

"A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD)."

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE “MODELAGEM MATEMÁTICA EM
FINANÇAS”**

**ESTRUTURA A TERMO DE VOLATILIDADES E ESTRATÉGIAS DE
INVESTIMENTOS NO MERCADO DE RENDA FIXA**

MÁRCIO YUKIO UEJIMA

Orientador: Pedro Paulo Schirmer

**São Paulo
2002**

**ESTRUTURA A TERMO DE VOLATILIDADES E ESTRATÉGIAS DE
INVESTIMENTOS NO MERCADO DE RENDA FIXA**

MÁRCIO YUKIO UEJIMA

Dissertação apresentada à
Faculdade de Economia,
Administração e
Contabilidade e ao Instituto de
Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de
Mestre.

Orientador: Pedro Paulo
Schirmer

São Paulo
2002

AGRADECIMENTOS

Ao professor Pedro Paulo Schirmer pela valiosa orientação e colaboração em todas as fases dessa tese.

Ao Roberto, Caricatti, Cintra, Sérgio e todo o pessoal do time de investimentos do Citigroup Asset Management por todo o aprendizado que me proporcionaram nos últimos três anos e que de maneira direta ou indireta contribuíram muito para a conclusão desse trabalho.

Ao Pavel e Marcel pela fundamental colaboração na programação e calibração dos modelos.

Aos colegas de classe de mestrado pela ótima convivência e troca de experiências proporcionadas nesses dois anos de estudo.

Aos meus pais que sempre me incentivaram muito e a quem devo tudo o que consegui até hoje.

À Mailu pela compreensão, amor e carinho.

Ao Nakata - san

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

2. CONCEITOS INICIAIS SOBRE TAXAS DE JUROS

- 2.1 Introdução
- 2.2 A taxa de juros de desconto
- 2.3 A taxa de juros a termo ("*forward rates*")
- 2.4 A curva de juros
- 2.5 Duration
- 2.6 Convexidade
- 2.7 Derivativos de taxas de juros
 - 2.7.1 Futuros e swaps de taxas de juros
 - 2.7.2 Opções sobre títulos de renda fixa
 - 2.7.3 Opções de IDI

3. MODELOS DE TAXAS DE JUROS DE UM FATOR

- 3.1 Introdução
- 3.2 A equação de apreçamento de títulos de desconto
- 3.3 O prêmio de risco de mercado e o ajuste ao risco
- 3.4 Modelos afim como solução da equação de apreçamento
- 3.5 Modelo de Vasicek
- 3.6 Modelo de Ho & Lee
- 3.7 Modelo de Hull & White

4. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE UM FATOR DE HULL & WHITE

- 4.1 Introdução
- 4.2 Árvores de taxas de juros
- 4.3 Construção da árvore para o modelo de Hull & White
- 4.4 Apreçamento de derivativos de taxas de juros
- 4.5 Calibração do Modelo

5. MODELOS MULTIFATORIAS DE TAXAS DE JUROS

5.1 Introdução

5.2 A equação de apreçamento de títulos de desconto para n fatores

5.3 O modelo de dois fatores de Hull & White

5.3.1 O apreçamento dos títulos de desconto

6. IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DO MODELO DE DOIS FATORES DE HULL & WHITE

6.1 Introdução

6.2 Eliminando a dependência entre fatores

6.3 Construção da árvore para o modelo de dois fatores

6.4 Calibração do modelo

6.5 Comparação de resultados da calibração

7. VOLATILIDADES DAS TAXAS DE JUROS

7.1 Introdução

7.2 Volatilidades e a propriedade de Markov

7.3 Volatilidades no modelo de um fator de Hull & White

7.4 Volatilidades no modelo de dois fatores de Hull & White

8. ESTRATÉGIAS DE INVESTIMENTOS

8.1 Introdução

8.2 A inclinação da curva de juros

8.3 Estratégias de alocação de investimento

8.3.1 Operações de prêmios relativos (*"Intramarket relative trades"*)

8.3.2 Carregamento das posições descendo a curva de juros
(*"Rolling down the yield curve"*)

8.3.3 O prêmio de risco e a taxa livre de risco implícita na estrutura
a termo de juros

9. CONCLUSÕES FINAIS

BIBLIOGRAFIA

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Taxa de juros. Um conceito econômico simples de ser entendido, mas com uma dinâmica incrivelmente difícil de ser modelada, quando comparada a outros ativos financeiros. Ao contrário de uma ação, por exemplo, que possui apenas um preço, as taxas de juros costumam apresentar diversos preços distintos ao longo dos diferentes horizontes de tempo, ao mesmo tempo em que podem apresentar comportamentos distintos entre si. Responsável pela remuneração dos títulos de renda fixa, o nível das taxas de juros pode resultar em milhões de lucros ou prejuízos para as posições dos bancos e empresas, no momento em que mudam as expectativas em relação ao seu comportamento futuro. Um bom entendimento da dinâmica das taxas de juros, portanto, é fundamental para se tomar boas decisões de investimento entre as várias opções de produtos de renda fixa existente nos mercados financeiros.

As boas decisões de investimento tornam-se ainda mais importante na medida que vem ocorrendo um aumento substancial de negócios envolvendo o comportamento das taxas de juros no mercado financeiro mundial. Cada vez mais, novos produtos e estruturas são criados e negociados, envolvendo tanto títulos de renda fixa quanto derivativos de taxas de juros. Cada vez mais, as instituições financeiras estão se aperfeiçoando, tornando as arbitragens, ou mesmos as boas oportunidades de mercado, cada vez mais difíceis de serem observadas. E cada vez mais, pesquisadores acadêmicos estão estudando e analisando o comportamento das taxas de juros.

Diante desses fatos, muitos modelos para a estrutura a termo de taxas de juros vem sendo propostos na literatura acadêmica. Entre os modelos que serão analisados neste trabalho, podemos dividi-los entre os modelos de equilíbrio geral ("*general equilibrium models*") e os modelos livres de arbitragem ("*arbitrage-free models*"). Os modelos de equilíbrio geral geram curvas para os

títulos baseados nas expectativas dos investidores com a economia. Entre os modelos que se tornaram muito populares com a utilização dessa dinâmica para os juros podemos citar o modelo de Vasicek (1977), e o modelo de Cox, Ingersoll, Ross (CIR - 1985). Esses modelos, porém, são criticados pelo fato de as curvas de juros que eles produzem não replicarem a curva de juros observada no mercado. Essa inconsistência entre as curvas dos modelos de equilíbrio geral e as curvas de mercado tornaram os modelos livres de arbitragem cada vez mais utilizados. Ho-Lee (1986), introduziram um novo procedimento ao mostrar como um modelo de taxas de juros pode ser desenhado de maneira que seja automaticamente consistente com qualquer tipo de estrutura inicial de curva de juros. Esses resultados impulsionaram novos estudos de modelos livres de arbitragem, incluindo o modelo de Black, Derman, Toy (1990) e o modelo de Hull-White (1990) também conhecido como Vasicek estendido. Em 1992, Heath, Jarrow, Morton apresentam um modelo multifatorial generalizado consistente com a estrutura a termo de taxas de juros inicial e com qualquer estrutura a termo de volatilidade. Esse modelo gerou importantes resultados teóricos sobre a dinâmica das taxas de juros em processo ajustado ao risco, mas possui a desvantagem de ser não-Markoviano e, portanto, exige um processo de implementação computacional muito trabalhoso.

Dentro dos modelos de um fator estudados implementaremos para o caso do mercado brasileiro o modelo de Hull-White, que possui certas vantagens em relação aos demais como soluções analíticas para os parâmetros do processo e a maior facilidade e flexibilidades na implementação. Analisaremos a seguir modelos multifatoriais de taxas de juros e em particular o modelo de dois fatores de Hull-White. Implementaremos também esse modelo para o caso brasileiro e compararemos os resultados com os obtidos com o modelo de Hull-White de um fator.

A parte final desse estudo envolverá aspectos mais práticos ligados à particularidades do mercado brasileiro e com algumas necessidades e dificuldades na tomada de decisões, vivenciadas ao longo de oito anos de experiência no mercado financeiro. Trabalhando como operador de renda fixa em um banco de investimento e posteriormente como administrador de carteiras de renda fixa em um banco multinacional, presenciei várias mudanças no cenário econômico brasileiro assim como vários tipos de comportamentos das taxas de juros nas mais diferentes situações. A obtenção de preços para os títulos de renda fixa, assim como dos derivativos de taxas de juros, podiam se tornar mais complexas em ambientes de altas volatilidades, assim como análise do tipo “caro-barato” ao longo das diversas maturidades da curva de juros. Como ambientes voláteis e altas taxas de juros não foram situações raras no contexto local, as boas oportunidades de mercado surgiam com relativa frequência. No entanto, poucos participantes, também conhecidos como “*players*”, eram capazes de realmente aproveitá-las. E o que muitas vezes diferenciava a qualidade das decisões era um melhor conhecimento do comportamento de dois fatores de extrema importância ao analisarmos taxas de juros: a volatilidade e o prêmio de risco esperados. Logo, dedicaremos atenção especial a esses tópicos em capítulos a parte.

Portanto, o capítulo 7 será destinado para a discussão das volatilidades implícitas resultantes dos modelos calibrados enquanto que o capítulo 8 discorrerá sobre estratégias de investimentos nos títulos de renda fixa de desconto como consequência da análise dos prêmios de risco implícitos na estrutura a termo de juros para o caso brasileiro. Analisaremos como a volatilidade e o prêmio de risco se comportam em relação à mudanças no tempo e nas expectativas das taxas de juros livres de risco do mercado e como esses fatores afetam o formato da curva de juros.

O prêmio de risco, por estar incorporado ao retorno de um título de renda fixa, é consequência principalmente de três fatores: a maturidade, a qualidade de

crédito e a liquidez. Nesse estudo, porém, consideraremos que os retornos dos títulos de renda fixa de diferentes maturidades resultam de um mesmo emissor, sem risco de inadimplemento e com as mesmas características de liquidez. Além disso, como buscaremos analisar o comportamento das taxas puras de desconto (*“discount rates”*), para todos os efeitos, os títulos de renda fixa aqui analisados serão todos títulos sem pagamento de juros ao longo de sua vida, sendo apenas caracterizados como títulos de desconto, os mais comuns nas emissões pré-fixadas do Tesouro Nacional. A nomenclatura títulos pré-fixados e títulos de renda fixa então, salvo ressalva em contrário, serão os títulos com apenas um fluxo de pagamento, de valor igual a \$1 na sua maturidade.

CAPÍTULO 2: CONCEITOS INICIAIS SOBRE TAXAS DE JUROS

2.1 INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento de ativos que dependem do comportamento das taxas de juros costuma ser mais complicado do que o estudo de outros ativos como commodities ou ações. Isso ocorre porque existe toda uma estrutura a termo de taxas de juros, onde diversos fatores podem afetar o preço desses ativos, ao contrário dos preços de commodities ou ações que são explicados por um único número.

Nesse capítulo abordaremos brevemente os principais conceitos referentes às taxas de juros e o seu comportamento em diferentes maturidades, os títulos de renda fixa e as sensibilidades à mudanças nas taxas de juros e as características básicas de alguns derivativos existentes no mercado brasileiro. Alguns dos temas discutidos nesse capítulo serão discutidos em maiores detalhes nos capítulos seguintes, principalmente aqueles relacionados à curva de juros.

2.2 A TAXA DE JUROS DE DESCONTO

Supondo que temos um título sem pagamento de juros ao longo do tempo e com vencimento na data T , quando ele paga um principal, equivalente a \$1. No tempo t ele tem um valor $V(t, T)$. Aplicando-se uma taxa de retorno constante e continuamente composta entre t e T , $r(t, T)$, então \$1 pago pelo título no tempo T tem um valor presente $V(t, T)$ em t , onde

$$V(t, T) = e^{-r(t, T)(T-t)} \quad (2.1)$$

Segue então

$$r(t, T) = -\frac{\log V(t, T)}{T - t} \quad (2.2)^1$$

Observando agora o limite de $T \rightarrow t$, na equação (2.2) podemos definir a taxa de juros de curto prazo instantânea $r(t)$ como

$$r(t) = \lim_{t \rightarrow T} r(t, T) \quad (2.3)$$

Supondo agora um título que também paga P de principal em T , mas paga também juros, os cupons, em datas anteriores e também no vencimento T . O valor presente deste título, descontando todos os fluxos e o principal usando uma taxa de juros r , é então

$$V(t, T) = Pe^{-r_t(T-t)} + \sum_{i=1}^N C_i e^{r_i(T-t)} \quad (2.4)$$

onde N é o número de cupons e C_i o valor do cupom pago em t_i .

Um título que paga cupons pode ser analisado como uma carteira composta dos seguintes títulos: títulos de desconto, cada um com vencimento em cada vencimento de cupom e com o principal sendo igual aos cupons do título original, e um título de desconto com vencimento igual ao vencimento do título original.

¹ No caso de uma composição simples (ao invés da contínua) a taxa de juros definida acima equivale a

$$r(t, T) = -\frac{\frac{1}{V(t, T)} - 1}{T - t}$$

A taxa de desconto r neste caso, também é conhecida como a taxa interna de retorno.

2.3 A TAXA DE JUROS A TERMO (*FORWARD RATES*)

A taxa de juros *forward* $F(t, T, T+\Delta t)$ é a taxa observada através dos preços de mercado em uma data t para um período futuro de T a $T+\Delta t$, e é definida como

$$\frac{V(t, T + \Delta t)}{V(t, T)} = e^{[-F(t, T, T+\Delta t)\Delta t]}$$

$$F(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\log(V(t, T, T + \Delta t)) - \log(V(t, T))}{\Delta t} \quad (2.5)^1$$

Observando agora o limite $\Delta t \rightarrow 0$ na equação anterior

$$F(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\log(V(t, T + \Delta t)) - \log(V(t, T))}{\Delta t} = -\frac{\partial \log(P(t, T))}{\partial T} \quad (2.6)$$

ou seja, a taxa *forward* instantânea observada no mercado no tempo t depende apenas do preço do título de desconto com vencimento em T . Podemos analisar este resultado também como

$$\int_t^T d \log V(t, s) = - \int_t^T F(t, s) ds = \log(V(t, T)) - \log(V(t, t))$$

¹ No caso de uma composição simples (ao invés da contínua) a taxa de juros *forward* em t para um período discreto

entre T_1 e T_2 equivale a
$$F(t, T_1, T_2) = -\frac{\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} - 1}{T_2 - T_1}$$

mas como $V(t,t) = 1$ a equação acima resulta em

$$V(t,T) = e^{-\int_t^T F(t,s) ds} \quad (2.7)$$

ou seja, o preço de um título de desconto com vencimento em T é igual a integral sobre os vencimentos das taxas *forward* instantâneas observadas no mercado no tempo t .

A fim de realizarmos análises mais detalhadas sobre o conceito de taxas de juros observadas no mercado em certos períodos de tempo, devemos introduzir o conceito de curva de taxas de juros, também conhecida como a estrutura a termo das taxas de juros.

2.4 A CURVA DE JUROS

O conjunto das taxas de desconto para os diversos prazos entre $t=0$ até o último dia em que haja negociação de títulos ou contratos de taxa de juros é conhecido como curva de juros. A figura a seguir mostra alguns dos formatos que a curva de juros pode assumir.

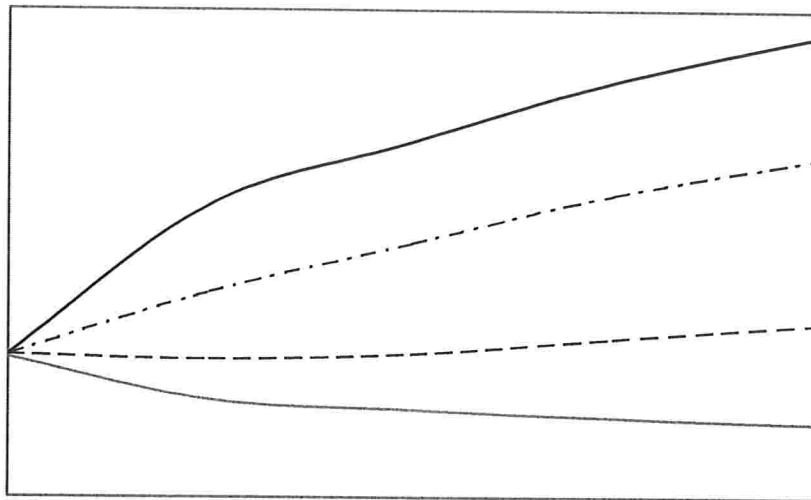


Figura 2.1 Possíveis formatos da estrutura a termo de taxas de juros

Para todas as análises e cálculos realizados nesse trabalho será assumido que os títulos de renda fixa terão todos a mesma qualidade de crédito e não estão sujeitos ao risco de inadimplimento (“*default*”), ou seja, não estudaremos possíveis diferenças (“*spreads*”) entre emissões de diferente qualidade de créditos.

Como na prática conseguimos obter apenas alguns valores das taxas de desconto para certos prazos com liquidez, a união destes pontos para a construção da curva deve ser realizada através de um método de interpolação. Esse processo de interpolação é, em geral, extremamente delicado e sensível à parametrização utilizada. Entre os métodos mais utilizados podemos citar a interpolação linear, a exponencial e utilização de *splines* quadrática e cúbica. No caso brasileiro, a falta de liquidez aludida acima, principalmente em prazos mais longos, implica em desafios maiores ainda e alvo de pesquisa científica, uma vez que, dependendo da interpolação utilizada, pode-se chegar a resultados bem distintos para a mesma maturidade como pode ser visualizado no gráfico abaixo:

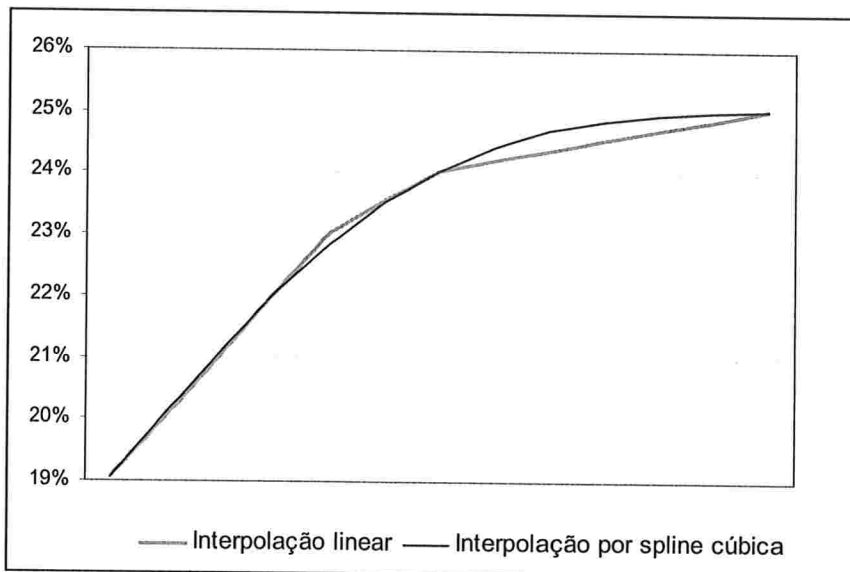


Figura 2.2: Exemplos de interpolação de pontos da curva de juros

2.5 DURATION

A duration de um título de renda fixa, ou de uma carteira de títulos, é uma medida da sensibilidade da variação do preço em função de variações da taxa de juros.

Derivando a equação (2.4) em relação a r temos

$$\frac{dV}{dr} = -(T-t)Pe^{-r(T-t)} - \sum_{i=1}^N C_i(t_i-t)e^{-r(t_i-t)} \quad (2.8)$$

Esta equação equivale ao valor da inclinação do preço/curva de juros. O valor

$$-\frac{1}{V} \frac{dV}{dr} \quad (2.9)$$

é conhecido como *modified duration*, que pode ser entendido como uma aproximação da elasticidade da carteira de títulos de renda fixa a movimentos das taxas de juros.

Para movimentos pequenos na curva de juros, a duration nos dá uma boa medida de mudança esperada no preço de um título com uma mudança no nível das taxas de juros. Para movimentos maiores, porém, uma carteira com vários títulos de desconto de diferentes maturidades necessita levar em consideração termos de ordens maiores em uma análise de sensibilidade.

2.6 CONVEXIDADE

A expansão da série de Taylor de V resulta em

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dr} \Delta r + \frac{1}{2V} \frac{d^2V}{dr^2} (\Delta r)^2 + O((\Delta r)^3),$$

onde Δr é uma mudança na curva de juros.

Derivando novamente a equação (2.8) temos

$$\frac{d^2V}{dr^2} = (T-t)^2 P e^{-r(T-t)} + \sum_{i=1}^N C_i (t_i - t)^2 e^{-y(t_i-t)} \quad (2.10)$$

e a convexidade é

$$\frac{1}{V} \frac{d^2V}{dr^2} \quad (2.7)$$

A importância da convexidade em uma carteira de títulos, também é notada quando movimentos não paralelos na curva de juros ocorrem. Se uma carteira de renda fixa estiver com uma exposição de duration igual a zero, mas com posições ativas e passivas em taxas pré-fixadas com diferentes vencimentos, esta carteira estará sujeita a riscos de convexidade. Caso a curva de juros apresente movimentos mais sutis que não somente um movimento paralelo¹, esta carteira de renda fixa poderá apresentar resultados bem distintos do que se esperaria em uma carteira duration neutra, onde esta diferença tende a aumentar conforme maior o movimento nas taxas futuras ou quanto maior a distância (“gap”) entre as posições ativas e as posições passivas.

