UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE "MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS"

DERIVAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO IMPLÍCITA NOS PREÇOS DE OPÇÕES

Guilherme Soares da Costa Assis

Orientador: Prof. Dr. Gerson Francisco

São Paulo
2007

GUILHERME SOARES DA COSTA ASSIS

DERIVAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO IMPLÍCITA NOS PREÇOS DE OPÇÕES

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Gerson Francisco

SÃO PAULO
2007

FICHA CATALOGRÁFICA
Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Assis, Guilherme Soares da Costa
Derivação da distribuição implícita nos preços de opções / Guilherme Soares da Costa Assis. -- São Paulo, 2007.
70 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2007
Bibliografia.

1. Ações 2. Análise de séries temporais I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade II. Título.

CDD – 332.63

Resumo

Segundo Engl(1993) em física e matemática aplicada, dois problemas são tidos como “direto” e “inverso” se o primeiro prevê efeitos de causas conhecidas e o segundo indentifica causas de efeitos observados. Uma característica comumente observada em problemas “inversos” é a de que esses não satisfazem algumas condições de estabilidade como a existência de uma solução, uma única solução e uma dependência continua da solução para com os dados de entrada.

O objetivo principal desse trabalho é análisar diferentes métodos para extração de informações contidas nos preços de opções (problema inverso) e escolher um desses métodos para ser implementado. Para extrair tais informações, é necessário entender como os preços são formados (problema direto).

Primeiramente será feita uma introdução dos modelos teóricos mais conhecidos, juntamende com sua adequação e aplicabilidade ao caso brasileiro. Em seguida, as características desses modelos serão analisadas, e finalmente o modelo mais adequado será implementado e testado.

Abstract

According to Engl(1993), in physics and applied math, two problems are considered “direct” and “inverse” where the first forecasts effects from known causes and the second identifies the causes of observed effects. A common feature observed in “inverse” problems is that they usually don’t satisfy some stability conditions like the existence a solution, one unique solution and a continuous relation between the solution and the input data.

The main goal of this working paper is to analyze different methods for extracting information within market prices of traded options (the “inverse” problem) and chose one of those methods to be implemented. To extract such information, the understanding of option pricing is necessary.

First, an introduction to some of the most used models will be made. After that, those models will be analyzed and finally the most adequate model will be implemented and tested.

1 - Introdução 4
2 - Opções 6
2.1 - Introdução 6
2.2 - Fatores que afetam o preço das opções 11
2.2.1 - Preço da ação e o preço de exercício 11
2.2.2 - O tempo até o vencimento 12
2.2.3 - Volatilidade 12
2.2.4 - A taxa de juros 12
2.2.5 - Dividendos 12
2.3 - Conceito de expectativa de retorno 13
2.4 - A precificação das opções 14
2.5 - Precificação no mercado de opções. 15
2.6 - Modelo de Black & Scholes 16
2.6.1 - Princípios do modelo de Black & Scholes 16
2.6.2 - Princípio da distribuição lognormal 17
2.6.3 - Equações de precificação de Black&Scholes 23
2.6.4 - Críticas ao Modelo 27
3 - Modelos Teóricos 31
3.1 - Métodos Paramétricos 31
3.1.1 - Modelo de Mistura de Normais (Bahra, 1997, Gemmill & Saflekis, 2000) ... 31
3.2 - Métodos de expansão 34
3.3 - Métodos não-paramétricos 34
3.3.1 - Modelo de Máxima Suavidade (Jackwerth & Rubinstein, 1996) 35
3.3.2 - Modelo de Máxima Entropia (Stutzer, 1996) 35
3.4 - Comparação dos Modelos 36
3.4.1 - Eficiência computacional do modelo 36
3.4.2 - Robustez dos resultados 37
3.4.3 - Facilidade de Uso 37
4 - Argumentação Teórica, Explicação, e Construção do Modelo escolhido 38
4.1 - Argumentação Teórica – Teoria da Informação 38
4.1.1 - Máxima incerteza e equilíbrio de mercado 38
4.1.2 - Quantificação da Informação 39
4.1.3 - Entropia 41
4.2 - Explicação do modelo 43
4.2.1 - Obtenção da distribuição e probabilidade $q(S_t)$ 44
4.2.2 - Ajuste do modelo 48
4.2.3 - Obtenção dos preços das opções 49
4.2.4 - Curva de Volatilidade 49
4.2.5 - Distribuição de probabilidade implícita 50
4.3 - Construção do modelo 50
5 - Conclusão 53
Apêndice: Breve discussão sobre o lema de Itô 54
Bibliografia 55

Figura 1 – Gráfico do retorno do detentor de uma opção de compra *8*
Figura 2 – Grfáfico de retorno do detentor de uma opção de venda *9*
Figura 3 – Gráfico do retorno de um lançador de uma opção de compra *9*
Figura 4 – Gráfico do retorno de um lançador de opção de venda. *10*
Figura 5 – Distribuição dos retornos do ativo X distribuição normal- ativo índice Bovespa *29*
Figura 6 – Densidades de probabilidade *44*
Figura 7 – Densidade de probabilidade implicita em comparação com a densidade de Black and Scholes *51*
Figura 8 – Densidade de probabilidade implicita das opções de Petrobrás *52*
Figura 9 – Densidade de probabilidade implicita das opções de Vale do Rio Doce *52*

Tabela 1 – Efeito no preço de uma opção no aumento de uma variável e mantendo as outras constantes.......... 13

1 - Introdução

Opções existem, pelos menos em conceito, desde a antiguidade. No entanto, apenas após a publicação do artigo de Black-Scholes (1973) nasceu um modelo teórico consistente para o apreçamento de opções. Esse modelo foi resultado direto do trabalho de Robert Merton assim como Black e Scholes.

As origens da teoria do apreçamento de opções remontam de Bachelier (1900), que inventou o movimento Browniano para modelar opções sobre "bonds" do governo Francês. Esse trabalho antecipou em cinco anos o uso, por Einstein, do movimento Browniano na física.

Nos anos sessenta as pesquisas no campo de opções voltaram a aumentar. Samuelson (1965) usou o movimento Browniano geométrico para modelar o comportamento aleatório de uma ação objeto. Baseado nisso ele modelou o valor aleatório de uma opção no vencimento. Seu modelo precisava de dois parâmetros. O primeiro era a taxa de retorno esperada a da ação. O segundo parâmetro era a taxa ß que deveria ser usada para descontar o valor da opção no vencimento. Esses parâmetros dependem da característica da ação subjacente e da opção, respectivamente, e nenhum é observável no mercado. Logo, dependendo do grau de aversão ao risco, diferentes observadores chegariam a diferentes preços.

Black e Scholes contornaram esse problema com uma abordagem totalmente nova: considere um operador interessado em vender uma opção. Esse operador quer travar seu risco dinamicamente até o vencimento da opção. Por que preço ele deve vender a opção? Black e Scholes sugeriram que o operador cobrasse o custo de travar seu risco dinamicamente. Eles mostraram que é possível calcular esse custo antecipadamente dadas algumas simplificações e um mercado sem atritos. Dessa simples situação eles derivaram a famosa fórmula de Black e Scholes.

John C. Cox e Stephen A. Ross fizeram também uma importante contribuição com o método de apreçamento neutro ao risco. Ao considerarem novamente a teoria de Samuelson (1965) eles perceberam que não havia nada errado com o modelo do ponto de vista teórico, e foram além, observaram que ao utilizar os conceito do modelo de Black e Scholes, preços consitentes de opções eram obtidos. Com isso chegaram a interessante conclusão de que os dois modelos são equivalentes quando colocados sob a luz do método neutro ao risco.

Uma nova porta foi aberta no mundo do apreçamento de opções, técnicas que utilizam árvores binomias ou Monte Carlo puderam ser utilizadas.

Cox e Ross não perceberam quão profunda foi a sua descoberta. Eles não deram atenção a ela e colocaram no meio de um artigo em (1976). Somente três anos depois, em (1979), junto com Mark Rubinstein, escreveram um artigo dedicado ao apreçamento neutro ao risco. Outros autores desenvolveram a teoria e chegaram ao método de martingale equivalente, que é hoje o principal modelo utilizado para apreçamento de derivativos em mercados completos.

2 - Opções

O principal objetivo deste capítulo é descrever as características operacionais e finalidade do uso das opções.

Inicialmente será apresentado o conceito de opções, o seu retorno e quais são as variáveis que impactam seu apreçamento. A seguir, será apresentado o modelo de Black & Scholes e seus principais pressupostos, onde será discutido o princípio da lognormalidade da distribuição e as contestações a este princípio.

2.1 - Introdução

Há dois tipos básicos de opções. A *opção de compra* "call" proporciona a seu detentor, o direito de comprar o ativo objeto em certa data, por determinado preço. Uma *opção de venda* "put" proporciona ao seu titular, o direito de vender o ativo objeto, em certa data por um determinado preço. O preço acordado do contrato é conhecido como *preço de exercício* e a data do final do contrato como *data de vencimento*. As *opções americanas* podem ser exercidas a qualquer momento até o seu vencimento. As *opções européias* podem ser exercidas somente na sua data de vencimento.

Deve-se enfatizar que uma opção dá ao seu titular o direito de fazer algo, mas sem obrigá-lo a fazê-lo. Esta é uma das características que distinguem uma opção de um contrato futuro ou de um contrato a termo, pois nestes casos o detentor é obrigado a comprar ou vender o ativo objeto.

Uma outra característica que distingue as opções do contrato futuro e a termo é que neste não existe um custo para a realização do contrato, enquanto que para as opções há o pagamento de um *prêmio*, preço pelo qual o comprador da opção pagará para ter o direito de comprar, ou vender a ação em determinada data por um determinado *preço de exercício*.

No Brasil existem dois tipos de opções de ações: as opções de ações listadas e as opções de ações flexíveis. As opções de ações listadas são negociadas na Bovespa e possuem prazo de vencimento mensal, definido como a terceira segunda-feira do mês. As opções sobre o Índice Bovespa possuem prazo de vencimento bimestral (meses pares) definido como a quarta-feira mais próxima do dia 15. Os preços de exercícios são também definidos pela Bovespa. As opções flexíveis são negociadas na BM&F e são também chamadas de opções de balcão, elas podem ter qualquer preço de exercício e vencer em qualquer data definida pelas duas partes envolvidas.

As opções listadas mais líquidas são as opções de compra de Petrobrás, ação que representa atualmente 13% do peso do índice bovespa, sendo que os vencimentos mais líquidos são os dois meses mais próximos do vencimento. As opções de compra de Petrobrás são consideradas as opções mais líquidas da América Latina. Em seguida, as opções mais líquidas são as opções de compra da Vale do Rio Doce, empresa que representa hoje aproximadamente 11% do índice bovespa. No Brasil, opções de venda de ações têm sua liquidez muito baixa, quase não sendo negociadas.

As opções sobre o Índice Bovespa são mais negociadas em um leilão viva voz onde os operadores colocam seus preços de compra e/ou de venda. Esse leilão acontece duas vezes por dia em uma corretora que concentra a maioria dos clientes negociadores de opções sobre o índice.

Nas figuras a seguir, pode-se observar o gráfico do retorno "pay-off" do detentor de uma opção.

