

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE “MODELAGEM MATEMÁTICA EM
FINANÇAS”

**COINTEGRAÇÃO E INSTABILIDADE DE PARÂMETROS: UMA APLICAÇÃO NO
MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO**

João Pedro de Almeida Senna

Orientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

**São Paulo
2007**

T332.63 S478c

T91092



20160201644



Powered by www.legpross.com.br

JOÃO PEDRO DE ALMEIDA SENNA

DEDALUS - Acervo - FEA



20600031846

**COINTEGRAÇÃO E INSTABILIDADE DE PARÂMETROS: UMA APLICAÇÃO NO
MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre.

USP - FEA - SBD
DATA DA DEFESA <u>03 / 05 / 07</u>

Orientador: Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin

**SÃO PAULO
2007**



FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Senna, João Pedro de Almeida

Cointegração e instabilidade de parâmetros: uma aplicação no mercado acionário brasileiro / João Pedro de Almeida Senna. -- São Paulo, 2007. 68 p.

**Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2007
Bibliografia.**

1. Ações 2. Análise de séries temporais I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade II. Título.

CDD – 332.63

RESUMO

O objetivo desta dissertação foi o desenvolvimento de um modelo de arbitragem estatística, com o intuito de explorar a propriedade de reversão à média, contida em certas combinações lineares de séries de preços de ações que compõem o índice Bovespa. Para isso, fez-se necessário apresentar alguns conceitos relevantes, como o de Cointegração, ferramenta utilizada para verificar a presença de possíveis relações de equilíbrio entre séries não-estacionárias. Outros temas abordados referiram-se à questão da instabilidade de parâmetros de regressões lineares, incluindo-se aí tópicos como a Regressão *Stepwise* e o Filtro de Kalman. O primeiro busca reduzir a multicolinearidade, que surge com a presença de correlações cruzadas em problemas com diversos regressores em potencial, ao passo que o último procura, através de um método recursivo, conferir um grau de adaptabilidade, com o passar do tempo, aos coeficientes das regressões. Todos esses conceitos foram essenciais para a elaboração do modelo de arbitragem estatística proposto, cujo desempenho esteve associado a uma série de regras discutidas no decorrer do trabalho. Dentre estas, foi possível inferir que o caso em que os coeficientes da regressão de Cointegração variam gradativamente conforme o método recursivo do Filtro de Kalman, têm condições de produzir resultados superiores, no que tange a certos parâmetros, como o retorno médio por operação e o índice *Sharpe*, em relação ao modelo em que os mesmos coeficientes são definidos pelo Método dos Mínimos Quadrados, embora este último procedimento tenha apresentado, em termos absolutos, um desempenho bem satisfatório no que diz respeito a tais quesitos. Como recomendação para trabalhos futuros, foram sugeridos métodos complementares para a modelagem do desvio da relação de equilíbrio de Cointegração, como modelos auto-regressivos e de média móvel - ARMA, e modelos auto-regressivos generalizados com heteroscedasticidade condicional - GARCH.

ABSTRACT

The objective of this dissertation was the development of a statistics arbitrage model, which explores the mean reversion property contained in certain linearly combined series of stock prices that makes up the Ibovespa index. For that, it was necessary to present some relevant concepts, like Cointegration, which is a tool generally used to detect equilibrium relationships in a set of nonstationary time series. Besides that, it was described other techniques, which deal with the question of parameters instability such as Stepwise Regression and Kalman Filter. Important to say is that the former is an attempt to reduce the multicollinearity that exists when the number of potential regressors is large, whereas the latter is an approach that allows regression coefficients to evolve with time. All these concepts were used on the development of the stat arb model proposed, whose performance was associated to a couple of rules discussed during this document. Among these, it was possible to conclude that the case in which the regression are time varying may produce better results in terms of some parameters, such as average return per operation and Sharpe ratio, compared to the model in which regression coefficients were estimated by Ordinary Least Squares. Meanwhile, it needs to be emphasized that, in absolute terms, OLS had also produced good results regarding these measures. As a recommendation for future works, it was suggested complementary methods for modeling statistical mispricings from Cointegration equilibrium relationship, like autoregressive methods with moving average (ARMA) and generalized autoregressive conditionally heteroscedastic models.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	2
LISTA DE GRÁFICOS	3
1 INTRODUÇÃO.....	4
2 CONCEITOS RELEVANTES	11
2.1 Cointegração	11
2.2 Testes de Cointegração	13
2.2.1 Teste de Engle-Granger	13
2.2.2 Teste de Johansen	15
2.3 Instabilidade dos parâmetros de uma regressão linear	18
2.3.1 Regressão Stepwise	18
2.3.2 Regularised Least Squares - RLS	19
2.3.3 Filtro de Kalman.....	19
2.3.4 Um caso de Cointegração com uso do Filtro de Kalman.....	24
3 UM MODELO DE ARBITRAGEM ESTATÍSTICA PARA O MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO	26
3.1 Metodologia	26
3.2 Validação do Modelo – backtesting.....	27
3.3 Aplicação	30
3.3.1 Primeiro caso proposto	30
3.3.2 Regras de entrada e saída de operações.....	34
3.3.3 Construção de um modelo de arbitragem estatística.....	35
3.3.4 Alterações no grau de adaptabilidade dos estados estimados pelo Filtro de Kalman.....	48
4 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	55
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61
APÊNDICES.....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 - Sensibilidade de preços dos ativos X, Y e Z a variações nos fatores de risco f_1 e f_2 e aos componentes específicos e_1 , e_2 , e_3	7
Tabela 1.2 - Parâmetros obtidos com a regressão do ativo-alvo X (variável resposta) vs ativos constituintes Y e Z (variáveis explicativas).....	8
Tabela 2.1 - Valores críticos de Phillips e Ouliaris para a rejeição da hipótese nula de não-estacionariedade.....	14
Tabela 3.1 - Ações selecionadas e teste DF de estacionariedade para seus níveis de preço.....	28
Tabela 3.2 - Regressão Stepwise aplicada ao ativo-alvo BBDC4 no período entre as observações 1 e 252.....	31
Tabela 3.3 - Resultados aferidos pelo modelo de arbitragem estatística para a ação BBDC4 como ativo-alvo. Parâmetros calculados no período entre as observações 1 e 252. Ponto de entrada na observação 253.....	33
Tabela 3.4 - Resultados por operação do modelo de arbitragem estatística com BBDC4 como ativo-alvo. Cálculo dos parâmetros da regressão linear através do Método dos Mínimos Múltiplos Quadrados.....	36
Tabela 3.5 - Medidas de desempenho do modelo de arbitragem estatística, com BBDC4 como ativo-alvo. Regra Reg=1.....	38
Tabela 3.6 - Ativos constituintes encontrados para o ativo-alvo BBDC4, referente às observações 27 a 278.....	40
Tabela 3.7 - Medidas de desempenho do modelo de arbitragem estatística, com BBDC4 como ativo-alvo. Regra Reg=2.....	43
Tabela 3.8 - Medidas de desempenho do modelo de arbitragem estatística, com BBDC4 como ativo-alvo. Regra Reg=3.....	44
Tabela 3.9 - Retorno médio por operação obtido por otimização, variando-se a regra Reg. BBDC4 como ativo-alvo.....	45
Tabela 3.10 - <i>Sharpe</i> obtido por otimização, variando-se a regra Reg. BBDC4 como ativo-alvo.....	45
Tabela 3.11 - Retorno médio por operação obtido por otimização, com base na variação da regra Reg, em que se analisam diversos ativos.....	46
Tabela 3.12 - <i>Sharpe</i> obtido por otimização, com base na variação da regra Reg, em que se analisam diversos ativos.....	47
Tabela 3.13 - Melhor modelo por Retorno Médio e por Sharpe, em função da regra Reg.....	48
Tabela 3.14 - Retorno médio por operação por modelo, analisando-se diversos ativos, combinações entre SNR's e alpha, que variam ou não ao longo do tempo.....	49
Tabela 3.15 - Sharpe por modelo, analisando-se diversos ativos, combinações entre SNR's e alpha, que variam ou não ao longo do tempo.....	52
Tabela 3.16 - Comparação de Retorno Médio e Sharpe entre o Modelo em que Reg = 1 e as melhores combinações do Modelo em que Reg = 3.....	53

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1.1 - Preços simulados de X,Y e Z, guiados por dois fatores de risco sistemático e componentes específicos a cada ativo.....	8
Gráfico 1.2 - Série temporal do desvio m_t	9
Gráfico 3.1 - Segmentos dentro e fora da amostra para BBDC4 como ativo-alvo.....	30
Gráfico 3.2 - Desvios de equilíbrio (m_t) da relação.....	32
Gráfico 3.3 - Desvios de equilíbrio (m_t) para dados fora da amostra.....	33
Gráfico 3.4 - Desvios de equilíbrio calculados através do Filtro de Kalman.....	42
Gráfico 3.5 - Desvios de equilíbrio calculados através do Filtro de Kalman, para dados fora da amostra.....	43
Gráfico 3.6 - Evolução do coeficiente de UBBR11 ao longo do tempo em função de diferentes SNR's.....	49
Gráfico 3.7 - Evolução do desvio padrão do coeficiente de UBBR11 ao longo do tempo em função de diferentes SNR's.....	50
Gráfico 3.8 - Evolução da constante alpha ao longo do tempo em função de diferentes SNR's.....	50
Gráfico 3.9 - Evolução do desvio padrão da constante alpha ao longo do tempo em função de diferentes SNR's.....	51

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo de arbitragem estatística para o mercado acionário brasileiro. Um dos principais conceitos que será explorado em tal abordagem é o de Cointegração, ferramenta essencialmente utilizada para identificar situações de estabilidade entre um conjunto de séries temporais. Em Econometria, testes de Cointegração são realizados basicamente com o intuito de identificar a presença de uma possível relação de equilíbrio entre um conjunto de variáveis econométricas. Um possível segundo estágio de modelagem com Cointegração é estimar os mecanismos pelos quais desvios de curto prazo da relação de equilíbrio são corrigidos, o que passa pela construção do modelo de correção de erro (*Error-Correction Model – ECM*).

O estabelecimento de relações de equilíbrio entre ativos de risco requer o conhecimento de que o retorno de uma ação, por exemplo, pode ser decomposto em função de uma componente sistemática (estocástica), que também afeta diretamente o retorno de outras ações, e de uma componente idiossincrática, específica ao ativo em questão. Este ponto de vista forma a base dos tradicionais modelos de precificação de ativos de risco, como o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), de Sharpe (1964) e o APT (*Arbitrage Pricing Theory*), de Ross (1976). De uma maneira geral, esses modelos de precificação possuem a seguinte forma:

$$\Delta y_{i,t} = \alpha_i + \beta_{i,Mkt} \Delta Mkt_t + \beta_{i,1} \Delta f_{1,t} + \dots + \beta_{i,n} \Delta f_{n,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (1.1)$$

Esta formulação estabelece que retornos de ativos de risco, $\Delta y_{i,t}$, estão relacionados a fontes de risco sistemático (variações no portfólio de mercado, ΔMkt_t , e relacionadas a outros fatores de risco, $\Delta f_{j,t}$) e a fontes de risco específicas aos ativos, $\varepsilon_{i,t}$.

A presença de fatores de risco permite a possibilidade de neutralizar ou reduzir o risco através de uma combinação apropriada de ativos. Considere-se um portfólio que consiste de uma posição comprada em um ativo y_1 e vendida em um ativo y_2 . Admitindo-se que as dinâmicas de preços dos ativos em questão seguem o processo apresentado em (1.1), os retornos combinados $\Delta y_{1,t} - \Delta y_{2,t}$ são expressos por:

$$\begin{aligned} \Delta y_{1,t} - \Delta y_{2,t} = & (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_{1,Mkt} - \beta_{2,Mkt})\Delta Mkt_t + (\beta_{1,1} - \beta_{2,1})\Delta f_{1,t} + \dots \\ & + (\beta_{1,n} - \beta_{2,n})\Delta f_{n,t} + (\varepsilon_{1,t} - \varepsilon_{2,t}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Se as exposições aos fatores de risco forem similares, isto é, $\beta_{1,j} \approx \beta_{2,j}$, a proporção da variância que é causada pelos fatores de risco diminuirá substancialmente.

A abordagem comum para se neutralizar o risco sistemático parte do pressuposto de que é possível identificar aproximações aos fatores de risco, $\Delta f_{j,t}$, e suas respectivas exposições (sensibilidades), $\Delta \beta_{j,t}$. A partir daí, pode-se construir um portfólio, cuja exposição a diferentes fatores de risco se encontre numa faixa de tolerância predeterminada. Entretanto, na prática, o processo de identificação e de construção de modelos com tais fatores é bem complexo, conforme salienta Bentz (1999). Assim, como alternativa, o uso de Cointegração fornece um método implícito para se neutralizar essa fonte de risco, de acordo com Burgess (2003).

Mais especificamente, dado um universo de ativos U_A e um particular ativo-alvo, $AT \in U_A$, o método de Cointegração pode ser empregado para criar o ativo sintético $SA(AT)$, que nada mais é do que uma combinação linear de ativos que apresentam a maior relação possível de correlação de longo prazo com o ativo-alvo AT . Os coeficientes dessa combinação linear podem ser estimados por meio da regressão dos preços históricos de AT com os preços históricos dos ativos constituintes C , em que $C \subset U_A - AT$:

$$SA(AT)_t = \sum_{C_i \in C} \beta_i C_{i,t} + \alpha, \text{ sujeito à equação:}$$

$$\beta = \min \sum_{t=1, \dots, n} \left(AT_t - \left(\sum_{C_i \in C} \beta_i C_{i,t} + \alpha \right) \right)^2 \quad (1.3)$$

Como o objetivo da regressão é minimizar o quadrado das diferenças, emprega-se o método dos mínimos quadrados ordinários - MMQ (em inglês OLS – *Ordinary Least Squares*), e o “vetor de Cointegração” ótimo $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ dos pesos dos ativos constituintes pode ser calculado através da seguinte relação:

$$\beta_{OLS} = (C'C)^{-1} Cd, \quad (1.4)$$

em que C é a matriz de preços históricos dos ativos constituintes e $d = (AT_1, \dots, AT_n)'$ é o vetor dos preços históricos do ativo-alvo.

As propriedades do método dos mínimos quadrados utilizadas em regressão asseguram que o ativo sintético é um estimador não viesado para o ativo-alvo, isto é,

$$E(AT_t) = SA(AT_t), \quad (1.5)$$

além de indicar que os desvios entre os preços do ativo sintético e do ativo-alvo serão mínimos.

Desvios da relação 1.5 são os considerados desvios de equilíbrio Burgess (1999), representados por:

$$m_t = AT_t - SA(AT_t), \quad (1.6)$$

em que a dinâmica da série temporal m_t possui propriedades que serão exploradas como base para a elaboração de um modelo de Arbitragem Estatística, a ser discutido no capítulo 3.

Segundo Burgess (2003), do ponto de vista fundamentalista, os ativos constituintes C atuam como aproximações dos fatores de risco não observados, ou seja, o ativo sintético representa uma combinação que se aproxima das exposições de fatores de risco, sem haver a necessidade de identificação de tais fatores de risco ou das exposições a eles inerentes.

A fim de ilustrar a técnica de Cointegração proposta por esse autor, será considerado o exemplo de três ativos, X , Y e Z , cada um seguindo o processo de geração apresentado em (1.1). A variação de preços de tais ativos será em função de cinco fatores, sendo dois deles considerados de risco sistemático, f_1 e f_2 , e os outros tidos como componentes específicos a cada ativo, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, conforme pode ser visto na tabela 1.1. Além disso, será determinado que f_1 e f_2 seguem um processo de passeio aleatório e que a dinâmica das partes específicas contém um componente de reversão à média (estacionária)¹.

¹ Enders (2004) define que a solução geral para equações diferenciais lineares estocásticas consiste em três partes distintas: tendência (estocástica, f_1 e f_2), componente estacionária ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) e ruído

Tabela 1.1 - Sensibilidade de preços dos ativos X, Y e Z a variações nos fatores de risco f_1 e f_2 e aos componentes específicos e_1 , e_2 , e_3 .

Ativo	f_1	f_2	e_1	e_2	e_3
X	1	1	1	0	0
Y	1	0.5	0	1	0
Z	0.5	1	0	0	1

Baseada nas premissas discutidas no parágrafo anterior, a dinâmica das séries propostas segue abaixo:

$$\begin{aligned}
 \Delta f_{1,t} &= \eta_{1,t}, \\
 \Delta \varepsilon_{j,t} &= -0.1\varepsilon_{j,t-1} + \mu_{j,t}, \\
 \Delta X_t &= \Delta f_{1,t} + \Delta f_{2,t} + \Delta \varepsilon_{1,t}, \\
 \Delta Y_t &= \Delta f_{1,t} + 0.5\Delta f_{2,t} + \Delta \varepsilon_{2,t}, \\
 \Delta Z_t &= 0.5\Delta f_{1,t} + \Delta f_{2,t} + \Delta \varepsilon_{3,t},
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

com

$$i = 1,2 \quad \eta_{i,t} \sim N(0,1)$$

$$j = 1,2,3 \quad \mu_{j,t} \sim N(0,0.25)$$

Note-se, portanto, que a dinâmica dos fatores não observados f_1 e f_2 é função do ruído $\eta_{i,t}$ e que os componentes específicos $\varepsilon_{j,t}$, também não observados, são representados pela combinação do ruído $\mu_{j,t}$ e pelo termo de reversão à média com parâmetro -0.1.

Uma particular simulação dos preços dos ativos X, Y e Z, pode ser vista no gráfico a seguir:

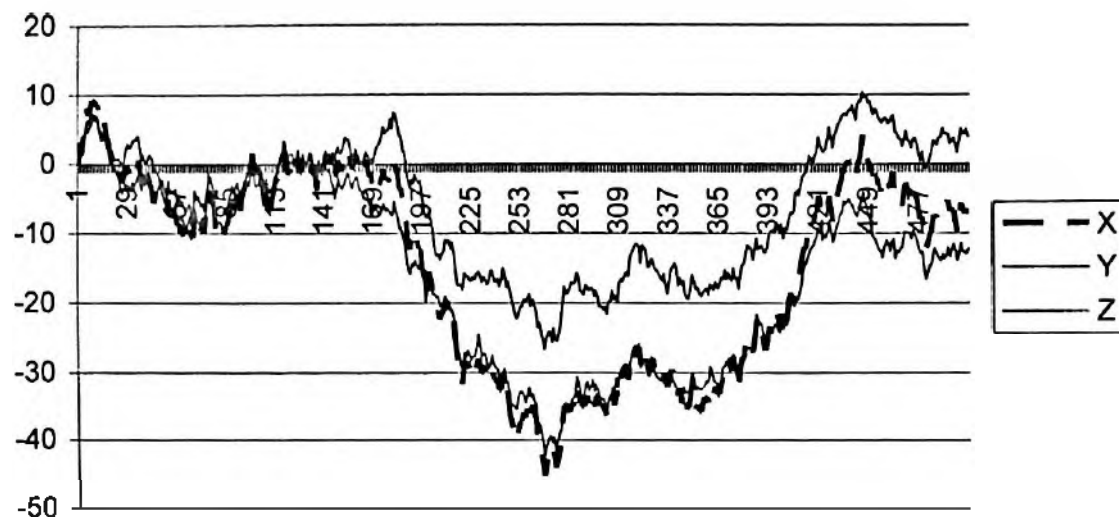


Gráfico 1.1 - Preços simulados de X, Y e Z, guiados por dois fatores de risco sistemático e componentes específicos a cada ativo.

Observe-se que a exposição a fatores comuns de risco criou similaridades explícitas de preço entre os ativos.

Definindo X como o ativo-alvo e Y e Z como ativos constituintes, e aplicando-se a técnica de Cointegração apresentada em (1.2), obtém-se a seguinte relação:

Tabela 1.2 - Parâmetros obtidos com a regressão do ativo-alvo X (variável resposta) vs ativos constituintes Y e Z (variáveis explicativas)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y	0.688361	0.004261	161.5657	0
Z	0.628987	0.007721	81.4618	0
R-squared	0.996267	Mean dependent var		-14.9179
Adjusted R-squared	0.99626	S.D. dependent var		14.30469
S.E. of regression	0.874805	Akaike info criterion		2.574328
Sum squared resid	384.1721	Schwarz criterion		2.591084
Log likelihood	-646.7306	Durbin-Watson stat		0.175955

A relação estimada difere levemente da relação esperada pelo sistema proposto, $X_t = 2/3Y_t + 2/3Z_t + m_t$, que neutralizaria a exposição implícita a fatores de risco, restando somente a componente m_t , que representa a combinação das partes específicas aos ativos. No entanto, a relação de Cointegração obtida foi capaz de neutralizar amplamente os fatores

implícitos, o que se alcançou sem a necessidade de se conhecer o processo de geração dos ativos, conforme descrito na tabela 1.1.

