

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail [bibfea@usp.br](mailto:bibfea@usp.br) para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE

”MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS”

ALOCAÇÃO DINÂMICA EM  
CARTEIRAS EXPOSTAS AO RISCO DE  
CRÉDITO E RISCO DE MERCADO

Autor: Erlei Rocha Lima

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Serpa Schirmer

São Paulo  
2004

Alocação Dinâmica em  
Carteiras Expostas ao Risco de  
Crédito e Risco de Mercado

Autor: Erlei Rocha Lima

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre.

Orientador:

Prof. Dr. Pedro Paulo S. Schirmer

São Paulo

2004

*Às minhas meninas superpoderosas*

# Agradecimentos

De todas as pessoas que me ajudaram a realizar esse trabalho, sem dúvida o Eduardo de Almeida Prado merece um lugar de destaque, por acreditar e defender um projeto de vida de uma pessoa que conhecida há pouco tempo. Eduardo, muito obrigado!

Obrigado ao Kumagae Hinki Jr. por acreditar e apoiar a continuidade do trabalho. Muito obrigado ao José Euclides de Melo Ferraz pelas discussões e dicas a respeito do trabalho, além da grande confiança, apoio e paciência.

Ao meu orientador Prof. Pedro Paulo Schirmer, agradeço pela grande ajuda e paciência nos momentos mais críticos, muito obrigado por tudo.

Agradeço ao Odulpho Baracho Neto pela grande ajuda com o  $\LaTeX$ , ao Daniel Granja agradeço pelas caronas. Com certeza sem elas esse trabalho seria bem mais extenuante. À Renata Monteiro Fernandes, muito obrigado pelos livros emprestados da biblioteca da FGV-SP à Dona Nice e o Seu Eleutério, muito obrigado por deixar utilizar a casa, como refúgio para estudos nos finais de semanas e obrigado ao Banco ITAÚ S.A. pelo auxílio de bolsa durante todo o curso.

Espero que os resultados desse trabalho de alguma maneira cubra minhas ausências com a Carolina e a Eloísa, que sem saber são fontes de minha motivação.

E um enorme e carinhoso beijo de agradecimento à Ana Cláudia pela constante ajuda e enorme paciência.

# Sumário

Lista de Figuras . . . . .	iii
Resumo . . . . .	1
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2 A economia</b>	<b>5</b>
<b>3 Modelos de risco de crédito</b>	<b>7</b>
3.1 Terminologia . . . . .	8
3.2 Modelos estruturais . . . . .	9
3.3 Modelos de intensidade . . . . .	10
3.4 Títulos de renda fixa com risco de crédito . . . . .	12
3.4.1 Modelo em tempo discreto . . . . .	12
3.4.2 Modelo em tempo contínuo . . . . .	14
3.5 Dinâmica de retornos de um título de renda fixa com risco de crédito . . . . .	15
<b>4 Modelos de renda fixa</b>	<b>18</b>
4.1 Modelo de Vasicek . . . . .	18
4.2 Preço de um título de renda fixa . . . . .	19
<b>5 Integrando risco de crédito e risco de mercado</b>	<b>22</b>
5.1 Prêmios de riscos . . . . .	26
<b>6 Alocação estratégica intertemporal</b>	<b>29</b>
6.1 Utilidade e aversão ao risco . . . . .	29
6.2 Alocação intertemporal . . . . .	32
6.3 Solução do problema de alocação estratégica para a carteira com risco de crédito e mercado . . . . .	34

6.4	Implicações na alocação estratégica . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Implementação do modelo e resultados</b>	<b>45</b>
7.1	Implementação . . . . .	46
7.2	Resultados obtidos . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>64</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>

# Lista de Figuras

3.1	Esquema de árvore para modelo de default em tempo discreto. . . . .	13
6.1	Gráfico da função utilidade de um investidor avesso ao risco com riqueza inicial $W$ exposto a ganhar ou perder um montante $G$ com probabilidades iguais. . . . .	31
7.1	Variação dos pesos de alocação em função do coeficiente relativo de aversão ao risco do investidor. . . . .	50
7.2	Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa com risco de crédito durante o horizonte de investimento ( $CRRA=5$ ). . . . .	51
7.3	Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa sem risco de crédito durante o horizonte de investimento ( $CRRA=5$ ). . . . .	51
7.4	Distribuição dos pesos de alocação do ativo de índice de bolsa durante o horizonte de investimento ( $CRRA=5$ ). . . . .	52
7.5	Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa com risco de crédito durante o horizonte de investimento ( $CRRA=20$ ). . . . .	52
7.6	Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa sem risco de crédito durante o horizonte de investimento ( $CRRA=20$ ). . . . .	53
7.7	Distribuição dos pesos de alocação do ativo de índice de bolsa durante o horizonte de investimento ( $CRRA=20$ ). . . . .	53
7.8	Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa com risco de crédito durante o horizonte de investimento ( $CRRA=2$ ). . . . .	54
7.9	Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa sem risco de crédito durante o horizonte de investimento ( $CRRA=2$ ). . . . .	54
7.10	Distribuição dos pesos de alocação do ativo do índice de bolsa durante o horizonte de investimento ( $CRRA=2$ ). . . . .	55

7.11	Efeito da volatilidade da taxa de spread de crédito sobre os pesos de alocação dos ativos. . . . .	56
7.12	Efeito da volatilidade da taxa de juros de curto prazo sobre os pesos de alocação dos ativos. . . . .	56
7.13	Efeito da volatilidade do índice de bolsa sobre os pesos de alocação dos ativos. . . . .	57
7.14	Variação dos pesos de alocação em função do prêmio de risco de mercado do spread de crédito. . . . .	58
7.15	Variação dos pesos de alocação em função do prêmio de risco de mercado da taxa de juros. . . . .	58
7.16	Variação dos pesos de alocação em função do prêmio de risco de mercado do índice de bolsa. . . . .	59
7.17	Variação dos pesos de alocação em função da correlação entre os movimentos brownianos da taxa de juros e do <i>spread</i> de crédito. . . . .	59
7.18	Variação dos pesos de alocação em função da correlação entre os movimentos brownianos da taxa de juros e do índice de bolsa. . . . .	60
7.19	Variação dos pesos de alocação em função da correlação entre os movimentos brownianos do índice de bolsa e do <i>spread</i> de crédito. . . . .	60
7.20	Variação dos pesos de alocação em função da velocidade de reversão à média do processo da taxa de juros. . . . .	61
7.21	Variação dos pesos de alocação em função da velocidade de reversão à média do processo do spread de crédito. . . . .	62
7.22	Variação dos pesos de alocação em função da perda fracional de crédito. . . . .	63

# Resumo

Um modelo de alocação estratégica intertemporal é proposto para o problema de investidores que desejam maximizar sua utilidade de riqueza. Na economia na qual os investidores em que irão realizar suas decisões, não há oportunidades de arbitragens entre os ativos, e suas opções de investimento são: ações, títulos de renda fixa com risco de taxa de juros e títulos de renda fixa com risco de taxa de juros e com risco de crédito. O modelo proposto é inovador por considerar o risco de crédito, fator que geralmente não é levado em conta em problemas de alocação intertemporal. A solução do problema foi obtida por meio de programação dinâmica e os pesos de alocação ótima ao longo do tempo são fornecidos por expressões em forma fechada, que permite sua aplicação em simulações numéricas computacional de forma direta. Para modelar o risco de crédito utilizou-se a abordagem dos modelos de intensidade e o uso de um parâmetro exógeno que capta o valor a ser recuperado em caso de default é considerado nas decisões de investimento. Resultados de ensaios numéricos são apresentados, com o intuito de mostrar a sensibilidade do modelo em função da variação dos parâmetros de entrada do modelo.

# Capítulo 1

## Introdução

Agentes representativos que procuram alocar dinamicamente sua riqueza em uma economia que contém ativos do tipo: ações e títulos de renda fixa com incerteza apenas em seus preços nos instantes futuros, é um clássico e conhecido problema em finanças. O principal objetivo desses agentes é alocar estrategicamente sua riqueza ao longo do tempo nesses ativos, de modo a maximizar a utilidade de sua riqueza ao término do período de investimento.

Robert Merton com seus trabalhos de 1969, 1971 e 1973, provavelmente foi o primeiro a utilizar o princípio de Bellman ou abordagem de programação dinâmica para resolver o problema de agentes representativos que tentam maximizar a riqueza alocando-a intertemporalmente. A partir de então, muito tem sido feito no sentido de obter modelos mais reais e completos para resolver o problema de alocação estratégica intertemporal.

O objetivo do presente trabalho é apresentar um modelo, no qual o investidor tem a possibilidade de alocar estrategicamente em ativos que geralmente são considerados nesse tipo de problema, com a inovação de não desconsiderar o risco de crédito dos títulos de renda fixa. Dessa maneira tenta-se complementar esse tipo de abordagem, aperfeiçoando mais os modelos que consideram apenas o risco de mercado no problema de alocação estratégica para os agentes representativos ou investidores.

A motivação para considerar o risco de crédito como fator de decisão de investimento, com o intuito de maximizar a utilidade na presença de diferentes combinações de risco-retorno, é o grande número de ocorrências de não cumprimento de obrigações ou renegociações das mesmas por parte dos emissores das dívidas. O risco de crédito

tornou-se então um fator que não deve ser mais preocupação exclusiva do responsável pelo gerenciamento de risco, com vistas à alocação de capital para enquadramento de exigências de banco centrais ou órgãos reguladores.

O risco de crédito está presente também em carteiras de investimento, seja ela fundos de investimento, fundos de pensão e carteiras proprietárias de instituições financeiras entre outros, fazendo com que o administrador de recursos leve em consideração esse fator de risco em suas estratégias de investimento, com isso a análise do administrador estará sendo mais real e os impactos desse tipo de risco afetarão sua decisão de investimento.

Para tornar factível o risco de crédito no problema de alocação estratégica, primeiro modelou-se o investidor nos moldes de Merton (1971), onde tenta maximizar sua utilidade de riqueza terminal em uma situação de equilíbrio parcial. Na economia que será apresentada no trabalho há quatro possibilidades de investimento, uma taxa de livre de risco de curtíssimo prazo livre de riscos e outros três ativos contendo risco.

Dos ativos que possuem risco de mercado, são considerados como opção de investimento: ações e títulos de renda fixa sem risco de crédito, possuindo apenas risco de mercado. A inovação do trabalho é considerar um outro título de renda fixa que apresenta tanto risco de mercado como risco de crédito. Esses ativos a serem considerados são do tipo "*plain vanilla*" e não serão levados em consideração, para simplicidade de modelagem, pagamentos de dividendos e pagamentos intermediários ou de cupons.

Para modelar o risco de crédito será utilizado a abordagem dos modelos de intensidade, que basicamente capturam a informação do risco de crédito por meio da dinâmica de taxa de juros de curto prazo e da dinâmica do *spread* de crédito. Para auxiliar nos cálculos, essas dinâmicas serão modeladas por processos estocásticos de reversão à média com coeficientes constantes. Com a utilização desses processos não apenas a obtenção das dinâmicas de retornos será facilitada como também a resolução do problema de alocação estratégica intertemporal.

A solução obtida para o problema de alocação estratégica dos investidores possui forma fechada, que permite a implementação computacional de forma imediata e simples. Como o objetivo do trabalho é propor um novo modelo que incorpore um tipo de risco pouco explorado nesse ramo de estudo de finanças, serão apresentados resultados do modelo obtidos de parâmetros escolhidos subjetivamente, deixando para pesquisas futuras a questão da calibração de um modelo que reflita a realidade de

dados observados do mercado financeiro.

As referências básicas do presente trabalho forão os trabalhos desenvolvido por Hou e Jin (2002) e Hou (2003), e foi dividido nos seguintes capítulos:

O capítulo 2 inicia o trabalho com a formalização de uma economia onde os investidores irão agir, com a definição dos parâmetros que darão as bases necessárias para o desenvolvimento do modelo a ser estudado.

No capítulo 3 encontra-se a argumentação e formalização do que será considerado risco de crédito e a apresentação de dois tipos de famílias de modelos para modelar esse risco, aprofundando o estudo em uma delas: modelos de intesidade. Como resultado serão obtidos processos das dinâmicas de preços dos títulos de renda fixa com risco de crédito.

O capítulo 4 faz uma rápida excursão no modelo de taxa de juros de curto prazo, e a dinâmica de preços e a dinâmica de retornos dos preços de títulos de renda fixa sem risco de crédito é obtida, para quem já possui familiaridade com esses conceitos, o capítulo pode ser omitido sem perda de continuidade.

A integração do risco de crédito com o risco de mercado, presentes na economia proposta é objetivo do capítulo 5. Nesse capítulo, com a escolha da dinâmica do *spread* de crédito, é obtida a dinâmica dos retornos dos preços do título de renda fixa com risco de crédito, concluindo o resultado obtido no segundo capítulo.

Com todos os processos das dinâmicas de preços dos ativos definidos, no capítulo 6 soluciona-se o problema proposto de maximização da utilidade da riqueza. Antes é feito uma introdução de conceitos microeconômicos de utilidade e aversão ao risco, e a questão do problema de alocação estratégica é introduzida por meio de um exemplo. Em seguida encontra-se a resolução do problema de alocação estratégica intertemporal para ativos com risco de crédito e risco de mercado.

No capítulo 7 é apresentado alguns tópicos da implementação das expressões obtidas no capítulo anterior e discutido os resultados provenientes das simulações numéricas realizadas.

O trabalho encerra com a apresentação das conclusões no capítulo 8, seguido das referências bibliográficas utilizadas.

# Capítulo 2

## A economia

Formalizar uma economia na qual se pretende transacionar a carteira de investimento é necessário para basear os conceitos que serão apresentados adiante. Essa economia é livre de custos de transações, os investidores são formadores de preços e suas decisões não afetam diretamente a formação dos preços dos ativos do mercado. Todos os preços dos ativos, seguem um processo estocástico.

O principal problema a ser tratado nesse trabalho é a alocação estratégica ótima intertemporal de uma carteira contendo ativos que possuem risco, dentro de um intervalo de tempo finito que mais agrada o investidor, geralmente esse intervalo de tempo é definido por um horizonte de investimento, denotado aqui por:  $T \subset +\infty$ .

Há uma taxa de juros a vista de curtíssimo prazo  $r(t)$ ,  $\forall t \in T$  com dinâmica estocástica a ser definida mais adiante. Essa taxa remunera o investimento aplicado no curtíssimo prazo, sendo livre de risco de *default*. Geralmente definida na literatura estrangeira por *money market account*, ela representa na economia real a taxa de transação de sobras ou coberturas de caixa que ocorrem diariamente entre as instituições financeiras, algo muito semelhante à taxa CDI Over do mercado financeiro doméstico. Esse investimento possui valor inicial de aplicação igual a \$1, e paga ao seu detentor o acúmulo contínuo das taxas de curto prazo em um horizonte de tempo diário. Será referenciada a partir desse ponto apenas por CDI, onde o processo desse investimento é representado por uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{db(t)}{b(t)} = r(t)dt \tag{2.1}$$

Dada a condição inicial:  $b(0) = 1$  a solução é:

$$b(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right), \quad \forall t \leq T \quad (2.2)$$

O investidor encontrará nessa economia três ativos para alocar sua riqueza ao longo do horizonte de investimento: título de renda fixa sem risco de crédito, título de renda fixa com risco de crédito, uma ação ou um conjunto de ações. Os ativos com risco por ora serão apenas apresentados com algumas informações, maiores detalhes de suas dinâmicas de preços e retornos serão explorados nos próximos capítulos.

Tanto o título de renda fixa livre de risco de crédito como o título de renda fixa com risco de crédito possuem a mesma data de vencimento ou maturidade  $T_1$ , para simplificar os cálculos, onde  $T_1 \in T$ . O preço em  $t$  do título de renda fixa sem risco será representado por:  $B(t, T_1)$  e na data de seu vencimento paga uma unidade monetária, diretamente tem-se que:  $B(T_1, T_1) = 1$ . O preço em  $t$  do título de renda fixa com risco de crédito será representado por:  $D(t, T_1)$ .

Como última escolha de ativo com risco, o investidor pode alocar parte de sua riqueza em um ativo que possui seu preço atrelado à variação do um índice de ações que não pagam dividendos, que será chamado de ativo do índice de bolsa, seu preço ao longo do tempo será representado por:  $S(t)$ .

Nessa economia, os processos de preços dos ativos formam um mercado completo e livre de arbitragens. Isso só é possível, se e somente se, existir uma medida de probabilidade neutra ao risco  $\mathbb{Q}$ , que é a medida de probabilidade do espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ . Os movimentos brownianos padrões serão definidos inicialmente nesse espaço, assim garante-se que os possíveis preços futuros, gerados pelos processos que "viverem" nesse espaço de probabilidade, quando descontados pela taxa livre de risco serão martingais.

É interessante também, normalizar os preços dos ativos da economia, pelo título de renda fixa sem risco de crédito  $B(t, T_1)$ , com vencimento em  $T_1$ . Fazendo isso pode-se dizer que existe um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{F})$  com medida de probabilidade equivalente  $\mathbb{F}$ , que é uma medida de probabilidade neutra ao risco a termo, associada ao vencimento do título de renda fixa. Essa medida de probabilidade será útil ao se utilizar o operador esperança sob a medida  $\mathbb{F}$  com o objetivo de obter o preço de um título de renda fixa com risco de crédito.

## Capítulo 3

# Modelos de risco de crédito

Atualmente, não apenas o gestor de risco como também o administrador de carteiras de investimentos, são obrigados a considerar o risco de crédito em seus trabalhos diários. Casos recentes do não cumprimento de obrigações, renegociações de dívidas e rebai-xamento de qualidade de crédito apareceram quase que semestralmente em noticiários ligados aos negócios e casos envolvendo valores maiores repercutiram em todos os meios de comunicação.

No presente trabalho, risco de crédito será definido como o risco associado à ocorrência de um evento de *default*, o não cumprimento do pagamento do principal ou de cupons de uma obrigação emitida por uma empresa privada ou estatal ou emissão soberana de uma nação. Se desconsiderará outras formas de risco de crédito como por exemplo: risco de recuperação de débito perdido, risco de migração de rating de crédito e risco de correlação (encontrado em carteiras de crédito de varejo) e variações do *spread* de crédito. Dessa forma, daqui em diante, quando se mencionar que um título possui risco de crédito estará se referindo à possibilidade de ocorrência de um evento de *default*.

Risco de crédito habita constantemente não apenas carteiras de instituições finan- ceiras de todos os portes como também em fundos de investimento e em fundos de pensões, dependendo do apetite ao risco de seus acionistas ou cotistas, respectiva- mente. Está presente em diversos instrumentos financeiros: certificados de depósitos bancários, corporate bonds, debêntures, papéis de dívidas soberanas e derivativos, ci- tando apenas títulos emitidos por grandes empresas e nações e desconsiderando outras formas de ficar exposto a esse risco, tais como: descontos de duplicatas, crediário, leasing entre outros.

O risco de crédito vem sendo objeto de estudo não apenas de instituições financeiras como também do meio acadêmico e órgãos controladores das instituições financeiras. Raro de se encontrar na literatura é a integração dos riscos de crédito e de mercado, ou formas de modelar a variação do preço de um título que está sujeito simultaneamente às duas fontes de incerteza: variações da taxa de juros e a possibilidade de ocorrência de um evento de *default*.

O título de renda fixa com risco de crédito, que não paga cupons, é o título mais indicado para se modelar o preço e a dinâmica de sua variação, considerando ambos os fatores de riscos mencionados. Pelo fato de não possuir pagamentos intermediários, apenas o valor principal em seu vencimento, torna o seu fluxo de caixa mais simples, facilitando a sua modelagem. Para agilizar a nomenclatura daqui em diante o título de renda fixa com risco de crédito será indicado apenas por: RFC.

Em Bielecki e Rutkowski (2001) é apresentado de maneira sucinta os principais modelos de *default* desenvolvidos. Basicamente podem ser resumidos em dois tipos principais: modelos estruturados (mais conhecido na literatura estrangeira por: *value of the firm*) e os modelos de intensidade (ou as vezes referenciados por modelos reduzidos e na literatura estrangeira: *hazard rate*).

### 3.1 Terminologia

Antes de iniciar a discussão sobre a modelagem de preços dos títulos sujeitos ao risco de crédito na economia em que o investidor irá formar sua carteira, deve-se formalizar a estrutura de informação para fundamentar o que será definido adiante.

