opção. Logo, há um componente de avaliação de risco do cenário futuro para a tomada de decisão quando da intervenção³⁷.

³⁷ Vale lembrar aqui do principio da incerteza de Heisemberg: “Quanto mais precisa for a posição de uma partícula, menos exato é o seu *momentum* e vice-versa”. Só de se fazer a mensuração da posição e do

Ainda, devemos definir qual o tipo de variável que queremos maximizar, isto é, queremos uma maior ou menor número de intervenções? Parece ser razoável supor que um número menor de intervenção é o mais desejável. Logo partindo desse pressuposto, devemos procurar qual situação no leve a maximização do resultado do Banco Central. Seguindo essa regra, temos que a política ótima de intervenção no mercado de câmbio pro parte do Banco Central é quando o mercado estiver operando com uma volatilidade baixa, usar a estrutura de 10% delta. Isto porque, como estamos em um cenário de baixa volatilidade, a probabilidade de ocorrência de valores extremos passa a ser pequena, logo se o Banco Central vende opções que dificilmente vão dar exercício, ele embolsa todo o prêmio com uma frequência alta e em alguns poucos casos ele perde. Já em um cenário de volatilidade alta, a política ótima por parte do Banco Central é vender opções com 25% de delta. Aqui, o resultado da venda de 25% delta e 10% delta são próximos, mas a explicação para haver uma melhor performance da 25% delta são os eventos raros. Isto é, em um cenário de volatilidade alta, as caudas ficam mais “gordas”, assim a probabilidade de ocorrência desses eventos passa a ser maior e, além disso, quando estes ocorrem a magnitude é elevada, fazendo com que a partir de um determinado ponto na distribuição passe a ocorrer rendimentos decrescentes por parte do Banco Central³⁸. Essa questão pode ser explicada através da assimetria, ou seja, não importa com qual frequência o Banco Central ganhe, quando há um evento qualquer, que faça com que a paridade central m seja abandonada, o resultado esperado nesse cenário vai ser negativo. Para testar e verificar essa hipótese do efeito *assimetria*, teríamos que fazer uma análise de valores extremos, tendo como objetivo quantificar esse comportamento estocástico da realização do processo para valores tão grande. Infelizmente esse teste está aquém daquilo que o nosso trabalho procurou estudar.

momentum o observador estará influenciando-os e assim, não será possível quantificar com exatidão essa duas variáveis.

³⁸ Podemos explicar essa ocorrência dos eventos raros, com a estória do cisne preto. Em seu “*Treatise on Human Nature*” o filósofo escocês David Hume colocou a seguinte situação (re-escrito por John Stuart Mill como sendo o problema do cisne negro): Nenhuma quantidade suficientemente grande de observações feitas da existência de cisnes brancos, permite-nos fazer a inferência de que todos os cisnes são brancos, contudo basta apenas uma observação de um cisne negro, para refutarmos essa conclusão. Logo, essa necessidade moderna de realizar testes e colocar uma ênfase nas observações empíricas, pode nos levar a conclusões incorretas. Assim sendo, o que Hume quer nos dizer é que, o simples exercício de simulação e indução científica, não extingue a possibilidade de em algum momento, essa teoria ou conclusão poder ser refutada. Dessa forma, aqui no nosso exercício, como pode ser visto nas simulações, os cisnes negros ocorrem e por mais testada que a teoria esteja, esse evento raro pode levar a resultados desastrosos.

Como vimos, a solução do nosso problema tem dois resultados possíveis. Desta forma, como no nosso exemplo trabalhamos apenas no espaço discreto, caso façamos essa mesma análise em um espaço contínuo de eventos, isto é, infinitos cenários de volatilidade possivelmente encontraríamos equilíbrios múltiplos, ou seja, a solução depende do cenário que o Banco Central acredita que vai ocorrer a partir do momento da sua intervenção.

CAPÍTULO V

Metas de Inflação e Controle Cambial

Iremos fazer nessa parte do trabalho, uma breve introdução do tema metas de inflação e comentar alguns de seus aspectos teóricos, bem como a relação com o controle cambial - resultando no pano de fundo do nosso projeto.

Sem sombra de dúvida, o desenvolvimento mais marcante da política monetária nos últimos anos foi à adoção em “larga-escala” do *inflation-target* (*metas de inflação*) por um numero crescente de países. Como o próprio nome sugere, esse procedimento consiste pelo anúncio de uma meta oficial para a inflação durante um determinado horizonte temporal. Desta maneira, o que se procura é dar mais transparência e credibilidade³⁹ para a política monetária, bem como também produzir uma inflação consistentemente estável e baixa por um período longo de tempo. Fixar uma meta quantitativa *à priori*, em última instância nos dá uma medida de performance da política monetária *ex post*, isto é, inflação realizada contra a inflação da meta. Genericamente, metas de inflação podem servir como um mecanismo de comprometimento público, por parte da autoridade monetária, reduzindo ou eliminado qualquer tipo de viés inflacionário e aumentando a probabilidade de se alcançar e manter a inflação estável e baixa, bem como ancorar e também estabilizar as expectativas inflacionarias.

Podemos citar alguns países que adotaram o sistema e comparar o desempenho em relação à taxa de juros, taxa de crescimento e inflação.

³⁹ Na forma da expectativa de inflação em relação à inflação da meta.

Países - Período	Taxa de Juros		Taxa de Crescimento		Inflação	
	Média	Desvio-Padrão	Média	Desvio-Padrão	Média	Desvio-Padrão
Inglaterra						
1980-1989	11,61	2,39	2,41	2,45	7,07	4,59
1992-2001	6,07	1,47	2,66	1,13	2,81	0,73
Canadá						
1980-1989	11,43	3,40	2,90	2,44	6,51	3,29
1992-2001	5,02	1,25	3,15	1,52	1,68	0,75
Nova Zelândia						
1980-1989	15,99	4,61	2,66	2,28	11,88	8,22
1992-2001	7,56	1,95	3,19	1,87	2,01	0,52
Chile						
1980-1989	29,61	14,12	3,73	7,06	21,37	7,58
1992-2001	13,57	5,66	6,19	3,77	7,71	4,19
México						
1990-1994	14,08	2,31	3,86	1,17	16,34	8,34
1997-2001	8,94	5,71	4,48	2,84	13,82	5,71
Brasil						
1996-1997	25,08	6,50	3,00	0,42	7,39	3,07
2000-2001	17,13	1,29	3,10	1,84	6,82	1,20

Tabela 2 – Desempenho do *Inflation Target*

Como pode ser observado pela tabela acima, no sistema de metas de inflação, a experiência dos países analisados mostra que todos têm apresentado (durante o período de análise acima) uma melhora na performance da inflação, ou seja, o nível médio e a variabilidade da inflação tem reduzido substancialmente e isto não está associado a um maior custo do PIB, uma vez que para a maioria dos países, o nível médio de crescimento do PIB aumentou e a variabilidade foi reduzida⁴⁰.