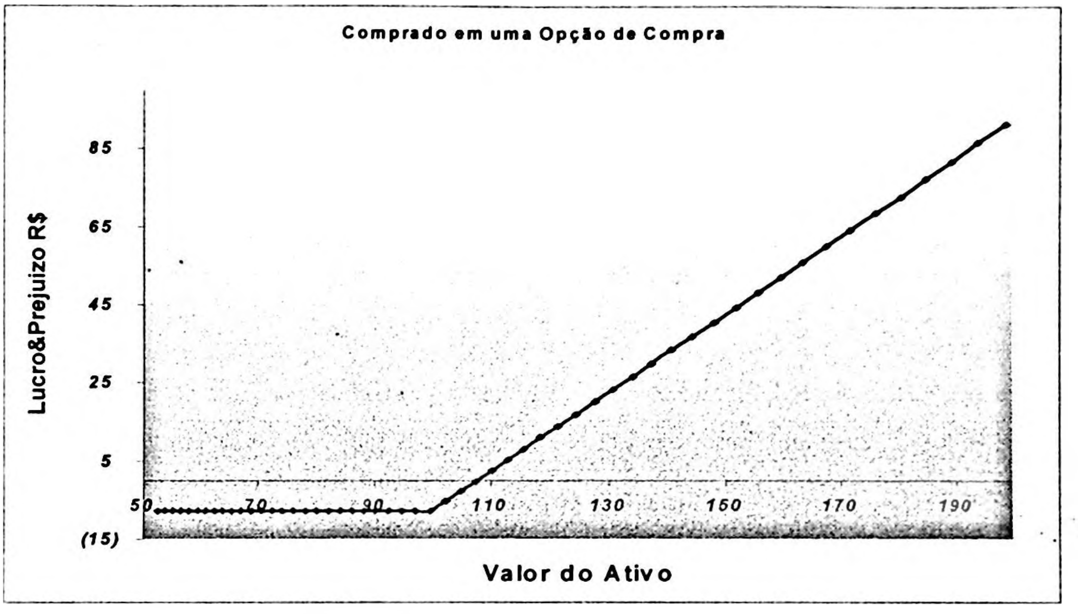

Figura 1 – Gráfico do retorno do detentor de uma opção de compra

Temos no exemplo acima a compra de uma opção de compra de ação com prêmio de $10,00. O preço da ação no momento é de $105,00, e o seu preço de exercício é de $100,00. Neste caso o detentor da opção tem o direito, mas não o dever de comprar a ação por $100. A Figura 1 traduz o comportamento do lucro do detentor da opção na data do vencimento. O comprador perde os $10,00 investidos se o preço da ação estiver abaixo dos $100, e começa a ganhar quando a ação estiver acima do preço de exercício, somado com o prêmio pago pela opção. No caso, o detentor da opção começa a obter lucro quando a ação estiver com o preço acima de $110,00.

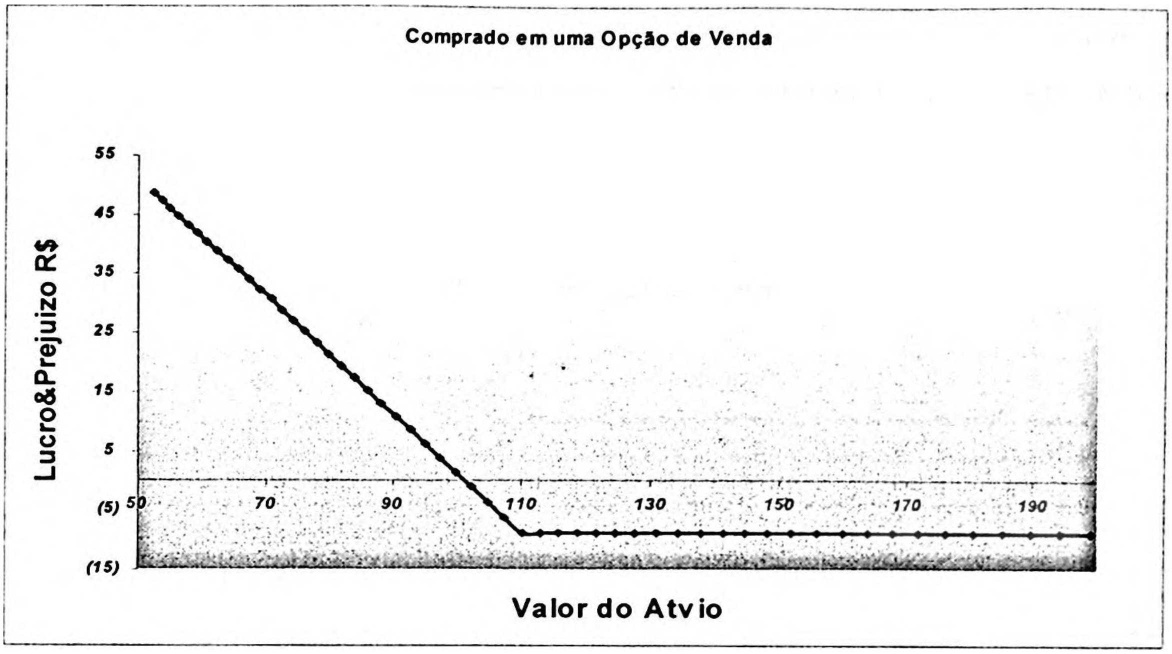

Figura 2 – Grfáfico de retorno do detentor de uma opção de venda

Neste outro exemplo o investidor está comprado em uma opção de venda com preço de exercício de $110,00. O ativo vale no atual momento $105,00 e o prêmio pago pela opção de venda é de $10,00. Pode-se verificar que o detentor da opção de venda tem sua perda limitada ao prêmio pago iniciando seu ganho quando a ação estiver abaixo de $100,00.

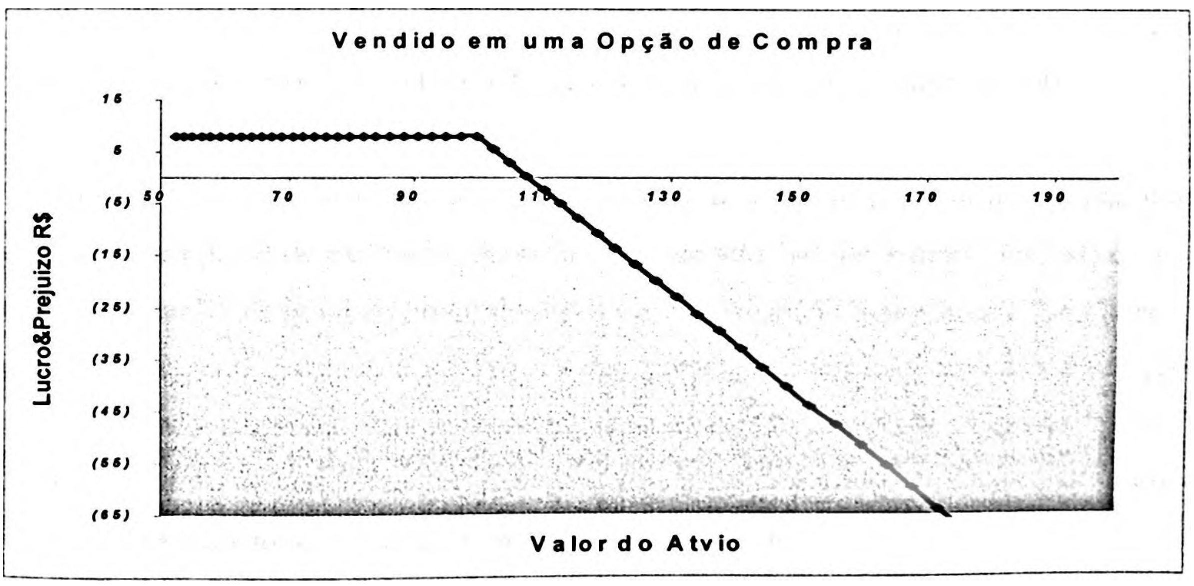

Figura 3 – Gráfico do retorno de um lançador de uma opção de compra

Na Figura 3 tem-se o exemplo de um investidor que vendeu uma opção de compra, o preço de exercício é de $100,00 e o prêmio recebido pela venda da opção de $10,00. Caso ativo esteja abaixo do preço de exercício no seu vencimento, o vendedor da opção ganhará o prêmio, caso contrário ele começará a perder quando o preço alcançar $110,00, que é o preço de exercício mais o prêmio pago. Diferentemente da opção comprada, o vendedor tem sua perda ilimitada.

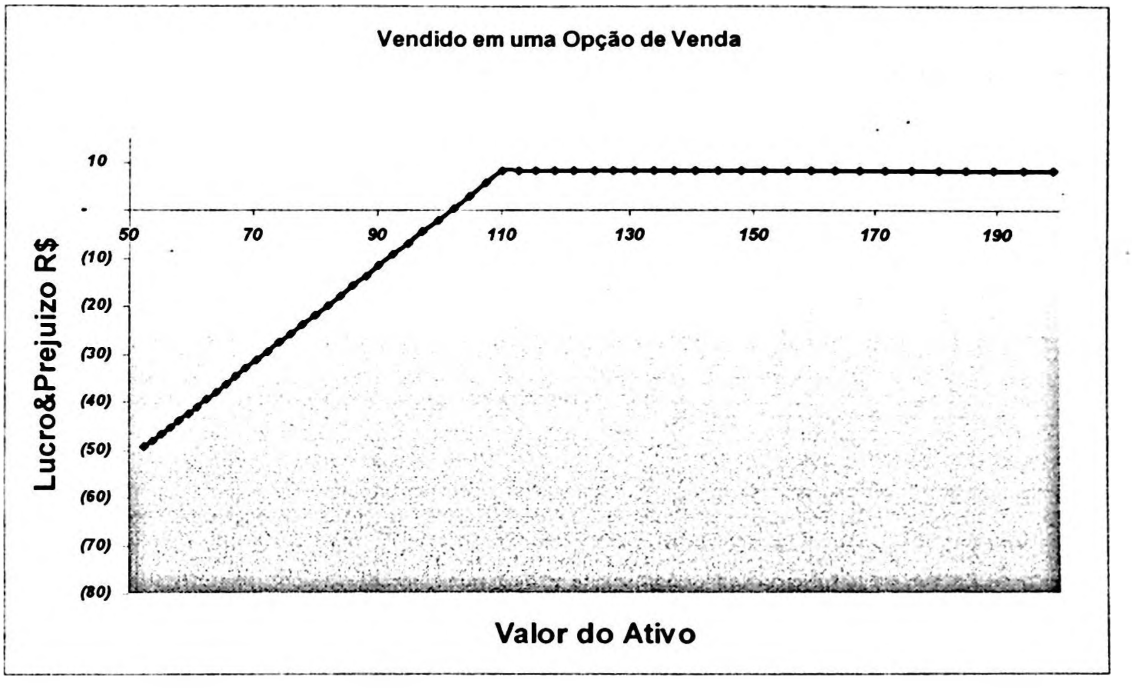

Figura 4 – Gráfico do retorno de um lançador de opção de venda.

Por fim a Figura 4, traz o retorno do investidor que vendeu em uma opção de venda de preço de exercício $110,00. O investidor só obterá lucro se o preço do ativo estiver acima do preço de exercício menos o prêmio recebido pela venda da opção, no caso $10,00.

Outro conceito importante a ser introduzido é a nomenclatura utilizada nas opções dependendo do seu preço de exercício. A opção considerada "*At the Money*" (ATM) é a opção cujo preço de exercício é igual ao preço do ativo objeto. A opção denominada "*in the money*" (ITM) é aquela cujo o preço está abaixo do seu preço de exercício, no caso da opção de compra e, acima do seu preço de exercício no caso da opção de venda. A opção "*out of the money*" (OTM) tem seu preço de exercício acima do preço do ativo objeto no caso da opção de compra e abaixo do ativo objeto no caso da opção de venda.

O negociador de volatilidade não tem somente a direção do mercado como variável, mas também a velocidade na qual ele se move. Por exemplo, um negociador de futuros compra contratos futuros e um negociador de opções compra contratos de opções de compra, ambos com a expectativa de que o mercado suba. Caso este fato se concretize o detentor do contrato futuro com certeza obterá lucro enquanto o detentor da opção poderá ter prejuízo, dependendo da velocidade na qual o mercado sobe e de outras variáveis existentes que compõe o preço das opções, a seguir apresentadas.

O conceito de velocidade é vital para negociar opções. Muitas estratégias dependem diretamente da velocidade na qual o mercado se moverá e não na direção que ele irá tomar.

2.2 - Fatores que afetam o preço das opções

Para calcular o preço teórico de uma opção deve-se levar em consideração as seis características de uma opção e de seu ativo objeto:

- preço corrente da ação;
- preço de exercício;
- tempo para o vencimento;
- volatilidade do preço da ação;
- a taxa de juros livre de risco;
- os dividendos esperados durante a vida da opção.