A incerteza da economia é modelada no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ , com uma filtração  $\mathcal{G} = (F_t)_{t \geq 0}$  que representa o fluxo de informação disponível das variáveis de estado para o investidor até o instante  $t$ .

Assume-se que o ativo com risco de crédito possui um tempo de *default*  $\tau$ , que é representado por uma variável aleatória não negativa, definida dentro do intervalo:  $\tau \in (0, \infty]$  de modo que:  $\mathbb{Q}(\tau = 0) = 0$  e  $\mathbb{Q}(\tau > t) > 0$ , para qualquer  $t \leq T_1$ , ou seja, a probabilidade de ocorrer *default* no instante de emissão do RFC é nula e a probabilidade de ocorrer *default* após o instante atual é sempre positiva. A ocorrência do evento de *default* é definida pelo processo contínuo  $H(t) := \mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}}$ , onde  $\mathbb{I}_{\{\tau \leq t\}}$  é uma função indicadora, que fornece 1 como resposta caso  $\tau \leq t$  seja verdadeiro e fornece

0 caso contrário. A função indicadora será utilizada em outras situações mais adiante em que se necessite as mesmas respostas, 1 caso a condição seja verdadeira e 0 caso falso.

## 3.2 Modelos estruturais

Os modelos estruturais foram originalmente desenvolvidos por Merton (1974), que considerou as obrigações de um emissor de um título de renda fixa, como uma opção de venda dos seus direitos. A opção dá o direito ao seu detentor (credor do emissor) de receber um valor fixo no vencimento da dívida. Se na data do vencimento, os direitos a receber do emissor da dívida não superarem o valor de suas obrigações ele estará em *default*. Em seu trabalho, Merton assumiu todas as aproximações pertinentes e necessárias do modelo de Black e Scholes (1973), taxa de juros constante ao longo do tempo, mercado eficiente e livre de custos transacionais, todos os ativos podem ser transacionados em qualquer fração de seu valor de face, capta-se e aplica-se dinheiro em uma mesma taxa de juros e não há restrições de venda de ativos à descoberto, apenas para citar as aproximações mais importantes do modelo desenvolvido por Merton.

Seguindo esse princípio, o valor a receber  $D(t, T_1)$  pelo credor em  $t$ , caso ocorra ou não o *default* do emissor, pode ser escrito como segue:

$$D(t, T_1) = D(V_t) = \min(V_t; B(t, T_1)L) \quad (3.1)$$

Onde  $V_t$  representa o valor da empresa na data  $t$  e  $L$  o valor de face de sua dívida na data  $t$ , que evolui seu valor de acordo com um título de renda fixa sem risco  $B(t, T_1)$ . Lembrando que:  $\min(a; b) = b - \max(0; a - b)$  a relação acima pode ser reescrita:

$$D(t, T_1) = L - \max(0; B(t, T_1)L - V_t) \quad (3.2)$$

O valor  $\max(0; B(t, T_1)L - V_t)$  pode ser representado como o resultado de uma opção de venda, onde o preço de exercício é representado pelo valor da dívida da empresa  $B(t, T_1)L$  e o valor do ativo objeto representado por  $V_t$ . Essa opção de venda passa a ser denominada como *put-to-default*  $P_t$ , formalmente pode-se reescrever o resultado:

$$D(t, T_1) = B(t, T_1)L - P_t \quad (3.3)$$

O valor da opção de venda pode ser determinada pela fórmula clássica de Black-Scholes de apreamento de opções para uma put europeia e assim obter o preço de um RFC pela abordagem dos modelos estruturais.

$$D(t, T_1) = V_t e^{-K(T_1-t)} \mathcal{N}(-d_1(V_t, T_1 - t)) + B(t, T_1) L\mathcal{N}(d_2(V_t, T_1 - t))$$

para  $t \in [0, T_1]$  (3.4)

onde:

$$d_{1,2}(V_t, T_1 - t) = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{L}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T_1 - t)}{\sigma_V(T_1 - t)} \quad (3.5)$$

e:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

A determinação do valor dos ativos da empresa, ou do valor da empresa  $V_t$  em análise e a volatilidade do valor da empresa  $\sigma_V$  é um desafio presente na implementação do modelo, fato apontado em Saunders (1999). Para o mercado brasileiro sua utilização fica ainda mais restrita, devido às poucas empresas que possuem ações negociadas em bolsa, posto que essa é uma das principais fontes de informação às variáveis do modelo.

### 3.3 Modelos de intensidade

Um dos principais fatores que influenciam a formação de preço de um RFC é a percepção do mercado quanto à sua qualidade de crédito ou mais precisamente o seu risco de crédito. É intuitivo no mercado que quanto maior a chance de *default* do emissor do título, maior será o prêmio de risco cobrado dele, utilizando como referência títulos de mesma maturidade que possuem risco de crédito dito nulo. Modelos de intensidade procuram capturar a probabilidade de *default* por meio da estrutura temporal de taxas de juros observada no mercado, dessa forma quanto maior o *spread* maior será a chance de *default* do emissor da dívida. O evento de *default* modelado dessa forma, passa a ser tratado como um acontecimento inesperado, que pode ocorrer a qualquer instante após a emissão do título.

Modelos de intensidade tentam modelar o evento de *default* como sendo um acontecimento inesperado para o detentor do título que apresenta o risco de crédito, por isso são denominados também como modelos de taxa de azar (ou *hazard rate*) ou modelos reduzidos. A modelagem do risco de *default* de um RFC utilizando modelos de intensidade, se baseia preponderantemente no uso do processo de Cox, uma generalização do processo não homogêneo de Poisson, onde a função de intensidade é uma variável aleatória.

O entendimento do processo homogêneo de Poisson, facilita o estudo do processo de Cox. Considere a seguinte somatória, que conta os eventos de um determinado acontecimento que ocorrem nos instantes de tempo  $t_1, t_2, \dots$  dentro do intervalo:  $[0, t]$ :

$$N_t = \sum_i \mathbb{I}_{\{t_i \leq t\}} \quad (3.7)$$

A quantidade  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  será um processo homogêneo de Poisson com intensidade  $\lambda$  (com  $\lambda$  constante ao longo do tempo) se as quantidades  $N_t - N_s$  (para  $s < t$ ) são independentes e possuem uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda(t - s)$ . Nesse caso a probabilidade de ocorrência de  $N_t - N_s = K$  eventos é:

$$P[N_t - N_s = K] = \frac{1}{K!} \lambda^K (t - s)^K \exp(-\lambda(t - s)) \quad (3.8)$$

De acordo com Jarrow e Turnbull (1995), o cerne do conceito dos modelos de intensidade está no fato de igualar o tempo de *default* ao primeiro salto de um processo de Poisson, cuja intensidade é igual a:  $\lambda$ . A forma mais simples de modelar um RFC, baseado no conceito acima, é considerar que zero ocorrências ocorram no intervalo de tempo:  $[0, T_1]$  que resulta em:  $N_t = N_{T_1} = 0$ ,  $N_s = 0$  cuja probabilidade pode ser calculada pela equação acima, ou seja, a chance que nada ocorra dentro do intervalo de tempo:  $[0, T_1]$  é:

$$P[N_{T_1} = K = 0] = \exp(-\lambda T_1) \quad (3.9)$$

O objetivo é observar a primeira ocorrência dentro desse intervalo de tempo, que representa a probabilidade de um *default* ocorrer no instante aleatório  $\tau$ . Isso pode ser obtido pelo complemento da probabilidade de nenhum *default* (3.9) ocorrer:

$$P[\tau \leq T_1] = 1 - P[N_{T_1} = 0] = 1 - e^{-\lambda T_1} \quad (3.10)$$

Considerando agora, que o parâmetro  $\lambda$  não seja mais constante no tempo e sim uma função determinística dependente do tempo  $\lambda(t)$  (função de intensidade) obtêm-se um processo não homogêneo de Poisson, onde a probabilidade de  $K$  eventos ocorrer em um intervalo de tempo é determinado por:

$$P[N_t - N_s = K] = \frac{1}{K!} \left( \int_s^t \lambda(x) dx \right)^K \exp \left( - \int_s^t \lambda(x) dx \right); \quad K = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Estendendo o mesmo que foi feito para o processo homogêneo de Poisson para esse caso, tem-se que a probabilidade de ocorrência de apenas um *default*, é dado pela expressão:

$$P[\tau \leq T_1] = 1 - P[N_{T_1} = 0] = 1 - \exp \left( - \int_0^{T_1} \lambda(x) dx \right) \quad (3.12)$$

Um processo de Cox é um processo de contagem  $N$  cuja intensidade  $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$  é um processo estocástico positivo. Dessa forma, a probabilidade condicional de um *default* ocorrer pode ser escrita:

$$P[\tau \leq T_1 | (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T_1}] = 1 - P[N_{T_1} = 0 | (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T_1}] = 1 - \exp \left( - \int_0^{T_1} \lambda_x dx \right) \quad (3.13)$$

A probabilidade incondicional de *default* é dada por:

$$P[\tau \leq T_1] = 1 - \mathbb{E}_t^Q \left[ \exp \left( - \int_0^{T_1} \lambda_x dx \right) \right] \quad (3.14)$$

## 3.4 Títulos de renda fixa com risco de crédito

### 3.4.1 Modelo em tempo discreto

Considere um RFC emitido em  $t = 0$ , e que em um instante  $t > 0$  seu preço seja representado por:  $\bar{D}(t, t + \Delta t)$ , para simplificar será considerado apenas dois intervalos

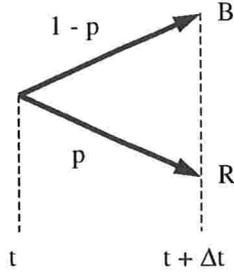


Figura 3.1: Esquema de árvore para modelo de default em tempo discreto.

de tempos: o instante atual  $t$  e após um intervalo  $\Delta t$ , o instante  $t + \Delta t$ . Como mencionado, na economia em questão, há uma taxa de juros de curto prazo livre de risco, que será no momento constante ao longo do tempo, representada por:  $r(t) = r$ .

O título RFC terá no instante  $t + \Delta t$  caso não ocorra o evento de *default*, um preço igual ao de um título de renda fixa sem risco de crédito e com o mesmo vencimento. O preço desse título, no momento, será representado por:  $\bar{B}(t, t + \Delta t)$ . Como feito em Duffie e Singleton (1999) pode-se definir o valor de mercado recuperado (*Recovery of Market Value*)  $\bar{R}(t, t + \Delta t)$  caso ocorra o evento de *default* do RFC em  $t + \Delta t$ , que é justamente uma fração do valor de face do  $\bar{B}(t, t + \Delta t)$  que o detentor consegue recuperar. Ao se definir uma perda fracional esperada de crédito, ou simplesmente perda fracional de crédito por  $\omega_t$  definida no intervalo  $\omega_t \in (0, 1]$ , tem-se diretamente que:

$$\bar{R}(t, t + \Delta t) = [1 - \omega_t] \bar{B}(t, t + \Delta t) \quad (3.15)$$

Assumindo que a probabilidade com que o evento de *default* possa ocorrer é  $p_t$ , pode-se construir um modelo de preço para o RFC por meio de um esquema de árvore, conforme a Figura 3.1, sendo que cada ramo representa respectivamente os dois possíveis resultados futuros: a ocorrência do evento de *default* ou a não ocorrência do evento de *default*. O valor justo do preço do RFC em  $t$ , será o valor esperado dos dois possíveis eventos que podem ocorrer em  $t + \Delta t$ .

$$\bar{D}(t, t + \Delta t) = e^{-r\Delta t} [(1 - p_t) \bar{B}(t, t + \Delta t) + p_t \bar{R}(t, t + \Delta t)] \quad (3.16)$$

Substituindo o termo  $\bar{R}(t, t + \Delta t)$  por (3.15):

$$\bar{D}(t, t + \Delta t) = e^{-r\Delta t}[(1 - p_t)\bar{B}(t, t + \Delta t) + p_t(1 - \omega_t)\bar{B}(t, t + \Delta t)] \quad (3.17)$$

A probabilidade de *default* pode ser substituída pelo resultado já obtido em (3.10):

$$p_t = 1 - \exp(-\lambda\Delta t) \quad (3.18)$$

Ao assumir que  $\Delta t \approx 0$  a exponencial pode ser substituída pela aproximação de segunda ordem de sua expansão de Taylor:  $e^{-x} \simeq 1 - x$ :

$$p_t = 1 - (1 - \lambda\Delta t) = \lambda\Delta t \quad (3.19)$$

Substituindo em (3.17)

$$\bar{D}(t, t + \Delta t) = e^{-r\Delta t}[(1 - \lambda\Delta t)\bar{B}(t, t + \Delta t) + \lambda\Delta t(1 - \omega_t)\bar{B}(t, t + \Delta t)] \quad (3.20)$$

Sem perda de generalidade assume-se que  $\bar{B}(t, t + \Delta t) = 1$  para não carregar a notação e aproximando  $(1 - \lambda\omega_t\Delta t) \simeq e^{-\lambda\omega_t\Delta t}$  substitui-se ambos em (3.20) obtêm-se:

$$\bar{D}(t, t + \Delta t) = \exp(-(r + \lambda\omega_t)\Delta t) \quad (3.21)$$

### 3.4.2 Modelo em tempo contínuo

O método heurístico, utilizado para obter a expressão (3.21), pode ser estendido para o caso em tempo contínuo com o intuito de obter o preço em  $t$  de um RFC que vence em  $T_1$ . O instante da ocorrência do evento de *default* é representado pela variável aleatória  $\tau$ , e o preço do RFC deve ser nulo apenas quando esse entrar em *default*, caso contrário haverá sempre um preço a ser extraído da sua estrutura de taxa de juros.

Uma demonstração com maior rigor matemático pode ser encontrada em Bielecki e Rutkowski (2001), onde primeiro é apresentado o preço de um RFC com perda fracional de crédito  $\omega = 100\%$  ou valor de mercado recuperado nulo:

$$D(t, T_1) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} B(t, T_1) \exp \left( - \int_t^{T_1} \lambda(s) ds \right) \quad (3.22)$$

Quando  $\omega \neq 100\%$  e constante ao longo do tempo, o valor do RFC pré *default* com uma possível recuperação do valor da perda é dada por:

$$D(t, T_1) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \left( \int_t^{T_1} e^{-\int_t^u (r(s) + \omega \lambda(s)) ds} \omega \lambda(u) du + e^{-\int_t^{T_1} (r(s) + \omega \lambda(s)) ds} \right) \quad (3.23)$$

O parâmetro  $\omega$  foi assumido ser constante ao longo do tempo, para facilitar os futuros cálculos. Pode-se considerar que o mesmo seja uma função do tempo  $\omega(t)$ . A expressão obtida em (3.23) pode ficar representada então por:

$$D(t, T_1) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_t^Q \left[ \exp \left( - \int_t^{T_1} (r(s) + \lambda(s) \omega(s)) ds \right) \right] \quad (3.24)$$

O termo  $\lambda(s) \omega(s)$  representa o *spread* de crédito e será modelado pelo processo  $\delta(s) = \lambda(s) \omega(s)$ , que assim como a taxa de juros de curto prazo  $r(s)$  deverá ser substituído por um processo estocástico que representará a evolução de seus valores aleatoriamente. Finalmente pode-se escrever a expressão que representa o preço de um RFC em um instante qualquer.

$$D(t, T_1) = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_t^Q \left[ \exp \left( - \int_t^{T_1} (r(s) + \delta(s)) ds \right) \right] \quad (3.25)$$

### 3.5 Dinâmica de retornos de um título de renda fixa com risco de crédito

Para obter a expressão de variação relativa do preço de um RFC, ou seja, a dinâmica de retornos de preço  $\frac{dD(t, T_1)}{D(t, T_1)}$  parte-se da expressão (3.25) e calcula-se a diferencial em relação ao tempo. Algumas substituições serão feitas antes para auxiliar na álgebra.

Definindo:  $\mathbb{I}_{\{\tau > t\}} = \tilde{H}(t)$ , pode-se escrever como função de  $H(t)$ , então:

$$\mathbb{I}_{\{r>t\}} = \tilde{H}(t) = 1 - H(t) \quad (3.26)$$

O termo  $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^{T_1} (r(s) + \delta(s)) ds \right) \right]$  pode ser escrito como o produto de duas exponenciais, onde os limites de integração se complementam:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^{T_1} (r(s) + \delta(s)) ds \right) \right] \\ &= \exp \left( - \int_t^0 (r(s) + \delta(s)) ds \right) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_0^{T_1} (r(s) + \delta(s)) ds \right) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Chamando:

$$\exp \left( \int_0^t r(s) + \delta(s) ds \right) = \tilde{b}(t) \quad (3.28)$$

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_0^{T_1} (r(s) + \delta(s)) ds \right) \right] = \Psi(t, T_1) \quad (3.29)$$

então, pode-se definir:

$$v(t, T_1) = \tilde{b}(t) \Psi(t, T_1) \quad (3.30)$$

Substituindo os termos (3.26) e (3.30) em (3.25):

$$D(t, T_1) = \tilde{H}(t) v(t, T_1) \quad (3.31)$$

Calculando a diferencial:

$$dD(t, T_1) = \tilde{H}(t) dv(t, T_1) + d\tilde{H}(t) v(t, T_1) \quad (3.32)$$

Como:  $d\tilde{H}(t) = d(1 - H(t)) = -dH(t)$ , para o termo  $dv(t, T_1)$  aplica-se novamente a regra da cadeia:

$$dv(t, T_1) = \tilde{d}b(t)\Psi(t, T_1) + \tilde{b}(t)d\Psi(t, T_1) \quad (3.33)$$

Onde o termo  $\tilde{d}b(t)$  pode ser calculdo:

$$\begin{aligned} \tilde{d}b(t) &= \frac{d}{dt} \left( \exp \left( \int_0^t (r(s) + \delta(s)) ds \right) \right) \\ &= (r(t) + \delta(t)) \exp \left( \int_0^t (r(s) + \delta(s)) ds \right) dt \\ &= (r(t) + \delta(t))\tilde{b}(t) dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

Que substituindo em (3.33):

$$dv(t, T_1) = (r(t) + \delta(t))\tilde{b}(t)\Psi(t, T_1) dt + \tilde{b}(t)d\Psi(t, T_1)$$

Substituindo a função definida em (3.30):

$$dv(t, T_1) = (r(t) + \delta(t))v(t, T_1) dt + \tilde{b}(t)d\Psi(t, T_1) \quad (3.35)$$

Substituindo em (3.32) e arranjando os termos:

$$dD(t, T_1) = \tilde{H}(t) \left[ (r(t) + \delta(t))v(t, T_1) dt + \tilde{b}(t)d\Psi(t, T_1) \right] - v(t, T_1) dH(t) \quad (3.36)$$

Após alguma algebra e lembrando de (3.31):

$$dD(t, T_1) = D(t, T_1) (r(t) + \delta(t))dt + \tilde{H}(t)\tilde{b}(t)d\Psi(t, T_1) - v(t, T_1) dH(t) \quad (3.37)$$

Na expressão acima, há dois termos a serem desenvolvidos, o termo  $d\Psi(t, T_1)$  será resolvido após a escolha dos processos estocásticos de  $r(t)$  e  $\delta(t)$ , assunto dos próximos capítulos. O último termo  $v(t, T_1) dH(t)$  sintetiza o evento de *default* no preço do RFC, que no momento de sua ocorrência cai para zero, também será explorado em maior detalhe mais adiante.

# Capítulo 4

## Modelos de renda fixa

### 4.1 Modelo de Vasicek

A taxa de juros de curto prazo  $r(t)$  seguirá um processo de Vasicek (1977), que utilizou o processo de Ornstein-Uhlenbeck aplicado à dinâmica das taxa de juros de curto prazo. Ele observou que na economia, a taxa de juros de curto prazo não se mantém em níveis elevados ou níveis baixos por muito tempo, em relação ao seu nível médio histórico, apresentando assim um processo de reversão à média, a equação diferencial estocástica proposta para esse efeito foi:

$$dr(t) = \kappa_r (\theta_r - r(t)) dt + \sigma_r d\varpi_r(t) \quad (4.1)$$

Onde  $\kappa_r$ ,  $\theta_r$ ,  $\sigma_r$  são os parâmetros que representam a velocidade de reversão à média, a expectativa média para a taxa de juros de curto prazo e a volatilidade instantânea da taxa de juros de curto prazo, respectivamente. Todas constantes ao longo do tempo e positivas. O movimento browniano padrão  $\varpi_r(t)$  possui uma dimensão, e está definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ . Para facilitar a notação os movimentos brownianos serão apresentados apenas por  $\varpi_x$ , e seu diferencial por  $d\varpi_x$ , onde  $x$  é o índice do processo que está sendo representado, ficando implícito sua dependência temporal e sua medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$ .

