INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Autarquia associada à Universidade de São Paulo

Solução Analítica da Cinética Espacial do Modelo de Difusão para Sistemas Homogêneos Subcríticos acionados por Fonte Externa

FERNANDO LUIZ DE OLIVEIRA

SÃO PAULO
2008

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Autarquia associada à Universidade de São Paulo

Solução Analítica da Cinética Espacial do Modelo de Difusão para Sistemas Homogêneos Subcríticos acionados por Fonte Externa

FERNANDO LUIZ DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Ciências da Área de Tecnologia Nuclear - Reatores.

Orientador: Prof. Dr. José Rubens Maiorino

SÃO PAULO
2008

Oliveira, Fernando Luiz de.
Solução Analítica da Cinética Espacial do Modelo de Difusão para Sistemas Homogêneos Subcríticos acionados por Fonte Externa / Fernando Luiz de Oliveira; orientador José Rubens Maiorino. – São Paulo, 2008
72 f.

Dissertação (Mestrado em Ciências – Área: Tecnologia Nuclear - Reatores) – Instituto de Pesquisas Energética e Nucleares

1.Cinética de Reatores. 2. Física de Reatores. I. Título

A Miguel, meu primeiro filho,
estímulo para a conclusão
deste trabalho.

AGRADECIMENTO

Ao Prof.Dr. José Rubens Maiorino pela paciência e orientação.

Ao Prof. Dr. Rubens Santos, do IEN, pelos resultados numéricos.

Ao Prof. Dr. Adimir dos Santos, do CEN, pelas importantes observações.

Ao Prof. Dr. Piero Ravetto, do Politecnico de Torino, pelo curso de Dinâmica de Reatores, que foi fundamental para a realização desta pesquisa.

Aos meus colegas da pós-graduação do CEN pelo companheirismo.

À toda a equipe do CEN e da secretaria da pós-graduação do IPEN, pelo apoio institucional.

Em especial, à minha esposa Daniela, pelo total apoio e compreensão ao longo de toda esta jornada.

À CNEN pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma solução analítica obtida pelo método de expansão para cinética espacial usando o modelo de difusão e considerando meios homogêneos multiplicativos subcríticos acionados por fonte externa. Em particular, partindo de modelos mais simples e aumentando a complexidade do sistema, resultados foram obtidos para diferentes tipos de transientes. Inicialmente, uma solução analítica foi obtida considerando um grupo de energia sem nêutrons atrasados, em seguida considerou-se um sistema de um grupo de energia e uma família de precursores. A solução para o caso G grupos de energia e R famílias de precursores em forma fechada é obtida, apesar do fato que não possa ser resolvido analiticamente, uma vez que não existe forma explícita para os autovalores e métodos numéricos devem ser utilizados para resolver tal problema. Para ilustrar a solução geral um problema de multigrupo (três grupos de energia) dependente do tempo sem precursores é apresentada e os resultados numéricos obtidos usando um código de diferenças finitas são comparados com os resultados exatos para diferentes tipos de transientes.

ABSTRACT

This work describes an analytical solution obtained by the expansion method for the spatial kinetics using the diffusion model with delayed emission for source transients in homogeneous media. In particular, starting from simple models, and increasing the complexity, numerical results were obtained for different types of source transients. An analytical solution of the one group without precursors was solved, followed by considering one precursors family. The general case of G-groups with R families of precursor although having a closed form solution, cannot be solved analytically, since there are no explicit formulae for the eigenvalues, and numerical methods must be used to solve such problem. To illustrate the general solution, the multi-group (three groups) time-dependent problem without precursors was solved and the numerical results of a finite difference code were compared with the exact results for different transients.

LISTA DE TABELA

Tabela 1. Relação de autofunções correspondentes a algumas geometrias regulares, em função do autovalor 23
Tabela 2. Seções de choque para um sistema homogêneo 1D para um grupo de energia 40
Tabela 3. Seções de choque para um sistema homogêneo 1D para três grupos de energia 41
Tabela 4. Comparação dos erros relativos para diferentes discretizações no tempo. 59
Tabela 5. Comparação dos erros relativos para diferentes discretizações no espaço. 60

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Posição da fonte externa e detectores. 43
Figura 2. Transiente 1, desligamento. 44
Figura 3. Transiente 2, condição inicial e fluxo nulo e pulso. 44
Figura 4. Transiente 3, condição inicial estacionário, aumento da intensidade da fonte de 1 para 5. 45
Figura 5. Dispersão dos fluxos para o caso 1, considerando uma posição e tempo fixos para diferentes larguras de pulso: "°" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac. 46
Figura 6. Potência para o caso 1, para diferentes larguras de pulso: "°" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac. 46
Figura 7. Fluxos para o caso 2, para diferentes larguras de pulso: "°" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac. 47
Figura 8. Potência para o caso 1, para diferentes larguras de pulso: "°" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac. 47
Figura 9. Dispersão dos fluxos no caso 3, Para uma posição fixa (x1=0.0) considerando um pulso de largura H/10. 48
Figura 10. Dispersão dos fluxos no caso 3, Para uma posição fixa (x2=2H/5) considerando um pulso de largura H/10. 49
Figura 11. Potência para o transiente 1, considerando um pulso de largura H/10. 49
Figura 12. Fluxo para o caso 3 no espaço no regime estacionário e potência para transiente 2 50
Figura 13. Fluxos para o caso 3 para cada grupo de energia, na posição (x=0.0), transiente 1. 50
Figura 14. Potência para o caso 2, transiente 1, considerando o modelo de cinética pontual para diferentes larguras de pulso: "°" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac. 51
Figura 15. Potência para o caso 2, considerando o modelo de cinética pontual no transiente 2 para um pulso de largura H/10. 51
Figura 16. Potência para o caso 2, considerando o modelo de cinética pontual no transiente 3, para um pulso de largura H/10. 52
Figura 17. Potência para o caso 2, considerando o modelo de cinética pontual no transiente 1, para um pulso de largura H/10. Resultado em linha vermelha representa a solução em cinética espacial para n=16 e "°" cinética espacial para n =5,e linha preta é o modelo de cinética pontual. 53
Figura 21. Potência para o caso 3, transiente 3. 58
Figura 23. Fluxo rápido na posição x=0 para o caso 3, transiente 3. Em azul está representada a solução numérica para a discretização espacial de NX9 e em vermelho para NX39 e erro relativo á direita. 60
Figura 24. Fluxo rápido nas posições x=0 "+", x=0.2 H "◊"e x=0.4H "°" para o caso 3, transiente 3 .Em vermelho estão representadas as respectivas soluções numéricas para a discretização espacial de NX39. 60

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11

1.1 Modelo de Difusão-Física de Reatores 11
1.2 Revisão da literatura - Cinética de sistemas multiplicativos 13
1.3 Benchmarkings analíticos e a Física de Reatores 17
1.4 Objetivos e divisão do trabalho 20

3. PROBLEMAS DE TRANSIENTES NO MODELO DE DIFUSÃO 27

3.1 Caso 1 28
3.2 Caso 2 29
3.3 Caso 3 31

4. CINÉTICA PONTUAL 34

4.1 Aplicação do método de expansão na solução das equações de cinética pontual com fonte externa 34

5. RESULTADOS 40

5.1 Fonte Externa 42
5.2 Transientes 43
5.3 Resultados exatos da cinética espacial 45
5.4 Resultados exatos da cinética pontual 51
5.5 Comparações entre resultados da cinética espacial e da cinética pontual 52

6. COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS EXATOS E NUMÉRICOS 56

7. CONCLUSÕES 61

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 62

ANEXO A - CINESP-ADS 65

APÊNDICE A - CÁLCULO DE CRITICALIDADE 67

APÊNDICE B - ERRO DE TRUNCAMENTO 68

APÊNDICE C – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CINÉTICA PONTUAL 70

1. INTRODUÇÃO

1.1 Modelo de Difusão-Física de Reatores

Os processos básicos que governam o comportamento de um núcleo de um reator incluem variações na distribuição de nêutrons no reator. A descrição matemática de uma distribuição neutrônica é baseada na equação de balanço neutrônico chamada equação de transporte dos nêutrons. Trata-se de uma forma linearizada da equação de Boltzmann utilizada nos estudos dos gases. De fato, a *equação de transporte* é tão complicada que soluções exatas são encontradas apenas para modelos físicos simplificados, por isso usa-se uma aproximação da equação de transporte conhecida como *equação de difusão*.

A equação de Boltzmann expressa o princípio de conservação neutrônica, estudando-se a variação da densidade angular num elemento de volume no espaço de fase, que nos dá uma equação de balanço, considerando-se as perdas e ganhos de nêutrons no elemento de volume. Considerando que o número líquido de nêutrons que atravessam a superfície do volume no tempo, o número de nêutrons que sofrem colisões no intervalo de tempo, os nêutrons secundários provenientes de espalhamentos no intervalo de tempo e os nêutrons adicionados produzidos por fontes. A equação de transporte, incluindo nêutrons atrasados é dada por [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n(\boldsymbol{r},E,\Omega,t)}{\partial t} = \boldsymbol{B}(t)n(\boldsymbol{r},E,\Omega,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \frac{\chi_i(E)}{4\pi} C_i(\boldsymbol{r},t) + S(\boldsymbol{r},E,\Omega,t), \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{\chi_i(E)}{4\pi} C_i(\boldsymbol{r},t)\right)}{\partial t} = \boldsymbol{M_i}(t)n(\boldsymbol{r},E,\Omega,t) - \lambda_i \dfrac{\chi_i(E)}{4\pi} C_i(\boldsymbol{r},t), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{L}(t) + \boldsymbol{M}(t)$ é o operador balanço , que é a soma dos operadores fuga e multiplicação pronta, o operador $\boldsymbol{M_i}$ é o operador multiplicação dos nêutrons atrasados e o operador multiplicação total é dado por $\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{M_p}(t) + \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{M_i}(t)$.

A solução exata deste problema é complexa, a fim de se obter solução analítica para o problema neutrônico considerando-se nêutrons atrasados e fonte externa algumas simplificações devem ser feitas no modelo (multigrupo ou difusão, por exemplo), baseando-se em hipóteses físicas adequadas, a partir das quais é possível desenvolver algoritmos numéricos. A equação de difusão obtida a partir da equação de transporte (1.1) considerando o modelo de difusão multigrupo é obtida por diferentes autores, tais como Zweifel [2], Akcasu [3] e Henry [4]:

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{v_g}\frac{\partial}{\partial t} - D_g\nabla^2 + \Sigma_{\mathrm{g}}\right]\Phi_g(\boldsymbol{r},t) = S(\boldsymbol{r},t) + \chi_{d,g}\sum_{j}^{R}\lambda_j C_j(\boldsymbol{r},t) + \\ \left[\sum_{g'}^{G}\Sigma_{\mathrm{g}\to\mathrm{g}'} + \chi_{p,g}(1-\beta)\mathrm{v}\Sigma_{\mathrm{f,g}'}\right]\Phi_{g'}(\boldsymbol{r},t) \qquad g' = 1,..,G \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_j\right]C_j(\boldsymbol{r},t) = \beta_j\left[\sum_{g'}^{G} v\Sigma_{\mathrm{f,g}'}\,\Phi_{g'}(\boldsymbol{r},t)\right], \quad j = 1,..,R \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\Phi_g(\boldsymbol{r},t)$ é o fluxo no grupo *g*, e $C_j(\boldsymbol{r},t)$ é a concentração de precursores na família *j,* e as demais constantes são definidas de acordo com as definições clássicas encontradas na literatura[5].

Algumas observações devem ser feitas em relação a validade do modelo de difusão, primeiramente o meio é considerado isotrópico na dedução destas equações, o que significa que para meios altamente anisotrópicos deve-se esperar que a aproximação de difusão não descreva o sistema adequadamente, isto ocorre em um meio em que a seção de choque é altamente absorvedora. Se as seções de choque variam rapidamente com a posição, também se deve esperar que o modelo de difusão não descreva corretamente o sistema. Estas hipóteses de validação do modelo de difusão foram verificadas pela comparação de resultados numéricos da equação de difusão com resultados obtidos a partir da equação de transporte por Case e Zweifel [6].

1.2 Revisão da literatura - Cinética de sistemas multiplicativos

Um dos primeiros trabalhos a se dedicarem á cinética de reatores é o livro clássico de Keepin [7], onde além de aspectos experimentais, discute-se a solução das equações de cinética pontual. Para o estudo da cinética de reatores, as equações de cinética pontual foram derivadas assumindo-se meio infinito e função forma independente do tempo, particularmente neste livro, levantou-se as primeiras observações sobre a estabilidade de problemas de Física de reatores, considerando nêutrons atrasados.

Os métodos de solução do problema de difusão multigrupo estão divididos em dois tipos fundamentais: modais e nodais. A estratégia fundamental destes métodos consiste em se tratar a parte espacial separadamente e então trabalhar a parte temporal pelas amplitudes modais (solução geral pela função temporal da separação de variáveis- *método modal*), ou pelas constantes de acoplamento nodais (*método nodal*): reduzindo-se o fluxo forma de um reator para uma geometria qualquer a uma representação nodal em três dimensões, sendo cada valor do fluxo, o valor médio do fluxo em cada pequena região (nós) do reator, para o limite de muitos nós, o esquema se aproxima ao de um sistema tridimensional.

Após a publicação do trabalho de Henry em 1958 [8], apresentando a aplicação da teoria de cinética de reatores para se resolver o problema de difusão em física de reatores para experimentos pulsados, novas pesquisas a respeito do formalismo no modelo de difusão considerando fonte externa foram realizados.

A fim de se resolver problema de reator homogêneo tipo placa, sem refletor, para nêutrons monoenergéticos em sistemas multiplicativos subcríticos é necessário se compreender com exatidão os conceitos de função adjunta e dos métodos de expansão em autofunções, considerando o problema de autovalores. Em 1960, Lewins [9] publicou um trabalho sobre o conceito de função adjunta estendida á dependência temporal, considerando a importância dos nêutrons e precursores, definindo as equações de difusão e as condições de fronteira para a importância neutrônica, em particular para um sistema não-crítico.

O problema de difusão multigrupo foi resolvido para sistemas homogêneos e heterogêneos, sem dependência do número de grupos de energia por Garabedian e Foderaro em 1960, porém para sistemas críticos [10].

Em se tratando do problema de cinética de reatores, a redução das equações de difusão para equações diferenciais ordinárias foi feita por Lewins [11], iniciando uma discussão sobre o significado físico dos parâmetros que surgem nesta redução, considerando fonte externa. Em 1968, Becker [12] apresentou uma formulação geral da cinética pontual considerando uma função forma dependente do tempo, os termos adicionais decorrentes da expressão explícita temporal da função forma são considerados e implicaram em novas condições de normalização, apesar de diferenças surgirem em relação a proposta da cinética convencional, estes resultados se mostraram negligenciáveis na maioria dos casos de interesse prático.

Uma solução independente das condições de contorno foi obtida para o problema de difusão neutrônica considerando reator tipo placa, pela expansão em séries de Fourier. Derivando-se inicialmente as equações para os fluxos na fronteira, e aplicando-se as condições de contorno obtiveram-se as soluções das equações do fluxo, o que resultou numa outra maneira de se resolver o problema de difusão sem considerar a expansão em autofunções da matriz característica do sistema físico [13].

Considerando reatores térmicos, onde os efeitos da migração neutrônica durante o processo de moderação é levado em conta, da fissão a nêutrons térmicos, uma solução analítica foi obtida por Corno e Ravetto [14] utilizando a técnica de Transformada de Laplace, utilizando-se um *kernel* que leva a uma integral na equação de balanço neutrônico correspondente á razão de nêutrons térmicos dentro do espaço de fase, devido ás fissões térmicas. A resolução destas integrais se fez pelo uso da aproximação assintótica, ou seja, pela extensão das fronteiras físicas de um volume finito para todo o espaço, considerando-se então um meio multiplicativo isotrópico infinito, sendo desnecessária a condição de fronteira o que levou ao uso do teorema da convolução nas integrais do fluxo.

Soluções analíticas para o problema de difusão multigrupo foram propostas por Lee e Rottler (1986) [15], considerando-se reatores tipo placa e esférico com ou sem refletores, com condição de fluxo nulo nas fronteiras. Foram considerados termos fonte dependentes espacialmente e o sistema de equações diferenciais parciais foi reduzido a um conjunto de

equações diferencias ordinárias pelo método de Transformada de Laplace, estas equações foram resolvidas gerando uma solução matricial geral para o fluxo neutrônico, que permitiram resultados benchmark para cálculos numéricos.