2.2.1 - Preço da ação e o preço de exercício

O preço de exercício é o preço pelo qual o portador de uma opção de venda (ou de compra), terá o direito de vender (ou comprar) o ativo objeto. Se exercida em algum momento no futuro, uma opção de compra terá como valor o quanto o preço do ativo exceder o preço de exercício da opção, é o chamado **valor intrínseco** da opção. Um opção de venda terá como valor intrínseco, exatamente o contrário, o quanto o preço de exercício exceder ao preço do ativo no mercado. Desta forma, uma opção de compra se tornará mais valiosa quanto maior o preço do ativo, e menor o preço de exercício. Analogamente, uma opção de venda se tornará menos valiosa quanto maior o preço do ativo a que ela se refere, e menor o preço de exercício.

2.2.2 - O tempo até o vencimento

Uma opção de compra ou venda, tem sempre maior valor quando o tempo até o vencimento aumenta. Isso ocorre porque o desvio da distribuição de possíveis preços do ativo objeto é proporcional à raiz quadrada do tempo.

2.2.3 - Volatilidade

A volatilidade do ativo pode ser definida como a medida de quão incerto está o mercado a respeito do movimento futuro dos preços deste ativo. Com o aumento da volatilidade, a probabilidade do ativo apresentar um resultado muito bom ou muito ruim aumenta, ou seja, o risco da ação aumenta. Para os detentores de opção, no entanto, sejam elas de compra ou de venda, aumenta a possibilidade de um resultado excepcional e, por terem perdas limitadas (o prêmio pago pela opção), o aumento da volatilidade aumenta o preço da opção. Assim, tanto o valor das opções de compra quanto o valor das opções de venda aumentam com o aumento da volatilidade devido ao "pay-off" assimétrico do derivativo.

2.2.4 - A taxa de juros

A taxa de juros afeta o preço das opções de uma maneira menos intuitiva que os demais citados anteriormente. Quando a taxa de juros sobe, a taxa de crescimento esperada dos preços dos ativos também tende a aumentar, no entanto, o valor presente de qualquer fluxo de caixa recebido pelo detentor do ativo diminui. Estes dois efeitos diminuem o valor de uma opção de venda, ou seja, o aumento da taxa de juros reduz o preço de opções de venda. No caso das opções de compra, o efeito do aumento da taxa esperada de crescimento tende a aumentar o preço da mesma, enquanto o valor presente do fluxo de caixa tende a desvalorizar a opção. O primeiro efeito sempre domina o segundo no caso das opções de compra e dessa forma seu preço sempre aumenta com a elevação dos juros

2.2.5 - Dividendos

A distribuição de dividendos causa uma diminuição no preço do ativo ex-dividendo, diminuindo o preço da opção de compra e aumentando o preço da opção de venda.

A Tabela 1 mostra um resumo dos efeitos sobre o prêmio de uma opção em função do fatores que afetam seus preços.

Resumo dos efeitos sobre o prêmio de uma opção				
Variável	**call européia**	**put européia**	**call americana**	**put americana**
Preço da ação	+	-	+	-
Preço exercício	-	+	-	+
Tempo vencimento	+	+	+	+
Volatilidade	+	+	+	+
Taxa de juros	+	-	+	-
Dividendos	-	+	-	+

Tabela 1 – Efeito no preço de uma opção no aumento de uma variável e mantendo as outras constantes

2.3 - Conceito de expectativa de retorno

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1, \ldots, x_n$ Seja $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i=1,2,\ldots n$. Então o valor esperado de X, ou esperança matemática de X, denotado por E(X) é definido como:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(x_i) \quad \textbf{Eq. 1}$$

Este número é também denominado de valor médio de X, ou *esperança* de X. Se um dado equilibrado for jogado e a variável aleatória X designar o número de pontos obtidos, então E(X) = (1/6) (1+2+3++4+5+6) = 3,5. Nitidamente E(X) não é o valor esperado se o dado for jogado uma única vez, nem mesmo é um valor possível, mas se um dado justo é jogado aleatoriamente diversas vezes a média dos pontos obtidos é 3,5.

2.4 - A precificação das opções

Como utilizar o conceito de expectativa de retorno para o cálculo das opções? O que é preciso para calcular a expectativa de retorno de uma opção?

Supondo um ativo negociado a $100,00 e este podendo somente assumir cinco diferentes valores no futuro: $80, $90, $100, $110 ou $120. É assumido ainda que cada um dos cinco preços tem a mesma probabilidade de 20% de ocorrência. Baseado no conceito de expectativa de retorno, qual é o valor esperado de um investidor que possui uma posição comprada neste ativo?

Sabendo-se que se o preço do ativo for de $80 perde-se $20, se for $90, perde-se $10, se for $100, não há ganho e assim sucessivamente e como todos os cinco preços tem a mesma probabilidade de ocorrência, a expectativa de retorno é:

$$- (20\% \times \$20) - (20\% \times \$10) + (20\% \times 0) + (20\% \times \$10) + (20\% \times \$20) = 0$$

Como os lucros e prejuízos são iguais, a expectativa de retorno para uma posição comprada ou vendida no ativo é zero.

Agora, suponha-se uma posição comprada em uma opção de compra com preço de exercício $100. A expectativa de retorno da opção de compra será:

$$(20\% \times 0) + (20\% \times 0) + (20\% \times 0) + (20\% \times 10) + (20\% \times 20) = \$6$$

A opção de compra nunca poderá valer menos que 0, portanto a expectativa de retorno de uma opção de compra é sempre um número não negativo, sendo de $6 no caso acima explanado.

Os exemplos acima trazem apenas situação simplificada para facilitar o entendimento do conceito da expectativa de retorno na precificação das opções, entretanto, para a obteção de um preço mais próximo do real deve-se levar em consideração vários outros fatores.

Primeiramente deve-se saber o vencimento da opção e a taxa de juros livre de risco do mercado. No Brasil e em grande parte dos outros mercados, quando compra-se uma opção seja ela de compra ou de venda, o caixa referente ao valor de compra é pago no dia seguinte para o vendedor, e este capital deixa de ser remunerado pela taxa de juros livre de risco. Desta forma, chega-se ao valor esperado de uma opção de compra, no caso do exemplo acima de $6, o custo do seu capital. Supondo a taxa de juros livre de risco de 12%a.a (1%a.m) e que o vencimento da opção seja de 2 meses, neste caso o custo do capital utilizado na compra da opção é de 2% x $6 = $0,12, ou seja, o valor teórico da opção é de $5,88.

Como será demonstrado adiante, o modelo de precificação de Black & Sholes tem como princípio a suposição de que o preço da ação irá subir ao menos a taxa de juros livre de risco do período, portanto as probabilidades iguais de 20% para cada preço utilizadas no exemplo acima não terão valor para este modelo.

2.5 - Precificação no mercado de opções.

A precificação de opções é uma tarefa bastante complexa, visto que grande parte das informações necessárias para a execução desta tarefa são probabilísticas e de difícil obtenção, principalmente no Brasil onde o mercado de opções não é sufucientemente desenvolvido. Além disso, existem várias peculiaridades que dificultam a precificação das opções, dentre elas pode-se citar a falta de liquidez dos ativos, taxas de juros bastante elevadas e voláteis, volatilidade histórica distorcida por vários planos econômicos, inflação e mudanças cambiais entre outras.

É fundamental para o cotidiano do mercado financeiro atual uma precificação rápida, pois as instituições financeiras, como dito anteriormente, utilizam este instrumento ou para proteção de suas posições (hedge), ou para ganhos especulativos seja negociando a volatilidade, seja negociando as opções puramente para obter ganhos alavancados. Desta maneira a precificação deste produto financeiro é "conditio sine quanon" para que tais operações sejam bem sucedidas.

Vários modelos foram desenvolvidos com o intuito de estimar o "preço justo" para o derivativo. Para tanto, associa-se uma série de informações referentes ao ativo objeto, tendo como ponto comum a volatilidade dos retornos, que será abordado mais adiante por ser um dos pontos chave de um modelo de precificação, bem como de todo o mercado de opções.

2.6 - Modelo de Black & Scholes

O modelo mais utilizado atualmente pelas mesas de derivativos para apreçamento de opções sobre ações, é o modelo de Black & Scholes pela sua praticidade e rapidez nas respostas. Neste item será apresentado o seu desenvolvimento mostrando suas equações e discutido uma das suas principais falhas ao assumir a distribuição de probabilidades dos retornos do ativo uma normal. Este pressuposto do modelo assume que a volatilidade do ativo é a mesma para qualquer preço de exercício, sendo o gráfico de volatilidade das opções para diferentes preços de exercício uma constante.

Em 1973 com a abertura da Chicago Board Options Exchange, Fischer Black e Myron Sholes introduziram o primeiro modelo para a precificação de opções. O modelo de Black & Scholes, é hoje a ferramenta mais utilizada pelos negociadores no mercado de opções americano. Embora muitos outros modelos com princípios diferentes, tenham sido desenvolvidos depois, o Black & Scholes é hoje ainda o mais utilizado. Trata-se de um modelo baseado em uma equação diferencial, a qual relaciona os fatores que influenciam o seu preço, ou seja, seus riscos, de forma a determinar a variação desses fatores frente as variações das demais.

Neste item o modelo será exposto, dando maior ênfase na explicação dos seus pressupostos, principalmente no da lognormalidade da distribuição de probabilidades do ativo objeto, pressuposto o qual o modelo a ser desenvolvido contestará.

2.6.1 - Princípios do modelo de Black & Scholes

Para se derivar a fórmula de precificação de opções, o modelo parte das seguintes hipóteses:

- O comportamento do preço de uma ação corresponde a um modelo lognormal, com média μ (retorno esperado ao ano de uma ação, o seja, a taxa de juros livre de risco), e σ (estimativa do desvio padrão – volatilidade) constante;
- Custos operacionais e impostos são inexistentes. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
- O Ativo não gerará dividendos durante a vida da opção;
- Não há possibilidade de arbitragem sem risco;
- A negociação com títulos é contínua;
- Os investidores podem tomar emprestado ou emprestar dinheiro à mesma taxa de juros livre de risco;
- A taxa de juros livre de risco de curto prazo é constante;

2.6.2 - Princípio da distribuição lognormal

A equação de Black & Scholes nada mais é do que uma equação de valor esperado (dada uma distribuição neutra ao risco) . Para se encontrar o valor esperado de um determinado fluxo de caixa, é necessário conhecer seus retornos e a sua distribuição de probabilidades. Para encontrar a equação de Black & Scholes, deve-se encontrar, portanto, quais os retornos e as suas probabilidades nas opções.

A suposição que fundamenta o modelo de Black & Sholes, é o principio da não arbitragem e o fato dos preços poderem ser modelados por um movimento aleatório, sendo assim as mudanças proporcionais no preço da ação, ou seja, o seu retorno, segue uma distribuição normal. Isto implica que o preço da ação, em qualquer momento no futuro tem uma distribuição lognormal, como será mostrado no decorrer do capítulo.

Os modelos de comportamento dos preços das ações são expressos em termos do que é conhecido por processo de Wiener. O comportamento de uma variável, z, que acompanha o processo de Wiener, pode ser compreendida pela mudança do seu valor em pequenos intervalos de tempo. Considerando um pequeno intervalo de tempo, de extensão Δt, e definindo Δz como a mudança de z durante Δt. Há duas propriedades básicas que Δz deve satisfazer para que z seja um processo de Wiener:

- Propriedade 1: Δz relaciona-se a Δt pela equação:

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad \textbf{Eq. 2}$$

ε é a variável aleatória normal padronizada (isto é, uma distribuição normal com média zero e desvio padrão 1);

- Propriedade 2 : Os valores de Δz, para quaisquer dois pequenos intervalos de tempo Δt distintos, são independentes.

A partir da propriedade 1, Δz possui uma distribuição normal com:

Média $\Delta z = 0$
Desvio Padrão $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$
Variância $\Delta z = \Delta t$

O processo de Wiener anterior, possui uma taxa de desvio zero e taxa de variância de 1,0. A taxa de desvio significa que o valor esperado de z, a qualquer tempo futuro, é igual a seu valor atual. Entende-se por taxa de variância 1,0 como sendo a variância da mudança em z, num intervalo de tempo de extensão T. A forma contínua do processo generalizado de Wiener para uma variável x pode ser definido como:

$$dx = adt + bdz \quad \textbf{Eq. 3}$$

Onde a e b são constantes.

