

A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE “MODELAGEM MATEMÁTICA EM
FINANÇAS”

**A RELAÇÃO ENTRE O MERCADO DE TÍTULOS E CREDIT
DEFAULT SWAPS E O APREÇAMENTO DA
OPÇÃO *CHEAPEST TO DELIVER***

Luciano De Vicente Santos

Orientador: Rogério Rosenfeld

Co-Orientador: Rogério De Deus Oliveira

São Paulo

2005

T332.645 S237r

T88441



20600028850



Powered by MidPassStar - www.logprovaes.com.br

**A RELAÇÃO ENTRE O MERCADO DE TÍTULOS E CREDIT
DEFAULT SWAPS E O APREÇAMENTO DA
OPÇÃO *CHEAPEST TO DELIVER***

Luciano De Vicente Santos

DEDALUS - Acervo - FEA



20600028850

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade e ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção de Título de Mestre.

Orientador: Rogério Rosenfeld
Co-Orientador: Rogério de Deus Oliveira

São Paulo

2005

88441

68441

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Santos, Luciano De Vicente

A relação entre o mercado de títulos e credit default swaps e o
apreçamento da opção cheapest to deliver / Luciano De Vicente Santos.
-- São Paulo, 2005.

107 p.

Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade de São Paulo, 2005
Bibliografia.

1. Derivativos 2. Modelagem matemática 3. Crédito (Risco)
I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração
e Contabilidade . II. Universidade de São Paulo. Instituto de Matemática
e Estatística. III. Título.

CDD – 332.645

À minha família,

**Minha esposa, Andréa, pelo infinito apoio e
motivação dados para a realização deste
trabalho.**

**Meus pais, Mauro e Cida, por terem
sempre me apoiado nos meus estudos.**

AGRADECIMENTOS

Ao meu co-orientador e amigo Rogério, pelos conhecimentos, tempo e motivação fundamentais para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Rogério Rosenfeld, pela confiança depositada em mim e neste trabalho.

Ao Banco JP Morgan, que cedeu sua base de dados para este estudo. Em especial, ao grupo de Risco de Mercado para Mercados Emergentes, pelo incentivo dado para a realização deste Mestrado.

RESUMO

Esse trabalho tem o objetivo de apresentar ferramentas de análise e determinação dos preços de *Credit Default Swaps* (CDS) e títulos, e de explicar, qualitativamente e quantitativamente, os fatores geradores de risco de basis entre esses instrumentos. Como parte da explicação, esse trabalho apresenta um modelo matemático de apreçamento da opção *cheapest to deliver* (CTD) embutida em contratos de CDS, ainda pouco explorada em trabalhos até hoje publicados ⁽¹⁾. O trabalho começa com a definição da relação livre de risco entre CDS e títulos, e discute os fatores geradores do risco de basis. Descreve um modelo de apreçamento de instrumentos de crédito a fim de identificar o valor do basis, e de estimar o prêmio da opção CTD. Compara a volatilidade implícita do ativo subjacente dessa opção (preços de títulos em *default*) à volatilidade de ativos selecionados do mercado, e calcula, independentemente, o valor da opção CTD. Os resultados são comparados com o basis de mercado para comprovar o valor explicado pelo modelo e identificar o basis residual. Os testes são feitos para contratos de CDS e títulos de Brasil e Turquia com vencimento de dez anos.

Palavras-chave: Risco de Crédito, Probabilidade de *Default*, Valor de Recuperação e Opção *cheapest to deliver*.

(1) Vide Bibliografia: *CreditMetrics* desenvolvido pelo JP Morgan, algumas publicações feitas por outras instituições financeiras como Merrill Lynch e Deutsche Bank além de trabalhos publicados por autores como Sundaram & Rangarajan (2004) e Hull & White (2000)

ABSTRACT

The objective of this paper is to introduce tools to calculate and analyze the Credit Default Swap (CDS) and bond spreads, and to explain, qualitatively and quantitatively, the factors that generate basis risk between them. As part of this explanation, this paper introduces a mathematical model to price the cheapest-to-deliver option (CTD) embedded in CDS spreads, a topic still barely discussed in published research papers ⁽²⁾. It starts with the definition of the risk-free relationship between CDS and bonds, and discusses its basis risk. It describes a model to evaluate credit instruments in order to identify the value of the basis risk and the implied CTD option premium. It compares the implied volatility of the underlying asset (price of defaulted bonds) to the volatility of selected assets traded in the financial markets, and calculates, independently, the CTD option premium. These results are compared with the market basis in order to substantiate the explained and the residual basis. The tests are done with CDS and bonds issued by Brazil and Turkey maturing in ten years.

Key words: Credit Risk, Default Probability, Recovery Value and Cheapest to Deliver Option.

(2) Bibliography: *CreditMetrics* published by JP Morgan, and research papers published by other financial institutions, such as Merrill Lynch and Deutsche Bank, and authors, such as Sundaram & Rangarajan (2004) and Hull & White (2000)

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Motivação | 1 |
| 1.2 Objetivo do Trabalho | 5 |
| 2. <i>CREDIT DEFAULT SWAPS (CDS) E O RISCO DE BASIS</i> | 7 |
| 2.1 O Conceito de um <i>Credit Default Swap</i> | 7 |
| 2.2 Os Riscos de um <i>Credit Default Swap</i> e de um Título | 13 |
| 2.3 A Estratégia Teórica Livre de Risco | 15 |
| 2.4 O Risco de Basis | 20 |
| 2.4.1 Razões de Mercado | 21 |
| 2.4.1.1 Posições Vendidas em Proteção | 21 |
| 2.4.1.2 Demanda por Proteção | 23 |
| 2.4.1.3 O Mercado de <i>Reverse Repo</i> e o Risco de <i>Funding</i> | 23 |
| 2.4.1.4 Liquidez | 27 |
| 2.4.2 Razões Fundamentais | 27 |
| 2.4.2.1 A Opção <i>Cheapest to Deliver (CTD)</i> | 27 |
| 2.4.2.2 Risco de <i>Default Técnico</i> | 30 |
| 2.4.2.3 Risco do Preço do Título Ser Diferente de Par | 32 |
| 2.4.2.4 Especialidades dos Títulos | 35 |
| 2.4.2.5 Risco de Contraparte | 35 |
| 2.4.2.6 Pagamento de Juros | 37 |
| 2.4.2.7 Convenção de Contagem de Dias | 37 |
| 2.5 A Importância dos Derivativos de Crédito | 38 |

| | |
|--|----|
| 2.5.1 Fatores de Crescimento | 38 |
| 2.5.2 Participantes do Mercado | 42 |
| 3. APREÇAMENTO DE UM CDS E A ESTIMAÇÃO DO BASIS | 44 |
| 3.1 A Relação Triangular entre <i>Spread</i> de Crédito, Probabilidade de <i>Default</i> e <i>Recovery Rate</i> | 44 |
| 3.2 Noções Básicas do Apreçamento de um Instrumento de Crédito | 47 |
| 3.3 A Intensidade de Default | 49 |
| 3.4 O Apreçamento de um Título e um CDS | 51 |
| 3.5 Bootstrapping da Curva de Intensidade de Default | 56 |
| 3.6 O Risco de Basis | 62 |
| 4. APREÇAMENTO DA OPÇÃO CTD | 70 |
| 4.1 Prêmio da Opção CTD | 70 |
| 4.2 Distribuição de <i>Recovery Rates</i> | 75 |
| 4.3 Modelo para Apreçar uma Opção de Compra Européia para o Máximo de Dois Ativos | 76 |
| 4.4 Modelo para Apreçar uma opção de Venda Européia para o Mínimo de Múltiplos Ativos | 78 |
| 4.4.1 Preliminares | 78 |
| 4.4.2 Descrição do Modelo de Lin | 79 |
| 4.4.3 Método de Clarke | 82 |
| 4.4.4 Aplicação | 84 |

| | |
|---|-----|
| 5. APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS | 86 |
| 5.1 Dados | 86 |
| 5.2 Resultados | 86 |
| 5.2.1 Brasil | 87 |
| 5.2.2 Turquia | 96 |
| 6. CONCLUSÕES | 107 |
| BIBLIOGRAFIA | 109 |
| APÊNDICES | 113 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|---|----|
| Gráfico 1. Volumes de derivativos de crédito | 1 |
| Gráfico 2. Retornos de um comprador de título e vendedor de CDS para diferentes preços de títulos | 34 |
| Gráfico 3. % de entidades de referência no mercado de derivativos de crédito | 38 |
| Gráfico 4. Contratos de derivativos de crédito por região | 39 |
| Gráfico 5. Contratos de derivativos de crédito por vencimento | 39 |
| Gráfico 6. Volumes no mercado americano de CDS como % do mercado de títulos durante a turbulência no ano de 2002 | 41 |
| Gráfico 7. A intensidade de <i>default</i> e a probabilidade de sobrevivência | 50 |
| Gráfico 8. Estrutura a termo da curva de intensidade de <i>default</i> e probabilidade de sobrevivência | 59 |
| Gráfico 9. Basis histórico entre um CDS de cinco anos e o <i>Global'09</i> pela medida tradicional | 63 |
| Gráfico 10. Basis histórico entre um CDS de cinco anos e o <i>Global'09</i> pela medida tradicional | 63 |
| Gráfico 11. Basis tradicional limpo e o basis ajustado entre um CDS de cinco anos de Brasil e o <i>Global'09</i> | 64 |
| Gráfico 12. Basis gerado pela opção CTD como diferença entre o basis tradicional e o ajustado | 69 |
| Gráfico 13. <i>Recovery Rates</i> para os títulos no <i>default</i> da Argentina em 2001 por vencimento | 71 |
| Gráfico 14. Curva de intensidade de default para Brasil implícita nos contratos de CDS | 87 |

| | |
|--|-----|
| Gráfico 30. Basis tradicional sujo e limpo de Turquia | 98 |
| Gráfico 31. Basis tradicional limpo e o basis ajustado | 98 |
| Gráfico 32. Basis gerado pela opção CTD como diferença entre o basis tradicional e o ajustado | 99 |
| Gráfico 33. <i>Recovery value</i> dos CDS e o prêmio da opção CTD | 99 |
| Gráfico 34. Volatilidades implícitas para o prêmio CTD do mínimo de dois a oito ativos | 100 |
| Gráfico 35. Benefício percentual de número de ativos | 101 |
| Gráfico 36. Volatilidades reais (implícitas) de RR_{CDS} e valores projetados pelo ISE | 104 |
| Gráfico 37. Valores reais (implícitas) de RR_{CDS} e valores projetados pelo ISE | 104 |
| Gráfico 38. Basis Ajustado e o prêmio da opção CTD | 105 |
| Gráfico 39. Basis residual não explicado | 106 |
| Gráfico 40. VIX histórico | 117 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1. Contrato de CDS de uma entidade de referência antes do evento de crédito | 8 |
| Figura 2. Contrato de CDS de uma entidade de referência após do evento de crédito | 9 |
| Figura 3. Exemplo de uma estratégia simples com CDS dada a mudança na percepção de crédito de uma determinada entidade de referência | 11 |
| Figura 4. Comparação de um CDS <i>spread</i> com o <i>spread</i> de um título | 14 |
| Figura 5. <i>Hedge</i> estático para o detentor de um título antes e após o <i>default</i> | 16 |
| Figura 6. A operação de <i>reverse repo</i> na estratégia livre de risco | 24 |
| Figura 7. A operação de <i>reverse repo</i> e a venda a descoberto | 24 |
| Figura 8. Árvore de um período de <i>pay-off</i> de um título com probabilidade de <i>default</i> | 45 |
| Figura 9. Árvore de três períodos de um título com probabilidade <i>default</i> | 47 |
| Figura 10. Preço esperado no tempo de um título exposto ao risco de <i>default</i> | 48 |
| Figura 11. Preço esperado no tempo de um título exposto ao risco de <i>default</i> | 52 |
| Figura 12. Preço esperado no tempo de um CDS (vendedor de proteção) | 54 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|--|----|
| Quadro 1. Preços indicativos de compra/venda de CDS de cinco anos | 11 |
| Quadro 2. Razões de Mercado e Fundamentais que explicam o basis entre Títulos e CDS | 21 |
| Quadro 3. Exemplo de preços gerados pelo modelo de Lin | 78 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1. Cálculo de juros de um CDS de <i>spread</i> 450 bps | 9 |
| Tabela 2. O valor das perdas de um comprador de título e de um vendedor de CDS em caso de <i>default</i> (preço maior que \$100) | 33 |
| Tabela 3. O valor das perdas de um comprador de título e de um vendedor de CDS em caso de I (preço menor que \$100) | 34 |
| Tabela 4. Contagem de dias no mercado de títulos e CDS | 37 |
| Tabela 5. Parcela de mercado | 43 |
| Tabela 6. A intensidade de <i>default</i> e a probabilidade de sobrevivência | 50 |
| Tabela 7. Intensidade de <i>default</i> para um CDS de Brasil com dez anos de vencimento | 57 |
| Tabela 8. <i>Bootstrapping</i> da curva de intensidade de <i>default</i> de contratos de CDS de Brasil | 59 |
| Tabela 9. Apreçamento de um título pelo modelo de probabilidade de <i>default</i> | 61 |
| Tabela 10. Regressão Linear da volatilidade de <i>recovery values</i> com ativos selecionados | 92 |
| Tabela 11. Regressão Linear da volatilidade de <i>recovery values</i> com ativos selecionados | 102 |
| Tabela 12. Regressão Linear da volatilidade de <i>recovery values</i> com ativos selecionados | 103 |

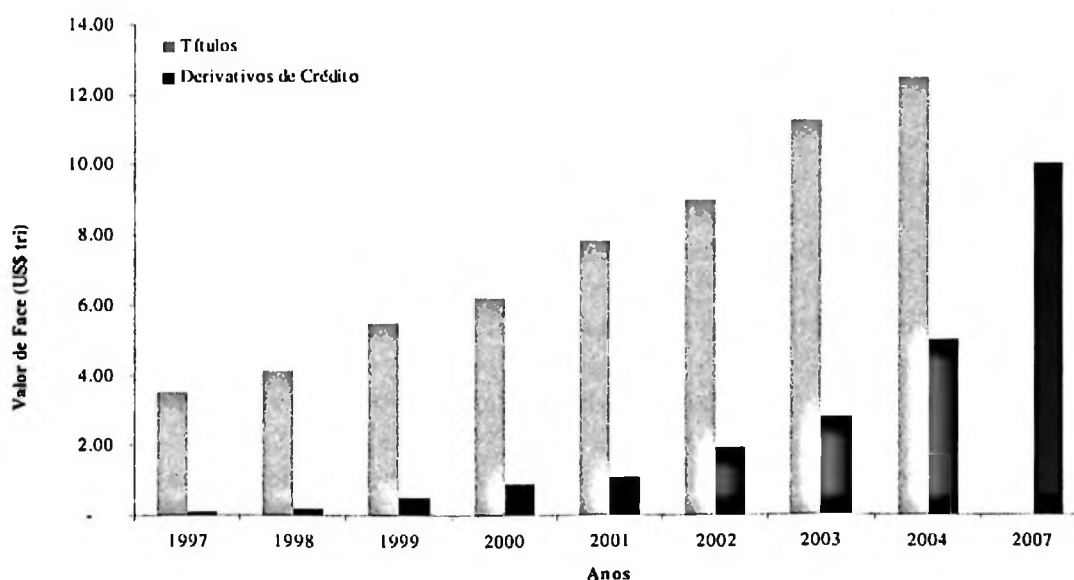
1. INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Desde sua introdução no mercado financeiro, em meados da década de 90, os *Credit Default Swaps* (CDS) têm se tornado um instrumento financeiro cada vez mais popular, principalmente nos chamados Mercados Emergentes. A diversificação dos participantes do mercado e a padronização dos contratos de CDS ocorridas no final da década de 90 estimularam tal crescimento.

Como ilustração, o valor de face dos contratos de derivativos de crédito aumentaram aproximadamente 160% em relação ao valor de face de US\$ 1,9 trilhões registrado pela *British Bankers Association* no final de 2002 (gráfico 1).

Gráfico 1: Volumes de Derivativos de Crédito (Valores estimados para 2007)



Fonte: *British Bankers Association*

Em termos gerais, o CDS é um contrato efetuado entre duas contrapartes, cujo ativo subjacente é o risco de crédito de uma entidade de referência previamente acordada. Nesse caso, risco de crédito significa o resultado potencial gerado por eventos relacionados à qualidade de crédito de uma determinada entidade. O CDS é uma maneira eficiente de replicar em um derivativo o risco de crédito implícito em um título ou empréstimo.

As duas contrapartes que fecham um contrato de CDS são definidas como o comprador e o vendedor de proteção. O comprador de proteção tem o objetivo de se proteger contra o *default*⁽³⁾ de uma determinada entidade ou emissor acordado no contrato. Por essa proteção, ele paga prêmios periódicos ao vendedor de proteção e, no caso de *default*, recebe do mesmo o valor de face do contrato. Por outro lado, o vendedor de proteção recebe pagamentos de prêmio periódicos do comprador de proteção em troca de assegurar o pagamento do valor de face no caso do *default* da entidade previamente acordada.

Dessa maneira, é possível dizer que o contrato de CDS permite às contrapartes a redução do risco proveniente da detenção de títulos ou empréstimos, criar exposição a uma determinada entidade equivalente à compra de um título ou empréstimo e, por fim, expressar uma visão de crédito positiva ou negativa em relação a uma entidade legal ou grupo de entidades.

Vale ressaltar que o risco de crédito transferido de uma contraparte a outra nesse contrato, ou ativo subjacente, é referenciado em uma terceira entidade legal previamente acordada. O risco de crédito das contrapartes, ou seja, o risco de uma das duas contrapartes do contrato não receber seu respectivo direito é diferente do ativo subjacente do CDS.

(3) No contexto de um contrato de CDS, *default* pode ser definido principalmente pela falência, falta de pagamento e reestruturação de dívidas por parte da entidade de referência.

O risco de contraparte, assim como sua respectiva correlação com o risco de crédito da entidade de referência do contrato, deve ser levado em consideração no valor de um contrato de CDS.

Tradicionalmente, os investidores ficam expostos ao risco de crédito de uma contraparte específica através da compra ou venda de títulos dessa contraparte. Porém, ao comprar um título o investidor fica exposto ao risco de taxa de juros além do risco de crédito do emissor, já que esse remunera ao seu detentor a taxa de juros livre de risco (ou custo de oportunidade) mais um prêmio adicional pelo risco de crédito específico.

A diferença com relação a um contrato de CDS é que este expõe as contrapartes somente ao risco de crédito, não proporcionando qualquer tipo de resultado por conta de exposição a taxas de juros. Mesmo assim, o risco de crédito presente em ambos títulos e CDS sugere que há uma relação de não arbitragem ou livre de risco entre eles, dadas suas características contratuais e de mercado. Há condições de mercado e condições técnicas, inerentes aos contratos de CDS e de títulos, que podem influenciar no valor do CDS e que, por consequência, podem tornar imperfeita a relação 'livre de risco' entre esses instrumentos, ou seja, podem gerar um basis entre os preços desses instrumentos.

Em especial, há uma condição técnica de extrema importância e que pode gerar diferenças significativas entre o valor de um título e o valor de um CDS. Essa condição é a opção *cheapest to deliver* (CTD). Essa é uma característica implícita e exclusiva dos contratos de CDS que não está presente nos termos dos títulos. No evento de um *default*, o vendedor de proteção deverá entregar ao comprador de proteção o valor de face do contrato e, em troca, receber títulos em *default* da entidade de referência. Nesse caso, o comprador de proteção tem a opção de entregar qualquer título de uma cesta pré-determinada, títulos esses com preços de mercado diferentes. O comprador de proteção racional sempre optará por entregar aquele título que tiver menor preço de mercado, o que trará um retorno total

maior na liquidação do CDS. A opção de entregar títulos de uma cesta pré-determinada tem um valor financeiro embutido nas taxas de mercado de CDS.

Atualmente, há um grande interesse por parte dos investidores de calcular o preço exato dessa opção, dada a sua relevância no preço total do CDS. Com o aumento da liquidez dos instrumentos de crédito, principalmente nos países emergentes, a compreensão do processo que rege os preços da parcela CTD é essencial para apreçar os CDS corretamente.

Como ilustração, um trabalho feito pela *Lehman Brothers* em 2001 aponta que a opção CTD é responsável por, aproximadamente, 6% a 10% do preço total de CDS com taxas de mercado da magnitude de 50 pontos base (bps) acima da Libor.

Apesar de relevante, esse assunto é pouco explorado em trabalhos publicados sobre o assunto e, quando abordado, a opção CTD é discutida qualitativamente. Toma-se como exemplo modelos difundidos nesse campo como o CreditMetrics desenvolvido pelo JP Morgan e outras publicações feitas por instituições financeiras e autores incluídos na Bibliografia desse trabalho (Merrill Lynch, Deutsche, Sundaram & Rangarajan (2004) e Hull & White (2000). Acredita-se que os grandes e mais sofisticados participantes desse mercado, como bancos internacionais, vêm desenvolvendo modelos matemáticos que precifiquem 100% do valor de um contrato de CDS e o impacto de cada condição técnica que o difere de um título. Porém, esses trabalhos quantitativos ainda não foram publicados.

1.2 Objetivo do Trabalho

O primeiro objetivo desse trabalho é discutir a relação existente entre um CDS e um título para o mesmo emissor, estabelecendo a relação livre de risco entre esses instrumentos para a mesma entidade de referência.

O segundo objetivo é discutir em que condições a relação entre um CDS e um título não é perfeita ou, em outras palavras, não é livre de risco, abordando as condições de mercado e condições inerentes aos contratos que podem influenciar o valor desses instrumentos e, conseqüentemente, a sua relação livre de risco.

O terceiro objetivo é apresentar um modelo de apreçamento de risco de crédito. Esse modelo utiliza duas variáveis para a quantificação de risco de crédito: a intensidade de *default* e o valor de recuperação. A intensidade de *default* é uma medida de probabilidade de sobrevivência do emissor e será extraída dos preços de mercado dos contratos de CDS. O valor de recuperação do título ou *recovery value*, representado como um percentual do valor de face original do título em *default*, é o valor residual pago pelo emissor de títulos em *default* aos seus credores.

Ao utilizar o mesmo modelo de apreçamento para títulos e CDS será possível identificar, mediante certas suposições, o comportamento do basis de mercado gerado pela opção CTD.

O quarto objetivo será a aproximação da volatilidade implícita dos preços dos títulos em *default*, dadas uma suposição de valor esperado e outra de correlação entre eles, à volatilidade de outros ativos presentes no mercado financeiro.

O quinto e último objetivo desse trabalho será o apreçamento da opção CTD a partir dessa volatilidade aproximada na tentativa de explicar o basis entre títulos e CDS.

Muito do crescimento do mercado de CDS não teria sido possível sem o desenvolvimento de modelos de apuração e gerenciamento de risco de crédito. Ao propor um modelo de apuração de contratos de CDS e da opção CTD, esse trabalho visa seu objetivo maior de fomentar a discussão técnica sobre os instrumentos de risco de crédito no âmbito acadêmico no Brasil, ainda pouco explorados.

Esse exercício será feito para contratos de CDS e títulos de dois países pertencentes ao bloco chamado mercados emergentes – Brasil e Turquia – para o período entre Abril de 2000 a Abril de 2005.

2. CREDIT DEFAULT SWAPS E O RISCO DE BASIS

2.1 O Conceito de um *Credit Default Swap*

Um *Credit Default Swap* (CDS) é um contrato financeiro que transfere a exposição de crédito de uma contraparte para a outra, ou seja, um contrato que fornece um 'seguro' contra o risco de *default* de uma determinada contraparte sem que esse seja diretamente envolvido. Esse emissor é conhecido como entidade de referência.

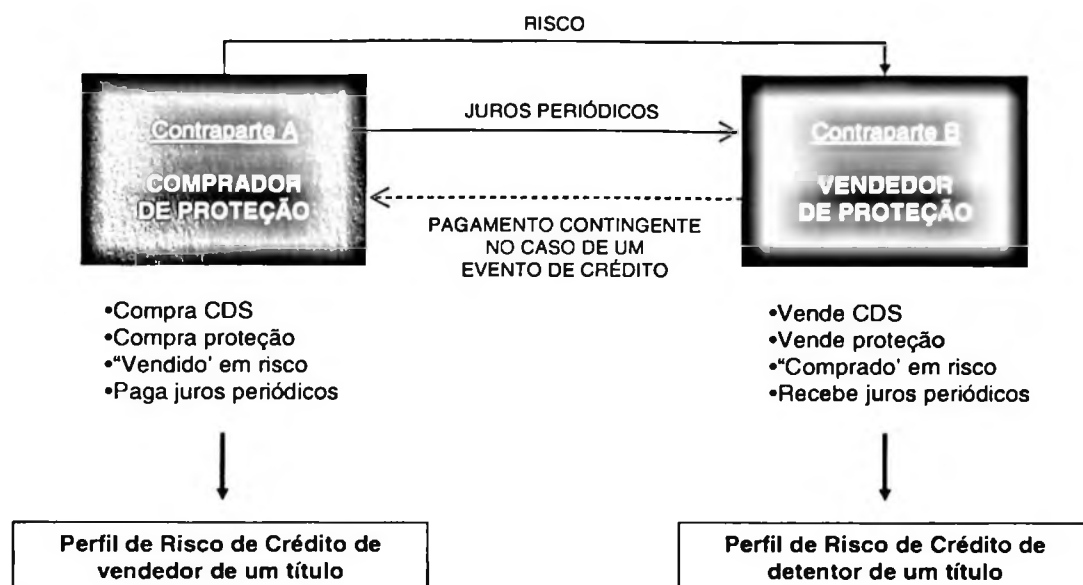
O comprador de um CDS é conhecido como o comprador de proteção. Este, paga juros periódicos à contraparte e lucra no caso de um evento de crédito da entidade de referência. O evento de crédito é denominado por: falência, falta de pagamento de dívidas em aberto ou, em alguns casos, reestruturação de títulos ou empréstimos. Comprar proteção significa deter uma posição de risco de crédito equivalente a vender um título ou ficar vendido em risco.

O vendedor de um CDS é chamado de vendedor de proteção. Este recebe juros periódicos e lucra se a entidade de referência permanecer estável, não caracterizando, em nenhum momento, o evento de crédito. Vender proteção significa deter uma posição de risco de crédito equivalente a comprar um título ou ficar comprado em risco.

Os fluxos de caixa desse contrato podem ser divididos em dois períodos: antes e após o evento de crédito. Antes do evento de crédito, temos que:

- a) O comprador de proteção efetua pagamentos semestrais de juros até o vencimento do swap;
- b) O vendedor de proteção detém a posição oposta e recebe os pagamentos semestrais.

Figura 1: Contrato de CDS de uma entidade de referência antes do evento de crédito



Fonte: JP Morgan

Pela análise da figura 1, nota-se que a posição de risco do vendedor de proteção é equivalente à do detentor de um título, dado que é o primeiro quem recebe os pagamentos periódicos em troca da detenção do risco de crédito. Daí a denominação de vendido em proteção ser equivalente à de comprado em risco e vice-versa.

Os juros do contrato são calculados por meio da multiplicação do valor de face do contrato pelo preço do contrato do CDS (tabela 1). Esse preço é cotado no mercado como pontos base anuais e é conhecido como um *spread* acima da taxa livre de risco. Em outras palavras, o preço do CDS é o valor ou custo do risco de crédito da entidade de referência.

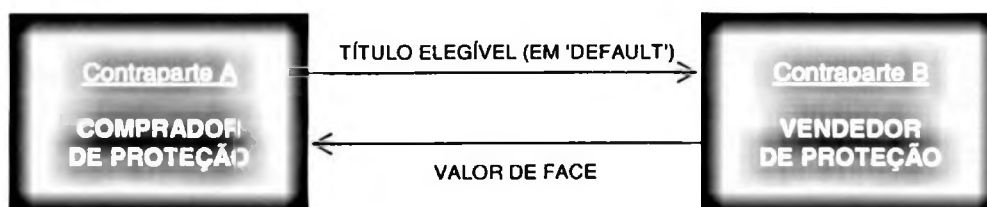
Tabela 1: Cálculo de Juros de um CDS de spread 450 bps

| | |
|---|------------|
| Spread acima da taxa livre de risco (em pontos base): | 450 |
| Valor de Face (US\$): | 10.000.000 |
| Vencimento (anos): | 5 |
| Início do Contrato: | 7-Jul-05 |

| Cupons | Prazo (Anos) | Juros (%) | Juros (US\$) |
|----------|--------------|-----------|--------------|
| 7-Jan-06 | 0.51 | 2.30% | 230.000 |
| 7-Jul-06 | 0.50 | 2.26% | 226.250 |
| 7-Jan-07 | 0.51 | 2.30% | 230.000 |
| 7-Jul-07 | 0.50 | 2.26% | 226.250 |
| 7-Jan-08 | 0.51 | 2.30% | 230.000 |
| 7-Jul-08 | 0.51 | 2.28% | 227.500 |
| 7-Jan-09 | 0.51 | 2.30% | 230.000 |
| 7-Jul-09 | 0.50 | 2.26% | 226.250 |
| 7-Jan-10 | 0.51 | 2.30% | 230.000 |
| 7-Jul-10 | 0.50 | 2.26% | 226.250 |

No caso de um evento de crédito (figura 2), temos que:

- a) O comprador de proteção entrega ao vendedor de proteção títulos elegíveis com valor de face equivalente ao valor de face do contrato de CDS e paga ao vendedor de proteção os juros corridos desde o último pagamento de juros até a data do evento de crédito;
- b) O vendedor de proteção entrega o valor de face do contrato de CDS ao comprador de proteção e recebe os juros do contrato até a data do evento de crédito.

Figura 2: Contrato de CDS de uma entidade de referência após o evento de crédito

Fonte: JP Morgan

Esse contrato pode ser liquidado pela entrega de títulos elegíveis ou pelo pagamento em dinheiro do valor líquido do contrato. Se o contrato prevê a entrega física, o comprador de proteção recebe o valor de face do CDS em dinheiro e entrega ao vendedor de proteção títulos elegíveis aos seus valores de mercado. Porém, se a liquidação é feita pelo valor líquido, o comprador de proteção recebe o valor de face do contrato menos o valor de mercado dos títulos elegíveis, por exemplo, determinado por Q . Logo, a liquidação se dá pela fórmula $(100 - Q)\%$ do valor de face do contrato.

Por exemplo: as contrapartes podem concordar em liquidar o contrato pelo valor de mercado do título elegível em *default* que é de \$40 para cada \$100 de valor de face ou, simplesmente, 40%. Nesse caso, o vendedor de proteção paga ao comprador o valor líquido de $(\$100 - \$40) = \$60$. É importante notar que o valor de recuperação ⁽⁴⁾ do título (40% nesse exemplo) não é fixo, é determinado somente após a ocorrência do evento de crédito.

Não é necessário ocorrer um evento de crédito para que um investidor de CDS obtenha lucros e perdas. Assim como títulos, o *spread* de mercado do CDS aumenta quando a percepção do risco de crédito da entidade de referência piora. Da mesma forma, o *spread* de mercado do CDS diminui quando há uma percepção de melhoria do risco de crédito da entidade de referência. O quadro 1 ilustra *spreads* de compra e venda de contratos de CDS de várias entidades de referências publicadas pela agência *Bloomberg*.

⁽⁴⁾ O valor de recuperação, ou *recovery value*, é o valor pago pelo emissor para os credores de títulos em *default*. Até que a reestruturação da dívida se concretize, os credores não sabem ao certo qual será o *recovery value* para seus títulos. A expectativa do *recovery value* de cada título é representada por seus respectivos preços de mercado.