Neste exemplo apresentado, os componentes específicos dos ativos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ foram construídos mediante a propriedade de reversão à média, de tal forma que o erro da regressão (ou resíduo) seja considerado um desvio de equilíbrio, o qual representa um desvio temporário da relação de equilíbrio dos três ativos. Ao contrário da não-estacionariedade verificada na dinâmica de preços de X, Y e Z, o desvio de equilíbrio $m_t = X_t - (2/3Y_t + 2/3Z_t)$ é estacionário², como pode ser visto no gráfico abaixo:

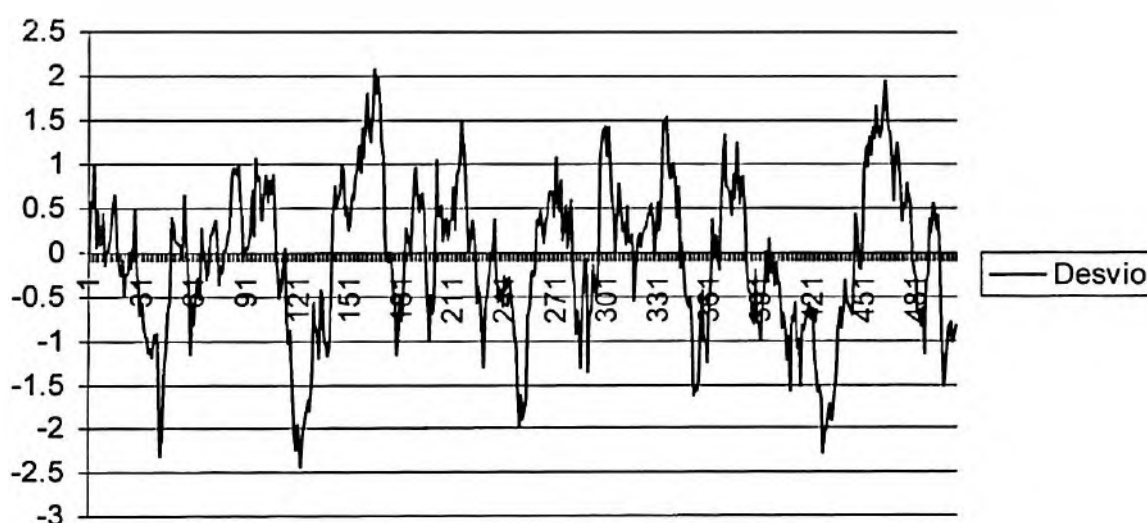


Gráfico 1.2 - Série temporal do desvio m_t

Os resultados do experimento proposto servem para ilustrar a capacidade da Cointegração de remover os fatores de risco sistemático e destacar os componentes específicos dos ativos, aos quais foi atribuído a propriedade de reversão à média.

A proposta deste trabalho será mostrar que, juntamente com outras técnicas, resultados similares podem ser obtidos com ativos reais, no caso ações. Isto servirá de base para a construção de um modelo de arbitragem estatística.

² O aspecto visual sugere que o desvio de equilíbrio apresenta propriedade de reversão à média, o que é confirmado pelo teste de Dickey Fuller aplicado ao desvio de equilíbrio, que rejeita a hipótese de não-estacionariedade com nível de significância de 1%. Este e outros conceitos serão discutidos no capítulo 2.

O restante deste documento será organizado da seguinte forma: O capítulo 2 discutirá, com detalhes, o conceito de Cointegração e outros métodos a serem empregados no presente trabalho, abordando a literatura existente sobre o assunto; o capítulo 3 descreverá o modelo de arbitragem estatística proposto, que irá explorar a propriedade de reversão à média, presente em séries cointegradas de ações, além de apresentar os resultados obtidos. A conclusão e considerações finais serão mencionadas no capítulo 4.

2 CONCEITOS RELEVANTES

2.1 Cointegração

A abordagem do conceito de Cointegração, introduzido por Engle e Granger (1987), se inicia através da inspeção de um conjunto de variáveis econômicas quando em equilíbrio, representadas através da seguinte relação:

$$\beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_n x_{nt} = 0, \quad (2.1)$$

sendo β e x_t os vetores $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ e $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$. O sistema encontra-se no estágio de equilíbrio de longo prazo, quando $\beta x_t = 0$. O desvio desta situação de equilíbrio, chamado de erro de equilíbrio, é o termo e_t , de modo que $e_t = \beta x_t$. Desta forma, Engle e Granger (1987) fornecem a seguinte definição para o conceito de Cointegração:

Os componentes do vetor $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ são cointegrados de ordem d, b , definidos pelo termo $x_t \sim CI(b,d)$, se:

1. Todos os componentes de x_t são integrados de ordem d .
2. Existe um vetor $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, tal que a combinação linear $\beta x_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_n x_{nt}$ é integrada de ordem $(d-b)$, onde $b > 0$.

O vetor β é chamado de vetor de Cointegração.

Como exemplo de relação de variáveis cointegradas, Enders (2004) cita o caso do modelo de demanda por moeda (do inglês *money demand*), definido através das seguintes variáveis:

$$m_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t + e_t, \quad (2.2)$$

em que:

m_t é a variável demanda por moeda;

p_t é a variável nível de preços;

y_t é a variável renda em termos reais;

r_t é a variável taxa de juros;

e_t é um distúrbio estacionário;

β_t são os parâmetros a serem estimados.

Todas as variáveis, exceto a taxa de juros, estão expressas em base logarítmica.

A hipótese de que o *money market* está em equilíbrio permite a coleta das séries temporais referentes às variáveis em questão: oferta de capital (=demanda por moeda), nível de preços, renda em termos reais, que pode ser medida através do PIB real, e uma apropriada taxa de juros de curto prazo. Tal modelo pressupõe que frações não explicadas pela procura por capital, ou seja, a seqüência e_t , fazem parte da teoria. Se esta estiver correta, qualquer desvio da condição de equilíbrio deve ser temporário, por definição. Se e_t possuir tendência estocástica, os erros do modelo acumular-se-ão, de tal forma que os desvios de equilíbrio não serão eliminados. Conseqüentemente, uma das premissas fundamentais de tal teoria é a de que o distúrbio e_t seja estacionário.

Sabe-se que determinadas variáveis, tais como PIB real, oferta de capital, nível de preços, taxa de juros, são todas integradas de ordem 1 (I(1)), ou seja, não estacionárias. Em tais condições, qualquer uma pode "caminhar" ao longo do tempo, sem necessariamente retornar para um nível de equilíbrio de longo prazo. Sabe-se também que como e_t ($e_t = m_t - (\beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 y_t + \beta_3 r_t)$) deve ser estacionário, a combinação linear de tais variáveis integradas de ordem 1 igualmente deve ser estacionária. Assim, a teoria requer que as variáveis m_t , p_t , y_t e r_t tenham uma dependência entre si. Este é, portanto, um caso de Cointegração, cujo vetor x_t é dado por $(m_t, 1, p_t, y_t, r_t)$ e o vetor de Cointegração β é $(1, -\beta_0, -\beta_1, -\beta_2, -\beta_3)$.

2.2 Testes de Cointegração

A literatura relevante – Hamilton (1994), Maddala e Kim (1998), Alexander (2001), Brooks (2002), Enders (2004) - aponta dois importantes testes de Cointegração: a metodologia de Engle-Granger e a de Johansen, que serão abordadas a seguir.

2.2.1 Teste de Engle-Granger

O teste de Engle-Granger é definido pelas etapas dispostas abaixo:

1. Testar a ordem de integração das variáveis em questão. Por definição, a Cointegração requer que as variáveis sejam integradas de mesma ordem. O teste de *Dickey-Fuller* (DF), bem como o Aumentado de *Dickey-Fuller* (ADF), podem ser usados para detectar o número de raízes unitárias entre as variáveis, o que irá qualificá-las em relação à ordem de integração.
2. Estimar a relação de equilíbrio de longo prazo. Como exemplo, admitindo-se que as variáveis em análise sejam as hipotéticas y_t e z_t , ambas $I(1)$, a relação de equilíbrio de longo prazo é expressa da seguinte forma:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + e_t, \quad (2.3)$$

sendo \hat{e}_t a sequência de resíduos da equação acima.

A fim de verificar se tais variáveis são cointegradas, deve-se testar se os desvios da relação de equilíbrio, representados pelo termo \hat{e}_t , são estacionários. Se tal for verdadeiro, y_t e z_t são cointegradas de ordem (1,1).

Considere-se a equação de autoregressão da sequência de resíduos definida abaixo:

$$\Delta \hat{e}_t = a_1 \hat{e}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.4)$$

Se não for possível rejeitar a hipótese nula de que $\alpha_1 = 0$, conclui-se que a série de resíduos contém raiz unitária. Conseqüentemente, infere-se que y_t e z_t não são cointegradas. Todavia, se não for possível rejeitar a hipótese nula $\alpha_1 = 0$, não é possível rejeitar a hipótese de que tais variáveis não são cointegradas, ou seja, a rejeição da hipótese $\alpha_1 = 0$ implica que os resíduos sejam estacionários e, neste caso, as variáveis y_t e z_t são cointegradas de ordem (1,1).

O teste estatístico para avaliar a hipótese nula $\alpha_1 = 0$ deve levar em consideração que a sequência \hat{e}_t foi gerada através da regressão $y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + e_t$, ou seja, não se sabe o erro populacional e_t , somente a estimativa desse erro representado por \hat{e}_t . Como o processo para estimar β_0 e β_1 é feito através da minimização dos quadrados dos resíduos, a variância residual, por definição, feita a menor possível, e o teste estatístico para avaliar a magnitude de α_1 deve levar em consideração tal fato.

Phillips e Ouliaris (1990) definem os valores críticos para a rejeição de $\alpha_1 = 0$, fundamentados em amostras com mais de 200 dados. Para tanto, levam em conta o número de regressores, n , bem como a presença de constante ou tendência na regressão. A tabela que se segue representa tais valores:

Tabela 2.1: Valores críticos de Phillips e Ouliaris para a rejeição da hipótese nula de não-estacionariedade.

N	regressão (a)			regressão (b)			regressão (c)		
	1%	5%	10%	1%	5%	10%	1%	5%	10%
1	-3.39	-2.76	-2.45	-3.96	-3.37	-3.07	-4.36	-3.80	-3.52
2	-3.84	-3.27	-2.99	-4.31	-3.77	-3.45	-4.65	-4.16	-3.84
3	-4.30	-3.74	-3.44	-4.73	-4.11	-3.83	-5.04	-4.49	-4.20
4	-4.67	-4.13	-3.81	-5.07	-4.45	-4.16	-5.36	-4.74	-4.46
5	-4.99	-4.40	-4.14	-5.28	-4.71	-4.43	-5.58	-5.03	-4.73

Fonte: Phillips e Ouliaris (1990)

No tabela acima, na regressão (a), não há os termos constante ou tendência. Quanto à regressão (b), há constante, mas não há tendência, e na regressão (c), ambas estão presentes.

Observe-se que, caso os resíduos de $\Delta e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t$, não se assemelhem a um processo de ruído branco (se ε_t apresentar correlação serial, por exemplo), deve-se utilizar uma forma aumentada dessa equação, incorporando-se *lags*, conforme mostra a equação abaixo:

$$\Delta \hat{e}_t = \alpha_1 \hat{e}_{t-1} + \sum_{i=1}^n \alpha_{i+1} \Delta \hat{e}_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

De maneira análoga, a rejeição da hipótese $\alpha_1 = 0$ leva à conclusão de que a sequência de resíduos \hat{e}_t é estacionária, e as variáveis y_t e z_t são cointegradas.

2.2.2 Teste de Johansen

A metodologia de Johansen é empregada para a detecção de Cointegração em sistemas multivariados. O teste de Johansen é baseado em autovalores de uma matriz estocástica e reduz-se a um problema de correlação canônica, similar ao de Componentes Principais, citado por Alexander (2001), ao passo que o de Engle-Granger, baseado em MMQ, busca a combinação com menor variância de resíduos.

O teste de Johansen é uma generalização multivariada do teste de raiz unitária. Por exemplo, um modelo AR(1) $y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ é considerado não-estacionário se $\alpha = 1$. O polinômio característico do processo AR(1) é $1 - \alpha x$, portanto possui raiz $\frac{1}{\alpha}$, que não estará dentro do círculo unitário quando $\alpha = 1$. Quando $\alpha = 1$, o AR(1) torna-se um modelo de passeio aleatório $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Segundo Alexander (2001), para se testar a hipótese nula de $\alpha = 1$, não é suficiente estimar o α e usar o teste t de student, já que este é consideravelmente viesado na presença de raiz unitária. No entanto, usando-se o operador de diferença, o modelo AR(1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\Delta y_t = (\alpha - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.6)$$

Essa representação de AR(1) fornece uma alternativa de como a hipótese nula $\alpha = 1$ deve ser abordada: deve-se regredir o termo Δy_t em y_{t-1} , admitindo-se, neste caso, a não-existência de termos determinísticos na equação. Em seguida, deve-se testar se o coeficiente em y_{t-1} é significativamente diferente de zero. Se tal coeficiente for nulo, o processo AR(1) possui raiz unitária. Este argumento generalizado para um processo VAR(1) é a base do teste de Johansen para a Cointegração. De forma similar ao AR(1), o modelo matricial VAR(1) $y_t = \alpha_0 + Ay_{t-1} + \varepsilon_t$ pode ser reescrito com Δy_t como variável resposta e y_{t-1} como variável explicativa, assumindo a seguinte forma:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + (A - I)y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.7)$$

Se cada variável em y for I(1), cada equação, na relação acima, possui uma variável estacionária no lado esquerdo da fórmula. Como os erros são necessariamente estacionários, o termo $(A - I)y_{t-1}$ também deve ser estacionário para que a relação $\Delta y_t = \alpha_0 + (A - I)y_{t-1} + \varepsilon_t$ esteja balanceada.

Se $A - I$ possuir posto $r > 0$, existirão r relações lineares independentes entre as variáveis y , que devem ser estacionárias. Portanto, as variáveis I(1) em y terão tendências estocásticas comuns, ou seja, serão cointegradas. O número de vetores de Cointegração é o próprio posto de $A - I$.

O posto da matriz $A - I$ é dado pelo número não-nulo de autovalores, e o teste de Johansen trata justamente da estimativa desse número. Assim como no processo univariado AR(p), a presença ou não de termos determinísticos – constante ou tendência – é facultativa, e a escolha do *lag* p apropriado é realizada com o intuito de eliminar correlações seriais no resíduo.

Desta forma, se um modelo de VAR com ordem superior for utilizado para a aplicação do teste de Johansen, a representação por diferença se dará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta y_t = & \alpha_0 + (A_1 - I)y_{t-1} + (A_1 + A_2 - I)y_{t-2} + (A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1} - I)y_{t-p-1} \\ & + (A_1 + A_2 + \dots + A_p - I)y_{t-p} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.8)$$

Assim, o método de Johansen seria o teste do número de autovalores não-nulos da matriz:

$$\Pi = A_1 + A_2 + \dots + A_p - I \quad (2.9)$$

Johansen e Juselius (1990) recomendam o uso do teste de traço para se aferir o número dos r não-nulos autovalores da matriz Π . O teste estatístico para as hipóteses destacadas abaixo seria:

Hipóteses: $H_0 : r \leq R$; $H_1 : r > R$

$$\text{Teste: } Tr = -T \sum_{i=R+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i) \quad (2.10)$$

Aqui, T é o tamanho da amostra, n o número de variáveis no sistema, e os autovalores de Π são os números reais $0 \leq \lambda < 1$. Na relação $Tr = -T \sum_{i=R+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$, os autovalores obtidos são ordenados de tal forma, que $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_n$. O método de Johansen calcula, primeiramente, os autovalores e, em seguida, o traço da matriz para cada $R=0$ até $n-1$.

É importante destacar que o método de Johansen é mais informativo que o procedimento de Engle-Granger, pois determina todas as relações de Cointegração possíveis. É comumente empregado para problemas econômicos, já que estes de um modo geral possuem muitas variáveis a serem analisadas e não há uma indicação clara de qual seria a variável resposta, caso fosse escolhido o procedimento de Engle-Granger. No entanto, há boas razões para a escolha do método de Engle-Granger para o presente trabalho, as quais podem ser assim resumidas:

- Não há a necessidade de se estimarem diversas relações de Cointegração no sistema de variáveis em questão, pois a variável resposta é conhecida. Trata-se do ativo-alvo, que, no caso presente, será escolhido entre o universo de ações que compõem o índice acionário Bovespa. Desta forma, apenas um vetor de Cointegração é suficiente.
- Outra limitação do método adotado diz respeito ao possível viés de estimadores em função de se adotarem amostras de tamanho pequeno, é contornável, já que há a disponibilidade de amostras com muitas observações no mercado acionário.

2.3 Instabilidade dos parâmetros de uma regressão linear

Uma vez obtido o vetor de Cointegração, através de Engle-Granger, entre o ativo-alvo e os ativos constituintes, pode-se facilmente calcular o desvio de equilíbrio, conforme descrito no capítulo 1. A questão que surge, ao se aplicar tal método, deixa a entrever que a relação de Cointegração pode ser instável ao longo do tempo, seja por variações reais no próprio vetor de Cointegração, causadas eventualmente por choques macroeconômicos ou específicos às empresas, ou simplesmente por erros no processo de estimação. De tudo isso se infere que a significância da relação de Cointegração não é suficiente para garantir que o desvio tenha reversão à média no futuro.

Embora não seja possível prever mudanças em tal relação, é possível adaptar-se a estas, antes que as mesmas se manifestem nos dados observados. Em seguida, serão discutidas algumas metodologias que buscam contornar a questão da instabilidade nos parâmetros.

2.3.1 Regressão Stepwise

A instabilidade advinda do processo de estimação decorre, muitas vezes, da presença de multicolinearidade entre os ativos constituintes. Tal efeito é agravado quando o número dos constituintes aumenta, já que o número de correlações cruzadas em tal situação aumenta mais que linearmente.

No caso presente, onde o ativo-alvo é constituído potencialmente pelas ações que compõem o índice Bovespa, é importante o uso de uma metodologia que consiga reduzir a dimensionalidade do problema, pois o universo de ativos em questão é extenso. Lembre-se que o Ibovespa é composto por mais de 50 ações. Neste sentido, o uso da Regressão *Stepwise* surge como uma boa alternativa. Seu mecanismo de funcionamento se dá da seguinte forma: uma vez fixado o ativo-alvo, os ativos constituintes são adicionados em etapas ao modelo de regressão linear MMQ. Em cada etapa, é escolhido o ativo constituinte que fornece maior redução na variância do resíduo da regressão.

Uma interpretação do ponto de vista econômico de tal metodologia está voltada para o primeiro ativo a ser adicionado, o qual cointegrará com o ativo-alvo. Além de apresentar exposição mais similar a fatores de risco que dominam a variância de preço do ativo-alvo. O segundo constituinte e os demais serão aqueles mais correlacionados com os fatores de risco ainda presentes no resíduo, depois da inserção do ativo-constituente anterior.

2.3.2 Regularised Least Squares - RLS

Outro método que tenta equacionar problemas de multicolinearidade é o RLS ou *Ridge Regression* (Hoerl e Kennard, 1970). Neste, é introduzido um termo diagonal à matriz de covariância de preços dos ativos constituintes $C'C$, a fim de deflacionar os elementos fora da diagonal da matriz $C'C$, reduzindo a aparente correlação entre as diferentes séries de ativos, e, portanto, proporcionando uma maior estabilidade aos parâmetros da regressão.

Note-se que neste caso, o vetor de Cointegração não é obtido através da relação $\beta_{OLS} = (C'C)^{-1}Ct$, mas da seguinte forma: $\beta_{RLS} = (C'C + \lambda \sigma I)^{-1}Ct$, onde λ é o fator de regularização da matriz, e σI é a matriz diagonal com os termos diagonais de $C'C$.

2.3.3 Filtro de Kalman

Uma outra abordagem que visa equacionar a instabilidade de parâmetros, permitindo a variação ao longo do tempo do termo constante α , e dos coeficientes dos ativos constituintes $\beta_{i,t}$, é a metodologia do Filtro de Kalman (Durbin e Koopman, 2001; Bentz, 2004). Esta é composta por um sistema de equações, segmentadas em Equação de Observação (*Observation Equation*) e Equação de Transição (*Transition Equation*).