Os dois parâmetros que descrevem o comportamento do preço de uma ação quando se é suposta a distribuição lognormal, são:

- Retorno esperado da ação
- A volatilidade do preço da ação

O retorno esperado da ação é a taxa de juros livre de risco do mercado, pois o capital utilizado para a compra da ação deixa de ser remunerado. O investidor somente abrirá mão da remuneração livre de risco para comprar uma ação caso a expectativa do retorno desta ação seja ao menos a taxa de juros livre de risco.

A suposição de que a taxa de desvio esperada seja constante não é apropriada e deve ser substituída pelo pressuposto de que o desvio esperado, expresso como uma proporção do preço da ação, seja constante. Isto significa que, sendo S_0 o preço atual da ação, a taxa de desvio esperada de S é μS_0, para um parâmetro constante μ. Assim num pequeno intervalo de tempo, Δt, o aumento esperado de S é $\mu S_0 \Delta t$.

Supondo a taxa de variância do preço da ação zero, esse modelo implica que:

$$dS = \mu S dt \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu \, dt \qquad \textbf{Eq. 4}$$

De modo que:

$$S = S_o e^{\mu T} \quad \textbf{Eq. 5}$$

S_0 é o preço da ação no instante zero, μ a taxa de juros livre de risco e T o tempo. Observa-se que quando a taxa de variância é zero, o preço da ação aumenta a uma taxa de μ, capitalizada continuamente, por unidade de tempo.

A volatilidade é uma medida de incerteza quanto às oscilações futuras no preço da ação que será denotado por σ. Isto significa que $\sigma^2 \Delta t$ é a variância da mudança proporcional no preço da ação, S, no instante Δt e que $\sigma^2 S_0{}^2 \Delta t$ é a variância do preço efetivo da ação, S, durante Δt. A taxa instantânea de S é, portanto, $\sigma^2 S_0{}^2$.

Pelo processo de Itô, S pode ser representado com taxa de desvio esperada instantânea de μS e taxa de variância instantânea de $\sigma^2 S^2$. Podendo ser escrito como:

$$dS = \mu\, Sdt + \sigma\, Sdz \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dz \quad \textbf{Eq. 6}$$

A versão do modelo em tempo discreto é:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad \varepsilon \sim N(0,1) \quad \textbf{Eq. 7}$$

O lado esquerdo da equação é o retorno proporcional fornecido pela ação num período curto de tempo, Δt. O termo $\mu \Delta t$ é o valor esperado desse retorno e o termo $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ é o componente estocástico do retorno. A variância do componente estocástico é portanto $\sigma^2 \Delta t$.

Pelo modelo de Black & Sholes $\Delta S/S$, é distribuído normalmente, com média $\mu \Delta t$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Em outras palavras:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}\right) \quad \textbf{Eq. 8}$$

Como mostrado, o comportamento da ação é dado por

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad \textbf{Eq. 9}$$

Considerando uma função, f= f(S, t), a partir do lema de Itô (ver Apêndice), tem-se:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad \textbf{Eq. 10}$$

Se :

$$f = \ln S \quad \text{Eq. 11}$$

Então :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} = -\frac{1}{S^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{Eq. 12}$$

Que resulta em:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad \text{Eq. 13}$$

Como μ e σ são constantes, a equação acima indica que ln(S) segue o processo generalizado de Wiener, que possui taxa de desvio constante de $\mu - \sigma^2/2$ e taxa de variância constante de σ^2, isto significa que entre o tempo atual, t, e algum tempo futuro, T, ln(S) é normalmente distribuída:

$$G \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T - t); \sigma^2 (T - t) \right] \quad \text{Eq. 14}$$

Uma variável com distribuição lognormal tem a propriedade de seu logaritmo natural ser normalmente distribuído. A suposição lognormal para os preços da ação implica, portanto, que ln (S_t) seja normal, onde S_t é o preço da ação num instante futuro, **T**. A média e o desvio padrão de ln S_t podem ser mostrados como:

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right] \quad \text{Eq. 15}$$

Sendo S_0 é o preço atual da ação, μ é o seu retorno esperado, ou seja, a taxa de juros livre de risco no mercado e σ é a volatilidade ao ano do preço da ação. Escreve-se o resultado como sendo:

$$\ln S_t \sim N\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \quad \textbf{Eq. 16}$$

O valor esperado ou médio de S_t, $E(S_t)$, como anteriormente exposto, é o valor atual da ação multiplicado pela taxa de juros livre de risco r.

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu T} \quad \textbf{Eq. 17}$$

Isso se encaixa na definição de μ como a taxa de retorno esperada. A variância de S_t, $\mathrm{var}(S_t)$, pode ser demonstrada por:

$$\mathrm{var}(S_t) = S_0^{\,2} e^{2\mu T}\left[e^{\sigma^2 T} - 1\right] \quad \textbf{Eq. 18}$$

Exemplificando a equação acima, pode-se verificar, pelo princípio da lognormalidade, que para uma ação com preço $100, taxa de juros livre de risco 22.5%a.a. e 30% de volatilidade, a distribuição de probabilidade do preço da ação, S_t, no período de seis meses é fornecida por:

$$\ln S_t \sim N\left[\ln 100 + \left(0{,}225 - \frac{0{,}09}{2}\right)0{,}5; 0{,}3\sqrt{0{,}5}\right]$$

Ou

$$\ln S_t \sim N(4.695; 0.212)$$

podendo ser escrito da seguinte forma:

$$e^{4.483} < S_t < e^{4.907}$$

Ou com 95% de probabilidade de o preço da ação em seis meses ser entre 88,05 e 135,27 e a média da distribuição é dado por:

$$\mu(S_t) = 100e^{0,5x22,5\%} = 111,90$$

2.6.3 - Equações de precificação de Black&Scholes

Após mostrado como é a distribuição dos preços das ações pelo principal pressuposto do modelo, nesta seção serão apresentadas as equações para os preços de opções européias de compra e venda,

Como exposto anteriormente na Eq.9 o movimento do preço das ações é dado como:

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$$

Supondo que f é o preço de uma opção de compra. A variável f deve ser função de S e t, f(S,t). Tal que:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma Sdz \qquad \textbf{Eq. 19}$$

A função discreta das equações é dada por:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad \textbf{Eq. 20}$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad \textbf{Eq. 21}$$

As equações Eq.20 e Eq.21 são a versão discreta dos modelos de comportamento das ações e dos seus derivativos, no nosso caso, uma opção. A partir da combinação da ação e do derivativo pode-se criar um portfólio sem risco. A razão pela qual este portfólio pode ser criado vem do fato do preço do ativo e da opção serem ambos afetados pela mesma fonte de incerteza: o movimento das ações. Num intervalo curto de tempo o preço de uma opção de compra é perfeitamente e positivamente correlacionado com o preço da ação, tornando possível a criação de um portfólio de ações, com um fluxo de caixa idêntico ao das opções, de forma a neutralizar o risco.

Por se tratar de um modelo de tempo contínuo, a correlação entre a opção e a ação é pontual, ou seja, ocorre em um intervalo de tempo infinitesimal, portanto este portfólio criado, para não existir risco, deve ser ajustado dinamicamente. Assim, ao escolher uma carteira de ação e do derivativo, o processo de Wiener pode ser eliminado.

O portfólio replicante a ser criado é:

$$\begin{aligned} &Derivativo = -1 \\ &Ação = \frac{\partial f}{\partial S} \end{aligned} \quad \textbf{Eq. 22}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial S} \right) \sigma S - \sigma S = 0$$

O investidor que detém este portfólio, possui uma posição vendida em um derivativo e uma posição comprada em ?f/?S ações. Definindo ? como o valor do portfólio tem-se que:

$$\Pi = -f + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)S \qquad \textbf{Eq. 23}$$

Logo, uma mudança ? ? no valor do portfólio em um intervalo de tempo ? t é dado por:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)\Delta S \qquad \textbf{Eq. 24}$$

Substituindo tem-se que:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 S^2}\right)\sigma^2 S^2\right)\Delta t \qquad \textbf{Eq. 25}$$

Como essa equação não envolve nenhuma incerteza (não existe ? z), o portfólio não tem risco durante o intervalo de tempo ? t. Portanto o retorno desse portfólio nesse intervalo de tempo, deve ser igual ao retorno da taxa livre de risco, caso contrário são criadas oportunidades de arbitragens, portanto:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \qquad \textbf{Eq. 26}$$

onde r é a taxa livre de risco, substituindo tem-se:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f+\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)s\right)\Delta t \qquad \textbf{Eq. 27}$$

simplificando Eq.27:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)rS+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right)\sigma^2 S^2 = rf \qquad \textbf{Eq. 28}$$

a equação acima é a equação diferencial parcial de Black & Scholes. Ela tem muitas soluções dependendo do derivativo o qual se queira precificar. As condições de contorno utilizadas na resolução dessa equação irão dizer qual derivativo que se está sendo precificando. No caso de uma opção européia de compra a condição de contorno é:

$$f = Max(S-K;0) \qquad \textbf{Eq. 29}$$

Quando t=T

Black and Scholes resolveram essa equação diferencial parcial para essa condição de contorno e chegando por fim a equação do preço da opção de compra:

$$C = S\phi(d1) - Xe^{-r(T-t)}\phi(d2) \qquad \textbf{Eq. 30}$$

Onde :

$$d1 = \frac{\ln(S/X)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \textbf{Eq. 31}$$

$$d2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad \text{Eq. 32}$$

X é o preço de exercício, r a taxa de juros, t o tempo até o vencimento e S o valor da ação. $\phi(y)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável distribuída normalmente, com média zero e desvio padrão 1.

A expressão $\phi(d_2)$ é a probabilidade de a opção ser exercida num mundo neutro ao risco, de modo que $X\phi(d_2)$ seja o preço de exercício multiplicado pela probabilidade de o preço de exercício ser pago. A expressão $S\phi(d_1)e^{r(T-t)}$ é o valor esperado da variável que é igual a S_t, se $S_t > X$, e zero caso contrário.

O preço da opção de compra também pode ser escrito com sendo:

$$C = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} (S_t - X) q(S_t) dS_t \quad \text{Eq. 33}$$

Sendo $q(S_t)$ função de densidade de probabilidade de S_t,

O valor de uma opção européia de venda pode ser calculada de forma semelhante à de uma opção européia de compra. Sua equação é:

$$P = Xe^{-r(T-t)}\phi(-d2) - S\phi(-d1) \quad \text{Eq. 34}$$

2.6.4 - Críticas ao Modelo

O modelo de Black & Scholes existe há quase 30 anos e é natural que, tanto em seus dias iniciais quanto agora, haja certas críticas a serem feitas.

Talvez a premissa mais criticada do Black & Scholes seja a da lognormalidade de S, já que cada ativo possui uma distribuição dos retornos própria, se aproximando ou não a uma lognormal.

A premissa da lognormalidade pode ser contestada por dois argumentos :

1. A curva de distribuição de probabilidade de um prazo qualquer geralmente afasta-se de uma distribuição lognormal.
2. A volatilidade para períodos mais longos ou movimentos maiores difere-se da volatilidade de períodos curtos de movimentos contidos, ou seja, que a volatilidade, e a própria distribuição da ação, sejam dependentes da escala em que se observa o movimento do mercado

A primeira linha de contestação é a resposta imediata ao não ajustamento do modelo de Black & Scholes a qualquer condição do mercado não prevista. Se em um momento qualquer as opções mais "in the money" possuem um valor mais alto do que preconiza o modelo, ou as opções mais "out of the money" estão com um valor mais baixo, ou qualquer que seja este desvio, é considerado um erro o modelo assumir a distribuição de probabilidade como sendo lognormal.

Como mostrado em suas premissas, a volatilidade do ativo é constante independente do seu preço de exercício no modelo de Black & Scholes. Observando-se o mercado é possível perceber a existência de uma assimetria na curva de volatilidade (conhecida no mercado como "*smile effect*"). Este desvio é observado em opções negociadas no mercado internacional ou mesmo em opções sobre ações locais, como as de Petrobrás e do Índice Bovespa entre outras, que possuem maior liquidez e um maior número de preços de exercícios negociados.

Na Figura 5 é mostrado como é a distribuição preconizada pelo modelo de Black & Scholes e a distribuição real do ativo.