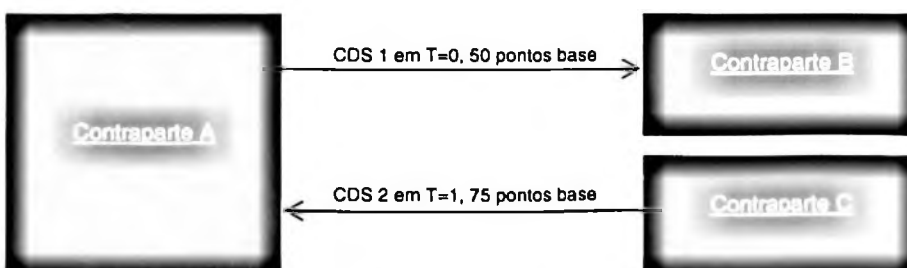
Quadro 1: Preços indicativos de compra/venda de CDS de 5 anos

| Name | 51 | Chg | Benchmark |
|-------------------------|---------|-----|------------------------------------|
| GOVT OF BRAZIL | 326/337 | +3 | BRAZIL C BONDS SERIES L W 102.0075 |
| GOVT OF COLOMBIA | 288/303 | -7 | COLOMBIA 9.75% 4/23/2009 GBL L |
| GOVT OF MEXICO | 86/97 | - | UNS 0.625% 3/12/08 |
| GOVT OF PANAMA | 174/205 | -2 | PANAMA 10.75% GLB 5/15/2020 100 |
| GOVT OF PERU | 173/204 | -2 | na |
| GOVT OF VENEZUELA | 306/327 | -4 | HH/A |
| PETROBRAS USD 99R | 203/233 | - | na |
| PETROLEUS MEXICANOS | 103/129 | - | na |
| YPF SOC ANONIMA 99R | 235/265 | - | na |
| GOVT OF QATAR | 37/38 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF TURKEY | 250/280 | +7 | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF CROATIA | 52/53 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF HUNGARY HNR | 19/20 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF LITHUANIA | 6/8 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF POLAND | 17/17 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF ROMANIA | 52/53 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF SLOVAKIA | 8/9 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| GOVT OF SO. AFRICA | 58/59 | - | Curve Name updated for Curve Name |
| INDUSTRIAL OF FIN. RUSS | 185/101 | +5 | Curve Name updated for Curve Name |

Fonte: Bloomberg

Por exemplo, a contraparte A compra proteção (vendido em risco) por cinco anos pagando 50 pontos base por ano e o *spread* do CDS aumenta para 75 pontos base após um ano. Nesse caso, a contraparte A poderia obter lucros através da venda de um CDS (comprado em risco) a 75 pontos base por quatro anos. Seu lucro seria o valor presente de $(75 - 50) = 25$ pontos base pelos quatro anos remanescentes multiplicado pelo valor de face do contrato (figura 3).

Figura 3: Exemplo de uma estratégia simples com CDS dada a mudança na percepção de crédito de uma determinada entidade de referência



Fonte: JP Morgan

Note que no contrato de CDS:

a) Não há pagamento inicial ou prêmio no ato do contrato. O comprador de proteção efetua pagamentos periódicos ao vendedor de proteção, porém não há troca de valores principais sem evento de crédito;

b) No caso de um evento de crédito, o comprador de proteção pode pagar juros decorridos no período até a data do evento. Esse fator é pré-acordado entre as partes em contrato;

c) O comprador de proteção deve entregar um título elegível ao vendedor no caso de um evento de crédito. O comprador escolhe qual título deve ser entregue dentre todos os ativos elegíveis. Essa característica do contrato é conhecida como 'cheapest to deliver' ou 'a entrega do papel mais barato' e será tratada mais adiante nesse trabalho.

As obrigações e responsabilidades de cada contraparte e a descrição do que é um evento de crédito estão definidas no contrato. Atualmente, os contratos de CDS são referenciados ao *International Swaps and Derivatives Association (ISDA)*. O ISDA define padrões contratuais chamados de *Master Agreements* que padronizam os contratos de CDS em diferentes mercados. A definição legal para os vários tipos de evento de crédito assim como a definição dos termos acordados entre o comprador e o vendedor de proteção estão descritos em dois documentos publicados pelo ISDA em 1999 e 2003 com o mesmo título: *ISDA Credit Derivatives Definitions*.

2.2 Os Riscos de um *Credit Default Swap* e de um Título

Os CDS e títulos de um mesmo emissor refletem a percepção de mercado sobre o risco de *default* do emissor. Para fazer uma comparação entre o valor de um CDS e um título, assume-se que os juros pagos por um título de taxa fixa compensa o investidor por:

a) Taxa livre de risco: o detentor de um título poderia obter juros provenientes de um título considerado livre de risco de *default* (por exemplo, *US Treasury*);

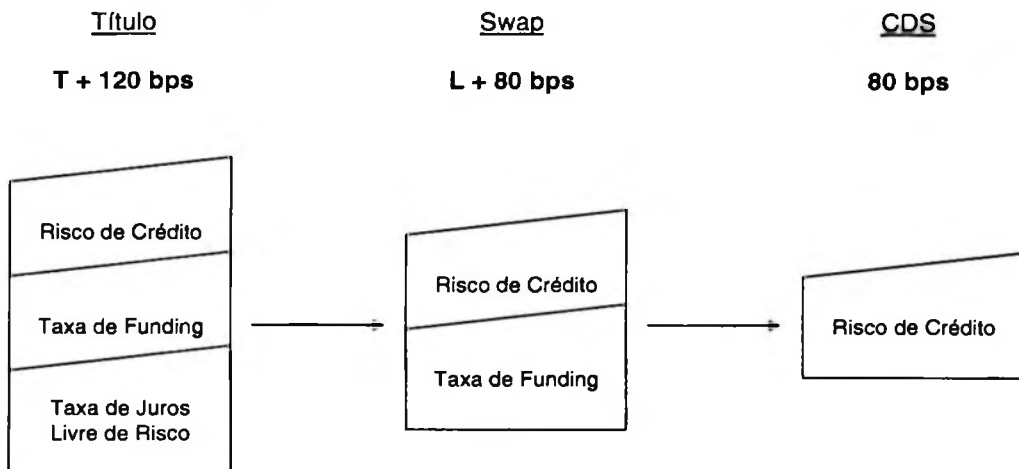
b) Risco de financiamento: essa é a taxa de financiamento ou *funding* para que o investidor compre um título no mercado. No mercado americano, essa taxa é conhecida como *swap spread*;

c) Risco de crédito: esse é o risco pelo qual o investidor obtém perdas no evento de *default* do emissor.

Por exemplo, com base na figura 4, assume-se que um título pague juros equivalentes à taxa de *US Treasury* mais 120 pontos base ($T + 120$ bps). Para que o investidor não tenha risco de taxa de juros, este pode trocar os pagamentos de taxa fixa do título por pagamentos de taxa flutuante através de um contrato de *swap*. O valor desse *swap* deve ser acordado de maneira que o valor presente dos pagamentos fixos seja equivalente ao valor presente dos pagamentos flutuantes na data de início do *swap*. Supondo-se que o valor do *swap* seja de Libor mais 80 pontos base ($L + 80$ bps), o investidor não está mais exposto a flutuações da taxa de juros, uma vez que receberá taxas maiores ou menores de acordo com suas flutuações de mercado. Para isolar o risco de crédito, o investidor deve ainda considerar os custos de *funding* do título, ou seja, se o investidor tomou dinheiro

emprestado para comprar o título, seu retorno total considerando custos de *funding* será de $(\text{Libor} + 80 \text{ bps}) - \text{Libor} = 80 \text{ bps}$. A diferença entre o yield do título e a taxa de Libor (taxa base do *swap*) pode ser chamada de *Z-spread*.

Figura 4: Comparação de um CDS *spread* com o *spread* de um título



Fonte: JP Morgan

Nesse sentido, o *Z-spread* é o valor que resolve a seguinte equação:

$$\text{Preço}_\text{Título} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\left[1 + \frac{(L_i + Z)}{F}\right]^{i \times F}} + \frac{\text{Valor_de_Face}}{\left[1 + \frac{(L_n + Z)}{F}\right]^{n \times F}}, \text{ sendo:} \quad (2.1)$$

C: Fluxos de Juros;

L: Libor ou taxa base do *swap*;

Z: *Z-spread*;

F: número de pagamentos de juros por ano

Para títulos com baixo *Z-spread* e preços de mercado perto do valor par (\$100 ou 100%), o *Z-spread* e o *CDS spread* são diretamente comparáveis. Por exemplo: se o *Z-spread* de um título está 100 bps e o *CDS spread* está 120 bps, conclui-se que o mercado de CDS está atribuindo uma visão mais pessimista do risco de crédito de um determinado emissor do que o mercado de títulos. Nesse caso, pode haver a oportunidade de alguma estratégia de valor relativo entre o CDS e o título.

Porém, para um título cujo preço de mercado está longe do seu valor par, deve-se ajustar o *Z-spread* a fim de compará-lo ao *CDS spread* de maneira mais acurada.

2.3 A estratégia teórica livre de risco

Antes de explicar porque esses instrumentos são operados ou marcados a *spreads* diferentes, é necessário reforçar a relação entre eles. Para isso, deve-se explicar a chamada estratégia teórica livre de risco. Esta estratégia envolve um título e um CDS que, sujeitos a certas suposições, demonstra a relação entre o valor desses instrumentos. As duas alternativas dessa estratégia são:

Alternativa I)

a) Comprar um ativo que paga Libor + *spread* flutuante ($L + F$).

Assume-se que esse ativo tem custo de funding à taxa Libor (L) sem *spread* adicional;

b) Comprar proteção para esse título no mercado de CDS até o seu vencimento M . O *spread* do CDS é denotado por D .

De outra maneira:

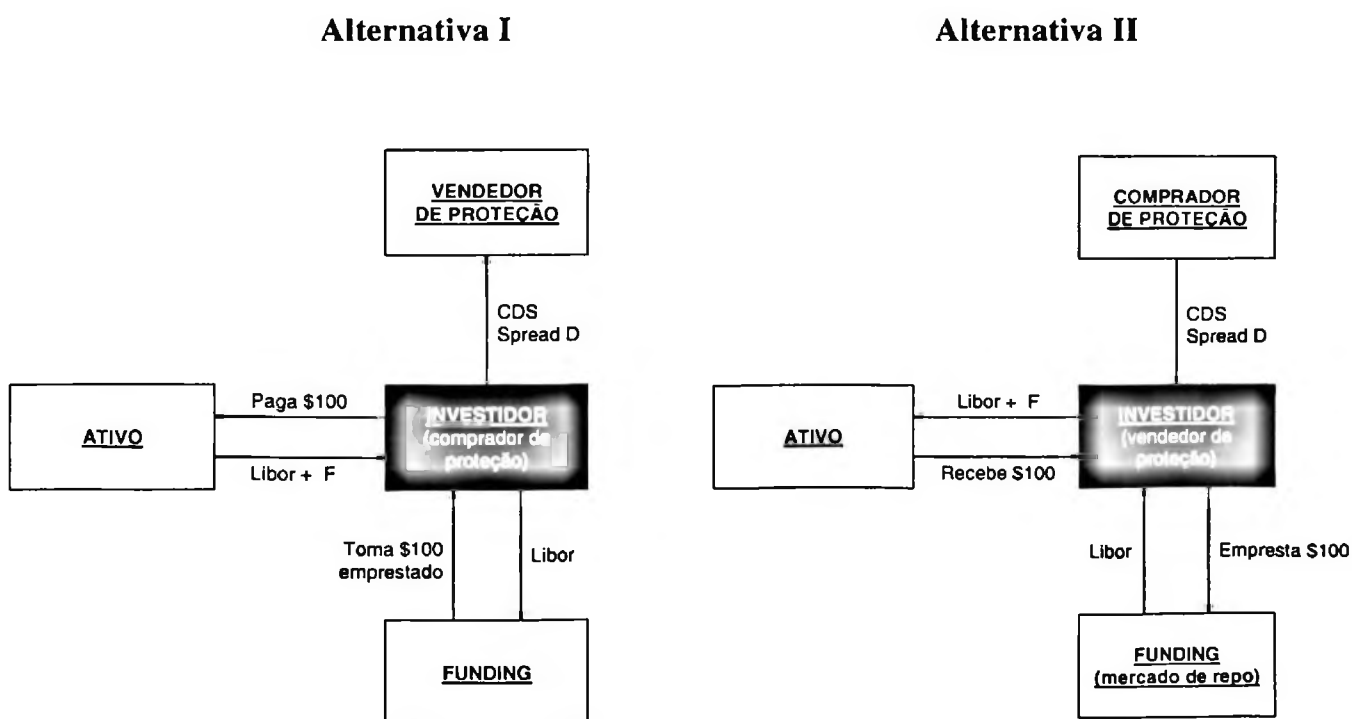
Alternativa II)

- a) Vender um ativo que paga Libor + *spread* flutuante ($L + F$). Assume-se que esse ativo tem custo de funding à taxa Libor (L) sem *spread* adicional;
- b) Vender proteção para esse título no mercado de CDS até o seu vencimento M .

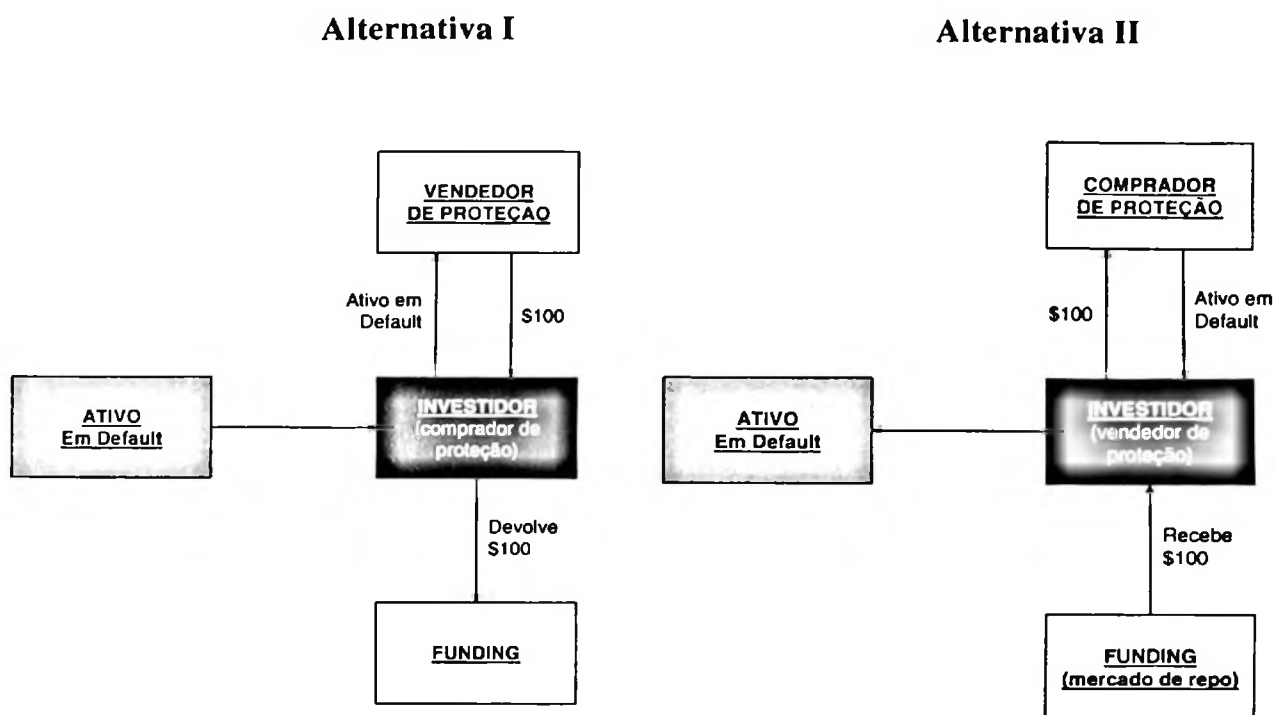
Supondo-se que o pagamento de juros em todos os contratos, em qualquer uma das alternativas, ocorra ao mesmo tempo i , os resultados antes e após o *default* estão denotados na figura 5.

Figura 5: Hedge estático para o detentor de um título antes e após o *default*

Antes do default:



Após o Default:



No evento de um *default* pela alternativa I, o investidor entrega títulos ao vendedor de proteção em troca do valor de face da operação (par ou \$100). Esse valor par é então utilizado para pagar o custo de oportunidade ou *funding* da operação. Já na alternativa II, o investidor liquida a operação de *funding* pelo seu valor de face e o entrega ao comprador de proteção. Esse, por sua vez, liquida a operação de CDS por meio da entrega do título em *default* ao investidor. Conclui-se que o resultado líquido de ambas as estratégias é livre de risco de crédito, uma vez que não há exposição ao *default* do ativo.

O investidor tem como resultado o *spread* anual de $(F - D)$ sobre a Libor por não assumir risco de crédito, onde $(F - D)$ é o basis entre CDS e títulos. Se o *spread* F é maior que o *spread* do CDS, o investidor irá optar pela alternativa I livre de risco na qual compra o título e proteção. Pela lei de oferta e demanda, a procura dos investidores por essa estratégia levará o basis a zero. Por outro lado, caso o *spread* $(F - D)$ seja negativo, o

investidor optará pela alternativa II, na qual vende proteção e o título, recebendo um *spread* líquido sem risco de crédito até que, pela lei de oferta e demanda, a diferença ($F - D$) seja zero.

A partir dessa análise, concluí-se que a condição de não arbitragem, ou livre de risco, é $F = D$.

Esse modelo pode ser demonstrado matematicamente. Admitindo-se que, para a mesma quantidade P , o custo de *funding*, o retorno do título e o custo de CDS para o investidor sejam:

$$Funding = P + P \times \sum_{i=1}^n L_i \times i; \quad (2.2)$$

$$Título = P + P \times \left(\sum_{i=1}^n L_i \times i + \sum_{i=1}^n F \times i \right); \quad (2.3)$$

$$CDS = P \times \sum_{i=1}^n D \times i, \text{ onde:} \quad (2.4)$$

P : principal (equivalente a \$100 no exemplo anterior);

L : taxa Libor;

F : *spread* % do título;

D : *spread* % do CDS;

i : tempo.

Dessa maneira, o *pay-off* do investidor pode ser representado no tempo N da seguinte maneira:

a) Caso não ocorra o *default*:

$$\text{Pay - Off} = -\text{Funding} + \text{Título} - \text{CDS} \quad (2.5)$$

$$\text{Pay - Off} = -P - \left(P \times \sum_{i=1}^n L_i \times i \right) + P + P \times \left(\sum_{i=1}^n L_i \times i + \sum_{i=1}^n F \times i \right) - P \times \sum_{i=1}^n D \times i$$

$$\text{Pay - Off} = P \times \left(\sum_{i=1}^n F \times i - \sum_{i=1}^n D \times i \right)$$

$$\text{Pay - Off} = P \times \sum_{i=1}^n (F - D) \times i \quad (2.6)$$

Pela regra de não arbitragem, o *pay-off* da estratégia deve ser igual a zero. Dessa maneira, temos que:

$$F \times \sum_{i=1}^n i = D \times \sum_{i=1}^n i$$

| | | |
|---------------------|-----------------------------------|--------------|
| $F = D \Rightarrow$ | Condição de não-arbitragem | (2.7) |
|---------------------|-----------------------------------|--------------|

b) Caso ocorra o *default*:

Supondo-se que o *default* tenha ocorrido no momento imediatamente posterior ao pagamento de juros, não há juros residuais a serem pagos ou recebidos pelo investidor. Nesse caso, o *pay-off* para o investidor será de:

$$\text{Pay - Off} = -\text{Funding} + \text{Título} - \text{CDS}$$

Se o contrato não prever a entrega do título em *default*, o *pay-off* será de:

$$\text{Pay - Off} = -P + RR + (P - RR) \quad (2.8)$$

$$\text{Pay - Off} = 0$$

De outra maneira, se o contrato prever a entrega do título em *default*, o *pay-off* será de:

$$\text{Pay - Off} = -P + 0 + (P - 0) \quad (2.9)$$

$$\text{Pay - Off} = 0$$

Note que em caso de *default*, o *pay-off* do investidor será sempre zero, independentemente dos *spreads* F e D. Logo, a única condição de não arbitragem para que 1 título seja equivalente a 1 Credit Default Swap, sob as suposições apresentadas acima, é $F = D$.

2.4 O risco de basis

Há uma série de razões que podem gerar diferenças entre um CDS *spread* e o *spread* dos títulos e que, conseqüentemente, podem distorcer a relação livre de risco entre

eles. Essas diferenças podem ser divididas em dois grupos: razões de mercado e razões fundamentais.

De acordo com o quadro 2, razões de mercado são relativas a liquidez, oferta, demanda e outros fatores do mercado real que podem gerar diferenças entre os preços e *spreads* de títulos e CDS. Já as razões fundamentais são relativas aos mecanismos e especificações de como um contrato de CDS se comporta diferentemente de um título. Em outras palavras, são fatores inerentes aos contratos de CDS e títulos que resultam em diferenças nos seus respectivos preços e *spreads*. Essas razões serão ilustradas nas próximas sessões.

Quadro 2: Razões de Mercado e Fundamentais que explicam o basis entre títulos e CDS

| Razões de Mercado | Razões Fundamentais |
|---|---|
| Posições Vendidas em Proteção Demanda por Proteção O Mercado de Repo e o risco de funding Liquidez | Opção Cheapest to Deliver Risco de Default Técnico Diferença entre os preços de títulos e CDS's Especialidades dos Títulos Risco de Contraparte Pagamento de Juros Contagem de Dias |

2.4.1 Razões de Mercado

2.4.1.1 Posições Vendidas em Proteção

Há algumas estratégias de mercado efetuadas principalmente por vendedores de proteção que, quando feitas em excesso, movem a relação de não arbitragem entre CDS e títulos e tornam o basis entre esses instrumentos negativo.

Atualmente, a maioria dos participantes são vendedores de proteção procurando receber juros de compradores de proteção, por assumir risco de crédito. De outra maneira, alguns investidores vendem proteção no mercado de CDS e investem os juros recebidos em aplicações que rendam um *spread* sobre a Libor. Essa estratégia é bastante similar a tomar recursos no mercado de Libor e investir em títulos, porém a maneira mais simples de realizá-la é vender proteção via o mercado de CDS.

Há também investidores no mercado que vendem proteção como forma de levantarem fundos para aplicação em produtos de crédito estruturados, como por exemplo, os chamados *Collateralized Debt Obligations* ⁽⁵⁾ (CDO). CDO é uma transação representada por uma cesta de distintos CDS e entidades de referência cujo risco de *default* total é dividido em níveis. O valor total de face da cesta é liquidado parcialmente na mesma ordem que ocorre o *default* de cada nível de crédito na cesta. Esse instrumento faz parte da família de derivativos de crédito disponíveis no mercado atual.

Quando há um excesso de vendedores de proteção no mercado de CDS, o *spread* desse instrumento diminui com relação ao *spread* dos títulos, gerando uma desigualdade na condição de não-arbitragem. Nesse caso, o basis se torna negativo, ou seja, o CDS *spread* se torna menor do que o *spread* de títulos.

Nessa situação, o investidor pode comprar um título e proteção como estratégia de arbitragem. Ele não estará exposto ao risco de *default* e receberá um *spread* residual proveniente do basis. Essa estratégia poderá ser feita repetidas vezes até que a condição de não-arbitragem volte a se estabelecer.

(5) Vide Bibliografia: Duffie & Garleanu (2001). *Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations*.

2.4.1.2 Demanda por proteção:

Uma visão negativa em relação a um crédito específico pode ser expressa de duas maneiras diferentes: por meio da venda (a descoberto) de um título ou da compra de proteção via um CDS. O mercado de CDS fornece ao investidor uma praticidade muito maior para vender risco do que o mercado de títulos, que teria que ser feito via uma operação de *reverse repo*.

Dada essa dificuldade, uma expectativa negativa com relação à qualidade de crédito de um nome em específico pode gerar a abertura dos CDS *spreads* em relação ao *spread* dos títulos, uma vez que a demanda por CDS será muito maior do que a oferta de títulos.

Dessa maneira, quando há uma visão pessimista generalizada sobre um determinado nome, o basis entre o CDS e os títulos desse nome específico se torna positivo.

2.4.1.3 O mercado de *reverse repo* e o risco de *funding*:

O mercado de *reverse repo* é o veículo que os investidores utilizam para vender algum título específico a descoberto.

Uma operação de *reverse repo* representa uma simples operação de *funding* entre duas contrapartes, na qual uma delas empresta dinheiro à outra e recebe juros pelo tempo decorrido até a liquidação do contrato. A particularidade desse contrato é que a contraparte tomadora de recursos deposita títulos em forma de colaterais, que são registrados no balanço do doador de recursos. Uma vez registrados os títulos, o doador de recursos tem a capacidade de vendê-los a uma terceira contraparte, mesmo sabendo que, na liquidação do

contrato de *reverse repo*, deverá devolvê-los ao tomador de recursos. Na prática, se o doador de recursos vender os colaterais no mercado, ele estará vendendo os títulos a descoberto.

As figuras 6 e 7 identificam a operação de *reverse repo* na estratégia livre de risco demonstrada anteriormente e mostram o fluxo de uma operação de *reverse repo*, assim como o balanço de títulos do investidor.

Figura 6: A operação de *reverse repo* na estratégia livre de risco

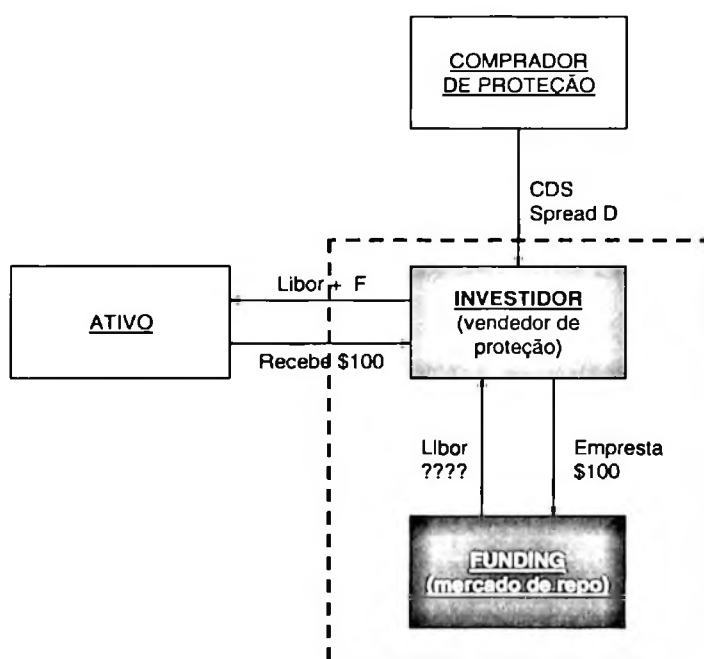


Figura 7: Operação de *reverse repo* e a venda a descoberto



Na operação de *reverse repo* (assim como demonstrado nas figuras 6 e 7), temos que:

- a) O valor dos títulos é registrado no ativo do balanço patrimonial do investidor, dado o recebimento de colaterais;
- b) O valor dos títulos é registrado no passivo do balanço patrimonial do investidor, dado o compromisso de devolvê-los ao tomador de recursos no vencimento do contrato de *reverse repo*.
- c) A venda definitiva do título a uma terceira contraparte gera um saldo total passivo no balanço patrimonial do investidor.

A operação de *reverse repo* não gera exposição ao risco de mercado do título, uma vez que este está registrado com o mesmo valor em ambos ativo e passivo do balanço patrimonial do investidor. Ao executar a venda definitiva do título a uma terceira parte, o investidor então fica vendido em risco, representado por um saldo líquido negativo (ou saldo líquido credor no passivo) do balanço de títulos do investidor.

Além disso, pode-se verificar que a estratégia de vender títulos a descoberto por uma operação de *reverse repo* é equivalente à compra de um CDS. Se o investidor tiver uma visão pessimista sobre a qualidade de crédito de um emissor, ele pode ficar vendido em risco por meio de uma operação de *reverse repo* somada à venda dos títulos a descoberto ou, simplesmente, pela compra de proteção (venda de risco) através de um CDS.

Porém, as duas estratégias trarão exatamente o mesmo resultado se, e somente se, a taxa da operação do contrato de *reverse repo* for fixa e equivalente a Libor para todo o período – assim como um contrato de CDS. Caso contrário, as estratégias terão resultados

diferentes, dado que o retorno da estratégia de venda de títulos a descoberto dependerá da taxa acordada na operação de *reverse repo*.

A taxa acordada no contrato de *reverse repo* depende do prazo da operação, da qualidade de crédito das contrapartes e do tipo de colateral. Usualmente, os contratos de *reverse repo* são fechados de um dia para outro (*overnight*) e rolados diariamente.

O fato de a operação de *funding* ser colateralizada pelo tomador de recursos seria uma justificativa para que a taxa acordada fosse menor do que a Libor. Porém, essa variável depende da qualidade de crédito do investidor.

Para investidores com taxas de *funding* menores que Libor, é mais interessante comprar títulos e proteção do que vender proteção via CDS, se o basis entre títulos e CDS for menor que a diferença entre Libor e seu respectivo custo de *funding*. Por exemplo, considerando que o título paga (Libor + 38bps), o CDS *spread* é de 40bps e o custo de *funding* do investidor é de (Libor – 5bps). Nesse caso, comprar o título tem o resultado para o investidor de $(\text{Libor} + 38\text{bps}) - (\text{Libor} - 5\text{bps}) = 43\text{bps}$. Comparando este resultado com o custo de comprar proteção de 40bps, o investidor terá um resultado líquido de 3bps.

A situação se inverte no caso de investidores que têm seu respectivo custo de *funding* maior que Libor (geralmente investidores com *rating* de crédito menor que AAA). Por exemplo, um banco com *rating* A consegue tomar emprestado a (Libor + 20bps) para comprar um título que paga (Libor + 65 bps), enquanto o CDS paga um *spread* de 50bps. Nesse caso, comprar o título e proteção tem resultado líquido negativo de 5bps.

2.4.1.4 Liquidez:

A liquidez no mercado de títulos está restrita aos vencimentos dos títulos disponíveis no mercado. Além disso, há títulos cujas emissões têm valor de face maior que outras e, conseqüentemente, são mais líquidas. As operações de títulos no mercado são, em média, executadas com tamanhos que variam de US\$ 1 milhão a US\$ 40 milhões.

Já no mercado de CDS, os vencimentos mais líquidos são os pontos de: um, dois, três, cinco e dez anos. Esses prazos não têm datas fixas, ou seja, a liquidez continua concentrada nos mesmos pontos, independentemente do tempo decorrido. As operações de CDS são feitas, em média, com valor de face de US\$ 10 milhões. Isso faz com que a liquidez no mercado de títulos seja diferente daquela encontrada no mercado de CDS – o que pode gerar um excesso de oferta ou demanda em um dos mercados em detrimento do outro, levando a um desequilíbrio na relação de não arbitragem entre esses dois instrumentos.

2.4.2 Razões Fundamentais

2.4.2.1 A opção *cheapest to deliver* (CTD):

Um fator fundamental de diferença entre o *spread* de um título e o CDS *spread* é a opção *cheapest to deliver* (CTD). Essa é uma particularidade embutida nos contratos de CDS, na qual, em caso da liquidação de um contrato de CDS dado um evento de crédito, o comprador de proteção tem o direito de escolher qualquer título especificado em contrato

para entregar à contraparte em troca do valor de face. Dependendo da cesta de títulos elegíveis, a habilidade de entregar o título mais barato da cesta pode ter um valor significativo. Como essa habilidade gera risco e valor financeiro ao contrato, uma posição comprada em proteção tem mais valor do que uma posição vendida em título. Dessa maneira, o CTD é um fator que gera basis positivo entre o CDS *spread* e o *spread* dos títulos.

Títulos do mesmo emissor com mesma estrutura de capital devem ter, em geral, o mesmo preço de mercado, exceto pelos juros decorridos no período, calculados a partir do último pagamento de cupom. Após o evento de crédito, esses títulos de mesmo emissor devem operar ao mesmo preço de mercado, independentemente do cupom ou vencimento.

Assim, espera-se que esses títulos sejam tratados da mesma maneira na reestruturação da dívida. Porém, é possível que esses títulos ainda sejam operados com preços diferentes e tratados de maneira desigual na reestruturação da dívida, ou seja, o emissor pode pagar *recovery values* diferentes para cada título. Isso pode depender do tipo de evento de crédito ou da oferta feita pelo emissor para cada título em *default*. Dessa maneira, o comprador de proteção tem a opção de escolher o título com o menor *recovery value* no evento de *default* a ser entregue ao vendedor de proteção para liquidar o contrato de CDS. Em contrapartida, os vendedores de proteção esperam receber um *spread* adicional ao vender um CDS, comparado ao retorno de um título, por ter o risco de CTD.

