Universidade de São Paulo

Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Instituto de Matemática e Estatística

Mestrado Profissionalizante em Modelagem Matemática em Finanças

Apreçamento de Títulos da Dívida Externa Brasileira Usando a Curva de Probabilidade de Default Implícita no Mercado de Derivativos de Crédito

Isaías Manoel de Oliveira Militão

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Belitsky

São Paulo
2005

Apreçamento de Títulos da Dívida Externa Brasileira Usando a Curva de Probabilidade de Default Implícita no Mercado de Derivativos de Crédito

Isaías Manoel de Oliveira Militão

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Belitsky

São Paulo
2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Militão, Isaías Manoel de Oliveira
Apreçamento de títulos da divisão externa brasileira usando a curva de probabilidade de default implícita no mercado de derivativos de crédito / Isaías Manoel de Oliveira Militão. – São Paulo, 2005.
57 p.

Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade de São Paulo, 2005
Bibliografia.

1. Dívida externa - Brasil 2. Derivativos I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade II. Universidade de São Paulo. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD – 336.3435

Resumo

O mercado de títulos de dívida externa de países em desenvolvimento ganhou abrangência e liquidez nos anos 90, quando esses papéis começaram a ter participação significativa nas carteiras de administradores de recursos de todo o mundo. Em paralelo a essa evolução, o mercado de crédito mundial foi revolucionado com o surgimento de instrumentos que foram denominados derivativos de crédito. Esses instrumentos financeiros permitiram maior flexibilidade no tratamento do risco de crédito pelos agentes financeiros, ocasionando o surgimento de diversos tipos de estruturas criadas pelos bancos para atender necessidades específicas das carteiras de crédito de seus clientes. Como o objeto central dos mercados de derivativos de crédito e do mercado de papéis (*bonds*) é o mesmo, ou seja, o crédito de um determinado emissor, tem surgido nos últimos anos um interesse das grandes instituições financeiras em estabelecer um paralelo entre os dois mercados, com o objetivo de aprimorar os instrumentos e técnicas de apreçamento de cada um deles, além de tentar identificar oportunidades de arbitragem. O nosso trabalho consiste em adaptar uma metodologia de obtenção da curva de probabilidade de default implícita no mercado de derivativos de crédito para apreçar os papéis mais líquidos de dívida externa da República Federativa do Brasil. Os preços obtidos por essa metodologia foram analisados e comparados com os preços reais observados no mercado de dívida entre março de 2004 e junho de 2005.

Abstract

The emerging countries' debt market gained breadth and liquidity in the 1990s, when these bonds gained importance on the portfolios of asset managers around the world. Simultaneously, the global credit market was revolutionized with the rise of financial instruments called credit derivatives, which permitted great flexibility on credit risk management by the players, and led the way to the advent of credit structured products created by major banks to fulfill specific needs of its clients' credit portfolios. As credit derivatives have the same underlying reference of bonds, which is credit quality of a reference issuer, there has been a surging interest in the last couple of years on establishing a link between these two markets. This link aim on identifying possible arbitrage opportunities and improving pricing and risk management techniques. Our work consists on adapting a reduced-form model to extract a default probability curve implicit on credit default swaps' quotes and use it on pricing global bonds issued by Brazilian Federal Government. Calculated prices were analyzed and compared to observed data for the period between March' 2004 and June' 2005.

Sumário

Introdução

O surgimento do mercado de dívida (títulos) de países emergentes se deu no início dos anos 70 quando, devido ao choque do preço do petróleo em 1973, um número considerável de bancos comerciais em quase todos os países desenvolvidos se depararam com o problema de como investir quantias vultosas depositadas por países produtores de petróleo. Ao mesmo tempo, o aumento no preço de *commodities* levou a um aumento das taxas de inflação no mundo todo e, como conseqüência, a um aumento generalizado do nível de taxas de juros. Essa foi a razão que impulsionou esses bancos comerciais a buscarem investimentos altamente rentáveis. A solução foi investir em países menos desenvolvidos, cujos fundamentos estavam melhorando graças ao aumento no preço de *commodities* e que estavam muito mais preocupados com a falta de investimentos estrangeiros do que com o nível de juros necessário para atrair esse capital. Esses países menos desenvolvidos começaram a tomar emprestado altas somas em dinheiro na esperança de que a tendência de aumento dos preços de *commodities* durasse muito tempo. Mas no início dos anos 80 a queda nos preços dessas *commodities* destruiu uma porção considerável da riqueza dessas economias emergentes, e levou esses países a assistirem suas dívidas crescendo assustadoramente enquanto sua capacidade de pagamento era reduzida de forma rápida. Entre o final de 1986 e o início de 1989, o valor de mercado médio dos títulos de países em desenvolvimento caiu de 0,70 para 0,30 com considerável perda de credibilidade desses devedores. Isso foi devido a taxa crescente de ocorrência de default (situação em que o emissor não paga o principal ou uma parcela de juros ou ambos), o que causou forte aumento dos gestores de patrimônio que participavam desse mercado de dívida de alta rentabilidade.

A continuidade desse problema com a dívida de países emergentes e a excessiva concentração de credores entre os bancos americanos forçaram o governo americano a propor uma reestruturação geral da mesma, que ficou conhecida como Plano Brady, em homenagem ao então Secretário do Tesouro Americano na época, Nicholas Brady. Em resumo, esse plano reconhecia que o pagamento total da dívida remanescente não era um objetivo factível, e gerou um novo tipo títulos de alta rentabilidade: os *Brady Bonds.*

Alguns desses papéis tinham volume emitido bastante alto, o que lhes conferia alta liquidez no mercado de balcão (esse era um dos principais objetivos do Plano Brady.

Alguns anos mais tarde, os países emergentes começariam a trocar essa dívida originada nesse plano de reestruturação por novas emissões, que ficaram conhecidas como *Global Bonds*, e que hoje respondem por cerca de 95% do mercado de títulos de países emergentes. A primeira crise financeira que afetou o mercado de dívida de países emergentes foi a do México em 1994, mas ela não teve a mesma magnitude das crises da Ásia (1997) e Rússia (1998). Esses episódios diminuíram consideravelmente o retorno dessa classe de ativos na década de 1990 e foram causa do default da Rússia. Mais tarde, aconteceriam por razões localizadas o default do Equador (1999) e da Argentina (2002).

A volatilidade dos retornos tem sido uma característica marcante do mercado de dívida de países emergentes. Além disso, apesar do forte crescimento que esse mercado tem experimentado desde 1990, ele ainda é muito pequeno em volume financeiro quando comparado ao mercado de dívida de países desenvolvidos ou mesmo em relação ao mercado de dívida corporativa de países desenvolvidos. Por exemplo, o caso das dificuldades financeiras enfrentadas no primeiro semestre de 2005 pelas montadoras americanas GM e Ford trouxe aos olhos do público o tamanho da dívida dessas empresas, com endividamento superior a USD 50 bilhões cada, o que as torna maiores devedores que a grande maioria dos países emergentes.

O principal tipo de risco que o detentor de um título de um país emergente corre é o risco de default daquele país, também denominado risco-país. A classe dos países emergentes tem composição bastante diversificada quanto à sua localização geográfica, situação econômica, social e política. Dessa forma, vários bancos e empresas de pesquisa e agências de risco analisam características individuais de cada país para corretamente apreçar o risco que cada país apresenta a seus credores.

A estimação do risco de default implícito no nível de *spread* do mercado de derivativos de crédito de países emergentes tem se tornado cada vez mais importante para investidores institucionais pela importância que os títulos desses países tem ganhado em suas carteiras recentemente, fato que pode ser creditado principalmente pelo baixo nível dos juros praticados nos países desenvolvidos, o que tem levado a um movimento em busca de maior rentabilidade sobre o capital investido.

Os derivativos de crédito são instrumentos que permitem a transferência, concentração, diluição e o remodelamento de riscos de crédito. O instrumento mais popular de derivativos de crédito é o *Credit Default Swap (CDS)*, que consiste simplesmente em uma troca de uma taxa em troca de um pagamento em caso de ocorrência de default. O mercado de derivativos de crédito de países emergentes é movido por movimentos de demanda e oferta muito mais que o de países desenvolvidos, que tem um número de participantes muito maior. O nível em que se negocia essa taxa reflete basicamente o risco de ocorrer um evento de default, e vamos usar dados disponíveis no mercado para encontrar as curvas de probabilidade de default para o Brasil e usá-la para apreçar os *Global Bonds* mais líquidos, criando uma forma de se identificar eventuais erros relativos de apreçamento.

Curva de Probabilidade de Default Implícita no Mercado de *Credit Default Swaps*

Arcabouço do Mercado de Derivativos de Crédito

A padronização e a possibilidade de transferência de risco de crédito tem sido os maiores méritos do mercado de derivativos de crédito. Entretanto, para que o mercado funcione corretamente é necessário um arcabouço quantitativo para medir risco de crédito. É óbvio que a compensação que um investidor recebe por assumir determinado risco de crédito ou o prêmio que paga para repassar um risco de crédito devem ter ligação direta com o tamanho do risco de crédito em questão. Esse tamanho pode ser definido em função da probabilidade de ocorrência de default e do tamanho da perda que se concretiza quando ocorre um default do crédito em questão.

Seja por exemplo um título que vence em um ano e que não paga cupom. O preço desse título ao considerarmos a possibilidade de que o emissor não honre seu pagamento (P_{Risco}) deve ser calculado, para evitar possibilidade de arbitragem, como:

$$P_{Risco} = \frac{1}{1+r_f}(p \times 100 \times R + (1-p) \times 100) \qquad \textbf{E1}$$

onde r é a taxa de juros livre de risco de 1 ano, p é a função probabilidade acumulada de default no espaço de tempo entre tempo t=0 e t=1 ano e R é a taxa de recuperação (*recovery rate*), que seria o valor de mercado do título daqui a 1 ano em caso de o emissor não honrar seu compromisso. A taxa de juros neutra ao risco e livre de default usada nesse mercado é a curva de LIBOR[1] (London Interbank Offer Rate), que é o nível de taxa em que a maioria dos participantes desse mercado consegue seu *funding*.

O título correspondente ao descrito no exemplo, mas que não corre risco de default, teria seu preço dado por:

$$P_{SemRisco} = \frac{100}{1 + r_f} \qquad \textbf{E2}$$

Analisando as Equações 1 e 2, podemos observar que $P_{SemRisco}$ é sempre menor que P_{Risco} porque $0 < R < 1$ e $0 < p < 1$ da definição de R e p. Podemos reescrever a Equação 1 de tal forma que o prêmio de risco de crédito seja dado por um fator maior que 1 que multiplica o denominador da razão de forma a diminuir o preço do ativo proporcionalmente ao risco de crédito do mesmo:

$$P_{Risco} = \frac{100}{(1 + r_f)(1 + s)} \qquad \textbf{E3}$$

Onde s é chamado de *spread de crédito*.

A taxa de recuperação R é uma variável que tem sido objeto de vários estudos, e depende de fatores como *rating* de crédito, tipo de emissor, legislação vigente, entre outros. Uma conclusão importante dos estudos sobre a taxa de recuperação é que a probabilidade de default implícita nos *spreads* de crédito observados no mercado é normalmente maior que a probabilidade observada realmente em um período histórico suficientemente grande. Isso é resultado de algumas características do instrumento que fornece esse *spread* (título, por exemplo): liquidez, risco de mudança da qualidade de crédito, apreçamento *ex-ante* da probabilidade de default, etc. Nas aplicações práticas, o mercado utiliza para países emergentes algo entre 15 e 40%.

---

[1] A curva de LIBOR usada pelo mercado é construída usando as taxas LIBOR *spot* para os pontos até 12 meses fornecidas pela BBA (*British Bankers' Association*) e com as taxas dos swaps pré *x* pós-fixado de LIBOR de 3 meses para os pontos a partir de 2 anos.

Credit Default Swaps (*CDSs*)

Um *CDS* é utilizado para transferir o risco de crédito de uma entidade de referência (empresa ou governo) entre duas contrapartes. Num contrato padrão de CDS, uma contraparte compra proteção de crédito de outra, com o objetivo de cobrir a perda do valor nominal de um ativo em caso de evento de crédito. O *CDS* é um instrumento financeiro que permite ao investidor tomar uma posição comprada ou vendida no *spread* do instrumento sobre a curva de juros livre de risco.

Um evento de crédito pode ser uma falta de pagamento ou reestruturação de uma dívida, entre outras definições jurídicas. A proteção de crédito do *CDS* dura até uma data de vencimento definida. O pagamento por essa proteção (prêmio) é feito pelo comprador em intervalos regulares (o padrão do instrumento foi definido pela *ISDA* - *International Swaps and Derivatives Association* - como semestral, mas o contrato pode especificar uma freqüência de pagamentos diferente).

O tamanho de cada pagamento do prêmio é calculado a partir da cotação do *CDS* para o vencimento do contrato. As cotações do mercado de *CDS* são dadas em taxas anualizadas, expressas em pontos-base (pb), onde 1pb é igual a 0,01% ao ano. Por exemplo, para um contrato de 5 anos e cotação de mercado de 200 pb, cada pagamento do prêmio será de 100pb (ou 200/2) calculados sobre o valor de face do contrato. Os pagamentos são feitos até o vencimento do contrato ou até que aconteça um evento de crédito, o que ocorrer primeiro.