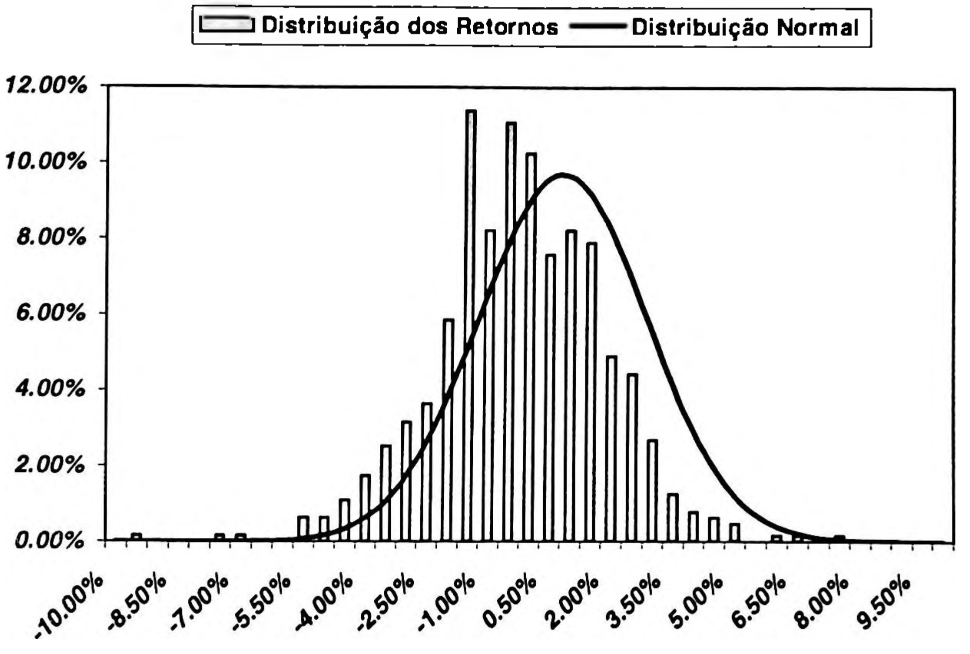

Figura 5 – Distribuição dos retornos do ativo X distribuição normal- ativo índice Bovespa

Algumas importantes informações podem ser retiradas da comparação dos gráficos apresentados na Figura 5. Primeiramente, as médias das distribuições são diferentes, a distribuição dos retornos do ativo pode ter qualquer média, assumindo até valores negativos, no caso acima, a média dos retornos é –0,23%. A média da distribuição normal de Black & Sholes é, como já exaustivamente mencionado, a taxa de juros.

Outra constatação é a existência de observações fora do intervalo (-8%,+8%), o que para uma distribuição normal seria extremamente improvável. A existência dessas observações extremas ajuda a explicar porque o Black & Scholes deprecia opções de cpmpra "out of the money". Na verdade, movimentos extremos são mais prováveis do que pode-se predizer com base em uma distribuição normal.

Na prática, a volatilidade se mostra dependente do preço do exercício e da maturidade da opção em questão. Cada preço de exercício possui uma volatilidade diferente, formando uma curva de volatilidade. Segundo as premissas do modelo de Black & Sholes, as volatilidade de todos os preços de exercício devem ser a mesma, o que, como já mencionado, não condiz com a realidade.

No modelo que será desenvolvido neste trabalho, será utilizada a distribuição real do ativo objeto, recentralizando-a, de forma que obtenha-se uma distribuição neutra ao risco, minimizando a alteração do formato da distribuição original, como será exposto adiante.

3 - Modelos Teóricos

Podemos concluir das observações mencionas no capítulo anterior que o modelo de Black & Scholes não captura algumas características sutis, porém essenciais para o apreçamento de opções. Nesse capítulo, vamos apresentar teorias que tentam "extrair" informações diretamente do mercado de opções. Isso será feito com o objetivo de escolher um desses modelos e posteriormente testá-lo e avaliá-lo no contexto brasileiro. Os modelos serão divididos em paramétricos, de expansão e não-paramétricos:

3.1 - Métodos Paramétricos

3.1.1 - Modelo de Mistura de Normais (Bahra, 1997, Gemmill & Saflekis, 2000)

De forma geral, como já citado anteriormente, o preço de uma opção de compra européia pode ser representado como:

$$C = e^{-r(T-t)} \int_{x}^{\infty} (S_t - X) q(S_t) dS_t \qquad \text{Eq. 35}$$

Neste modelo, a densidade de probabilidade q do preço pode ser recuperada a partir da estimação de parâmetros por critérios de minimização da distância entre os preços de mercado e os preços teóricos gerados pelo modelo.

A hipótese gaussiana representa algumas vantagens práticas, a primeira delas é a estabilidade da densidade gaussiana sob adição, ou seja, se os preços sob horizonte de um dia tem distribuição de probabilidade lognormal, o mesmo vale para maiores horizontes futuros. Uma outra importante característica prática do modelo gaussiano no que diz respeito a distribuição de probabilidade é a possibilidade de obter-se expressões analíticas para os preços das opções.

Assim, a forma funcional de q seria dada pela mistura de k lognormais:

$$q(S_t) = \sum_{i=1}^{K} w_i Log(f_i(x)) \quad \textbf{Eq. 36}$$

Onde :

$$\sum_i w_i = 1$$

e

$$w_i > 0$$

$f_i(x)$ é a função densidade lognormal e wi são os pesos de cada densidade na mistura. No modelo, os parâmetros são definidos como:

$$\alpha_i = \ln S_0 + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T \qquad \textbf{Eq. 37}$$

$$\beta_i = \sigma_i \sqrt{T}$$

Onde μi é a taxa de juros livre de risco; σi é a volatilidade; S o preço do ativo e T o tempo até o vencimento da opção.

Para fins práticos utiliza-se a mistura de duas lognormais:

$$q(St) = wLog(f(x_1)) + (1 + w)Log(f(x_2))$$

Eq. 38

$$0 < w < 1$$

Isto reduz a necessidade de muitos dados, tendo-se apenas cinco parâmetros a serem estimados (w, α_1 , β_1, α_2 , β_2), A partir das equações acima, e dos preços de mercado das opções (Cm) é possível estimar os parâmetros pela minimização do erro quadrático entre estes preços e aqueles gerados pelo modelo de mistura de lognormais:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left(C(X_i, T) - C_{mi}\right)^2 \qquad \textbf{Eq. 39}$$

Para X_i o preço de exercício da opção e T o tempo até o seu vencimento.

Bahra (1997), em seu modelo de mistura de normais, demonstra que sob a hipótese de lognormalidade a equação de avaliação tem solução fechada e esta é uma ponderação dos preços de Black&Sholes com diferentes médias e variâncias. Para o caso de mistura de duas densidades lognormais:

$$C(X,T) = e^{-rT}\left[w\left(e^{\alpha_1+\beta_1^2/2}\phi_{d1} - X\phi_{d2}\right) + (1-w)(e^{\alpha_{21}+\beta_2^2/2}\phi_{d3} - X\phi_{d4})\right] \qquad \textbf{Eq. 40}$$

Onde: ϕ_x é a distribuição Normal acumulada até x e

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\ln X + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1}; \\ d_2 &= d_1 - \beta_1; \\ d_3 &= \frac{-\ln X + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2} \\ d_4 &= d_3 - \beta_2 \end{aligned} \qquad \textbf{Eq. 41}$$

Gemmill e Saflekos (2000) estimaram a densidade de probabilidade de opções sobre o FTSE-100, índice de ações Londrino, usando o modelo de mistura de duas lognormais sobre uma período de 10 anos (1987-1997). Os resultados reportados pelos autores demonstram que o modelo supera o modelo de "uma Lognormal" (Black&Sholes) quanto aos ajustes sobre os preços de mercado.

No entanto, o modelo de Mistura de Normais encontra limitações para as soluções de alguns problemas, visto que negociadores de opções no Brasil muitas vezes necessitam de um modelo capaz de obter uma curva de volatilidade para ativos que não possuem opções negociadas no mercado, portanto, não há como parametrizá-lo minimizando o erro quadrático entre as opções de mercado e o gerado pelo modelo.

Além disso, conforme demonstrado por Oliveira (2000), que será apresentado no decorrer do capítulo, o modelo possui problemas de robustez. Empiricamente verificou-se grande sensibilidade à distorções ou escassez de preços. Como resultado disso, existe uma grande instabilidade nos parâmetros o que freqüentemente resulta em soluções de distribuições de probabilidades pouco suaves. A instabilidade na convergência para valores coerentes faz com que o critério de robustez seja um ponto negativo no modelo.

3.2 - Métodos de expansão

Entre os métodos de expansão existentes, vale a pena citar Jarrow & Rudd (1982), Rubinstein (1998) com a expansão de Edgeworth e Abken et al.(1996) com uma expansão sobre polinomios de Hermite.

A expansão é um método que aproxima a distribuição até um determinado nível confiança, ou seja, até que a contribuição marginal do próximo termo seja menor que um erro definido. A forma geral dos métodos de expansão é a seguinte:

$$q(S_T - S_t \leq x) = q_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k q_k(x) \qquad \text{Eq. 42}$$

3.3 - Métodos não-paramétricos

Uma das maiores limitações do modelo de Black&Scholes é a hipótese fundamental sobre o processo estocástico dos preços e consequentemente, sobre a densidade dos retornos do ativo subjacente, supostamente normais. Os modelos não paramétricos tentam superar esta restrição trabalhando com métodos estatísticos que não pressupõe um modelo gerador para os preços. Estes métodos permitem que poucas restrições sejam impostas, dando flexibilidade quase total ao padrão da densidade dos retornos.

Segue abaixo alguns modelos Não Paramétricos pesquisados:

- Modelo de Máxima Suavidade
- Modelo de Máxima Entropia

3.3.1 - Modelo de Máxima Suavidade (Jackwerth & Rubinstein, 1996)

O modelo de máxima suavidade, conforme demonstrado nos testes feitos no trabalho de Oliveira (2000), apresenta grande dificuldade de convergência e/ou resultados pouco coerentes, sendo que a implementação sugerida pelos autores, mostrou-se custosa e computacionalmente ineficiente.

Assim sendo, diante da grande quantidade pontos negativos, conforme tabela comparativa de Oliveira (2000), este modelo não será exposto no presente trabalho.

3.3.2 - Modelo de Máxima Entropia (Stutzer, 1996)

Os modelos paramétricos até então apresentados tem o potencial de minimizar a distância entre os preços observados das opções e os preços teóricos obtidos a partir de uma certa densidade neutralizadora q.

Stutzer (1996) apresenta um método não paramétrico de avaliação, denominado Modelo de Máxima Entropia ou Modelo Canônico, baseado no *principío da mínima divergência* e derivado dos desenvolvimentos da Teoria da Informação. Uma vantagem deste método, como ressaltam diversos autores (Siqueira,1999, Gulko,1999, Avellaneda 1997, Stutzer 1996), deve-se ao fato de que o objetivo da mínima divergência é bastante atrativo do ponto de vista teórico. Além da fundamentação axiomática deste critério este modelo é considerado menos arbitrário que as demais funções objetivo apresentadas, por trabalhar com a minimização de um critério de informação.

Uma outra diferença fundamental para avaliação das curvas de volatilidade de ativos é que no modelo proposto por Stutzer, distintamente dos demais modelos paramétricos, é utilizada a própria distribuição de probabilidade histórica como priori de otimização. Com isso, é possível estimar a densidade neutralizadora do preço da incerteza e responder quão diferente ela é se comparada à densidade histórica ou se comparada a densidade de probabilidade encontrada com a praticada pelo mercado. Haveria de se falar na comparação com a densidade de probabilidade do mercado se houvesse opções sobre o ativo sendo negociadas, o que, no entanto, não é o nosso caso.

Por não depender dos preços das opções do mercado, e pelos demais critérios que serão mostrados a seguir, este será o modelo a ser desenvolvido no próximo capítulo.