Quanto maior o espectro de títulos elegíveis com respeito à estrutura, vencimento e termos contratuais, maior valor terá a opção CTD embutida nos CDS. Nesses casos, é esperado que:

- a) Títulos mais longos tenham preços de mercado menores do que títulos mais curtos;

- b) Títulos com baixo cupom, assim como títulos conversíveis, sejam operados com um preço menor do que títulos com cupom mais alto;
- c) Títulos mais líquidos sejam mais caros que títulos menos líquidos;

Não é trivial a quantificação do valor da opção CTD embutida em um CDS. Seu valor deve ser proporcional à probabilidade de *default* e à diferença em resultado pela habilidade de escolher um dos títulos de uma cesta pré-determinada, que é uma função da volatilidade dos ativos em *default* e da correlação entre eles. Quanto maior a volatilidade e menor a correlação entre os ativos, maior deve ser o valor dessa opção. Se a qualidade de crédito do emissor se deteriorar com o tempo, sua probabilidade de *default* será maior, gerando também um maior valor de opção CTD.

Pode-se observar exemplos reais para tentar extrair as expectativas do mercado sobre o valor da opção CTD. Alguns países, que fazem parte do bloco chamado mercados emergentes, obtêm mercados desenvolvidos de CDS cujos ativos elegíveis são ‘apenas títulos’ ou ‘títulos mais empréstimos’. Por exemplo, no final da década de 90, durante o período de estresse nos mercados emergentes, o basis entre os CDS *spreads* referenciados em ‘apenas títulos’ e os CDS *spreads* referenciados em ‘títulos mais empréstimos’ de Turquia estiveram entre 25 bps e 50 bps, com um CDS *spread* de aproximado 400 bps.

Esse trabalho apresentará, nas próximas sessões, modelos para quantificar essa opção embutida nos contratos de CDS e verificar a relevância desse prêmio do basis entre títulos e CDS.

2.4.2.2 Risco de Default Técnico

O risco de *default* técnico é definido como o risco de que a estrutura legal utilizada nos contratos de CDS seja diferente das definições que constituiriam *default* no caso de um título. A maior preocupação dos vendedores de proteção é o fato de que eles tenham que pagar aos compradores de proteção o valor dos títulos entregues, num evento de crédito que não caracterize um *default* completo. Como consequência, os vendedores de proteção demandam um *spread* mais alto, o que aumenta o basis entre CDS e títulos.

Como visto anteriormente, os CDS são operados sob a regulamentação e padrões estabelecidos pelo ISDA. O ISDA define padrões contratuais chamados de *Master Agreements* que padronizam os contratos de CDS em diferentes mercados. Nesses contratos, os eventos de crédito são definidos como: falência, não pagamento de dívidas, *default*, moratória e reestruturação de dívidas.

Porém, podem haver circunstâncias nas quais o evento de crédito é acionado por um dos itens mencionados, gerando a liquidação dos respectivos contratos de CDS, sem que ocorra a deterioração material do crédito do emissor ou entidade de referência. O principal exemplo é o evento de reestruturação. Enquanto as definições do ISDA especificam que a redução no pagamento de juros, redução no montante de principal e adiamento de pagamento de principal e juros são caracterizadas como formas de *default*, essas não levam em conta outras circunstâncias em que o emissor substitui esses pagamentos por outros benefícios.

Isso foi já mencionado em discussões levantadas pelo mercado em Agosto de 2000, quando a Consec, companhia de seguros americana, reestruturou sua dívida de curto prazo e adiou o vencimento de seus empréstimos por quinze meses. Ao mesmo tempo, a Consec alterou outros aspectos da dívida, como aumento nas taxas de cupom, incremento de

garantias e outras cláusulas a favor do detentor dos títulos. Esse esforço foi em vão, uma vez que o adiamento de empréstimos caracterizou um evento de crédito nos termos do ISDA e disparou a liquidação dos CDS dessa entidade de referência ⁽⁶⁾.

Seus títulos reestruturados com vencimento de quinze meses estavam com preço de mercado aproximado de 92% do valor de face, enquanto títulos de longo prazo não colateralizados, que não foram incluídos na reestruturação da dívida, tinham preço de mercado aproximado de 70% do valor de face. Ao caracterizar o *default* da companhia, os compradores de proteção liquidaram seus contratos de CDS entregando os títulos com menor valor de face aos vendedores de proteção, que tiveram um prejuízo aproximado de \$60 milhões de dólares.

Assim como os vendedores de proteção, os compradores de proteção não são tão preocupados com as especificidades do *default*, já que sempre podem lucrar com o *default* pela entrega de títulos com preços inferiores ao seu valor par (\$100). Porém, os vendedores de proteção se preocupam em ter que pagar por uma gama de circunstâncias descritas no contrato e, logo, demandam um *spread* maior. Dessa maneira, o risco de *default* técnico gera um basis positivo.

É válido mencionar ainda o risco de documentação, que é o risco legal de não poder liquidar um contrato de CDS dado o evento de crédito. Esse risco foi uma preocupação na criação do mercado de CDS, porém já foi bastante mitigado por todo ambiente legal fornecido pelo ISDA, no que diz respeito à padronização da confirmação de operações e das definições e contratos de CDS.

(6) Vide Bibliografia: Packer & Zhu (2005). *Contractual Terms and CDS Pricing*..

2.4.2.3 Risco do preço do título ser diferente de par (\$100)

Um CDS é um ativo que vale par, isto é, ele compensa o comprador de proteção no caso de perda do valor par (\$100) de um título. Títulos de taxa fixa que podem ter preço de mercado significativamente maior (ou menor) de par expõem o investidor a um risco de crédito maior (ou menor) do que um CDS com mesmo valor de face. Como resultado, os *spreads* de crédito desses ativos devem refletir diferentes riscos de crédito: títulos com preços menores que par deveriam pagar um *spread* menor do que CDS, enquanto títulos com preços maiores que par deveriam pagar *spreads* maiores do que CDS.

Para o mesmo emissor, se um título e um CDS têm o mesmo *spread* e não há o *default* do emissor, os retornos do título e do CDS serão equivalentes. Porém, se o emissor entrar em *default*, as perdas do detentor de um título (comprado em risco) e do vendedor de um CDS (comprado em risco) não serão as mesmas.

Por exemplo, assumindo que um investidor está comprando um título cujo preço é \$110, com vencimento em um ano e 3% de *Z-spread* sobre a Libor e que o CDS *spread* para esse emissor também é de 3%; caso o investidor tenha \$100 para gastar, ele comprará $\$100/\$110 = 0.9091$ títulos ou venderá proteção via CDS com valor de face \$100.

Se não ocorrer *default* do emissor, ambos terão um lucro de 3% ao ano, ou simplesmente \$3. Porém, se ocorrer o *default* do emissor, o resultado não será o mesmo: o comprador de um título perderá um valor equivalente ao preço pago menos seu *recovery value* de mercado, caso os venda logo após o *default*. Dessa maneira, caso o *recovery value* de mercado seja de \$40 ou 40%, a perda do investidor será de:

$$\text{Perda} = \Delta \text{Preços} \times \text{Quantidade} = (\$110 - \$40) \times (0.9091) = \$63.64$$

Paralelamente, para um vendedor de CDS com valor de face de \$100, a perda seria equivalente ao valor de face do contrato subtraído o valor de recuperação dos títulos em questão, ou seja; $(\$100 - \$40) = \$60$, conforme mostra a tabela 2.

Tabela 2: O valor das perdas de um comprador de título e de um vendedor de CDS em caso de *default*

(preço maior que \$100)

| Comprador de um TÍTULO | | Vendedor de um CDS | |
|-------------------------------|----------------|---------------------------|----------------|
| Z-spread | 3% | Spread | 3% |
| Capital | \$100 | Capital | \$100 |
| Preço do Título | \$110 | | |
| Número de Contratos | 0.9091 | | |
| <hr/> | | <hr/> | |
| Recovery Value | \$40 | Recovery Value | \$40 |
| <hr/> | | <hr/> | |
| Perda Total | \$63.64 | Perda Total | \$60.00 |

Fonte: JP Morgan

É possível fazer o mesmo exercício para o preço do título menor que \$100. Nesse caso, a perda do detentor de um título é menor do que a perda de um vendedor de CDS em *default* (tabela 3).

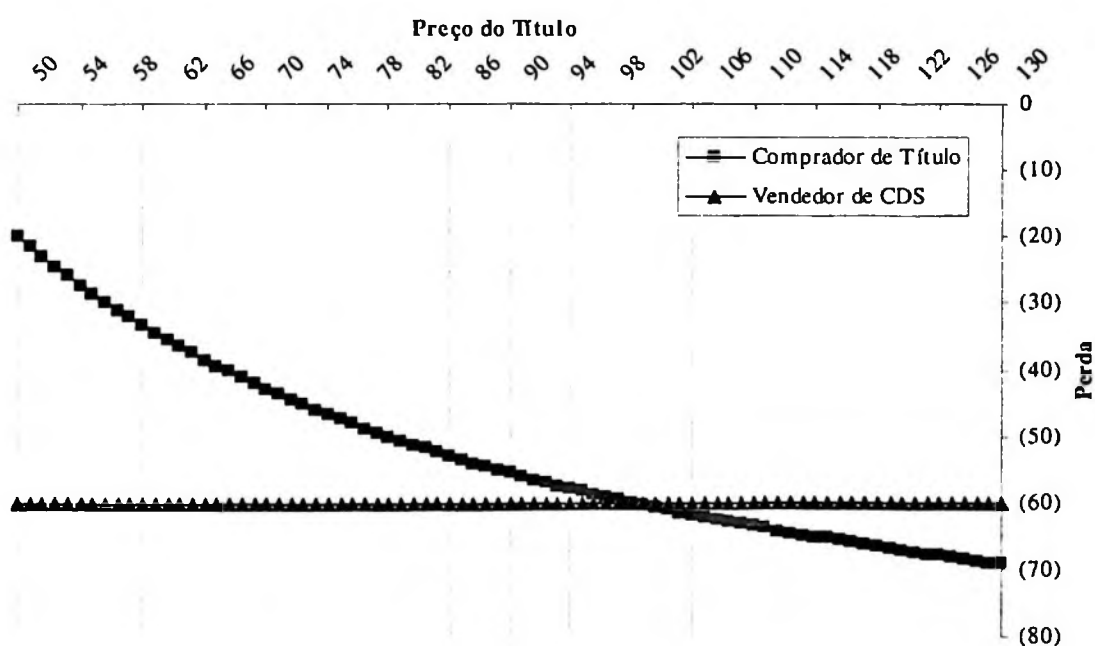
Tabela 3: O valor das perdas de um comprador de título e de um vendedor de CDS em caso de *default* (preço menor que \$100)

| Comprador de um TÍTULO | | Vendedor de um CDS | |
|------------------------|----------------|--------------------|----------------|
| Z-spread | 3% | Spread | 3% |
| Capital | \$100 | Capital | \$100 |
| Preço do Título | \$90 | | |
| Número de Contratos | 1.1111 | | |
| Recovery Value | \$40 | Recovery Value | \$40 |
| Perda Total | \$55.56 | Perda Total | \$60.00 |

Fonte: JP Morgan

O gráfico 2 mostra os retornos (perdas) de ambos para vários níveis de preços diferentes. Vale notar que a perda do detentor do título é igual à perda de um vendedor de CDS, somente para o preço do título equivalente a par (\$100).

Gráfico 2: Retornos de um comprador de título e vendedor de CDS para diferentes preços de títulos



É possível notar que o prêmio de um título deve ser ajustado em relação ao CDS *spread*, dado que o título contém risco de crédito diferente no caso de *default* do emissor. Esse ajuste é negativo quando o preço do título for maior que par e positivo quando o preço do título for menor que par. Porém, caso não haja *default* do emissor, ambos os instrumentos detêm o mesmo retorno.

Nas sessões seguintes, serão apresentadas maneiras de eliminar a diferença entre o *spread* de títulos e CDS *spread* por conta da diferença entre seus preços.

2.4.2.4 Especialidades dos títulos

Alguns títulos têm características específicas que fazem com que tenham valor diferente do CDS. Dentre essas especialidades, podemos citar, como exemplo, títulos cujos cupons estão ligados à qualidade de crédito do emissor – chamados de *step-up bonds*.

Os detentores de títulos com a linguagem *step-up* se beneficiam no caso de deterioração de crédito do emissor, o que não ocorre com os vendedores de proteção. Especuladores poderiam comprar os títulos *step-up* e comprar proteção, se beneficiando de qualquer queda no rating do emissor.

2.4.2.5 Risco de Contraparte

A compra ou venda de um título é uma transação entre duas contrapartes – o detentor e o emissor – não havendo envolvimento de nenhuma outra contraparte. Já o CDS

é um derivativo de balcão com envolvimento de três contrapartes diferentes: o comprador de proteção, o vendedor de proteção e a entidade de referência.

Para o vendedor de proteção, o risco é uma perda de resultado proveniente de uma diminuição nos *spreads*. O montante em questão depende, porém, do nível inicial de *spreads* acordado em contrato. Por exemplo: um vendedor de proteção, cuja entidade de referência é um país emergente, tem maior risco do que outro vendedor de proteção de um país com boa qualidade de crédito.

Para o comprador de proteção, o risco advém da contraparte ser incapaz de fazer o pagamento no valor da proteção previamente acordada. Como é uma exposição contingente ao *default*, ela está altamente relacionada ao grau de correlação entre a contraparte (vendedor de proteção) e a entidade de referência. Uma alta correlação de *default* significa que o *default* da entidade de referência estará associado ao *default* da contraparte em questão (vendedor de proteção) e vice-versa.

Por exemplo, comprar proteção contra o *default* de uma empresa coreana de um banco coreano deve ser visto com uma operação de alta correlação de *default*, ou seja, o comprador de proteção deve considerar o impacto que o *default* da empresa coreana pode gerar no banco coreano (vendedor de proteção). Geralmente, o mercado não calcula o risco de *default* da contraparte nos CDS *spreads*. Os compradores de proteção escolhem não fechar essas transações com contrapartes que têm alta correlação com a entidade de referência ou algum tipo de mecanismo é estabelecido para diminuir esse risco, como o depósito de colaterais.

2.4.2.6 Pagamento de Juros

O comprador de proteção pode acordar no contrato se, em caso de *default*, ele deverá pagar os juros decorridos do último pagamento de cupom até a data de *default*. No caso do mercado de títulos, o investidor de um título em *default* perde não só o valor de face, mas também todos os pagamentos de cupons futuros, inclusive para o período entre o último pagamento de cupom e o evento de crédito. Esse efeito faz com que os CDS *spreads* sejam menores, para compensar o ganho adicional que os vendedores de proteção obterão no caso de *default*, comparado com o detentor de um título.

2.4.2.7 Convenção de contagem de dias

Como ilustrado na tabela 4, os pagamentos de juros para títulos no mercado americano são pagos semestralmente e o cálculo dos juros utiliza a convenção '30/360' para contagem de dias (30 dias por mês e 360 dias por ano). No caso de um CDS, os juros são pagos também semestralmente, de um modo geral, porém utilizam a convenção 'actual/360' para contagem de dias (número de dias correntes e 360 dias por ano).

Tabela 4: Contagem de dias no mercado de títulos e CDS

| | Convenção no mercado de TÍTULO | Convenção no mercado de CDS |
|----------------|--------------------------------|-----------------------------|
| Data Inicial | 10-Jan-03 | 10-Jan-03 |
| Data Final | 10-Jan-05 | 10-Jan-05 |
| Número de dias | 720 | 731 |
| Númro de Anos | 2.00 | 2.03 |

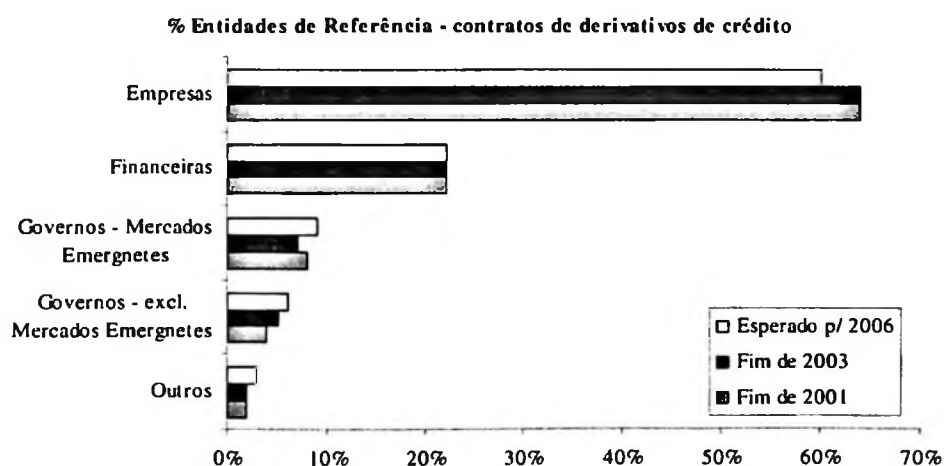
2.5 A importância dos derivativos de crédito

2.5.1 Fatores de crescimento

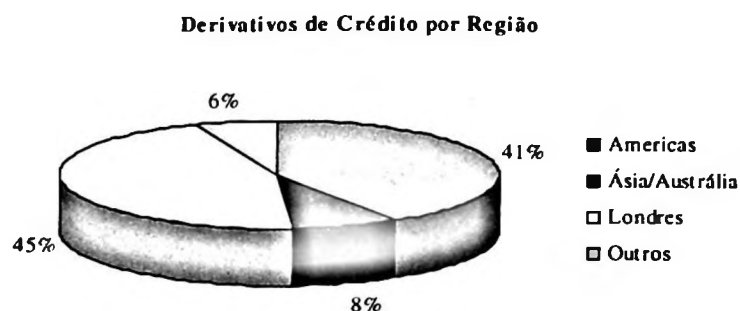
Os derivativos de crédito têm sido amplamente adotados pelos participantes do mercado de crédito como uma ferramenta para gerenciar exposições a crédito.

Os gráficos 3, 4 e 5 descrevem características do mercado de derivativos de crédito com relação à concentração por entidade de referência, região e vencimento. Observa-se que aproximadamente 65% das entidades de referência são empresas privadas, 41% dos contratos são registrados no continente americano e que os contratos com vencimento de três a cinco anos (inclusive) representam 58% do mercado de derivativos de crédito.

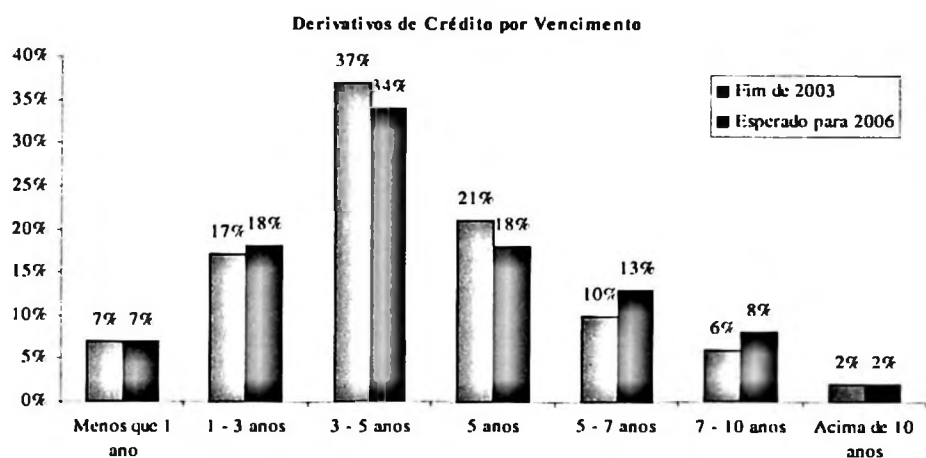
Gráfico 3: % de Entidades de Referência no Mercado de Derivativos de Crédito



Fonte: *BBA Credit Derivatives Report 2004*

Gráfico 4: Contratos de Derivativos de Crédito por Região

Fonte: *BBA Credit Derivatives Report 2004*

Gráfico 5: Contratos de Derivativos de Crédito por Vencimento

Fonte: *BBA Credit Derivatives Report 2004*

Seu rápido crescimento em termos de volume de mercado se deve principalmente aos seguintes fatores:

- a) Os derivativos de crédito permitem desagregar o risco de crédito de outros riscos inerentes a instrumentos tradicionais do mercado: um título corporativo ou do governo concentra uma série de riscos, como taxas de juros,

moeda e crédito. A maneira tradicional de um investidor ajustar sua posição de risco de crédito era comprar ou vender títulos, afetando conseqüentemente suas exposições a taxas de juros e moeda. Os derivativos de crédito permitem o gerenciamento independente dos riscos de taxa de juros e risco de *default*;

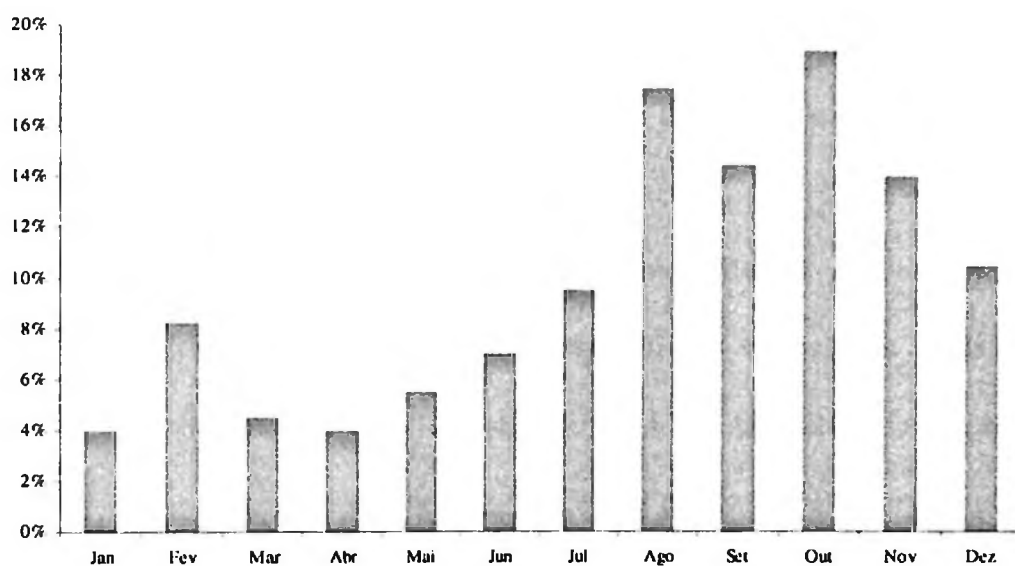
b) Derivativos de crédito são instrumentos eficientes para vender crédito: o investidor pode vender facilmente crédito através desse mercado de derivativos, ao invés de depender da flexibilidade e liquidez do mercado de *reverse repo* de títulos para que possa ficar vendido em risco. Gerenciadores de risco podem, através de CDS, comprar proteção e vender risco para montar operações de hedge ou se beneficiar de situações de mercado pessimistas ou de crise;

c) Derivativos de crédito permitem ao mercado uma leitura mais clara, rápida e objetiva sobre o risco de *default*: CDS representam o custo puro do risco de crédito de uma entidade de referência. Investidores procuram esse tipo de instrumento para se expor unicamente ao risco de crédito. Dessa maneira, os *spreads* de CDS costumam reagir mais rapidamente do que outros mercados a mudanças na percepção de crédito;

d) Os mercados de derivativos de crédito provêm liquidez em tempos de turbulência e crise: antes da criação e difusão do mercado de CDS, o detentor de um título em tempos de crise tinha extrema dificuldade de vendê-lo, mesmo a preços reduzidos. Isso ocorria porque o mercado de títulos é tipicamente comprado em risco, em contrapartida ao passivo das empresas e governos emissores de títulos. Por outro lado, as mesas de derivativos de crédito geralmente detêm uma carteira comprada em proteção, por meio de contratos de CDS. Em períodos de crise, os investidores de títulos podem reduzir suas exposições de crédito comprando proteção, via mercado de CDS das mesas de derivativos de crédito, que devem estar

em melhores condições de fornecer proteção ao mercado, comprando risco e mudando sua posição de vendido em risco para neutro. Além disso, o mercado de CDS cria naturalmente o mercado de compradores de títulos em *default*, já que os detentores de proteção compram títulos no mercado para liquidar contratos de CDS com os vendedores de proteção. O gráfico 6 mostra um aumento no volume dos contratos de CDS como percentual do mercado de títulos durante a turbulência no mercado de crédito durante o ano de 2002 ⁽⁷⁾.

Gráfico 6: Volumes no mercado americano de CDS como % do mercado de títulos durante a turbulência no ano de 2002



Fonte: JP Morgan

(7) O ano de 2002 foi representado por turbulências no mercado de títulos *High Yield* americano assim como em mercados emergentes. Esse último foi motivado pela crise político-econômica pré-eleição no Brasil.

e) Derivativos de crédito criam maneiras de customizar investimentos em crédito e hedges: através do mercado de CDS, investidores devem assumir exposição a créditos que não são ativamente operados no mercado ou em prazos não disponíveis no mercado de títulos. Esse mercado permite a montagem de estratégias de valor relativo entre instrumentos de classe ou prazo diferentes.

2.5.2 Participantes do mercado

Os principais participantes do mercado de CDS são: bancos, hedge funds, gerenciadores de recursos, companhias de seguro e empresas privadas. Durante os últimos dez anos, o perfil dos participantes evoluiu e se diversificou paralelamente à difusão dos derivativos de crédito.

Inicialmente, os bancos utilizavam o mercado de derivativos de crédito para reduzirem suas exposições a empresas específicas, exposições essas provenientes de operações de outros mercados. O mercado de CDS permitiu a redução do excesso de concentração de risco em determinadas empresas e, conseqüentemente, permitiu a redução do capital dispendido nestas operações, exigido por reguladores do mercado.

Atualmente, os bancos, hedge funds e gerenciadores de recursos utilizam o mercado de derivativos de crédito para montarem estratégias direcionais de mercado, com respeito às suas percepções de risco de crédito de empresas e também estratégias de valor relativo entre diferentes instrumentos e prazos.

Por exemplo, um gerenciador de recurso pode comprar proteção de três anos, como estratégia de hedge, para um título de dez anos emitido por uma empresa ou entidade legal

que está passando por um período de estresse de crédito, mas ainda tem boas chances de voltar a apresentar bons resultados a longo prazo, caso sobreviva a essa crise.

Na tabela 5 seguem números sobre a parcela de mercado de CDS de cada um de seus participantes. É notório que os bancos são os principais participantes do mercado de CDS com 51% do total dos contratos de compra de proteção (venda de risco) e 38% dos contratos de venda de proteção (compra de risco).

Tabela 5: Parcela de mercado

| Market Share dos participantes do mercado de CDS | | |
|---|---------------------------------|--------------------------------|
| | Parcela Comprada em Proteção | Parcela Vendida em Proteção |
| Bancos | 51% | 38% |
| Hedge Funds | 16% | 15% |
| Empresas | 3% | 2% |
| Casas de Custódia | 16% | 16% |
| Governo/Agências de Exportação | 1% | 1% |
| Fundos Mútuos | 3% | 4% |
| Fundos de Pensão | 3% | 4% |
| Companhias de Seguro | 7% | 20% |
| Total | 100% | 100% |

Fonte: BBA Credit Derivatives Report 2004

3. APREÇAMENTO DE UM CDS E A ESTIMAÇÃO DO BASIS

3.1 A relação triangular entre *spread* de crédito, probabilidade de *default* e *recovery rate*

Como já discutido, a possibilidade de transferência de risco de crédito entre contrapartes tem se tornado a principal motivação para o desenvolvimento dos derivativos de crédito. Portanto, para que seja possível fazê-la, necessitamos de um ambiente onde se possa quantificar risco de crédito. É claro que a compensação que um investidor deve ter por assumir risco de crédito e o prêmio que outro investidor deve pagar para se proteger contra um risco de crédito estão diretamente ligadas ao tamanho ou montante de risco. Podemos dizer que esse montante está definido por dois fatores:

- a) Probabilidade de *default*;
- b) A perda após o *default* ou *recovery rate*.

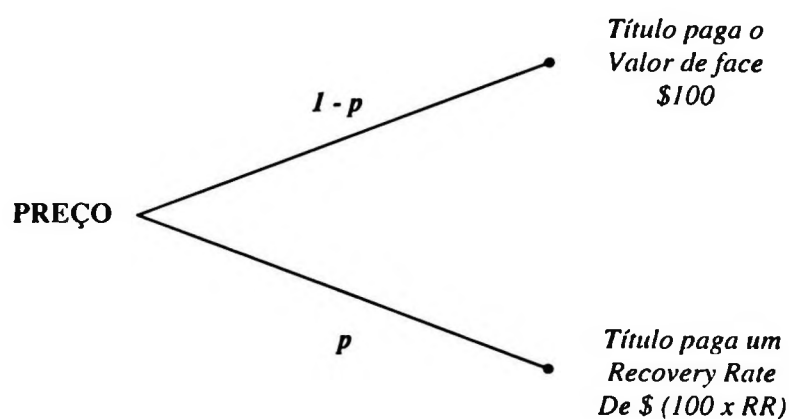
Como exemplo, analisando um título de um ano de vencimento, sem pagamento de cupons intermediários (zero cupom), cuja probabilidade de entrar em *default* no próximo ano (períodos discretos) seja p . Se este entrar em *default* nesse período, o emissor paga ao detentor do título o *recovery rate* RR , que é uma porcentagem fixa do valor de face, paga ao final do período.

Esse modelo pode ser representado por uma simples árvore binomial de um período, como ilustrado na figura 8. O preço atual do título é representado por seu valor esperado descontado pela taxa de juros livre de risco, ou seja:

$$\text{Preço} = \frac{1}{1+r} [p \times 100 \times RR + (1-p) \times 100] \quad (3.1),$$

onde r é a taxa de juros livre de risco para o período.

Figura 8: Árvore de um período do *pay-off* de um título com probabilidade de *default*



Sendo p a probabilidade do título entrar em *default*, podemos dizer que $(1 - p)$ representa a probabilidade de sobrevivência do título. Da mesma maneira, podemos dizer que $(1 - RR)$ representa a perda após o *default* (*loss given default*) já que RR representa o *recovery value* ou o valor pago pelo emissor após o *default*.

Ilustrando o modelo acima com valores, tem-se que, se a probabilidade de *default* de 1 ano é 0,75%, o *recovery rate* esperado 50% e a taxa de livre de risco equivalente a 5%, o preço do título zero cupom para um ano é:

$$\text{Preço} = \frac{1}{1,05} [0,0075 \times 100 \times 0,50 + 0,9925 \times 100] = \$94,88 ,$$

título esse mais barato do que um título sem probabilidade de *default* (ou livre de risco), cujo preço é:

$$\text{Preço} = \frac{100}{1,05} = \$95,24$$

Para um título zero cupom, a qualidade de crédito implícita pode ser definida como o *spread* s da seguinte maneira:

$$\text{Preço} = \frac{100}{(1+r)(1+s)} \quad (3.2)$$

Pelo exemplo acima, conclui-se que $s = 37,6$ bps ou $0,376\%$ para um ano.

Uma relação entre o *spread* s , o *recovery value* e a probabilidade de *default* pode ser diretamente derivada se a variável *Preço* na fórmula (3.2) for substituída pela fórmula (3.1):

$$\frac{1}{1+r} [p \times 100 \times RR + (1-p) \times 100] = \frac{100}{(1+r)(1+s)}$$

$$\Rightarrow p \times (RR - 1) = \frac{1}{(1+s)} - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+s)} = p \times (RR - 1)$$

$$\boxed{s \approx p \times (1 - RR)} \quad (3.3)$$

Para tal, $s \approx 1 - \frac{1}{(1+s)}$, o que é bastante acurado para valores pequenos de s . Por

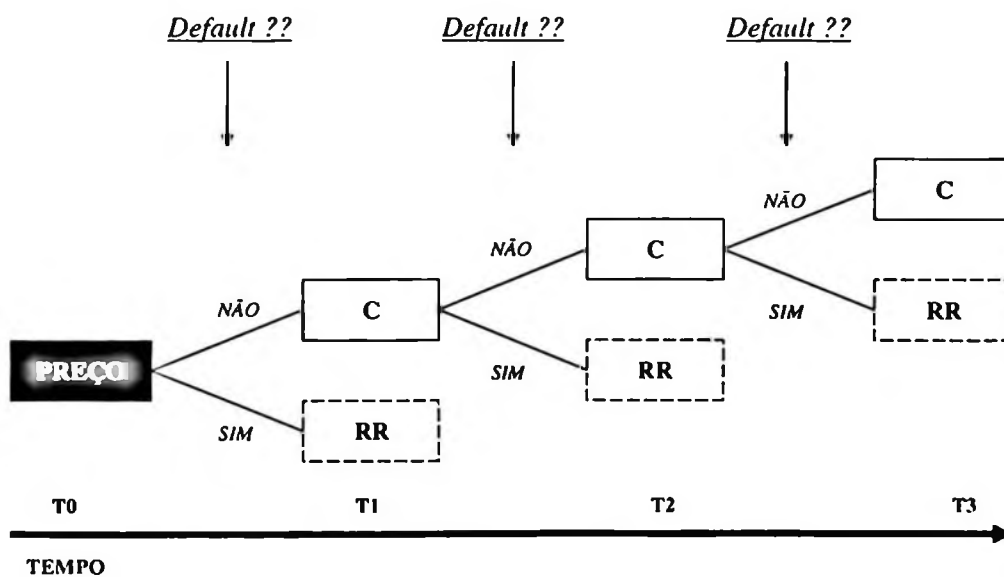
essa relação, o *spread* s , calculado com os dados do exemplo acima, é de 0,375%.