Lógico que não podemos achar que os dados acima põem um ponto final sobre a discussão a respeito do *inflation target*. Ainda que os fatos empíricos nos levem a concluir que, exceto o México, os demais países tenham tido um melhor desempenho geral, o próprio caso mexicano deve-nos levar a fazer uma reflexão crítica sobre essa aparente melhora.

Veja na seqüência de gráficos abaixo os desempenhos dos seis países mencionados nos últimos quatro anos, de acordo com PIB, taxa de inflação e taxa de juros.

⁴⁰ Aparentemente, esse fato empírico não aconteceu no caso mexicano, durante o período de análise, onde o maior crescimento econômico está associado com uma maior variabilidade da taxa de juros.

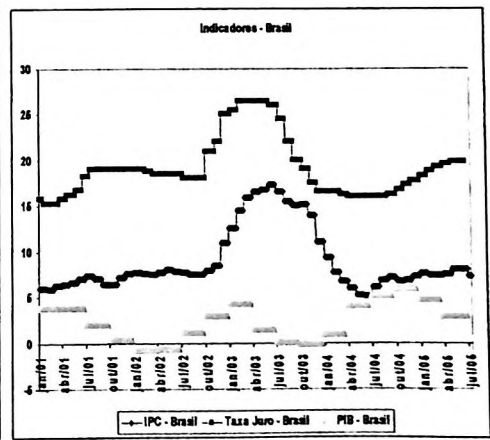
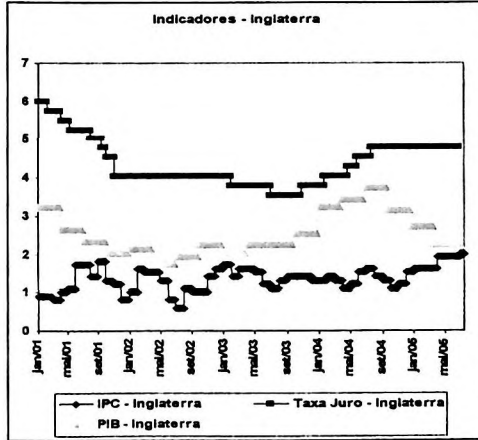
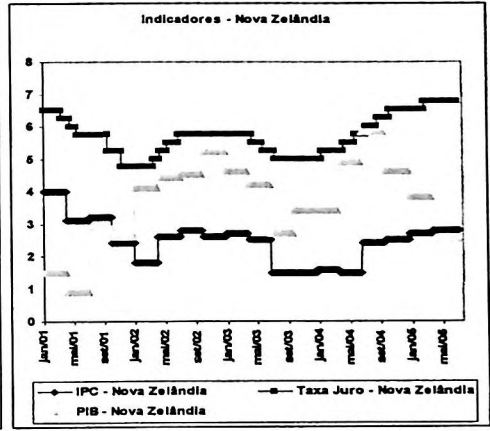
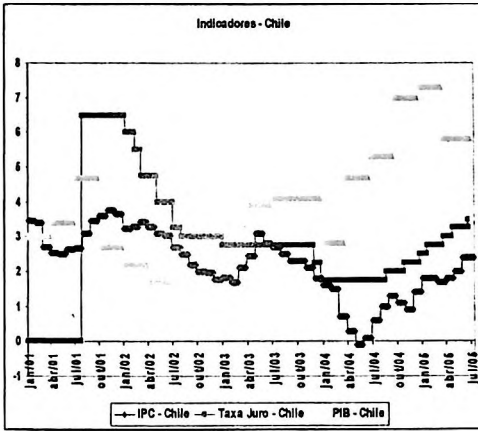
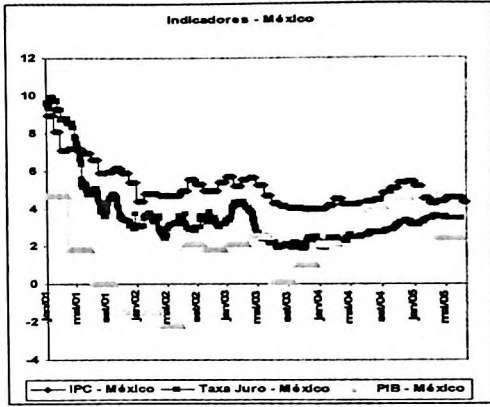
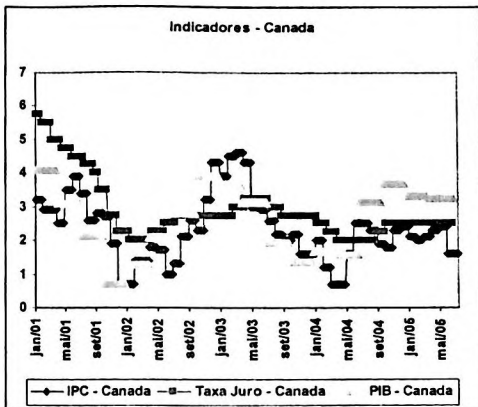


Gráfico 65 – Gráfico dos Desempenhos

Além disso, o próprio processo de metas de inflação, tem as suas dificuldades em relação à implementação e monitoramento. A implementação por si só, já é uma tarefa difícil, se levarmos em consideração que a autoridade monetária tem um controle imperfeito sobre a inflação corrente. A inflação corrente depende essencialmente de decisões prévias e contratos já firmados, o que significa que a autoridade monetária pode somente influenciar a inflação futura. Devemos lembrar que existem *lags*, isto é, o efeito de uma mudança na política monetária, leva um certo tempo pra se fazer sentir e em decorrência disto, outras variáveis atuando concomitantemente à política monetária, deixam a implementação da política ótima de fixação da taxa de juro nominal de curto prazo ser uma tarefa de difícil execução e controle.

A política monetária tem um papel importante na determinação da taxa de inflação e do hiato do produto. As autoridades monetárias devem escolher a trajetória temporal da taxa de juro nominal que melhor se enquadre nos objetivos de estabilidade de preços (primeiramente) e crescimento do produto (como uma consequência da primeira).

Para controlar a taxa de inflação, a autoridade monetária tem que ter um certo grau de independência em relação ao poder político. Política monetária independente implica que a autoridade monetária pode escolher as suas metas (primordialmente inflação, mas pode ser também crescimento e emprego) e também os instrumentos para atingir essas metas. O instrumento mais comum usado em política monetária é a taxa de juros nominal de curto prazo.

Fixar uma taxa de juro nominal de curto prazo para influenciar a taxa de inflação é uma tarefa complexa. Em um determinado momento no tempo, é necessário ter algum grau de discricionariedade para responder as mudanças no ambiente macroeconômico. Por outro lado, se não houver uma regra fixa de atuação não é possível, para o *policy maker* ganhar credibilidade e conseqüentemente construir uma reputação que o ajude a manter as expectativas de inflação baixas. Esse debate em torno da regra fixa atuação versus discricionariedade é crucial na condução da política monetária. De maneira geral, estudos recentes⁴¹ chegam à conclusão de que, para a política monetária ser eficiente, a credibilidade da autoridade monetária tem que ser incontestável.

