

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bjbfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE, MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS

**MODELO DISCRETO DE APREÇAMENTO DE DERIVATIVOS
DE TAXAS DE JUROS COM SALTOS DEVIDOS ÀS DECISÕES
DO COMITÊ DE POLÍTICA MONETÁRIA DO BANCO CENTRAL
DO BRASIL**

João Eduardo de Souza Grossi

Orientador: Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

SÃO PAULO
2005

T336.2426 G876m e.2

T88350



2000028163



Powered by MiiPrStar - www.miiprstar.com.br

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE, MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS

DEDALUS - Acervo - FEA



20600028863

**MODELO DISCRETO DE APREÇAMENTO DE DERIVATIVOS
DE TAXAS DE JUROS COM SALTOS DEVIDOS ÀS DECISÕES
DO COMITÊ DE POLÍTICA MONETÁRIA DO BANCO CENTRAL
DO BRASIL**

João Eduardo de Souza Grossi

Dissertação apresentada à
Faculdade de Economia e
Administração e ao Instituto de
Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Rosenfeld

SÃO PAULO
2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Grossi, João Eduardo de Souza

Modelo discreto de apreçamento de derivativos de taxas de juros com saltos devidos às decisões do Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil / João Eduardo de Souza Grossi. -- São Paulo, 2005. 88 p.

Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade de São Paulo, 2005
Bibliografia.

1. Taxa de juros 2. Opções financeiras 3. Interpolação (Análise funcional)
3. Modelagem matemática 4. Finanças 5. Derivativos I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade II. Universidade de São Paulo. Instituto de Matemática e Estatística III. Título.

CDD – 336.2426

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pai e guia supremo. Sempre presente, me ajudou a tornar tudo isso possível.

Aos meus professores e mestres que contribuíram para a minha formação, em especial ao meu orientador professor Dr Rogério Rosenfeld pela confiança em mim depositada.

À minha querida mãe, não apenas uma figura materna, mas referência e fonte de inspiração na minha vida. Do meu lado nos momentos difíceis foi a minha amiga e força para a superação. Nos momentos de alegria, meu orgulho e admiração.

Dedico a memória de meu pai, mesmo não sendo possível sua participação direta em grande parte da minha vida, participou intercedendo por mim junto a Deus.

A todos os meus irmãos que sempre torceram e rezaram por mim. A todos os meus parentes e amigos agradeço a força e o ombro amigo nos momentos que mais precisei.

Dedico especialmente a minha querida esposa e amiga Sandra, fonte do meu orgulho e da minha alegria. Companheira incansável, sempre foi para mim exemplo de força, perseverança e amor.

Resumo

O desenvolvimento de modelos para apreamento de derivativos de taxa de juros tem sido um dos grandes desafios modernos em modelagem financeira. A utilização de tais modelos está se tornando cada vez mais popular no Brasil, devido principalmente aos produtos disponíveis para negociação na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), como as opções sobre o índice IDI e as opções de contrato futuro de DI de um dia.

Outro grande desafio tem sido o de encontrar uma forma de construir uma estrutura a termo de taxas de juros, que possa incorporar eventuais mudanças na taxa-base (SELIC). No Brasil, tais mudanças ocorrem tipicamente em datas pré-definidas pelo Banco Central, em virtude das reuniões do Comitê de Política Monetária (COPOM).

Neste trabalho unimos os dois grandes desafios citados; escolhemos um método para construção da curva de juros que considere as expectativas referentes às decisões do COPOM e um método para incorporar eventuais diferenças observadas quando as decisões do Comitê de Política Monetária não refletiram as expectativas do mercado. Essa diferença causa saltos na curva de juros. Esses modelos serão usados para o apreamento de derivativos de taxa de juros.

Finalmente, testamos o modelo que incorpora um processo estocástico para os saltos na curva de juros no apreamento das opções sobre o índice IDI. Fazemos uma análise comparativa entre o modelo proposto e o modelo de Black-Derman-Toy (1990), a fim de escolhermos um modelo que melhor preveja os acontecimentos no mercado para um determinado período pré-estabelecido, relativo às reuniões do COPOM.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO DOS MODELOS DE APREÇAMENTO DE OPÇÕES DE TAXA DE JUROS	3
2.1	MODELOS DE EQUILÍBRIO	4
2.1.1	<i>Modelo de Merton (1973)</i>	4
2.1.2	<i>Modelo de Vasicek(1977).....</i>	5
2.1.3	<i>Modelo de Rendleman-Bartter (1980)</i>	6
2.1.4	<i>Modelo de Cox, Ingersoll e Ross – CIR (1985).....</i>	6
2.1.5	<i>Modelo de Ahn–Thompson (1988)</i>	7
2.2	MODELOS DE NÃO-ARBITRAGEM.....	7
2.2.1	<i>Modelo de Ho-Lee (1986)</i>	7
2.2.2	<i>Modelo de Hull-White (1990)</i>	8
2.2.3	<i>Modelo de Black, Derman e Toy – BDT (1990).....</i>	10
2.2.4	<i>Modelos Multifatoriais.....</i>	11
3	ESTUDO DE MODELOS PARA CONSTRUÇÃO DA CURVA DE JUROS	13
3.1	MERCADO DE TAXA DE JUROS NO BRASIL	13
3.2	COMPORTAMENTO DOS JUROS NO BRASIL.....	19
3.3	MODELOS PARA CONSTRUÇÃO DA CURVA DA TAXAS DOS DEPÓSITOS INTERFINANCEIROS	20
3.3.1	<i>Interpolação Linear.....</i>	21
3.3.2	<i>Interpolação Polinomial</i>	24
3.3.3	<i>Interpolação por Spline Cúbico</i>	26
3.3.4	<i>Interpolação Geométrica ou Exponencial</i>	28
3.3.5	<i>Interpolação Geométrica Modificada (Modelo Para o Mercado Brasileiro)</i>	31
4	ESTUDO DOS SALTOS NAS DATAS EFETIVAS DO COPOM	39
4.1	ANÁLISE HISTÓRICA	39
4.2	COMPORTAMENTO DOS SALTOS	41
4.3	MODELO PARA OS SALTOS.....	44

5	INCORPORANDO SALTOS NO APREÇAMENTO DE DERIVATIVOS DE TAXA DE JUROS.....	48
5.1	PROCESSO DE BLACK, DERMAN E TOY(1990) PARA A TAXA DE JUROS.....	48
5.1.1	<i>Estrutura a Termo de Volatilidade no BDT.....</i>	<i>52</i>
5.2	PROPOSTA DE MODELO PARA APREÇAMENTO DE DERIVATIVOS DE TAXA DE JUROS COM SALTOS.....	53
5.2.1	<i>Usando o Modelo para o Apreçamento de Opções Sobre IDI.....</i>	<i>57</i>
5.3	COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO BDT E O MODELO PROPOSTO	61
5.4	COMPARAÇÃO ENTRE O MODELO PROPOSTO E O MERCADO	68
6	CONCLUSÃO	72
7	BIBLIOGRAFIA.....	74
	ANEXO I – CÓDIGOS EM MATLAB.....	76

Lista de Figuras

Figura 2-1 Alternativa de Ramos para Árvores Trinomiais.....	9
Figura 2-2 Exemplo de Árvore Trinomial Usada para Eliminar Possibilidade de Taxas Negativas.....	9
Figura 3-1 Evolução Histórica da SELIC e DI Over.	16
Figura 3-2 Variações Diárias do DI Over e Variações na Meta SELIC nas Reuniões do COPOM.....	19
Figura 3-3 Curva de Juros Para Interpolação Linear na Taxa Spot Para o Dia 18-Maio-2005.....	23
Figura 3-4 Evolução do DI Over ao Longo da Curva de Juros Para Interpolação Linear no Fator da Taxa Spot.	23
Figura 3-5 Gráfico da Curva de Juros Spot com Interpolação Polinomial para dia 18-Maio-2005.	25
Figura 3-6 Gráfico da Curva de Juros Spot com Interpolação Polinomial até 01-Jul-2009 para dia 18-Maio-2005.	25
Figura 3-7 Evolução do DI Over ao Longo da Curva Spot Para Interpolação Polinomial.	26
Figura 3-8 Gráfico da Curva de Juros por Spline Cúbico para dia 18-Maio-2005.	27
Figura 3-9 Evolução do DI Over para Interpolação por Spline Cúbico.....	27
Figura 3-10 Gráfico da Curva de Juros com Interpolação Geométrica para dia 18-Maio-2005.....	29
Figura 3-11 Evolução do DI Over para Interpolação Geométrica.	29
Figura 3-12 Gráfico da Curva de Juros Spot com Interpolação Geométrica Modificada para dia 18-Maio-2005.	36
Figura 3-13 Evolução do DI Over para Interpolação Geométrica Modificada para o dia 18-maio-2005.	36
Figura 3-14 Evolução da Curva de Juros de 18-maio-2005 a 19-maio-2005.	38
Figura 3-15 Evolução das Expectativas para DI Over de 18-maio-2005 a 19-maio-2005.	38
Figura 4-1 Comparação entre as previsões do mercado para o DI Over e o observado nas datas efetivas do COPOM.....	40

Figura 4-2 Diferença em pontos base entre as previsões do mercado para o DI Over e o observado nas datas efetivas do COPOM.	40
Figura 4-3 Histograma dos Saltos Observados Como Diferença Entre as Previsões e as Realizações do DI Over.....	42
Figura 4-4 Histograma dos Saltos Observados Como Diferença Percentual Entre as Previsões e as Realizações do DI Over.	42
Figura 4-5 Normplot e Boxplot para a série das diferenças.....	43
Figura 4-6 Normplot e Boxplot para a série dos percentuais.	43
Figura 4-7 Um Passo da Árvore Binomial na Taxa de Juros para incorporar os Saltos.	45
Figura 4-8 Um Passo na Árvore Binomial Final para os Saltos.	47
Figura 5-1 Árvore Binomial de Um Passo para Título com Valor de Face 100 e Vencimento em um ano.....	49
Figura 5-2 Árvore Binomial com Passo Anual para um Título com Vencimento em 2 Anos e a Árvore Binomial Equivalente para a Taxa de Juros Futura.	50
Figura 5-3 Árvore Binomial com Passo Anual para um Título com Vencimento em 2 Anos e a Árvore Binomial Equivalente para a Taxa de Juros Futura.	52
Figura 5-4 Árvore Binomial para taxa de juros sem considerar saltos.	54
Figura 5-5 Árvore Binomial para taxa de juros considerando saltos nas datas efetivas do COPOM.....	54
Figura 5-6 Árvore Binomial do modelo de Black-Derman-Toy com 3 Passos para o dia 4/maio/2005.....	56
Figura 5-7 Árvore Binomial do Modelo com Saltos Incorporados ao modelo BDT com 3 Passos para o dia 4/maio/2005.	56
Figura 5-8 Árvore Binomial do IDI no Método de BDT para 4/maio/2005 com Vencimento em 1ºjulho/2005.	58
Figura 5-9 Árvore Binomial do IDI no Modelo Proposto para 4/maio/2005 com Vencimento em 1/Julho/2005.....	58
Figura 5-10 Árvore Binomial para a Opção IDIJL02 no Modelo BDT para 4/maio/2005.	59
Figura 5-11 Árvore Binomial para a Opção IDIJL02 no Modelo Proposto para 4/maio/2005.....	60
Figura 5-12 Comparação Histórica entre os Preços no Modelo BDT e no Modelo Proposto para a Série IDIJA01 com Vencimento em 02/jan/2004.	62

Figura 5-13 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2004.	63
Figura 5-14 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIOT09 com Vencimento em 01/out/2004.	63
Figura 5-15 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIJA15 com Vencimento em 03/jan/2005.	64
Figura 5-16 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2005.	64
Figura 5-17 Comparação Histórica entre os Preços no Modelo BDT e no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA01 com Vencimento em 02/jan/2004.	66
Figura 5-18 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2004.	66
Figura 5-19 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIOT09 com Vencimento em 01/out/2004.	67
Figura 5-20 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA15 com Vencimento em 03/jan/2005.	67
Figura 5-21 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2005.	68
Figura 5-22 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA01 com Vencimento em 02/jan/2004.	69
Figura 5-23 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2004.	69
Figura 5-24 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIOT09 com Vencimento em 01/out/2004.	70
Figura 5-25 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA15 com Vencimento em 03/jan/2005.	70
Figura 5-26 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2005.	71

11

2

Lista de Tabelas

Tabela 3-1 Histórico das Reuniões do COPOM entre Jan-2000 a Jul-2005.....	14
Tabela 3-2 Preços de Ajuste Para os Contratos Futuros de DI e Suas Respectivas Taxa Implícitas.....	22
Tabela 3-3 Calendário de Datas do COPOM para 2005.....	32
Tabela 3-4 Expectativas para o DI Over Futuro nas Datas de COPOM no dia 18-maio-2005.....	34
Tabela 3-5 Pontos da Curva de Juros Base para Interpolação Geométrica do dia 18-maio-2005.....	35
Tabela 3-6 Pontos Base da Curva de Juros para Interpolação Geométrica do dia 19-maio-2005.....	37
Tabela 3-7 Expectativas para o DI Over Futuro nas Datas de COPOM no dia 19-maio-2005.....	37
Tabela 4-1 Teste de Lilliefors para normalidade.....	44
Tabela 5-1 Exemplo de Estrutura a Termo de Taxa de Juros e Volatilidade.....	49
Tabela 5-2 Estrutura a Termo de Volatilidade Baseada em Dados Históricos para as Datas Efetivas das Reuniões do COPOM entre 3 de maio de 2004 a 3 de maio de 2005.....	53
Tabela 5-3 Dados de mercado do dia 4-maio-2005.....	55
Tabela 5-4 Expectativas do Mercado para o DI Over nas Datas de COPOM em 4-maio-2005.....	55
Tabela 5-5 Contratos de Opção sobre IDI com Vencimento em 1º de Julho de 2005 no dia 4/maio/2005.....	58
Tabela 5-6 : Preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método Proposto para 4-maio-2005.....	60
Tabela 5-7 Série de Opções sobre o Índice IDI Utilizada Para Comparativo Entre o Método Proposto e o Modelo de BDT.....	62
Tabela 5-8 Desvio Padrão das Séries Históricas das Opções sobre IDI no Modelos de BDT e no Modelo Proposto.....	65
Tabela 5-9 Desvio Padrão das Séries Históricas dos Preços das Opções sobre IDI no Mercado e no Modelo Proposto.....	71

1 Introdução

Modelos que levem em consideração o fato de a taxa de juros possuir uma componente estocástica são intensamente utilizados para o apreçamento de derivativos. Os modelos variam entre considerar que a taxa de juros seja uma conseqüência de fatores econômicos, até modelos mais elaborados, que levem em consideração uma série de componentes estocásticas para representar o processo da taxa de juros. No Capítulo 2 faremos uma breve revisão dos principais modelos utilizados nos processos de taxa de juros para o apreçamento de derivativos.

Alguns dos modelos citados nesse Capítulo incorporam as expectativas do mercado para a taxa de juros pela construção de uma curva de juros, também chamada de *estrutura a termo de juros*. Portanto, para poder utilizar esses modelos de uma forma eficiente, precisamos encontrar uma forma eficiente de construção desta curva. No Capítulo 3 fazemos um estudo sobre o comportamento histórico dos juros no Brasil, de forma a identificar eventuais particularidades de mercado brasileiro.

Em seguida, fazemos uma revisão dos principais métodos conhecidos para a construção de curvas de juros. Tais métodos foram implementados com base em informações de taxas negociadas para os Depósitos Interfinanceiros de um dia e em contratos futuros de Depósitos Interfinanceiros de um dia. Consideramos que esses instrumentos representam a melhor forma de se obter expectativas futuras para a taxa de juros no Brasil. Criticando e comparando o comportamento das curvas com as informações históricas, encerramos o Capítulo fazendo a escolha do que consideramos ser o melhor método para a construção da curva de juros no Brasil.

No Capítulo 4 utilizamos o método escolhido no Capítulo anterior para a construção da curva de juros, com o objetivo de obter da curva, as expectativas do mercado para as decisões do COPOM. Essas informações nos mostraram uma evidência forte de que as expectativas, na maioria das vezes, não refletem totalmente os movimentos da taxa para os Depósitos Interfinanceiros após as reuniões do COPOM. A partir daí, estudamos o comportamento dessas diferenças.

Com as particularidades observadas para o mercado brasileiro nos capítulos anteriores, o Capítulo 5 propõe um modelo estocástico para modelar a taxa de juros. Esse modelo incorpora tanto uma componente estocástica que reflete movimentos de

mercados, quanto uma componente estocástica relativa às diferenças observadas entre as expectativas do mercado e o movimento efetivo da taxa de juros do DI de um dia, devido a eventuais alterações da taxa-base nas reuniões do COPOM. Como uma aplicação prática do modelo proposto para o processo da taxa de juros, utilizaremos o modelo para o apuração de derivativos de taxa de juros. Finalmente, faremos uma análise comparativa dos resultados do modelo proposto, com um modelo que consideramos ter características mais próximas e fáceis de se adaptar ao mercado brasileiro. Comparações com os preços de mercado também são feitas nesse Capítulo. Conclusões e observações sobre o trabalho são feitas no Capítulo 6.

2 Revisão dos Modelos de Apreçamento de Opções de Taxa de Juros

O desenvolvimento de modelos para o apreçamento de opções tem sido um dos grandes desafios financeiros da era moderna. Os primeiros modelos foram desenvolvidos para o apreçamento de opções de compra ou venda de ações, mas hoje em dia, é tão grande a quantidade de tipos diferentes de opicionalidades existentes, que os modelos desenvolvidos sofreram um considerável aumento de complexidade.

Opções podem ser encontradas tanto em bolsas de valores ao redor do mundo, como também estão presentes no nosso dia-a-dia. Só o simples fato de decidirmos se vale a pena fazer as compras de casa de uma só vez, fazendo estoque de comida, ou esperar para comprar conforme a necessidade, pode ser encarado como um problema de opções reais. Nesse último caso, podemos considerar como opção o fato de podermos escolher entre duas alternativas disponíveis.

No problema real citado, caso estejamos esperando um aumento no preço dos alimentos sem que o nosso rendimento aumente, a alternativa de fazer as compras de uma só vez pode parecer a melhor escolha. Por outro lado, caso a taxa de juros que conseguimos aplicar ao nosso rendimento seja maior que o aumento esperado para os alimentos, a melhor opção fica sendo aplicar o dinheiro hoje para comprar conforme a necessidade. Aqui fica bem claro o problema das variáveis embutidas na decisão.

Nos modelos de apreçamento de opções não é diferente. A grande variedade de modelos disponíveis vai desde modelos mais simples, onde se considera apenas uma variável aleatória, até modelos mais complexos, com várias variáveis estocásticas, chamados de modelos multifatoriais.

Neste capítulo faremos uma breve revisão dos modelos mais conhecidos para o apreçamento de opções sobre taxa de juros, destacando suas principais vantagens e desvantagens.

2.1 Modelos de Equilíbrio

Os modelos de equilíbrio consistem basicamente em obter, a partir de hipóteses econômicas, o processo para a taxa de juros.

2.1.1 Modelo de Merton (1973)

Este modelo propõe um processo para a taxa de juros instantânea, segundo descrito abaixo.

$$dr = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW^Q$$

Onde:

- dr : variação instantânea da taxa de juros;
- μ e σ : constantes positivas calculadas de modo a garantir a medida livre de risco Q ;
- dt : variação instantânea no tempo;
- dW^Q : componente estocástica representando um processo de Wiener.

O modelo considera que as variações na taxa de juros possuem uma componente determinística dependente do tempo e uma outra componente que segue um movimento browniano, com média zero e variância dt .

O ponto positivo do modelo deve-se à facilidade de implementação. Como pontos negativos podemos citar o fato de o modelo poder retornar taxas negativas e o fato de a componente estocástica da taxa de juros não possuir reversão à média, desejado para os modelos nos quais se considera a taxa de juros como uma variável aleatória.

Para entender melhor a importância da reversão basta lembrar, por exemplo, que taxas em patamares muito baixos aumentam o consumo e incentivam o crescimento, mas podem gerar inflação e dificultar a captação de recursos pelo governo. Por essa razão, quando a taxa se encontra em patamares muito baixos, a expectativa é de que ela volte a subir. Por outro lado, taxas de juros em patamares elevados inibem o

investimento, o consumo e, em geral, aumentam a dívida do governo. Isso reflete na expectativa de queda da taxa de juros.

2.1.2 Modelo de Vasicek(1977)

O modelo desenvolvido por Vasicek considera que a taxa de juros segue o processo:

$$dr = \alpha \cdot (\gamma - r) \cdot dt + \rho \cdot dz$$

Onde:

- dr : variação instantânea da taxa de juros;
- α , γ e ρ : constantes positivas calculadas de modo a garantir a medida livre de risco Q ;
- dt : variação instantânea no tempo;
- dz : componente estocástica representando um processo de Normal.

A evolução do modelo de Vasicek vem do fato de o processo da taxa de juros possuir reversão à média. A reversão à média é facilmente observada considerando-se apenas o fator determinístico do processo aleatório:

$$dr = \alpha \cdot (\gamma - r) \cdot dt$$

Resolvendo-se a equação diferencial acima entre t_0 , com taxa r_0 , até t com taxa r_t , teremos:

$$r_t = \gamma - (\gamma - r_0) \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, temos $r_t \rightarrow \gamma$, ou seja, para t muito grande, a taxa de juros reverte à constante γ . É importante também destacar que, quanto maior o valor da constante α , mais rápido a taxa de juros reverte a γ . A constante α também é chamada de velocidade de reversão à média γ .

Apesar de o modelo de Vasicek possuir reversão à média, ainda podemos ter taxas negativas. Uma outra desvantagem do modelo pode ser considerada o fato de a estrutura a termo da taxa de juros ser uma consequência do ajuste dos parâmetros do modelo.

2.1.3 Modelo de Rendleman-Bartter (1980)

Este modelo considera que as taxas de juros possuem processo log-normal, análogo ao modelo estocástico para o preço das ações utilizado por Black-Scholes(1973):

$$dr = \mu \cdot r \cdot dt + \sigma \cdot r \cdot dz$$

Onde:

- dr : variação instantânea da taxa de juros;
- μ e σ : constantes positivas calculadas de modo a garantir a medida livre de risco;
- dt : variação instantânea no tempo;
- dz : descreve a componente estocástica normal;

Como principal ponto positivo podemos considerar o fato de o modelo não retornar taxas negativas. Por outro lado, a taxa de juros não possui reversão à média e, como o modelo de Vasicek, a estrutura a termo é obtida com ajuste dos parâmetros do modelo.

2.1.4 Modelo de Cox, Ingersoll e Ross – CIR (1985)

Este foi o primeiro modelo a considerar reversão à média para a taxa de juros e impossibilitar taxas de juros negativas. O processo contínuo livre de risco para o modelo é:

$$dr = \alpha \cdot (\gamma - r) \cdot dt + \rho \cdot \sqrt{r} \cdot dz$$

Onde:

- dr : variação instantânea da taxa de juros;
- α , γ e ρ : constantes positivas calculadas de modo a garantir a medida livre de risco;
- dt : variação instantânea no tempo;
- dz : componente estocástica representando um processo de Normal.

O principal ponto negativo do modelo deve-se ao fato da estrutura a termo de taxa de juros ser uma consequência dos ajustes dos parâmetros do modelo.

2.1.5 Modelo de Ahn–Thompson (1988)

Este modelo incorpora um processo difusivo de saltos no modelo CIR. A motivação do modelo deveu-se principalmente por se identificar que, apesar de alguns processos serem modelados para o tempo contínuo, trata-se na verdade de processos discretos. Como forma de incorporar esse efeito nos modelos difusivos, os autores sugeriram a incorporação de saltos contínuos, ocorrendo com distribuição de probabilidade de Poisson com fator λ .

O processo para a taxa de juros sugerida ficou:

$$dr = \alpha \cdot (\gamma - r) \cdot dt + \rho \cdot \sqrt{r} \cdot dz + \delta \cdot dy$$

O modelo possui uma componente de processo difusivo dz e um processo adicional de saltos dy . O termo δ trata-se de uma constante de valor negativo, mas de forma a não causar taxas negativas. Assume-se que intensidade de y é $\pi \cdot r$.

A desvantagem aqui continua sendo o fato de a estrutura a termo da taxa de juros ser consequência do ajuste dos parâmetros do modelo.

2.2 Modelos de Não-Arbitragem

A grande vantagem dos modelos de não-arbitragem deve-se ao fato deles incorporarem a estrutura a termo da taxa de juros. Os modelos de equilíbrio podem ser adaptados para não-arbitragem, fazendo-se o termo multiplicativo de dt – constante no modelo – passar a ser dependente do tempo para se ajustar à estrutura a termo.