Recentemente, surgiu um interesse no estudo da cinética de sistemas multiplicativos subcríticos, motivado pelo estudo da viabilidade física dos ADS (*Accelerator Driven Systems*), ou seja, sistemas multiplicativos acionados por fonte, a partir daí, importantes inovações conceituais referentes á cinética de reatores foram suscitadas, particularmente por ocasião do trabalho de 2001 de Gandini [16], que apresentou uma teoria da perturbação generalizada "*Heuristically-based generalized perturbation theory* (*HGPT)"*, levando em conta o conceito de função importância e o conceito de reatividade generalizada, fundamental para o estudo de sistemas próximos da criticalidade, ainda neste trabalho uma cinética pontual foi derivada e novos termos que aparecem a partir da redução da cinética espacial para a pontual foram definidos.

Em 2004, Cacuci [17] propôs uma formulação da Física de ADS considerando fonte e núcleo separadamente, ainda que estejam conectados por condições de interface, com o intuito de examinar a influência da fonte sobre um núcleo subcrítico, mostrando que o estudo dos efeitos dos nêutrons de fonte no sistema subcrítico não podem ser estudados plenamente apenas importando-se as ferramentas da teoria de perturbação tradicional que foram desenvolvidas para sistemas críticos, uma vez que trata-se de um controle de criticalidade provocado por uma fonte externa a um meio anteriormente subcrítico.

Entre os métodos desenvolvidos para se estudar os sistemas acionados por fonte externa esta o método quase-estático [18], que tem se mostrado uma ferramenta eficiente para o estudo de problemas dependentes do tempo, está baseado na fatorização da densidade neutrônica no produto de uma função forma e uma função amplitude, sua particularidade esta nas diferentes magnitudes de escalas no tempo de integração, introduzindo-se uma escala rápida para o a amplitude e uma escala lenta para a função forma, uma vez que nos cálculos numéricos o tempo referente aos cálculos da função forma é considerável, isto leva a uma evidente redução no tempo de cálculo dos computadores.

Um trabalho sobre a importância teórica espacial e temporal da fonte externa para modelos simplificados foi apresentado por Dulla [19], considerando sistemas subcríticos

dominados por fonte, resolvendo as equações de cinética espacial pelo método de expansão e considerando sistemas inicialmente em estado estacionário, obteve-se uma solução em forma fechada para um grupo de energia e uma família de precursores.

Em relação às diferenças de resultados no comportamento do sistema físico decorrentes das diferenças de modelos, Dulla e Ganapol [20] apresentaram a teoria assintótica do espaço, como um modelo adequado para se estudar experimentos pulsados em sistemas neutrônicos multiplicativos, este modelo mostrou-se útil como ferramenta para se obter uma solução analítica para problemas de propagação neutrônica, estas soluções permitiram identificar os efeitos nos fenômenos decorrentes da escolha de modelo, mostrando as limitações do modelo de difusão.

Em 2007, um trabalho foi publicado [21] apresentando uma metodologia para se obter soluções exatas em forma fechada para problemas de difusão multigrupo para sistemas multiplicativos subcríticos, a filosofia de benchmarks analíticos foi apresentada, soluções foram apresentadas considerando-se um sistema típico do experimento *Yalina Booster*, resultados numéricos foram comparados com resultados estes resultados exatos, apresentou-se um estudo de convergência dos esquemas discretizados e discutindo-se os limites de aplicabilidade para as análises dos experimentos de ADS. No mesmo ano, um trabalho do autor foi apresentado [22] com soluções exatas para diferentes sistemas físicos, de complexidade variada, supondo-se fonte externa e sistema multiplicativo, soluções exatas em forma fechada foram obtidas para 1 grupo de energia sem precursores, 1 grupo de energia com uma família de precursores e 3 grupos de energia sem precursores considerando-se diferentes transientes de fonte, uma análise comparativa da potência para estes casos foi apresentada com o intuito de se estudar a influência dinâmica do meio no comportamento qualitativo da potência do sistema.

1.3 BENCHMARKINGS ANALÍTICOS E A FÍSICA DE REATORES

O estudo de problemas dependentes do tempo para meios multiplicativos subcríticos é usualmente feito por computadores de alta capacidade por meio de códigos numéricos que podem tratar adequadamente as grandes complicações físicas associadas à simulação de reatores reais. As ferramentas computacionais usam algoritmos que reduzem as equações do modelo a problemas algébricos que são então resolvidos numericamente. Quando as ferramentas são usadas para simulação real a primeira questão a ser respondida é se o modelo adotado é adequado a situação a ser estudada, o que normalmente inclui alguma simplificação com respeito ao modelo de referência (por exemplo, difusão em vez de equação de Boltzmann). Além disso, os procedimentos numéricos mostram duas desvantagens inerentes:

- Operadores integrais e diferenciais são tratados por esquemas de discretização
- Processos iterativos são usados para se obter a solução completa

As seguintes questões fundamentais devem ser respondidas:

- O modelo é adequado para descrever a situação física de interesse?
- O algoritmo está construído de maneira correta?
- O algoritmo é capaz de obter resultados numéricos com um nível de exatidão satisfatório?
- Para quais sistemas físicos o código pode ser aplicado como uma ferramenta computacional?
- O algoritmo é estável para qualquer transiente?

Para se responder a estas perguntas satisfatoriamente, várias etapas precisam ser realizadas para a validação de um código numérico. Um processo de validação deve garantir que o modelo adotado abrange o fenômeno físico de interesse (validação do modelo) e que as técnicas numéricas garantem a necessária exatidão dos resultados numéricos (validação do método numérico). Estas etapas também devem focar na determinação de requisitos numéricos (tamanho dos *meshs*, critério de convergência, número de iterações) que são necessários para se obter certos níveis de exatidão. Ao fim, o código deverá ser testado para

verificar a sua capacidade de descrever situações específicas, definindo-se os seus limites de validade (qualificação do código).

Os passos acima constituem um processo de *benchmarking* e pode ser conduzido por diferentes abordagens: analítica, numérica e experimental. Este trabalho se limitará na discussão de *benchmarks* analíticos. A necessidade de procedimentos de *benchmarking* confiáveis é observada particularmente quando se procura desenvolver códigos para o estudo da dinâmica de sistemas acionados por fonte, uma vez que os métodos desenvolvidos anteriormente consideravam sistemas muito próximos da criticalidade ou partindo do estado crítico, de fato, para a análise de sistemas dirigidos por fonte, situações físicas diferentes devem ser tratadas: nêutrons de alta energia têm enorme importância no desenvolvimento da dinâmica do sistema, e o domínio da fonte pode ter importantes conseqüências nas características dinâmicas do sistema.

Um *benchmark* analítico pode ser definido como uma solução em forma fechada para alguns problemas referência que são significativos para a situação física de interesse [23]. A solução deve ser obtida usando técnicas puramente analíticas tanto quanto for possível, com um controle de erro em todos os passos. Naturalmente, sendo os métodos puramente analíticos, apenas modelos altamente simplificados e configurações idealizadas podem ser tratadas. O *benchmark* analítico deve servir aos seguintes objetivos:

- Verificar se as equações são adequadamente resolvidas por esquemas numéricos
- Separar efeitos induzidos pelo modelo dos efeitos induzidos numericamente
- Determinar as limitações dos modelos aproximados (difusão x transporte, efeitos de anisotropia, definição de parâmetros cinéticos)

Um aspecto importante é o controle de erro. Uma fórmula analítica deve ser numericamente calculada. Esta operação inevitavelmente introduz um tipo de erro, que deve ser controlado e limitado. Por exemplo, o truncamento de uma série deve ser acompanhado por um cálculo do erro de truncamento, que deve ser apresentado junto com os resultados do *benchmark*.

Uma regra geral para a validação de modelos e de algoritmos deve ser seguida [21]: *uma técnica numérica que dá maus resultados para um sistema simples não pode dar resultados confiáveis para sistemas complicados.*

Historicamente, no campo da Física de Reatores e Teoria de Transporte de Nêutrons, o trabalho feito por Case, Hoffmann e Paczek [24] pode ser considerado o primeiro *benchmark* analítico. A equação de transporte é resolvida analiticamente, fórmulas fechadas são obtidas para sua solução e os cálculos numéricos são realizados. Diferentes situações físicas são estudadas e os resultados são apresentados e discutidos. Mais tarde, o método de Case deu a oportunidade para se derivar novos *benchmarks* para transporte de nêutrons, o trabalho realizado por Barry Ganapol levou a importantes inovações na metodologia em se derivar e organizar soluções exatas [23].

No campo da cinética de reatores, o princípio de *benchmarking* analítico foi usado com sucesso no passado para a validação de códigos numéricos [25]. Mais recentemente, uma primeira tentativa também foi feita no campo de sistemas acionados por fonte [26].

Um Projeto Coordenado de Pesquisa (em inglês *CRP)* sob os auspícios da Agência Internacional de Energia Atômica *IAEA* está sendo desenvolvido sob o título *Analytical and Experimental Benchmark Analyses of Accelerator Driven Systems (ADS)* [27,28]. Uma das principais tarefas deste projeto envolve o desenvolvimento de *benchmarks* analíticos adequados para o estudo de ADS e a qualificação de códigos e a validação de modelos de Física de Reatores para a análise temporal de sistemas multiplicativos acionados por fonte externa. Dentro deste projeto, uma colaboração está sendo realizada entre o *Politecnico di Torino* (Itália), IPEN e IEN (Brasil).

1.4 Objetivos e divisão do trabalho

Este trabalho tem como objetivo obter soluções exatas em forma fechada para problemas de difusão com fonte externa, e a partir destas soluções realizar a validação de soluções numéricas a partir da análise de convergência da solução numérica para a solução exata por meio do controle do erro relativo e do erro de truncamento da série.

O método de expansão em autofunções do problema característico é utilizado para se obter soluções analíticas para problemas de transientes rápidos no modelo de difusão multigrupo, supondo-se fontes externas aplicadas em sistemas subcríticos sem realimentação termoidráulica. Resultados numéricos obtidos por um programa de diferenças finitas (CINESP-ADS) foram comparados com os resultados exatos obtidos pelo método de expansão.

Um estudo da cinética pontual é realizado partindo-se da equação de cinética pontual com fonte externa e levando-se em conta os parâmetros cinéticos típicos de um sistema rápido.

Considerou-se um meio multiplicativo subcrítico e homogêneo, acionado por fonte externa, para diferentes transientes e fonte arbitrária. O termo fonte sempre foi considerado no grupo rápido de energia e ainda que a solução geral para G grupos e R precursores para geometria regular foi obtida, foram apresentados resultados numéricos correspondentes ao problema de condição de fronteira de fluxo nulo e geometria plana, para os três sistemas particulares: 1 grupo de energia sem família de precursores, 1 grupo de energia com uma família de precursores e 3 grupos de energia sem família de precursores.

Os fundamentos teóricos do problema são apresentados nos capítulos 2 e 3 correspondentes á cinética espacial e capítulo 4 correspondente á cinética pontual, ambos os modelos apresentaram soluções exatas para as equações características de um sistema multiplicativo subcrítico com fonte externa.

Os resultados exatos são apresentados nas seções 5.3 e 5.4 e uma comparação dos resultados obtidos pela cinética pontual para os diferentes transientes e os resultados obtidos

pelo modelo de cinética proposto no capítulo 4, são apresentados na seção 5.5. No capítulo 6 são apresentados os resultados comparativos entre as soluções de cinética espacial exatas e os resultados obtidos independentemente por um programa de diferenças finitas (CINESP-ADS), além disso, uma análise de sensibilidade tanto na discretização do tempo quanto na discretização do espaço é feita e apresentada comparando-se os resultados exatos com os resultados numéricos em um mesmo gráfico para o transiente de aumento de fonte.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões e discussões referentes aos resultados apresentados e novas propostas de trabalho são discutidas, sendo que no anexo A e nos apêndices A, B e C apresentam-se, respectivamente, uma descrição do programa de cinética utilizado para se obter os resultados numéricos, o cálculo de criticalidade, uma descrição do método de cálculo de erro de truncamento da série e uma dedução das equações de cinética pontual.

2. SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE DIFUSÃO MULTIGRUPO

O modelo de difusão é usado para se estudar a cinética de nêutrons, sendo o meio homogêneo, considerado numa geometria regular (plana, cilíndrica ou esférica) com condições de fronteira nula ou de distância extrapolada. As seções de choque escolhidas para o meio são típicas de um sistema rápido.

A equação de difusão multigrupo geral considerando a emissão de nêutrons atrasados pode ser escrita, a partir de (1.2):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v_g}\dfrac{\partial \Phi_g(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \left[D_g\nabla^2 - \Sigma_{\mathrm{g}}\right]\Phi_g(\boldsymbol{r},t) + \displaystyle\sum_{g'}^{G}\left[\Sigma_{g\to g'} + \chi_{P,g}(1-\beta)v\Sigma_{f,g'}\right]\Phi_{g'}(\boldsymbol{r},t) \\ +\chi_{D,g}\displaystyle\sum_{j=1}^{R}\lambda_i C_j(\boldsymbol{r},t) + S(\boldsymbol{r},t), \qquad g = 1,\dots G \\ \dfrac{\partial C_j(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -\lambda_i C_j(\boldsymbol{r},t) + \beta_j\displaystyle\sum_{g'=1}^{G} v\Sigma_{f,g'}\,\Phi_{g'}(\boldsymbol{r},t), \qquad j = 1,\dots R \end{cases} \quad (2.1)$$

as condições iniciais são dadas por:

$$\begin{cases} \Phi_g(\boldsymbol{r},0) = \varphi_{g,0}(\boldsymbol{r}) \\ C_j(\boldsymbol{r},0) = C_{j,0}(\boldsymbol{r}) \end{cases} \quad (2.2)$$

As condições de contorno para o fluxo são dadas por [29]:

$$\begin{cases} a\varphi(\mathbf{0}) + b\varphi'(\mathbf{0}) = 0 \\ c\varphi(\boldsymbol{r}) + d\varphi'(\boldsymbol{r}) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

O método de expansão consiste em se expandir a variável desconhecida em função das autofunções base solução do problema de autovalores. Estas autofunções solução da equação de Helmholtz dependem da geometria regular de acordo com a expressão:

$$\nabla^2 \varphi_n(\boldsymbol{r}) + {B_n}^2 \varphi_n(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad (2.4)$$

e são obtidas resolvendo-se o problema de autovalor. Na tabela [1] são apresentadas as autofunções de acordo com alguns tipos de geometria regular:

Tabela 1. Relação de autofunções correspondentes a algumas geometrias regulares, em função do autovalor

Geometria	Autofunção	Autovalor
Plana	$A\cos(B_n x)$	$B_n = \frac{(2n-1)\pi}{a}$
Esférica	$A\frac{\sin(B_n r)}{r}$	$B_n = \frac{n\pi}{R}$
Cilindro infinito	$AJ_0(B_n r)$	$B_n = \frac{x_n}{R}$

Considerando o método de expansão, a solução espacial é obtida separadamente da solução temporal, uma vez que a solução espacial é determinada pela geometria, o estudo do comportamento temporal do sistema torna-se independente do espacial.

Expandindo as funções desconhecidas em termos das autofunções, ou seja, do fluxo neutrônico:

$$\Phi_g(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,g}(t)\varphi_n(\boldsymbol{r}), \qquad (2.5)$$

e para as concentrações de precursores:

$$C_j(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,j}(t)\,\varphi_n(\boldsymbol{r}) \tag{2.6}$$

A fonte pode ser tratada da mesma forma:

$$\begin{cases} S_g(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,g}(t)\,\varphi_n(\boldsymbol{r}), \\ S_{n,g}(t) = \int S_g\,(\boldsymbol{r},t)\varphi_n(\boldsymbol{r})dr; \end{cases} \tag{2.7}$$

Introduzindo uma formulação matricial podemos expressar as funções desconhecidas e os vetores fonte como uma superposição das autofunções de Helmholtz, uma vez que estas autofunções formam um conjunto completo [2]:

$$\begin{cases} |\Xi(\boldsymbol{r},t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |X(t)\rangle\varphi_n(\boldsymbol{r}), \\ |S(\boldsymbol{r},t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |S(t)\rangle\,\varphi_n(\boldsymbol{r}); \end{cases} \tag{2.8}$$

Desta forma o problema na sua forma matricial é escrito por:

$$\frac{\partial|\Xi(\boldsymbol{r},t)\rangle}{\partial t} = \mathbf{M_n}|\Xi(\boldsymbol{r},t)\rangle + |S(\boldsymbol{r},t)\rangle \tag{2.9}$$

A matriz característica $\mathbf{M_n}$ associada á equação de balanço é uma matriz (G x R) x (G x R), sendo definida por:

$$\mathbf{M_n} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M_\varphi} & \mathbf{M_{C\to\varphi}} \\ \mathbf{M_{\varphi\to C}} & \mathbf{M_C} \end{Bmatrix}, \tag{2.10}$$

onde $\mathbf{M_\varphi}$ descreve o acoplamento entre a distribuição de nêutrons com diferentes energias, $\mathbf{M_C}$ é uma matriz diagonal levando em conta os processos de decaimento, $\mathbf{M_{C\to\varphi}}$ descreve a contribuição de nêutrons atrasados para a distribuição de fluxo neutrônico e $\mathbf{M_{\varphi\to C}}$ a produção de precursores devido a efeitos de fissão.