A Equação de Observação relaciona o ativo-alvo (variável resposta) com os ativos constituintes (variáveis explicativas) através dos estados não observados (no caso da regressão MMQ, tais estados são os próprios coeficientes dos ativos constituintes). De um modo geral, tal equação assume a seguinte forma:

$$Y_t = H_t s_t + d + \varepsilon_t. \quad (2.11)$$

No presente caso, Y_t é o ativo-alvo no tempo t ; s_t é o vetor que descreve o estado dos coeficientes dos ativos constituintes no tempo t ; d é um vetor não-aleatório usado para corrigir a média dos coeficientes; H_t é o vetor composto pelos ativos constituintes; ε_t é um distúrbio serialmente decorrelacionado, chamado de ruído de observação, com média zero e variância R_t .

A evolução, ao longo do tempo, dos estados não observados é um processo de Markov de primeira ordem, descrito pela Equação de Transição:

$$s_t = \Phi s_{t-1} + c_t + \eta_t, \quad (2.12)$$

onde Φ é a matriz não-aleatória de transição de estados; c_t é um vetor não-aleatório; η_t é um distúrbio serialmente decorrelacionado, chamado de ruído do sistema, com média zero e variância Q_t .

O vetor de estado inicial s_0 possui média s e matriz de covariância P_0 , ou seja:

$$E(s_0) = s \text{ e } \text{Var}(s_0) = P_0. \quad (2.13)$$

Além disso, os distúrbios ε_t e η_t são não correlacionados entre si em qualquer intervalo de tempo, além de serem também não correlacionados com o estado inicial.

Pode-se dizer que o Filtro de Kalman é um método recursivo, cujo objetivo é o de prever o vetor de estados no tempo t , baseado em informações disponíveis em $t-1$, através da filtragem do ruído de observação (Bentz, 2004). O Filtro busca identificar não apenas quanto da variação em Y_t pode ser atribuído ao ruído da observação, mas também quanto pode ser atribuído ao ruído do sistema.

A aplicação do Filtro de Kalman requer o entendimento de uma série de equações, dispostas a seguir.

A definição do estado é $\hat{s}_{t|t} = E(s_t / Y_1, \dots, Y_t)$ e a covariância do erro do estado é representada por $P_{t|t} = E((s_t - \hat{s}_{t|t})(s_t - \hat{s}_{t|t})') = \text{Var}(s_t - \hat{s}_{t|t})$. Registre-se que a notação $\hat{a}_{b|c}$ significa estimar a, no tempo b, fato condicionado às informações disponíveis até o tempo c.

A previsão do vetor de estados $\hat{s}_{t|t-1}$ e de sua correspondente matriz de covariância de erro de previsão $P_{t|t-1} = E((s_t - \hat{s}_{t|t-1})(s_t - \hat{s}_{t|t-1})')$ são representadas pelas seguintes equações de previsão:

$$\hat{s}_{t|t-1} = \Phi \hat{s}_{t-1|t-1} + c_t; \quad (2.14)$$

$$P_{t|t-1} = \Phi P_{t-1|t-1} \Phi' + Q_t. \quad (2.15)$$

A previsão da variável resposta é dada pela seguinte equação:

$$\hat{Y}_{t|t-1} = H_t \hat{s}_{t|t-1} + d. \quad (2.16)$$

O erro de previsão e_t , no tempo t, e sua respectiva variância são calculados nas equações abaixo:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_{t|t-1}; \quad (2.17)$$

$$f_{t|t-1} = \Phi P_{t|t-1} \Phi' + R_t. \quad (2.18)$$

Novas informações que chegam ao sistema são representadas justamente pelo erro e_t . A causa deste pode ser explicada por meio de diversos fatores, entre os quais flutuações aleatórias nos retornos, erro na previsão de estados anteriores, etc.

Tais informações são utilizadas na estimativa do vetor de estados $\hat{s}_{t|t}$ e de sua respectiva covariância $P_{t|t}$, através das equações de atualização, dispostas abaixo:

$$\hat{s}_{t|t} = \hat{s}_{t|t-1} + K_t e_t; \quad (2.19)$$

$$P_{t|t} = (I - K_t H_t') P_{t|t-1}. \quad (2.20)$$

A matriz de ganho de Kalman, K , é responsável por ajustar os estados, a fim de refletir essas novas informações. Seu cálculo se dá através do ruído de observação, R_t , e da covariância do erro de previsão do estado, $P_{t|t-1}$, através da seguinte equação:

$$K_t = \Phi P_{t|t-1} H_t' (H_t P_{t|t-1} H_t' + R_t)^{-1}. \quad (2.21)$$

Uma ilustração mais detalhada da seqüência de equações que compõem o método de Kalman pode ser vista no fluxograma abaixo (Bentz, 2004):

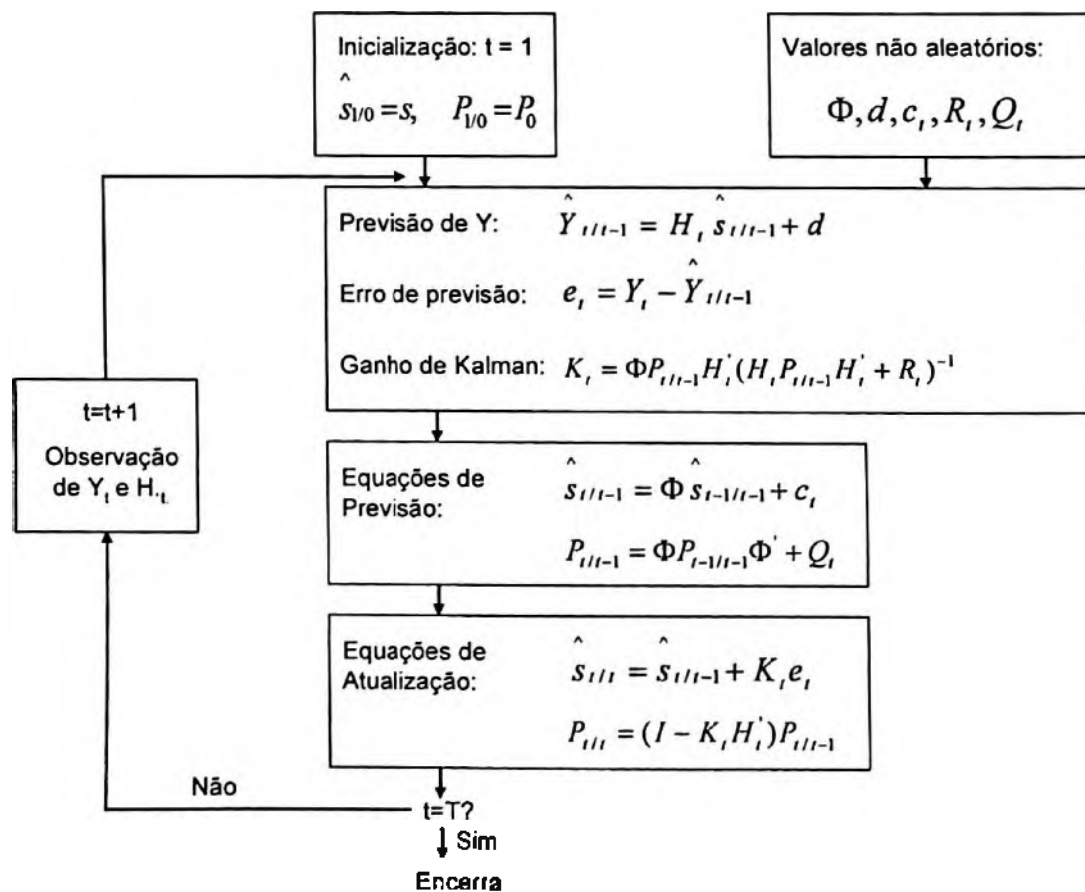


Ilustração 2.1- Fluxograma do Filtro de Kalman

Uma das formas de se estimarem os valores Φ, d, c, R, Q , é através de métodos de otimização, com o intuito de se obterem os “melhores” parâmetros, segundo critérios como o de máxima verossimilhança. Esta consiste em encontrar uma estimativa do vetor θ , que maximize a probabilidade de gerar os dados observados. Em outras palavras, dada uma amostra de observações Y_t , objetiva-se encontrar uma solução para θ que maximize a função conjunta de densidade de probabilidade $L(Y, \theta)$. Como as observações não são independentes entre si, a função conjunta de densidade de probabilidade não é o produto da função densidade de probabilidade correspondente a cada observação. Em vez disso, usa-se a função condicional de densidade de probabilidade para representar a função conjunta de densidade:

$$L(Y, \theta) = \prod_{t=1}^T p(Y_t / Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1}). \quad (2.22)$$

Admitindo-se que os erros de previsão e_t possuam comportamento gaussiano, pode-se escrever a função $L(Y, \theta)$ em base logarítmica:

$$\log L(\theta / Y_1, Y_2, \dots, Y_T) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(f_{t|t-1}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{e_t^2}{f_{t|t-1}} \quad (2.23)$$

A estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ do vetor de parâmetros θ é o valor de θ que maximiza o log da função de verossimilhança:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \log L(\theta / Y_1, Y_2, \dots, Y_T). \quad (2.24)$$

Como a função 2.23 é não-linear em relação aos parâmetros θ , não há solução analítica para a equação $\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0$. Um procedimento de otimização numérica é empregado para buscar os parâmetros que maximizam a probabilidade de se encontrarem os valores gerados, conforme ilustrado no esquema abaixo.

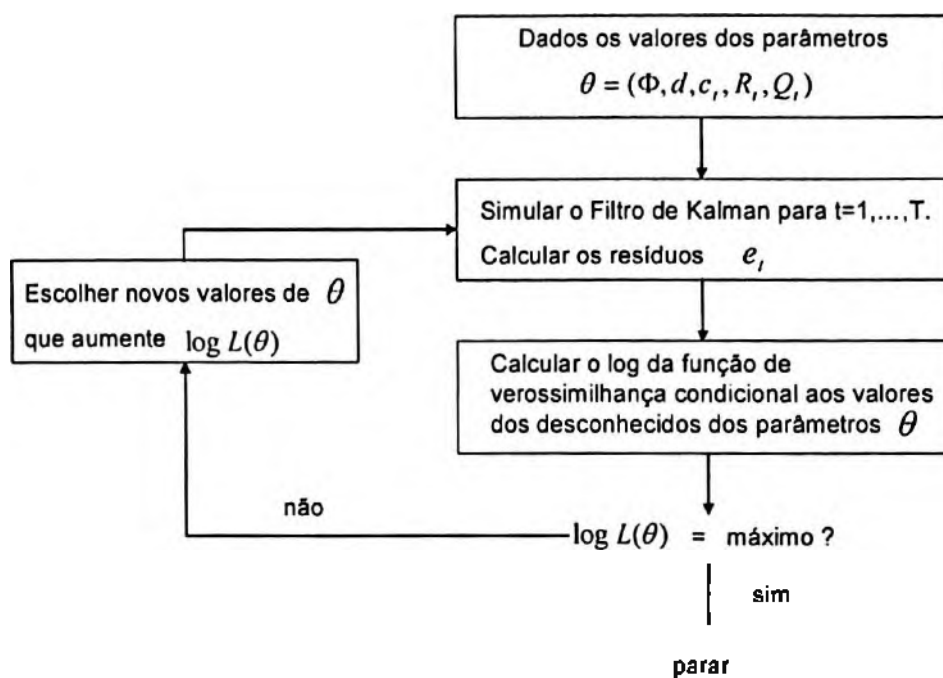


Ilustração 2.2 - Procedimento de otimização numérica da estimativa de máxima verossimilhança

2.3.4 Um caso de Cointegração com uso do Filtro de Kalman

Prazmowski (2005) aplica o método de Engle e Granger, juntamente com o Filtro de Kalman, para avaliar a sustentabilidade da dívida na República Dominicana. De acordo com o autor, numa economia em equilíbrio fiscal, os gastos do governo, incluindo pagamento da dívida, devem ser cointegrados com as receitas do mesmo:

$$G_t = \alpha + \beta T_t + e_t. \quad (2.25)$$

Note-se que G representa os gastos do governo, aí incluído o serviço da dívida; T são as receitas com impostos; e é um distúrbio gaussiano, serialmente independente.

Estimando tal equação pelo método linear dos mínimos quadrados MMQ, e aplicando o teste ADF para os resíduos da equação, o autor infere que tais variáveis não são cointegradas no nível crítico de 95%, de acordo com os valores críticos de MacKinnon³ (1991). Como consequência, a economia encontra-se em desequilíbrio fiscal para o período considerado na amostra (1º trimestre de 1970 ao 1º trimestre de 2000).

³ O estudo proposto por MacKinnon permite o cálculo dos valores críticos de Dickey Fuller para amostras de qualquer tamanho.

Embora o teste de Cointegração realizado para o período em questão não tenha sido aceito segundo o nível de significância de MacKinnon (5%), aplicando-se o mesmo teste, desde que haja a possibilidade dos coeficientes dos fatores (estados) variarem ao longo do tempo (Filtro de Kalman), Prazmowski (2005) constata que há períodos onde se percebe a presença de Cointegração entre as variáveis.

Há uma série de explicações econômicas para tal fato, como o estabelecimento, no fim dos anos 70, de metas do governo para diminuir o desemprego, com o aumento da oferta de cargos públicos. Além disso, em 1980, a fim de compensar o prejuízo causado na economia devido à passagem de um furacão, o governo lança um programa agressivo de expansão de crédito, aumentando ainda mais sua carga de gastos.

Em meados dos anos 80, através de reformas tributárias, com o conseqüente aumento de impostos, o governo consegue reorientar o orçamento para níveis sustentáveis. O teste de Kalman, realizado pelo autor, mostra o reestabelecimento da relação de Cointegração nessa época, após a quebra da estacionariedade na década de 70.

Em 1990, após um período de inflação crônica, a relação de Cointegração volta a se enfraquecer. No entanto, com o programa de auxílio do FMI, a estacionariedade dos resíduos volta a se verificar gradualmente. Assim, no fim dos anos 90, a relação de Cointegração passa a não ser rejeitada a um nível de significância de 5%, devido aos seguintes fatores: à nova reforma tributária promovida pelo governo, à política de privatização de estatais e ao aumento do preço de commodities exportadas pelo país.

3 UM MODELO DE ARBITRAGEM ESTATÍSTICA PARA O MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO

3.1 Metodologia

A metodologia proposta para a exploração de arbitragem estatística contempla os seguintes passos:

1. Selecionar um ativo-alvo qualquer e encontrar o ativo sintético correspondente, com base no teste de Cointegração de Engle-Granger, por meio da estimativa da presença de estacionariedade nos desvios de equilíbrio⁴ da regressão linear do ativo-alvo com os ativos constituintes que compõem o ativo sintético. A dimensão do ativo sintético deve ser determinada antes da definição dos desvios.
2. Construir um modelo de arbitragem estatística para explorar a previsibilidade dos desvios de equilíbrio. A estratégia consiste em comprar o ativo-alvo e vender o ativo sintético toda vez que $m_{t+1} < m_t^{l-\alpha}$, ou vender o ativo-alvo e comprar o ativo sintético toda vez que $m_{t+1} > m_t^{H,1-\alpha}$, onde fixado α , $m_t^{l-\alpha}$ é o limite inferior de confiança e $m_t^{H,1-\alpha}$ é o limite superior do desvio de equilíbrio, obtidos através dos desvios de equilíbrio da relação de Cointegração entre o ativo-alvo e o ativo sintético. Ressalte-se que α , no presente caso, será um valor fixo, de 5%, escolhido arbitrariamente.
3. Adotar mecanismos que tratem adequadamente a instabilidade. Comparar os resultados do caso em que os parâmetros são fixos ao longo do tempo, determinados pelo MMQ, e compara-los com o caso de parâmetros que variam gradativamente.

⁴ Conforme mencionado no capítulo I, Burgess (2003) chama os resíduos da relação de cointegração de desvios de equilíbrio.

3.2 Validação do Modelo – backtesting

Os modelos quantitativos, antes de serem implementados, devem passar pelo processo de validação ou *backtesting*, que indicará o desempenho destes em períodos passados, fato que deve contribuir para fornecer bons subsídios de como estes se comportarão no futuro (Chincarini e Kim, 2006). Um bom processo de validação deve abranger três segmentos de dados: dentro da amostra (*in-sample*), fora da amostra (*out-of-sample*) e tempo real. O esquema abaixo ilustra esta distinção:

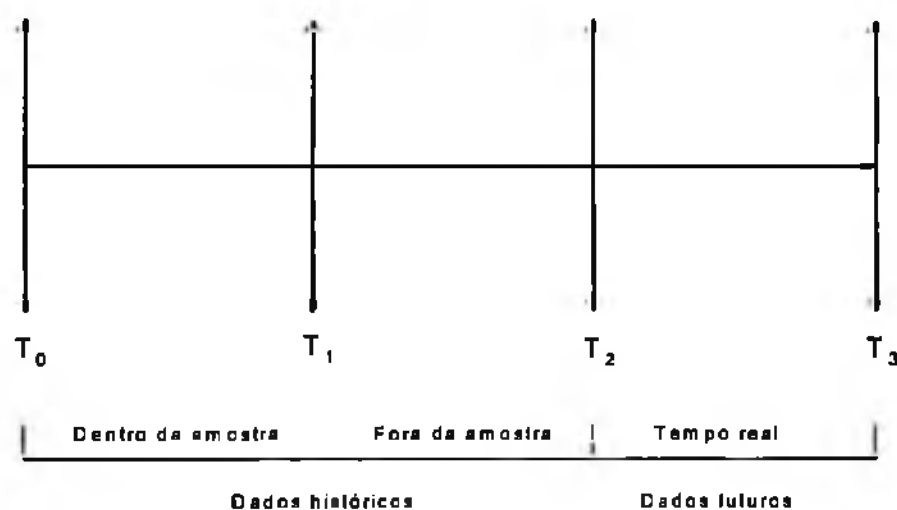


Ilustração 3.1 Ilustração de uma metodologia de *backtesting*

Cabe salientar que o modelo proposto será validado apenas por meio de dados históricos. Os dados futuros não serão coletados, devido à limitação de tempo do trabalho: seriam necessários meses de observação para verificar como o sistema se comportaria diante dos referidos dados. Na verdade, espera-se que o desempenho relativo à base fora da amostra, presente nos dados históricos, seja muito próximo dos resultados obtidos com dados futuros.

Os dados utilizados para a validação do modelo de arbitragem estatística são os preços diários de fechamento das ações que compõem o índice Ibovespa, incluindo o próprio índice, compreendidos entre os dias 15 de outubro de 2003 e 31 de outubro de 2006. Como a composição do índice Ibovespa muda a cada quadrimestre, foram escolhidas somente as ações pertencentes ao índice no dia 31 de outubro de 2006, e que foram negociadas todos os dias naquele período. Outra restrição, no que tange ao teste de Cointegração de Engle Granger, a ser aplicado às ações escolhidas, é definir, conforme mencionado no item 2.2.1, se

as mesmas são não estacionárias em relação aos seus níveis de preços. A tabela com as ações selecionadas e com o teste de Dickey Fuller aplicado aos níveis de preços⁵ segue abaixo:

Tabela 3.1 - Ações selecionadas e teste DF de estacionariedade para seus níveis de preços

ACES4	AMBV4	ARCZ6	BRAS3	BBDC4	BRAP4	BRKM5	BRT04	BRTP3	BRTP4
-0.822	-1.683	-2.146	-1.450	-0.960	-1.695	-0.850	-1.164	-2.044	-1.382
CCRO3	CESP6	CGAS5	CLSC6	CMIG4	CPLE6	CRUZ3	CSNA3	EBTP4	ELET3
-1.143	-1.574	-1.974	-2.279	-1.491	-2.243	-1.784	-2.129	-1.338	-1.631
ELET6	ELPL5	EMBR3	GGBR4	GOAU4	ITAU4	ITSA4	KLBN4	LIGT3	NETC4
-1.635	-2.467	-1.939	-1.241	-0.962	-1.091	-1.263	-1.308	-2.127	-1.819
PETR3	PETR4	PRGA3	PTIP4	SBSP3	SDIA4	TCSL4	TLPP4	TMAR5	TMCP4
-1.387	-1.075	-0.611	-1.445	-2.489	-1.583	-2.621	-2.148	-2.132	-1.560
TNLP3	TNLP4	TRPL4	UBBRI1	USIM5	VALE3	VALE5	VCPA4	VIVO3	VIVO4
-2.187	-1.941	-2.155	-2.079	-1.664	-1.359	-1.332	-1.809	-2.492	-2.441

Através dos valores críticos de Phillips Ouliaris dipostos na tabela 2.1, aceita-se a hipótese de não-estacionariedade para os níveis de preços das ações selecionadas acima, com nível satisfatório de significância, possibilitando-as de serem submetidas ao teste de Engle-Granger, seja como variável resposta ou explicativa .