⁴¹ Ver Kidland, Finn E. e Edward C. Prescott (1977). "Rules Rather than Discretion: the Inconsistency Of Optimal Plans." *Journal of Political Economy*, vol 85, pp. 473-491.

Ver Barro, Robert J. e David B. Gordo (1983). "A Positive Theory of Monetary Policy in a Natural Rate Model." *Journal of Political Economy*, vol 91(4), pp.589-610.

A questão da credibilidade surge porque se tem um sistema de duas mãos, onde o equilíbrio é dinâmico e muitas vezes pode tornar-se instável: por um lado é verdade que a autoridade monetária responde a mudanças na expectativa de inflação dos agentes do setor privado, via uso dos instrumentos de política monetária. Porém, na contra-mão desse movimento, o comportamento do setor privado é também dependente em como o curso da política monetária é percebido pelos agentes econômicos e nas expectativas que são formadas a respeito da política monetária futura. Sendo assim, as expectativas de inflação baixa não devem usadas pela autoridade monetária para perseguir uma política monetária expansionista visando um crescimento mais rápido do produto interno bruto. Caso isso aconteça, o público não irá esperar uma inflação baixa futura, implicando em uma inflação mais alta como resultado, sem necessariamente haver um ganho no PIB.

Esse jogo entre a autoridade monetária e os agentes privados não leva a um resultado ótimo; se o *policy maker* decide anunciar que a inflação será algum valor baixo e os agentes privados ajustam suas expectativas de acordo, o *policy maker* pode em algum momento desviar-se da meta, uma vez que as expectativas estão fixas, para ter um ganho adicional no PIB, ou seja, ele quebra a sua política para buscar um ganho em bem-estar social. Entretanto, o setor privado não irá manter a sua expectativa constante, como resultado da mudança de comportamento por parte da autoridade monetária em permitir uma inflação mais alta. Logo, sob uma ótica de discricionariedade, existe um viés “inflacionário” e por assim ser, a política monetária será inconsistente.

Por sua vez, o comprometimento em relação a uma meta fixa, leva a uma política monetária crível. De uma maneira geral, regras tendem a controlar um processo inflacionário. Contudo, parece-nos que, esse comprometimento não deve ser incondicional. Deve haver espaço para alguma flexibilização para fazer frente a um evento não esperado⁴².

Podemos classificar em dois tipos, as regras para a definição da trajetória da taxa de juros ao longo do tempo:

- a.) Regras ótimas, que são obtidas através da solução de um modelo de otimização intertemporal estocástico;

⁴² De acordo com Rogoff(1985), o comprometimento não vem apenas na forma da determinação em um valor para a taxa de juros nominal de curto prazo, mas pode também vir da “delegação”, isto é, se a autoridade monetária é reconhecida por ser “*averse to inflation*” e os agentes privados sabem que a autoridade monetária age de forma independente, isso pode ser suficiente para resolver o problema da inconsistência dinâmica. De acordo com ele, a questão a ser solucionada é da credibilidade.

- b.) Regras de Taylor ou regras de fixação de taxa de juros não ótimas, que fazem a ligação entre taxa de juros à inflação esperada e o hiato do produto⁴³.

No caso brasileiro, o CMN (Conselho Monetário Nacional) fixa a meta de inflação e cabe ao BCB (Banco Central do Brasil) executar a política monetária ótima, de maneira a cumprir a meta.

No nosso projeto, temos que basicamente observar como é que a dinâmica da inflação está sendo alterada, não importando qual é a fonte primária do choque, se é, por exemplo, a atuação do governo – promovendo uma política fiscal expansionista ou se vem do setor externo.

A inflação teoricamente depende de três conjuntos de fatores. Primeiro, depende da relação que se estabelecerá entre as três variáveis nominais da economia: salários, preços e taxa de câmbio. Segundo depende da ocorrência de novos choques autônomos de preços, positivos ou negativos. Terceiro, depende do grau de acomodação monetária que o governo optar por fazer. Não vamos entrar aqui na relação preços-salários e mecanismos de indexação, apesar de ser um conjunto importante.

Porém, o que realmente nos interessa é a relação preços-taxa de câmbio.

Devemos notar que uma desvalorização nominal, por maior que ela seja, pode não ter efeitos reais permanentes se a inflação continuar a levar os preços domésticos para cima.

Neste campo temos duas situações a analisar. A situação de repasse dos aumentos de custos aos preços nos mercados de bens. Esta é objeto de muita análise e há um acompanhamento rígido desta variável, através dos índices de inflação. Agora, a situação que é de difícil análise é a das expectativas, ou seja, a relação entre inflação esperada e depreciação/apreciação cambial. Podemos supor um contexto de perfeita mobilidade de capital e então, o equilíbrio no mercado de câmbio exige que a taxa esperada de depreciação/apreciação seja igual ao diferencial de juros interno-externo, uma vez considerado o elemento risco soberano. Assim, como a taxa de juro nominal interna reflete a expectativa de inflação, tudo mais constante, a taxa esperada de depreciação/apreciação deve mover-se direta e proporcionalmente a ela. Logo, caso as expectativas de inflação aumentarem, as expectativas de depreciação real terão que aumentar, para equilibrar o mercado de câmbio. Vale ressaltar que a dinâmica câmbio-preços é praticamente instantânea.

⁴³ Regras de Taylor são consideradas com sendo não-ótimas, porque a trajetória da taxa de juros nominal de

Como acomodação monetária podemos entender os dois instrumentos que o BC tem a sua disposição: mudanças na taxa de juro básica da economia e intervenções no mercado cambial. É aqui que verificamos qual deve ser o rumo escolhido pelo governo: mais inflação com menos crescimento, ou menos inflação com mais crescimento. Embora haja uma grande discussão nos meios académicos e políticos sobre essa questão, nos parece razoável que a autoridade monetária tenha que escolher entre essas duas opções. Parece também muito razoável, que a escolha feita pela autoridade monetária esteja ancorada em algum tipo de meta pré-estabelecida pelo *policy maker*. Deixando, dessa maneira a discricionariedade de lado por parte da autoridade monetária, como vimos acima. Logo, para alcançar a meta de inflação pré-estabelecida pelo CMN, o único instrumento que o BCB possui é a taxa de juros de curto prazo.

Neste contexto, nos moldes como nós configuramos o presente trabalho, o BCB teria mais um instrumento de auxílio para perseguir a meta de inflação. Dessa maneira, o controle da taxa cambial, de modo indireto via o canal da expectativa inflacionaria, atuaria como um mecanismo paralelo à taxa de juro nominal de curto prazo. Teoricamente, fazendo com que as reações da política monetária sejam, por assim dizer, menos “duras” – buscando um maior bem-estar social. Sem ter o ônus da perda da credibilidade na perseguição da meta fixada.