2.2.1 Modelo de Ho-Lee (1986)

O modelo de Ho-Lee foi o primeiro a ser consistente com a estrutura a termo de taxa de juros. Podemos considerar o modelo como uma versão melhorada do modelo de

Merton(1973), já que, em vez da constante μ , temos uma função $\theta(t)$ calculada de forma a ser consistente com a estrutura a termo da taxa de juros. O processo está descrito abaixo:

$$dr = \theta(t) \cdot dt + \sigma \cdot dW^Q$$

$$\theta(t) = \frac{d}{dt} F(0,t) + \sigma^2 \cdot t$$

Onde:

- dr : variação instantânea da taxa de juros;
- $F(0,t)$ é a taxa de juros instantânea para o vencimento em t obtida pela estrutura a termo da taxa de juros;
- σ : constante positiva calculada de modo a garantir a medida livre de risco;
- dt : variação instantânea no tempo;
- dW^Q : componente estocástica representando um processo de Wiener na medida livre de risco Q .

As grandes desvantagens do modelo referem-se ao fato de o processo da taxa de juros não possuir reversão à média e poder retornar taxas de juros negativas.

2.2.2 Modelo de Hull-White (1990)

O modelo de Hull-White pode ser considerado uma evolução do modelo de Vasicek para se ajustar à estrutura a termo da taxa de juros. Substituindo-se a constante

γ do modelo de Vasicek, pela função $\frac{\theta(t)}{\alpha}$ temos:

$$dr = \alpha \cdot \left(\frac{\theta(t)}{\alpha} - r \right) \cdot dt + \sigma \cdot dz$$

$$\theta(t) = \frac{d}{dt} F(0,t) + \alpha \cdot F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} \cdot (1 + e^{-2\alpha t})$$

Onde:

- dr : variação instantânea da taxa de juros;

2.2.3 Modelo de Black, Derman e Toy – BDT (1990)

O modelo desenvolvido por Fisher Black, Emanuel Derman e William Toy, ao contrário do modelo de Hull-White, foi inicialmente proposto em uma árvore binomial. No modelo é feita uma aproximação no espaço de tempo discreto para um processo log-normal para as taxas de curto prazo. O modelo, além de se ajustar à estrutura a termo da taxa de juros, também se ajusta a um modelo de estrutura a termo de volatilidade.

Posteriormente, verificou-se que o algoritmo implementado na árvore binomial por Black-Derman-Toy corresponde ao seguinte processo:

$$d \ln(r(t)) = \left(\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \cdot \ln(r(t)) \right) \cdot dt + \sigma(t) \cdot dz$$

Onde:

- dr : variação instantânea da taxa de juros;
- $\theta(t)$: Função obtida pela estrutura a termo da taxa de juros;
- $\sigma(t)$: Função obtida pela estrutura a termo de volatilidade;
- dt : variação instantânea no tempo;
- dz : componente estocástica representando um processo estocástico Normal.

O modelo BDT pode possuir reversão à média implícita ao modelo, pois a taxa de juros pode reverter a $\theta(t)$ no tempo se o fator $\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$ for negativo.

Considerando que volatilidades assumem valores estritamente positivos, isso significa que devemos ter a derivada da função que descreve a estrutura a termo de volatilidade com relação ao tempo $\sigma'(t)$ assumindo valores negativos, indicando que, para se ter reversão à média, a estrutura a termo de volatilidade deve ser decrescente com o tempo. Isso é considerado uma limitação do modelo BDT.

Este modelo será descrito com mais detalhes no Capítulo 5.

2.2.4 Modelos Multifatoriais

Como descrito no início deste capítulo, a quantidade de variáveis que devem ser consideradas para um apreçamento de uma opção é, muitas vezes, maior do que desejamos. Os modelos citados até o momento descrevem a taxa de juros como única variável estocástica do modelo.

Imagine-se, agora, que desejássemos substituir a variável estocástica da taxa de juros por três variáveis estocásticas, para descrever respectivamente movimentos paralelos, inclinação e curvatura da evolução dos juros no tempo. O objetivo dos modelos multifatoriais é exatamente o de se criar ferramentas matemáticas para se levar em consideração um número maior de variáveis estocásticas.

O principal modelo multifatorial foi desenvolvido por Heath, Jarrow e Morton - HJM (1992). É um modelo bem genérico, que possibilita se incorporar um número maior de variáveis estocásticas.

O HJM modela a taxa de retorno instantânea para o instante T , de um investimento contratado no instante t , dependente de um caminho de Wiener w , pertencente ao espaço amostral Ω satisfazendo as condições de filtração $\{F_t\}$ em $(\Omega, F, \{F_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$.

$$f(t, T, w) = f(0, T) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^*(s, T, w) \cdot ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s, T, w) \cdot dW_i^f(s) \quad (I)$$

$$\sigma_i^*(s, T, w) = \sigma_i(s, T, w) \cdot \int_s^T \sigma_i(s, u, w) \cdot du$$

Onde:

- $f(t, T, w)$: Denota a função taxa de retorno instantânea contratada em t para vencimento em T dependente dos processos de Wiener $w \in \Omega$;

Para um número finito n de especializações do HJM, o caminho (w) depende de um número finito de variáveis de estado. Derivando o processo para as taxas de juros “spot” $r(t, w)$, substitui-se em (I) $r(t, w) = f(t, t, w)$. A equação para o processo da taxa de juros “spot” dependente de um número finito de caminhos w de Wiener fica:

$$r(t, w) = f(0, t) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^*(s, t, w) \cdot ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s, t, w) \cdot dW_i^f(s)$$

Como podemos perceber, calcular um processo genérico para a taxa de juros, dependendo de um número grande de variáveis estocásticas, pode se tornar um processo penoso e complexo.

3 Estudo de Modelos para Construção da Curva de Juros

O principal objetivo deste capítulo é propor uma forma de se construir e interpolar taxas de juros, levando-se em consideração as taxas de juros embutidas nos instrumentos líquidos de mercado. Fazemos também um estudo comportamental da taxa de juros conforme sua evolução histórica.

3.1 Mercado de Taxa de Juros no Brasil

Taxa de juros é um instrumento utilizado basicamente em operações de empréstimos e financiamentos, onde quem recebe o empréstimo se compromete a pagar, em um determinado período de tempo, a quantidade recebida corrigida por uma taxa de juros determinada em contrato.

Para se ter uma noção da importância da política de taxa de juros, vejamos o seguinte exemplo. Imagine que você possui uma empresa que, em geral, tem um retorno líquido de 15% ao ano sobre o patrimônio investido. Agora imagine que, para esta mesma empresa, você consiga captar dinheiro a uma taxa de juros de 10% ao ano. Neste caso, você não pensaria duas vezes em pegar dinheiro emprestado a 10% para investir na empresa. Assim, ao final de um ano, você teria condições de pagar sem nenhuma dificuldade, e ainda lucrar com a operação. Por outro lado, se a taxa de juros fosse de 20% ao ano, você não só poderia deixar de captar dinheiro para investir na sua empresa, como iria pensar em alternativas de investimento fora da própria empresa.

Cada país tem uma instituição financeira responsável por reger a política monetária e as metas para a taxa-base de juros. Esta instituição é conhecida como Banco Central. A Taxa-Base é a taxa de juros que o Banco Central estará usando como base para suas operações de financiamento. Se considerarmos que o Banco Central é uma instituição soberana, com baixo risco de crédito, os empréstimos feitos, em geral, dentro do país, terão taxas de juros maiores que a taxa-base.

No Brasil, a taxa-base é conhecida como taxa SELIC. Em reuniões periódicas, o comitê de política monetária do Banco Central, mais conhecido como COPOM,

determina qual será a meta para a taxa SELIC até a próxima reunião. A tabela 3-1 abaixo ilustra o histórico das reuniões entre janeiro de 2000 a julho de 2005.

Reunião n°	Reunião		Período de vigência	Meta SELIC	Taxa SELIC
	data	mês		% a.a	% a.a
110*	20/07/2005		21/07/2005 -	19,75	
109*	15/06/2005		16/06/2005 - 20/07/2005	19,75	19,73
108*	18/05/2005		19/05/2005 - 15/06/2005	19,75	19,75
107*	20/04/2005		22/04/2005 - 18/05/2005	19,50	19,51
106*	16/03/2005		17/03/2005 - 21/04/2005	19,25	19,24
105*	16/02/2005		17/02/2005 - 16/03/2005	18,75	18,75
104*	19/01/2005		20/01/2005 - 16/02/2005	18,25	18,25
103*	15/12/2004		16/12/2004 - 19/01/2005	17,75	17,74
102*	17/11/2004		18/11/2004 - 15/12/2004	17,25	17,23
101*	20/10/2004		21/10/2004 - 17/11/2004	16,75	16,71
100*	15/09/2004		16/09/2004 - 20/10/2004	16,25	16,23
99*	18/08/2004		19/08/2004 - 15/09/2004	16,00	15,90
98*	21/07/2004		22/07/2004 - 18/08/2004	16,00	15,83
97*	16/06/2004		17/06/2004 - 21/07/2004	16,00	15,79
96*	19/05/2004		20/05/2004 - 16/06/2004	16,00	15,79
95*	14/04/2004		15/04/2004 - 19/05/2004	16,00	15,80
94*	17/03/2004		18/03/2004 - 14/04/2004	16,25	16,09
93*	18/02/2004		19/02/2004 - 17/03/2004	16,50	16,28
92*	21/01/2004		22/01/2004 - 18/02/2004	16,50	16,30
91*	17/12/2003		18/12/2003 - 21/01/2004	16,50	16,32
90*	19/11/2003		20/11/2003 - 17/12/2003	17,50	17,32
89*	22/10/2003		23/10/2003 - 19/11/2003	19,00	18,84
88*	17/09/2003		18/09/2003 - 22/10/2003	20,00	19,84
87*	20/08/2003		21/08/2003 - 17/09/2003	22,00	21,84
86*	23/07/2003		24/07/2003 - 20/08/2003	24,50	24,32
85*	18/06/2003		19/06/2003 - 23/07/2003	26,00	25,74
84*	21/05/2003		22/05/2003 - 18/06/2003	26,50	26,27
83*	23/04/2003		24/04/2003 - 21/05/2003	26,50	26,32
82*	19/03/2003	alta	20/03/2003 - 23/04/2003	26,50	26,32
81*	19/02/2003		20/02/2003 - 19/03/2003	26,50	26,30
80*	22/01/2003		23/01/2003 - 19/02/2003	25,50	25,36
79*	18/12/2002		19/12/2002 - 22/01/2003	25,00	24,90
78*	20/11/2002		21/11/2002 - 18/12/2002	22,00	21,90
77*	23/10/2002		24/10/2002 - 20/11/2002	21,00	20,90
76* ex.	14/10/2002		15/10/2002 - 23/10/2002	21,00	20,90
75*	18/09/2002		19/09/2002 - 14/10/2002	18,00	17,90
74*	21/08/2002	baixa	22/08/2002 - 18/09/2002	18,00	17,87
73*	17/07/2002		18/07/2002 - 21/08/2002	18,00	17,86
72*	19/06/2002	baixa	20/06/2002 - 17/07/2002	18,50	18,40
71*	22/05/2002		23/05/2002 - 19/06/2002	18,50	18,07
70*	17/04/2002		18/04/2002 - 22/05/2002	18,50	18,35
69*	20/03/2002		21/03/2002 - 17/04/2002	18,50	18,45
68*	20/02/2002		21/02/2002 - 20/03/2002	18,75	18,80
67*	23/01/2002		24/01/2002 - 20/02/2002	19,00	19,05
66*	19/12/2001		20/12/2001 - 23/01/2002	19,00	19,05
65*	21/11/2001		22/11/2001 - 19/12/2001	19,00	19,05
64*	17/10/2001		18/10/2001 - 21/11/2001	19,00	19,05
63*	19/09/2001		20/09/2001 - 17/10/2001	19,00	19,07
62*	22/08/2001		23/08/2001 - 19/09/2001	19,00	19,04
61*	18/07/2001		19/07/2001 - 22/08/2001	19,00	18,96
60*	20/06/2001	baixa	21/06/2001 - 18/07/2001	18,25	18,31
59*	23/05/2001		24/05/2001 - 20/06/2001	16,75	16,76
58*	18/04/2001		19/04/2001 - 23/05/2001	16,25	16,30
57*	21/03/2001		22/03/2001 - 18/04/2001	15,75	15,84
56*	14/02/2001		15/02/2001 - 21/03/2001	15,25	15,20
55*	17/01/2001		18/01/2001 - 14/02/2001	15,25	15,19
54*	20/12/2000		21/12/2000 - 17/01/2001	15,75	15,76
53*	22/11/2000		23/11/2000 - 20/12/2000	16,50	16,38
52*	18/10/2000		19/10/2000 - 22/11/2000	16,50	16,56
51*	20/09/2000		21/09/2000 - 18/10/2000	16,50	16,60
50*	23/08/2000		24/08/2000 - 20/09/2000	16,50	16,54
49*	19/07/2000		20/07/2000 - 23/08/2000	16,50	16,51
48*		uso/baixa	10/07/2000 - 19/07/2000	17,00	16,96
	20/06/2000	baixa	21/06/2000 - 07/07/2000	17,50	17,34
47*	24/05/2000		25/05/2000 - 20/06/2000	18,50	18,39
46*	19/04/2000		20/04/2000 - 24/05/2000	18,50	18,55
45*		uso/baixa	29/03/2000 - 19/04/2000	18,50	18,60
	22/03/2000	baixa	23/03/2000 - 28/03/2000	19,00	18,94
44*	16/02/2000		17/02/2000 - 22/03/2000	19,00	18,88
43*	19/01/2000		20/01/2000 - 16/02/2000	19,00	18,87

Tabela 3-1 Histórico das Reuniões do COPOM entre Jan-2000 a Jul-2005.

Fonte: Banco Central do Brasil.¹

¹ Dados disponíveis na página eletrônica do Banco Central do Brasil pelo endereço: <http://www.bc.gov.br/?COPOMJUROS>.

O COPOM foi criado em 20 de junho de 1996, com o objetivo de estabelecer as diretrizes da política monetária e determinar as metas para as taxas de juros. Desde 21 de junho de 1999, o Banco Central adotou, como diretriz de política monetária, o sistema de “metas para a inflação”. A partir de janeiro de 2000, as reuniões ordinárias do COPOM passaram a ocorrer mensalmente, dividindo-se em dois dias.

A primeira dessas reuniões ocorre às terças-feiras, com a apresentação de uma análise dos índices de inflação, nível de atividade econômica, finanças públicas, balanço de pagamentos, economia internacional, mercado de câmbio, mercado monetário, evolução dos agregados monetários, reservas internacionais, operações de mercado aberto, avaliação prospectiva das tendências da inflação e expectativas gerais para variáveis macroeconômicas.

A segunda sessão ocorre às quartas-feiras seguintes, com a apresentação das alternativas para a taxa de juros de curto prazo e recomendações acerca da política monetária. Ao final, procede-se à votação das propostas buscando-se, sempre que possível, o consenso. A decisão final é divulgada no mesmo dia. As atas de cada reunião são divulgadas às quintas-feiras da semana posterior a cada reunião, dentro de um prazo regulamentar de seis dias úteis¹.

A taxa SELIC efetiva nos períodos de vigência das metas determinadas pelo COPOM é calculada com base na média dos financiamentos de um dia, lastreados em títulos públicos federais. Isso explica a pequena diferença que se observa, em geral, entre a meta determinada pelo COPOM e a SELIC efetiva do período. A divulgação da taxa SELIC diária média é responsabilidade do Departamento de Operações do Mercado Aberto, Divisão de Administração do SELIC (DEMAB/DICEL).

Além do mercado de financiamentos de um dia com lastro em títulos públicos federais, também existe um mercado líquido de financiamento interbancário, utilizado pelas instituições financeiras para se financiarem. Este mercado é conhecido como mercado de Depósito Interfinanceiro (DI). Para operações de financiamentos por um dia temos o chamado DI de um dia, ou *DI over*.

As operações de Depósito Interfinanceiro de um dia são registradas e liquidadas pelo sistema da Câmara de Custódia e Liquidação (CETIP), conforme determinação do Banco Central do Brasil. A CETIP também é responsável pela divulgação da taxa média

¹ Informações sobre as reuniões do COPOM obtidas através da página eletrônica do Banco Central do Brasil no endereço: <http://www.bcb.gov.br/?COPOMHIST>.

de depósitos interfinanceiros de um dia, utilizada como base para a maioria dos derivativos negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F).

A figura 3.1 abaixo ilustra a dinâmica da taxa média dos DI de um dia e da SELIC, entre janeiro de 2000 e julho de 2005.

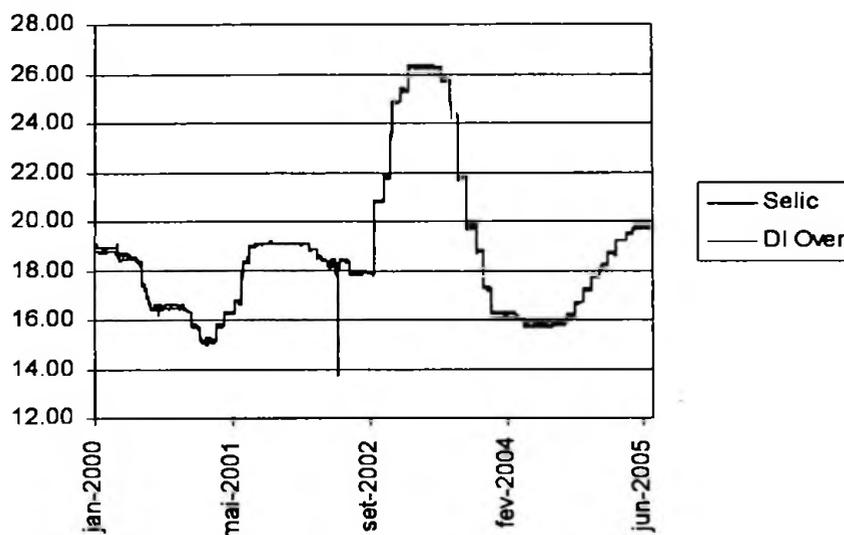


Figura 3-1 Evolução Histórica da SELIC e DI Over.

Fonte: Câmara de Custódia e Liquidação - CETIP.¹

Pela Figura 3-1 podemos notar que os movimentos no DI over acompanham os movimentos na taxa SELIC. Outra observação importante deve-se ao fato de que, em geral, a taxa do DI over é menor que a taxa SELIC para a mesma data. A explicação mais provável para isso deve-se ao fato de o volume negociado no mercado de DI de um dia ser bem menor que o negociado no mercado SELIC, ficando mais susceptível a movimentos especulativos. Para se ter uma idéia, o volume médio diário negociado no mercado SELIC girou em torno de 133 bilhões de Reais no período compreendido entre 1º de julho de 2004 e 30 de junho de 2005², enquanto que o volume médio diário negociado em DI over para o mesmo período foi de 1,17 bilhão de Reais³.

¹ Histórico dos dados disponíveis na página eletrônica da Câmara de Custódia e Liquidação (<http://www.cetip.com.br/>) através link de Séries Históricas.

² Dados obtidos através da página eletrônica do Banco Central do Brasil no endereço: <http://www4.bcb.gov.br/pom/demab/estatistica/evoldiaria.asp?ano=2005&operacao=1054>

³ Dados obtidos através da página eletrônica da CETIP no endereço: http://www.cetip.com.br/series/di_v03_01_Painel.asp

Os principais instrumentos de derivativos de taxa de juros no Brasil referem-se à taxa do DI. O principal deles é o contrato futuro de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia, negociado na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F). O contrato é o instrumento utilizado por instituições financeiras para trocar remunerações diárias do DI de um dia por uma taxa pré-fixada para um determinado vencimento.

Cada contrato equivale à troca de uma remuneração com financeiro calculado descontando-se R\$100.000,00 entre a data da operação e a data de vencimento do contrato, pela taxa contratada. Esse financeiro é ajustado diariamente e a diferença entre o seu valor no dia anterior corrigido pelo DI over e o financeiro calculado com base na taxa média operada para o vencimento do contrato (conhecido como Preço de Ajuste), é movimentado entre as partes participantes. O Preço de Ajuste é divulgado diariamente pela BM&F, de acordo com a taxa média negociada para cada vencimento de contrato. No dia da operação, o ajuste é feito entre o Preço de Ajuste e o financeiro embutido na taxa contratada.

Como exemplo, tomemos o cenário de 15 de março de 2005. Imagine-se que o Banco A esteja querendo trocar uma remuneração no DI over por uma taxa pré-fixada até o dia 1º de abril, digamos de 19,50% a.a. em dias úteis por 252. O Banco B aceita ser a contraparte do contrato. Isso corresponde à troca de remuneração sobre um financeiro (chamado de preço unitário ou PU) de R\$99.155,27, calculado segundo a Fórmula 3-1:

$$PU = \frac{100.000}{(1+r)^{\frac{du}{252}}} \quad (3-1)$$

Onde:

- r é a taxa pré-fixada contratada
- du é o número de dias úteis entre a data do negócio e a data de vencimento do contrato.

$$\text{Para o exemplo: } PU = \frac{100.000}{(1+0.195)^{\frac{12}{252}}} = R\$99.155,27$$

Para o dia 15 de março foi divulgado um preço de ajuste de R\$99.175,49. Isso significa que um financeiro de R\$99.175,49 - R\$99.155,27 = R\$20,22 foi pago ao banco A pelo banco B para cada contrato negociado na taxa de 19,50%.

Mantendo-se a operação para o dia 16 de março, temos:

- PA divulgado para o dia 16 de março pela BM&F = R\$99.244,15
- DI over do dia 15 divulgado pela CETIP = 18,63%

Com isso, o ajuste do ponto de vista do banco A ficou:

$$Ajuste = PA_{d0} - PA_{d0-1} \cdot (1 + DI_{over})^{\frac{1}{252}} = 99.244,15 - 99.175,49 \cdot (1 + 0.1863)^{\frac{1}{252}}$$

$$\Rightarrow Ajuste = -R\$1,40$$

Isso significa que, devido às variações no dia 16 de março, o banco A teria que pagar para o banco B a quantia de R\$1,40 por contrato em aberto no dia 15 de março.

Os contratos futuros de DI de um dia negociados na BM&F têm uma grande importância na obtenção das previsões das taxas futuras de DI. Por esse motivo, contratos para diferentes vencimentos são utilizados como base para se construir uma estrutura a termo de juros. A seguir, estudaremos mais a fundo esses contratos e formas de se construir uma curva de juros, que contenham as taxas para seus vencimentos.

3.2 Comportamento dos Juros no Brasil.

Na Figura 3.1 observamos a evolução no tempo do DI over e da SELIC para os últimos cinco anos. Analisando um pouco mais a fundo a figura em questão, percebemos que, tanto o DI over como a SELIC tiveram comportamentos semelhantes, e sua evolução no tempo ocorreu, em geral, na forma de escadas. Em outras palavras, observamos que a taxa do DI over e da SELIC sofreram alterações significantes, na forma de saltos, apenas para um conjunto específico de datas. Mas que datas são essas?

Com um pouco de intuição e levando-se em consideração o que foi comentado no tópico anterior deste capítulo, faz sentido pensarmos que os saltos foram, na verdade, reflexos das decisões tomadas nas reuniões do COPOM. A Figura 3.2, a seguir, compara os saltos ocorridos devidos às alterações da meta SELIC pelo COPOM, com as alterações ocorridas no DI over para os últimos cinco anos. A unidade atribuída às variações diárias foi em Pontos-Base (PB), onde um ponto-base é igual a 0.01%.

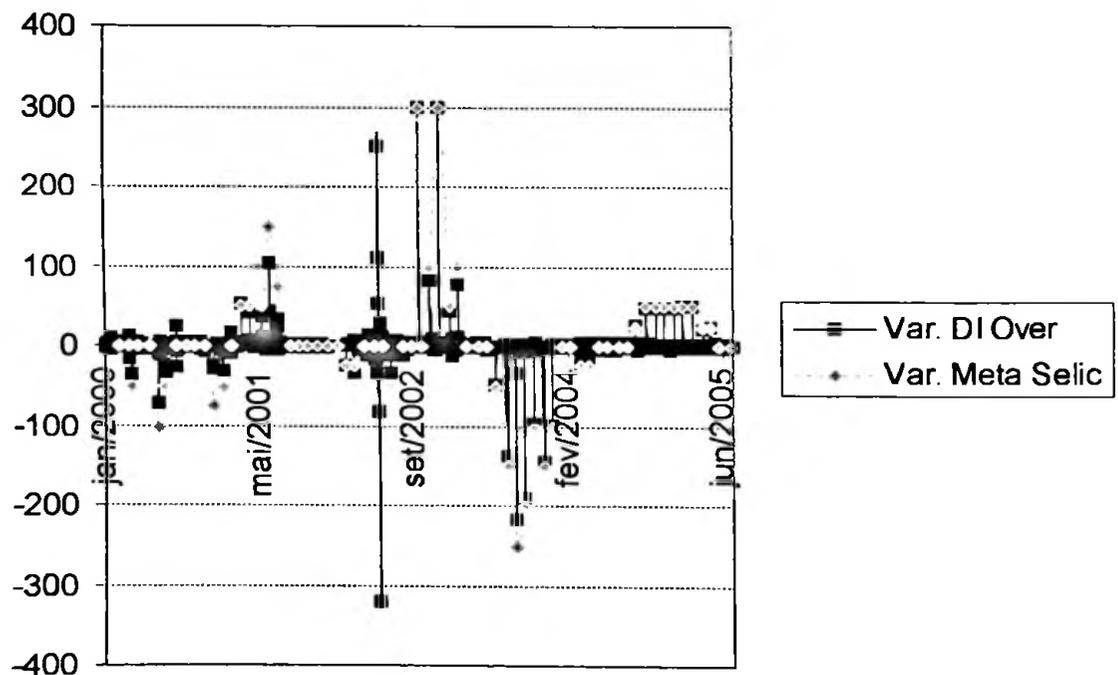


Figura 3-2 Variações Diárias do DI Over e Variações na Meta SELIC nas Reuniões do COPOM.