Para se obter a contribuição para cada autofunção de Helmholtz, basta substituir os resultados (2.8), na equação (2.9) e o seguinte problema deve ser resolvido:

$$\frac{d|X_n(t)\rangle}{dt} = \mathbf{M_n}|X_n(t)\rangle + |S_n(t)\rangle \qquad (2.11)$$

O problema de autovalores e autovetores associados á matriz característica $\mathbf{M_n}$ deve ser resolvido, analogamente para o problema adjunto da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{M_n}|U_n l\rangle = w_{ln}|U_n l\rangle \\ \langle l U_n|\mathbf{M_n} = w_{ln}\langle l U_n| \end{cases} \qquad (2.12)$$

onde

$$\det(\mathbf{M_n} - w_{ln} I) = 0 \qquad (2.13)$$

Escolhendo os autovetores normalizados substituem-se as expressões a seguir na equação (2.11):

$$\begin{cases} |X_n(t)\rangle = \sum_{l=1}^{G+R} a_{n,l}(t)\,|U_n l\rangle \\ |S_n(t)\rangle = \sum_{l=1}^{G+R} s_n(t)\,|U_n l\rangle. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Projetando-se a equação (2.11) no espaço adjunto e aplicando as condições de ortonormalidade tem-se:

$$\frac{da_{n,l}(t)}{dt} = w_{ln}\,a_{n,l}(t) + s_{n,l}(t) \qquad (2.15)$$

cuja solução é dada por:

$$a_{n,l}(t) = a_{n,l}(0)e^{w_{l,n}t} + \int_0^t s_{n,l}(t')\,e^{w_{l,n}(t-t')}dt' \qquad (2.16)$$

Desta forma, a solução geral para os fluxos neutrônicos e as concentrações de precursores é obtida:

$$|\Xi(\boldsymbol{r},t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{G+R} a_{n,l}(t)|U_n\, l\rangle\varphi_n(\boldsymbol{r}) \ , \tag{2.17}$$

onde cada linha do vetor solução é uma solução do fluxo para cada grupo de energia ou a concentração de precursores para cada família. Desta forma a solução geral para G grupos e R precursores pode ser obtida em forma fechada.

3. PROBLEMAS DE TRANSIENTES NO MODELO DE DIFUSÃO

A equação de balanço da população neutrônica para se calcular o fluxo espacial para um reator crítico é homogênea, enquanto a equação correspondente para se calcular um fluxo em um sistema acionado por fonte é não-homogênea devido à presença da fonte externa. Conseqüentemente, os métodos que usam autovalores e autofunções da equação de balanço homogênea para um sistema crítico podem se tornar inadequados para um cálculo da distribuição do fluxo em um sistema com fonte externa, dependendo do nível de subcriticalidade do sistema. Com o intuito de se obter resultados numéricos e se ilustrar a metodologia geral de resolução proposta neste trabalho, casos particulares foram estudados supondo-se geometria plana.

Foram assumidas as condições particulares de fluxo nulo nas fronteiras:

$$\Phi(\boldsymbol{r_b}, t) = 0 \tag{3.1}$$

onde r_b é a posição de fronteira.

Para a solução pelo método de expansão, as autofunções de Helmholtz constituem um sistema completo e ortogonal:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_n(x)}{d^2x} + {B_n}^2\varphi_n(x) = 0 \\ \varphi_n\left(\dfrac{H}{2}\right) = \varphi_n\left(-\dfrac{H}{2}\right) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Particularmente, no caso da geometria plana, as autofunções são dadas por:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{2n-1}{H}\pi x\right), \tag{3.3}$$

com o autovalor:

$$B_n^2 = \left(\frac{2n-1}{H}\pi x\right) \tag{3.4}$$

Neste trabalho três casos particulares foram estudados e resolvidos para um transiente qualquer:

3.1 Caso 1

Considerando apenas um grupo de energia sem emissão de precursores, a equação de difusão pode ser escrita a partir da equação geral (2.1):

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = S(x,t) + \Sigma_a k_\infty \Phi(x,t) - \Sigma_a \Phi(x,t) + D\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial^2 x}, \tag{3.5}$$

Expandindo-se o fluxo e o termo fonte nas autofunções de Helmholtz, obtemos;

$$\frac{dA_n(t)}{dt} = \alpha_n A_n(t) + vS_n \tag{3.6}$$

Os parâmetros são definidos por:

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{k_{eff}^n - 1}{l^n} \\ l^n = \dfrac{1}{v\Sigma_a(1 + L^2 B_n^2)}, \\ k_{eff}^n = \dfrac{k_\infty}{(1 + L^2 B_n^2)}. \end{cases} \tag{3.7}$$

A solução para o fluxo é dada por:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(0)e^{\alpha_n t} + \int_0^t S_n(t')\, e^{\alpha_n (t-t')} dt'\right]\varphi_n(x). \tag{3.8}$$

3.2 Caso 2

Considerando um grupo de energia e uma família de precursores, em geometria plana, partindo das equações (2.1), teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = S(x,t) + \Sigma_a k_\infty (1-\beta)\Phi(x,t) - \Sigma_a \Phi(x,t) + \lambda C(x,t) + D\dfrac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial^2 x}, \\ \dfrac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -\lambda C(x,t) + \Sigma_a k_\infty \beta \Phi(x,t). \end{cases} \tag{3.9}$$

De acordo com as definições (2.11), a matriz característica é dada por:

$$\mathbf{M_n} = \begin{pmatrix} v\Sigma_a[(1-\beta)k_\infty - (1+L^2B_n^2)] & v\lambda \\ \Sigma_a k_\infty \beta & -\lambda \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Os autovalores são calculados impondo a condição (2.13), que resulta na expressão:

$$w_n^2 - \varepsilon_n w_n - \tau_n = 0, \tag{3.11}$$

cujas raízes são dadas por:

$$\begin{cases} w_{1,n} = \dfrac{\varepsilon_n + \sqrt{{\varepsilon_n}^2 + 4\tau_n}}{2}, \\ w_{2,n} = \dfrac{\varepsilon_n - \sqrt{{\varepsilon_n}^2 + 4\tau_n}}{2}. \end{cases} \tag{3.12}$$

onde as constantes são dadas por:

$$\begin{cases} \varepsilon_n = v\Sigma_a[(1-\beta)k_\infty - (1+L^2B_n^2)] - \lambda, \\ \tau_n = v\Sigma_a[(1-\beta)k_\infty - (1+L^2B_n^2)]\lambda + v\lambda\Sigma_a k_\infty \beta. \end{cases} \tag{3.13}$$

Os autovetores solução do problema de autovalor são:

$$\begin{cases} |U_n 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\Sigma_a k_\infty \beta}{\lambda + w_{1,n}} \end{pmatrix}, \\ |U_n 2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\Sigma_a k_\infty \beta}{\lambda + w_{2,n}} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.14}$$

A solução para o problema adjunto do resultado (2.12) é dada por:

$$\begin{cases} \langle 1U_n| = \dfrac{1}{N_n^1} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{v\lambda}{\lambda + w_{1,n}} \end{pmatrix}^T, \\ \langle 2U_n| = \dfrac{1}{N_n^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{v\lambda}{\lambda + w_{2,n}} \end{pmatrix}^T. \end{cases} \tag{3.15}$$

Sendo N_n^l o fator de normalização definido:

$$N_n^l = 1 + \frac{v\lambda \Sigma_a k_\infty \beta}{\left(\lambda + w_{l,n}\right)^2} > 0. \tag{3.16}$$

Deste resultado o fluxo solução é dado por:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2} a_{l,n}(t) \varphi_n(x), \tag{3.17}$$

Onde $a_{l,n}(t) = a_{l,n}(0) e^{w_{l,n} t} + \int_0^t s_{l,n}(t') \, e^{w_{l,n}(t-t')} dt'$ e $a_{l,n}(0)$ é a projeção do vetor fluxo inicial no espaço das autofunções adjuntas.

3.3 Caso 3

Este caso considera o sistema homogêneo com três grupos de energia (térmico, intermediário e rápido) desconsiderando-se a emissão de nêutrons atrasados. Partindo-se da equação (2.1), teremos o sistema de equações acopladas para os três grupos de energia:

$$\begin{cases} \frac{1}{v_1}\frac{\partial \Phi_1(x,t)}{\partial t} = S(x,t) + D_1\frac{\partial^2 \Phi_1(x,t)}{\partial^2 x} - \Sigma_1\Phi_1(x,t) + \left[\Sigma_{1\to1} + \chi_1\left(\upsilon\Sigma_f\right)_1\right]\Phi_1(x,t) \\ \qquad +\chi_1\left(\upsilon\Sigma_f\right)_2\Phi_2(x,t) + \chi_1\left(\upsilon\Sigma_f\right)_3\Phi_3(x,t), \\ \frac{1}{v_2}\frac{\partial \Phi_2(x,t)}{\partial t} = S(x,t) + \left[\Sigma_{1\to2} + \chi_2\left(\upsilon\Sigma_f\right)_1\right]\Phi_1(x,t) - \Sigma_2\Phi_2(x,t) + D_2\frac{\partial^2 \Phi_2(x,t)}{\partial^2 x} \\ \quad + \left[\Sigma_{1\to2} + \chi_2\left(\upsilon\Sigma_f\right)_2\right]\Phi_2(x,t) + \chi_2\left(\upsilon\Sigma_f\right)_3\Phi_3(x,t), \\ \frac{1}{v_3}\frac{\partial \Phi_3(x,t)}{\partial t} = S(x,t) + \left[\Sigma_{1\to3} + \chi_3\left(\upsilon\Sigma_f\right)_1\right]\Phi_1(x,t) - \Sigma_3\Phi_3(x,t) + D_3\frac{\partial^2 \Phi_3(x,t)}{\partial^2 x} \\ \qquad + \left[\Sigma_{2\to3} + \chi_3\left(\upsilon\Sigma_f\right)_2\right]\Phi_2(x,t) + \Sigma_{3\to3} + \chi_3\left(\upsilon\Sigma_f\right)_3\Phi_3(x,t). \end{cases} \tag{3.18}$$

A matriz característica para esse problema é dada por:

$$\mathbf{M_n} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \chi_1 v_1\left(\upsilon\Sigma_f\right)_2 & \chi_1 v_1\left(\upsilon\Sigma_f\right)_3 \\ \Lambda_{1\to2} & \Lambda_2 & \chi_2 v_2\left(\upsilon\Sigma_f\right)_3 \\ \Lambda_{1\to3} & \Lambda_{2\to3} & \Lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

As constantes dos elementos da matriz são definidas por:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \delta_1 + v_1\left[\Sigma_{1\to1} + \chi_1\left(\upsilon\Sigma_f\right)_1\right] \\ \Lambda_2 &= \delta_2 + v_2\left[\Sigma_{2\to2} + \chi_2\left(\upsilon\Sigma_f\right)_2\right] \\ \Lambda_3 &= \delta_3 + v_3\left[\Sigma_{3\to3} + \chi_3\left(\upsilon\Sigma_f\right)_3\right] \\ \Lambda_{1\to2} &= v_2\left[\Sigma_{1\to2} + \chi_2\left(\upsilon\Sigma_f\right)_1\right] \\ \Lambda_{1\to3} &= v_3\left[\Sigma_{1\to3} + \chi_3\left(\upsilon\Sigma_f\right)_1\right] \\ \Lambda_{2\to3} &= v_3\left[\Sigma_{2\to3} + \chi_3\left(\upsilon\Sigma_f\right)_2\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Onde $\delta_i = -D_i B_n^2 v_i - \Sigma_i v_i \cdot$, para $i = 1,2,3$.

A partir da matriz $\mathbf{M_n}$ e aplicando a condição (2.13), obtemos a equação característica:

$$-w^3 + \Delta_1 w^2 + \Delta_2 w + T_{123} = 0, \qquad (3.21)$$

onde as constantes são dadas por:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \\ \Delta_2 = (-\Lambda_2\Lambda_3 - \Lambda_2\Lambda_1 + \Lambda_{2\to3} v_2\chi_2(\upsilon\Sigma_f)_3 + \Lambda_{1\to2} v_1\chi_1(\upsilon\Sigma_f)_2 + \Lambda_{1\to3} v_1\chi_1(\upsilon\Sigma_f)_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{123} = \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 - \Lambda_1\Lambda_{2\to3} v_2\chi_2(\upsilon\Sigma_f)_3 - \Lambda_3\Lambda_{1\to2} v_1\chi_1(\upsilon\Sigma_f)_2 - v_1\chi_1(\upsilon\Sigma_f)_3\Lambda_{1\to3}\Lambda_2 + \\ v_1\chi_1(\upsilon\Sigma_f)_2 v_2\chi_2(\upsilon\Sigma_f)_3\Lambda_{1\to3} + v_1\chi_1(\upsilon\Sigma_f)_3\Lambda_{1\to2.} \end{cases}$$

(3.22)

Manipulando a equação (3.21) algebricamente e introduzindo as simplificações citadas em [30], obtém-se a equação:

$$w^3 + aw + b = 0 \qquad (3.23)$$

As constantes são dadas por:

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2),$$
$$b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r) \qquad (3.24)$$

com

$$\begin{cases} p = -\Delta_1 \\ q = -\Delta_2 \\ r = -T_{123} \end{cases}$$

Assumindo a definição das constantes:

$$H_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} \pm \sqrt[2]{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \qquad (3.25)$$

Tem-se as raízes solução do problema de autovalor:

$$\begin{cases} w_1 = \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2, \\ w_2 = -\dfrac{\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2}{2} + \dfrac{\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_2}{2}\sqrt[3]{-3} \\ w_3 = -\dfrac{\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2}{2} - \dfrac{\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_2}{2}\sqrt[3]{-3}. \end{cases} \tag{3.26}$$

A condição para se garantir que todas as raízes são reais é dada pela expressão obtida em [30]:

$$z = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0. \tag{3.27}$$

O procedimento padrão explicitado na seção **3.2** é utilizado para se obter os autovetores a partir dos autovalores levando-se em conta os resultados (2.12), (2.13), e considerando autovetores normalizados tem-se a expansão das soluções temporais em função destes autovalores e autovetores dadas pelas seguintes expressões:

$$A_{n,l}(t) = A_{n,l}(0)e^{w_{n,l}t} + \int_0^t s_{n,l}(t')\, e^{w_{n,l}(t-t')}dt', \text{ para } l = 1,2,3. \tag{3.28}$$

onde se considera $s_{n,l}(t') = \langle U_{n,l} | S_{n,l}(t') \rangle$, a projeção da fonte sobre a autofunção de enésima ordem da expansão da solução de autovetor.

De acordo com as definições gerais a solução vetorial do problema geral é dada por:

$$|\Xi(x,t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \{|X_n(t)\rangle\}\, \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{3} A_{n,l}(t)\, |U_n l\rangle \right\} \varphi_n(x). \tag{3.29}$$

Logo, teremos a solução para 3 grupos de energia em geometria plana:

$$|\Xi(x,t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{3} \left(A_{n,l}(0)e^{w_{n,l}t} + \int_0^t s_{n,l}(t')\, e^{w_{n,l}(t-t')}dt' \right) |U_n l\rangle \right\} \varphi_n(x). \tag{3.30}$$

4. CINÉTICA PONTUAL

O modelo mais simples para o estudo da população neutrônica é o modelo de cinética pontual [2]. A distribuição neutrônica é suposta evoluir como um ponto, no sentido em que cada ponto é representativo de todo o sistema. Para um sistema sem fontes externas é equivalente a se afirmar que uma única autofunção fundamental aparece na distribuição neutrônica em todos os instantes. Esta afirmativa não é válida quando o sistema é injetado por uma fonte externa, neste caso a distribuição é dominada pela injeção de nêutrons da fonte, o que envolve a superposição de várias autofunções. Neste caso o comportamento pontual equivale a dizer que a distribuição neutrônica pode ser fatorada num produto de uma função amplitude (dependente apenas do tempo) e uma função forma (independente do tempo).