Em caso de evento de crédito antes do vencimento do contrato, há o pagamento feito pelo vendedor de proteção ao comprador. Esse pagamento deve ter valor igual ao valor de face do contrato multiplicado por (1-*CTD*), onde *CTD* é o preço de mercado do título mais barato entre os elegíveis a serem referência de acordo com o contrato. Portanto, *CTD* é igual à taxa de recuperação (R) do ativo elegível que tiver o menor preço após um evento de crédito. Alternativamente, um contrato de *CDS* pode ser liquidado após um evento de crédito através do pagamento do valor de face pelo vendedor e da entrega de qualquer título elegível pelo comprador de proteção.

Base do mercado de *Credit Default Swaps* (*CDS-bond Basis*)

Um aspecto muito importante dos derivativos de crédito é a diferença entre os *spreads*[2] sobre a curva de taxa de juros livre de risco (que assumimos ser a curva de LIBOR em dólares) desses instrumentos e os *spreads* dos títulos sobre a mesma curva de juros. Essa diferença é denominada base entre os *CDSs* e os títulos (*CDS-bond basis*) e pode ser explicada por uma série de características desses mercados entre as quais podemos destacar:

- *CDS* é um instrumento ao par, ou seja, sempre tem como referência 100% do valor nominal da operação, implicando que para qualquer situação de mercado o pagamento em caso de default deve ser de (100-R); por outro lado, os títulos podem ter valores de mercado bem diferentes de par (100%), como é o caso de papéis com cupom muito alto. Nesse caso, se o detentor desse papel compra proteção no mercado de *CDS* para o mesmo valor nominal que detém do papel, ele estará correndo risco de default num valor que é igual à diferença entre o valor de mercado do papel e 100%. Isso explica porque normalmente para dois títulos com mesma *duration*, o que possui maior preço unitário deve ter retorno esperado (*yield-to-maturity- YTM*) superior ao do outro. Essa diferença torna mais difícil analisarmos a melhor alternativa de investimento para determinada duration ao focarmos simplesmente nos retornos esperados de cada título. Essa dificuldade é mais uma motivação para desenvolvermos ferramentas de apreçamento como a que estamos trabalhando, que tem origem na curva implícita de probabilidade de default do crédito em questão. Papéis com valor de mercado acima de par tendem a apresentar menor risco de base em relação ao *CDS*. Raciocínio inverso se aplica a papéis com valor de mercado muito abaixo de par: esses tendem a ter menor retorno esperado e, portanto, apresentam maior base em relação ao *CDS* correspondente.

---

[2] No nosso estudo, sempre que nos referirmos a spreads, seja do mercado de *bonds* ou de *CDS*, estamos utilizando como referência a curva de taxa de juros livre de risco – LIBOR.

- O custo de financiamento da posição é diferente entre os dois mercados. Uma posição de *CDS* tipicamente se inicia sem troca de caixa, o que implica que os participantes não precisam de nenhum financiamento (*funding*) para iniciar a operação. Isso faz com que os agentes de mercado, que em sua maioria se financiam numa taxa superior à LIBOR, aceitem um *spread* menor no *CDS*, pois nesse mercado o custo de financiamento implícito nos cálculos é de LIBOR. Essa característica tende a diminuir a base entre os mercados.
- A opção que o comprador de proteção tem de entregar o ativo mais barato (em caso de liquidação física) ou usar seu valor de mercado para calcular o valor a receber por ocorrência de default (em caso de liquidação pela diferença) tende a fazer a base aumentar. Uma forma de diminuir esse efeito é fazer diretamente o valor da taxa de recuperação dos títulos maior que a taxa de recuperação do *CDS*.
- Diferença de liquidez entre os dois mercados gera diferença entre os níveis de mercado para os *spreads*. Em mercados de alto rendimento (*high yield*) a liquidez do mercado de *cash* é normalmente superior à do mercado de *CDS*. A menor liquidez afeta tanto compradores quanto vendedores no mercado de *CDS*, mas no caso de haver deterioração rápida do crédito, o risco de base tende a aumentar rapidamente, prejudicando o vendedor de proteção. Isso explica porque a menor liquidez do mercado de *CDS* implica maior base.
- O fato de ser comum títulos de países emergentes estarem em situação especial no mercado de *repo* (*tight on repo*) torna o financiamento de posições no mercado de títulos em várias situações mais barato que LIBOR, o que faz os títulos operarem com *spreads* menores e, portanto, maior base.
- No mercado de *CDS*, o comprador de proteção corre o risco de crédito da contraparte, pois em caso de default do crédito de referência é o vendedor de proteção que deve pagar ao comprador o valor protegido. Isso faz o comprador de proteção querer pagar um menor prêmio (em forma de *spread*) num *CDS*, diminuindo a base.
- O fato de *CDSs* serem operações que não aparecem nos balanços dos bancos por não necessitarem de funding torna esse instrumento mais atrativo, aumentando a base.

- A definição dos vários tipos de evento de crédito pode ser encontrada num documento publicado em 2003 (revisão do documento original de julho de 1999) pela *ISDA*, e abrange: bancarrota (para empresas apenas); falha no pagamento; aceleração de uma ou mais obrigações; moratória; reestruturação. Um desses eventos pode ocorrer sem o crédito em questão tenha uma deterioração substancial. Isso eleva o valor do prêmio exigido pelo vendedor de proteção, aumentando a base.

Além dos fatores citados, os títulos correm risco de flutuação da taxa de juros livre de risco, que pode ser protegido (hedge) usando-se o mercado de *Swaps* de *Fixed x Floater* de LIBOR de 3 meses em dólares. Analisando a resultante de todos os fatores citados, os dados históricos apontam para um risco de base positivo para a maioria dos países emergentes, incluindo o Brasil.

Existem várias formas de se medir a base entre *CDSs* e títulos. Se não levarmos em conta nenhum título específico, a maneira mais comum de se definir essa base é: base do *CDS* = *spread* do *CDS* – *spread* do título *par floater*. O *spread* do *CDS* é observado diretamente no mercado. Um título *par floater* pode ser imaginado como um ativo emitido pela entidade em estudo na data da análise com preço unitário de par (100% do valor de face), que tenha o mesmo vencimento que o contrato de *CDS*, e que seja pós-fixado, pagando ao detentor uma remuneração atrelada à taxa de taxa de juros vigente no período até o vencimento (normalmente atrelada à LIBOR de 3 ou 6 meses).

Para os títulos existentes no mercado, temos as seguintes definições mais comumente usadas pelos bancos: base simples, base de *swap* de ativos, a base de *spread* de volatilidade zero (*Z-spread*).

A base simples é definida como a diferença entre o *spread* num contrato de *CDS* com a mesma vida média de um título menos o *spread* desse título levando-se em conta seu preço de mercado na data do cálculo.

A base de swap de ativos é definida como a diferença entre o *spread* num contrato de *CDS* com a mesma vida média de um título menos o *spread* num *swap* de ativos ao par. Um *swap* de ativos ao par é um derivativo emitido por um banco que simula os mesmo fluxos de caixa de um título existente no mercado, mas é emitido a qualquer momento com preço de par (100%), pagando cupons maiores ou menores que o do título de referência, conforme o mesmo tenha na data valor de mercado menor ou maior que par.

A base de *spread* de volatilidade zero (*Z-spread*) é definida como a diferença entre o *spread* de volatilidade zero de um título cujo preço é calculado usando-se os níveis do mercado de *CDS* via probabilidade implícita de default menos o *spread* de volatilidade zero do mesmo título com preço de mercado. Para calcularmos o *spread* de zero volatilidade, calculamos o tamanho em pontos-base do movimento paralelo que devemos impor à curva de taxa de juros livre de risco (LIBOR em dólares para o nosso estudo) para que ao descontarmos os fluxos de caixa de um título por essa nova curva encontremos ó preço desejado para o título.

Modelagem de crédito: usando o enfoque da forma reduzida

O apreçamento de derivativos que envolvem risco de crédito pode ser feito basicamente de duas formas. O enfoque estrutural encara esses derivativos como "opções compostas" sobre os ativos da entidade que serve de referência de crédito, e é por isso mesmo normalmente aplicável somente quando a referência de crédito é uma empresa (risco de crédito corporativo) e não um governo (risco de crédito soberano). Os modelos que utilizam o enfoque estrutural foram inicialmente propostos por Merton (1974), e caracterizam o default como o fato de os ativos totais de uma empresa superam o valor de suas obrigações (ações e dívida).

O outro enfoque é denominado forma reduzida (também chamado de modelo baseado em intensidade), proposto por Jarrow & Turnbull (1995). Esse enfoque descreve um evento de crédito através de uma variável estocástica que seria o tempo até o primeiro default. Dessa forma, a probabilidade de default de um título pode ser deduzida a partir de preços de mercado, e pode ser usada para comparações entre os mercados de *CDS* e de títulos. Modelos que utilizam o enfoque da forma reduzida normalmente têm a flexibilidade de poderem ser utilizados para instrumentos financeiros com datas de vencimento diferentes, além de poderem ser utilizados para apreçar derivativos de crédito exóticos.

Definições e proposições da forma reduzida

Um dos mais utilizados enfoques de forma reduzida foi proposto por Jarrow & Turnbull (1995), e consiste em modelar um evento de crédito como o primeiro evento de um processo de Poisson (processo de contagem N) com intensidade λ.

Para aplicação do modelo assumimos que, sob uma única medida Martingal *Q*, os preços de títulos com ou sem risco de default são martingais, o que equivale a assumir que o mercado para essas duas classes de ativos é completo e livre de arbitragem. Define-se τ como um processo estocástico que representa o tempo até o primeiro default. Com o intuito de simplificar a implementação do modelo, também assumimos que o processo estocástico que representa a taxa de juros livre de risco (para a nossa aplicação a curva de *Swap* de LIBOR) e o processo de default τ são estatisticamente independentes sob *Q*. Isso implica que o processo de default não tem correlação com a curva de juros livre de risco.

Numa extensão do modelo proposto em 1995, O'Kane & Turnbull (2003) propõem que o processo τ seja um processo de Poisson não-estacionário, ou seja, que a intensidade λ possa ser uma função do tempo. Para um intervalo de tempo infinitesimal *dt*, a probabilidade de ocorrência de default pode ser expressa como:

$$P[\tau < t + dt / \tau \geq t] = \lambda(t)dt \qquad \textbf{E4}$$

A intensidade λ(t) é conhecida como taxa de ameaça de default (*hazard rate*). Dessa forma, podemos modelar um evento de crédito em um instante entre *t* e *t*+ *dt* como uma árvore binomial em que acontece evento de crédito com probabilidade λ(t) *dt*, onde os títulos emitidos pelo crédito de referência passam a valer *R*, ou acontece sobrevivência do crédito com probabilidade 1-λ(t) *dt*.

Assumimos que a taxa de ameaça de default λ é determinística para efeito de simplificação. Além disso, assumimos que λ é independente da taxa de recuperação *R*. A independência entre *R* e λ tem sido objeto de vários estudos, mas não temos conhecimento de nenhum estudo que tenha estabelecido uma correlação universal para essas variáveis. Além disso, dada a incerteza com a qual trabalhamos ao determinar e tornar fixa a taxa de recuperação (como discutiremos adiante), essa simplificação torna-se plausível. Estendendo o modelo dado pela equação E4 para múltiplos períodos, chegamos a uma árvore binomial com interrupções nos ramos descendentes:

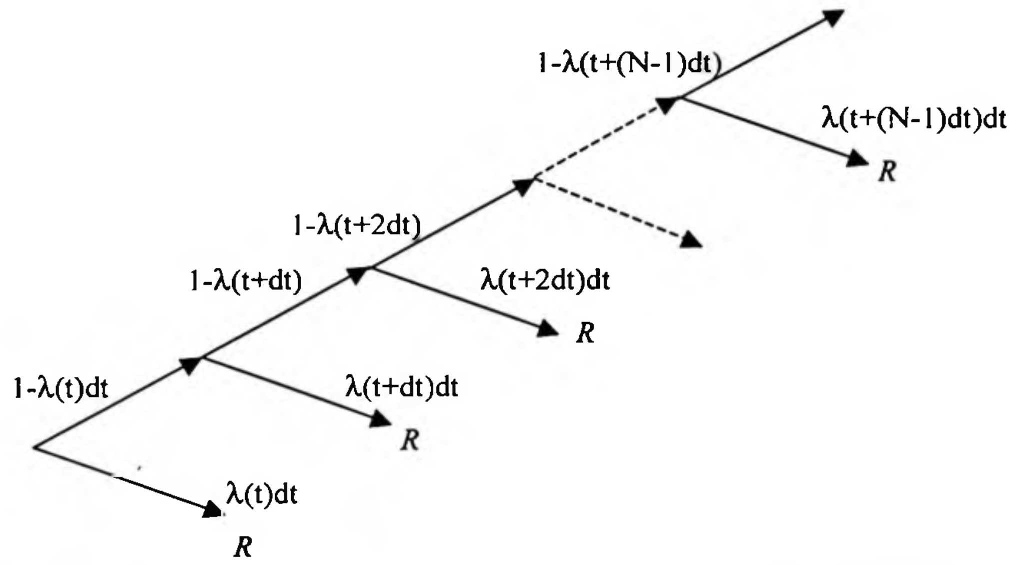


Figura 1: Árvore binomial com interrupção modelando o processo de default de crédito com pagamento de *R* em caso de default

No modelo apresentado, a probabilidade acumulada de sobrevivência entre o instante zero (t) e um instante de tempo futuro ($t+T$) pode ser representada por:

$$Surv(t,T) = e^{-\int_t^T \lambda(s)ds} \qquad \textbf{E5}$$

Condição de não-arbitragem no apreçamento do *CDS*

Para apreçar corretamente um *CDS*, devemos aplicar a condição básica de não-arbitragem: o valor presente da soma dos valores esperados para os pagamentos dos **prêmios** pelo comprador de proteção deve ser igual ao valor presente do valor esperado do (eventual) pagamento de **proteção** no lançamento da operação.