Fonte: CETIP e Banco Central do Brasil.

Como pudemos observar pela Figura 3.2, na grande maioria dos casos, os saltos ocorridos no DI over foram conseqüências das decisões de alteração na Meta SELIC pelo COPOM. Observamos também que grande parte dos saltos não coincidentes com as alterações da Meta SELIC aconteceram no ano de 2002. Historicamente falando, esse ano foi marcado por uma alta volatilidade nos mercados financeiros, em função das incertezas acerca da eleição presidencial.

Estatisticamente falando, no período entre janeiro de 2000 a julho de 2005, tivemos variações diárias do DI over maiores que 10 pontos-base em apenas 5% dos dias. Desses 5%, 70% ocorreram exatamente nas datas após a divulgação da Meta SELIC pelo COPOM, 24% ocorreram em momentos de estresse do mercado no ano de 2002 e apenas 6% não aconteceram em nenhuma das situações citadas. Desses últimos 6%, a variação diária máxima não passou de 13 pontos-base, ou 0,13%.

Levando-se em consideração os fatos citados, é razoável supormos que, fora de situações de estresse elevado de mercado, as taxas dos Depósitos Interfinanceiros só sofrerão alterações significativas devido a alterações na Meta SELIC.

A seguir, iremos propor um método para construção e interpolação da estrutura a termo para as taxas dos Depósitos Interfinanceiros, tendo como base as datas de reunião do COPOM e as taxas negociadas nos contratos de futuro de DI de um dia negociados na BM&F.

3.3 Modelos para Construção da Curva da Taxas dos Depósitos Interfinanceiros

Uma curva de juros é caracterizada por:

- 1) Fornecer taxas para quaisquer prazos ou períodos desejados a partir de uma data-base;
- 2) Retornar taxas coincidentes com as negociadas para os produtos líquidos de mercado;
- 3) Prever movimentos de mercado.

No Brasil, os prazos líquidos são determinados pelos vencimentos dos contratos de futuro de DI de um dia negociados na BM&F. Portanto, qualquer curva de juros que

se preze, no Brasil, deve fornecer as taxas para os vencimentos dos contratos de futuro de DI de um dia, coincidentes com as taxas negociadas no mercado.

Para satisfazer os pontos 2 e 3 serão necessárias hipóteses que incluam, entre outras coisas, algoritmos de interpolação, para calcular taxas para prazos não observados no mercado. Dentre os métodos de interpolação mais conhecidos estão:

- Interpolação Linear;
- Interpolação Polinomial;
- Interpolação por Spline Cúbico;
- Interpolação Geométrica ou Exponencial;
- Interpolação Geométrica Modificada.

A seguir, abordaremos métodos para a construção da curva de juros para as taxas dos DIs, de acordo com o seu método de interpolação. Todos eles executam a interpolação para dias úteis, por ser esta a base das taxas dos DIs.

3.3.1 Interpolação Linear

A interpolação linear consiste em se ligar, por uma reta, os pontos observados no mercado, de forma a obter taxas para quaisquer prazos intermediários. A interpolação pode ser feita para as chamadas taxas spot¹, para as taxas futuras, ou até para os fatores implícitos nas taxas.

Um exemplo de interpolação linear que pode ser feita, é sobre os fatores das taxas spot, ou na taxa efetiva para o período:

$$\left(1 + r_{\text{int } \text{erp}}\right)^{\left(\frac{du_{\text{int } \text{erp}}}{252}\right)} = \left(1 + r_{\text{ii}}\right)^{\left(\frac{du_{\text{ii}}}{252}\right)} + \left(\frac{du_{\text{int } \text{erp}} - du_{\text{ii}}}{du_{\text{ii}+1} - du_{\text{ii}}}\right) \cdot \left[\left(1 + r_{\text{ii}+1}\right)^{\left(\frac{du_{\text{ii}+1}}{252}\right)} - \left(1 + r_{\text{ii}}\right)^{\left(\frac{du_{\text{ii}}}{252}\right)}\right]$$

Onde:

- $du_{\text{int } \text{erp}}$ = Dias úteis entre a data base da curva e a data de interpolação;
- $r_{\text{int } \text{erp}}$ = Taxa Interpolada que se deseja calcular;
- du_{ii} = Dias úteis entre a data base da curva e o ponto observado;
imediatamente anterior a data de interpolação;

¹ Taxa spot é a taxa cuja data para início da remuneração é igual à data base da curva de juros.

- r_{it} = Taxa observada referente ao ponto observado imediatamente anterior a data de interpolação;
- du_{it+1} = Dias úteis entre a data base da curva e o ponto observado imediatamente posterior a data de interpolação;
- r_{it+1} = Taxa observada referente ao ponto observado imediatamente posterior a data de interpolação.

A Tabela 3.2 contém os preços de ajuste divulgados pela BM&F e as taxas implícitas nesses preços para o dia 18 de maio de 2005. A Figura 3.3 mostra um exemplo de como ficaria a curva de juros para o DI na interpolação linear. Os pontos usados na interpolação são os referentes ao DI Over e aos vencimentos dos contratos de Futuro de DI da BM&F para essa data.

Como ponto positivo desse método, podemos citar a facilidade de implementação. Agora, vamos entender o que acontece com as taxas futuras para essa interpolação.

Vencimento	Preço de Ajuste	Taxa Implícita
1/jun/05	99,363.41	19.58%
1/jul/05	97,817.74	19.65%
1/ago/05	96,360.78	19.68%
1/set/05	94,791.30	19.69%
3/out/05	93,388.68	19.67%
2/jan/06	89,477.93	19.40%
3/abr/06	85,851.23	19.00%
3/jul/06	82,606.41	18.62%
2/out/06	79,366.93	18.33%
2/jan/07	76,521.94	18.02%
2/abr/07	73,709.27	17.81%
2/jul/07	71,011.80	17.64%
1/out/07	68,347.10	17.49%
2/jan/08	65,923.56	17.33%
1/abr/08	63,668.97	17.17%
1/jul/08	61,461.60	17.03%
1/out/08	59,168.09	16.92%
2/jan/09	57,023.56	16.81%
1/abr/09	55,082.17	16.72%
1/jul/09	53,283.03	16.60%
4/jan/10	49,754.56	16.36%
1/abr/10	48,188.48	16.25%
3/jan/11	43,324.52	16.10%

Tabela 3-2 Preços de Ajuste Para os Contratos Futuros de DI e Suas Respectivas Taxa Implícitas.

Fonte: Bolsa de Mercadorias e Futuros – BM&F.¹

¹ Dados obtidos através da página eletrônica da BMF no endereço:

<http://www2.bmf.com.br/pages/portal/2004/boletim1/Ajustes1.asp?txtData=18/05/2005>

Taxa Implícita

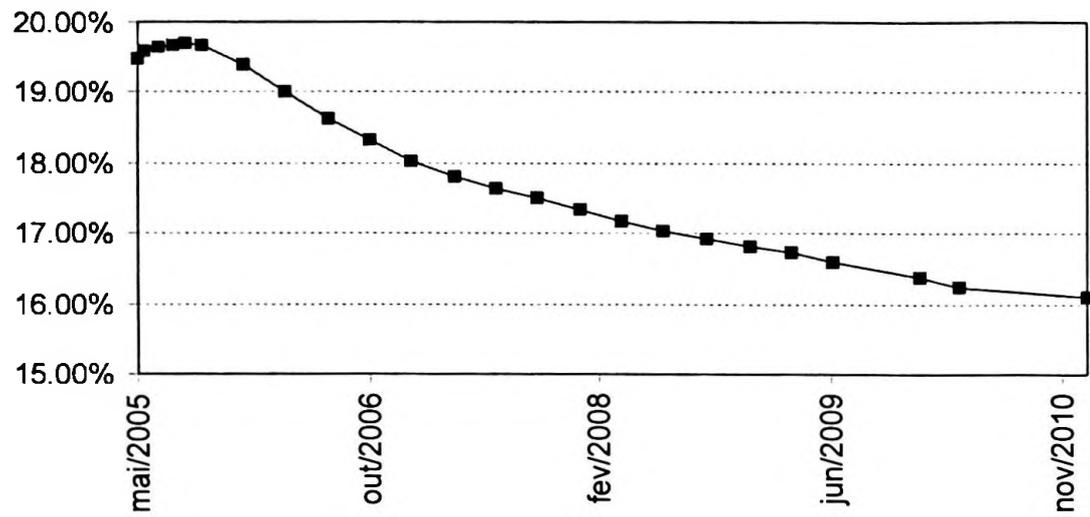


Figura 3-3 Curva de Juros Para Interpolação Linear na Taxa Spot Para o Dia 18-Maio-2005.

Taxa Futura

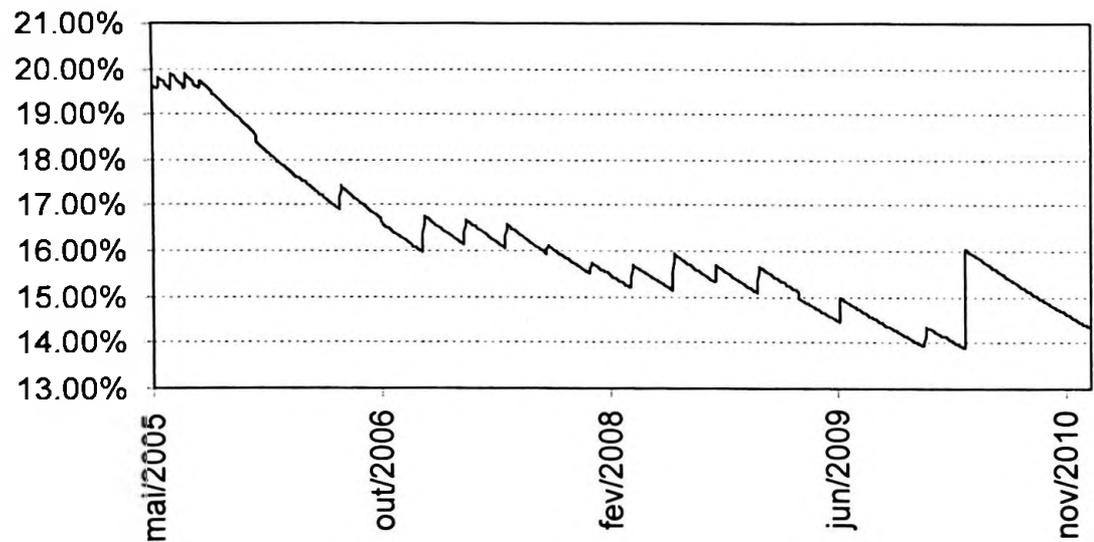


Figura 3-4 Evolução do DI Over ao Longo da Curva de Juros Para Interpolação Linear no Fator da Taxa Spot.

A Figura 3.4 ilustra a evolução da taxa futura do DI Over ao longo da curva de juros, calculada segundo a fórmula a seguir:

$$(1 + DI_{it})^{\frac{1}{252}} = \frac{(1 + r_{it+1})^{\frac{du_{it}+1}{252}}}{(1 + r_{it})^{\frac{du_{it}}{252}}},$$

Onde:

- DI_{it} = Taxa futura do DI Over na data t_i ,
- r_{it} = Taxa spot obtida na curva de juros para o vencimento em t_i ,
- r_{it+1} = Taxa spot obtida na curva de juros para o vencimento no primeiro dia útil posterior a t_i ,
- du_{it} = Número de dias úteis entre a data base da curva e t_i .

Na evolução do DI Over ao longo da Curva de Juros, pudemos notar a presença de alguns picos (em formas de dentes) nas taxas futuras do DI Over que, em princípio, não seriam explicáveis nem do ponto de vista econômico, e nem com base na evolução histórica. Matematicamente falando, os picos ocorrem principalmente devido ao fato de as taxas negociadas para os contratos futuros serem exponenciais, enquanto que a interpolação utilizada é linear.

O fato de não observarmos os mesmos movimentos de mercado ocorridos historicamente para o DI Over é determinante para excluirmos essa possibilidade de interpolação para a curva de juros do DI Over.

3.3.2 Interpolação Polinomial

A Interpolação Polinomial consiste em construir uma função polinômio que passe por todos os pontos observados de mercado. No pior dos casos, o polinômio terá ordem igual ao número de pontos disponíveis, menos um. A Figura 3.5 ilustra o gráfico da curva de juros obtida para os 23 pontos da Tabela 3.2.

Curva Spot Por Interpolação Polinomial

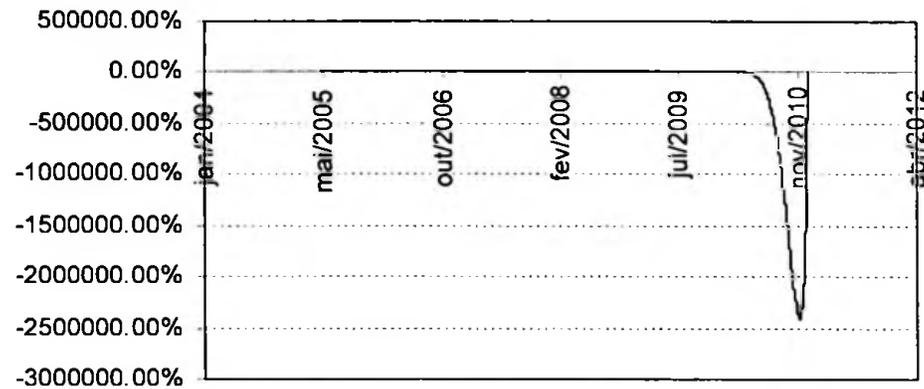


Figura 3-5 Gráfico da Curva de Juros Spot com Interpolação Polinomial para dia 18-Maio-2005.

Curva Spot Por Interpolação Polinomial

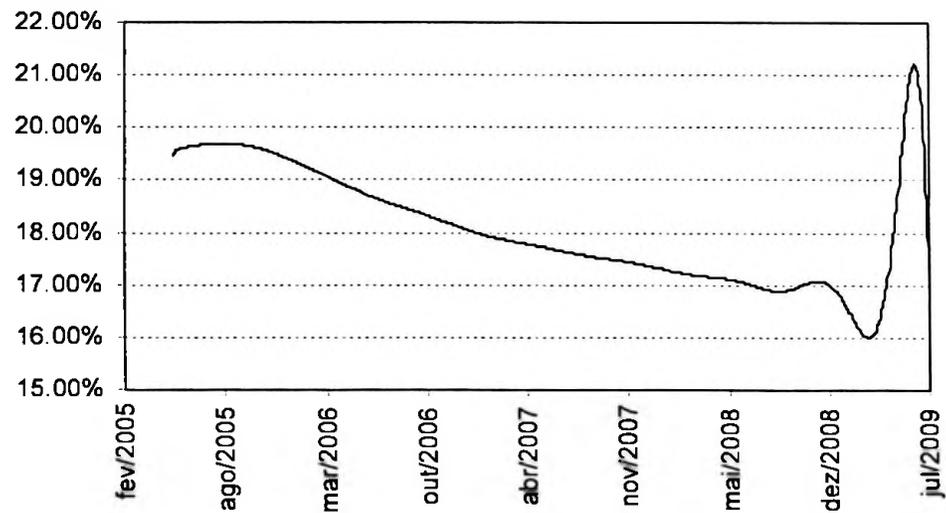


Figura 3-6 Gráfico da Curva de Juros Spot com Interpolação Polinomial até 01-Jul-2009 para dia 18-Maio-2005.

O método em questão possui um sério problema de convergência, que começa aproximadamente em dezembro de 2008, como observamos pela Figura 3-6. Isso é um risco que se corre quando se tenta fazer qualquer tipo de interpolação polinomial. Note-se pela Figura 3-7, que a situação para as taxas futuras de DI Over é ainda pior.

DI Over Futuro

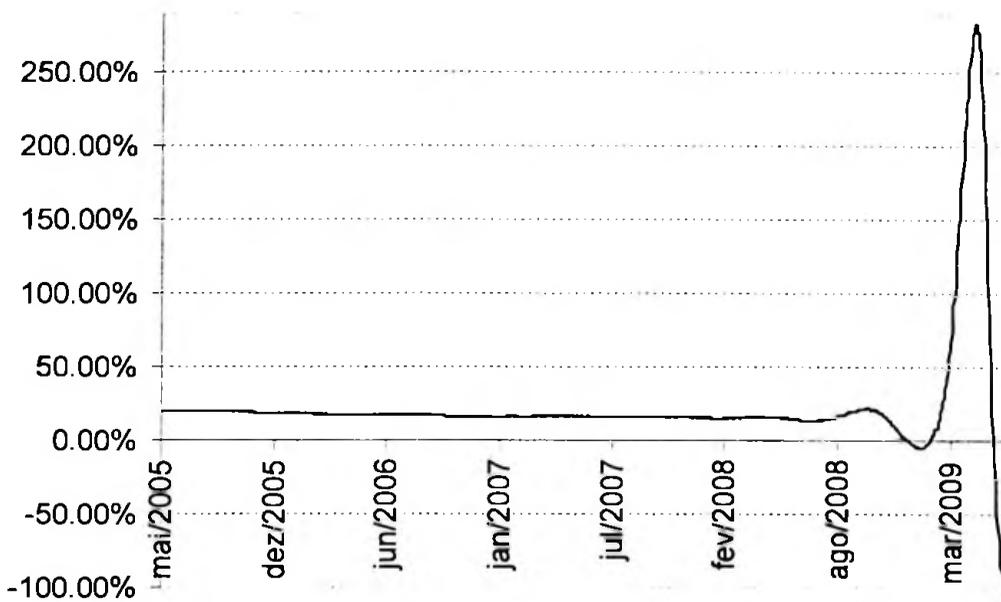


Figura 3-7 Evolução do DI Over ao Longo da Curva Spot Para Interpolação Polinomial.

Novamente, o fato de não observarmos movimentos de mercado coerentes e explicáveis do ponto de vista econômico e histórico é determinante para excluirmos essa possibilidade de interpolação para a curva de juros do DI Over.

3.3.3 Interpolação por Spline Cúbico

A Interpolação por Spline Cúbico consiste em interligar dois pontos observáveis, por uma curva relativa a um polinômio de terceiro grau, de forma que a curva permaneça derivável em todos os seus pontos. Outra condição necessária para o modelo inclui o fato de se anular a segunda derivada no tempo nos extremos.

Na Figura 3.8, que representa a curva de juros para as taxas spot, observamos um comportamento estável, melhor que a interpolação polinomial. Entretanto, quando traçamos a evolução do DI Over nessa curva (Figura 3.9), notamos um comportamento instável.

Curva de Juros Spot Para Interpolação Por Spline Cúbico

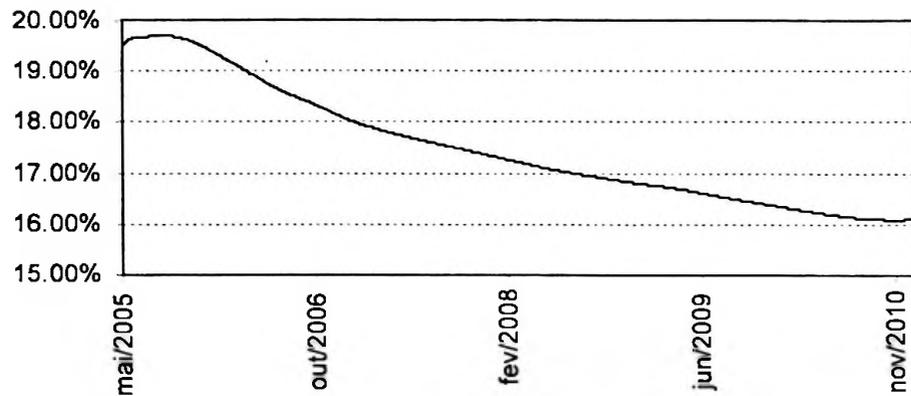


Figura 3-8 Gráfico da Curva de Juros por Spline Cúbico para dia 18-Maio-2005.

Evolução do DI Over Sobre a Curva de Juros

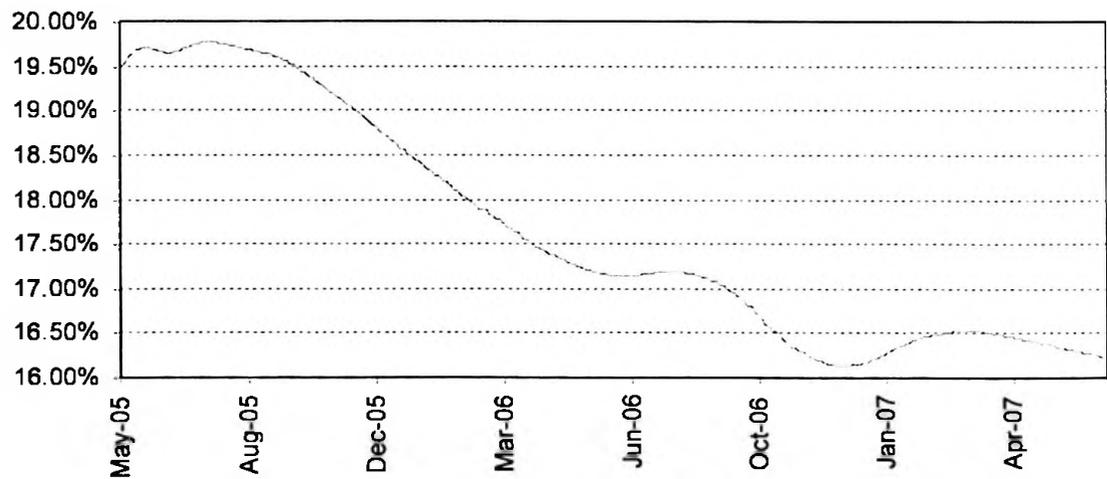


Figura 3-9 Evolução do DI Over para Interpolação por Spline Cúbico.

Mais uma vez, não foram observados movimentos de mercado coerentes e explicáveis do ponto de vista econômico e histórico para a evolução do DI over, o que é determinante para concluirmos que a interpolação por Spline Cúbico talvez não seja a interpolação mais apropriada para usarmos na curva de juros do DI Over.

3.3.4 Interpolação Geométrica ou Exponencial

A interpolação geométrica (ou exponencial) consiste basicamente em interpolar linearmente os logaritmos dos fatores de desconto das taxas spot. Dados dois pontos observáveis, calcula-se a taxa de um ponto intermediário segundo a fórmula abaixo:

Equação 3-2:

$$\log\left(1 + r_{\text{int } erp}\right)^{\frac{du_{\text{int } erp}}{252}} = \log\left(1 + r_{ii}\right)^{\frac{du_{ii}}{252}} + \left(\frac{du_{\text{int } erp} - du_{ii}}{du_{ii+1} - du_{ii}}\right) \cdot \left[\log\left(1 + r_{ii+1}\right)^{\frac{du_{ii+1}}{252}} - \log\left(1 + r_{ii}\right)^{\frac{du_{ii}}{252}}\right]$$

Onde:

- $du_{\text{int } erp}$ = Dias úteis entre a data-base da curva e a data de interpolação;
- $r_{\text{int } erp}$ = Taxa Interpolada que se deseja calcular;
- du_{ii} = Dias úteis entre a data-base da curva e o ponto observado imediatamente anterior a data de interpolação;
- r_{ii} = Taxa observada referente ao ponto observado imediatamente anterior a data de interpolação;
- du_{ii+1} = Dias úteis entre a data base da curva e o ponto observado imediatamente posterior a data de interpolação;
- r_{ii+1} = Taxa observada referente ao ponto observado imediatamente posterior a data de interpolação.

A Figura 3.10 a seguir ilustra a Curva de Juros, usando-se a interpolação geométrica. Pelo fato de a interpolação possuir uma fórmula fechada, que dependa apenas dos pontos adjacentes, a sua implementação é bem simples de ser feita.