Apesar de simples, é uma relação bastante utilizada em mesas de operação e gerenciadores de risco para analisar os *spreads* de crédito de um título específico, dados pelo mercado, e a sua probabilidade de *default* implícita, dado um *recovery rate*.

3.2 Noções básicas do apreamento de um instrumento de crédito

A figura 9 mostra uma árvore de três períodos utilizada para aprear um instrumento de crédito exposto à probabilidade de *default* de um determinado emissor:

Figura 9: Árvore de três períodos de um título com probabilidade de *default*



C = Fluxo de Caixa (cupom ou, se no último período, cupom mais principal);

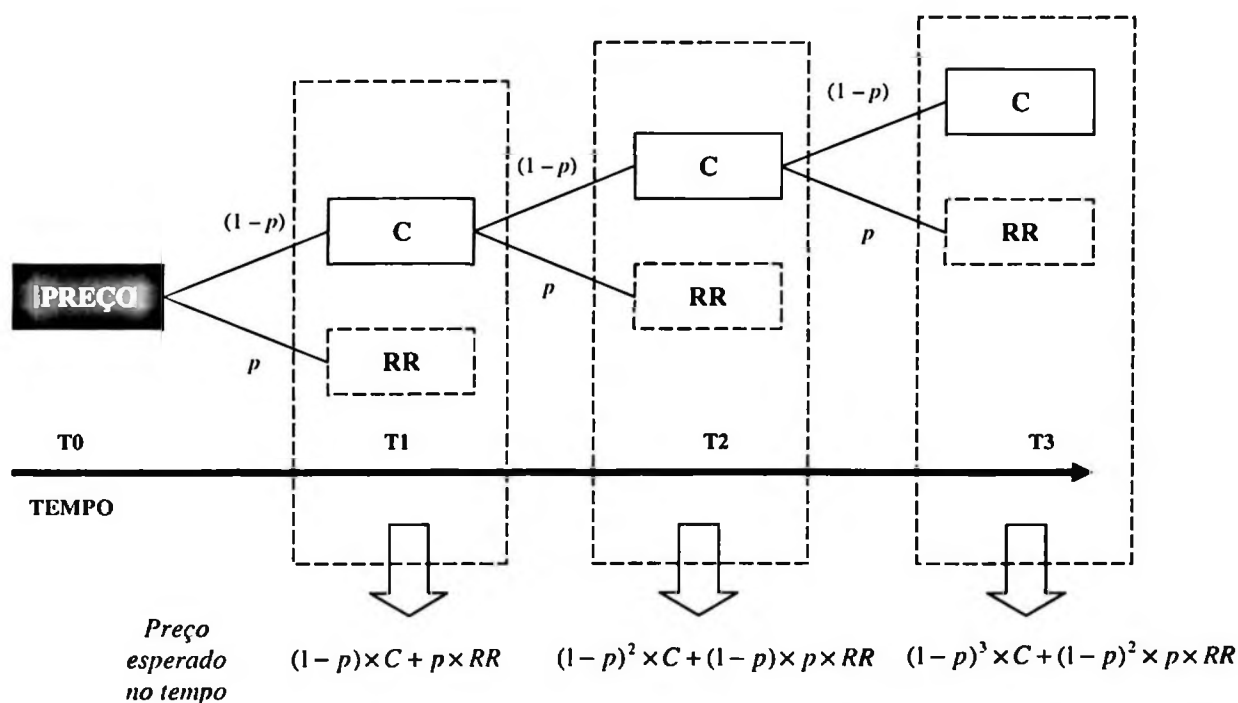
RR = *Recovery Rate*.

T_n = período de tempo discreto

A árvore binominal mostra que o preço de um instrumento de crédito é função de seus pagamentos futuros, ponderados pelas respectivas probabilidades. Nesse caso, a cada período de tempo, o investidor pode receber RR , caso o título entre em *default* com probabilidade p , ou receber C , caso o título não entre em *default*, com probabilidade $(1 - p)$.

Nota-se que não há pagamentos possíveis subsequentes ao evento de *default*, ou seja, se o título entrar em *default* a qualquer período T menor ou igual ao vencimento do título, o investidor não receberá nada além do *recovery value*.

Figura 10: Preço esperado no tempo de um título exposto ao risco de *default*



Estendendo essa árvore para n períodos (até o vencimento do título), temos que o preço esperado desse instrumento em valor presente deve ser (figura 10):

$$E[\text{Preço}] = \sum_{i=1}^n (1 + r_{T_i})^{-T_i} \times [(1 - p)^i \times C + (1 - p)^{i-1} \times p \times RR], \text{ sendo:}$$

T_i : tempo discreto até o vencimento do título

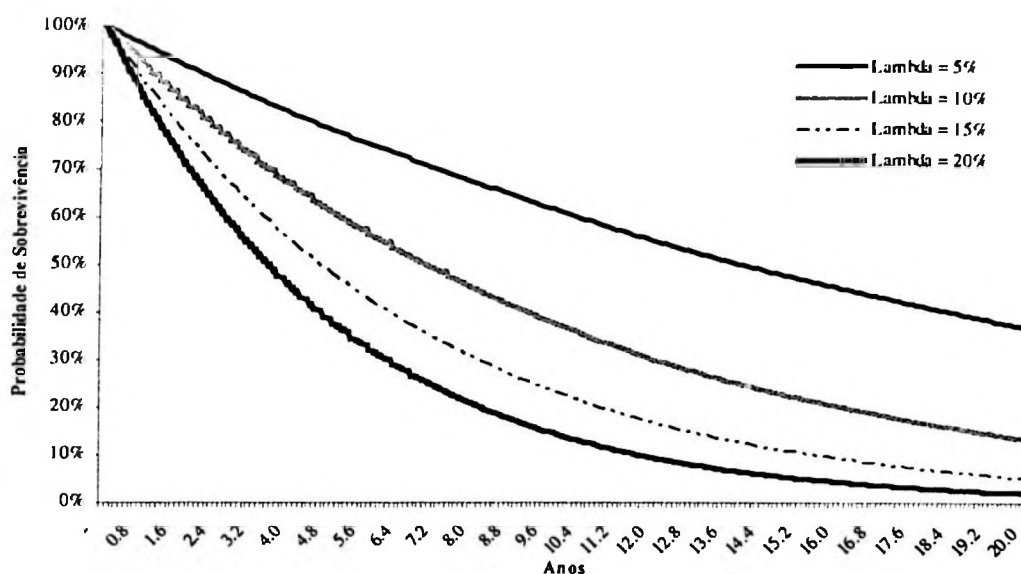
Essa fórmula é uma maneira simples de calcular o preço de qualquer instrumento sujeito ao *default*. Nas sessões seguintes, esse conceito será utilizado para demonstrar métodos mais robustos a serem empregados no apreamento de títulos e CDS.

3.3 A Intensidade de *Default*

A intensidade de *default* é a versão contínua da probabilidade de *default* discreta utilizada até agora. Pode-se dizer que a probabilidade de sobrevivência q , implícita em um ativo até o período t , é definida como $Q(t) = e^{-\lambda t}$, sendo λ a intensidade de *default*.

A vantagem de utilizar o conceito de intensidade de *default* é o fato dele nos permitir mais facilmente modelar a estrutura a termo de *default* implícita em um título ou CDS. Essa estrutura a termo será apresentada nas sessões seguintes.

No gráfico 7, seguem alguns exemplos da probabilidade de sobrevivência $Q(t)$ no tempo, dado alguns valores de intensidade de *default* (λ).

Gráfico 7: A intensidade de *default* e a probabilidade de sobrevivência

O gráfico 7 mostra a probabilidade de sobrevivência para ativos com diferentes intensidades de *default* fixas no tempo. O mesmo exemplo está representado na tabela 6 para os prazos mais líquidos utilizados no mercado de CDS. Nota-se que um ativo com $\lambda = 5\%$ tem probabilidade de sobrevivência equivalente a 36,79%, enquanto um ativo com $\lambda = 20\%$ tem probabilidade de sobrevivência equivalente a 1,83%, num período de 20 anos.

Tabela 6: A intensidade de *default* e a probabilidade de sobrevivência

| Tempo (anos) | Lambda 5% | Lambda 10% | Lambda 15% | Lambda 20% |
|--------------|-----------|------------|------------|------------|
| 0 | 100.00% | 100.00% | 100.00% | 100.00% |
| 1 | 95.12% | 90.48% | 86.07% | 81.87% |
| 2 | 90.48% | 81.87% | 74.08% | 67.03% |
| 3 | 86.07% | 74.08% | 63.76% | 54.88% |
| 5 | 77.88% | 60.65% | 47.24% | 36.79% |
| 10 | 60.65% | 36.79% | 22.31% | 13.53% |
| 15 | 47.24% | 22.31% | 10.54% | 4.98% |
| 20 | 36.79% | 13.53% | 4.98% | 1.83% |

3.4 O apreçamento de um título e um CDS

Os títulos utilizados nesse trabalho são títulos com estrutura similar à estrutura de um Credit Default Swap, ou seja:

- a) Os títulos não têm nenhuma especialidade, como por exemplo, cláusulas de *step-up*;
- b) Os títulos pagam cupons semestrais até o vencimento;
- c) Os títulos vencem ao valor par (\$100) para cada unidade. Para simplificar os cálculos feitos nesse trabalho, foi admitido que os títulos vencem a \$1 por quantidade e os cupons foram calculados como percentuais do valor de face.

A árvore binominal que representa o preço esperado de um título compõe a figura 11, sabendo-se que:

$Q(x)$ representa a probabilidade de sobrevivência do ativo para o tempo x , com $x \geq 0$;

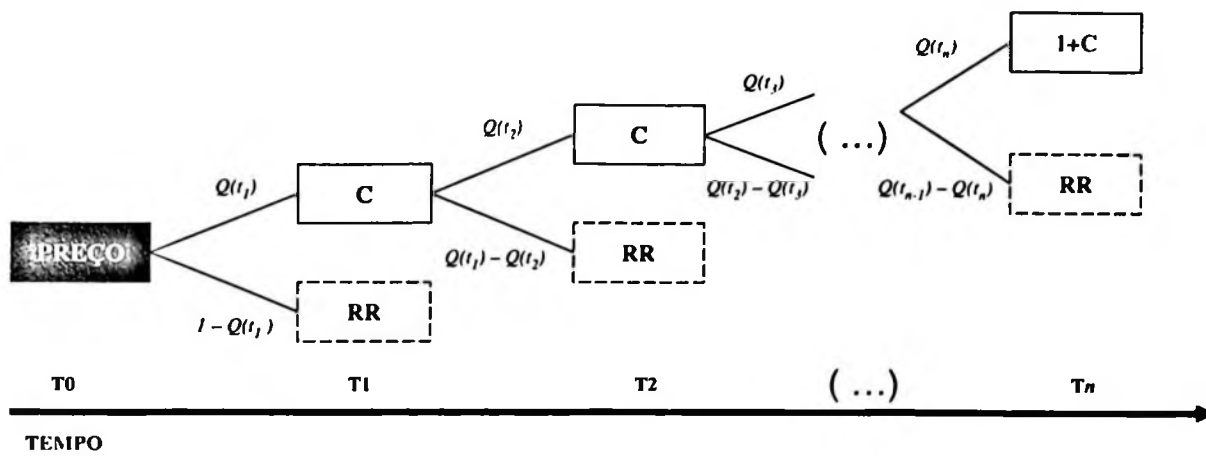
$$Q(t_n) = e^{-\lambda x_n}, \quad t_n = \text{tempo em anos e } n \geq 0; \quad (3.4)$$

$$Q(t_n) = Q(t_{n-1}) \times e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}; \quad (3.5)$$

$Q(t_0) = 100\%$, ou seja, em t_0 não há probabilidade de *default* do ativo;

$$R_n = e^{-r_n x_n}, \quad \text{representa a taxa de juros livre de risco para o tempo } t_n. \quad (3.6)$$

Figura 11: Preço esperado no tempo de um título exposto ao risco de default



C: cupom pago periodicamente

RR: *recovery value* esperado do título

Observando a figura 11, a parcela do preço (valor presente) dos pagamentos não contingentes ao *default* antes do tempo t_i é equivalente a $P_{ND\ Títulos}$:

$$P_{ND} = Q(t_1) \times C \times R_1 + Q(t_2) \times C \times R_2 + \dots + Q(t_n) \times C \times R_n + Q(t_n) \times R_n$$

$$P_{ND} = Q(t_n) \times R_n + C \times \sum_{i=1}^n Q(t_i) \times R_i$$

$$P_{ND} = e^{-[\lambda+r_n]kt_n} + C \times \sum_{i=1}^n e^{-\lambda \times t_i} \times e^{-r_i \times t_i}$$

$$P_{ND} = e^{-[\lambda+r_n]kt_n} + C \times \sum_{i=1}^n e^{-[\lambda+r_i]kt_i} \quad (3.7)$$

A parcela do preço (valor presente) dos pagamentos contingentes ao *default* antes do tempo t_i é equivalente a P_D Títulos:

$$P_D = [Q(t_0) - Q(t_1)] \times RR_{\text{título}} \times R_1 + [Q(t_1) - Q(t_2)] \times RR_{\text{título}} \times R_2 + \dots + \\ + [Q(t_{n-1}) - Q(t_n)] \times RR_{\text{título}} \times R_n$$

$$P_D = RR_{\text{título}} \times \sum_{i=1}^n [Q(t_{i-1}) - Q(t_i)] \times R_i$$

$$P_D = RR_{\text{título}} \times \sum_{i=1}^n e^{-r_i \times t_i} \times [e^{-\lambda \times t_{i-1}} - e^{-\lambda \times t_i}] \quad (3.8)$$

Dessa maneira, o preço esperado do título é equivalente a:

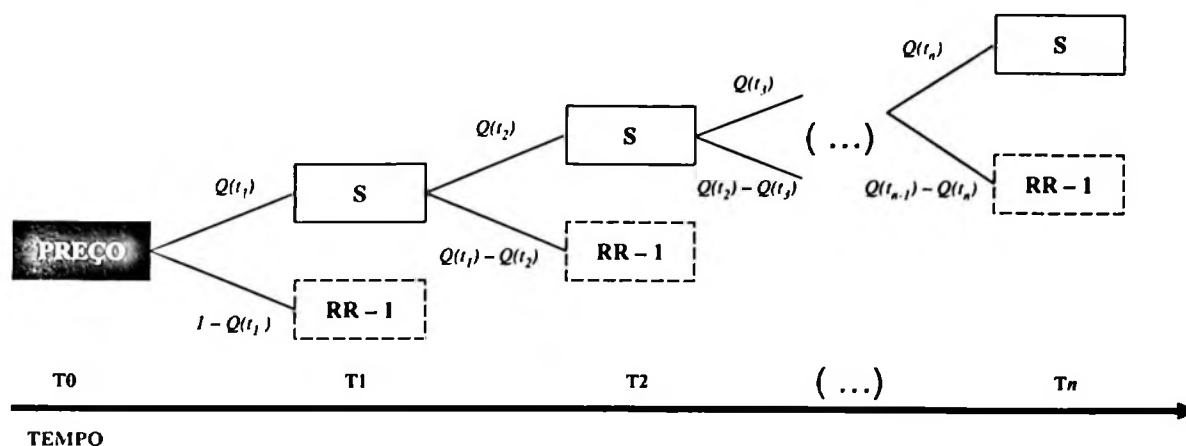
$$P_{\text{TÍTULO}} = P_D + P_{ND}$$

$$P_{\text{TÍTULO}} = \left[RR_{\text{título}} \times \sum_{i=1}^n e^{-r_i \times t_i} \times [e^{-\lambda \times t_{i-1}} - e^{-\lambda \times t_i}] \right] + \left[e^{-(\lambda + r_n) \times t_n} + \left(C \times \sum_{i=1}^n e^{-\lambda \times t_i} \times e^{-r_i \times t_i} \right) \right]$$

(3.9)

Já a árvore binomial que representa o preço esperado de um CDS compõe a figura 12. A notação utilizada para representar a probabilidade de sobrevivência será a mesma utilizada no caso de um título.

Figura 12: Preço esperado no tempo de um CDS (vendedor de proteção)



S : CDS *spread*

RR : *recovery value* esperado do CDS

Em comparação ao *pay-off* do título, representado na figura 12, é possível perceber que:

- a) Não há pagamento de principal no final do contrato do CDS;
- b) Em caso de *default*, o fluxo de caixa para o vendedor de proteção será equivalente ao *recovery value* do título subtraído o valor de face do contrato que, nesse caso é \$1;
- c) Sendo um derivativo, o vendedor de CDS não recebe prêmio inicial da contraparte. Dessa maneira, o preço inicial do contrato na árvore deve ser igual a zero.

Da mesma maneira, a parcela do preço (valor presente) dos pagamentos não contingentes ao *default* antes do tempo t_i é equivalente a $P_{ND\ CDS}$:

$$P_{ND} = Q(t_1) \times S \times R_1 + Q(t_2) \times S \times R_2 + \dots + Q(t_n) \times S \times R_n$$

$$P_{ND} = S \times \sum_{i=1}^n Q(t_i) \times R_i$$

$$P_{ND} = S \times \sum_{i=1}^n e^{-\lambda \times t_i} \times e^{-r \times t_i}$$

$$P_{ND} = S \times \sum_{i=1}^n e^{-(\lambda+r) \times t_i} \quad (3.10)$$

A parcela do preço (valor presente) dos pagamentos contingentes ao *default* antes do tempo t_i é equivalente a $P_{D\ CDS}$:

$$P_D = [Q(t_0) - Q(t_1)] \times (RR_{CDS} - 1) \times R_1 + [Q(t_1) - Q(t_2)] \times (RR_{CDS} - 1) \times R_2 + \dots$$

$$\dots + [Q(t_{n-1}) - Q(t_n)] \times (RR_{CDS} - 1) \times R_n$$

$$P_D = (RR_{CDS} - 1) \times \sum_{i=1}^n [Q(t_{i-1}) - Q(t_i)] \times R_i$$

$$P_D = (RR_{CDS} - 1) \times \sum_{i=1}^n e^{-r \times t_i} \times [e^{-\lambda \times t_{i-1}} - e^{-\lambda \times t_i}] \quad (3.11)$$

Dessa maneira, o preço esperado do CDS é equivalente a:

$$P_{CDS} = P_D + P_{ND}$$

$$0 = \left[(RR_{CDS} - 1) \times \sum_{i=1}^n e^{-r_i \times t_i} \times [e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i}] \right] + \left[\left(S \times \sum_{i=1}^n e^{-\lambda t_i} \times e^{-r_i \times t_i} \right) \right]$$

$$\left[\left(S \times \sum_{i=1}^n e^{-\lambda t_i} \times e^{-r_i \times t_i} \right) \right] - \left[(1 - RR_{CDS}) \times \sum_{i=1}^n e^{-r_i \times t_i} \times [e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i}] \right] = 0 \quad (3.12)$$

3.5 Bootstrapping da curva de intensidade de default

A curva de intensidade de *default* representa a probabilidade de uma entidade de referência específica entrar em *default*. Logo, essa curva deve ser utilizada para todo e qualquer instrumento de crédito que tiver o mesmo emissor ou entidade de referência, independentemente do prazo e das particularidades do instrumento.

É possível extrair a curva de intensidade de *default* de ambos os instrumentos relacionados nesse trabalho (títulos e CDS). Porém, sabendo que o preço do CDS reflete unicamente o risco de crédito do ativo subjacente ou entidade de referência enquanto o preço dos títulos reflete o risco de crédito e o risco de taxa de juros, optou-se por extrair a curva de intensidade de *default* dos *spreads* de CDS.

Primeiro, segue ilustrado na tabela 7 o apreçamento de um CDS utilizando uma curva de intensidade de *default* constante, dado o *spread* de mercado do CDS e uma suposição de *recovery rate*. A intensidade de *default* implícita num contrato de CDS é tal que zera o prêmio ou valor presente dos fluxos de caixa do contrato na sua data inicial.

Tabela 7: Intensidade de *default* para um CDS de Brasil com dez anos de vencimento

Default swap spread 540 bps
 Recovery assumption 25%

| | Cupons | λ | $q(t)$ | $q(t-1)-q(t)$ | Taxa de Juros Livre de risco | PV |
|-------------------|--------|-----------|---------|---------------|------------------------------|-------|
| 14-Jul-05 | | 7.44% | 100.00% | | | |
| 14-Jan-06 | 2.76% | 7.44% | 96.32% | 3.68% | 96.71% | 0.00% |
| 14-Jul-06 | 2.72% | 7.44% | 92.83% | 3.49% | 95.06% | 0.00% |
| 14-Jan-07 | 2.76% | 7.44% | 89.42% | 3.42% | 93.25% | 0.00% |
| 14-Jul-07 | 2.72% | 7.44% | 86.18% | 3.24% | 91.39% | 0.00% |
| 14-Jan-08 | 2.76% | 7.44% | 83.01% | 3.17% | 89.42% | 0.00% |
| 14-Jul-08 | 2.73% | 7.44% | 79.99% | 3.02% | 87.41% | 0.00% |
| 14-Jan-09 | 2.76% | 7.44% | 77.04% | 2.94% | 85.34% | 0.00% |
| 14-Jul-09 | 2.72% | 7.44% | 74.25% | 2.79% | 83.29% | 0.00% |
| 14-Jan-10 | 2.76% | 7.44% | 71.52% | 2.73% | 81.22% | 0.00% |
| 14-Jul-10 | 2.72% | 7.44% | 68.93% | 2.59% | 79.18% | 0.00% |
| 14-Jan-11 | 2.76% | 7.44% | 66.40% | 2.54% | 77.07% | 0.00% |
| 14-Jul-11 | 2.72% | 7.44% | 63.99% | 2.40% | 74.98% | 0.00% |
| 14-Jan-12 | 2.76% | 7.44% | 61.64% | 2.35% | 72.90% | 0.00% |
| 14-Jul-12 | 2.73% | 7.44% | 59.39% | 2.24% | 70.90% | 0.00% |
| 14-Jan-13 | 2.76% | 7.44% | 57.21% | 2.19% | 68.91% | 0.00% |
| 14-Jul-13 | 2.72% | 7.44% | 55.14% | 2.07% | 66.97% | 0.00% |
| 14-Jan-14 | 2.76% | 7.44% | 53.11% | 2.03% | 65.04% | 0.00% |
| 14-Jul-14 | 2.72% | 7.44% | 51.19% | 1.92% | 63.17% | 0.00% |
| 14-Jan-15 | 2.76% | 7.44% | 49.30% | 1.88% | 61.33% | 0.00% |
| 14-Jul-15 | 2.72% | 7.44% | 47.52% | 1.79% | 59.56% | 0.00% |
| Preço do Contrato | | | | | | 0.00% |

A taxa de juros livre de risco é representada na tabela 7 pelo fator de desconto do fluxo de caixa.

A partir de uma estrutura a termo de CDS *spreads*, é possível extrair a estrutura a termo de intensidade de *default* utilizando a teoria de probabilidade apresentada na sessão anterior. A estrutura a termo de CDS *spreads* é constituída por *spreads* de mercado para os vencimentos mais líquidos. Nesse caso, utilizam-se os vencimentos de 1, 2, 3, 5 e 10 anos. Há três tipos distintos de estrutura a termo de *spreads* de CDS:

- a) Crescente: a grande maioria das estruturas a termo são crescentes.

Isso pode ser explicado pelo fato de que, a curto prazo, a expectativa sobre a qualidade de crédito do emissor em questão é que essa permaneça constante.

Porém, quanto mais longo o prazo, menor a certeza de que essa qualidade de crédito

não se deteriorará. Dessa maneira, quanto maior o tempo, maior deverá ser o *spread* de crédito para compensar a incerteza do investidor;

b) Decrescente: essa curva é um sinal de um provável *default* a curto prazo. Porém, quanto maior o prazo, menor deve ser o *spread* de crédito, o que significa que, caso o emissor sobreviva ao *default* do curto para o médio prazo, maior será a sua probabilidade de sobrevivência do médio para longo prazo;

c) Mista: a curva mista geralmente é representada por um período crescente do curto ao médio prazo e, depois, decrescente do médio para o longo prazo. O período crescente do curto ao médio prazo representa a maior probabilidade de *default* a médio do que no curto prazo desse emissor. Porém, caso sobreviva ao *default* a médio prazo, o emissor terá mais chances de melhorar sua qualidade de crédito a longo prazo.

De posse desses conhecimentos a respeito dos diferentes formatos da estrutura a termo dos *spreads* de CDS, pode-se calcular a estrutura a termo de intensidade de *default* implícita, o que pode ser feito pelo método de *bootstrapping* demonstrado na tabela 8.

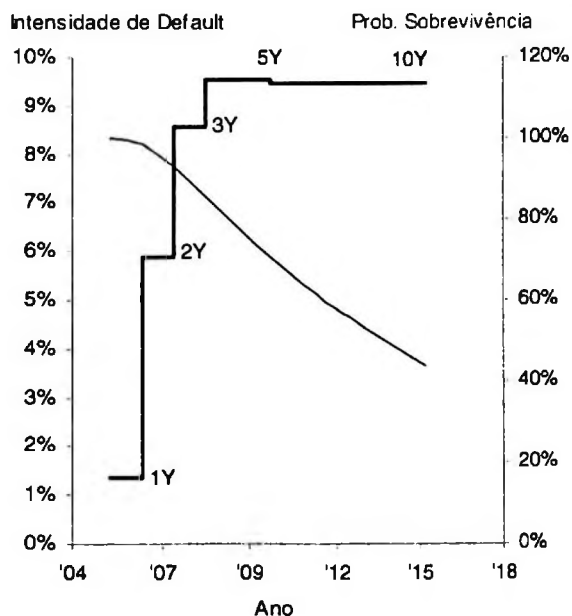
Tabela 8: Bootstrapping da curva de intensidade de default de contratos de CDS de Brasil

Recovery assumption

| | Cpn - Estrutura a Termo de CDS spreads | | | | | Intensidade de default e taxa de juros livre de risco | | | | PV | | | | |
|-----------|--|-------|-------|-------|-------|---|---------|-------------|--------|----------|--------|--------|--------|--------|
| | 1Y | 2Y | 3Y | 5Y | 10Y | λ | $q(t)$ | $q(t)-q(0)$ | r | 1Y | 2Y | 3Y | 5Y | 10Y |
| 14-Jul-05 | | | | | | 1.34% | 100.00% | | | | | | | |
| 14-Jan-06 | 0.51% | 1.32% | 1.89% | 2.42% | 2.78% | 1.34% | 99.33% | 0.672% | 96.71% | 0.00% | 0.79% | 1.34% | 1.86% | 2.20% |
| 14-Jul-06 | 0.50% | 1.30% | 1.86% | 2.38% | 2.74% | 1.34% | 98.67% | 0.657% | 95.06% | 0.00% | 0.76% | 1.28% | 1.78% | 2.11% |
| 14-Jan-07 | | 1.32% | 1.89% | 2.42% | 2.78% | 5.89% | 95.78% | 2.887% | 93.25% | 0.00% | -0.80% | -0.28% | 0.21% | 0.54% |
| 14-Jul-07 | | 1.30% | 1.86% | 2.38% | 2.74% | 5.89% | 93.03% | 2.757% | 91.39% | 0.00% | -0.75% | -0.27% | 0.20% | 0.50% |
| 14-Jan-08 | | | 1.89% | 2.42% | 2.78% | 8.58% | 89.09% | 3.939% | 89.42% | 0.00% | 0.00% | -1.07% | -0.63% | -0.33% |
| 14-Jul-08 | | | 1.87% | 2.40% | 2.75% | 8.58% | 85.36% | 3.732% | 87.41% | 0.00% | 0.00% | -0.99% | -0.58% | -0.30% |
| 14-Jan-09 | | | 2.42% | 2.78% | 2.78% | 9.52% | 81.36% | 3.999% | 85.34% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.79% | -0.53% |
| 14-Jul-09 | | | 2.38% | 2.74% | 2.74% | 9.52% | 77.61% | 3.751% | 83.29% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.73% | -0.49% |
| 14-Jan-10 | | | 2.42% | 2.78% | 2.78% | 9.52% | 73.97% | 3.636% | 81.22% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.69% | -0.46% |
| 14-Jul-10 | | | 2.38% | 2.74% | 2.74% | 9.52% | 70.56% | 3.410% | 79.18% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.63% | -0.42% |
| 14-Jan-11 | | | | 2.78% | 2.78% | 9.47% | 67.27% | 3.289% | 77.07% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.39% |
| 14-Jul-11 | | | | 2.74% | 2.74% | 9.47% | 64.19% | 3.086% | 74.98% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.36% |
| 14-Jan-12 | | | | 2.78% | 2.78% | 9.47% | 61.19% | 2.992% | 72.90% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.33% |
| 14-Jul-12 | | | | 2.75% | 2.75% | 9.47% | 58.37% | 2.822% | 70.90% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.31% |
| 14-Jan-13 | | | | 2.78% | 2.78% | 9.47% | 55.65% | 2.721% | 68.91% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.29% |
| 14-Jul-13 | | | | 2.74% | 2.74% | 9.47% | 53.10% | 2.553% | 66.97% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.26% |
| 14-Jan-14 | | | | 2.78% | 2.78% | 9.47% | 50.62% | 2.475% | 65.04% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.25% |
| 14-Jul-14 | | | | 2.74% | 2.74% | 9.47% | 48.30% | 2.322% | 63.17% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.23% |
| 14-Jan-15 | | | | 2.78% | 2.78% | 9.47% | 46.05% | 2.252% | 61.33% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.21% |
| 14-Jul-15 | | | | 2.74% | 2.74% | 9.47% | 43.94% | 2.112% | 59.56% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | -0.19% |
| | | | | | | | | | | Total PV | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |

Do exemplo acima, extraem-se a estrutura a termo de intensidade de default e as probabilidades de sobrevivência dos ativos brasileiros, mostrados no gráfico 8.

Gráfico 8: Estrutura a termo da curva de intensidade de default e probabilidade de sobrevivência



A curva de intensidade de *default* não é suave no decorrer do tempo, ou seja, a intensidade de *default* é constante entre um vencimento e outro de CDS, utilizado no processo de *bootstrapping*. Por exemplo, a intensidade de *default* no primeiro ano é constante e igual a 1,34% para todo o período e muda (como um 'jump') para 5,89% referente ao segundo ano, e assim sucessivamente, o que não significa que a probabilidade de sobrevivência também seja constante no tempo. A curva de probabilidades é suave mesmo que a intensidade de *default* seja constante. Em outras palavras, para a mesma intensidade de *default*, a probabilidade de sobrevivência em t_n é sempre maior ou igual do que a probabilidade de sobrevivência em t_{n+1} , para n e λ maiores ou iguais a zero.