2.7 DERIVATIVOS DE TAXAS DE JUROS

Os derivativos de taxas de juros são instrumentos cujos *payoffs* são dependentes de alguma maneira, do nível das taxas de juros. Nos últimos anos, os derivativos de taxas de juros vem sendo cada vez mais negociados tanto em mercados organizados, como em mercados de balcão, juntamente com a criação de novos produtos e estruturas. Dado a maior dificuldade no apreçamento e no *hedging* destes contratos, em comparação com os derivativos de renda variável ou de taxas de câmbio, novos modelos e métodos vem sendo cada vez mais estudados e desenvolvidos.

Nesta seção discorreremos brevemente sobre alguns dos derivativos de taxas de juros existentes no mercado brasileiro. Como uma apreçamento mais detalhada de derivativos não é o objetivo principal deste trabalho, analisaremos apenas suas principais características e suas contribuições na calibragem de modelos.

¹ movimentos do tipo: steepening, flattening ou curvature.

2.7.1 FUTUROS E SWAPS DE TAXAS DE JUROS

Os futuros de taxas de juros negociados na BM&F, também conhecidos com DI futuro, são contratos onde o investidor assume uma posição comprada ou vendida em uma taxa pré-determinada, a taxa de desconto ou taxa spot, geralmente com vencimento mensal até três meses e vencimento trimestral a partir de três meses. Os ajustes são diários e são calculados na diferença entre a variação da posição pré-fixada e o CDI (certificados de depósitos interfinanceiros) de um dia. Por possuírem uma boa liquidez, servem como base para a construção da curva de juros principalmente nos prazos mais curtos.

Já os swaps de taxas de juros são contratos onde duas partes entram em um acordo de troca de pagamentos de taxas de juros, em um certo valor por um período pré-determinado. São negociados no mercado de balcão e geralmente os que possuem mais liquidez são os prazos mais longos (a partir de seis meses). Não há ajustes diários, com a liquidação financeira ocorrendo apenas no vencimento do contrato, em função da diferença entre os retornos do indexador que remunera o valor nominal ativo e o indexador que remunera o valor nominal passivo. No caso brasileiro estes indexadores geralmente são o CDI contra uma taxa pré-fixada.

2.7.2 OPÇÕES SOBRE TÍTULOS DE RENDA FIXA

Uma opção sobre um título é semelhante às opções observadas no mercado de ações exceto pelo fato de o ativo ser um título com vencimento pré-definido, ou seja, uma opção sobre um título deve vencer em uma data T_1 que seja menor que o vencimento T_2 deste título de renda fixa, objeto da opção. As opções podem ser tanto européias como americanas.

2.7.3 OPÇÕES DE IDI

As opções de IDI são opções de compra e venda de taxas de juros negociadas na BM&F e são as opções mais líquidas atualmente no mercado brasileiro de renda fixa. Essa opções possuem certas peculiaridades que a diferenciam das opções de taxas de juros encontradas nos mercados internacionais.

O objeto da opção é o Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia, também conhecido como IDI, cujo valor inicial era de 100.000 no dia 03/01/2000, e é ajustado conforme a fórmula:

$$IDI_t = IDI_{t-1} \left(\frac{i_{t-1}}{100} + 1 \right)$$

onde:

IDI_t é o valor do IDI na data t

IDI_{t-1} é o valor do IDI na data $t-1$

i_{t-1} é a taxa média de Depósitos Interfinanceiros de um dia, também conhecido como CDI, referente ao dia anterior, calculada pela Cetip e expressa em percentual ao dia (taxa efetiva ao dia).

Logo no vencimento da opção na data T , o valor do IDI será o equivalente ao valor do IDI na data de início da operação, acrescidos dos valores diários do CDI até a data $T-1$.

$$IDI_T = IDI_t \cdot e^{\int_t^{T-1} CDI_s ds}$$

Como essas opções são as únicas que apresentam uma série histórica considerável no mercado brasileiro de opções, elas serão utilizadas para a calibração dos modelos implementados. Essa série histórica, porém, deixa muito a desejar quando comparadas com as séries de opções de juros no mercado americano. Geralmente os negócios são concentrados em um único vencimento

e com poucas séries (*strikes*) negociadas. Existem períodos de tempo em que os negócios foram muito pequenos inviabilizando a utilização desses períodos para calibração. Outro problema para uma boa calibração decorre do fato de os preços obtidos em um determinado dia podem ter sido obtidos em horários diferentes, e conseqüentemente com curvas de juros distintas, em função da alta volatilidade dentro de um mesmo dia (*intra-day*) no mercado brasileiro de juros. Como não possuímos os valores das curvas de juros no momento em que essas opções foram negociadas, utilizaremos a curva de fechamento do dia. Todos esses fatores nos levam a tomar muito cuidado na utilização indiscriminada de todos os valores da série histórica na calibração. Por ser preferível não utilizar um dado ruim, realizaremos alguns processos de filtragem nos dados obtidos com as opções de IDI fornecidas pela BM&F obtendo menos resultados, porém, mais confiáveis.

CAPÍTULO 3 – MODELOS DE TAXAS DE JUROS DE UM FATOR

3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, assumiu-se que as taxas de juros são constantes ou uma função conhecida em relação ao tempo. Na prática, porém, este comportamento não é necessariamente observado, o que exige uma modelagem mais complexa para o comportamento das taxas de juros em função do tempo (“spot rates”).

Assumindo que não conseguimos realmente prever o valor das taxas de juros no futuro, é natural que modelemos isto através de um modelo probabilístico. Neste capítulo serão apresentados modelos de taxas de juros que utilizam uma única fonte de incerteza, a taxa de juros de curto prazo. Mudanças nas taxas de juros de todas as demais maturidades então, ocorrerão em função de mudanças nesta taxa de curto prazo.

Esta taxa de juros de curto prazo que será modelada, porém, é uma quantidade sem um conceito claramente definido, devendo ser entendida como a taxa de um título de maturidade infinitesimal. Na prática, porém, deve-se utilizar esta quantidade como uma taxa de juros de um título com liquidez de curto prazo. Apesar de títulos com um dia de prazo existirem, eles dificilmente podem servir como um guia para o comportamento das demais taxas de juros. Isso ocorre do fato de esta taxa geralmente ser definida por autoridades monetárias e não pelas leis de oferta e demanda de mercado, não tendo influência significativa na dinâmica das taxas de juros ao longo da curva. No caso brasileiro, por exemplo, variações da taxa CDI de um dia raramente explicam variações ocorridas nas taxas pré-fixadas ao longo da curva de juros. Nos modelos aplicados nos mercados internacionais, costuma-se utilizar como taxas de curto prazo as taxas de um mês como a Libor, Eurodolar ou a taxa de um título do Tesouro norte-americano de curto prazo.

3.2 A EQUAÇÃO DE APREÇAMENTO¹ DE TÍTULOS DE DESCONTO

Quando as taxas de juros são estocásticas, um título de desconto terá seu preço definido na forma $V(r_t, t, T)$. Apesar de muitos agentes de mercado utilizarem uma certa probabilidade própria P para apreçar os títulos de renda fixa, existe uma medida de probabilidade ajustada ao risco Q , para a qual a taxa de juros r_t segue um processo Markoviano do tipo:

$$dr_t = u(t, r)dt + w(t, r)dW_t \quad (3.1)$$

onde os valores $u(r, t)$ e $w(r, t)$ determinam o comportamento da taxa de juros de curto prazo r . A interpretação e a análise na escolha destas funções serão detalhadas nos próximos tópicos. Então, os valores de mercado dos títulos com desconto são iguais a:

$$V(t, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right] \quad (3.2)$$

Utilizaremos a equação anterior para derivar uma equação parcial diferencial para o preço de um título usando argumentos similares a aqueles usados na derivação da equação de Black-Scholes. No apreçamento de títulos, porém, existe um problema que o torna mais difícil que o apreçamento de uma opção, uma vez que não existe um ativo a ser com a utilização de um derivativo. O ativo em questão o título de renda fixa é um derivativo de nossa variável independente r . A única forma de construirmos uma carteira livre de risco é

¹ Os leitores podem estar mais familiarizados com a palavra precificação, mas como essa palavra não foi encontrada em dicionários da língua portuguesa, utilizaremos os derivados da palavra apreçar.

“hedgeando” um título com outro título de vencimento diferente. Dado isso, temos a seguinte proposição:

Proposição: hedging

Dados dois títulos de desconto com maturidades T_1 e T_2 e preços correspondentes $V_1 = V(t, T_1)$ e $V_2 = V(t, T_2)$, uma carteira com uma posição comprada de um título V_1 e uma posição vendida em $-\Delta$ de V_2 :

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2$$

estará “hedgeada” somente se os preços dos títulos V respeitarem a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \quad (3.3)$$

Prova:

A variação infinitesimal desta carteira, aplicando-se o Lema de Itô é dada por

$$d\Pi = \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{\partial V_1}{\partial r} dr + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} dt - \Delta \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} dt + \frac{\partial V_2}{\partial r} dr + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} dt \right) \quad (3.4)$$

Agrupando-se os termos em dt e dr

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \Delta \frac{\partial V_2}{\partial t} + \Delta \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) dt + \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} + \Delta \frac{\partial V_2}{\partial r} \right) dr \quad (3.5)$$

Escolhendo-se

$$\Delta = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}}{\frac{\partial V_2}{\partial r}} \quad (3.6)$$

Elimina-se o termo incerto, uma vez que torna o coeficiente dr igual a zero. Substituindo-se na equação (3.5) temos então

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt \quad (3.7)$$

Utilizando-se princípios de não-arbitragem, o retorno da carteira deve ser igual ao retorno de um ativo livre de risco, que neste caso é justamente a taxa de juros de curto prazo

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left(V_1 - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} \right) V_2 \right) dt \quad (3.8)$$

Igualando-se os termos de (3.7) e (3.8) e agrupando termos de V_1 e V_2 obtemos

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt = r \left(V_1 - \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} \right) V_2 \right) dt$$

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2}{\frac{\partial V_2}{\partial r}} \quad (3.9)$$

Esta equação apresenta duas variáveis porém podemos perceber que a função do lado esquerdo depende exclusivamente de T_1 enquanto que a função do lado direito depende exclusivamente de T_2 . A única maneira de isto ser possível é o caso onde ambos os lados são independentes da data de vencimento. Temos então um caso geral

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} = g(r,t) \quad (3.10)$$

para uma função $g(r,t)$. Definindo esta função como

$$g(r,t) = w(r,t)\lambda(r,t) - u(r,t) \quad (3.11)$$

para uma dada função $u(r,t)$ e uma função diferente de zero $w(r,t)$ isto é sempre possível. A função $\lambda(r,t)$ é conhecida como o prêmio de risco de mercado e será analisada em detalhes no próximo sub item.

Substituindo na equação (3.10) temos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

que é a equação de apreçamento um título V , mostrada em (3.3).

Para acharmos uma solução única para a equação acima (3.3) precisamos impor uma condição final e duas condições de contorno. A condição final corresponde ao *payoff* do título no vencimento e que para um título de desconto $V(r,t,T)$ é igual a 1. As condições de contorno dependem das características das

funções $u(r,t)$ e $w(r,t)$ e serão discutidas quando discutirmos as especificidades dos modelos de taxas de juros de um fator.

3.3 O PRÊMIO DE RISCO DE MERCADO E O AJUSTE AO RISCO

Analisaremos agora o sentido econômico da função $\lambda(r,t)$. Assuma que um investidor possua uma posição comprada em um título de desconto com vencimento T . Em um determinado período de tempo dt , este título muda de valor segundo a equação estocástica

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + u \frac{\partial V}{\partial r} \right) dt + w \frac{\partial V}{\partial r} dW_t \quad (3.12)$$

Da equação (3.10) temos que o termo em dt pode ser reescrito como

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + u \frac{\partial V}{\partial r} = w\lambda \frac{\partial V}{\partial r} + rV \quad (3.13)$$

e substituindo em (3.12)

$$\frac{\partial V}{\partial t} - rV dt = w \frac{\partial V}{\partial r} (dW_t + \lambda dt) \quad (3.14)$$

A presença do termo browniano dW evidencia que esta posição em um título de desconto com vencimento T não é um investimento livre de risco. O termo determinístico no lado direito da equação pode então ser interpretado como o retorno em excesso acima da taxa livre de risco necessário para se assumir um certo nível de risco, ou seja, o investidor ao correr um risco superior tem seu investimento com retorno aumentado em λdt , proporcional ao aumento de dW . Esta é a razão da função λ ser conhecida como prêmio de risco do mercado.

3.4 MODELOS AFIM DE UM FATOR COMO SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE APREÇAMENTO.

Um modelo afim de taxas de juros possui a propriedade de que os seus fatores de desconto, ou equivalentemente títulos de desconto com principal igual a 1, são funções exponenciais de um processo de difusão.

No caso de um processo com uma variável aleatória os títulos de desconto de um modelo afim são escritos na forma

$$V_t = V(r_t, t, T) = e^{A(t,T) - r_t B(t,T)} \quad (3.15)$$

Para mostrarmos que a equação acima é solução da equação de apreçamento (3.3), primeiramente calculemos as seguintes derivadas de (3.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t} r \right) e^{A-rB} \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= -B e^{A-rB} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= B^2 e^{A-rB} \end{aligned}$$

e substituindo na equação (3.10) obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 B^2 - (u - \lambda w) B - r = 0 \quad (3.16)$$

com A e B funções de t e T e u e w funções de r e t . Derivando (3.16) em relação a r

$$-\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}B^2 \frac{\partial}{\partial r}(w^2) - B \frac{\partial}{\partial r}(u - \lambda w) - 1 = 0$$

e derivando novamente em relação a r e dividindo por B obtemos

$$\frac{1}{2}B \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w^2) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(u - \lambda w) = 0$$

onde apenas B é função de T . Logo temos

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(w^2) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(u - \lambda w) = 0$$

com as funções w e $u - \lambda w$ podendo assumir, por exemplo, as formas

$$w(r, t) = \sqrt{\alpha(t)r + \beta(t)} \quad (3.17)$$

$$u(r, t) - \lambda(r, t)w(r, t) = \theta(t) - a(t)r \quad (3.18)$$

Estas relações foram escolhidas de maneira que, variando-se os parâmetros α , β , θ e a , obteremos diferentes modelos para o apreçamento dos títulos de desconto através da equação afim (3.15).

Substituindo agora as relações (3.17) e (3.18) na equação (3.16) obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha(t)rB^2 + \frac{1}{2}\beta(t)B^2 - \theta(t)B + a(t)rB - r = 0$$

e separando os termos em r obtemos as seguintes equações para A e B :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \theta(t)B - \frac{1}{2}\beta(t)B^2 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2}\alpha(t)B^2 + a(t)B - 1 \quad (3.20)$$

A fim de satisfazer a condição final de $V(r, T, T) = 1$ precisamos ter que $A(T, T) = 0$ e $B(T, T) = 0$.

A seguir especificaremos os principais modelos afim de um fator com diferentes soluções para as equações acima.

3.5 MODELO DE VASICEK

O modelo de Vasicek apresenta as formas apresentadas em (3.17) e (3.18) sendo $\alpha = 0$, $\beta > 0$ e os demais parâmetros independentes do tempo. Substituindo os parâmetros em (3.13) temos

$$dr = (\theta - ar)dt + \beta^{1/2}dX \quad (3.21)$$

e podemos observar que este modelo possui a característica de reversão à média através do componente a , para um nível médio θ/a , o que é uma boa propriedade, mas as taxas de juros ainda podem ser negativas o que não é desejável em um modelo de taxas de juros, pois taxas de juros negativas não possuem um significado econômico¹.

A fórmula de apreçamento de um título de desconto neste modelo é igual a

¹ Com exceções a algumas situações patológicas como na Suíça na década de 60, e os juros próximos a zero no Japão.

$$V(r,t,T) = e^{A(t,T) - rB(t,T)}$$

e obtemos os valores de A e B substituindo os parâmetros de (3.21) nas equações (3.19) e (3.30):

$$B(t,T) = \frac{1}{\gamma} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad (3.22)$$

$$A(t,T) = \frac{1}{a^2} (B(t,T) - T + t) \left(\theta a - \frac{1}{2} \beta \right) - \frac{\beta B(t,T)^2}{4a} \quad (3.23)$$

3.6 MODELO DE HO & LEE

No modelo de Ho & Lee temos que $\alpha = a = 0$, $\beta > 0$ e constante e θ é uma função do tempo

$$dr = \theta(t)dt + \beta^{1/2}dX \quad (3.24)$$

como a volatilidade é constante podemos reescrever o modelo assumindo como σ o valor da volatilidade

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dX \quad (3.25)$$

Este foi o primeiro modelo de não-arbitragem para a curva de juros, o que significa que a função $\theta(t)$ calibra o modelo de maneira que os preços para as taxas de desconto do modelo são exatamente iguais aos de mercado, (*“yield curve fitting”*). Entre as suas desvantagens estão os fatos de não existir a reversão à média e as taxas de juros poderem ir facilmente abaixo de zero.

A função $\theta(t)$ responsável pela entrada dos preços exatos de mercado na calibração de preços é definida neste modelo como

$$\theta(t) = \frac{dF(0,T)}{dt} + \sigma^2 t \quad (3.26)$$

Neste modelo a solução para a equação de apreçamento dos títulos (3.3) é

$$V(r,t,T) = e^{A(t,T) - rB(t,T)} \quad (3.27)$$

onde das equações (3.19) e (3.26) temos que

$$A = \log \frac{V(0,T)}{V(0,t)} + (T-t)F(0,t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T-t)^2 \quad (3.28)$$

3.7 MODELO DE HULL & WHITE

Também conhecido como modelo Vasicek estendido, o modelo de Hull & White incorpora ao modelo de Vasicek um parâmetro dependente do tempo.

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dX$$

com a função $\theta(t)$ sendo determinada a partir da curva de juros inicial e a um componente de velocidade de reversão à média da taxa r , para um nível médio θ/a , o qual varia ao longo do tempo. Além da componente de tendência, há uma componente estocástica de desvio padrão constante σ resultando em uma volatilidade $v(t,T)$ dos preços dos títulos de desconto iguais a

$$v(t,T) = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(T-t)}]$$

CAPÍTULO 4: IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE UM FATOR DE HULL & WHITE

4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foram apresentados modelos de taxas de juros de um fator, mas apenas com embasamento teórico. Buscando proporcionar uma visualização mais clara das aplicações práticas de um modelo de taxas de juros, apresentaremos neste capítulo uma implementação prática proposta por John Hull e Alan White através da construção de árvores trinomiais. Ilustraremos como a construção da árvore é realizada e como o processo de reversão à média e a curva de mercado são incorporados na implementação, em um processo realizado em dois estágios. Mostraremos também como as opções de IDI poderão ser apreçadas através do modelo e como a calibração dos parâmetros foi realizada, utilizando-se os dados passados.

4.2 ÁRVORES DE TAXAS DE JUROS

Uma árvore de taxa de juros é uma representação discreta do processo estocástico para a taxa de juros de curto prazo ao longo do tempo, utilizando-se um intervalo Δt para cada período de tempo na construção da árvore.

Para a modelagem do comportamento de taxas de juros, torna-se mais conveniente a utilização de uma árvore trinomial ao invés de uma binomial. A maior vantagem da utilização da árvore trinomial decorre do fato da existência de um grau extra de liberdade, tornando mais fáceis as representações de características específicas das taxas de juros como a reversão à média.

Hull e White propuseram variações às configurações tradicionais de representação da árvore trinomial. Além da representação mais comum "1 subida / mesmo nível / 1 descida", podem ser utilizadas também as representações "2 subidas / 1 subida / mesmo nível" e "mesmo nível / 1 descida / 2 descidas" quando a taxa de juros se encontra em um nível muito baixo ou muito alto, facilitando a incorporação da reversão à média na construção da árvore trinomial, como mostrado abaixo.

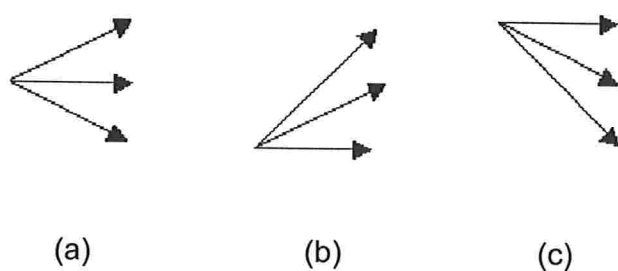


Figura 4.1: possíveis representações para a construção da árvore trinomial.