O BCB também deve preocupar-se em determinar exatamente qual tipo de inflação é que está ocorrendo no sistema económico. Lógico que apesar da inflação verificada (pós 2002) não ser de demanda, um aumento nas taxas de juros irão acarretar uma valorização cambial via mecanismo de recomposição de portfólios globalmente. Um aumento na taxa de juro fará com que os ativos em reais tornem-se mais vantajosos em detrimento aos ativos em moeda estrangeira.

Um mecanismo que seria interessante de compreendermos é o de transmissão de política monetária, ou seja, como o aumento de juros básico é propagado ao longo de toda a cadeia produtiva da economia, ou ao longo de todos os setores, com o intuito de frear a inflação (figura 1).

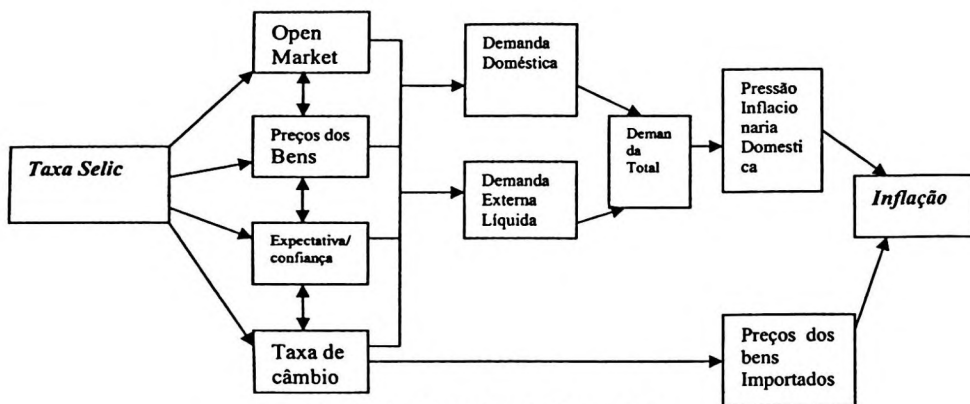


FIGURA 1 – Mecanismo de Transmissão

Nota: Por questão de simplicidade da figura, não foram colocadas todas as interações entre as variáveis.

O primeiro impacto acontece no “*Open Market*”, é justamente neste segmento de mercado que ocorre a interface entre o mercado financeiro e o governo, no quesito taxa de juros. Uma vez ocorrido o aumento na taxa de juros, o “*Open Market*” é afetado via taxa de empréstimos do BCB (taxa Selic⁴⁴), taxa de captação de CDB, mercado futuro de taxa de juro, etc. Obviamente que este impacto não é linear e não é o mesmo para os vários ativos que são negociados no mercado. Simultaneamente, o aumento da taxa de juro promovido pelo BCB afeta direta e indiretamente as expectativas dos agentes econômicos em relação ao futuro da economia e da trajetória da curva de juros e conseqüentemente a confiança dos indivíduos. Também temos que considerar o impacto da taxa de juros no mercado de ativos, tais como o mercado de bolsa (o aumento da taxa de juro teoricamente faz com que o preço dos papéis listados em bolsa caia⁴⁵) e na taxa de juros (provoca uma apreciação da moeda⁴⁶).

Numa segunda rodada, as alterações descritas acima provocam uma queda no consumo e logicamente um aumento da poupança, mantendo-se tudo o mais constante. E como a

⁴⁴ É a taxa básica da economia. Selic é a abreviação para Sistema Especial de Liquidação e Custódia. É neste sistema que ocorrem os registros dos negócios relativo a títulos públicos federais, que é o principal instrumento de negociação das instituições financeiras com respeito ao seu caixa.

⁴⁵ O aumento da taxa de juro provoca uma diminuição no valor presente das empresas, porque aumenta a taxa de desconto, no qual é calculado o valor presente das ações. Lembre que as receitas futuras das empresas são descontadas por uma taxa maior.

⁴⁶ Uma taxa de juro mais alta, faz com que investidores internacionais saiam de suas posições em outras moedas, por exemplo venda de ações da Microsoft no mercado americano, e venham assumir posições em moeda nacional, por exemplo compra de uma LTN (Letra do Tesouro Nacional). Sendo assim, ele vende seu papel de Microsoft recebe dólares, ele vem para o Brasil, vende dólares e compra real, depois compra a LTN

moeda nacional ficou mais cara internacionalmente, os bens produzidos fora do país ficaram mais barato. Portanto, o aumento da taxa de juro acarreta uma mudança na demanda por bens e serviços dentro do país.

Na terceira rodada, o nível da demanda em relação à capacidade da oferta doméstica (mercado de trabalho⁴⁷) é um ponto crucial para a detonação do processo inflacionário, admitindo que haja uma pressão na demanda.

Já na quarta rodada, o movimento da taxa de câmbio tem um efeito direto, mesmo que seja defasado, sobre o preço doméstico de bens e serviços importados e um efeito indireto nos preços daqueles bens e serviços que usam matérias-primas e componentes importadas, e assim tem-se o efeito total na inflação causado pelas importações.

De acordo com Goldfajn e Gupta(1999) o ponto crucial no pós desvalorização é o aperto monetário. Eles mostraram que o aperto monetário facilita a inicialização da reversão da desvalorização da moeda via apreciação nominal da moeda e este movimento é preferível do que uma correção real via inflação, que seria o outro modo de se realizar esta correção. Esta relação entre aperto monetário e apreciação cambial tem uma vasta literatura e é motivo de um grande debate no meio acadêmico econômico⁴⁸.

Ainda neste mesmo trabalho, os autores mostraram que uma política de juro alto aumenta a probabilidade de sucesso no controle da desvalorização. Um exemplo citado é que a partir de uma subvalorização maior de que 15% , a probabilidade de sucesso (apreciação nominal da moeda ao invés de correção real via inflação) sai de 26% e vai para 37%, quando o aperto monetário é utilizado, desconsiderando-se o risco de crise sistêmica (falências de bancos).

Não podemos perder de vista que todas estas mudanças acarretam em deslocamentos nas variáveis macroeconômicas importantes, ou seja, no intuito de estabilizar ou promover uma reversão na tendência de depreciação via aumento de taxa de juros. Gera-se um efeito colateral destas mudanças.

para aproveitar o aumento na taxa de juros. Neste mecanismo, ele vende dólares, provocando uma maior oferta da moeda americana e conseqüentemente provoca a apreciação da moeda nacional.

⁴⁷ Por exemplo, se a demanda por trabalhadores exceder a oferta, as empresas terão que pagar salários mais altos para terem trabalhadores. Como há uma pressão nos salários, as empresas tentarão repassar estes aumentos de custo(salário) aos preços, repondo a sua margem.

⁴⁸ Veja Krugman(1998), Sachs e Radelet(1998), Stiglitz(1998). Goldfajn e Baig(1998) e Goldfajn e Gupta(1999) resumiram este debate e apresentam os principais pontos teóricos.

Nesta linha o Banco Central da Inglaterra⁴⁹ estima que o efeito de um aumento nas taxas de juros surtam efeito sobre o PIB do país com uma defasagem de aproximadamente um ano e na inflação de aproximadamente dois anos.