Tradicionalmente, os títulos não livres de risco (expostos ao *default*) são calculados por um *spread* acima da taxa de juros livre de risco, como já representado em sessões anteriores. Um dos métodos mais conhecidos é chamado de *Z-spread*, onde:

$$\text{Preço_Título} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\left[1 + \frac{(L_i + Z)}{F}\right]^{i \times F}} + \frac{\text{Valor_de_Face}}{\left[1 + \frac{(L_n + Z)}{F}\right]^{n \times F}}, \text{ sendo:}$$

C: Fluxos de Juros;

L: Libor ou taxa base do swap;

Z: *Z-spread*;

F: número de pagamentos de juros por ano

Porém, essa metodologia não leva em consideração as curvas de probabilidade de *default* ou *recovery rate*. Logo, pode-se apreçar os títulos expostos ao *default* utilizando o mesmo modelo de probabilidades apresentado anteriormente, como:

$$\text{Preço_Título} = \left[RR_{\text{título}} \times \sum_{i=1}^n e^{-r_i \times t_i} \times \left[e^{-\lambda \times t_{i-1}} - e^{-\lambda \times t_i} \right] \right] + \left[e^{-[\lambda + r_n] \times t_n} + \left(C \times \sum_{i=1}^n e^{-\lambda \times t_i} \times e^{-r_i \times t_i} \right) \right]$$

, sendo:

RR = *recovery rate* esperado para o título;

R = taxa de juros livre de risco;

C = fluxo de caixa para cada período;

λ = intensidade de *default* extraída do mercado de CDS.

t_n = tempo

A tabela 9 ilustra um exemplo de apuração de um título brasileiro (*Global '09*), pela utilização de probabilidade de *default*.

Tabela 9: Apuração de um Título pelo modelo de probabilidade de *default*

| | |
|----------------------------|-----------|
| Maturity | 15-Oct-09 |
| Coupon | 14.50% |
| Recovery assumption | 25% |
| Fluxos de Caixa | 9 |

| | Fluxo de Caixa | λ | q(t) | q(t-1)-q(t) | Taxa de juros livre de risco | PV |
|-----------|----------------|-----------|---------|-------------|------------------------------|--------|
| 15-Apr-05 | | | | | | |
| 15-Apr-05 | | 1.34% | 100.00% | | | |
| 15-Oct-05 | 7.25% | 1.34% | 99.33% | 0.67% | 97.46% | 7.18% |
| 15-Apr-06 | 7.25% | 5.88% | 96.46% | 2.87% | 95.91% | 7.40% |
| 15-Oct-06 | 7.25% | 5.88% | 93.65% | 2.80% | 94.16% | 7.05% |
| 15-Apr-07 | 7.25% | 8.58% | 89.73% | 3.92% | 92.32% | 6.91% |
| 15-Oct-07 | 7.25% | 8.58% | 85.96% | 3.78% | 90.41% | 6.49% |
| 15-Apr-08 | 7.25% | 9.51% | 81.96% | 4.00% | 88.41% | 6.14% |
| 15-Oct-08 | 7.25% | 9.51% | 78.14% | 3.82% | 86.37% | 5.72% |
| 15-Apr-09 | 7.25% | 9.51% | 74.52% | 3.62% | 84.31% | 5.32% |
| 15-Oct-09 | 107.25% | 9.51% | 71.05% | 3.47% | 82.24% | 63.38% |

Preço 115.58%

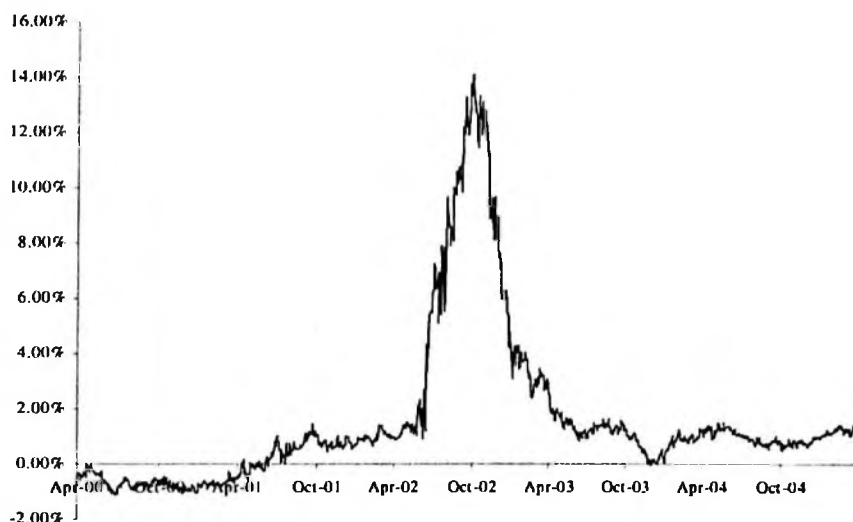
Ao utilizar o modelo de probabilidades utilizado no apuração de contratos de CDS para títulos, calcula-se um preço diferente do seu preço de mercado, o chamado preço ou *spread* 'ajustado'. Ao comparar o *spread* ajustado do título com o CDS *spread*, surge um basis diferente do tradicional chamado de basis ajustado.

Nas próximas sessões, será explorada a diferença entre o basis tradicional e o ajustado e como esse ajuste nos ajuda a identificar o *spread* gerado pelo CTD embutido no *spread* do CDS.

3.6 O risco de basis

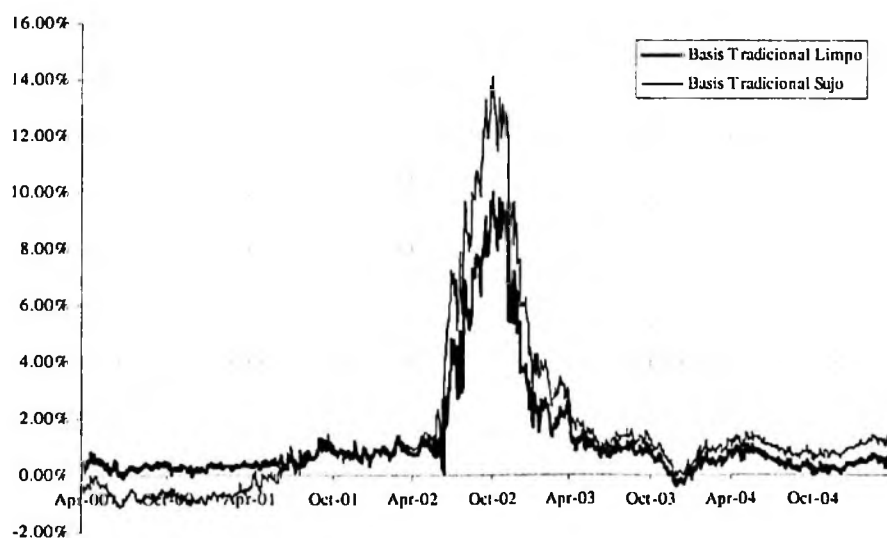
A simples comparação entre os *spreads* de mercado de um título e um CDS pode levar a conclusões bastante equivocadas, se não forem consideradas as razões geradoras de basis entre os produtos. O gráfico 9 mostra o basis histórico entre o CDS de 5 anos com o *Global'09* que é um título com pagamentos de cupom semestral, similar a um CDS, com vencimento em 15 de Outubro de 2009. O *spread* do título utilizado no gráfico 9 é o Z-*spread* calculado sobre a Libor e o CDS *spread* é a taxa de mercado diária. Esse basis é dito tradicional, uma vez que não foi feito nenhum ajuste referente às diferenças fundamentais entre esses instrumentos.

Gráfico 9: Basis histórico entre um CDS de cinco anos e o *Global'09* pela medida tradicional



Nota-se que o vencimento dos CDS é constante em cinco anos enquanto o vencimento do *Global'09* é fixo em 15 de Outubro de 2009. Se ajustarmos o vencimento dos CDS para o mesmo vencimento do *Global'09* no decorrer do tempo, conseguimos explicar uma parte do basis tradicional. Esse novo basis é chamado de basis tradicional limpo, como ilustrado no gráfico 10.

Gráfico 10: Basis histórico entre um CDS de cinco anos e o *Global'09* pela medida tradicional



Por outro lado, se apreçarmos os títulos a partir do modelo de intensidade de *default* utilizado nos CDS, obteremos o *basis* ajustado pela diferença entre o *spread* de CDS de mercado e o *spread* ajustado dos títulos.

O procedimento adotado para calcular o *spread* ajustado é o seguinte:

a) Extrair a curva de intensidade de *default* implícita dos *spreads* de mercado de CDS, a partir de uma assunção de *recovery rate*. A assunção utilizada nesse trabalho é de 25%;

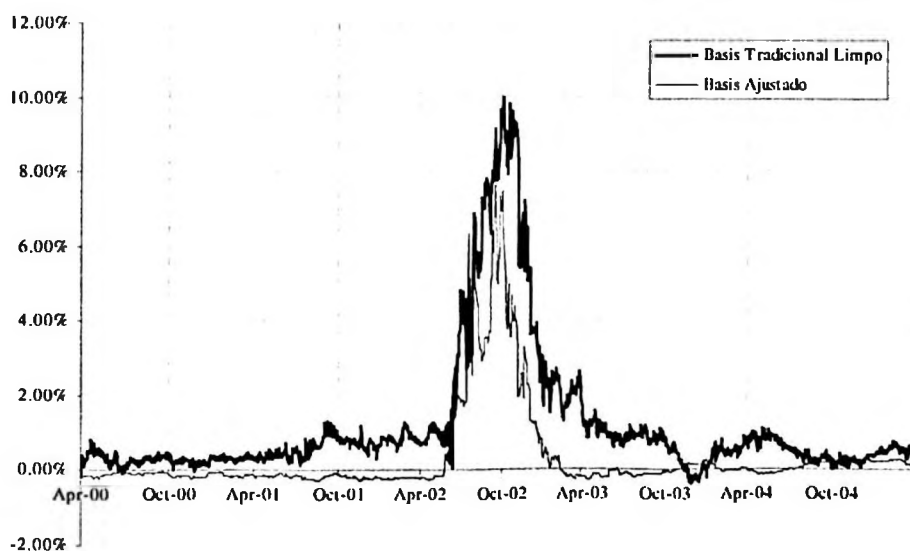
b) Utilizar o modelo de intensidade de *default* para apreçar o título a partir da curva de probabilidades, extraída dos *spreads* de mercado de CDS, e da mesma assunção de *recovery rate*. Esse é o preço ajustado;

c) Calcular o *Z-spread* diário do título equivalente ao preço ajustado.

Este é chamado de *spread* ajustado.

A comparação entre o *basis* tradicional limpo e o ajustado está representada no gráfico 11.

Gráfico 11: Basis Tradicional limpo e Basis Ajustado entre um CDS de cinco anos de Brasil e o *Global'09*



Nota-se que o basis ajustado é menor do que o basis tradicional limpo para a maior parte dos dias. Essa diferença se torna significativa principalmente em períodos de crise, a exemplo da crise política pré-eleição presidencial no Brasil no ano de 2002. A explicação para isso será dada mais adiante.

Vale ressaltar ainda que o basis tradicional sujo é calculado a partir dos *spreads* de mercado de ambos títulos e CDS. Esse *spread* leva em consideração todas as diferenças geradas por fatores fundamentais e de mercado entre esses instrumentos.

Por exemplo, o *spread* de CDS de cinco anos de Brasil esteve 1.304 bps maior que o *spread* do título *Global'09* em 31 de Outubro de 2002. Esse basis representa a soma de todos os fatores fundamentais e de mercado daquele dia, ou seja, o mercado atribuiu a um contrato de CDS de cinco anos taxas maiores em 1.304 bps do que ao *Global'09*.

O basis tradicional não traz nenhuma informação adicional sobre seus fatores. Não sabemos o quanto desse basis foi gerado pela opção CTD ou quanto foi gerado pelo fato do preço dos títulos ser diferente de par. Daí vem a razão de calcular também o basis tradicional limpo e o *spread* ajustado.

Para que possamos fazer uma análise mais apurada sobre o basis, supõe-se que não haja diferenças entre o *spread* de um título e o *spread* de um CDS. Tomando como exemplo o *spread* do CDS de cinco anos de Brasil para 31 de Outubro de 2002, que era de 3.190 bps, e como já visto anteriormente, o CDS é um instrumento cuja taxa representa unicamente o risco de crédito da entidade de referência; se o governo brasileiro emitisse um título para o mesmo vencimento que o CDS naquela data, a taxa do título deveria ser de 3.190 bps acima da taxa de juros livre de risco. Se isso fosse verdade, o basis entre CDS e títulos seria zero não só para 31 de Outubro de 2002, mas também ao longo do tempo. Porém, o *spread* de mercado (de fechamento) do *Global'09* naquela data foi de 1.886 bps.

Isso ocorre porque as condições de cada mercado são diferentes além do fato dos instrumentos não serem iguais em termos contratuais.

Logo, o objetivo deste trabalho foi apreçar os títulos nos mesmos termos que um CDS para comparar seus *spreads* e compreender o basis. Para isso, vamos utilizar o mesmo modelo de probabilidades para o apreçamento de ambos os instrumentos.

A idéia principal foi, a partir de uma assunção de *recovery value*, extrair a curva implícita de probabilidades de *default* dos contratos de CDS e apreçar os títulos. Voltando ao exemplo anterior, foi utilizada uma assunção de 25% para extrair a curva de probabilidade de *default* implícita nos CDS e, a partir dessa mesma curva e *recovery value*, foi apreçado o título para 31 de Outubro de 2002 como 2.463 bps acima da taxa de juros livre de risco ou 60,27% do valor de face. Esse *spread* é chamado de *spread* ajustado do título.

Ao utilizar o mesmo modelo de apreçamento para ambos os instrumentos, foi possível corrigir as seguintes diferenças fundamentais:

a) Pagamento de juros e contagem de dias: no cálculo do preço ajustado para os títulos, foi empregada a convenção de contagem de dias e de pagamento de cupons utilizada por esse mercado. Vale ressaltar que esse impacto é considerado mínimo no apreçamento;

b) Risco do preço de um título ser diferente de par: esse é o fator mais importante explicado pelo *spread* ajustado do título. Ao calcular um preço ajustado de 60,27% do valor de face (diferente de par), os detentores desse título têm menor exposição de crédito no evento de *default* do que os vendedores de proteção via CDS; logo, aceitam receber um *spread* menor do que o *spread* de crédito do CDS equivalente a 3.190 bps. Esse *spread* calculado pelo modelo é de 2.463 bps sobre a taxa de juros livre de risco.

Até agora, de um basis total de 1.304 bps (3.190 bps de *spread* do CDS de cinco anos – 1.886 bps de *spread* de mercado do *Global'09*) foram explicadas 727 bps e faltam explicar 577 bps. O basis já explicado foi gerado por:

a) O fato de o CDS ter vencimento em cinco anos e o *Global'09* ter vencimento em sete anos. O CDS *spread* ajustado para sete anos é equivalente a 2.836 bps, o que gera um basis tradicional limpo de 950 e explica 354 bps do basis total (1.304 bps de basis total – 950 bps de basis tradicional limpo);

b) A diferença de contagem de dias, pagamento de juros e o fato de o preço do título ser diferente de par. O *spread* ajustado do *Global'09* de 2.463 bps explica 373 bps do basis total (2.836 bps do CDS *spread* para sete anos – 2.463 bps de *spread* ajustado do *Global'09*). Falta ainda explicar 577 bps do basis total.

Assumiu-se que o impacto dos outros fatores fundamentais geradores de basis é nulo sem considerar ainda a opção CTD, dado que:

a) Risco de default técnico: foi bastante mitigado após a padronização do mercado de CDS pelo ISDA. É razoável assumir que esse risco não gera prêmio adicional nos contratos de CDS e não gera basis entre os *spreads* de títulos e CDS;

b) Especialidades dos títulos: os títulos utilizados não têm nenhum tipo de especialidade que os diferenciem da estrutura de um CDS, como *step-up*. Logo, esse fator não é gerador do basis apresentado nesse trabalho;

c) Risco de contraparte: os dados históricos utilizados são preços ou taxas de mercado para contrapartes com boa qualidade de crédito, ou seja, não há nenhum *spread* adicional de mercado incluído na base de dados relativa à má qualidade de crédito de potenciais contrapartes.

Não é coincidência que a única razão fundamental que ainda não foi mencionada é a opção CTD. Se considerarmos a hipótese de que os fatores de mercado não são significativos, a parte restante do basis é, em sua maioria, explicada por àquele fator fundamental.

Assim como em qualquer outro mercado, fatores como oferta, demanda, liquidez e custo de *funding* podem afetar os *spreads* relativos entre CDS e títulos. Porém, mesmo podendo gerar ruídos na série, tomou-se como hipótese que esses impactos também são nulos a fim de estimar o prêmio da opção CTD, dado que:

- a) Fatores geradores de basis, como oferta e demanda, são rapidamente corrigidos no mercado por arbitragem do mercado feita pelos seus participantes;
- b) Principalmente em períodos de crise, o basis gerado pela opção CTD é significativamente maior do que possíveis impactos gerados por fatores de mercado.

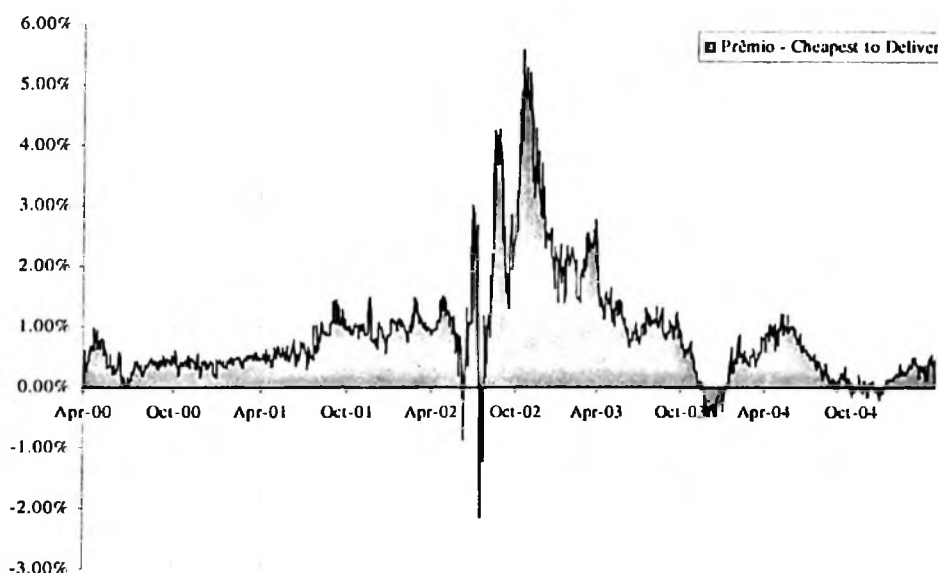
Logo, assumiu-se que o restante do basis é gerado exclusivamente pela opção CTD.

Voltando ao exemplo, o basis restante era de 577 bps em 31 de Outubro de 2002. Em outras palavras, o basis de mercado do CDS de 3.190 bps embute um prêmio de 577 bps relativo a opção CTD do comprador de proteção poder entregar o título de mínimo valor (*recovery value*) no evento de *default*.

Para validar esse prêmio como CTD, é preciso inferir qual é o processo que rege os preços de títulos em *default* dadas suas estimativas de média, variância e correlação. Deduzindo um processo que resulte num prêmio equivalente à diferença entre o basis ajustado e o basis de mercado (tradicional), equivalente a 577 bps no nosso exemplo, é possível apreçar a opção CTD independentemente do impacto gerado por outros fatores.

No gráfico 12, está expresso o valor do basis restante que este trabalho visa explicar como opção CTD. Nota-se que há alguns ruídos na série, identificados por prêmios negativos provavelmente gerados por fatores de mercado que influenciam o basis entre títulos e CDS.

Gráfico 12: Basis gerado pela opção CTD como diferença entre o basis tradicional e o ajustado



Nota-se que esse basis é calculado a partir da diferença entre o basis tradicional limpo e o basis ajustado ilustrados no gráfico 11.

4. APREÇAMENTO DA OPÇÃO CTD

4.1 Prêmio da Opção CTD

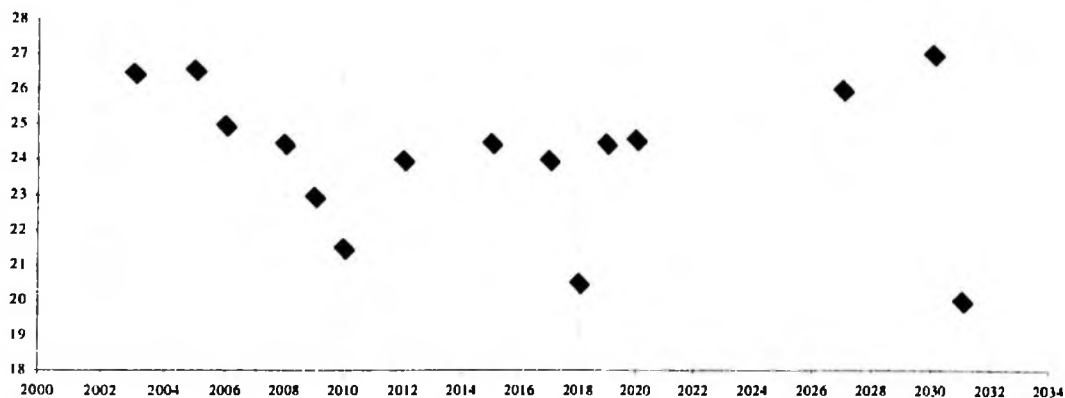
A opção do comprador de proteção entregar ao vendedor de proteção o título com menor *recovery value*, após o *default*, tem valor financeiro. Esse valor está implícito nos *spreads* de mercado de CDS, apesar de não haver um modelo difundido que o precifique. Provavelmente, os grandes participantes do mercado obtêm modelos proprietários de estimação do prêmio CTD embutido no *spread* dos CDS, porém esses não são publicados.

Na sessão anterior, foi estimado o montante de prêmio implícito no basis de mercado, gerado pela opção CTD. Para que seja legitimado esse prêmio, é proposto um modelo de apreçamento da opção CTD como função do valor esperado de *recovery value* dos títulos em *default*, da sua volatilidade e da correlação entre eles.

O valor esperado de *recovery rate* de títulos em *default* mais utilizado pelos investidores para os países emergentes é de 25%, ou seja, espera-se que o *recovery value* médio de títulos de um emissor no evento de *default* seja de 25%. Porém, a realidade é que, dado o evento, títulos do mesmo emissor podem ser operados com *recovery rates* diferentes.

Por exemplo, no caso de *default* da Argentina, a média de preço unitário dos títulos do governo em *default* foi de 24% do valor de face, porém o preço mais baixo dentre todos os títulos foi de 20% do valor de face (gráfico 13).

Gráfico 13: Recovery Rates para os títulos no default da Argentina em 2001 por vencimento



Fonte: Deutsche Bank

Por definição, o valor esperado de *recovery rate* embutido nos *spreads* de mercado de CDS é sempre menor ou igual ao valor esperado de *recovery value* embutido nos preços dos títulos, uma vez que um vendedor de CDS deve receber o mínimo entre vários *recovery values* diferentes do comprador de proteção no evento de *default*.

Em $t_m < t_n, \forall m < n$ sendo $m = 0, 1, \dots, n$ e $n =$ tempo em que ocorre o *default*

$$a) E[RR_{TITULOS}^T] = E[RR_1^T] = E[RR_2^T] = \dots = E[RR_n^T] = 25\%;$$

$$b) E[RR^{CDS}] \leq E[RR_{TITULOS}]$$

Em $m = n$ temos que:

$$c) RR_1^T = a; RR_2^T = b, \dots, RR_n^T = z, \text{ sendo } a, b, \dots, z \text{ preços dos títulos em } \textit{default}$$

como percentual do valor de face;

$$d) RR^{CDS} = \min(a, b, \dots, z)$$

O valor da opção CTD em termos de percentual do valor de face é equivalente à diferença entre o valor esperado de *recovery value* dos títulos e o *recovery value* implícito nos CDS. Isso significa que:

$$CTD_Option = E[RR_{Títulos}] - E[RR^{CDS}] \quad (4.1)$$

Seguindo o padrão do mercado e utilizando 25% como o valor esperado de *recovery value* dos títulos, ou seja:

$$CTD_Option = 25\% - E[RR^{CDS}],$$

resta saber o valor de uma opção, cujo *pay-off* seja a diferença entre o *recovery value* esperado dos títulos, hipoteticamente igual a 25%, e o valor esperado do mínimo de vários títulos no momento de *default*.

$$CTD_Option = 25\% - E[\min(RR_1^T, RR_2^T, \dots, RR_n^T)] \quad (4.2)$$

O resultado do valor esperado do mínimo de vários ativos pode ser extraída do mercado e, conseqüentemente, o valor da opção CTD. Tomando como exemplo o basis entre o CDS de Brasil de cinco anos e o *Global'09*, discutido na sessão anterior, é possível dizer qual é a parcela do basis gerada exclusivamente pela opção CTD. Esse *spread* residual é o resultado do valor da opção em termos de taxa. Para transformar esse *spread* em percentual do valor de face, assim como a unidade do valor da opção, basta calcular o *recovery value* equivalente no CDS que iguala o preço ajustado do título ao seu preço original.

Recapitulando os valores para 31 de Outubro de 2002, a fim de ilustrar o cálculo da opção como percentual do valor de face, é possível observar que: o *spread* limpo de mercado do CDS é equivalente a 2.836 bps, o *spread* ajustado do título calculado pelo

modelo de probabilidades é de 2.463 bps (ou 60,27% do valor de face) e o *spread* de mercado do título é equivalente a 1.886 bps (ou 74,56% do valor de face), sendo todos os *spreads* sobre a taxa de juros livre de risco.

É necessário explicar que, do basis de mercado de 1.304 bps (3.190 bps – 1.886 bps), 727 bps são gerados por fatores fundamentais inerentes aos contratos de CDS e títulos e 577 bps são gerados pela opção CTD.

Para saber qual é o *recovery value* embutido no CDS como percentual do valor de face, é preciso achar qual é o *recovery value* embutido nos CDS que faz com que o preço do título ajustado de 60,27% se iguale ao preço de mercado de 74,56%, sabendo-se que:

a) A diferença entre o preço ajustado e o preço de mercado do título explica os 577 bps gerados pela opção CTD;

b) O preço ajustado é calculado através da curva de probabilidade de *default* implícita nos contratos de CDS, que tem referência a um valor hipotético de *recovery rate*, ou seja, para cada valor de *recovery rate*, deriva-se uma curva de probabilidade dos contratos de CDS. O *recovery rate* que representa o valor esperado do mínimo de vários títulos em *default* deve ser tal que iguale o preço ajustado do título ao seu preço de mercado, através da curva de probabilidade de *default*.

O *recovery value* implícito nos contratos de CDS equivale ao valor esperado de $\min(RR_1^T, RR_2^T, \dots, RR_n^T)$. Dessa forma, é sabido quanto vale a opção CTD representada na fórmula:

$$CTD_Option = 25\% - E[\min(RR_1^T, RR_2^T, \dots, RR_n^T)]$$

Inferindo que esse valor esperado seja função não só do valor esperado dos títulos em *default*, mas também da dispersão dos preços dos títulos em *default* e da correlação entre eles, é possível dizer que:

$$E[\min(RR_1^T, RR_2^T, \dots, RR_n^T)] = f(25\%, \sigma, \rho), \text{ sendo:}$$

σ o desvio padrão do preço dos títulos em *default*;

ρ a correlação entre os preços dos títulos em *default*.

Logo, é notória a necessidade de um modelo que nos ajude a calcular uma volatilidade implícita de títulos em *default*, dado um certo nível de correlação entre eles. O objetivo final desse trabalho é comparar a volatilidade implícita desses títulos com a volatilidade implícita de algum ativo que tenha relação com a entidade de referência. Conseguindo achar uma volatilidade que explique os prêmios da opção CTD, poderemos então apreçar essa opção embutida nos contratos de CDS de maneira independente.

Da mesma maneira que os valores esperados dos preços de títulos em *default* são iguais a 25%, foi assumido que suas volatilidades e correlações também são iguais, ou seja:

$$\sigma(RR_1) = \sigma(RR_2) = \dots = \sigma(RR_n) = \sigma \text{ e}$$

$$\rho_{x,y} = \rho, \forall x, y$$

4.2 Distribuição de *Recovery Rates*

Admitindo que RR_1, RR_2, \dots, RR_n sejam preços de títulos de um emissor específico após seu *default*, e que esses preços tenham distribuição lognormal (Apêndice) com valor esperado RR , volatilidade σ e correlação ρ , tem-se:

$$RR_i = RR \cdot e^{(-0,5\sigma^2) + \alpha X_i}, \text{ sendo } i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

com $X_i \sim N(0,1)$ e $Correlação(X_i, X_j) = \rho$.

Seja $M_{RR} = \min(RR_1, RR_2, \dots, RR_n)$ e $M_X = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, logo temos que:

$$M_{RR} = RR \cdot e^{(-0,5\sigma^2) + \alpha M_X} \quad (4.4)$$

O valor da opção *cheapest to deliver* é dada pela diferença entre o *recovery value* esperado dos títulos e o *recovery value* mínimo esperado de vários títulos após o *default*.

Isso pode ser representado por:

$$CTD_Option = RR - E[M_B] = RR - E[\min(RR_1, RR_2, \dots, RR_n)]$$

O valor da opção não foi calculado em valor presente, pois interessa a este trabalho somente o impacto da opção de escolher o título com *recovery value* menor no evento de default. Assim, entender o processo estocástico que rege os preços dos títulos em *default* não é o objetivo desta pesquisa, mas sim sua distribuição (hipoteticamente lognormal) no momento de *default*.

Por essa razão, a distribuição dos preços assim como o preço da opção CTD são calculados a partir da fórmula de um processo estocástico de preços (modelo lognormal) em t igual a 1 e com taxa de juros livre de risco nula.

Uma vez descoberto como calcular a esperança do mínimo dos preços dos títulos em *default*, essa deve ser utilizada no apreamento dos CDS como *inputs* do modelo de probabilidades. Essa esperança é justamente o valor futuro dos fluxos de caixa do contrato de CDS no caso de *default*, ou seja, serão trazidos a valor presente pela taxa de juros livre de risco e pelo respectivo tempo no cálculo do preço do CDS.

4.3 Modelo para aprear uma opção de compra europeia para o máximo de dois ativos

No caso de dois ativos, é razoável representar a opção CTD como:

$$CTD_Option = RR - E[M_B] = RR - E[\min(RR_1, RR_2)], \text{ sendo:} \quad (4.5)$$

$$RR_1 = RR \cdot e^{(-0.5\sigma^2) + \alpha X_1}, \quad X_1 \sim N(0,1)$$

$$RR_2 = RR \cdot e^{(-0.5\sigma^2) + \alpha X_2}, \quad X_2 \sim N(0,1)$$

A fórmula (4.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$CTD_Option = RR - E[RR_1 + \min(RR_2 - RR_1, 0)]$$

$$CTD_Option = RR - E[RR_1 - \max(RR_1 - RR_2, 0)]$$

$$CTD_Option = RR - E[RR_1 - \max(RR_1 - RR_2, 0)]$$

$$CTD_Option = RR - E[RR_1] + E[\max(RR_1 - RR_2, 0)]$$

$$CTD_Option = RR - RR + E[\max(RR_1 - RR_2, 0)]$$

$$CTD_Option = E[\max(RR_1 - RR_2, 0)]$$

Substituindo RR_2 pelo strike de uma opção de compra européia, é possível interpretar o valor dessa esperança como o valor de uma call, de acordo com o modelo Black & Scholes. William Margrabe (1993) introduziu essa relação para ativos RR_1 e RR_2 correlacionados onde:

$$E[\max(RR_1 - RR_2, 0)] = RR_1 \times N(d_1) - RR_2 \times N(d_2), \text{ sendo:} \quad (4.6)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{RR_1}{RR_2}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \quad (4.7)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma, \text{ e,} \quad (4.8)$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho \quad (4.9)$$

4.4 Modelo para apreçar uma opção de venda europeia para o mínimo de múltiplos ativos

4.4.1 Preliminares:

Boyle & Tse (1990) derivaram uma fórmula que aproxima o valor de uma opção de compra para o máximo de múltiplos ativos, utilizando o Método de Clark (Clark – 1961). Esse método estima os momentos da distribuição do máximo ou mínimo de várias variáveis aleatórias. Porém, a fórmula de Boyle & Tse (B&T) requer o cálculo dos quatro primeiros momentos dessa distribuição.

O modelo utilizado a seguir, proposto por Lin (2004), requer o cálculo de um algoritmo relativamente simples que envolve a estimação somente dos dois primeiros momentos do máximo de inúmeras variáveis aleatórias correlacionadas, também através do Método de Clark. Somente como ilustração da eficácia dos cálculos desenvolvidos por Lin, o quadro 3 compara os resultados do valor de opções de 3 ativos obtidos por Monte Carlo ('Exato', no quadro 3) com os resultados obtidos por B&T e Lin.