Ainda segundo o modelo de O'Kane & Turnbull (2003), o valor presente dos prêmios de um contrato de *CDS* em qualquer instante de sua duração pode ser escrito como (a partir desse ponto convencionamos que sempre que tivermos diferença entre duas datas estamos expressando a mesma em anos):

$$PV_{prêmio}(t_h,t_v) = S(t_0,t_N)\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times Surv(t_h,t_n)}{(1+(t_n-t_h)\times r_f(t_h,t_n))} \qquad \textbf{E6}$$

Onde:

- t_h é a data de apreçamento (hoje);
- t_V é a data de vencimento do contrato de *CDS* em estudo;
- t_0 é a data de lançamento ou início do contrato de *CDS*;
- t_n , n=1,2,....,N, é cada uma das datas de pagamento de prêmio;
- $S(t_0,t_N)$ é o *spread* de crédito para vencimento em t_N no lançamento do contrato;
- $\Delta(t_{n-1},t_n,B)$ é a fração de tempo em anos entre os pagamentos de prêmio t_{n-1} e t_n usando a convenção de contagem de dias *B*;
- $r_f(t_h,t_n)$ é a taxa de juros livre de risco em t_h para vencimento em t_n.

A equação E6 ignora o efeito de risco de prêmio acruado que o vendedor de proteção corre entre uma data de pagamento de prêmio e a próxima, o que acarretaria perda desse valor pelo vendedor de proteção. Esse risco poderia ser eliminado utilizando-se pagamentos de prêmios diários, mas isso seria operacionalmente inviável por ser muito caro.

A probabilidade de que um evento de crédito ocorra num intervalo de tempo infinitesimal ds logo após o instante de tempo s pode ser escrita como (usando-se a equação E4):

$$\Pr[s < \tau < s + ds] = Surv(t_v, s) \times \lambda(s) ds \qquad \textbf{E7}$$

A expressão para o cálculo do valor em risco de default dos prêmios acruados pode ser escrita como:

$$prêmioemrisco = S(t_0, t_N) \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\Delta(t_{n-1}, s, B) \times Surv(t_v, s) \times \lambda(s) ds}{(1 + (s - t_h) \times r_f(t_h, s))} \qquad \textbf{E8}$$

Assumindo que o prêmio médio perdido em caso de default é igual a metade de um prêmio semestral, podemos simplificar o cálculo, aproximando a integral da equação E8 por uma soma:

$$prêmioemrisco = \frac{S(t_0, t_n)}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta(t_{n-1}, t_n, B) \times (Surv(t_h, t_{n-1}) - Surv(t_h, t_n))}{(1 + (t_n - t_h) \times r_f(t_h, t_n))} \qquad \textbf{E9}$$

Como podemos ver pela equação E9, o valor do prêmio em risco é diretamente proporcional ao valor do *spread* de crédito $S(t_0, t_N)$ que é operado no mercado de *CDS*. Dessa forma comprovamos a importância desse valor em casos como o do Brasil, que por ser considerado crédito de alta rentabilidade (*high yield*) devido à percepção ruim sobre seu risco de crédito, tem altas taxas no mercado de *CDS*, que estão na casa de centenas de pontos-base para prazos maiores que 2 anos.

Subtraindo da equação E6 a expressão para o prêmio em risco, ficamos com a seguinte expressão para o valor presente dos prêmios:

$$PV_{prêmio}(t_h,t_v) = S(t_0,t_N)\sum_{n=1}^{N}\frac{0,5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(Surv(t_h,t_n)+Surv(t_h,t_{n-1}))}{(1+(t_n-t_h)\times r_f(t_h,t_n))} \qquad \textbf{E10}$$

Analisaremos agora o valor presente da proteção envolvida em um contrato de *CDS*. Esse valor seria igual ao valor presente do valor esperado da perda em caso de default. No modelo que estamos utilizando, usamos (1-*R*) como o valor da perda em caso de default (essa é a fração do principal que o comprador deve receber em caso de default por unidade de moeda). O modelo que utilizamos ignora o intervalo de tempo entre a notificação de um evento de crédito e o pagamento do valor da proteção, que pode chegar a 72 dias devido a procedimentos legais.

Para calcular o valor da proteção, consideramos que o default pode ocorrer em qualquer intervalo de tempo *ds* com probabilidade $Surv(t_h,s)\lambda(s)ds$ (E7), e fazemos *ds* ter início em todos os instantes de tempo entre t_h e t_n. Usando esse raciocínio, chegamos à seguinte expressão para o valor da proteção de crédito:

$$PV_{proteção} = (1-R)\int_{t_h}^{t_N}\frac{Surv(t_v,s)\times\lambda(s)ds}{(1+(s-t_h)\times r_f(t_h,s))} \qquad \textbf{E11}$$

onde *R* é a estimativa usada para a taxa de recuperação do ativo mais barato na ocasião de um default (*CTD*).

Pode ser demonstrado que podemos discretizar a expressão da equação E11 sem perda de precisão, e então chegamos a:

$$PV_{proteção} = (1-R)\sum_{m=1}^{M\times T_v}\frac{(Surv(t_h,t_{m-1})-Surv(t_h,t_m))}{(1+(t_m-t_h)\times r_f(t_h,t_m))} \qquad \textbf{E12}$$

onde o intervalo de tempo foi discretizado em m intervalos de tempo por ano.

O número de intervalos por ano (*m*) usado na discretização da equação E12 deve atender a dois requisitos: ser grande o suficiente para não tirar a precisão dos cálculos e ser pequeno o suficiente para não carregar o esforço computacional necessário para se realizar os cálculos. Os autores do modelo (O'Kane & Turnbull) afirmam que, para uma estrutura de taxa de juros constante, a diferença entre o *spread* calculado da forma contínua e o calculado da forma discreta é igual a *r/2M*, Usando para r um valor coerente para o período em estudo (4%), temos que a discretização traria um erro de cerca de 0,17%, o que pode ser considerado desprezível quando comparado aos *bid-offer spreads* do mercado de *CDS* para o Brasil, que costumam variar entre 1 e 5%.

Igualando-se as expressões encontradas para o valor presente da proteção (E12) e o dos prêmios (E10), chegamos a uma expressão para o valor do *spread* de crédito operado no mercado de *CDS* no lançamento de uma operação de *CDS*, quando $t_h=t_0$:

$$S(t_h,t_N)=\frac{(1-R)\sum_{m=1}^{M\times T_N}\frac{(Surv(t_h,t_m)-Surv(t_h,t_{m-1}))}{(1+(t_m-t_h)\times r_f(t_h,t_m))}}{\sum_{n=1}^{N}\frac{0{,}5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(Surv(t_h,t_n)+Surv(t_h,t_{n-1}))}{(1+(t_n-t_h)\times r_f(t_h,t_n))}} \quad \textbf{E13}$$

O primeiro vértice do mercado de *CDS* (primeiro prazo com liquidez) é o de 1 ano, o que implicaria que a discretização do numerador da equação E13 teria 12 pontos. Assumindo que conhecemos a curva de juros livre de risco (*Swap* de LIBOR) e que definimos um valor fixo para a taxa de recuperação do ativo mais barato para entrega em caso de default, ficamos com 12 valores desconhecidos de probabilidade de sobrevivência, tornando o problema indeterminado. Para solucionar a questão, precisamos fazer uma simplificação a respeito da função probabilidade de sobrevivência. Os autores do modelo (O'Kane & Turnbull) sugerem que façamos a intensidade do processo de Poisson (λ) constante entre cada dois vértices do mercado de *CDS* ou que a tornemos linear em cada período. Como o mercado nos fornece vários vértices com valores de *spreads* de crédito (1, 2, 3, 5, 7 e 10 anos), estimamos que ao assumirmos λ constante entre cada dois vértices não teremos erro considerável na construção da curva de sobrevivência do crédito soberano brasileiro. Construímos a estrutura a termo de taxas de ameaça de default utilizando o método de *bootstraping*. Ao assumirmos λ constante entre cada dois vértices, a expressão para a probabilidade de sobrevivência entre a data inicial um instante qualquer à frente fica:

$Surv(t_h,t) = e^{-\lambda_{01}t}$, para $0 < t \leq 1$

$Surv(t_h,t) = e^{-\lambda_{01}-\lambda_{12}(t-1)}$, para $1 < t \leq 2$

$Surv(t_h,t) = e^{-\lambda_{01}-\lambda_{12}-\lambda_{23}(t-2)}$, para $2 < t \leq 3$

$Surv(t_h,t) = e^{-\lambda_{01}-\lambda_{12}-\lambda_{23}-\lambda_{35}(t-3)}$, para $3 < t \leq 5$

$Surv(t_h,t) = e^{-\lambda_{01}-\lambda_{12}-\lambda_{23}-2\lambda_{35}-\lambda_{57}(t-5)}$, para $5 < t \leq 7$

$Surv(t_h,t) = e^{-\lambda_{01}-\lambda_{12}-\lambda_{23}-2\lambda_{35}-2\lambda_{57}-\lambda_{710}(t-7)}$, para $7 < t \leq 10$ **E14**

A expressão para o *spread* de crédito de 1 ano ao considerarmos λ constante (λ_{01}) fica:

$$S(t_h,t_{12meses}) = \frac{(1-R)\sum_{m=1}^{12}\frac{(e^{-\lambda_{01}t_{m-1}} - e^{-\lambda_{01}t_m})}{(1+(t_m-t_h)\times r_f(t_h,t_m))}}{\sum_{n=6,12meses}\frac{0,5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(e^{-\lambda_{01}t_n}+e^{-\lambda_{01}t_{n-1}})}{(1+(t_n-t_h)\times r_f(t_h,t_n))}} \qquad \textbf{E15}$$

Usando o método iterativo de Newton-Raphson, calculamos o valor de λ_{01} a partir do valor de $S(t_h,t_{12meses})$, que é extraído diretamente do mercado (taxa do *CDS* de 1 ano).

Usando λ_{01} e as equações E14, chegamos a λ_{12} através da seguinte expressão:

$$S(t_h,t_{24meses}) = \frac{(1-R)[prêmio(01) + \sum_{m=13}^{24}\frac{(e^{-\lambda_{12}t_{m-1}} - e^{-\lambda_{12}t_m})}{(1+(t_m-t_h)\times r_f(t_h,t_m))}]}{proteção(01) + \sum_{n=18,24meses}\frac{0,5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(e^{-\lambda_{12}t_n}-e^{-\lambda_{12}t_{n-1}})}{(1+(t_n-t_h)\times r_f(t_h,t_n))}} \qquad \textbf{E16}$$

onde temos:

$$prêmio(01) = \sum_{m=1}^{12\times T_N} \frac{(e^{-\lambda_{01}t_{m-1}} - e^{-\lambda_{01}t_m})}{(1+(t_m - t_h)\times r_f(t_h,t_m))}$$

$$proteção(01) = \sum_{n=6,12meses} \frac{0{,}5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(e^{-\lambda_{01}t_n} + e^{-\lambda_{01}t_{n-1}})}{(1+(t_n - t_h)\times r_f(t_h,t_n))}$$

Da mesma forma iterativa que solucionamos a equação E15, resolvemos a equação E16 para achar λ_{12} pois o valor de $S(t_h, t_{24meses})$ é também extraído das cotações de mercado. E assim por diante, chegamos aos valores de λ entre cada dois vértices utilizando as equações E14, E17, E18, E19 e E20.

$$S(t_h,t_{36meses}) = \frac{(1-R)[prêmio(02) + \sum_{m=25}^{36} \frac{(e^{-\lambda_{23}t_{m-1}} - e^{-\lambda_{23}t_m})}{(1+(t_m - t_h)\times r_f(t_h,t_m))}]}{proteção(02) + \sum_{n=30,36meses} \frac{0{,}5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(e^{-\lambda_{23}t_n} + e^{-\lambda_{23}t_{n-1}})}{(1+(t_n - t_h)\times r_f(t_h,t_n))}} \qquad \textbf{E17}$$

$$S(t_h,t_{60meses}) = \frac{(1-R)[prêmio(03) + \sum_{m=37}^{60} \frac{(e^{-\lambda_{35}t_{m-1}} - e^{-\lambda_{35}t_m})}{(1+(t_m - t_h)\times r_f(t_h,t_m))}]}{proteção(03) + \sum_{n=42,48,54,60meses} \frac{0{,}5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(e^{-\lambda_{35}t_n} + e^{-\lambda_{35}t_{n-1}})}{(1+(t_n - t_h)\times r_f(t_h,t_n))}} \qquad \textbf{E18}$$

$$S(t_h,t_{84meses}) = \frac{(1-R)[prêmio(05) + \sum_{m=61}^{84} \frac{(e^{-\lambda_{57}t_{m-1}} - e^{-\lambda_{57}t_m})}{(1+(t_m - t_h)\times r_f(t_h,t_m))}]}{proteção(05) + \sum_{n=66,72,78,84meses} \frac{0{,}5\times\Delta(t_{n-1},t_n,B)\times(e^{-\lambda_{57}t_n} + e^{-\lambda_{57}t_{n-1}})}{(1+(t_n - t_h)\times r_f(t_h,t_n))}} \qquad \textbf{E19}$$

$$S(t_h, t_{120meses}) = \frac{(1-R)[\,prêmio(07) + \sum_{m=85}^{120} \frac{(e^{-\lambda_{710} t_{m-1}} - e^{-\lambda_{710} t_m})}{(1+(t_m - t_h)\times r_f(t_h, t_m))}\,]}{proteção(07) + \sum_{n=90,96,102,108,114,120meses} \frac{0{,}5\times\Delta(t_{n-1}, t_n, B)\times(e^{-\lambda_{710} t_n} + e^{-\lambda_{710} t_{n-1}})}{(1+(t_n - t_h)\times r_f(t_h, t_n))}}$$

E20

onde *prêmio*(02) = *prêmio*(01) + *prêmio*(12);

proteção(02) = *proteção*(01) + *proteção* (12)

e assim por diante com *prêmio*(0x) e *proteção* (0x), onde x é um dos vértices de *CDS*.