Curva de Juros Spot Com Interpolação Geométrica

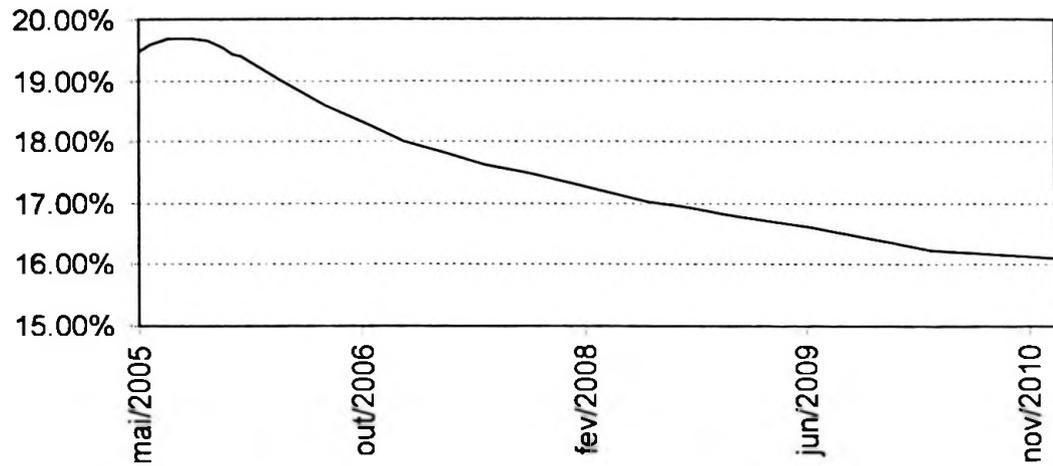


Figura 3-10 Gráfico da Curva de Juros com Interpolação Geométrica para dia 18-Maio-2005.

Evolução do DI Over Sobre a Curva de Juros

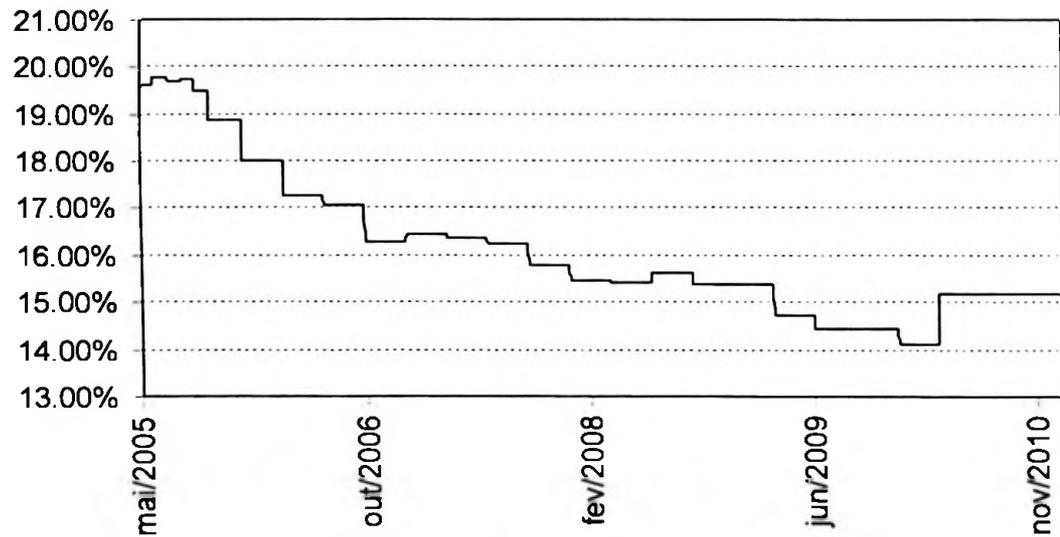


Figura 3-11 Evolução do DI Over para Interpolação Geométrica.

A Figura 3.11 ilustra a expectativa de evolução do DI Over sobre a curva com interpolação geométrica. Uma observação importante deve-se ao fato de o DI Over permanecer constante entre dois pontos observados de mercado. Para provar

matematicamente essa propriedade, agrupando os termos nos logaritmos da Equação 3.2, teremos:

$$\log\left(1 + r_{\text{int } erp}\right)^{\left(\frac{du_{\text{int } erp}}{252}\right)} = \log\left[\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)} \cdot \left(\frac{\left(1 + r_{it+1}\right)^{\left(\frac{du_{it+1}}{252}\right)}}{\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)}}\right)^{\left(\frac{du_{\text{int } erp} - du_{it}}{du_{it+1} - du_{it}}\right)}\right], \text{ ou,}$$

$$\left(1 + r_{\text{int } erp}\right)^{\left(\frac{du_{\text{int } erp}}{252}\right)} = \left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)} \cdot \left(\frac{\left(1 + r_{it+1}\right)^{\left(\frac{du_{it+1}}{252}\right)}}{\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)}}\right)^{\left(\frac{du_{\text{int } erp} - du_{it}}{du_{it+1} - du_{it}}\right)} \quad (3.3)$$

Para calcular uma taxa futura de um dia no período entre t_i e t_{i+1} , temos que calcular duas taxas interpoladas, $r_{\text{int } erp}$ e $r_{\text{int } erp+1}$, tal que a taxa futura de um dia entre t_i e t_{i+1} seja descrita por:

$$\left(1 + r_{DI}\right)^{\frac{1}{252}} = \frac{\left(1 + r_{\text{int } erp+1}\right)^{\frac{du_{\text{int } erp+1}}{252}}}{\left(1 + r_{\text{int } erp}\right)^{\frac{du_{\text{int } erp}}{252}}} \quad (3.4)$$

Calculando-se $r_{\text{int } erp}$ e $r_{\text{int } erp+1}$ pela equação (3.3) e substituindo-se em (3.4) temos:

$$\left(1 + r_{DI}\right)^{\frac{1}{252}} = \frac{\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)} \cdot \left(\frac{\left(1 + r_{it+1}\right)^{\left(\frac{du_{it+1}}{252}\right)}}{\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)}}\right)^{\left(\frac{du_{\text{int } erp+1} - du_{it}}{du_{it+1} - du_{it}}\right)}}{\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)} \cdot \left(\frac{\left(1 + r_{it+1}\right)^{\left(\frac{du_{it+1}}{252}\right)}}{\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)}}\right)^{\left(\frac{du_{\text{int } erp} - du_{it}}{du_{it+1} - du_{it}}\right)}}$$

Simplificando, ficamos finalmente com:

$$\left(1 + r_{DI}\right)^{\frac{1}{252}} = \left(\frac{\left(1 + r_{it+1}\right)^{\left(\frac{du_{it+1}}{252}\right)}}{\left(1 + r_{it}\right)^{\left(\frac{du_{it}}{252}\right)}}\right)^{\left(\frac{1}{du_{it+1} - du_{it}}\right)} \quad (3.5)$$

Note-se que a equação (3.5) depende apenas dos prazos e taxas observados, assumindo sempre valores iguais nos períodos entre as duas datas observadas no mercado.

O método de interpolação geométrica para a construção da curva de juros possui comportamento estável tanto para as taxas spot, quanto para as taxas futuras de DI over ao longo da curva. O comportamento da curva dos futuros de DI over, sendo constante entre duas datas observadas, parece corresponder ao que se espera para a evolução temporal do DI over, como observado na Figura 3.1. A grande diferença, e um ponto crucial para nossa escolha do modelo, deve-se ao fato de esperarmos alterações no DI over apenas nas datas referentes às decisões do COPOM, em vez das datas referentes aos pontos observados no mercado.

3.3.5 Interpolação Geométrica Modificada (Modelo Para o Mercado Brasileiro)

Este modelo consiste em utilizar a interpolação Geométrica, mas entre as datas referentes às decisões do COPOM, que daqui para frente chamaremos de data de COPOM. Para isso, precisamos calcular quais serão as taxas nas datas do COPOM, dados os pontos observados de mercado. Implícita nesta informação tem-se a previsão do mercado para futuras alterações na taxa base pelo COPOM.

Sejam r'_{COPOM} a taxa do DI Over, que passará a valer a partir da i -ésima reunião do COPOM, e r^j_{DI} a taxa negociada no j -ésimo contrato futuro de DI de um dia, com vencimento imediatamente posterior a i -ésima data de COPOM.

Considerando que as taxas sofrem alterações apenas nas datas de COPOM, podemos escrever a seguinte relação:

$$\left(1 + r'_{COPOM}\right)^{\frac{du_{i \rightarrow j}}{252}} = \left(\frac{\left(1 + r^j_{DI}\right)^{\frac{du_{i0 \rightarrow j}}{252}}}{\left(1 + r^0_{COPOM}\right)^{\frac{du_{i0 \rightarrow j}{}^0_{COPOM}}{252}} \times \prod_{k=1}^{i-1} \left(1 + r^k_{COPOM}\right)^{\frac{du_{k \rightarrow k+1}}{252}}} \right) \quad (3-6)$$

Onde:

$du_{i \rightarrow j}$ \Rightarrow Dias úteis entre a i -ésima reunião de COPOM e o j -ésimo vencimento de DI;

$du_{d0 \rightarrow j}$ \Rightarrow Dias úteis entre a data base da curva $d0$ e o j -ésimo vencimento de DI;

$du_{d0 \rightarrow d1^{\circ} COPOM}$ \Rightarrow Dias úteis entre a data base da curva $d0$ e a primeira data de COPOM a partir da data base da curva.

Tomemos como exemplo os dados para o dia 18 de maio de 2005 da Tabela 3.2 e os dados da Tabela 3.3, que contém o calendário das datas de COPOM divulgadas para o ano-base 2005.

Calendário do COPOM para 2005
20/jan/05
17/fev/05
17/mar/05
22/abr/05
19/mai/05
16/jun/05
21/jul/05
18/ago/05
15/set/05
20/out/05
24/nov/05
15/dez/05

Tabela 3-3 Calendário de Datas do COPOM para 2005.

Fonte: Banco Central do Brasil.¹

O DI Over efetivo em 18 de maio foi de 19,47%. Portanto, como entre o dia 18 e a próxima data efetiva do COPOM não temos nenhum contrato aberto de DI, a taxa esperada até a próxima reunião do COPOM será igual ao DI over do próprio dia 18 de maio, ou seja, 19,47%. Para o modelo em questão, desconsideraremos eventuais vencimentos de contrato futuro de DI de um dia, que estejam entre a data-base e a primeira data de COPOM, por considerarmos a informação redundante com o DI over da data-base.

¹ Calendário disponível através da página eletrônica do Banco Central do Brasil, no endereço: <http://www.bc.gov.br/?COPOMCALEND2005>

O primeiro passo do modelo será calcular as taxas futuras de DI de um dia nas datas do COPOM. Calculando-se a previsão do mercado para a primeira reunião do COPOM no dia 19 de maio, teremos:

- r_{COPOM}^0 = 19,47% taxa do DI over até a primeira data do COPOM,
- $du_{t \rightarrow j}$ = 8 dias úteis entre a primeira data efetiva do COPOM (19 de maio) e o primeiro ponto de mercado de futuro de DI (1º de junho),
- r_{DI}^1 = 19,58% taxa implícita no primeiro vencimento de contrato futuro de DI (1º de junho),
- $du_{d0 \rightarrow d1^{COPOM}}$ = 1 dia útil entre a data base e a primeira data de COPOM e
- $du_{d0 \rightarrow j}$ = 9 dias úteis entre a data base da curva (18 de maio) e o vencimento do primeiro contrato futuro de DI (1º de junho).

Fazendo as devidas substituições em (3-6). teremos:

$$\left(1 + r_{COPOM}^1\right)^{\frac{8}{252}} = \left(\frac{(1 + 0,1958)^{\frac{9}{252}}}{(1 + 0,1947)^{\frac{1}{252}}}\right), \text{ ou } r_{COPOM}^1 = 19,59\%$$

O resultado, de certa forma, indica-nos que o mercado estava esperando um aumento de aproximadamente 12 pontos-base para a data de COPOM de 19 de maio, expectativa essa calculada com a diferença em pontos-base entre o DI Over do dia 18 de maio (19,47%) e a expectativa para o DI Over calculada para a data COPOM de 19 de maio (19,59%).

Para critério de informação, o dia 19 de maio teve um aumento na taxa-base de 25 pontos-base, decidido pelo COPOM na reunião encerrada no dia 18 de maio. Essa decisão levou o DI over para 19,71%, refletindo praticamente todos os 25 pontos do aumento na taxa-base.

Refazendo-se o cálculo para a data de COPOM de 16 de junho, teremos:

$$\left(1 + r_{COPOM}^2\right)^{\frac{11}{252}} = \left(\frac{(1 + 0.1965)^{\frac{31}{252}}}{(1 + 0.1947)^{\frac{1}{252}} \cdot (1 + 0.1959)^{\frac{19}{252}}}\right)$$

$$\Rightarrow r_{COPOM}^2 = 19,75\%$$

A Tabela 3-4 contém os cálculos para as demais datas efetivas do COPOM divulgadas até dezembro.

Vencimento	DI Over Futuro
19/mai/05	19.59%
16/jun/05	19.75%
21/jul/05	19.69%
18/ago/05	19.74%
15/set/05	19.48%
20/out/05	18.87%
24/nov/05	18.87%
15/dez/05	18.87%

Tabela 3-4 Expectativas para o DI Over Futuro nas Datas de COPOM no dia 18-maio-2005.

Para se obter as expectativas das datas de COPOM até 15 de setembro, usamos os vencimentos mensais dos contratos futuros de DI da BM&F até outubro. Para as datas subsequentes, não temos pontos negociados de futuro de DI na BMF em todas as cabeças de mês, pelo motivo de os vencimentos passarem a ocorrer trimestralmente. Para determinar as expectativas nas reuniões subsequentes, supomos o simples fato de que as alterações ocorram uma vez, e no primeiro mês do trimestre. Isso foi feito de modo a facilitar os cálculos.

Outras hipóteses podem ser usadas para resolver o problema citado. Entre elas, pode-se supor que as alterações ocorrem de modo igual nos meses intermediários. Em geral, recomenda-se o uso da intuição de quem opera e constrói a curva de juros, calibrando-se as expectativas nas reuniões do COPOM subsequentes, de forma a casar com as taxas de mercado do DI e de acordo com suas próprias expectativas para as datas de COPOM.

Devido ao fato de que, quando foi feito este trabalho, não haviam sido divulgadas as datas das reuniões do COPOM para os anos posteriores a 2005, mantivemos os próprios vencimentos do contrato futuro de DI para interpolações nesses

períodos. A Tabela 3.5 mostra os pontos-base da curva com taxas spot para interpolação geométrica. As Figuras 3.12 e 3.13 ilustram, respectivamente, o formato da curva de juros para a interpolação geométrica modificada e as previsões do DI over futuro nessa curva.

Para critério de comparação, calculamos a curva de juros para data do COPOM do dia 19 de maio. Os pontos-base da curva com as taxas spot estão na Tabela 3.6 e as previsões de alterações do DI over para as datas de COPOM subseqüentes estão ilustradas na Tabela 3.7. As Figuras 3.14 e 3.15 mostram como o erro das previsões do mercado influenciou as curvas de juros e as expectativas futuras do DI over.

No Capítulo 4 estudaremos especificamente os erros nas expectativas e a forma a modelá-los. Finalmente, no Capítulo 5 iremos propor um modelo para o apreçamento de derivativos das taxas dos DIs, que incorpore uma componente estatística referente a esses erros.

Vencimento	Taxa Spot
19/mai/05	19.47%
16/jun/05	19.59%
21/jul/05	19.68%
18/ago/05	19.68%
15/set/05	19.70%
20/out/05	19.65%
24/nov/05	19.51%
15/dez/05	19.45%
2/jan/06	19.40%
3/abr/06	19.00%
3/jul/06	18.62%
2/out/06	18.33%
2/jan/07	18.02%
2/abr/07	17.81%
2/jul/07	17.64%
1/out/07	17.49%
2/jan/08	17.33%
1/abr/08	17.17%
1/jul/08	17.03%
1/out/08	16.92%
2/jan/09	16.81%
1/abr/09	16.72%
1/jul/09	16.60%
4/jan/10	16.36%
1/abr/10	16.25%
3/jan/11	16.10%

Tabela 3-5 Pontos da Curva de Juros Base para Interpolação Geométrica do dia 18-maio-2005.

Taxa Spot

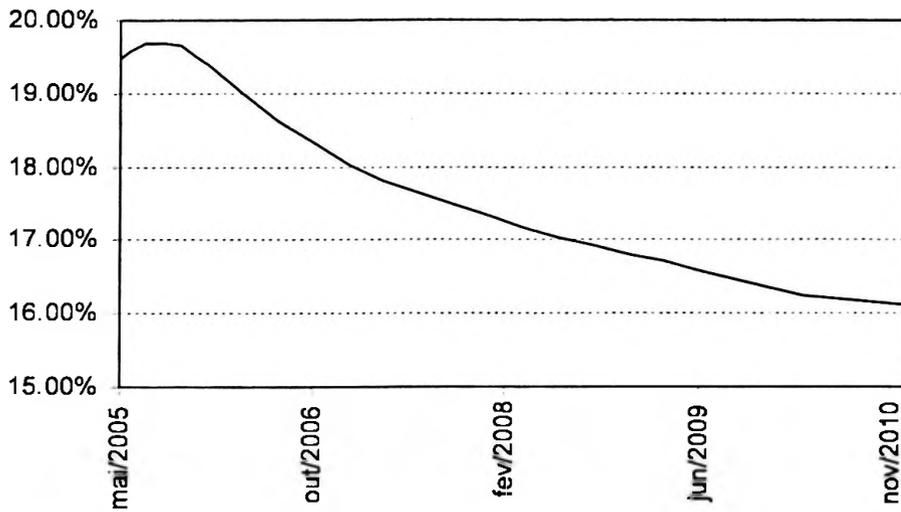


Figura 3-12 Gráfico da Curva de Juros Spot com Interpolação Geométrica Modificada para dia 18-Maio-2005.

Taxa Futura

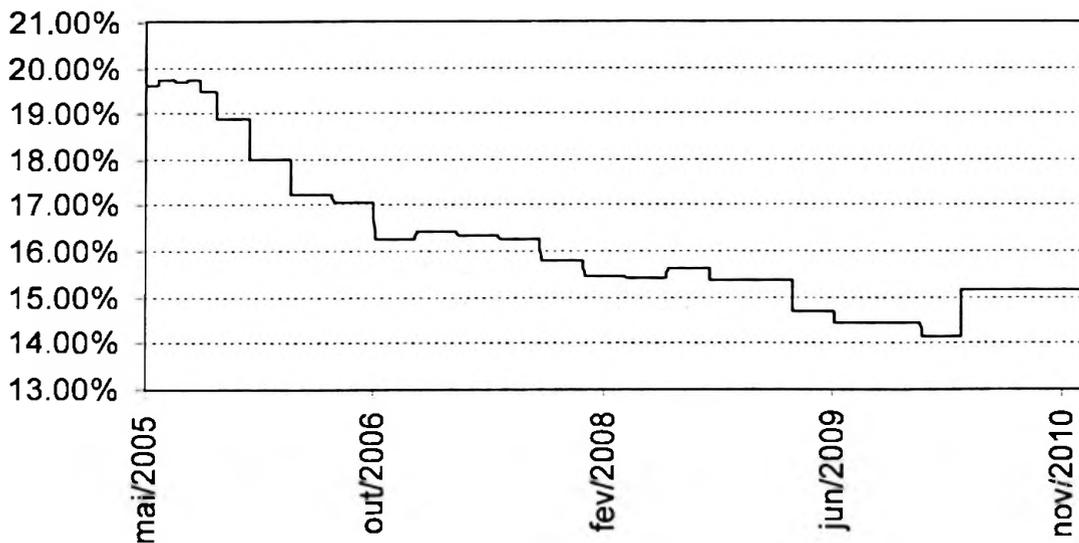


Figura 3-13 Evolução do DI Over para Interpolação Geométrica Modificada para o dia 18-maio-2005.

Vencimento	Taxa Spot
20/mai/05	19.71%
16/jun/05	19.71%
21/jul/05	19.82%
18/ago/05	19.80%
15/set/05	19.90%
20/out/05	19.80%
24/nov/05	19.69%
15/dez/05	19.64%
2/jan/06	19.60%
3/abr/06	19.18%
3/jul/06	18.80%
2/out/06	18.47%
2/jan/07	18.14%
2/abr/07	17.90%
2/jul/07	17.72%
1/out/07	17.58%
2/jan/08	17.43%
1/abr/08	17.29%
1/jul/08	17.13%
1/out/08	17.00%
2/jan/09	16.90%
1/abr/09	16.80%
1/jul/09	16.69%
4/jan/10	16.44%
1/abr/10	16.32%
3/jan/11	16.10%

Tabela 3-6 Pontos Base da Curva de Juros para Interpolação Geométrica do dia 19-maio-2005.

Vencimento	DI Over Futuro
19/mai/05	19.71%
16/jun/05	19.90%
21/jul/05	19.76%
18/ago/05	20.25%
15/set/05	19.46%
20/out/05	19.17%
24/nov/05	19.17%
15/dez/05	19.17%

Tabela 3-7 Expectativas para o DI Over Futuro nas Datas de COPOM no dia 19-maio-2005.

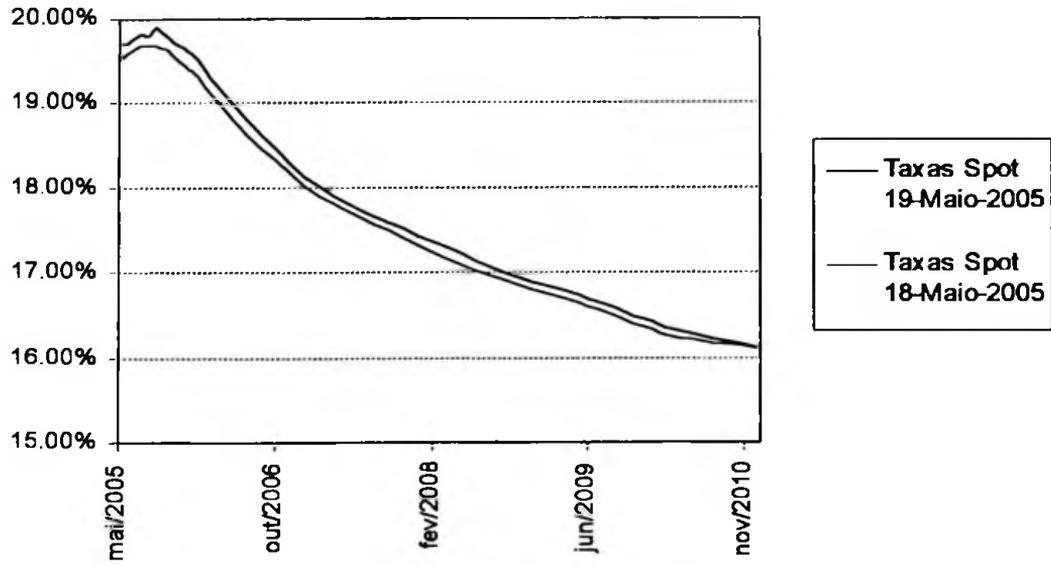


Figura 3-14 Evolução da Curva de Juros de 18-maio-2005 a 19-maio-2005.

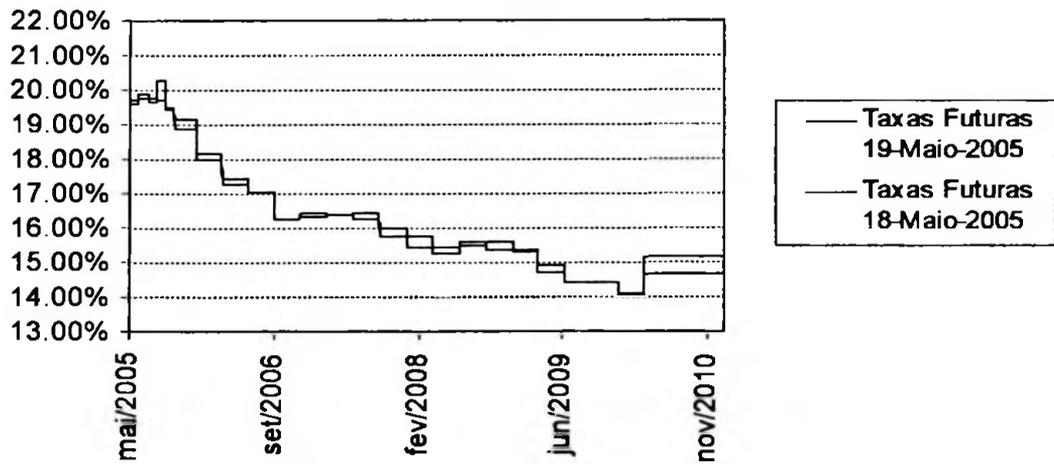


Figura 3-15 Evolução das Expectativas para DI Over de 18-maio-2005 a 19-maio-2005.

4 Estudo dos Saltos nas Datas Efetivas do COPOM

No capítulo anterior escolhemos um método para construir a curva de juros dos Depósitos Interfinanceiros (DI). Dela conseguimos obter as previsões do mercado para eventuais mudanças na taxa do DI, relacionadas à alteração da meta SELIC pelo Comitê de Política Monetária do Banco Central (COPOM). Percebemos também que, para uma determinada data, a previsão do mercado não correspondeu à alteração da taxa na data do COPOM. Isso fez com que ocorresse um salto na curva de juros de curto prazo, de forma a adaptar a nova curva pós-reunião do COPOM.