Quando o termo  $(\theta_r - r(t))$  for negativo, o termo  $\kappa_r$  indicará com qual intensidade as taxas de juros  $r(t)$  deverão cair, de modo que  $r(t)$  fique próximo de  $\theta_r$ , quando o termo  $(\theta_r - r(t))$  for positivo, as taxas de juros deverão subir, em efeito análogo ao caso

negativo. O modelo proposto por Vasicek é do tipo Gaussiano, o que pode acarretar em taxas de juros de curto prazo negativas, dado que a probabilidade para que isso ocorra é positiva, por instância isso será negligenciado, pois a escolha desse modelo foi feita para facilitar os cálculos do problema de alocação dinâmica.

## 4.2 Preço de um título de renda fixa

Como definido anteriormente, o ativo de renda fixa sem risco de crédito  $B(t, T_1)$  paga uma unidade monetária em seu vencimento  $T_1$ , e está exposto apenas as variações das taxas de juros da economia, causando assim flutuações em seu preço ao longo do tempo. Esse ativo da economia, pode representar um título soberano, uma *treasury* ou alguma debênture de empresas, que de acordo com o consenso do mercado, não apresenta risco de crédito. Para obter o preço desse título, imagine a seguinte situação: Um investidor possui apenas duas maneiras de aplicar sua riqueza, em um título de renda fixa ou em taxa de juros de curto prazo a vista. Considere que a taxa de juros de curto prazo é constante ao longo do tempo  $r(t) = r$ . Se o investidor aplica  $\exp(-r(T_1 - t))$  na taxa de juros a vista de curto prazo, dado pela expressão (2.2), em  $T_1$ , resgatará :

$$b(T_1 - t) = \exp(-r(T_1 - t)) \cdot \exp\left(r \int_t^{T_1} ds\right) = 1 \quad (4.2)$$

E se em  $t$  ele comprar um título de renda fixa  $B(t, T_1)$ , receberá em seu vencimento o mesmo valor da outra aplicação. Sendo assim o preço em qualquer instante  $t$  do título de renda fixa sem risco de crédito pode ser dado por:

$$B(t, T_1) = \exp(-r(T - t)) \quad (4.3)$$

Observe que o termo da exponencial atua como um fator de desconto ao longo do tempo, e para  $t = T_1$ , o termo à direita é igual a 1 tornando a expressão verdadeira. A taxa de juros  $r$  é composta continuamente ao longo do tempo pela exponencial, e para  $t < T_1$  a exponencial é menor que 1. Para uma taxa de curto prazo constante, a expressão (4.3) representa o valor presente do título de renda fixa.

Ao se considerar que a taxa de juros de curto prazo é modelada por um processo estocástico, a forma de determinar o preço de um título de renda fixa muda, e de

acordo com Musiela e Rutkowski (1998) o preço desse título em um instante  $t < T_1$  é definido por:

$$B(t, T_1) = \mathbb{E}_t^Q \left[ \exp \left( - \int_t^{T_1} r(s) ds \right) \right]; \quad \forall t \in T \quad (4.4)$$

Ao assumir que  $r(t)$  é um processo do tipo Vasicek (4.1), pode-se obter uma forma fechada para o preço de um título de renda fixa. Para não carregar muito a notação será escrito aqui como:  $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma d\varpi_t$ , de modo a deixar implícito que as constantes são relativas à taxa de juros. Definindo a função  $Y(t) = e^{\kappa t}r$  e calculando a sua diferencial  $d(Y(t))$ :

$$d(Y(t)) = \kappa e^{\kappa t} r dt + e^{\kappa t} dr \quad (4.5)$$

Como:  $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma d\varpi_t$

$$d(Y(t)) = d(e^{\kappa t}r) = e^{\kappa t}(\kappa r + \kappa\theta - \kappa r)dt + e^{\kappa t}\sigma d\varpi_t \quad (4.6)$$

Então:

$$d(e^{\kappa t}r) = e^{\kappa t}\kappa\theta dt + e^{\kappa t}\sigma d\varpi_t \quad (4.7)$$

Integrando (4.7) de 0 até  $t$  e assumindo que  $r(0) = r_0$  :

$$r(t) = e^{-\kappa t} \left[ r_0 + \theta(e^{\kappa t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\kappa u} d\varpi_u \right] \quad (4.8)$$

Para um caso mais genérico de intervalo de tempo, onde  $s \leq t$  tem-se:

$$r(t) = r(s) e^{-\kappa(t-s)} + \theta \left( 1 - e^{-\kappa(t-s)} \right) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} d\varpi_u \quad (4.9)$$

Conhecendo toda a informação até o instante de tempo  $s$ , a média e a variância de  $r(t)$  é dada por:

$$\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}} [r(t)] = r(s) e^{-\kappa(t-s)} + \theta \left(1 - e^{-\kappa(t-s)}\right) \quad (4.10)$$

$$\text{Var}_s^{\mathbb{Q}} [r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t-s)}\right) \quad (4.11)$$

Obtido a expressão para  $r(t)$  deve-se resolver (4.4) que pode ser escrita, pois a distribuição das taxas de juros de curto prazo é gaussiana:

$$B(t, T_1) = \exp \left( (-1) \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^{T_1} r(s) ds \right] + \frac{1}{2} (-1)^2 \text{Var}_s^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^{T_1} r(s) ds \right] \right) \quad (4.12)$$

Que resulta em uma expressão fechada para o preço de um título de renda fixa:

$$B(t, T_1) = m(t, T_1) e^{-n(t, T_1)r(t)} \quad (4.13a)$$

Onde:

$$m(t, T_1) = \exp \left( (n(t, T_1) - T_1 + t) \left( \theta_r - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa_r} \right) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa_r} n^2(t, T_1) \right)$$

e:

$$n(t, T_1) = \frac{1 - \exp(-\kappa_r(T_1 - t))}{\kappa_r}$$

A dinâmica dos retornos do preço do título de renda fixa é dada pela equação diferencial estocástica:

$$\frac{dB(t, T_1)}{B(t, T_1)} = r(t)dt + \sigma_B(t, T_1) d\varpi_r \quad (4.14)$$

Sendo a volatilidade do preço do título:  $\sigma_B(t, T_1) = n(t, T_1) \sigma_r$

# Capítulo 5

## Integrando risco de crédito e risco de mercado

O processo de Ornstein-Uhlenbeck foi escolhido para a dinâmica do *spread* de crédito instantâneo, com o intuito de facilitar os cálculos na obtenção de uma expressão fechada para a dinâmica dos retornos de preço do RFC e também para auxiliar nos cálculos a serem realizados na alocação dinâmica da carteira do investidor. Dessa forma o processo estocástico dos *spreads* de crédito instantâneo é dado por:

$$d\delta(t) = \kappa_\delta (\theta_\delta - \delta(t)) dt + \sigma_\delta d\varpi_\delta \quad (5.1)$$

As mesmas observações feitas para o processo de taxa de juros de curto prazo (4.1) valem aqui, onde os parâmetros são constantes e  $\kappa_\delta > 0$ ,  $\theta_\delta > 0$ ,  $\sigma_\delta > 0$ . O movimento browniano padrão é representado por  $\varpi_\delta$  e definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ .

Com o processo de taxa de juros de curto prazo  $r(t)$  e o processo do *spread* de crédito instantâneo definidos, pode-se retornar ao processo definido em (3.37) de modo a obter a dinâmica dos retornos de preço do RFC. Para situar escreve-se novamente a expressão do processo:

$$dD(t, T_1) = D(t, T_1) (r(t) + \delta(t)) dt + \tilde{H}(t) \tilde{b}(t) d\Psi(t, T_1) - v(t, T_1) dH(t)$$

O termo  $d\Psi(t, T_1)$  pode ser desenvolvido a partir da expressão (3.29), e será escrito na forma do produto de três integrais:

$$\Psi(t, T_1) = \Psi_0(t) \Psi_r(t, T_1) \Psi_\delta(t, T_1) \quad (5.2)$$

Com:

$$\Psi_0(t) = \exp\left(-\int_0^t (r(s) + \delta(s))ds\right) \quad (5.3)$$

$$\Psi_r(t, T_1) = \mathbb{E}_t^Q \left[ \exp\left(-\int_t^{T_1} r(s)ds\right) \right] \quad (5.4)$$

$$\Psi_\delta(t, T_1) = \mathbb{E}_t^F \left[ \exp\left(-\int_t^{T_1} \delta(s)ds\right) \right] \quad (5.5)$$

Deve-se calcular a forma diferencial das três expressões acima. A primeira expressão é diferenciada diretamente:

$$d\Psi_0(t) = -(r(t) + \delta(t)) \Psi_0(t) dt \quad (5.6)$$

A expressão (5.4) é semelhante à expressão (4.4), portanto sua solução é dada por:

$$\Psi_r(t, T_1) = m(t, T_1) e^{-n(t, T_1)r(t)} \quad (5.7)$$

Onde os termos:  $m(t, T_1)$  e  $n(t, T_1)$  foram definidos em (4.13a). O resultado obtido em (4.14) também vale para a dinâmica de retornos desse preço:

$$\frac{d\Psi_r(t, T_1)}{\Psi_r(t, T_1)} = [r(t)dt + \sigma_B(t, T_1) d\varpi_r] \quad (5.8)$$

Na expressão (5.5) tem-se o operador valor esperado  $\mathbb{E}_t^F[\cdot]$  definido na medida de probabilidade neutra ao risco a termo F associada ao vencimento  $T_1$ , nessa medida os preços dos ativos negociados quando descontados pelo título de renda fixa sem risco de crédito (o numerário adotado é  $B(t, T_1)$ ) com vencimento em  $T_1$  são martingais. Os

processos de taxa de juros de curto prazo e os processos do *spread* de crédito instantâneo podem ser dissociados, e de acordo com Hou (2003) o processo de  $\delta(t)$  nessa medida de probabilidade neutra ao risco a termo continua sendo gaussiano, portanto a sua solução é semelhante à (4.13a):

$$\Psi_\delta(t, T_1) = m_\delta(t, T_1) e^{-\varsigma_\delta(t, T_1)r(t)} \quad (5.9)$$

Onde:

$$m_\delta(t, T_1) = \exp\left((n_\delta(t, T_1) - T_1 + t)\left(\theta_\delta - \frac{\sigma_\delta^2}{2\kappa_\delta}\right) - \frac{\sigma_\delta^2}{4\kappa_\delta}n_\delta^2(t, T_1)\right)$$

e:

$$\varsigma_\delta(t, T_1) = \frac{1 - \exp(-\kappa_\delta(T_1 - t))}{\kappa_\delta} \quad (5.10)$$

A dinâmica dos retornos de  $\Psi_\delta(t, T_1)$  é dada por:

$$\frac{d\Psi_\delta(t, T_1)}{\Psi_\delta(t, T_1)} = [\delta(t)dt + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta] \quad (5.11)$$

Finalmente, expandindo a expressão (5.2) em sua forma diferencial:

$$d\Psi(t, T_1) = d\Psi_0\Psi_r\Psi_\delta + \Psi_0d\Psi_r\Psi_\delta + \Psi_0\Psi_r d\Psi_\delta \quad (5.12)$$

Substituindo os termos (5.3), (5.4) e (5.5) na expressão, chega-se ao resultado desejado:

$$\frac{d\Psi(t, T_1)}{\Psi(t, T_1)} = \sigma_B(t, T_1)d\varpi_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta \quad (5.13)$$

Após a substituição de (5.13) na expressão (3.37) e considerando as definições das funções (3.30) e (3.31), obtém-se uma expressão fechada para o preço de uma carteira bem diversificada de RFC's expressa por:

$$dD(t, T_1) = D(t, T_1) [(r(t) + \delta(t))dt + \sigma_B(t, T_1)d\varpi_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta] - v(t, T_1)dH(t) \quad (5.14)$$

De acordo com Hou (2002), o último termo da expressão acima pode ser anulado devido ao efeito de diversificação em ativos que apresentam risco de crédito, seu argumento é fundamentado no fato de assumir a existência de inúmeras empresas idênticas e os instantes das ocorrências dos eventos de *default* são independentes uns dos outros na economia.

$$\frac{dD(t, T_1)}{D(t, T_1)} = (r(t) + \delta(t))dt + \sigma_B(t, T_1)d\varpi_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta \quad (5.15)$$

A expressão acima é semelhante ao preço do título de renda fixa sem risco de crédito a menos do *spread* de crédito que altera o termo determinístico do preço, ou seja, à tendência de taxa de juros é adicionado o *spread* do RFC. Quando ocorrer o *default* e a perda fracional de crédito for total, ou  $\omega = 100\%$ , o termo  $\lambda(t)$  irá comparecer no lugar de  $\delta(t)$ , no termo determinístico. Outro ponto a ser observado na expressão, é o fato das duas fontes de risco agirem simultaneamente na dinâmica de retornos de preço do RFC. Com essas considerações, a expressão se altera para:

$$\frac{dD(t, T_1)}{D(t, T_1)} = (r(t) + \delta(t) - \lambda(t))dt + \sigma_B(t, T_1)d\varpi_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta \quad (5.16)$$

Definindo o termo  $\eta(t) = \delta(t) - \lambda(t)$  como uma taxa de recuperação esperada do RFC até a ocorrência de *default*. Da definição de  $\eta$  é direto que  $\eta = \left(\frac{1-\varpi}{\varpi}\right)\delta$ , e como já definido:  $\varpi \in (0, 1]$  é constante ao logo do tempo, sendo assim, pode-se a partir de (5.1) por substituição direta, definir o processo estocástico de  $\eta(t)$  na medida de probabilidade neutra ao risco  $\mathbb{Q}$ :

$$d\eta(t) = \kappa_\delta(\theta_\eta - \eta(t))dt + \sigma_\eta d\varpi_\delta \quad (5.17)$$

Onde:

$$\theta_\eta = \left( \frac{1 - \varpi}{\varpi} \right) \theta_\delta \quad \text{e} \quad \sigma_\eta = \left( \frac{1 - \varpi}{\varpi} \right) \sigma_\delta$$

Dessa forma obtém-se a dinâmica de retornos de preço do RFC:

$$\frac{dD(t, T_1)}{D(t, T_1)} = (r(t) + \eta(t))dt + \sigma_B(t, T_1) d\varpi_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta \quad (5.18)$$

Na carteira do investidor há interesse em aplicação em um índice com risco de ações, ou um índice de bolsa. Para representar a dinâmica de retornos dos preços desse ativo utilizará o modelo padrão log-normal:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma_S d\varpi_S \quad (5.19)$$

A volatilidade instantânea  $\sigma_S$  dos preços desse índice é assumida como sendo constante e o movimento browniano padrão  $\varpi_S$  é definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ .

Todos os movimentos brownianos são correlacionados uns com os outros, permitindo dessa forma a integração dos processos estocásticos e como conseqüência a integração do risco de crédito e riscos de mercado (taxa de juros e índice de ações). Como já mencionado, os processos geradores de incertezas nos preços dos ativos estão expressos na medida de probabilidade neutra ao risco  $\mathbb{Q}$  e suas correlações são constantes ao longo do tempo:  $d\varpi_i d\varpi_j = \rho_{ij} dt$  onde  $i, j \in \{r, \delta, S\}$  e  $i \neq j$ .

Definir todos os processos estocásticos na medida de probabilidade neutra ao risco, garante que os preços dos ativos da economia, determinados pela metodologia de não arbitragem sejam preços justos. Do ponto de vista do investidor deve-se reescrever os processos de preços em termo da medida de probabilidade subjetiva  $\mathbb{P}$ , pois esse necessita conhecer o prêmio de risco que ele deve receber para então tomar suas decisões de investimento.

## 5.1 Prêmios de riscos

Dada a estrutura de risco da economia em questão, as dinâmicas de  $r(t)$ ,  $\delta(t)$  e  $S(t)$  sob a medida de probabilidade subjetiva  $\mathbb{P}$  podem ser derivadas conhecendo os preços

de riscos de mercado de cada ativo da economia. Como o investidor considerado é avesso ao risco e deriva sua utilidade sobre a medida de probabilidade subjetiva P, a mudança de medida torna-se necessária.

Considerando que:  $\gamma_r$ ,  $\gamma_\delta$  e  $\gamma_S$  sejam respectivamente os preços de risco de mercado da taxa de juros, o preço de risco de *default* e o preço de risco de índice de ações e que os mesmos sejam constante, pode-se efetuar a mudança de medida utilizando o teorema de Girsanov para processos estocásticos vetoriais:

$$\begin{pmatrix} d\varpi_r^Q \\ d\varpi_\delta^Q \\ d\varpi_S^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\varpi_r^P \\ d\varpi_\delta^P \\ d\varpi_S^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \rho_{r\delta} & \rho_{rS} \\ \rho_{\delta r} & 1 & \rho_{\delta S} \\ \rho_{Sr} & \rho_{S\delta} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_\delta \\ \gamma_S \end{pmatrix} dt \quad (5.20)$$

como:  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ .

Em componentes:

$$\begin{cases} d\varpi_r^Q = (\gamma_r + \rho_{r\delta}\gamma_\delta + \rho_{rS}\gamma_S) dt + d\varpi_r^P \\ d\varpi_\delta^Q = (\rho_{\delta r}\gamma_r + \gamma_\delta + \rho_{\delta S}\gamma_S) dt + d\varpi_\delta^P \\ d\varpi_S^Q = (\rho_{rS}\gamma_r + \rho_{S\delta}\gamma_\delta + \gamma_S) dt + d\varpi_S^P \end{cases} \quad (5.21)$$

Substituindo nos processos já definidos em (4.1), (5.1) e (5.19) que estão na medida de probabilidade neutra ao risco Q. Após simplificações chega-se aos processos definidos na medida de probabilidade subjetiva P:

$$\begin{aligned} dr(t) &= [\kappa_r (\theta_r - r(t)) + \sigma_r (\gamma_r + \rho_{r\delta}\gamma_\delta + \rho_{rS}\gamma_S)] dt + \sigma_r d\varpi_r^P \\ d\delta(t) &= [\kappa_\delta (\theta_\delta - \delta(t)) + \sigma_\delta (\rho_{r\delta}\gamma_r + \gamma_\delta + \rho_{\delta S}\gamma_S)] dt + \sigma_\delta d\varpi_\delta^P \\ dS(t) &= r(t)S(t)dt + \sigma_S (\rho_{rS}\gamma_r + \rho_{S\delta}\gamma_\delta + \gamma_S) S(t)dt + \sigma_S S(t)d\varpi_S^P \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ou de uma forma menos carregada na notação:

$$\begin{aligned} dr(t) &= [\kappa_r (\theta_r - r(t)) + \sigma_r \overline{\gamma_r}] dt + \sigma_r d\varpi_r^P \\ d\delta(t) &= [\kappa_\delta (\theta_\delta - \delta(t)) + \sigma_\delta \overline{\gamma_\delta}] dt + \sigma_\delta d\varpi_\delta^P \\ dS(t) &= r(t)S(t)dt + \sigma_S \overline{\gamma_S} S(t)dt + \sigma_S S(t)d\varpi_S^P \end{aligned} \quad (5.23)$$

Onde:

$$\overline{\gamma}_r = \gamma_r + \rho_{r\delta}\gamma_\delta + \rho_{rS}\gamma_S$$

$$\overline{\gamma}_\delta = \sigma_\delta\rho_{\delta r}\gamma_r + \gamma_\delta + \rho_{\delta S}\gamma_S$$

$$\overline{\gamma}_S = \rho_{Sr}\gamma_r + \rho_{S\delta}\gamma_\delta + \gamma_S$$

A mudança de medida de probabilidade efetuada, faz com que os processos fiquem correlacionados entre si e expostos às três fontes de riscos existentes na economia em questão. Pelo fato dos movimentos brownianos terem sido definidos correlacionados entre si, é intuitivo que o prêmio de risco de mercado cobrado dos investidores para um ativo, venha acompanhado dos outros dois fatores de risco.