Apreçamento de títulos utilizando a curva de probabilidade de sobrevivência implícita

De posse da expressão para cálculo de probabilidade de sobrevivência, podemos calcular o preço de um título se soubermos os fluxos de caixa que ele deve pagar e assumindo um valor de recuperação em cada data possível de default.

A maioria dos títulos emitidos pela República do Brasil, assim como pelos outros países emergentes, paga de volta o valor do principal no seu vencimento, enquanto paga semestralmente um cupom com valor de metade do cupom anual que está associado ao título. Com a finalidade de simplificarmos os cálculos, assumimos que o default só pode acontecer uma vez entre cada dois pagamentos de cupons de um título. Dessa forma, podemos modelar os pagamentos a serem feitos ao detentor de um título utilizando-se uma árvore binomial. Da mesma forma que definimos a probabilidade de sobrevivência entre a data inicial um instante qualquer à frente, também definimos de forma complementar a probabilidade de default entre a data inicial um instante qualquer à frente como sendo:

$$Def(t) = 1 - Surv(t) \qquad \textbf{E21}$$

Uma característica importante do mercado global de títulos é que a liquidação das operações de compra e venda é realizada por intermédio de uma câmara de liquidação localizada em Bruxelas chamada *Euroclear*. As operações são liquidadas num sistema chamado DVP, que significa "delivery versus payment": o *Euroclear* cuida do processo de liquidação de tal forma que o dinheiro só passa da conta de uma contraparte para a conta da outra no mesmo instante em que a custódia do título em questão passa entre as mesmas contas no sentido contrário. Além disso, o padrão é que o DVP das operações com títulos aconteça no terceiro dia útil subseqüente ao dia da operação. Dada essa defasagem de tempo, os cálculos de preço, rendimento e de juros pagos ao detentor são efetuados em cada data com referência no terceiro dia útil posterior à data em questão.

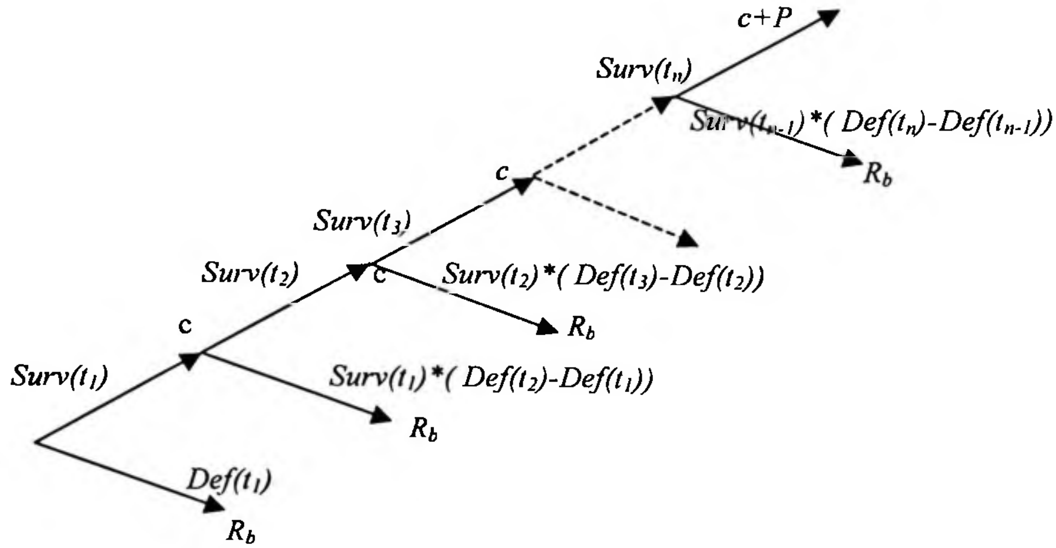


Figura 2: Árvore binomial com interrupção modelando o processo dos pagamentos de um título em função da ocorrência dos pagamentos devidos (cupons de valor *c* semestrais e principal no vencimento).

Utilizamos uma árvore binomial com interrupção para modelarmos os pagamentos a serem recebidos pelo detentor de um título. Cada vértice da árvore corresponde a uma data de pagamento de cupom (freqüência semestral), e a cada um dos pagamentos é associada à probabilidade de que o mesmo ocorra normalmente, que é a probabilidade acumulada de sobrevivência. A alternativa ao pagamento normal, que caracteriza um default ou de forma mais genérica um evento de crédito, corresponde aos ramos descendentes da árvore mostrada na Figura 2. Consideramos que em lugar do pagamento normal ocorre um "pagamento" com valor igual à nossa estimativa para a taxa de recuperação desse título (R_b), que reflete o valor esperado para o preço do título num momento logo após a ocorrência de um evento de crédito. A probabilidade de ocorrência de cada um desses "pagamentos" é igual à probabilidade de sobrevivência até a data de pagamento de cupom anterior multiplicada pela probabilidade de default entre a data de pagamento de cupom anterior e a data correspondente ao vértice da árvore em questão.

Vale salientar que o valor R_b deve ser maior ou igual ao valor R utilizado nos cálculos do mercado de *CDS* porque o valor de R é, por definição, o valor de mercado do título elegível mais barato de um determinado emissor após um evento de crédito.

O preço do título pode então ser calculado usando os fluxos de caixa da Figura 2 ponderados pelas probabilidades de ocorrência de cada um deles, e trazidos a valor presente utilizando-se a taxa de juros livre de risco:

$$P = \frac{R_b \times (Def(t_1))}{(1+r_f(t_l,t_1))^{\frac{(t_1-t_l)}{360}}} + \frac{(1+c)\times Surv(t_{n+1})}{(1+r_f(t_l,t_{n+1}))^{\frac{(t_{n+1}-t_l)}{360}}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+r_f(t_l,t_i))^{\frac{(t_i-t_l)}{360}}} \times [R\times(Surv(t_i)\times(Def(t_{i+1})-Def(t_i)))+c\times Surv(t_i)] \qquad \text{E22}$$

onde

- n+1 é o número de cupons que ainda faltam ser pagos ao detentor do título na data t_h;
- t_l é a data correspondente a três dias úteis à frente da data de negociação (t_h).

Como na data de negociação não temos disponível a curva de juros livre de risco *spot* (r_f) de três dias à frente, deveríamos usar a curva de juros livre de risco *forward* entre três dias à frente e os vencimentos em questão. Dada a maior liquidez da curva spot e a baixa ordem de grandeza da diferença que o uso dessa aproximação acarreta no resultado final, o mercado considera nos cálculos a taxa de juros *spot* vigente no dia da negociação.

O método que utilizamos para o cálculo do valor dos títulos contempla o fato de que títulos que têm preço unitário acima de par devem ter maior retorno (*yield*). Podemos provar que, para títulos com as mesmas datas de pagamento de cupom e principal, aquele que possui maiores valores nos pagamentos deve proporcionar maior retorno ao detentor se consideramos o método de apreçamento descrito nessa seção (ver apêndice II). Dessa forma, nosso modelo elimina uma das fontes de base entre os mercados de títulos e de *CDS*.

Implementação do Modelo

Os dados históricos utilizados para implementação do modelo foram extraídos da plataforma de dados Bloomberg e têm freqüência diária:

- taxa Libor em USD para cada vértice da curva;
- taxa de *spread* do *CDS* para cada vértice: 1, 2, 3, 5, 7 e 10 anos;
- preços dos títulos globais emitidos pela República Federativa do Brasil;

O período de tempo a que se referem os dados históricos coletados abrangeu 309 dias úteis, começando em 19 de março de 2004 e se estendendo até 17 de junho de 2005.

Além desses dados diários, também foram obtidos as características de cada título: datas de emissão, de pagamento de cupons e de vencimento; valor do cupom pago ao detentor do título durante um ano (pagamentos semestrais).

Os dados foram coletados da Bloomberg usando uma planilha de Excel. A partir da planilha, usamos o Matlab para ler os dados e processá-los. Usamos as equações de E14 até E20 para obtermos, a partir dos valores das taxas de *CDS* praticadas pelo mercado, os valores de λ (que foi considerado constante entre cada dois vértices). Para o valor da taxa de recuperação usada nos cálculos do valor da proteção, assumimos que 25% do valor de face é razoável, após analisarmos os casos reais dos últimos eventos de crédito (Argentina e Equador) e checarmos qual o valor assumido pelos principais agentes desse mercado. Como os vértices do mercado de *CDS* somente dão taxas até o prazo de 10 anos, consideramos para prazos superiores a 10 anos um λ constante igual ao λ calculado para o intervalo entre 7 e 10 anos. Essa aproximação foi necessária para contornarmos o problema de que os dois mercados (*CDS* e *cash*) não são totalmente replicáveis em termos de prazos em que os agentes podem tomar posição. Dada a pequena liquidez dos contratos de *CDS* mais longos, o que implica maior incerteza quanto à precisão dos dados estudados, nos pareceu mais adequado manter a intensidade do processo de Poisson (λ) constante do que tentar extrapolarmos a curva de *CDS* e dela obtermos o valor de λ.

Após calcularmos os valores da probabilidade acumulada de sobrevivência para cada dia dentro do período em estudo, usamos a equação E22 para calcular o valor presente dos fluxos de caixa esperados dos títulos globais emitidos pela República Federativa do Brasil. Usamos para cada um dos títulos um valor para a taxa de recuperação de 30% do valor de face, que parece fazer sentido quando analisamos a média dos preços de mercado de papéis de países que sofreram algum tipo de evento de crédito logo após a ocorrência de tal evento. Fage & Liu (2002) defendem que no apreçamento de títulos seja utilizado uma valor maior para a taxa de recuperação do que no apreçamento de *CDS*, tendo em vista a vantagem que o último possui de escolha que o comprador de proteção tem do ativo que servirá de referência para o cálculo do valor a ser pago em caso de ocorrência de evento de crédito.

Como já descrito, várias características diferentes dos mercados de títulos e de *CDS* fazem com que haja uma diferença significante (base) nos *Z-spreads* de cada mercado para os mesmos prazos. Fizemos vários testes de modelos possíveis para o comportamento temporal dessa base, com a finalidade de extrairmos esse efeito das cotações de *CDS* e podermos calcular preços justos para os títulos baseados na curva implícita de probabilidade de default. Apresentamos a seguir os resultados obtidos desses testes, juntamente com as conclusões sobre a implementação do método proposto para o caso específico do mercado de títulos emitidos pela República do Brasil.

Resultados Obtidos e Conclusões

A base de *Z-spread* entre *CDS* e títulos variou entre 0 e 200 pontos-base para o período que estudamos (março de 2004 a junho de 2005). Vale salientar que, a cada dia, essa diferença não é constante ao longo da curva de *spreads*. Os *spreads* do mercado de *CDS* variaram entre 50 e 950 pontos-base nesse período para os diferentes prazos operados (entre 1 e 10 anos), com a curva de *spreads* tendo inclinação positiva (maiores *spreads* para prazos mais longos) se não há percepção muito ruim sobre o crédito. Tendo em vista esses dados, fizemos algumas tentativas de modelar o comportamento da base entre *CDS* e títulos. Dado o alto número de fatores influenciando essa base, tivemos que aceitar uma aproximação que resultasse na menor diferença média entre os valores.

A característica do mercado de *CDS* de ter forte alta de *spreads* em caso de deterioração da percepção sobre o crédito, especialmente nos prazos mais longos, que perdem liquidez mais rapidamente, nos fez optar por um modelo em que a base fosse proporcional ao nível de *spread* para todos os prazos. Conforme esperado, os preços calculados usando os *spreads* do mercado de *CDS* sem nenhum ajuste (isso implicaria base zero) produziram preços abaixo do observado na realidade para todos os títulos. Testamos alguns fatores multiplicativos para chegarmos numa curva de *spreads* que quando aplicada ao mercado de títulos produzisse a menor diferença média entre os preços observados e os calculados. Concluímos que 85% é um fator que produz na média temporal diferenças pequenas entre os valores calculados e os reais, conforme podemos observar na Figura 3 (ver demais resultados dos testes no apêndice III).