Neste capítulo fazemos um estudo histórico desses saltos. O objetivo é responder a perguntas do tipo: Com que frequência o mercado erra suas previsões? Qual o comportamento desses saltos? Como modelar esses saltos em uma variável estocástica para o processo da taxa de juros?

4.1 *Análise Histórica*

Para fazermos uma análise histórica dos erros nas previsões do mercado para as alterações no DI Over com a melhor precisão possível, utilizaremos a previsão do DI Over para a data de COPOM com exatamente um dia de antecedência. Consideramos que assim estaremos minimizando a probabilidade de se misturar os efeitos de movimentos de mercado com os saltos ocasionados pelo erro da previsão.

Utilizando o método de construção da curva de juros por interpolação geométrica modificada para datas base imediatamente anteriores as datas efetivas do COPOM, obtemos a previsão contida na curva de juros para a reunião do COPOM do dia seguinte. Em seguida, comparamos essa previsão com o que realmente ocorreu na data do COPOM. As previsões e as taxas efetivas estão ilustradas na Figura 4-1. As diferenças em pontos-base das previsões com as alterações efetivas estão ilustradas na Figura 4-2.

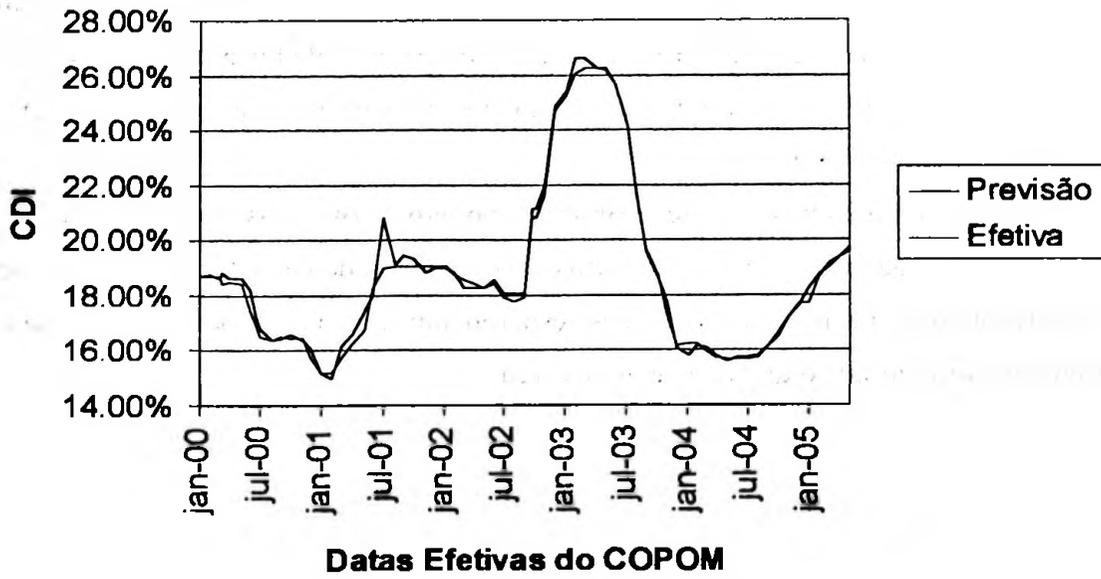


Figura 4-1 Comparação entre as previsões do mercado para o DI Over e o observado nas datas efetivas do COPOM.

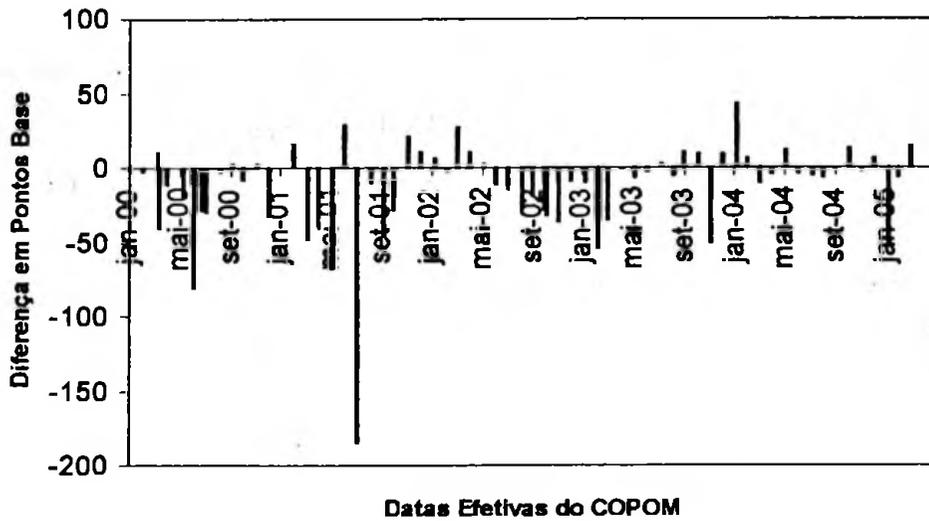


Figura 4-2 Diferença em pontos base entre as previsões do mercado para o DI Over e o observado nas datas efetivas do COPOM.

As Figuras 4-1 e 4-2 indicam a existência de saltos no DI Over em quase todas as datas de COPOM compreendidas entre janeiro de 2000 e maio de 2005. De modo a criar um modelo eficiente para o apreçamento de derivativos de taxas de juros, devemos incorporar uma variável aleatória discreta no processo da taxa de juros, de forma a incorporar os saltos observados.

Outro ponto interessante de se observar é o fato de os saltos, no período referido, terem sido, em sua grande maioria, negativos. Isso reflete, de certa forma, o pessimismo do mercado que, na maioria das vezes, esperou um aumento maior (ou uma queda menor) na taxa, do que o que realmente ocorreu.

4.2 Comportamento dos Saltos

Para tentar mapear o comportamento dos saltos observados historicamente em uma variável aleatória, precisamos primeiramente escolher uma forma de medir os saltos históricos. Na Figura 4-2 medimos os saltos pela diferença entre as expectativas e os valores efetivos. Outra forma de se medir esses saltos é através da diferença percentual do valor real.

A desvantagem de se utilizar uma diferença simples deve-se ao fato de, quando incorporado ao processo da taxa de juros, poder gerar taxas negativas. Esse problema pode ser resolvido para modelos implementados em árvores¹, podando-se os ramos que eventualmente levem a taxas negativas. Para diferenças percentuais, não se corre o risco de se obter taxas negativas no modelo final.

O primeiro passo para se identificar a distribuição da nova variável aleatória, é observar o seu histograma. As Figuras 4-3 e 4-4 ilustram os histogramas para saltos medidos, respectivamente, pela diferença simples e pela diferença percentual.

¹ Vide exemplos para fugir de taxas negativas na árvore trinomial pelas Figuras 2.1 e 2.2 do Capítulo 2.

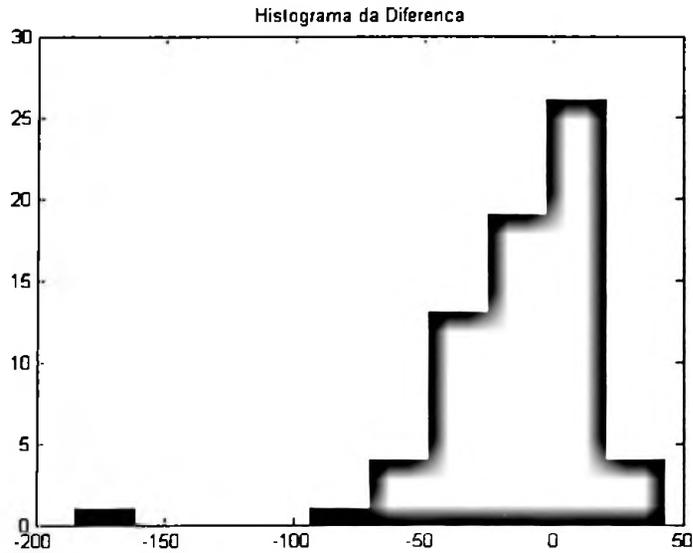


Figura 4-3 Histograma dos Saltos Observados Como Diferença Entre as Previsões e as Realizações do DI Over.

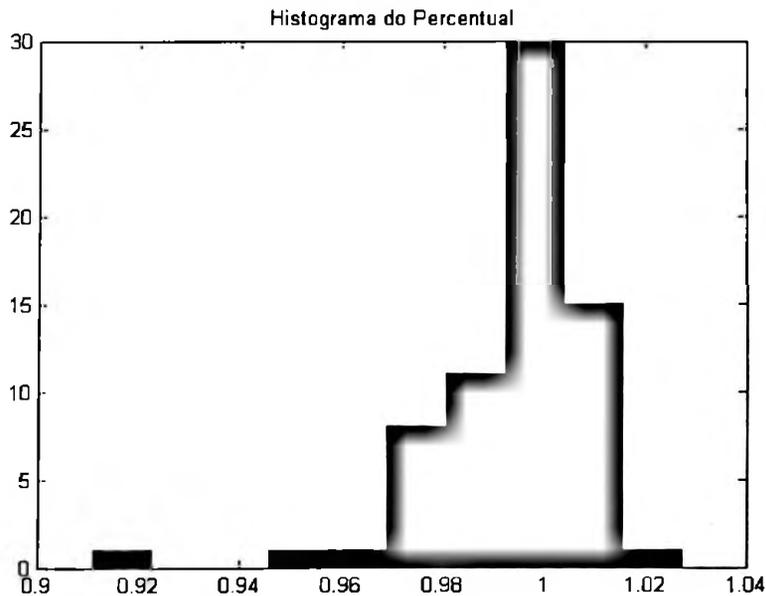


Figura 4-4 Histograma dos Saltos Observados Como Diferença Percentual Entre as Previsões e as Realizações do DI Over.

Pelo comportamento observado nos histogramas, a primeira hipótese nos leva a testar uma distribuição normal para os dados. Para testar a hipótese de normalidade, realizamos dois testes. O primeiro consiste em avaliar qualitativamente as realizações quanto à aproximação à normal pelos métodos normplot e boxplot do MatLab. O

segundo método utilizado foi o teste de Lilliefors. Esse método consiste em fornecer um número que indica se devemos ou não rejeitar a hipótese de distribuição normal.

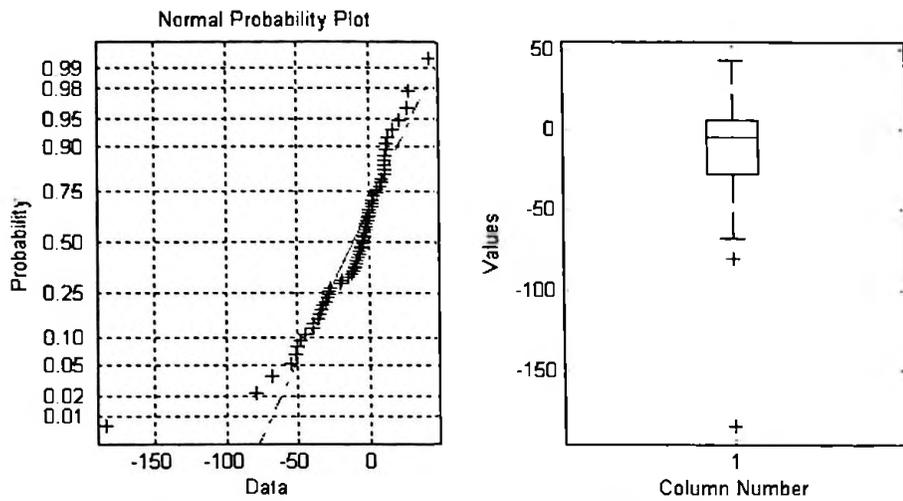


Figura 4-5 Normplot e Boxplot para a série das diferenças.

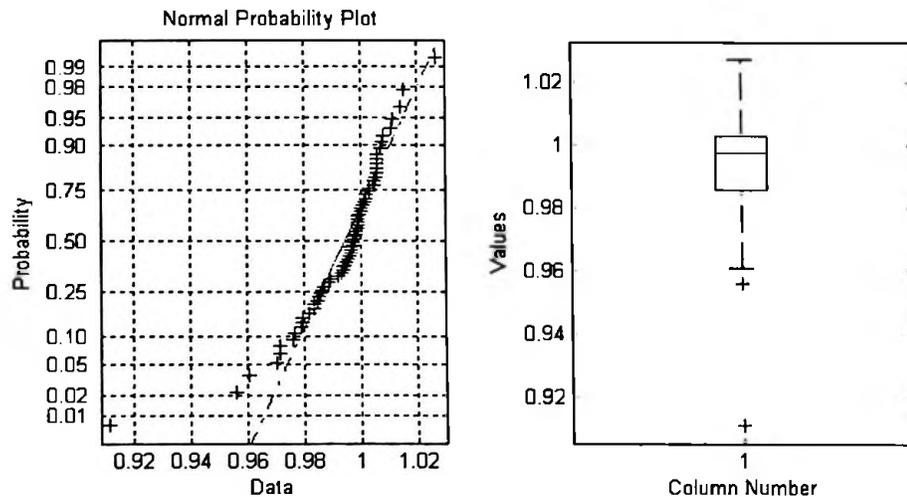


Figura 4-6 Normplot e Boxplot para a série dos percentuais.

Na análise qualitativa dos saltos, os dois métodos de medida apresentaram problemas de pontos extremos, o que indica que a distribuição real talvez tenha caudas mais pesadas que a distribuição normal propriamente dita.

Estatística	Diferença	Percentual
L	0.1791	0.1697
C	0.1074	0.1074

Tabela 4-1 Teste de Lilliefors para normalidade.

No teste de Lilliefors, a estatística L, combinada com a estatística C, indica a probabilidade dos dados testados possuírem distribuição normal. No caso em questão, para $L > C$ pode-se concluir, com 95% de confiança, que a distribuição não é normal. Infelizmente, segundo a tabela 4-1, podemos concluir que existe uma grande probabilidade dos saltos não serem normais.

Isso dificulta um pouco a nossa modelagem. Os saltos observados possuem caudas mais pesadas do que se esperava para uma distribuição normal. Olhando novamente para a nossa amostra, de janeiro de 2000 a maio de 2005, tivemos um total de 68 decisões do COPOM, o que, de certa forma, pode ser considerado um espaço amostral relativamente pequeno para se afirmar, com certeza, não se tratar de uma distribuição normal.

Distribuições com a T-Student, que possuem caudas mais pesadas, poderiam ser testadas para os saltos, de modo a aprimorar o modelo. Como uma primeira abordagem, consideraremos a distribuição de probabilidade dos saltos como normal, por facilidade de cálculo e implementação, deixando para estudos posteriores o teste em outras distribuições. Outra informação que utilizaremos se refere ao fato de o teste de Lilliefors indicar que erro para distribuição normal é menor nos saltos com diferença percentual.

4.3 Modelo para os saltos

Uma das principais propriedades observada até agora para os saltos deve-se ao fato de eles ocorrerem em datas conhecidas. Isso nos leva a escolher um modelo discreto no tempo, para a variável aleatória representativa dos saltos. O modelo que usaremos consiste em descrever essa variável aleatória através de uma árvore binomial. Como ponto de partida, usaremos a aproximação da distribuição normal na árvore binomial desenvolvida por Cox-Ross-Rubenstein - CRR (1979).

Para modelar a medida dos saltos, escolhamos a diferença percentual. Como visto anteriormente, essa medida possui menor erro no teste de Lilliefors para a distribuição normal.

Outra hipótese a ser levantada é o fato de considerarmos que os saltos não possuem qualquer tipo de tendência no tempo. Em outras palavras, consideramos que o tempo não influencia no erro das expectativas do mercado.

Sendo J a variável aleatória que representa os saltos, aproximaremos um processo Browniano para J da seguinte forma:

$$dJ = C + \sigma \times dB,$$

Onde:

- C : constante real;
- σ : volatilidade do processo.

Representado na árvore binomial, sendo r o DI Over imediatamente antes da data do COPOM, para a data do COPOM, essa taxa passará a ter dois valores possíveis: $u \times r$ ou $d \times r$. u , d e p determinados segundo a variável aleatória J .

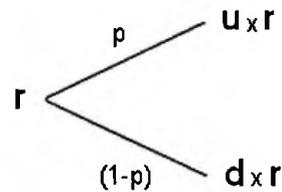


Figura 4-7 Um Passo da Árvore Binomial na Taxa de Juros para incorporar os Saltos.

Para calcular os valores de u , d e p , utilizaremos a mesma metodologia de Cox-Ross-Rubenstein(1979). Da árvore binomial, calculamos a média e o desvio padrão:

$$E[J \times r] = p \times u \times r + (1 - p) \times d \times r$$

$$(E[J \times r])^2 = p^2 \times u^2 \times r^2 + (1 - p)^2 \times d^2 \times r^2 + 2 \times p \times (1 - p) \times u \times d \times r^2$$

$$E[(J \times r)^2] = p \times u^2 \times r^2 + (1 - p) \times d^2 \times r^2$$

$$VAR(J \times r) = (E[J \times r])^2 - E[(J \times r)^2] = p \times (1 - p) \times (u - d)^2 \times r^2$$

Aproximando o processo para J , temos: $\Delta J = C + \sigma \times \Delta B$, ou, $J_{t+\Delta t} - J_t = C + \sigma \times \Delta B$. Calculando o valor esperado e a variância de $J_{t+\Delta t}$ considerando que no início $t = t_0$ temos $J_{t_0} = 0$:

$$E[J \times r] = C \times r$$

$$E[(J \times r)^2] = C^2 \times r^2 + \sigma^2 \times r^2 \times \Delta t$$

$$VAR[J \times r] = \sigma^2 \times r^2 \times \Delta t$$

Igualando-se os valores calculados para média e variância de $J \times r$ na árvore e na aproximação no tempo discreto do processo dos saltos J , chegamos ao seguinte conjunto de equações:

$$C \times r = p \times u \times r + (1 - p) \times d \times r$$

$$\sigma^2 \times \Delta t \times r^2 = p \times (1 - p) \times (u - d)^2 \times r^2$$

A escolha da terceira equação para resolver o problema por Cox-Ross-Rubenstein(1979), foi fazer $u = \frac{1}{d}$. Por analogia ao método de apreçamento de derivativos de taxa de juros na árvore Black-Derman-Toy(1990), que será utilizado no capítulo seguinte, escolheremos $p = \frac{1}{2}$. Temos os seguintes valores para u e d :

$$u = C + \sigma \times \sqrt{\Delta t}$$

$$d = C - \sigma \times \sqrt{\Delta t}$$

Para o modelo de saltos, a constante C do processo representa, na verdade, a média das realizações da variável aleatória J . A Figura 4-8, a seguir, ilustra um passo da árvore binomial para os saltos na vizinhança das datas de COPOM. É importante ressaltar que o modelo dos saltos só faz sentido se a árvore binomial possuir seus nós nas datas de COPOM, onde historicamente se observou a ocorrência dos saltos.

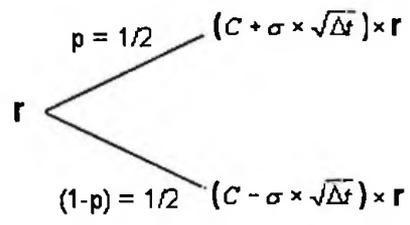


Figura 4-8 Um Passo na Árvore Binomial Final para os Saltos.

5 Incorporando Saltos no Apreçamento de Derivativos de Taxa de Juros

No Capítulo 4, propomos um modelo para os saltos relativos às diferenças entre as expectativas de mercado e as decisões do Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil. O foco deste quinto capítulo será propor uma forma de se incorporar ao processo da taxa de juros, o modelo estocástico relativo a esses saltos. A utilização prática do modelo proposto será feita para o apreçamento de derivativos de taxa de juros.

Na escolha de um método para se incorporar o processo dos saltos, devemos levar em consideração a facilidade de implementação em uma árvore binomial onde, para algumas datas específicas, será mais fácil de se adicionar à incerteza relativa aos saltos. Dos métodos descritos no Capítulo 2, escolhemos a modelagem de Black, Derman & Toy (1990) para o processo da taxa de juros. Dentre as vantagens desse método, podemos citar a reversão à média, a impossibilidade de se ter taxas negativas na árvore e a facilidade de adaptação às estruturas a termo de taxa de juros e de volatilidade.

5.1 Processo de Black, Derman e Toy(1990) Para a Taxa de Juros

Para entendermos melhor o funcionamento do método, utilizaremos o mesmo exemplo do artigo original do *Financial Analysts Journal*¹ de 1990. A Tabela 5-1 abaixo descreve uma estrutura a termo de taxa de juros e de volatilidade. As taxas usadas na estrutura a termo são taxas *spot*.

¹ O artigo original a que o texto se refere é: Black F., Derman E., Toy W. (1990), "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Jan/Feb 46, p. 33-39.

Vencimento (Anos)	Taxa (%)	Volatilidade (%)
1	10.0	20.0
2	11.0	19.0
3	12.0	18.0
4	12.5	17.0
5	13.0	16.0

Tabela 5-1 Exemplo de Estrutura a Termo de Taxa de Juros e Volatilidade.

Fonte: Financial Analysts Journal Jan/Feb 46

O modelo baseia-se na criação de uma árvore binomial para o apreçamento de um Título *zero coupon bond*¹ de valor de face \$100 a ser pago em uma determinada data de vencimento. A partir da árvore do ativo, obtém-se a árvore para as taxas de juros futuras. Como feito no Capítulo 4, o modelo escolhe as probabilidades de subida e descida equiprováveis e iguais a $1/2$.

Inicialmente, vamos supor que o nosso título tenha vencimento em exatamente um ano. Como a taxa de juros para um ano pela Tabela 5-1 é de 10%, por não arbitragem, o preço unitário (PU) do título deve ser:

$$PU_{1ano} = \frac{100}{(1 + 0.1)} = 90.91.$$

Na árvore binomial, isso é equivalente a:

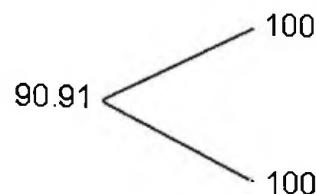


Figura 5-1 Árvore Binomial de Um Passo para Título com Valor de Face 100 e Vencimento em um ano.

Para o caso de um título com vencimento em dois anos, a estrutura a termo de taxa de juros nos fornece:

$$PU_{2anos} = \frac{100}{(1 + 0.11)^2} = 81.16.$$

¹ A Expressão *zero coupon bond* refere-se a um título que não possui pagamentos intermediários de juros.

O modelo BDT toma como base o processo na árvore binomial para o preço dos títulos *zero coupon bond*, para então se obter a árvore para a taxa de juros. Para calcular a evolução do preço do Título na árvore binomial com passo anual, precisamos lembrar que o modelo considera a probabilidade de subida e descida para um passo na árvore binomial igual a 50%. O problema está ilustrado na Figura 5-2 abaixo.

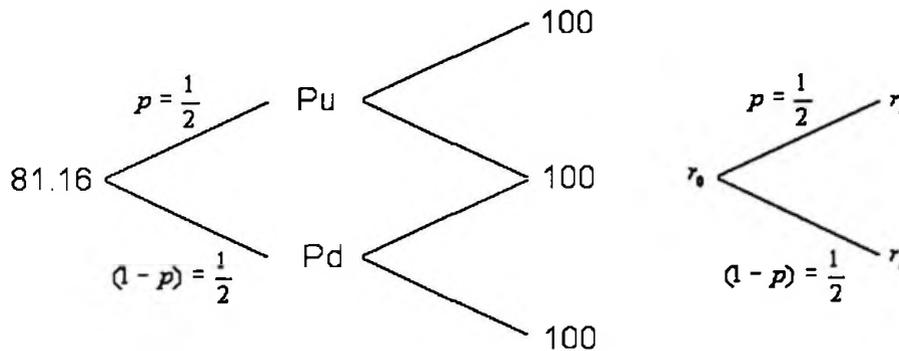


Figura 5-2 Árvore Binomial com Passo Anual para um Título com Vencimento em 2 Anos e a Árvore Binomial Equivalente para a Taxa de Juros Futura.

