



**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
**Autarquia Associada à Universidade de São Paulo**

**Modelo numérico para cálculo de Transitórios Hidráulicos com escoamento  
bifásico e Interação Fluido-Estrutura**

**PEDRO HENRIQUE DO NASCIMENTO ROCHA**

**Dissertação apresentada como parte dos  
requisitos para obtenção do Grau de  
Mestre em Ciências na Área  
de Tecnologia Nuclear - Reatores**

**Orientador:  
Prof. Dr. Marcelo da Silva Rocha**

**São Paulo  
2023**

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES  
Autarquia Associada à Universidade de São Paulo**

**Modelo numérico para cálculo de Transitórios Hidráulicos com  
escoamento bifásico e Interação Fluido-Estrutura**

**Versão Corrigida**

**Versão Original disponível no IPEN**

**PEDRO HENRIQUE DO NASCIMENTO ROCHA**

**Dissertação apresentada como parte  
dos requisitos para obtenção do Grau  
de Mestre em Ciências na Área  
de Tecnologia Nuclear - Reatores**

**Orientador:  
Prof. Dr. Marcelo da Silva Rocha**

**São Paulo  
2023**

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Como citar:

ROCHA, P. H. d. N. **Modelo numérico para cálculo de Transitórios Hidráulicos com escoamento bifásico e Interação Fluido-Estrutura**. 2023. 132 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Nuclear), Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, IPEN-CNEN, São Paulo. Disponível em: <<http://repositorio.ipen.br/>> (data de consulta no formato: dd/mm/aaaa)

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de geração automática da Biblioteca IPEN, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Rocha, Pedro Henrique do Nascimento  
Modelo numérico para cálculo de Transitórios Hidráulicos com escoamento bifásico e Interação Fluido-Estrutura / Pedro Henrique do Nascimento Rocha; orientador Marcelo da Silva Rocha. -- São Paulo, 2023.  
132 f.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Tecnologia Nuclear (Reatores) -- Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, 2023.

1. Transitórios Hidráulicos. 2. Interação Fluido-estrutura. 3. Método das Características. 4. Escoamento Bifásico Gás-Líquido. 5. Modelo Numérico. I. Rocha, Marcelo da Silva, orient. II. Título.

## **DEDICATÓRIA**

A minha família e a Deus.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por minha saúde e por ter colocado as pessoas certas no meu caminho, sem isso nada seria possível.

Agradeço à minha esposa, Viviane Rocha, por todo o apoio e acolhimento durante os momentos mais difíceis. Você foi fundamental. Muito obrigado.

Agradeço aos meus pais e à minha família pelo acolhimento, pelos importantes ensinamentos transmitidos na minha formação como pessoa e pelos tão importantes exemplos de inspiração.

Agradeço ao Professor Doutor Marcelo da Silva Rocha, meu orientador, que me guiou durante todo o percurso, me auxiliando e me oferecendo um pouco de sua experiência para que eu pudesse atingir os objetivos definidos. Professor, muito obrigado por todo o suporte.

Agradeço aos professores que compuseram as bancas de qualificação e defesa da dissertação, contribuindo sobremaneira para o aprimoramento do trabalho desenvolvido. Obrigado por todas as valorosas orientações e sugestões transmitidas.

Agradeço ao CMG (RM1-EN) Eusébio Pedro da Silva, pela confiança e por todo o apoio em todas as tratativas que ocorreram com a Marinha do Brasil durante o período, contribuindo muito para o bom desenvolvimento do curso e para o êxito alcançado.

Agradeço ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares por ter disponibilizado todos os meios e por ter oferecido todo o suporte acadêmico e administrativo necessários para a boa execução deste trabalho e do curso.

Agradeço ao Instituto de Tecnologia da Georgia (EUA) e à Universidade Tecnológica de Eindhoven (Holanda) por terem disponibilizado importantes dados para a realização do trabalho.

E agradeço à Marinha do Brasil pela grande oportunidade de realizar este curso e de poder desenvolver este trabalho.

Muito obrigado a todos!

"Aquele que não é um bom aprendiz  
não será um bom mestre"  
(Platão)

## RESUMO

ROCHA, Pedro H. N. **Modelo numérico para cálculo de Transitórios Hidráulicos com escoamento bifásico e Interação Fluido-Estrutura**. 2023. 132 p. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Nuclear) Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares – IPEN, São Paulo.

Este trabalho apresenta um modelo numérico para a solução de transitórios hidráulicos com escoamento bifásico e interação fluido-estrutura em um sistema formado por reservatório, tubulação reta e válvula de saída. Uma ampla análise da literatura sobre o fenômeno é realizada, com foco nos transitórios em tubulações com escoamento bifásico homogêneo do tipo gás-líquido, considerando-se a interação fluido-estrutura entre fluido e tubulação, com um grau de liberdade. Soluções matemáticas e numéricas são analisadas e propostas para a correta captura dos fenômenos físicos associados ao atrito entre a tubulação e o fluido, à compressibilidade e à celeridade do fluido, que são variáveis em escoamentos bifásicos, e às perturbações geradas pela interação fluido-estrutura. A solução proposta para o modelo considera a atuação simultânea destes fenômenos. O modelo numérico desenvolvido tem como base a solução do modelo matemático formado por um sistema de quatro equações diferenciais parciais derivadas para o fluido e para estrutura partindo da conservação da massa, do balanço de momento linear e da lei de Hooke, em que são implementadas as adequações necessárias nas equações fluido-estruturais e nos coeficientes matemáticos não lineares para a solução do escoamento compressível e bifásico em questão. As metodologias clássica e de aceleração instantânea são selecionadas para a implementação do atrito entre fluido e tubulação no modelo. A modelagem matemática para a solução das equações do problema utiliza o método das características e aplica-se diferenças finitas, com posterior integração numérica, podendo-se optar por um procedimento iterativo para a solução. A validação dos resultados é obtida com base em comparações com dados experimentais e analíticos. Apresenta-se uma análise de resultados para diferentes configurações do modelo desenvolvido, variando-se a condição de fechamento da válvula de saída do escoamento, o termo de atrito entre o escoamento e a tubulação e o número de iterações.

*Palavras-chave:* Transitórios Hidráulicos, Interação Fluido-estrutura, Método das Características, Escoamento Bifásico Gás-Líquido, Modelo Numérico.

## ABSTRACT

ROCHA, Pedro H. N. **Numerical model for calculation of Hydraulic Transients with two-phase flow and Fluid-Structure Interaction.** 2023. 132 p. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Nuclear) Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares – IPEN, São Paulo.

This work presents a model for the solution of hydraulic transients with two-phase flow and fluid-structure interaction in a system consisting of a reservoir, a straight piping and an outlet valve. A broad analysis of the literature on the phenomenon is carried out, focusing on transients in pipelines with two-phase homogeneous gas-liquid flow, considering the fluid-structure interaction between fluid and pipeline with one degree of freedom. Mathematical and numerical solutions are analyzed and proposed for the proper capture of the physical phenomena associated with the friction between the pipe and the fluid, the fluid compressibility and fluid celerity, which can vary in two-phase fluids, together with the disturbances generated by the fluid-structure interaction. The proposed solution for the model considers the simultaneous action of these phenomena. The developed numerical model is based on the solution of the mathematical model formed by a system of four partial differential equations derived for fluid and structure from conservation of mass, linear momentum balance and Hooke's law, in which the necessary adaptations are integrated in fluid-structural equations and in the non-linear mathematical coefficients for the solution of the compressible and two-phase flow in question. Classical and Instantaneous Acceleration Based methodologies are selected for the implementation of friction between fluid and pipe in the model. For the solution it is used the method of characteristics and finite difference, with subsequent numerical integration, including the possibility of selecting an iterative procedure for the solution. The validation of the results is carried out based on comparisons with experimental and analytical data. An analysis of the results for different configurations of the developed model is presented, varying the closing condition of the outlet valve, the friction term between the flow and the pipe and the number of iterations.

*Keywords:* Hydraulic Transients, Fluid-Structure Interaction, Method of Characteristics, Two-Phase Gas-Liquid Flow, Numerical Model.



## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>11</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>13</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>14</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>18</b>
<b>1.1 Transitório hidráulico – breve histórico da solução clássica .....</b>	<b>19</b>
<b>1.2 Motivação.....</b>	<b>21</b>
<b>2 OBJETIVO .....</b>	<b>25</b>
<b>2.1 Escopo do modelo numérico.....</b>	<b>25</b>
<b>3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>26</b>
<b>3.1 Transitório hidráulico - fenômeno .....</b>	<b>26</b>
<b>3.2 Propagação da onda de um martelo hidráulico.....</b>	<b>29</b>
<b>3.3 Transitório hidráulico com IFE.....</b>	<b>32</b>
3.3.1 Graus de liberdade.....	34
3.3.2 Mecanismos de acoplamento .....	36
<b>3.4 Transitórios hidráulicos em escoamentos bifásicos.....</b>	<b>37</b>
3.4.1 Classificação de escoamentos bifásicos .....	37
3.4.2 Soluções propostas para escoamentos bifásicos .....	39
3.4.3 Modelos numéricos desenvolvidos .....	42
<b>3.5 Atrito do escoamento com a tubulação .....</b>	<b>43</b>
3.5.1 Modelos de atrito .....	44
3.5.2 Modelos de atrito em códigos comerciais .....	47
<b>4 MODELAGEM MATEMÁTICA .....</b>	<b>49</b>
<b>4.1 Premissas, hipóteses e simplificações adotadas .....</b>	<b>50</b>
<b>4.2 Equações do fluido.....</b>	<b>51</b>
<b>4.3 Equações da tubulação.....</b>	<b>55</b>
<b>4.4 Acoplamento fluido-estrutura.....</b>	<b>60</b>
<b>4.5 Modelo de quatro equações.....</b>	<b>62</b>
<b>4.6 Propriedades do escoamento bifásico homogêneo.....</b>	<b>66</b>
<b>4.7 Modelos de atrito.....</b>	<b>69</b>
4.7.1 Modelo de atrito estático .....	69
4.7.2 Modelo de atrito transitório .....	69

<b>4.8 Apresentação e aplicação do Método das Características (MOC).....</b>	<b>71</b>
<b>5 MODELAGEM NUMÉRICA .....</b>	<b>80</b>
<b>5.1 Solução numérica .....</b>	<b>80</b>
<b>5.2 Condições iniciais .....</b>	<b>89</b>
<b>5.3 Condições de contorno .....</b>	<b>90</b>
5.3.1 Reservatório com pressão constante .....	91
5.3.2 Válvula de saída.....	91
<b>5.4 Código computacional.....</b>	<b>93</b>
<b>6 ANÁLISE DE RESULTADOS.....</b>	<b>97</b>
<b>6.1 Validação do Modelo .....</b>	<b>97</b>
6.1.1 Adequação ao escoamento monofásico.....	98
6.1.2 Verificação qualitativa de comportamento com escoamento bifásico.....	102
6.1.3 Verificação comparativa com dados experimentais.....	104
6.1.4 Verificação do cálculo da celeridade variável.....	111
<b>6.2 Análise Complementar de Resultados .....</b>	<b>113</b>
6.2.1 Variação da curva e do tempo de fechamento da válvula .....	113
6.2.2 Variação do termo de atrito .....	117
6.2.3 Variação do número de iterações.....	122
<b>7 CONCLUSÃO.....</b>	<b>124</b>
<b>8 SUGESTÕES DE CONTINUIDADE .....</b>	<b>126</b>
<b>9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>127</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Danos na comporta da Estação Hidrelétrica de Oigawa, Japão. ....	21
Figura 2 – Eventos de Martelo hidráulico reportados por ano. ....	22
Figura 3 – Quantitativo total de eventos reportados. ....	23
Figura 4 – Percentual do total de eventos reportados por tipo de evento. ....	23
Figura 5 – Desenho esquemático do modelo resolvido na solução numérica. ....	25
Figura 6 – Propagação de ondas de pressão. ....	28
Figura 7 – Propagação e reflexão das ondas de pressão. ....	31
Figura 8 – Variação de pressão na válvula. ....	32
Figura 9 – Sistema espacial de referência e graus de liberdade de um elemento de tubulação. ....	35
Figura 10 – Configurações mais comuns para o escoamento horizontal gás-líquido. ....	39
Figura 11 – Esboço de definição da tubulação. ....	55
Figura 12 – Esboço representativo do Método das Características. ....	71
Figura 13 – Curvas características definidas no domínio espaço-tempo. ....	80
Figura 14 – Fluxo de cálculo das celeridades e de definição das curvas características fluidas para um dado ponto (i,j). ....	83
Figura 15 – Fluxo de cálculo das celeridades e de definição das curvas características no tubo para um dado ponto (i,j). ....	84
Figura 16 – Obtenção dos valores anteriores por interpolação. ....	85
Figura 17 – Definição das derivadas para cálculo do atrito de Vítkovský (IAB) em cada ponto. ....	87
Figura 18 – Curvas características nas extremidades. ....	90
Figura 19 – Coeficientes de descarga da válvula. ....	92
Figura 20 – Processo de cálculo do modelo numérico. ....	93
Figura 21 – Resultado comparativo monofásico (fechamento instantâneo) – Pressão x Tempo na válvula. ....	99
Figura 22 – Resultado comparativo monofásico (fechamento instantâneo) – Velocidade do Fluido x Tempo na válvula. ....	99
Figura 23 – Resultado comparativo monofásico (fechamento instantâneo) – Tensão x Tempo na válvula. ....	100

Figura 24 – Resultado comparativo monofásico (fechamento em 30 ms) – Pressão x Tempo na válvula. ....	102
Figura 25 – Resultado da simulação com fração de vazio – Pressão x Tempo na válvula. ....	103
Figura 26 – Resultado da simulação com fração de vazio – Velocidade do Fluido x Tempo na válvula. ....	103
Figura 27 – Resultado da simulação com fração de vazio – Tensão x Tempo na válvula. ....	104
Figura 28 – Modelo esquemático do experimento de CHAUDHRY et al, 1990. ....	105
Figura 29 – Curva de pressão inserida como condição de contorno no ponto P3. ....	105
Figura 30 – Gráfico comparativo entre experimento e simulações no ponto P2 – Pressão x Tempo. ....	108
Figura 31 – Resultado completo da simulação do modelo bifásico na região do ponto P2. ....	110
Figura 32 – celeridades e fração de vazio máximas e mínimas calculadas pelo modelo na seção da válvula. ....	111
Figura 33 – Simulação de pressão na seção da válvula: $\alpha_o = (0 ; 0,001) / m = (0,05) / t_c = (30 ; 0)$ ms. ....	115
Figura 34 – Simulação de pressão na seção da válvula: $\alpha_o = (0 ; 0,001) / m = (0,3) / t_c = (30 ; 0)$ ms. ....	115
Figura 35 – Simulação de pressão na seção da válvula: $\alpha_o = (0 ; 0,001) / m = (1,0) / t_c = (30 ; 0)$ ms. ....	116
Figura 36 – Simulação de pressão na válvula: $\alpha_o = (0 ; 0,001 ; 0,005) / \text{Atrito Estático} / \text{Atrito Estático e Transiente}$ . ....	119
Figura 37 – Resultados comparativos entre experimento e simulações com atrito estático e transiente. ....	119
Figura 38 – Resultados comparativos entre experimento e simulação com $n = (0 ; 1)$ . ...	122

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Efeito da concentração de gás e da pressão na celeridade da onda em um escoamento bifásico .....	41
Tabela 2 – Principais modelos de atrito .....	44
Tabela 3 – Principais softwares e modelos de atrito empregados.....	47
Tabela 4 – Dados de entrada.....	94
Tabela 5 – Ações do pré-processamento .....	95
Tabela 6 – Dados de simulação para comparação com fluido monofásico.....	98
Tabela 7 – Dados de entrada para comparação com fluido monofásico (fechamento em 30 ms).....	101
Tabela 8 – Dados de simulação para validação .....	106
Tabela 9 – Resultados comparativos entre experimento e simulações no ponto P2 – Pressão x Tempo.....	108
Tabela 10 – Dados de simulação: $\alpha_o = (0 ; 0,001) / m = (0,05 ; 0,3 ; 1) / t_c = (30 ; 0)$ ms	114
Tabela 11 – Dados de simulação: $\alpha_o = (0 ; 0,001 ; 0,005) /$ <i>Atrito Estático / Atrito Estático e Transiente</i> .....	118
Tabela 12 – Resultados comparativos entre experimento e simulações com atrito estático e transiente.....	120
Tabela 13 – Resultados comparativos entre experimento e simulação com $n = (0 ; 1)$ ....	123

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolo – Denominação [unidade]

$A$  – ponto anterior, razão de Allievi ou área transversal da tubulação;

$\theta$  – característica de fechamento da válvula de Allievi;

$f$  – coeficiente de atrito de Darcy-Weisbach ou frequência;

$t$  – tempo;

$T$  – período [s];

$V$  – velocidade média do fluido [m/s];

$H$  – altura piezométrica [m];

$P$  – pressão média [Pa];

$L$  – comprimento da tubulação [m];

$a$  – celeridade da onda de pressão [m/s];

$c$  – celeridade;

$\Delta$  – indicação de variação de uma grandeza;

$\rho$  – massa específica [kg/m<sup>3</sup>];

$g$  – aceleração da gravidade [m/s<sup>2</sup>];

$K_{ut}$  – coeficientes de decaimento no tempo;

$K_{ux}$  – coeficientes de decaimento na distância;

$R$  – raio da tubulação;

$D$  – diâmetro da tubulação [m];

$e$  – espessura da tubulação [m];

$E$  – módulo de Young (módulo de elasticidade) do material do tubo;

$\lambda$  – comprimento de onda, autovalor;

$v$  – velocidade do fluido;

$u, U$  – deslocamento da tubulação;

$\sigma, S$  – tensão normal;

$\varepsilon$  – deformação;

$\nu$  – coeficiente de Poisson;

$\tau$  – tensão de cisalhamento;

$p$  – pressão local ou absoluta;  
 $F$  – densidade de força de corpo;  
 $k$  – viscosidade volumétrica (*bulk viscosity*);  
 $\mu$  – viscosidade dinâmica;  
 $K$  – módulo de compressibilidade;  
 $\gamma$  – angulação da tubulação;  
 $\tau_0$  – termo de atrito;  
 $\tau_s$  – atrito estático;  
 $\tau_u$  – atrito transiente ou transitório;  
 $i$  – contador em geral ou contador na direção espacial;  
 $j$  – contador no tempo;  
 $r$  – raio;  
 $\forall$  – volume;  
 $d\forall$  – mudança no volume;  
 $M$  – massa;  
 $\alpha$ , *alpha* – fração de vazio;  
 $\xi, \beta, \omega, \delta$  – coeficientes das equações de compatibilidade;  
 $q$  – parcelas das equações de compatibilidade;  
 $K_v$  – coeficiente de perda de carga na válvula;  
 $Cd$  – coeficiente de descarga da válvula;  
 $m$  – coeficiente de ajuste da curva do  $Cd$ ;  
 $n$  – número de *loops* iterativos;  
 $N$  – número de elementos na tubulação;  
 $val$  – válvula.

#### Coordenadas e derivadas

$z$  – coordenada axial;  
 $y$  – coordenada transversal vertical;  
 $x$  – coordenada transversal horizontal;  
 $t$  – coordenada temporal;

$r$  – coordenada radial;

$\phi, \varphi$  – coordenada circunferencial;

$\frac{d}{dt}$  – derivada total em relação ao tempo;

$\frac{\partial}{\partial t}$  – derivada parcial em relação ao tempo;

$\frac{\partial}{\partial z}$  – derivada parcial em relação à coordenada  $z$ ;

$\frac{\partial}{\partial r}$  – derivada parcial em relação à coordenada  $r$ ;

$\frac{\partial}{\partial p}$  – derivada parcial em relação à pressão.

### Subscritos

$o$  – referência inicial;

$f$  – fluido;

$F$  – fluido;

$t$  – tubo;

$g$  – fase gasosa;

$l$  – fase líquida;

$m$  – mistura gás-líquido;

$out$  – ambiente, externa;

$abs$  – absoluta;

$max$  – máximo;

$min$  – mínimo;

$rel$  – relativa;

$points$  – número de pontos;

$cond$  – condição;

$cur$  – contador de curvas características;

$z$  – direção axial;

$y$  – direção transversal vertical;

$x$  – direção transversal horizontal;

$r$  – direção radial;

$\phi$  – direção circunferencial;



$c$  – fechamento da válvula;  
 $(i, j)$  – referência de posição e tempo na malha computacional;  
 $d, D$  – tomado à direita;  
 $e$  – tomado à esquerda;  
 $i$  – contador;  
1,2,3,4 – curvas características.