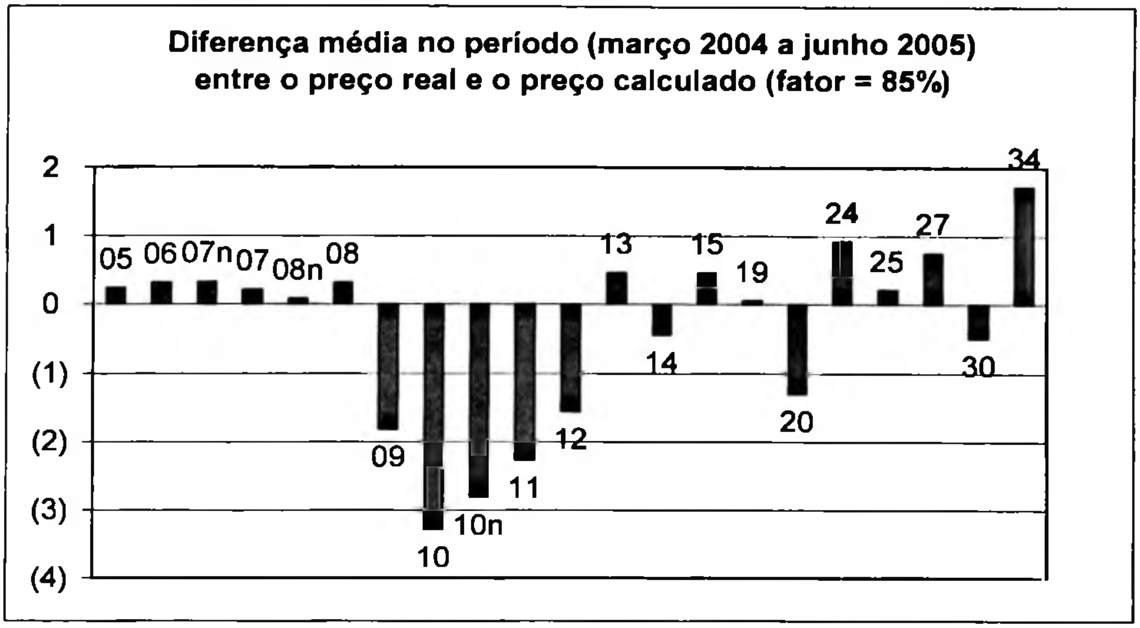


Figura 3: Valores das diferenças médias no tempo (em pontos de preço percentuais do valor de face) entre os preços observados no mercado de títulos brasileiros e os calculados utilizando a metodologia proposta.

Mesmo chegando a diferenças médias relativamente pequenas para a maioria dos títulos, observamos algumas deficiências do modelo proposto. Uma delas é evidente ao observarmos a Figura 3: a não ser por uma questão de função utilidade dos compradores dos papéis de dívida externa brasileira, não há uma razão óbvia para o comportamento dos preços dos papéis que têm vencimento entre 2009 e 2012. A outra deficiência é a acentuada variação detectada na diferença entre o valor calculado e o real ao longo do período estudado, conforme apresentado na Figura 4.

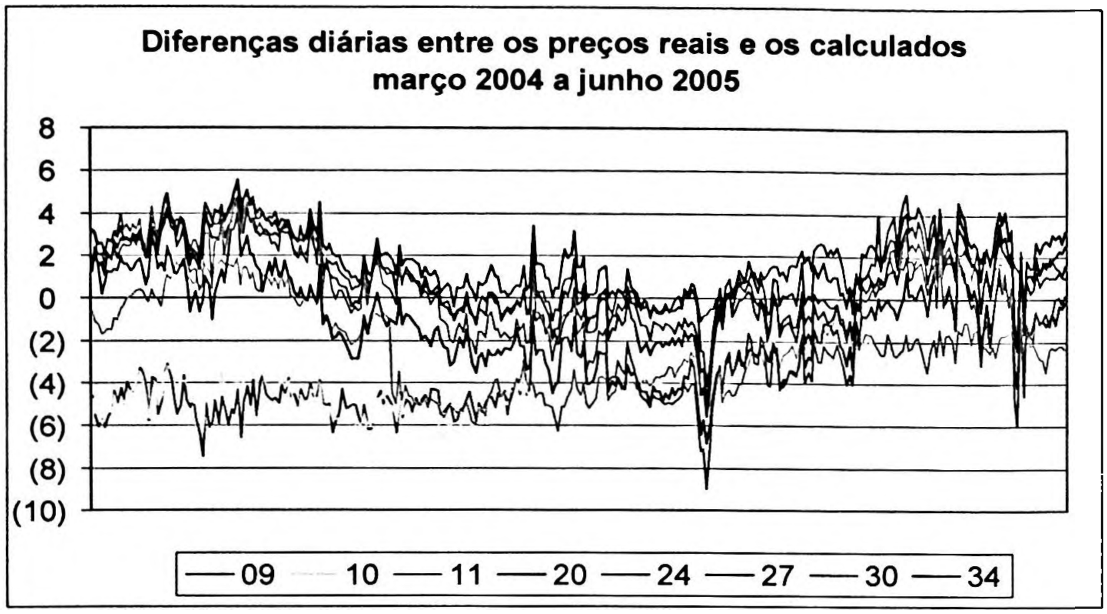


Figura 4: diferenças diárias (em pontos de preço percentuais do valor de face) entre os preços observados no mercado de títulos brasileiros e os calculados utilizando a metodologia proposta.

Tendo em vista as razões expostas, para chegarmos a um modelo de apreçamento que forneça resultados precisos em qualquer dia necessitamos de um modelo matemático mais sofisticado para calcular os preços teóricos justos do ponto de visto do risco de crédito embutido em cada título.

No sentido de tornar mais robusto o modelo de previsão da base do *CDS* a cada dia, podemos aumentar o tamanho da amostra temporal utilizada. A limitação de dados que tivemos foi da base de dados Bloomberg, que fornece os dados de níveis de mercado para prazos mais longos de *CDS* (7 e 10 anos) somente a partir de março de 2004.

Referências

Andritzky, Jochen, "Implied Default Probabilities and Default Recovery Ratios: An Analysis of Argentine Eurobonds 2000-2002", Swiss Institute of Banking and Finance (January 2004).

British Bankers' Association, Credit Derivatives Report 2003/2004 Executive Summary.

Ciraolo, Stefania, Berardi, Andrea and Trova, Michele, "Predicting Default Probabilities and Implementing Trading Strategies for Emerging Markets Bond Portfolios" (June 2002).

Ene, Robert and Vlad, Sorin, "Forecasting Spreads on Emerging-Markets Debt Using Credit Default Swaps – a Kalman Filter Approach", HEC - Master of Science in Banking and Finance, University of Lausanne (November 2002).

Fage, Paul and Liu, Xiongfu, "The Credit Default Swap – Bond Basis", Emerging Markets Sovereign Strategy, Credit Suisse First Boston (August 2000)

Francis, Chris, Kakodkar, Atish and Rooney, Mary, "Credit Default Swap Handbook", Merrill Lynch (January 2002).

Fruhwirth, Manfred and Sögner, Leopold, "The Jarrow/Turnbull Default Risk Model - Evidence from the German Market" (October 2001). EFA 2002 Berlin Meetings Presented Paper.

Harvey, Campbell, Erb, Claude and Viskanta, Tadas, "Understanding Emerging Market Bonds", Emerging Markets Quarterly 2000, 4:1, 7-23, (P66)

Jarrow, Robert and Turnbull, Stuart, "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk" – The Journal of Finance, Vol. 50, No. 1 (March 1995), 53-85.

Madan, Dilip, "Pricing the Risks of Default" – University of Maryland (March 2000).

Martin, Barnaby, Francis, Chris and Kakodkar, Atish, "Valuing the CDS Basis", Merrill Lynch (April 2003)

Merton, Robert, "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates", Journal of Finance 29 (1974), 449-470.

O'Kane, Dominic and McAdie, Robert, "Explaining the Basis: Cash versus Default Swaps", Structured Credit Research, Lehman Brothers (May 2001)

O'Kane, Dominic and Turnbull, Stuart, "Valuation of Credit Default Swaps", Fixed Income Quantitative Credit Research, Lehman Brothers (April 2003)

Ranciere, Romain, "Credit Derivatives in Emerging Markets", IMF Policy Discussion Paper, International Monetary Fund (April 2002).

Singh, Manmohan, "Recovery Rates from Distressed Debt – Empirical Evidence from Chapter 11 Fillings, International Litigation and Recent Sovereign Debt Restructurings", IMF Working Paper, International Monetary Fund (August 2003).

Yue, Vivian, "Sovereign Default and Debt Renegotiation", University of Pennsylvania (February 2005).

Apêndices

Apêndice I: Tamanho do mercado global de derivativos de crédito

Os derivativos de crédito têm apresentado, desde 1997, crescimento de volume exponencial. Segundo dados da BBA (*British Bankers' Association*), o mercado global de derivativos de crédito alcançou a marca de USD 5 trilhões em volume total negociado, e os agentes estimam que esse volume deve passar de USD 8 trilhões em 2006 (Figura 1).

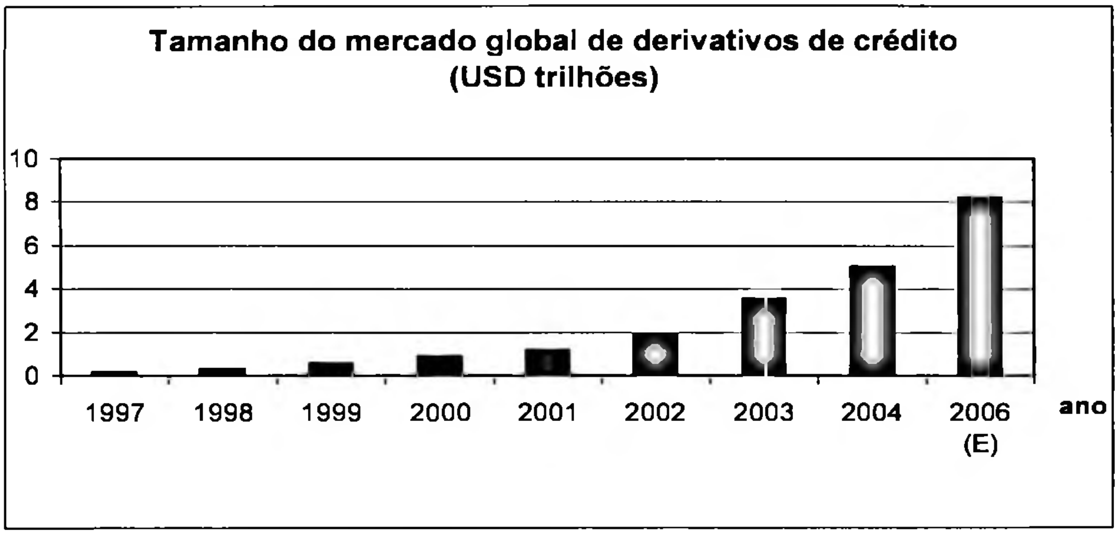


Figura 3: evolução do volume negociado de derivativos de crédito no mundo todo

Do volume total apresentado na Figura 3, o *CDS* é o instrumento mais líquido, respondendo por cerca de 40% do volume total de derivativos de crédito.

Apêndice II: Demonstração da propriedade de títulos que têm maior preço unitário de proporcionarem maior retorno

Sejam dois títulos b_1 e b_2 que tenham mesmo vencimento 1 período de tempo à frente da data de apreçamento, e suponhamos que a data de apreçamento coincida com a data de liquidação de operações de compra e venda realizadas com esses títulos. Seja r_1 a taxa de juros livre de risco válida na data de apreçamento para vencimento 1 período à frente, e sejam c_1 e c_2 ($c_1 > c_2$) os cupons a serem pagos na data de vencimento pelos títulos b_1 e b_2, respectivamente. Assumindo que o título tenha como valor de principal 1 (ou 100% do valor de face), que os dois tenham o mesmo emissor e que possamos definir que uma taxa de recuperação R seja adequada para esse emissor. Seja S a probabilidade de sobrevivência acumulada para o crédito do emissor entre a data de apreçamento e 1 período à frente. Os preços justos para os títulos b_1 e b_2 podem ser calculados como:

$$P_i = S \times \frac{1+c_i}{1+r_1} + (1-S) \times \frac{R}{1+r_1} \quad i=1,2 \qquad \textbf{E23}$$

Utilizando-se a equação E3, podemos reescrever os preços dos títulos como:

$$P_i = \frac{1+c_i}{(1+r_1)(1+s_i)} \qquad \textbf{E24}$$

Igualando-se as equações E23 às equações E24, temos:

$$\frac{1+c_1}{(1+r_1)(1+s_1)} = \frac{S \times (1+c_1) + (1-S) \times R}{1+r_1} \Rightarrow (1+s_1) = \frac{1+c_1}{S \times (1+c_1) + (1-S) \times R}$$

Analogamente, temos para o valor do *spread* do título 2:

$$(1+s_2) = \frac{1+c_2}{S \times (1+c_2) + (1-S) \times R}$$

Por definição, S é um valor entre 0 e 1, e R é um valor entre 0 e 1. Queremos provar que:

$$1+s_1 > 1+s_2 \Leftrightarrow \frac{1+c_1}{S \times (1+c_1) + (1-S) \times R} > \frac{1+c_2}{S \times (1+c_2) + (1-S) \times R}$$

Alguns cálculos nos levam a chegar na seguinte identidade:

$$\frac{S\times(1+c_1)+(1-S)\times R}{S\times(1+c_2)+(1-S)\times R}=\frac{1+c_1-R+R(c_2-c_1)}{1+c_2-R}$$