Quadro 3: Exemplo de preços gerados pelo modelo de Lin

| Calls sobre o Máximo de três ativos | | | | |
|-------------------------------------|---------|---------|---------|-----------|
| | Ativo 1 | Ativo 2 | Ativo 3 | |
| Preços Atuais | 40 | 40 | 40 | |
| Vols | 30% | 30% | 30% | |
| Matriz de | 1 | 0.9 | 0.9 | |
| Correlação | 0.9 | 1 | 0.9 | |
| Correlação | 0.9 | 0.9 | 1 | |
| Strike | Exato | B&T | Lin | Abs Error |
| 30 | 16.351 | 16.351 | 16.266 | (0.085) |
| 35 | 12.384 | 12.383 | 12.319 | (0.065) |
| 40 | 8.986 | 8.984 | 8.939 | (0.047) |
| 45 | 6.270 | 6.267 | 6.237 | (0.033) |
| 50 | 4.220 | 4.226 | 4.208 | (0.012) |

| Puts sobre o Mínimo de três ativos | | | | |
|------------------------------------|---------|---------|---------|-----------|
| | Ativo 1 | Ativo 2 | Ativo 3 | |
| Preços Atuais | 40 | 40 | 40 | |
| Vols | 30% | 30% | 30% | |
| Matriz de | 1 | 0.6 | 0.4 | |
| Correlação | 0.6 | 1 | 0.6 | |
| Correlação | 0.4 | 0.6 | 1 | |
| Strike | Exato | B&T | Lin | Abs Error |
| 30 | 1.015 | | 1.019 | 0.003 |
| 35 | 2.668 | | 2.666 | (0.002) |
| 40 | 5.263 | | 5.244 | (0.019) |
| 45 | 8.628 | | 8.579 | (0.048) |
| 50 | 12.515 | | 12.427 | (0.088) |

Fonte: 'Valuation of Options on the Maximum/Minimum of Multiple Assets, Discrete Lookback Options and Equity-Indexed Annuities'. Sheldon Lin.

4.4.2 Descrição do Modelo de Lin:

O modelo padrão de apreçamento de opções de múltiplos ativos assume que os preços dos ativos subjacentes são lognormais e que a taxa livre de risco é conhecida e constante. O preço dessa opção tem, portanto, seu valor esperado equivalente ao *pay-off* da opção no vencimento, na medida neutra ao risco, descontado pela taxa de juros livre de risco.

Sejam $S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)$ os *pay-offs* dos n ativos no vencimento T , e pela suposição de que os preços são lognormais, tem-se que $S_k(T) = e^{X_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, onde X_k é normalmente distribuído com média μ_k e variância σ_k^2 .

Uma opção de venda para o mínimo de n ativos com strike K tem *pay-off* equivalente a $\left(K - \min_{1 \leq k \leq n} \{S_k(T)\}\right)_+$ no vencimento T , onde $(x)_+ = \max(x, 0)$.

Na medida neutra ao risco e, considerando uma taxa livre de risco constante e contínua igual a r , tem-se que o valor dessa opção deve ser:

$$p_{\min} = e^{-rT} E \left\{ \left(K - \min_{1 \leq k \leq n} \{S_k(T)\} \right)_+ \right\} \quad (4.10)$$

Faz-se necessário calcular, logo, a esperança matemática: $E \left\{ \left(K - \min_{1 \leq k \leq n} \{S_k(T)\} \right)_+ \right\}$.

$$\text{Sabendo que: } \left(K - \min_{1 \leq k \leq n} \{S_k(T)\} \right)_+ = \sum_{k=1}^n (K - S_k(T))_+ I \left(X_k \leq \min_{j \neq k} \{X_j\} \right),$$

é possível reescrever essa esperança matemática da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& E\left\{K - \min_{1 \leq k \leq n} \{S_k(T)\}_+\right\} = \\
& = e^{-rT} K \sum_{k=1}^n E\{I(X_k \geq \ln K, M_k \geq 0)\} + \\
& - e^{-rT} \sum_{k=1}^n E\{S_k(T) I(X_k \geq \ln K, M_k \geq 0)\} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

onde $M_k = -X_k - \max_{j \neq k} \{-X_j\}$, $k = 1, \dots, n$.

Os valores esperados na fórmula (4.11) precisam ser calculados. Duas ferramentas são utilizadas para a solução dessa fórmula: a Transformação de Esscher (Gerber & Shiu – 1994) e o Método de Clark.

A Transformação de Esscher calcula a esperança matemática de $E\{e^{N_1} I(N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2)\}$, na fórmula (4.11), onde N_1, N_2 são normais bivariadas e $I(A)$ denota o indicador de variável aleatória com respeito ao evento A. A solução dessa esperança pode ser dada por:

$$E\{e^{N_1} I(N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2)\} = E\{e^{N_1}\} \Pr\{N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2; 1, 0\}, \quad (4.12)$$

$$\text{onde: } \Pr\{N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2; 1, 0\} = \Phi\left(\frac{\phi_1 + \xi_1^2 - a_1}{\xi_1}, \frac{\phi_2 + \rho \xi_1 \xi_2 - a_2}{\xi_2}; \rho\right),$$

sendo θ_1, θ_2 as médias das variáveis aleatórias, ξ_1^2, ξ_2^2 as respectivas variâncias e ρ o coeficiente de correlação. A medida de probabilidade é denotada por $\Pr(A)$ para qualquer evento A e $\Phi(x, y; \rho)$ é uma função de distribuição normal bivariada padrão com

coeficiente de correlação equivalente a ρ . A prova, assim como as referências bibliográficas seguem no Apêndice.

Já o Método de Clark é utilizado para estimar momentos do máximo ou mínimo entre inúmeras variáveis aleatórias correlacionadas. No caso deste estudo, essa variável é o $\max_{j \neq k} \{-X_j\}$. Para que esses momentos sejam calculados, esse método parte da hipótese de que a distribuição conjunta de n ativos é equivalente à distribuição de uma normal multivariada. O cálculo de uma normal multivariada para mais de três ativos pode ser bastante custoso, porém o máximo de dois ativos normalmente distribuídos é bem definido. Esse algoritmo utiliza uma técnica recursiva para n ativos, tomando dois ativos a cada passo. Assume-se que o $\max(x_1, x_2)$ é normalmente distribuído. Dada essa hipótese, o valor esperado, variância e covariância de $\max(x_1, x_2, x_3)$ podem ser aproximados a partir da seguinte relação:

$$\max(x_1, x_2, x_3) = \max(\max(x_1, x_2), x_3)$$

A partir dessa igualdade, os primeiros quatro momentos do máximo de três ativos com um quarto ativo podem ser dados por:

$$\max(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max(\max(x_1, x_2, x_3), x_4)$$

Aplicando esse método repetidamente para n variáveis, é possível calcular a distribuição do máximo entre n variáveis normais.

4.4.3 Método de Clark

Sejam X_1, X_2, \dots, X_n variáveis normais multivariadas com médias μ_k , variâncias σ_k^2 , $k = 1, 2, \dots, n$, e coeficientes de correlação iguais a ρ_{kj} , $k, j = 1, 2, \dots, n$. Para $k = 3, 4, \dots, n$ deseja-se estimar os primeiros dois momentos das variáveis aleatórias $\max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}\}$, e a correlação entre $\max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}\}$ e X_k .

Sejam ν_k, η_k e ε_k^2 ($\varepsilon_k^2 = \eta_k - \nu_k^2$) as estimativas para o primeiro momento, o segundo momento e a variância de $\max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}\}$, e ζ_k a correlação entre $\max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}\}$ e X_k , respectivamente.

Para $k = 3$,

$$\nu_3 = \mu_1 \Phi(h_2) + \mu_2 \Phi(-h_2) + \tau \phi(h_2),$$

$$\eta_3 = [\mu_1^2 + \sigma_1^2] \Phi(h_2) + [\mu_2^2 + \sigma_2^2] \Phi(-h_2) + [\mu_1 + \mu_2] \tau_2 \phi(h_2),$$

$$\zeta_3 = \frac{\rho_{13} \sigma_1 \Phi(h_2) + \rho_{23} \sigma_2 \Phi(-h_2)}{\varepsilon_3}$$

onde $\Phi(x)$ e $\phi(x)$ são a função de distribuição normal padrão e a função densidade

normal padrão, $\tau_2^2 = \sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$, e $h_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\tau_2}$.

Os parâmetros ν_k, ε_k e ζ_k para $k > 3$ são obtidos recursivamente pela relação:

$$\max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}\} = \max\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-2}\}, X_{k-1}\}$$

Seja:

$$\tau_{k-1}^2 = \varepsilon_{k-1}^2 - 2\zeta_{k-1}\varepsilon_{k-1}\sigma_{k-1} + \sigma_{k-1}^2, \text{ e}$$

$$h_{k-1} = \frac{v_{k-1} - \mu_{k-1}}{\tau_{k-1}}$$

A relação recursiva é dada por:

$$v_k = v_{k-1}\Phi(h_{k-1}) + \mu_{k-1}\Phi(-h_{k-1}) + \tau_{k-1}\phi(h_{k-1}),$$

$$\eta_k = \eta_{k-1}\Phi(h_{k-1}) + [\mu_{k-1}^2 + \sigma_{k-1}^2]\Phi(-h_{k-1}) + [v_{k-1} + \mu_{k-1}]\tau_{k-1}\phi(h_{k-1}),$$

$$\zeta_3 = \frac{\varphi_{k-1,k}\varepsilon_{k-1}\Phi(h_{k-1}) + \rho_{k-1,k}\sigma_{k-1}\Phi(-h_{k-1})}{\varepsilon_k}, \text{ onde:}$$

$$\varphi_{k-1,k} = \frac{\varphi_{k-2,k}\varepsilon_{k-2}\Phi(h_{k-2}) + \rho_{k-2,k}\sigma_{k-2}\Phi(-h_{k-2})}{\varepsilon_{k-1}}$$

4.4.4 Aplicação

Como mencionado anteriormente, temos que o valor da opção é:

$$\begin{aligned}
 p_{\min} &= e^{-rT} E\left\{K - \min_{1 \leq k \leq n} \{S_k(T)\}_+ \right\} = \\
 &= e^{-rT} K \sum_{k=1}^n E\{I(X_k \leq \ln K, M_k \geq 0)\} - e^{-rT} \sum_{k=1}^n E\{S_k(T) I(X_k \leq \ln K, M_k \geq 0)\}
 \end{aligned}$$

onde $M_k = -X_k - \max_{j \neq k} \{-X_j\}$, $k = 1, \dots, n$.

Dado que $r = 0$, tem-se:

$$= K \sum_{k=1}^n E\{I(X_k \leq \ln K, M_k \geq 0)\} - \sum_{k=1}^n E\{S_k(T) I(X_k \leq \ln K, M_k \geq 0)\}$$

É preciso identificar as médias, variâncias e coeficientes de correlação, com a ajuda do Método de Clark. A aproximação de M_k por uma variável aleatória normal é acurada conforme resultados apresentados no quadro 3.

Sejam ψ_k, Λ_k^2 a média e variância de $\max_{j \neq k} \{-X_j\}$, e Ξ_k o coeficiente de correlação entre $-X_k$ e $\max_{j \neq k} \{-X_j\}$ obtidos pelo Método de Clark. Dessa maneira,

$$E(M_k) = -\mu_k - \Psi_k$$

$$\text{Var}(N_k) = \sigma_k^2 - 2\Xi_k \sigma_k \Lambda_k + \Lambda_k^2$$

$$\text{e } \rho_k = -\text{Corr}(X_k, M_k) = \frac{\sigma_k - \Xi_k \Lambda_k}{\sqrt{\text{Var}(N_k)}}$$

Aplicando a fórmula (4.12), o valor aproximado de \bar{p}_{\min} pode ser dado por :

$$\bar{p}_{\min} = K \sum_{k=1}^n \Phi(-d_3(k), d_4(k); \rho_k) - \sum_{k=1}^n S_k(0) \Phi(-d_1(k), d_2(k); \rho_k)$$

onde $S_k(0) = e^{-rT} E\{S_k(T)\}$ é o preço inicial do k -th ativo. Os argumentos $d_1(k)$,

$d_2(k)$, $d_3(k)$, $d_4(k)$, são dados por:

$$d_1(k) = \frac{\mu_k + \sigma_k^2 - \ln K}{\sigma_k}$$

$$d_2(k) = \frac{-\mu_k - \psi_k - \sigma_k(\sigma_k - \Xi_k \Lambda_k)}{\sqrt{\sigma_k^2 - 2\Xi_k \sigma_k \Lambda_k + \Lambda_k^2}}$$

$$d_3(k) = \frac{\mu_k - \ln K}{\sigma_k}$$

$$d_4(k) = \frac{-\mu_k - \psi_k}{\sqrt{\sigma_k^2 - 2\Xi_k \sigma_k \Lambda_k + \Lambda_k^2}}$$

5. APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Dados

Os testes foram realizados para os contratos de CDS de Brasil e Turquia, com vencimentos em um, dois, três, cinco e dez anos. Dois títulos foram utilizados para a comparação com os CDS *spreads* de mercado:

- a) *Global'09*: é um título emitido pelo governo brasileiro no mercado externo que paga juros semestrais de 14.50% ao ano e vence em 15 de Outubro de 2009;
- b) *Turkey'09*: é um título emitido pelo governo turco no mercado externo que paga juros de 12,375% ao ano e vence em 15 de Junho de 2009.

Os dados coletados para modelagem compreendem o período de 13 de Abril de 2000 a 12 de Abril de 2005 contemplando os preços e *spreads* de compra e venda dos ativos relacionados.

5.2 Resultados

Para cada um dos países, serão apresentados os resultados para os tópicos a seguir:

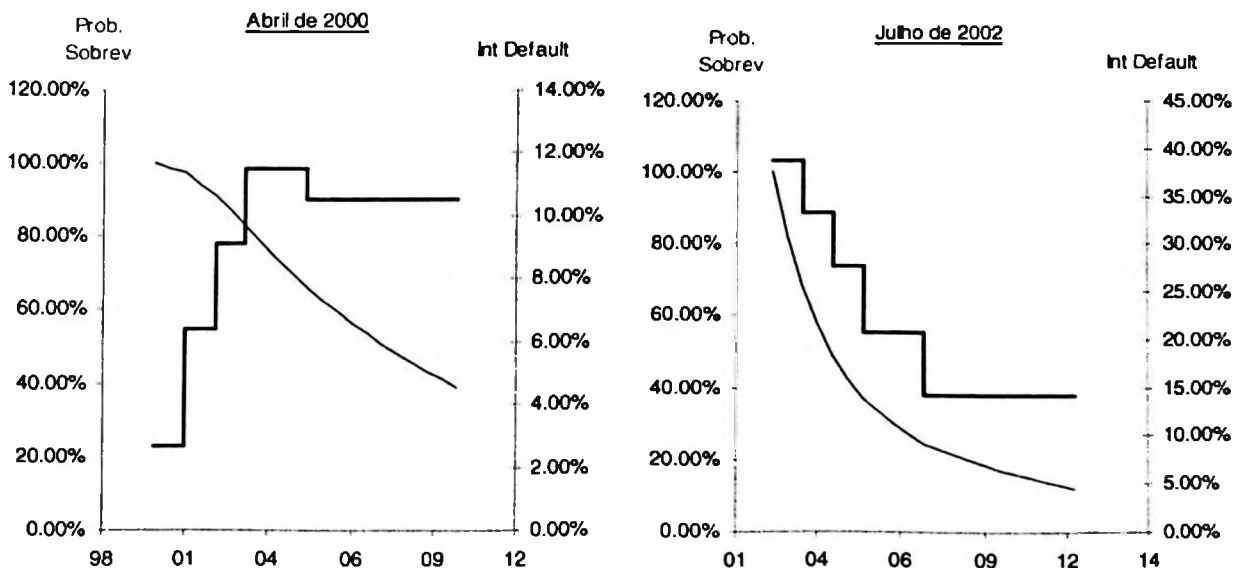
- a) A curva de intensidade de *default*, extraída dos contratos de CDS;
- b) O basis tradicional sujo, o basis tradicional limpo e o basis ajustado entre os CDS *spreads* e o *spread* dos títulos;

- c) O prêmio implícito da opção CTD, como diferença do basis tradicional limpo e o basis ajustado;
- d) Os dados de *recovery values* implícitos nos contratos de CDS, a partir da hipótese de 25% de *recovery value* esperado dos títulos;
- e) A volatilidade implícita da série de *recovery values* para múltiplos ativos;
- f) A regressão entre a volatilidade implícita de *recovery values* e a volatilidade de ativos selecionados;
- g) O apreçamento da opção CTD, dada a volatilidade de maior poder explicativo sobre a volatilidade implícita de *recovery rates*;
- h) O basis residual não explicado pela opção CTD.

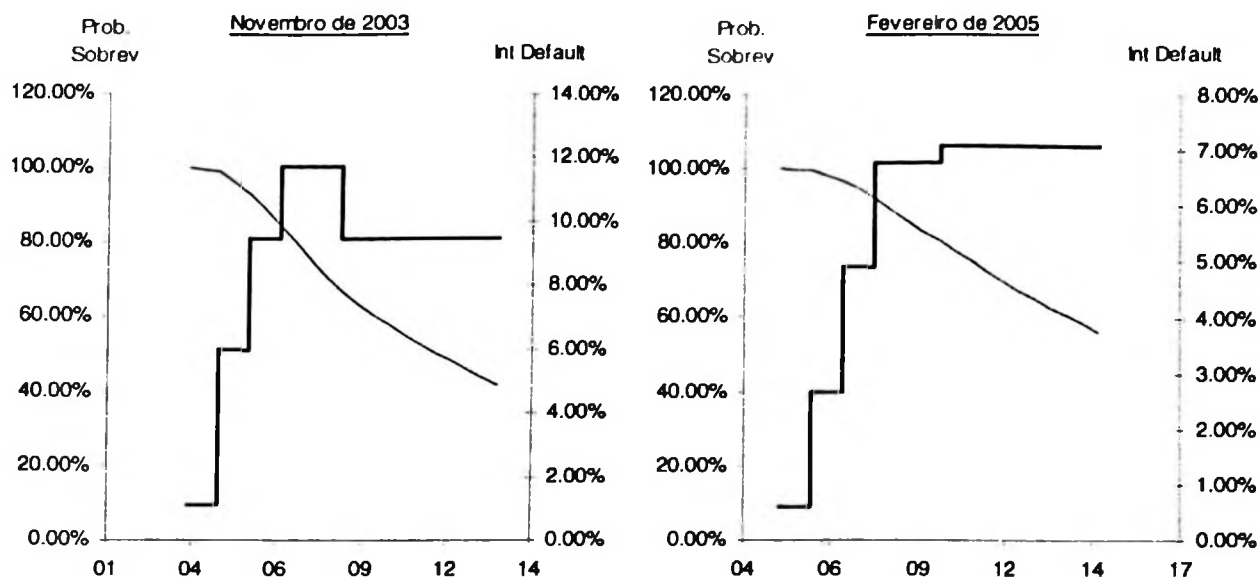
5.2.1 Brasil

Os gráficos 14, 15, 16 e 17 ilustram a curva de intensidade de *default* e probabilidade de sobrevivência com *recovery value* de 25%.

Gráficos 14 e 15: Curvas de Intensidade de default para Brasil implícitas nos contratos de CDS



Gráficos 16 e 17: Curvas de Intensidade de default para Brasil implícitas nos contratos de CDS



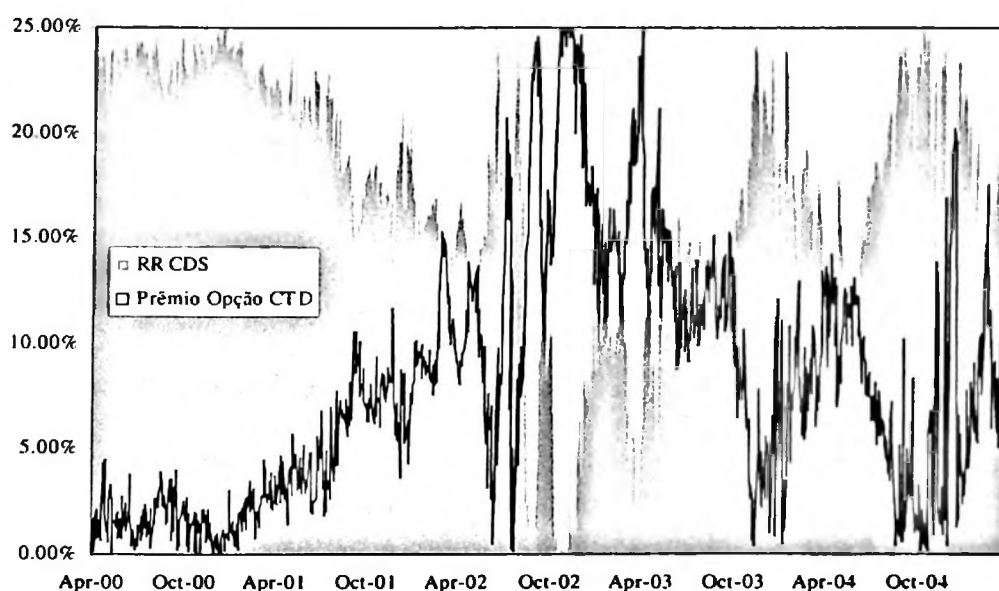
Essas curvas apresentam uma piora significativa na qualidade de crédito do Brasil, no período de Abril de 2000 para Julho de 2002, o que reflete a crise pré-eleição ocorrida durante o ano de 2002. A partir de 2003, houve uma melhora dessa qualidade ilustradas nos gráficos 16 e 17. Em Fevereiro de 2005, os contratos de CDS embutiram uma probabilidade de *default* do Brasil de 0,5% para um ano, e de 18% para cinco anos.

Os gráficos 10 e 11 ilustram o basis tradicional sujo, o basis tradicional limpo e o basis ajustado entre os CDS de Brasil e o *Global'09*. Observa-se um aumento dos basis entre o período de Abril de 2002 a Abril de 2003, em concordância com a piora da qualidade de crédito do Brasil no mesmo período, sugerindo um aumento do prêmio CTD. Neste caso, os vendedores de CDS esperam receber prêmios de opção CTD, dada a maior probabilidade implícita do Brasil entrar em *default*.

O gráfico 12 apresenta a suposição do prêmio da opção CTD como a diferença entre o basis tradicional limpo e o basis ajustado. Neste gráfico, o prêmio CTD está ilustrado como bps acima da taxa de juros livre de risco.

O gráfico 18 ilustra os *recovery values* implícitos nos contratos de CDS (RR_{CDS}) de Brasil. Os dados apresentam-se no intervalo $[0,25\%]$, em concordância com a teoria de que devem ser iguais ou menores que o valor esperado de *recovery value* assumido para o *Global'09*, neste caso equivalente a 25%. Nota-se que o prêmio da opção CTD, como percentual do valor de face, é representado como o complementar de RR_{CDS} a 25%.

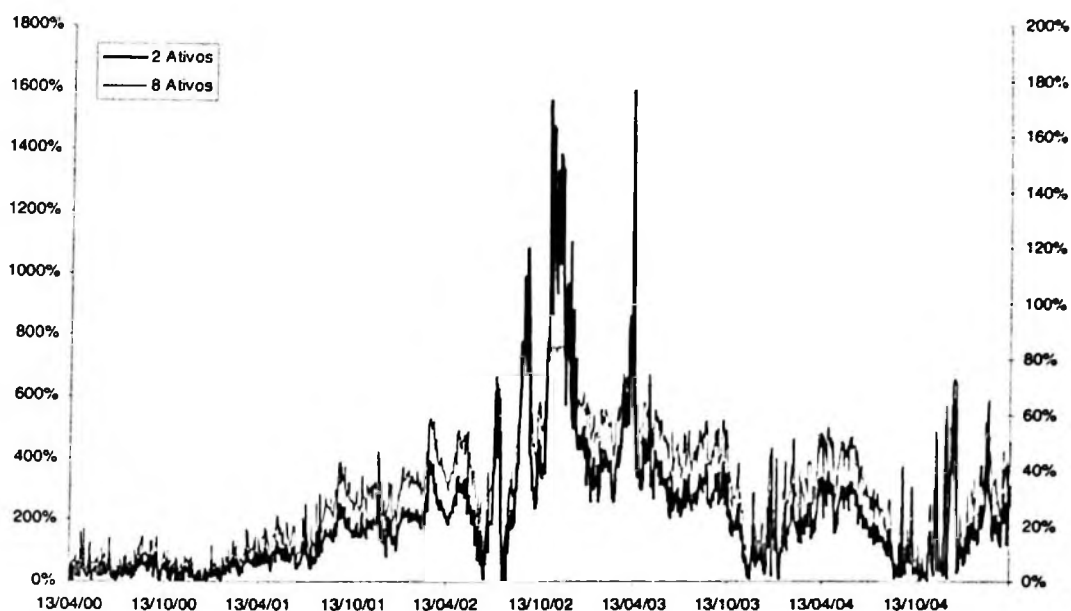
Gráfico 18: *Recovery Value* dos CDS e o prêmio da opção CTD



Dessa série de prêmios CTD, extraiu-se a volatilidade implícita para o prêmio entre o mínimo de dois a oito ativos. O modelo de Margrabe foi utilizado para calcular a volatilidade de uma opção de mínimo de dois ativos, e o modelo de Lin foi utilizado para o mínimo de três ativos em diante, até o máximo de oito ativos.

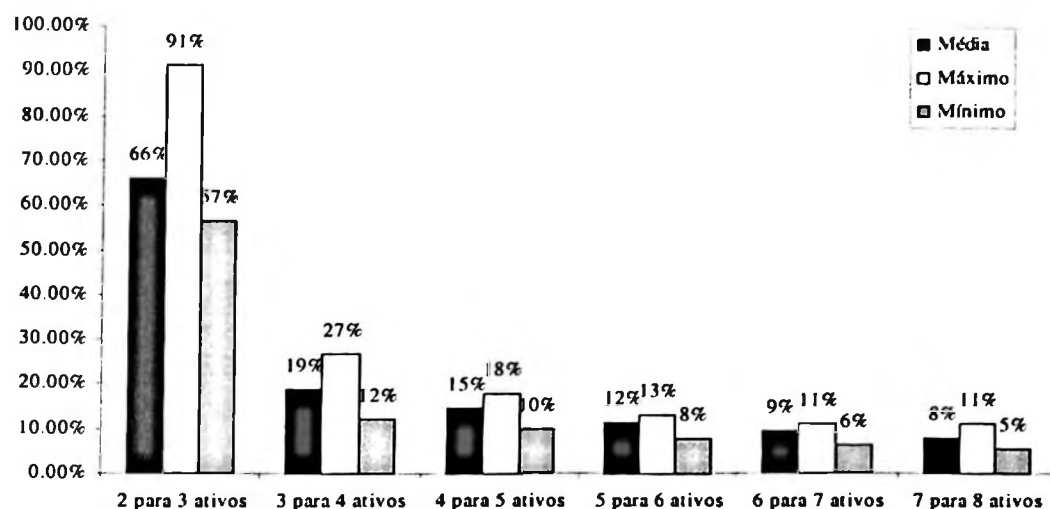
O gráfico 19 mostra o resultado das volatilidades implícitas de RR_{CDS} para o mínimo de dois e oito ativos e, conclui-se que, apesar de formatos semelhantes, a volatilidade calculada para o mínimo de oito ativos é significativamente menor do que para dois ativos, extraídas do prêmio de opção CTD.

Gráfico 19: Volatilidades implícitas para o prêmio CTD do mínimo de dois e oito ativos



No gráfico 19, a volatilidade implícita dos *recovery values* embutidos nos CDS para o mínimo de dois ativos está representada na margem esquerda e, para o mínimo de oito ativos, na margem direita.

O gráfico 20 ilustra o ganho percentual médio ao adicionar-se um ativo por vez no cálculo dessa volatilidade. Por exemplo, a volatilidade implícita calculada para o mínimo de três ativos foi em média 66% menor em relação ao mínimo de dois ativos, e assim sucessivamente. Visualizando o gráfico, conclui-se que o benefício é cada vez menor para cada ativo adicionado no modelo. Mais adiante, verificar-se-á que a correlação com a volatilidade de outros ativos do mercado financeiro é razoavelmente estável já a partir de dois ativos.

Gráfico 20: Benefício percentual de número de ativos

Com o objetivo de identificar volatilidades de outros ativos no mercado financeiro semelhantes à volatilidade implícita de *recovery value*, foram efetuadas regressões lineares representadas na tabela 10. Os ativos selecionados foram dois índices não diretamente relacionados ao Brasil, o VIX e o EMBI Global ⁽⁸⁾, e três índices diretamente relacionados ao Brasil, a volatilidade de câmbio implícita em contratos de opção de um mês, o índice de ações Ibovespa e o EMBI Brasil ⁽⁹⁾.

Observando a tabela 10, conclui-se que quanto maior o número de ativos considerados no modelo de Lin, maiores são os valores de correlação e R-quadrado em relação aos índices selecionados. Além disso, o benefício em R-quadrado das variáveis explicativas em relação à variável dependente (volatilidade dos *recovery values*) é marginalmente decrescente.

(8) O EMBI Global é um índice calculado pelo JP Morgan que mede o retorno de instrumentos de dívida denominados em dólares, emitidos por entidades pertencentes ao bloco chamado mercados emergentes. Atualmente, o EMBI Global cobre 184 instrumentos, de 32 países diferentes.

(9) O EMBI Brasil mede o retorno de instrumentos brasileiros denominados em dólares.

Nota-se que a variável de maior poder explicativo sobre a volatilidade dos *recovery values* é a volatilidade histórica do EMBI Brasil. Para oito ativos, o poder explicativo do EMBI Brasil é de 53,9% sobre a variável dependente com uma correlação de 73,4%.

Tabela 10: Regressão Linear da volatilidade de *recovery values* com ativos selecionados

| # Ativos | Variáveis explicativas - Vols Específicas | | | | | | | | |
|-------------|---|--------|---------|-----------------------------------|--------|---------|--------------------------------------|--------|---------|
| | BRL/US\$ Vol Implícita - 1 mês | | | Ibovespa - Vol anual histórica | | | EMBI Brasil - Vol anual histórica | | |
| | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor |
| 2 | 29.2% | 54.1% | 0.0% | 37.3% | 61.1% | 0.0% | 46.7% | 68.3% | 0.0% |
| 3 | 28.9% | 53.7% | 0.0% | 39.6% | 62.9% | 0.0% | 48.2% | 69.4% | 0.0% |
| 4 | 28.5% | 53.4% | 0.0% | 40.9% | 63.9% | 0.0% | 49.9% | 70.6% | 0.0% |
| 5 | 28.6% | 53.5% | 0.0% | 41.9% | 64.7% | 0.0% | 51.5% | 71.8% | 0.0% |
| 6 | 28.8% | 53.7% | 0.0% | 42.6% | 65.3% | 0.0% | 52.6% | 72.6% | 0.0% |
| 7 | 29.1% | 53.9% | 0.0% | 43.1% | 65.7% | 0.0% | 53.4% | 73.1% | 0.0% |
| 8 | 29.3% | 54.1% | 0.0% | 43.4% | 65.9% | 0.0% | 53.9% | 73.4% | 0.0% |

| # Ativos | Variáveis explicativas - Vols Genéricas | | | | | |
|-------------|---|--------|---------|--------------------------------------|--------|---------|
| | VIX | | | EMBI Global - Vol anual histórica | | |
| | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor |
| 2 | 7.4% | 27.2% | 0.0% | 10.7% | 32.7% | 0.0% |
| 3 | 3.2% | 17.9% | 0.0% | 9.8% | 31.3% | 0.0% |
| 4 | 3.4% | 18.3% | 0.0% | 9.8% | 31.4% | 0.0% |
| 5 | 3.6% | 19.1% | 0.0% | 9.8% | 31.4% | 0.0% |
| 6 | 3.9% | 19.7% | 0.0% | 9.8% | 31.4% | 0.0% |
| 7 | 4.1% | 20.3% | 0.0% | 9.9% | 31.4% | 0.0% |
| 8 | 4.3% | 20.8% | 0.0% | 9.9% | 31.5% | 0.0% |

A partir dos resultados da regressão linear apresentados na tabela 10, é possível plotar uma projeção da volatilidade de RR_{CDS} a partir da volatilidade do EMBI Brasil.

Como ilustrado no gráfico 21, pode-se notar uma razoável aproximação entre os valores reais e os projetados de RR_{CDS} . Os valores projetados apresentam-se menos voláteis do que os reais, porém as tendências são semelhantes no decorrer do tempo.