Para determinarmos P_u e P_d da árvore binomial descrita, o modelo BDT supõe que a estrutura a termo de volatilidade seja conhecida. A volatilidade utilizada no modelo BDT refere-se a $\sigma(t)$ da aproximação:

$$\Delta(\ln r) = \mu \cdot \Delta t + \sigma(t) \cdot \Delta W \quad (i).$$

Seja r_0 a taxa de curto prazo entre a data-base e o primeiro nó da árvore e r_u e r_d , as taxas de curto prazo futuras entre o primeiro e o segundo ano, tais que

$P_u = \frac{100}{1+r_d}$ e $P_d = \frac{100}{1+r_u}$. Calculando a média e a variância de $\Delta \ln(r)$ na árvore dos

juros futuros descrita pela Figura 5-2, teremos:

$$E[\Delta \ln(r)] = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln\left(\frac{r_u}{r_0}\right) + \ln\left(\frac{r_d}{r_0}\right) \right]$$

$$E[(\Delta \ln(r))^2] = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln^2\left(\frac{r_u}{r_0}\right) + \ln^2\left(\frac{r_d}{r_0}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
VAR(\Delta \ln(r)) &= E[(\Delta \ln(r))^2] - E^2[\Delta \ln(r)] = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln^2\left(\frac{r_u}{r_0}\right) + \ln^2\left(\frac{r_d}{r_0}\right) \right] - \frac{1}{4} \cdot \left[\ln^2\left(\frac{r_u}{r_0}\right) + \ln^2\left(\frac{r_d}{r_0}\right) + 2 \cdot \ln\left(\frac{r_u}{r_0}\right) \cdot \ln\left(\frac{r_d}{r_0}\right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\ln^2\left(\frac{r_u}{r_0}\right) + \ln^2\left(\frac{r_d}{r_0}\right) - 2 \cdot \ln\left(\frac{r_u}{r_0}\right) \cdot \ln\left(\frac{r_d}{r_0}\right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left[\ln\left(\frac{r_u}{r_0}\right) + \ln\left(\frac{r_d}{r_0}\right) \right]^2 = \frac{1}{4} \cdot \ln^2\left(\frac{r_u}{r_d}\right) \quad (ii)
\end{aligned}$$

Igualando-se a variância do processo (i) com a variância calculada em (ii), chegamos à relação:

$$r_u = r_d \cdot e^{2\sigma(t)}$$

O problema de construção da árvore descrita resume-se portanto em calcular r_d . O valor esperado do preço do Título no segundo nó da árvore descontado o valor presente pela taxa para um ano, por não-arbitragem, deve ser igual ao valor calculado do preço do título pela estrutura a termo da taxa de juros. O cálculo, portanto, ficou:

$$81.16 = \frac{\frac{1}{2} \cdot (P_d + P_u)}{(1 + 0.1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{(1 + r_u)} + \frac{100}{(1 + r_d)} \right)}{1.1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{100}{(1 + r_d \cdot e^{2 \cdot 0.19})} + \frac{100}{(1 + r_d)} \right)}{1.1}$$

$$\Rightarrow r_d = 9.79\%, r_u = 14.32\%, P_u = 91.08 \text{ e } P_d = 87.47$$

A Figura 5-3 ilustra os valores calculados acima, na árvore descrita pela Figura 5-2. É importante ressaltar o fato de a árvore para a taxa de juros futura ser invertida com relação à árvore dos preços. Para se chegar em P_u usamos a taxa r_d , e para P_d , usamos a taxa r_u .

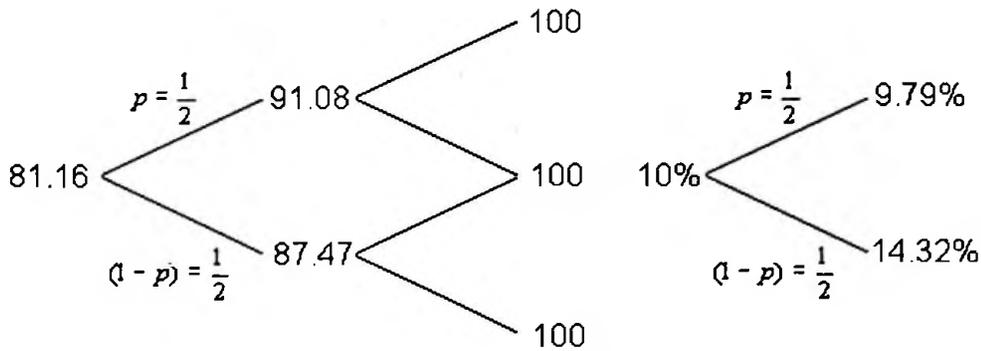


Figura 5-3 Árvore Binomial com Passo Anual para um Título com Vencimento em 2 Anos e a Árvore Binomial Equivalente para a Taxa de Juros Futura.

Para se construir uma árvore binomial da taxa de juros com maior número de períodos, basta repetir o processo recursivamente. Para obter mais informações sobre a implementação, o leitor pode consultar o algoritmo desenvolvido para o aplicativo *Mathematica* por Benninga & Wiener¹.

5.1.1 Estrutura a Termo de Volatilidade no BDT

Para determinarmos a estrutura a termo do processo (i), tomaremos como base o método de construção da curva de juros por interpolação geométrica modificada, como ilustrado no Capítulo 3. Com base nesse modelo, mapearemos as taxas futuras nas datas de COPOM e, em seguida, calcularemos o desvio padrão histórico para as datas de COPOM subseqüentes à data-base da curva.

Da aproximação (i) para o processo da taxa de juros de curto prazo, temos:

$$\Delta(\ln r) = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta W, \text{ ou}$$

$$\ln\left(\frac{r_{t,t}}{r_{t-1,t}}\right) = \mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta W. \text{ (iii)}$$

Portanto, a média e o desvio padrão serão calculados com base na evolução histórica do logaritmo dos retornos das taxas futuras de DI Over para as data de COPOM. Para efeito de comparação, medimos a estrutura a termo de volatilidade do

¹ Benninga & Wiener, "Binomial Term Structure Model", *Mathematica in Education and Research*, v. 7, nº. 3, 1998.

processo (i) de duas formas diferentes. A primeira forma consiste em utilizar todos os dados históricos disponíveis, como faríamos para o BDT tradicional. Na segunda forma, retiramos as variações pontuais que ocorreram devido às decisões do COPOM, de forma a tentar isolar a componente aleatória dos saltos da volatilidade da taxa de juros.

Os resultados ilustrados na Tabela 5-2 são referentes ao período compreendido entre 3 de maio de 2004 a 3 de maio de 2005. O algoritmo desenvolvido em MatLab para construir a estrutura a termo de volatilidade encontra-se anexo ao trabalho.

Dados	Vol BTD com Variações no COPOM	Vol BTD sem Variações no COPOM
CDI Over	6.71%	3.01%
1ª Reunião	13.46%	7.54%
2ª Reunião	16.15%	14.00%
3ª Reunião	34.25%	27.15%
4ª Reunião	31.58%	29.13%

Tabela 5-2 Estrutura a Termo de Volatilidade Baseada em Dados Históricos para as Datas Efetivas das Reuniões do COPOM entre 3 de maio de 2004 a 3 de maio de 2005.

Como já era de se esperar, excluindo-se as variações, devido às decisões do COPOM, temos volatilidades menores do que aquelas que consideraram estas variações. Neste trabalho estaremos fazendo uma comparação efetiva entre os apreçamentos, utilizando o modelo de Black-Derman-Toy(1990) na estrutura a termo de volatilidade que inclui as variações das decisões do COPOM, com um modelo que faz a separação desses efeitos.

5.2 Proposta de Modelo para Apreçamento de Derivativos de Taxa de Juros com Saltos

Os saltos referentes às diferenças entre as expectativas do mercado e as decisões do COPOM, como já observado, ocorrem em datas fixas e conhecidas. Esse fato, relatado no Capítulo 4, levou-nos a modelar os saltos em uma árvore binomial, onde os períodos dos ramos da árvore ficaram fixos nas datas de COPOM.

A proposta do novo modelo consiste basicamente em incorporar à árvore binomial de Black, Derman e Toy(1990), uma componente estocástica relativa aos

saltos observados. O modelo é, na verdade, uma fusão entre duas árvores binomiais, a árvore para o processo da taxa de juros de BDT e a árvore para o processo dos saltos.

A Figura 5-4 ilustra uma árvore binomial para o processo de taxa de juros, como a que se constrói por Black, Derman e Toy (1990). A Figura 5-5 ilustra a forma como iremos proceder com a fusão das árvores de BDT e a árvore desenvolvida para os saltos.

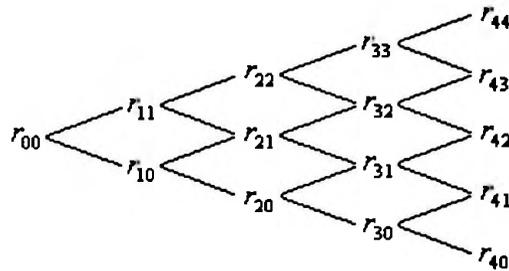


Figura 5-4 Árvore Binomial para taxa de juros sem considerar saltos.

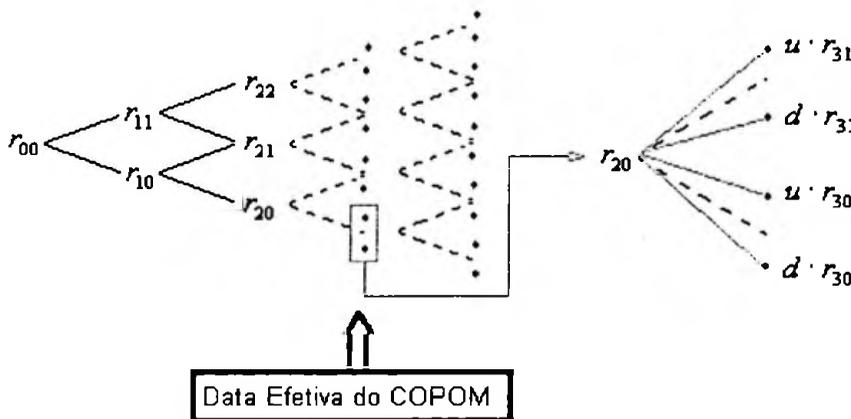


Figura 5-5 Árvore Binomial para taxa de juros considerando saltos nas datas efetivas do COPOM.

Os saltos ocorrem sobre as expectativas do mercado para as taxas de juros futuras nas datas de COPOM. Esse é o principal motivo para que a adição dos saltos seja feita sobre as próprias taxas futuras obtidas no modelo BDT nas datas de COPOM. Para essas datas, substituiremos aquela que seria a taxa esperada r_{ij} na árvore binomial de BDT sem saltos, por duas componentes: $u \cdot r_{ij}$ e $d \cdot r_{ij}$, onde u e d são obtidas pela

componente aleatória relativa aos saltos segundo as equações desenvolvidas no Capítulo 4:

$$u = C + \sigma \times \sqrt{\Delta t}$$

$$d = C - \sigma \times \sqrt{\Delta t}$$

Para exemplificar o modelo, construímos uma curva de juros para o dia 4 de maio de 2005, utilizando o método de interpolação geométrica modificada com o DI Over para a data-base e com as cotações de fechamento dos contratos futuros de DI de um dia da BMF. As informações de mercado utilizadas para o dia 4 de maio de 2005 estão contidas da Tabela 5-3. Para construir a árvore de Black-Derman-Toy(1990), utilizamos também a estrutura a termo de volatilidade da Tabela 5-2.

Para os saltos, usando a mesma série histórica da estrutura a termo de volatilidade da Tabela 5-3, obtemos: $C = 1.0007$ e $\sigma = 0.4563\%$ para $\sqrt{\Delta t} = 1$, já que analisamos os saltos sobre as taxas anuais. Com isso, $u = 1.008076$ e $d = 0.988924$.

Instrumento	Data	Taxa
CDI Over	04/mai/05	19.48%
DI1JUN5	01/jun/05	19.53%
DI1JUL5	01/jul/05	19.60%
DI1AGO5	01/ago/05	19.66%
DI1SET5	01/set/05	19.66%
DI1OUT5	03/out/05	19.65%
DI1JAN6	02/jan/06	19.47%

Tabela 5-3 Dados de mercado do dia 4-maio-2005.

Fonte: CETIP e BM&F

Data	Taxa Futura	Taxa Spot
04/mai/05	19.48%	
19/mai/05	19.60%	19.48%
16/jun/05	19.72%	19.56%
21/jul/05	19.89%	19.63%
18/ago/05	19.37%	19.70%
15/set/05	19.79%	19.63%
20/out/05	19.01%	19.66%
24/nov/05	19.01%	19.56%
15/dez/05	19.01%	19.51%

Tabela 5-4 Expectativas do Mercado para o DI Over nas Datas de COPOM em 4-maio-2005.

Para escolhermos os períodos de ramificação da árvore binomial de BDT, levamos em consideração as observações feitas no Capítulo 3, sobre a evolução histórica do DI Over. Com isso, os períodos de ramificação ficaram coincidentes com as datas efetivas do COPOM e, por conseguinte, coincidentes com as datas dos saltos. A árvore binomial para três passos, ou três datas de COPOM, no modelo BDT está ilustrada na Figura 5-6. A árvore binomial para o modelo proposto está ilustrada na figura 5-7.

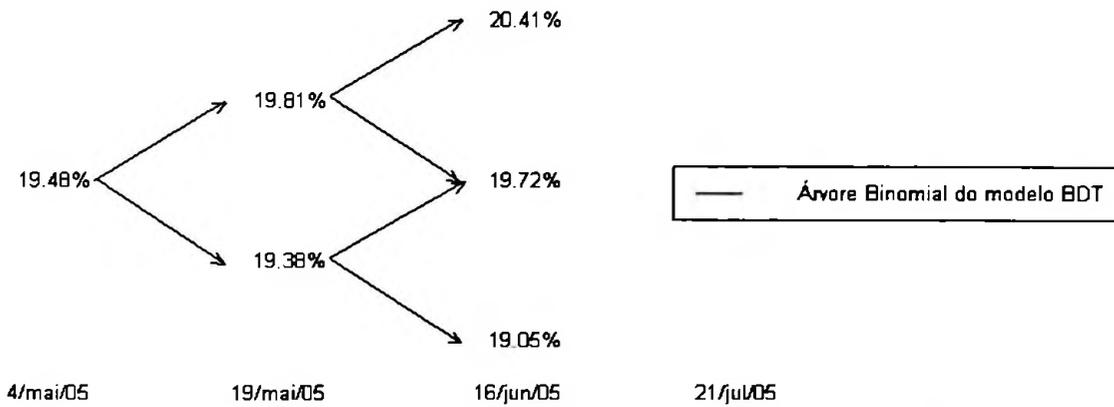


Figura 5-6 Árvore Binomial do modelo de Black-Derman-Toy com 3 Passos para o dia 4/maio/2005.

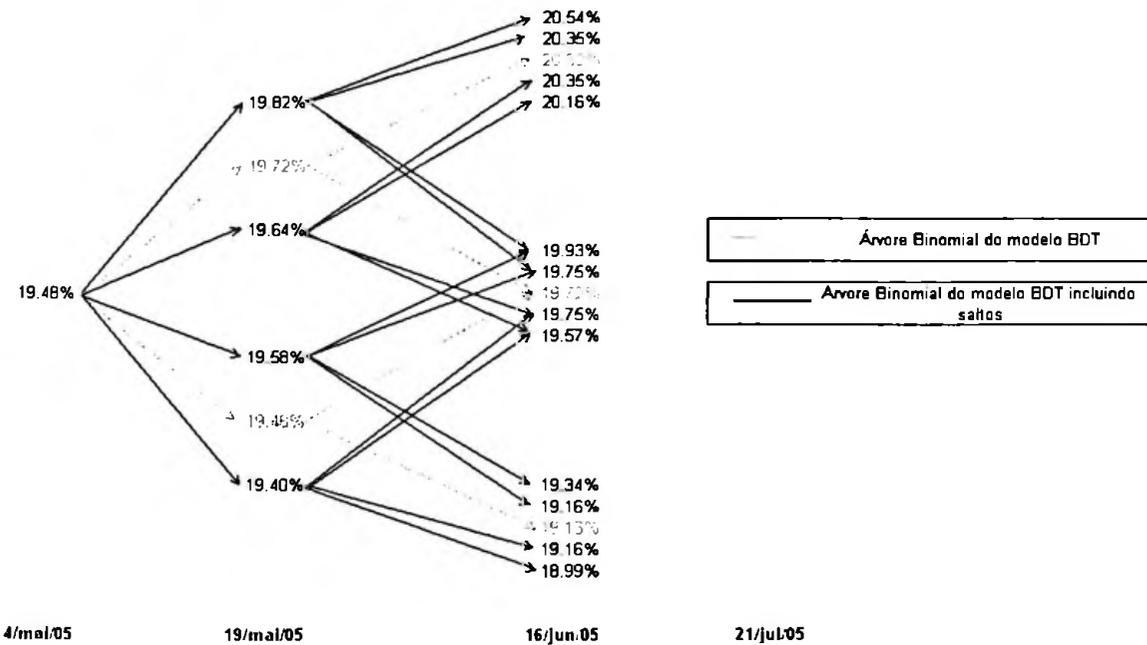


Figura 5-7 Árvore Binomial do Modelo com Saltos Incorporados ao modelo BDT com 3 Passos para o dia 4/maio/2005.

Como esperado para cada nó do modelo BDT em uma data de COPOM, temos 2^{n+1} nós no modelo proposto, onde n é o número de reuniões do COPOM já realizadas até aquele momento. Isso é um limitante a ser considerado do ponto de vista computacional, pois temos um número bem maior de caminhos da taxa de juros para avaliarmos uma determinada posição.

Para podermos comparar de forma efetiva os dois métodos, para a árvore binomial do modelo de Black-Derman-Toy(1990), usamos a estrutura a termo de volatilidade, sem excluir os dados históricos relativos aos saltos. Já para montar a árvore de BDT, que incorpora os saltos, usamos a estrutura a termo de volatilidade, excluindo a série histórica relativa aos saltos.

5.2.1 Usando o Modelo para o Apreçamento de Opções Sobre IDI

Segundo definição dos contratos de compra e venda sobre Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de um dia da Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F)¹, o IDI é definido como o valor teórico de 100.000,00 pontos na data de início de valorização definida pela própria BM&F, e corrigido diariamente pela taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia (DI Over) divulgada pela CETIP. A data-base de início de valorização do Índice em utilização na data deste trabalho, era 2 de janeiro de 2003.

O preço de fechamento de alguns contratos de opções de compra de IDI em aberto na BM&F no dia 4 de maio de 2005, com vencimento para 1º de julho, estão listados na Tabela 5-5. De posse das árvores de juros para o dia 4 de maio de 2005, ilustradas nas Figuras 5-6 e 5-7, montamos a árvore binomial para o índice de taxa média de depósitos interfinanceiros de um dia (IDI) até 1º de julho, data de vencimento das opções. O valor do índice IDI no dia 4 de maio de 2005 era 151.477,08. A árvore binomial do índice IDI, segundo o método BDT, está ilustrada na Figura 5-8 e segundo o método proposto, na Figura 5-9.

¹ O Documento está disponível na página eletrônica da BM&F através do endereço: http://www.bmf.com.br/2004/pages/frame.asp?idioma=1&area=contratos&link_char=financeiro17

Contrato	Vencimento	Ajuste	Strike
IDIJL02	01/jul/05	1,411.00	154,500.00
IDIJL03	01/jul/05	936.00	155,000.00
IDIJL04	01/jul/05	441.00	155,500.00
IDIJL05	01/jul/05	11.00	156,000.00

Tabela 5-5 Contratos de Opção sobre IDI com Vencimento em 1º de Julho de 2005 no dia 4/maio/2005.

Fonte: BM&F

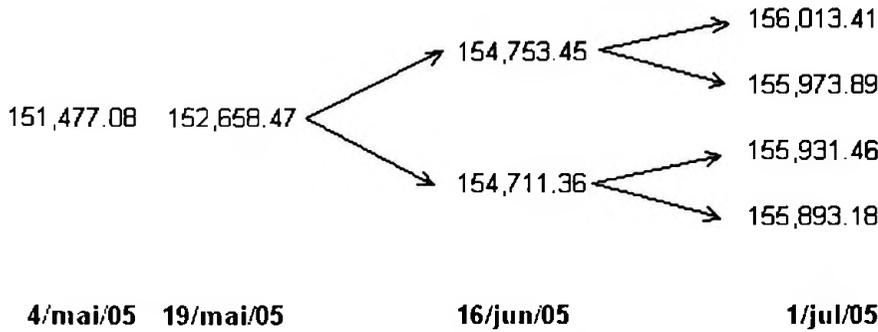


Figura 5-8 Árvore Binomial do IDI no Método de BDT para 4/maio/2005 com Vencimento em 1º julho/2005.

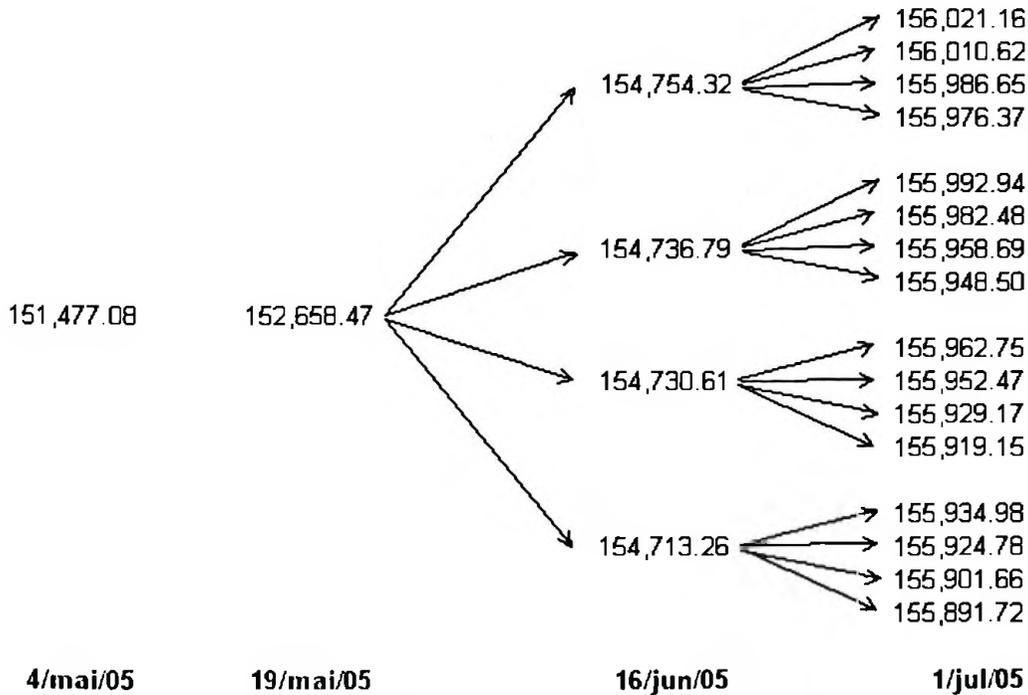


Figura 5-9 Árvore Binomial do IDI no Modelo Proposto para 4/maio/2005 com Vencimento em 1º julho/2005.

Entre a 4 de maio e 1º de julho, temos duas reuniões do COPOM. Cada reunião do COPOM nesse período alteraria as expectativas dos valores do índice a partir da data da reunião. Esse é o motivo pelo qual o vencimento em 16 de junho teve os reflexos da data COPOM de 19 de maio, e o vencimento em 1º de julho teve os reflexos da data COPOM de 16 de junho.

A árvore binomial da evolução do índice IDI é a base para o apreçamento de qualquer opção listada na Tabela 5-5. Por se tratar de opções européias, com exercício fixado na data de vencimento, o seu valor na data de vencimento deveria ser:

$$C_{\text{vencimento}} = \text{MAX}(0, \text{IDI}_{\text{vencimento}} - K)$$

Onde:

- $C_{\text{vencimento}}$ é o preço da opção de compra (também chamada de *Call*) na data de vencimento,
- $\text{IDI}_{\text{vencimento}}$ é o valor do índice na data de vencimento, e
- K é o preço de compra da opção (também chamado de *Strike*).

Para o apreçamento de qualquer opção em uma árvore binomial, deve-se avaliar o seu valor em cada nó da árvore, utilizando-se o valor do ativo objeto no respectivo nó. No caso das opções listadas na Tabela 5-5, calculamos o valor das opções nos nós da data de vencimento e, para calcular os valores nos nós intermediários, descontamos esses valores pelas taxas futuras entre cada período (taxas ilustradas nas Figuras 5-6 e 5-7), chegando finalmente aos preços das opções para a data-base. A Figura 5-10 ilustra a árvore binomial para a opção IDIJL02 na árvore relativa ao modelo de BDT, e a Figura 5-11 ilustra a árvore binomial para a mesma opção, segundo a árvore relativa ao método proposto.

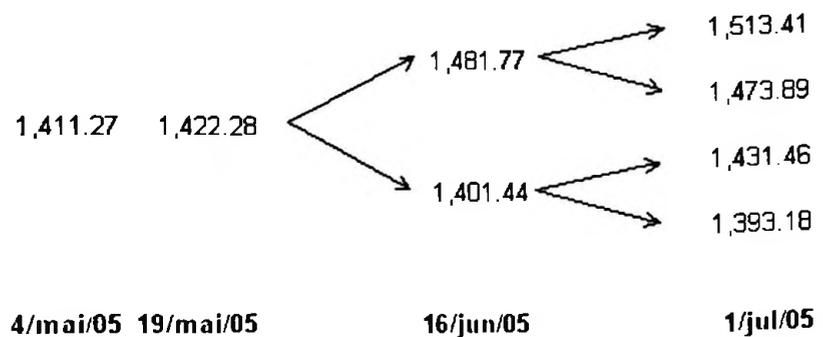


Figura 5-10 Árvore Binomial para a Opção IDIJL02 no Modelo BDT para 4/maio/2005.