Multiplicamos os dois lados da desigualdade que queremos provar por $S\times(1+c_1)+(1-S)\times R$, o que nos leva a:

$$\frac{(1+c_1)(1+c_2-R)}{1+c_1-R+R(c_2-c_1)}>(1+c_2)$$

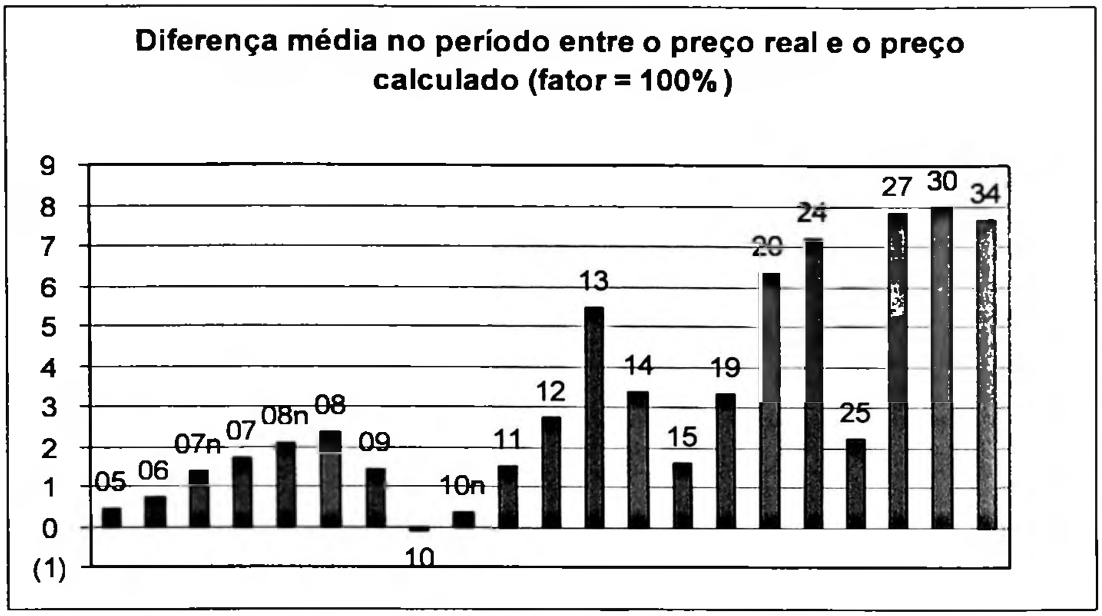
Multiplicando em cruz e manipulando as parcelas chegamos a:

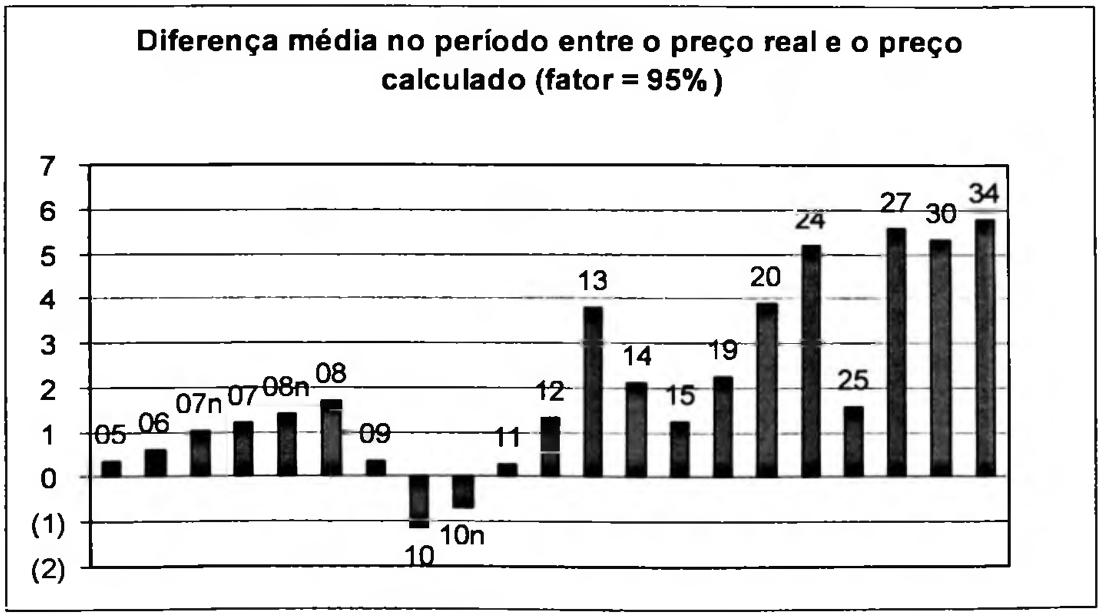
$$Rc_2(c_2-c_1)<0$$

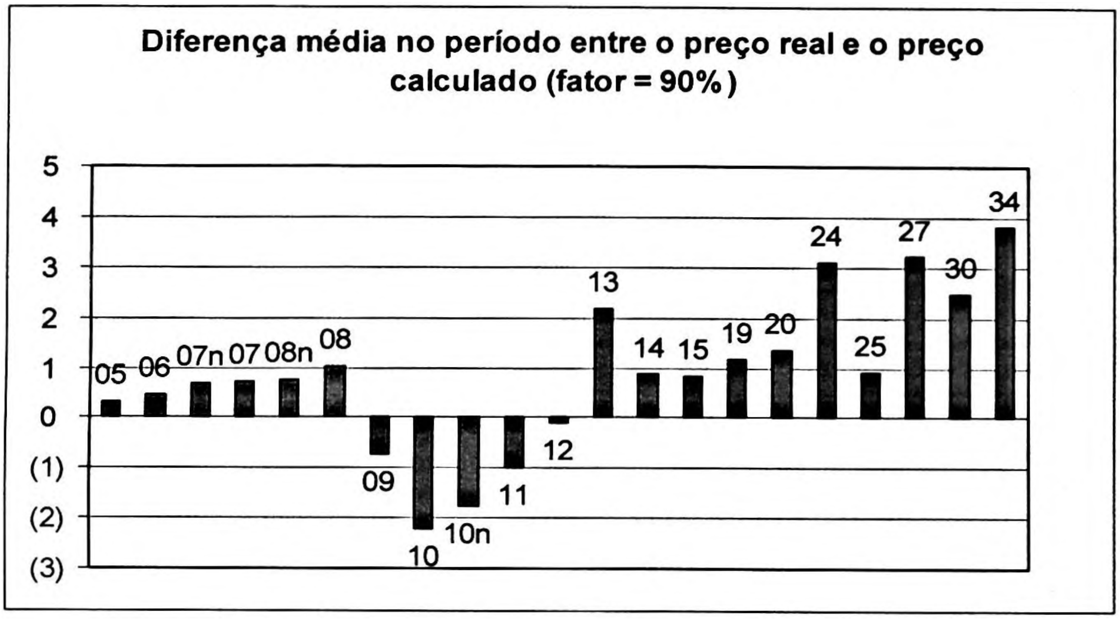
Dado que $c_1 > c_2$ e que $Rc_2 > 0$, provamos que a desigualdade é verdadeira.

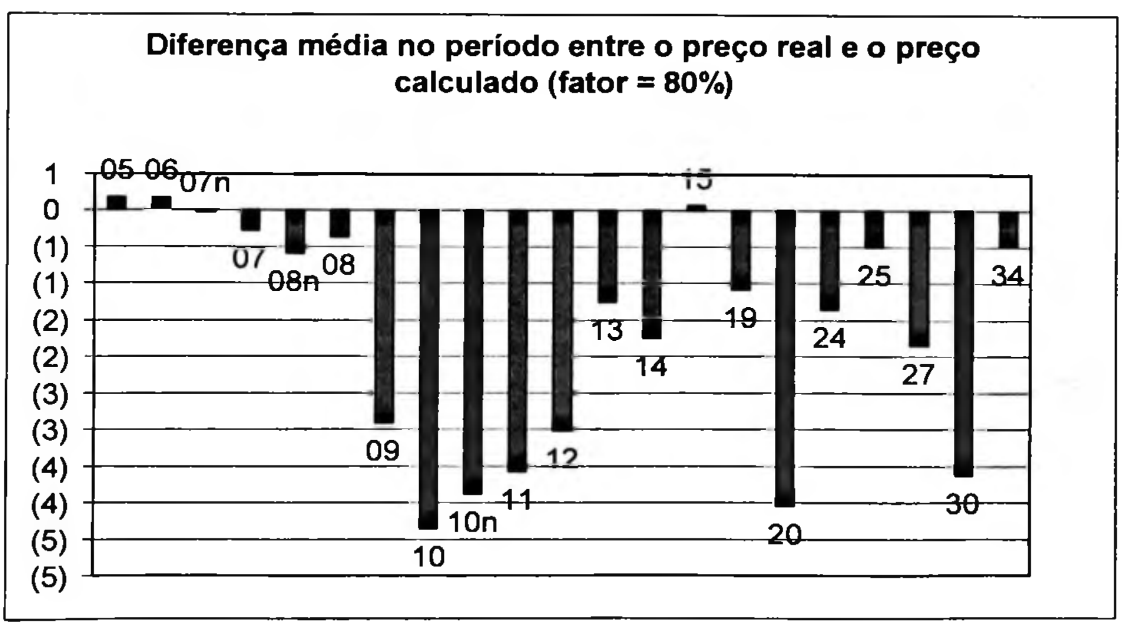
Analisemos agora dois títulos que pagam cupons pré-fixados nas mesmas datas e têm mesmo vencimento. Consideramos que um título que paga cupons semestrais e o principal no final equivale à soma de vários mini-títulos com principais iguais e sem cupom (*zero-coupon*) com prazos diferentes e mais um mini-título que equivale ao principal com vencimento igual ao vencimento do título original. Como o resultado vale para cada mini-título que representa os cupons individualmente, vale também para a soma deles. Os mini-títulos que representam o principal de cada um dos dois títulos são iguais.

Apêndice III: Resultados dos testes utilizados e descartados na eleição do fator multiplicativo mais adequado para os *spreads* de *CDS*






Diferença média no período entre o preço real e o preço calculado (fator = 90%)
5
4
3
2
1
0
(1)
(2)
(3)
05
06
07n
07
08n
08
09
10
10n
11
12
13
14
15
19
20
24
25
27
30
34


Diferença média no período entre o preço real e o preço calculado (fator = 80%)
1
0
(1)
(1)
(2)
(2)
(3)
(3)
(4)
(4)
(5)
(5)
05
06
07n
07
08n
08
09
10
10n
11
12
13
14
15
19
20
24
25
27
30
34

Apêndice IV: Programa em linguagem MATLAB utilizado nos cálculos de preços de títulos brasileiros a partir dos níveis do mercado de *CDS*

Programa Principal:

```
%%% Leitura dos dados históricos
clear all;
[libor, dataslibor] = xlsread('tese3.xls', 'libor','B1:AB310');
[cds, datascds]=xlsread('tese3.xls','dadoscds','A1:G310');
[bonds, datasbonds]=xlsread('tese3.xls','bonds');
CouponRate = xlsread('tese3.xls', 'bondset','B2:V2');
Settle = xlsread('tese3.xls', 'bondset','B3:V3');
Maturity = xlsread('tese3.xls', 'bondset','B4:V4');
Settle=x2mdate(Settle);
Maturity=x2mdate(Maturity);
[CFlowAmounts, CFlowDates, TFactors,
CFlowFlags]=cfamounts(CouponRate,Settle, Maturity);
%%% laço com cálculos dos lambdas
premiumdates=cfdates(floor(now),addtodate(floor(now),10,'year'));
premiumtime=[0.5:0.5:10];
discretetime=[1/12:1/12:10];
discretetime1lag=[0:1/12:10-1/12];
LAMBDA=[1 2 3 4 5 6]
for n=1:309
    interv01
    interv12
    interv23
    interv35
    interv57
    interv710
    LAMBDAN =[lambdazeroum lambdaumdois lambdadoistres lambdatrescinco
lambdacincosete lambdasetedez];
    LAMBDA=cat(1,LAMBDA,LAMBDAN);
end
xlswrite('lambdasinterv', LAMBDA, 'lambdas');
bondpricing
```

INTERV01:

```
liborratepremium=interp1(libor(1,:),libor(n+1,:),premiumtime,'spline');
liborratepremiumfactor=1+liborratepremium;
premiumdf=1./((liborratepremiumfactor).^(premiumtime));
liborratediscrete=interp1(libor(1,:),libor(n+1,:),discretetime,'spline')
;
liborratediscretefactor=1+liborratediscrete;
discretedf=1./((liborratediscretefactor).^(discretetime));
syms lambda01;
```

```
matrizsomadisc01=discretedf(1,1:12).*(exp(-
lambda01*discretetimellag(1,1:12))-exp(-lambda01*discretetime(1,1:12)));
somadisc01=sum(matrizsomadisc01);
matrizsomapremium01=0.5*premiumdf(1,1:2).*(exp(-
lambda01*premiumtime(1,1:2)));
somapremium01=sum(matrizsomapremium01);
e01=somadisc01*0.75/somapremium01-cds(n,1)/10000;
double chute_inf;
double chute_sup;
double chute_medio;
double valor_inf;
double valor_medio;
double valor_sup;
double erro;
double ref_erro;
double lambda01;
double e01;
chute_inf=0;
chute_sup=0.5;
chute_medio=(chute_inf+chute_sup)/2;
erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
ref_erro=0.0001;
lambda01=0;
matrizsomadisc01=discretedf(1,1:12).*(exp(-
lambda01*discretetimellag(1,1:12))-exp(-lambda01*discretetime(1,1:12)));
somadisc01=sum(matrizsomadisc01);
matrizsomapremium01=0.5*premiumdf(1,1:2).*(exp(-
lambda01*premiumtime(1,1:2)));
somapremium01=sum(matrizsomapremium01);
e01=somadisc01*0.75/somapremium01-cds(n,1)/10000;
e01=double(e01);
while (erro>ref_erro)
    lambda01=chute_inf;
    matrizsomadisc01=discretedf(1,1:12).*(exp(-
lambda01*discretetimellag(1,1:12))-exp(-lambda01*discretetime(1,1:12)));
    somadisc01=sum(matrizsomadisc01);
    matrizsomapremium01=0.5*premiumdf(1,1:2).*(exp(-
lambda01*premiumtime(1,1:2)));
    somapremium01=sum(matrizsomapremium01);
    e01=somadisc01*0.75/somapremium01-cds(n,1)/10000;
    valor_inf=double(e01);
    lambda01=chute_sup;
    matrizsomadisc01=discretedf(1,1:12).*(exp(-
lambda01*discretetimellag(1,1:12))-exp(-lambda01*discretetime(1,1:12)));
    somadisc01=sum(matrizsomadisc01);
    matrizsomapremium01=0.5*premiumdf(1,1:2).*(exp(-
lambda01*premiumtime(1,1:2)));
    somapremium01=sum(matrizsomapremium01);
    e01=somadisc01*0.75/somapremium01-cds(n,1)/10000;
    valor_sup=double(e01);
    lambda01=chute_medio;
    matrizsomadisc01=discretedf(1,1:12).*(exp(-
lambda01*discretetimellag(1,1:12))-exp(-lambda01*discretetime(1,1:12)));
    somadisc01=sum(matrizsomadisc01);
    matrizsomapremium01=0.5*premiumdf(1,1:2).*(exp(-
lambda01*premiumtime(1,1:2)));
    somapremium01=sum(matrizsomapremium01);
```

```
    e01=somadisc01*0.75/somapremium01-cds(n,1)/10000;
    valor_medio=double(e01);
    if (valor_inf>0)
        if(valor_sup<0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup>=0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
            chute_inf=chute_inf-0.5;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    elseif (valor_inf<=0)
        if (valor_sup>0)
            if (valor_medio<0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup<=0)
            if(valor_medio>0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio<=0)
            chute_inf=chute_medio;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    end
end

lambdazeroum=double(lambda01(1,1))
matrizsomadisczeroum=discretedf(1,1:12).*(exp(-
lambdazeroum*discretetime1lag(1,1:12))-exp(-
lambdazeroum*discretetime(1,1:12)));
somadisczeroum=sum(matrizsomadisczeroum);
matrizsomapremiumzeroum=0.5*premiumdf(1,1:2).*(exp(-
lambdazeroum*premiumtime(1,1:2)));
somapremiumzeroum=sum(matrizsomapremiumzeroum);
```