As 756 observações serão divididas da seguinte forma: os 252 dados iniciais serão utilizados para estimar a combinação dos ativos constituintes e seus coeficientes (base dentro da amostra). Desta amostra, serão definidos também os limites de confiança dos desvios de equilíbrio. Estes, por sua vez, irão delinear os pontos de entrada do modelo de arbitragem estatística, como será visto adiante.

As sete observações subseqüentes (base fora da amostra) aos 252 dias do segmento dentro da amostra serão utilizadas para a validação do modelo, em termos de resultados proporcionados. Tal período foi assim definido por se acreditar que os resultados do modelo de arbitragem são relevantes apenas a curto prazo. Por exemplo, se no 253º dia o sistema apontar um sinal de entrada (este seria o primeiro dia da base fora da amostra), o desempenho do mesmo será avaliado, no máximo, nos seis dias seguintes, do 254º ao 259º dia. O critério de saída com ganho será definido se houver convergência do desvio de equilíbrio para a média, medida por um número de desvios-padrões do desvio de equilíbrio. Se tal critério não for atingido nos seis dias seguintes à entrada, as posições devem ser desfeitas no sexto dia, independentemente do resultado obtido.

⁵ Para tal experimento, foram utilizados os primeiros 252 dias da amostra inteira.

Ainda em relação ao exemplo acima, definido o ponto de entrada no 253º dia e os pontos de saída, do 254º ao 259º dia, o novo período de 252 dias a ser considerado para a estimação dos novos constituintes e dos seus coeficientes será do 9º ao 260º dia. Por outro lado, o período para avaliação dos resultados do modelo, se houver indicação de entrada no 261º dia, se estenderá do 262º ao 267º dia. Observe-se que o último período possível para medir o desempenho do modelo seria entre o 751º e o 756º dia, com a entrada no 750º dia. Neste caso, os dados empregados para o cálculo dos novos constituintes e seus coeficientes seriam entre o 498º e o 749º dia. O esquema que se segue apresenta o método proposto:

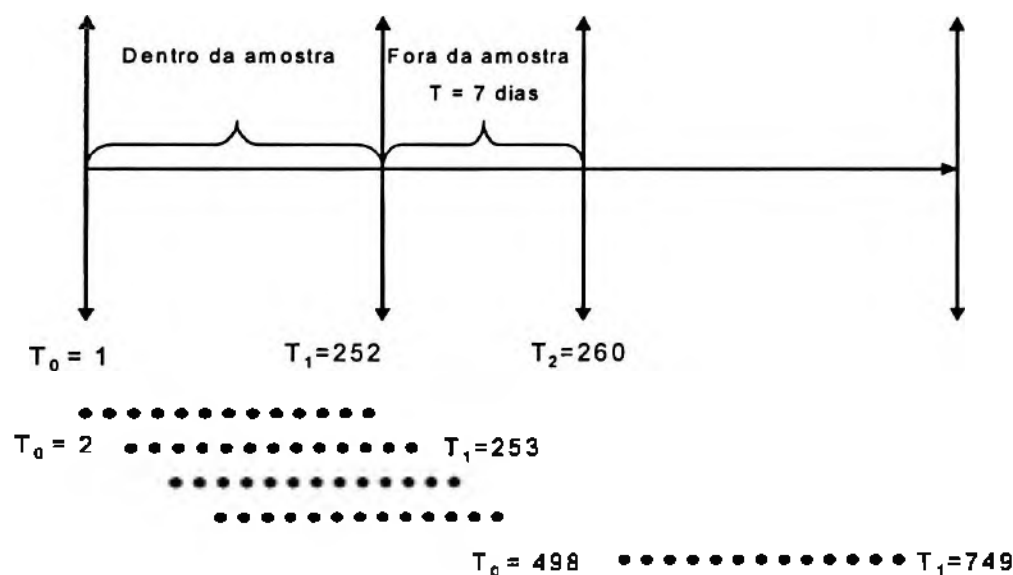


Ilustração 3.2 Ilustração da metodologia proposta de *backtesting*

Apenas como exemplo da metodologia proposta, considere o caso da ação BBDC4. O gráfico a seguir mostra o exemplo de três segmentos dentro da amostra, de 252 observações, e seus respectivos segmentos fora da amostra, compostos por sete observações, escolhidos aleatoriamente.

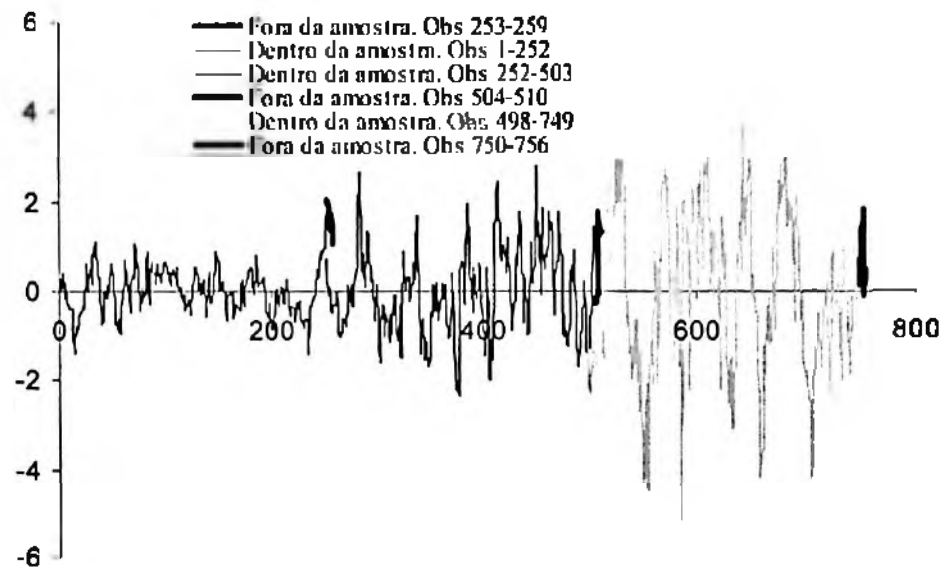


Gráfico 3.1 Segmentos dentro e fora da amostra para BBDC4 como ativo-alvo.

Ressalte-se que como os dados históricos escolhidos para a análise possuem 756 observações, para cada ação fixada como ativo-alvo, são gerados 498 segmentos dentro da amostra. O primeiro compreende as observações 1 a 252, e o último, 498 a 749. Este é o mesmo número possível de segmentos fora da amostra, sendo o primeiro verificado entre as observações 253 e 259, e o último, entre as observações 750 e 756.

3.3 Aplicação

3.3.1 Primeiro caso proposto

Inicialmente, o ativo-alvo selecionado para tal estudo será a ação BBDC4 (Bradesco Preferencial), e o ativo sintético correspondente será definido através da regressão Stepwise (capítulo 2), dada a extensa possibilidade de combinações existentes⁶. A dimensão empregada será de três variáveis explicativas (ativos constituintes).

A primeira combinação obtida de ativos constituintes, selecionando-se a ação BBDC4 como ativo-alvo, no período compreendido entre as observações 1 e 252, foi a seguinte: ITAU4, CPLE6 e ITSA4.

⁶ O Índice Bovespa é composto por mais de 50 ações.

A tabela abaixo apresenta a aplicação da Regressão *Stepwise*, e o teste *Dickey-Fuller* de estacionariedade dos desvios de equilíbrio, que indica a presença de relação de Cointegração⁷ entre BBDC4 e ITAU4, CPLE6 e ITSA4.

Tabela 3.2 - Regressão Stepwise aplicada ao ativo-alvo BBDC4 no período entre as observações 1 e 252

Ativo-alvo	constante	ITAU4	CPLE6	ITSA4	Variância	Redução	Dickey-Fuller
BBDC4	20.390				872.602		-0.960
	4.335	0.625			135.343	84.49%	-2.747
	-0.581	0.621	0.489		68.941	92.10%	-4.059
	-2.055	0.192	0.614	3.698	58.656	93.28%	-4.327

Conforme explicado no capítulo 2, o primeiro ativo constituinte selecionado é aquele que fornece a maior redução na variância do ativo-alvo. O segundo é o que proporciona maior queda na variância do resíduo da regressão MMQ entre o ativo-alvo e o primeiro ativo constituinte, e assim sucessivamente. Destaque-se que a inclusão de ativos constituintes através dessa metodologia influi diretamente na propriedade de reversão à média dos desvios haja vista que o valor do teste *Dickey-Fuller* decresce com a inserção de novos constituintes.

As demais combinações encontradas para os períodos de 252 dias subsequentes encontram-se no apêndice 1. Uma vez encontradas tais combinações, tendo como ativo-alvo a ação BBDC4, passa-se a utilizar o modelo de arbitragem estatística, que buscará explorar a previsibilidade do desvio de equilíbrio. O desempenho deste será avaliado pela metodologia de *backtesting*, descrito no item anterior.

O gráfico abaixo ilustra o desvio de equilíbrio, da primeira combinação para BBDC4 como ativo-alvo ($m_t = AT_{BBDC4} - (-2.055 + 0.192C_{ITAU4} + 0.614C_{CPLE6} + 3.698C_{ITSA4})$):

⁷ De acordo com os valores críticos dispostos na Tabela 2.1 é possível rejeitar a hipótese de não-estacionariedade dos desvios de equilíbrio, com nível de significância de 5%.

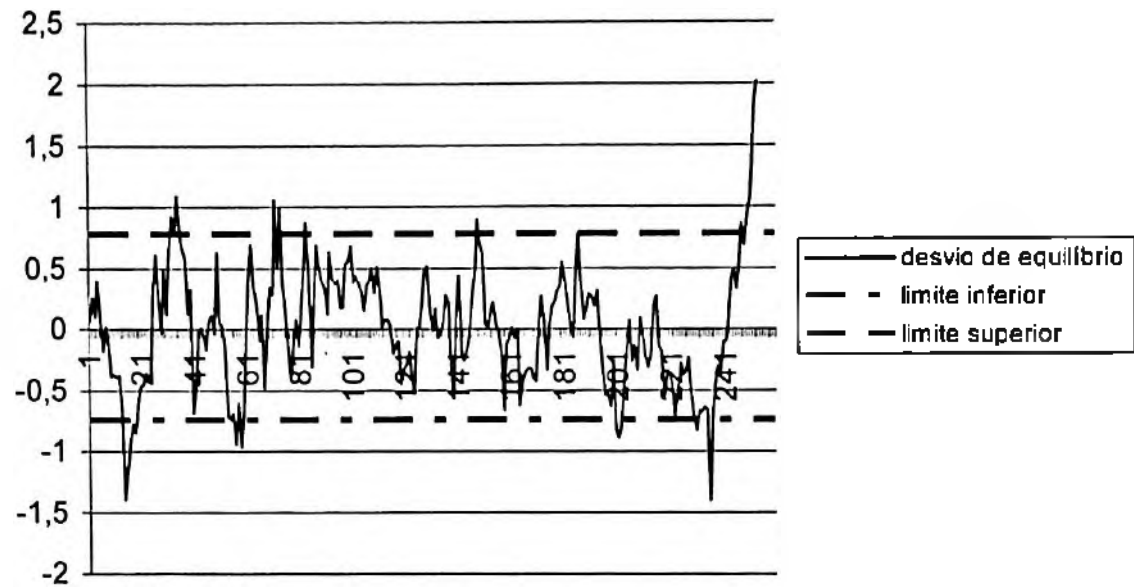


Gráfico 3.2 - Desvios de equilíbrio (m)

Como a situação $m_{t+1} > m_{t-251,t}^{H,1-0,05}$ ($2.010 > 0.782$), em que $t = 252$, foi verificada, há a configuração de um ponto de entrada no modelo de arbitragem estatística, na observação 253. Neste caso, deve-se vender o ativo-alvo e comprar o ativo sintético, já que há grande possibilidade de o desvio de equilíbrio de reverter para a média⁸.

Os desvios de equilíbrio para os pontos fora da amostra, com exceção da observação 253, ilustrada anteriormente, seguem abaixo:

⁸ Teste *Dickey Fuller* que aponta valor inferior ao valor crítico de Phillip Ouliaris (-4.110), o qual rejeita a hipótese de não-estacionariedade dos desvios de equilíbrio, com nível de significância de 5%.

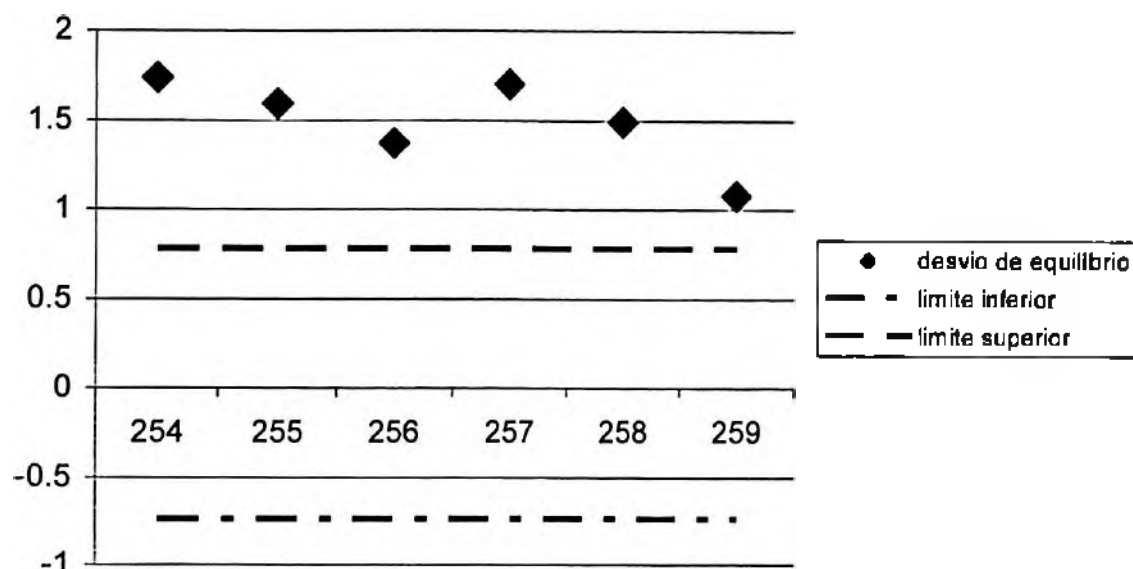


Gráfico 3.3 - Desvios de equilíbrio (m,) para dados fora da amostra

Os resultados obtidos em tal operação encontram-se na tabela a seguir:

Tabela 3.3 - Resultados aferidos pelo modelo de arbitragem estatística para a ação BBDC4 como ativo-alvo. Parâmetros calculados no período entre as observações 1 e 252. Ponto de entrada na observação 253.

	Ponto de entrada	D + 1	D + 2	D + 3	D + 4	D + 5	D + 6
Observação	253	254	255	256	257	258	259
Desvio	2.010	1.736	1.595	1.370	1.703	1.490	1.076
Resultado n		0.857%					
			1.402%				
				2.271%			
					0.984%		
						1.806%	
							3.106%

Através da análise da tabela acima, constata-se que a entrada na observação 253 gerou ganhos⁹ para as seis observações subsequentes, evidenciando reversão à média do desvio de equilíbrio.

A etapa seguinte deste trabalho é analisar os resultados para cada período de 252 observações, dentro do universo das 756 observações selecionadas, conforme descrito no item 3.2. Antes disso, porém, fora o critério de entrada nas operações, mencionado no item 3.1, serão criadas regras adicionais, tanto de entrada quanto de saída, com o intuito de

⁹ Os resultados apresentados aqui e posteriormente encontram-se deduzidos de taxas operacionais (corretagem e emolumentos), estimadas em 0.10% por operação (0.20% ida-e-volta).

mostrar como os resultados se comportam diante das variações de tais regras. O desempenho do modelo de arbitragem estatística será observado também em função do modelo de regressão linear utilizado para se calcularem os parâmetros da relação de Cointegração entre ativo-alvo e ativo sintético, aqui representados pelos coeficientes dos ativos constituintes e o termo constante. Os modelos de regressão a serem empregados serão o Método dos Mínimos Quadrados – MMQ e o Filtro de Kalman.

3.3.2 Regras de entrada e saída de operações

1. Regressão (Reg): Define o modelo de regressão linear utilizado. Admite três variações, quais sejam Reg 1, 2 e 3.

Reg 1: Os coeficientes dos ativos constituintes são fixos, obtidos através do método MMQ. Os desvios de equilíbrio são calculados também por esse método.

Reg 2: Os coeficientes dos ativos constituintes variam ao longo do tempo e foram obtidos através do método recursivo do Filtro de Kalman. Os limites superior e inferior para a entrada nas posições levam em conta os desvios obtidos pelo método MMQ.

Reg 3: Os coeficientes dos ativos constituintes variam ao longo do tempo e foram obtidos através do método recursivo do Filtro de Kalman, assim como os desvios de equilíbrio. Lembre-se que tais desvios são representados pelos erros de previsão do Filtro de Kalman, definidos no capítulo 2.

2. PO: É o valor crítico sugerido por Phillips Ouliaris (1990) para o teste DF de estacionariedade dos desvios de equilíbrio da regressão MMQ, admitido para a entrada em posições. Quanto mais negativo tal número, mais cointegrado é o ativo-alvo com o ativo sintético e, portanto, maior a propriedade de reversão à média dos desvios. Os valores críticos de tal teste, dispostos na tabela 2.1, se explicam em função do número de regressores e da presença ou não de constante e tendência.

3. Volatilidade de entrada (Ve): Admite variações de 0 a 2. Define o quanto é adicionado, em termos de desvios-padrões do desvio de equilíbrio, aos limites superiores $m_{t-251, \alpha}^{H, 1-\alpha}$ (percentil de

$1-\alpha$ da série do desvio de equilíbrio) ou inferiores $m_{t-251,t}^{L,\alpha}$ (percentil de α da série do desvio de equilíbrio), que definem a entrada nas posições. Recorde-se que α foi definido como 5%. Exemplo. Se Vol. de entrada for 0, os limites superiores ou inferiores continuarão sendo o percentil de 95% ou 5% do desvio de equilíbrio. Se tal variável for 0.5, ao percentil de 95% adiciona-se o equivalente a 0.5 desvio-padrão do desvio de equilíbrio, o que aumentaria o limite superior de entrada. Por outro lado, ao percentil de 5.0%, subtrai-se 0.5 desvio-padrão do desvio de equilíbrio, diminuindo-se o limite inferior de entrada nas posições.

4. Volatilidade de saída (Vs): Admite variações de 1 a 2. Define o quanto é subtraído, em termos de desvios-padrões, do ponto de entrada m_{t+1} , quando $m_{t+1} > m_{t-251,t}^{H,1-\alpha}$, ou o quanto é adicionado ao ponto de entrada m_{t+1} , quando $m_{t+1} < m_{t-251,t}^{L,\alpha}$, para se desfazer das posições com ganhos.

5. Permanência máxima (Pm): Admite seis variações, de 1 a 6. Uma vez que uma posição é aberta, por exemplo, quando $m_{t+1} > m_{t-251,t}^{H,1-\alpha} + Ve$ (desvio de equilíbrio maior que o limite superior – vende ativo-alvo e compra ativo sintético), deseja-se sair da posição, auferindo-se ganhos, se m_{t+1+h} ($h = 1,2,3,4,5$ ou 6) for menor que m_{t+1} . Neste caso, a posição seria desfeita se $m_{t+1+h} < m_{t+1} - Vs$. Se $Pm = 6$, significa que há no máximo seis dias úteis, posteriores à entrada na posição, nos quais a mesma poderia ser desfeita. Se, no primeiro dia útil à entrada, ou seja, em $h=1$, for válida a relação $m_{t+1+1} < m_{t+1} - Vs$, a posição é desfeita, e a permanência da mesma na carteira foi de um dia útil. Entretanto, se em $h=6$ não se verificar a relação $m_{t+1+6} < m_{t+1} - Vs$, a posição é desfeita, independentemente do resultado.

3.3.3 Construção de um modelo de arbitragem estatística

Com base nas regras descritas acima, foi elaborado um modelo de arbitragem estatística para BBDC4 como ativo-alvo. Os valores atribuídos às cinco regras principais encontram-se na primeira linha da tabela abaixo.

Tabela 3.4 - Resultados por operação do modelo de arbitragem estatística com BBDC4 como ativo-alvo. Cálculo dos parâmetros da regressão linear através do Método dos Mínimos Múltiplos Quadrados.