### Pontos, linhas superiores e marcadores

$\dot{\phantom{x}}$  – primeira derivada no tempo;  
 $\ddot{\phantom{x}}$  – segunda derivada no tempo;  
 $\sim$  – valor ajustado;  
 $\bar{\phantom{x}}$  – valor médio na seção transversal;  
 $\overline{\phantom{x}}$  – valor médio na seção transversal (alternativo);  
 $|$  – tomado em.

### Acrônimos

CFD – Fluidodinâmica Computacional;  
DOF – Graus de Liberdade;  
FDM – Método das Diferenças Finitas;  
FVM – Método dos Volumes Finitos;  
IAB – Baseado em Aceleração Instantânea;  
IFE, FSI – Interação Fluido-Estrutura;  
MEF ou FEM – Método dos Elementos Finitos;  
MOC – Método das Características;  
VOF – Método do Volume de Fluidos;  
WM – Método das Ondas;  
1D – Unidimensional;  
3D – Tridimensional.

## 1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de transporte de fluidos, como tubulações, estão sujeitos a carregamentos sempre que ocorrem mudanças na quantidade de movimento do fluido ou na estrutura da tubulação, seja devido a uma ação planejada, como partida e parada de bombas e fechamento de válvulas, ou acidental como, por exemplo, rompimentos de tubulações, interrupção repentina do escoamento, terremotos e maremotos, etc. Esses carregamentos podem ser geradores de transitórios hidráulicos extremamente danosos. Quando a segurança do sistema em questão é muito crítica, como em usinas hidrelétricas, term nucleares, termelétricas convencionais, grandes dutos de transporte de petróleo e derivados ou redes de abastecimento de água, os transitórios hidráulicos e seus efeitos precisam ser muito bem conhecidos.

Para que o estudo dos transitórios hidráulicos seja mais abrangente e completo, em muitos casos é preciso levar em consideração interações importantes que acontecem entre o fluido e a estrutura da tubulação, durante o transitório. Essas interações são normalmente denominadas de interação fluido-estrutura (IFE), e ocorrem em todas as tubulações de transporte de fluido.

A IFE é um importante fenômeno físico em que o fluido interage com a superfície sólida da estrutura à qual está em contato, gerando esforços e deslocamentos resultantes dessa interação. Na maioria dos casos, suas consequências não geram grandes impactos e podem ser negligenciadas para fins de projetos mais simples. Porém, em alguns casos específicos, como durante os transitórios hidráulicos, a IFE pode ser responsável por um comportamento operacional inaceitável do ponto de vista de engenharia (ruído contínuo ou súbito, vibrações e oscilações, etc) ou mesmo a falha (ruptura) da tubulação ou da estrutura de suporte. Isso acontece pois, durante o transitório hidráulico, são geradas variações bruscas de pressão no interior das tubulações e as forças geradas no fluido são transferidas para a estrutura (tubos, válvulas, curvas, suportes, bocais, etc). Em decorrência disso, esforços mecânicos e deslocamentos de grandes magnitudes são transferidos para as estruturas. Por isso, os efeitos da IFE são estudados para que se possa prever sua ocorrência e evitar acidentes provenientes dessa interação.

No que diz respeito mais especificamente ao tipo de escoamento, existem muitos casos práticos de escoamento que ocorrem com a presença de escoamentos bifásicos. Alguns

exemplos desse tipo de escoamento podem acontecer em sistemas nucleares, como quando ocorre o surgimento da fase vapor em uma situação de queda de pressão durante um acidente com rompimento de tubulação e perda de refrigerante. Este tipo de escoamento também pode ocorrer quando existe desprendimento de gases não-condensáveis ou até mesmo durante um processo de geração de vapor. Dessa forma, o estudo do comportamento de escoamentos bifásicos durante um transitório hidráulico também ganha importância.

Por fim, uma vez conhecidos o comportamento do fluido, os deslocamentos e os esforços gerados na estrutura de transporte do fluido durante um transitório hidráulico, a análise de tensões e esforços, do ponto de vista de análise estrutural, pode ser devidamente realizada. Estabelecer um modelo numérico para avaliar o comportamento de um escoamento bifásico durante um transitório hidráulico, responsável pela geração desses esforços e deslocamentos, será o foco desse trabalho.

### **1.1 Transitório hidráulico – breve histórico da solução clássica**

Uma breve história dos desenvolvimentos em transitórios hidráulicos é apresentada nesta seção. Com base no levantamento histórico feito por (CHAUDHRY, 2014; WOOD, F. M., 1970), o primeiro estudo que pode ser destacado foi realizado no ano de 1897, pelo pesquisador Nikolay Zhukovsky (ou Joukowski). Neste estudo, foram realizados extensos experimentos na cidade de Moscou, usando tubulações de 7,62 km de comprimento e 50 mm de diâmetro, 305 m de comprimento e 101,5 mm de diâmetro e 305 m de comprimento e 152,5 mm de diâmetro. Com base em seus estudos experimentais e teóricos, Joukowski publicou seu relatório clássico (JOUKOWSKI, 1898; SIMIN, 1904), com a teoria básica do martelo hidráulico. Foi desenvolvida uma formulação para a velocidade da onda de pressão, levando em consideração a elasticidade da água e das paredes do tubo. No estudo, foi desenvolvida uma relação entre a redução da velocidade de um escoamento e o aumento de pressão resultante usando a conservação da energia e da massa. Discutiu-se a propagação de ondas de pressão em um tubo e a reflexão da onda na extremidade aberta de uma ramificação. Também se estudou a utilização de câmaras de ar, tanques de compensação e válvulas de segurança para controlar as pressões do martelo hidráulico, e se descobriu que o aumento de pressão era máximo para tempos de fechamento  $\leq 2L/a$ , em que  $L$  = comprimento da tubulação e  $a$  = velocidade da onda pressão (celeridade, conforme detalhado no capítulo 3.1).

Um outro pesquisador, Lorenzo Allievi, também publicou sua teoria geral do martelo hidráulico (ALLIEVI, 1903), e teve uma importante contribuição para a formulação do fenômeno. Ele consolidou dois parâmetros adimensionais:

$$A = \frac{aV_0}{2gH_0} \tag{1.1}$$

$$\theta = \frac{at_c}{2L}$$

Nas equações acima, além das definições já apresentadas,  $g$  = aceleração da gravidade,  $V_0$  = velocidade em regime permanente;  $t_c$  = tempo de fechamento da válvula;  $A$  = metade da razão entre a energia cinética do fluido e a energia potencial armazenada no fluido e nas paredes do tubo na altura manométrica  $H_0$  e, por último,  $\theta$  está relacionado às características de fechamento da válvula. Para o tempo de fechamento da válvula,  $t_c$ , Allievi obteve uma expressão para o aumento de pressão na válvula, e apresentou gráficos para o aumento e queda de pressão causados por um fechamento ou abertura uniforme da válvula.

Ainda com base na teoria de Joukowski, também pode-se destacar os estudos de (GIBSON, 1919), que incluiu, pela primeira vez, perdas não lineares por atrito na análise.

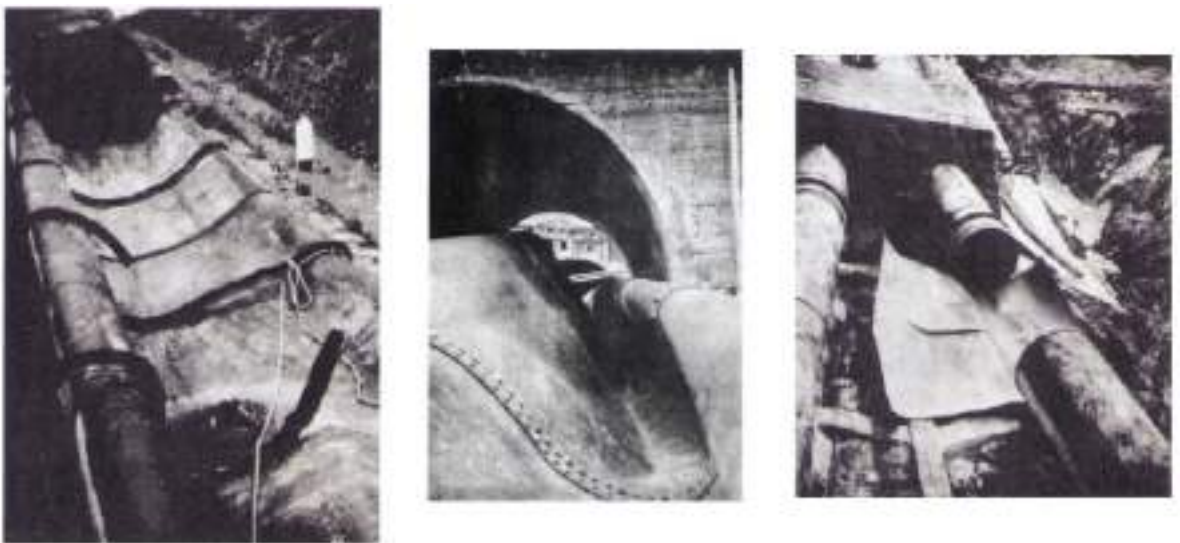
As soluções e levantamentos apresentadas por estes primeiros estudos históricos com foco específico no fenômeno dos martelos hidráulicos, que incluíram modelos teóricos e levantamentos experimentais, estabeleceram o que se convencionou chamar de solução clássica. Elas formaram uma importante base para o desenvolvimento deste campo de conhecimento, com o aprofundamento do tema em variados experimentos, artigos e livros, até os dias atuais, conforme refletido na revisão bibliográfica a ser detalhada neste trabalho.

## 1.2 Motivação

A motivação para o desenvolvimento de pesquisas direcionadas aos transitórios hidráulicos em tubulações, tanto na área nuclear, quanto em várias outras áreas em que sistemas de transporte de fluidos são empregados, decorre, principalmente, da importância de se evitar acidentes catastróficos que podem ser gerados nos sistemas por variações abruptas e transitórias do escoamento. Busca-se, assim, conhecer as condições extremas alcançadas nos fluidos e nas suas estruturas de transporte, durante os transitórios hidráulicos (martelo hidráulico), bem como as suas causas, de forma que se possa evitar situações que gerem tais transitórios ou que se possa preparar os sistemas para que resistam aos carregamentos gerados.

Podemos tomar como exemplo ilustrativo do grau destrutivo desse tipo de fenômeno o conhecido acidente que ocorreu em 1950, na Estação Hidrelétrica de Oigawa, Japão, que resultou em mortes e arruinou a estrutura. Durante uma manutenção do sistema de controle de óleo, um fechamento rápido de uma válvula causou uma onda de alta pressão que dividiu uma comporta. Com a abertura da comporta, a água foi liberada gerando uma onda de baixa pressão resultando na separação da coluna (separação em duas fases de líquido e vapor) que fez o tubo colapsar devido à diferença de pressão entre o tubo e o ar atmosférico externo (Bonin, 1960). Os danos do tubo podem ser vistos na Figura 1.

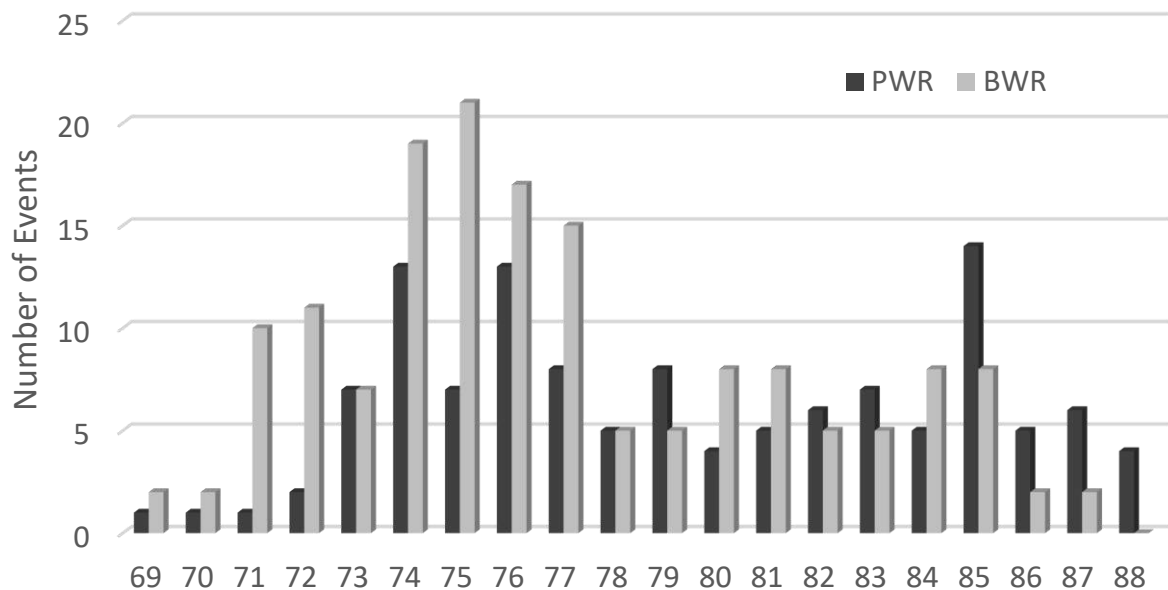
Figura 1 – Danos na comporta da Estação Hidrelétrica de Oigawa, Japão.



Fonte: BONIN, 1960.

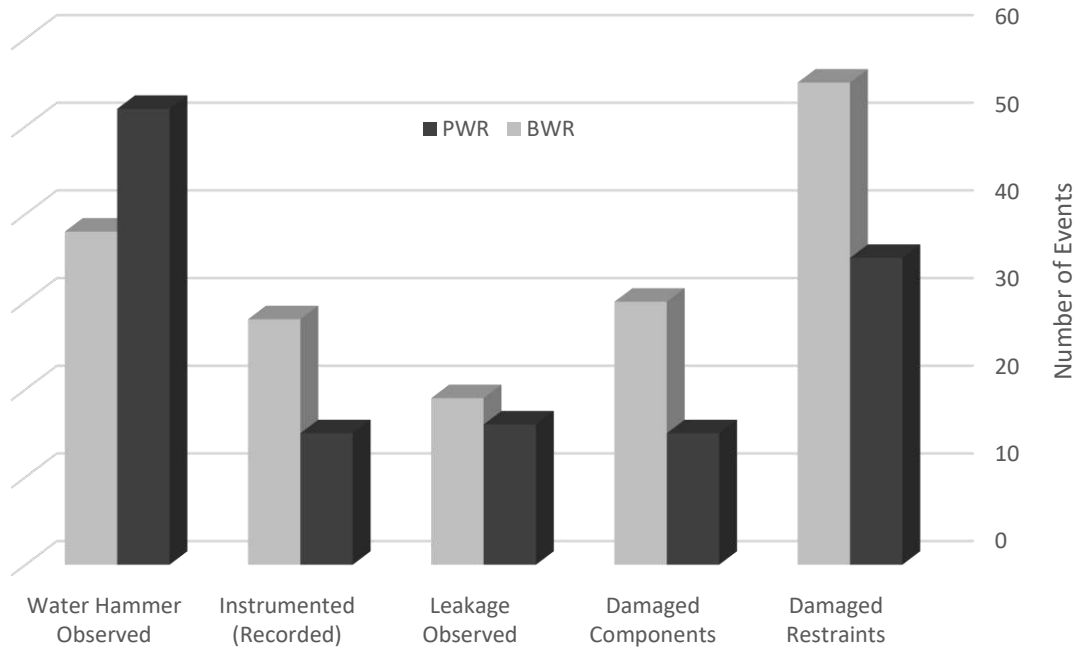
Trazendo o foco para sistemas nucleares, um evento como o transitório hidráulico em um sistema tão crítico como um reator nuclear, por exemplo, pode merecer ainda mais atenção. Portanto, foi desenvolvido um estudo pela EPRI (VAN DUYNE; MERILO, 1996), que teve como objetivos compilar eventos relacionados ao efeito do transitório hidráulico, assim como classifica-los quanto ao tipo de planta, sistema em que ocorreu e o problema causador do efeito. Foram analisados os dados de 283 eventos relacionados a transitórios hidráulicos em plantas do tipo *Boiling Water Reactor* (BWR) e *Pressurized Water Reactor* (PWR) nos Estados Unidos, ocorridos entre os anos de 1969 e 1988. O trabalho foi desenvolvido pela *Electric Power Research Institute* (VAN DUYNE; MERILO, 1996) e compila um banco de dados com informações sobre a ocorrência do fenômeno, como pode ser observado nas Figura 2, Figura 3 e Figura 4.

Figura 2 – Eventos de Martelo hidráulico reportados por ano.



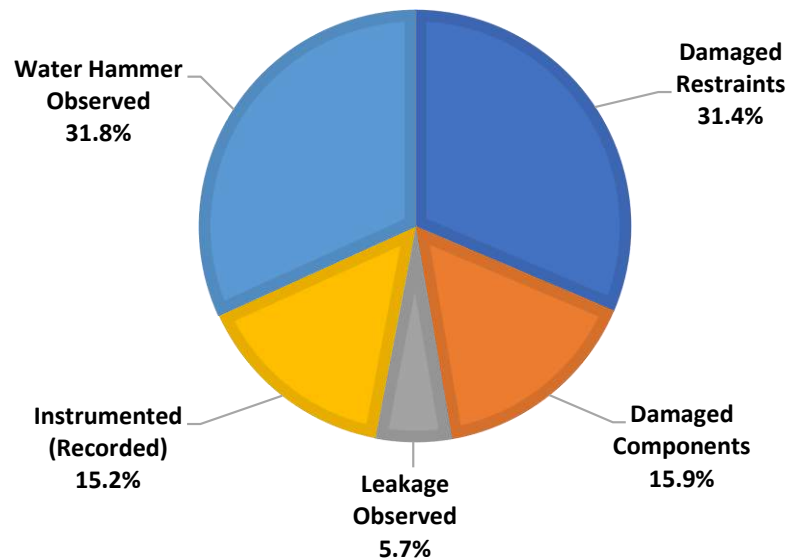
Fonte: VAN DUYNE; MERILO, 1996.

Figura 3 – Quantitativo total de eventos reportados.



Fonte: VAN DUYNE; MERILO, 1996.

Figura 4 – Percentual do total de eventos reportados por tipo de evento.



Fonte: VAN DUYNE; MERILO, 1996.

Os dados apresentados, bem como o elevado percentual de acidentes causados por martelo hidráulico, reforçam a necessidade de se estudar devidamente o fenômeno, a fim de prover ferramentas que investiguem as causas do efeito com a finalidade de prevenir e mitigar os efeitos do martelo hidráulico, ou até eliminá-los.

Além dos acidentes apresentados, a revisão da literatura a ser apresentada, que se insere no contexto das pesquisas teóricas sobre o problema do transitório hidráulico em instalações de transporte de fluidos, também reforça que transitórios hidráulicos em instalações críticas como os reatores nucleares podem gerar carregamentos hidrodinâmicos e mecânicos relevantes (pressões, vibrações, forças e deslocamentos), que devem ser previstos com a finalidade de se fazer um dimensionamento seguro e também para que possam ser elaborados procedimentos operacionais que evitem esses fenômenos.

A revisão da literatura também apresentará diferentes formas desenvolvidas, ou que estão em desenvolvimento, para se prever e descrever adequadamente este fenômeno dos transitórios hidráulicos. De uma forma geral, existem abordagens experimentais, analíticas e numéricas. As simulações numéricas são as mais aplicadas na atualidade, utilizando-se as ferramentas de CFD, que são aplicáveis para resolver uma ampla gama de problemas de escoamento, ou utilizando-se modelos numéricos desenvolvidos com finalidade específica para solução de transitórios hidráulicos.

Os modelos numéricos com finalidade específica para transitórios hidráulicos normalmente tem menor custo computacional, e também são capazes de incorporar todos os fenômenos que ocorrem durante um transitório, de forma simultânea. Este tipo de modelo é o foco deste trabalho, com elaboração de um modelo numérico, tomando-se como ponto de partida o modelo apresentado por (ALMEIDA, 2018), porém com modelagem matemática e numérica desenvolvidas para um escoamento bifásico com atrito transitório. Ainda buscando um aprimoramento do modelo numérico de solução vetorial de (ALMEIDA, 2018) desenvolvido em linguagem de programação “C”, no presente trabalho é desenvolvido um modelo numérico integralmente novo, em uma nova linguagem de programação (em linguagem *Python*) e com estrutura de dados matricial.