3.4 - Comparação dos Modelos

Oliveira (2000) desenvolveu um trabalho de comparação de diversos modelos para a obtenção da curva de volatilidade utilizando os seguintes critérios:

3.4.1 - Eficiência computacional do modelo

Segundo critério de eficiência computacional os modelos foram avaliados pelos custos computacionais e de implementação, levando em consideração a dificuldade de implementação e o tempo para convergência. Logicamente são preferíveis modelos facilmente implementáveis (preferencialmente em planilhas de cálculo) e com respostas que possam ser geradas em tempo real.

3.4.2 - Robustez dos resultados

Uma das maiores vantagens dos modelos como o de Black&Sholes é que neste são utilizadas equações fechadas e estas, quando corretamente utilizadas, sempre geram resultados confiáveis. No entanto, quando está se trabalhando com modelos dependentes de procedimentos numéricos e de rotinas de otimização isso pode passar a ser um problema.

Caso um modelo apresente dificuldades de convergência, dificilmente poderá ser adotado por uma mesa de operações, visto que, esta necessita de informações rápidas e confiáveis. Desta forma, um sistema que demanda rapidez e muitas vezes processa as informações durante a noite, sem uma supervisão de todo o processo, não pode apresentar dificuldades de convergência.

3.4.3 - Facilidade de Uso

Como ressaltam Mendes & Duarte (1998), nas instituições financeiras, muitas vezes, o usuário de um modelo matemático não é o mesmo que o desenvolveu e o implementou, sendo assim, se não houver um bom entendimento do modelo por parte do usuário, decisões erradas podem ser tomadas.

4 - Argumentação Teórica, Explicação, e Construção do Modelo escolhido

Neste capítulo será apresentado ao leitor os princípios da Teoria da Informação e da Entropia Relativa; princípios base do modelo a ser desenvolvido. Após o embasamento teórico, o modelo será exposto, para por fim, ser construído em planilha eletrônica.

4.1 - Argumentação Teórica – Teoria da Informação

4.1.1 - Máxima incerteza e equilíbrio de mercado

Os mercados estão supostamente em equilíbrio quando a oferta é igual a demanda, ou seja, quando há o mesmo número de participantes dispostos a comprar e a vender um determinado ativo por um mesmo preço.

Se o mercado é eficiente, o potencial comprador de uma ação acredita que esta ação está desvalorizada, e o potencial vendedor inversamente acredita que esta ação está supervalorizada. A diferença de opinião, no equilíbrio, torna a distribuição dos retornos incerta.

Considerando as duas distribuições binomiais abaixo, sendo P a probabilidade do preço da ação aumentar no período de tempo T:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & P = 99\% & & & P = 50\% \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & & Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 1\text{-}P = 1\% & & & 1\text{-}P = 50\% \end{tikzcd}$$

Pode-se dizer que:

- X é mais previsível que Y;
- X não é estável (mais compradores que vendedores);
- Y é mais incerto quanto ao futuro movimento do mercado;
- Y é mais estável (mesmo número de compradores e vendedores);

- Y está em equilibrio.

O equilíbrio tende a ser o mais incerto possível sobre a direção futura do mercado.

4.1.2 - Quantificação da Informação

A probabilidade mede a incerteza sobre a ocorrência de um evento aleatório, a entropia mede a incerteza de uma família de eventos aleatórios. Para uma variável aleatória X, o que pode-se deduzir de uma observação em que X = x?

A quantidade de informação convertida pela observação de que X=x, deve depender do quanto a ocorrência desse evento é previsível. Caso todos tenham a expectativa de que o preço de uma ação aumente de valor no dia seguinte e na realidade o preço diminui, o evento imprevisível da queda é mais informativo do que o previsível aumento do preço. O que se quer com a entropia é quantificar a noção de que eventos proporcionam informação.

Pode-se dizer que a função I(p) representa a informação trazida pela ocorrência do evento X = x com probabilidade de ocorrer igual a p. Isto requer que I(p) seja positivo e seja uma função decrescente em relação a p (quanto maior p menor o valor de I). Intuitivamente, pode-se justificar que a função I(p) é não negativa pois qualquer ocorrência de eventos novos gera alguma informação nova.

Considere que X e Y sejam duas variáveis aleatórias discretas independentes:

$$P(X = x) = p \qquad\qquad P(Y = y) = q$$

Desde que X e Y sejam eventos independentes, a probabilidade conjunta de ocorrência dos eventos é dado por:

$$P(X = x; Y = y) = pq$$

Quando dois eventos independentes, X= x e Y= y, ocorrem, a informação associada a eles I(pq) é dada por:

$$I(pq) = I(p) + I(q) \qquad \textbf{Eq. 43}$$

Derivando a Eq.43 em relação p e em relação a q tem-se:

$$q\frac{\partial}{\partial(pq)}I(pq) = \frac{\partial}{\partial p}I(p) \qquad \textbf{Eq. 44}$$

$$p\frac{\partial}{\partial(pq)}I(pq) = \frac{\partial}{\partial q}I(q) \qquad \textbf{Eq. 45}$$

Como X e Y são independentes e, os termos acima devem ser constantes, denotados por –c, temos:

$$I(q) = -c\ln(q) \qquad \textbf{Eq. 46}$$

Como 0< q < 1 e I(q) deve ser positivo e uma função decrescente de q, a constante c é positiva. De agora em diante a constante c terá valor 1. Portanto, a informação trazida por um evento que tem probabilidade de ocorrência p é dado por:

$$I(p) = -\ln(p) \qquad \textbf{Eq. 47}$$

Considerando que a ação pode ter o seu próximo movimento tanto de alta quanto de baixa:

Probabilidade do preço aumentar **p**

Ação

Probabilidade do preço diminuir **1-p**

A informação convertida pelo movimento de alta é dado por $I(p) = -\ln(p)$

A informação convertida pelo movimento de baixa é dado por $I(p) = -\ln(1-p)$

4.1.3 - Entropia

Seja Y uma variável aleatória discreta, assumindo valores $Y_1,...Y_k$ com probabilidade P(Y). A Entropia desta v.a é dada por:

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} p_i(Y)\ Log p_i(Y) \qquad \textbf{Eq. 48}$$

Visto que qualquer probabilidade p_i é menor ou igual a 1, a entropia será sempre um valor positivo.

A expectativa de um valor alto de informação indica uma distribuição com alta variedade de probabilidades de ocorrência. O valor baixo de informação, implica na distribuição de probabilidade relativamente estreita e portanto, não há muito ganho de informação pela ocorrência de eventos previsíveis. Qualitativamente pode-se dizer que H representa a incerteza da distribuição, um valor alto (baixo) de H corresponde a uma alta (baixa) incerteza.

Se a distribuição Y converge para um único evento isolado J, o qual possui probabilidade $p_j= 1$ com todos os outros $p_i= 0$, então $H(Y) = 0$. Isto corresponde ao menor nível de entropia possível. A entropia tem seu valor máximo, log(n), quando $p_i = 1/n$ para todos os i, ou seja, quando todas as possibilidades tem a mesma probabilidade e a mesma incerteza. Isto é, o conceito de máxima entropia, corresponde a máxima incerteza e mínima informação.

Pode-se verificar pela definição de entropia, que esta pode ser escrita como sendo o valor esperado de $\log p(Y)$, i.e,

$$H(Y) = -E[\log p(Y)] \quad \textbf{Eq. 49}$$

O modelo, como será demonstrado posteriormente, utiliza-se do conceito de **entropia relativa** S(p,q) . Este conceito mede a ineficiência em se assumir que uma distribuição é q quando a distribuição verdadeira é p.

A *entropia relativa* ou *divergência de Kullback-Leibler* entre duas distribuições p e q é definida por:

$$S(p,q) = \sum p(Y)\log\frac{p(Y)}{q(Y)} = E_{p(Y)}\left[\log\frac{p(Y)}{q(Y)}\right] \quad \textbf{Eq. 50}$$

Onde a ineficiência, diferença entre o valor esperado entre as duas distribuições, é igual à entropia relativa, conforme demostrado abaixo:

$$E_{p(y)}[-\log q(Y)] - H(Y) = E_{p(Y)}[-\log q(Y)] - E_{p(Y)}[-\log p(Y)]$$

$$= E_{p(Y)}[-\log q(Y) + \log p(Y)] \quad \textbf{Eq. 51}$$

$$= E_{p(Y)}\left[\log\frac{p(Y)}{q(Y)}\right] = S(p,q)$$

A entropia relativa nada mais é do que uma medida de distância entre duas distribuições de probabilidade.

4.2 - Explicação do modelo

O modelo a ser construído neste trabalho foi inicialmente desenvolvido por Stutzer (1996) e é baseado no princípio da mínima divergência derivado dos desenvolvimentos da Teoria da Informação. Ele utiliza a própria densidade de probabilidade histórica p (dos retornos passados) como priori de otimização, encontrando uma nova densidade de probabilidade q. A partir desta nova distribuição, pode-se calcular o novo preço das opções para cada preço de exercício e, com estes preços, encontrar a curva de volatilidade do ativo. E finalmente, através da mesma minimização, é possível encontrar a distribuição de probabilidade implícita na curva de volatilidade do mercado

Como já mostrado anteriormente, o preço de uma opção européia de compra é dado por:

$$C = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} (S_t - X) q(S_t) dS_t \qquad \text{Eq. 52}$$

Onde C é o preço da opção de compra, r é a taxa de juros livre de risco, X é o preço de exercício, S_t é o preço da ação no tempo t e $q(S_t)$ é a distribuição de probabilidade de S_t.

Dada a equação para obtenção o preço da opção, a construção do modelo será dividido em três partes:

Neste item será obtida a nova distribuição de probabilidade q minimizando a entropia relativa entre a distribuição dos retornos histórica p e a nova distribuição q, obedecendo a restrição de a nova distribuição ter o seu valor esperado $E(S_t)=S_0e^{rT}$, ou seja, a distribuição resultante será neutra ao risco.

Na segunda parte, será calculado o preço da opção c_i para cada preço de exercício X_i a partir da distribuição q obtida;

Por fim, com os preços obtidos, será utilizado o modelo de Black&Sholes, para determinação da volatilidade implícita de cada preço de exercício construindo assim, a curva assimétrica de volatilidade histórica.

4.2.1 - Obtenção da distribuição e probabilidade $q(S_t)$

A obtenção da nova distribuição q é a parte mais complexa e trabalhosa do modelo. A nova distribuição q, obtida através da minimização da entropia relativa, é equivalente a translação da distribuição histórica p, recentralizando-a, utilizando a taxa de juros livre de risco do mercado, de forma a alterar o mínimo possível o formato da distribuição original. Ou seja, será colocado o centro da distribuição histórica no centro da distribuição neutra ao risco, obtendo perdas mínimas no formato da distribuição original. A figura a seguir ilustra essa translação:

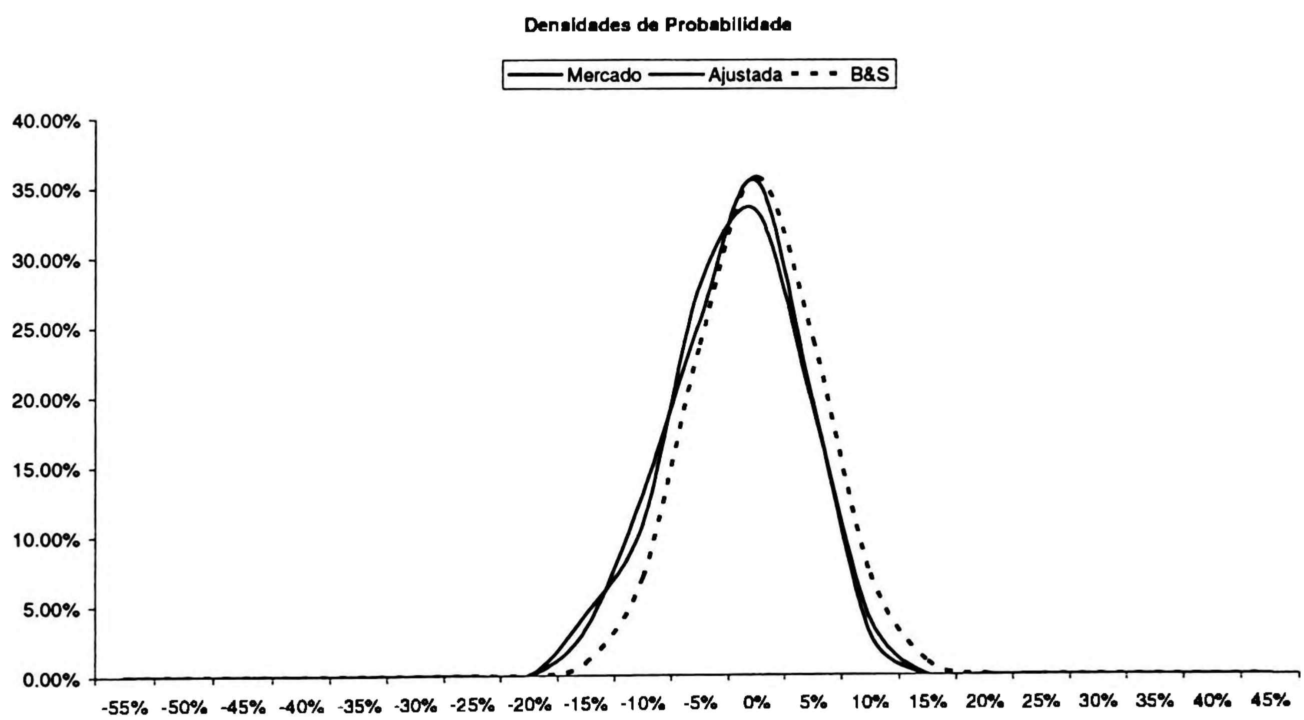

Figura 6 – Densidades de probabilidade

A média da três distribuições observadas acima é a mesma

Pode-se definir S(p, q) como sendo a entropia relativa entre a distribuição de probabilidade inicial p e a distribuição subsequente q. S mede o decaimento da entropia (ou o aumento da informação) entre a distribuição inicial p e a final q, e é dada por:

$$S(p,q) = E_q[\log q - \log p] = \sum_i q_i \log \frac{q_i}{p_i} = -\sum_i q_i \log \frac{p_i}{q_i} \qquad \text{Eq. 53}$$

A Função –log( ) é convexa logo log(pi/qi) é maior que o –log(pi/qi). Então,

$$S(p,q) > -\log \sum_i (q_i \frac{p_i}{q_i}) = -\log \sum_i (p_i) = -\log 1 = 0 \quad \text{Eq. 54}$$

Portanto S(p,q) é estritamente não negativa e é zero se e somente se p=q. S(p,q) pode ser vista como a distância entre as duas distribuições de probabilidades.

O objetivo é minimizar a entropia relativa ou a "distância" entre duas distribuições de probabilidade.

Considere uma opção de ação com vencimento em T e uma ação com preço à vista igual a S_0. Para encontrar o valor da opção tem-se que encontrar a média do retorno sobre uma densidade de probabilidade q(S_0, 0; S_t, T). Teoricamente q é encontrado resolvendo a equação diferencial de Black & Sholes. No modelo de Black & Sholes, a distribuição de probabilidade do preço da ação é assumido como sendo lognormal e consequentemente os preços de suas opções não possuem nenhuma curva de volatilidade, sendo que todos os preços de exercícios possuem a mesma volatilidade.

Como já exaustivamente mencionado, a teoria de Black & Sholes não condiz com a realidade. A distribuição q a ser obtida, deve ser consistente com a distribuição real dos retornos do ativo. Além disso a distribuição q deve satisfazer a condição de seu valor esperado ser a taxa de juros livre de risco, devido ao custo do capital e a expectativa de retorno do investidor como já apresentado.

É natural primeiramente levar a adoção da distribuição dos retornos atuais de determinado ativo p(S_0,0, S_t, T). As duas distribuições q e p não podem ser idênticas, pois a expectativa do retorno da ação esperada pelos investidores na distribuição q, como já supramencionado, deve ter o valor da taxa corrente livre de risco, enquanto a expectativa de retorno na distribuição p é a média dos retornos reais da ação, podendo este assumir valor negativo, sem relação com a taxa corrente livre de risco do mercado.

Estima-se a distribuição dos retornos q( ) de uma ação por sua distribuição histórica p( ), assumindo que o segundo é um bom estimador do passado e que a entropia relativa S(p,q) entre as duas distribuições seja minimizada. Este critério é imposto na tentativa de evitar qualquer aumento de desvio da informação na criação da distribuição histórica. Será demonstrado que a restrição da minimização na distribuição é a condição em que o valor esperado do preço da ação na distribuição q é consistente com o valor futuro da ação.

Portanto, para encontrar a distribuição q, deve-se minimizar a entropia relativa:

$$MIN\left\{S(p,q) = E_Q\left[\log\left(\frac{q(S_t)}{p(S_t)}\right)\right]\right\} \quad \textbf{Eq. 55}$$

Tal que :

$$\int q(S_T)S_T dS_T = s_0 e^{rT} \quad \textbf{Eq. 56}$$

e

$$\int q(S_T)dS_T = 1 \quad \textbf{Eq. 57}$$

A resolução da minimização acima não é trivial. Segundo Stutzer 1996, solucionando a minimização tem-se a equação para obter a distribuição q como sendo:

$$q_\lambda(S_0,0;S_T,T) = \frac{p(S_0,0;S_T,T)}{\int p(S_t)\exp(-\lambda S_t)ds}\exp(-\lambda S_t) \quad \textbf{Eq. 58}$$

Onde a constante λ pode ser encontrada numericamente tal que a condição do preço futuro abaixo seja satisfeita.

$$\int q_{\lambda}(S_0,0;S_t,T)S_T dS_T = s_0 e^{rT} \qquad \textbf{Eq. 59}$$

O problema acima é uma otimização não linear com restrições, o que pode representar problemas computacionais para a obtenção da solução. Felizmente o problema pode ser transformado em uma otimização não restrita, o que simplifica a busca da solução. Pelo método do multiplicador de Lagrange o autor mostra que a solução do problema acima é a seguinte distribuição:

$$\hat{q}(h) = \frac{Exp\left[\hat{\lambda}\frac{R(-h)}{r^T}\right]}{\sum_h Exp\left[\hat{\lambda}\frac{R(-h)}{r^T}\right]}, h = 1,2,\ldots,H-T \qquad \textbf{Eq. 60}$$

Esta distribuição é conhecida como "Distribuição Canônica de Gibbs". Por esta razão o autor batizou o "Modelo de Avaliação Canônico". Onde r é a taxa de juros livre de risco, T é o número de dias até o vencimento da opção, e R(-h) é a série de retornos passados de tamanho T (mesma maturidade das opções que se quer avaliar), a partir de uma janela móvel sobre a série histórica H de preços passados do ativo S(t) t=-1,-2,...,-H, ou seja, é H-T retornos de T dias calculando como:

$$R(-h) = \frac{S(-h)}{S(-h-T)}, h = 1,2,\ldots\ldots H-T \qquad \textbf{Eq. 61}$$

A solução de q requer apenas a estimação do multiplicador de Lagrange λ, que, por sua vez, é a solução do seguinte problema de minimização não restrita:

$$\lambda = \arg\min \sum\nolimits_{h} \exp\left[\hat{\lambda}\left(\frac{R(-h)}{r^{T}} - 1 \right) \right]$$

Eq. 62

$$\hat{\lambda}[-\infty, +\infty]$$

Utilizando alguma ferramenta de busca direta, pode-se encontrar o multiplicador de Lagrange o qual minimiza a função acima. Obtendo-se o multiplicador torna-se necessário somente a sua substituição na equação de q para a obtenção da nova distribuição .

4.2.2 - Ajuste do modelo

Através do modelo de Black & Scholes, é possível obter a volatilidade do preço de exercício da opção "at the money" fazendo uma análise de sua volatilidade histórica ou observando a volatilidade implícita, caso a opção seja negociada no mercado. A volatilidade "at the money" deve ser um dos parâmetros a ser inserido pelo usuário, já que esta representa a expectativa da volatilidade realizada do ativo pelo negociador e sendo assim, mais uma restrição a ser incluída no modelo.

Para que a volatilidade da opção "at the money" a ser obtida, seja a mesma inserida pelo usuário, deve-se ajustar o modelo de forma que o novo estimador q_{ATM} seja obtido por:

$$\hat{q}(h)_{ATM} = \frac{\exp\left[\hat{\lambda}_1 \frac{R(-h)}{r^{T}} + \hat{\lambda}_2 \left(\frac{\max[S \cdot R(-h) - X_{ATM}, 0]}{r^{T}} \right) \right]}{\sum \exp\left[\hat{\lambda}_1 \frac{R(-h)}{r^{T}} + \hat{\lambda}_2 \left(\frac{\max[S \cdot R(-h) - X_{ATM}, 0]}{r^{T}} \right) \right]}, h = 1,2,....H-T$$

Eq. 63

Onde os multiplicadores de lagrange λ_1, λ_2 sejam encontrados, solucionando o seguinte problema de minimização não restrita:

$$\hat{\lambda} = \arg Min \sum_h Exp\left[\lambda_1\left(\frac{R(-h)}{r^T}\right) + \lambda_2\left(\frac{\max[S \cdot R(-h) - X_{ATM}, 0]}{r^T} - C_{ATM}\right)\right] \qquad \text{Eq. 64}$$

$$\lambda_1[-\infty, +\infty] \qquad\qquad \lambda_2[-\infty, +\infty]$$

Para C_{ATM} o preço da opção de compra "At the Money" observada no mercado, inserida pelo usuário.

4.2.3 - Obtenção dos preços das opções

A segunda etapa da implementação do modelo de avaliação é o uso da densidade neutralizadora estimada q para o cálculo do preço da opção. No caso, deseja-se avaliar e prever o preço das opções européias de compra para com o preço obtido, estimar a volatilidade implícita utilizando o Black & Sholes. O valor da opção com preço de exercício X, expirando em T, sobre o ativo com preço corrente S_0, é dado por:

$$C_i = \sum_h \frac{Max[S_0 \cdot R(-h) - X_i, 0]}{r^T} q_{ATM}(h) \qquad \text{Eq. 65}$$

4.2.4 - Curva de Volatilidade

Encontrados os preços das opções, será utilizado o modelo de Black & Sholes, fazendo uso como entrada dos preços das opções e dos respectivos preços de exercícios, de forma a obter a volatilidade implícita para cada preço, formando a curva de volatilidade do ativo.

4.2.5 - Distribuição de probabilidade implícita

Utilizando o mesmo método de minimização explicado anteriormente, é possível encontrar uma distribuição de probabilidade implícita pela curva de mercado, ou seja, procura-se encontrar uma distribuição que tenha a menor entropia relativa em relação á distribuição histórica, que seja neutra ao risco e que tenha como resultante os preços das opções observados no mercado.

$$\hat{q}(h)_{IMP}=\frac{\exp\left[\hat{\lambda}_1\frac{R(-h)}{r^T}+\sum\hat{\lambda}_i\left(\frac{\max[S\cdot R(-h)-X_i,0]}{r^T}\right)\right]}{\sum\exp\left[\hat{\lambda}_1\frac{R(-h)}{r^T}+\sum\hat{\lambda}_i\left(\frac{\max[S\cdot R(-h)-X_i,0]}{r^T}\right)\right]},h=1,2,\ldots.H-T \qquad \textbf{Eq. 66}$$

4.3 - Construção do modelo

O modelo apresentado foi construido em uma planilha excel, pois esse é o software mais comum em mesas de operação, e como as otimizações propostas não exigem restrições, um simples "add-in" como o "solver" pode ser utilizado para chegar rapidamente nos mínimos desejados.

Dada uma curva de volatilidade de um ativo qualquer, existem infinitas distribuições de probabilidade neutra ao risco que satisfazem a Eq.52. O objetivo do modelo implementado é encontrar a distribuição neutra ao risco implícita nos preços das opções negociadas, que resulte na menor entropia quando comparada com a distribuição histórica ajustada de retornos.

Pode-se observar na figura a seguir, a distribuição implícita neutra ao risco de menor entropia em relação a distribuição histórica de 26/1/2005 até 24/1/2007, utilizando os preços de mercado do dia 26/1/2007 sobre as opções de compra do Índice Bovespa com vencimento em 14/2/2007.