Reg = 1 / PO = -4.110 / Vol de entrada = 0.20 / Vol de saída = 1.00 / Permanência máxima = 6															
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	
Entrada	DF	Desvio	D+1	D+2	D+3	D+4	D+5	D+6	Ativo-alvo	Hgh/Low	Vol	Desvio	saída	Perim	Resultado
253	-4.327	2.010	1.736	1.595	1.370	1.703	1.490	1.076	25.89	H	0.427	1.370	3	2.271%	
279	-5.329	0.793	1.125	1.553	1.365	1.555	1.566	1.507	27.14	H	0.419	1.507	6	-2.833%	
284	-4.636	1.341	1.292	1.512	1.975	1.886	1.461	1.770	29.21	H	0.451	1.770	6	-1.668%	
302	-5.312	-1.248	-1.737	-1.423	-1.200	-1.190	-1.632	-1.696	29.09	L	0.478	-1.696	6	-1.739%	
311	-6.340	1.207	1.438	1.184	0.618	0.956	1.482	2.313	28.98	H	0.467	0.618	3	1.834%	
317	-5.613	1.698	2.239	2.660	2.020	2.277	2.229	3.505	28.86	H	0.480	3.505	6	-6.464%	
322	-4.789	1.411	2.586	3.045	2.640	3.073	3.663	3.839	32.29	H	0.527	3.839	6	-7.720%	
327	-4.783	1.907	1.856	1.969	2.303	2.648	1.987	1.809	36.63	H	0.564	1.809	6	0.069%	
333	-5.446	1.200	2.082	1.877	2.231	3.016	3.776	3.118	35.88	H	0.593	3.118	6	-5.548%	
338	-4.465	3.450	2.737	2.311	1.731	2.104	2.319	1.922	39.56	H	0.639	2.737	1	1.603%	
353	-5.407	1.887	1.989	1.928	1.157	1.523	0.676	0.592	37.78	H	0.713	1.157	3	1.731%	
370	-5.504	1.368	0.284	0.343	0.425	-0.135	-0.930	-0.925	36.27	H	0.645	0.284	1	2.788%	
385	-5.726	1.839	2.103	1.445	1.681	0.934	0.799	0.360	40.03	H	0.641	0.934	4	2.060%	
402	-5.849	-1.396	-0.064	1.427	0.647	-0.385	-0.212	0.791	37.07	L	0.714	-0.064	1	3.392%	
410	-6.072	1.537	2.165	2.242	2.257	2.667	2.645	2.523	38.62	H	0.728	2.523	6	-2.753%	
415	-5.185	2.553	2.439	2.496	1.501	1.707	2.137	1.895	38.74	H	0.787	1.501	3	2.516%	
449	-5.846	1.651	3.538	3.528	2.399	3.709	2.069	1.779	41.77	H	0.849	1.779	6	-0.506%	
476	-5.795	-1.849	-1.417	-2.042	-2.168	-2.344	-1.109	-0.568	47.75	L	0.949	-0.568	6	2.484%	
489	-5.729	-2.177	-1.325	-1.352	-1.320	-0.898	-0.793	-0.197	53.7	L	0.955	-0.898	4	2.182%	
522	-6.218	1.981	2.145	2.990	1.520	1.666	0.699	1.632	65.31	H	0.977	0.699	5	1.762%	
530	-6.045	3.558	4.106	2.021	2.667	2.555	2.126	1.051	70.91	H	1.017	2.021	2	1.967%	
546	-6.259	-3.009	-4.021	-3.728	-5.619	-5.558	-6.009	-5.397	66.98	L	1.046	-5.397	6	-3.766%	
551	-4.921	-4.850	-4.177	-5.454	-5.502	-4.653	-4.345	-4.480	69.51	L	1.185	-4.480	6	0.333%	
556	-4.563	-3.252	-3.343	-3.203	-3.193	-0.770	-2.386	-3.321	71.33	L	1.325	-0.770	4	3.280%	
563	-4.645	-3.399	-2.855	-2.276	-3.468	-1.873	0.334	-1.523	74.41	L	1.388	-1.873	4	1.851%	
573	-4.679	-3.947	-3.372	-3.814	-4.719	-4.388	-6.842	-6.806	79.25	L	1.441	-6.806	6	-3.808%	
578	-5.622	-3.650	-3.150	-2.304	1.748	2.543	0.090	6.660	78.37	L	1.432	1.748	3	6.688%	
584	-5.802	6.941	5.832	2.734	3.176	5.456	2.879	3.112	86.75	H	1.481	2.734	2	4.650%	
601	-5.487	-2.822	-1.578	-3.310	-2.114	-1.913	-2.585	-0.377	82.89	L	1.459	-0.377	6	2.750%	
606	-5.698	-3.561	-0.757	-1.451	-2.407	-2.255	-4.688	-5.584	78.11	L	1.474	-0.757	1	3.389%	
612	-5.684	-3.034	-2.517	-2.892	-2.513	-2.795	-1.758	-2.199	76.75	L	1.481	-2.199	6	0.887%	
628	-5.685	-3.303	-5.530	-4.148	-3.563	-4.224	-3.356	-5.344	76.94	L	1.590	-5.344	6	-2.853%	
633	-4.855	-3.553	-5.484	-4.388	-3.199	-2.260	-1.458	-1.886	79.35	L	1.673	-1.458	5	2.441%	
643	-5.600	4.354	3.891	3.254	2.268	1.667	2.080	3.455	71.55	H	1.699	2.268	3	2.716%	
658	-5.832	-3.045	-5.024	-4.543	-3.973	-2.655	-2.177	-2.258	58.63	L	1.654	-2.258	6	1.141%	
699	-5.825	-3.006	-3.767	-4.182	-3.926	-4.049	-4.176	-3.500	68.05	L	1.671	-3.500	6	-0.926%	
704	-5.401	-4.308	-4.291	-6.019	-5.889	-4.885	-3.277	-4.117	70.39	L	1.743	-4.117	6	0.071%	
711	-5.261	-3.963	-2.816	-2.362	-1.865	-2.137	-3.288	-3.160	65.76	L	1.851	-1.865	3	2.990%	

A descrição dos campos da tabela está disposta a seguir:

Coluna 1 - Entrada: Designa o ponto da amostra em que houve a entrada em uma posição. A amostra contempla preços de fechamento de ações que compõem o índice Bovespa, do dia 15 de outubro de 2003 ao dia 31 de outubro de 2006, perfazendo 756 observações. A observação 253, por exemplo, corresponderia ao dia 22 de outubro de 2004.

Coluna 2 - DF: teste *Dickey-Fuller* para o desvio de equilíbrio de cada combinação ativo sintético vs ativo-alvo. Se o DF obtido for maior do que o valor crítico estabelecido por Philips e Ouliaris (1990) (fixado um intervalo de confiança), as operações não podem ser abertas. Na simulação ilustrada na tabela 1, foi utilizado o valor crítico de -4.110 (vide tabela 2.1), que rejeita a hipótese de não estacionariedade dos resíduos da regressão linear, com

nível de significância de 5%. Tal valor é aplicado para regressões com três variáveis explicativas, além da presença de constante, que é o caso em questão.

Coluna 3 - Desvio: É o valor do desvio de equilíbrio do ponto de entrada, ou seja, é m_{t+1} se $m_{t+1} > m_{t-251,t}^{H,1-\alpha} + Ve$ ou se $m_{t+1} < m_{t-251,t}^{L,\alpha} - Ve$.

Colunas 4 a 9 - “D+1, D+2, D+3, D+4, D+5, D+6”: É o valor do desvio de equilíbrio nos seis dias subsequentes à entrada das posições. Tal valor é definido como m_{t+1+h} , sendo $h = 1, \dots, 6$.

Coluna 10 – Ativo-alvo. É o preço do ativo-alvo no ponto de entrada.

Coluna 11 – *High/Low*. Admite H, para *High* e L, para *Low*. Indica se a posição iniciada foi em função do desvio de equilíbrio ter passado do limite superior (H), ou passado do limite inferior (L).

Coluna 12 – Volatilidade do desvio (Vol. Desvio). É o valor de um desvio-padrão do desvio de equilíbrio obtido através do método MMQ ou Filtro de Kalman, definido através da regra Reg. A fórmula do desvio-padrão segue abaixo:

$$DP = \sqrt{\left(\sum_{t=1}^n (m_t - \bar{m})^2 \right) / (N - 1)}, \quad (3.1)$$

em que m_t é o desvio de equilíbrio no instante t , \bar{m} é a média da série de desvios de equilíbrio e N é o tamanho da série.

Coluna 13 – Saída. É o valor do desvio de equilíbrio no dia de saída da posição. Tomando como exemplo a entrada na observação 253 da tabela 3.4, a saída pode ocorrer até o dia 6, dado que Permanência máxima = 6. No entanto, em $h=3$, terceiro dia após a entrada na posição, a condição $m_{t+1+h} < m_{t+1} - Vs$ já foi verificada: o valor de saída é 1.370, menor do que 2.010 menos um desvio-padrão do resíduo (0.427). Portanto, a posição permaneceu três dias úteis na carteira.

Coluna 14 – Permanência (perm). Pode variar de 1 a 6. É a duração em dias de posições que foram abertas. Vide o exemplo descrito acima.

Coluna 15 – Resultado. É o resultado obtido em cada operação, o qual vem definido pela fórmula abaixo:

$$RES = (-1)^{\text{Sinal}} \left(\frac{m_{t+1+h} - m_{t+1}}{AT_{t+1}} \right) - c, \quad (3.2)$$

em que m_{t+1} é o valor do desvio de equilíbrio no ponto de entrada, m_{t+1+h} é o valor do desvio de equilíbrio no ponto de saída, sendo $h = \text{Permanência}$. AT_{t+1} é o valor do ativo-alvo na entrada. Sinal = 0, se a posição iniciada tiver sido em função do desvio de equilíbrio ter passado o limite inferior (L), e Sinal = 1, se o desvio de equilíbrio tiver passado o limite superior (H). Note-se que c designa os custos da operação (corretagem mais emolumentos de bolsa), definidos em 0.20%.

A tabela 3.5 traz as medidas de desempenho do modelo de arbitragem:

Tabela 3.5 - Medidas de desempenho do modelo de arbitragem estatística, com BBDC4 como ativo-alvo.

Regra Reg=1

Reg = 1 / PO = -4.110 / Vol de entrada = 0.20 / Vol de saída = 1.00 / Perm. máxima = 6	
retorno médio por operação	0.507%
permanência média	4.45
operações	38
dias positivos	68.42%
dias negativos	31.58%
Sharpe	1.211
perda máxima	-7.72%
maior ganho	6.69%

1. Retorno médio por operação. É a média aritmética dos resultados obtidos na coluna Resultado da tabela 3.4, ou seja, o ganho médio por operação.

2. Permanência média (pmed). É o tempo médio de permanência, em dias, das posições feitas, calculado pela média aritmética da coluna 13 da tabela 3.4, ou seja, a permanência média por operação na carteira.

3. Operações (n). É o número de operações realizadas.
4. Dias positivos e negativos. Fornecem a porcentagem de dias positivos e negativos, respectivamente.
5. *Sharpe*. Indica a relação entre retorno das estratégias vs risco incorrido. Pode ser entendida também como uma medida de retorno (anualizada) por unidade de risco (anualizada), esta última expressa pelo desvio-padrão dos resultados das operações feitas. É definido pela fórmula abaixo:

$$Sharpe = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{z=1}^n \frac{RES_z}{perm} \right) * 252 - r_f}{\left(\sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{z=1}^n \left(\frac{RES_z}{perm} - \frac{1}{n} \sum_{z=1}^n \frac{RES_z}{perm} \right) \right)^2} \right) \sqrt{252}} \quad ^{10}, \quad (3.3)$$

em que n é o número de operações realizadas e perm é o tempo de permanência (em dias) de cada operação realizada.

6. Perda máxima. É a pior perda entre as operações realizadas.
7. Maior ganho. É o maior ganho entre as operações realizadas.

Observe-se, pelo exposto acima, que a combinação das cinco regras de entrada e saída (Reg, PO, Vol. de entrada, Vol. de saída e Permanência máxima) condiciona o desempenho do modelo de arbitragem. Assim, variando alguma dessas regras, espera-se que os resultados do modelo se alterem.

Na primeira simulação, o valor atribuído às referidas regras foi: Reg = 1 (coeficientes e desvios de equilíbrio, obtidos pelo método MMQ); PO = -4.110 (valor crítico de Phillips e

¹⁰ O índice *Sharpe* mede, na verdade, o excesso de retorno do portfólio em relação ao ativo livre de risco, r_f , por unidade de risco. No presente caso, r_f foi considerado zero, devido à dificuldade de se estabelecer um nível fixo para este ativo no Brasil e com o intuito de uniformizar tal método para eventuais aplicações em mercados acionários de outros países.

Ouliaris (1990), que rejeita a hipótese dos resíduos possuírem raiz unitária com nível de significância de 5%); Vol. de entrada (Ve) = 0.20 (ao limite superior de entrada, definido como $m_{t-251}^{H,1-\alpha}$, sendo $\alpha = 5\%$, foi adicionado 0.20 desvio-padrão do desvio de equilíbrio, e, ao limite inferior, $m_{t-251}^{L,\alpha}$, foi subtraída a mesma magnitude); Vol. de saída (Vs) = 1.00 (valor, em termos de desvio-padrão do desvio de equilíbrio, subtraído ou adicionado ao resíduo de entrada m_{t+1} , para a posição ser desfeita com ganhos). Permanência máxima (Pm) = 6 (período máximo de seis dias úteis após a montagem da posição para a mesma ser desfeita, com ganhos ou perdas).

O interessante do modelo proposto é justamente verificar como o mesmo se comporta quando algumas de suas regras principais são alteradas, ou até mesmo quando todas se modificam.

Até o momento, os parâmetros da regressão linear foram calculados pelo Método dos Mínimos Quadrados. Outro método de estimativa dos coeficientes, que será abordado neste trabalho, é o cálculo através do Filtro de Kalman.

A fim de ilustrar o mecanismo de funcionamento deste último método, tome-se como exemplo a combinação encontrada através da Regressão *Stepwise* para o período dentro da amostra, que compreende as observações 27 e 278, dispostas na tabela que se segue:

Tabela 3.6 – Ativos constituintes encontrados para o ativo-alvo BBDC4, referente às observações 27 a 278

Período	Ativo-Alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF
27 278	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-5.329

Conforme mencionado no item 2.3.3, o cálculo dos coeficientes da regressão em que BBDC4 é a variável resposta e ITAU4, GOAU4 e BBAS3 são as variáveis explicativas, dá-se através das seguintes equações:

Equação de Observação:

$$AT_{BBDC4,t} = \alpha_t + \beta_{1,t} C_{ITAU4,t} + \beta_{2,t} C_{GOAU4,t} + \beta_{3,t} C_{BBAS3,t} + \varepsilon_t \quad (3.4)$$

em que AT_t é o preço do ativo-alvo, α_t é a constante, $\beta_{i,t}$ é a sensibilidade ou o coeficiente de cada ativo constituinte, $C_{i,t}$ são os preços dos ativos constituintes, e ε_t é o ruído de observação.

Equação do Sistema:

$$\begin{aligned}\beta_{1,t} &= \beta_{1,t-1} + \eta_{1,t}, \\ \beta_{2,t} &= \beta_{2,t-1} + \eta_{2,t}, \\ \beta_{3,t} &= \beta_{3,t-1} + \eta_{3,t}, \\ \alpha_t &= \alpha_{t-1} + \eta_{\alpha,t}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Em que $\eta_{i,t}$ são os ruídos do sistema.

Através do método de máxima verossimilhança¹¹ para se estimar os parâmetros da regressão, obteve-se a seguinte relação:

$$AT_{BBDC4} = 3.744_{278} + 0.453_{278} C_{ITAU4} + 0.067_{278} C_{GOAU4} + 0.209_{278} C_{BBAS3},\tag{3.6}$$

em que os estados (coeficientes) da equação acima se referem à última observação do período dentro da amostra (observação 278).

De maneira similar ao exemplo apresentado no gráfico 3.2, o gráfico abaixo ilustra o desvio de equilíbrio obtido com o Filtro de Kalman, no período dentro da amostra (observações 27 a 278) e na primeira observação fora da amostra (279), que define a abertura ou não de posições.

¹¹ O método de máxima verossimilhança empregado utiliza o procedimento numérico de Marquardt, disponibilizado no software Eviews.

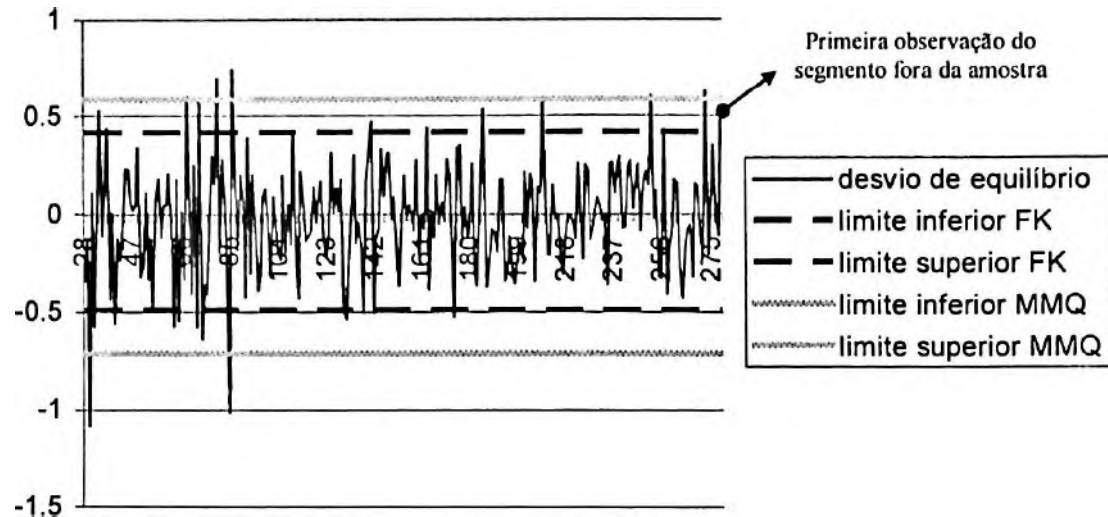


Gráfico 3.4 - Desvios de equilíbrio calculados através do Filtro de Kalman.

Conforme visto no capítulo 2, o Filtro de Kalman é um método que busca estimar os estados num período t , em função dos estados estimados em $t-1$. Esse mecanismo é utilizado, portanto, para definir o desvio de equilíbrio m_{t+1} , referente à primeira observação fora da amostra, evidenciado na representação acima. O valor de m_{t+1} , obtido neste ponto, foi encontrado a partir da seguinte relação:

$$m_{279} = AT_{BBDC'4} - (3.760_{279} + 0.450_{279} C_{ITAU4} + 0.065_{279} C_{GOAU4} + 0.210_{279} C_{BBAS3}) \quad (3.7)$$

Aqui, houve a configuração de abertura de posição, visto que $m_{279} > m_{27,278}^{H,1-0.05}$, em que $m_{27,278}^{H,1-0.05}$ é o limite superior do desvio de equilíbrio, obtido pelo Filtro de Kalman. Entretanto, em função do desvio de equilíbrio não ser maior do que o limite superior obtido pelo MMQ neste ponto, só há abertura de posição na condição em que $\text{Reg} = 3$.

Os desvios de equilíbrio para os pontos fora da amostra, com exceção da observação 279, ilustrada acima, seguem abaixo:

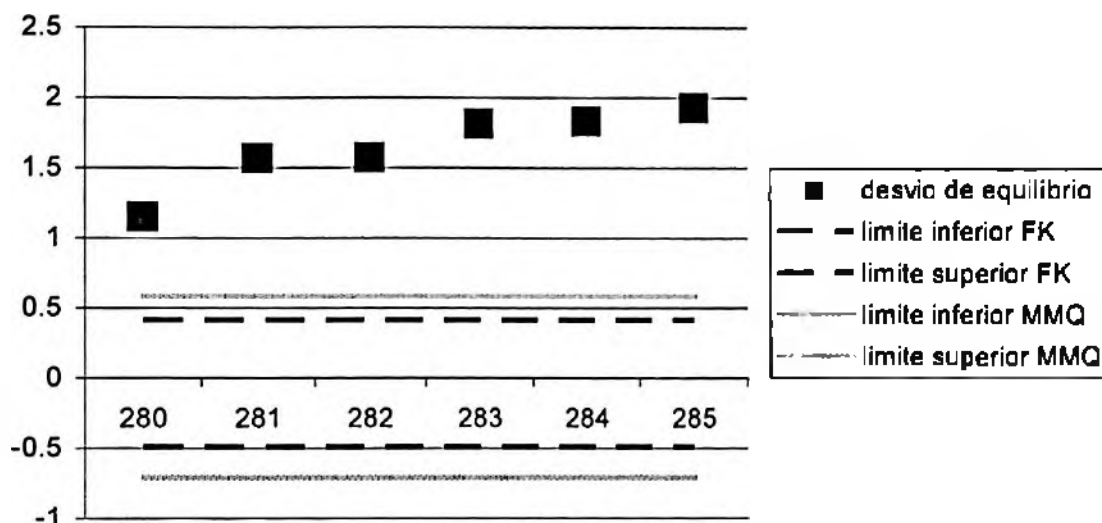


Gráfico 3.5 - Desvios de equilíbrio calculados através do Filtro de Kalman, para dados fora da amostra

Diferentemente do exemplo do gráfico 3.3, em que houve reversão do desvio para a média, em todos os seis dias subsequentes à entrada, gerando resultados positivos na operação, no caso ilustrado pelo gráfico acima não houve convergência, ou seja, desvio que aumenta com o passar do tempo, mas sim retorno negativo em tal operação.