De acordo com os resultados obtidos em (5.21), as relações entre a medida de probabilidade neutra ao risco Q e a medida de probabilidade subjetiva P, para os processos que influenciam os preços dos ativos na economia são dadas por:

$$d\varpi_r^Q = \overline{\gamma}_r dt + d\varpi_r^P \quad (5.24)$$

$$d\varpi_\delta^Q = \overline{\gamma}_\delta dt + d\varpi_\delta^P \quad (5.25)$$

$$d\varpi_S^Q = \overline{\gamma}_S dt + d\varpi_S^P \quad (5.26)$$

Para o RFC deve-se realizar as substituições dos processos que causam incerteza no preço do título, o processo da taxa de juros de curto prazo e o processo do *spread* de crédito instantâneo. Substituindo (5.24) e (5.25) na dinâmica de retorno (5.18), obtém-se a dinâmica de retorno de preço do RFC na medida de probabilidade subjetiva P.

$$\begin{aligned} \frac{dD(t, T_1)}{D(t, T_1)} &= (r(t) + \eta(t) + \sigma_B(t, T_1)\overline{\gamma}_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta\overline{\gamma}_\delta) dt + \\ &+ \sigma_B(t, T_1) d\varpi_r^P + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta^P \end{aligned} \quad (5.27)$$

O mesmo se aplica para as outras dinâmicas de retornos dos outros dois ativos que apresentam apenas risco de mercado (taxa de juros e preços de ações):

$$\frac{dB(t, T_1)}{B(t, T_1)} = (r(t) + \sigma_B(t, T_1)\overline{\gamma}_r) dt + \sigma_B(t, T_1) d\varpi_r^P \quad (5.28)$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) + \sigma_S\overline{\gamma}_S) dt + \sigma_S d\varpi_S^P \quad (5.29)$$

# Capítulo 6

## Alocação estratégica intertemporal

Antes de abordar a questão da alocação estratégica de ativos em tempo contínuo, deve-se responder duas perguntas: Estratégias ótimas podem ser feitas sob quais suposições? Como essas estratégias ótimas podem ser calculadas? Assumindo que se conhece a resposta da primeira pergunta, resta apresentar uma resposta à outra questão, que é justamente o foco desse capítulo. Programação dinâmica, ou controle estocástico e a abordagem por martingais, são as duas técnicas utilizadas para se tratar a questão. Nesse trabalho se concentrará apenas na primeira técnica.

São nos trabalhos de Merton que se encontram as primeiras aplicações do conceito de programação dinâmica para solucionar o problema de consumo/investimento ótimo em tempo contínuo. Essa abordagem requer que as variáveis de estado obedeçam a um processo de Markov, e os preços dos ativos sejam funções dessas variáveis de estado e do tempo. A solução desse problema envolve a resolução de uma equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) associado a um problema de controle, sob certas condições técnicas a solução da equação HJB fornecerá não apenas a alocação estratégica ótima ao longo do horizonte de investimento mas também a solução da função utilidade indireta.

### 6.1 Utilidade e aversão ao risco

O problema de maximização de riqueza do investidor na economia em questão, pode ser resumido pela pergunta:

Qual a melhor forma de alocar em ativos contendo risco e em um ativo sem risco, a fim de maximizar a satisfação de um investidor?

De acordo com Huang e Litzenberger (1988) a satisfação pode ser resumida como sendo a maximização de sua utilidade. A escolha é realizada sob incerteza, sendo que essa é causada pelos diversos estados da natureza que por fim acarretam em variações nos preços dos ativos.

A teoria microeconômica define que o investidor possui uma relação de ordem dentro de um conjunto de alternativas de planos de investimento ou planos de consumo ou conjunto de quantidades de dinheiro. Formalmente, se  $X$  representa um conjunto de planos de investimento, então define-se uma relação de ordem  $\succeq$  em  $X$ , que é uma coleção de pares de planos de investimento  $(a, b)$  onde a preferência de  $a$  em relação à  $b$  é denotada por:  $a \succeq b$ , e se for estritamente preferida é escrita:  $a \succ b$ . Para que uma relação de ordem seja considerada uma relação de preferência de um investidor racional, essa deve satisfazer as propriedades de transitividade e completeza. Diz-se que a relação de ordem é transitiva, se  $a \succeq b$  e  $b \succeq c$  então  $a \succeq c$ , que permite uma interpretação direta, se  $a$  é preferido à  $b$  e  $b$  é preferido à  $c$ , então  $a$  é preferido à  $c$ . Uma relação de ordem é dita completa, se para os dois planos de investimento  $a$  e  $b$  existem as duas relações de ordens  $a \succeq b$  ou  $b \succeq a$ , ou seja, os dois planos sempre podem ser comparados.

Considerando que o investidor possui função utilidade positiva, contínua e crescente, pode-se definir aversão ao risco. Um investidor é avesso ao risco se e somente se a sua função utilidade respeitar a desigualdade:  $U(\mathbb{E}[W]) \geq \mathbb{E}[U(W)]$  por essa definição, concluí-se que um investidor avesso ao risco possui  $U(W)$  do tipo côncava.

Imagine que para um investidor avesso ao risco, com riqueza inicial  $W$ , é oferecido uma aposta que poderá aumentar ou diminuir sua riqueza em um volume  $G$  com a mesma probabilidade. Então, se aceitar a aposta, existe 50% de chances de sua riqueza aumentar para  $W + G$  e a mesma probabilidade de sua riqueza diminuir para  $W - G$ , sua utilidade esperada nessa escolha é:  $\frac{1}{2}[U(W + G) + U(W - G)]$ . Ao refutar a aposta o montante de sua riqueza não muda e sua utilidade esperada permanece inalterada  $U(W)$ . Como a curvatura da função utilidade é côncava a relação:  $U(W) > \frac{1}{2}[U(W + G) + U(W - G)]$  é verdadeira como pode ser verificado na Figura 6.1, então para o investidor avesso ao risco não é interessante a aposta, pois não é oferecido nenhum prêmio para que mude a relação de desigualdade.

O grau de curvatura da função utilidade determina a intensidade da aversão ao risco do investidor, e a curvatura pode ser medida entre a razão da segunda derivada da

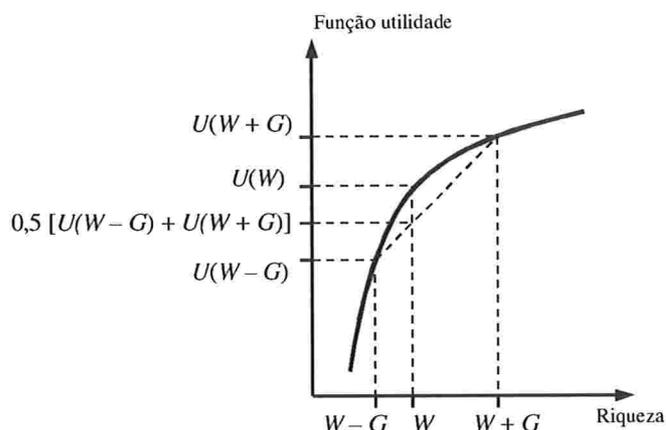


Figura 6.1: Gráfico da função utilidade de um investidor avesso ao risco com riqueza inicial  $W$  exposto a ganhar ou perder um montante  $G$  com probabilidades iguais.

função utilidade com a riqueza e a primeira derivada da função utilidade com a riqueza, dessa forma elimina-se qualquer dependência da medida da curvatura em relação a unidade na qual a função utilidade é medida. O coeficiente de aversão absoluta ao risco determina a quantidade absoluta de dinheiro que um investidor está disposto a pagar para se expor ao risco de uma aposta de um absoluto tamanho, esse coeficiente é definido por:

$$ARA(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (6.1)$$

Quando deseja-se determinar a fração da riqueza na qual um investidor irá pagar para se expor ao risco de uma aposta que possui um tamanho relativo ao de sua riqueza, utiliza-se o coeficiente relativo de aversão ao risco, conhecido também por coeficiente de Arrow-Pratt.

$$RRA(W) = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (6.2)$$

Enquanto o  $ARA$  faz distinção entre a riqueza pessoal dos investidores, para esse coeficiente um investidor com muita riqueza é indiferente para assumir o mesmo risco que amedronta um investidor que possui uma riqueza menor, o  $RRA$  determina a aversão ao risco independente do nível de riqueza pessoal, como resultado todos os investidores podem vir a tomar a mesma decisão.

## 6.2 Alocação intertemporal

O conceito básico da alocação estratégica pode ser apresentado de forma mais direta por meio de um exemplo, encontra-se em Campbell e Viceira (2002) outros exemplos que auxiliam o entendimento dessa abordagem. Considere um investidor que possua uma riqueza inicial  $W_0$  em  $t = 0$ , sendo que ele pode alocar frações dessa riqueza entre dois ativos: um totalmente livre de risco, que remunera continuamente à uma taxa de juros contante  $r$  e uma ação que possui incerteza em seu preço no instante seguinte, o retorno de cada ativo pode ser representado respectivamente pelas equações a seguir:

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = rdt \quad (6.3)$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_S dt + \sigma_S dB_S \quad (6.4)$$

Os termos  $\mu_S$  e  $\sigma_S$  são parâmetros constantes ao longo do tempo e representam respectivamente o retorno esperado e a volatilidade no preço da ação, o termo  $dB_S$  é o movimento browniano padrão definido em um espaço de probabilidade apropriado. A variação de sua riqueza fornecerá a restrição orçamentária ao longo do tempo, considerando que o investidor alocou  $\pi \in (0, 1)$  na ação e  $1 - \pi$  no ativo sem risco, sua riqueza está distribuída:

$$W = \pi S(t) + (1 - \pi) B(t) \quad (\text{restrição orçamentária})$$

A variação relativa no valor da riqueza é:

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = \pi \frac{dS(t)}{S(t)} + (1 - \pi) \frac{dB(t)}{B(t)} \quad (6.5)$$

Substituindo (6.3) e (6.4) em (6.5), obtém-se uma equação diferencial estocástica que representa a evolução da riqueza do investidor em função do tempo.

$$dW(t) = W(t) [\pi(t) (\mu_S dt + \sigma_S dB_S) + (1 - \pi(t)) rdt] \quad (6.6)$$

Utilizando o artifício adotado por Merton (1969) que observou que a função utilidade indireta pode ser transformada em uma equação HJB.

$$J(W(t), t) = \max \mathbb{E}[U(W(T))] \quad (6.7)$$

Como mencionado no início do capítulo, o princípio de otimização de Bellman é a ferramenta mais apropriada para resolver problemas de otimização dinâmica de carteiras de investimento, pois ele permite transformar a questão de otimização dinâmica em uma equação diferencial, Merton (1971) mostrou que de acordo com o princípio de Bellman:

$$\max L^\pi J(W(t), t) = 0 \quad (6.8)$$

A equação (6.8) é uma equação HJB, onde  $L^\pi$  é um operador definido por:

$$L^\pi := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial W^2} + \frac{\partial}{\partial W} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Aplicado em  $J(W(t), t)$  resulta em:

$$L^\pi J(W(t), t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W^2 \pi^2 \sigma_S^2 + \frac{\partial J}{\partial W} W [\pi \mu_S + (1 - \pi) r] + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.9)$$

O objetivo do controle ótimo estocástico, é obter um valor de  $\pi(t)$  que maximize a riqueza, nesse caso simples é o ponto de mínimo da parábola (6.9) que é dado por:

$$\pi = - \frac{\frac{\partial J}{\partial W} (\mu_S - r)}{W \sigma_S^2 \frac{\partial^2 J}{\partial W^2}}$$

Substituindo em (6.9) e simplificando:

$$- \frac{\left( \frac{\partial J}{\partial W} \right)^2 (\mu_S - r)^2}{2 \sigma_S^2 \frac{\partial^2 J}{\partial W^2}} + W \frac{\partial J}{\partial W} r + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.10)$$

De acordo com (6.7) a condição de contorno em  $t = T$  é  $J(W(T), T) = W^\gamma$ , uma solução plausível para a equação diferencial parcial (6.10), seria assumir uma equação da forma:

$$J(W(t), t) = f(t) W^\gamma, \quad \text{onde : } 0 < \gamma < 1$$

Observe que a escolha de  $W^\gamma$  com valores apropriados para o expoente, garante que essa seja a função utilidade do investidor avesso ao risco como definido anteriormente. Ao substituir essa possível solução em (6.10), tem-se:

$$-\frac{(\mu_S - r)^2}{2\sigma_S^2} \frac{(f(t) \gamma W^{\gamma-1})^2}{f(t) \gamma (\gamma - 1) W^{2\gamma-2}} + W r f(t) \gamma W^{\gamma-1} + \frac{df(t)}{dt} W^\gamma = 0 \quad (6.11)$$

após simplificações:

$$\frac{df(t)}{dt} - f(t) \left( \frac{(\mu_S - r)^2}{2\sigma_S^2} \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} + \gamma r \right) = 0 \quad (6.12)$$

Resulta em uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem de coeficientes constantes, com condição inicial:  $J(W(t), t = 0) = f_0 W_0$  que possui solução única. Não será demonstrado aqui como se obter sua solução, o objetivo do exemplo foi de apresentar os conceitos que são mais pertinentes na alocação dinâmica de uma carteira de investimento para um investidor perante um ativo com risco e uma aplicação sem risco.

### 6.3 Solução do problema de alocação estratégica para a carteira com risco de crédito e mercado

Na economia em questão, o investidor busca maximizar sua utilidade (no sentido de von-Neumann-Morgenstern) sobre sua riqueza final, alocando-a dinamicamente dentro de um intervalo de tempo entre os ativos existentes: CDI, um título de renda fixa, um RFC e um índice de ações. Ou seja, o problema de maximização se torna um problema de otimização que pode ser formulado como:

$$\max \mathbb{E}_0^P [U(W(T))] \quad (6.13)$$

Que significa maximizar o valor esperado em  $t = 0$ , com relação à medida de probabilidade subjetiva  $P$ , da função utilidade da riqueza no final dentro do horizonte de investimento  $T$ . O investidor possui uma riqueza inicial  $W_0 > 0$ , e não possui renda complementar para adquirir mais quantidades de ativos da economia ao longo do horizonte de investimento. Sua preferência sob incerteza é dado por uma função utilidade do tipo côncava, com coeficiente relativo de aversão ao risco é constante e independente do nível da sua riqueza. A função utilidade adotada é representada pela expressão:

$$U(W) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} W^{1-\gamma}, & \text{se } W > 0 \\ -\infty, & \text{se } W \leq 0 \end{cases}, \quad \forall t \in T \quad (6.14)$$

Também referenciada por função utilidade isoelástica, o termo  $\gamma > 0$  é o coeficiente relativo de aversão ao risco de Arrow-Pratt. Quando  $\gamma = 1$  a função utilidade assume a forma  $U(W) = \log W$ , para  $W > 0$ .

Dado que em  $t = 0$  a riqueza é  $W_0$  o investidor alocará frações desse montante para compra dos ativos da economia em cada instante de tempo  $t \in [0, T]$ . As frações serão representadas pelos elementos do vetor  $\pi(t)' = (\pi_B(t), \pi_S(t), \pi_D(t))$ , onde o elemento  $\pi_B(t)$  representa a fração alocada em título de renda fixa sem risco de crédito, o elemento  $\pi_S(t)$  a fração em índice de ações e  $\pi_D(t)$  a fração alocada em RFC. A quantidade a ser investida em CDI é diretamente fornecida por  $1 - \pi(t)'\mathbf{1}$ , onde  $\mathbf{1}$  é o vetor  $(1, 1, 1)'$ . A restrição orçamentária, ou a dinâmica da riqueza do investidor ao longo do tempo é obtida por meio da variação relativa da riqueza do investidor:

$$W(t) = r(t)[1 - \pi_B(t) - \pi_S(t) - \pi_D(t)] + \\ + \pi_B(t)B(t, T_1) + \pi_S(t)S(t) + \pi_D(t)D(t, T_1) \quad (6.15)$$

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = r(t)(1 - \pi_B(t) - \pi_S(t) - \pi_D(t))dt + \\ + \pi_B(t)\frac{dB(t, T_1)}{B(t, T_1)} + \pi_S(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + \pi_D(t)\frac{dD(t, T_1)}{D(t, T_1)} \quad (6.16)$$

As dinâmicas das variações dos preços dos ativos foram deduzidas anteriormente, e são apresentados novamente, lembrando que os processos se encontram na medida de probabilidade subjetiva  $P$ .

$$\frac{dB(t, T_1)}{B(t, T_1)} = (r(t) + \sigma_B(t, T_1)\overline{\gamma}_r) dt + \sigma_B(t, T_1) d\varpi_r^P$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) + \sigma_S\overline{\gamma}_S) dt + \sigma_S d\varpi_S^P$$

$$\begin{aligned} \frac{dD(t, T_1)}{D(t, T_1)} &= [r(t) - \eta(t) + \sigma_B(t, T_1)\overline{\gamma}_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta\overline{\gamma}_\delta] dt + \\ &\quad + \sigma_B(t, T_1) d\varpi_r^P + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta d\varpi_\delta^P \end{aligned}$$

Substituindo os três processos em (6.16) e omitindo a dependência temporal dos termos:  $r(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\sigma_B(t, T_1)$  e  $\varsigma_\delta(t, T_1)$  tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{W(t)} &= \pi_B [(r + \sigma_B\overline{\gamma}_r) dt + \sigma_B d\varpi_r^P] + \pi_S [(r + \sigma_S\overline{\gamma}_S) dt + \sigma_S d\varpi_S^P] + \\ &\quad + \pi_D [(r - \eta + \sigma_B\overline{\gamma}_r + \varsigma_\delta\sigma_\delta\overline{\gamma}_\delta) dt + \sigma_B d\varpi_r^P + \varsigma_\delta\sigma_\delta d\varpi_\delta^P] + \\ &\quad + r(1 - \pi_B - \pi_S - \pi_D) dt \end{aligned} \quad (6.17)$$

Definindo:  $\boldsymbol{\mu}(t)$  o vetor que representa os retornos instantâneos dos ativos contendo risco,  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$  a matriz que contém as volatilidades dos ativos com risco na economia e  $\mathbf{w}^P$  o vetor que representa os movimentos brownianos correlacionados dos ativos na medida de probabilidade subjetiva  $P$ , como seguem abaixo:

$$\boldsymbol{\mu}(t) := \begin{pmatrix} r(t) + \sigma_B(t, T_1)\overline{\gamma}_r \\ r(t) + \sigma_S\overline{\gamma}_S \\ r(t) - \eta(t) + \sigma_B(t, T_1)\overline{\gamma}_r + \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta\overline{\gamma}_\delta \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) := \begin{pmatrix} \sigma_B(t, T_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_S & 0 \\ \sigma_B(t, T_1) & 0 & \varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{w}^P = (\varpi_r^P, \varpi_S^P, \varpi_\delta^P)' \quad (6.20)$$

Sua forma diferencial dada por  $d\mathbf{w}^P = (d\varpi_r^P, d\varpi_S^P, d\varpi_\delta^P)'$ .