## 2 OBJETIVO

O principal objetivo é desenvolver um modelo numérico unidimensional capaz de avaliar as oscilações de pressão e de vazão durante um transitório hidráulico em um sistema onde ocorre escoamento bifásico gás-líquido com bolhas distribuídas uniformemente, considerando interação fluido-estrutura.

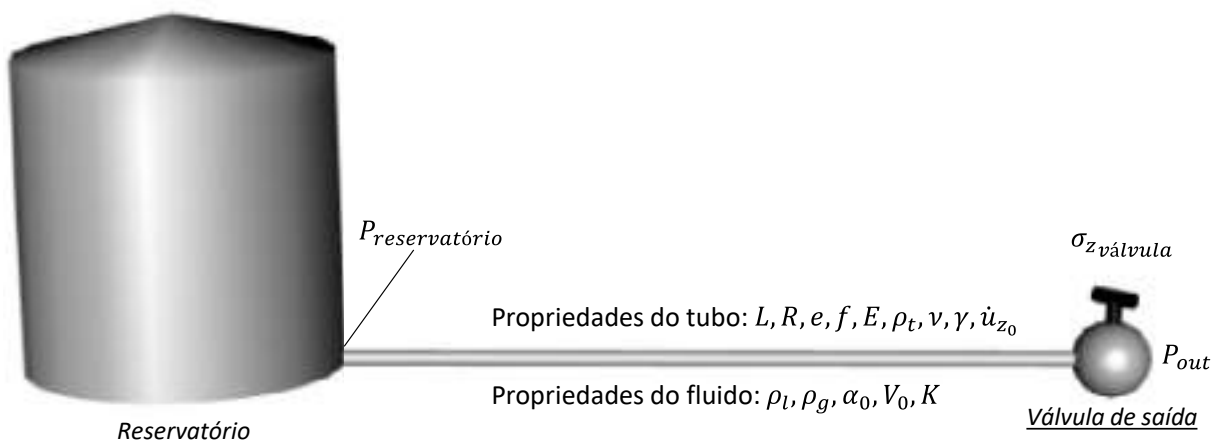
Como objetivos secundários serão feitas análises e discussões sobre os modelos existentes para solução matemática e numérica de escoamentos bifásicos, incluindo-se a análise das diferentes possíveis abordagens para se modelar o termo de atrito (entre o fluido e a tubulação) para esse tipo de escoamento.

O modelo numérico deverá contemplar os mecanismos físicos, fornecendo importantes informações sobre as variáveis associadas ao escoamento bifásico e à estrutura (reservatório, tubulação reta e válvula) conforme apresentado no escopo a seguir.

### 2.1 Escopo do modelo numérico

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho terá como foco o cálculo de transitórios hidráulicos em um sistema como o mostrado na Figura 5. Serão apresentadas as metodologias e procedimentos de cálculo, de forma que seja possível obter as variáveis de interesse (pressão no fluido, velocidade do escoamento, velocidade axial da parede da tubulação, tensão axial na tubulação e fração de vazão) durante um transitório hidráulico de fechamento rápido da válvula de saída, para um escoamento bifásico homogêneo.

Figura 5 – Desenho esquemático do modelo resolvido na solução numérica.



Fonte: Autor.

### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 3.1 Transitório hidráulico - fenômeno

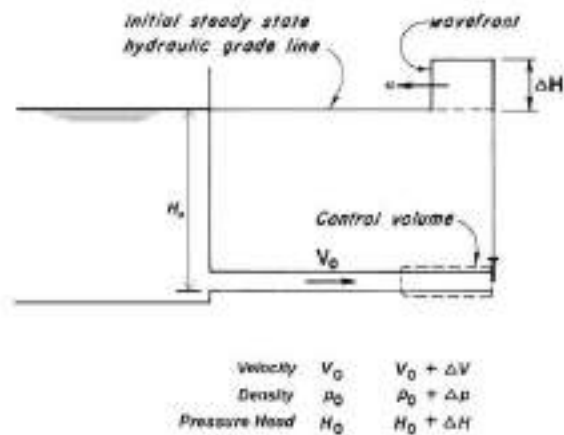
Inicialmente, antes de abordar maiores detalhes do fenômeno hidráulico pretendido, diversas definições comuns serão apresentadas a seguir, adaptadas de (CHAUDHRY, 2014):

- Escoamento constante e instável: O escoamento é chamado de constante se as condições de escoamento, como pressão e velocidade, em um ponto são constantes com o tempo. Se as condições mudam com o tempo, o escoamento é denominado instável. Estritamente falando, os escoamentos turbulentos são sempre instáveis, uma vez que as condições em um ponto desses escoamentos estão mudando continuamente. No entanto, esses escoamentos são considerados estáveis se as condições médias temporais em um curto período não mudam com o tempo. Ao nos referirmos aqui aos escoamentos turbulentos estacionários ou instáveis, consideraremos as condições médias temporais para esta designação.
- Escoamento Transiente (ou transitório): O escoamento de estágio intermediário, quando as condições de escoamento mudam de um estado estacionário para outro estado estacionário, é chamado de escoamento transiente.
- Escoamento uniforme e não uniforme: Se a velocidade do escoamento é constante em relação à distância em um determinado momento, o escoamento é chamado de escoamento uniforme, enquanto que se a velocidade varia com a distância, o escoamento é chamado de não uniforme.
- Escoamento Estacionário-Oscilatório ou Periódico: Se as condições de escoamento variam com o tempo e se repetem após um intervalo de tempo fixo, o escoamento é chamado de escoamento periódico ou oscilatório permanente. O intervalo de tempo em que as condições estão se repetindo é denominado como o período. Se  $T$  é o período em segundos, então a frequência de oscilações,  $f$ , em ciclos/s e em rad/s é  $1/T$  e  $2\pi/T$ , respectivamente.

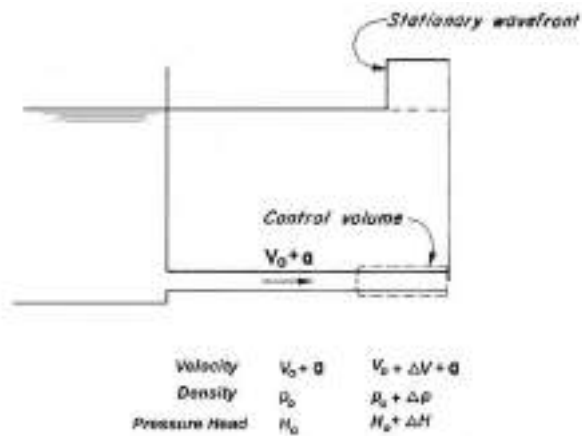
- Separação de Colunas: Se a pressão no escoamento cair abaixo da pressão de vapor do líquido, então cavidades são formadas no líquido e muitas vezes a coluna de líquido pode se separar em toda a seção transversal da tubulação.
- Transitório Hidráulico (ou martelo hidráulico): No passado, termos como golpe de aríete, martetele e martelo a vapor referiam-se às flutuações de pressão causadas por uma mudança no escoamento, dependendo do fluido envolvido. No entanto, transitório hidráulico (ou martelo hidráulico) tornou-se comum desde a década de 1960.
- Celeridade da onda (ou velocidade de propagação da onda): Durante um transitório hidráulico, normalmente surge um aumento de pressão que se propaga dentro do sistema como uma onda, com uma determinada velocidade, chamada de celeridade, podendo ser constante ou variável.

Para esclarecer as definições anteriores, serão apresentadas a seguir as condições de um escoamento saindo de um reservatório e escoando através de uma tubulação, em que ocorre o fechamento instantâneo da válvula de saída do escoamento provocando um transitório hidráulico no sistema (Figura 6).

Figura 6 – Propagação de ondas de pressão.



(a) escoamento instável



(b) escoamento instável convertido para estável

Fonte: CHAUDHRY, 2014.

Inicialmente, a válvula a jusante está totalmente aberta e a velocidade do escoamento ao longo da tubulação é  $V_0$ . No instante  $t = t_0$ , a válvula é fechada repentinamente, reduzindo o fluxo através da válvula instantaneamente para zero. Em função da conversão de energia cinética, a pressão aumenta na válvula e uma onda de pressão viaja na direção a montante, com celeridade  $a$ . Esta onda é refletida no reservatório e então viaja para frente e para trás entre a válvula fechada e o reservatório. Devido a perdas no sistema, esta onda é dissipada à medida que viaja na tubulação. Finalmente, digamos que no tempo  $t_1$ , o escoamento é completamente interrompido e a pressão em toda a tubulação é a mesma que a altura manométrica do reservatório.

Com base nas definições anteriores, o escoamento para  $t < t_0$  e  $t > t_1$  é estável quando as condições são constantes em relação ao tempo. No entanto, o escoamento intermediário (ou seja, para  $t_0 \leq t \leq t_1$ ) quando as condições de escoamento estão mudando

do estado estacionário inicial para o estado estacionário final é chamado de escoamento transiente.

Agora considerando-se outra situação de escoamento na qual a válvula a jusante é aberta e fechada periodicamente em uma dada frequência. Após vários ciclos, o escoamento transiente na tubulação se torna periódico com o mesmo período da válvula de abertura e fechamento. Esse escoamento é chamado de escoamento oscilatório permanente ou escoamento periódico.

### 3.2 Propagação da onda de um martelo hidráulico

Nesta seção será apresentado, adaptado de (CHAUDHRY, 2014), o escoamento transiente em um sistema de tubulação com um reservatório de nível constante na extremidade a montante e uma válvula na extremidade a jusante (Figura 7), para ilustrar a propagação de uma onda de pressão em uma tubulação e as reflexões da onda entre um reservatório e uma válvula fechada. As paredes do tubo são consideradas elásticas. Portanto, o tubo se expande à medida que a pressão interna aumenta e se contrai à medida que a pressão diminui.

Considera-se que as condições de escoamento na tubulação sejam estáveis antes do fechamento instantâneo da válvula a jusante, no instante  $t = 0$ . Se o sistema for considerado sem atrito, então a altura manométrica inicial em estado estacionário ao longo do comprimento da tubulação é  $H_0$ . Consideremos a distância  $x$  e a velocidade  $V$  como positivas na direção a jusante, em relação ao escoamento inicial em regime permanente. A celeridade da onda de pressão é definida como  $a$ , e o comprimento do tubo como  $L$ . A sequência de eventos pode ser dividida em quatro partes (Figura 7), conforme estágio temporal  $t$ , da seguinte forma:

$$0 < t \leq L/a:$$

A velocidade do escoamento na válvula é reduzida a zero assim que a válvula é completamente fechada. Isso aumenta a pressão na válvula. Por causa desse aumento de pressão, o tubo se expande (o diâmetro inicial do tubo em estado estacionário nas partes expandidas ou contraídas do tubo é mostrado por linhas pontilhadas na Figura 7), o fluido é comprimido, o que aumenta a massa específica do fluido, e uma onda de pressão positiva se propaga em direção ao reservatório. Atrás dessa frente de onda, a velocidade do escoamento é zero e a energia cinética foi convertida em aumento de pressão (Figura 7a). Se  $a$  é igual a

velocidade da onda de pressão e  $L$  é o comprimento da tubulação, então a frente de onda atinge o reservatório a montante no instante  $t = L/a$ . Neste momento, ao longo de todo o comprimento da tubulação, ela fica expandida, a velocidade do escoamento é zero e a altura manométrica é  $H_0 + \Delta H$  (Figura 7b).

$$\underline{L/a < t \leq 2L/a:}$$

Assim que a onda atinge o reservatório a montante, a pressão em uma seção do lado do reservatório é  $H_0$ , enquanto a pressão em uma seção adjacente do tubo é  $H_0 + \Delta H$ . Devido a essa diferença de pressão, o fluido flui da tubulação para o reservatório com velocidade  $-V_0$ . Assim, a velocidade do escoamento na entrada do tubo é reduzida de zero para  $-V_0$ . Isso faz com que a pressão caia de  $H_0 + \Delta H$  para  $H_0$  e uma onda negativa viaja em direção à válvula (Figura 7c). A pressão atrás desta frente de onda (ou seja, no lado do reservatório) é  $H_0$  e a velocidade do fluido é  $-V_0$ . Em  $t = 2L/a$ , a frente de onda atinge a válvula fechada, a altura manométrica em toda a tubulação é  $H_0$ , e a velocidade do fluido é  $-V_0$  (Figura 7d).

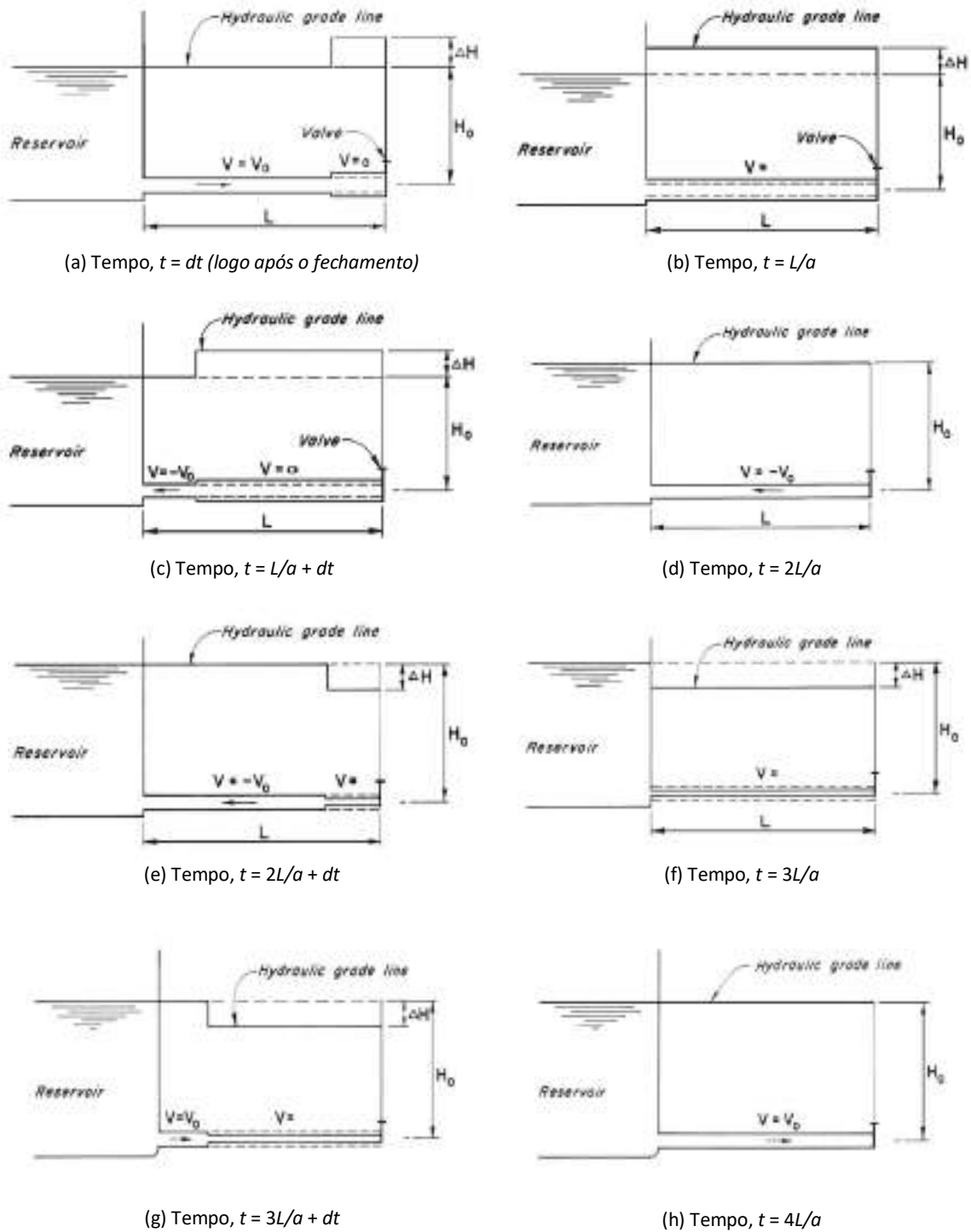
$$\underline{2L/a < t \leq 3L/a:}$$

Como a válvula está completamente fechada, uma velocidade negativa não pode ser mantida na válvula. Portanto, a velocidade muda instantaneamente de  $-V_0$  para 0, a pressão cai para  $H_0 - \Delta H$  e uma onda negativa se propaga em direção ao reservatório (Figura 7e). Atrás desta frente de onda, a pressão é  $H_0 - \Delta H$  e a velocidade do fluido é zero. A frente de onda atinge o reservatório a montante no instante  $t = 3L/a$ , a altura manométrica em toda a tubulação é  $H_0 - \Delta H$  e a velocidade do fluido é zero (Figura 7f).

$$\underline{3L/a < t \leq 4L/a:}$$

Assim que esta onda negativa atinge o reservatório, uma condição de desequilíbrio é criada novamente na extremidade a montante. Agora a pressão é maior no lado do reservatório do que em uma seção adjacente da tubulação. Portanto, o fluido agora flui do reservatório para a tubulação com velocidade  $V_0$ , e a altura manométrica aumenta para  $H_0$  (Figura 7g). No instante  $t = 4L/a$ , a frente de onda atinge a válvula a jusante, a altura manométrica em toda a tubulação é  $H_0$  e a velocidade do escoamento é  $V_0$ . Assim, as condições na tubulação neste momento são as mesmas que durante as condições iniciais de estado estacionário, exceto que a válvula está agora fechada (Figura 7h).

Figura 7 – Propagação e reflexão das ondas de pressão.



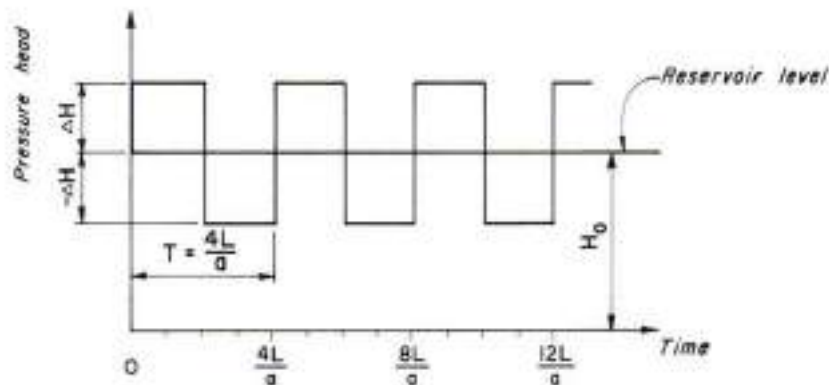
Fonte: Adaptado de CHAUDHRY, 2014.

Como a válvula está completamente fechada, a sequência anterior de eventos começa novamente em  $t = 4L/a$ .

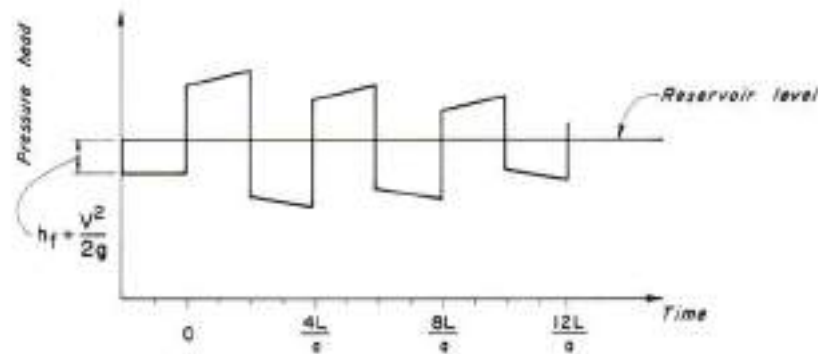
Na Figura 8a, é mostrada a variação da pressão na válvula com o tempo. Como assumimos que o sistema não possui atrito, esse processo se torna contínuo, com as

condições se repetindo em um intervalo de  $4L/a$ . O intervalo no qual as condições são repetidas é denominado período teórico. Em um sistema real, no entanto, as ondas de pressão são dissipadas devido às perdas de energia por atrito, à medida que as ondas se propagam para frente e para trás na tubulação, e o fluido se torna estacionário após algum tempo. A variação da pressão na válvula com o tempo é mostrada na Figura 8b, se as perdas por atrito forem levadas em consideração.