A partir das equações de cinética espacial (3.9), considerando as definições clássicas para $k_{eff} = \frac{k_\infty}{(1+\mathrm{L}^2\mathrm{B}^2)}$ e $\rho = \frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$, e definindo os parâmetros cinéticos de acordo com k_{eff}, tem-se a equação de cinética pontual com fonte externa [Apêndice C]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,P(t)}{dt} = \widetilde{S(t)} + \left[\rho_{eff} - \beta_{eff}\right]\dfrac{P(t)}{\Lambda_{eff}} + \lambda C(t), \\ \dfrac{dC(t)}{dt} = -\lambda C(t) + \dfrac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}} P(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

4.1 Aplicação do método de expansão na solução das equações de cinética pontual com fonte externa

As equações de cinética pontual constituem-se em um sistema de equações não homogêneas lineares e acopladas (4.1), para resolvê-lo usaremos o método apresentado nos capítulos **2** e **3**, utilizando a expansão em série das autofunções do problema de autovalor.

Definiram-se os termos:

$$\begin{cases} |X(t)\rangle = \begin{pmatrix} P(t) \\ C(t) \end{pmatrix}. \\ |S(t)\rangle = \begin{pmatrix} \widetilde{S(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.2}$$

Tem-se a equação vetorial não-homogênea:

$$\frac{d|X(t)\rangle}{dt} = \mathbf{M}|X(t)\rangle + |S(t)\rangle, \tag{4.3}$$

Onde:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{[\rho_{eff} - \beta_{eff}]}{\Lambda_{eff}} & \lambda \\ \frac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}} & -\lambda \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

O vetor solução da equação (4.3) pode ser expandido em termos da solução do problema de autovalor relacionado á matriz característica do problema de autovalores.

$$\begin{aligned} |X(t)\rangle &= \sum_{l=1}^{2} c_l(t)\,|U_l\rangle, \\ |S(t)\rangle &= \sum_{l=1}^{2} s_l(t)\,|U_l\rangle \end{aligned} \tag{4.5}$$

Estas expressões são substituídas na equação (4.3), e usando-se a propriedade de autovalor, teremos as equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dc_l(t)}{dt} = w_l c_l(t) + s_l(t), \\ s_l(t) = \langle U_l|S(t)\rangle \end{cases} \tag{4.6}$$

A solução para a equação (4.6) é obtida em termos da condição inicial:

$$c_l(t) = c_l(0)e^{w_l t} + \int_0^t s_l(t')\, e^{w_l(t-t')} dt', \tag{4.7}$$

A solução para cada linha é dada por:

$$\begin{cases} P(t) = c_1(t)u_{11} + c_2(t)u_{21} \\ C(t) = c_1(t)u_{12} + c_2(t)u_{22} \end{cases} \tag{4.8}$$

Onde se aplica a definição:

$$\begin{cases} |U_1\rangle = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} \\ |U_2\rangle = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.9}$$

Os autovetores correspondentes aos autovalores do problema característico são dados por:

$$\begin{cases} \mathbf{M}|U_1\rangle = w_1|U_1\rangle \\ \mathbf{M}|U_2\rangle = w_2|U_2\rangle \end{cases} \tag{4.10}$$

A equação característica é obtida impondo-se a condição de solução não-trivial:

$$det(\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0, \tag{4.11}$$

que é equivalente á expressão, dada por:

$$\begin{vmatrix} \frac{[\rho_{eff} - \beta_{eff}]}{\Lambda_{eff}} - w & \lambda \\ \frac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}} & -\lambda - w \end{vmatrix} = 0 \tag{4.12}$$

que tem como equação reduzida:

$$w^2 - e_l w - g_l = 0, \tag{4.13}$$

cujas constantes são dadas por:

$$\begin{cases} e_l = \dfrac{[\rho_{eff} - \beta_{eff}]}{\Lambda_{eff}} - \lambda, \\ g_l = \dfrac{[\rho_{eff} - \beta_{eff}]}{\Lambda_{eff}} \lambda. \end{cases} \tag{4.14}$$

Os autovalores são as soluções da equação (4.13), que são dados explicitamente por:

$$w_{1,2} = \frac{\dfrac{[\rho_{eff} - \beta_{eff}]}{\Lambda_{eff}} - \lambda \pm \sqrt{\left(\dfrac{[\rho_{eff} - \beta_{eff}]}{\Lambda_{eff}} - \lambda\right)^2 - 4\left(\dfrac{[\rho_{eff} - \beta_{eff}]}{\Lambda_{eff}} \lambda\right)}}{2} \tag{4.15}$$

Os autovetores correspondentes aos autovalores são obtidos resolvendo-se os sistemas de equações indeterminados para cada autovalor:

$$\begin{cases} |U_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}} \\ \dfrac{}{(\lambda + w_1)} \end{pmatrix}, \\ |U_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}} \\ \dfrac{}{(\lambda + w_2)} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.16}$$

Para se calcular a constante de normalização resolveu-se o problema adjunto, que resultou nos seguintes autovetores linha:

$$\begin{cases} \langle 1U| = \dfrac{1}{N^1}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \dfrac{}{\lambda + w_1} \end{pmatrix}^T, \\ \langle 2U| = \dfrac{1}{N^2}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \dfrac{}{\lambda + w_2} \end{pmatrix}^T \end{cases} \tag{4.17}$$

Assim os coeficientes de normalização são dados por:

$$\begin{cases} N^1 = 1 + \dfrac{\dfrac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}}\lambda}{(\lambda + w_1)^2} \\ N^2 = 1 + \dfrac{\dfrac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}}\lambda}{(\lambda + w_2)^2} \end{cases} \tag{4.18}$$

O vetor solução é obtido:

$$|X(t)\rangle = \sum_{l=1}^{2} c_l(t)\,|U_l\rangle = \sum_{l=1}^{2}\left[c_l(0)e^{w_l t} + \int_0^t s_l(t')\,e^{w_l(t-t')}dt'\right]|U_l\rangle\,, \tag{4.19}$$

onde:

$$\begin{cases} c_l(0) = \dfrac{\left\langle 1 \quad \dfrac{\lambda}{\lambda + w_1}\middle| \begin{matrix} P(0) \\ C(0) \end{matrix}\right\rangle}{N_l} \\ s_l(0) = \dfrac{\left\langle 1 \quad \dfrac{\lambda}{\lambda + w_1}\middle| \begin{matrix} S(t') \\ 0 \end{matrix}\right\rangle}{N_l} \end{cases} \tag{4.20}$$

A partir da equação (4.19), temos a solução para a população neutrônica e a concentração de precursores:

$$\begin{cases} P(t) = \displaystyle\sum_{l=1}^{2}(c_l(0)e^{w_l t} + I_l) \\ C(t) = \displaystyle\sum_{l=1}^{2}\frac{\beta}{\Lambda}\left(\frac{c_l(0)}{(\lambda + w_l)}e^{w_l t} + \frac{I_l}{(\lambda + w_l)}\right). \end{cases} \tag{4.21}$$

Com I_l dadas por:

$$I_l = \frac{1}{N_l}\int_0^t s_l(t')\, e^{w_l(t-t')} dt', l = 1,2. \tag{4.22}$$

A fim de se estudar problemas com transientes que têm como condição inicial o estado estacionário é preciso se calcular a solução estacionária das equações de cinética pontual, o que é obtido impondo-se a condição de derivada temporal nula no instante $t = t_0$.

A partir das equações (4.1), impondo-se a condição de estado estacionário teremos:

$$\begin{cases} 0 = \widetilde{S(0)} + \left[\rho_{eff} - \beta_{eff}\right]\dfrac{P(0)}{\Lambda_{eff}} + \lambda C(0), \\ 0 = -\lambda C(0) + \dfrac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}} P(0). \end{cases} \tag{4.23}$$

Assim temos o sistema de equações cujo determinante da matriz característica é dado por

$$det\mathbf{M} = \frac{-\lambda\rho_{eff}}{\Lambda_{eff}}. \tag{4.24}$$

Portanto, a solução estacionária para o problema de cinética pontual com fonte externa é dada por:

$$\begin{cases} P(0) = \dfrac{-\widetilde{S(0)}\Lambda_{eff}}{\rho_{eff}} \\ C(0) = \dfrac{-\widetilde{S(0)}\beta_{eff}}{\lambda\rho_{eff}} \end{cases} \tag{4.25}$$

5. Resultados

A solução para os três casos permite o estudo do comportamento da população neutrônica para diferentes tipos de fonte no espaço e no tempo, considerando a distribuição temporal da fonte um pulso de duração 10 μs.

As figuras 1, 2, 3 e 4 são apresentadas para se ilustrar os transientes seguindo uma função delta ou uma injeção retangular de nêutrons no sistema pulso retangular no espaço. Para os três casos estudados foram usadas as constantes físicas dispostas na Tabelas 2 e 3.

O fator de multiplicação do sistema é sempre considerado 0.98, em particular para os casos 1 e 2 foi admitido pulso de largura 10^{-6} s e a dimensão subcrítica H= 22.89416192 [cm]. Para o caso 2 foram assumidas as constantes β =0.0045, λ=0.08 [s^{-1}] de acordo com a literatura [7]. Para o caso 3, a dimensão subcrítica para k=0.98 usando-se as seções de choque da Tabela 2 foi calculada H=23.06264580 [cm]. O cálculo das dimensões subcríticas foi realizado de acordo com as técnicas padrões da Física de Reatores [5], o apêndice A descreve este procedimento.

Tabela 2. Constantes macroscópicas para um sistema homogêneo 1D para um grupo de energia

1/v	[$s.cm^{-1}$]	0.90621E-7
Σtot	[cm^{-1}]	3.45987E-1
Σa	[cm^{-1}]	1.58430E-2
$\nu\Sigma f$	[cm^{-1}]	3.33029E-2
Σs	[cm^{-1}]	3.30178E-1

Tabela 3. Constantes macroscópicas para um sistema homogêneo 1D para três grupos de energia

		g =1	g=2	g=3
1/vg	[s.cm^{-1}]	5.35994E-8	1.47756E-7	1.33310E-6
$\Sigma tot, g$	[cm^{-1}]	2.83110E-1	3.65360E-1	6.65500E-1
$\Sigma a, g$	[cm^{-1}]	1.40280E-2	1.63760E-2	6.98540E-2
$\nu\Sigma f, g$	[cm^{-1}]	3.45310E-2	3.28690E-2	1.20020E-1
χ, g	-	0.7112	0.2886	0.0002
$\Sigma g \rightarrow g$	[cm^{-1}]	2.36040E-1	3.48954E-1	5.95640E-1
$\Sigma g \rightarrow g+1$	[cm^{-1}]	3.31803E-2	3.45000E-5	-
$\Sigma g \rightarrow g+2$	[cm^{-1}]	1.16620E-5	-	-

A solução estacionária nos sistemas críticos é a autofunção fundamental. Os sistemas subcríticos com fontes têm distribuições neutrônicas estacionárias que são dirigidas por fonte externa. Quando os sistemas subcríticos estão próximos da criticalidade ocorre pouco desvio entre a distribuição dirigida por fonte e a correspondente autofunção fundamental para o caso crítico.

Quando os sistemas subcríticos acionados por fonte estão longe da criticalidade suas distribuições neutrônicas podem diferir significantemente da correspondente autofunção fundamental, e dependerão fortemente da posição da fonte, espera-se que a teoria de perturbação homogênea seja ineficaz para sistemas subcríticos acionados por fontes externas.

Um exemplo útil seria o estudo de um sistema homogêneo monoenergético em geometria plana. A distribuição da densidade neutrônica tem a forma de cosseno que é simétrica, é óbvio que uma mudança nas propriedades do meio perto da fronteira esquerda do *slab* terá precisamente o mesmo efeito sobre a densidade neutrônica como o de uma variação equivalente feita simetricamente sobre o lado direito do *slab*.

A perturbação homogênea supõe uma variação de reatividade associada a uma perturbação no sistema (na fonte, por exemplo) e também exibe esta simetria. Ao se introduzir uma fonte externa no lado esquerdo do *slab*, conforme o meio se torna mais subcrítico a assimetria na densidade neutrônica torna-se mais pronunciada e sua forma desviará mais fortemente da forma cossenoidal da correspondente autofunção fundamental.

Estes pares de variações nas propriedades do meio não mais terão o mesmo efeito na densidade neutrônica, uma perturbação perto do lado esquerdo da fonte causará um efeito muito maior no sistema. Entretanto, a perturbação homogênea dará resultados equivalentes para perturbações em ambos os lados do *slab*. Este exemplo simples ilustra as impropriedades de se utilizar indiscriminadamente os métodos de perturbação homogênea para resolver problemas de difusão em sistemas subcríticos acionados por fonte externa [17].

Uma vez definidas as complexidades dos problemas referentes à Física de ADS, procuramos resolver o problema geral de difusão supondo uma expansão em autofunções fundamentais do problema homogêneo, porém considerando fonte externa simétrica, não incorrendo assim em falhas conceituais de acordo com as novas definições da cinética de ADS [26], obtendo-se resultados satisfatórios nos cálculos das densidades neutrônicas.

5.1 Fonte Externa

A fonte externa é descrita pela expressão:

$$S_g(x,t) = S(x)S(t), \tag{5.1}$$

Definindo-se $S_{n,g}(t)$ a fonte $S_g(x,t)$ projetada no espaço das autofunções de Helmholtz de enésima ordem.

A disposição da fonte e dos detectores para os cálculos de fluxos neutrônicos é dada pela Figura 1, a fonte espacial é quadrada de largura H/10, simétrica na placa, a fonte temporal tem duração de 10 μs. Os detectores 1 e 2 são dispostos respectivamente no centro da placa e a um décimo da dimensão total, a partir da fronteira da placa, em posições relativamente separadas com o intuito de se observar a dispersão do fluxo espacial e temporalmente para diferentes tipos de transientes.

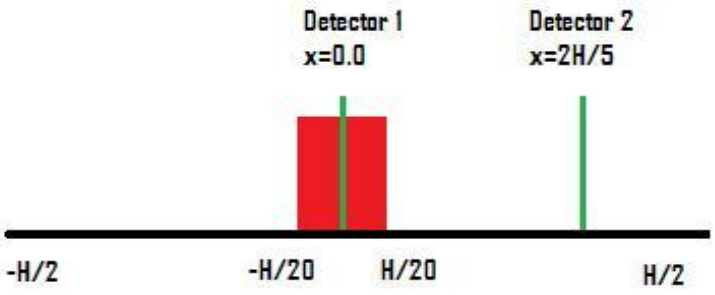

Figura 1. Posição da fonte externa e detectores.

5.2 Transientes

Os resultados analíticos obtidos neste trabalho permitem a solução do problema de transientes no modelo de difusão para qualquer tipo de transiente, entretanto para ilustrar o método de solução exata, foram escolhidos três tipos de transientes:

- Transiente de desligamento: sistema ligado com S=1 e desligado em t=10 μs. (Transiente 1)
- Transiente de um pulso: sistema desligado (fluxo inicial nulo) e ligado á t=0 e desligado após o período de 10 μs. (Transiente 2)
- Transiente de aumento de fonte: sistema ligado com S=1 e um pulso de S=5 é injetado no sistema a t=0 e desligado a t=10 μs. (Transiente 3)

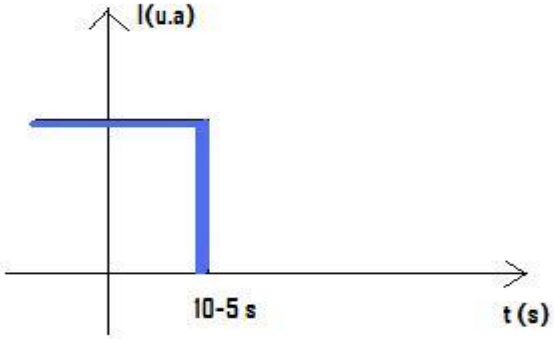

Figura 2. Transiente 1, desligamento.