Em relação à magnitude deste efeito, estima-se que o aumento na taxa de juros em um ponto ao ano, temporariamente, cause uma redução no nível da atividade da ordem de 0.2% a 0.35% depois de um ano, e na inflação o efeito é uma redução da ordem de 0.2% a 0.4% depois de um ano ou mais.

Como podemos observar, o controle da taxa de câmbio é de fundamental importância na manutenção das expectativas inflacionárias e, portanto, na expectativa de taxa de juros o que no limite ditará a taxa de crescimento do país. E no âmbito político, o controle do câmbio dará o grau de sustentabilidade e aprovação de um governo. Temos um histórico recente como fonte de dados empíricos, onde houve o chamado “populismo cambial”.

⁴⁹ No estudo “*The transmission mechanism of monetary policy*”.

CAPÍTULO VI

Conclusão Final

O trabalho tinha como proposta inicial a apresentação de um modelo matemático para controle da taxa de câmbio em um contexto de metas de inflação. Nesse sentido, no esforço para tentar chegar à solução desse problema, passamos por uma série de testes e apresentações de conceitos e teorias com o intuito de fazer a ligação entre esses dois temas, ao mesmo tempo distantes e tão próximos.

Para efetuarmos o controle estocástico da taxa de câmbio, nós propusemos que fosse utilizada opções de compra e venda de moeda estrangeira e que caberia ao Banco Central do Brasil a fixação de uma paridade central m . Vimos que, à medida que o BCB realiza as intervenções, no limite, ele acaba distorcendo a distribuição de probabilidade do processo do ativo base, além de aumentar a volatilidade implícita das opções *at-the-money* no mercado. Como política ótima de intervenção, concluímos que, depende do nível de volatilidade que o BCB estiver trabalhando para o período de intervenção. Assim, dado esse cenário, o tipo de opção (delta da intervenção) é determinado. Assumimos que o mercado não sabe *à priori* qual é essa política ótima.

Em fazendo o processo de controle da taxa de câmbio, ele estará garantido a estabilidade do valor da moeda local em relação à moeda estrangeira e conseqüentemente, por vias indiretas, mantendo a taxa inflação local dentro de uma certa região previamente estabelecida e crível. Evitando, dessa maneira em alguns casos, oscilações desnecessárias na taxa de juro nominal de curto prazo local, levando o PIB a ter uma trajetória mais estável. Produzindo assim, um nível de bem-estar social mais elevado.

CAPÍTULO VII

Possíveis extensões de pesquisa

Imaginamos que podem haver duas linhas de pesquisas futuras para estudar mais profundamente as implicações do controle que nosso trabalho propôs.

A primeira linha de pesquisa esta mais ligada ao controle estocástico da taxa de câmbio, isto é, analisar como esse sistema que nos montamos funciona sob a hipótese de ocorrer eventos raros. Uma análise de valores extremos pode ser feita no resultado do Banco Central.

A segunda linha trata da teoria dos jogos, isto é, será que existe um equilíbrio de Nash ou existe um ponto de Pareto ótimo? Será que existe uma política ótima independentemente do cenário de volatilidade futura?

Apêndices

Apêndice A

O lema de Itô é uma ferramenta importante no apreçamento das opções. Nesse apêndice, gostaríamos de apresentar de maneira sucinta algumas definições, sem entrarmos em muitos detalhes matemáticos.

A essência do método de Ito é que existe uma função de uma *random walk* que é diferenciável e sem descontinuidades. Podemos definir a variável *random walk* como sendo:

$$\begin{aligned}\Delta W &= W(t + \Delta t) - W(t) \\ &= \mu(W, t)\Delta t + \sigma(W, t)\Delta Z,^{50} \quad (1)\end{aligned}$$

com $\Delta Z = \sqrt{\Delta t}U_t(0,1)$, $U_t(0,1)$ é um processo i.i.d. seguindo uma distribuição normal com média 0 e variância unitária.

Temos que:

$$E(\Delta W) = \mu\Delta t, \quad E(\Delta Z) = 0$$

$$Var(\Delta W) = E[(\Delta W) - E(\Delta W)]^2 = E[0 + \sigma^2\Delta t U^2], \text{ logo}$$

$$Var(\Delta W) = \sigma^2\Delta t$$

Gerando a seguinte matriz de multiplicação de Ito:

	dt	dW
dt	0	0
dW	0	$\sigma^2 dt$

Dessa maneira podemos reescrever a equação (1) como sendo o processo de Itô:

$$dW = \mu(W, t)dt + \sigma(W, t)dZ \quad (2)$$

⁵⁰ Essa equação nos diz que uma mudança em W, num intervalo Δt , é composto de um *drift* e um elemento estocástico e sua magnitude é determinado por sua variância.

Devemos lembrar que a eq (2), é uma integral estocástica e não uma equação diferencial parcial, como parece ser.

Considere $F(W, t)$ como sendo um ativo qualquer que dependa do valor W e do tempo t . Expandido a eq(2), temos que (aproximação de segunda ordem):

$$dF \cong \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial W} dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial W^2} (dW)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial W \partial t} (dW dt) \quad (3)$$

Aplicando um pouco de calculo estocástico a eq (3), vira:

$$dF \cong \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial W} dW + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial W^2} (dW)^2 \quad (4)$$

$$dF \cong \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu(W, T) \frac{\partial F}{\partial W} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial W^2} \sigma^2(W, t) \right] dt + \frac{\partial F}{\partial W} \sigma(W, t) dW \quad (5)$$

Podemos perceber como a eq.(5) pode ser vista como sendo a equação de *Black-Scholes*.

Considere que $\frac{dS}{S}$ é um processo de Itô.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ \quad (6)$$

Olhe o processo do $\log dS$ com a ajuda da transformação de Itô:

$$d \log S = \frac{dS}{S} + \frac{(dS)^2}{2S^2} \text{ e como } \left(\frac{dS}{S} \right)^2 = (\mu dt + \sigma dZ)^2 = \sigma^2 (dZ)^2 = \sigma^2 dt$$

$$d \log S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW$$

$$\log S_t - \log S_{t_0} = \int_{t_0}^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dr + \sigma \int_0^t dW_r$$

$$\log S_t - \log S_{t_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma (W_t - W_{t_0})$$

$$S_t = S_{t_0} e^{\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma (W_t - W_{t_0})} \quad (7)$$

A eq.(7) é largamente usada nos livros textos de finanças para fazer o apreçamento das opções. Além disso, a eq.(7) satisfaz

$$E_0(S_t) = S_{t_0} e^{\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma u} n(u) du \quad (8)$$

$$E_0(S_t) = S_{t_0} e^{\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - t_0)} e^{\frac{1}{2} \sigma^2 (t - t_0)}$$

uma vez que a integral da eq.(8) é a função geradora de momentos M da distribuição *Gaussiana*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma u} n(u) du = M_{\sigma \sqrt{(t-t_0)}}(u) = e^{\sigma^2 (t-t_0)}$$

assim,

$$E_0(S_t) = S_{t_0} e^{\mu(t-t_0)} \quad (9)$$

Com os resultados acima podemos tirar as seguintes conclusões:

- Usando o argumento de Black-Scholes(1973) da *delta-neutralidade*, levando-nos a ignorar a curva de utilidade dos *players* e algum prêmio de risco, pode-se estabelecer que $\mu = r$;
- Um método mais moderno de apreçamento consiste em usar a generalização de Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981), que nos permite estender o argumento acima para qualquer *contigent claim*, sob algumas condições de *market completeness* que pode ser resumido como sendo o seguinte: permite a réplica perfeita através do *hedge* dinâmico;
- Outro método, como Feynman-Kac, que está sendo usado ultimamente nas aulas de finanças permite a integração do Lema de Itô e assim derivar um processo para o ativo base, sob a hipótese *neutralidade ao risco*. A solução de Feynman-Kac de uma equação diferencial estocástica, como sendo a esperança probabilística de uma função, permite-nos usar métodos probabilísticos e não equações diferenciais parciais para resolver uma gama de problemas de apreçamento de opções. Dessa maneira, podemos chegar ao preço de uma opção dependente da trajetória como sendo a expectativa do *payoff* no vencimento, assumindo que o preço do ativo segue uma difusão neutra ao risco.

Apêndice B

Como todo o trabalho proposto nessa tese usa de conceitos de opções, achamos interessantes apresentar alguns de uma maneira mais intuitiva, do que com uma formulação matemática rigorosa.

- **Delta:** significa a sensibilidade do preço do derivativo em relação ao movimento no ativo base. Pode ser expresso tanto em porcentagem quanto em quantidade. Por exemplo, 50% delta significa que o derivativo tem metade da sensibilidade do ativo base em relação a algum movimento. Matematicamente, ele é expresso como sendo a primeira derivada do derivativo em relação ao preço do ativo base. Desta maneira, o *delta* vai nos dizer o *hedge ratio* de um ativo para mudanças infinitesimais. No gráfico abaixo podemos ver o comportamento do delta de uma opção de compra – tipo européia.

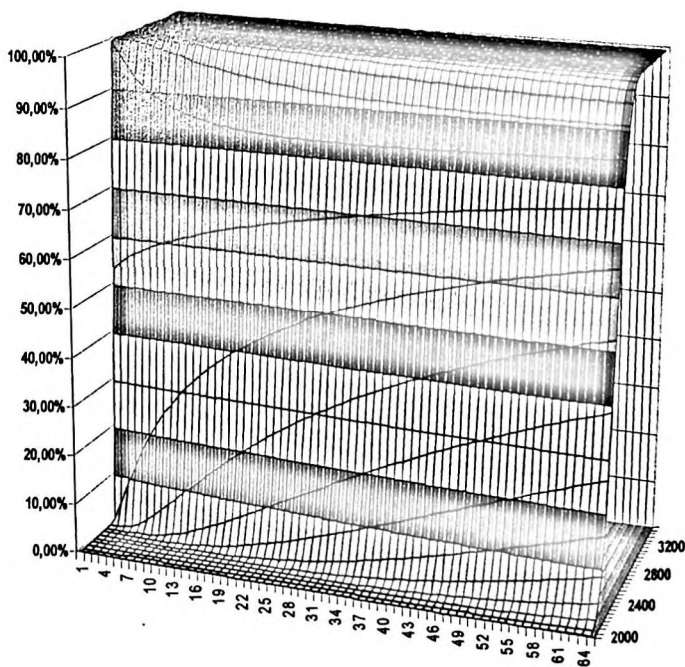


Gráfico 66- Delta

- **Gama:** é a derivada matemática segunda do derivativo em relação ao preço do ativo base.

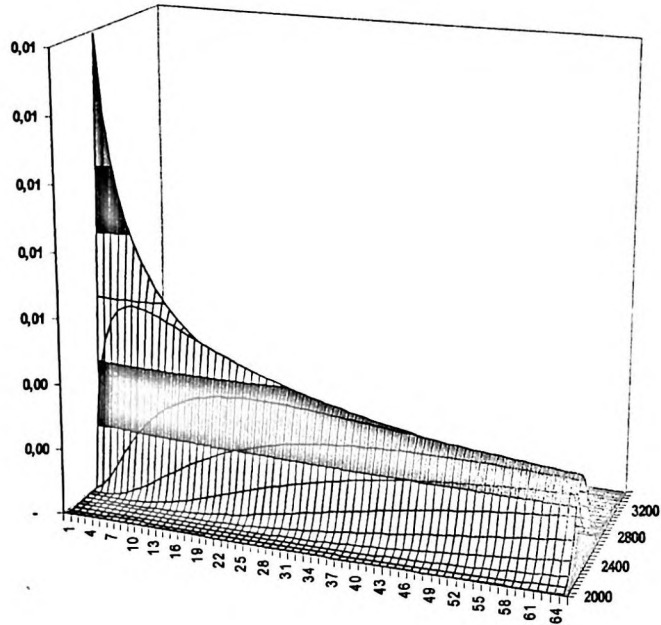


Gráfico 67 - Gama

Repare que o gama é uma função que apresenta alguns resultados interessantes, como por exemplo, para uma opção *at-the-money*, o gama é máximo quando a opção esta perto do vencimento; por sua vez, para uma opção *out-of-the-money*, o gama é máximo quando ela está distante do vencimento. Outro ponto interessante, é que o gama é dependente do tempo, repare como há um deslocamento do valor no decorrer da vida da opção.