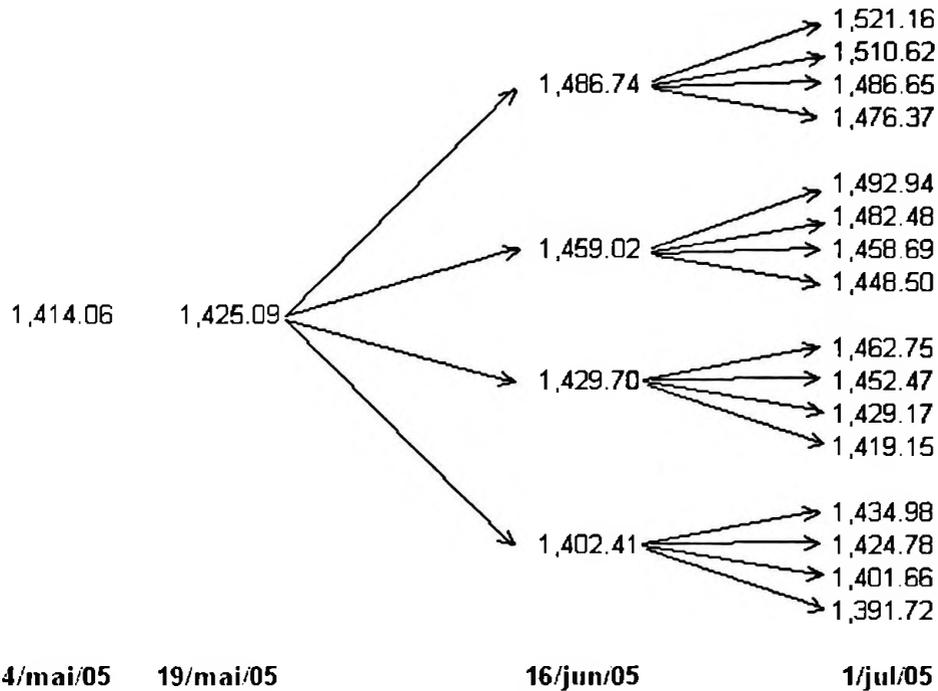


Figura 5-11 Árvore Binomial para a Opção IDIJL02 no Modelo Proposto para 4/maio/2005.

Repetindo o procedimento de apreçamento das opções de IDI para os demais *strikes* listados na Tabela 5-5, chegamos à seguinte lista de preços para o dia 4 de maio de 2005:

Contrato	Strike	BDT	BDT c/ Saltos
IDIJL02	154,500.00	1,411.27	1,414.06
IDIJL03	155,000.00	925.62	928.42
IDIJL04	155,500.00	439.97	442.78
IDIJL05	156,000.00	3.26	1.93

Tabela 5-6 : Preços calculados para contratos de opções de IDI pelo Método de BDT e pelo Método Proposto para 4-maio-2005.

Um ponto interessante de se observar deve-se ao fato de o preço calculado pelo método proposto ter sido, na maioria dos casos, menor que o calculado pelo BDT para todas as opções. O fato de a média dos saltos, no prazo observado, ter sido maior que um, significa que o mercado esperou, para as taxas de juros, aumentos menores, ou quedas maiores do que ocorreu nas decisões do COPOM. Ao utilizarmos essa média,

estamos adicionando uma tendência para as próximas reuniões, o que explica o efeito observado.

Calculamos o valor esperado para o IDI na curva de mercado e no método proposto. Na curva de juros, temos para vencimento em dia 1º de julho, a taxa de 19.61%. Dado o valor do IDI em 4 de maio ser 151.477,08, 41 dias úteis entre 4 de maio e 1º de julho, o valor futuro do índice para 1º de julho na nossa curva ficaria:

$$IDI_{1,7} = 151.477,08 \cdot (1 + 0.1961)^{\frac{41}{252}} = 155.955,08$$

Calculado o valor esperado do IDI na árvore do modelo proposto (ilustrada na Figura 5-9), temos:

$$E[IDI_{1,7}] = \frac{1}{16} \cdot \sum_{i=1}^{16} IDI'_{vencimento} = 155.955,88$$

O fato de termos obtido um preço para opção IDIJL05 menor no modelo proposto do que no BDT, pode ser justificado pelo fato de a árvore binomial no modelo proposto gerar exercício na data de vencimento para 2 nós de 16 possíveis, enquanto que a árvore do modelo BDT tem exercício em 1 nó de 4 possíveis, o que aumenta a probabilidade e consecutivamente o preço.

5.3 Comparação entre o Modelo BDT e o Modelo Proposto

Para avaliarmos melhor o método proposto, estudaremos o comportamento histórico da evolução dos preços das opções ao longo do tempo, até seu vencimento. A estrutura a termo da volatilidade usada para as datas históricas foi obtida com uma janela de tempo de um ano, terminando no dia imediatamente anterior à data analisada.

As séries escolhidas para estudo foram então listadas na Tabela 5-7. O critério utilizado para a escolha das séries de opções de IDI leva em consideração as seguintes exigências:

- Opção teve exercício na data de vencimento.
- Maior quantidade de preços de fechamento disponíveis pela BMF.

Série	Vencimento	Preço de Exercício
IDIJA01	2/jan/04	123,000.00
IDIAB17	1/abr/04	127,500.00
IDIoT09	1/out/04	137,500.00
IDIJA15	3/jan/05	143,000.00
IDIAB17	1/abr/05	149,000.00

Tabela 5-7 Série de Opções sobre o Índice IDI Utilizada Para Comparativo Entre o Método Proposto e o Modelo de BDT.

Fonte: BM&F

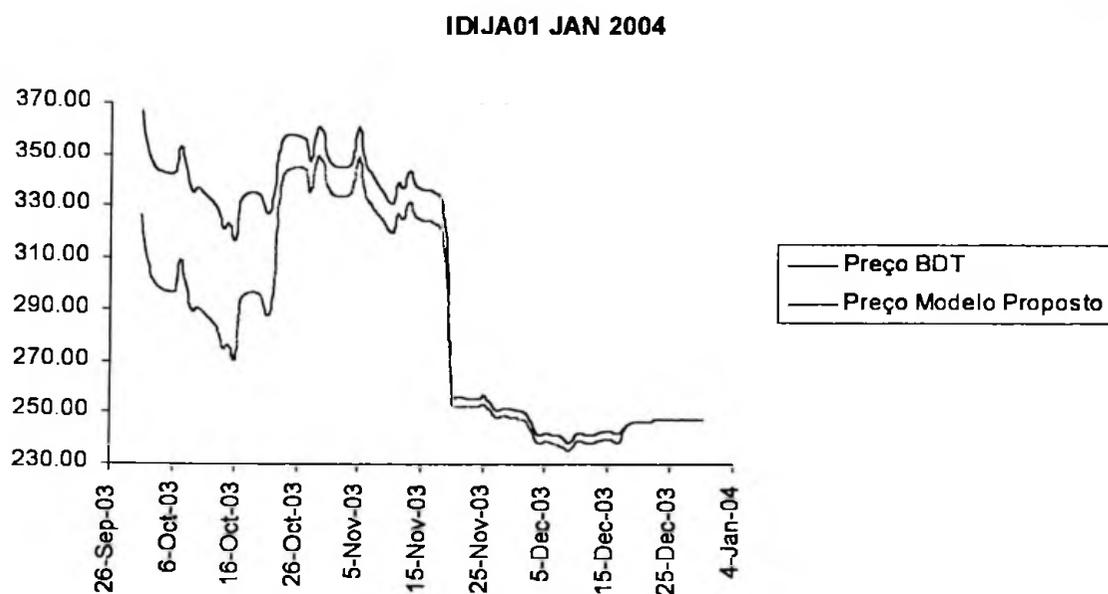


Figura 5-12 Comparação Histórica entre os Preços no Modelo BDT e no Modelo Proposto para a Série IDIJA01 com Vencimento em 02/jan/2004.

IDIAB17 ABR 2004

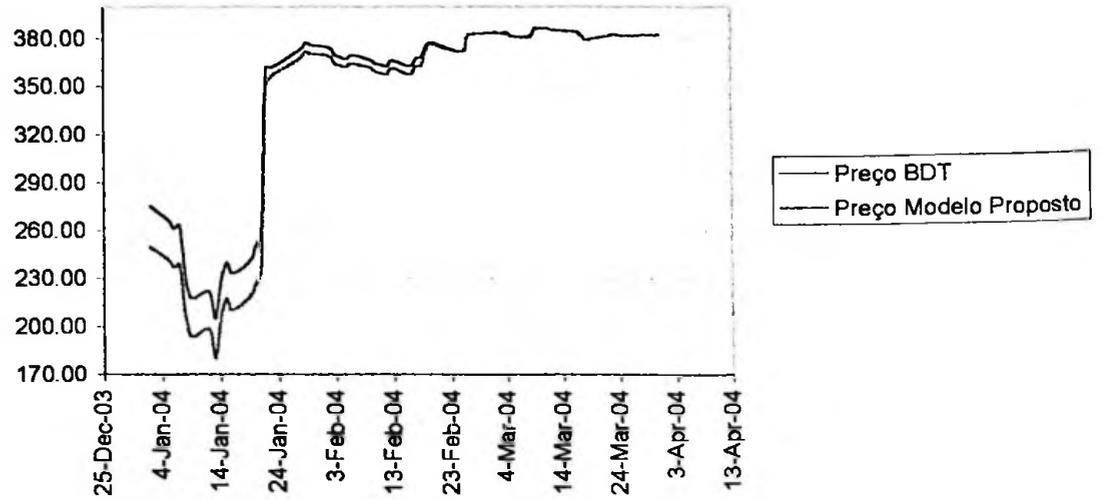


Figura 5-13 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2004.

IDIOT09 OUT 2004

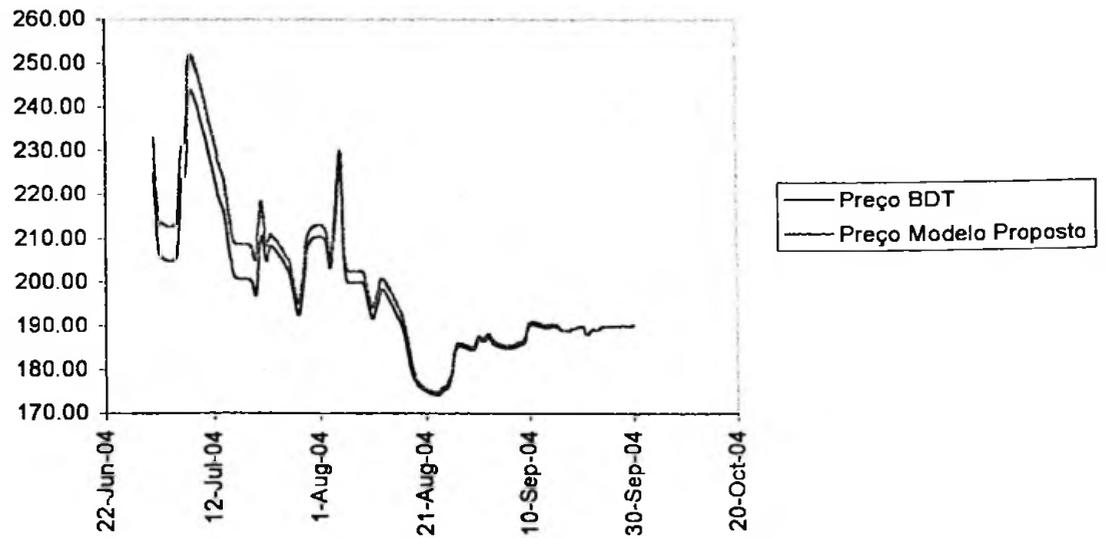


Figura 5-14 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIOT09 com Vencimento em 01/out/2004.

IDIJA15 JAN 2005

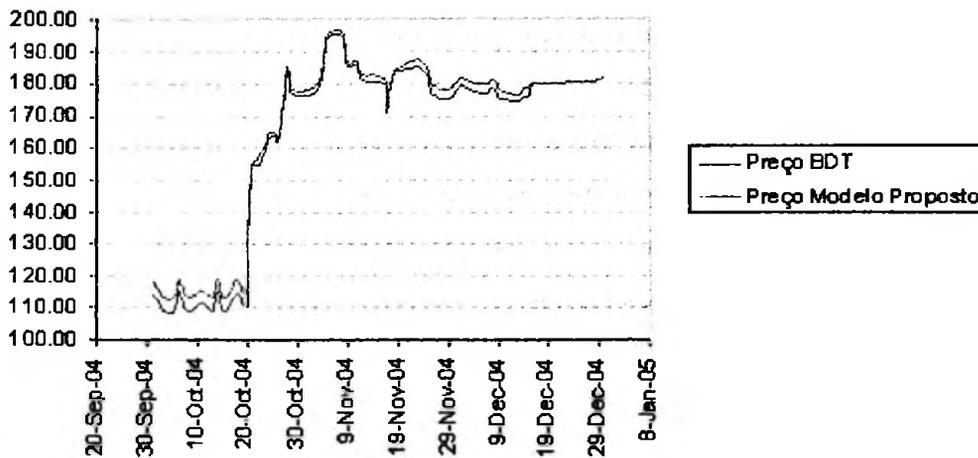


Figura 5-15 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIJA15 com Vencimento em 03/jan/2005.

IDIAB17 ABR 2005

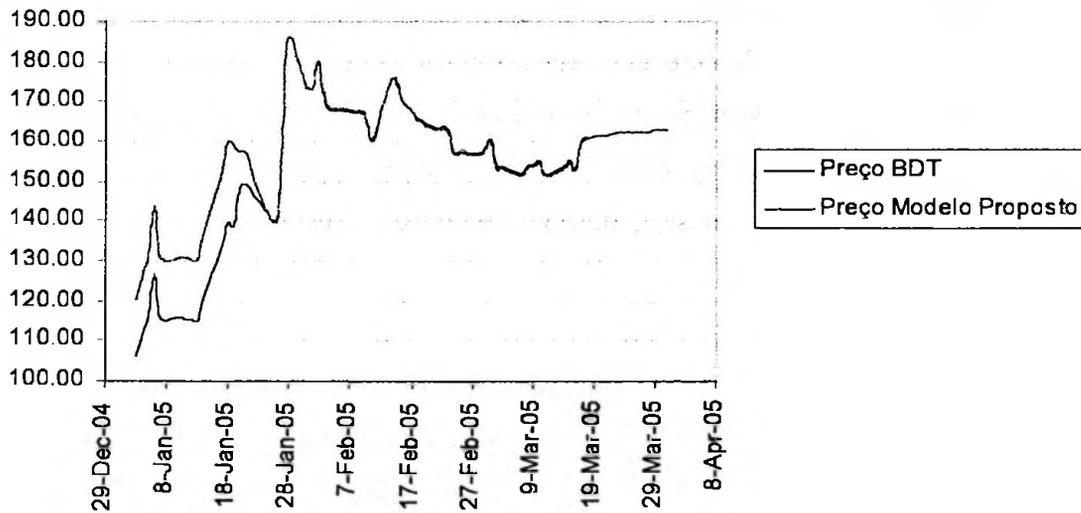


Figura 5-16 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2005.

Em todos os casos notamos uma diferença grande entre os preços obtidos pelos dois métodos para prazos distantes dos vencimentos das opções. Essa diferença,

entretanto, convergiu para zero com a proximidade do vencimento, para todas as opções observadas.

A Tabela 5-8, a seguir, ilustra o desvio-padrão do histórico de preços nos dois métodos. Em relação à volatilidade dos preços calculados, o modelo proposto teve um desvio-padrão menor que o BDT para três séries históricas. Das três séries com menor volatilidade, duas delas foram nos vencimentos mais recentes observados. Essa última observação leva-nos a concluir que, para os vencimentos observados, o modelo proposto teve uma oscilação menor dos preços.

Série	Vencimento	BDT	Modelo Proposto
IDIJA01	2/jan/04	48.36	39.68
IDIAB17	1/abr/04	57.53	66.65
IDIoT09	1/out/04	14.53	16.90
IDIJA15	3/jan/05	28.47	27.47
IDIAB17	1/abr/05	19.14	13.93

Tabela 5-8 Desvio Padrão das Séries Históricas das Opções sobre IDI no Modelos de BDT e no Modelo Proposto.

A hipótese de uma possível diferença entre a expectativa dos saltos, obtida historicamente, e o que realmente ocorreu, pode ser uma possível explicação para os dois casos, nos quais o modelo proposto apresentou maior volatilidade no preço. Para testar a hipótese, refizemos os cálculos, considerando que os saltos não possuem qualquer tipo de tendência, ou seja, desconsideramos a constante C relativa à média histórica dos saltos.

IDIJA01 JAN 2004

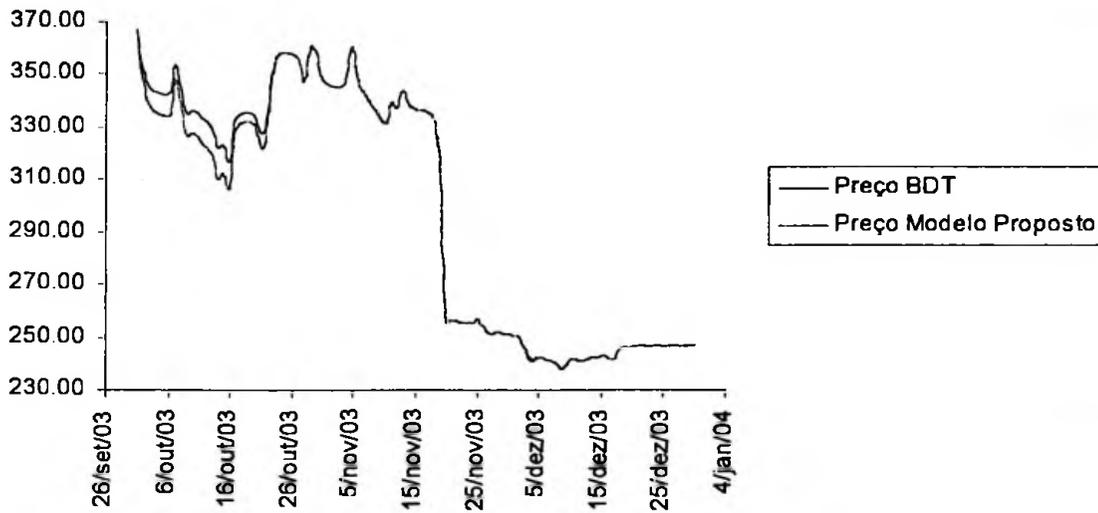


Figura 5-17 Comparação Histórica entre os Preços no Modelo BDT e no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA01 com Vencimento em 02/jan/2004.

IDIAB17 ABR 2004

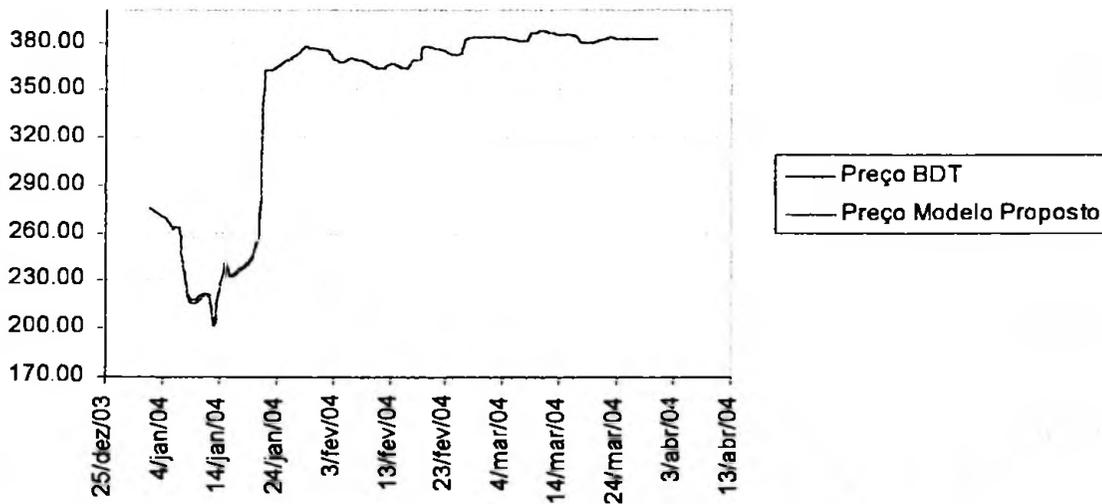


Figura 5-18 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2004.

IDIOT09 OUT 2004

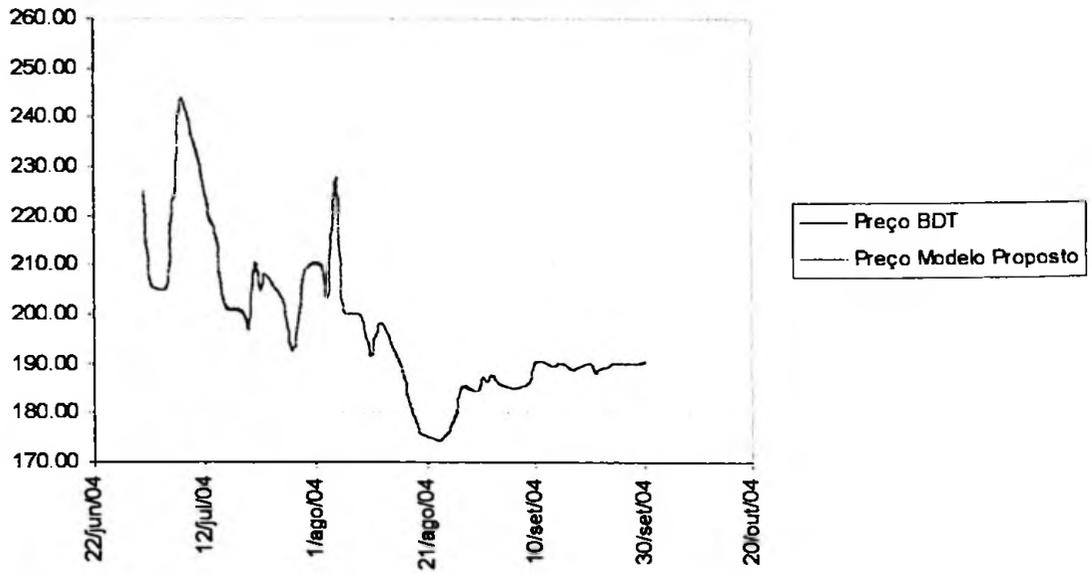


Figura 5-19 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIOT09 com Vencimento em 01/out/2004.

IDIJA15 JAN 2005

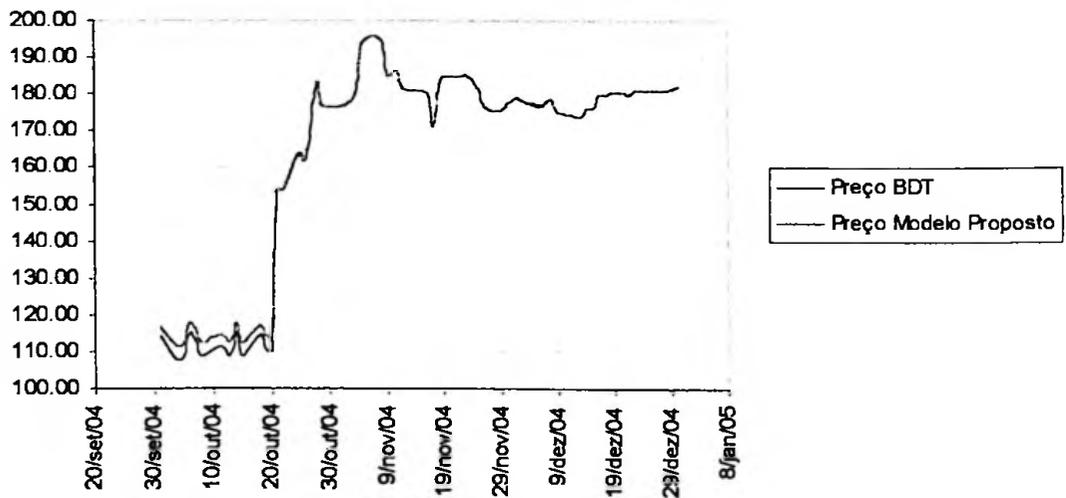


Figura 5-20 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA15 com Vencimento em 03/jan/2005.