As tabelas abaixo trazem, de forma similar à tabela 3.5, o desempenho consolidado do modelo de arbitragem estatística, em que $PO = -4.110$, Vol. de Entrada = 0.20, Vol. de saída = 1.00 e Permanência máxima = 6. Na primeira, Reg = 2, na segunda, Reg = 3.

Tabela 3.7 - Medidas de desempenho do modelo de arbitragem estatística, com BBDC4 como ativo-alvo.

Regra Reg=2

Reg = 2 / PO = -4.110 / Vol de entrada = 0.20 / Vol de saída = 1.00 / Perm. máxima = 6	
retorno médio por operação	1.803%
permanência média	3.30
operações	10
dias positivos	80.00%
dias negativos	20.00%
Sharpe	4.344
perda máxima	-5.65%
maior ganho	7.55%

Tabela 3.8 - Medidas de desempenho do modelo de arbitragem estatística, com BBDC4 como ativo-alvo.

Regra Reg=3

Reg = 3 / PO = -4.110 / Vol de entrada = 0.20 / Vol de saída = 1.00 / Perm. máxima = 6	
retorno médio por operação	0.432%
permanência média	3.42
operações	45
dias positivos	73.33%
dias negativos	26.67%
Sharpe	1.347
perda máxima	-7.78%
maior ganho	7.55%

Analisando-se a tabela 3.7, percebe-se que, em termos de retorno médio por operação, tal modelo proporcionou resultados superiores ao modelo exposto na tabela 3.5: retorno médio por operação = 1.803% > 0.507%. Já o modelo apresentado na tabela 3.8 foi o que obteve os piores resultados em termos de retorno médio em relação aos demais (retorno médio = 0.432%). Desta análise, infere-se que, mantendo as regras PO, Vol. de entrada, Vol. de saída e Permanência máxima nos níveis definidos na tabela 3.5, o caso onde Reg = 2, em que os parâmetros da regressão linear variam ao longo do tempo, conforme o método recursivo do Filtro de Kalman, e os desvios de equilíbrio são obtidos pelo MMQ, é o que fornece os melhores resultados, no que se refere ao retorno médio por operação. Outra medida de desempenho, que ratifica a superioridade de tal modelo é o *Sharpe*, que avalia o risco existente para gerar o ganho médio com as operações.

Como existem inúmeras combinações possíveis entre as regras, o que permite a obtenção de diferentes resultados, faz-se necessário aplicar um método de otimização, a fim de identificar as combinações que proporcionam os melhores resultados por modelo de arbitragem estatística (Reg = 1, 2 ou 3), e compará-los entre si, para analisar, a princípio, se existe algum superior.

No método de otimização sugerido, admitir-se-ão variações nos parâmetros Vol. de entrada, Vol. de saída e Permanência máxima. A variável PO será fixada em -4.110 para todas as simulações. As variações em Vol. de entrada serão de 0 a 2, e em Vol. de saída, de 1 a 2, ambas em intervalos de 0.10. A Permanência máxima terá variações de 1 a 6. O método proposto conta ainda com uma restrição, que é estabelecer um mínimo de dez operações para cada otimização feita por modelo, ou seja, havendo menos de dez operações, tal modelo

estará descartado. Os resultados serão analisados (Reg = 1, 2 ou 3) em termos de retorno médio por operação e *Sharpe*.

A análise correspondente ao retorno médio por operação segue abaixo:

Tabela 3.9 - Retorno médio por operação obtido por otimização, variando-se a regra Reg. BBDC4 como ativo-alvo.

Ativo-alvo	Reg	Vol Entrada	Vol Saída	Permanência max.	Retorno Médio	Operações
BBDC4	1	1.4	1.1	5	1.259%	19
BBDC4	2	0.2	1.2	4	2.416%	10
BBDC4	3	1.4	1.9	4	2.686%	13

Verificando-se os resultados obtidos com a otimização, apresentados na tabela acima, observa-se que o caso onde Reg = 3 foi o que proporcionou o melhor resultado por operação, já que apresentou um ganho médio de 2.686%.

O desempenho em função do *Sharpe* pode ser visto no esquema abaixo:

Tabela 3.10 - *Sharpe* obtido por otimização, variando-se a regra Reg. BBDC4 como ativo-alvo.

Ativo-alvo	Modelo	Vol Entrada	Vol Saída	Tempo max.	Sharpe	Operações
BBDC4	1	1.7	1	3	9.102	12
BBDC4	2	0.1	1	2	9.801	13
BBDC4	3	1.9	1.4	3	12.301	10

Entre os modelos observados, o modelo onde Reg = 3 foi novamente o que proporcionou os melhores resultados, em decorrência da otimização das combinações de Vol. de entrada, Vol. de saída e Permanência máxima. Desta maneira, a otimização feita com BBDC4 como ativo-alvo indicou que o caso em que os parâmetros da relação de Cointegração podem variar ao longo do tempo, segundo o método recursivo do Filtro de Kalman, e que os desvios de equilíbrio são representados pelo erro de previsão de tal método, é superior, em termos de retorno médio por operação e de *Sharpe*, em relação à situação em que os parâmetros são estáticos, e os desvios são os obtidos através de regressão linear, utilizando-se o método dos mínimos quadrados.

Diante dos resultados obtidos com BBDC4 como ativo-alvo, torna-se interessante aplicar tal metodologia para demais ações, escolhidas aleatoriamente (todas fazem parte do Ibovespa e

estão entre as ações selecionadas, conforme apresentado na tabela 3.1), com o intuito de verificar se o desempenho superior do Filtro de Kalman é também percebido com outros ativos. Nesta simulação, as ações escolhidas foram as seguintes: AMBV4 (Ambev Preferencial); ARCZ6 (Aracruz Preferencial); BRKM5 (Braskem Preferencial); CCRO3 (Concessão Rodoviária Ordinária); CMIG4 (Cemig Preferencial); GGBR4 (Gerdau Preferencial); NETC4 (Net Preferencial); SDIA4 (Sadia Preferencial); USIM5 (Usiminas Preferencial).

Os resultados obtidos, no que diz respeito ao retorno médio por operação e de *Sharpe* seguem abaixo, de forma discriminada:

Tabela 3.11 - Retorno médio por operação obtido por otimização, com base na variação da regra Reg, em que se analisam diversos ativos.

Ativo-alvo	Reg	Vol Entrada	Vol Salda	Permanência max	Retorno Médio	Operações
AMBV4	1	1.2	1	6	1.367%	10
AMBV4	2	-	-	-	-	-
AMBV4	3	0.8	2	4	0.556%	12
ARCZ6	1	0.8	1.2	6	2.592%	14
ARCZ6	2	-	-	-	-	-
ARCZ6	3	0.3	1.1	6	1.159%	22
BRKM5	1	0.2	1	2	0.708%	28
BRKM5	2	-	-	-	-	-
BRKM5	3	0.4	1.8	2	0.349%	11
CCRO3	1	1	1	5	1.508%	14
CCRO3	2	-	-	-	-	-
CCRO3	3	0.8	1.7	6	2.887%	21
CMIG4	1	1.2	1.7	6	2.017%	12
CMIG4	2	-	-	-	-	-
CMIG4	3	0.4	1	6	0.286%	20
GGBR4	1	0.4	2	6	1.936%	32
GGBR4	2	-	-	-	-	-
GGBR4	3	0.5	1.5	5	1.405%	16
NETC4	1	0.1	1.5	6	2.475%	41
NETC4	2	-	-	-	-	-
NETC4	3	0.1	1.7	6	3.105%	28
SDIA4	1	0.8	1	6	2.964%	15
SDIA4	2	-	-	-	-	-
SDIA4	3	0.9	1.9	6	3.244%	12
USIM5	1	1.5	1.2	6	2.978%	10
USIM5	2	-	-	-	-	-
USIM5	3	1.2	2	6	1.543%	10

Tabela 3.12 - *Sharpe* obtido por otimização, com base na variação da regra Reg, em que se analisam diversos ativos.

Ativo-alvo	Reg	Vol Entrada	Vol Salda	Tempo max.	Sharpe	Operações
AMBV4	1	1.2	1	6	5.689	10
AMBV4	2	-	-	-	-	-
AMBV4	3	0.8	2	4	2.842	12
ARCZ6	1	0.8	2	2	12.456	14
ARCZ6	2	-	-	-	-	-
ARCZ6	3	0.5	1	2	9.967	17
BRKM5	1	0.2	1	2	2.055	28
BRKM5	2	-	-	-	-	-
BRKM5	3	0.4	1	1	2.273	11
CCRO3	1	1	1	5	4.847	14
CCRO3	2	-	-	-	-	-
CCRO3	3	0.8	1.6	6	15.744	21
CMIG4	1	1.2	1.7	4	7.407	12
CMIG4	2	-	-	-	-	-
CMIG4	3	0.4	1	6	1.194	20
GGBR4	1	0.3	2	6	9.075	34
GGBR4	2	-	-	-	-	-
GGBR4	3	0.6	1.5	5	10.853	16
NETC4	1	0.9	1	1	7.965	15
NETC4	2	-	-	-	-	-
NETC4	3	0.1	1.7	6	8.209	28
SDIA4	1	0.9	1	3	9.085	12
SDIA4	2	-	-	-	-	-
SDIA4	3	0.9	1	6	21.380	12
USIM5	1	1.5	1	2	17.036	10
USIM5	2	-	-	-	-	-
USIM5	3	0	1.3	5	6.635	38

Examinando-se as tabelas acima, percebe-se que, no caso do retorno médio por operação, o modelo que proporciona os melhores resultados por ativo analisado é aquele onde $Reg = 1$ – das 10 ações selecionadas como ativo-alvo, tal modelo foi o melhor em 60% das ações. Quanto ao *Sharpe*, o caso onde $Reg = 3$ foi o que mais se destacou, já que em 60% das ações analisadas forneceu melhores resultados em termos de risco incorrido. O modelo de arbitragem onde $Reg = 2$ não gerou o número mínimo de dez operações entre os ativos-alvos selecionados, condição necessária no procedimento de otimização proposto, e, por isso, não pôde ser analisado quanto ao retorno médio ou *Sharpe*, em relação aos ativos analisados. A tabela que se segue indica o melhor modelo por ativo-alvo selecionado, em função da regra Reg.

Tabela 3.13 - Melhor modelo por Retorno Médio e por Sharpe, em função da regra Reg.

Ativo-alvo	Melhor Modelo / Retorno Médio	Melhor Modelo / Sharpe
AMBV4	1	1
ARCZ6	1	1
BBDC4	3	3
BRKM5	1	3
CCRO3	3	3
CMIG4	1	1
GGBR4	1	3
NETC4	3	3
SDIA4	3	3
USIM5	1	1

3.3.4 Alterações no grau de adaptabilidade dos estados estimados pelo Filtro de Kalman

Até agora, os parâmetros, como o ruído do sistema e o ruído da observação (vide capítulo 2), obtidos pelo Filtro de Kalman, foram através do método de máxima verossimilhança. Segundo Bentz (2004), a evolução, gradativa, dos coeficientes da regressão (termo constante e coeficientes dos ativos constituintes, os “betas”) se explica em função da razão Q/R, onde Q é a variância do ruído do sistema, e R, a variância do ruído da observação. Esta relação é conhecida em inglês como “signal to noise ratio” - SNR – e, quanto maior a for, a adaptação dos coeficientes, ao longo do tempo, é mais rápida, porém com o custo de um aumento do desvio padrão dos coeficientes (maior volatilidade). Por outro lado, quanto menor a razão descrita, os coeficientes evoluem com menos rapidez, o que significa dizer com mais suavidade, mas em compensação, há uma diminuição no desvio-padrão dos coeficientes.

A fim de ilustrar tal afirmação, tomem-se como exemplo a ação BBDC4 como ativo-alvo e o ativo sintético selecionado através da Regressão *Stepwise*, entre as observações 498-749 (vide apêndice 1). Neste período, as variáveis explicativas encontradas foram: UBBR11, BRTO4 e CCRO3.

Utilizando-se o Filtro de Kalman para BBDC4 como variável resposta e UBBR11, BRTO4 e CCRO3 como variáveis explicativas, as equações de Observação e do Sistema ficariam assim dispostas:

Equação de Observação:

$$AT_{BBDC4,t} = \alpha_t + \beta_{1,t}C_{UBBR11,t} + \beta_{2,t}C_{BRTO4,t} + \beta_{3,t}C_{CCRO3,t} + \varepsilon_t, \quad (3.8)$$

em que AT_t é o preço do ativo-alvo, α_t é a constante, $\beta_{i,t}$ é a sensibilidade ou coeficiente de cada ativo constituinte, $C_{i,t}$ são os preços dos ativos constituintes e ε_t é o ruído de observação.

Equação do Sistema:

$$\begin{aligned}\beta_{1,t} &= \beta_{1,t-1} + \eta_{1,t}, \\ \beta_{2,t} &= \beta_{2,t-1} + \eta_{2,t}, \\ \beta_{3,t} &= \beta_{3,t-1} + \eta_{3,t}, \\ \alpha_t &= \alpha_{t-1} + \eta_{4,t},\end{aligned}\tag{3.9}$$

em que $\eta_{i,t}$ são os ruídos do sistema.

Desta forma, $\text{Var}(\varepsilon_t) = R_t$ e $\text{var}(\eta_{i,t}) = Q_{i,t}$.

Os gráficos a seguir apresentam o comportamento do coeficiente de UBBR11 (β_1) ao longo do tempo, entre as observações 498 e 749, bem como a evolução dos desvios padrões dos coeficientes, adotando-se diferentes SNR's: 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.0000001, além da relação otimizada pelo método de máxima verossimilhança.

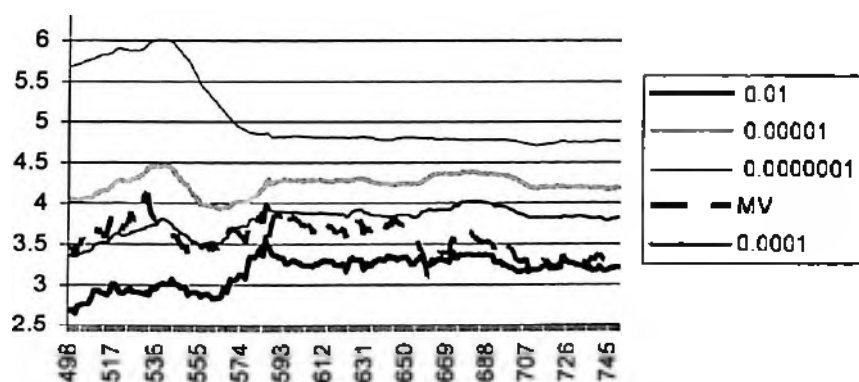


Gráfico 3.6 - Evolução do coeficiente de UBBR11 ao longo do tempo em função de diferentes SNR's

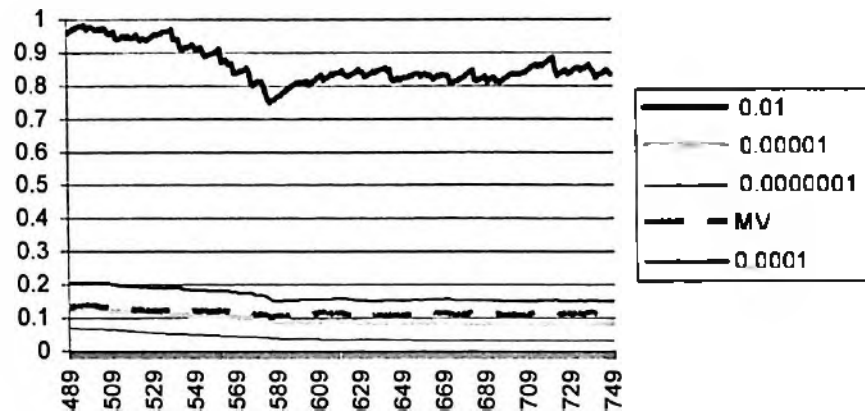


Gráfico 3.7 - Evolução do desvio padrão do coeficiente de UBRRI1 ao longo do tempo em função de diferentes SNR's

Como se pode observar no padrão das séries apresentadas no gráfico 3.6, as razões SNR's menores resultaram em coeficientes que evoluem suavemente ao longo do tempo, e as maiores, por seu lado, em coeficientes que se adaptam mais rapidamente. O gráfico 3.7 evidencia o expressivo aumento do desvio padrão ao se aumentar a razão Q/R.

A evolução do termo constante (alpha) ao longo do tempo, sujeita a diferentes SNR's, também foi analisada, juntamente com o comportamento de seus desvios-padrões. Os gráficos correspondentes podem ser vistos abaixo:

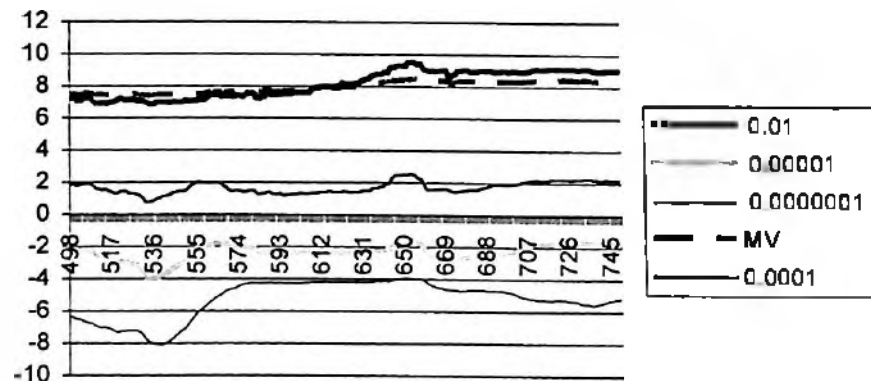


Gráfico 3.8 - Evolução da constante alpha ao longo do tempo em função de diferentes SNR's

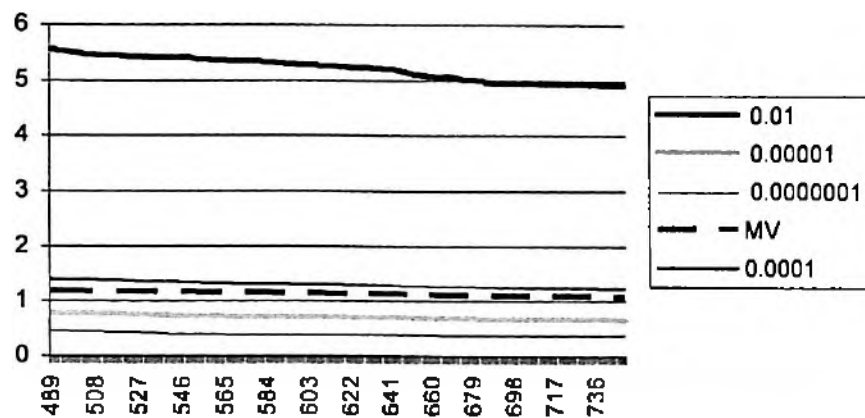


Gráfico 3.9 - Evolução do desvio padrão da constante alpha ao longo do tempo em função de diferentes SNR's

Analisando-se o gráfico 3.8, nota-se explicitamente que a constante alpha é muito sensível aos diferentes SNR's, podendo assumir valores negativos ou positivos, dependendo da razão Q/R a ser escolhida. O gráfico 3.9 traz novamente a idéia de que, com o aumento de Q/R, há um conseqüente aumento do desvio-padrão de alpha.