Tendo as definições em mãos, pode-se escrever em formato matricial a equação (6.17), obtendo assim:

$$dW(t) = W(t) [(r(t) + \boldsymbol{\pi}(t)'(\boldsymbol{\mu}(t) - r(t)\mathbf{1})) dt + \boldsymbol{\pi}(t)'\boldsymbol{\Sigma}(t) d\mathbf{w}^P] \quad (6.21)$$

As estratégias de negociação são definidas como elementos do conjunto:

$$A(W_0) := \{\boldsymbol{\pi}(\cdot) \in \mathbb{R}^3 : W(t) > 0, \forall t \in [0, T]\} \quad (6.22)$$

Observe que ao longo do horizonte de investimento não há possibilidade do investidor perder sua riqueza  $W(t) > 0$ . O objetivo do investidor é atingir um vetor  $\boldsymbol{\pi}(t)$  que maximize sua riqueza em  $T$ , onde a fração dada pelo vetor é um processo de Markov, portanto a sua escolha do instante futuro depende apenas do estado no instante atual. Como discutido anteriormente, o problema de otimização é resolvido com o auxílio do método do controle estocástico e adota-se o artifício de definir uma função utilidade indireta  $J(W(t), r(t), \eta(t), t)$ . Observe que as variáveis de estado são aquelas que podem causar alterações no preço dos ativos, o preço do índice de bolsa  $S(t)$  seria uma variável de estado, caso a carteira estivesse investido em futuro desse ativo.

$$J(W(t), r(t), \eta(t), t) = \max_{\{\boldsymbol{\pi}(u) \in A(W), t \leq u \leq T\}} \mathbb{E}_0^P [U(W(T))] \quad (6.23)$$

Aplicando o operador diferencial  $L^\pi$  à função utilidade indireta (6.23) e igualando à zero, resulta na equação HJB:

$$L^\pi J(W(t), r(t), \eta(t), t) = 0$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
L^\pi J(W(t), r(t), \eta(t), t) = & \\
\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \eta} (\kappa_\delta (\theta_\eta - \eta) + \sigma_\eta \overline{\gamma}_\delta) + \frac{\partial J}{\partial r} (\kappa_r (\theta_r - r) + \sigma_r \overline{\gamma}_r) + & \\
+ \frac{\partial J}{\partial W} W [r + \pi_B \sigma_B \overline{\gamma}_r + \pi_S \sigma_S \overline{\gamma}_S + \pi_D (\sigma_B \overline{\gamma}_r + \varsigma_\delta \sigma_\delta \overline{\gamma}_\delta - \eta)] + & \\
+ \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} \sigma_\eta^2 + \frac{\partial^2 J}{\partial r^2} \sigma_r^2 + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta \partial r} \sigma_\eta \sigma_r \rho_{r\delta} + & \\
+ \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial r} W (\sigma_r \sigma_B (\pi_B + \pi_D) + \sigma_r \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_D \rho_{r\delta} + \sigma_r \sigma_S \pi_S \rho_{rS}) + & \quad (6.24) \\
+ \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial \eta} W (\sigma_\eta \sigma_B (\pi_B + \pi_D) \rho_{r\delta} + \sigma_\eta \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_D + \sigma_\eta \sigma_S \pi_S \rho_{S\delta}) + & \\
+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W^2 (\sigma_B^2 (\pi_B + \pi_D)^2 + \varsigma_\delta^2 \sigma_\delta^2 \pi_D^2 + \sigma_S^2 \pi_S^2 + & \\
+ 2\sigma_B (\pi_B + \pi_D) \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_D \rho_{r\delta} + 2\sigma_B (\pi_B + \pi_D) \sigma_S \pi_S \rho_{rS} + & \\
+ 2\sigma_S \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_S \pi_D \rho_{S\delta}) = 0 &
\end{aligned}$$

A condição de primeira ordem para a equação HJB é utilizada para obter os pesos da carteira ótima, assumindo que  $\frac{\partial^2 J}{\partial W^2} < 0$ .

Chamando  $L^\pi J(W(t), r(t), \eta(t), t) = \Phi$  tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \pi_B} = & \frac{\partial J}{\partial W} W \sigma_B \overline{\gamma}_r + \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial r} W \sigma_r \sigma_B + \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial \eta} W \sigma_\eta \sigma_B \rho_{r\delta} + \\
& + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W^2 \sigma_B^2 (\pi_B + \pi_D) + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W^2 \sigma_B (\varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_D \rho_{r\delta} + \sigma_S \pi_S \rho_{rS}) \quad (6.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \pi_S} = & \frac{\partial J}{\partial W} W \sigma_S \overline{\gamma}_S + \\
& + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W^2 (\sigma_S^2 \pi_S + \sigma_B (\pi_B + \pi_D) \sigma_S \rho_{rS} + \sigma_S \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_D \rho_{S\delta}) \quad (6.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \pi_D} = & \frac{\partial J}{\partial W} W (\sigma_B \overline{\gamma}_r + \varsigma_\delta \sigma_\delta \overline{\gamma}_\delta - \eta) + \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial r} W (\sigma_r \sigma_B + \sigma_r \varsigma_\delta \sigma_\delta \rho_{r\delta}) + \\
& + \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial \eta} W (\sigma_\eta \sigma_B \rho_{r\delta} + \sigma_\eta \varsigma_\delta \sigma_\delta) + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} W^2 [\sigma_B^2 (\pi_D + \pi_B) + \varsigma_\delta^2 \sigma_\delta^2 \pi_D + \\
& + \sigma_B \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_B \rho_{r\delta} + 2\sigma_B \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_D \rho_{r\delta} + 2\sigma_B \sigma_S \pi_S \rho_{rS} + \sigma_S \varsigma_\delta \sigma_\delta \pi_S \rho_{S\delta}] \quad (6.27)
\end{aligned}$$

Após resolver o sistema acima, para as incógnitas  $\bar{\pi}_B$ ,  $\bar{\pi}_S$  e  $\bar{\pi}_D$ , obtém-se três equações diferenciais parciais.

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_B(t) &= \frac{\sigma_\eta}{W\varsigma_\delta\sigma_\delta} \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial W \partial \eta}}{\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}} - \frac{1}{W} \frac{\frac{\partial J}{\partial W}}{\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}} \Phi_B^\eta(t) - \frac{\sigma_r}{W\sigma_B} \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial W \partial r}}{\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}} \\
\bar{\pi}_S(t) &= -\frac{1}{W} \frac{\frac{\partial J}{\partial W}}{\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}} \Phi_S^\eta(t) \\
\bar{\pi}_D &= -\frac{1}{W} \frac{\frac{\partial J}{\partial W}}{\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}} \Phi_D^\eta(t) - \frac{\sigma_\eta}{W\varsigma_\delta\sigma_\delta} \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial W \partial \eta}}{\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Os termos  $\Phi_B^\eta(t)$ ,  $\Phi_S^\eta(t)$  e  $\Phi_D^\eta(t)$  são definidos por:

$$\begin{aligned}
\Phi_B^\eta(t) &:= \Phi_B(t) + A_B(t)\eta(t) - \Phi_D^\eta(t) \\
\Phi_S^\eta(t) &:= \Phi_S + A_S(t)\eta(t) \\
\Phi_D^\eta(t) &:= \Phi_D(t) + A_D(t)\eta(t)
\end{aligned} \tag{6.29}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\Phi_B(t) &:= \frac{(1 - \rho_{S\delta}^2)\bar{\gamma}_r - (\rho_{r\delta} - \rho_{S\delta}\rho_{rS})\bar{\gamma}_\delta - (\rho_{rS} - \rho_{S\delta}\rho_{r\delta})\bar{\gamma}_S}{\sigma_B(1 - \rho_{S\delta}^2 - \rho_{r\delta}^2 - \rho_{rS}^2 + 2\rho_{S\delta}\rho_{r\delta}\rho_{rS})} \\
\Phi_S &:= \frac{(1 - \rho_{r\delta}^2)\bar{\gamma}_S - (\rho_{S\delta} - \rho_{r\delta}\rho_{rS})\bar{\gamma}_\delta - (\rho_{rS} - \rho_{S\delta}\rho_{r\delta})\bar{\gamma}_r}{\sigma_S(1 - \rho_{S\delta}^2 - \rho_{r\delta}^2 - \rho_{rS}^2 + 2\rho_{S\delta}\rho_{r\delta}\rho_{rS})} \\
\Phi_D(t) &:= \frac{(1 - \rho_{rS}^2)\bar{\gamma}_\delta - (\rho_{r\delta} - \rho_{S\delta}\rho_{rS})\bar{\gamma}_r - (\rho_{r\delta} - \rho_{rS}\rho_{r\delta})\bar{\gamma}_S}{\varsigma_\delta\sigma_\delta(1 - \rho_{S\delta}^2 - \rho_{r\delta}^2 - \rho_{rS}^2 + 2\rho_{S\delta}\rho_{r\delta}\rho_{rS})}
\end{aligned} \tag{6.30}$$

e:

$$\begin{aligned}
A_B(t) &:= \frac{\rho_{r\delta} - \rho_{S\delta}\rho_{rS}}{\varsigma_\delta \sigma_\delta \sigma_B (1 - \rho_{S\delta}^2 - \rho_{r\delta}^2 - \rho_{rS}^2 + 2\rho_{S\delta}\rho_{r\delta}\rho_{rS})} \\
A_S(t) &:= \frac{\rho_{S\delta} - \rho_{r\delta}\rho_{rS}}{\varsigma_\delta \sigma_\delta \sigma_S (1 - \rho_{S\delta}^2 - \rho_{r\delta}^2 - \rho_{rS}^2 + 2\rho_{S\delta}\rho_{r\delta}\rho_{rS})} \\
A_D(t) &:= -\frac{1 - \rho_{rS}^2}{(1 - \rho_{S\delta}^2 - \rho_{r\delta}^2 - \rho_{rS}^2 + 2\rho_{S\delta}\rho_{r\delta}\rho_{rS}) (\varsigma_\delta(t) \sigma_\delta)^2}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Substituindo os valores de  $\bar{\pi}$  obtidos em (6.28) na equação de HJB obtém-se uma equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \frac{\partial^2 J}{\partial \eta \partial r} \sigma_\eta \sigma_r \rho_{r\delta} - \left( \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial \eta} \right)^2 \frac{\sigma_\eta^2}{2} + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} \frac{\sigma_\eta^2}{2} + \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial \eta} \frac{\partial J}{\partial W} \sigma_\eta \left( \frac{\eta}{\varsigma_\delta \sigma_\delta} + \bar{\gamma}_\delta \right) + \\
&+ \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \frac{\partial J}{\partial \eta} [(\kappa_\delta \theta_\eta + \sigma_\eta \bar{\gamma}_\delta) - \kappa_\delta \eta] - \left( \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial r} \right)^2 \frac{\sigma_r^2}{2} + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \frac{\partial^2 J}{\partial r^2} \frac{\sigma_r^2}{2} - \frac{\partial^2 J}{\partial W \partial r} \frac{\partial J}{\partial W} \sigma_r + \\
&+ \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \frac{\partial J}{\partial r} [(\kappa_r \theta_r + \sigma_r \bar{\gamma}_r) - \kappa_r r] + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \Gamma_1 + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \frac{\partial J}{\partial W} W r + \frac{\partial^2 J}{\partial W^2} \frac{\partial J}{\partial t} = 0
\end{aligned}$$

Onde:

$$\Gamma_1 = \frac{A_D(t)}{2} \eta(t)^2 + \Phi_D(t) \eta(t) + B_0$$

e:

$$\begin{aligned}
B_0 &= -\frac{1}{2(1 - \rho_{S\delta}^2 - \rho_{r\delta}^2 - \rho_{rS}^2 + 2\rho_{S\delta}\rho_{r\delta}\rho_{rS})} [(1 - \rho_{S\delta}^2) \bar{\gamma}_r^2 + \\
&+ (1 - \rho_{r\delta}^2) \bar{\gamma}_S^2 + (1 - \rho_{rS}^2) \bar{\gamma}_\delta^2 - 2(\rho_{rS} - \rho_{S\delta}\rho_{r\delta}) \bar{\gamma}_r \bar{\gamma}_S + \\
&- 2(\rho_{r\delta} - \rho_{S\delta}\rho_{rS}) \bar{\gamma}_r \bar{\gamma}_\delta - 2(\rho_{S\delta} - \rho_{r\delta}\rho_{rS}) \bar{\gamma}_\delta \bar{\gamma}_S]
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Uma solução plausível, adotada por Hou (2003) para a essa equação diferencial parcial é:

$$J(W, r, \eta, t) = g(t) \exp \left( \frac{l(t)}{2} \eta(t)^2 + k(t) \eta(t) + f(t) r(t) \right) \cdot \frac{1}{1 - \gamma} W^{1-\gamma} \tag{6.33}$$

Com as condições para  $t = T$ :

$$l(T) = k(T) = f(T) = 0 \quad \text{e} \quad g(T) = 1$$

Com essa solução, a equação diferencial parcial pode ser simplificada para uma equação diferencial ordinária:

$$C_0 \eta(t)^2 + C_1 \eta(t) + C_2 r(t) + \left( C_3 + \frac{dg(t)}{dt} \frac{\gamma}{g(t)} \right) = 0 \quad (6.34)$$

Onde:

$$C_0 = \frac{dl}{dt} \frac{\gamma}{2} + \frac{\sigma_\eta^2}{2} l^2 - \left[ (1 - \gamma) \frac{\sigma_\eta}{\varsigma_\delta \sigma_\delta} + \gamma \kappa_\delta \right] l - (1 - \gamma) A_D \quad (6.35)$$

$$C_1 = \frac{dk}{dt} \gamma + \sigma_\eta^2 k l - \left[ (1 - \gamma) \frac{\sigma_\eta}{\varsigma_\delta \sigma_\delta} + \gamma \kappa_\delta \right] k + \gamma \sigma_\eta \sigma_r \rho_{r\delta} l f + (\gamma \kappa_\delta \theta_\eta + \sigma_\eta \overline{\gamma_\delta}) l - (1 - \gamma) \Phi_D \quad (6.36)$$

$$C_2 = \gamma \left[ \frac{df}{dt} - \kappa_r f + (1 - \gamma) \right] \quad (6.37)$$

$$C_3 = \frac{\sigma_r^2}{2} f^2 + (\gamma \kappa_r \theta_r + \sigma_r \overline{\gamma_r}) f + \gamma \sigma_\eta \sigma_r \rho_{r\delta} k f + (\gamma \kappa_\delta \theta_\eta + \sigma_\eta \overline{\gamma_\delta}) k + \frac{\sigma_\eta^2}{2} k^2 + \frac{\gamma \sigma_\eta^2}{2} l - (1 - \gamma) B_0 \quad (6.38)$$

Quando  $C_3 = 0$  e  $f(t) = 0$  tem-se:

$$f(t) = \frac{1 - \gamma}{\kappa_r} (1 - \exp((t - T) \kappa_r)) \quad (6.39)$$

Para  $C_2 = 0$  a equação diferencial ordinária é do tipo de Riccati e com  $l(T) = 0$  tem-se:

$$l(t) = -\frac{2(1-\gamma)A_D(t)}{\gamma} \cdot \frac{\exp((T-t)\vartheta(t)) - 1}{\exp((T-t)\vartheta(t)) \cdot [\vartheta(t) + 2\xi(t)] + 2\vartheta(t)} \quad (6.40)$$

Onde:  $\vartheta(t) = 2\sqrt{\frac{(1-\gamma)A_D(t)}{\gamma^2}\sigma_\eta^2 + \xi(t)^2}$

e:  $\xi(t) = \left(\kappa_\delta + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\sigma_\eta}{\varsigma_\delta(t, T_1)\sigma_\delta}\right)$

Resolvido  $f(t)$  e  $l(t)$  e sendo  $k(T) = 0$ , utiliza-se  $C_1 = 0$  para resolver  $k(t)$ :

$$\begin{aligned} k(t) = & \exp\left(-\int_t^T \frac{(1-\gamma)\sigma_\eta}{\gamma\varsigma_\delta(u, T_1)\sigma_\delta} - \frac{\sigma_\eta^2}{\gamma} l(u) du\right) \cdot \\ & \cdot \left[-\int_t^T \left(\left(\kappa_\delta\theta_\eta + \sigma_r\sigma_\eta\rho_{r\delta}f(u) + \frac{\sigma_\eta\bar{\gamma}_\delta}{\gamma}\right) l(u) + \frac{1-\gamma}{\gamma}\Phi_D(u)\right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \exp\left(-\int_u^T \frac{(1-\gamma)\sigma_\eta}{\gamma\varsigma_\delta(s, T_1)\sigma_\delta} - \frac{\sigma_\eta^2}{\gamma} l(s) ds\right) du\right] \end{aligned} \quad (6.41)$$

Quando  $C_0 = C_1 = C_2 = 0$  tem-se:

$$\gamma \frac{dg}{dt} + gC_3 = 0 \quad \text{e} \quad (T) = 1$$

portanto:

$$\begin{aligned} g(t) = & \exp\left(\int_t^T \frac{\sigma_\eta^2}{2\gamma} k(u)^2 + \left(\kappa_\delta\theta_\eta + \frac{\sigma_\eta\bar{\gamma}_\delta}{\gamma}\right) k(u) + \sigma_r\sigma_\eta\rho_{r\delta}f(u)k(u) + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_r^2}{2\gamma} f(u)^2 + \left(\kappa_r\theta_r + \frac{\sigma_r\bar{\gamma}_r}{\gamma}\right) f(u) + \frac{\sigma_\eta^2}{\gamma} l(u) - \frac{(1-\gamma)}{\gamma} B_0\right) du \end{aligned} \quad (6.42)$$

Onde as funções:  $l(t)$ ,  $k(t)$ ,  $f(t)$  e  $g(t)$  são definidas para  $\gamma \neq 1$ . Ao assumir  $\gamma = 1$  assumem:  $l(t) = k(t) = f(t) = 0$  e  $g(t) = 1 \quad \forall t$ .

Ao substituir as soluções obtidas em (6.39), (6.40) e (6.41) na função utilidade indireta  $J(W, r(t), \eta(t), t)$  definida em (6.33), pode-se resolver as equações definidas em (6.28) e obter finalmente os pesos ótimos:

$$\bar{\pi}_B(t) = \frac{1}{\gamma} (\Phi_B(t) + A_B(t) \eta(t)) - \frac{f(t)}{\gamma} \frac{\kappa_r}{1 - \exp(\kappa_r(t - T_1))} - \bar{\pi}_D(t) \quad (6.43)$$

$$\bar{\pi}_S(t) = \frac{1}{\gamma} (\Phi_S + A_S(t) \eta(t)) \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_D(t) = & \frac{1}{\gamma} (\Phi_D(t) + A_D(t) \eta(t)) - \\ & + \left( \frac{1 - \omega}{\omega} \right) \frac{\kappa_\delta}{1 - \exp(\kappa_\delta(t - T_1))} \left( \frac{k(t) + l(t) \eta(t)}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (6.45)$$

## 6.4 Implicações na alocação estratégica

As vantagens oferecidas pelas expressões (6.43), (6.44) e (6.45) são de fornecer a um investidor, que se depara simultaneamente com os riscos de crédito e mercado, uma maneira clara de solucionar o problema de alocação estratégica dos ativos, além da facilidade de implementação computacional, por serem expressões em forma fechada, elas também permitem algumas conclusões diretas.

O peso para alocação em índice de ações (6.44) é sempre a de um investidor miópico<sup>1</sup>, e como esperado a demanda por esse ativo na carteira cai com o aumento do coeficiente relativo de aversão ao risco  $\gamma$ . O primeiro termo  $\Phi_S(t)$  é uma demanda pura por índice de ações dado pelo seu preço de risco de mercado, que é ajustado pelo segundo termo  $A_S(t)$ , que possui correlações entre as outras fontes de riscos da economia em questão. Se as correlações entre os movimentos brownianos forem todas nulas, o primeiro termo se torna o índice de Sharpe normalizado pela volatilidade do índice de ações, enquanto o segundo termo se anula. Portanto, o uso de correlações não nulas sugere que toda vez que assumir posição em índice de ações, posições em títulos de renda fixa com e sem risco de crédito devem ser assumidas.

Assim como no peso alocação por índice de ações, nas duas outras expressões para os pesos de alocação estratégica nos ativos de renda fixa com e sem risco de crédito, há um processo  $\eta(t)$  multiplicado pelas respectivas componentes  $A_{\text{ativo}}(t)$  que é somado

---

<sup>1</sup>Um investidor é considerado miópico quando esse ignora o que pode ocorrer com as volatilidades das variáveis de estado dentro do intervalo do horizonte de investimento.

ao termo  $\Phi_{\text{ativo}}(t)$ . Interessante observar que são esses termos que prevalecem quando o coeficiente relativo de aversão ao risco assume valor  $\gamma = 1$  e as funções  $l(t)$ ,  $k(t)$  e  $f(t) \forall t \in T$  se tornam identicamente nulas cancelando os termos que estão fora dos parenteses das expressões (6.43) e (6.45). Nessa situação, os pesos de alocação resultantes são os correspondentes à de um investidor que age miopicamente, e a interpretação das expressões é a mesma dada para o caso do peso de alocação em índice de bolsa.