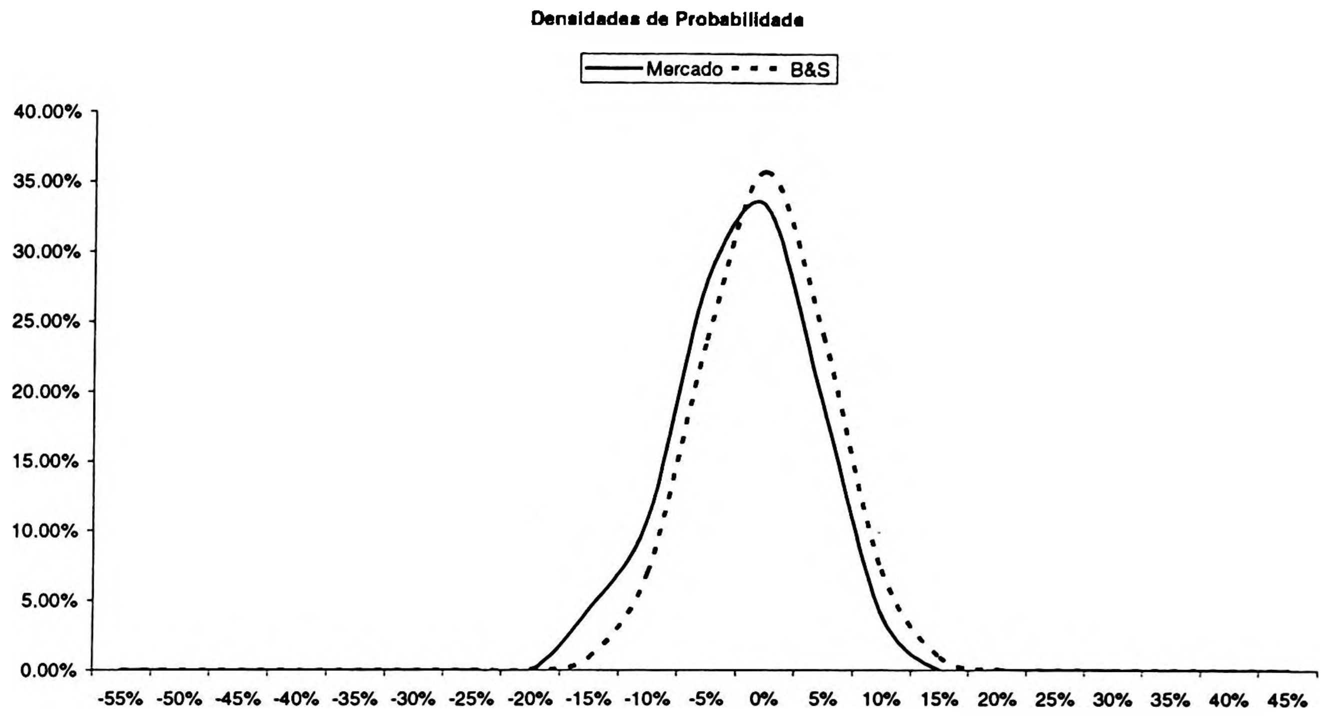

Figura 7 – Densidade de probabilidade ímplicita em comparação com a densidade de Black and Scholes

É possível perceber na Figura 7 a diferença no formato das densidades de probabilidade implícita versus lognormal. As principais características observadas na distribuição implícita são:

- caudas mais pesadas;
- mais massa concentrada em retornos negativos.

A seguir podemos observar as distribuições implícitas das opções de Petrobrás e Vale do Rio Doce para as mesmas datas utilizadas para o Índice Bovespa

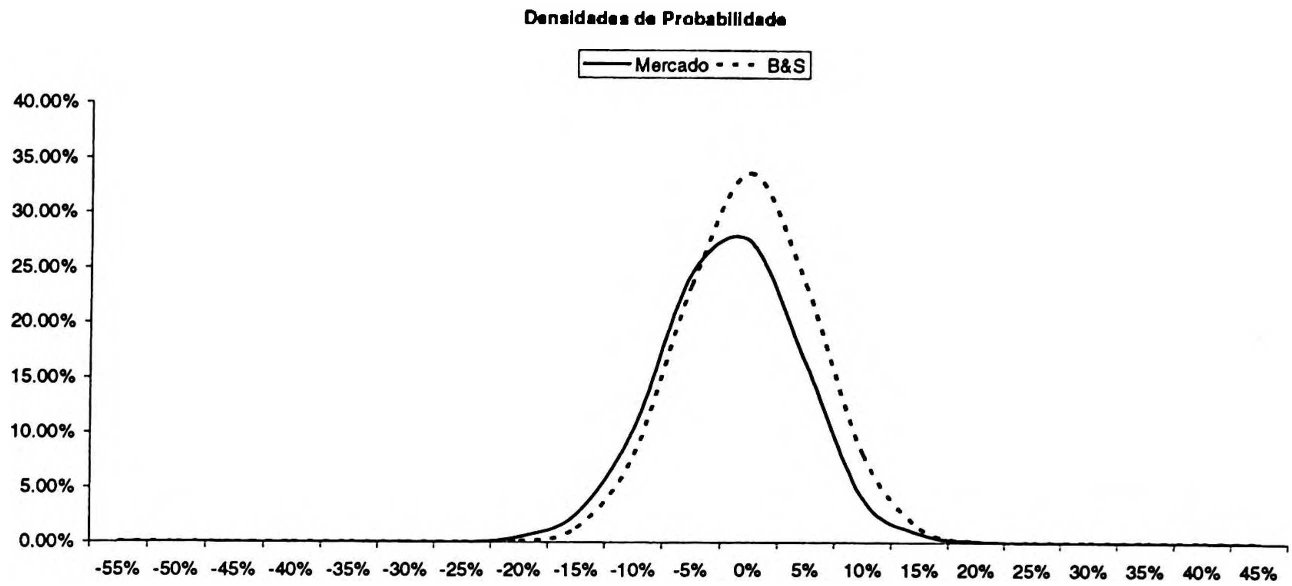

Figura 8 – Densidade de probabilidade ímplicita das opções de Petrobrás

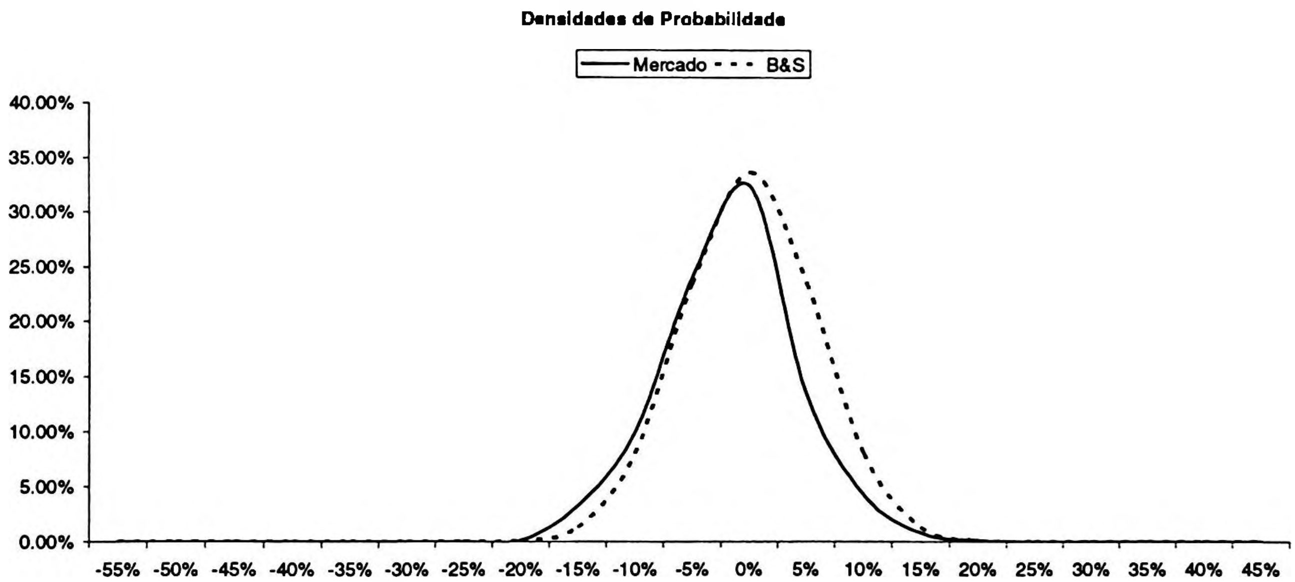

Figura 9 – Densidade de probabilidade ímplicita das opções de Vale do Rio Doce

Nas Figuras 8 e 9, é possível detectar as mesmas características observadas na distribuição do Índice.

5 - Conclusão

Conclui-se que existem muitos modelos teóricos que tentam de alguma maneira suprir a rigidez dos princípios de Black and Scholes. E que para o caso de opções sobre ações e índices, a principal deficiência vem da utilização da lognormalidade para os preços do ativo objeto.

Dentro desse universo de modelos, o escolhido, foi aquele que apresentou uma teoria sobre a informação contida nas distribuições diferentes da lognormal. E aquele que se mostrou mais eficiente computacionalmente, tendo uma maior aplicabilidade na prática.

Uma sugestão interessante para futuras pesquisas, é a de fazer regressões entre a assimetria das densidades de probabilidade implícitas e os retornos observados em uma janela futura.

Apêndice: Breve discussão sobre o lema de Itô

O lema de Itô é importante pois relaciona a variação de uma função sobre uma variável aleatória com a variação da própria variável. A maneira mais simples de entender o lema de Itô é traçando um paralelo entre este e a expansão de Taylor.

Tem-se que:

$$dX^2 \to dt, \qquad quando, \qquad dt \to 0$$

Supondo que f(S) seja uma função contínua de S, e desconsiderando que f(S) seja uma função estocástica. Quando S varia por uma pequena quantidade dS, f(S) também varia por uma pequena quantiade, dado que a função seja bem comportada. Utilizando a expansão de Taylor têm-se que:

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2}dS^2 + \ldots$$

tem-se também que,

$$dS^2 = (\sigma S dX + \mu S dt)^2$$
$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2$$

Observando os termos da equação acima, pode-se perceber que o primeiro termo domina os demais em termos de magnitude, logo:

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + \ldots$$

Substituindo esse resultado na expansão de Taylor, e utilizando a definição de dS chega-se à seguinte conclusão:

$$df = \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2}dt$$
$$df = \sigma S \frac{df}{dS}dX + (\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2})dt$$

Bibliografia

BARÃO M., Entropia, Entropia Relativa e Informação Mútua – Universidade de Évora, 2003.

BAHRA, B., "Implied risk neutral probability density functions from option prices: theory and applications". Bank of England, 1997.

CORADI, C.D., Introdução aos Derivativos. São Paulo: BM&F, 1996

COSTA, C. L., Operando a Volatilidade. São Paulo: BM&F, 1998

HULL, J., Introduction to futures and options market.New Jersey: Prentice Hall,1993

KULLBACK, S., Informaion Theory and Statistics, New York, Dover Publications. Inc., 1967

MARQUES, R. P., Método de Avaliação de Freqüência de Decisão do Delta Hedge para Carteira de Opções.- Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2000

MENDES, B.. e DUARTE, A., Modelos Estatísticos Aplicados ao Mercado Financeiro Brasileiro, 13 Sinape, Associação Brasileira de Estatística, 1998

NATENBERG S., Options Volatility&Pricing – McGraw –Hill, 1999

OLIVEIRA G., Informação Implícita me Prêmios de Opções – Dissertação de Mestrado – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, 2000.

SMITH, D.H., Some Observations on the Concepts of Information Theoretic Entropy and Randomness, pág 2- pág 10, 2001

STUTZER, M., A Simple Nomparametric Approach to Derivative Security Valuation, J, of Finance, 51.pp. 1633-1652, 1996.

STUTZER, M.,. A simple Non-Parametric Approach to Bond Futures and Options Pricing, 1999.

ZOU, J.Z., Strike Adjusted Spread: A New Metric For Estimating The Value Of Equity Options,: Goldman Sachs, 1999

ZOU, J.Z., Valuing Options and Baskets of Stocks and Forecasting the Shape of Volatility Skews: Goldman Sachs, 2000