INTERV12:

```
syms lambda12;
matrizsomadisc12=discretedf(1,13:24).*(exp(-
lambda12*discretetime1lag(1,13:24))-exp(-
lambda12*discretetime(1,13:24)));
somadisc12=sum(matrizsomadisc12)+somadisczeroum;
matrizsomapremium12=0.5*premiumdf(1,3:4).*(exp(-
lambda12*premiumtime(1,3:4)));
somapremium12=sum(matrizsomapremium12)+somapremiumzeroum;
e12=somadisc12*0.75/somapremium12-cds(n,2)/10000;
double chute_inf;
double chute_sup;
double chute_medio;
double valor_inf;
double valor_medio;
double valor_sup;
double erro;
double ref_erro;
double lambda12;
double e12;
chute_inf=0;
chute_sup=0.5;
chute_medio=(chute_inf+chute_sup)/2;
erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
ref_erro=0.0001;
lambda12=0;
matrizsomadisc12=discretedf(1,13:24).*(exp(-
lambda12*discretetime1lag(1,13:24))-exp(-
lambda12*discretetime(1,13:24)));
somadisc12=sum(matrizsomadisc12)+somadisczeroum;
matrizsomapremium12=0.5*premiumdf(1,3:4).*(exp(-
lambda12*premiumtime(1,3:4)));
somapremium12=sum(matrizsomapremium12)+somapremiumzeroum;
e12=somadisc12*0.75/somapremium12-cds(n,2)/10000;
e12=double(e12);
while (erro>ref_erro)
    lambda12=chute_inf;
    matrizsomadisc12=discretedf(1,13:24).*(exp(-
lambda12*discretetime1lag(1,13:24))-exp(-
lambda12*discretetime(1,13:24)));
    somadisc12=sum(matrizsomadisc12)+somadisczeroum;
    matrizsomapremium12=0.5*premiumdf(1,3:4).*(exp(-
lambda12*premiumtime(1,3:4)));
    somapremium12=sum(matrizsomapremium12)+somapremiumzeroum;
    e12=somadisc12*0.75/somapremium12-cds(n,2)/10000;
    valor_inf=double(e12);
    lambda12=chute_sup;
    matrizsomadisc12=discretedf(1,13:24).*(exp(-
lambda12*discretetime1lag(1,13:24))-exp(-
lambda12*discretetime(1,13:24)));
    somadisc12=sum(matrizsomadisc12)+somadisczeroum;
    matrizsomapremium12=0.5*premiumdf(1,3:4).*(exp(-
lambda12*premiumtime(1,3:4)));
    somapremium12=sum(matrizsomapremium12)+somapremiumzeroum;
```

```
    e12=somadisc12*0.75/somapremium12-cds(n,2)/10000;
    valor_sup=double(e12);
    lambda12=chute_medio;
    matrizsomadisc12=discretedf(1,13:24).*(exp(-
lambda12*discretetime1lag(1,13:24))-exp(-
lambda12*discretetime(1,13:24)));
    somadisc12=sum(matrizsomadisc12)+somadisczeroum;
    matrizsomapremium12=0.5*premiumdf(1,3:4).*(exp(-
lambda12*premiumtime(1,3:4)));
    somapremium12=sum(matrizsomapremium12)+somapremiumzeroum;
    e12=somadisc12*0.75/somapremium12-cds(n,2)/10000;
    valor_medio=double(e12);
    if (valor_inf>0)
        if(valor_sup<0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup>=0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
            chute_inf=chute_inf-0.5;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    elseif (valor_inf<=0)
        if (valor_sup>0)
            if (valor_medio<0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup<=0)
            if(valor_medio>0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio<=0)
            chute_inf=chute_medio;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    end
end
```

```
lambdaumdois=lambda12
matrizsomadiscumdois=discretedf(1,13:24).*(exp(-
lambdaumdois*discretetimellag(1,13:24))-exp(-
lambdaumdois*discretetime(1,13:24)));
somadiscumdois=double(sum(matrizsomadiscumdois)+somadisczeroum);
matrizsomapremiumumdois=0.5*premiumdf(1,3:4).*(exp(-
lambdaumdois*premiumtime(1,3:4)));
somapremiumumdois=double(sum(matrizsomapremiumumdois)+somapremiumzeroum)
```

INTERV23:

```
syms lambda23;
matrizsomadisc23=discretedf(1,25:36).*(exp(-
lambda23*discretetimellag(1,25:36))-exp(-
lambda23*discretetime(1,25:36)));
somadisc23=sum(matrizsomadisc23)+somadiscumdois;
matrizsomapremium23=0.5*premiumdf(1,5:6).*(exp(-
lambda23*premiumtime(1,5:6)));
somapremium23=sum(matrizsomapremium23)+somapremiumumdois;
e23=somadisc23*0.75/somapremium23-cds(n,3)/10000;
double chute_inf;
double chute_sup;
double chute_medio;
double valor_inf;
double valor_medio;
double valor_sup;
double erro;
double ref_erro;
double lambda23;
double e23;
chute_inf=0;
chute_sup=0.5;
chute_medio=(chute_inf+chute_sup)/2;
erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
ref_erro=0.0001;
lambda23=0;
matrizsomadisc23=discretedf(1,25:36).*(exp(-
lambda23*discretetimellag(1,25:36))-exp(-
lambda23*discretetime(1,25:36)));
somadisc23=sum(matrizsomadisc23)+somadiscumdois;
matrizsomapremium23=0.5*premiumdf(1,5:6).*(exp(-
lambda23*premiumtime(1,5:6)));
somapremium23=sum(matrizsomapremium23)+somapremiumumdois;
e23=somadisc23*0.75/somapremium23-cds(n,3)/10000;
e23=double(e23);
while (erro>ref_erro)
    lambda23=chute_inf;
    matrizsomadisc23=discretedf(1,25:36).*(exp(-
lambda23*discretetimellag(1,25:36))-exp(-
lambda23*discretetime(1,25:36)));
    somadisc23=sum(matrizsomadisc23)+somadiscumdois;
    matrizsomapremium23=0.5*premiumdf(1,5:6).*(exp(-
lambda23*premiumtime(1,5:6)));
    somapremium23=sum(matrizsomapremium23)+somapremiumumdois;
```

```
    e23=somadisc23*0.75/somapremium23-cds(n,3)/10000;
    valor_inf=double(e23);
    lambda23=chute_sup;
    matrizsomadisc23=discretedf(1,25:36).*(exp(-
lambda23*discretetimellag(1,25:36))-exp(-
lambda23*discretetime(1,25:36)));
    somadisc23=sum(matrizsomadisc23)+somadiscumdois;
    matrizsomapremium23=0.5*premiumdf(1,5:6).*(exp(-
lambda23*premiumtime(1,5:6)));
    somapremium23=sum(matrizsomapremium23)+somapremiumumdois;
    e23=somadisc23*0.75/somapremium23-cds(n,3)/10000;
    valor_sup=double(e23);
    lambda23=chute_medio;
    matrizsomadisc23=discretedf(1,25:36).*(exp(-
lambda23*discretetimellag(1,25:36))-exp(-
lambda23*discretetime(1,25:36)));
    somadisc23=sum(matrizsomadisc23)+somadiscumdois;
    matrizsomapremium23=0.5*premiumdf(1,5:6).*(exp(-
lambda23*premiumtime(1,5:6)));
    somapremium23=sum(matrizsomapremium23)+somapremiumumdois;
    e23=somadisc23*0.75/somapremium23-cds(n,3)/10000;
    valor_medio=double(e23);
    if (valor_inf>0)
        if(valor_sup<0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup>=0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
            chute_inf=chute_inf-0.5;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    elseif (valor_inf<=0)
        if (valor_sup>0)
            if (valor_medio<0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup<=0)
            if(valor_medio>0)
                chute_sup=chute_medio;
```

```
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio<=0)
            chute_inf=chute_medio;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    end
end

lambdadoistres=lambda23
matrizsomadiscdoistres=discretedf(1,25:36).*(exp(-
lambdadoistres*discretetime1lag(1,25:36))-exp(-
lambdadoistres*discretetime(1,25:36)));
somadiscdoistres=sum(matrizsomadiscdoistres)+somadiscumdois;
matrizsomapremiumdoistres=0.5*premiumdf(1,5:6).*(exp(-
lambdadoistres*premiumtime(1,5:6)));
somapremiumdoistres=sum(matrizsomapremiumdoistres)+somapremiumumdois;
```

INTERV35:

```
syms lambda35;
matrizsomadisc35=discretedf(1,37:60).*(exp(-
lambda35*discretetime1lag(1,37:60))-exp(-
lambda35*discretetime(1,37:60)));
somadisc35=sum(matrizsomadisc35)+somadiscdoistres;
matrizsomapremium35=0.5*premiumdf(1,7:10).*(exp(-
lambda35*premiumtime(1,7:10)));
somapremium35=sum(matrizsomapremium35)+somapremiumdoistres;
e35=somadisc35*0.75/somapremium35-cds(n,4)/10000;
double chute_inf;
double chute_sup;
double chute_medio;
double valor_inf;
double valor_medio;
double valor_sup;
double erro;
double ref_erro;
double lambda35;
double e35;
chute_inf=0;
chute_sup=0.5;
chute_medio=(chute_inf+chute_sup)/2;
erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
ref_erro=0.0001;
lambda35=0;
matrizsomadisc35=discretedf(1,37:60).*(exp(-
lambda35*discretetime1lag(1,37:60))-exp(-
lambda35*discretetime(1,37:60)));
somadisc35=sum(matrizsomadisc35)+somadiscdoistres;
matrizsomapremium35=0.5*premiumdf(1,7:10).*(exp(-
lambda35*premiumtime(1,7:10)));
somapremium35=sum(matrizsomapremium35)+somapremiumdoistres;
e35=somadisc35*0.75/somapremium35-cds(n,4)/10000;
```

```
e35=double(e35);
while (erro>ref_erro)
    lambda35=chute_inf;
    matrizsomadisc35=discretedf(1,37:60).*(exp(-
lambda35*discretetimellag(1,37:60))-exp(-
lambda35*discretetime(1,37:60)));
    somadisc35=sum(matrizsomadisc35)+somadiscdoistres;
    matrizsomapremium35=0.5*premiumdf(1,7:10).*(exp(-
lambda35*premiumtime(1,7:10)));
    somapremium35=sum(matrizsomapremium35)+somapremiumdoistres;
    e35=somadisc35*0.75/somapremium35-cds(n,4)/10000;
    valor_inf=double(e35);
    lambda35=chute_sup;
    matrizsomadisc35=discretedf(1,37:60).*(exp(-
lambda35*discretetimellag(1,37:60))-exp(-
lambda35*discretetime(1,37:60)));
    somadisc35=sum(matrizsomadisc35)+somadiscdoistres;
    matrizsomapremium35=0.5*premiumdf(1,7:10).*(exp(-
lambda35*premiumtime(1,7:10)));
    somapremium35=sum(matrizsomapremium35)+somapremiumdoistres;
    e35=somadisc35*0.75/somapremium35-cds(n,4)/10000;
    valor_sup=double(e35);
    lambda35=chute_medio;
    matrizsomadisc35=discretedf(1,37:60).*(exp(-
lambda35*discretetimellag(1,37:60))-exp(-
lambda35*discretetime(1,37:60)));
    somadisc35=sum(matrizsomadisc35)+somadiscdoistres;
    matrizsomapremium35=0.5*premiumdf(1,7:10).*(exp(-
lambda35*premiumtime(1,7:10)));
    somapremium35=sum(matrizsomapremium35)+somapremiumdoistres;
    e35=somadisc35*0.75/somapremium35-cds(n,4)/10000;
    valor_medio=double(e35);
    if (valor_inf>0)
        if(valor_sup<0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup>=0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
            chute_inf=chute_inf-0.5;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    elseif (valor_inf<=0)
        if (valor_sup>0)
            if (valor_medio<0)
                chute_inf=chute_medio;
```

```
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup<=0)
            if(valor_medio>0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio<=0)
            chute_inf=chute_medio;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    end
end

lambdatrescinco=lambda35
matrizsomadisctrescinco=discretedf(1,37:60).*(exp(-
lambdatrescinco*discretetime1lag(1,37:60))-exp(-
lambdatrescinco*discretetime(1,37:60)));
somadisctrescinco=sum(matrizsomadisctrescinco)+somadiscdoistres;
matrizsomapremiumtrescinco=0.5*premiumdf(1,7:10).*(exp(-
lambdatrescinco*premiumtime(1,7:10)));
somapremiumtrescinco=sum(matrizsomapremiumtrescinco)+somapremiumdoistres
```