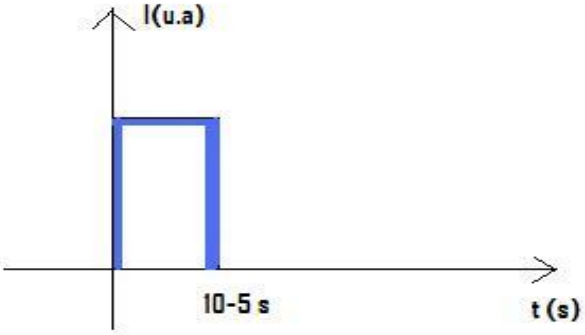

Figura 3. Transiente 2, condição inicial e fluxo nulo e pulso.

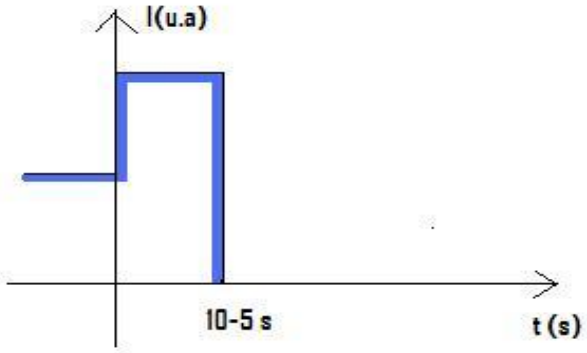

Figura 4. Transiente 3, condição inicial estacionário, aumento da intensidade da fonte de 1 para 5.

Para um estudo adequado da influência de fontes externas em sistemas subcríticos multiplicativos é preciso se estudar a dispersão espacial e temporal dos nêutrons de fonte na simulação de experimentos pulsados. O comportamento qualitativo da dispersão de nêutrons no tempo depende da posição do detector e da fonte no sistema considerado, principalmente se a fonte externa atua no grupo rápido de energia.

5.3 Resultados exatos da cinética espacial

A distribuição neutrônica em sistemas descritos por equações homogêneas apresenta a solução fundamental, entretanto as distribuições neutrônicas que dependem da fonte externa são descritas por equações diferenciais não-homogêneas. No caso de estes sistemas estarem próximos da criticalidade há pouca disparidade entre os resultados, entretanto, quando estes sistemas estão relativamente longe da criticalidade, as distribuições neutrônicas dependem fortemente da posição da fonte.

Na Figura 5 estão apresentadas a dispersão dos fluxos para o caso 1 e o transiente 2, variando-se a largura dos pulsos e observando-se a distribuição do fluxo tanto no espaço

quanto no tempo, para o pulsos de largura H/20 a distribuição do fluxo já é da ordem de um pulso instantâneo localizado (delta de Dirac).

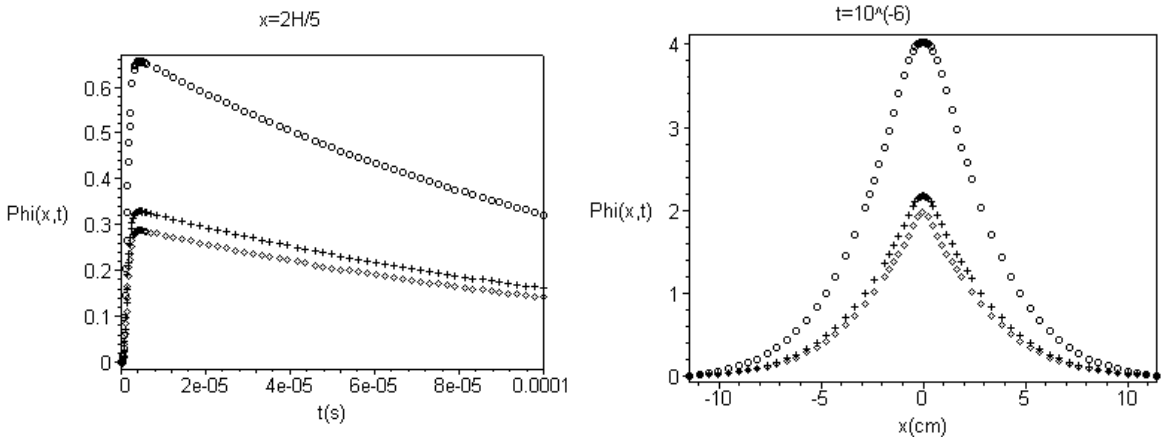

Figura 5. Dispersão dos fluxos para o caso 1, considerando uma posição e tempo fixos para diferentes larguras de pulso: "o" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac.

A dispersão dos fluxos para a posição no detector 2, considerando o caso 2 de um sistema de equações acopladas não apresenta diferenças notáveis com o problema sem grupos de precursores, naturalmente pela duração do pulso que não permite a influência dos precursores na distribuição neutrônica, a potência para o caso 2 é reportada na Figura 6.

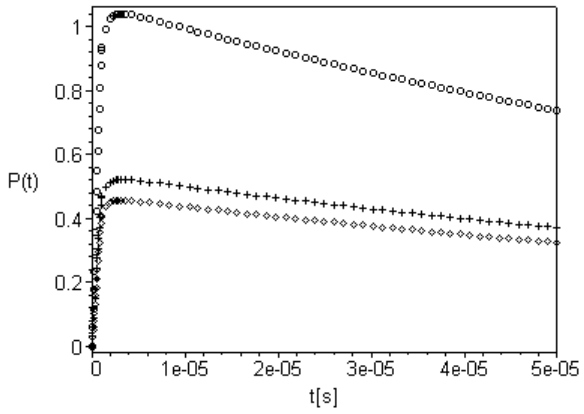

Figura 6. Potência para o caso 1, para diferentes larguras de pulso: "o" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac.

Nas Figuras 7 e 8, a dispersão dos fluxos, para as posições respectivas x1=0.0 e x2=2H/5, são apresentadas para cada grupo de energia, mostrando-se que a natureza qualitativa da distribuição do fluxo depende da multiplicação e posição da fonte no sistema.

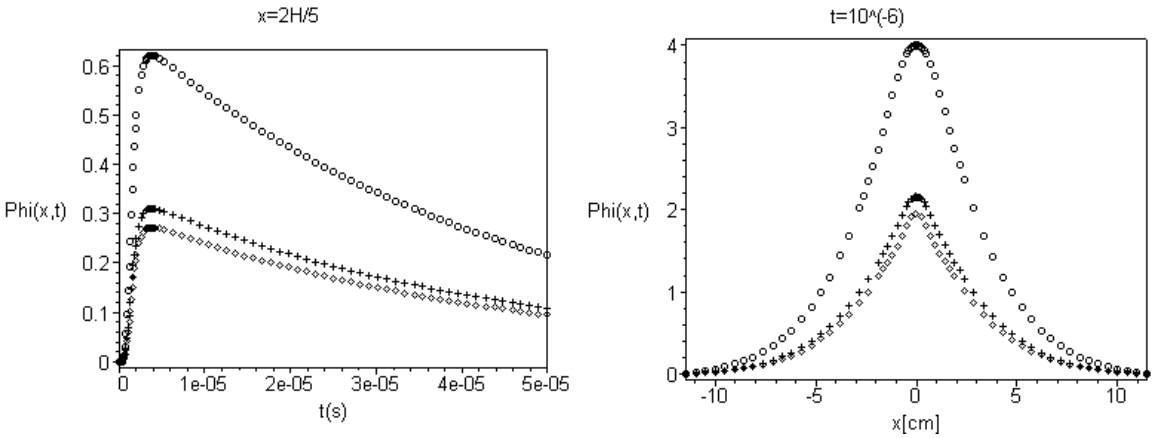

Figura 7. Fluxos para o caso 2, para diferentes larguras de pulso: "o" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac.

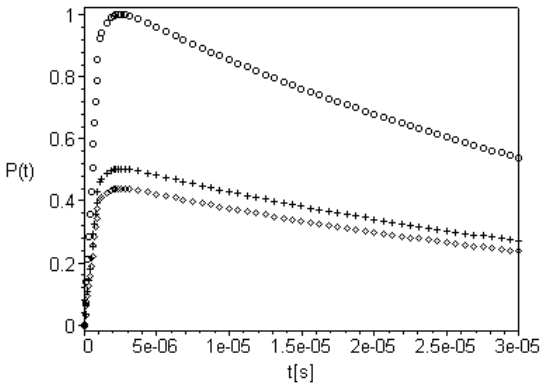

Figura 8. Potência para o caso 1, para diferentes larguras de pulso: "o" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac.

Os resultados exatos dos fluxos para o caso 3 (três grupos de energia sem precursores) para cada grupo de energia são apresentados para o detector no centro do *slab*:

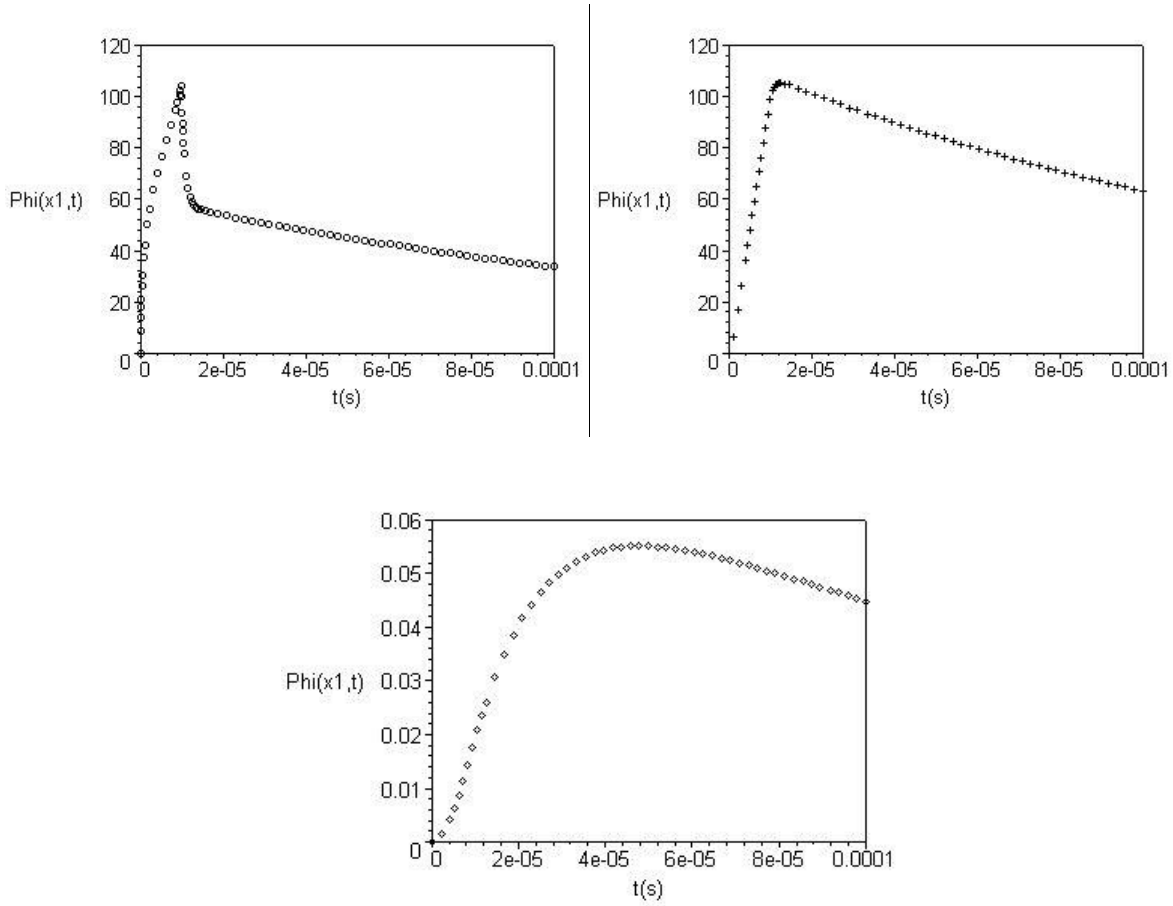

Figura 9. **Dispersão dos fluxos no caso 3, Para uma posição fixa (x1=0.0) considerando um pulso de largura H/10.**

Os resultados exatos dos fluxos para o caso 3 (três grupos de energia sem precursores) para cada grupo de energia são apresentados para o detector na posição 2H/5, as diferenças nas respostas dos fluxos devidas á perturbação da fonte, indicam a natureza da dispersão espacial e o comportamento do sinal que depende da posição do detector:

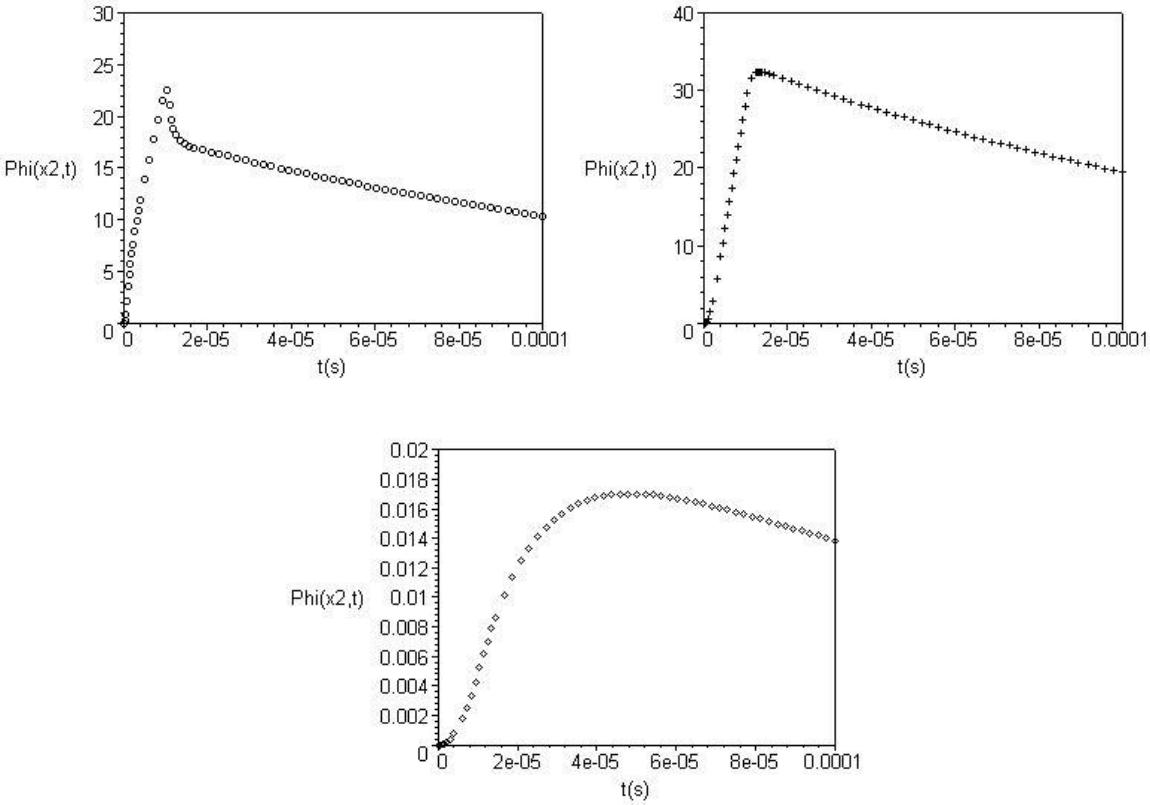

Figura 10. **Dispersão dos fluxos no caso 3, Para uma posição fixa (x2=2H/5) considerando um pulso de largura H/10.**

A potência para o caso 3 é apresentada na Figura 11. Estes resultados foram apresentados em trabalho publicado no INAC 2007 [22].

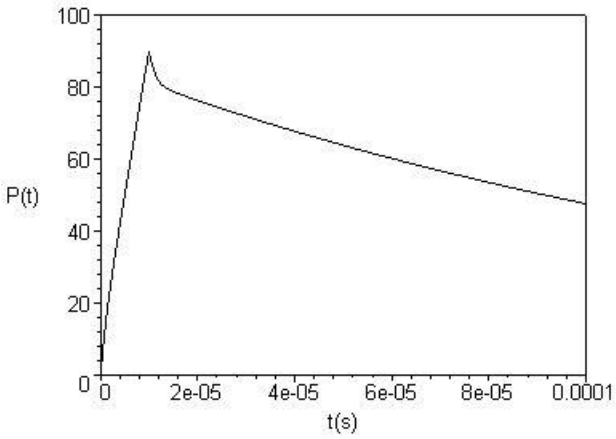

Figura 11. **Potência para o transiente 1, considerando um pulso de largura H/10.**

Na figura 12 a solução estacionária para o caso 3 é apresentada junto á potência, também calculada analiticamente.