4.3 CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE PARA O MODELO DE HULL & WHITE

Em um artigo publicado em 1994, John Hull e Alan White apresentaram um procedimento robusto de dois estágios para construção de árvores trinomiais para representar modelos de taxas de juros de um fator. A seguir implementaremos este procedimento para a calibração do modelo Hull & White de um fator e analisaremos os resultados práticos obtidos.

4.3.1 PRIMEIRO ESTÁGIO

Como visto no capítulo anterior, o modelo de Hull & White sugere que o comportamento das taxas de juros segue o seguinte processo:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz \quad (4.1)$$

onde a e σ são constantes e a função $\theta(t)$ determinada a partir da estrutura a termo inicial, segundo a fórmula:

$$\theta(t) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (4.2)$$

Conforme a especificação de $\theta(t)$ acima, o modelo projeta que a taxa de curto prazo possui uma tendência igual à inclinação da curva de juros a termo inicial, e sempre que a taxa de curto prazo desviar da taxa de juros inicialmente projetada pela curva a termo, a taxa de curto prazo tenderá a reverter-se à taxa a termo projetada inicialmente com velocidade “ a ”.

O primeiro estágio da construção da árvore trinomial é definirmos uma variável auxiliar r^* , de valor inicial igual a 0 e distribuição normal, a qual segue um processo estocástico similar ao de r , mas cujo nível médio de reversão é 0 ao invés de $\theta(t)$:

$$dr^* = -ar^* dt + \sigma dz \quad (4.3)$$

Como o processo de r^* é simétrico ao redor de 0, o objetivo inicial é a construção de uma árvore auxiliar mais simples para r^* , com os nós igualmente espaçados, e posteriormente alterá-la para a variável r , através do ajuste da árvore auxiliar segundo a condição inicial da curva de juros. Dizemos que o processo r^* define a espinha dorsal da árvore

Temos ainda para este processo que o valor esperado de $r^*(t + \Delta t) - r^*(t)$ é igual a $-ar^* \Delta t$ e sua variância $\sigma^2 \Delta t$.

Para efeitos de minimização de erros de construção da árvore, Hull e White mostram que uma boa escolha para o espaçamento entre as taxas de juros na árvore de juros é

$$\Delta r = \sigma \sqrt{3\Delta t}$$

Esta relação origina-se do fato de que, em cada nó, a curtose da distribuição também é igual a distribuição Gaussiana e igual a 3. Como nomenclatura, estabelece-se que o nó (i, j) corresponde ao nó onde $t = i\Delta t$ e $r^* = j\Delta r$. Também define-se um valor máximo j_{\max} para j , a partir do qual a ramificação de árvore seguinte se altera para um tipo "mesmo nível / 1 descida / 2 descidas" ao invés de "1 subida / mesmo nível / 1 descida". Da mesma forma, define-se valor mínimo j_{\min} para j , a partir do qual a ramificação de árvore seguinte se altera para um tipo "2 subidas / 1 subida / mesmo nível" ao invés de "1 subida / mesmo nível / 1 descida".

Hull e White também demonstram que, para que as probabilidades de cada um dos três ramos que partem de cada nó tenham probabilidades positivas, e para que o cálculo computacional seja o mais eficiente possível, j_{\max} deve ser o menor inteiro maior que $0,184/(a\Delta t)$ e $j_{\min} = -j_{\max}$.

Define-se agora, as probabilidades em que cada um dos três ramos parte de cada nó como p_u , p_m e p_d e são escolhidas de forma a serem consistentes com a esperança e a volatilidade da variação Δr^* ao longo do próximo período Δt . Com a terceira condição de que a soma das três probabilidades é igual a 1, chega-se a um sistema de 3 equações a 3 incógnitas.

Para a ramificação do tipo "1 subida / mesmo nível / 1 descida", o sistema de equações é:

$$\begin{cases} p_u \Delta r - p_d \Delta r = -aj \Delta r \Delta t \\ p_u \Delta r^2 + p_d \Delta r^2 = \sigma^2 \Delta t + a^2 j^2 \Delta r^2 \Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d = 1 \end{cases}$$

Utilizando $\Delta r^2 = 3\sigma^2 \Delta t$, a solução do sistema acima é:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - aj \Delta t}{2}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + aj \Delta t}{2}$$

Da maneira análoga temos que as soluções do sistema para as ramificações do tipo "mesmo nível / 1 descida / 2 descidas":

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj \Delta t}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj \Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 - aj \Delta t}{2}$$

e para o nó "2 subidas / 1 subida / mesmo nível":

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + aj\Delta t}{2}$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj\Delta t$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj\Delta t}{2}$$

4.3.2 SEGUNDO ESTÁGIO

O segundo estágio da construção da árvore é a conversão da árvore de r^* , para a árvore de r , isto é, a incorporação de desvios à estrutura principal da árvore. Isto pode ser obtido através de deslocamentos dos nós de tal forma que a nova árvore seja compatível com a curva de juros inicial, ou seja, introduz-se os preços de mercado ao modelo.

Definindo-se os deslocamentos de cada nó como:

$$\alpha(t) = r(t) - r^*(t)$$

temos que,

$$d\alpha = [\theta(t) - a\alpha(t)]dt$$

cuja solução é

$$\alpha(t) = e^{-at} \left[r(0) + \int_0^t e^{aq} \theta(q) dq \right]$$

Substituindo-se a expressão de $\theta(t)$ dada em (4.2) chega-se em

$$\alpha(t) = F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (4.4)$$

de onde podemos criar uma árvore para r no tempo $i\Delta t$ a partir da árvore auxiliar de r^* somando-se $\alpha(i\Delta t)$, mantendo-se as mesmas probabilidades.

No entanto, essa solução não é exatamente consistente com a curva de taxa de juros observada no mercado, uma vez que utiliza-se α 's de tempos contínuos em um modelo de tempos discretos. Hull e White apresentam um procedimento iterativo para a determinação do α 's. Para isso, define-se Q_{ij} como o valor presente de um título que paga \$1 se o nó (i,j) é atingido e \$0 se qualquer outro nó é atingido.

Partindo de $Q_{0,0} = 1$, uma vez que todos $Q_{i,j}$ foram determinados para $i \leq m$ ($m \geq 0$), determinamos α_m de tal forma que a árvore aprece um título de desconto com vencimento em $(m+1)\Delta t$, cujo preço podemos calcular da curva de juros inicial de mercado. A taxa de juros no nó (m,j) é $\alpha_m + j\Delta r$, de modo que o preço do título com vencimento após Δt é

$$V_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-(\alpha_m + j\Delta r)\Delta t}$$

Onde n_m é o número de nós ao redor do nó central em $m\Delta t$.

A solução para esta equação é

$$\alpha_m = \frac{\log \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta r\Delta t} - \log P_{m+1}}{\Delta t}$$

Conhecendo-se α_m , podemos determinar Q_{ij} para $i = m + 1$ da seguinte forma:

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) e^{-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t}$$

Onde $q(k,j)$ é a probabilidade de ir do nó (m,k) para o nó $(m+1,j)$.

4.4 APREÇAMENTO DE DERIVATIVO DE TAXA DE JUROS

Para o caso específico do mercado de juros brasileiro, o modelo pode ser usado para apreçar as opções de IDI, tanto de compra quanto de venda. Este modelo, porém, também pode ser usado para apreçar outros tipos de derivativos que não possuam estruturas de volatilidade muito complexas, como opções sobre títulos de renda fixa.

O procedimento a ser adotado é determinar a projeção dos pagamentos do derivativo no seu vencimento para cada possibilidade ou ramificação apontada pela árvore trinomial, ou seja, em cada ramificação teremos os seguintes valores de *Arrow-Debrew* para o caso de uma opção de compra de IDI:

$$P_{T,j} = \max(IDI_{T,j} - K_c, 0)$$

onde:

$IDI_{T,j} = IDI_t e^{\int_t^T r_s ds}$ é o valor do ativo (no caso o IDI) em cada ramificação j no vencimento da opção T ;

K_c é o valor do preço de exercício da opção de compra.

Para uma opção de venda temos que

$$P_T^i = \max(K_c - IDI_T^i, 0)$$

Logo, o valor da opção de IDI é simplesmente o valor presente das somas desses valores P_T^i multiplicados pelas respectivas probabilidades da ramificação:

$$V_{IDI} = \sum_{i=j_{\min T}}^{j_{\max T}} P_{T,j} \cdot Q_{T,j}$$

4.5 CALIBRAÇÃO DO MODELO

Uma vez construído a árvore trinomial a partir de uma estimativa inicial de a e σ constantes, podemos melhorar os valores desses parâmetros de modo que o modelo de juros tenha um melhor ajuste às condições de mercado. Podemos estabelecer como medida de imprecisão de ajuste o resíduo de mínimos quadrados ponderado pelo número de contratos negociados:

$$\frac{\sum_i^n \left\{ \left[\frac{(PM_i - PT_i)}{PM_i} \right]^2 \cdot CN_i \right\}}{\sum_i^n CN_i}$$

Onde PM é o preço de mercado do derivativo, PT é o preço teórico do derivativo calculado pelo modelo, CN é o número de contrato negociados do derivativo no dia em questão e n é o número de instrumentos derivativos de mercado (instrumentos de calibração) com características semelhantes ao instrumento derivativo que desejamos apreçar.

Com isso buscamos estimar os parâmetros a e σ de maneira a minimizarmos a função "resíduo" descrita acima.

No mercado brasileiro, porém, o volume de opções de renda fixa, no caso do IDI, é bastante reduzido se comparado aos mercados mais desenvolvidos. Poucas séries de opções são negociadas e geralmente com apenas uma ou duas datas de vencimento. Em função disso, existem ao longo do tempo pouca informação histórica o que dificulta uma calibração precisa dos modelos de renda fixa. Existe um problema também, ocasionado pelo fato os preços históricos de fechamento fornecidos pela BM&F, terem sido negociados em horários diferentes, e que apesar de serem no mesmo dia, geram distorções, dada a alta volatilidade intra-day do mercado brasileiro.

Os resultados seguintes buscam mostrar a calibração do modelo de um fator de Hull & White para os dias que houveram condições suficientes para tal, desde março de 2001.

Calibração do Modelo de 1 fator Hull-White valores obtidos para o parâmetro a

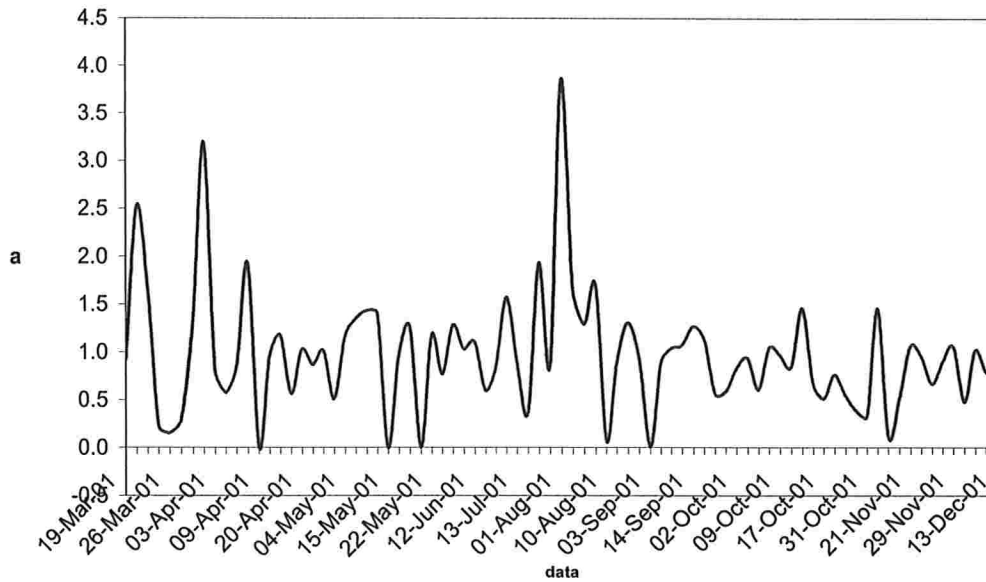


Figura 4.1: Valores históricos para a calibração do parâmetro "a"

Observando-se o gráfico do parâmetro a , percebe-se que os valores variam bastante ao longo do tempo indicando as perspectivas do mercado quanto à velocidade de reversão à média das taxas de juros corrente. Podemos perceber que o valor de a variou de quase zero, ou seja, nenhuma reversão à média até 3,864, com uma média de 0,9698 dos valores obtidos.

Calibração do Modelo de 1 fator Hull-White valores obtidos para o parâmetro σ

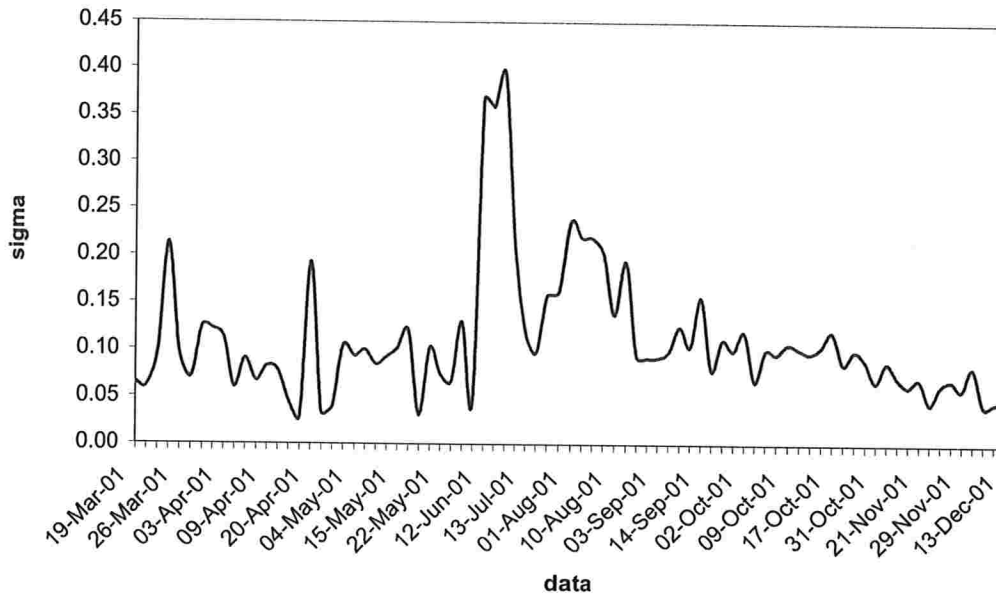


Figura 4.2: Valores históricos para a calibração do parâmetro σ

Quanto aos valores obtidos para a volatilidade da taxa de curto prazo também podemos observar fortes variações nos seus valores, com volatilidades altas nos períodos de junho e julho o que pode ser explicado pelo fato de ter havido aumentos de taxas de juros de curto prazo no período juntamente com forte inclinação da curva de juros para todos os prazos. O valor médio obtido foi de 0,10931.

Para uma análise de sensibilidade do preço das opções à variações dos parâmetros vemos que pela figura (4.3), como a opção é um seguro contra risco, quanto maior a volatilidade (sigma), maior o prêmio da opção de compra.

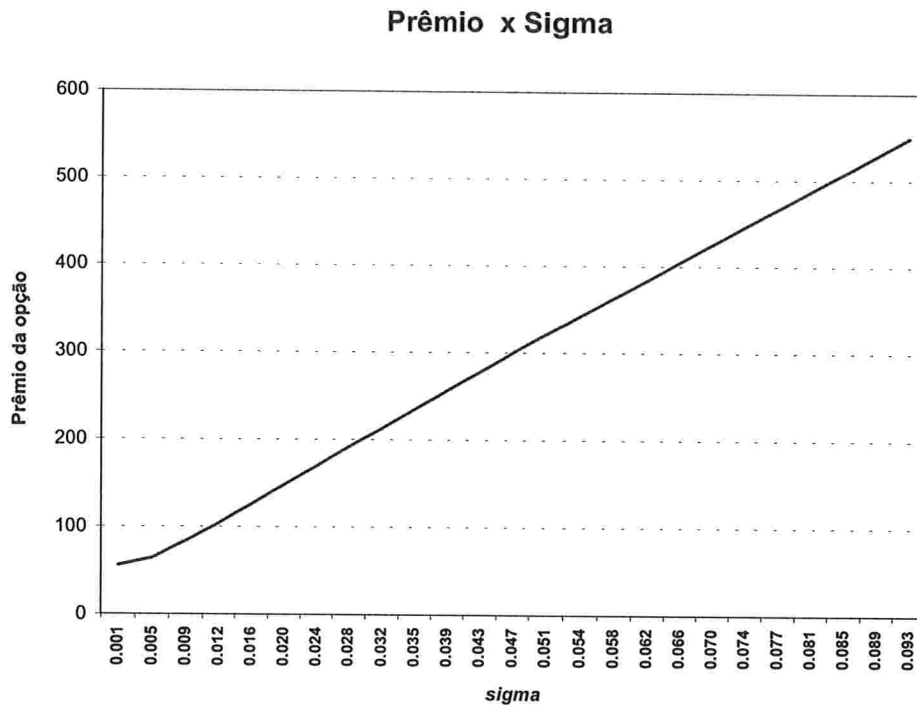


Figura 4.3: Variação do prêmio de uma opção de compra de IDI para valores diferentes de volatilidade

Quanto à figura (4.4) a seguir, podemos observar que quanto maior o parâmetro a , maior a reversão à média e conseqüentemente menos será a oscilação esperada do preço do IDI. Assim sendo, o efeito de a deve ser o oposto do efeito da volatilidade σ : quanto maior o a , menor o prêmio da opção de compra.

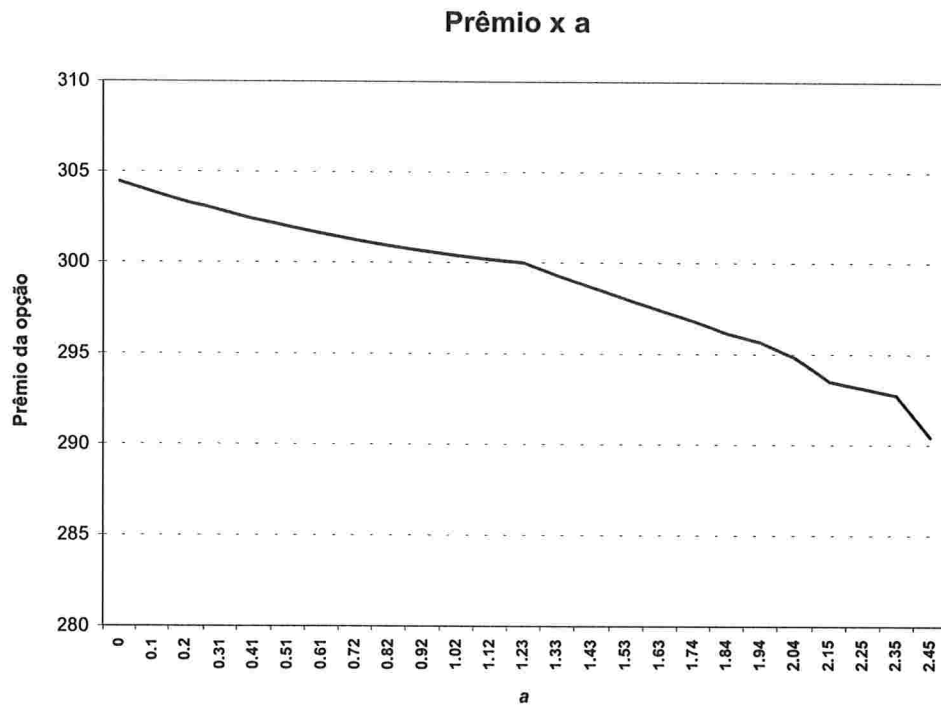


Figura 4.4: Variação do prêmio de uma opção de compra de IDI para valores diferentes do parâmetro de reversão à média "a".

CAPÍTULO 5 – MODELOS MULTIFATORIAIS DE TAXAS DE JUROS

5.1 INTRODUÇÃO

Os modelos de taxas de juros apresentados no capítulo 2 podem ser boas ferramentas para o apreçamento de derivativos e títulos que exigem apenas um grau de liberdade, mas eles não capturam movimentos mais complexos da curva de juros. Basicamente, modelos que utilizam apenas a taxa de juros de curto prazo como fator estocástico podem ser bons instrumentos na modelagem da inclinação da curva de juros, mas não possuem a capacidade de modelar os diferentes movimentos que ocorrem diferentemente para prazos distintos ao longo de toda a estrutura a termo de juros. Logo, para se apreçar produtos mais sofisticados ou mesmo posições relativas em diferentes prazos que dependam de variáveis além do nível da curva de juros corrente, é de extrema importância utilizar-se um segundo fator estocástico. Este princípio pode em teoria, ser aplicado para vários outros fatores, dependendo do grau de sofisticação, robustez e complexidade que se deseja obter. Deve-se sempre ponderar, porém, se o acréscimo de novos fatores ao modelo obterá melhoras no resultado final que compensem a maior dificuldade de programação e implementação que surgirão com esses novos fatores.

Neste capítulo serão introduzidos a teoria necessária para a análise de modelos de taxas de juros multifatores e uma análise detalhada do modelo de dois fatores de Hull & White que possui como vantagens soluções fechadas para o apreçamento de títulos de desconto a algumas opções assim como um bom nível de flexibilidade na modelagem da dinâmica da curva de juros.