INTERV57:

```
syms lambda57;
matrizsomadisc57=discretedf(1,61:84).*(exp(-
lambda57*discretetime1lag(1,61:84))-exp(-
lambda57*discretetime(1,61:84)));
somadisc57=sum(matrizsomadisc57)+somadisctrescinco;
matrizsomapremium57=0.5*premiumdf(1,11:14).*(exp(-
lambda57*premiumtime(1,11:14)));
somapremium57=sum(matrizsomapremium57)+somapremiumtrescinco;
e57=somadisc57*0.75/somapremium57-cds(n,5)/10000;
double chute_inf;
double chute_sup;
double chute_medio;
double valor_inf;
double valor_medio;
double valor_sup;
double erro;
double ref_erro;
double lambda57;
double e57;
chute_inf=0;
chute_sup=0.5;
chute_medio=(chute_inf+chute_sup)/2;
erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
```

```
ref_erro=0.0001;
lambda57=0;
matrizsomadisc57=discretedf(1,61:84).*(exp(-
lambda57*discretetimellag(1,61:84))-exp(-
lambda57*discretetime(1,61:84)));
somadisc57=sum(matrizsomadisc57)+somadisctrescinco;
matrizsomapremium57=0.5*premiumdf(1,11:14).*(exp(-
lambda57*premiumtime(1,11:14)));
somapremium57=sum(matrizsomapremium57)+somapremiumtrescinco;
e57=somadisc57*0.75/somapremium57-cds(n,5)/10000;
e57=double(e57);
while (erro>ref_erro)
    lambda57=chute_inf;
    matrizsomadisc57=discretedf(1,61:84).*(exp(-
lambda57*discretetimellag(1,61:84))-exp(-
lambda57*discretetime(1,61:84)));
    somadisc57=sum(matrizsomadisc57)+somadisctrescinco;
    matrizsomapremium57=0.5*premiumdf(1,11:14).*(exp(-
lambda57*premiumtime(1,11:14)));
    somapremium57=sum(matrizsomapremium57)+somapremiumtrescinco;
    e57=somadisc57*0.75/somapremium57-cds(n,5)/10000;
    valor_inf=double(e57);
    lambda57=chute_sup;
    matrizsomadisc57=discretedf(1,61:84).*(exp(-
lambda57*discretetimellag(1,61:84))-exp(-
lambda57*discretetime(1,61:84)));
    somadisc57=sum(matrizsomadisc57)+somadisctrescinco;
    matrizsomapremium57=0.5*premiumdf(1,11:14).*(exp(-
lambda57*premiumtime(1,11:14)));
    somapremium57=sum(matrizsomapremium57)+somapremiumtrescinco;
    e57=somadisc57*0.75/somapremium57-cds(n,5)/10000;
    valor_sup=double(e57);
    lambda57=chute_medio;
    matrizsomadisc57=discretedf(1,61:84).*(exp(-
lambda57*discretetimellag(1,61:84))-exp(-
lambda57*discretetime(1,61:84)));
    somadisc57=sum(matrizsomadisc57)+somadisctrescinco;
    matrizsomapremium57=0.5*premiumdf(1,11:14).*(exp(-
lambda57*premiumtime(1,11:14)));
    somapremium57=sum(matrizsomapremium57)+somapremiumtrescinco;
    e57=somadisc57*0.75/somapremium57-cds(n,5)/10000;
    valor_medio=double(e57);
    if (valor_inf>0)
        if(valor_sup<0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup>=0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
```

```
            elseif (valor_medio>=0)
            chute_inf=chute_inf-0.5;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    elseif (valor_inf<=0)
        if (valor_sup>0)
            if (valor_medio<0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup<=0)
            if(valor_medio>0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio<=0)
            chute_inf=chute_medio;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    end
end

lambdacincosete=lambda57
matrizsomadisccincosete=discretedf(1,61:84).*(exp(-
lambdacincosete*discretetime1lag(1,61:84))-exp(-
lambdacincosete*discretetime(1,61:84)));
somadisccincosete=sum(matrizsomadisccincosete)+somadisctrescinco;
matrizsomapremiumcincosete=0.5*premiumdf(1,11:14).*(exp(-
lambdacincosete*premiumtime(1,11:14)));
somapremiumcincosete=sum(matrizsomapremiumcincosete)+somapremiumtrescinc
o;
```

INTERV710:

```
syms lambda710;
matrizsomadisc710=discretedf(1,85:120).*(exp(-
lambda710*discretetime1lag(1,85:120))-exp(-
lambda710*discretetime(1,85:120)));
somadisc710=sum(matrizsomadisc710)+somadisccincosete;
matrizsomapremium710=0.5*premiumdf(1,15:20).*(exp(-
lambda710*premiumtime(1,15:20)));
somapremium710=sum(matrizsomapremium710)+somapremiumcincosete;
e710=somadisc710*0.75/somapremium710-cds(n,6)/10000;
double chute_inf;
double chute_sup;
double chute_medio;
double valor_inf;
```

```
double valor_medio;
double valor_sup;
double erro;
double ref_erro;
double lambda710;
double e710;
chute_inf=0;
chute_sup=0.5;
chute_medio=(chute_inf+chute_sup)/2;
erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
ref_erro=0.0001;
lambda710=0;
matrizsomadisc710=discretedf(1,85:120).*(exp(-
lambda710*discretetimellag(1,85:120))-exp(-
lambda710*discretetime(1,85:120)));
somadisc710=sum(matrizsomadisc710)+somadisccincosete;
matrizsomapremium710=0.5*premiumdf(1,15:20).*(exp(-
lambda710*premiumtime(1,15:20)));
somapremium710=sum(matrizsomapremium710)+somapremiumcincosete;
e710=somadisc710*0.75/somapremium710-cds(n,6)/10000;
e710=double(e710);
while (erro>ref_erro)
     lambda710=chute_inf;
     matrizsomadisc710=discretedf(1,85:120).*(exp(-
lambda710*discretetimellag(1,85:120))-exp(-
lambda710*discretetime(1,85:120)));
     somadisc710=sum(matrizsomadisc710)+somadisccincosete;
     matrizsomapremium710=0.5*premiumdf(1,15:20).*(exp(-
lambda710*premiumtime(1,15:20)));
     somapremium710=sum(matrizsomapremium710)+somapremiumcincosete;
     e710=somadisc710*0.75/somapremium710-cds(n,6)/10000;
     valor_inf=double(e710);
     lambda710=chute_sup;
     matrizsomadisc710=discretedf(1,85:120).*(exp(-
lambda710*discretetimellag(1,85:120))-exp(-
lambda710*discretetime(1,85:120)));
     somadisc710=sum(matrizsomadisc710)+somadisccincosete;
     matrizsomapremium710=0.5*premiumdf(1,15:20).*(exp(-
lambda710*premiumtime(1,15:20)));
     somapremium710=sum(matrizsomapremium710)+somapremiumcincosete;
     e710=somadisc710*0.75/somapremium710-cds(n,6)/10000;
     valor_sup=double(e710);
     lambda710=chute_medio;
     matrizsomadisc710=discretedf(1,85:120).*(exp(-
lambda710*discretetimellag(1,85:120))-exp(-
lambda710*discretetime(1,85:120)));
     somadisc710=sum(matrizsomadisc710)+somadisccincosete;
     matrizsomapremium710=0.5*premiumdf(1,15:20).*(exp(-
lambda710*premiumtime(1,15:20)));
     somapremium710=sum(matrizsomapremium710)+somapremiumcincosete;
     e710=somadisc710*0.75/somapremium710-cds(n,6)/10000;
     valor_medio=double(e710);
     if (valor_inf>0)
          if(valor_sup<0)
               if (valor_medio<0)
                    chute_sup=chute_medio;
                    chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
```

```
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup>=0)
            if (valor_medio<0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
            chute_inf=chute_inf-0.5;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    elseif (valor_inf<=0)
        if (valor_sup>0)
            if (valor_medio<0)
                chute_inf=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio>=0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
                erro=(chute_sup-chute_inf)/2;
            end
        elseif (valor_sup<=0)
            if(valor_medio>0)
                chute_sup=chute_medio;
                chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            elseif (valor_medio<=0)
            chute_inf=chute_medio;
            chute_sup=chute_sup+0.5;
            chute_medio=(chute_sup+chute_inf)/2;
            end
        end
    end
end

lambdasetedez=lambda710
matrizsomadiscsetedez=discretedf(1,85:120).*(exp(-
lambdasetedez*discretetimellag(1,85:120))-exp(-
lambdasetedez*discretetime(1,85:120)));
somadiscsetedez=sum(matrizsomadiscsetedez)+somadisccincosete;
matrizsomapremiumsetedez=0.5*premiumdf(1,15:20).*(exp(-
lambdasetedez*premiumtime(1,15:20)));
somapremiumsetedez=sum(matrizsomapremiumsetedez)+somapremiumcincosete;
```

BONDPRICING:

```
%%% Cálculo dos preços dos bonds
datas=xlsread('tese3.xls', 'libor','A2:A310');
datas=x2mdate(datas);
lambdas=xlsread('lambdasinterv', 'lambdas','A2:F310');
```

```
Settle=datewrkdy(datas, 4, 0);
CouponRate = xlsread('tese3.xls', 'bondset','B2:V2');
Maturity = xlsread('tese3.xls', 'bondset','B4:V4');
Maturity=x2mdate(Maturity);

for m=1:309
     Settlement=Settle(m,1);
     [CFlowAmounts, CFlowDates, TFactors,
CFlowFlags]=cfamounts(CouponRate,Settlement, Maturity);
     s=size(CFlowAmounts);
     s=s(1,2);
     Settlement=Settlement*ones(21,s);
     clear Q CFlowTime;

     for q=1:21
          for r=1:s;
               check=isnan(CFlowDates(q,r));
               if(check==1)
                    CFlowTime(q,r)=NaN;
               elseif(check==0)
                    CFlowTime(q,r)=yearfrac(Settlement(q,r),
CFlowDates(q,r), 0);
               end
          end
     end

     for n=1:21
          for p=1:s
               if (CFlowTime(n,p)<=1)
                    Q(n,p)=exp(-lambdas(m,1)*CFlowTime(n,p));
               elseif (1<CFlowTime(n,p)&CFlowTime(n,p)<=2)
                    Q(n,p)=exp(-lambdas(m,1)-lambdas(m,2)*(CFlowTime(n,p)-
1));
               elseif (2<CFlowTime(n,p)&CFlowTime(n,p)<=3)
                    Q(n,p)=exp(-lambdas(m,1)-lambdas(m,2)-
lambdas(m,3)*(CFlowTime(n,p)-2));
               elseif (3<CFlowTime(n,p)&CFlowTime(n,p)<=5)
                    Q(n,p)=exp(-lambdas(m,1)-lambdas(m,2)-lambdas(m,3)-
lambdas(m,4)*(CFlowTime(n,p)-3));
               elseif (5<CFlowTime(n,p)&CFlowTime(n,p)<=7)
                    Q(n,p)=exp(-lambdas(m,1)-lambdas(m,2)-lambdas(m,3)-
lambdas(m,4)-lambdas(m,5)*(CFlowTime(n,p)-5));
               elseif (CFlowTime(n,p)>7)
                    Q(n,p)=exp(-lambdas(m,1)-lambdas(m,2)-lambdas(m,3)-
2*lambdas(m,4)-2*lambdas(m,5)-lambdas(m,6)*(CFlowTime(n,p)-7));
               end
          end
     end
     RACFlowAmounts=CFlowAmounts.*Q;
     P=ones(21,s)-Q;
     PA=P(:,1);
     for n=1:21
          for p=2:s
               PA(n,p)=Q(n,p-1)*(P(n,p)-P(n,p-1));
          end
     end
     RARV=30*PA;
```

```
    [libor, dataslibor] = xlsread('tese3.xls', 'libor','B1:AB310');
    libordiscrete=interp1(libor(1,:),libor(m+1,:),CFlowTime,'spline');
    libordiscretefactor=1+libordiscrete;
    discdf=1./((libordiscretefactor).^(CFlowTime));
    PVRACFlowAmounts=discdf.*RACFlowAmounts;
    PVRARV=discdf.*RARV;
    PVTOTAL=PVRACFlowAmounts+PVRARV;
    for q=1:21
        for r=1:s;
            check=isnan(PVTOTAL(q,r));
            if(check==1)
                PVTOTAL(q,r)=0;
            end
        end
    end
    for p=1:21
        calcprices(p,m)=sum(PVTOTAL(p,:));
    end
end
calcprices=transpose(calcprices);
xlswrite('calcpr', calcprices,'prices','A1:U309');
```