A fim de estimar o quanto essa variável explica do basis entre títulos e CDS, o próximo passo será recalculando preços de RR_{CDS} utilizando as volatilidades projetadas a partir do EMBI Brasil (gráfico 22).

Gráfico 21: Volatilidades reais (implícitas) de RR_{CDS} e valores projetados pelo EMBI Brasil

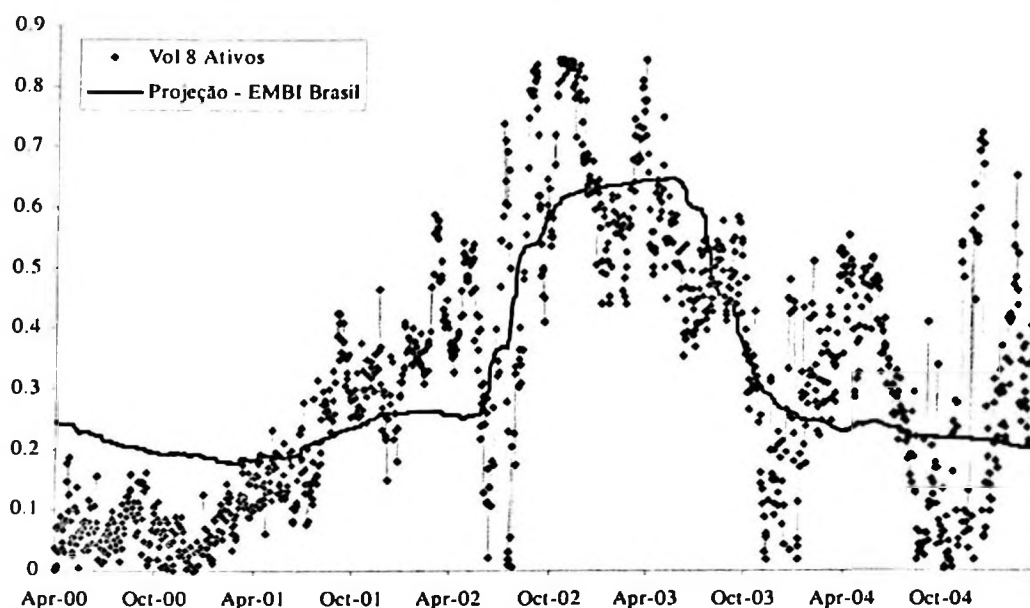
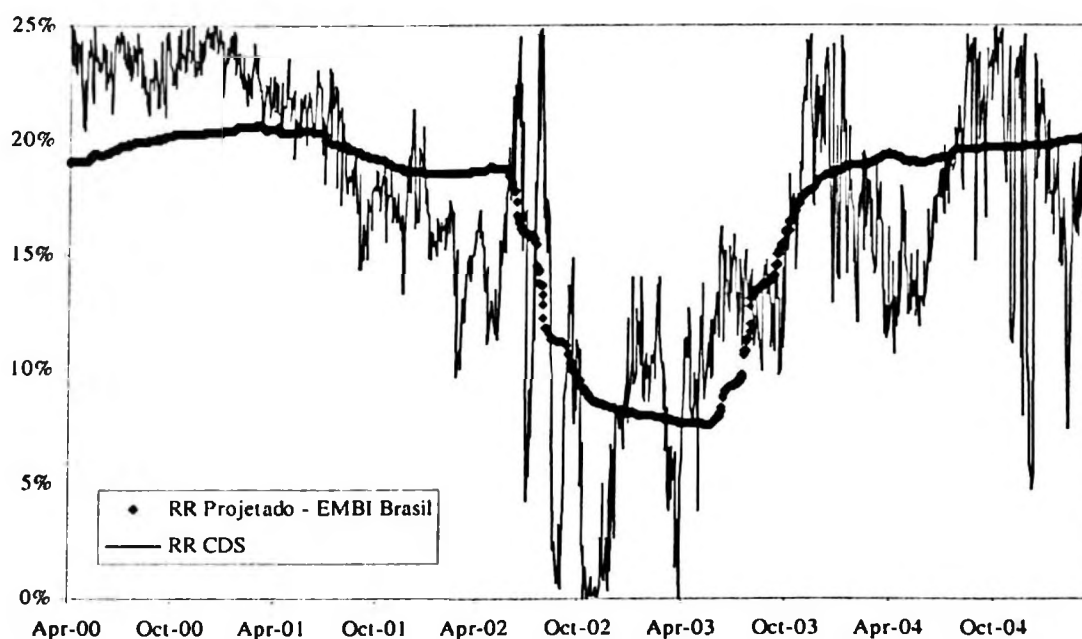


Gráfico 22: Valores reais (implícitos) de RR_{CDS} e valores projetados pelo EMBI Brasil

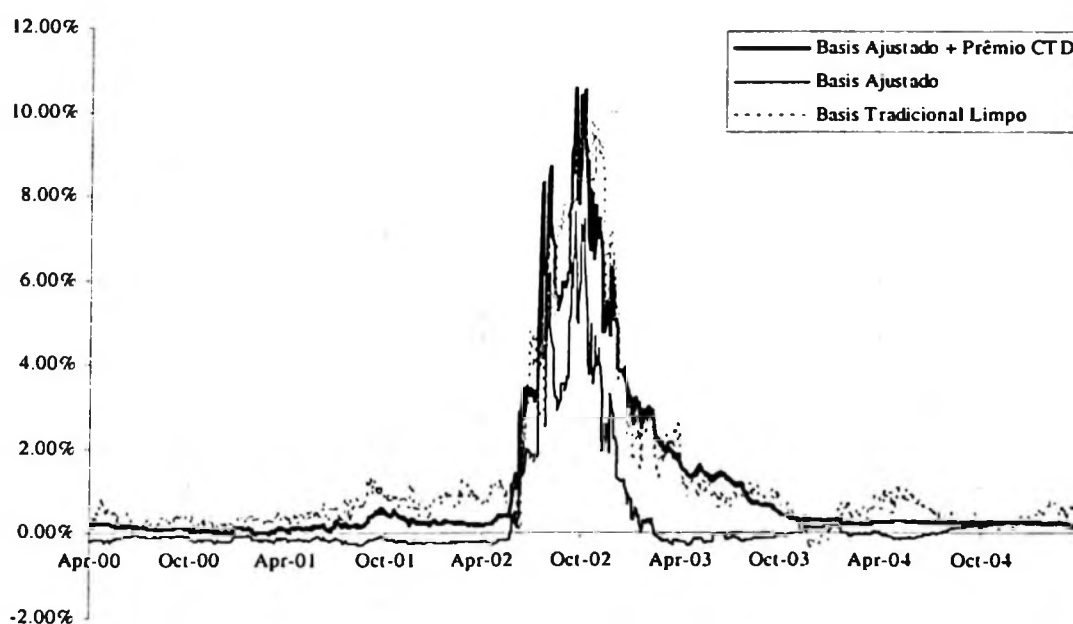


Os dados projetados pelo EMBI Brasil, apresentados no gráfico 22, também estão no intervalo $[0,25\%]$, em concordância com a teoria de que devem ser iguais ou menores que o valor esperado de *recovery value* assumido para o *Global'09* de 25%.

O prêmio da opção CTD, projetado pela volatilidade de EMBI Brasil, é equivalente ao complementar de RR projetado a 25%. Assumindo-se que a volatilidade de EMBI Brasil é uma boa aproximação para a volatilidade de RR_{CDS} , pode-se apreçar o prêmio da opção CTD independentemente dos CDS spreads de mercado, e calcular o quanto do basis pode ser explicado pela opção CTD. Para isso, deve-se recalculer o preço do *Global'09* a partir de RR projetado, independentemente, a ser considerado nos contratos de CDS.

O *spread* do *Global'09*, recalculado pelo modelo de probabilidade de *default* (equivalente ao modelo utilizado para o apreçamento dos CDS) a partir dos *recovery values* projetados independentemente, embute em seu prêmio todas as diferenças fundamentais, inclusive a opção CTD. O gráfico 23 ilustra o basis ajustado (equivalente ao CDS *spread* menos o *spread* ajustado dos títulos) e o basis ajustado com o apreçamento da opção CTD. A diferença entre as curvas deve representar somente o efeito da opção CTD.

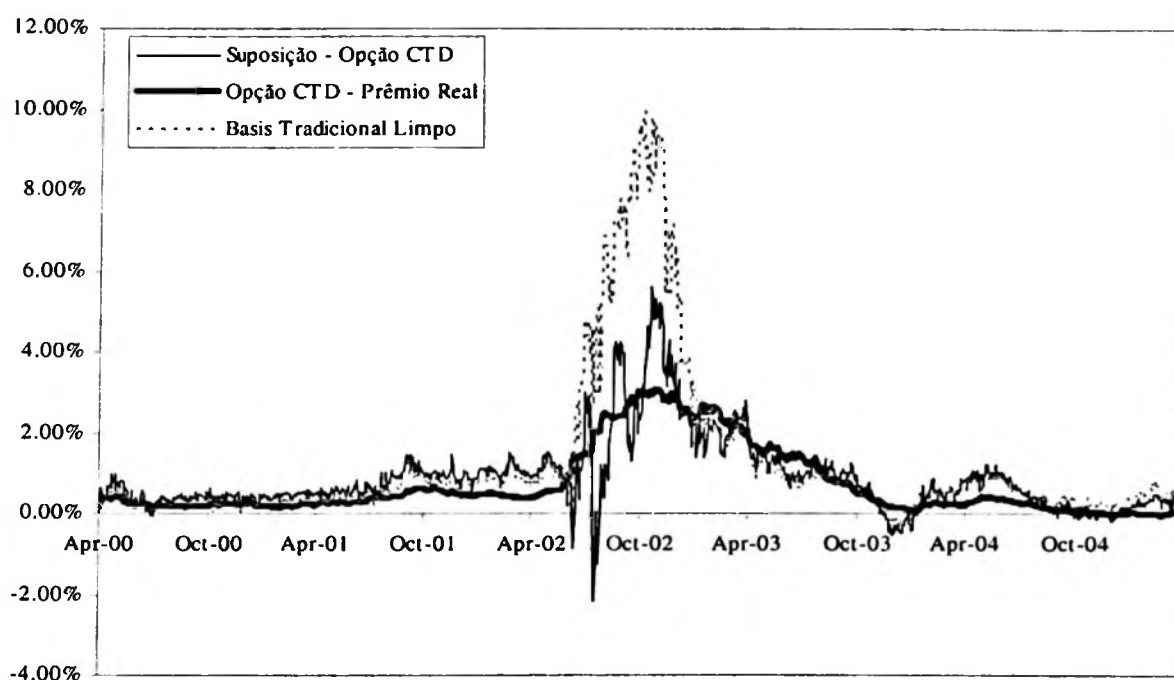
Gráfico 23: Basis Ajustado e o prêmio CTD



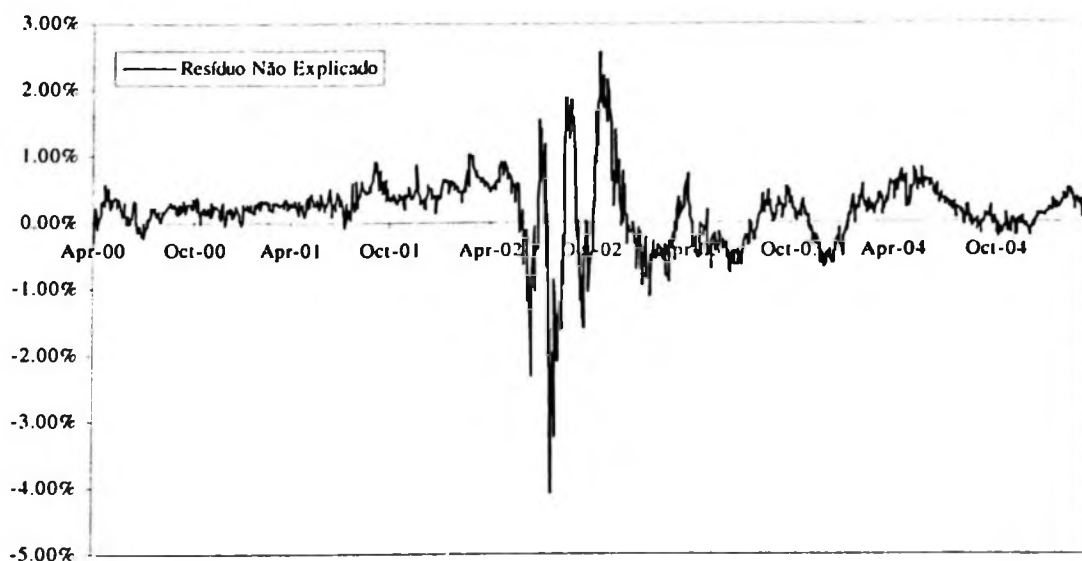
O gráfico 23 ilustra que o basis ajustado, somado ao prêmio da opção CTD, explica praticamente todo o basis de mercado (tradicional).

O gráfico 24 compara o prêmio hipotético da opção CTD, estimado a partir da diferença entre o basis tradicional e o basis ajustado, e o prêmio da opção CTD apreçado, independentemente, por meio da calibração da volatilidade dos *recovery values*. Observa-se que, neste caso, não há prêmios negativos calculados para a opção CTD, corrigindo a suposição feita anteriormente. Além disso, o mesmo gráfico ilustra o basis tradicional limpo a fim de demonstrar a parcela explicada pela opção CTD.

Gráfico 24: Prêmio real e prêmio hipotético da opção CTD

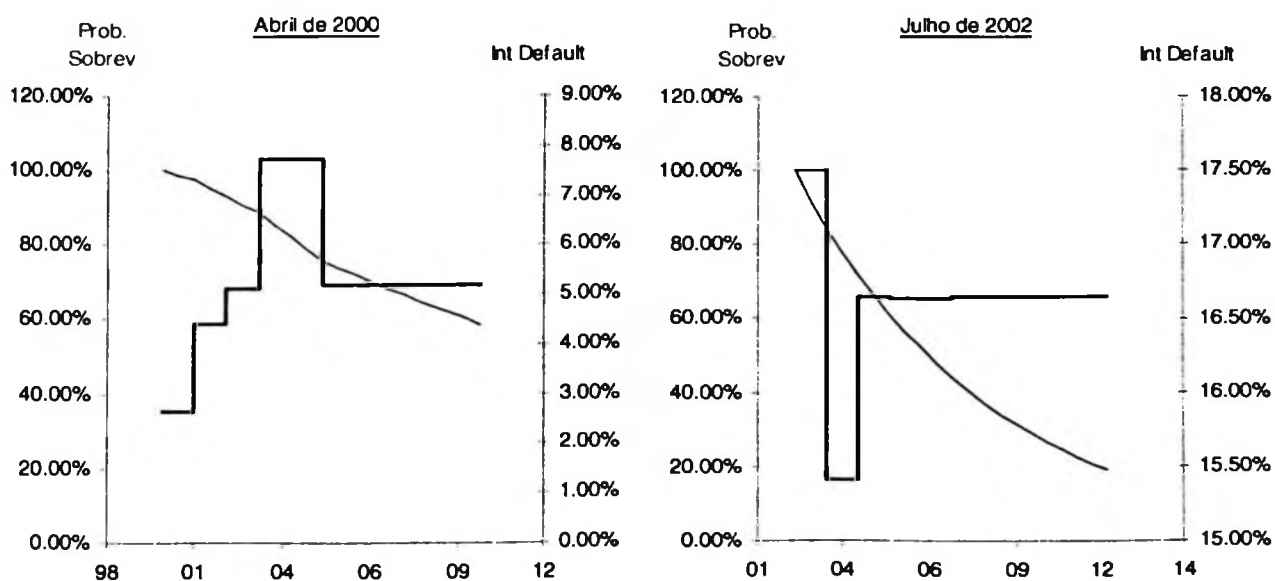


Finalmente, o gráfico 25 ilustra o basis não explicado por nenhum dos fatores fundamentais (inclusive a opção CTD), que é calculado pela diferença entre o basis tradicional limpo e o basis ajustado somado ao prêmio da opção CTD. Essa diferença residual deve ser explicada por fatores de mercado não apreçados pelo modelo apresentado nesse trabalho.

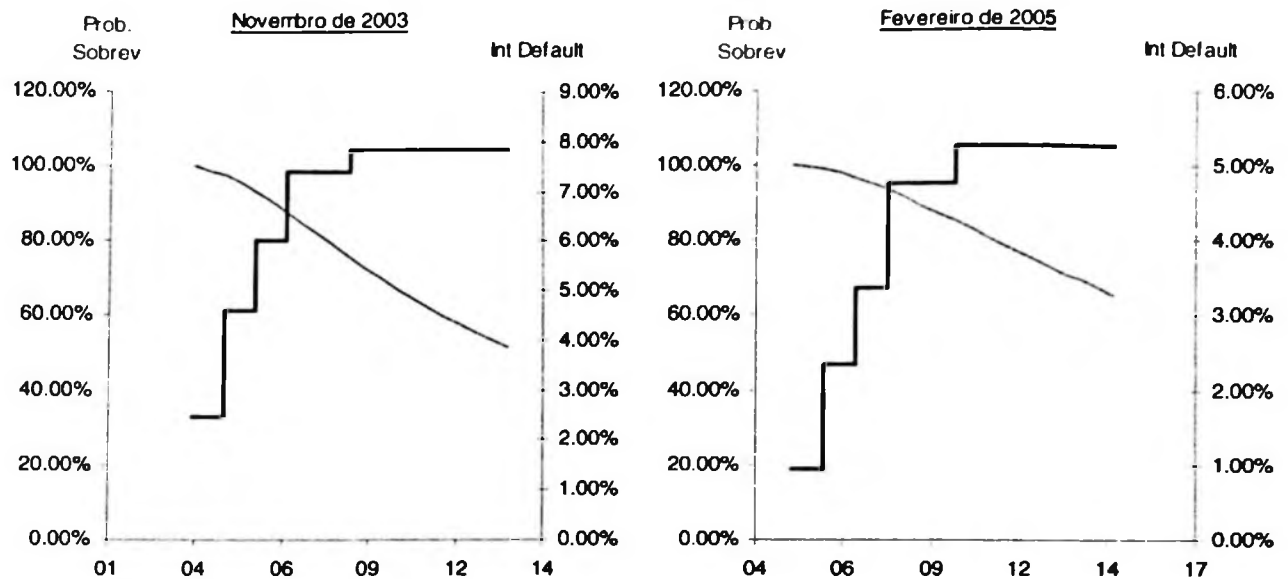
Gráfico 25: Basis Residual não explicado

5.2.2 Turquia

Os gráficos 26, 27, 28 e 29 ilustram a curva de intensidade de *default* e probabilidade de sobrevivência com *recovery value* de 25%.

Gráficos 26 e 27: Curvas de Intensidade de default para Turquia implícitas nos contratos de CDS

Gráficos 28 e 29: Curvas de Intensidade de default para Turquia implícitas nos contratos de CDS



Assim como no caso brasileiro, as curvas (gráficos 26 e 27) apresentam uma piora significativa na qualidade de crédito da Turquia, no período de Abril de 2000 para Julho de 2002, porém essas foram menores do que as probabilidades de Brasil. Por exemplo, em 15 de Julho de 2002, os contratos de CDS de Turquia apresentaram uma probabilidade de default para um ano de 16%, enquanto os contratos de Brasil refletiram 32% para o mesmo período.

A partir de 2003, houve uma melhora da qualidade de crédito de Turquia ilustradas nos gráficos 28 e 29. Em Fevereiro de 2005, os contratos de CDS embutiram uma probabilidade de *default* de 1% para um ano, e de 15% para cinco anos.

O gráfico 30 ilustra o basis tradicional sujo entre o CDS *spread* de cinco anos e o *spread* do Turkey 09, e o compara com o basis tradicional limpo. Nota-se que ambos *spreads* são semelhantes ao longo do tempo, o que sugere que a curva de CDS *spread* de Turquia não é muito inclinada. Além disso, observa-se que o basis foi negativo até meados de 2002 e, a partir de então, positivo até Abril de 2005.

Gráfico 30: Basis Tradicional 'Sujo' e 'Limpo' de Turquia

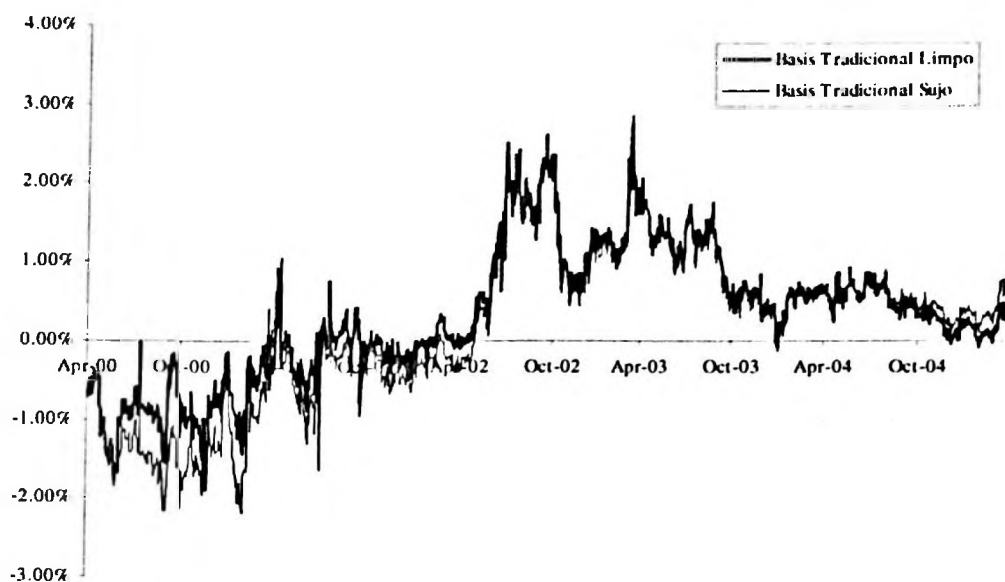
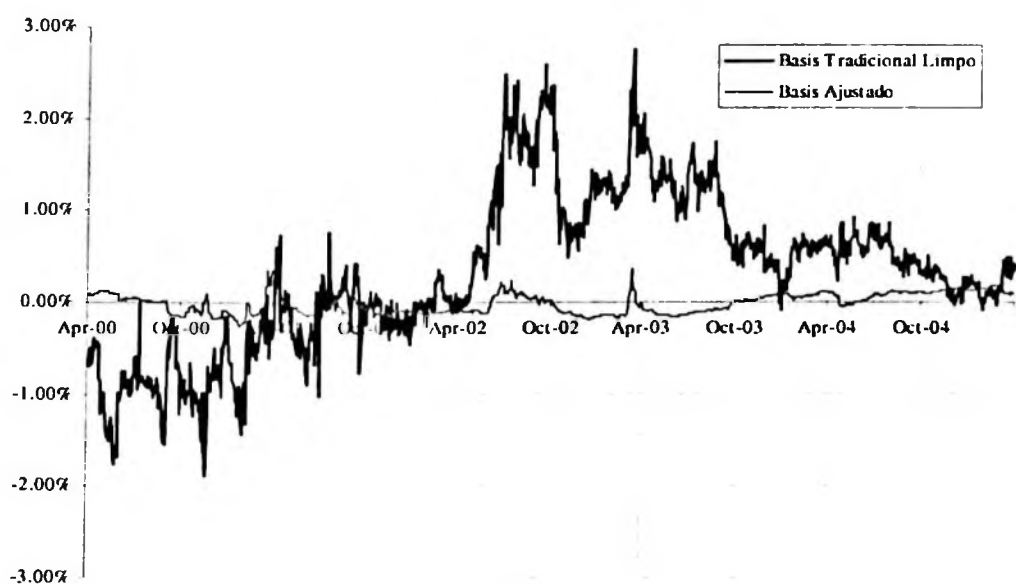
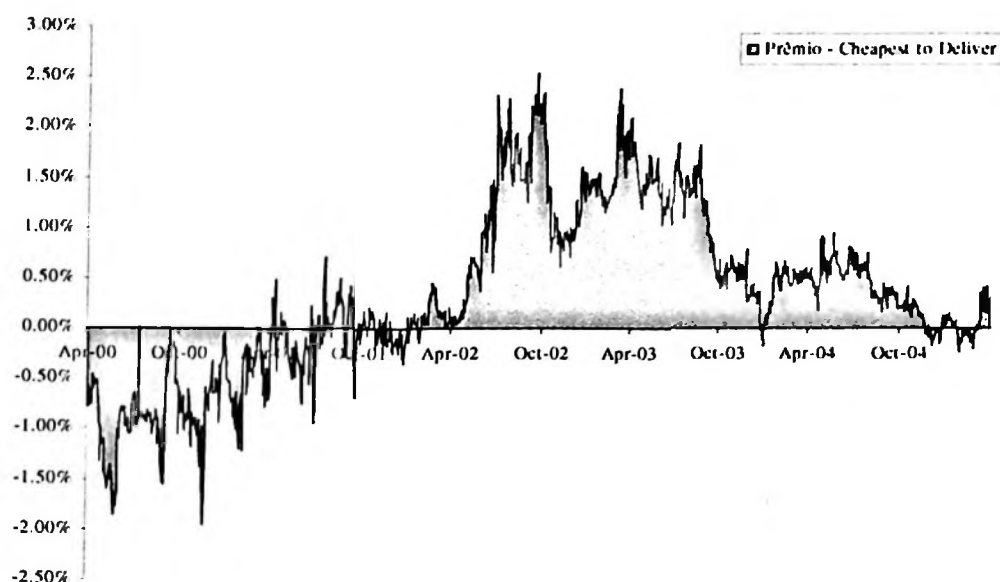


Gráfico 31: Basis Tradicional 'Limpo' e o Basis Ajustado



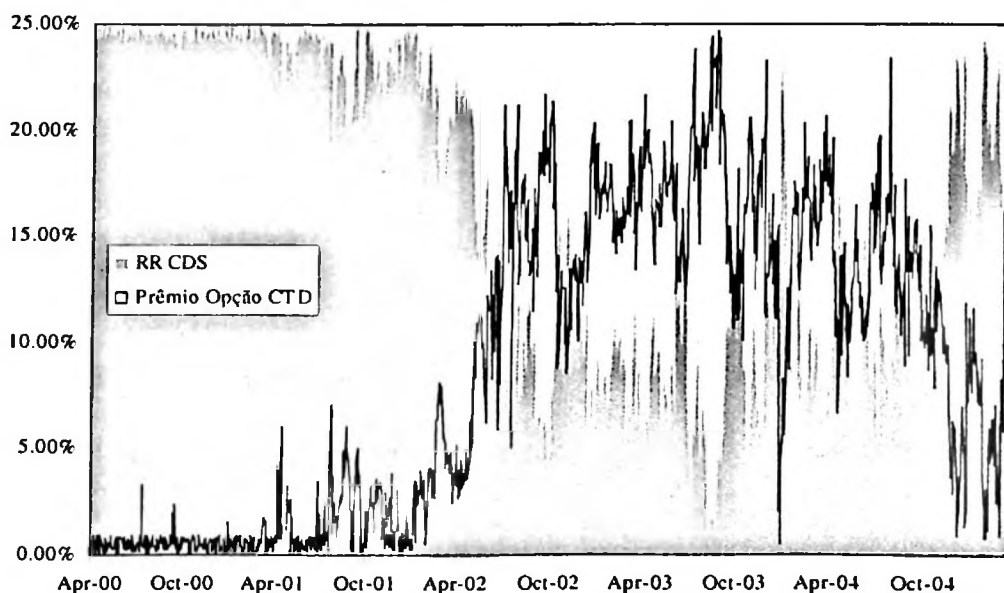
Como demonstrado no gráfico 31, o basis ajustado entre o CDS spread e o *Turkey'09* é, praticamente, constante no tempo o que está em concordância com o fato de os preços desses títulos permanecerem em torno de par (\$100). Dessa maneira, o prêmio hipotético da opção CTD calculado pela diferença entre o basis tradicional limpo e o basis ajustado é quase equivalente ao próprio basis tradicional limpo (gráfico 32).

Gráfico 32: Basis gerado pela opção CTD como diferença entre o basis tradicional e o ajustado



Para os períodos em que o prêmio hipotético da opção CTD assume valores negativos, os valores dos *recovery values* implícitos nos contratos de CDS (RR_{CDS}) a serem calculados devem ser iguais a 25%, ou seja, o valor real da opção CTD deve ser considerado nulo. O gráfico 33 ilustra o RR_{CDS} e o prêmio da opção CTD, como percentual do valor de face, representado como o complementar de RR_{CDS} a 25%.

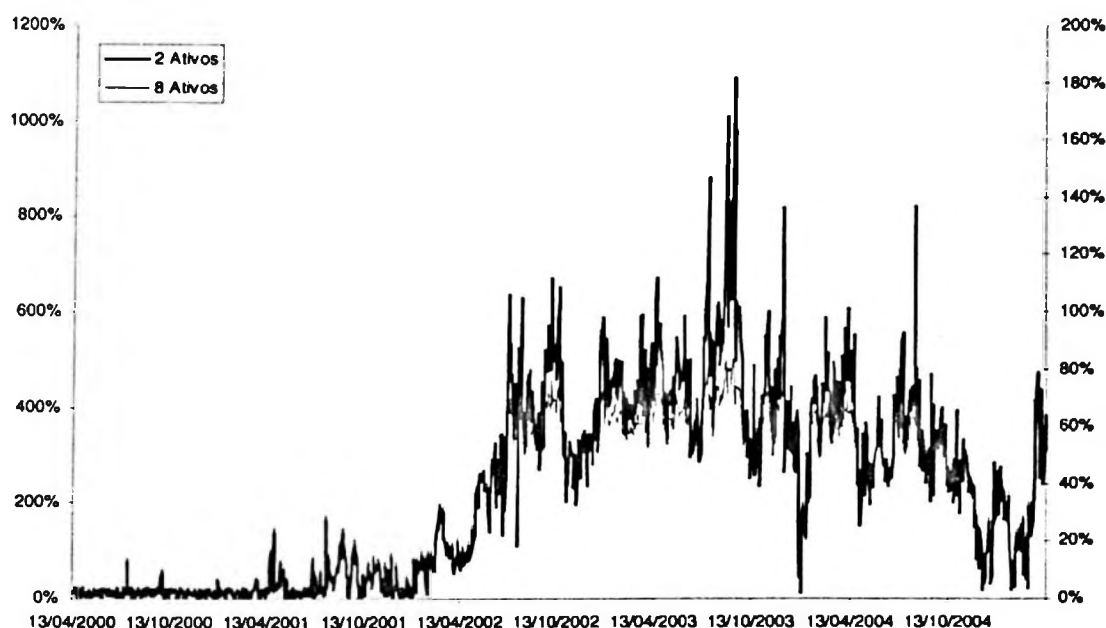
Gráfico 33: Recovery Value dos CDS e o prêmio da opção CTD



Dessa série de prêmios CTD, extraiu-se a volatilidade implícita para o prêmio entre o mínimo de dois a oito ativos, utilizando-se os modelos de Margrabe e Lin.

O gráfico 34 mostra o resultado das volatilidades implícitas de RR_{CDS} para o mínimo de dois e oito ativos e, conclui-se que, assim como no caso dos RR_{CDS} de Brasil, a volatilidade calculada para o mínimo de oito ativos é significativamente menor do que para dois ativos, extraídas do prêmio de opção CTD. A volatilidade implícita de RR_{CDS} para o mínimo de dois ativos está representada na margem esquerda e, para o mínimo de oito ativos, na margem direita.