5.2 A EQUAÇÃO DE APREÇAMENTO DE TÍTULOS DE DESCONTO PARA N FATORES

Para se chegar na equação de apreçamento de um título de desconto com vários fatores podendo afetar a composição de seu preço, assumiremos um título de desconto de preço $V(x,t,T)$ no instante t e vencimento em T , com x sendo um vetor n -dimensional

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (5.1)$$

das variáveis de estado que parametrizam o modelo econômico.

Cada fator segue a equação diferencial estocástica

$$dx_i = u_i dt + w_i dW_i \quad (5.2)$$

onde os processos de Wiener $\{W_{it}\}_{t>0}$ estão correlacionados de acordo com

$$\text{Cov}(dW_i, dW_j) = \rho_{ij} dt$$

Aplicando-se o lema de Itô para n dimensões, temos que a variação infinitesimal do preço deste título ao longo do tempo pode ser descrito como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (5.3)$$

Substituindo-se agora a equação (5.2) na equação acima obtemos

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} (u_i dt + w_i dW_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} (u_i dt + w_i dW_i)(u_j dt + w_j dW_j)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} u_i dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} w_i dW_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} w_i w_j \rho_{ij} dt$$

e novamente pelo princípio de não arbitragem, temos que o retorno do título deve ser igual ao retorno de um ativo livre de risco

$$dV = rV dt$$

o que elimina o termo em dW_i , resultando em

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} u_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} w_i w_j \rho_{ij} - rV = 0 \quad (5.4)$$

que é a equação geral de apreçamento para um título de desconto com n fatores de risco.

5.3 O MODELO DE DOIS FATORES DE HULL & WHITE.

O modelo de Hull & White de dois fatores se apresenta na forma

$$\begin{cases} dr = (\theta(t) + u - ar) dt + \sigma_1 dW_1 \\ du = -budt + \sigma_2 dW_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

Observe que o parâmetro u tem um valor inicial igual a zero, é estocástico, e segue um processo que descreve as perturbações de longo prazo na taxa de curto prazo r .

Como no modelo de Hull & White de um fator, o parâmetro $\theta(t)$ é obtido de maneira que o modelo se torne consistente com a estrutura a termo inicial. A variável estocástica u é um componente de reversão da taxa r , com ele próprio revertendo para um valor igual a zero a uma velocidade b . Os demais parâmetros a , b , σ_1 e σ_2 são constantes e dW_1 e dW_2 são processos de Wiener com correlação instantânea ρ_{12} .

Em função do segundo fator u , este modelo gera movimentos mais diversificados para a curva de juros assim como possibilidades mais abrangentes para as estruturas de volatilidade.

Ele também se caracteriza por sua classificação como um modelo afim, onde podemos obter soluções explícitas para títulos de desconto e para opções sobre estes títulos.

5.3.1 O APREÇAMENTO DOS TÍTULOS DE DESCONTO

Substituindo-se os parâmetros do Modelo de Hull & White de dois fatores na fórmula geral (5.4) obtemos a seguinte equação de apreçamento de títulos de desconto

$$\frac{\partial V}{\partial t} + [\theta(t) + u - ar] \frac{\partial V}{\partial r} - bu \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial u} - rV = 0 \quad (5.7)$$

Mostraremos a seguir que, pelo fato deste modelo ser um modelo afim, a função

$$V(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r - C(t, T)u} \quad (5.8)$$

é solução da equação (5.7), para determinados valores das funções $A(t, T)$, $B(t, T)$ e $C(t, T)$.

Derivando-se a equação (5.8) temos que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial t} r - \frac{\partial C}{\partial t} u \right) V$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -B e^{A - Br - Cu} = -BP$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -CV$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = B^2 V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = C^2 V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial u} = BC V$$

e substituindo-se na equação (5.7) obtemos

$$\underbrace{\left(\frac{\partial A}{\partial t} - \theta(t)B + \frac{1}{2}\sigma_1^2 B^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 C^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 BC \right)}_I + \underbrace{\left(-\frac{\partial B}{\partial t} + aB - 1 \right)}_II r + \underbrace{\left(-\frac{\partial C}{\partial t} - B + bC \right)}_III u = 0$$

Resolvendo-se as equações II e III com as condições de contorno

$$B(T, T) = 0 \text{ e } C(T, T) = 0$$

resulta em

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

$$C(t, T) = -\frac{1}{ab} + \frac{1}{a(b-a)} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{b(b-a)} e^{-b(T-t)}$$

Por substituição direta, a solução para a equação I para A e θ que satisfaz as condições de contorno $A(t, T) = A(0, T)$ quando $t=0$ e $A(T, T)=0$ é

$$A(t, T) = \log \frac{V(0, T)}{V(0, t)} + B(t, T)F(0, t) + \phi(0, t)B(t, T) + \int_0^t \phi(0, \tau) d\tau - \int_0^t \phi(\tau, T) d\tau,$$

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0, t)}{\partial t} + aF(0, t) + \phi(0, t) + a\phi(0, t)$$

onde $F(t, T)$ é a taxa a termo instantânea para o tempo T , observada no tempo t e

$$\phi(t, T) = \frac{1}{2} \sigma_1^2 B(t, T)^2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 C(t, T)^2 + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 B(t, T) C(t, T)$$

o que resulta em

$$A(t, T) = \log \frac{V(0, T)}{V(0, t)} + B(t, T)F(0, t) - \eta$$

onde

$$\eta = \frac{\sigma_1^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2[B(0, t)C(0, t)B(t, T) + \gamma_4 - \gamma_2] - \frac{1}{2}\sigma_2^2[C(0, t)^2B(t, T) + \gamma_6 - \gamma_5],$$

$$\gamma_1 = \frac{e^{-(a+b)T} [e^{(a+b)t} - 1]}{(a+b)(a-b)} - \frac{e^{-2aT} (e^{2at} - 1)}{2a(a-b)},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{ab} \left[\gamma_1 + C(t, T) - C(0, T) + \frac{1}{2}B(t, T)^2 - \frac{1}{2}B(0, T)^2 + \frac{t}{a} - \frac{e^{-a(T-t)} - e^{-aT}}{a^2} \right],$$

$$\gamma_3 = -\frac{e^{-a(a+b)t} - 1}{(a-b)(a+b)} + \frac{e^{-2at} - 1}{2a(a-b)},$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{ab} \left[\gamma_3 - C(0, t) - \frac{1}{2}B(0, t)^2 + \frac{t}{a} + \frac{e^{-at} - 1}{a^2} \right],$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2}C(t, T)^2 - \frac{1}{2}C(0, T)^2 + \gamma_2 \right],$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{b} \left[\gamma_4 - \frac{1}{2}C(0, t)^2 \right]$$

CAPÍTULO 6 – IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DO MODELO DE DOIS FATORES DE HULL & WHITE

6.1 INTRODUÇÃO

Com o embasamento teórico dos modelos de taxas de juros multifatoriais descrito no capítulo anterior, introduziremos a implementação prática do modelo de Hull & White de dois fatores para o mercado de taxas de juros brasileiro. O procedimento como será descrito mais detalhadamente a seguir, utiliza muito dos conceitos da árvore trinomial do modelo Hull & White de um fator, mas com uma implementação mais complexa tanto do ponto de vista de programação quanto da calibração.

O primeiro passo a ser seguido é eliminar a dependência entre os fatores através de uma simples transformação, buscando-se facilitar a construção de uma árvore trinomial para cada fator. Em seguida, basicamente os passos serão: a construção de uma árvore para cada fator, a introdução da curva de mercado $\theta(t)$, a combinação das árvores em uma única árvore tridimensional e a calibração dos cinco parâmetros a , b , σ_1 , σ_2 e ρ do modelo aos preços de mercado.

Obtidos bons valores para os cinco parâmetros do modelo poderemos então, além de apreçar opções de IDI para todos as maturidades e preços de exercício, obter uma estrutura a termo de volatilidade das taxas de juros que será essencial para a tomada de decisões nas exposições à taxas pré-fixadas ao longo da curva de juros brasileira.

6.2 ELIMINANDO A DEPENDÊNCIA ENTRE FATORES

Como mostrado no capítulo anterior, a taxa de juros no modelo de dois fatores de Hull & White segue o processo estocástico

$$dr = (\theta(t) + u - ar)dt + \sigma_1 dW_1 \quad (6.1)$$

com o componente u de reversão à média modelado pelo processo

$$du = -budt + \sigma_2 dW_2 \quad (6.2)$$

Assumimos também uma correlação ρ_{12} entre dW_1 e dW_2 .

Neste caso, a implementação prática através da construção de uma árvore trinomial ficaria dificultada pela dependência entre os dois fatores estocásticos. A fim de eliminarmos esta dependência do segundo fator no primeiro fator introduziremos a variável y tal que

$$y = r + \frac{u}{b-a} \quad (6.3)$$

o que equivale a

$$dr = dy - \frac{du}{b-a} \quad (6.4)$$

e substituindo-se no modelo (6.1) temos

$$dy - \frac{du}{b-a} = (\theta(t) + u - ar)dt + \sigma_1 dW_1$$

mas como du segue a equação (6.2) obtemos então

$$dy = (\theta(t) - ay)dt + \sigma_1 dz_1 + \frac{\sigma_2}{b-a} dW_2$$

e assumindo

$$\sigma_y dW_y = \sigma_1 dW_1 + \frac{\sigma_2}{b-a} dW_2 \quad (6.5)$$

temos agora o seguinte sistema de equações estocásticas com fatores independentes

$$\begin{cases} dy = (\theta(t) - ay)dt + \sigma_y dW_y \\ du = -budt + \sigma_2 dW_2 \end{cases}$$

observando-se que

$$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \left(\frac{\sigma_2}{b-a}\right)^2 + \frac{2\sigma_1\sigma_2}{b-a} \rho_{12} \quad (6.6)$$

$$\text{Cov}(dW_y, dW_1) = \left(\sigma_1 + \frac{\rho_{12}\sigma_2}{b-a}\right) dt \quad (6.7)$$

$$\text{Cov}(dW_y, dW_2) = \left(\sigma_1\rho_{12} + \frac{\sigma_2}{b-a}\right) dt \quad (6.8)$$

$$p_{y2} = \frac{\left(\sigma_1 \rho_{12} + \frac{\sigma_2}{b-a} \right)}{\sigma_y} \quad (6.9)$$

6.3 CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE PARA O MODELO DE DOIS FATORES

Com os resultados obtidos no item anterior podemos agora construir uma árvore trinomial para y e uma árvore trinomial para u com as premissas de $\theta(t)=0$ e valores iniciais de y e u iguais a zero, seguindo a implementação sugerida para o modelo Hull & White de um fator da seção (4.3). Também utilizando as premissas da seção (4.3), construímos uma nova árvore para y ao introduzirmos os valores de mercado $\theta(t)$. Ambas as árvores devem ter o mesmo intervalo de tempo Δt , mas podem ter diferentes intervalos Δy e Δu e diferentes números de nós $j_{\max} - j_{\min}$ e $k_{\max} - k_{\min}$.

O passo principal na implementação do modelo de dois fatores se constitui na combinação das duas árvores trinomiais resultando em nove ramificações provenientes de cada nó. A árvore combinada é uma árvore em três dimensões: duas dimensões de espaço (y e u) e uma dimensão de tempo. Os nós portanto, possuem três índices: i para o tempo $t = n\Delta t$, j para o fator y e k para o fator u . A árvore tridimensional terá um nó inicial (0,0,0) no tempo 0, nove nós no tempo igual a 1, e se não ocorrer reversão à média, 25 nós no tempo igual a 2, 49 nós no tempo igual a 3 e assim por diante. O número máximo de nós acontecerá quando ocorrer a reversão à média em ambos os fatores, onde a partir de determinado tempo i a árvore terá então $(j_{\max} - j_{\min}) \times (k_{\max} - k_{\min})$ nós.

A probabilidade associada a cada um das nove ramificações resultantes de cada nó no tempo anterior é o produto das probabilidades associadas ao movimento de cada fator, como pode ser visto na tabela abaixo, para o caso de a correlação entre os fatores ser igual a zero.

		Movimento de u		
		queda	estável	alta
Movimento de y	alta	$p_u q_d$	$p_u q_m$	$p_u q_u$
	estável	$p_m q_d$	$p_m q_m$	$p_m q_u$
	queda	$p_d q_d$	$p_d q_m$	$p_d q_u$

Tabela 6.1: Probabilidades das ramificações resultantes de cada nó para movimentos combinados de y (probabilidades p) e u (probabilidades q)

Para o caso da correlação ser diferente de zero analisaremos primeiramente o caso de a correlação ser maior que zero. A geometria da árvore tridimensional é exatamente a mesma, mas as probabilidades são ajustadas para:

		Movimento de u		
		queda	Estável	alta
Movimento de y	alta	$p_u q_d - e$	$p_u q_m - 4e$	$p_u q_u + 5e$
	estável	$p_m q_d - 4e$	$p_m q_m + 8e$	$p_m q_u - 4e$
	queda	$p_d q_d + 5e$	$p_d q_m - 4e$	$p_d q_u - e$

Tabela 6.2: Probabilidades das ramificações resultantes de cada nó para movimentos combinados de y (probabilidades p) e u (probabilidades q) com correlação positiva.

Note que a soma do ajustes em cada linha e coluna é zero. Como resultado, os ajustes não mudam as médias e desvio padrões dos movimentos incondicionais em y e u . Esses ajustes possuem o efeito de induzir uma correlação entre y e u

igual a $36e$. O valor apropriado de e é portanto $\frac{1}{36} \rho$.

A escolha desse ajuste de probabilidade é motivada pelo fato de, no limite de Δt tendendo a zero, as probabilidades tendem a $p_u = q_u = \frac{1}{6}$, $p_m = q_m = \frac{2}{3}$ e

$p_d = q_d = \frac{1}{6}$. Quando a correlação é 1 as probabilidades ajustadas são, no limite:

		Movimento de u		
		queda	estável	alta
Movimento de y	alta	0	0	$\frac{1}{6}$
	estável	0	$\frac{2}{3}$	0
	queda	$\frac{1}{6}$	0	0

Tabela 6.3: Probabilidades das ramificações resultantes de cada nó para movimentos combinados de y (probabilidades p) e u (probabilidades q) com correlação igual 1.

Para correlações negativas, o procedimento é equivalente com exceção de que e equivale a $-\frac{1}{36}\rho$ e as probabilidades agora são:

		Movimento de u		
		queda	estável	alta
Movimento de y	alta	$p_u q_d + 5e$	$p_u q_m - 4e$	$p_u q_u - e$
	estável	$p_m q_d - 4e$	$p_m q_m + 8e$	$p_m q_u - 4e$
	queda	$p_d q_d - e$	$p_d q_m - 4e$	$p_d q_u + 5e$

Tabela 6.4: Probabilidades das ramificações resultantes de cada nó para movimentos combinados de y (probabilidades p) e u (probabilidades q) com correlação negativa.

Com este procedimento para as correlações, porém, existe a possibilidade de as probabilidades se tornarem negativas. Caso isto venha a ocorrer, é necessária a realização de um novo ajuste. Assim, para qualquer nó em que $e = \frac{1}{36}\rho$ gerar probabilidades negativas, utilizaremos um novo valor de e especificamente para este nó, ou seja, o maior valor possível de e para o qual as probabilidades não são negativas. Apesar de este procedimento induzir um ligeiro viés nas

correlações, este viés desaparece a medida que, no limite, Δt tende a zero. Como resultado, esse procedimento de ajuste converge.

Outro procedimento a ser acrescentado é a limitação de um valor mínimo para as taxas *forward* de modo que elas não se tornem negativas. Apesar de essa situação ser um caso muito raro de ocorrer, geralmente quando temos volatilidades muito altas juntas e/ou muitos passos na construção da árvore, adota-se um procedimento na construção da árvore tridimensional onde se verifica em cada ramificação se a taxa *forward* juntando-se os dois fatores é negativa. Se positivo, assume-se um valor igual a zero para a taxa *forward* nessa ramificação.

6.4 CALIBRAÇÃO DO MODELO

Uma vez construído a árvore tridimensional devemos calibrar o modelo de modo que se obtenha um melhor ajuste às condições de mercado. Como realizado no modelo de um fator, utilizaremos mais uma vez as opções de IDI e também estabeleceremos como medida de imprecisão de ajuste o resíduo de mínimos quadrados ponderado pelo número de contratos negociados:

$$\frac{\sum_i^n \left\{ \left[\frac{(PM_i - PT_i)}{PM_i} \right]^2 \cdot CN_i \right\}}{\sum_i^n CN_i} \quad (6.10)$$

Onde, como já mostrado PM é o preço de mercado do derivativo, PT é o preço teórico do derivativo calculado pelo modelo, CN é o número de contratos negociados do derivativo e n é o número de instrumentos derivativos de mercado (instrumentos de calibração) com características semelhantes ao instrumento derivativo que desejamos apreçar.

Nesse caso buscamos estimar os parâmetros a , b , σ_1 , σ_2 e ρ do modelo de forma a minimizarmos a função "resíduo" descrita acima.

A calibração desses cinco parâmetros, no entanto, se torna muito mais complexa do que a calibração de dois fatores. Primeiro porque como já dito, o volume de opções de renda fixa, no caso do IDI, no mercado brasileiro é bastante reduzido existindo ainda os problemas já citados o capítulo 4. Segundo porque minimizar a função resíduo (6.10) através da mudança de cinco parâmetros pode resultar em valores totalmente não condizentes com a realidade.

Para se resolver o problema da liquidez foram utilizadas opções de vários dias diferentes, mas com características de curva de juros semelhantes. Apesar de não ser a melhor solução, pois os fatores podem mudar de um dia para o outro, a utilização de maior número de opções gera maior consistência nos resultados do que a utilização de poucas opções, que muitas vezes pode não se atingir resultado algum. No problema da calibração de cinco parâmetros por sua vez, Hull & White sugeriram a utilização de dados históricos para algumas variáveis (utiliza-se por exemplo ρ como a correlação entre a taxa de curto e longo prazo e σ_1 como a volatilidade da taxa de curto prazo) e minimiza-se a função "resíduo" para os demais parâmetros. Essa solução para o mercado brasileiro, porém, não se mostra sustentável uma vez que as volatilidades mesmo para taxas de curto prazo variam bastante assim como a correlação entre as taxas de curto e longo prazo. O melhor procedimento entre os vários testados, foi a determinação de certos limites obtidos em situações extremas, para os parâmetros de modo que o otimizador minimizasse a função "resíduo" convergindo esses parâmetros para dentro desses intervalos pré-definidos. A solução se mostrava adequada no momento em que nenhum dos parâmetros obtidos fosse igual a um desses limites.

6.5 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DA CALIBRAÇÃO

Foram realizadas quatro calibrações do modelo de dois fatores de Hull & White em quatro situações distintas, onde cada situação é composta de curvas de juros de dias próximos e estruturas semelhantes, como poderemos observar pelas curvas de juros dos períodos em questão. O primeiro cenário se caracterizava por taxas de juros de curto prazo historicamente baixa em um cenário de boas perspectivas de crescimento econômico. O segundo cenário é um cenário de forte inclinação na curva de juros gerada por grandes incertezas sobre o futuro das taxas de juros de curto prazo. O terceiro cenário é um cenário realista, com a inclinação da curva de juros em um nível perto do que se pode considerar um padrão histórico, com baixa probabilidade de mudanças dos juros de curto prazo. Por último, temos um cenário de alta probabilidade de queda dos juros de curto prazo, com a curva negativamente inclinada para alguns vencimentos.

1) Cenário de otimismo com juros baixos (março de 2001):

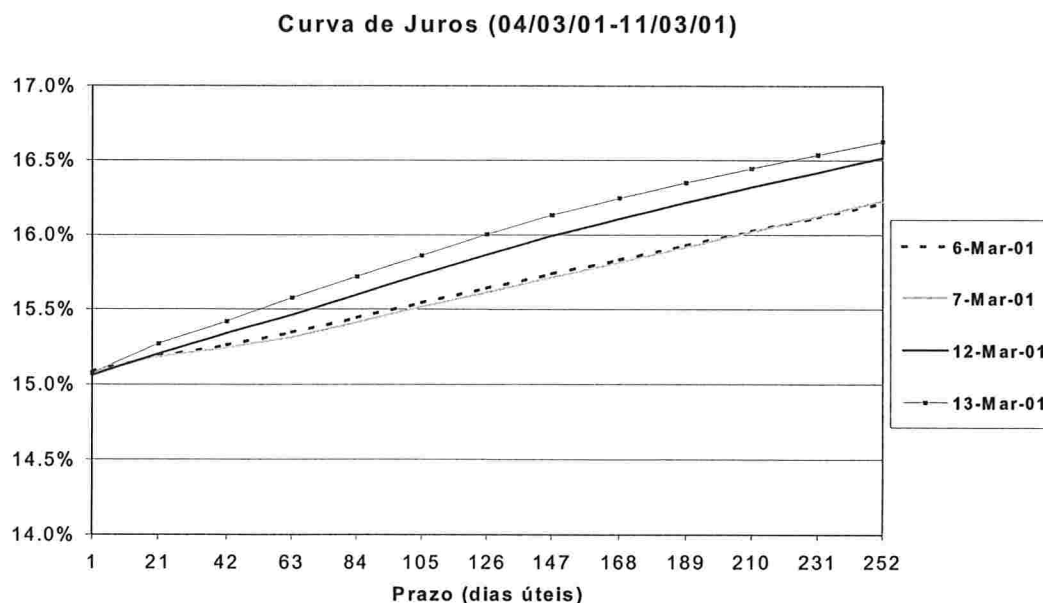


Figura 6.1: Curvas de juros para os dias 06, 07, 12 e 13 de março de 2001.