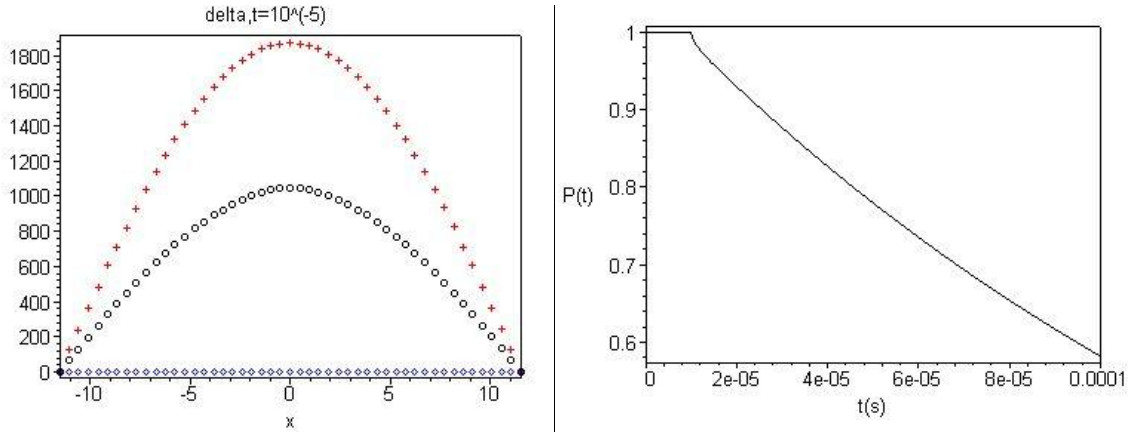

Figura 12. Fluxo para o caso 3 no espaço no regime estacionário e potência para transiente 2

Na figura 13 as soluções exatas para o caso 3, e transiente 2 (considerando-se condição inicial estacionária) são apresentadas para cada grupo de energia, considerando-se o detector no centro do *slab*:

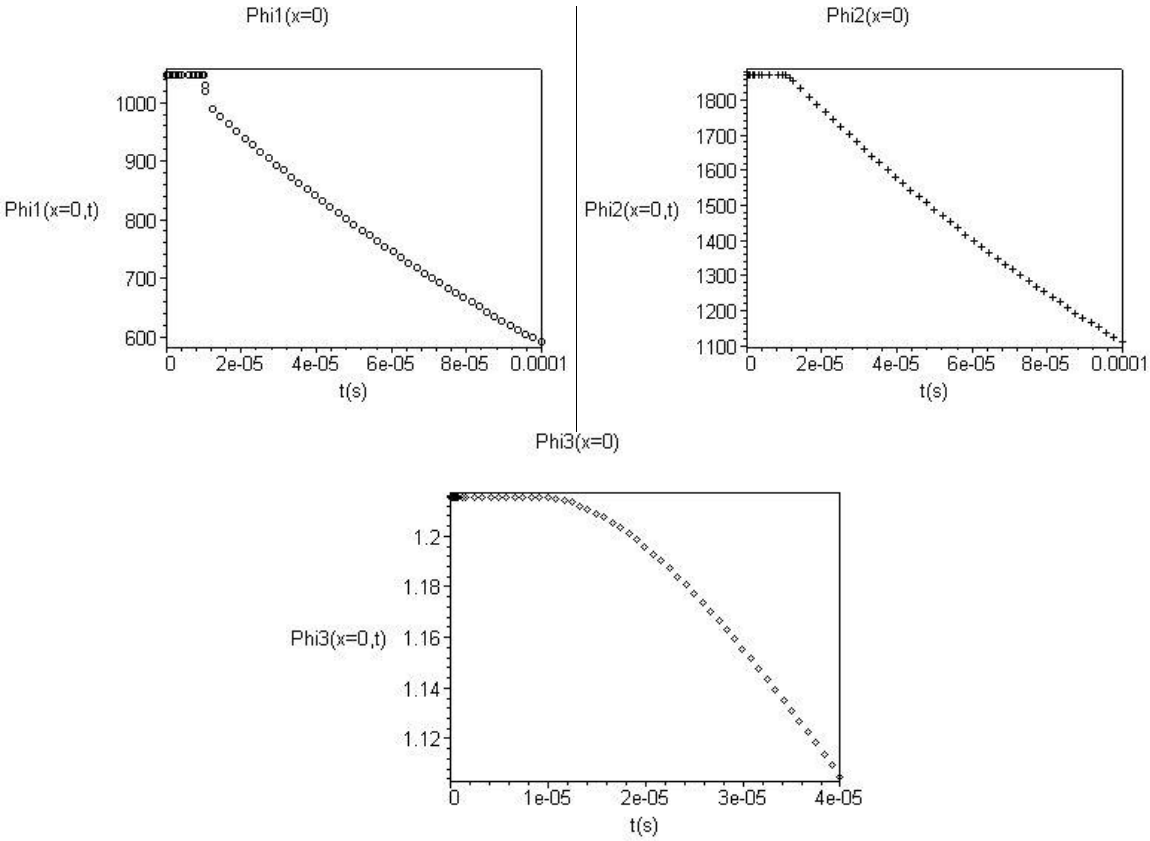

Figura 13. Fluxos para o caso 3 para cada grupo de energia, na posição (x=0.0), transiente 1.

5.4 Resultados exatos da cinética pontual

Para o estudo do modelo de cinética pontual foi resolvido o problema de cinética para diferentes larguras de fonte externa, de acordo com as definições que foram estabelecidas no capítulo **4** (Figura 14). Foram obtidas as potências para os três tipos de transientes considerados neste trabalho (desligamento, pulso e aumento de fonte) com um pulso de duração 10^{-6} s.

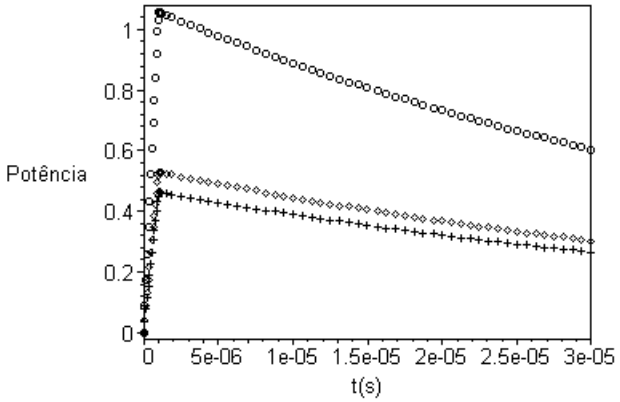

Figura 14. Potência para o caso 2, transiente 1, considerando o modelo de cinética pontual para diferentes larguras de pulso: "o" H/10, "×" H/20 e "◊" pulso de Dirac.

Considerando o transiente de desligamento no tempo $t=10^{-6}$s, teremos a solução exata do problema de cinética pontual:

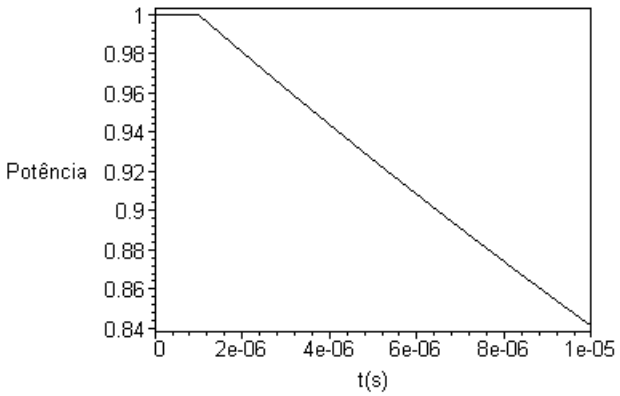

Figura 15. Potência para o caso 2, considerando o modelo de cinética pontual no transiente 2 para um pulso de largura H/10.

Da mesma forma, considerando o transiente de aumento de fonte teremos a solução para a potência do sistema:

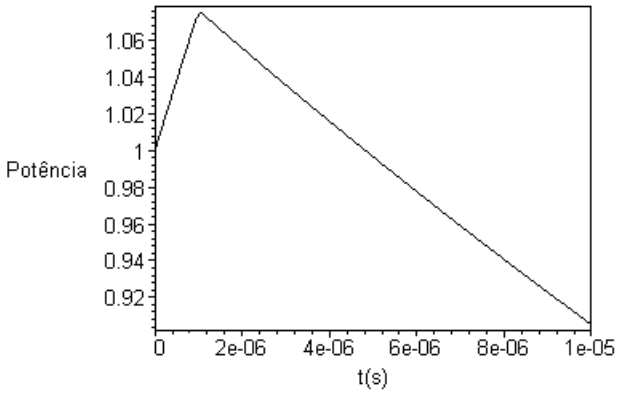

Figura 16. Potência para o caso 2, considerando o modelo de cinética pontual no transiente 3, para um pulso de largura H/10.

5.5 Comparações entre resultados da cinética espacial e da cinética pontual

Neste capítulo os resultados da cinética espacial obtidos para o caso 2 são comparados com os resultados obtidos para o transiente 2, considerando o modelo de cinética pontual apresentado no capítulo **4,** considerando o resultado (4.21).

De acordo com os resultados da Figura 17, observa-se que o modelo de cinética pontual apresenta uma solução sobreestimada em relação á solução da cinética espacial para n=16, por outro lado, percebe-se pelo gráfico que o modelo de cinética pontual aproxima-se para o modelo de cinética espacial exato para n=5, ou seja, o modelo de cinética pontual pode ser considerado uma aproximação do modelo de cinética espacial exato para o modelo de difusão.

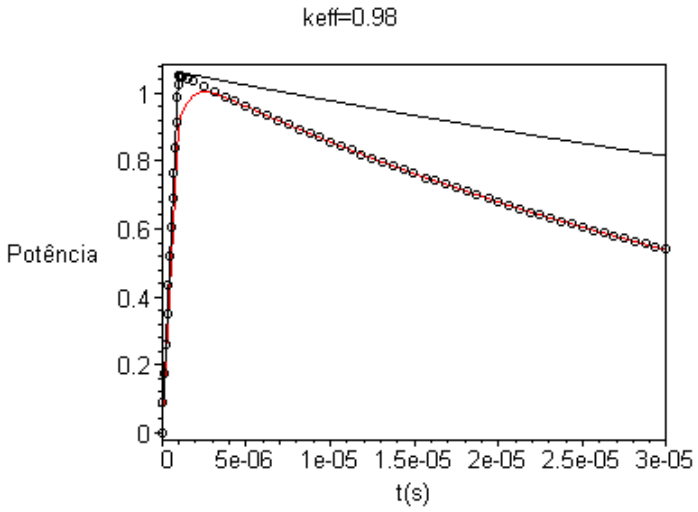

Figura 17. Potência para o caso 2, considerando o modelo de cinética pontual no transiente 1, para um pulso de largura H/10. Resultado em linha vermelha representa a solução em cinética espacial para n=16 e "°" cinética espacial para n =5,e linha preta é o modelo de cinética pontual.

De fato, a solução para n=5 é aproximadamente a mesma solução para n=16, o que indica a velocidade de convergência desta série, as razões matemáticas para este fato são indicadas no Apêndice B.

O uso da técnica da expansão em série das autofunções para a obtenção da solução exata da cinética pontual de acordo com o capítulo 4 e as respectivas definições a respeito dos parâmetros cinéticos, levam a constatação que o modelo de cinética pontual é uma aproximação de primeira ordem na expansão em série da solução exata.

O modelo que assume os parâmetros cinéticos como constantes é errôneo, uma vez que os consideram independentes da perturbação na fonte, assim o modelo não descreve as características dinâmicas do sistema com generalidade. A partir das definições dos parâmetros cinéticos efetivos definidos no capítulo **4**, e da aplicação do método de expansão na solução das equações de cinética com fonte externa, temos os resultados para diferentes níveis de subcriticalidade:

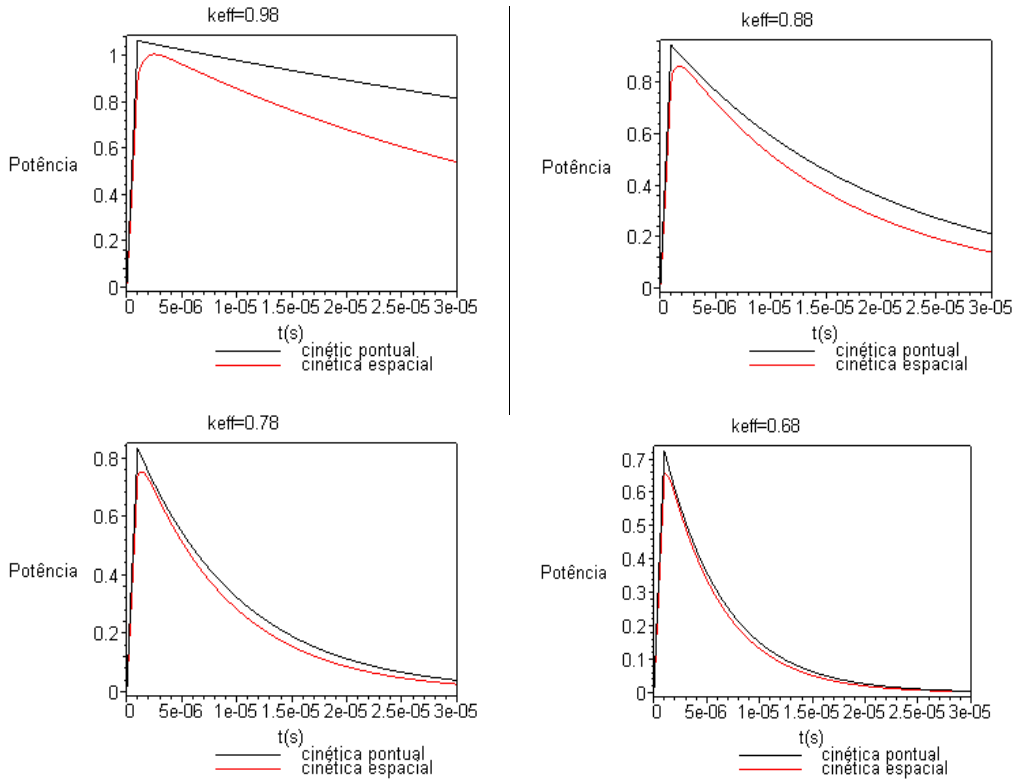

Figura 18. Potência para o caso 2, para k=0,98, k=0,88, k=0,78 e k=0.68, considerando o modelo de cinética pontual no transiente 1, para uma fonte simétrica . Resultado "o" é a solução da cinética espacial para n =16, linha preta representa a solução do modelo de cinética pontual.

A cinética pontual sobreestima a solução da cinética espacial que depende do nível de subcriticalidade do sistema. Na medida em que o nível de subcriticalidade do sistema se aproxima da criticalidade a estimativa da potência no modelo de cinética pontual torna-se maior em relação ao resultado da cinética espacial.

Estes resultados demonstram que se deve considerar uma reformulação dos parâmetros cinéticos em função das perturbações no sistema. Uma dedução exata dos parâmetros cinéticos considerando perturbações gerais (tanto no meio quanto na fonte) a partir das equações de cinética espacial com fonte externa foi apresentada em trabalho recente [31], o que levantou novas questões sobre a definição dos parâmetros cinéticos.

6. COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS EXATOS E NUMÉRICOS

Um dos objetivos deste trabalho que está associado ao CRP é validar códigos para ADS (*Accelerator Driven Systems*). Para isso foram utilizados resultados do programa CINESP-ADS [Anexo A], que realiza a discretização das equações de cinética espacial (2.1) em linguagem FORTRAN e fornece a distribuição de fluxos espacial, assim como as concentrações de precursores de nêutrons atrasados a partir de uma distribuição de fluxos calculada tomando por base a pesquisa de criticalidade, ou com uma distribuição calculada *a priori* junto com o k_{eff} .

Para se ilustrar a natureza das soluções e a compatibilidade das soluções numéricas e exatas foram calculadas independentemente a potência para o caso 3, supondo o transiente 1 e comparou-se os resultados numéricos obtidos pelo CINESP-ADS com o resultado obtido analiticamente (Figura 19). Com o objetivo de se estudar o comportamento das distribuições neutrônicas, reportou-se o fluxo rápido em posições diferentes da placa (detector 1 e 2), considerando o transiente 3 comparou-se os resultados numéricos e exatos (Figura 20 e 21), assim como a potência que também foi reportada. Nas figuras 20 a 24 são apresentados os resultados numéricos e exatos para o fluxo rápido, considerando o transiente de aumento de fonte. De acordo com os gráficos, os resultados mostraram um acordo razoável da solução numérica com a solução exata, considerando-se n=16 na expansão das autofunções da solução analítica.