Os termos que se anulam nos pesos dos ativos de renda fixa com e sem risco de crédito, para o caso de um investidor míopico, são termos de proteção (*hedge*) e de acordo com suas expressões possuem objetivos diferentes. Enquanto um é para proteção contra variações no processo estocástico de  $\eta(t)$ , o outro é para proteção contra as variações em  $r(t)$ . De acordo com a expressão (6.45) há duas formas de anular o termo de proteção, dado que a velocidade de reversão à média do processo  $\delta(t)$  é sempre positiva não nula. No caso de um investidor míopico, ou quando o parâmetro  $\varpi = 1$ , o processo  $\eta(t)$  dado por (5.17), se torna determinístico e o prêmio de risco do RFC não é mais estocástico, então o fator de proteção não se torna mais necessário. Como acontece no peso para alocação por índice de ações, não há proteção contra o efeito estocástico da taxa de juros na demanda por RFC.

O peso para alocação em título de renda fixa (6.43) apresenta um termo a mais em relação aos outros que é o peso de alocação em RFC com sinal trocado:

$$\bar{\pi}_B(t) + \bar{\pi}_D(t) = \frac{1}{\gamma} (\Phi_B(t) + A_B(t)\eta(t)) - \frac{f(t)}{\gamma} \frac{\kappa_r}{1 - \exp(\kappa_r(t - T_1))} \quad (6.46)$$

Da expressão acima, pode-se afirmar que ao aumentar (ou diminuir) o peso de alocação em posição comprada em título de renda fixa sem risco de crédito, deve-se aumentar (ou diminuir) o peso de alocação em posição vendida em RFC.

A expressão também integra os riscos de crédito e mercado, os pesos de alocação de título de renda fixa sem risco de crédito somado à alocação de RFC. Jarrow e Turnbull (2000) demonstram que ambos os riscos são integrados pelo uso de modelos de intensidade, e conseqüentemente afetam a decisão de investidores.

# Capítulo 7

## Implementação do modelo e resultados

O objetivo desse capítulo é apresentar alguns comentários a respeito da implementação, seguido de análises dos resultados obtidos em simulações numéricas feitas com o modelo proposto. Um outro objetivo após explorar e extrair as principais características do modelo, seria uma possível aplicação no mercado financeiro brasileiro. O trabalho de implementação prática em uma situação real encontra um outro desafio: Determinar os valores para os parâmetros exigidos pelas expressões que determinam os pesos de alocação intertemporal.

A rigor, deveria-se utilizar técnicas estatísticas para extrair tais valores de séries históricas pertinentes ao modelo, como o foco do presente trabalho é buscar o máximo entendimento do modelo, o problema da determinação dos parâmetros será contornado com a utilização de valores escolhidos subjetivamente, respeitando limites que serão comentados adiante.

Dos parâmetros escolhidos para as simulações com o modelo, alguns serão tomados como imutáveis dentro do horizonte de investimento escolhido, tais como:  $T$ ,  $T_1$ ,  $\theta_r$ ,  $\theta_\delta$  e  $\delta_0$ . Os outros parâmetros: coeficiente relativo de aversão ao risco do investidor, volatilidades, prêmios de risco de mercado, correlações, velocidades de reversão à média e a perda fracional de crédito serão variados dentro de intervalos de valores, para verificar as respostas e o comportamento do modelo.

## 7.1 Implementação

Os pesos de alocação ótima representados pelas equações (6.43), (6.44) e (6.45) podem ser implementados numericamente por meio de uma linguagem de programação apropriada, para realização de cálculos de simulação de uma carteira de investimento. Praticamente existem dois termos a serem implementados nas equações que interessam, os determinísticos e um processo estocástico.

Nos termos determinísticos, existem apenas funções onde os cálculos são apenas substituições numéricas dos parâmetros de entrada. Deve-se atentar que na equação (6.41) o limite inferior de integração da integral expoente é a variável de integração da integral externa:

$$k(t) = \exp\left(-\int_t^T q(u) du\right) \cdot \left[-\int_t^T m(u) \exp\left(\int_u^T q(s) ds\right) du\right]$$

Onde:

$$q(x) = \frac{(1-\gamma)\sigma_\eta}{\gamma\varsigma_\delta(x, T_1)\sigma_\delta} - \frac{\sigma_\eta^2}{\gamma}l(x)$$

e:

$$m(x) = \left(\kappa_\delta\theta_\eta + \sigma_r\sigma_\eta\rho_{r\delta}f(x) + \frac{\sigma_\eta\bar{\gamma}_\delta}{\gamma}\right)l(x) + \frac{1-\gamma}{\gamma}\Phi_D(x)$$

Com  $\varsigma_\delta(x, T_1)$ ,  $\Phi_D(x)$ ,  $f(x)$  e  $l(x)$  definidos por (5.10), (6.30), (6.39) e (6.40) respectivamente.

Para implementar computacionalmente o processo  $\eta(t)$ , primeiro deve-se calcular a equação diferencial estocástica dada por (5.17) que será escrita na forma abaixo para facilitar:

$$d\eta(t) = (\bar{\theta}_\eta - \kappa_\delta\eta(t)) dt + \sigma_\eta d\varpi_\delta^P \quad (7.1)$$

$$\text{Onde: } \bar{\theta}_\eta = \kappa_\delta\theta_\eta + \sigma_\eta\bar{\gamma}_\delta$$

Por se tratar de um processo de Ornstein-Uhlenbeck, considera-se a condição inicial  $\eta(0) = \eta_0$ , de acordo com Vasicek (1977) sua solução é:

$$\eta(t) = \eta_0 e^{-\kappa_\delta t} + \frac{\overline{\theta}_\eta}{\kappa_\delta} (1 - e^{-\kappa_\delta t}) + \sigma_\eta \int_0^t e^{-\kappa_\delta u} d\varpi_\delta^P \quad (7.2)$$

A integral estocástica é uma variável aleatória de distribuição normal com média zero e variância igual a:

$$\frac{1}{2\kappa_\delta} (1 - e^{-2\kappa_\delta t}) \quad (7.3)$$

Substituindo devidamente em (7.2), obtém-se uma maneira de implementar o processo estocástico de  $\eta(t)$  nos pesos dos ativos na carteira de investimento.

$$\eta(t) = \eta_0 e^{-\kappa_\delta t} + \frac{\overline{\theta}_\eta}{\kappa_\delta} (1 - e^{-\kappa_\delta t}) + \sigma_\eta \sqrt{\frac{1}{2\kappa_\delta} (1 - e^{-2\kappa_\delta t})} \varepsilon ; \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (7.4)$$

Quando  $t = 0$  a expressão fornece conforme o esperado o valor inicial  $\eta_0$ , e quando  $t \rightarrow \infty$  a equação converge para:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \frac{\overline{\theta}_\eta}{\kappa_\delta} + \sigma_\eta \sqrt{\frac{1}{2\kappa_\delta}} \varepsilon \quad (7.5)$$

## 7.2 Resultados obtidos

Nesta seção apresenta-se os resultados obtidos nas simulações numéricas. Os parâmetros utilizados no modelo estão na tabela a abaixo e uma justificativa de seus valores é dada em seguida.

Parâmetro	Descrição	Valor
$T_1$	Maturidade dos títulos de RF com e sem risco de crédito	3
$T$	Horizonte de investimento	1
$\gamma$	Coefficiente relativo de aversão ao risco	5
$\varpi$	Perda fracional de crédito	0,5
$\rho_{rS}$	Correlação entre taxa de juros e índice de bolsa	-0,7
$\rho_{r\delta}$	Correlação entre taxa de juros e <i>spread</i> de crédito	0,75
$\rho_{S\delta}$	Correlação entre índice de bolsa e <i>spread</i> de crédito	-0,6
$\sigma_S$	Volatilidade do índice de bolsa	0,5
$\gamma_S$	Prêmio de risco de mercado de bolsa	0,8
$\sigma_r$	Volatilidade da taxa de juros	0,2
$\theta_r$	Expectativa média para a taxa de juros	0,15
$\kappa_r$	Velocidade de reversão à média da taxa de juros	1,0
$\gamma_r$	Prêmio de risco de mercado da taxa de juros	0,2
$\sigma_\delta$	Volatilidade do <i>spread</i> de crédito	0,25
$\theta_\delta$	Expectativa média para o <i>spread</i> de crédito	0,03
$\kappa_\delta$	Velocidade de reversão à média do <i>spread</i> de crédito	0,5
$\gamma_\delta$	Prêmio de risco de mercado do <i>spread</i> de crédito	0,4
$\delta_0$	<i>Spread</i> de crédito inicial	0,045

Tabela 7.1: Parâmetros de entrada utilizados na simulação do modelo

O objetivo desejado com os valores propostos pela tabela, foi o de reproduzir um cenário economicamente plausível onde os coeficientes de correlação entre os processos estocásticos tentam refletir a situação em que uma alta do índice de ações é acompanhado de uma baixa de taxa de juros tanto de aplicação quanto de empréstimo. A volatilidade do índice de ações foi escolhida de modo a ser a maior entre as volatilidades, assim como o seu prêmio de risco de mercado. A velocidade de reversão à média

do processo de taxa de juros é o dobro em relação à velocidade de reversão à média do processo do *spread* de crédito, com o intuito de reproduzir o fato de que as quedas de taxa de juros para empréstimo possuem um retardo maior quando comparado às quedas da taxa de juros de curto prazo. O *spread* de crédito inicial foi escolhido 1,5% acima da expectativa média de longo prazo dos *spread* instantâneos para reproduzir que nessa economia há um cenário de queda de taxas de juros de crédito. O coeficiente relativo de aversão ao risco foi o mesmo utilizado por Hou (2003).

Nas figuras apresentadas a seguir, o peso da alocação no título de renda fixa com risco de crédito será referenciado pelo código: **RFC**, o peso em alocação no título de renda fixa sem risco de crédito terá o código: **RF** e o peso no ativo de índice de bolsa será referenciado apenas por: **Índice**.

Com exceção da Figura 7.2 até a Figura 7.10 em que são representados a evolução temporal dos pesos de alocação dos ativos da economia para 5.000 sorteios de  $\varepsilon$  da equação (7.4), as figuras restantes apresentam o efeito da variação dos parâmetros no peso de alocação dos ativos, sempre para o instante inicial  $t = 0$ .

Como primeira análise, na Figura 7.1 apresenta-se o efeito da variação do coeficiente relativo de aversão ao risco  $\gamma$  sobre os pesos de alocação nos ativos no instante inicial. Observa-se que quando o investidor torna-se mais conservador com o aumento do  $\gamma$ , o efeito resultante é um pequeno aumento em posição comprada de renda fixa até atingir um patamar, enquanto diminui constantemente a posição comprada em índice de bolsa e posição vendida em RFC. Isso evidencia o fator que difere um investidor arriscado de um investidor conservador: o peso na alocação em títulos do índice de bolsa e em títulos RFC. A queda acentuada, que se observa na curva de alocação em títulos de renda fixa quando  $\gamma$  muda de 1 para 2, pode ser explicada pela mudança de comportamento do investidor quando esse deixa de ser míópico e passa a tomar suas decisões de alocação intertemporalmente.

A evolução das distribuições dos pesos de alocação ao longo do tempo, dentro do horizonte de investimento, podem ser observadas pelos percentis plotados nas Figuras 7.2, 7.3 e 7.4. Nesse estudo utilizou-se os dados da Tabela 7.1 onde o investidor possui coeficiente relativo de aversão ao risco igual a 5, os intervalos de tempo em que houve observação dos pesos foram: o instante inicial  $t = 0$ , 1 mês, 2 meses, 3 meses, 6 meses e o próprio horizonte de investimento, 1 ano, e foram realizados 5.000 sorteios para o valor de  $\varepsilon$  da equação (7.4) para cada intervalo de tempo.

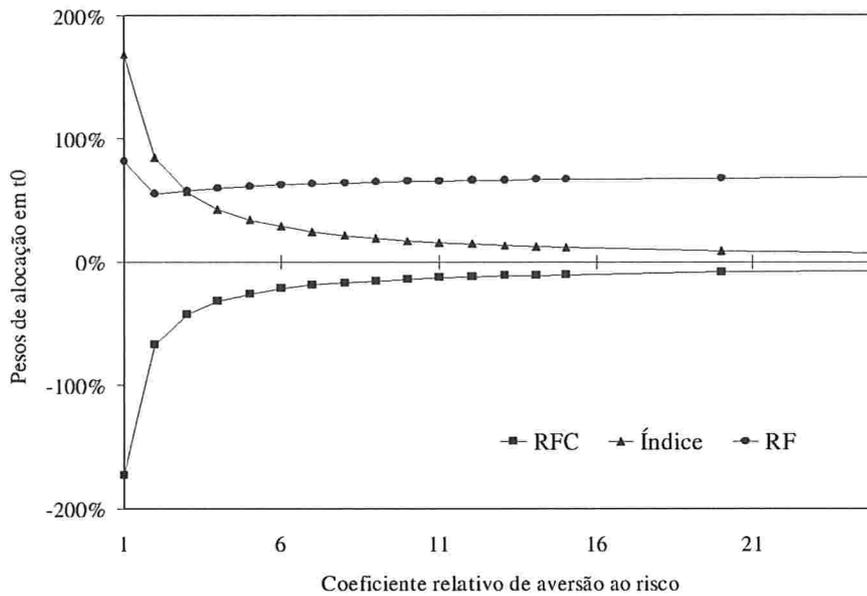


Figura 7.1: Variação dos pesos de alocação em função do coeficiente relativo de aversão ao risco do investidor.

Nas Figuras 7.5, 7.6 e 7.7 é demonstrado o efeito causado nas distribuições dos pesos de alocação, com o aumento do coeficiente relativo de aversão ao risco do investidor ( $\gamma = 20$ ). Nas Figuras 7.8, 7.9 e 7.10, é apresentado o mesmo estudo, em uma situação quando se diminui o coeficiente relativo de aversão ao risco do investidor ( $\gamma = 2$ ).

Nas Figuras 7.11, 7.12 e 7.13 mostra-se a dependência dos pesos de alocações em função da volatilidade do processo estocástico de preço de cada ativo no instante inicial  $t = 0$ , para um investidor que possui uma carteira de investimento com as características dadas pelos parâmetros da Tabela 7.1 .

Observa-se que a volatilidade do processo do *spread* de crédito afeta todos os pesos de alocações dos ativos da carteira, conforme indica a Figura 7.11. O efeito causado pelo aumento da volatilidade do *spread* de crédito, faz com que um investidor diminua rapidamente seu investimento em índice de bolsa e diminua gradativamente sua exposição comprada em títulos de renda fixa e exposição vendida em RFC. O fato é explicado pelo motivo do parâmetro  $\sigma_\delta$  estar presente não apenas na expressão do peso de alocação do RFC, como também nas expressões dos pesos de alocação do índice de bolsa e do título de renda fixa, conforme indicado nas expressões obtidas no capítulo 6. Como o processo estocástico de  $\eta(t)$  também depende desse parâmetro, e

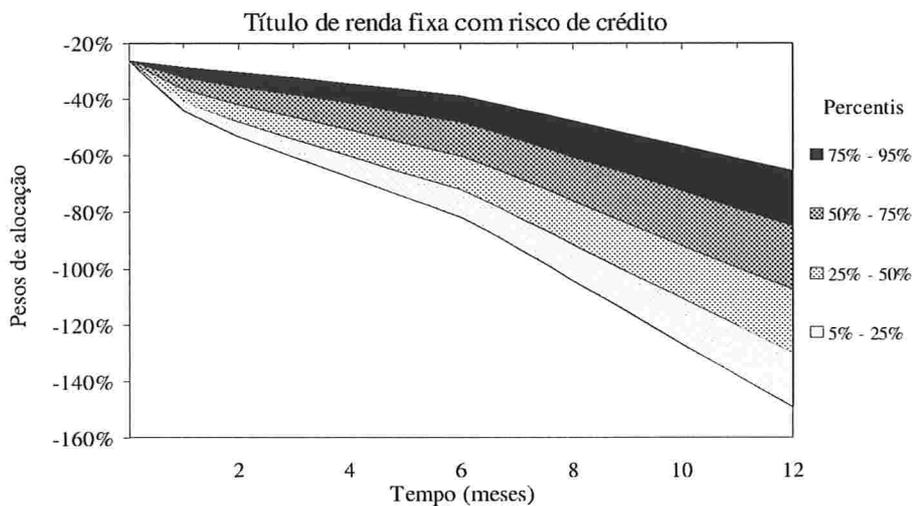


Figura 7.2: Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa com risco de crédito durante o horizonte de investimento (  $CRRA=5$  ).

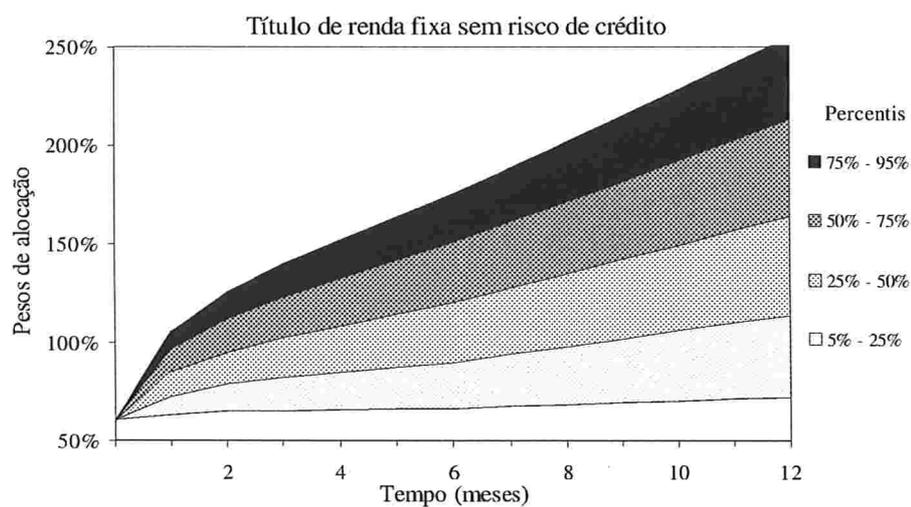


Figura 7.3: Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa sem risco de crédito durante o horizonte de investimento (  $CRRA=5$  ).

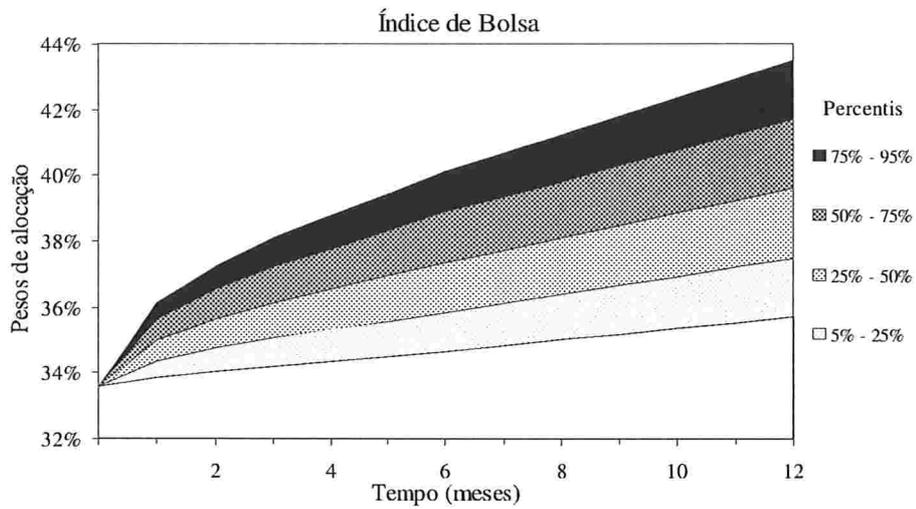


Figura 7.4: Distribuição dos pesos de alocação do ativo de índice de bolsa durante o horizonte de investimento (  $CRRA=5$  ).

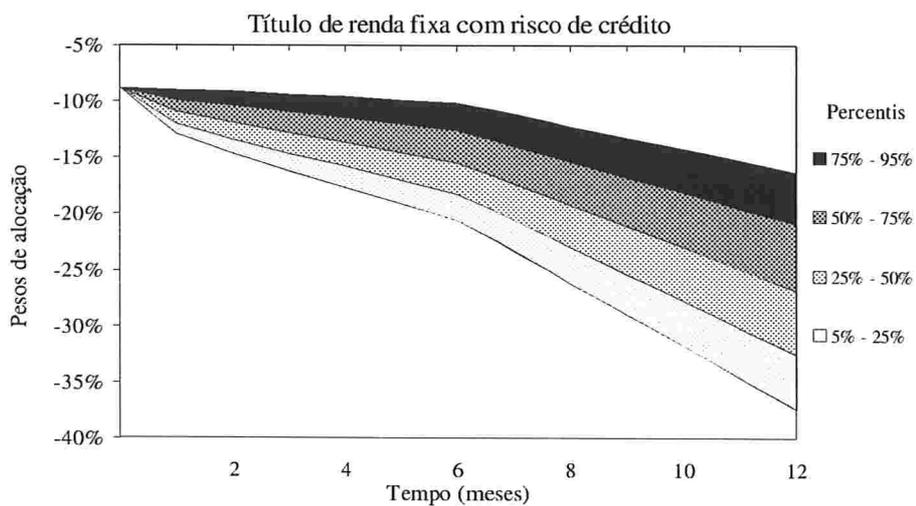


Figura 7.5: Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa com risco de crédito durante o horizonte de investimento (  $CRRA=20$  ).