2) Cenário de Stress com forte inclinação da curva de juros (julho de 2001):

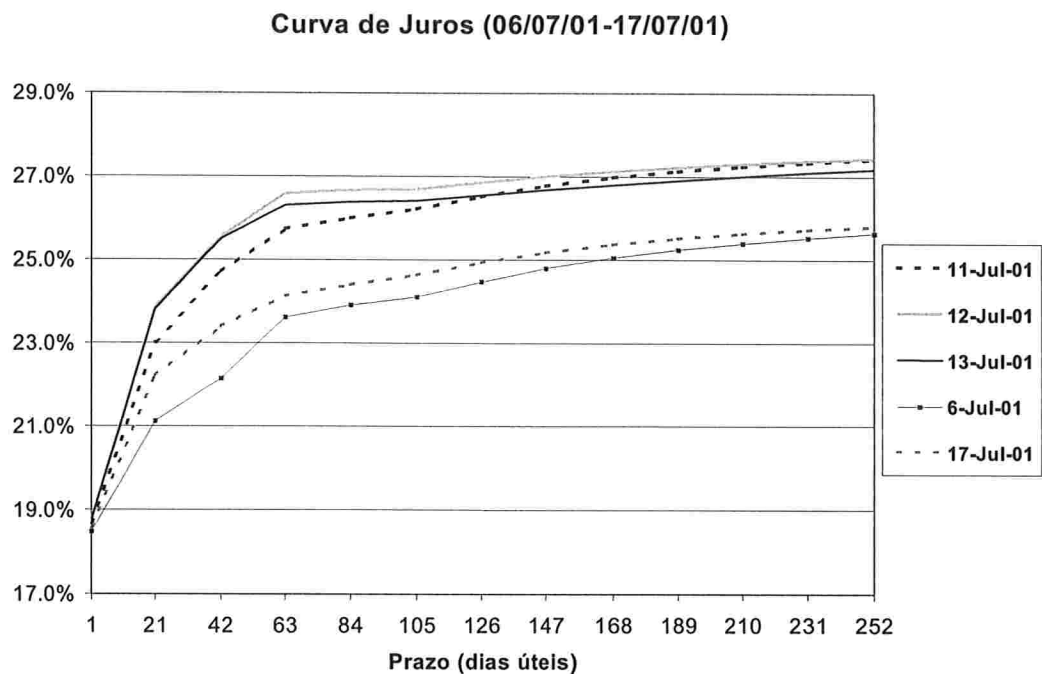


Figura 6.2: Curvas de juros para os dias 06, 11, 12, 13 e 17 de julho de 2001.

3) Cenário "normal" sem expectativas de mudança na taxa Selic (novembro de 2001):

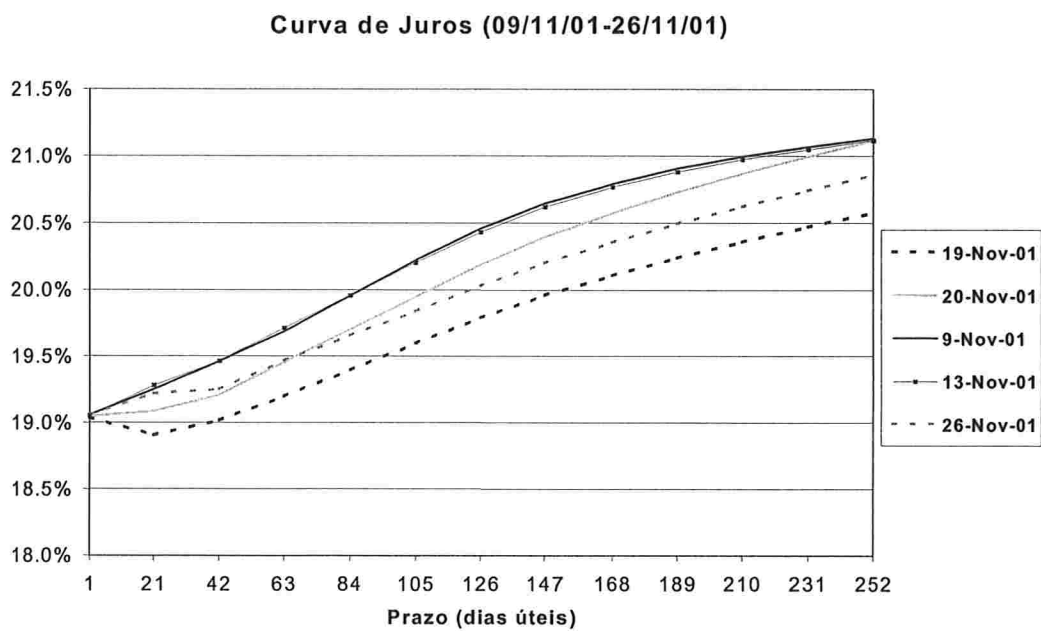


Figura 6.3: Curvas de juros para os dias 09, 13, 19, 20 e 26 de novembro de 2001.

4) Cenário de expectativas de queda da taxa Selic (março de 2002):

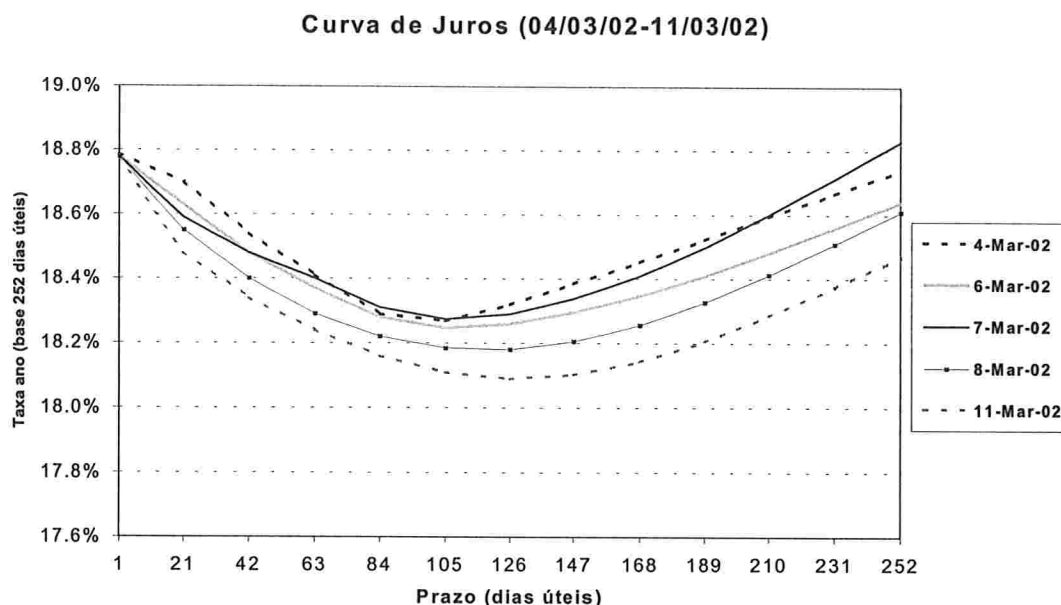


Figura 6.4: Curvas de juros para os dias 04, 06, 07, 08 e 11 de novembro de 2001.

Foram utilizadas as opções de IDI negociadas nos dias cujas curvas estão mostradas nos gráficos acima para a calibração do modelo. Os resultados podem ser observados na tabela abaixo:

Calibração do Modelo

	Situação 1	Situação 2	Situação 3	Situação 4
a	0.913336311	1.261021244	0.96907904	1.409291313
sigma1	0.048707751	0.339262412	0.095763999	0.097540512
b	1.720167536	1.591973876	1.679998669	0.249801869
sigma2	0.139347854	0.348000241	0.215208928	0.01672232
correl	0.846961808	0.157319702	0.672732911	0.458155843

Tabela 6.5: Calibração do modelo para os quatro cenários apresentados.

Podemos destacar as variações entre as correlações nos vários cenários analisados, desde a alta correlação dos cenários onde mudanças de taxas de

curto prazo são improváveis (situações 1 e 3) até a correlação próxima a zero do cenário de stress, onde as taxas ao longo da curva se comportam de maneiras distintas (argumentava-se então a possibilidade de um choque de juro de curto prazo, o que poderia resultar em queda nas taxas mais longas). Esses resultados comprovam a teoria de não se utilizar dados históricos da correlação na calibração do modelo em ambientes de alta volatilidade como o caso brasileiro. Os níveis de volatilidades dos fatores também variaram bastante. Analisaremos em detalhe a estrutura a termo de volatilidade obtidas no próximo capítulo. Mostraremos também no capítulo 8, as relações observadas entre os prêmios de risco, inclinação da curva de juros e estrutura a termo de volatilidades.

CAPÍTULO 7. VOLATILIDADES DAS TAXAS DE JUROS.

7.1 INTRODUÇÃO

Como pode ser notado, até o presente momento nesse trabalho não houve menções mais detalhadas a respeito das volatilidades das taxas de juros no conceito dos modelos apresentados. A volatilidade, porém, é um fator essencial, se não o mais importante, no apreçamento correto de títulos pré-fixados e derivativos de taxas de juros em um processo ajustado ao risco. Buscando um estudo mais completo e detalhado, dedicaremos um capítulo apenas para esse tópico.

Mostraremos nas próximas seções, como se comportam as volatilidades das taxas de juros em um processo Markoviano e como as volatilidades provindas dos modelos de Hull & White se adequam perfeitamente a esse tipo de processo. Então, após essa introdução teórica, voltaremos a analisar os resultados da implementação dos modelos de um e dois fatores de Hull & White obtidos nos capítulos 4 e 6, destacando-se agora, as características das estruturas a termo de volatilidades provenientes de cada modelo.

7.2 VOLATILIDADES E A PROPRIEDADE DE MARKOV

Para uma modelagem das taxas de juros consistente com a hipótese da propriedade de Markov, a análise do teorema a seguir constitui-se de um fator extremamente relevante:

Teorema

Considere um processo evolutivo já ajustado ao risco, para as taxas a termo (forward) com n fatores:

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) dW_t^i$$

Seja $r_t = f(t, t)$ a taxa instantânea. Então o processo $\{r_t\}_{t \geq 0}$ é Markoviano se $\{\sigma_i(t, T)\}_{i=1}^n$ é da forma:

$$\sigma_i(t, T) = \sigma_t^i e^{-\int_t^T k(x) dx}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde $\{\sigma_t^i\}_{t \geq 0}$ é um processo não antecipativo e $k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função determinística C^1 . Neste caso, o processo $\{r_t\}_{t \geq 0}$ tem uma evolução dada por uma equação estocástica do tipo Hull & White generalizado:

$$dr_t = (\theta(t) - k(t)r_t) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_t^i dW_t^i \quad (7.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) + k(t)f(0, t) + \int_0^t \|\sigma(s, t)\|^2 ds + \sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s, t) \int_s^t \sigma_i(s, u) du ds + \\ & + k(t) \sum_i \sigma_i(s, t) \int_s^t \sigma_i(s, u) du ds \end{aligned}$$

Portanto, uma modelagem de $\{r_t\}_{t \geq 0}$ consistente com a hipótese de Markov para r_t requer o uso do modelo generalizado de Hull & White.

Prova:

Integrando o processo das taxas a termo em $[0, t]$:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s, t) dW_s$$

No limite de $T \rightarrow t$ temos:

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s, t) dW_s$$

Diferenciando chegamos a:

$$dr_t = \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) dt + \alpha(t, t) dt + \left(\int_0^t \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s, t) ds \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, t) dW_t^i + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^t \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s, t) dW_t^i \right] dt$$

Como já se assumiu que o processo está ajustado ao risco, então a condição de não-arbitragem de Heath-Jarrow-Morton implica que:

$$\alpha(t, T) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds$$

e daí $\alpha(t, T) = 0$ e também:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T}(t, T) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \sigma_i}{\partial T}(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds + \sigma_i(t, T) \sigma_i(t, T) \right]$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T}(t, T) = \|\sigma_i(t, T)\|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_i}{\partial T}(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds$$

Logo:

$$dr_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(0,t) dt + \int_0^t \|\sigma(s,t)\|^2 ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s,t) \left(\int_s^t \sigma_i(s,u) du \right) ds \right] dt + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s,t) dw_s^i \right) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i^i dW_t^i$$

O segundo termo do tipo dt acima mostra que o valor de dr_t depende da história de W_s^i e portanto que o processo para r_t não é Markoviano. No entanto, se assumirmos a estrutura especial de volatilidade:

$$\sigma_i(t,T) = \sigma_s^i e^{-\int_t^T k(x) dx}$$

teremos então:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s,t) = \sigma_s^i \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\int_s^t k(x) dx} \right) = -k(t) \left(\sigma_s^i e^{-\int_s^t k(x) dx} \right) = -k(t) \sigma_i(s,t)$$

logo:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s,t) dW_s^i = -k(t) \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s,t) dW_s^i = -k(t) \left[r_t - \int_0^t \alpha(s,t) ds - f(0,t) \right]$$

Assim:

$$dr_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(0,t) dt + \int_0^t \|\sigma(s,t)\|^2 ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s,t) \left(\int_s^t \sigma_i(s,u) du \right) ds \right] dt - k(t) \left[r_t - \int_0^t \alpha(s,t) ds - f(0,t) \right] dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i^i dW_t^i$$

$$dr_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(0,t) dt + k(t)f(0,t) + \int_0^t \|\sigma(s,t)\|^2 ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}(s,t) \left(\int_s^t \sigma_i(s,u) du \right) ds + k(t) \int_0^t \alpha(s,t) ds \right] dt - k(t)r_t dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i^i dW_t^i$$

$$dr_t = (\theta(t) - k(t)r_t) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i^i dW_t^i$$

provando o teorema.

7.3 VOLATILIDADES NO MODELO DE UM FATOR DE HULL & WHITE

A partir dos resultados obtidos anteriormente, podemos mostrar para o modelo Hull & White de um fator que:

Teorema: Se $\{r_t\}_{t \geq 0}$ é um processo Markoviano de um fator da forma:

$$dr = (\theta(t) - k(t)r)dt + \sigma_t dW_t,$$

então, modelando a taxa instantânea de juros, a estrutura de volatilidade das taxas a termo $f(t,T)$, denotada por $\sigma_f(t,T)$, é da forma:

$$\sigma_f(t,T) = \sigma_t e^{-\int_t^T k(x) dx} \quad (7.2)$$

e verifica a seguinte identidade, para todo $t \leq T \leq s$:

$$\sigma_f(t,s) = \frac{\sigma_T}{s-t} \frac{(s-t)\sigma_f(t,s) - (T-t)\sigma_f(t,T)}{(T-t)\frac{\partial \sigma_f(t,T)}{\partial T} + \sigma_f(t,T)} \quad (7.3)$$

prova:

Como os preços dos títulos de desconto $V(t, T)$ são da forma:

$$V(r, t, T) = e^{A(t, T) - rB(t, T)} = e^{-(T-t)y(t, T)}$$

Logo

$$-A(t, T) + B(t, T)r_t = (T-t)y(t, T)$$

e daí,

$$(T-t)\sigma_r(t, T) = B(t, T)\sigma_t \quad (7.4)$$

Onde o fator $B(t, T)$ resolve a equação de Riccati

$$\begin{cases} \frac{\partial B(t, s)}{\partial t} = 1 - k(t)B(t, s) - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot B(t, s)^2, s \geq t. \\ B(t, s) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial B(t, s)}{\partial t} + k(t)B(t, s) = 1$$

$$\frac{\partial (B(t, s)e^{-\int_t^s k(x)dx})}{\partial t} = e^{-\int_t^s k(x)dx}$$

e integrando-se entre t e s , resulta em:

$$B(t, s) = \int_t^s e^{-\int_t^{t'} k(x)dx} dt' \quad (7.5)$$

Podemos exemplificar o resultado acima considerando-se o modelo de Hull & White onde $k(x) = a > 0$. Com isso

$$B(t,s) = \int_t^T e^{-a(t-t')} dt' = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

o que equivale ao resultado ao obtido na seção 3.6.

Logo, como $(T-t)\sigma_f(t,T) = B(t,T)\sigma_t$, a relação (7.3) é equivalente à:

$$(s-t)\sigma_f(T,s) = \sigma_t \frac{(s-t)\sigma_f(t,s) - (T-t)\sigma_f(t,T)}{\frac{\partial[(T-t)\sigma_f(t,T)]}{\partial T}}$$

substituindo:

$$B(t,s)\sigma_T = \sigma_T \cdot \frac{B(t,s) - B(t,T)}{\frac{\partial B(t,T)}{\partial T}}$$

Portanto temos que mostrar que:

$$B(t,s) = \frac{B(t,s) - B(t,T)}{\frac{\partial B(t,T)}{\partial T}}$$

Como:

$$B(t,s) - B(t,T) = \int_T^s e^{-\int_t^x k(x) dx} dt', \quad \frac{\partial B(t,T)}{\partial T} = e^{-\int_t^T k(x) dx}$$

Logo:

$$\frac{B(t,s) - B(t,T)}{\frac{\partial B(t,T)}{\partial T}} = \frac{\int_T^s e^{-\int_t^x k(x) dx} dt'}{e^{-\int_t^T k(x) dx}} = \int_T^s e^{-\int_t^T k(x) dx} e^{-\int_T^t k(x) dx} = \int_t^s e^{-\int_t^x k(x) dx} dt' = B(T,s)$$

provando o teorema.

Este resultado mostra que a estrutura de volatilidade do modelo de um fator é muito rígida, isto é, conhecendo a curva $\sigma(t, T)$ vigente em t , determinamos estruturas de volatilidade para tempos maiores que T , o que não observamos nos preços reais de mercado. É importante observar que este resultado não é válido para modelos de taxas de juros com mais de um fator, o que torna o modelo de dois fatores de Hull & White mais indicado para cenários de altas volatilidades e de vários tipos de estruturas a termo de volatilidade, como o caso brasileiro.

Da equação (7.4) temos então que a volatilidade do modelo de um fator de Hull & White é dada por:

$$\sigma_r(t, T) = \frac{\sigma_r}{a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad (7.6)$$

Os resultados obtidos com a calibração do modelo de um fator confirmam essas conclusões de rigidez na estrutura a termo de volatilidade, como mostrado nos gráficos a seguir:

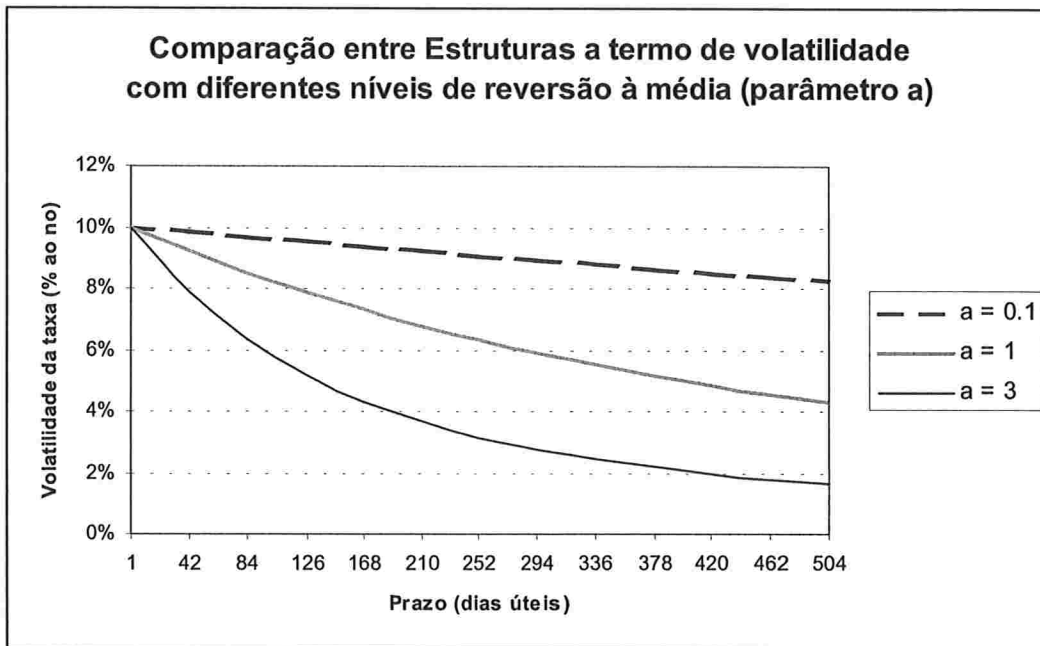


Figura 7.1: Volatilidade das taxas de desconto no modelo de um fator de Hull & White assumindo $\sigma = 10\%$ e variando-se o parâmetro a .