IDIAB17 ABR 2005

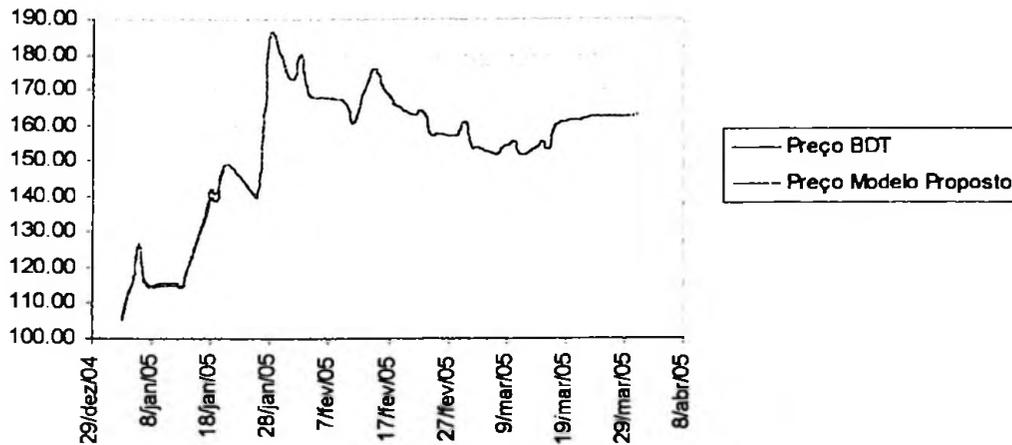


Figura 5-21 Comparação Histórica entre os Preços Pelo Modelo BDT e o Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2005.

Como pudemos observar, se excluirmos o fator relativo à expectativa dos saltos, os dois métodos ficam muito parecidos, com a série histórica do modelo proposto tendo uma volatilidade levemente menor que o BDT. De certa forma este resultado já era esperado, uma vez que, excluindo-se a tendência histórica do método proposto, o modelo de Black, Derman & Toy(1990) com nós nas datas de COPOM deveria ter o mesmo comportamento que o modelo proposto com nós nas mesmas datas. O fato de o processo dos saltos possuir uma volatilidade da ordem de 0,5% ao ano para a maioria dos casos observados também ajuda a explicar a pequena diferença entre os dois métodos.

5.4 Comparação entre o Modelo Proposto e o Mercado

A principal dificuldade que tivemos para comparar o modelo proposto com os preços de mercado foi a de encontrar uma fonte confiável para os preços de mercado. Utilizamos como base dos preços de mercado, os últimos preços disponíveis para negociação na BM&F em datas históricas. As figuras, a seguir, ilustram a evolução dos

preços de mercado e dos preços obtidos pelo modelo proposto sem tendência para os saltos.

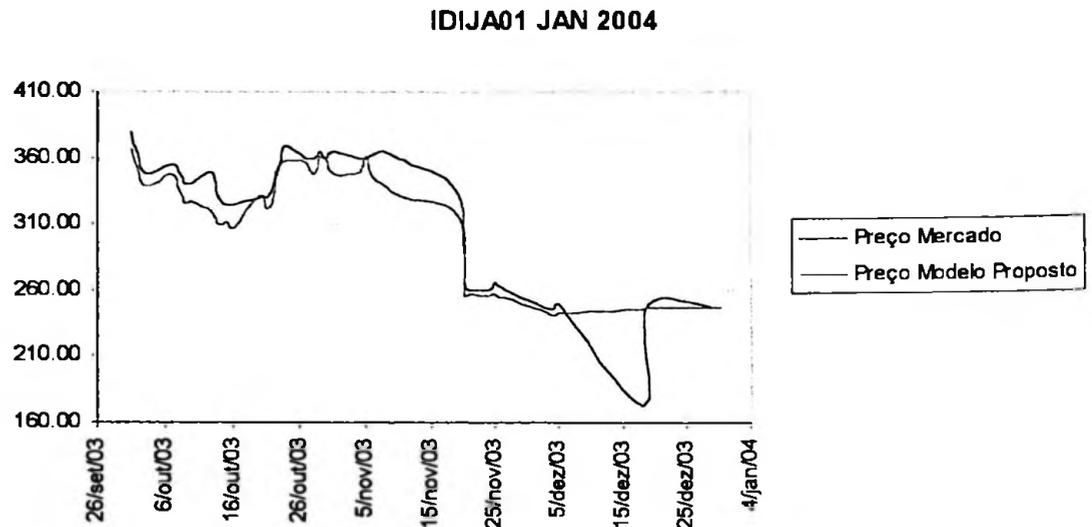


Figura 5-22 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA01 com Vencimento em 02/jan/2004.

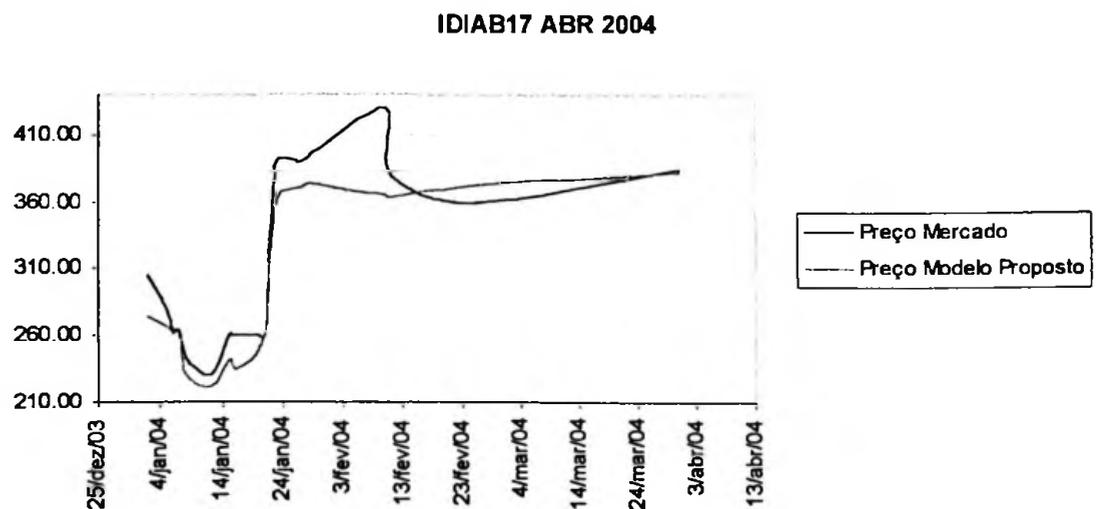


Figura 5-23 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2004.

IDIOT09 OUT 2004

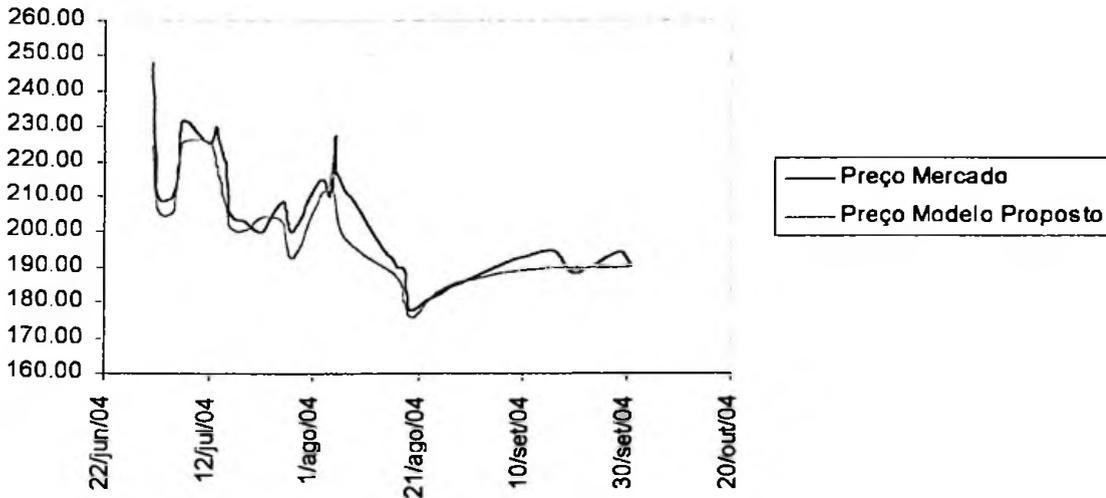


Figura 5-24 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIOT09 com Vencimento em 01/out/2004.

IDIJA15 JAN 2005

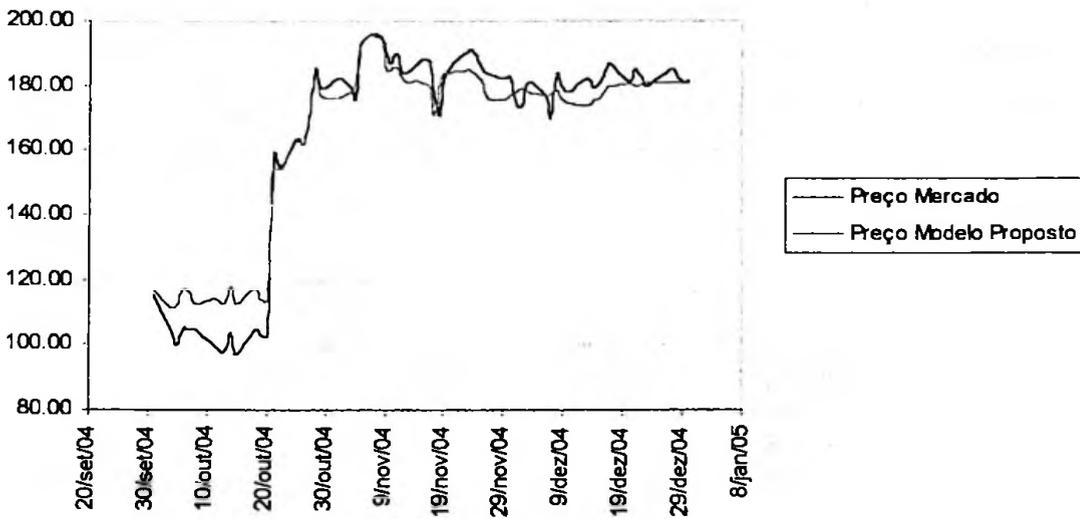


Figura 5-25 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIJA15 com Vencimento em 03/jan/2005.

IDIAB17 ABR 2005

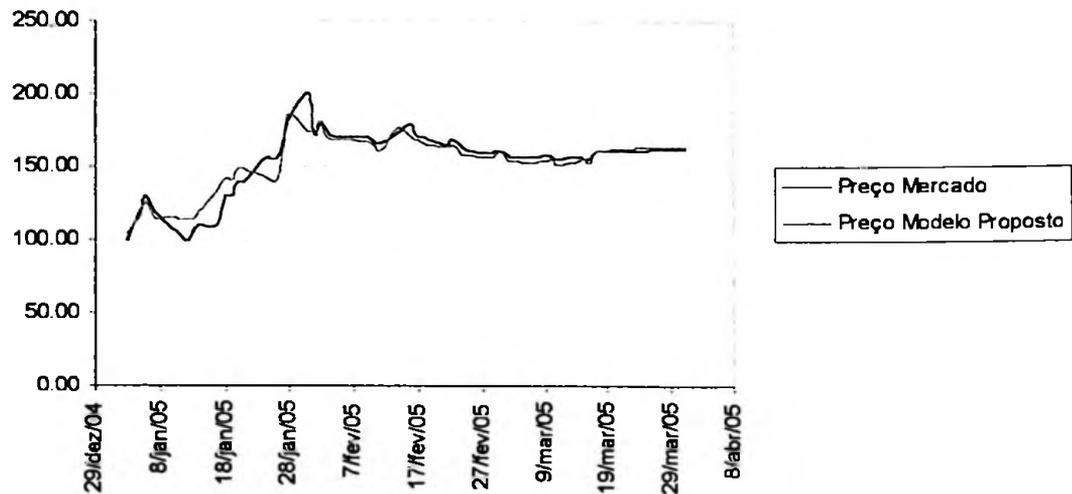


Figura 5-26 Comparação Histórica entre os Preços de Mercado e Preços no Modelo Proposto sem Tendência para a Série IDIAB17 com Vencimento em 01/abr/2005.

Comparando o comportamento dos preços de mercado com os preços no modelo proposto sem tendência, para as séries listadas na Tabela 5-7, pudemos perceber um comportamento mais estável para o modelo proposto, principalmente para prazos próximos dos vencimentos.

A estabilidade também pode ser observada no comportamento do desvio-padrão das séries históricas dos preços de mercado e do modelo proposto, segundo a Tabela 5-9 a seguir.

Série	Vencimento	Mercado	Modelo Proposto
IDIJA01	2/jan/04	51.67	44.32
IDIAB17	1/abr/04	66.34	61.72
IDIOT09	1/out/04	17.39	15.54
IDIJA15	3/jan/05	32.77	27.16
IDIAB17	1/abr/05	23.10	19.24

Tabela 5-9 Desvio Padrão das Séries Históricas dos Preços das Opções sobre IDI no Mercado e no Modelo Proposto.

6 Conclusão

O trabalho todo foi baseado em uma observação bem simples, mas que muitas vezes é deixada de lado pelos modelos de taxa de juros no Brasil. A taxa de juros dos Depósitos Interfinanceiros de Um Dia (DI de um dia, ou DI Over), utilizada como base para os principais derivativos de taxa de juros no Brasil, evolui no tempo em forma de escada, onde os degraus aparecem, na sua grande maioria, em datas relacionadas às decisões de alteração da taxa-base de juros pelo Comitê de Política Monetária do Banco Central do Brasil (COPOM).

Partindo desta observação inicial, escolhemos um método para construção da curva de juros do DI Over, que demonstrou ser bastante eficiente e de acordo com variações passadas nesta taxa de juros. Utilizando esta metodologia para obter as previsões de alterações nas taxas do DI Over, observamos que as expectativas do mercado nas datas relativas as decisões do COPOM, não corresponderam às alterações que, de fato, ocorreram nessas datas. Esse efeito causa saltos na curva de juros. Estudamos o comportamento dessas diferenças, com o objetivo de modelar um processo estocástico para essa componente.

Apesar de mostrarmos que a distribuição dos saltos observada não se trata de uma distribuição Normal, escolhemos modelar esses saltos com uma aproximação da distribuição Normal em uma árvore binomial. Essa escolha foi baseada no fato de os saltos acontecerem em datas específicas, relativas às reuniões do COPOM.

Finalmente, propomos uma metodologia para incluir essa componente estocástica no processo da taxa de juros, com o objetivo final de utilizá-la no apreamento de derivativos de taxa de juros. A escolha de modelarmos os saltos em uma árvore binomial nos levou a escolher o método de Black, Derman e Toy (1990) para adicionarmos a componente dos saltos.

Fazendo um estudo histórico do apreamento de opções sobre o índice IDI, percebemos que a componente da média dos saltos observados tem um efeito importante no modelo proposto. Quando excluimos esta média, o método proposto se comporta muito próximo ao Black, Derman e Toy (1990) utilizando ramificações nas datas relativas as decisões do COPOM.

Comparando o apreamento das opções sobre IDI no método proposto, sem levarmos em consideração a média histórica, com os preços históricos observados no

mercado, concluímos que o método se comportou muito bem, apresentando menor variância ao longo da vida das opções.

Um ponto negativo do método proposto refere-se à sua performance computacional, uma vez que, para cada data de COPOM na árvore, o número de nós vai crescendo exponencialmente na ordem de 2^n , onde n é a n -ésima data do COPOM. Outro ponto negativo refere-se à utilização de dados históricos para a obtenção das volatilidades usadas no modelo.

Uma grande vantagem do método deve-se ao fato de podermos isolar completamente os fatores relativos às expectativas de mercado, dos fatores relacionados aos saltos observados. Para entender melhor essa vantagem, imagine-se que, implícito nos instrumentos de mercado, esteja uma expectativa de um aumento de 11 pontos-base na taxa de juros na próxima reunião do COPOM. Sabendo-se que, na sua grande maioria, a taxa muda em múltiplos de 25 pontos-base, se o operador achar que o aumento vai ser de 25 pontos-base, ele poderá incluir no seu apreçamento a diferença entre os 11 pontos da curva e os 25 pontos em questão, e obter qual seria o preço justo para o derivativo.

Este trabalho ainda deixa algumas sugestões para futuros estudos:

- Implementação de outras distribuições para a componente estocástica dos saltos;
- Adicionar a componente dos saltos em um outro método de apreçamento de taxa de juros, como na árvore trinomial de Hull-White(1990);
- Comparação com outros métodos de apreçamento de derivativos de juros.

7 Bibliografia

- AHN, C. M., THOMPSON, H. E. (1988), "Jump-Diffusion Processes and the Term Structure of Interest Rates", *The Journal of Finance*, XLIII, no. 1, mar, p. 155-174.
- AMIN, Kaushik I. (1993), "Jump Diffusion Option Valuation in Discrete Time", *The Journal of Finance*, VOL XLVIII, No. 5, dec, p. 1833-1863.
- BENNINGA, S., WIENER, Z. (1998), "Binomial Term Structure Models", *Mathematica in Education and Research*, 7, n°. 3, p. 1-10.
- BLACK, F., DERMAN E., TOY W. (1990), "A One Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, jan/feb 46, p.33-39.
- BLACK, F., SCHOLES, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, may/jun, p.637-654.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS, S. A (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, p. 385-407.
- HEATH D., JARROW, R., MORTON, A. (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology", *Econometrica*, 60, n°. 1, p. 77-105.
- HO, T. S. Y., LEE, S. (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, 41, dec, p. 1011-1029.
- HULL, J., WHITE, A. (1990), "Pricing Interest Rate Derivatives Securities", *The Review of Financial Studies*, 3, n°. 4, p. 573-592.
- HULL, J., WHITE, A. (1996), "Using Hull-White Interest Rate Trees", *Journal of Derivatives*, p. 26-36.

HULL, J. (2002), "Options, Futures, and Other Derivatives", 5th Edition, Prentice Hall.

JARROW, R., RUDD, A. (1983), "Option Pricing", Dow Jones-Irwin.

MERTON, R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, p. 141-183.

NEFTCI, S. N. (2000), "An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives", 2nd Edition San Diego, Academic Press.

RENDLEMAN, R., BARTTER, B. (1980), "The Pricing of Options on Debt Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, mar p. 11-24.

VASICEK, O. A. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, p. 177-188.

WILMOTT, P. (2000), "Paul Wilmott on Quantitative Finance", Slipcase Edition, John Wiley & Sons.

Anexo I – Códigos em MATLAB

-Função para calcular a Estrutura a termo de volatilidade para o modelo BDT, com base em dados históricos

```
function [BDTVols]=CalcBDTVols(dtInitStudy, dtEndStudy, adtScenarios,
adtCDIOverDates, adCDIOverRates, adtDI1Dates, adDIRates, bExcludeCOPOMDates,
adtCOPOMdates, lNumVolPoints, adtHolidaysBR)

dtCurrent=dtInitStudy;
lIndDIVol=0;
while dtCurrent <= dtEndStudy
    % Excludes dates that we don't have scenario points such as in BMF
    % holidays
    if length(find(adtScenarios == dtCurrent))>0
        CDIOverIndex = find(adtCDIOverDates == dtCurrent);
        CDIOver      = adCDIOverRates(CDIOverIndex(1));

        lFind = find(adtCOPOMdates > dtCurrent);
        for lIndVolDate=1:lNumVolPoints
            adtVolDates(lIndVolDate)=adtCOPOMdates(lFind(lIndVolDate));
        end

        [CurDI1Dates, CurDIRates] = FilterMktData(dtCurrent, adtScenarios,
adtDI1Dates, adDIRates);
        [dtCurveDates, dCurveRates]= CalculateScenarioPoints(dtCurrent, adtVolDates,
CDIOver, CurDI1Dates, CurDIRates, adtHolidaysBR);

        % In order to correct calculate the volatility one must exclude the returns
        % occurred at COPOM dates (the last one incorporates the jump factors)
        if (bExcludeCOPOMDates == 0) | (length(find(adtCOPOMdates == dtCurrent)) <=
0 & dtCurveDates(length(dtCurveDates)) >= adtVolDates(length(adtVolDates)))
            if lIndDIVol > 0
                for lIndMktPoint=1:lNumVolPoints
                    DeltaTime = 1/252;

                    if lIndMktPoint == 1
                        ExpRateBefore=(1.0 + CDIOverBefore)^DeltaTime-1;
                        ExpRate      =(1.0 + CDIOver      )^DeltaTime-1;
                    else
                        ExpRateBefore=(1.0 + dCurveRatesBefore(lIndMktPoint))^DeltaTime-
1;
                        ExpRate      =(1.0 + dCurveRates      (lIndMktPoint))^DeltaTime-1;
                    end
                    adCurveLogReturn(lIndDIVol,
lIndMktPoint)=log(ExpRate/ExpRateBefore);
                end
            end
        end
        dtCurrent = dtCurrent + DeltaTime;
    end
end
```

```

        end
    end
    lIndDIVol=lIndDIVol+1;
end

CDIOverBefore = CDIOver;
dCurveRatesBefore = dCurveRates;
end
dtCurrent=busdate(dtCurrent, 1, adtHolidaysBR);
end
BDTVols=std(adCurveLogReturn)*sqrt(252);

```

-Função para Filtrar pontos de mercado para uma data específica

```

function [CurDIDates, CurDIRates]=FilterMktData(dtCurScenario, adtScenarios,
adtD11Dates, adDIRates)
% Returns DI Data used to build the term structure for the provided
% Scenario date

adtScenarioIndexes=find(adtScenarios == dtCurScenario);
for lIndPoint=1:length(adtScenarioIndexes)
    CurDIDates(lIndPoint)=adtD11Dates(adtScenarioIndexes(lIndPoint));
    CurDIRates(lIndPoint)=adDIRates(adtScenarioIndexes(lIndPoint));
end

```

-Função calcular as taxas de juros nas datas de COPOM, utilizando as taxas dos contratos de futuro de DI de um dia

```

function [adtScnDates, adScnRates]=CalculateScenarioPoints(dtReferenceDate,
adtCOPOMMeetings, adCDIOver, adtDIDates, adDIRates, adtHolidays)
% Calculate a CDI Term Structure interpolating geometrically
% the market data rates in business dates
% keeping the FRA rates between two COPOM meetings constant
%
% dtReferenceDate -> Scenario Date
% adtCOPOMMeetings -> Vector of COPOM Effective dates
% adCDIOver -> CDI Overnight Value for scenario date
% adtDIDates -> D11 Market Dates
% adDIRates -> D11 Market PU Values
% adtHolidays -> Vector of holiday dates
%
% OUTPUT:
% adtScnDates -> Vector of Scenario dates
% adScnRates -> Vector of Scenario Rates
%

```

% IMPORTANT REMARKS: COPOM Dates vector, DI1 vector dates and DI1 vector
% rates must be ordered in ascending order.

```

if length(adtDIDates) <= 0
    error('empty DI Dates vector!')
end
if length(adDIRates) <= 0
    error('empty DI PUs vector!')
end
if length(adtDIDates) ~= length(adDIRates)
    error('DI Dates and DI PUs vectors must have the same length!')
end

```

```

% Create vectors containing Curve Dates and Curve FRA Factors
alCouponDatesIndexes=find(adtCOPOMMeetings>dtReferenceDate);
INumCOPOMMeetings=length(alCouponDatesIndexes);
lIndScnPoint=1;
adtScnDates(lIndScnPoint)=dtReferenceDate;
adScnRates(lIndScnPoint)=adCDIOver;
dLastPeriodFactor=1.0;

```

```

% generate scenario points as long as we have COPOM Dates
if INumCOPOMMeetings > 0
    lIndCOPOMPoint=1;
    bNotExit=1;
    while lIndCOPOMPoint <= INumCOPOMMeetings && bNotExit
        dLastPeriodFactor = dLastPeriodFactor *
((1.0+adScnRates(lIndScnPoint))^(BusDaysBetween(adtScnDates(lIndScnPoint),
adtCOPOMMeetings(alCouponDatesIndexes(lIndCOPOMPoint)),
adtHolidays)/252.0));
        alDIDatesFilter=find(adtDIDates >
adtCOPOMMeetings(alCouponDatesIndexes(lIndCOPOMPoint)));
        if isempty(alDIDatesFilter)
            bNotExit=0;
        else
            lIndScnPoint=lIndScnPoint+1;

```

```

adtScnDates(lIndScnPoint)=adtCOPOMMeetings(alCouponDatesIndexes(lIndCOPOM
Point));

```

```

        dDIFactor=((1.0 +
adDIRates(alDIDatesFilter(1)))^(BusDaysBetween(dtReferenceDate,
adtDIDates(alDIDatesFilter(1)), adtHolidays)/252.0));

```

```

adScnRates(lIndScnPoint)=((dDIFactor/dLastPeriodFactor)^(252.0/BusDaysBetween(a
dtScnDates(lIndScnPoint), adtDIDates(alDIDatesFilter(1)), adtHolidays)))-1.0;

```

```

        end
        lIndCOPOMPoint=lIndCOPOMPoint+1;
    end
end

```

```

% The rest of our scenario is composed of points in DI market dates

```