Figura 8 – Variação de pressão na válvula.



(a) sem considerar perdas por atrito



(b) com perdas por atrito

Fonte: CHAUDHRY, 2014.

### 3.3 Transitório hidráulico com IFE

A Interação Fluido-Estrutura (IFE, ou FSI, do inglês *Fluid-Structure Interaction*) em sistemas de tubulação é definida como a transferência de momento e forças em ambos os sentidos, entre a parede do tubo e o fluido contido durante o escoamento instável (WIGGERT, DC., 1986). Em um sentido amplo, a IFE abrange qualquer forma de transferência de energia, uma sobre a outra, entre o fluido e a estrutura. Em problemas comuns de engenharia, essa energia transferida é tipicamente cinética, elástica ou térmica.



A primeira é denominada IFE mecânica e a última IFE térmica. Os efeitos da troca de calor no escoamento transitório da tubulação são pouco significativos, em sua maioria os processos são considerados adiabáticos e as análises de IFE são principalmente focadas na troca de momento entre o fluido e a estrutura da tubulação.

Assim, a IFE em escoamento em tubulação envolve, pelo menos, respostas transitórias de dois sistemas físicos diferentes. A interação surge quando as escalas de tempo de ambas as respostas do sistema são mais curtas do que a escala de tempo do evento transitório geral (ou seja, intervalo de tempo entre o estado estacionário inicial e final). Se a fonte de perturbação for mais curta do que ambas as respostas do sistema, então ocorrem simultaneamente transientes rápidos de fluidos e sólidos. Se sua interação for forte o suficiente, então a descrição da IFE pode valer a pena em análises de martelo hidráulico e os mecanismos de interação devem ser levados em consideração.

Dois abordagens diferentes podem ser seguidas para explicar a transferência de momento para a estrutura (GIANNOPAPA, 2004): considerando que a estrutura se move como um sólido rígido ou pela propagação de uma excitação/deformação local do sólido. Na primeira, nenhum evento transitório é considerado se propagando pelo sólido, o elemento da estrutura se move como um corpo rígido e seu efeito no fluido é analisado. Na segunda, os modos de vibração do elemento estrutural são excitados e seus respectivos estados transitórios são levados em consideração e acoplados ao transitório do fluido. O presente trabalho está focado apenas na segunda forma.

As análises com IFE podem ser classificadas de acordo com as dimensões e os graus de liberdade com os quais o sistema de tubulação pode se mover. Normalmente, na análise de martelo hidráulico 1D, o critério de classificação é baseado nos modos de vibração do tubo, o que é bastante conveniente para abordagens no domínio da frequência. No entanto, para análises no domínio do tempo, uma classificação baseada nos graus de liberdade do tubo é fisicamente mais intuitiva. Este último é o critério de classificação aqui utilizado.

### 3.3.1 Graus de liberdade

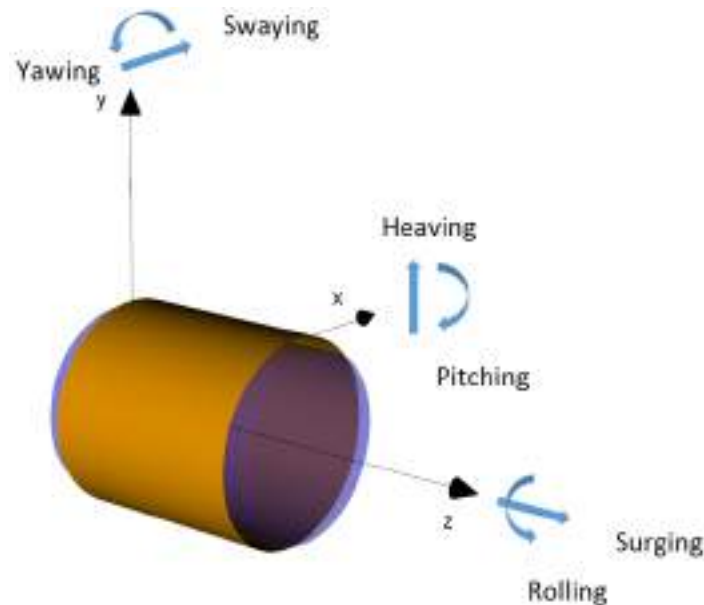
Os Graus de liberdade (DOF, do inglês “*Degrees of Freedom*”) são o número de coordenadas independentes ou parâmetros que descrevem a posição ou configuração de um sistema mecânico a qualquer momento (SINHA, 2010). Sistemas com um número finito de graus de liberdade são chamados de sistemas discretos, e aqueles com infinitos graus de liberdade são chamados de sistemas contínuos. Os sistemas de tubulação são sistemas contínuos; no entanto, estes podem ser tratados como sistemas discretos para fins de modelagem numérica, com muitos DOFs dependendo do número de nós.

Os tubos são elementos esbeltos; portanto, uma abordagem 1D assumindo que a pressão do fluido se propaga axialmente durante transitórios hidráulicos pode ser razoável. No entanto, pressões transitórias transmitem forças sobre a parede da tubulação que fazem o sistema de tubulação se mover no espaço. Para ampliar o entendimento desta questão, na Figura 9 está apresentado um volume de controle infinitesimal de um segmento de tubulação com os graus de liberdade demonstrados.

Os graus de liberdade básicos para um corpo rígido em um espaço 3D são três para translação e três para rotação (considerando-se os três eixos principais cartesianos). O volume de controle da parede do tubo é um cilindro oco; portanto, a vibração axissimétrica devido à deformação circunferencial também deve ser considerada, acrescentando outro grau de liberdade, este ligado aos deslocamentos radiais da parede do tubo. Além disso, o volume de controle infinitesimal do fluido contido é responsável por outro grau de liberdade, em que o fluido é considerado como um cilindro interno com apenas um grau de liberdade na direção axial. Desta forma, oito graus de liberdade compõem o volume de controle infinitesimal de um tubo unidimensional.

Para cada grau de liberdade, dependendo da geometria do tubo, as forças e deslocamentos axiais, de cisalhamento, de flexão e de torção se alternam em todo o tubo. Um esquema de tais deslocamentos também é mostrado na Figura 9.

Figura 9 – Sistema espacial de referência e graus de liberdade de um elemento de tubulação.



Fonte: FERRAS et al., 2018.

Apresentando-se de forma mais detalhada os DOF típicos para modelos com IFE, em análises de martelo hidráulico 1D, pode-se indicar os oito graus mencionados, conforme (FERRAS et al., 2018):

- 1-DOF (*fluid surging*): evento transitório do fluido axial;
- 2-DOF (*breathing*): inércia radial do fluido e do tubo;
- 3-DOF (*solid surging*): movimento axial do tubo;
- 4-DOF (*swaying*): deslocamento horizontal da tubulação;
- 5-DOF (*heaving*): deslocamento vertical do tubo;
- 6-DOF (*yawing*): rotação do tubo no plano xz;
- 7-DOF (*pitching*): rotação do tubo no plano yz; e
- 8-DOF (*rolling*): rotação do tubo no plano xy.

O presente trabalho terá como foco a elaboração de um código capaz de incorporar os dois graus de liberdade nomeados acima como 1-DOF e 3-DOF acoplados, da mesma forma que foi adotada no modelo apresentado por (ALMEIDA, 2018).

### 3.3.2 Mecanismos de acoplamento

Sistemas de tubulação sujeitos a transientes de martelo hidráulico podem ser considerados como sistemas vibratórios determinísticos de amortecimento livre com múltiplos modos de vibração, acoplados ou desacoplados, de acordo com os graus de liberdade do conduto e expostos a atrito superficial, atrito seco e amortecimento histerético/estrutural. Esses mecanismos de amortecimento convertem transientes hidráulicos em fenômenos não periódicos e não lineares que são difíceis de analisar.

Os diferentes graus de liberdade de um sistema de tubulação podem interagir entre si. Existem três tipos básicos de mecanismos de acoplamento (TIJSSELING, A S, 1996): (i) o acoplamento de Poisson que descreve a interação entre o movimento axial da parede do tubo e a pressão no fluido ocorrendo por meio do efeito de Poisson; (Efeito de Poisson refere-se ao fenômeno em que um material se contrai nas direções perpendiculares àquelas em que ocorre a expansão e vice-versa); (ii) o acoplamento por atrito que surge da tensão de cisalhamento entre a parede do tubo e o fluido; (iii) e o acoplamento de junção que resulta de forças locais desequilibradas e por mudanças no momento do fluido que ocorrem em curvas de tubos, junções em “T”, válvulas, terminações ou mudanças de seção transversal.

Para se prever com precisão as cargas hidrodinâmicas no fluido, bem como os níveis de tensões e as vibrações na tubulação, pesquisas experimentais e teóricas têm mostrado que as análises dos movimentos do fluido e da tubulação devem ser realizadas simultaneamente e de forma acoplada. Esse tipo de abordagem tem sido objeto de intensa pesquisa ao longo dos anos (ALMEIDA, 2018; FERRAS et al., 2018; ROCHA, R. G. DA, 2011; TIJSSELING, A S, 1993, 2007). Para a estrutura, são resolvidas as equações de balanço de momento e de tensão-deformação unidimensionais (ALMEIDA, 2018). As equações de acoplamento fluido-estrutura são determinadas por condições de contorno que representam o contato entre o fluido e a parede da tubulação. As condições dinâmicas e cinemáticas do escoamento geram as pressões do fluido sobre a parede da tubulação e definem a interação entre o fluido e a tubulação.

### 3.4 Transitórios hidráulicos em escoamentos bifásicos

Como já mencionado, transitórios hidráulicos em escoamentos bifásicos podem induzir falhas e acidentes em plantas em que são requeridos elevados graus de segurança, como é o caso das plantas nucleares, tornando a análise e previsão desse fenômeno de extrema importância para esses casos. A seguir, será apresentada uma revisão dos principais estudos, modelos e dados disponíveis relacionados aos transitórios hidráulicos em escoamentos bifásicos com foco no objetivo do presente trabalho.

#### 3.4.1 Classificação de escoamentos bifásicos

Inicialmente, faz-se necessário apresentar como os escoamentos bifásicos horizontais são tipicamente classificados. Conforme apontado por (FERNANDES, 2017), a classificação das diferentes configurações geométricas das fases gás e líquido em padrões de escoamento surge como uma ferramenta para facilitar o estudo de escoamentos multifásicos. Não existe, porém, um consenso entre os autores sobre quantos arranjos existem e quais os limites entre eles. Enquanto alguns buscam um maior nível de detalhe, outros tentam ser mais práticos e minimizar o número de classificações. Em (WALLIS, 1969), por exemplo, são utilizadas definições baseadas na forma do escoamento e subdivisões para classificar as regiões de transição entre diferentes padrões (como região golfada-anular).

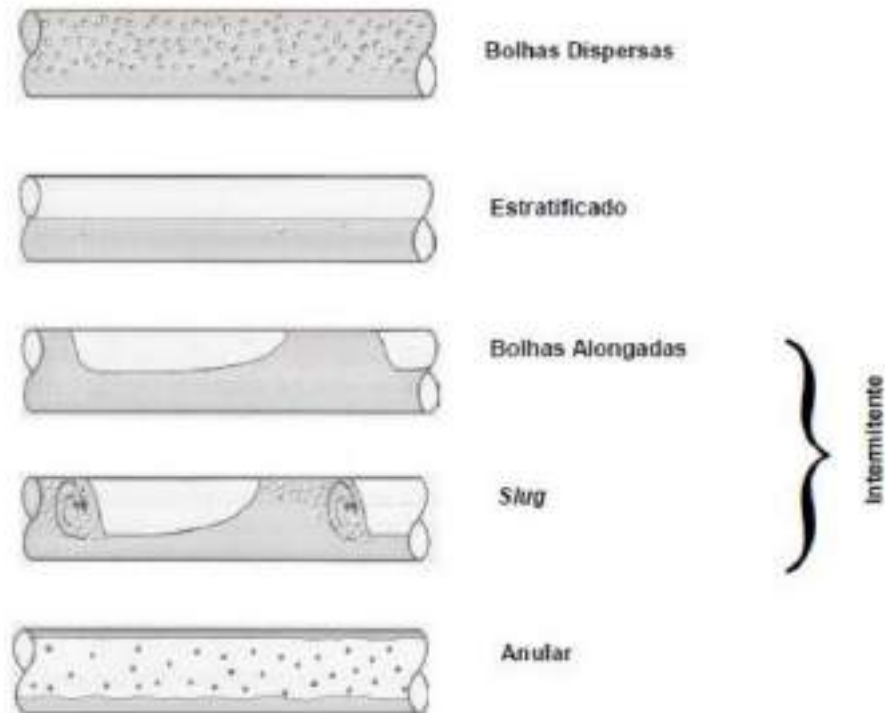
A não uniformização descrita acima tende a dificultar a comparação de dados de diferentes laboratórios. Neste texto, será feita uma breve descrição dos principais padrões de escoamento encontrados na literatura. Informações mais detalhadas podem ser encontradas em livros como os de (HETSRONI, 1982; WALLIS, 1969) ou, mais recentemente, (BRENNEN, 2005; KOLEV, 2007). Conforme (FERNANDES, 2017), a Figura 10 ilustra os principais padrões no escoamento horizontal, quando a gravidade age perpendicularmente ao escoamento, o que gera uma assimetria no escoamento. Tais padrões são:

- Escoamento Estratificado (*Stratified Flow*): No escoamento estratificado há separação gravitacional entre as fases, com a fase líquida, mais densa, escoando abaixo da fase gasosa. Ocorre para vazões (ou velocidades superficiais) das fases relativamente baixas, em comparação aos outros padrões de escoamento.
- Escoamento Ondulado (*Wavy Flow*): Quando a vazão de gás aumenta, no escoamento estratificado, aumenta também a taxa de cisalhamento na

interface gás-líquido. Assim, surgem as ondulações que caracterizam o escoamento.

- Escoamento em Golfada (*Slug Flow*): Com o aumento da vazão de líquido no escoamento ondulado, as ondas podem alcançar a parte superior da tubulação, formando regiões somente com líquido que ocupam toda a tubulação e gerando um regime intermitente, no qual os escoamentos de gás ou líquido são alternados em determinado ponto. O escoamento em golfada se caracteriza pela alternância entre um escoamento semelhante ao estratificado (com a fase gasosa escoando a velocidades maiores que a da fase líquida).
- Escoamento Pistonado (*Plug Flow*): Também chamado de bolha alongada (*elongated bubble*), ocorre para vazões de gás mais baixas que no escoamento em golfada. Também é um escoamento intermitente, porém, nesse caso, o pistão líquido não é aerado, encontrando-se praticamente livre de gás.
- Escoamento em Bolhas Dispersas (*Disperse Flow*): É a configuração na qual a fase gasosa está dispersa no formato de bolhas, que tendem a se concentrar na parte de cima da tubulação, devido ao empuxo da fase líquida (esta, considerada contínua). Ocorre para vazões elevadas da fase líquida e quanto maior esta, mais homogênea é a distribuição axial das bolhas. Geralmente é considerado que ambas as fases escoam na mesma velocidade. Esta é a configuração que será considerada para o escoamento neste trabalho.
- Escoamento Anular (*Annular Flow*): Configuração na qual a fase líquida se encontra na região próxima à parede da tubulação, em formato de anel. Devido à ação da gravidade, a espessura do filme na região inferior tende a ser maior que na região superior. O escoamento anular ocorre para altas vazões de gás e é comum existirem gotículas de líquido dispersas na fase gasosa.

Figura 10 – Configurações mais comuns para o escoamento horizontal gás-líquido.



Fonte: FERNANDES, 2017.

### 3.4.2 Soluções propostas para escoamentos bifásicos

As formulações clássicas e consolidadas, que descrevem o efeito do transitório hidráulico, encontram-se demonstradas em diversos estudos (ALMEIDA, 2018; CHAUDHRY, 2014; CHAUDRY et al., 1990; FOX, 1977; KOELLE, 1983; MAMBRETTI, 2013; ROCHA, R. G. DA, 2011; ROCHA, M. DA S., 1998; STREETER; WYLIE, 1978; TIJSSELING, A S, 1993; ZÁRUBA, 1993) com foco em escoamentos monofásicos. A simulação numérica dos transitórios hidráulicos (com e sem IFE) é geralmente baseada em modelos matemáticos unidimensionais, compostos de equações diferenciais do tipo hiperbólicas e equações empíricas de acoplamento específicas para singularidades como válvulas, junções ou mudanças de área seccional.

Conforme (FERRAS et al., 2018), em análises no domínio do tempo, o Método das Características (MOC), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (FDM) ou o Método dos Volumes Finitos (FVM) são métodos de discretização utilizados para resolver as equações diferenciais parciais governantes. Um método numérico único ou combinado (híbrido) pode ser usado para a descrição dos diferentes graus de liberdade do tubo e do fluido. O método das características (MOC) e o método dos elementos finitos (FEM), ou uma combinação de ambos, são os métodos

numéricos mais comuns usados para resolver as equações básicas unidimensionais do fluido e da estrutura (TIJSSELING, A S, 1996). Uma única abordagem integradora, como MOC-MOC, é conveniente, pois todas as informações fluem para o mesmo esquema numérico (WIGGERT, D. C.; TIJSSELING, 2001), trazendo ganho computacional e facilitando a implementação e a troca de informação entre resultados calculados para o fluido e para a estrutura. Sem entrar em maiores detalhes, por serem consideradas mais distantes do objetivo deste trabalho, outras abordagens também podem ser citadas, como o método das ondas (WM) (WOOD, D. J. et al., 1966), ou ainda o método do volume de fluidos (VOF) (HIRT; NICHOLS, 1981) mais aplicado a superfícies livres.

Apresentados os diversos métodos, é conveniente destacar que os métodos clássicos de solução, com foco nas soluções transientes no domínio do tempo, normalmente utilizam o Método das Características (MOC, do inglês *Method of Characteristics*), método que pode ser utilizado tanto para a estrutura, quanto para o fluido, utilizando a abordagem integrada MOC-MOC. Essa escolha é feita, pois trata-se de um método que costuma apresentar bons resultados para esse tipo de problema transitório, por ter uma natureza intrínseca de comportamento de propagação de onda em sua solução (TIJSSELING, A S, 1996), como poderá ser melhor compreendido quando for detalhada a solução empregada para o modelo proposto no presente trabalho.

Para um escoamento bifásico gás-líquido com bolhas dispersas, uniformemente distribuídas e com frações de vazio pequenas, podem ser propostos modelos em que são resolvidas as equações da continuidade e da quantidade de movimento, mas incorporando a fração gasosa e suas características de forma homogênea nos coeficientes utilizados para as equações típicas das soluções monofásicas. Formas de solução unidimensional para essas equações estão demonstradas na literatura, como em (CHAUDHRY, 2014; CHAUDRY et al., 1990; ELAOUUD; HADJ-TAÏEB, 2013; FOX, 1977; STREETER; WYLIE, 1978), porém sem uma solução que considere a IFE de forma que seja possível avaliar mais detalhadamente o impacto que a interação gera mutuamente na tubulação e no escoamento. As equações incorporam o comportamento do escoamento bifásico que se encontra no interior da tubulação, de forma que as principais propriedades de cada fase do fluido (compressibilidade e massa específica) são consideradas e influenciam a celeridade da onda de pressão, alterando consideravelmente o comportamento transitório global do fluido, quando comparado com uma formulação monofásica, como a proposta por (ALMEIDA, 2018; TIJSSELING, A S, 1993), fazendo com que a celeridade no fluido se reduza substancialmente, para valores atenuados (THORLEY, 2004; ZÁRUBA, 1993).



A variação da celeridade no fluido é quantificada para um escoamento bifásico, sendo reduzida conforme aumenta-se a fração da fase gasosa no fluido, ou quando se reduz a pressão (ZÁRUBA, 1993), conforme mostrado na Tabela 1.