Diante do exposto acima, torna-se relevante apurar como o modelo onde Reg = 3 se comporta não apenas em relação a diferentes SNR's, mas também em relação aos diferentes ativos-selecionados. Será analisado também o desempenho do modelo no caso em que o termo alpha é estático, embora os outros coeficientes ("betas") sigam variando ao longo do tempo. As Equações de Observação e do Sistema ficariam da seguinte forma neste último caso:

Equação de Observação:

$$AT_t = \alpha + \beta_{1,t}C_{1,t} + \beta_{2,t}C_{2,t} + \beta_{3,t}C_{3,t} + \varepsilon_t, \quad (3.10)$$

Equação do Sistema:

$$\begin{aligned} \beta_{1,t} &= \beta_{1,t-1} + \eta_{1,t}, \\ \beta_{2,t} &= \beta_{2,t-1} + \eta_{2,t}, \\ \beta_{3,t} &= \beta_{3,t-1} + \eta_{3,t}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observa-se que o termo α foi retirado da equação do sistema, e por isso não varia ao longo do tempo, como os coeficientes dos ativos constituintes.

A tabela abaixo apresenta os resultados médios por operação do modelo onde $Reg = 3$ para os casos propostos:

Tabela 3.14 - Retorno médio por operação por modelo, analisando-se diversos ativos, combinações entre SNR's e alpha, que variam ou não ao longo do tempo

Ativo-alvo	Retorno Médio. SNR = MV A	Retorno Médio. SNR = MV Alpha estático. R	Retorno Médio. SNR = 0.00001. C	Retorno Médio. SNR = 0.00001	Retorno Médio. SNR = 0.0000001 Alpha estático E	Melhor Combinação
AMBV4	0.556%	0.360%	1.240%	1.409%	1.356%	D
ARCZ6	1.159%	1.359%	1.387%	1.499%	1.182%	D
BBDC4	2.686%	1.512%	1.474%	1.205%	1.351%	A
BRKM5	0.349%	0.631%	0.467%	-0.741%	0.206%	B
CCRO3	2.887%	4.025%	1.953%	1.576%	2.111%	B
CMIG4	0.286%	1.735%	1.632%	1.949%	1.644%	D
GGBR4	1.405%	2.294%	1.045%	1.118%	2.050%	B
NETC4	3.105%	2.741%	5.150%	5.201%	4.870%	D
SDIA4	3.244%	3.729%	1.712%	1.967%	3.750%	E
USIM5	1.543%	2.374%	2.676%	2.445%	3.345%	E

A tabela 3.14 evidencia que combinações do Filtro de Kalman com o termo alpha estático (B, D e E) são superiores, em termos de retorno médio por operação, em relação aos ganhos obtidos quando a constante varia ao longo do tempo. Observe-se também que optar por SNR's diferentes ao da relação otimizada pelo método de máxima verossimilhança, pode produzir resultados superiores, haja vista a predominância das combinações D e E, nas quais o SNR foi atribuído "manualmente".

A tabela 3.15 traz os resultados do modelo onde $Reg = 3$ em função do *Sharpe*, adotando-se combinações diferentes para SNR's, ao mesmo tempo em que se faz o termo alpha variar ou não gradativamente.

Tabela 3.15 - Sharpe por modelo, analisando-se diversos ativos, combinações entre SNR's e alpha, que variam ou não ao longo do tempo

Ativo-alvo	Sharpe SNR = MV A	Sharpe SNR = MV. Alpha estático B	Sharpe SNR = 0.00001 C	Sharpe SNR = = 0.00001. Alpha	Sharpe SNR = 0.0000001 Alpha estático E	Melhor Combinação
AMBV4	2.842	2.863	5.677	5.609	4.431	C
ARCZ6	9.967	4.123	12.205	11.693	7.312	C
BBDC4	9.801	13.127	5.594	6.055	5.351	B
BRKM5	2.273	-0.202	2.645	-2.074	0.386	C
CCRO3	15.744	8.201	6.119	4.813	4.609	A
CMIG4	1.194	6.059	5.393	6.905	5.455	D
GGBR4	10.853	10.971	5.991	5.518	7.942	B
NETC4	8.209	6.429	12.827	13.187	15.540	E
SDIA4	21.380	5.897	9.728	8.445	38.142	E
USIM5	6.635	12.880	11.408	10.670	22.458	E

Perceba-se que, para as ações em que o termo alpha seguiu constante ao longo do tempo, houve resultados mais satisfatórios, embora em uma proporção menor que no exemplo do retorno médio por operação, já que a combinação C aparece como a melhor em três situações. Por outro lado, a combinação A surge uma única vez, de um total de dez ativos analisados. No entanto, ficou evidente, mais uma vez, que utilizar o termo alpha estático ao longo do tempo, ou atribuir valores para a razão variância do ruído do sistema pela variância do ruído de observação, pode produzir resultados mais robustos, se comparados ao Filtro de Kalman, em que a constante varia ao longo do tempo e tais variâncias são calculadas pelo método de máxima verossimilhança.

A última questão que surge, é apurar se as melhores combinações do Filtro de Kalman para cada ativo selecionado são superiores ao desempenho do modelo de arbitragem estatística onde $Reg = 1$, no qual todos os parâmetros são fixos ao longo do tempo. Tal comparação pode ser vista na tabela que se segue:

Tabela 3.16 - Comparação de Retorno Médio e Sharpe entre o Modelo em que $Reg = 1$ e as melhores combinações do Modelo em que $Reg = 3$.

Ativo-alvo	Retorno Médio do modelo $Reg = 1$	Retorno Médio da melhor combinação do modelo $Reg = 3$	Melhor modelo por retorno médio	Sharpe do modelo $Reg = 1$	Sharpe da melhor combinação do modelo $Reg = 3$	Melhor modelo por Sharpe
AMBV4	1.367%	1.409%	3	5.689	5.677	1
ARCZ6	2.592%	1.499%	1	12.456	12.205	1
BBDC4	1.259%	2.686%	3	9.102	13.127	3
BRKM5	0.708%	0.631%	1	2.055	2.645	3
CCRO3	1.508%	4.025%	3	4.847	15.744	3
CMIG4	2.017%	1.939%	1	7.407	6.905	1
GGBR4	1.936%	2.294%	3	9.075	10.971	3
NETC4	2.475%	5.201%	3	7.965	15.540	3
SDIA4	2.964%	3.790%	3	9.085	38.142	3
USIM5	2.978%	3.345%	3	17.036	22.458	3

O exame dos resultados acima revela que, ao se selecionarem as melhores combinações apresentadas para o modelo onde $\text{Reg} = 3$, este último produz resultados mais satisfatórios em relação ao caso onde $\text{Reg} = 1$, tanto no que tange aos retornos médios por operação, quanto ao âmbito do *Sharpe*.

4 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou apresentar o conceito de Cointegração, aplicado para explorar a propriedade de reversão à média, presente na dinâmica nos desvios de equilíbrio, obtidos através de combinações lineares entre ativos-alvos e ativos sintéticos, selecionados do universo de ações que compõem o principal índice acionário brasileiro – o índice Bovespa (Ibovespa).

Foram discutidas algumas abordagens para se determinarem relações de Cointegração, como o teste de Johansen, empregado para sistemas multivariados, e o teste de Engle-Granger, utilizado nos exemplos mencionados neste documento, em que a partir de variáveis respostas (os ativos-alvos) previamente determinadas, foram encontradas variáveis explicativas (ativo sintético), de tal forma que o resíduo obtido da combinação linear dessas variáveis com as primeiras fosse estacionário. Questões relacionadas à instabilidade de parâmetros, possivelmente presentes em relações de Cointegração, foram devidamente abrangidas, como a Regressão *Stepwise* e o Filtro de Kalman.

O passo seguinte foi o desenvolvimento de um modelo de arbitragem estatística, com a motivação principal de explorar a dinâmica de reversão à média, contida nos desvios de equilíbrio das relações de Cointegração encontradas entre ações do Ibovespa.

O modelo foi analisado com base em diversas ações como ativo-alvo, à luz de medidas de desempenho, como o retorno médio por operação e o índice *Sharpe*, o que possibilita resultados muito satisfatórios no que tange a esses quesitos.

Viu-se também que os resultados do modelo proposto são sensíveis à natureza do método de regressão linear utilizado para determinar os coeficientes da relação de Cointegração. Quanto às duas abordagens utilizadas - o método dos Mínimos Quadrados e o Filtro de Kalman - ambas produziram resultados positivos, embora tenha ficado evidente que, dependendo do grau de adaptabilidade atribuído aos coeficientes deste último, o mesmo pode apresentar desempenho superior ao método dos Mínimos Quadrados.

É importante ressaltar que a análise do modelo proposto foi conduzida com base em uma série de aspectos, tais como o tamanho da amostra de observações, o segmento dentro da amostra e fora da amostra, a dimensão das variáveis explicativas, ou seja, o tamanho do ativo sintético, em que no presente caso, foi composto por três ativos constituintes, os ativos-alvos selecionados, regras de entrada e saída, e outros. Assim, o desempenho do modelo pode se alterar, caso algum desses ativos for modificado.

Ainda em relação à sensibilidade do modelo a variações nos parâmetros supracitados, tome-se, como exemplo, os limites superiores e inferiores, que representam uma das regras de entrada. Estes foram definidos como o percentil de 95% e 5%, respectivamente, da distribuição de desvios de equilíbrio da base dentro da amostra, e serviram como referência para a abertura de posições, sempre no primeiro dia do segmento fora da amostra. Isto é, operações foram realizadas quando as condições $m_{t+1} > m_{t-251,t}^{H,\alpha}$ ou $m_{t+1} < m_{t-251,t}^{I,\alpha}$ (com a possibilidade de se adicionar ou não desvios-padrões ao limite superior, ou subtrai-los do limite inferior) eram verificadas.

Nada foi dito, até então, sobre a presença de certos fenômenos na dinâmica temporal dos desvios de equilíbrio, como a existência de autocorrelação serial e heteroscedasticidade, mesmo porque, em todo curso do trabalho, a questão primordial foi identificar combinações lineares estacionárias entre ativos-alvos e ativos sintéticos, fato verificado independentemente da ocorrência daquelas propriedades.

A ilustração que se segue apresenta o autocorrelograma dos desvios de equilíbrio da combinação obtida com BBDC4 como ativo-alvo, referente ao período entre as observações 1 a 252 (vide tabela 3.2)

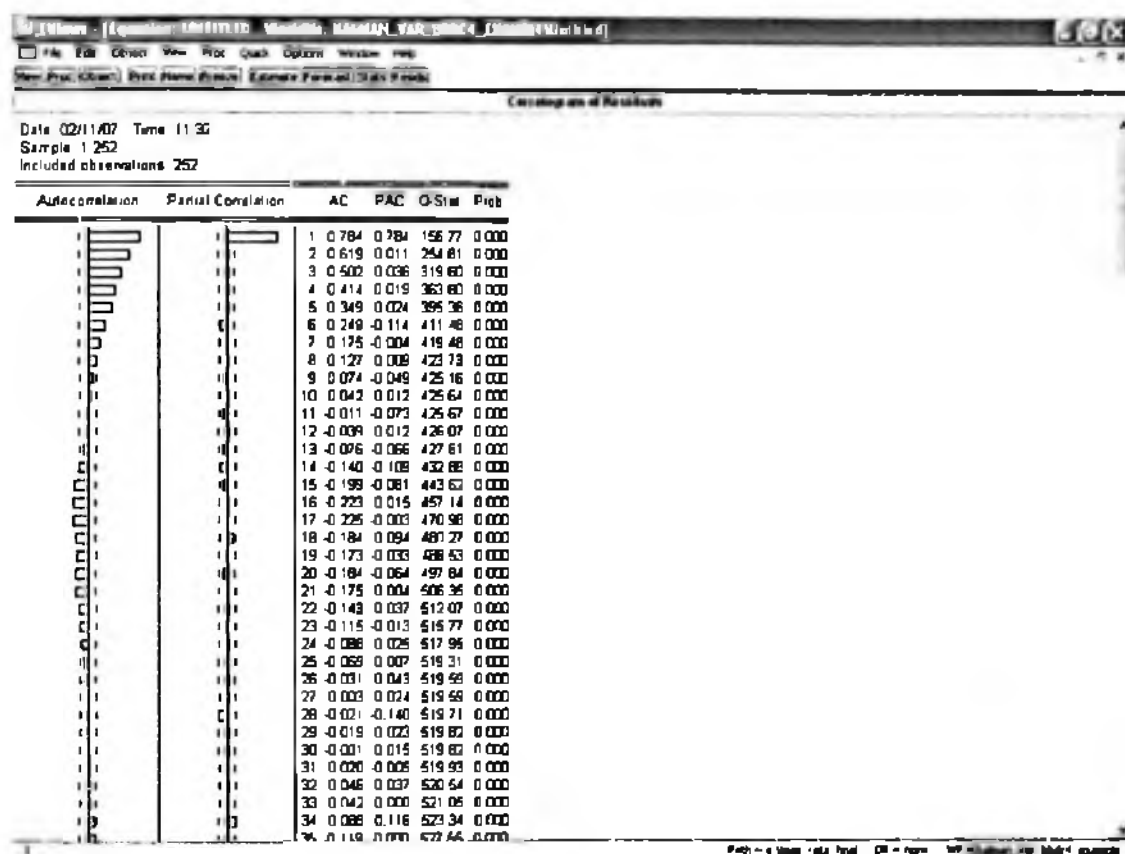


Ilustração 4.1 – Autocorrelograma dos desvios de equilíbrio (resíduos) de BBDC4 como ativo-alvo, referente às observações 1 a 252.

Analisando-se o esquema acima, é possível observar a existência de autocorrelação serial, já que o teste Ljung-Box¹² rejeita, com nível de significância de 1%, a hipótese nula de não autocorrelação em todos os *lags* considerados.

O mesmo teste pode ser aplicado para verificar a presença de heteroscedasticidade, ou seja, se a variância condicional depende de seus próprios *lags*. A ilustração abaixo evidencia a ocorrência de tal fato, já que o teste Ljung-Box também rejeita, com nível de significância de 1%, a hipótese nula de não autocorrelação da variância condicional em todos os *lags* considerados :

¹² O teste de Ljung-Box (1978) é uma forma adaptada do proposto por Box e Pierce (1970) para a detecção de autocorrelação em amostras de tamanho pequeno. É dado pela equação $Q(K) = T(T+2) \sum_{j=1}^K \frac{\hat{\tau}_j^2}{T-j}$, onde

$\hat{\tau}_j$ é a $j^{\text{ésima}}$ autocorrelação e T é o número de observações. Se o modelo for apropriado terá aproximadamente uma distribuição χ^2 com $K - p - q$ graus de liberdade. A distribuição assintótica é obtida sob a hipótese que $K = K(T) \rightarrow \infty$, quando $T \rightarrow \infty$.

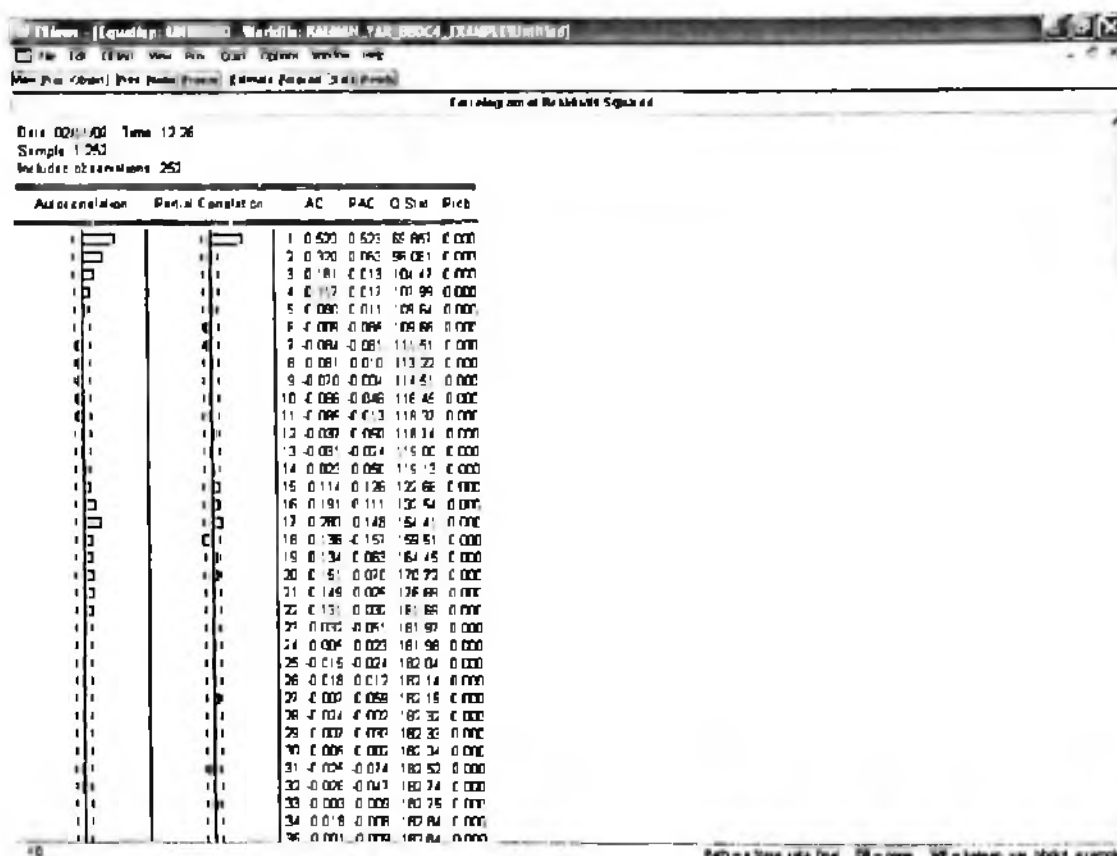


Ilustração 4.2 – Autocorrelograma dos quadrados dos desvios de equilíbrio de BBDC4 como ativo-alvo, referente às observações 1 a 252.

A presença de autocorrelação serial nos desvios de equilíbrio e nos seus quadrados sugere a utilização de modelos ARMA – GARCH. A vantagem destes é a possibilidade de explorar a previsão do desvio de equilíbrio e de sua variância condicional em intervalos futuros.

Neste caso em específico, seguindo o procedimento de identificação, estimação e verificação – vide como referência Brooks (2002), Enders (2004) e Morettin e Tolo (2006) - do modelo ARMA a ser ajustado à série de desvios e do modelo GARCH a ser ajustado à série dos quadrados dos desvios (variâncias condicionais), obteve-se um auto-regressivo de ordem 1, AR(1), e um GARCH(1,1). Desta forma, as equações de previsão de tais modelos, um passo a frente, são as que seguem:

$$\text{AR}(1): m_t = \mu + \phi_1 m_{t-1} + \eta_t. \quad (4.1)$$

Em $t+1$, tem-se que:

$$m_{t+1} = \mu + \phi_1 m_t + \eta_{t+1}. \quad (4.2)$$

Aplicando-se o operador esperança condicional para a equação 4.2, obtém-se a previsão um passo a frente:

$$E(m_{t+1} / \Omega_t) = \hat{m}_t(1) = E(\mu + \phi_1 m_t + \eta_{t+1} / \Omega_t) = \mu + \phi_1 m_t. \quad (4.3)$$

$$\text{GARCH}(1,1): \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 m_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (4.4)$$

Onde σ_t^2 é a variância condicional.

Em $t+1$, tem-se que:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 m_t^2 + \beta \sigma_t^2. \quad (4.5)$$

Aplicando-se o operador esperança condicional para a equação 4.5, obtém-se a previsão um passo a frente da variância condicional:

$$E(\sigma_{t+1}^2 / \Omega_t) = \hat{\sigma}_t^2(1) = E(\alpha_0 + \alpha_1 m_t^2 + \beta \sigma_t^2 / \Omega_t) = \alpha_0 + \alpha_1 m_t^2 + \beta \sigma_t^2. \quad (4.6)$$

Sendo assim, como sugestão para trabalhos futuros, em vez de se adotar como limite superior ou inferior de entrada nas posições o percentil da distribuição de desvios de equilíbrio, poder-se-ia utilizar a seguinte abordagem:

$$\text{Limite superior: } \hat{m}_t(1) + x \hat{\sigma}_t(1). \quad (4.7)$$

$$\text{Limite Inferior: } \hat{m}_t(1) - x \hat{\sigma}_t(1). \quad (4.8)$$

Onde x é o quantil correspondente a um coeficiente de confiança fixado, supondo, por exemplo, erros normais.