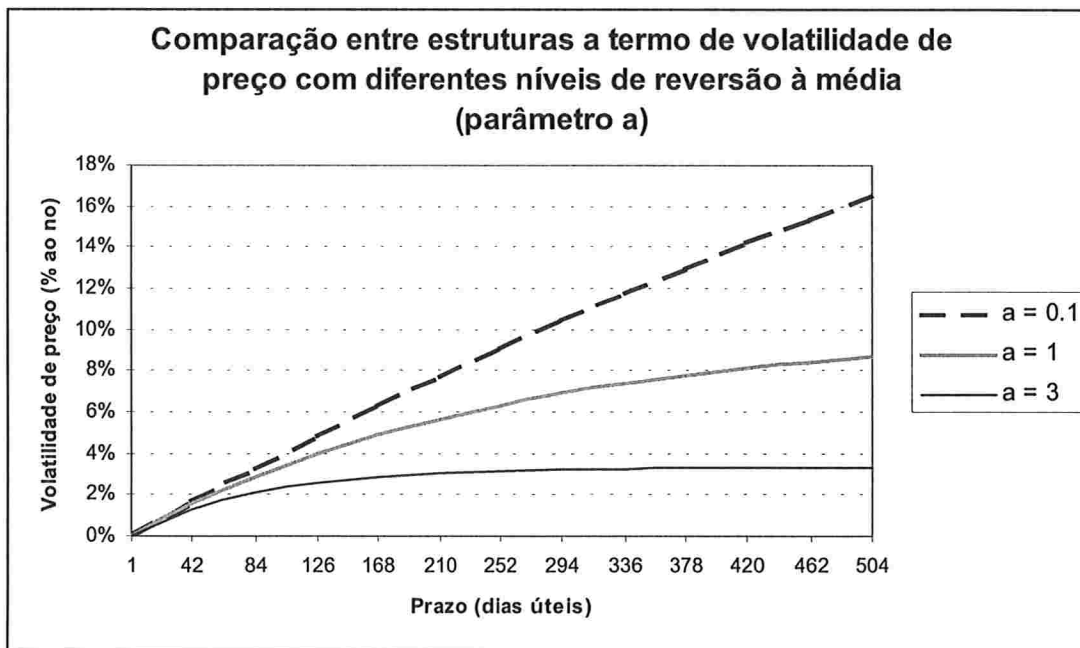


Figura 7.2: Volatilidade dos preços dos títulos de desconto no modelo de um fator de Hull & White assumindo $\sigma = 10\%$ e variando-se o parâmetro a .

Como restrições observadas, a volatilidade das taxas de juros mais longas não pode ser maior que a volatilidade da taxa de curto prazo, o que muitas vezes ocorre no mercado brasileiro (principalmente para prazos de até um ano). Flexibilidade de estruturas a termo, com formatos diferentes dos mostrados acima, também não podem ser observadas.

Para estruturas mais simples que não dependem de todo um espectro de volatilidades, o modelo de um fator pode ser adequado. Mas quando tentamos analisar condições de risco e retorno em vários prazos diferentes devemos buscar outras alternativas.

7.4 VOLATILIDADES NO MODELO DE DOIS FATORES DE HULL & WHITE

Como os resultados de volatilidade obtidos com os modelos de um fator podem não ser adequados para se analisar toda a estrutura a termo de volatilidades, devemos considerar alternativas mais robustas que podem ser obtidas ao adicionarmos mais fatores à modelagem de taxa de juros.

Para um modelo Markoviano de n -fatores $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$, temos que os preços dos títulos pré-fixados são da forma:

$$V(t, T) = e^{A(t, T) - \sum_{i=1}^n B_i(t, T) x_i(t)}$$

e nesse caso as taxas a termo terão uma dinâmica da forma:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log V(t, T)}{\partial T} = \frac{\partial A}{\partial T} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i(t, T)}{\partial T} x_i(t)$$

Aplicando o lema de Itô:

$$d_t f(t, T) = \partial_t \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i^2(t, T)}{\partial t \partial T} dt \cdot x_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i^2(t, T)}{\partial T} dx_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i^2(t, T)}{\partial t \partial T} dt dx_i(t)$$

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} dW_t^i \quad (7.5)$$

e, portanto:

$$\sigma_f(t, T)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sigma_i \frac{\partial B_i(t, T)}{\partial T} \right)^2 + 2 \sum_i \sum_j \sigma_i \sigma_j \frac{\partial B_i(t, T)}{\partial T} \frac{\partial B_j(t, T)}{\partial T} \rho_{ij} \quad (7.6)$$

Para o caso específico do modelo Hull & White de dois fatores, temos que:

$$B_1 = B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

$$B_2 = C(t, T) = \frac{1}{a(b-a)} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{b(b-a)} e^{-b(T-t)} + \frac{1}{ab}$$

Logo a variância das taxas de juros a termo é igual a:

$$\sigma_f(t, T)^2 = \left(\sigma_1 \frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \right)^2 + \left(\sigma_2 \frac{\partial C(t, T)}{\partial T} \right)^2 + 2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \frac{\partial B_1(t, T)}{\partial T} \frac{\partial B_2(t, T)}{\partial T}$$

onde no instante $t=0$, a curva de volatilidade observada para as taxas de desconto ao longo do tempo é:

$$\sigma(0, T) = \left(\frac{1}{T} \right) \sqrt{\sigma_1^2 B(0, T)^2 + \sigma_2^2 C(0, T)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 B(0, T)C(0, T)} \quad (7.7)$$

Com os parâmetros obtidos com a calibração do modelo Hull & White de dois fatores no capítulo anterior, podemos observar os seguintes gráficos de estrutura a termo de volatilidades:

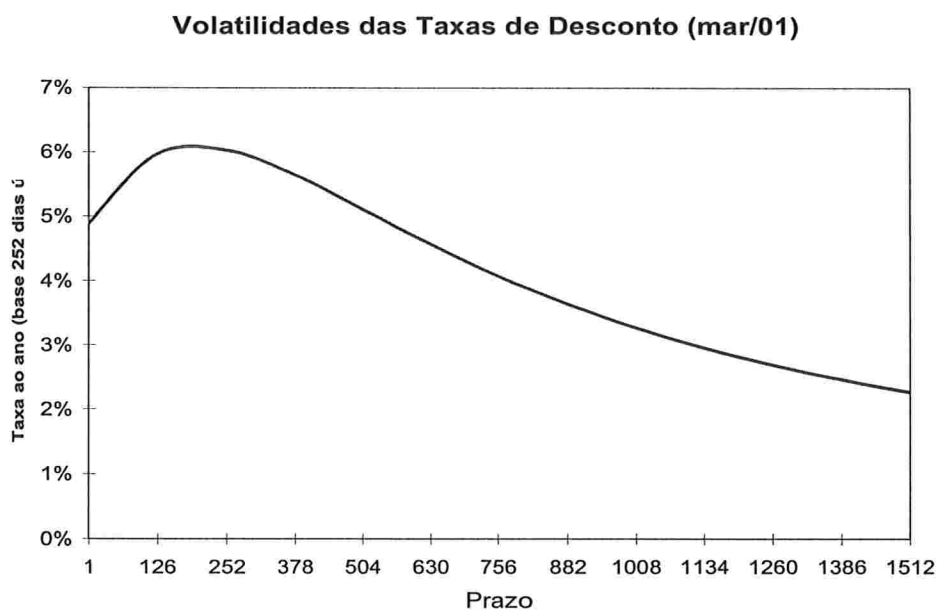


Figura 7.3: Volatilidade das taxas de desconto no modelo de dois fatores de Hull & White para as curvas da situação 1 (março/01).

Volatilidades das Taxas de Desconto (jul/01)

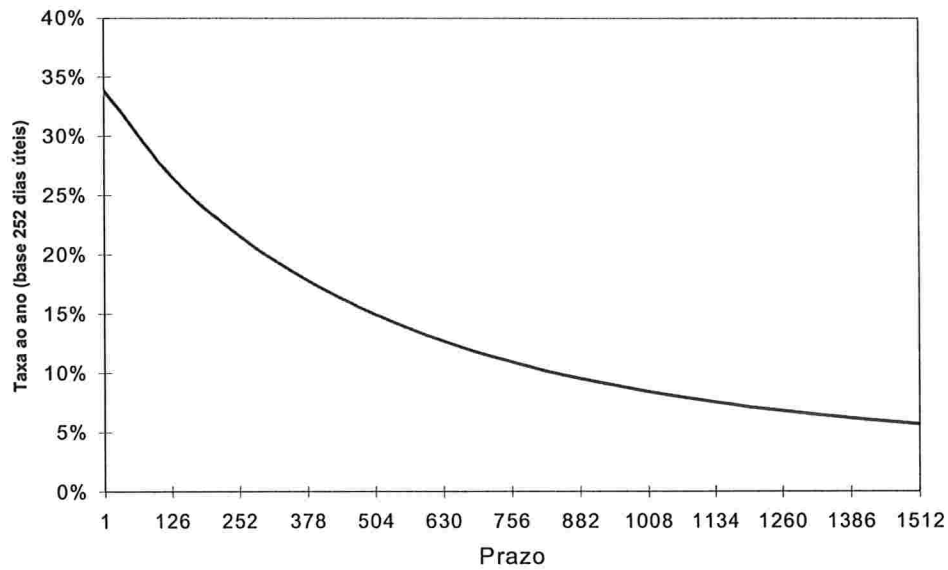


Figura 7.4: Volatilidade das taxas de desconto no modelo de dois fatores de Hull & White para as curvas da situação 2 (julho/01).

Volatilidades das Taxas de Desconto (mar/02)

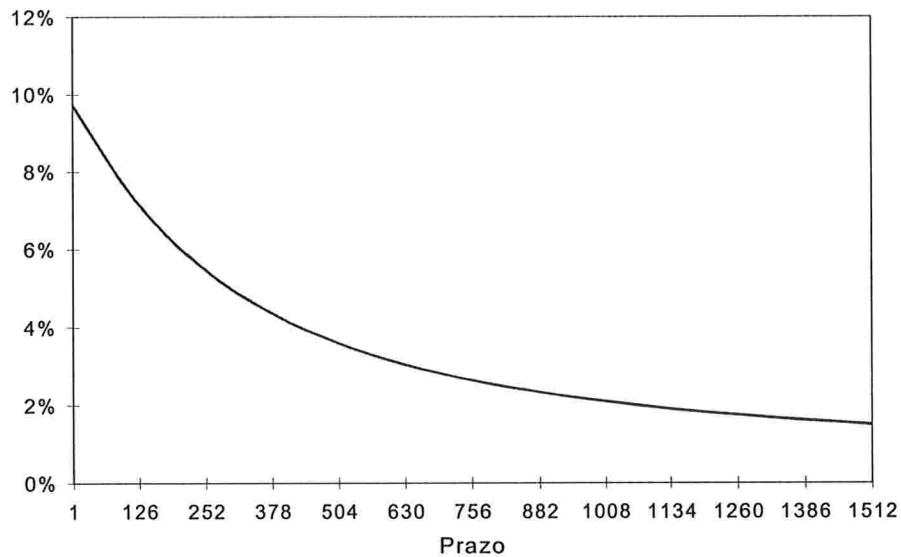


Figura 7.5: Volatilidade das taxas de desconto no modelo de dois fatores de Hull & White para as curvas da situação 3 (novembro/01).

Volatilidades das Taxas de Desconto (nov/01)

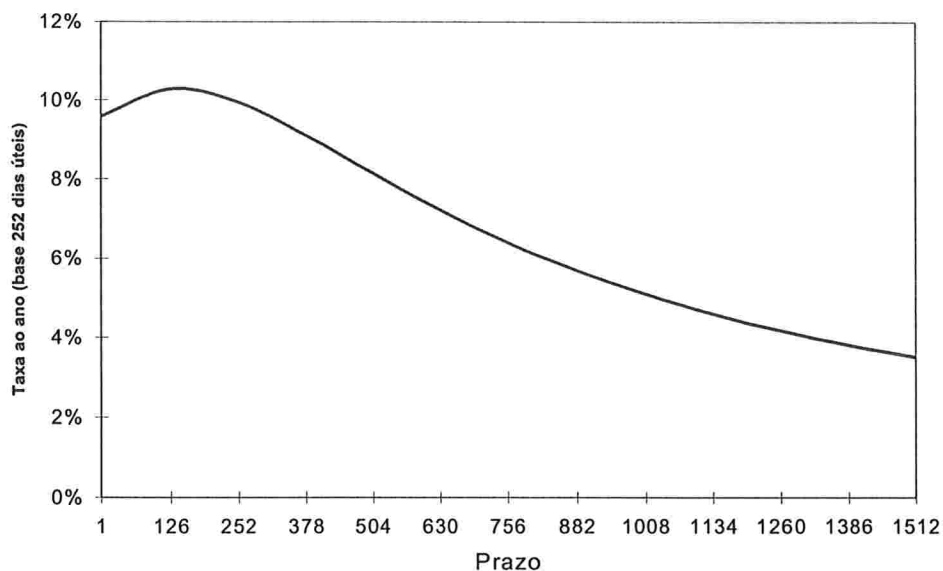


Figura 7.6: Volatilidade das taxas de desconto no modelo de dois fatores de Hull & White para as curvas da situação 4 (março/02).

Os gráficos acima foram extrapolados para prazos de até cinco anos buscando a comparação dos resultados obtidos com as curvas observadas no mercado americano de volatilidades implícitas de taxas de juros. Para as situações onde movimentos na taxa de curto prazo são improváveis, caso das situações 1 e 3, o formato das estruturas a termo de volatilidade obtido para curva brasileira se aproxima muito do formato da curva americana. Através dessa estrutura arqueada, percebemos que, para o caso brasileiro, a volatilidade aumenta para prazos de até um ano (o que de fato percebemos nos dados históricos), e para prazos mais longos, apesar de não termos liquidez de opções, a volatilidade cai, o que seria o correto de se esperar, dado a reversão à média. Para as situações onde movimentos de curto prazo são esperados (mas não necessariamente ocorridos), como nas situações 2 e 4, a volatilidade esperada das taxas de curto prazo tende a ser mais alta que as demais, como mostrado nos gráficos acima. Isso decorre do fato de que diante das expectativas de mudanças de taxas de

curto prazo, as volatilidades desses prazos serão muito mais altas momentaneamente, do que em situações normais.

Além disso, pelo fato desse modelo ser composto por dois fatores estocásticos, e conseqüentemente duas volatilidades, temos que a volatilidade total pode ser explicada por dois tipos de volatilidade: a volatilidade em relação a movimentos paralelos da curva (σ_1) e a volatilidade dos movimentos não paralelos ("*twist volatility*") da curva de juros (σ_2).

Pela equação da volatilidade do modelo de Hull & White de dois fatores (7.7) temos que σ_1 possui uma relação direta com o fator $B(0, T)$ que por sua vez é em grande parte explicado pelo parâmetro a , ou seja, quanto maior o valor de a menor o valor de $B(0, T)$ e conseqüentemente, menor a participação de σ_1 na volatilidade total $\sigma(0, T)$. Por sua vez, σ_2 possui uma relação direta com o fator $C(0, T)$, que também sofre influência do parâmetro a , mas em grande parte é explicado também pelo parâmetro b , ou seja, quanto maior o valor de b menor o valor de $C(0, T)$ e conseqüentemente, menor a participação de σ_2 na volatilidade total $\sigma(0, T)$. Para ilustrarmos essa decomposição de volatilidade, mostramos abaixo, a participação de cada tipo de volatilidade sobre as volatilidades observadas para a volatilidade implícita observada no dia 12 de julho de 2002.

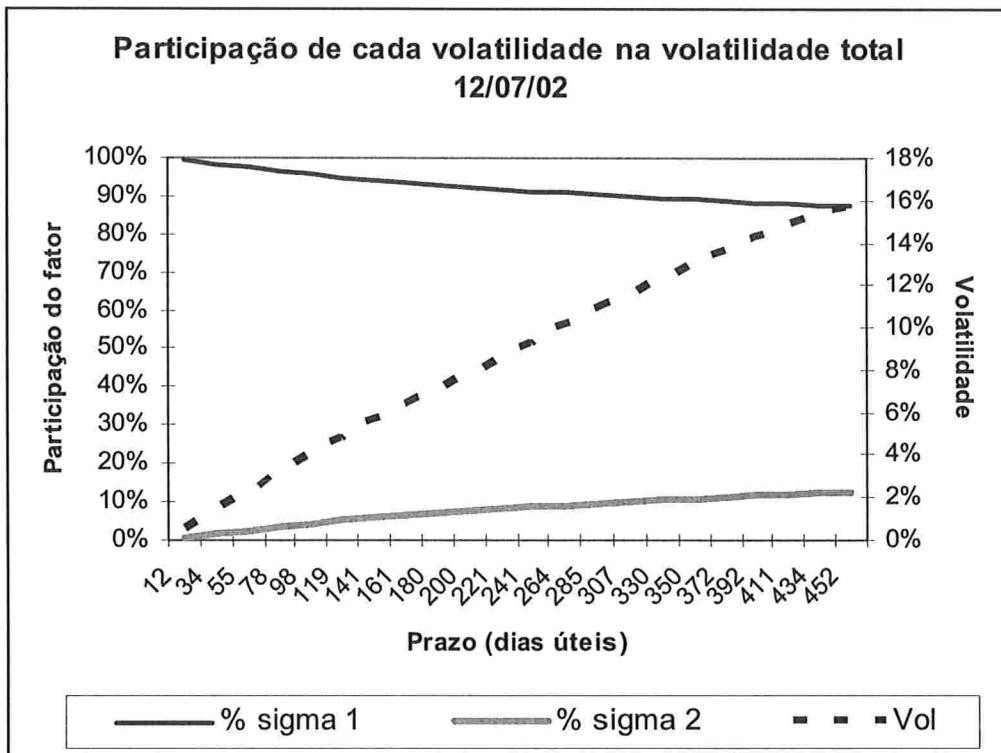


Figura 7.7: Volatilidade implícita observada no dia 12/07/02 e a participação de σ_1 e σ_2 na volatilidade total

De maneira intuitiva, observa-se que quanto maior o prazo de vencimento, maior a participação da volatilidade dos movimentos não paralelos (σ_2) da curva de juros.

Podemos perceber através das estruturas de volatilidade mostradas, que um modelo de dois fatores fornece muito mais possibilidades de formas, e conseqüentemente, de se ajustar às condições reais de mercado. Logo, para aplicações que dependam de estruturas mais flexíveis de volatilidade ou estratégias que dependam de posições relativas entre prazos diferentes, um modelo multifatorial irá proporcionar resultados muito melhores que um modelo de um fator.

CAPÍTULO 8: ESTRATÉGIAS DE INVESTIMENTOS

8.1 INTRODUÇÃO

A estrutura a termo de juros costuma nos dar muitas informações a respeito do que o mercado como um todo espera, na média, que sejam as taxas de juros no futuro. Dados históricos podem também comprovar a existência da reversão à média das taxas de desconto, principalmente quando elas se encontram em níveis historicamente altos. Isso talvez pudesse indicar que, quando as taxas projetadas estão altas, ou a inclinação da curva de juros está acentuada a tendência seria de uma queda nessas projeções. Na maioria dos casos essa premissa pode estar correta, mas tanto o nível da reversão à média quanto a velocidade desta reversão mudam constantemente ao longo do tempo, o que pode levar o investidor a tomar decisões precipitadas analisando-se apenas dados históricos. Ainda mais no caso brasileiro onde as médias históricas sofrem variações significativas, dependendo do período em que a amostra é coletada.

Uma análise mais conceituada, portanto, não deve abrir mão dos principais conceitos financeiros principalmente uma das mais simples, mas que é a principal razão da alocação entre ativos no mundo financeiro: a relação risco/retorno. Para o caso específico de renda fixa, essa relação resume-se aos retornos extras em relação à taxa de juros livre de risco, pela volatilidade esperada, ou em outras palavras: o prêmio de um título de renda fixa compensa o seu risco? Essa relação, também conhecida como índice de Sharpe, é simplesmente:

$$IS = \frac{E[V_{t,T}] - r_f}{\sigma_{V_{t,T}}} \quad (8.1)$$

onde:

$E[V_{t,T}]$ é o retorno esperado em t , de um título de renda fixa que vence em T

r_f é a taxa de juros livre de risco

$\sigma_{V_{t,T}}$ é a volatilidade do título de renda fixa $V_{t,T}$

Como pode ser observado, valor do prêmio de risco, mostrado no capítulo 3 como λ , é a diferença entre o retorno do título e a taxa livre de risco, ou o CDI de um dia para o caso brasileiro. Aqui, porém, temos duas dificuldades: uma em determinar qual é o valor desse prêmio de risco e qual é a volatilidade esperada. E essa dificuldade aumenta a medida que necessitamos determinar esses valores para o maior número possível de vencimentos, a fim de compararmos diversos títulos de renda fixa entre si.