Para o transiente 2 (desligamento), os resultados exatos e numéricos para as potências normalizadas são comparados logo abaixo:

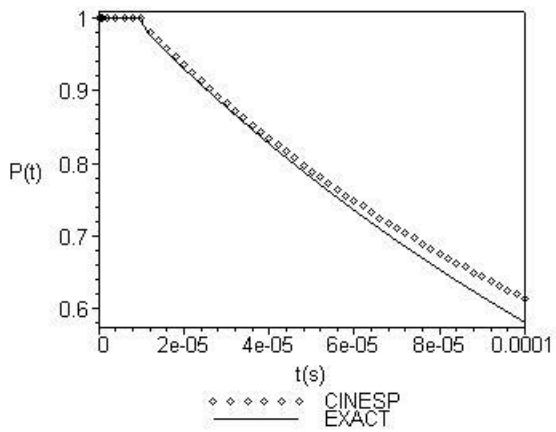

Figura 19. Potência para o caso 3, transiente 1

Para os fluxos em posições diferentes do detector, os resultados para os fluxos exatos e numéricos são calculados e comparados, as magnitudes e as distribuições do fluxo no tempo, se apresentam nos gráficos para diferentes posições do detector:

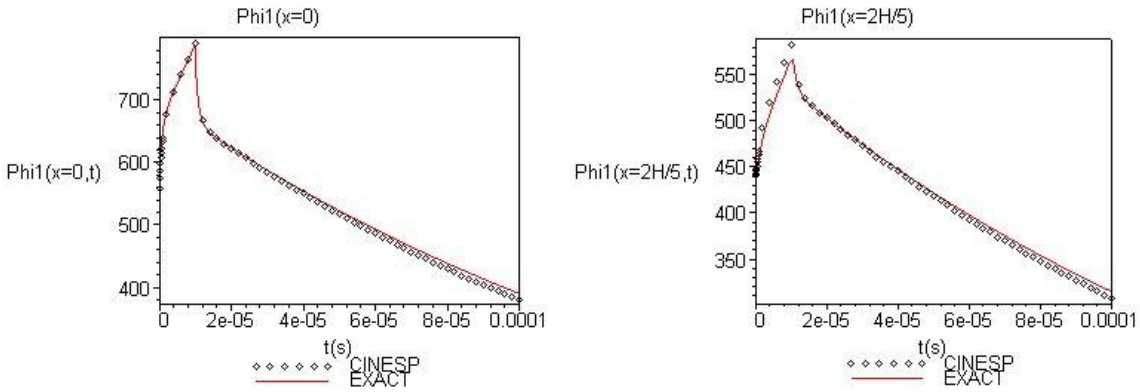

Figura 20. Fluxo rápido para x= 0.0 e x= 2H/5.

Considerando o transiente 3 (aumento de fonte), o gráfico comparativo para a potência é apresentado, considerando potência normalizada:

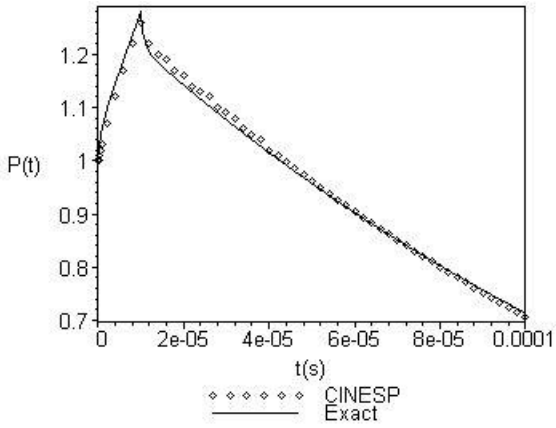

Figura 18. Potência para o caso 3, transiente 3.

A fim de se obter uma validação da solução numérica para o problema é preciso se fazer uma análise quantitativa da solução numérica, calculando-se o erro relativo em relação á solução obtida analiticamente com o intuito de se obter uma análise de convergência da solução numérica para a solução exata.

Para se realizar este estudo foi escolhido o transiente 3 (aumento de fonte), onde se considera como condição inicial a solução para o caso estacionário. A viabilidade deste estudo depende também da convergência da solução numérica para a solução exata na medida em se aumenta a exatidão do método numérico (discretização espacial e temporal), os resultados numéricos foram obtidos para diferentes discretizações espaciais (Nx9, Nx19, Nx29, Nx39) e temporais ($\Delta t1=10^{-7}$s, $\Delta t2=5.10^{-8}$s, $\Delta t3=10^{-8}$s, $\Delta t4 =5.10^{-9}$s).

Com o intuito de se ilustrar a metodologia do estudo de convergência da solução numérica escolheram-se, para efeito de comparação, as discretizações espaciais (Nx9 e Nx39) e as discretizações temporais ($\Delta t1=10^{-7}$s e $\Delta t4 =5.10^{-9}$s). A convergência dos erros relativos é dada pela expressão:

$$ERR = \frac{|exato - num|}{exato} \qquad (6.1)$$

Os resultados deste estudo são apresentados logo abaixo:

Tabela 4. Comparação dos erros relativos para diferentes discretizações no tempo.

EXATO	ΔT1=10-7	ΔT2=5.10-9	ERR1	ERR2
5,5950E-01	5,594E-01	5,594E-01	1,787E-04	1,7873E-04
5,9690E-01	5,872E-01	5,972E-01	1,625E-02	5,0260E-04
6,1480E-01	6,077E-01	6,163E-01	1,155E-02	2,4398E-03
6,2770E-01	6,229E-01	6,300E-01	7,647E-03	3,6642E-03
6,3790E-01	6,349E-01	6,409E-01	4,703E-03	4,7029E-03
6,7530E-01	6,772E-01	6,809E-01	2,814E-03	8,2926E-03
7,3400E-01	7,403E-01	7,435E-01	8,583E-03	1,2943E-02
7,8210E-01	7,909E-01	7,947E-01	1,125E-02	1,6110E-02
6,4290E-01	6,479E-01	6,485E-01	7,777E-03	8,7105E-03
6,2620E-01	6,298E-01	6,306E-01	5,749E-03	7,0265E-03
6,1160E-01	6,143E-01	6,149E-01	4,415E-03	5,3957E-03
5,9730E-01	5,993E-01	5,996E-01	3,348E-03	3,8507E-03
5,8340E-01	5,846E-01	5,847E-01	2,057E-03	2,2283E-03

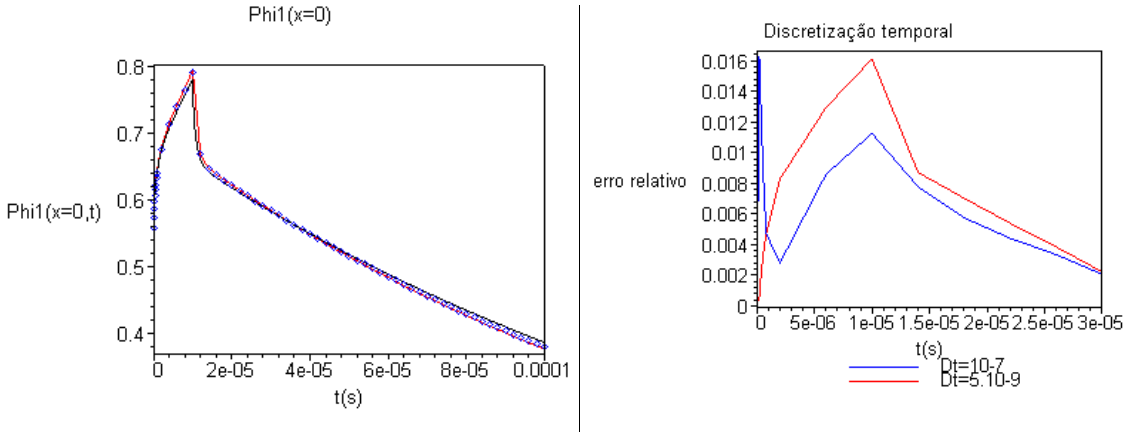

Figura 22. Fluxo rápido na posição x=0 para o caso 3, transiente 3.Em vermelho está representada a solução numérica para a discretização no tempo de $\Delta t=5.10^{-9}$s e em azul para $\Delta t=10^{-7}$s, e erro relativo á direita.

O fluxo rápido no centro do *slab* é calculado numericamente e analiticamente, os resultados são reportados para a discretização espacial e o erro relativo é calculado, a convergência dos resultados numéricos para os resultados exatos é observada, observando-se que o erro relativo tende a zero com o aumento do tempo.

Tabela 5. Comparação dos erros relativos para diferentes discretizações no espaço.

EXATO	NX9	NX39	ERR1	ERR2
5,5950E-01	5,5360E-01	5,594E-01	1,0545E-02	1,7873E-04
5,9690E-01	5,7530E-01	5,872E-01	3,6187E-02	1,6251E-02
6,1480E-01	5,9110E-01	6,077E-01	3,8549E-02	1,1548E-02
6,2770E-01	6,0250E-01	6,229E-01	4,0147E-02	7,6470E-03
6,3790E-01	6,1160E-01	6,349E-01	4,1229E-02	4,7029E-03
6,7530E-01	6,4430E-01	6,772E-01	4,5906E-02	2,8136E-03
7,3400E-01	6,9510E-01	7,403E-01	5,2997E-02	8,5831E-03
7,8210E-01	7,3660E-01	7,909E-01	5,8177E-02	1,1252E-02
6,4290E-01	6,2780E-01	6,479E-01	2,3487E-02	7,7773E-03
6,2620E-01	6,1370E-01	6,298E-01	1,9962E-02	5,7490E-03
6,1160E-01	6,0130E-01	6,143E-01	1,6841E-02	4,4147E-03
5,9730E-01	5,8930E-01	5,993E-01	1,3394E-02	3,3484E-03
5,8340E-01	5,7760E-01	5,846E-01	9,9417E-03	2,0569E-03

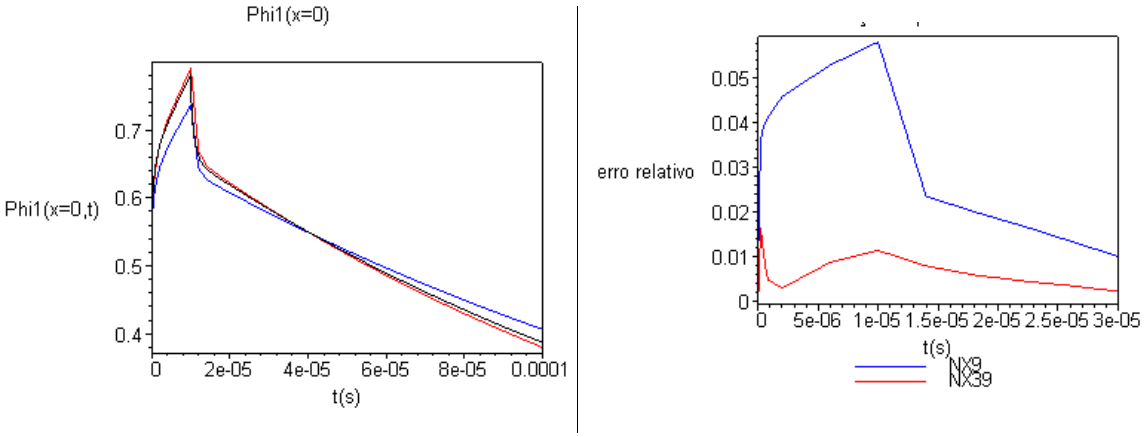

Figura 19. Fluxo rápido na posição x=0 para o caso 3, transiente 3. Em azul está representada a solução numérica para a discretização espacial de NX9 e em vermelho para NX39 e erro relativo á direita.

A comparação entre os resultados exatos e numéricos para a dispersão temporal do fluxo rápido, para diferentes posições é apresentada:

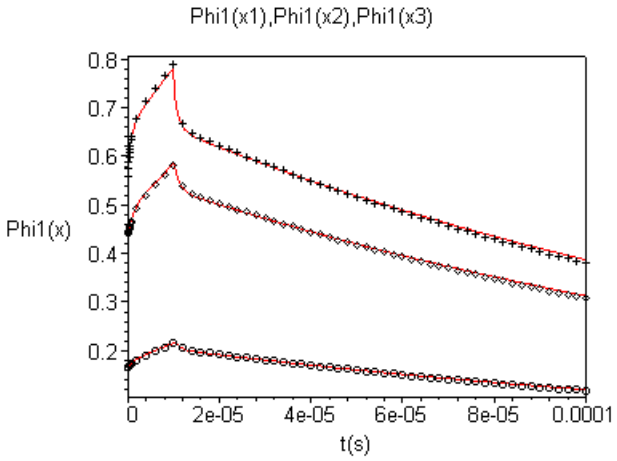

Figura 20. Fluxo rápido nas posições x=0 "+", x=0.2 H "◊"e x=0.4H "°" para o caso 3, transiente 3 .Em vermelho estão representadas as respectivas soluções numéricas para a discretização espacial de NX39.

7. CONCLUSÕES

O trabalho apresentado salienta alguns aspectos fundamentais da cinética de reatores para sistemas multiplicativos subcríticos. Alguns resultados importantes para diferentes sistemas foram apresentados. Particularmente, o estudo da influência de nêutrons atrasados mostrou que estes podem ser descartados quando se estuda inserções rápidas de fonte externa como pode ser visto na Figura 6. As dispersões para os caso 1 e 2 para diferentes larguras de fonte demonstraram em que medida a forma da fonte influencia a distribuição neutrônica.

A metodologia de solução mostrou-se correta uma vez que os resultados para um grupo de energia e três grupos de energia concordaram bem com resultados analíticos obtidos independentemente [19,21]. Os resultados numéricos concordaram bem com os resultados analíticos para três grupos de energia usando as seções de choque da Tabela 2. Foram obtidos independentemente (CINESP-ADS) vários resultados numéricos para as discretizações no tempo e no espaço (no tempo: de 10^{-7} a 5.10^{-9}s, no espaço: NX9 a NX39), estes resultados foram comparados com os resultados exatos (Figuras 21 a 26). A potência é reportada para diferentes transientes e os resultados numéricos concordaram com os resultados analíticos obtidos neste estudo, apresentando um erro relativo de 0,2 % para 39 discretizações espaciais.

A solução geral para G grupos e R precursores foi obtida em forma fechada, no caso $G + R \leq 4$ o erro introduzido na solução é procedente apenas do truncamento da série, contudo no caso geral considerando $G + R > 4$ não se tem uma fórmula analítica para os autovalores e deve-se usar métodos numéricos para obtê-los, levando-se em conta os erros associados.

Em trabalho posterior pretende-se resolver o mais analiticamente possível problemas de cinética de reatores mais complicados, considerando-se sistemas heterogêneos em geometrias regulares, sendo os meios materiais subcríticos acionados por fontes externas. A vantagem do uso do método de expansão utilizado neste trabalho está no fato que o erro do procedimento de cálculo deve-se totalmente ao truncamento da expansão em série, evitando-se os problemas numéricos e possibilitando assim a obtenção de um conjunto de soluções exatas que possibilite a construção de *benchmarks* analíticos para o estudo da Física de ADS.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. DUDERSTADT, J. J.; MARTIN, W. R. *Transport Theory.* New York: John Wiley & Sons, 1979.

2. ZWEIFEL, P. *Reactor Physics.* Tokyo, Japan: McGraw-Hill, 1973.

3. AKCASU, Z.; LELLOUCHE, G. S.; SHOTKIN, L.M. *Mathematical methods in nuclear reactor dynamics*. New York: Academic Press, 1971.

4. HENRY, A. F. *Nuclear-Reactor Theory.* Cambridge, MA: MIT Press, 1975.

5. BELL, G. I.; GLASSTONE, S. *Nuclear Reactor Dynamics*. Illinois: American Nuclear Society, 1985.

6. CASE, K. M.; ZWEIFEL, P. F. *Linear Transport Theory*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

7. KEEPIN, G. R. *Physics of Nuclear Kinetics*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

8. HENRY, A. F. The application of reactor kinetics to the analysis of experiments. *Nuclear Science and Engineering*, v. 3, p.52, 1958.