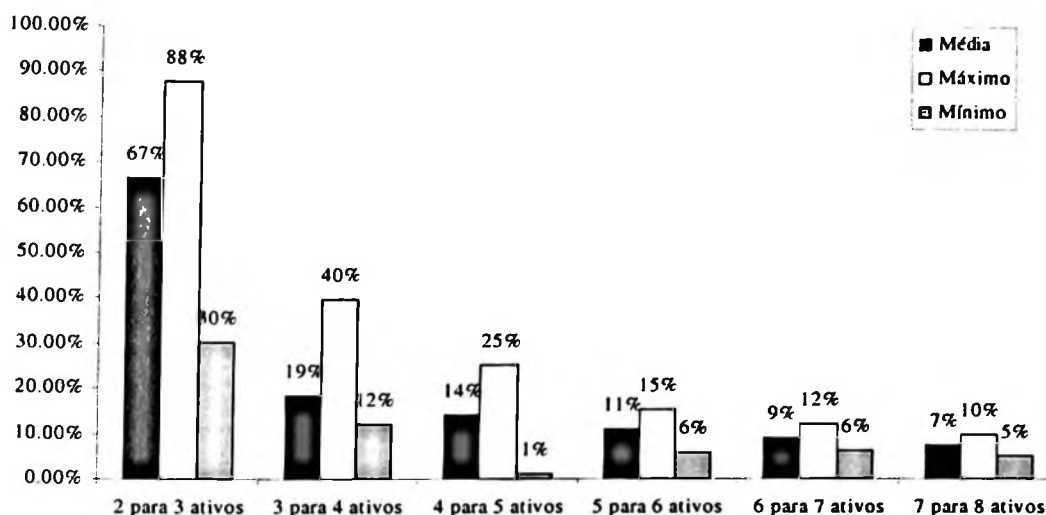
Gráfico 34: Volatilidades implícitas para o prêmio CTD do mínimo de dois e oito ativos



Assim como o gráfico 20, o gráfico 35 também ilustra o ganho percentual médio ao adicionar-se um ativo por vez no cálculo dessa volatilidade. Nesse caso, a volatilidade implícita calculada para o mínimo de três ativos foi em média 67% menor em relação ao mínimo de dois ativos, e assim sucessivamente. O benefício marginal médio para cada ativo adicionado ao modelo é bastante similar ao benefício calculado para as volatilidades

de RR_{CDS} de Brasil, apesar dos valores de mínimo e máximo calculados para a Turquia serem mais dispersos.

Gráfico 35: Benefício percentual de número de ativos



Os ativos selecionados para explicar as volatilidades de RR_{CDS} foram os mesmos índices genéricos escolhidos no caso brasileiro, o VIX e o EMBI Global, além de três índices específicos diretamente relacionados à Turquia, a volatilidade de câmbio implícita em contratos de opção de um mês, o índice de ações ISE⁽¹⁰⁾ e o EMBI Turquia.

Observando a tabela 11, conclui-se que os valores de R-quadrado são relativamente baixos para todas as variáveis, tendo seu máximo em torno de 19%, explicada pelo ISE. Os valores de R-quadrado não aumentam para números crescentes de ativos considerados no modelo de Lin. Da mesma maneira, as volatilidades explicativas atingem, no máximo, 44% de correlação com a volatilidade de RR_{CDS} .

(10) O *Istanbul Stock Exchange National 100*, conhecido como ISE, é um índice de ações do mercado turco e é composto por 100 diferentes empresas locais selecionadas por critérios pré-determinados.

Tabela 11: Regressão Linear da volatilidade de *recovery values* com ativos selecionados

| # Ativos | Variáveis explicativas - Vols Específicas | | | | | | | | |
|-------------|---|--------|---------|---------------------------|--------|---------|---------------------------------------|--------|---------|
| | TRL/US\$ Vol Implícita - 1 mês | | | ISE - Vol anual histórica | | | EMBI Turquia - Vol anual histórica | | |
| | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor |
| 2 | 2.9% | 19.7% | 0.0% | 14.0% | -37.4% | 0.0% | 4.7% | 21.7% | 0.0% |
| 3 | 4.7% | 24.6% | 0.0% | 19.2% | -43.8% | 0.0% | 4.0% | 20.0% | 0.0% |
| 4 | 4.3% | 23.7% | 0.0% | 19.4% | -44.0% | 0.0% | 3.7% | 19.4% | 0.0% |
| 5 | 4.1% | 23.2% | 0.0% | 19.1% | -43.7% | 0.0% | 3.7% | 19.4% | 0.0% |
| 6 | 4.0% | 22.9% | 0.0% | 18.8% | -43.3% | 0.0% | 3.8% | 19.5% | 0.0% |
| 7 | 3.9% | 22.7% | 0.0% | 18.4% | -42.9% | 0.0% | 3.9% | 19.7% | 0.0% |
| 8 | 3.9% | 22.6% | 0.0% | 18.1% | -42.6% | 0.0% | 4.0% | 19.9% | 0.0% |

| # Ativos | Variáveis explicativas - Vols Genéricas | | | | | |
|-------------|---|--------|---------|--------------------------------------|--------|---------|
| | VIX | | | EMBI Global - Vol anual histórica | | |
| | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor |
| 2 | 0.2% | -4.6% | 10.0% | 1.6% | -12.8% | 0.0% |
| 3 | 1.1% | -10.4% | 0.0% | 1.7% | -13.2% | 0.0% |
| 4 | 0.9% | -9.6% | 0.0% | 1.9% | -13.8% | 0.0% |
| 5 | 0.8% | -8.8% | 0.0% | 2.0% | -14.0% | 0.0% |
| 6 | 0.7% | -8.2% | 0.0% | 2.0% | -14.0% | 0.0% |
| 7 | 0.6% | -7.8% | 0.0% | 1.9% | -13.9% | 0.0% |
| 8 | 0.5% | -7.4% | 0.0% | 1.9% | -13.8% | 0.0% |

Conclui-se que, se for utilizada qualquer umas das variáveis acima para tentar estimar, independentemente, o prêmio da opção CTD, a probabilidade de subestimar esse prêmio é considerável, dado que as variáveis selecionadas apresentam baixo poder explicativo sobre a volatilidade de RR_{CDs} .

Sabendo-se que o prêmio da opção CTD é nulo até meados de 2002, uma vez que a diferença entre o basis tradicional limpo e o basis ajustado é negativa, foram rodadas regressões para as mesmas variáveis selecionadas considerando dados a partir de Janeiro de 2003. Os resultados seguem na tabela 12. Com isso, espera-se obter resultados melhores do que os apresentados na tabela 11.

Tabela 12: Regressão Linear da volatilidade de *recovery values* com ativos selecionados

| # Ativos | Variáveis explicativas - Vols Específicas | | | | | | | | |
|-------------|---|--------|---------|---------------------------|--------|---------|---------------------------------------|--------|---------|
| | TRL/US\$ Vol Implícita - 1 mês | | | ISE - Vol anual histórica | | | EMBI Turquia - Vol anual histórica | | |
| | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor |
| 2 | 11.5% | 34.2% | 0.0% | 36.3% | 60.3% | 0.0% | 30.7% | 55.4% | 0.0% |
| 3 | 14.2% | 38.0% | 0.0% | 38.2% | 62.0% | 0.0% | 30.1% | 54.9% | 0.0% |
| 4 | 14.8% | 38.7% | 0.0% | 39.3% | 62.7% | 0.0% | 30.5% | 55.2% | 0.0% |
| 5 | 15.1% | 39.2% | 0.0% | 40.1% | 63.3% | 0.0% | 31.1% | 55.8% | 0.0% |
| 6 | 15.3% | 39.4% | 0.0% | 40.7% | 63.8% | 0.0% | 31.7% | 56.3% | 0.0% |
| 7 | 15.4% | 39.6% | 0.0% | 41.2% | 64.2% | 0.0% | 32.2% | 56.7% | 0.0% |
| 8 | 15.6% | 39.8% | 0.0% | 41.5% | 64.4% | 0.0% | 32.6% | 57.1% | 0.0% |

| # Ativos | Variáveis explicativas - Vols Genéricas | | | | | |
|-------------|---|--------|---------|--------------------------------------|--------|---------|
| | VIX | | | EMBI Global - Vol anual histórica | | |
| | R2 | Correl | P-Valor | R2 | Correl | P-Valor |
| 2 | 19.6% | 44.2% | 0.0% | 26.8% | 51.8% | 0.0% |
| 3 | 22.6% | 47.6% | 0.0% | 27.3% | 52.3% | 0.0% |
| 4 | 23.3% | 48.3% | 0.0% | 27.9% | 52.8% | 0.0% |
| 5 | 24.0% | 49.0% | 0.0% | 28.6% | 53.5% | 0.0% |
| 6 | 24.4% | 49.4% | 0.0% | 29.3% | 54.1% | 0.0% |
| 7 | 24.8% | 49.7% | 0.0% | 29.8% | 54.6% | 0.0% |
| 8 | 25.0% | 50.0% | 0.0% | 30.2% | 54.9% | 0.0% |

Na tabela 12, observa-se que o R-quadrado máximo, obtido pela variável ISE, é da ordem de 41%, significativamente melhor do que os 19% anteriores (considerando todo o período). Além disso, a correlação também aumentou de 44% para o máximo de 64% para a mesma variável explicativa. Os melhores resultados foram apresentados para as volatilidades implícitas do mínimo de oito ativos.

Assim como nos testes feitos para Brasil, as variáveis específicas têm maior poder explicativo do que as variáveis genéricas, muito provavelmente por carregarem as idiosincrasias do país em questão melhor do que índices globais. Curiosamente no caso da Turquia, o índice de ações obteve melhores resultados do que o índice de títulos turcos (EMBI), apesar de ambos serem específicos.

Dessa maneira, o ISE será utilizado para apreçar o prêmio CTD embutido nos CDS *spreads*. Para isso, pode-se observar nos gráficos 36 e 37 as volatilidades e valores de RR_{CDS} reais comparados aos projetados pelo ISE.

Gráfico 36: Volatilidades reais (implícitas) de RR_{CDS} e valores projetados pelo ISE

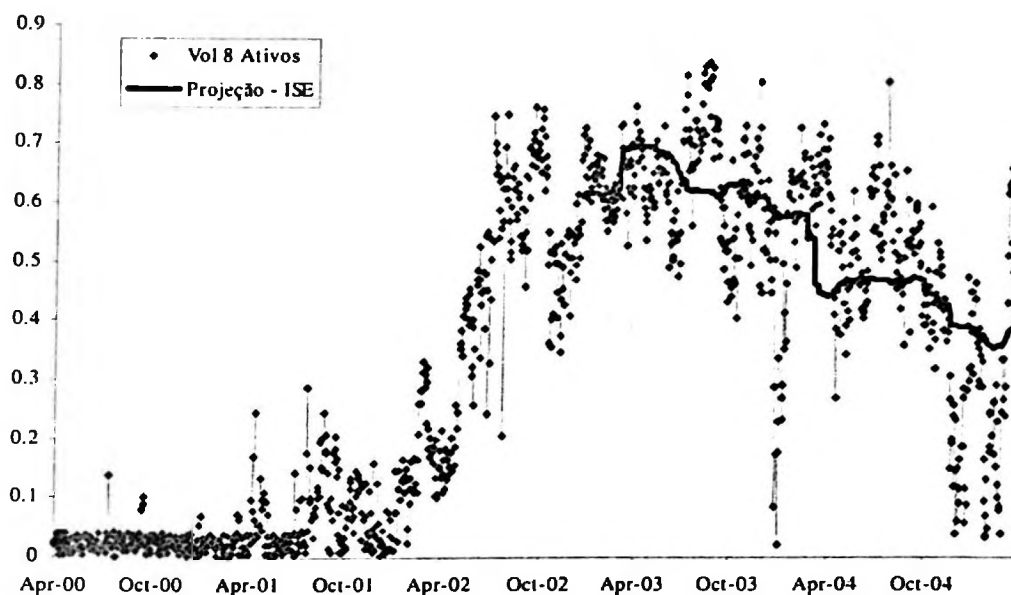
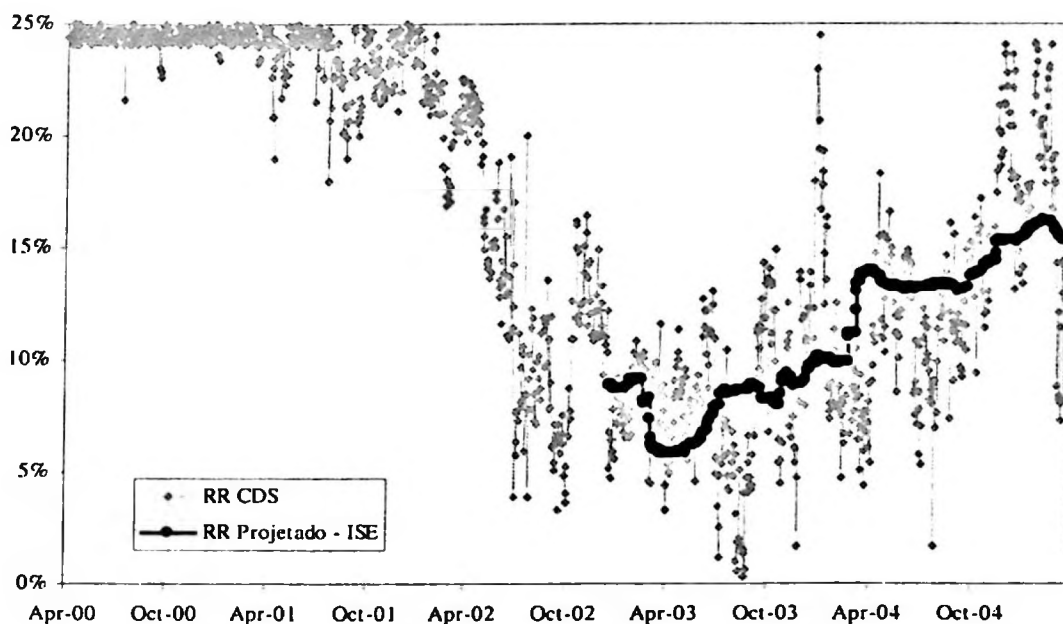


Gráfico 37: Valores Reais (implícitos) de RR_{CDS} e valores projetados pelo ISE

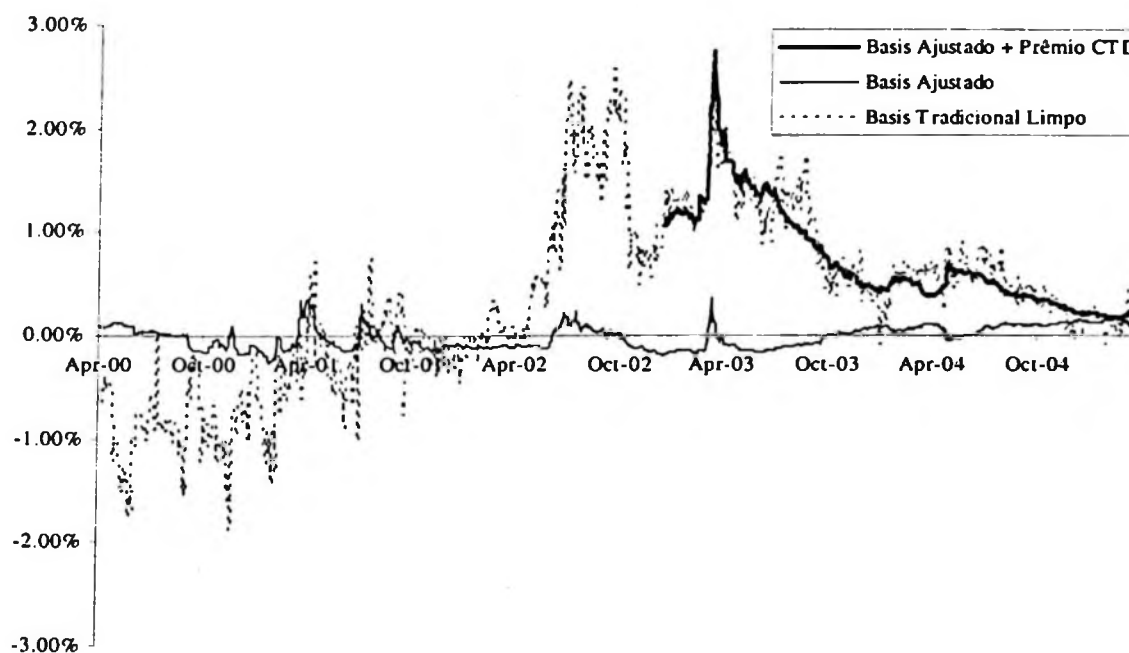


O prêmio da opção CTD, projetado pela volatilidade do ISE, é equivalente ao complementar de RR projetado a 25% (gráfico 37). Assumindo-se que essa volatilidade é uma boa aproximação para a volatilidade de RR_{CDS} , pode-se apreçar o prêmio da opção

CTD independentemente dos CDS spreads de mercado e calcular o quanto do basis pode ser explicado pela opção CTD. Para isso, deve-se recalcular o preço do *Turkey'09* a partir de *RR* projetado, independentemente, a ser considerado nos contratos de CDS.

O *spread* do *Turkey'09* recalculado pelo modelo de probabilidade de *default*, a partir de Janeiro de 2003, embute em seu prêmio todas as diferenças fundamentais, inclusive a opção CTD. O gráfico 38 ilustra o basis ajustado e o basis ajustado com o apreçamento da opção CTD. A diferença entre essas curvas representa somente o efeito da opção CTD.

Gráfico 38: Basis Ajustado e o prêmio da opção CTD



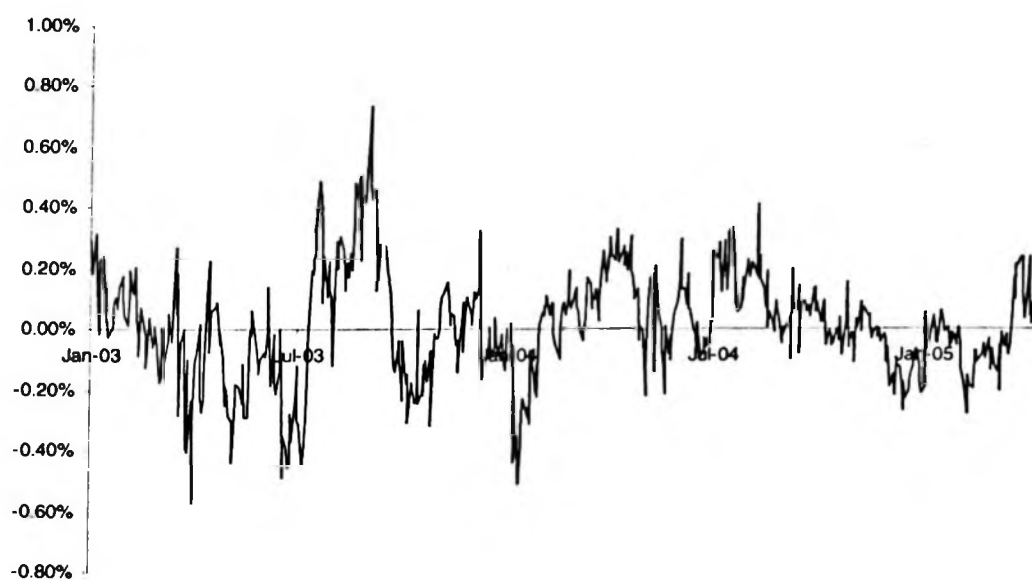
Observa-se que o prêmio ajustado somado ao prêmio CTD tem um bom poder explicativo do basis de mercado (tradicional).

Por fim, o gráfico 39 ilustra o basis não explicado por nenhum dos fatores fundamentais, calculado pela diferença entre o basis tradicional limpo e o basis ajustado

somado ao prêmio opção CTD. Vale ressaltar que esse cálculo foi feito para os dados a partir de Janeiro de 2003.

O basis residual deve ser explicado por fatores de mercado não apreçados pelo modelo apresentado nesse trabalho.

Gráfico 39: Basis Residual não explicado



6. CONCLUSÕES

Além de discutir a qualitativamente a relação entre dois instrumentos de risco de crédito, títulos e *Credit Default Swaps* (CDS), esse trabalho teve o objetivo de explicar as diferenças nos preços desses instrumentos por meio de um modelo de apreçamento de risco de crédito. No entanto, o maior desafio desse trabalho foi apresentar e testar um modelo de apreçamento para a *opção cheapest to deliver* (CTD), embutida nos *spreads* de mercado de CDS. Pode-se afirmar que os resultados obtidos foram bastante satisfatórios.

O primeiro objetivo desse trabalho foi discutir a relação existente entre um título e CDS. Foi provado, sob certas suposições, que a relação livre de risco entre um título e um CDS é equivalente à igualdade de seus *spreads* pagos acima da taxa de juros livre de risco. As suposições feitas dizem respeito à ausência de imperfeições de mercado, como excessos de oferta ou demanda, e de desigualdades contratuais, como preços diferentes de par ou prêmios de opção CTD.

O segundo objetivo foi de discutir, qualitativamente, os aspectos que influenciam os preços de mercado de títulos e CDS, afetando sua relação livre de risco. Dentre esses aspectos, os identificados como de maior importância são: o fato do preço do título ser diferente de par e a opção CTD embutida nos *spreads* de CDS. Ambos fatores geram diferentes riscos de crédito para o detentor de um título em comparação ao vendedor de um CDS e vice versa e, por isso, são geradores de basis entre esses instrumentos.

A fim de quantificar os principais fatores geradores de basis, esse trabalho aplicou um modelo de árvore binomial para o apreçamento de títulos e CDS, o que permitiu identificar as diferenças geradas por fatores fundamentais (inerentes aos contratos desses instrumentos), excluindo a opção CTD. Durante o período de estresse no Brasil no ano de 2002, esse modelo identificou que os fatores fundamentais explicaram, no caso de títulos e

CDS de Brasil, aproximadamente 58% do basis total entre títulos e CDS. Por outro lado, esse modelo apontou que praticamente não há basis gerado por fatores fundamentais para os instrumentos de Turquia, dado que os preços do título *Turkey*'09 ficaram em torno de par (\$100) durante todo o período.

Por fim, o último objetivo desse trabalho foi analisar a volatilidade implícita dos *recovery values* de CDS e, com base em ativos com volatilidades similares, apreçar independentemente a opção CTD. A volatilidade de ativos que têm relação direta com os países referenciados nos contratos de CDS, tem maior poder explicativo sobre a volatilidade dos *recovery values* do que ativos de referência global. No caso brasileiro, o EMBI Brasil apresentou um R-quadrado de 54% sobre a variável dependente enquanto o EMBI Global e o VIX apresentaram R-quadrado da ordem de 10%. Da mesma maneira, o R-quadrado apresentado pelo índice de ações local da Turquia (ISE) foi da ordem de 40%, o dobro apresentado pelos outros índices de mercado utilizados no trabalho. Ao apreçar o prêmio da opção CTD a partir desses ativos, esse trabalho identificou que, em períodos de crise, o prêmio dessa opção explica, aproximadamente, 35% do basis total entre títulos e CDS de Brasil. Já para instrumentos referenciados em Turquia, verificou-se que a opção CTD explica, em média, 90% do basis total, em concordância com o fato de que, praticamente, não há basis gerado por fatores fundamentais para esse país. Atualmente, o basis residual não explicado por fatores fundamentais, incluindo a opção CTD, é da ordem de 10% para Brasil e de 5% para Turquia.

A modelagem matemática apresentada pode ser facilmente implementada para análise do basis entre títulos e CDS por investidores desse mercado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] **BEATTIE, Jessica. Contagion in Latin America: an analysis of credit derivatives.** Duke University. March, 2000. 32 p.
- [2] **BLACK, F and SCHOLLES, M. J. The pricing of options and corporate liabilities.** Journal of Political Economy, 81, 637-54. 1973.
- [3] **BOYLE, P. P. Valuation of derivative securities involving several assets using discrete time methods.** Insurance: Mathematics and Economics, 9, 131-39. 1990.
- [4] **BOYLE, P. P. and TSE, Y. K. An algorithm for computing values of options on the maximum or minimum of several assets.** Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, 215-27. 1990.
- [5] **CHEN, Andrew and CONOVER, James and KENSINGER, John. Evaluating complex flexible processes as multiple switching options.** 31st Meeting of the European Working Group on Financial Modeling. November, 2002.
- [6] **CLARK, C. The greatest of a finite set of random variables.** Operations Research, 6, 145-62. 1961.
- [7] **Credit Default Swaps – Transferring corporate and sovereign credit risk.** Global Fixed Income Research. Merrill Lynch. October, 1998.

- [8] **Credit Derivatives: a primer.** Credit Derivatives and Quantitative Research. JP Morgan. London. January, 2005. 31 p.
- [9] **Credit Derivatives Definitions.** International Swaps and Derivatives Association (ISDA). <http://www.isda.org/>. Acesso em Março, 2005.
- [10] **Credit Derivatives Explained. Market, products and regulations.** Structured Credit Research. Lehman Brothers. March, 2001. 83 p.
- [11] **Credit Derivatives Handbook – Tools for the efficient management of credit risk.** Global Fixed Income Research. Merryll Lynch. February, 2000. 31 p.
- [12] **Credit Metrics Methodology.** JP Morgan. 1997.
- [13] DUFFIE, Darrell and GARLEANU, Nicolae. **Risk and valuation of Collateralized Debt Obligations (CDOs).** Stanford University. September, 2001.
- [14] **Emerging Markets Credit Derivatives Book.** Deutsche Bank. May, 2003. 53 p.
- [15] **Emerging Markets Credit Derivatives Workshop.** Deutsche Bank. May, 2004
- [16] **Explaining The Basis: cash versus default swaps.** Structured Credit Research. Lehman Brothers. May, 2001. 19 p.

- [17] GERBER, H. U. and SHIU, E. S. W. **Option pricing by Esscher transforms.** Transactions of the Society of Actuaries, XLVI, 99-140. 1994.
- [18] HULL, John and WHITE, Alan. **Valuing credit default swaps I: no counterparty default risk.** University of Toronto. April, 2000. 35 p.
- [19] JAMES, Barry. **Probabilidade: um curso em nível intermediário.** Rio de Janeiro. Maio, 1981. 299 p.
- [20] JOHNSON, H. **Options on the maximum or minimum of several assets.** Journal of Finance and Quantitative Analysis, 22, 277-83. 1987.
- [21] LIN, X. Sheldon. **Valuation of options on the maximum/minimum of multiple assets, discrete lookback options and equity-indexed annuities.** Department of Statistics & Actuarial Science. The University of Iowa. 26 p.
- [22] MARGRABE, W. **The value of an option to exchange one asset for another.** Journal of Finance, 33, 177-86. 1993.
- [23] MIKOSCH, Thomas. **Elementary stochastic calculus.** Department of Mathematics. University of Groningen. 1998. 212 p.
- [24] PACKER, Frank and ZHU, Haibin. **Contractual terms and CDS pricing.** BIS Quarterly Review. March, 2005.

[25] POLLACK, Emily. **Assessing the usage and effect of credit derivatives**. Harvard Law School. April, 2003. 60 p.

[26] RANCIERE, Romain. **Credit Derivatives in Emerging Markets**. IMF Policy Discussion Paper. September, 2001. 23 p.

[27] SKORA, Richard. **The Credit Default Swap**. Skora & Company Inc. 1998. 8 p.

[28] STULZ, Rene. **Options on the minimum or the maximum of two risky assets**. University of Rochester. February, 1982.

[29] SUNDARAM, Rangarajan K. **Credit-Derivative Products**. New York University. October, 2004. 71 p.

[30] **The JP Morgan Guide to Credit Derivatives – with contributions from the Risk Metrics Group**. Global Research. JP Morgan. 25 p.

APÊNDICES

1. Movimento Browniano Geométrico (Mikosch – 1998)

Dado o seguinte processo:

$$X_t = X_0 \cdot e^{(c-0.5\sigma^2)t + \sigma B_t}, \text{ onde } B = (B_t, t \geq 0) \text{ representa o Movimento Browniano}$$

padrão sendo:

- a) $B_0(w) = 0, \forall w$;
- b) Possui incrementos independentes e estacionários;
- c) $\forall t > 0, B_t \sim N(0, t)$;
- d) Possui trajetórias contínuas.

Nesse caso, $X_t = f(t, B_t)$.

Aplicando o Lema de Ito na função acima, obtém-se:

$$dX_t = \left[f_1(t, B_t) + \frac{1}{2} f_{22}(t, B_t) \right] dt + f_2(t, B_t) dB_t,$$

$$\text{onde } f(t, B_t) = f_0 \cdot e^{(c-0.5\sigma^2)t + \sigma B_t}$$

Cada parcela de dX_t foi calculada separadamente, sendo:

$$f_1(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t} = \left(c - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f(t, B_t)$$

$$f_2(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial B_t} = \sigma f(t, B_t)$$

$$f_{22}(t, B_t) = \frac{\partial^2 f}{\partial B_t^2} = \sigma^2 f(t, B_t)$$

Substituindo na equação de dX_t :

$$dX_t = \left[\left(c - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f(t, B_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 f(t, B_t) \right] dt + \sigma f(t, B_t) dB_t$$

$$dX_t = \left[\left(c - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) X_t + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t \right] dt + \sigma X_t dB_t$$

$$\boxed{\frac{dX_t}{X_t} = c dt + \sigma dB_t}$$

Logo, se $dX_t = cX_t dt + \sigma X_t dB_t$, o processo X_t é representado por:

$$\boxed{X_t = X_0 \cdot e^{(c-0.5\sigma^2)t + \sigma B_t}}$$

Definindo $t = 1$, temos:

$$X = X_0 e^{c-0.5\sigma^2 + \sigma B}, \text{ com } B \sim N(0,1).$$

2. A Transformação de Esscher (Gerber & Shiu – 1994)

Sejam N_1, N_2 variáveis aleatórias normais correlacionadas com médias θ_1, θ_2 e variâncias ξ_1^2, ξ_2^2 , respectivamente. O coeficiente de correlação é equivalente a ρ . A medida de probabilidade é denotada por $\Pr(A)$ para qualquer evento A . Para valores reais δ_1, δ_2 , a Transformação de Esscher com parâmetros δ_1, δ_2 da medida de probabilidade é definida como:

Para qualquer evento A , a probabilidade de A é:

$$\Pr\{A; \delta_1, \delta_2\} = \frac{E\{I(A)e^{\delta_1 N_1 + \delta_2 N_2}\}}{E\{e^{\delta_1 N_1 + \delta_2 N_2}\}}$$

Uma relação óbvia, porém importante é:

$$E\{e^{z_1 N_1 + z_2 N_2} I(A)\} = E\{e^{z_1 N_1 + z_2 N_2}\} \Pr\{A; z_1, z_2\}.$$

A Transformação de Esscher é discutida em detalhes em Gerber & Shiu (1994a, 1996b). Nesses papéis de trabalho, essa transformação é aplicada a vários problemas de opções americanas perpétuas.

Para calcular $E\{e^{N_1} I(N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2)\}$, escreve-se:

$$E\{e^{N_1} I(N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2)\} = E\{e^{N_1}\} \Pr\{N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2; 1, 0\}$$

É necessário identificar a distribuição de N_1, N_2 sob essa transformação específica.

Primeiramente, é identificada a função geradora de momento de N_1, N_2 .

$$E\{e^{z_1 N_1 + z_2 N_2}; 1, 0\} = \frac{E\{e^{(z_1+1)N_1 + z_2 N_2}\}}{E\{e^{N_1}\}} =$$

$$= e^{(\phi_1 + \xi_1^2)z_1 + (\phi_2 + \rho\xi_1\xi_2)z_2 + \frac{1}{2}(\xi_1^2 z_1^2 + 2\rho\xi_1\xi_2 z_1 z_2 + \xi_2^2 z_2^2)}$$

Logo, sob a Transformação de Esscher N_1, N_2 são normais bivariadas com média $\phi_1 + \xi_1^2, \phi_2 + \rho\xi_1\xi_2$, respectivamente. As variâncias e o coeficiente de correlação permanecem os mesmos. Com isso:

$$\Pr\{N_1 \geq a_1, N_2 \geq a_2; 1, 0\} = \Phi\left(\frac{\phi_1 + \xi_1^2 - a_1}{\xi_1}, \frac{\phi_2 + \rho\xi_1\xi_2 - a_2}{\xi_2}; \rho\right).$$

3. VIX

O VIX é um índice construído a partir das volatilidades implícitas de uma cesta de opções (tanto *calls* como *puts*) sobre alguns dos títulos mais relevantes operados na Bolsa de Opções de Chicago. Esse índice é uma média ponderada de volatilidades implícitas de opções de vários preços de exercício diferentes com vencimento nos próximos dois a três meses. Esse índice tende a subir com o mercado volátil e a descer com o mercado pouco volátil.

Devido a essas características, o VIX acabou transformando-se num indicador de sentimento de mercado. Fazer hedge de portfolios ativos em mercados emergentes com posições compradas em VIX tem sido bastante comum por parte dos investidores desse mercado. Dessa maneira, quando há uma piora do mercado, perdas provenientes de posições ativas em mercados emergentes são compensadas com ganhos em posições compradas em VIX, e vice-versa.

Gráfico 40: VIX histórico