Ao longo desse capítulo analisaremos algumas estratégias de alocações de investimentos ao longo da curva de juros. Essas estratégias podem se basear em diferentes tipos de fatores, como a inclinação da curva de juros, mas elas podem se tornar incompletas no momento em que a volatilidade esperada das taxas de juros não é considerada, ou utiliza-se algum tipo de volatilidade histórica como aproximação da volatilidade esperada. Para o caso brasileiro, porém, dada a grande flutuação nos níveis de volatilidade das taxas de juros, as volatilidades históricas dificilmente se tornam boas estimativas para as volatilidades futuras.

Como analisado no capítulo anterior, as estruturas de volatilidades provindas do modelo de dois fatores de Hull & White possuem boa semelhança com as estruturas de volatilidade observadas no mercado, dado a sua maior flexibilidade de movimentos. O nível da volatilidade também se adequa bastante, pois é obtido com a calibração através da utilização de preço de opções correntes. A estrutura de volatilidade provinda com a calibração aos preços de mercado do modelo de dois fatores de Hull & White, portanto, é uma solução robusta para a

estimativa da volatilidade esperada pelo mercado e também muito mais apropriada que dados históricos. Ao final desse capítulo então, proporemos uma estratégia de investimento em posições de renda fixa utilizando-se o conceito de risco/retorno mostrado por Sharpe e a utilização das estruturas a termo de volatilidade obtidas com o modelo de dois fatores de Hull & White.

8.2 A INCLINAÇÃO DA CURVA DE JUROS

A curva de juros pode assumir diversas formas ao longo do tempo, como visto nos cenários utilizados como exemplos na calibração do modelo de dois fatores de Hull & White. Com exceção da taxa Selic de um dia, que é determinada pelo Comitê de Política Monetária do Banco Central (COPOM)¹, todas as taxas dos demais prazos são determinados pelo mercado, assumindo como ponto de partida o CDI, que também é uma taxa de um dia, tem como base a taxa Selic e é a taxa utilizada no mercado brasileiro como a taxa livre de risco. Historicamente, os valores dessas taxas sempre foram muito próximos e salvo ressalva, assumiremos nas análises que se seguirem, que a taxa CDI terá retornos iguais às taxas Selic determinadas pelo COPOM.

Na grande maioria das vezes, a curva de juros terá uma inclinação positiva para todos os pontos, indicando que quanto maior o prazo maior a taxa de retorno esperado em um título pré-fixado. A dinâmica instantânea para o preço desses títulos pode então, ser escrita como:

$$\frac{dV_{t,x}}{V_{t,x}} = (r_t + \alpha_{r,t})dt + \sigma_{r,t}dW_t \quad (8.2)$$

¹ Houve períodos no passado onde a determinação da taxa de um dia não era decidida por um comitê em reuniões regulares, assim como não há garantias de que o modelo do COPOM existente na data da realização deste trabalho se mantenha no futuro.

onde $\alpha_{\tau,t}$ denota o retorno instantâneo esperado em excesso pela manutenção do título pré-fixado. Os valores de $\alpha_{\tau,t}$ por sua vez também possuem uma dinâmica própria podendo aumentar ou diminuir em função do prazo ou em função da forma da curva de juros, o mesmo ocorrendo com a volatilidade $\sigma_{\tau,t}$, como observado no capítulo anterior.

Em uma primeira análise, poderíamos assumir que os valores dos prêmios de risco seriam o equivalente a diferença entre a taxa paga pelo título e a taxa livre de risco, ou seja, o valor da inclinação da curva de juros.

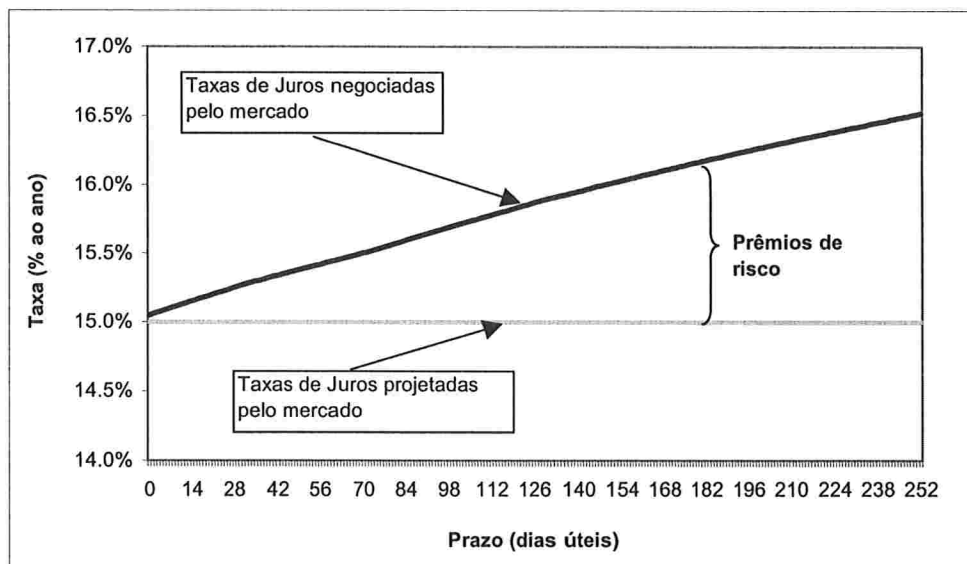


Figura 8.1: Inclinação da curva de juros e taxas de juros esperadas pelo mercado.

Nessa análise, estamos assumindo que a taxa livre de risco é sempre um Martingale, ou seja

$$E_t[r_\tau] = r_t$$

As taxas livres de risco, porém, nem sempre são Martingales, pois existem vários fatores econômicos envolvidos no seu direcionamento. Este fato fica mais

claro no momento em que o mercado negocia taxas de desconto abaixo da taxa livre de risco, como ocorre nas situações em que temos curvas de juros com períodos de inclinação negativa. Isso ocorre não porque existem oportunidades de arbitragem, mas sim porque o mercado já apreça quedas na taxa de juros livre de risco para as próximas reuniões da autoridade monetária. Como essa taxa muito provavelmente estará mudando ao longo do tempo, a composição contínua das taxas livres de risco esperadas pelo mercado também estará mudando. Com isso, apesar de as taxas de desconto estarem abaixo da taxa livre de risco instantânea, elas também possuem prêmios de risco.

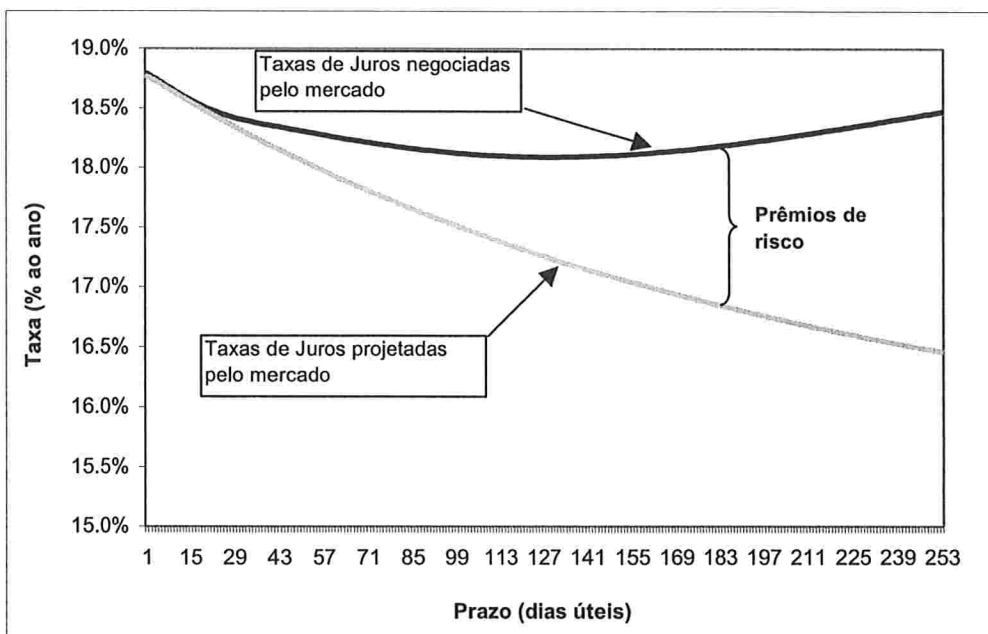


Figura 8.2: Prêmios de risco com curva de juros negativamente inclinada.

Diante da existência de uma data específica para uma provável mudança na taxa livre de risco, a curva de juros não pode ser simplesmente interpolada entre os prazos que possuem liquidez imediatamente antes e imediatamente depois dessa data. Apenas com exemplo, assumindo-se que uma curva de juros é construída utilizando os prazos de 1 dia e de 20 dias úteis e que existe uma reunião do Copom no 10º dia útil. As taxas atuais estão em 19% ao ano e o mercado trabalha com probabilidade de 100% de queda da Selic para 18% ao

ano. Assumindo que não temos prêmios de risco, a curva utilizando-se o método de interpolação linear, e a curva contabilizando-se as taxas a termo esperadas seriam:

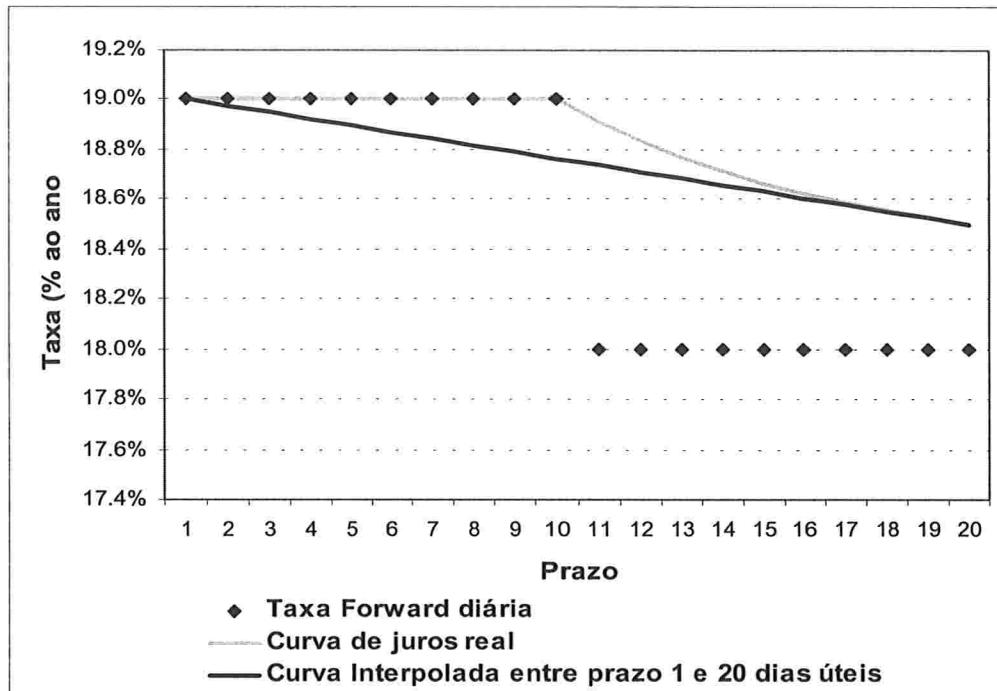


Figura 8.3: gráfico comparativo de curvas de juros na presença de mudança de juros no meio do período.

Portanto, o procedimento para se identificar o prêmio de risco mostrado através da figura (8.1), não é um procedimento condizente com uma abordagem de ajuste ao risco. Mesmo com uma curva de juros positivamente inclinada, essa abordagem também não deve ser utilizada, pois probabilidades de mudanças nas taxas de juros livre de risco podem estar sendo verificadas e apreçadas ao longo das taxas de desconto. Portanto, a utilização do prêmio do risco como a simples diferença entre a inclinação da curva de juros e a taxa de um dia pode levar a relações de risco/retorno muito distintas ao longo das várias taxas de desconto da estrutura a termo de juros, que não significam necessariamente estratégias ótimas ou estratégias sub-ótimas para títulos pré-fixados.

8.3 ESTRATÉGIAS DE ALOCAÇÃO DE INVESTIMENTO

Nessa seção discutiremos vantagens e desvantagens de algumas estratégias utilizadas para decisões de investimentos ao longo da curva de juros e analisaremos um processo utilizando a estrutura a termo de volatilidades obtida com o modelo de dois fatores de Hull & White.

8.3.1 OPERAÇÕES DE PRÊMIOS RELATIVOS (“INTRAMARKET RELATIVE TRADES”)

Esse tipo de operação é muito utilizado na análise de *spreads* de títulos com mesma maturidade, mas com qualidades de créditos diferentes (“*intermarkets spreads*”), onde compara-se os prêmios de risco atuais com os prêmios de risco históricos, e assume-se que os níveis atuais tenderão a reverter-se à média. Este tipo de análise pode ser utilizado na análise de diversos títulos com mesma qualidade de crédito, mas que apresentam retornos esperados diferentes devido aos prazos até o vencimento distintos. Buscando-se quantificar o quanto a diferença dos retornos se distancia da diferença média histórica, utiliza-se a seguinte relação:

$$\frac{(Y_1 - Y_2)}{\bar{M}_{(1-2)}} = n$$

onde

$(Y_1 - Y_2)$ é a diferença dos retornos entre o título de desconto 1 e o título de desconto 2;

$\bar{M}_{(1-2)}$ é a média histórica dos retornos desses títulos;

n é o número dos desvios padrão relativo ao *spread* atual.

Sabendo-se o valor do número de desvios padrão do *spread* atual sabe-se a probabilidade, assumindo uma distribuição normal, da ocorrência desse nível de *spread*. Como essa análise é realizada para todos os títulos entre si, obtém-se uma matriz com todas as probabilidades de ocorrência e então assume-se as posições compradas e vendidas nesses *spreads* de acordo com os valores mais improváveis. Esse tipo de estratégia é muito utilizado para apostas de movimentos não paralelos da curva de juros, ou seja, ao assumir posições compradas e vendidas para diferentes prazos, pode-se obter várias exposições em taxas a termo (ou FRAs – “*forward rate agreement*”), com alta exposição em convexidade, mas com uma exposição em duration igual a zero. O gráfico a seguir mostra o comportamento dos *spreads* de taxa dos prazos de 42, 126, 252 e 504 dias úteis contra o a taxa de 21 dias úteis.

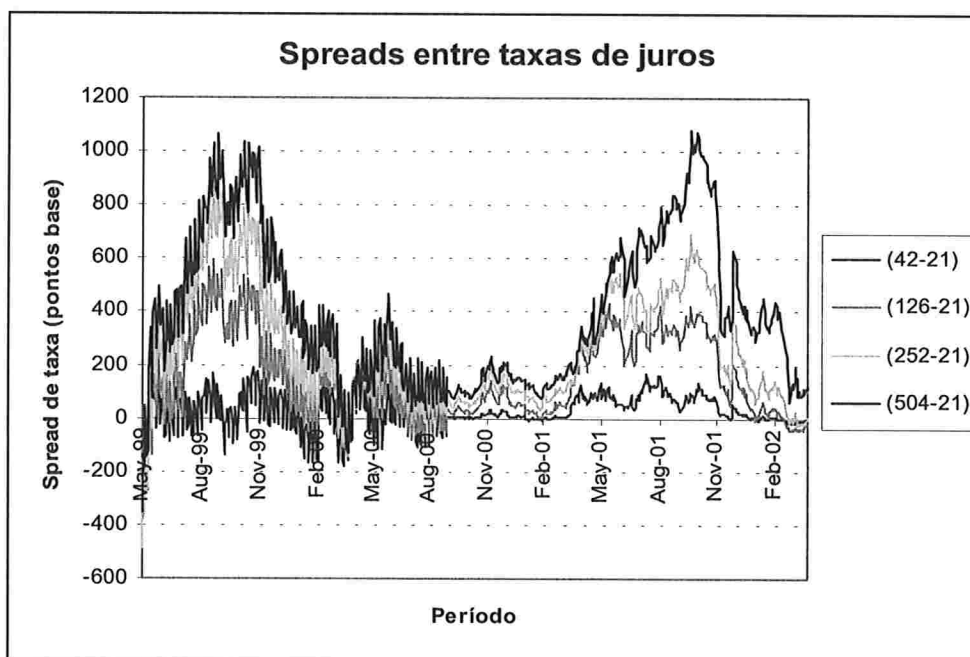


Figura 8.4: Comportamento dos *spreads* de taxas ao longo do tempo

Pode-se observar que historicamente, esses *spreads* sempre tendem a retornar à uma média, mas o nível em que elas reverterem variam bastante. Portanto, na utilização dessa estratégia, principalmente para o caso brasileiro, deve-se estar

atento que os dados históricos são escassos para análises estatísticas mais consistentes (o mercado americano, por exemplo, possui séries históricas com mais de 30 anos), as médias variam bastante, sendo dependentes do período em que a série é coletada, e a distribuição desses *spreads* está longe de ser uma distribuição normal, principalmente nos valores mais elevados.

8.3.2 CARREGAMENTO DAS POSIÇÕES DESCENDO A CURVA DE JUROS (“ROLLING DOWN THE YIELD CURVE”)

Essa operação consiste em aproveitar a inclinação da curva de juros de modo a se obter retornos extras com a convergência das taxas de médio e longo prazo para a taxa de curto prazo. O gráfico a seguir ilustra essa estratégia para o período de um dia, assumindo que a curva de juros em $t=1$ é exatamente igual a curva em $t=0$:

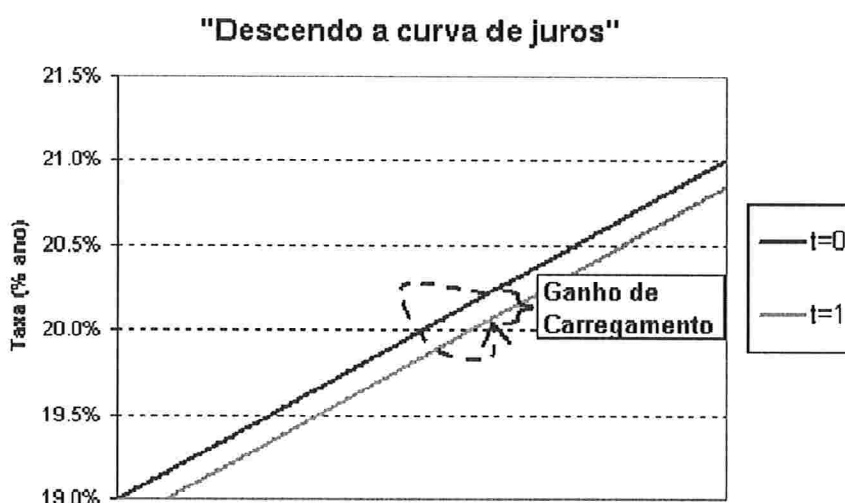


Figura 8.5: Exemplo de uma estratégia “rolling down the yield curve”

Para esse caso, como a inclinação é constante ao longo de toda a curva, os ganhos com essa estratégia, caso não houvesse mudança na curva de juros entre dois dias, seriam semelhantes em todos os pontos da curva, assumindo-se

que todas as estratégias tenham a mesma duration. Essa estratégia pode fazer diferença no momento em que temos diferentes inclinações ao longo da curva de juros. Tomemos como exemplo a curva do dia 20/11/01:

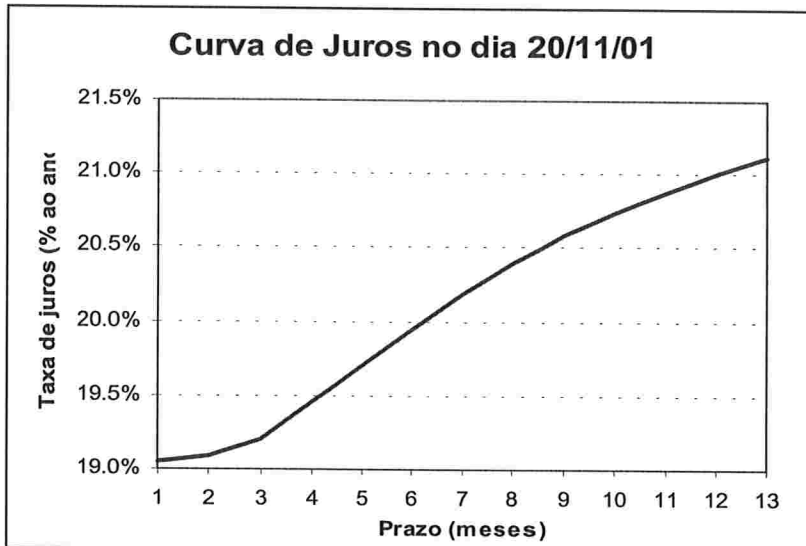


Figura 8.6: Curva de juros no dia 20/11/02

Podemos claramente perceber possibilidades de ganhos maiores, nos períodos onde a curva está mais inclinada, principalmente nos períodos entre 3 e 9 meses. Para o curto prazo, ganhos com essa estratégia seriam praticamente inexistentes.