9. LEWINS, J. The Time-dependent Importance of Neutrons and Precursors. *Nuclear Science and Engineering*, v. **7**, p.268-274, 1960.

10. FODERARO, A.; GARABEDIAN, H. L. A New Method for the Solution of group Diffusion Equations. *Nuclear Science and Engineering*, v. 8, p .44-52, 1960.

11. LEWINS, J. The Reduction of the Time-Dependent Equations for Nuclear Reactors to a set of Ordinary Differential Equations. *Nuclear Science and Engineering*, v. 9, p. 399-407, 1961.

12. BECKER, M. A Generalized Formulation of The point Nuclear reactor Kinetics Equations. *Nuclear Science and Engineering*, v. 31, p. 458-464, 1968.

13. OHTANI, N. et al. Solutions of Diffusion Equations by Fourier Expansions. *Nuclear Science and Engineering*, v. 1, p. 547-553, 1974.

14. CORNO, S. E.; RAVETTO, P.; SUMINI, M. Nuclear Reactor Kinetics with a Continues Slowing –Down Model. *Annals of Nuclear Energy*, v. 11, n. 11, p. 547-557, 1984.

15. LEE, C. E.; ROTTLER, S. Analytic Solutions of the multigroup space-time reactor kinetics equations-I. *Annals of Nuclear Energy*, v. 13, n. 5, p. 245-268, 1986.

16. GANDINI, A. HGPT based sensitivity time-dependent methods for the analysis of subcritical systems. *Annals of Nuclear Energy*, v. 28, p. 1193-1217, 2001.

17. CACUCI, D. G. On the Neutron Kinetics and Control of Accelerator-Driven Systems. *Nuclear Science and Engineering*, v. 148, p. 55-66, 2004.

18. DULLA, D.; RAVETTO, P.; ROSTAGNO, M. M. On Some Features of Quasi-Static Schemes in Reactor Kinetics. *The Physics of fuel Cycles and Advanced Nuclear Systems: Global Developments*, PHYSOR'04, Chicago, April 25-29. Lagrange Park, IL: American Nuclear Society, 2004. CD-ROM

19. DULLA, S.; RAVETTO, P.; ROSTAGNO, M. M. Some Features of Spatial Neutron Kinetics for Multiplying Systems. *Nuclear Science and Engineering*, v. 149, p.34-89, 2005.

20. DULLA, S.; GANAPOL, B. D.; RAVETTO, P. Space asymptotic method for the study of neutron propagation. *Annals of Nuclear Energy*, v. 33, p. 932-940, 2006.

21. DULLA, S. et al. Analytical Benchmarks for the Kinetics of Accelerator-Driven Systems. *Joint International Topical Meeting on Mathematics & Computation and Supercomputing in Nuclear Applications (M&C+SNA 2007)*, Monterey, California, April 15-19, 2007, American Nuclear Society, LaGrange Park, IL, 2007. CD-ROM.

22. OLIVEIRA, F. L. de; MAIORINO, J. R.; SANTOS, R.S. The Analytical Benchmark Solution of Spatial Diffusion Kinetics in Source Driven Systems for Homogeneous Media. *International Nuclear Atlantic Conference, INAC*, Santos, SP, Sep. 2007.

23. GANAPOL, B. D. *The Analytical Benchmark Library for Nuclear Engineering*: PC Version. Idaho Falls: Idaho National Engineering Laboratory, 1992.

24. CASE, K. M.; HOFFMAN, F. de; PLACZEK, G. *Introduction to the theory of neutron diffusion*. Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratory, 1953.

25. CORNO, S. E.; MANZO, G.; RAVETTO, P.; RICCHENA, R. Analytical Methods in Local Reactor Dynamics and Validation of the Quasi-Static Approximation. *EUR 6390 En and European Applied Research Reports*, v. 1, n**.** 4, p. 831-945, 1979.

26. MUND, E. H.; GANAPOL, B. D.; RAVETTO, P.; ROSTAGNO, M. M. Multigroup Diffusion Kinetics Benchmark of an ADS System in Slab Geometry, *Proceedings of Conference on the New Frontiers of Nuclear Technology: Reactor Physics, Safety and High-Performance Computing*, PHYSOR '02, Seoul, , Paper 7B-03, Oct. 2002.

27. AIT-ABDERRAHIM, H.; STANCULESCU, A. IAEA Coordinate Research Project on Analytical and Experimental Benchmark Analyses of Accelerator Driven Systems. *Proceedings of ANS Topical Meeting on Reactor Physics, PHYSOR 2006*. Vancouver, 10-14 September, Paper C074 (2006).

28. MAIORINO, J. R. et al. The Participation of IPEN in the IAEA Coordinated Research Projects on Accelerator Driven Systems (ADS). *International Nuclear Atlantic Conference*, INAC, Santos, SP, Sep. 2007.

29. BRAUN, M. *Differential Equations and Their Applications*. New York: Springer-Verlag, 1978.

30. BEYER, W. H. *CRC Standard Mathematical Tables*. 25. ed. Ohio, USA: CRC Press, 1978.

31. DULLA, S.; RAVETTO, P.; CARTA, M.; D'ANGELO, A. Kinetic Parameters for Source Driven Systems. *ANS Topical Meeting on Reactor Physics,* PHYSOR'06, Vancouver, BC, Canada, 10-14 Sep. 2006.

32. SANTOS, R. S. Solução Numérica das Equações da Cinética de Reatores com o Método explícito de Direções Alternadas. Rio de Janeiro: CNEN/IEN, Comunicação Técnica 1992.

33. SANTOS, R. S. Dynamics of nuclear cores based on one and two dimensional multigroup diffusion theory. *Proceedings of ENFIR-Brazilian Meeting on Reactor Physics*, Aguas de Lindoia, Brazil, 7-11 August, p. 143-148, 1995.

34. WEINBERG, A. M.; WIGNER, E. P. *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*. Chicago: University of Chicago Press, 1958.

35. ASH, M. *Nuclear Reactor Kinetics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

36. GANDINI, A.; SALVATORES, M. The Physics of Subcritical Multiplying Systems. *Journal Nuclear Science Technology*, v. 39, 2002.

37. KULIK, V. V.; LEE, J. C. Space-Time Correction for reactivity Determination in Source-Driven Subcritical Systems. *Nuclear Science and Engineering*, v. 153, p .69-89, 2006.

38. DULLA, S. et al. Transport Effects for Source-Oscillated problems in Subcritical Systems. *Nuclear Science and Engineering*, v. 148, p. 89-102, 2004.

39. RAVETTO, P. Reactivity Oscillations in a Point Reactor. *Annals of Nuclear Energy*, v. 24, n. 4, p. 303-314, 1997.

40. HENRY, A. F. *Naval Reactor Physics Handbook*. Washington: USAEC, 1964. v. 1, p. 855-864.

ANEXO A - CINESP-ADS

O modelo físico do núcleo de um reator é estudado considerando a teoria de difusão multigrupo. Uma fonte externa é adicionada, permitindo-se cálculos em uma e duas dimensões, nas geometrias cartesiana $(\alpha = 0)$ e cilíndrica $(\alpha = 1)$. A partir as quais temos:

$$\frac{1}{\vartheta_g}\frac{\partial \varphi_g}{\partial t} = \frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}x^\alpha D_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} D_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial y} - D_g B_g^2 \varphi_g - \Sigma_{Rg}\,\varphi_g +$$

$$+ \sum_{g' \neq g}^{G} \Sigma_{sg'g}\,\varphi_{g'} + \chi_{pg}(1-\beta)\sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'}\,\Sigma_{fg'}\,\varphi_{g'} + \sum_{k=1}^{I} \chi_{agk}\lambda_k C_k + S_g\,, \quad g = 1,2,...,G\,, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = \beta_k \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'}\,\Sigma_{fg'}\,\varphi_{g'} - \lambda_k C_k\,, \quad k = 1,2,...,I\,, \qquad (2)$$

onde, $\varphi_g = \varphi_g(x,y,t)$, $C_k = C_k(x,y,t)$, $k = 1,2,...,I$, $S_g = S_g(x,y,t)$. $P_g = P_g(x,y,t)$ e representam as propriedades do reator Σ_{wg}, D_g ,e w significando os tipos de reação.

Para as condições de fronteira em bx e by temos:

$$\varphi_g(bx, by, t) = 0\,. \qquad (3)$$

No caso de $\alpha = 1$ temos:

$$D_g \frac{\partial \varphi_g(0,y,t)}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

É necessário dizer que a existência do termo $D_g B_g^2 \varphi_g$ na Eq. (1), permite similar um problema tridimensional.

As equações (1) e (2) são discretizadas no espaço usando a integração na caixa, com os meshs centrados na interface. As integrações são dadas por:

$$T_g(t) = \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} dy \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} x^{\alpha} dx P_g(x, y, t) H_g(x, y, t), \tag{5}$$

$$U_k(t) = \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} dy \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} x^{\alpha} dx P_k(x, y, t) V_k(x, y, t). \tag{6}$$

Usando as equações (5) e (6) temos a seguinte equação matricial:

$$\frac{d\psi}{dt} = M\psi + S, \tag{7}$$

onde $\psi(t)$ é dado por:

$$\psi(t) = col(\varphi_{111}, \varphi_{121}, ...\varphi_{112}, \varphi_{122}, ...\varphi_{gij}, ..., \varphi_{GNM}, C_{111}, C_{121}, ...C_{112}, C_{122}, ..., C_{kij}, ...C_{INM}) \tag{8}$$

Discretizando o tempo de maneira que $t_{n+1} = t_n + h$, onde h é o intervalo de tempo, a Eq. (7) tem a solução $\psi(t_n) = \psi^n$, usando o Método das Direções Alternadas [32].

APÊNDICE A - Cálculo de criticalidade

De acordo com a matriz característica do problema de difusão para o caso 3, o resultado da matriz (3.15) é dado por:

$$\mathbf{M_n} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \chi_1 v_1 \left(\upsilon\Sigma_f\right)_2 & \chi_1 v_1 \left(\upsilon\Sigma_f\right)_3 \\ \Lambda_{1\to 2} & \Lambda_2 & \chi_2 v_2 \left(\upsilon\Sigma_f\right)_3 \\ \Lambda_{1\to 3} & \Lambda_{2\to 3} & \Lambda_3 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Onde os termos Λ_i, são dados por (3.16):

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \delta_1 + v_1 \left[\Sigma_{1\to 1} + \chi_1 \left(\upsilon\Sigma_f\right)_1\right] \\ \Lambda_2 = \delta_2 + v_2 \left[\Sigma_{2\to 2} + \chi_2 \left(\upsilon\Sigma_f\right)_2\right] \\ \Lambda_3 = \delta_3 + v_3 \left[\Sigma_{3\to 3} + \chi_3 \left(\upsilon\Sigma_f\right)_3\right] \end{cases} \qquad (2)$$

Onde $\delta_i = -D_i B_n^2 v_i - \Sigma_i v_i \cdot$, para $i = 1,2,3$.

Assim, dividindo-se todos os termos de fissão por k_{eff}, e fazendo-se o determinante desta matriz nulo, tem-se o polinômio característico do sistema para a criticalidade *k.* que é uma equação em B_n^2. Para o caso estudado neste trabalho, temos um polinômio de terceiro grau, cujas raízes são dadas por:

$$\begin{cases} \mathrm{X1} = -0.13945536957955775749 \\ \mathrm{X2} = -0.44593843384035418394.10^{-1} \\ \mathrm{X3} = \ 0.18555877089968686097.10^{-1} \end{cases} \qquad (3)$$

Como $X = {B_n}^2$ é o autovalor do problema característico, dado para o caso de geometria plana por :

$${B_n}^2 = \frac{\pi^2}{H^2} \qquad (4)$$

Logo, temos a dimensão subcrítica para k=0.98, considerando X3:

$$H_{0,98} = \ 23.0626458009568 \quad [\,cm] \qquad (5)$$

APÊNDICE B - Erro de Truncamento

Para se demonstrar a metodologia do cálculo de erro de truncamento da potência, é apresentado o cálculo para o caso 1, considerando uma fonte localizada no centro do *slab* , assim o fluxo solução é dado por:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(0)e^{\alpha_n t} + \int_0^t S_n(t')\, e^{\alpha_n(t-t')}dt'\right]\varphi_n(x). \qquad (1)$$

Onde os termos são definidos por:

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{k_{eff}^n - 1}{l^n} \\ l^n = \dfrac{1}{v\Sigma_a(1+L^2B_n^2)} \\ k_{eff}^n = \dfrac{k_\infty}{(1+L^2B_n^2)}. \end{cases} \qquad (2)$$

Logo, $\alpha_n = v\Sigma_a(k_\infty - [1+L^2B_n^2]) = v\Sigma_a\left(k_\infty - \left[1 + L^2\left(\frac{2n-1}{H}\pi\right)^2\right]\right)$, pode-se dizer que:

$$\alpha_n \propto -n^2 \qquad (3)$$

Considerando-se a definição de potência temos que:

$$P(t) = \int_{-H/2}^{H/2}\Phi(x,t)dx = \sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)\int_{-H/2}^{H/2}\varphi_n(x)dx \qquad (4)$$

Definindo-se $I_n = \int_{-H/2}^{H/2}\varphi_n(x)dx$, temos que o erro da potência para o termo N^*, é dado por:

$$\varepsilon_{N^*}P(t) = \sum_{n=N^*}^{\infty}A_n(t)\boldsymbol{I_n} \qquad (5)$$

Assim, pela definição de (1), da função temporal da expressão geral do fluxo obtém-se, para o fluxo localizado:

$$\varepsilon_{N^*}P(t) = \sum_{n=N^*}^{\infty} A_n(t)I_n < \sum_{n=N^*}^{\infty} e^{\alpha_n t} = \sum_{n=N^*}^{\infty} e^{-n^2 t} < \int_{N^*}^{\infty} e^{-\varepsilon^2 t} d\varepsilon \quad (6)$$

Logo, o erro da potência é limitado pela função erro complementar e$erfc(N^*)$. Particularmente, no cálculo da cinética espacial para n=5 e n=16, apresentados na Figura 17, não se apresentou diferenças significativas pelos gráficos, devido ao fato que a diferença dos erros é dada por:

$$erfc(5) - erfc(16) = 0{,}1537459.10^{-11} \quad (7)$$

O resultado é praticamente zero, o que significa que para o quinto termo da expansão a série converge rapidamente apresentando um erro da ordem de 10^{-12}.

APÊNDICE C – Dedução das equações de cinética pontual

As equações de cinética espacial para nêutrons monoenergéticos considerando um grupo de precursores são escritas como:

$$\begin{cases} \frac{1}{v}\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} = S(x,t) + \Sigma_a k_\infty (1-\beta)\Phi(x,t) - \Sigma_a \Phi(x,t) + \lambda C(x,t) + D\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial^2 x}, \\ \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -\lambda C(x,t) + \Sigma_a k_\infty \beta \Phi(x,t). \end{cases} \quad (1)$$

onde $\Phi(x,t)$ é o fluxo dependente do tempo, $S(x,t)$ é a fonte externa , $C(x,t)$ é a concentração de precursores de nêutrons atrasados.

E supondo as condições de separabilidade do fluxo e das concentrações de precursores e fontes externas, tem-se:

$$\begin{cases} \Phi(x,t) = vP(t)\varphi(x) \\ C(x,t) = C(t)\varphi(x) \\ S(x,t) = S(x)S(t) \end{cases} \quad (2)$$

onde $P(t)$ é a densidade neutrônica, $C(x,t)$ é a concentração de precursores, $S(x,t)$ é a fonte externa do sistema, a função $\varphi(x)$ é a solução da equação do modo fundamental.

Ao se substituir o resultado (2) em (1), projetando esta equação no espaço adjunto das autofunções e definindo-se os parâmetros cinéticos:

$$\begin{cases} \rho_{eff} = \rho k_{eff} \\ \Lambda_{eff} = \frac{1}{v\Sigma_a}.\frac{1}{(1+\mathrm{L}^2\mathrm{B}^2)}, \\ \beta_{eff} = \beta k_{eff}. \end{cases} \quad (3)$$

tem-se as equações de cinética pontual:

$$\begin{cases} \frac{d\,P(t)}{dt} = \widetilde{S(t)} + [\rho_{eff} - \beta_{eff}]\frac{P(t)}{\Lambda_{eff}} + \lambda C(t), \\ \frac{dC(t)}{dt} = -\lambda C(t) + \frac{\beta_{eff}}{\Lambda_{eff}}P(t). \end{cases} \quad (4)$$