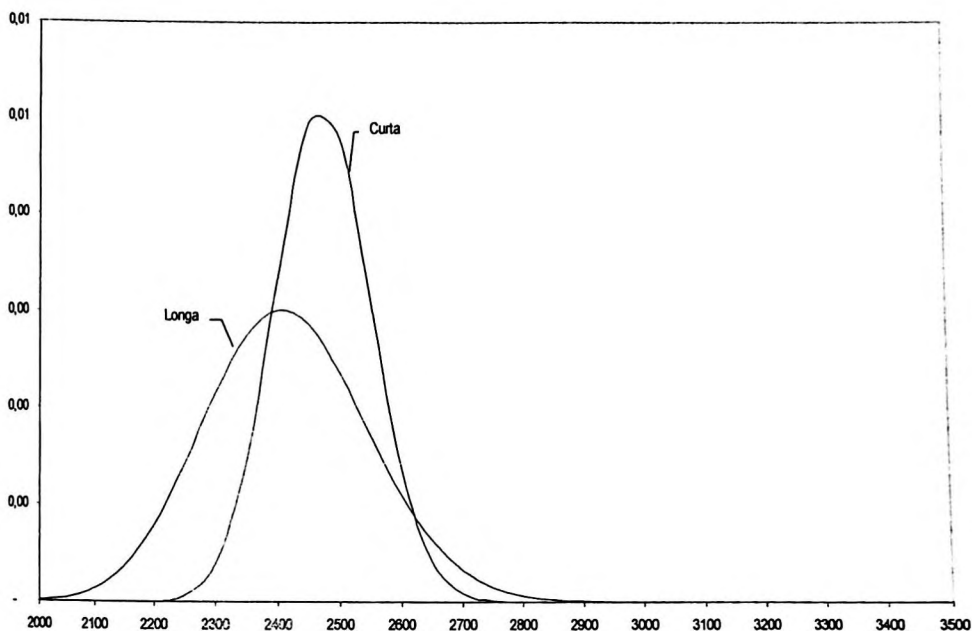


Gráfico 68 – Gama ao longo do tempo

- **Vega:** também conhecida como kapa ou zeta, é a sensibilidade de uma opção à mudanças na volatilidade implícita para uma maturidade igual ao seu *stopping time*. Uma opção que não seja a “vanilla”, o vega significara mais precisamente à sensibilidade do preço da opção em relação ao *forward* da volatilidade entre a sua “concepção” e o seu *stopping time*. Qualquer estrutura convexa, terá algum vega. A maioria dos Vegas, decrescem com o passar do tempo, excluindo-se a *lookback* e um *reverse knock-out*, que sob certas condições o vega aumenta com o passar do tempo. Repare no gráfico abaixo, como o vega, assim como o gama e o teta apresenta o *Bell shape*, isto é, o máximo é atingido quando a opção está no *at-the-money* (dado o *forward*).

- O gráfico 70 mostra como um aumento na volatilidade iria aumentar as caudas. Também podemos perceber as regras de convexidade no gráfico mais abaixo. O vega das opções *at-the-money* permanecem o mesmo quando a volatilidade aumenta. Por sua vez, o vega das opções *out-of-the-money* aumenta. Logo, quem está posicionado na compra das opções distantes do *at-the-money* (*out-of-the-money* e *in-the-money*) tem a convexidade a seu favor.

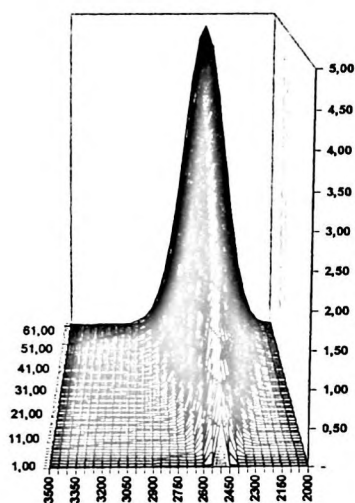


Gráfico 69 - Vega

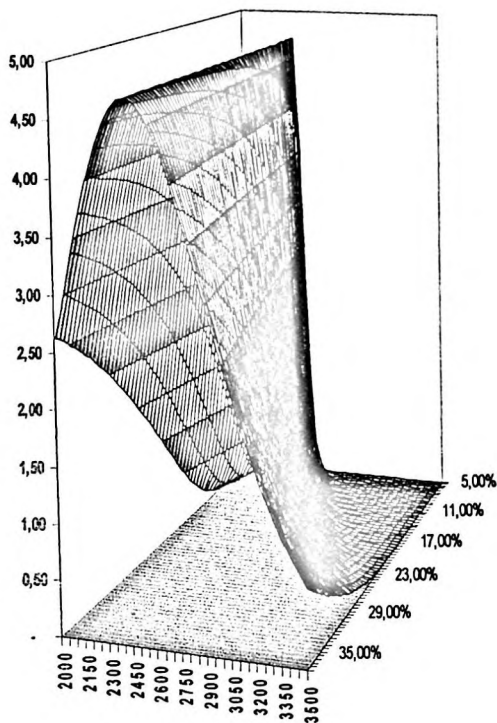


Gráfico 70 –Vega nas extremidades

- **Teta:** é a perda em valor no tempo de uma opção. É geralmente chamada de “aluguel”. Contudo, há mais de cem anos atrás, um matemático francês chamado Gaston Bachelier teve o *insight* de escrever em sua tese de doutorado⁵¹, que o valor esperado para o preço de amanhã de uma *call*, seria exatamente igual ao de hoje. O *time decay*, não é o resultado financeiro de amanhã de uma opção. Se a opção está apreçada corretamente, ou seja, na volatilidade “certa” (assumindo que a taxa de juros livre de risco, fosse igual a 0), o *time decay* esperado seria zero. Veja nos gráficos abaixo, o comportamento.

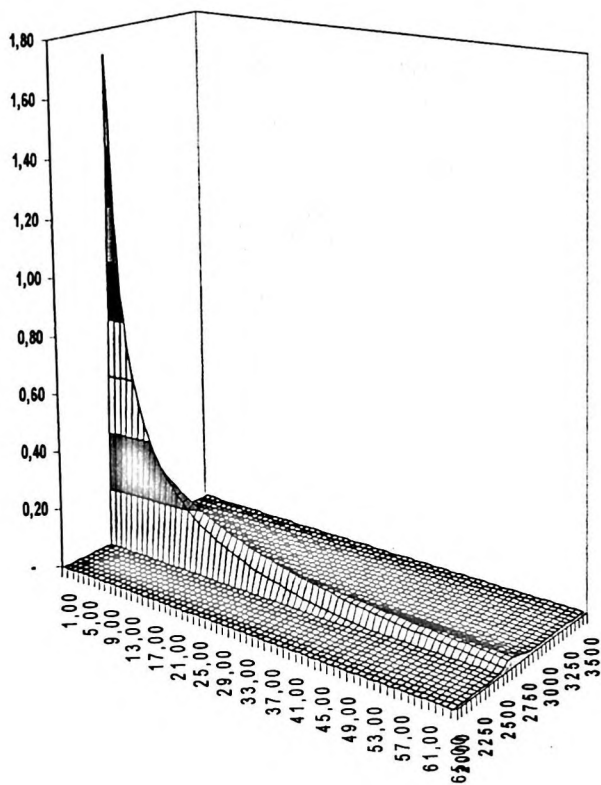


Gráfico 71 - Teta

⁵¹ Veja Bachelier, L. (1900). Theorie de la speculation, Annales de l'Ecole Normale Superieure, Paris : Gauthier-Villars.