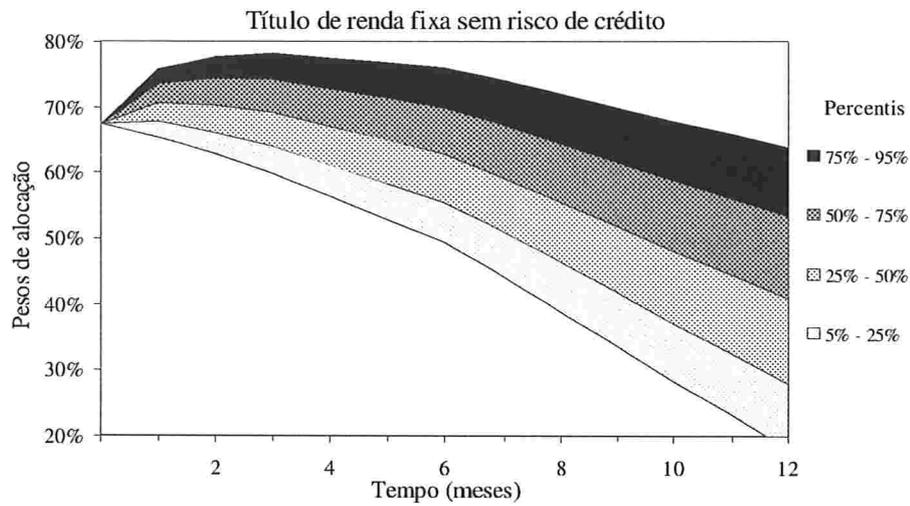


Figura 7.6: Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa sem risco de crédito durante o horizonte de investimento (  $CRRA=20$  ).

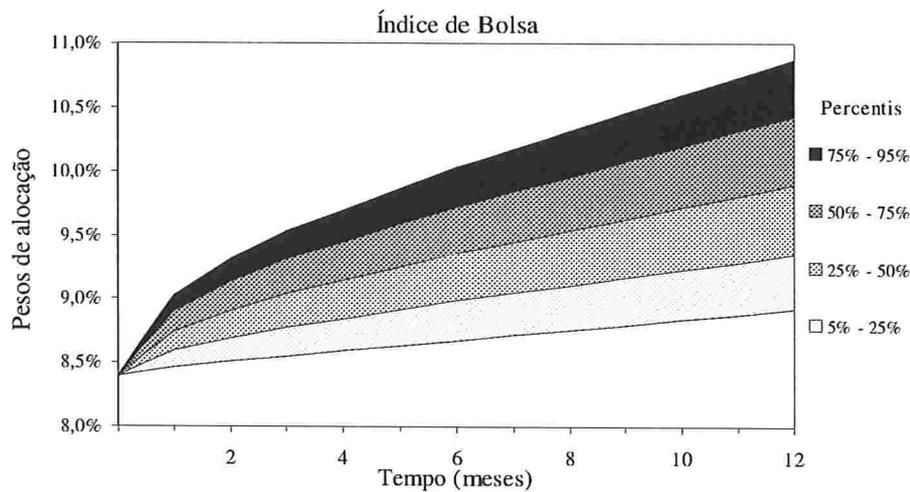


Figura 7.7: Distribuição dos pesos de alocação do ativo de índice de bolsa durante o horizonte de investimento (  $CRRA=20$  ).

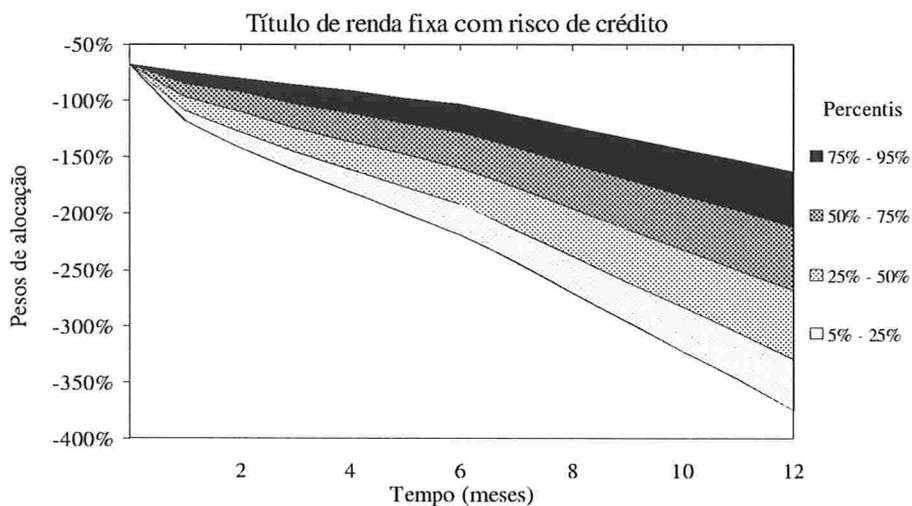


Figura 7.8: Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa com risco de crédito durante o horizonte de investimento (  $CRRA=2$  ).

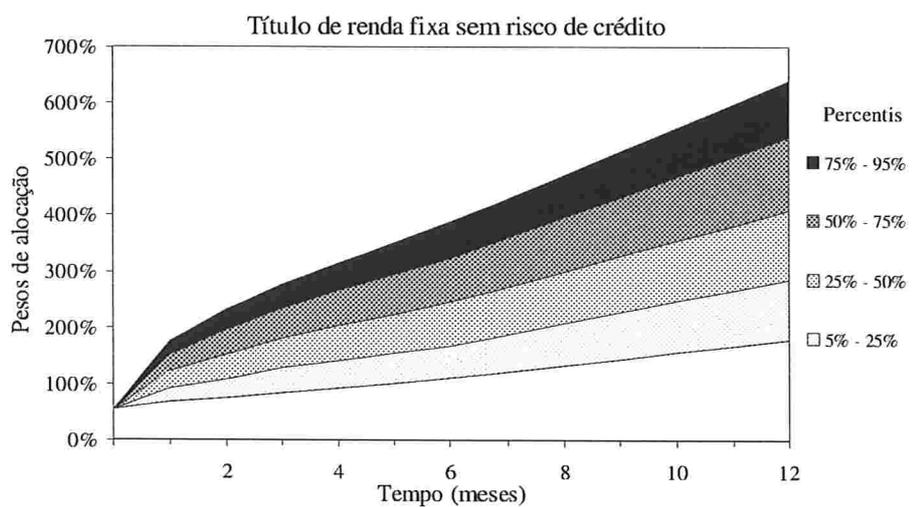


Figura 7.9: Distribuição dos pesos de alocação do título de renda fixa sem risco de crédito durante o horizonte de investimento (  $CRRA=2$  ).

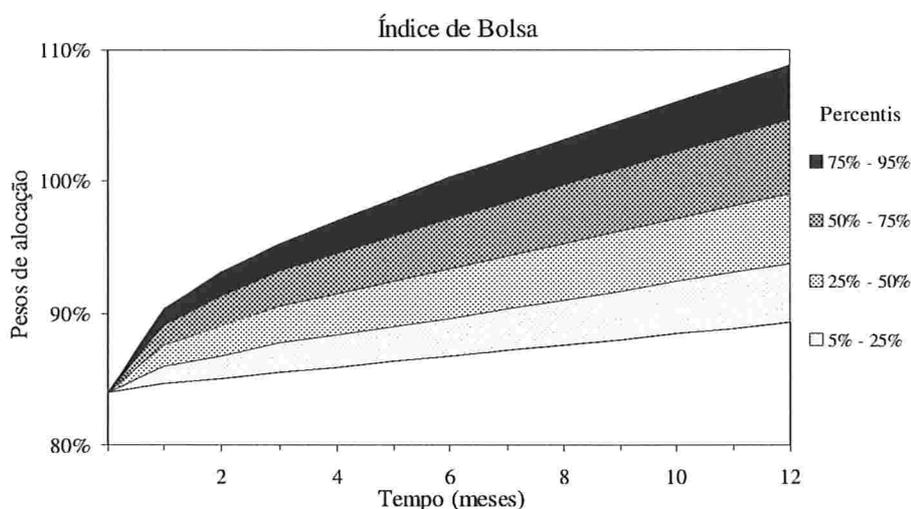


Figura 7.10: Distribuição dos pesos de alocação do ativo do índice de bolsa durante o horizonte de investimento (  $CRRA=2$  ).

o processo está presente em todas as expressões dos peso de alocação, isso reforça mais a dependência das alocações em função da variação da volatilidade  $\sigma_\delta$ .

A variação da volatilidade do processo de taxa de juros de curto prazo causa mais efeito na alocação do título de renda fixa sem risco de crédito, aumentando sua exposição comprada e um pequeno aumento em posição vendida em RFC. Pelo fato do parâmetro  $\sigma_r$  estar ausente na expressão do peso de alocação em índice de bolsa, esse investimento é completamente livre das variações da volatilidade de taxas de juros, conforme indica a Figura 7.12.

A volatilidade do processo de preço do índice de bolsa (parâmetro  $\sigma_S$ ) tem um efeito semelhante ao efeito causado pela volatilidade do processo de taxa de juros. Nesse caso afetando somente a alocação do ativo de índice de bolsa. O motivo dessa dependência é a mesma da volatilidade de taxa de juros, o termo  $\sigma_S$  está presente apenas na expressão do peso de alocação de índice de bolsa. A decisão de um investidor que se depara com a alta de  $\sigma_S$  é diminuir sua alocação em posição comprada em índice de bolsa, conforme aponta a Figura 7.13, e manter inalterado os pesos de alocações nos outros ativos.

O efeito da variação dos prêmios de risco de mercado sobre os pesos de alocação da carteira são apresentados a seguir. Com o aumento do prêmio de risco de mercado do *spread* de crédito  $\gamma_\delta$  o investidor aumenta sua alocação em posição comprada de títulos de renda fixa e também aumenta sua posição vendida em RFC, o efeito do aumento

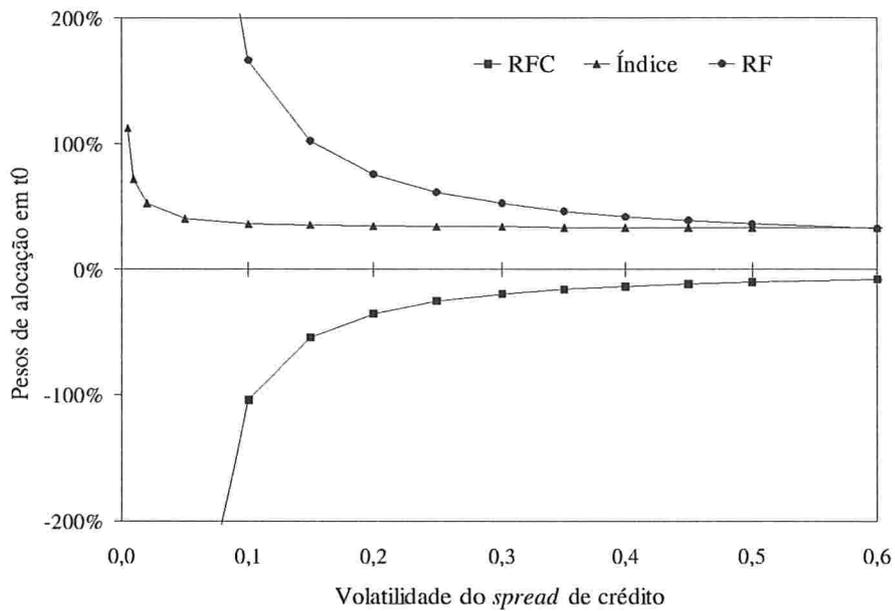


Figura 7.11: Efeito da volatilidade da taxa de spread de crédito sobre os pesos de alocação dos ativos.

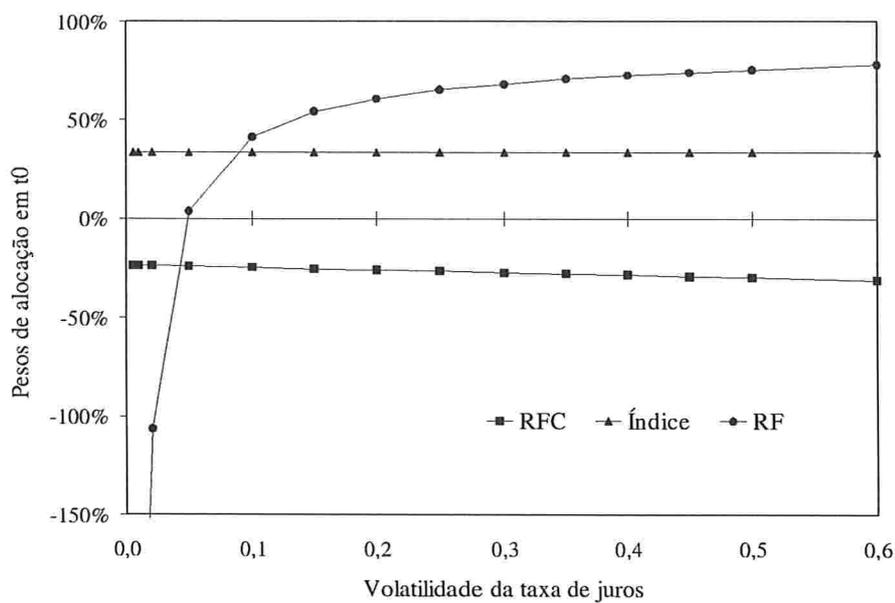


Figura 7.12: Efeito da volatilidade da taxa de juros de curto prazo sobre os pesos de alocação dos ativos.

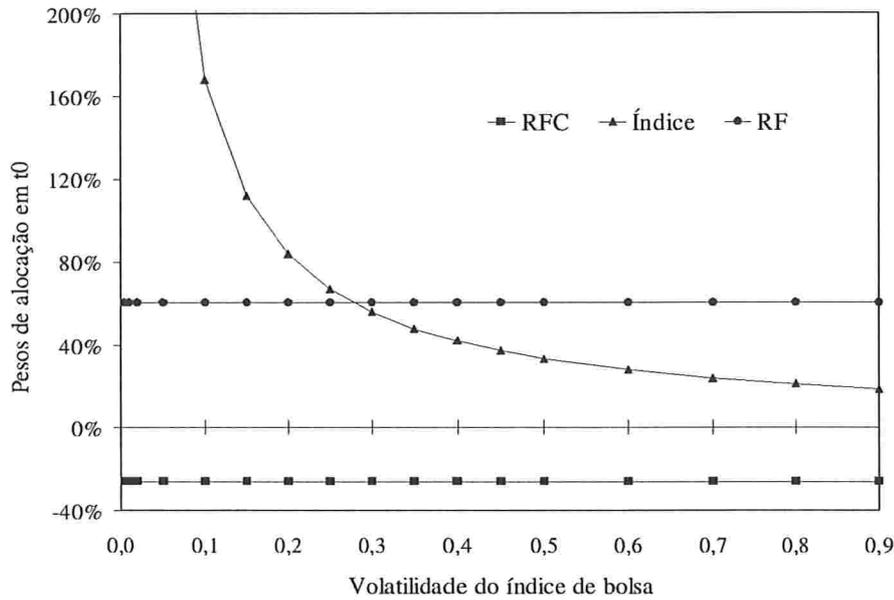


Figura 7.13: Efeito da volatilidade do índice de bolsa sobre os pesos de alocação dos ativos.

desse prêmio não altera em nada sua posição comprada em índice de bolsa, conforme indica Figura 7.14.

Ao aumentar o prêmio de risco de mercado da taxa de juros de curto prazo  $\gamma_r$ , o investidor toma como decisão a redução em sua posição comprada de títulos de renda fixa e não altera as alocações em índice de bolsa e RFC, conforme indica a Figura 7.15.

O aumento do prêmio de risco de mercado do índice de bolsa  $\gamma_S$ , faz com que o investidor aposte mais nesse ativo e não altere os pesos de alocação nos outros ativos da carteira, conforme indica a Figura 7.16.

A variação dos pesos de alocação em função da variação das correlações no instante inicial  $t = 0$ , são apresentadas nas Figuras 7.17, 7.18 e 7.19. As singularidades observadas são justificadas pelas expressões (6.30) e (6.31), onde dependendo do valor assumido pelas correlações, pode anular os denominadores. Interessante é observar que os pesos de alocação dos ativos permanecem constante dentro de certos intervalos de valores das correlações.

Em uma situação com valores extraídos de dados reais, esse estudo ajuda a sinalizar de antemão uma possível situação complicada: Correlações que assumam valores próximos de singularidades, acarretando assim pesos de alocações muito exagerados.

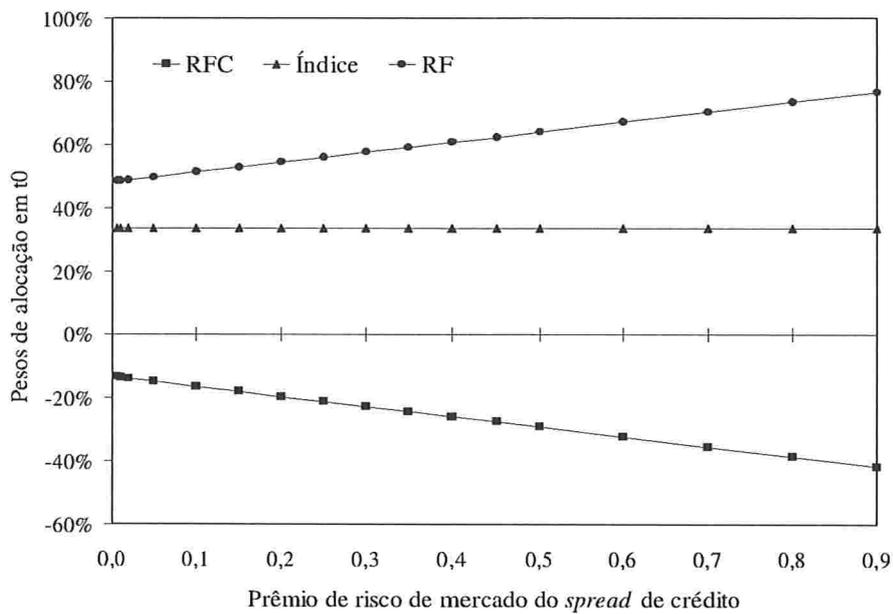


Figura 7.14: Variação dos pesos de alocação em função do prêmio de risco de mercado do spread de crédito.

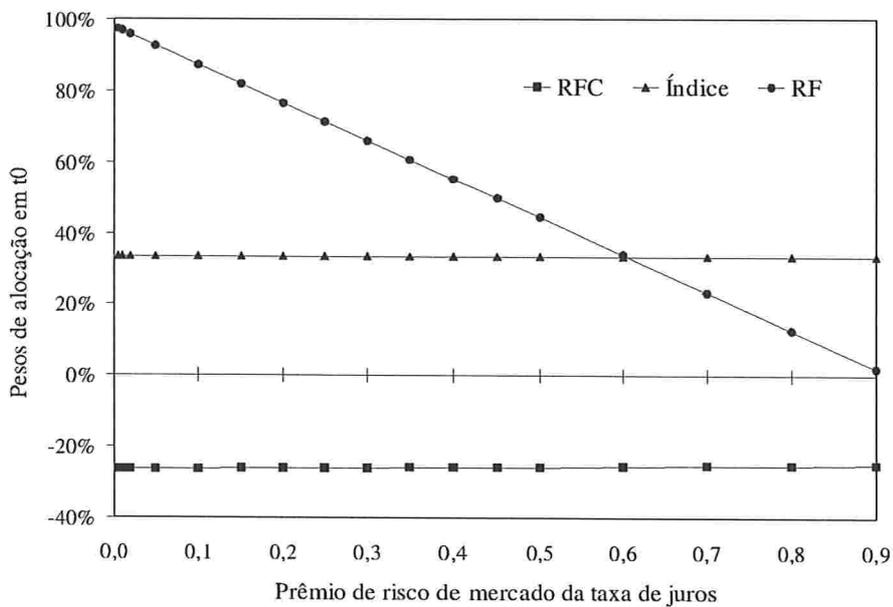


Figura 7.15: Variação dos pesos de alocação em função do prêmio de risco de mercado da taxa de juros.