Essa estratégia pode não ser eficiente no momento em que a inclinação maior da curva pode estar relacionada com uma volatilidade relativamente maior, o que de fato ocorre, dado que os mercados estão bem apreçados. Implicitamente então, essa estratégia faz uma aposta de que a volatilidade realizada (*ex-post*) será menor que a volatilidade esperada (*ex-ante*).

8.3.3 O PRÊMIO DE RISCO E A TAXA LIVRE DE RISCO IMPLÍCITA NA ESTRUTURA A TERMO DE JUROS

Na estratégia de investimento a seguir utilizaremos um procedimento de comparação de investimentos utilizando-se os prêmios esperados para os títulos de renda fixa implícitos na curva de juros juntamente com a estrutura a termo de volatilidades provinda da utilização do modelo de dois fatores de Hull & White. Buscando-se apreçar os prêmios de risco ao longo da estrutura a termo de juros, assumiremos inicialmente, que todos os títulos de desconto com liquidez, ou contratos derivativos que repliquem o comportamento de títulos de desconto (como os DI's futuros, por exemplo), tenham a cada instante do tempo a mesma relação risco/retorno, medidas pelo índice (8.1), ou seja, assumindo-se que temos n títulos com liquidez cujos vencimentos ocorrem a cada 30 dias temos que:

$$IS_{t+\Delta t} = IS_{t+i,\Delta t} \quad \text{com } \Delta t = 30 \text{ dias e } i = 2 \dots n.$$

o que gera uma relação linear entre as volatilidades dos títulos e os retornos extra esperados.

Nesse caso temos duas situações: o Índice de Sharpe instantâneo (conforme a equação 8.2), ou o Índice de Sharpe de um título entre a compra e o seu vencimento (conforme os gráficos 8.1 e 8.2). Essa diferença ocorre no momento em que a volatilidade de preço de um título de renda fixa decai conforme o vencimento se aproxima, ou seja, um título de desconto, ao contrário de uma ação, não possui uma volatilidade esperada constante. O mesmo ocorre com o prêmio de risco. Para ilustrarmos esse ponto, consideremos um título de renda fixa de 200 dias úteis (T) que possui um prêmio de, por exemplo, 100 pontos base anualizado (1% ao ano) em relação à taxa livre de risco, significa que o prêmio médio até o seu vencimento é de 100 pontos base e não o seu prêmio de risco instantâneo. Assumindo esse horizonte instantâneo igual a um dia, e

assumido um crescimento linear do prêmio conforme a maturidade, temos que o prêmio de risco de um investidor que carrega esse título por um dia (de $t=0$ até $t=1$, com $T=200$), é de 200 pontos base anualizado, ou seja 2% ao ano (o equivalente ao valor de $\alpha_{T,t}$ da equação (8.2)). Esse prêmio de risco, assim como a volatilidade, decai até o seu vencimento, quando no limite de $t \rightarrow T$ então, o prêmio de risco é igual a zero.

Utilizando o conceito de Índice de Sharpe até a maturidade, tentaremos obter quais devem ser as taxas livres de risco ao longo do tempo de modo que a relação prêmio de risco e volatilidade se mantenha constante ao longo do tempo. Como a taxa livre de risco pode mudar regularmente, devemos obter as diversas taxas livres de risco a termo de modo que as taxas de desconto livres de risco compostas reproduzam prêmios de risco consistentes com as volatilidades. Como esse processo pode ter diversas soluções, devemos incluir uma relação risco retorno inicial de modo que todos os demais resultados convirjam para esse valor inicial. Para o caso de considerarmos apenas o mercado de juros, não possuímos uma referência para qual seria o prêmio de risco de mercado, e conseqüentemente o índice de Sharpe do mercado, o que facilitaria a solução. Devemos então estimar com a menor variância possível, qual seria esse valor para utilizarmos em toda a curva de juros.

Para obtermos a menor variância possível, devemos considerar o título com a menor volatilidade esperada, o que no nosso caso poderia ser um título de 21 dias úteis, assumindo que temos prazos com liquidez a cada 21 dias úteis. Essa escolha é fortalecida no caso de existir apenas uma possibilidade de mudança na taxa Selic até o vencimento desse título, que se tornaria a única fonte de erro do processo. Como exemplo, podemos analisar o que poderia estar implícito nos preços da curva do dia 12 de julho de 2002. Os preços dos títulos são de dados fornecidos pela BM&F e a volatilidade foi obtida com o modelo de dois fatores de Hull & White descrita no capítulo anterior.

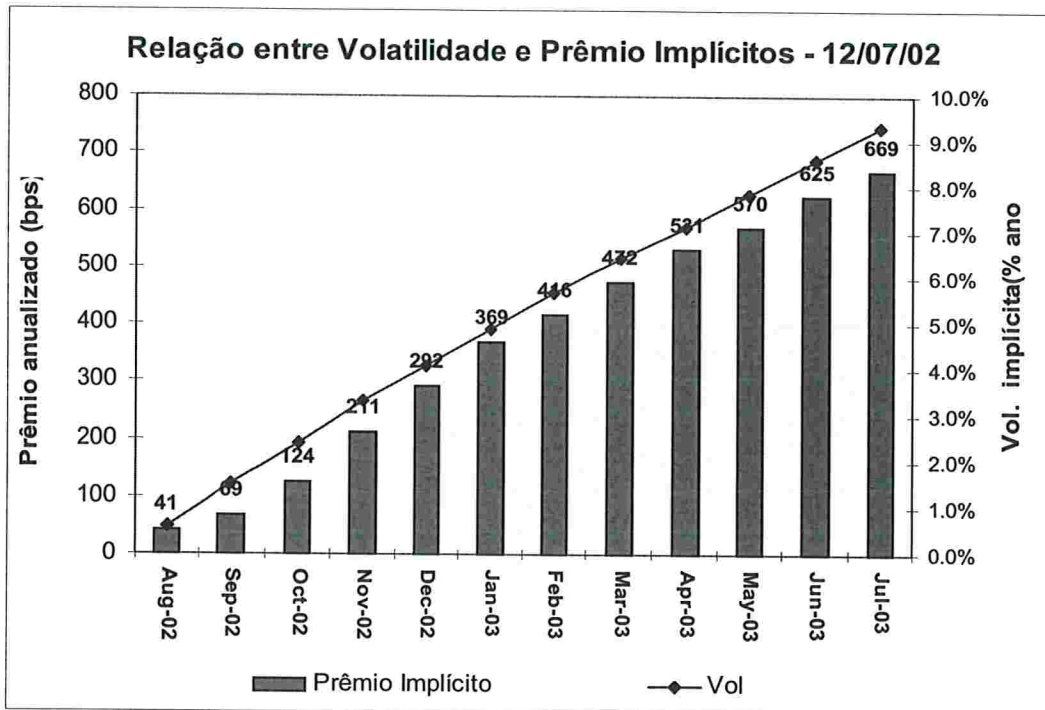


Tabela 8.7: Preços de mercado e volatilidades implícitas em 12/07/02

Os prêmios de risco mostrados acima são obtidos de maneira que, para todos os prazos, a relação retorno pelo risco medida pelo Índice de Sharpe, sejam iguais. Logo, para que consigamos obter esses prêmios de risco para esses diferentes prazos de investimento, temos que as taxas livres de risco ao longo do tempo, ou nesse caso as taxas Selic a serem definidas pelo Copom a cada mês, devem ser:

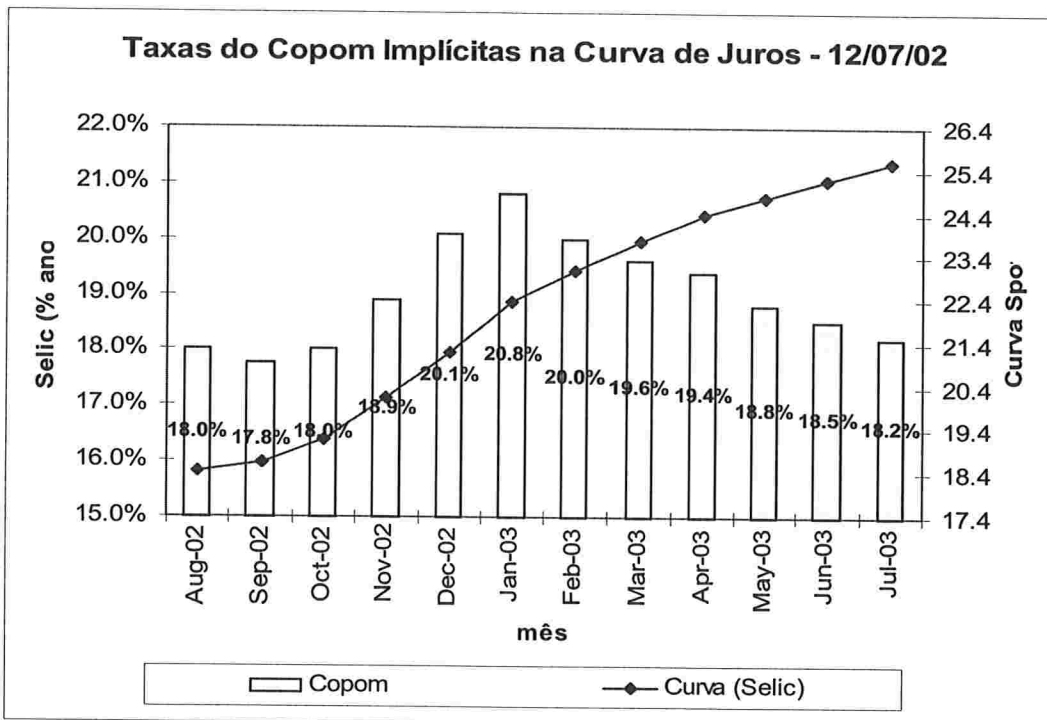


Tabela 8.8: Projeções das taxas livres de risco a termo e de desconto

Podemos perceber que através dessa análise, o mercado apreçava uma queda da taxa Selic para o curto prazo, de 18,5% para 17,8% ao mesmo tempo em que esperava um aumento dessa mesma taxa a partir de outubro, terminando o ano de 2002 com uma taxa Selic equivalente a 20,8%. Esse aumento das projeções poderiam estar indicando incertezas do mercado quanto às eleições, pois nesse período onde esse aumento de juros ocorreria, já se saberia quem seria o novo presidente para os próximos quatro anos.

Observando-se atentamente esses resultados, podemos então basear as decisões de investimento nos diferentes prazos ao longo da curva, quando temos convicções sobre o comportamento da taxa livre de risco, diferentes daquelas projetadas pelo mercado. Caso acreditemos que a taxa de um dia seja mantida em 18,5% até o final do ano, podemos perceber ótimas oportunidades ao longo da curva de juros como, por exemplo, obter uma posição em taxa *forward* (FRA) de três meses através de uma posição comprada em taxa para o

final de outubro, ao mesmo tempo em que assumiríamos uma posição vendida em taxa para o final de janeiro. Outros tipos de estratégia de investimentos ou posicionamentos ao longo da curva de juros podem ocorrer ao longo dos vencimentos, caso nossas convicções sobre as taxas Selic futuras sejam diferentes das projetadas nessa análise.

Outro tipo de estratégia que podemos assumir é a aposta entre os prêmios de risco esperados para cada fator. Como mostrado no capítulo anterior, a volatilidade dos títulos de desconto pode ser decomposta em duas dimensões de risco no modelo de Hull & White de dois fatores. Conseqüentemente, para cada tipo de risco incorrido devemos esperar um prêmio de risco específico, de maneira que não tenhamos oportunidades de arbitragem ao longo da curva de juros através de relações prêmios de risco por volatilidade diferentes. Logo, podemos decompor o prêmio de risco total em dois, cada um referente a cada tipo de movimento da curva de juros. Para o caso do dia 12 de julho de 2002 analisado no final do capítulo anterior temos que os prêmios de risco por fator seriam:

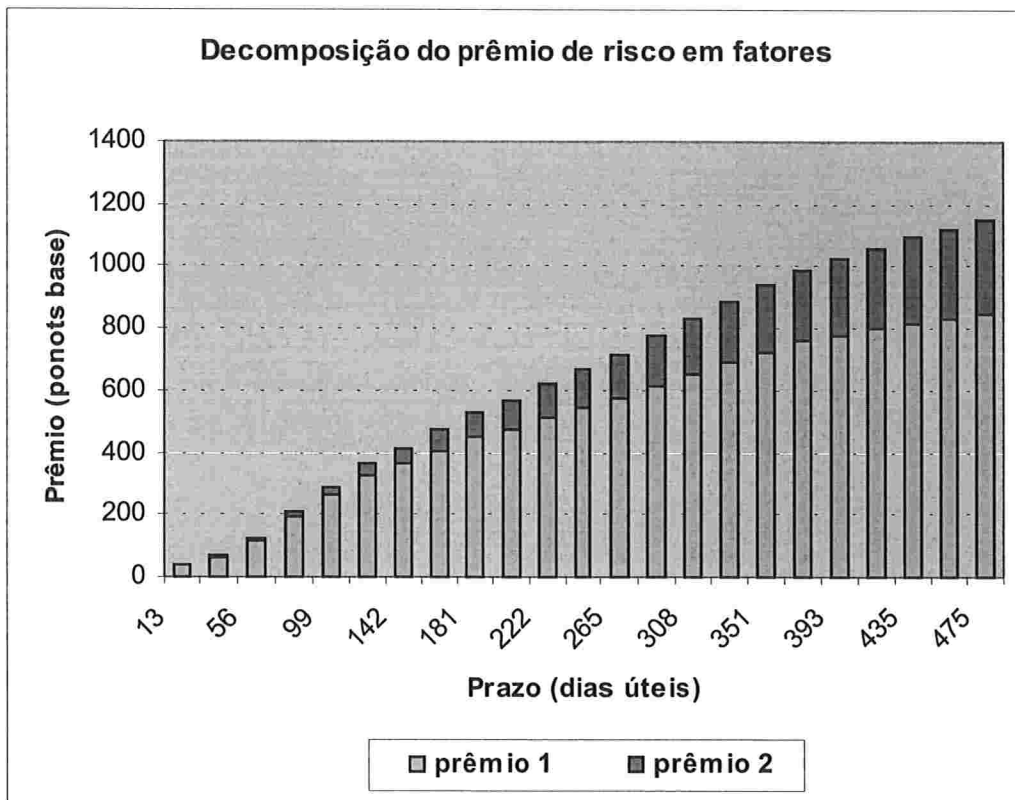


Figura 8.9: Decomposição do prêmio de risco em duas dimensões

Assim como no caso das volatilidades, podemos perceber que quanto maior os prazos de vencimento maiores os prêmios de risco por movimentos não paralelos da curva de juros. As oportunidades de investimento podem surgir no momento que análises proprietárias indicarem prêmios de risco por fator diferentes das observadas no mercado. Caso acreditemos, por exemplo, que possa ocorrer uma diminuição na inclinação maior para os prazos mais longos maior que os prêmios pelo fator 2 indicam, estaríamos priorizando posições compradas em títulos de longo prazo ao invés de posições de curto prazo, ou vice-versa, caso acreditássemos que um movimento paralelo seja mais provável do que os preços de mercado indicam.

CAPÍTULO 9: CONCLUSÕES FINAIS

Como a utilização de dados históricos das curvas de juros brasileira apresenta diversas restrições, a sua utilização para a tomada de decisões pode não ser adequada. Os dados são limitados para análises estatísticas mais significativas e também resultam de ambientes econômicos e políticas cambiais distintas, resultando em dinâmicas de taxas de juros diferentes ao longo do tempo. Logo, a volatilidade histórica pode não ser um parâmetro para a volatilidade esperada, assim como as diferenças entre as taxas de juros de curto e de longo prazo não possuem um padrão histórico bem definido.

A utilização de modelos de taxas de juros para se obter estruturas a termo de volatilidades então, cumpriu o seu objetivo, principalmente a implementação do modelo de dois fatores de Hull & White. A implementação do modelo de um fator de Hull & White para o mercado brasileiro, apesar de possuir vantagens como a maior facilidade de programação, implementação e calibração, não deve ser utilizada para a obtenção de estruturas a termo de volatilidade que influenciem na análise de preços relativos, pois ao assumirem correlações iguais para todas as taxas de desconto, deixa a curva muito rígida em sua dinâmica.

Já com a implementação do modelo de dois fatores de Hull & White, utilizando-se opções de taxas de juros para alguns vencimentos, dada a restrição de liquidez do mercado brasileiro para esses instrumentos, foram obtidas estruturas flexíveis de volatilidade, que não seriam possíveis com modelos de um fator, preços condizentes com a realidade observada no mercado e volatilidades para os mais diversos vencimentos, onde as opções de taxas de juros não são nem sequer cotadas. A programação, porém, é muito mais complexa e demorada e a calibração requer cuidados específicos, como conhecimento de mercado e repetições do processo de otimização, evitando-se assim, parâmetros que não sejam condizentes com a realidade de mercado.

Utilizando-se esses resultados de volatilidade, pudemos analisar em mais detalhes fatores implícitos na curva de juros, que não levam em conta apenas *spreads* de taxas, mas sim processos ajustados ao risco, de extrema importância para uma estratégia de alocações de investimento. O método proposto de quantificação dos prêmios esperados em função da volatilidade esperada foi fundamental nesse ponto.

A quantificação pura e simples dos prêmios de risco esperados para as posições de renda fixa ao longo do tempo, no entanto, não é condição suficiente para uma decisão correta de investimento. Mostramos também que a análise das taxas livres de risco esperadas pelo mercado deve ser considerada dentro de um contexto econômico consistente com as expectativas do investidor. Esse fato também tem uma parte importante no processo, indo além da tomada de decisão baseada em métodos puramente quantitativos.

BIBLIOGRAFIA

- Ahlgrim, Kevin.** "Multifactor Interest Rate Models and Dynamic Financial Analysis". University of Illinois, 2000.
- Avellaneda, Marco.** "Affine Term-Structure Models" – Notas de aula – New York University.
- Bliss, Robert.** "Movements in the Term Structure of Interest Rate". Federal Reserve Bank of Atlanta – Economic Review, 1997.
- Chapman, D. & Pearson N.** "Recent Advances in Estimating Term-Structure Models". Financial Analysts Journal, 2001.
- Clelow, L. & Strickland, C.** *Implementing Derivatives Models*. John Wiley, 1998.
- Duffee, Gregory.** "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models". The Journal of Finance, 2002.
- Engle, Robert.** "Time-Varying Volatility and the Dynamic Behavior of the Term Structure". National Bureau of Economic Research, 1991.
- Fabozzi, Frank.** *The Handbook of Fixed Income Securities*. McGraw-Hill, 1997.
- Grant, D. & Vora, G.** "An Analytical Implementation of the Hull and White Model". Journal of Derivatives, 2001.
- Gupta, A. & Subrahmanyam, M.** "An Examination of the Static and Dynamic Performance of Interest Rate Option Pricing Models in the Dollar Cap-Floor Market." Weatherhead School of Management/Leonard N. Stern School of Management, 2000.
- Ho, T. & Lee, S.** "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". Journal of Finance, 1986.
- Hull, J & White, A.** "Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-factor models". Journal of Derivatives 2, 1994a.
- Hull, J & White, A.** "Numerical procedures for implementing term structure models II: Two-factor models". Journal of Derivatives 2, 1994b.
- Hull, J & White, A.** "One-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities". Journal of Finance and Quantitative Analysis, 1993.

- Hull, J & White, A.** "Pricing interest rate derivative securities". *The Review of Financial Studies*, vol. 3, 1990.
- Hull, J & White, A.** "Using Hull-White interest rate trees". *Journal of Derivatives*, 1996.
- Hull, John.** *Options Futures and other Derivatives*. Prentice-Hall, 1997.
- Ingersoll, J.** *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield, 1987.
- James, J. & Webber N.** *Interest Rate Modeling*. John Wiley, 2000.
- Litterman, R. & Scheinkman.** "Common Factors Affecting Bond Returns". *Journal of Fixed Income*, 1991.
- Luenberger, David.** *Investment Science*. New York, Oxford, 1998.
- Mikosch, Thomas.** *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. World Scientific, 1998.
- Neftci, Salih.** *An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, 1996.
- Rebonato, Riccardo.** *Interest-Rate Option Models*. John Wiley, 1996.
- Ryan, Ronald.** *Yield Curve Dynamics*. Fitzroy Deaborn Publishers, 1997.
- Schirmer, Pedro** "Modelos de Taxas de Juros" – Notas de aula. FEA/IME Universidade de São Paulo.
- Schirmer, Pedro** "Volatilidades em Modelos de Taxas de Juros Markovianos" – Notas de aula. FEA/IME Universidade de São Paulo.
- Schonbucher, Philipp.** "A Tree Implementation of a Credit Spread Model for Credit Derivatives". Bonn University, 1999.
- Sharpe, William.** *Investments*. Prentice-Hall, 1985.
- Tabak, B. & Andrade, S.** "Testing the Expectations Hypothesis in the Brazilian Term Structure of Interest Rates". Working Paper Series - Banco Central do Brasil, 2001.
- Vasicek, Oldrich.** "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Finance*, 1977.

Wilmott, P., Howison, S. & Dewynne, J. *The Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, 1995.

Wilmott, Paul. *Quantitative Finance volumes 1 e 2*. John Wiley, 2000.