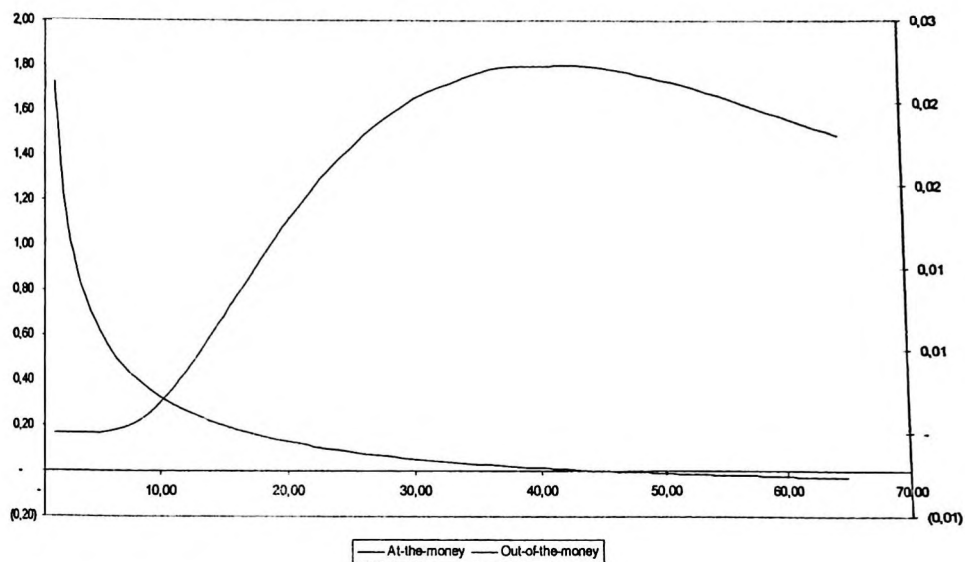


Gráfico 72 – Teta nas diferentes moneyness

BIBLIOGRAFIA

Baig, T. e Goldfajn, I. (1998), "Financial Market Contagion in the Asian Crisis," *IMF Working Paper*.

Barro, Robert J. e Gordo, D.B. (1983). "A Positive Theory of Monetary Policy in a Natural Rate Model." *Journal of Political Economy*, vol 91(4), pp.589-610.

Brekke, K.A. e Øksendal, B., (1997). "A verification theorem for combined stochastic control and impulse control." Em: L. Decreasefond et al (Eds.) *Stochastic Analysis and Related Topics*, Vol. 6. Birkhäuser.

Connolly K. B. - "Buying and Selling Volatility", John Wiley & Sons LTD (1997).

Derman, E. e Kani, I. - "Riding on a Smile." *RISK*, 7(2) Feb.1994, pp. 139-145, pp. 32-39.

Derman, E. e Kani, I. - "Trading and Hedging Local Volatility", *Quantitative Strategies Research Notes* by Glodman, Sachs (1996).

Derman, E. , Kani, I e Zou. J.Z. - "The Local Volatility Surface: Unlocking the Information in Index Options Prices." *Financial Analysts Journal*, (July-Aug 1996), pp. 25-36.

Desroches, B 2004. - "The Transmission of World Shocks to Emerging-Market Countries: An Empirical Analysis," *Working Papers 04-44, Bank of Canada*

Dornbusch, R. e Fischer, S., - "Macroeconomia," - 5º Edição.

Dornbusch, R.(1976), - "The role of the exchange rate in economic growth: a Euro-zone perspective.", *Working Papers, 9, Nationale Bank van België*.

Froot, K.A., Obstfeld, M., (1991a). - "Exchange-rate dynamics under stochastic regime shifts: a unified approach.", *Journal of International Economics* 31. 203-229.

Goldfajn, I. e Gupta, P. (1999). - "Does monetary policy stabilize the exchange rate following a currency crisis?," *Departamento de Economia da PUC-Rio, texto para discussão n° 396*.

Gomes, O. (2004). - "Optimal Monetary Policy under Heterogenous Expectations", *Journal of Economic Literature*.

Karatzas, I. e Shreve, S. E.(1991). - Brownian Motion and Stochastic Calculus, *Second Edition, Springer-Verlag*.

Karunaratne, N. 2002. - "Microeconomic Shocks, Depreciation and Inflation: an Australian Perspective," *Discussion Papers Series 298, School of Economics, University of Queensland, Australia*.

Kidland, F. E. e Prescott, E. C. (1977). - "Rules Rather than Discretion: the Inconsistency Of Optimal Plans." *Journal of Political Economy*, vol 85, pp. 473-491.

Krugman,P.(1996), - "Are currency crises self-fulfilling?," *NBER Macroeconomics Annual*.

Krugman,P.(1998a), - "What happened to Asia?," *No site da internet <http://web.mit.edu>*.

Krugman,P.(1998b), - "Will Asia Bounce Back?," *No site da internet <http://web.mit.edu>*.

Masten, I. 2002. - "How Important Is the Shock-Absorbing Role of the Real Exchange Rate?," *Economics Working Papers ECO2002/06, European University Institute*.

Mishkin, F. S. e Posen, A. S.(1997). - "Inflation Targeting: Lessons from Four Countries", *FRDNY Economic Policy Review/August 1997*

Mundaca, G. e Øksendal, B.(1998). - "Optimal Stochastic Intervention with Applications to the Exchange Rate," *Journal of Mathematics Economics*, 29, 225-243

- Obstfeld, M.(1994), - "The logic of currency crisis," *Cahiers Economiques et Monetaires* **43: 189-213.**
- Øksendal, B.(1998), - Stochastic Differential Equations , *Fifth Edition Springer-Verlag*
- Peersman,G. 2005. - "The relative importance of symmetric and asymmetric shocks and the determination of the exchange rate," *Working Papers of Faculty of Economics and Business Administration, Ghent University, Belgium 05/286, Ghent University, Faculty of Economics and Business Administration.*
- Pierdzioch, C.2003. - "Noise Trading and the Effects of Monetary Policy Shocks on Nominal and Real Exchange Rates," *Working Papers 1140, Kiel Institute for World Economics.*
- Radelet, S. e Sachs, J.(1998), - "The East Asian Financial Crisis: Diagnosis, Remedius, Prospects," *Paper prepared for Brookings Panel (Washington: Brookings Institute).*
- Rogoff, K. (1985), - "The Optimal Degree of Commitment to an Intermediate Monetary Target.", *Quartely Journal of Economics, vol 100(4), pp. 1169-1189.*
- Stiglitz, J.(1998), - "Knowledge for Development: Economic Science, Economic Policy and Economic Advice," *Annual Bank Conference on Development Economics (Washington: The World Bank).*
- Svensson, L. E.O. (1999). - "Inflation Targeting as a Monetary Policy Rule." *Journal of Monetary Economics, vol. 43, pp. 607-654.*
- Svensson, L. E.O. (2002). - "What is Wrong with Taylor Rules? Using Judgment in Monetary Policy through Targeting Rules." *NBER working paper n° 9421.*
- Svensson, L. E.O. e Woodford, M. (2003). - "Implementing Optimal Policy through Inflation-Forecast Targeting." *Princeton University working paper.*

Taleb, N. N. – “Dynamic Hedging – Managing Vanilla and Exotic Options”, John Wiley & Sons LTD (1997).

Taylor, J. B. (199), “How Should Monetary Policy Respond to Shocks While Maintaining Long-Run Price Stability? – Conceptual Issues” *FED Working Paper*.

Tompkins, R. G. – “Option Analysis – A state-of-the-art Guide to Options Pricing, Trading & Portfolio Applications”, Revised Edition, Probus Publishing, Cambridge, England (1994).

Wilmott, P. – “Derivatives – The Theory and Practice of Financial Engineering”, John Wiley & Sons LTD (1998).

Wilmott, P. – “Paul Wilmott on Quantitative Finance”, John Wiley & Sons LTD (2000).