Tabela 1 – Efeito da concentração de gás e da pressão na celeridade da onda em um escoamento bifásico

Fluido	Pressão absoluta (Pa)	Massa específica (kg/m <sup>3</sup> )	Módulo de Compressibilidade (Pa)	Celeridade (m/s)
água	-	1000	2,0x10 <sup>9</sup>	1414
água + 0,01 % volume gás	2,0x10 <sup>6</sup>	1000	1,87x10 <sup>9</sup>	1366
	2,0x10 <sup>5</sup>	1000	1,17x10 <sup>9</sup>	1080
água + 0,1 % volume gás	2,0x10 <sup>6</sup>	999	1,17x10 <sup>9</sup>	1081
	2,0x10 <sup>5</sup>	999	2,40x10 <sup>8</sup>	495
água + 1,0 % volume gás	2,0x10 <sup>6</sup>	990	2,46x10 <sup>8</sup>	498
	2,0x10 <sup>5</sup>	990	2,76x10 <sup>7</sup>	167
água + 10,0 % volume gás	2,0x10 <sup>6</sup>	900	2,77x10 <sup>7</sup>	175
	2,0x10 <sup>5</sup>	900	2,80x10 <sup>6</sup>	56
água + 20,0 % volume gás	2,0x10 <sup>6</sup>	800	1,39x10 <sup>7</sup>	132
	2,0x10 <sup>5</sup>	800	1,40x10 <sup>6</sup>	42

Fonte: Adaptado de ZÁRUBA, 1993.

Revisões importantes foram realizadas para escoamentos bifásicos (BERGANT et al., 2006; BEUTHE, 1997; PAL et al., 2021). Estudos importantes considerando cavidades gasosas também são apresentados (BERGANT et al., 2008a, b, 2010; JENSEN et al., 2018), porém com foco mais voltado para escoamentos em que uma condição de depressão surge durante um transitório e gera cavidades gasosas que, ao colapsarem, possam amplificar os efeitos deste mesmo transitório hidráulico. O foco do presente trabalho estará voltado para escoamentos em que a fração gasosa seja pré-existente no escoamento, anteriormente ao início de um dado transitório hidráulico.

Para escoamentos bifásicos com frações gasosas maiores (ou pressões muito baixas) que induzam baixas celeridades no fluido, conforme apontado na Tabela 1, dependendo das condições do escoamento, os termos convectivos das equações da continuidade e da quantidade de movimento não podem ser diretamente suprimidos como da forma demonstrada na análise dimensional realizada por (D'SOUZA, 1964). Isso faz com que a solução por MOC, para esses casos, se torne mais complexa e de mais difícil implementação, conforme também apontado por (JENSEN et al., 2018). Essa variação na celeridade da onda reafirma a necessidade de que sejam ajustados os modelos de solução tipicamente adotados para escoamentos monofásicos, incorporando as não-linearidades provocadas pela fase gasosa. Pode-se citar um exemplo de estudo recente, em que se avalia o impacto gerado pela liberação gasosa de um poço de petróleo dentro da tubulação de

extração, com uma solução bem empregada para escoamentos bifásicos: neste estudo se considera um escoamento bifásico de fração gasosa pequena de forma que possa ser estabelecido um modelo de bolhas homogêneas e distribuídas uniformemente para a solução do problema pelo Método das Características (MOC) (GALDINO, 2016), porém sem IFE. O presente trabalho também terá como foco frações gasosas (ou frações de vazão) menores e condições de escoamento aceitáveis para a melhor implementação do MOC, sem que seja necessário incorporar os termos convectivos – o que quase inviabilizaria a aplicação do MOC – e ainda alcançando resultados satisfatórios.

### 3.4.3 Modelos numéricos desenvolvidos

Conforme descrito por (PAL et al., 2021), o escoamento multifásico em sistemas de tubulação é comumente observado em diversos campos industriais, seja exigindo diferentes tipos de fluidos ou diferentes fases de um mesmo fluido. Nesses casos, as previsões de estado estacionário e transitório de escoamento e choques hidráulicos são cruciais. Um problema crítico associado à aplicação da análise multifásica é seu alto custo computacional (PROSPERETTI; TRYGGVASON, 2009). Em (TAITEL et al., 1989) apresenta-se um modelo que trata apenas o líquido como totalmente transitório, enquanto o gás é assumido como em estado quase estacionário. No entanto, tal modelo é inválido para grandes choques. O modelo inicial foi posteriormente modificado por (MINAMI; SHOHAM, 1994), que defendiam um esquema computacional implícito e sugeriram um modelo de transição de regime de escoamento aprimorado. (LI, 2010) considerou a equação de continuidade transitória, mas empregou a equação de momento como uma representação de estado quase-estacionário. (CHOI et al., 2013) sugeriram um modelo transitório bifásico com uma equação de continuidade modificada e com a equação de momento ajustada considerando a mistura como um fluido único. Em (OLORUNTOBA; KARA, 2017) apresenta-se um modelo transiente baseado nas equações de Navier-Stokes, sem negligenciar o termo convectivo, mas sem contemplar IFE.

Para a análise da segurança de reatores nucleares, uma série de técnicas computacionais foram introduzidas no início da década de 1980. De uma forma geral, as equações que descrevem os escoamentos bifásicos podem representar diversos tipos de escoamento de uma forma bastante abrangente, mas em muitos casos, dependendo das condições do escoamento, acabam se transformando em um sistema de equações diferenciais não hiperbólico, dificultando a solução. No entanto, como solução técnica, a hiperbolicidade

pode ser estabelecida com um tratamento especial dos termos de interação de fase, se assumirmos velocidades iguais entre as fases, temperaturas iguais, frações gasosas pequenas, entre outras condições, tornando o sistema de equações governantes hiperbólico e trazendo maior viabilidade de solução computacional para este tipo de escoamento. Alguns exemplos notáveis entre os códigos usados para análise termohidráulica são: THERMIT, TREMOLO, RELAP5, RETRAN, CATHARE e TRACE (CHENG et al., 1998; ELICSON et al., 1999; HOU et al., 2017; LAKSHMANAN et al., 2009; MARCEL et al., 2009; TISELJ; ČERNE, 2000).

Em artigo publicado em 1997 (TISELJ; PETELIN, 1997) foi usado um modelo de duas fases para captura de choque baseado no código RELAP5, consistindo em equações diferenciais parciais não hiperbólicas de momento e balanço de energia. Com base neste método, (MELIKHOV et al., 2008) e (GALE et al., 2008) propuseram o código WAHA (*Water Hammer Code*) de última geração - que é um modelo de transitório hidráulico unidimensional - para resolver duas fases, e encontraram boa concordância com as medições experimentais. O código WAHA consiste em um modelo de seis equações baseado na conservação de massa, momento e energia. O modelo é usado principalmente para calcular as forças hidráulicas no sistema de tubulação durante um evento de martelo hidráulico e é considerado o estado da arte para esse tipo de problema.

### 3.5 Atrito do escoamento com a tubulação

Assim como ocorre para escoamentos puramente líquidos, uma parte importante do desenvolvimento de modelos bifásicos se refere à modelagem do termo de atrito do escoamento com a tubulação, uma vez que diferentes abordagens são propostas, considerando o termo clássico de atrito estático, ou com modelos transientes (ABDELDAYEM et al., 2021; BERGANT et al., 2001, 2008a; ROCHA, M. DA S., 1998). Tipicamente, pode-se dizer que o termo de atrito ( $\tau_0$ ) pode ser considerado como a soma do fator de atrito estático ( $\tau_s$ ), com o fator de atrito transiente ( $\tau_u$ ):

$$\tau_0 = \tau_s + \tau_u \quad (3.1)$$

### 3.5.1 Modelos de atrito

Diversos modelos são propostos na literatura para a definição do atrito transiente. Uma compilação dos principais modelos está demonstrada na Tabela 2.

Tabela 2 – Principais modelos de atrito

Modelo de Atrito	Nome do Modelo	Equação do Modelo	Equação
Estático ou quase-estático	Darcy Weisbach	$\tau_s = \rho_f \frac{fV V }{8}$	(3.2)
Velocidade média de escoamento instantânea, aceleração local e aceleração convectiva	Brunone	$\tau_u = k \frac{\rho_f R}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} - a \frac{\partial V}{\partial z} \right]$	(3.3)
	Vítkovský	$\tau_u = \frac{\rho_f R}{2} \left[ K_{ut} \frac{\partial V}{\partial t} + K_{ux} \text{Sinal}(V) a \left  \frac{\partial V}{\partial z} \right  \right]$	(3.4)
Velocidade média de escoamento instantânea e velocidades de instantes anteriores ponderadas	Modelo de convolução	$\tau_u = \frac{\rho_f R}{2} \frac{16\mu}{\rho_f D^2} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} * W(\xi) \right]$	(3.5)
	Função de pesos de Vardy e Brown	$W(\xi) = \frac{A e^{-B\xi}}{\sqrt{\xi}}$	(3.6)

Onde,  $\xi$  é variável tempo adimensional,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica (Pa\*s),  $f$  é o fator de atrito de Darcy,  $D$  é o diâmetro interno do tubo (m),  $R$  é o raio interno do tubo (m),  $\rho_f$  é a massa específica do fluido (kg/m<sup>3</sup>)  $A$  é a área (m<sup>2</sup>) ou o peso na função  $W(\xi)$ ,  $B$  é o peso exponencial na função  $W(\xi)$ ,  $V$  (m/s) é a velocidade média do escoamento,  $a$  (m/s) é a celeridade da onda,  $z$  é a variável de comprimento,  $t$  é a variável do tempo, o termo de sinal (*Sinal*) fornece o sinal certo para o termo de convecção para todos os escoamentos potenciais, em aceleração ou desaceleração,  $K_{ut}$  e  $K_{ux}$  são os dois coeficientes de decaimento relacionados às acelerações local e convectiva, respectivamente (variação típica de 0,025 a 0,053 para  $K_{ux}$  e de 0,006 a 0,057 para  $K_{ut}$ ) e  $k$  é o coeficiente de atrito de Brunone (normalmente variando de 0,015 a 0,060).

Fonte: Adaptado de ABDELDAYEM et al., 2021; CHAUDHRY, 2014.

Geralmente, a formulação do atrito estático assume que o fator de atrito  $f$ , presente no termo de atrito ( $\tau_0$ ), é constante ao longo de toda a simulação. Por outro lado, a suposição de atrito quase-estático assume que o número de Reynolds é calculado e o fator de atrito  $f$  é atualizado a cada novo *step* da simulação. Ambos se baseiam na formulação clássica descrita pela Equação (3.2).

O atrito transiente é um dos principais fenômenos que afetam significativamente o comportamento transitório (FERRAS et al., 2018). Em contraste com o atrito quase-estático (constante), o atrito transiente (instável) se torna dominante nas etapas subsequentes ao momento inicial do evento transitório (MANDAIR et al., 2020). Para a implementação

de modelos de atrito, três categorias diferentes de modelos podem ser destacadas: (i) estático ou quase-estático; (ii) transiente baseado em velocidade média de escoamento instantânea, aceleração local e aceleração convectiva; e (iii) transiente baseado na velocidade média de escoamento instantânea e nas velocidades de instantes anteriores ponderadas.

O modelo de Brunone (BRUNONE et al., 1991) é dependente de aceleração instantânea, aceleração convectiva instantânea e um coeficiente de ajuste como ilustrado na Equação (3.3). O modelo de Vítkovský (VÍTKOVSKÝ et al., 2000) é semelhante ao modelo de Brunone, no entanto, ele possui um termo de sinal adicional, que fornece o sinal correto para o termo de convecção para todos os escoamentos potenciais, em aceleração ou desaceleração, conforme ilustrado na Equação (3.4). A velocidade média instantânea do escoamento e as mudanças de velocidade passadas, consideradas de forma ponderada, também podem ser incorporados nos modelos de atrito instável e geralmente são resolvidas usando equações de convolução, conforme ilustrado na Equação (3.5) (VARDY; BROWN, 2003, 2004). A convolução pode ser resolvida com uma malha retangular regular com aproximação de diferenças finitas de primeira ordem. A função de ponderação de Vardy e Brown pode ser utilizada conforme demonstrado pela Equação (3.6).

Em termos de análise de modelo, espera-se que os modelos estáticos exijam o mínimo de requisitos computacionais devido às premissas de modelagem mais simples; no entanto, espera-se que a precisão seja menor quando comparado com os resultados experimentais. Por outro lado, Vardy e Brown forneceriam a maior precisão por contemplarem todos os *steps* anteriores a cada cálculo, mas gerariam os maiores esforços computacionais devido a suposições mais complexas, envolvendo a convolução de mudanças de velocidade nos *steps* anteriores. Para Brunone e Vítkovský, espera-se que os modelos tenham requisitos computacionais moderados, pois dependem da velocidade média instantânea do escoamento, acelerações locais e convectivas.

Recentemente, muitos pesquisadores foram encorajados a focar suas pesquisas em formulações para o atrito em transitórios hidráulicos (DUAN et al., 2017; MANDAIR et al., 2020; MARTINS et al., 2017). A subestimação da dissipação, dispersão e alteração das ondas de pressão em modelos 1D, quando comparadas com experimentos, tem sido associada à não inclusão do atrito transiente nos modelos (COVAS et al., 2004). Diferentes experimentos ilustraram a importância do atrito transiente sobre o atrito estático, especialmente em transientes rápidos (BERGANT et al., 2008a; FERRÀS et al., 2016). Diferentes abordagens têm sido adotadas para incorporar o atrito transiente nas simulações de escoamento transiente (FERRAS et al., 2017).

Uma comparação foi realizada por (KJERRUMGAARD JENSEN et al., 2018), para diferentes modelos de atrito (estático ou quase-estático, Brunone, Vardy e Brown, Zielke), com dados experimentais disponibilizados por (SOARES et al., 2015). Este estudo mostrou que o modelo de Brunone forneceu melhores resultados em relação aos modelos de atrito estático. Os modelos baseados em convolução (como o de Vardy e Brown) forneceram os resultados mais precisos. Além disso, também se destaca que os resultados ilustraram que não há necessidade de se aprimorar o modelo de atrito estático para atrito quase-estático, pois a melhoria da precisão é quase insignificante, e o foco para melhoria recai na abordagem do atrito transiente.

Um estudo completo em que se compara diversos modelos de atrito também é apresentado por (ABDELDAYEM et al., 2021), para que se defina o melhor modelo a ser implementado em um código de transitório hidráulico resolvido pelo MOC (código WANDA). No estudo, os modelos de atrito são avaliados conforme os seguintes aspectos principais: (i) inputs requeridos; (ii) custo computacional; (iii) estabilidade computacional; e (iv) precisão. O resultado da análise confere vantagem aos métodos de aceleração instantânea de Brunone e Vítkovský, quando comparados com os demais.

### 3.5.2 Modelos de atrito em códigos comerciais

Existem diversos *softwares* hidráulicos comerciais atualmente disponíveis capazes de executar simulações transientes básicas, como mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Principais softwares e modelos de atrito empregados

<b>Instituição</b>	<b>Nome</b>	<b>Método</b>	<b>Modelo de atrito</b>
Applied Flow Technology	AFT Impulse	MOC	Quase-estático
Flow Science Inc.	FLOW 3-D	VOF	Estático
Hydromantis Inc.	ARTS	MOC	Estático
Universidade de Auckland	HYTRAN	MOC	Vítkovsky
BHR Group	FLOWMASTER 2	MOC	Estático
Bentley Systems, Inc.	HAMMER	MOC	Vítkovsky
Stoner Associates, Inc.	LIQT	MOC	Estático
DHI	HYPRESS	FDM	Estático
Universidade de Cambridge	PIPENET	MOC	Estático
Universidade do Kentucky	SURGE	WM	Estático
Universidade de Texas-Austin	TSNet	MOC	Vítkovsky
Universidade de Toronto	TRANSAM	MOC	Estático
Universidade Politécnica de Valência	DYAGATS	MOC	Estático
Universidade Politécnica de Valência	ALLIEVI	MOC	Estático
Deltares	WANDA	MOC	Quase-estático
US Army Corps Engineers	WHAMO	FDM	Estático
DHI	MIKE URBAN	MOC	Estático
Innovyze	H2O SURGE	WM	Estático
KYPIPE	SURGE	WM	Estático
EPA	EPA SURGE	WM	Estático
Unisont Engineering, Inc.	uSLAM	MOC	Estático

Fonte: Adaptado de ABDELDAYEM et al., 2021.

Embora o atrito transiente tenha efeitos consideráveis nos transitórios hidráulicos, raramente o mesmo é introduzido em *softwares* hidráulicos comerciais. Como pode ser observado na Tabela 3, os *softwares* comerciais usam, em sua maioria, um modelo de atrito estático, o que afeta notavelmente a qualidade das simulações (CAO et al., 2020). Portanto, diversos *softwares* comerciais atuais não podem ser usados adequadamente para aplicações que exigem uma estimativa mais longa e precisa das ondas de pressão, tendo resultado normalmente preciso apenas para o primeiro pico de pressão, mas não avaliando corretamente os picos subsequentes. Para os casos de escoamentos bifásicos, em que se espera que exista uma atenuação das ondas de pressão, a análise dos picos subsequentes ganha importância, o que evidencia ainda mais a necessidade de se incorporar modelos transientes de atrito para esses casos.

As comparações de modelos de atrito apresentados no capítulo anterior denotam que existe espaço para que se melhore os modelos de atrito utilizados nos diversos *softwares* disponíveis e apontam uma direção mais clara de abordagem desta questão para estudos como o proposto no presente trabalho, em que é necessário que se implemente o termo de atrito transiente e, também, que se considere a perda adicional de energia em escoamentos bifásicos (como a perda de energia por calor, devido ao aquecimento da fase gasosa quando comprimida), que normalmente não é considerada por ter pouca influência no primeiro e maior pico de pressão de um evento de transitório hidráulico.



## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, serão apresentadas as formulações matemáticas consideradas para que se possa capturar adequadamente as oscilações das variáveis de interesse durante um transitório hidráulico gerado após uma perturbação no sistema fluido-tubulação (provocada por um fechamento rápido da válvula de saída do escoamento). As formulações se aplicam a um sistema formado por um reservatório, uma tubulação reta e uma válvula de saída, conforme apresentado no escopo (capítulo 2.1).

A formulação é desenvolvida de forma que sejam contemplados apropriadamente o atrito entre o escoamento e a tubulação e, também, o comportamento compressível do fluido bifásico. Destaca-se que as variáveis de interesse a serem capturadas são definidas pelos símbolos  $(P, V, \alpha, \sigma_z, \dot{u}_z)$  que representam, respectivamente: pressão média no escoamento, velocidade média do escoamento, fração de vazio (relação entre volume da fase gasosa e volume da mistura bifásica homogênea), tensão axial e velocidade axial na tubulação. As oscilações das variáveis de interesse devem ser capturadas ao longo de todo o comprimento axial da tubulação, durante um período de tempo especificado após o início da perturbação aplicada na válvula de saída.

A modelagem matemática foi desenvolvida partindo-se dos modelos propostos por (ALMEIDA, 2018; CHAUDHRY, 2014; CHAUDRY et al., 1990; TIJSSELING, A S, 1993). O desenvolvimento ocorre de forma que a solução para escoamentos bifásicos sem IFE apresentado por (CHAUDRY et al., 1990) e as formulações para tratamento do fluido bifásico homogêneo apresentadas em (CHAUDHRY, 2014) são adaptadas e melhoradas para que sejam incorporadas nos modelos com IFE desenvolvidos anteriormente apenas para fluidos monofásicos (ALMEIDA, 2018; TIJSSELING, A S, 1993). Assim, é gerado um modelo matemático aplicável para escoamento bifásicos com IFE, a ser resolvido com a aplicação do Método das Características (MOC) e com posterior aplicação de uma solução numérica.

#### 4.1 Premissas, hipóteses e simplificações adotadas

Serão consideradas as seguintes hipóteses e simplificações para a estrutura da tubulação e para o escoamento:

##### Tubulação

- Tubos retos, esbeltos, de seção circular;
- Os tubos são cercados por um fluido não viscoso de pressão constante, considerando-se que não são restringidos em seu movimento axial;
- O material da parede do tubo é homogêneo, isotrópico, linearmente elástico e sujeito a pequenas deformações;
- A resistência ao movimento radial por inércia, rigidez à flexão e deformação por cisalhamento são ignoradas;
- Mecanismos de amortecimento estrutural e fluido são desconsiderados, exceto o atrito entre fluido e parede do tubo;
- O modelo é unidimensional e há uma coordenada espacial ao longo do eixo central do tubo;
- Abordagem válida para comprimentos de onda longos ou baixas frequências (aproximação de comprimento de onda longo,  $\lambda \gg D$ ); e
- Considera-se tubos de paredes finas (razão  $D/e > 25$ ).