Quanto a outras abordagens relacionadas ao tema deste trabalho, vale destacar ainda alguns interessantes documentos, tais como o de Markellos (1997) e Breitung (1998), que discorre sobre o desenvolvimento de técnicas para se estimar relações não-lineares de Cointegração entre ações; Thomaidis e Kondakis (2005), que modelam o comportamento do desvio de equilíbrio de ações que se cointegram através de um modelo de redes neurais-GARCH,

buscando detectar não linearidades nos desvios, tanto em relação à média quanto à volatilidade; Alexander e Dimitriu (2002) e Dunis e Ho (2005), que utilizam o conceito de Cointegração para replicar índices acionários e também para criar portfólios de ações, com baixa exposição a fatores de risco; Elliott et al (2005), que modelam a propriedade de reversão à média, presente em certas combinações de pares de ações, utilizando o Filtro de Kalman, em que o resíduo resultante da combinação entre preços de ações é a variável resposta da equação de observação, e os estados são guiados pelo processo de Vasicek.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXANDER, C. (2001). *Market Models: A Guide to Financial Data Analysis*. John Wiley & Sons.
- ALEXANDER, C. and DIMITRIU, A. (2002). *The Cointegration Alpha: Enhanced Index Tracking and Long-Short Equity Market Neutral Strategies*. Working Paper. Inglaterra: University of Reading.
- BENTZ, Y. (1999). *Identifying and Modelling Conditional Factor Sensitivities: An Application to Equity Investment Management*. Ph. D. Dissertation. Londres: London Business School.
- BENTZ, Y. (2004). Quantitative Equity Investment Management with Time-Varying Factor Sensitivities. In: DUNIS, Christian *et al.* *Applied Quantitative Methods for Trading and Investment*. John Wiley & Sons.
- BOX, G.E.P. and PIERCE, D.A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*, n. 64, 1509-1526.
- BREITUNG, J. (1998). *Non Parametric Tests for Nonlinear Cointegration*. In: REFENES, N. *et al.* *Decision Technologies for Computational Finance*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- BROOKS, C. (2002). *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BURGESS, A. NEIL. (1999). *A Computational Methodology for Modelling the Dynamics of Stistical Arbitrage*. Ph. D. Dissertation. Londres: London Business School.
- BURGESS, A. NEIL. (2003). Using Cointegration to Hedge and Trade International Equities. In: DUNIS, Christian *et al.* *Applied Quantitative Methods for Trading and Investment*. John Wiley & Sons.
- CHINCARINI, L.B. and KIM, D. (2006). *Quantitative Equity Portfolio*. McGraw-Hill.
- DUNIS, C.L. and HO, R. (2005). Cointegration Portfolios of European Equities for Index Tracking and Market Neutral Strategies. *Journal of Asset Management*, vol. 6, 33-52.
- DURBIN, J. and KOOPMAN, S.J. (2001) *Time Series Analysis by State Space Models*. Oxford: Oxford University Press.
- ELLIOTT, R.J. *et al.* (2004). *Pairs Trading*. Working Paper. Canadá: University of Calgary.
- ENDERS, W. (2004). *Applied Econometric Time Series*. 2nd ed. John Wiley & Sons.

ENGLE, R.F. and GRANGER, C.W.J. (1987). Co-Integration, and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. *Econometrica*, n. 55, 251-276.

EVIIEWS 5.1. (2005). Manual do usuário. Quantitative Micro Software. Estados Unidos.

HAMILTON, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

HARVEY, A.C. (2002). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge: Cambridge University Press.

HOERL, A.E. and KENNARD, R.W. (1970). Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, n. 12, 69-82.

JOHANSEN, Soren and JUSELIUS, Katerina. (1990). Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration with Application to the Demand for Money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, n. 52, 1551-80.

KALMAN, R.E. (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Series D*, n. 82, 35-45.

LJUNG, G. and BOX, George. (1978). On a Measure of Lack of Fit in Time Series Model. *Biometrika*, n. 65, 297-303.

MACKINNON, J.G. (1991) Critical Values for Cointegration tests. In: ENGLE, R.F.; GRANGER, C.W.J. *Long-run Economic Relationships: Readings in Cointegration*. Oxford: Oxford University Press, capítulo 13.

MADDALA, G.S. and KIM, I. (1998) *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*. Cambridge: Cambridge University Press.

MARKELLOS, R.N. (1997). *Nonlinear Equilibrium Dynamics*. Working Paper 97-6. Inglaterra: Loughborough University.

MORETTIN, P.A. and TOLOI, C.M.C. (2006). *Análise de Séries Temporais*. 2. ed. São Paulo: Abe – Projeto Fisher.

PHILLIPS, P.C.B. and OULIARIS, S. (1990). Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration. *Econometrica*, n. 62, 73-93.

PRAZMOWSKI, P.A. (2005). A Recursive Cointegration Test Using Kalman Filter and its Application to Fiscal Equilibrium in the Dominican Republic. *Applied Economics Letters*, n. 12, 155-160.

ROSS, S.A. (1976). The Arbitrage Pricing Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, n.13, 341-360.

SHARPE, W.F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium. *Journal of Finance*, n.19, 425-442.

THOMAIDIS, N.S. and KONDAKIS, N. (2005). *An Intelligent Statistical Arbitrage Trading System*. Working Paper. Grécia: University of the Aegean.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

Período	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF	Período	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF
2 253	bbdc4	itau4	cple6	itsa4	-4.11	55 306	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-5.827
3 254	bbdc4	itau4	cple6	itsa4	-4.24	56 307	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-5.881
4 255	bbdc4	itau4	cple6	itsa4	-4.31	57 308	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-5.917
5 256	bbdc4	itau4	cple6	itsa4	-4.37	58 309	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-6.087
6 257	bbdc4	itau4	cple6	prga3	-4.58	59 310	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-6.340
7 258	bbdc4	itau4	cple6	prga3	-4.66	60 311	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-5.911
8 259	bbdc4	itau4	cple6	prga3	-4.81	61 312	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-5.604
9 260	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.05	62 313	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-5.645
10 261	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.00	63 314	bbdc4	itau4	cruz3	cgas5	-5.759
11 262	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.01	64 315	bbdc4	itau4	cruz3	prga3	-5.623
12 263	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.03	65 316	bbdc4	itau4	cruz3	prga3	-5.613
13 264	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.29	66 317	bbdc4	itau4	cruz3	prga3	-5.169
14 265	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.57	67 318	bbdc4	itau4	cruz3	prga3	-4.920
15 266	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.40	68 319	bbdc4	itau4	prga3	cruz3	-4.396
16 267	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.30	69 320	bbdc4	itau4	prga3	cruz3	-5.045
17 268	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.31	70 321	bbdc4	itau4	prga3	cruz3	-4.789
18 269	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.60	71 322	bbdc4	itau4	prga3	brtp3	-5.075
19 270	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.50	72 323	bbdc4	itau4	prga3	brtp3	-4.647
20 271	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.45	73 324	bbdc4	itau4	prga3	cgas5	-5.236
21 272	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.40	74 325	bbdc4	itau4	prga3	cgas5	-5.121
22 273	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-5.50	75 326	bbdc4	itau4	prga3	cgas5	-4.783
23 274	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-5.68	76 327	bbdc4	itau4	prga3	cgas5	-4.718
24 275	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-5.85	77 328	bbdc4	itsa4	ggbr4	cple6	-5.257
25 276	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-5.48	78 329	bbdc4	itsa4	ggbr4	cple6	-5.136
26 277	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-5.36	79 330	bbdc4	itsa4	goau4	cple6	-5.247
27 278	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-5.33	80 331	bbdc4	itsa4	goau4	cple6	-5.349
28 279	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.37	81 332	bbdc4	itsa4	goau4	cple6	-5.446
29 280	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-5.11	82 333	bbdc4	itsa4	goau4	cple6	-5.319
30 281	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-4.79	83 334	bbdc4	itsa4	goau4	cple6	-4.971
31 282	bbdc4	itau4	prga3	bbas3	-4.80	84 335	bbdc4	itsa4	goau4	cple6	-5.058
32 283	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-4.64	85 336	bbdc4	itsa4	goau4	cple6	-5.053
33 284	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-4.81	86 337	bbdc4	itsa4	cple6	ggbr4	-4.465
34 285	bbdc4	itau4	ggbr4	bbas3	-4.66	87 338	bbdc4	itsa4	cple6	sdia4	-4.654
35 286	bbdc4	itau4	ggbr4	bbas3	-4.58	88 339	bbdc4	itau4	prga3	cple6	-4.867
36 287	bbdc4	itau4	ggbr4	bbas3	-4.36	89 340	bbdc4	itau4	prga3	cple6	-5.171
37 288	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.05	90 341	bbdc4	itau4	prga3	cple6	-5.295
38 289	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.13	91 342	bbdc4	itau4	prga3	cple6	-5.250
39 290	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.11	92 343	bbdc4	itau4	prga3	cple6	-5.286
40 291	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.09	93 344	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.301
41 292	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.11	94 345	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.300
42 293	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.13	95 346	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.310
43 294	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.13	96 347	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.375
44 295	bbdc4	itau4	ggbr4	brtp3	-5.10	97 348	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.328
45 296	bbdc4	itau4	ggbr4	cruz3	-5.08	98 349	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.321
46 297	bbdc4	itau4	ggbr4	cruz3	-5.10	99 350	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.347
47 298	bbdc4	itau4	ggbr4	cruz3	-5.13	100 351	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.404
48 299	bbdc4	itau4	ggbr4	cruz3	-5.13	101 352	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.407
49 300	bbdc4	itau4	ggbr4	cruz3	-5.51	102 353	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.297
50 301	bbdc4	itau4	ggbr4	cruz3	-5.31	103 354	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.276
51 302	bbdc4	itau4	ggbr4	cruz3	-5.17	104 355	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.345
52 303	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-4.55	105 356	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.499
53 304	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-4.46	106 357	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.433
54 305	bbdc4	itau4	goau4	bbas3	-4.57	107 358	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.567

Periodo	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF	Periodo	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF
108 359	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.57	161 412	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.494
109 360	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.51	162 413	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.424
110 361	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.54	163 414	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.185
111 362	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.48	164 415	bbdc4	itsa4	sdia4	cple6	-5.682
112 363	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.41	165 416	bbdc4	itsa4	sdia4	cple6	-5.765
113 364	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.57	166 417	bbdc4	itsa4	sdia4	cple6	-5.613
114 365	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.55	167 418	bbdc4	itsa4	sdia4	cple6	-5.860
115 366	bbdc4	itsa4	netc4	cple6	-5.60	168 419	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.580
116 367	bbdc4	itau4	sdia4	cple6	-5.18	169 420	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.593
117 368	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.55	170 421	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.601
118 369	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.50	171 422	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.590
119 370	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.44	172 423	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.575
120 371	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.67	173 424	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.638
121 372	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.62	174 425	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.740
122 373	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.59	175 426	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.783
123 374	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.68	176 427	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.751
124 375	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.68	177 428	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.672
125 376	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.61	178 429	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.673
126 377	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.56	179 430	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.680
127 378	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.66	180 431	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.626
128 379	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.63	181 432	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.739
129 380	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.73	182 433	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.795
130 381	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.69	183 434	bbdc4	itsa4	sdia4	ambv4	-5.893
131 382	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.70	184 435	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.608
132 383	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.73	185 436	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.647
133 384	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.73	186 437	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.752
134 385	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.52	187 438	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.652
135 386	bbdc4	itau4	sdia4	lcsi4	-5.34	188 439	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.604
136 387	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.62	189 440	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.530
137 388	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.56	190 441	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.626
138 389	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.60	191 442	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.697
139 390	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.66	192 443	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.648
140 391	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.72	193 444	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.588
141 392	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.94	194 445	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.765
142 393	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.82	195 446	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.857
143 394	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.83	196 447	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.856
144 395	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.85	197 448	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.846
145 396	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.80	198 449	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.714
146 397	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.74	199 450	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-5.144
147 398	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.85	200 451	bbdc4	itsa4	klbn4	cple6	-4.959
148 399	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.90	201 452	bbdc4	itsa4	klbn4	ambv4	-5.550
149 400	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.90	202 453	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.505
150 401	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.85	203 454	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.700
151 402	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.68	204 455	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.700
152 403	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.93	205 456	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.637
153 404	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.83	206 457	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.744
154 405	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.98	207 458	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.767
155 406	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-6.04	208 459	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.744
156 407	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-6.05	209 460	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.758
157 408	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-6.04	210 461	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.703
158 409	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-6.07	211 462	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.657
159 410	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.86	212 463	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.702
160 411	bbdc4	itsa4	sdia4	ubbr11	-5.61	213 464	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.681

Periodo	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF	Periodo	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF
214 465	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.68	267 518	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.210
215 466	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.73	268 519	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.199
216 467	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.69	269 520	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.255
217 468	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.74	270 521	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.218
218 469	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.77	271 522	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.153
219 470	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.76	272 523	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.087
220 471	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.77	273 524	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.850
221 472	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.81	274 525	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.121
222 473	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.83	275 526	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.098
223 474	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.84	276 527	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.167
224 475	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.79	277 528	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.116
225 476	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.84	278 529	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.045
226 477	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.84	279 530	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.651
227 478	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.67	280 531	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.413
228 479	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.64	281 532	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.945
229 480	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.63	282 533	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.994
230 481	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.88	283 534	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.096
231 482	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.89	284 535	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.327
232 483	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.86	285 536	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.206
233 484	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.86	286 537	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.158
234 485	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.87	287 538	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.189
235 486	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.95	288 539	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.238
236 487	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.77	289 540	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.195
237 488	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.73	290 541	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.314
238 489	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.56	291 542	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.294
239 490	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.73	292 543	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.330
240 491	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.70	293 544	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.435
241 492	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.69	294 545	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.259
242 493	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.79	295 546	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.005
243 494	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.85	296 547	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.653
244 495	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.96	297 548	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.595
245 496	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.93	298 549	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.978
246 497	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.87	299 550	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.921
247 498	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.76	300 551	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.717
248 499	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.77	301 552	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.848
249 500	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.71	302 553	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.503
250 501	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.84	303 554	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.511
251 502	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.86	304 555	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.563
252 503	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.87	305 556	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.562
253 504	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.04	306 557	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.518
254 505	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.02	307 558	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.514
255 506	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.02	308 559	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.540
256 507	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.02	309 560	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.787
257 508	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.96	310 561	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.744
258 509	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.01	311 562	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.645
259 510	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-5.98	312 563	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.493
260 511	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.07	313 564	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.531
261 512	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.07	314 565	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.619
262 513	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.00	315 566	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.470
263 514	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.09	316 567	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.638
264 515	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.13	317 568	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.737
265 516	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.12	318 569	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.774
266 517	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-6.25	319 570	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.712

Periodo	Ativo-alvc	Const 1	Const 2	Const 3	DF	Periodo	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF
320 571	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.75	373 624	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-5.356
321 572	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.68	374 625	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-5.394
322 573	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.42	375 626	bbdc4	ubbr11	netc4	prga3	-5.874
323 574	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.49	376 627	bbdc4	ubbr11	netc4	prga3	-5.685
324 575	bbdc4	itsa4	klbn4	ubbr11	-4.27	377 628	bbdc4	ubbr11	netc4	prga3	-5.513
325 576	bbdc4	itsa4	aces4	ubbr11	-4.60	378 629	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-5.251
326 577	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.62	379 630	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-5.071
327 578	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.43	380 631	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-5.051
328 579	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.48	381 632	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-4.855
329 580	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.57	382 633	bbdc4	ubbr11	brto4	embr3	-5.681
330 581	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.69	383 634	bbdc4	ubbr11	brto4	embr3	-5.756
331 582	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.58	384 635	bbdc4	ubbr11	brto4	embr3	-5.860
332 583	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.80	385 636	bbdc4	ubbr11	brto4	embr3	-5.902
333 584	bbdc4	itsa4	ebtp4	elet3	-5.31	386 637	bbdc4	ubbr11	brto4	embr3	-5.915
334 585	bbdc4	itsa4	ebtp4	ubbr11	-4.87	387 638	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.546
335 586	bbdc4	itsa4	ebtp4	ubbr11	-5.15	388 639	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.508
336 587	bbdc4	itsa4	ebtp4	ubbr11	-5.20	389 640	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.554
337 588	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.35	390 641	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.543
338 589	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.47	391 642	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.600
339 590	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.49	392 643	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.342
340 591	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.46	393 644	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.323
341 592	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.46	394 645	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.357
342 593	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.43	395 646	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.414
343 594	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.54	396 647	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.460
344 595	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.52	397 648	bbdc4	ubbr11	netc4	cmig4	-5.524
345 596	bbdc4	itsa4	ubbr11	aces4	-5.53	398 649	bbdc4	ubbr11	netc4	cmig4	-5.525
346 597	bbdc4	itsa4	ubbr11	vcpa4	-5.51	399 650	bbdc4	ubbr11	netc4	cmig4	-5.549
347 598	bbdc4	itsa4	ubbr11	vcpa4	-5.53	400 651	bbdc4	ubbr11	cgas5	embr3	-6.037
348 599	bbdc4	itsa4	ubbr11	vcpa4	-5.52	401 652	bbdc4	ubbr11	cgas5	embr3	-6.118
349 600	bbdc4	itsa4	ubbr11	vcpa4	-5.49	402 653	bbdc4	ubbr11	cgas5	embr3	-6.286
350 601	bbdc4	itsa4	ubbr11	vcpa4	-5.37	403 654	bbdc4	ubbr11	cgas5	brto4	-6.032
351 602	bbdc4	itsa4	ubbr11	vcpa4	-5.50	404 655	bbdc4	ubbr11	cgas5	brto4	-5.831
352 603	bbdc4	itsa4	ubbr11	brtp4	-5.82	405 656	bbdc4	ubbr11	cgas5	brto4	-5.796
353 604	bbdc4	itsa4	ubbr11	brtp4	-5.72	406 657	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.832
354 605	bbdc4	ubbr11	itsa4	brtp4	-5.70	407 658	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.660
355 606	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.55	408 659	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.386
356 607	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.67	409 660	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.428
357 608	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.72	410 661	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.494
358 609	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.69	411 662	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.555
359 610	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.69	412 663	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.596
360 611	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.68	413 664	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.610
361 612	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.61	414 665	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.625
362 613	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.65	415 666	bbdc4	ubbr11	brto4	cgas5	-5.617
363 614	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.60	416 667	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-5.734
364 615	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.63	417 668	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-5.786
365 616	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.59	418 669	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-5.845
366 617	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.66	419 670	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-5.931
367 618	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.63	420 671	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-5.879
368 619	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.69	421 672	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-6.010
369 620	bbdc4	ubbr11	itsa4	vcpa4	-5.70	422 673	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-6.042
370 621	bbdc4	ubbr11	netc4	itsa4	-4.59	423 674	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-6.030
371 622	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-5.22	424 675	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-6.001
372 623	bbdc4	ubbr11	brto4	itsa4	-5.36	425 676	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-6.007

Período	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF	Período	Ativo-alvo	Const 1	Const 2	Const 3	DF
426 677	bbdc4	ubbr11	brto4	prga3	-5.96	463 714	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.326
427 678	bbdc4	ubbr11	brto4	sdia4	-5.96	464 715	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.357
428 679	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.86	465 716	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.322
429 680	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.88	466 717	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.307
430 681	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.88	467 718	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.305
431 682	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.91	468 719	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.308
432 683	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.92	469 720	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.331
433 684	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.90	470 721	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.344
434 685	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.89	471 722	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.466
435 686	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.91	472 723	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.438
436 687	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.88	473 724	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.453
437 688	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.89	474 725	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.471
438 689	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.91	475 726	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.446
439 690	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.86	476 727	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.459
440 691	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.93	477 728	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.458
441 692	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.97	478 729	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.470
442 693	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-6.01	479 730	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.479
443 694	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.92	480 731	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.488
444 695	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.92	481 732	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.487
445 696	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.86	482 733	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.566
446 697	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.83	483 734	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.457
447 698	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.83	484 735	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.564
448 699	bbdc4	ubbr11	brto4	sdia4	-5.81	485 736	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.697
449 700	bbdc4	ubbr11	brto4	sdia4	-5.68	486 737	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.659
450 701	bbdc4	ubbr11	brto4	sdia4	-5.55	487 738	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.795
451 702	bbdc4	ubbr11	brto4	sdia4	-5.51	488 739	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.821
452 703	bbdc4	ubbr11	brto4	sdia4	-5.40	489 740	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.852
453 704	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.39	490 741	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.751
454 705	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.43	491 742	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.706
455 706	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.20	492 743	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.733
456 707	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.06	493 744	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.714
457 708	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.23	494 745	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.722
458 709	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.34	495 746	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.661
459 710	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.26	496 747	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.690
460 711	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.14	497 748	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.728
461 712	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.26	498 749	bbdc4	ubbr11	brto4	ccro3	-5.658
462 713	bbdc4	ubbr11	brto4	brtp4	-5.29						