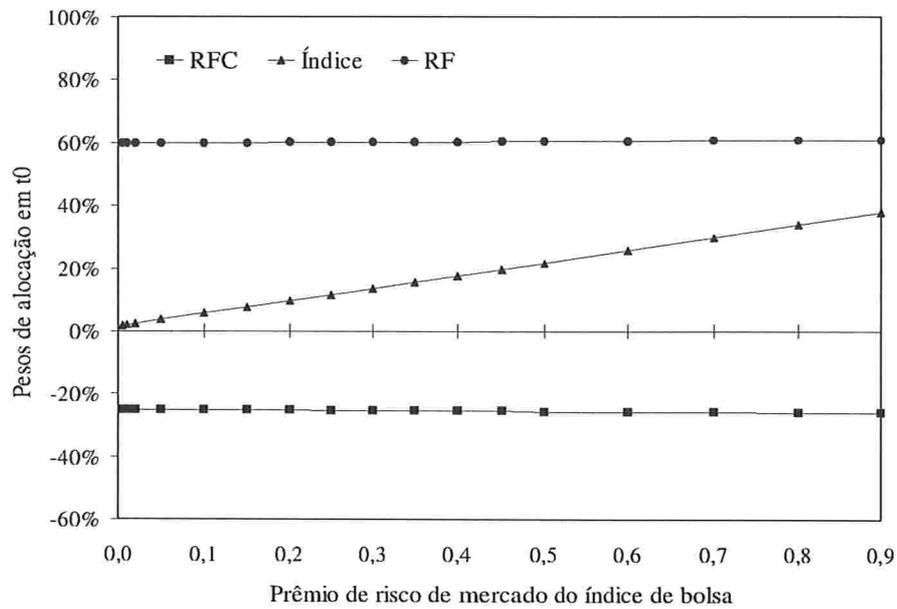


Figura 7.16: Variação dos pesos de alocação em função do prêmio de risco de mercado do índice de bolsa.

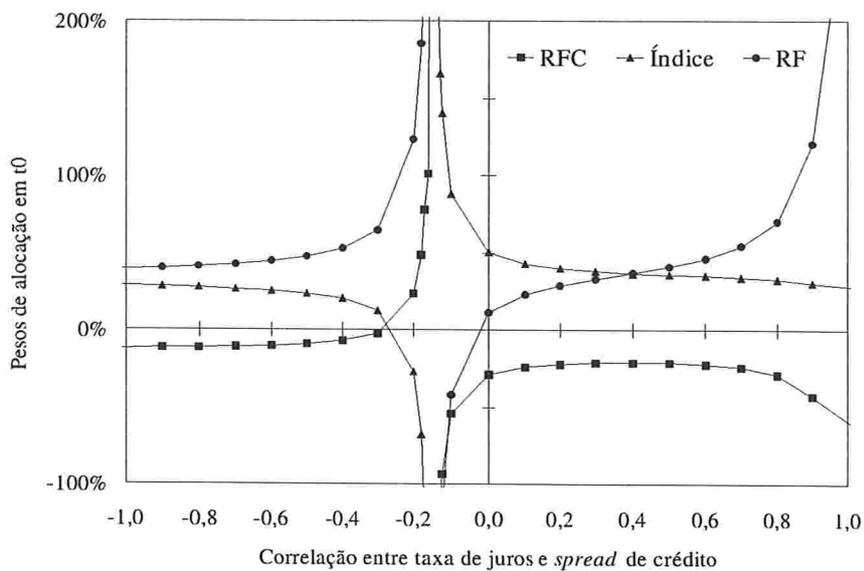


Figura 7.17: Variação dos pesos de alocação em função da correlação entre os movimentos brownianos da taxa de juros e do *spread* de crédito.

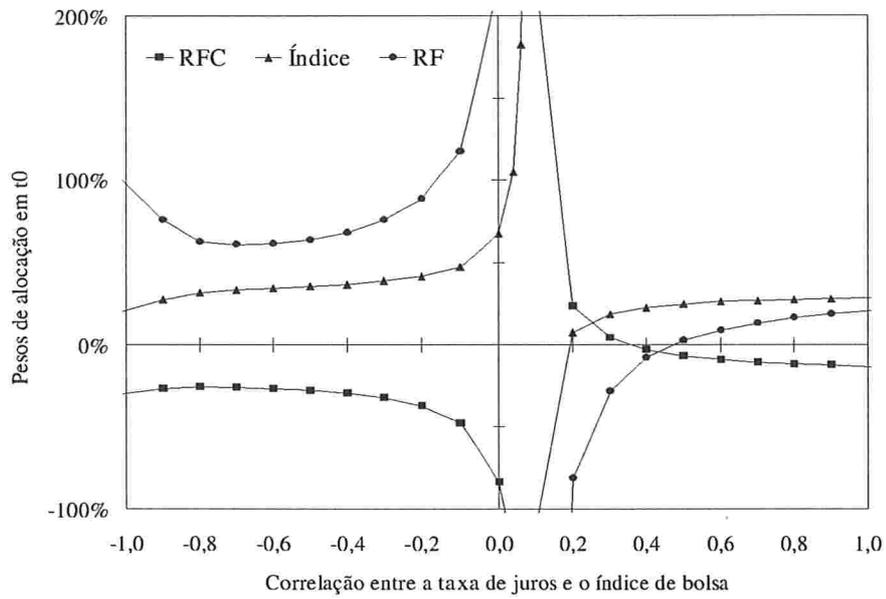


Figura 7.18: Variação dos pesos de alocação em função da correlação entre os movimentos brownianos da taxa de juros e do índice de bolsa.

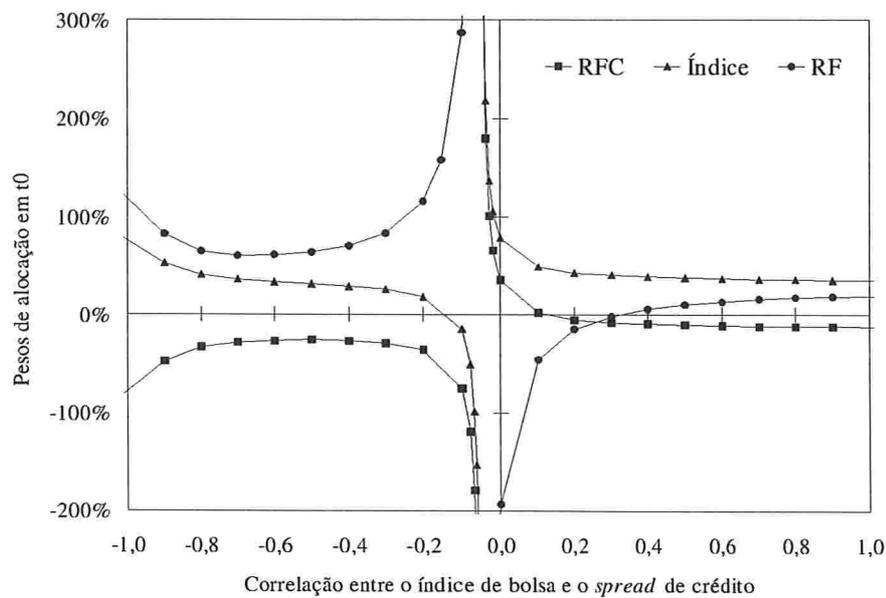


Figura 7.19: Variação dos pesos de alocação em função da correlação entre os movimentos brownianos do índice de bolsa e do *spread* de crédito.

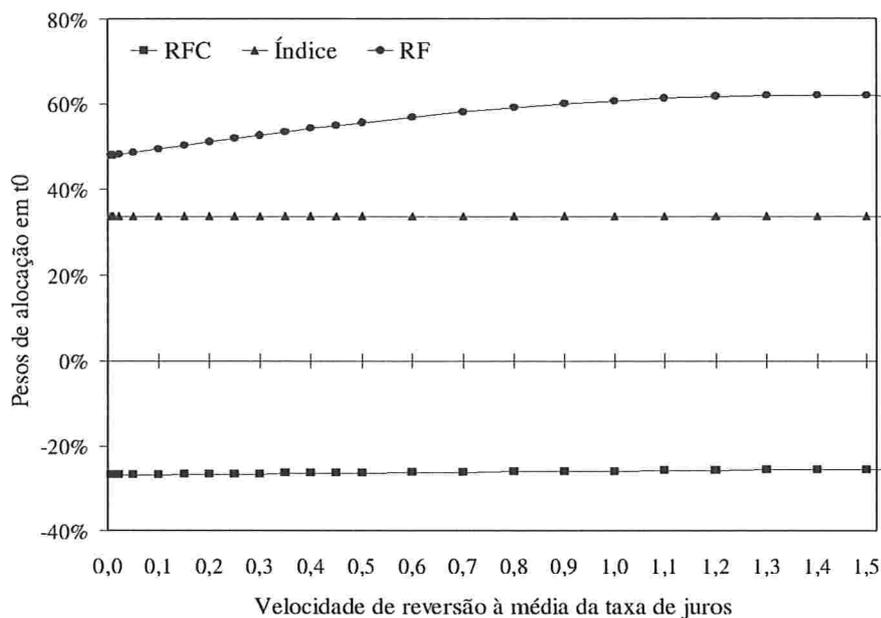


Figura 7.20: Variação dos pesos de alocação em função da velocidade de reversão à média do processo da taxa de juros.

O efeito da variação das velocidades de reversão à média dos processos estocásticos de taxa de juros de curto prazo e do *spread* de crédito instantâneo sobre os pesos de alocação no instante  $t = 0$  são apresentados nas Figuras 7.20 e 7.21. No primeiro caso, observa-se que o efeito da variação do parâmetro  $\kappa_r$  causa alteração na alocação do título de renda fixa, sendo que quanto mais rápido a taxa de juros de curto prazo converge para o valor médio de longo prazo, maior será o valor comprado desse título.

Como no cenário econômico proposto, há uma tendência da queda de juros de crédito, do instante inicial para a média de longo prazo, o investidor interpreta que há um risco maior de crédito um título que possui esse parâmetro com valor baixo, já que suas taxas de juros de crédito continuarão em patamares elevados por mais tempo, quando comparado com um título que apresenta uma velocidade de reversão à média alto.

Na Figura 7.22 pode-se observar a semelhança do efeito da variação da perda fracional de crédito  $\varpi$  com o efeito causado pelo aumento da volatilidade do *spread* de crédito, conforme indicado na Figura 7.11. O efeito da variação desse parâmetro está em conformidade com a intuição, quanto maior a certeza da perda do valor investido no RFC, causa no investidor um efeito de aversão nesse ativo e no título de renda

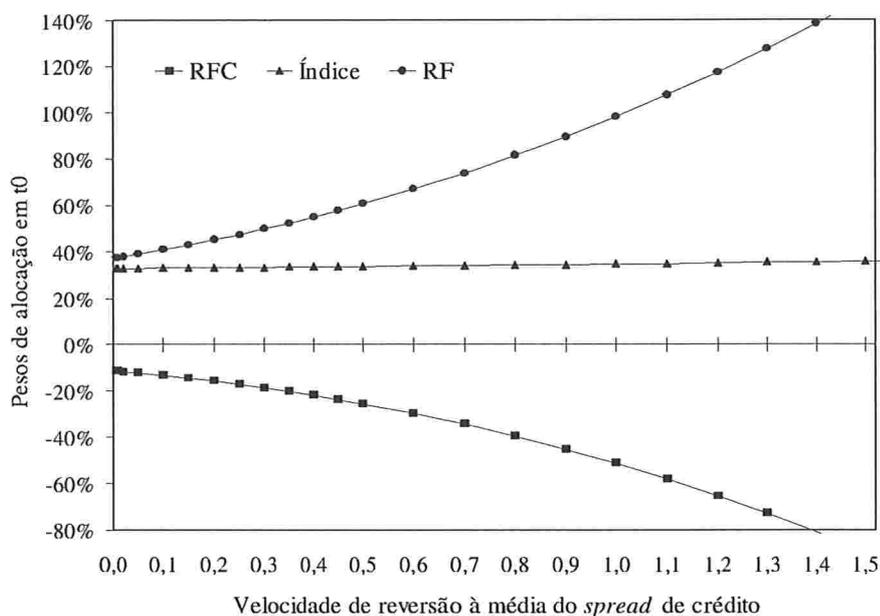


Figura 7.21: Variação dos pesos de alocação em função da velocidade de reversão à média do processo do spread de crédito.

fixa, e em sentido oposto quando a certeza da perda fracional de crédito é pequena, correspondendo à uma taxa de recuperação maior, faz com que o investidor aumente seu peso de alocação tanto no RFC como em títulos de renda fixa.

Como comentário final pode-se dizer que a decisão de alocação em título de renda fixa sem risco de crédito apresenta um comportamento curioso, mas como os ensaios foram realizados considerando um mesmo investidor, dado que o coeficiente relativo de aversão ao risco não se alterou, pode-se concluir que ao se aumentar a volatilidade das taxas de juros de curto prazo a decisão de investimento nesse ativo, em certo nível se tornava constante enquanto que a alocação nos outros ativos caíam continuamente.

O mesmo acontece com o aumento do prêmio de risco de mercado de taxa de juros, ao aumentar esse parâmetro, a alocação nesse ativo cai constantemente ao passo que nos outros ativos aumentava devido ao aumento do prêmio. Por esses dois motivos pode-se entender que o modelo enxerga o título de renda fixa, como um ativo de confiança, pois com um aumento da incerteza nas taxas de juros, reduz a alocação nos outros ativos e mantém constante a alocação em um ativo que pagará um valor certo no vencimento. Ao aumentar somente o prêmio de taxa de juros o modelo responde que a alocação nesse ativo deve cair quase que linearmente, e a alocação nos outros

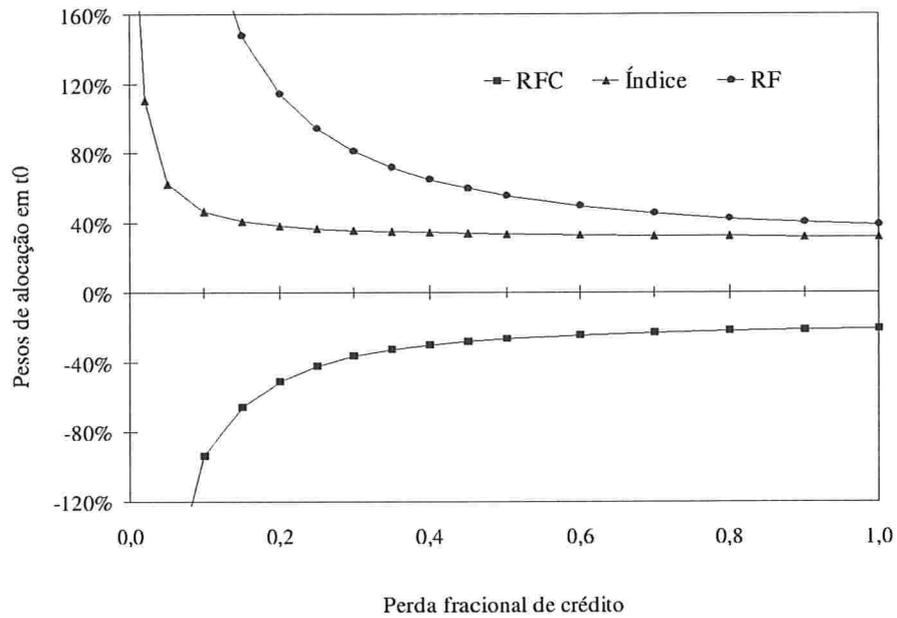


Figura 7.22: Variação dos pesos de alocação em função da perda fracional de crédito.

ativos permanecem inalterada. O fato dos outros parâmetros estarem imutáveis, faz com que a melhora do prêmio dos juros de alguma forma torne os outros ativos mais atraentes, assim a alocação nesse ativo diminui.

# Capítulo 8

## Conclusões

Por se tratar de um modelo que produz como resposta a decisão a ser tomada por investidores que defrontam com ativos que possuem risco de crédito e risco de mercado, o foco deste capítulo deve ser concentrado na coerência das respostas do modelo. Os resultados obtidos também permitem extrair diversas conclusões e compreensão a respeito da teoria envolvida no modelo aqui proposto.

Do ponto de vista financeiro, as respostas fornecidas pelo modelo estão coerentes com os parâmetros de entrada escolhidos, que de certa forma tentam reproduzir um possível cenário econômico. Observou-se o efeito de integração dos fatores de risco proposto pelo modelo, mostrando que todos os processos agindo conjuntamente formam um sistema integrado e de interpretação não trivial para o investidor, que deve considerar sempre os efeitos mútuos dos processos.

A demanda por proteção do título de renda fixa com risco de crédito sempre realizada com alocação em título de renda fixa sem risco de crédito, evidencia que os processos de taxa de juros e *spread* de crédito possuem relação fechada, ponto já apontado na expressão da dinâmica dos retornos do título com risco de crédito.

As respostas são satisfatórias no sentido financeiro, quanto à variações das volatilidades, prêmios de risco de mercado dos ativos e das correlações dos processos. A vantagem de se ter os pesos de alocação em expressões na forma fechada permite em alguns casos, extrair conclusões antecipadas das respostas fornecidas pelo modelo e ajudar a interpretar os resultados obtidos.

Como o principal intuito do trabalho foi obter conhecimento teórico, explorar os pontos fortes e adquirir sensibilidade do modelo em função dos parâmetros de entrada,

resta colocá-lo em caso prático com dados de mercado real o que torna uma ótima sugestão para futuros trabalhos.

# Referências Bibliográficas

- [Bielecki e Rutkowski (2001)] Bielecki, Tomasz, Marek Rutkowski, 2001, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer, New York
- [Black e Scholes (1973)] Black, Fisher, Miron Scholes, 1973, The Pricing and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-354
- [Campbell e Viceira (2002)] Campbell, John Y., Luis Viceira, 2002, *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, London
- [Duffie e Singleton 1999] Duffie, Darrell, Kenneth Singleton, 1999, Modeling Term Structures of Default Risky Bonds, *Review of Financial Studies* 12, 687-720
- [Hou (2003)] Hou, Yuanfeng, 2003, Integrating Market Risk and Credit Risk: A Dynamic Asset Allocation Perspective, Working Paper, Yale University, University of Lausanne and FAME
- [Hou e Jin (2002)] Hou, Yuanfeng, Xiangrong Jin, 2002, Optimal Investment with Default Risk, Working Paper, Yale University, University of Lausanne and FAME
- [Huang e Litzenberger (1988)] Huang, Chi-fu, Robert H. Litzenberger, 1988, Foundations for Financial Economics, *North-Holland*, New York
- [Jarrow e Turnbull (1995)] Jarrow, Robert, Stuart Turnbull, 1995, Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk, *Journal of Finance* 50, 53-85

- [Jarrow e Turnbull (2000)] Jarrow, Robert, Stuart Turnbull, 2000, The Intersection of Market and Credit Risk, *Journal of Banking and Finance* 24, 271-299
- [Merton (1969)] Merton, Robert, 1969, Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *The Review of Economics & Statistics*, Vol.51 (3), 247-57
- [Merton (1971)] Merton, Robert, 1971, Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous -Time Model, *Journal of Economics Theory* 3, 373-413
- [Merton (1973)] Merton, Robert, 1973, An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, Vol.41 (5), 867-887
- [Merton (1974)] Merton, Robert, 1974, On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance* 29,449-470
- [Musielà e Rutkowski (1998)] Musielà, Marek, Marek Rutkowski, 1998, *Martingale Methods in Financial Modeling*, Springer-Verlag, New York
- [Saunders (1999)] Saunders, Anthony, 1999, *Credit Risk Measurement*, John Wiley & Sons
- [Vasicek (1977)] Vasicek, Oldrich, 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177-188