##### Escoamento bifásico

- Considera-se uma mistura homogênea com baixas frações de vazio, conforme modelo proposto e experimento apresentado por (CHAUDRY et al., 1990);
- Para massa específica e compressibilidade do fluido, estabelece-se uma definição de mistura homogênea aplicável para escoamentos bifásicos com fração de vazio baixa e escorregamento insignificante entre as fases;
- O fluido bifásico é considerado como newtoniano com propriedades homogêneas, isotrópicas e linearmente elásticas;
- As condições isotérmicas prevalecem, considerando-se a fase líquida como grande dissipadora de calor; e
- A pressão de ambas as fases é independente da tensão interfacial e da pressão de vapor.

Como assumido para escoamentos de líquidos monofásicos com números de Mach bastante baixos (relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade propagação da onda no meio), os termos de aceleração convectiva também são desprezados (ALMEIDA, 2018; TIJSSELING, A S, 1993). Embora a velocidade de propagação no meio possa ser consideravelmente menor para uma mistura gás-líquido do que para o próprio líquido monofásico, conforme apresentado no capítulo anterior, o modelo proposto também terá como foco casos com o número de Mach ainda baixos, devido às velocidades relativamente pequenas do escoamento, conforme equações fluidas apresentadas em (CHAUDRY et al., 1990). Assim sendo, as velocidades do fluido ( $V$ ) e do tubo ( $\dot{u}_z$ ) são consideradas muito menores que as velocidades da onda no fluido ( $c_f$ ) e no tubo ( $c_t$ ), de modo que os termos convectivos possam ser desprezados nas equações de balanço, como será demonstrado a seguir (chama-se essa hipótese de aproximação acústica, em que  $c_f \gg V$  e  $c_t \gg \dot{u}_z$ ).

## 4.2 Equações do fluido

Na derivação das equações básicas para o fluido, inicialmente será considerado um fluido monofásico conforme formulação de (ALMEIDA, 2018; TIJSSELING, A S, 1993), para que depois sejam incorporados os efeitos do escoamento bifásicos sobre as propriedades do fluido. O ponto de partida são a continuidade bidimensional e as equações de Navier-Stokes expressas nas coordenadas cilíndricas  $z$  (axial) e  $r$  (radial). A coordenada circunferencial ( $\phi$ ) é omitida devido à simetria axial. As equações estão apresentadas abaixo:

### Equação da Continuidade

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho_f}{\partial z} + v_r \frac{\partial \rho_f}{\partial r} + \rho_f \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\rho_f}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (4.1)$$

### Equação do momento na direção axial

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho_f v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho_f v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial z} \\ = F_z + \left( k + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right] \\ + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Equação de movimento na direção radial

$$\begin{aligned}
 \rho_f \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho_f v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \rho_f v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} \\
 = F_r + \left( k + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right] \\
 + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Com  $v_z$  e  $v_r$ , as velocidades axial e radial,  $\rho_f$ , a massa específica do fluido bifásico,  $p$  a pressão,  $F_z$  e  $F_r$ , as densidades de força de corpo axial e radial para o fluido,  $k$  e  $\mu$  a viscosidade volumétrica (*bulk viscosity*) e a viscosidade dinâmica, e  $t$  o tempo. A equação (4.1) representa a conservação da massa; as equações (4.2) e (4.3) são os balanços dos momentos lineares na direção axial e radial, respectivamente, em que a equação (4.1) foi substituída. As variáveis  $\rho_f$ ,  $v_z$ ,  $v_r$  e  $p$  são funções de  $z$ ,  $r$  e  $t$ . A equação de estado relaciona a massa específica com a pressão:

Equação de estado

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial p} = \frac{\rho_f}{K} \tag{4.4}$$

Para o fluido proposto, considerando-se as hipóteses adotadas, compressibilidade e massa específica ( $K$  e  $\rho_f$ ), no lado direito da equação (4.4), são aproximados por valores constantes, produzindo uma relação linear entre massa específica e pressão. Esta hipótese foi assumida como uma simplificação do modelo aplicável para frações de vazio pequenas, com base no modelo proposto por (CHAUDRY et al., 1990). Ainda assim, destaca-se que, conforme mostrado no capítulo 4.6, estas grandezas serão consideradas como variáveis. Na implementação prática do modelo numérico, os coeficientes do modelo são recalculados a cada nova etapa de cálculo, incorporando as oscilações dessas grandezas.

Substituindo as derivadas de  $\rho_f$  na equação de continuidade (4.1) por derivadas de  $p$  (4.4), a variável  $\rho_f$  é eliminada em favor de uma constante  $\rho_f$ . Este procedimento é válido se  $p \ll K$ , o que é considerado admissível para o fluido proposto. Como a velocidade da onda no fluido  $c_f$  é considerada muito maior que as velocidades do fluido  $v_z$  e  $v_r$ , os termos convectivos, ou seja, os segundo e terceiro termos do lado esquerdo das equações (4.1)-(4.3)

podem ser desprezados. O único termo de viscosidade importante é  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial v_z}{\partial r})$ , conforme (CHAUDRY et al., 1990; D'SOUZA, 1964; TIJSSELING, A S, 1993).

A força de corpo axial é devida à gravidade,  $F_z = \rho_f g \text{ sen } \gamma$ , em que  $-\gamma$  é o ângulo de inclinação do tubo com a referência horizontal. As forças radiais de corpo devido à gravidade são omitidas em vista da simetria axial:  $F_r = 0$ . Com as suposições anteriores, as equações básicas (4.1)-(4.3) são simplificadas para:

Equação de continuidade

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (4.5)$$

Equação de movimento na direção axial

$$\rho_f \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_f g \text{ sen } \gamma + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (4.6)$$

Equação de movimento na direção radial

$$\rho_f \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (4.7)$$

Para se chegar a uma formulação unidimensional, de acordo com a teoria clássica do martelo hidráulico, as equações (4.5) e (4.6) são multiplicadas por  $2\pi r$ , integradas em relação a  $r$  de  $0$  a  $R$ , e divididas por  $\pi R^2$ . O resultado é:

Equação de continuidade

$$\frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2}{R} v_r|_{r=R} = 0 \quad (4.8)$$

Equação de movimento na direção axial

$$\rho_f \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = \rho_f g \text{ sen } \gamma + \mu \frac{2}{R} \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (4.9)$$

Em que

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v_z dr \quad (4.10)$$

$$P = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r p \, dr \quad (4.11)$$

Estas são a velocidade e a pressão axial médias em um corte transversal, respectivamente. O último termo da equação (4.9) representa a tensão de cisalhamento,  $\tau_0$ , entre o fluido e a parede do tubo. Para um fluido newtoniano esta tensão de cisalhamento é igual a:

$$\tau_0 = -\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (4.12)$$

A substituição de (4.12) em (4.9) produz:

Equação de movimento na direção axial

$$\rho_f \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = \rho_f g \sin \gamma - \frac{2}{R} \tau_0 \quad (4.13)$$

A equação radial do movimento (4.7) é multiplicada por  $2\pi r^2$ , integrada em relação a  $r$  de 0 a  $R$ , e dividida por  $2\pi R^2$ . O resultado é:

Equação de movimento na direção radial

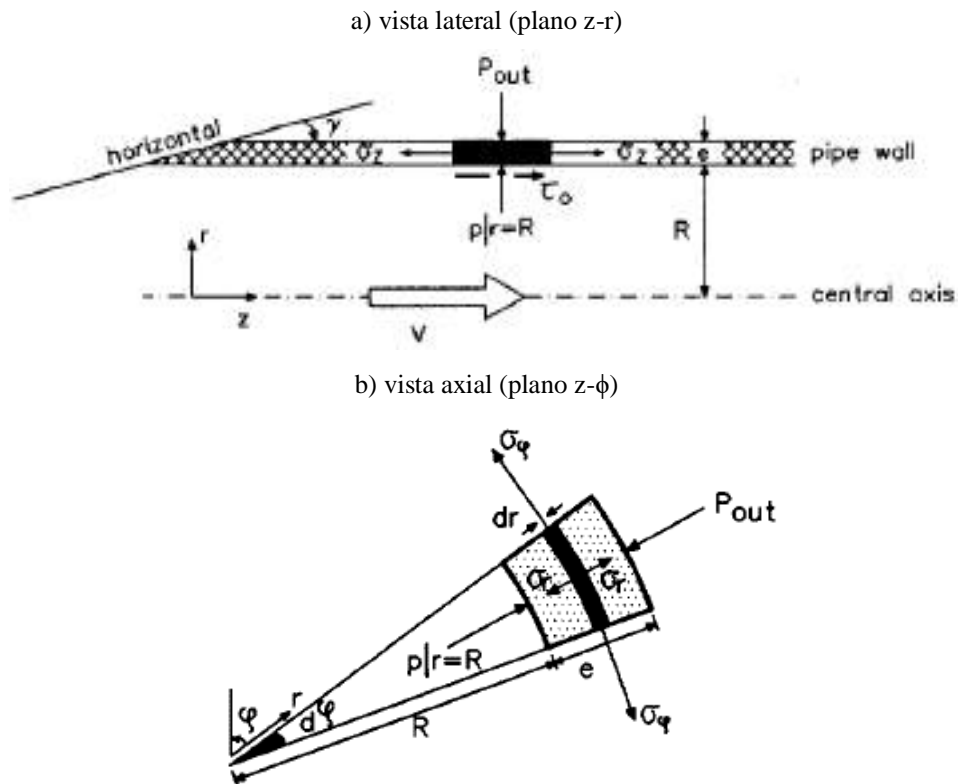
$$\frac{1}{2} \rho_f R \left. \frac{\partial v_r}{\partial t} \right|_{r=R} + p|_{r=R} - P = 0 \quad (4.14)$$

Ao se obter esta equação, assumiu-se que  $r v_r = R v_r|_{r=R}$ , o que está de acordo com a equação de continuidade (4.5), se a compressibilidade for desconsiderada e o influxo axial for concentrado no eixo central por meio de uma fonte pontual (singularidade).

### 4.3 Equações da tubulação

Para a derivação das equações axiais no tubo, segue-se a abordagem de (ALMEIDA, 2018; TIJSSELING, A S, 1993). Considera-se, também conforme os mesmos autores, as simplificações e hipóteses apresentadas no capítulo 4.1. As definições são consideradas conforme apresentadas na Figura 11.

Figura 11 – Esboço de definição da tubulação.



Fonte: Adaptado de TIJSSELING, 1993.

Parte-se das equações bidimensionais de movimento formuladas em coordenadas cilíndricas  $z$  (axial) e  $r$  (radial). A coordenada circunferencial ( $\phi$ ) é omitida devido à simetria axial.

Equação de movimento na direção axial

$$\rho_t \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} + \rho_t \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} + \rho_t \dot{u}_r \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{zr}) + F_z \quad (4.15)$$

Equação de movimento na direção radial

$$\rho_t \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial t} + \rho_t \dot{u}_z \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial z} + \rho_t \dot{u}_r \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_\phi}{r} + F_r \quad (4.16)$$

$\dot{u}_z$  e  $\dot{u}_r$  são as velocidades axial e radial,  $\rho_t$ , a massa específica do material da parede do tubo,  $\sigma_z$  e  $\sigma_r$ , as tensões axial e radial,  $\sigma_\phi$ , a tensão circunferencial,  $\tau_{zr}$  e  $\tau_{rz}$ , as tensões de cisalhamento,  $F_z$  e  $F_r$ , as densidades de força de corpo axial e radial para o tubo, e  $t$  o tempo. As equações (4.15) e (4.16) são os balanços de momento linear nas direções axial e radial. As variáveis  $\dot{u}_z$ ,  $\dot{u}_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  e  $\tau_{zr} = \tau_{rz}$  são funções de  $z$ ,  $r$  e  $t$ . A massa específica  $\rho_t$ , é constante. Os termos convectivos, ou seja, o segundo e terceiro termos do lado esquerdo das equações (4.15) e (4.16), são desprezados (aproximação acústica). A força axial de corpo é devida à gravidade,  $F_z = \rho_t g \text{ sen } \gamma$ , as forças radiais do corpo não são levadas em consideração:  $F_r = 0$ . As equações (4.15) e (4.16) tornam-se:

Equação de movimento na direção axial

$$\rho_t \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{zr}) + \rho_t g \text{ sen } \gamma \quad (4.17)$$

Equação de movimento na direção radial

$$\rho_t \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_\phi}{r} \quad (4.18)$$

Para se chegar a uma formulação unidimensional, as equações acima são multiplicadas por  $2\pi r$ , integradas em relação a  $r$  de  $R$  a  $R+e$ , e divididas por  $2\pi(R+e/2)e$ , sendo  $e$  a espessura da parede do tubo. A força de cisalhamento axialmente simétrica,  $\int_R^{R+e} 2\pi r \tau_{rz} dr$ , que aparece no lado direito da equação (4.18), é omitida na aproximação de comprimento de onda longo, de modo que o resultado é:

Equação de movimento na direção axial

$$\rho_t \frac{\partial \bar{\dot{u}}_z}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{R+e}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e} \tau_{zr}|_{r=R+e} - \frac{R}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e} \tau_{zr}|_{r=R} + \rho_t g \text{ sen } \gamma \quad (4.19)$$



Equação de movimento na direção radial

$$\rho_t \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = \frac{R+e}{\left(R + \frac{e}{2}\right)e} \sigma_r|_{r=R+e} - \frac{R}{\left(R + \frac{e}{2}\right)e} \sigma_r|_{r=R} - \frac{1}{\left(R + \frac{e}{2}\right)} \bar{\sigma}_\phi \quad (4.20)$$

Em que:

$$\bar{u}_z = \frac{1}{2\pi \left(R + \frac{e}{2}\right)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_z dr \quad (4.21)$$

$$\bar{u}_r = \frac{1}{2\pi \left(R + \frac{e}{2}\right)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_r dr \quad (4.22)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{2\pi \left(R + \frac{e}{2}\right)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_z dr \quad (4.23)$$

$$\bar{\sigma}_\phi = \frac{1}{e} \int_R^{R+e} \sigma_\phi dr \quad (4.24)$$

Estes são os valores médios de variáveis  $\dot{u}_z$ ,  $\dot{u}_r$ ,  $\sigma_z$  e  $\sigma_\phi$ .

As equações de movimento relacionam as velocidades axiais com as tensões axiais (4.19) e as velocidades radiais com as tensões circunferenciais (4.20). As relações tensão-deslocamento completarão o modelo matemático. As relações tensão-deformação são fornecidas pela lei de Hooke generalizada. Para um sólido isotrópico tridimensional, as deformações normais  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_\phi$  e  $\varepsilon_r$  dependem linearmente das tensões normais  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\phi$  e  $\sigma_r$ ,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\phi + \sigma_r)] \quad (4.25)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E} [\sigma_\phi - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\phi)] \quad (4.27)$$

Quando invertido:

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_\phi + \varepsilon_r)] \quad (4.28)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_\phi + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_r)] \quad (4.29)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_\phi)] \quad (4.30)$$

Em que  $E$  é o módulo de elasticidade de Young e  $\nu$  é a razão de Poisson. As relações de deslocamento são:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (4.33)$$

A tensão axial  $\sigma_z$ , é expressa em deslocamentos após a substituição de (4.31)-(4.33) em (4.28):

#### Relação tensão-deslocamento axial

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right] \quad (4.34)$$

Diferenciação em relação a  $t$ , multiplicação por  $2\pi r$ , integração em relação a  $r$  de  $R$  para  $R+e$  e divisão por  $2\pi(R+e/2)e$  produz:

Relação tensão-velocidade axial

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial t} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \nu \frac{R+e}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e} \dot{u}_r|_{r=R+e} - \nu \frac{R}{\left(R+\frac{e}{2}\right)e} \dot{u}_r|_{r=R} \right] \quad (4.35)$$

Pode-se observar que esta equação não é a mais apropriada para a presente investigação, conforme condições de acoplamento entre tubulação e fluido (capítulo 4.4). Uma equação alternativa e mais adequada é encontrada substituindo a deformação axial (4.31) na equação (4.25), produzindo:

Relação tensão-deslocamento axial

$$\sigma_z = E \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \sigma_\phi + \nu \sigma_r \quad (4.36)$$

Aplicando a transformação entre (4.34) e (4.35):

Relação tensão-velocidade axial

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial t} = E \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \nu \frac{\partial \bar{\sigma}_\phi}{\partial t} + \nu \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial t} \quad (4.37)$$

Em que:

$$\bar{\sigma}_\phi = \frac{1}{2\pi \left(R+\frac{e}{2}\right)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_\phi dr \quad (4.38)$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{2\pi \left(R+\frac{e}{2}\right)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_r dr \quad (4.39)$$

#### 4.4 Acoplamento fluido-estrutura

As equações do fluido e do tubo são acopladas por meio de condições de contorno que representam o contato entre o fluido e a parede do tubo na interface em  $r = R$ . Fora do tubo, assume-se que uma pressão constante  $P_{out}$  existe. As condições da interface são:

$$\tau_{zr}|_{r=R} = -\tau_0 \quad \tau_{zr}|_{r=R+e} = 0 \quad (4.40)$$

$$\sigma_r|_{r=R} = -p|_{r=R} \quad \sigma_r|_{r=R+e} = -P_{out} \quad (4.41)$$

$$\dot{u}_r|_{r=R} = v_r|_{r=R} \quad \dot{u}_r|_{r=R+e} = (v_r)_{out} \quad (4.42)$$

Em que  $(v_r)_{out}$  é a velocidade radial do fluido externo, normalmente ar. As condições dinâmicas (4.40) e (4.41) fornecem, respectivamente, as tensões de cisalhamento e as pressões do fluido que atuam na parede do tubo. As condições cinemáticas (4.42) estão relacionadas à aderência do sólido e do fluido. Exceto por sua pressão constante  $P_{out}$ , o fluido externo não é modelado, de modo que  $(v_r)_{out}$  não é conhecido. Por esta razão, e porque o fluido dentro do tubo não será modelado bidimensionalmente, as relações (4.42) não fornecem condições de contorno adequadas para as equações do tubo. Portanto, a equação (4.35) foi substituída pela equação (4.37), que é apropriada para a abordagem unidimensional do presente estudo.

As condições (4.40) e (4.41) são substituídas nas equações de movimento axial (4.19) e radial (4.20) do tubo. A condição (4.42), em  $r = R$ , é substituída nas equações do fluido (4.8) e (4.14). Após as substituições e um rearranjo dos termos, restam oito equações básicas para as oito variáveis  $P$ ,  $V$ ,  $\sigma_z$ ,  $\bar{u}_z$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $u_r$ ,  $\sigma_r$ , e  $P|_{r=R}$ . As oito equações derivam, sucessivamente, das equações (4.13), (4.8), (4.19), (4.37), (4.14), (4.20), (4.26)+(4.32) e (4.27)+(4.33).

Fluido, axial

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \sin \gamma \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{R} \dot{u}_r|_{r=R} = 0 \quad (4.44)$$

Tubulação, axial

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = \frac{R}{\rho_t \left(R + \frac{e}{2}\right) e} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial t} + \frac{\nu}{E} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\sigma}_\phi + \bar{\sigma}_r) = 0 \quad (4.46)$$

Fluido, radial

$$p|_{r=R} = P - \frac{1}{2} \rho_f R \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial t} \Big|_{r=R} \quad (4.47)$$

Tubulação, radial

$$\rho_t \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = - \frac{R + e}{\left(R + \frac{e}{2}\right) e} P_{out} + \frac{R}{\left(R + \frac{e}{2}\right) e} p|_{r=R} - \frac{1}{R + \frac{e}{2}} \bar{\sigma}_\phi \quad (4.48)$$

$$u_r = \frac{r}{E} [\sigma_\phi - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\phi)] \quad (4.50)$$

A substituição da expressão (4.47) em (4.48) produz:

Equação de movimento na direção radial

$$\rho_t \left(R + \frac{e}{2}\right) e \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_f R^2 \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial t} \Big|_{r=R} = RP - (R + e)P_{out} - e\bar{\sigma}_\phi \quad (4.51)$$

A substituição da expressão (4.49) em (4.44) produz:

Equação de continuidade

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{E} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_\phi|_{r=R} - \nu\sigma_z|_{r=R} - \nu\sigma_r|_{r=R}) = 0 \quad (4.52)$$

#### 4.5 Modelo de quatro equações

Neste capítulo, será apresentado o desenvolvimento do modelo de quatro equações diferenciais parciais para a solução dos transitórios hidráulicos, partindo das deduções detalhadas nos capítulos anteriores, conforme apresentado por (TIJSSELING, A S, 1993).

Para comprimentos de onda longos, a aceleração na direção radial é desprezível, de modo que os termos de inércia radial na equação (4.51) podem ser omitidos. Apresenta-se uma relação quase estática entre a tensão circunferencial e a pressão interna:

$$\overline{\sigma}_\phi = \frac{R}{e} P - \frac{(R + e)}{e} P_{out} \quad (4.53)$$

Desprezar-se a inércia radial do fluido significa que  $p$  é igual a  $P$ : a pressão é constante ao longo da seção transversal do tubo. Além disso, conforme demonstrado no apêndice A de (TIJSSELING, A S, 1993), considera-se também as seguintes relações:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\sigma}_\phi + \overline{\sigma}_r) = \frac{R}{e} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{e}{R}} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_\phi|_{r=R}) = \left( \frac{R}{e} + \frac{1 + \frac{e}{R}}{2 + \frac{e}{R}} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.55)$$

A equação (4.54) é substituída em (4.46), e a equação (4.55), juntamente com  $\sigma_r|_{r=R} = -P$ , é substituída em (4.52). A dependência  $r$  de  $\varepsilon_z$  e, portanto, de  $\sigma_z$ , é considerada pequena, o que significa que a seção transversal do tubo permanece quase plana quando se deforma axialmente. A grandeza  $\sigma_z|_{r=R}$  na equação (4.52) então pode ser substituída por  $\overline{\sigma}_z$ . Observe que  $\sigma_\phi + \sigma_r$ , quando gerados por uma pressão interna  $P$ , são uma função de  $z$  e  $t$  apenas, de modo que, de acordo com a equação (4.36), as tensões radiais e circunferenciais não produzem uma tensão  $\sigma_z$  dependente de  $r$ . Assim, restam quatro equações básicas, (4.43), (4.52), (4.45), (4.46), para as quatro incógnitas  $P$ ,  $V$ ,  $\overline{\sigma}_z$  e  $\overline{u}_z$ :

Fluido, axial

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \sin \gamma \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \left[ \frac{1}{K} + \frac{2}{E} \left( \frac{R}{e} + \frac{1 + \frac{e}{R}}{2 + \frac{e}{R}} + \nu \right) \right] \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial t} = 0 \quad (4.57)$$

Tubulação, axial

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = \frac{R}{\rho_t \left( R + \frac{e}{2} \right) e} \tau_0 + g \sin \gamma \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial t} + \frac{\nu R}{Ee} \frac{1}{1 + \frac{e}{2R}} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (4.59)$$

A propagação acoplada de ondas de pressão no fluido e ondas de tensão axial na parede do tubo é descrita pelas quatro equações (4.56)-(4.59). Estas equações são válidas inclusive para tubos de paredes espessas; as tensões do tubo e as velocidades do tubo são calculadas como média sobre a área da parede da seção transversal. Fazendo-se a suposição de que os tubos são de paredes finas:  $e \ll R$ , as tensões radiais são então pequenas em comparação com as tensões circunferenciais e axiais (estado plano de tensão), produzindo:

$$\bar{\sigma}_\phi = \frac{R}{e} P \quad (4.60)$$

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{3}{4} P \quad (4.61)$$

Em que  $\bar{\sigma}_\phi$ ,  $\bar{\sigma}_r$  e  $P$  são relativas à pressão externa  $P_{out}$ :  $\bar{\sigma}_\phi = (\bar{\sigma}_\phi)_{abs} + P_{out}$ ,  $\bar{\sigma}_r = (\bar{\sigma}_r)_{abs} + P_{out}$  e  $P = P_{abs} - P_{out}$  (abs = absoluta). A seguir, todas as pressões e tensões são relativas à pressão externa  $P_{out}$ . Além disso, as linhas sobrepostas, que indicam valores médios das variáveis do tubo, são omitidas, uma vez que as variações com  $r$  são desprezíveis em paredes finas. Com  $e \ll R$ , as equações (4.56)-(4.59) se tornam:

Fluido

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \left( \frac{1}{K} + \frac{2R}{Ee} \right) \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{2\nu}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = 0 \quad (4.63)$$

Tubulação

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{R}{\rho_t \left( R + \frac{e}{2} \right) e} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + \frac{\nu R}{Ee} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (4.65)$$

Estas são as equações básicas para tubos de paredes finas. As relações tensão-deslocamento para tubos de paredes finas seguem as equações (4.28), (4.29), (4.31) e (4.32) com  $\sigma_z$  desprezado e  $r = R$ :

$$\sigma_z = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \frac{u_r}{R} \right) \quad (4.66)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{u_r}{R} + \nu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (4.67)$$

Com  $\sigma_\phi$  conforme (4.60),  $r = R$  e, novamente desprezando-se  $\sigma_r$ , o deslocamento radial dado pela equação (4.49) se transforma em:

$$u_r = \frac{R^2}{Ee} P - \frac{\nu R}{E} \sigma_z \quad (4.68)$$

As equações básicas (4.62)-(4.65) podem ser escritas de formas diferentes. A forma específica usada no presente trabalho será apresentada a seguir.

O termo  $\sigma_z$  na equação (4.63) é substituído por um termo  $\dot{u}_z$  com auxílio da equação (4.65) e a razão entre a área do escoamento e a área da parede da tubulação,  $A_f/A_t$ , é aproximada por  $R/(2e)$ . Assim, as equações (4.62)-(4.65) são reescritas como:



Fluido

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho_f c_F^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \quad (4.70)$$

Tubulação

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} - \frac{1}{\rho_t} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\rho_f A_f}{\rho_t A_t} \frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} - \frac{1}{\rho_t c_t^2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = -\frac{\nu R}{Ee} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.72)$$

Em que

$$c_F^2 = \left[ \rho_f \left( \frac{1}{K} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \right]^{-1} \quad (4.73)$$

$$c_t^2 = \frac{E}{\rho_t} \quad (4.74)$$

As definições (4.73) e (4.74) correspondem, respectivamente, às velocidades clássicas de propagação das ondas de pressão no fluido e de tensão na tubulação.

#### 4.6 Propriedades do escoamento bifásico homogêneo

Conforme apontado anteriormente, uma mistura gás-líquido tem seus módulos de compressibilidade  $K$  e massa específica  $\rho_f$  variáveis. Com base em (CHAUDHRY, 2014), podem ser derivadas as equações para essas duas grandezas. É importante lembrar que as seguintes hipóteses são adotadas:

- A mistura gás-líquido é homogênea, ou seja, as bolhas de gás estão distribuídas uniformemente no líquido;
- As bolhas de gás seguem uma lei isotérmica; e
- A pressão dentro da bolha é independente da tensão superficial e da pressão de vapor.

Considerando-se um volume de mistura gás-líquido à pressão  $p_o$  confinado em um tubo elástico e deixando que a pressão seja instantaneamente alterada por  $dp$  (o aumento de pressão é positivo e a queda de pressão é negativa), não incluindo a dilatação do tubo (já considerada no equacionamento do capítulo 4.5) tem-se:

$$dV_m = dV_g + dV_l \quad (4.75)$$

Em que os subscritos  $m$ ,  $g$  e  $l$ , respectivamente, referem-se às quantidades para a mistura gás-líquido, gás e líquido. O símbolo  $V$  representa volume e a letra  $d$  indica uma mudança no volume devido à mudança na pressão,  $dp$ . Por exemplo,  $dV_g$  é a mudança no volume de gás,  $V_g$ . Considerando-se:

$$V_m = V_l + V_g \quad (4.76)$$

Define-se a fração de vazio como:

$$\alpha = \frac{V_g}{V_m} \quad (4.77)$$

Como  $V_g$  é uma função da pressão  $p$ , segue da equação (4.77) que  $\alpha$  também é uma função de  $p$ . Se a expansão da bolha segue uma lei isotérmica, então:

$$\alpha p = \alpha_0 p_0 \quad (4.78)$$

Em que o subscrito  $o$  indica as condições iniciais, e as variáveis sem subscrito referem-se às condições na pressão  $p$ . Se  $M$  e  $\rho$  são a massa e a massa específica, então:

$$M_m = M_l + M_g \quad (4.79)$$

Segue das equações (4.76) e (4.77):

$$V_l = (1 - \alpha)V_m \quad (4.80)$$

Dividindo (4.79) por  $V_m$  e fazendo uso das equações (4.77) e (4.80), pode-se escrever a equação (4.81). Considerando (4.78) e  $pV_g = p_0V_{g0}$ , escreve-se:

$$\rho_f = \rho_l(1 - \alpha) + \alpha\rho_g \quad (4.81)$$

ou

$$\rho_f = \rho_l(1 - \alpha) + \alpha_0\rho_{g0} \quad (4.82)$$

Escrevem-se agora as expressões para  $dV_g$  e  $dV_l$ . Se a fração de vazio é pequena e  $K_l$  é o módulo de elasticidade do líquido, então:

$$dV_l = -V_m \frac{dp}{K_l} \quad (4.83)$$

Se as bolhas de gás seguem a lei isotérmica,  $pV_g = p_0V_{g0}$ . Diferenciando esta equação, obtém-se:

$$dV_g = -V_g \frac{dp}{p} \quad (4.84)$$

Considerando-se que  $v_g = p_o v_{go}/p$  e  $v_{go} = \alpha_o v_m$ , a equação (4.84) se torna:

$$dv_g = -\frac{\alpha_o p_o}{p^2} v_m dp \quad (4.85)$$

O módulo de compressibilidade da mistura gás-líquido,  $K$ , pode ser definido como:

$$K = \frac{dp}{-\frac{dv_m}{v_m}} \quad (4.86)$$

Substituindo expressões para  $dv_l$  e  $dv_g$  das equações (4.83) e (4.85) em (4.75), substituindo a expressão resultante para  $dv_m$  em (4.86), considerando (4.78), simplificando e sendo  $p$  considerado como pressão absoluta, obtém-se:

$$K = \frac{1}{\frac{\alpha}{p} + \frac{1}{K_l}} \quad (4.87)$$

As equações (4.81), (4.82) e (4.87) descrevem  $\rho_f$  e  $K$  variáveis, a serem consideradas no equacionamento do capítulo 4.5, juntamente com a equação (4.78) para  $\alpha$  variável.

## 4.7 Modelos de atrito

### 4.7.1 Modelo de atrito estático

Considerando-se o modelo estático de atrito, a tensão de cisalhamento  $\tau_o$  é assumida como sendo a mesma de um escoamento estável. Em termos do fator de atrito de Darcy-Weisbach, o atrito  $\tau_o$  indicado nas equações de balanço (4.69) e (4.71) é composto apenas pelo atrito estático  $\tau_s$ , definido como:

$$\tau_o = \tau_s = \rho_f f \frac{V_{rel}|V_{rel}|}{8} \quad (4.88)$$

Em que  $V_{rel}$  é a velocidade relativa unidimensional  $V - \overline{u_z}$  entre o líquido e a parede do tubo. A expressão (4.88) é obtida da relação de Darcy-Weisbach,  $\Delta P = f \rho_f (L/D)(V^2/2)$ , e do equilíbrio de forças  $\Delta P (\pi D^2)/4 = \tau_o \pi D L$ , eliminando-se  $\Delta P$ .  $\Delta P$  é a diferença de pressão existente em uma seção de tubo horizontal, de comprimento  $L$  e diâmetro  $D$ .  $f$  é o fator de atrito de Moody.

A equação (4.88) é importante para a determinação das condições iniciais estacionárias em que se estabelece um gradiente de pressão inicial. A equação (4.88) representa de forma mais correta os inícios dos transitórios, em que os efeitos do atrito são menos importantes. Conforme apresentado anteriormente, o fator de atrito  $f$  será considerado como constante.

### 4.7.2 Modelo de atrito transitório

O modelo de aceleração instantânea de Vítkovský foi escolhido para representar o termo de atrito transiente, com base no recente estudo realizado (ABDELDAYEM et al., 2021), em que o mesmo é apontado como o melhor modelo, dentre diversos critérios avaliados. O modelo, representa a parcela do atrito dinâmico (transiente)  $\tau_u$  a ser somada ao atrito estático  $\tau_s$ , para compor o termo de atrito  $\tau_o$  das equações de balanço (4.69) e (4.71):

$$\tau_u = \frac{\rho_f R}{2} \left[ K_{ut} \frac{\partial V_{rel}}{\partial t} + K_{ux} \text{Sinal}(V_{rel}) c_F \left| \frac{\partial V_{rel}}{\partial z} \right| \right] \quad (4.89)$$

Em que  $c_F$  é a celeridade da onda no fluido,  $z$  é a variável de comprimento,  $t$  é a variável do tempo, o termo (*Sinal*) fornece o sinal certo do termo de convecção para todos

os escoamentos potenciais, em aceleração ou desaceleração,  $K_{ut}$  e  $K_{ux}$  são os dois coeficientes de ajuste relacionados às acelerações local e convectiva, respectivamente. Considera-se uma variação típica de 0,025 a 0,053 para  $K_{ux}$  e de 0,006 a 0,057 para  $K_{ut}$ , conforme (CHAUDHRY, 2014).

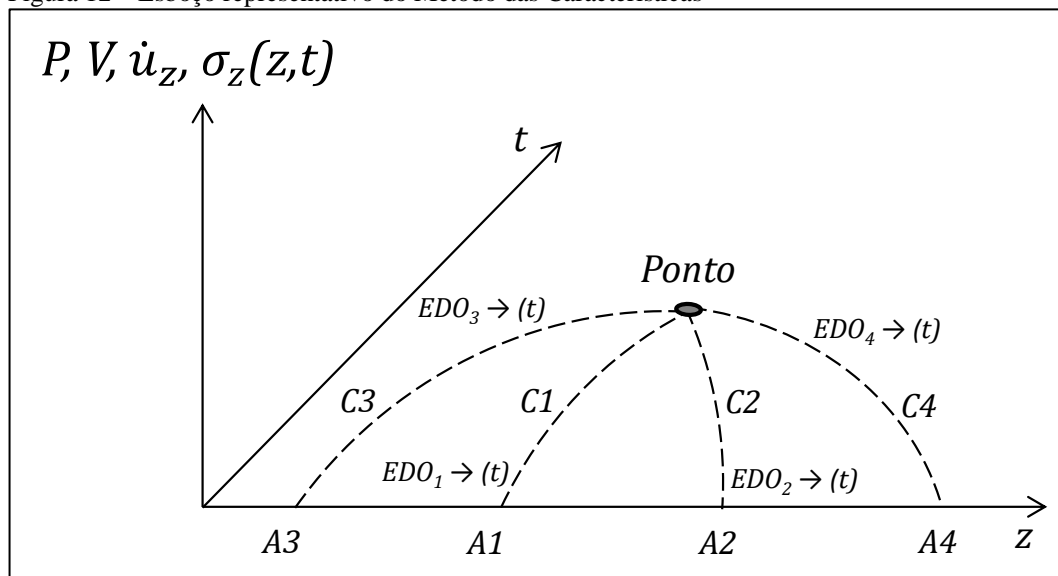
A implementação do modelo se dará de forma que as derivadas parciais sejam substituídas por diferenças finitas de primeira ordem no modelo numérico, de forma similar ao que foi feito por (XING; SELA, 2020) e por (ABDELDAYEM et al., 2021). Desta forma, não são alteradas as equações de compatibilidade MOC (4.114)-(4.120) obtidas das equações de balanço (4.69)-(4.72).

#### 4.8 Apresentação e aplicação do Método das Características (MOC)

O Método das Características (MOC) é um método de solução matemática para sistemas hiperbólicos de equações diferenciais parciais, baseado nos invariantes de Riemann, em que são estabelecidas curvas características no domínio, de forma que sobre essas curvas as equações do sistema possam ser reescritas como derivadas totais com relação à variável de interesse, o que facilita a solução para diversos casos. Aplicando-se este método nas equações definidas no sistema de quatro equações apresentado (4.69)-(4.72), busca-se estabelecer as curvas no domínio em que este sistema poderá ser reescrito como um sistema de equações diferenciais totais.

Na Figura 12, é possível observar de forma gráfica as curvas C1, C2, C3 e C4 definidas no domínio espaço-tempo, e que se ligam em um determinado ponto no domínio, onde se pretende calcular as variáveis de interesse (considera-se a tubulação alinhada com o eixo Z). Sobre estas curvas apresentadas, as equações diferenciais parciais do fenômeno são reconfiguradas aplicando-se o MOC, para que possuam derivadas somente em relação ao tempo, transformando-se em equações diferenciais totais com relação ao tempo.

Figura 12 – Esboço representativo do Método das Características



Fonte: Autor.

A seguir, será explicada a transformação matemática do método, conforme proposto por (TIJSSELING, A S, 1993), assumindo-se as hipóteses descritas no capítulo 4.1. Primeiramente, estabelece-se a forma matricial das equações do problema:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} = \mathbf{r} \quad (4.90)$$

Em que:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} V \\ P \\ \dot{u}_z \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_f c_F^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu R}{E e} & 0 & -\frac{1}{\rho_t c_t^2} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_f} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\rho_t} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \\ 0 \\ \frac{\rho_f A_f}{\rho_t A_t} \frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

A equação característica  $|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A}| = 0$  deve ser solucionada ou, de forma equivalente, os autovalores da matriz  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  devem ser encontrados. Os autovalores são calculados a partir da solução da equação formada pelo determinante:

$$\frac{2R\lambda^2\nu^2}{c_t^2 e \rho_t^2} - \frac{1}{\rho_f \rho_t} + \frac{\lambda^2}{c_F^2 \rho_f \rho_t} + \frac{\lambda^2}{c_t^2 \rho_f \rho_t} - \frac{\lambda^4}{c_F^2 c_t^2 \rho_f \rho_t} = 0 \quad (4.95)$$



Resolvendo-se a equação (4.95), os autovalores  $\lambda$  são obtidos:

$$\lambda_1 = +\tilde{c}_F, \quad \lambda_2 = -\tilde{c}_F, \quad \lambda_3 = +\tilde{c}_t, \quad \lambda_4 = -\tilde{c}_t \quad (4.96)$$

Considerando-se:

$$\tilde{c}_F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c_F^2 + c_t^2 - \left[ -4 c_F^2 c_t^2 + \left( c_F^2 + c_t^2 + \frac{2c_F^2 R v^2 \rho_f}{e \rho_t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2c_F^2 R v^2 \rho_f}{e \rho_t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4.97)$$

$$\tilde{c}_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left( c_F^2 + c_t^2 + \left[ -4 c_F^2 c_t^2 + \left( c_F^2 + c_t^2 + \frac{2c_F^2 R v^2 \rho_f}{e \rho_t} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2c_F^2 R v^2 \rho_f}{e \rho_t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4.98)$$

Como os valores de  $\lambda$  são tratados como distintos e reais (considerando-se baixa fração de vazio), o sistema (4.69)-(4.72) é hiperbólico. Nesse caso, pode ser convenientemente transformado, através da multiplicação por uma matriz regular T:

$$\mathbf{TA} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \mathbf{TB} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} = \mathbf{Tr} \quad (4.99)$$

Sabe-se que para toda matriz quadrada com autovalores reais distintos, como  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ , existe uma matriz  $\mathbf{S}$  tal que:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} \quad (4.100)$$

Em que  $\Lambda$  é a matriz diagonal:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

A matriz  $\mathbf{T}$  é então escolhida convenientemente, da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (4.102)$$

A substituição de (4.102) em (4.100), leva à próxima condição para  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} \mathbf{B} = \Lambda \mathbf{T} \mathbf{A} \quad (4.103)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , que satisfaz a condição (4.103) para as matrizes específicas  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dadas por (4.92) e (4.93), é determinada resolvendo-se o sistema de equações formado:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_f} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\rho_t} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_f c_F^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu R}{E e} & 0 & -\frac{1}{\rho_t c_t^2} \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Considerando-se os autovalores obtidos em (4.96):

$$\begin{bmatrix} t_{12} - t_{11}\tilde{c}_F & -\frac{t_{12}\tilde{c}_F}{c_F^2\rho_f} - \frac{\nu R t_{14}\tilde{c}_F}{eE} + \frac{t_{11}}{\rho_f} & -t_{13}\tilde{c}_F - 2\nu t_{12} + t_{14} & \frac{t_{14}\tilde{c}_F}{c_t^2\rho_t} - \frac{t_{13}}{\rho_t} \\ t_{21}\tilde{c}_F + t_{22} & \frac{t_{22}\tilde{c}_F}{c_F^2\rho_f} + \frac{\nu R t_{24}\tilde{c}_F}{eE} + \frac{t_{21}}{\rho_f} & t_{23}\tilde{c}_F - 2\nu t_{22} + t_{24} & -\frac{t_{24}\tilde{c}_F}{c_t^2\rho_t} - \frac{t_{23}}{\rho_t} \\ t_{32} - t_{31}\tilde{c}_t & -\frac{t_{32}\tilde{c}_t}{c_F^2\rho_f} - \frac{\nu R t_{34}\tilde{c}_t}{eE} + \frac{t_{31}}{\rho_f} & -t_{33}\tilde{c}_t - 2\nu t_{32} + t_{34} & \frac{t_{34}\tilde{c}_t}{c_t^2\rho_t} - \frac{t_{33}}{\rho_t} \\ t_{41}\tilde{c}_t + t_{42} & \frac{t_{42}\tilde{c}_t}{c_F^2\rho_f} + \frac{\nu R t_{44}\tilde{c}_t}{eE} + \frac{t_{41}}{\rho_f} & t_{43}\tilde{c}_t - 2\nu t_{42} + t_{44} & -\frac{t_{44}\tilde{c}_t}{c_t^2\rho_t} - \frac{t_{43}}{\rho_t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.105)$$

Verificando-se que se trata de um sistema linearmente dependente, omite-se a segunda equação nas duas primeiras linhas, e a última equação nas duas últimas linhas, e define-se, no lugar das equações, que  $t_{12} = \tilde{c}_F$ ,  $t_{22} = -\tilde{c}_F$ ,  $t_{34} = \tilde{c}_t$ ,  $t_{44} = -\tilde{c}_t$ . Assim, o seguinte sistema é produzido:

$$\begin{bmatrix} t_{12} - t_{11}\tilde{c}_F & 0 & -t_{13}\tilde{c}_F - 2\nu t_{12} + t_{14} & \frac{t_{14}\tilde{c}_F}{c_t^2\rho_t} - \frac{t_{13}}{\rho_t} \\ t_{21}\tilde{c}_F + t_{22} & 0 & t_{23}\tilde{c}_F - 2\nu t_{22} + t_{24} & -\frac{t_{24}\tilde{c}_F}{c_t^2\rho_t} - \frac{t_{23}}{\rho_t} \\ t_{32} - t_{31}\tilde{c}_t & -\frac{t_{32}\tilde{c}_t}{c_F^2\rho_f} - \frac{\nu R t_{34}\tilde{c}_t}{eE} + \frac{t_{31}}{\rho_f} & -t_{33}\tilde{c}_t - 2\nu t_{32} + t_{34} & 0 \\ t_{41}\tilde{c}_t + t_{42} & \frac{t_{42}\tilde{c}_t}{c_F^2\rho_f} + \frac{\nu R t_{44}\tilde{c}_t}{eE} + \frac{t_{41}}{\rho_f} & t_{43}\tilde{c}_t - 2\nu t_{42} + t_{44} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.106)$$

Resolvendo o sistema (4.106), a matriz  $\mathbf{T}$  é encontrada:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{c}_F & -\frac{2\nu\tilde{c}_F^2}{\tilde{c}_F^2 - c_t^2} & \frac{2c_t^2\nu\tilde{c}_F}{c_t^2 - \tilde{c}_F^2} \\ 1 & -\tilde{c}_F & -\frac{2\nu\tilde{c}_F^2}{\tilde{c}_F^2 - c_t^2} & -\frac{2c_t^2\nu\tilde{c}_F}{c_t^2 - \tilde{c}_F^2} \\ \frac{c_F^2\nu\rho_f R\tilde{c}_t^2}{eE(c_F^2 - \tilde{c}_t^2)} & \frac{c_F^2\nu\rho_f R\tilde{c}_t^3}{eE(c_F^2 - \tilde{c}_t^2)} & \tilde{c}_t \left( \frac{2c_F^2\nu^2\rho_f R\tilde{c}_t}{eE(\tilde{c}_t^2 - c_F^2)} + \frac{1}{\tilde{c}_t} \right) & \tilde{c}_t \\ \frac{c_F^2\nu\rho_f R\tilde{c}_t^2}{eE(c_F^2 - \tilde{c}_t^2)} & -\frac{c_F^2\nu\rho_f R\tilde{c}_t^3}{eE(c_F^2 - \tilde{c}_t^2)} & \tilde{c}_t \left( \frac{2c_F^2\nu^2\rho_f R\tilde{c}_t}{eE(\tilde{c}_t^2 - c_F^2)} + \frac{1}{\tilde{c}_t} \right) & -\tilde{c}_t \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Com a condição (4.103), a equação (4.99) se torna:

$$\mathbf{TA} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda TA} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} = \mathbf{Tr} \quad (4.108)$$

Apresentando-se o vetor:

$$\mathbf{v} = \mathbf{TA} \mathbf{y} \quad (4.109)$$

A equação (4.108) se torna:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{Tr} \quad (4.110)$$

Finalmente, o sistema básico (4.90) se torna equivalente a um conjunto de quatro equações:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial z} = (\mathbf{Tr})_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.111)$$

Cada uma das equações (4.111) se transforma em uma equação diferencial ordinária (4.112), quando é considerado o caminho ao longo de uma linha no plano  $z-t$  com uma direção característica (4.113):

$$\frac{dv_i}{dt} = (\mathbf{Tr})_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.112)$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.113)$$

As equações (4.112) são conhecidas como equações de compatibilidade ao longo das linhas características (4.113), com inclinações  $1/\lambda_i$  no plano  $z-t$ .

É importante destacar que, com base nas hipóteses assumidas, esta transformação foi realizada considerando-se os coeficientes constantes, e as celeridades foram aproximadas com módulos iguais, e também constantes, tanto para o fluido quanto

para a tubulação ( $|\lambda_1| \approx |\lambda_2|$  e  $|\lambda_3| \approx |\lambda_4|$ ), estabelecendo-se linhas características retas, a priori. Porém, para um escoamento bifásico, sabe-se que o módulo das celeridades varia conforme as condições de escoamento (com base no capítulo 4.6), e as linhas características passam a representar caminhos curvos (variáveis) no domínio espaço-tempo. Para incorporar o comportamento variável das propriedades, os coeficientes de cada equação de compatibilidade serão tratados como variáveis, sendo atualizados conforme a condição de escoamento, e as linhas características atualizadas com base em valores médios das propriedades relacionadas, para cada *step* de cálculo.

As equações de compatibilidade e linhas características estão apresentadas de (4.114) a (4.121), adotando-se índices ( $i$  de 1 a 4), para as derivadas de interesse  $(\left(\frac{dV}{dt}\right)_i; \left(\frac{dP}{dt}\right)_i; \left(\frac{d\dot{u}_z}{dt}\right)_i; \left(\frac{d\sigma_z}{dt}\right)_i)$  e para as propriedades médias variáveis  $(\rho_f|_i; c_F|_i; \tilde{c}_F|_i; \tilde{c}_t|_i)$ , conforme cada equação de compatibilidade e linha característica. A definição da forma de obtenção dos valores médios das propriedades, a ser atualizado em cada *step* de cálculo, está detalhada na apresentação do modelo numérico (capítulo 5).

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dt}\right)_1 + \frac{1}{c_F|_1} \left[ \frac{1}{\rho_f|_1} \left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_F|_1}\right) + 2v^2 \frac{R}{e} \frac{1}{\rho_t} \frac{\frac{(c_F|_1 \tilde{c}_F|_1)}{c_t^2}}{1 - \left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_t}\right)^2} \right] \left(\frac{dP}{dt}\right)_1 + 2v \frac{\left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_t}\right)^2}{1 - \left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_t}\right)^2} \left(\frac{d\dot{u}_z}{dt}\right)_1 \\ - \frac{2v}{\rho_t \tilde{c}_F|_1} \frac{\left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_t}\right)^2}{1 - \left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_t}\right)^2} \left(\frac{d\sigma_z}{dt}\right)_1 \\ = - \frac{2}{\rho_f|_1 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \\ + 2v \frac{\left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_t}\right)^2}{1 - \left(\frac{\tilde{c}_F|_1}{c_t}\right)^2} \left( \frac{\rho_f|_1 A_f}{\rho_t A_t} \frac{2}{\rho_f|_1 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\text{na linha aproximada: } \frac{dz}{dt} = \tilde{c}_F|_1 \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{dV}{dt} \right)_2 - \frac{1}{c_F|_2} \left[ \frac{1}{\rho_f|_2} \left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_F|_2} \right) + 2v^2 \frac{R}{e} \frac{1}{\rho_t} \frac{\frac{(c_F|_2 \tilde{c}_F|_2)}{c_t^2}}{1 - \left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_t} \right)^2} \right] \left( \frac{dP}{dt} \right)_2 \\
& + 2v \frac{\left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_t} \right)^2}{1 - \left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_t} \right)^2} \left( \frac{d\dot{u}_z}{dt} \right)_2 + \frac{2v}{\rho_t \tilde{c}_F|_2} \frac{\left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_t} \right)^2}{1 - \left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_t} \right)^2} \left( \frac{d\sigma_z}{dt} \right)_2 \\
& = -\frac{2}{\rho_f|_2 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \\
& + 2v \frac{\left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_t} \right)^2}{1 - \left( \frac{\tilde{c}_F|_2}{c_t} \right)^2} \left( \frac{\rho_f|_2 A_f}{\rho_t A_t} \frac{2}{\rho_f|_2 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \right)
\end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\text{na linha aproximada: } \frac{dz}{dt} = -\tilde{c}_F|_2 \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
& -v \frac{R \rho_f|_3}{e \rho_t} \frac{\left( \frac{c_F|_3}{c_t} \right)^2}{1 - \left( \frac{c_F|_3}{\tilde{c}_t|_3} \right)^2} \left( \frac{dV}{dt} \right)_3 - v \frac{R}{e} \frac{1}{\rho_t} \frac{1}{c_t} \frac{\tilde{c}_t|_3}{c_t} \frac{\left( \frac{c_F|_3}{\tilde{c}_t|_3} \right)^2}{1 - \left( \frac{c_F|_3}{\tilde{c}_t|_3} \right)^2} \left( \frac{dP}{dt} \right)_3 \\
& + \left[ 1 + 2v^2 \frac{R \rho_f|_3}{e \rho_t} \frac{\left( \frac{c_F|_3}{c_t} \right)^2}{1 - \left( \frac{c_F|_3}{\tilde{c}_t|_3} \right)^2} \right] \left( \frac{d\dot{u}_z}{dt} \right)_3 - \frac{1}{\rho_t c_t} \frac{\tilde{c}_t|_3}{c_t} \left( \frac{d\sigma_z}{dt} \right)_3 \\
& = \left[ 1 + 2v^2 \frac{R \rho_f|_3}{e \rho_t} \frac{\left( \frac{c_F|_3}{c_t} \right)^2}{1 - \left( \frac{c_F|_3}{\tilde{c}_t|_3} \right)^2} \right] \left( \frac{\rho_f|_3 A_f}{\rho_t A_t} \frac{2}{\rho_f|_3 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \right) \\
& + v \frac{R \rho_f|_3}{e \rho_t} \frac{\left( \frac{c_F|_3}{c_t} \right)^2}{1 - \left( \frac{c_F|_3}{\tilde{c}_t|_3} \right)^2} \left( \frac{2}{\rho_f|_3 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \right)
\end{aligned} \tag{4.118}$$

$$\text{na linha aproximada: } \frac{dz}{dt} = \tilde{c}_t|_3 \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned}
& -v \frac{R \rho_f|_4}{e \rho_t} \frac{\left(\frac{c_F|_4}{c_t}\right)^2}{1 - \left(\frac{c_F|_4}{\tilde{c}_t|_4}\right)^2} \left(\frac{dV}{dt}\right)_4 + v \frac{R}{e} \frac{1}{\rho_t} \frac{1}{c_t} \frac{\tilde{c}_t|_4}{c_t} \frac{\left(\frac{c_F|_4}{\tilde{c}_t|_4}\right)^2}{1 - \left(\frac{c_F|_4}{\tilde{c}_t|_3}\right)^2} \left(\frac{dP}{dt}\right)_4 \\
& + \left[ 1 + 2v^2 \frac{R \rho_f|_4}{e \rho_t} \frac{\left(\frac{c_F|_4}{c_t}\right)^2}{1 - \left(\frac{c_F|_4}{\tilde{c}_t|_4}\right)^2} \right] \left(\frac{d\dot{u}_z}{dt}\right)_4 + \frac{1}{\rho_t c_t} \frac{\tilde{c}_t|_4}{c_t} \left(\frac{d\sigma_z}{dt}\right)_4 \\
& = \left[ 1 + 2v^2 \frac{R \rho_f|_4}{e \rho_t} \frac{\left(\frac{c_F|_4}{c_t}\right)^2}{1 - \left(\frac{c_F|_4}{\tilde{c}_t|_4}\right)^2} \right] \left( \frac{\rho_f|_4 A_f}{\rho_t A_t} \frac{2}{\rho_f|_4 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \right) \\
& + v \frac{R \rho_f|_4}{e \rho_t} \frac{\left(\frac{c_F|_4}{c_t}\right)^2}{1 - \left(\frac{c_F|_4}{\tilde{c}_t|_4}\right)^2} \left( \frac{2}{\rho_f|_4 R} \tau_0 + g \operatorname{sen} \gamma \right)
\end{aligned} \tag{4.120}$$

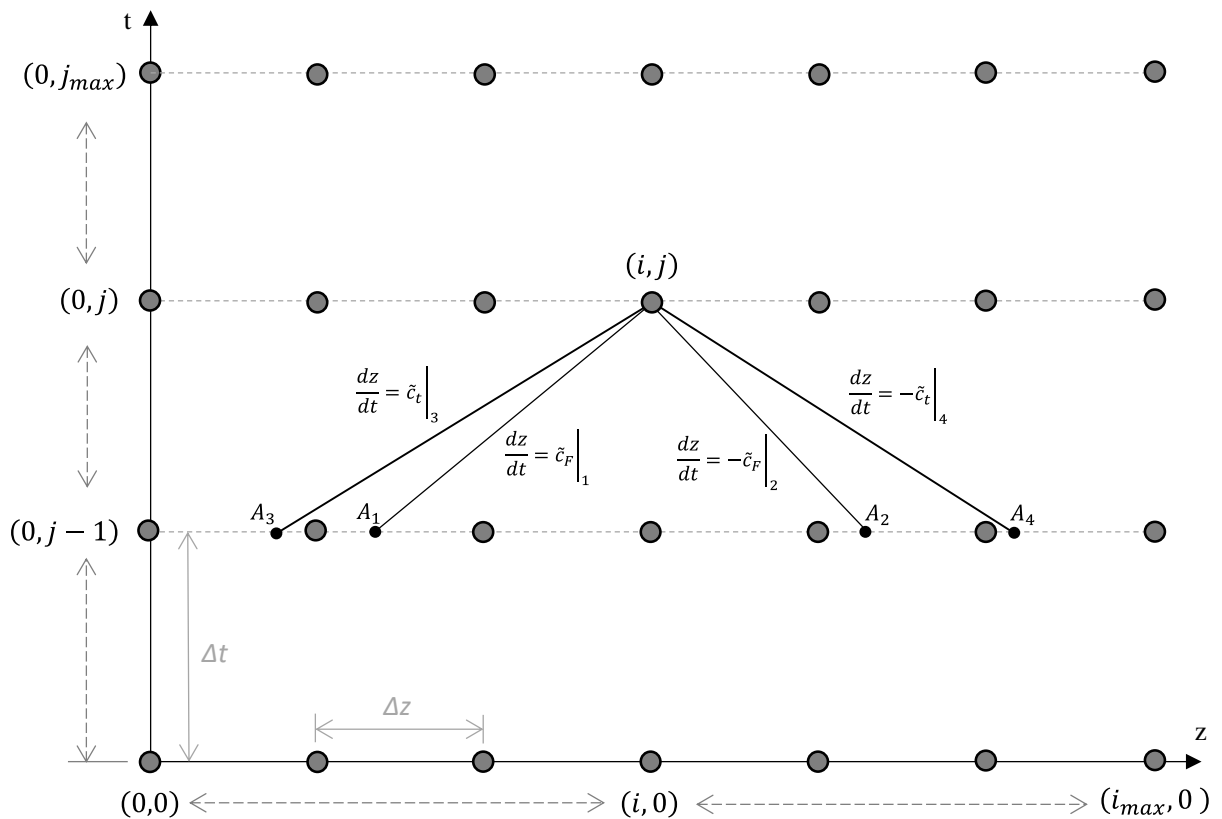
na linha aproximada:  $\frac{dz}{dt} = -\tilde{c}_t|_4$  (4.121)

## 5 MODELAGEM NUMÉRICA

### 5.1 Solução numérica

Inicialmente, uma malha numérica é estabelecida para a solução através da integração sobre as curvas características definidas no domínio espaço-tempo, como mostrado na Figura 13, com número de *steps* de tempo definidos como entrada e o número de *steps* de distância definidos conforme a condição de Courant ( $\Delta z = \tilde{c}_F \Delta t$ ). Também é mostrado um dado ponto  $(i, j)$ , em que  $i$  indica a posição do ponto na direção da dimensão do tubo ( $z$ ), e  $j$  a posição na dimensão do tempo ( $t$ ). Considerando-se esse mesmo ponto, são definidas as curvas características (1 e 2) para o fluido e (3 e 4) para o tubo, curvas estas que são utilizadas para que os valores conhecidos nos pontos do *step* anterior ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ) possam ser obtidos através de interpolações lineares em  $z$ . A válvula está em  $i = i_{max}$  e o reservatório em  $i = 0$ .

Figura 13 – Curvas características definidas no domínio espaço-tempo.



Fonte: Autor.



Para a solução das equações (4.114) a (4.121) de compatibilidade neste domínio espaço-tempo definido, as equações serão integradas numericamente. Para tanto, é conveniente resumir as equações conforme mostrado abaixo, em que os coeficientes  $(\xi, \beta, \omega, \delta)$  representam os termos que multiplicam as variáveis de interesse do lado esquerdo das equações e as parcelas  $q$  representam as parcelas do lado direito das mesmas equações:

$$\xi_1 \left( \frac{dV}{dt} \right)_1 + \beta_1 \left( \frac{dP}{dt} \right)_1 + \omega_1 \left( \frac{d\dot{u}_z}{dt} \right)_1 + \delta_1 \left( \frac{d\sigma_z}{dt} \right)_1 = q_1 \quad (5.1)$$

$$\xi_2 \left( \frac{dV}{dt} \right)_2 + \beta_2 \left( \frac{dP}{dt} \right)_2 + \omega_2 \left( \frac{d\dot{u}_z}{dt} \right)_2 + \delta_2 \left( \frac{d\sigma_z}{dt} \right)_2 = q_2 \quad (5.2)$$

$$\xi_3 \left( \frac{dV}{dt} \right)_3 + \beta_3 \left( \frac{dP}{dt} \right)_3 + \omega_3 \left( \frac{d\dot{u}_z}{dt} \right)_3 + \delta_3 \left( \frac{d\sigma_z}{dt} \right)_3 = q_3 \quad (5.3)$$

$$\xi_4 \left( \frac{dV}{dt} \right)_4 + \beta_4 \left( \frac{dP}{dt} \right)_4 + \omega_4 \left( \frac{d\dot{u}_z}{dt} \right)_4 + \delta_4 \left( \frac{d\sigma_z}{dt} \right)_4 = q_4 \quad (5.4)$$

Uma vez escritas desta forma, as equações são integradas no tempo, estabelecendo-se as equações (5.5)-(5.8), considerando-se, de forma simplificada, que os coeficientes e parcelas são constantes dentro do *step* corrente de cálculo, porém sabendo-se que os mesmos coeficientes deverão ser recalculados em cada novo *step* de tempo.

$$\xi_1(V_{(i,j)} - V_{A1}) + \beta_1(P_{(i,j)} - P_{A1}) + \omega_1((\dot{u}_z)_{(i,j)} - (\dot{u}_z)_{A1}) + \delta_1((\sigma_z)_{(i,j)} - (\sigma_z)_{A1}) = q_1 \Delta t \quad (5.5)$$

$$\xi_2(V_{(i,j)} - V_{A2}) + \beta_2(P_{(i,j)} - P_{A2}) + \omega_2((\dot{u}_z)_{(i,j)} - (\dot{u}_z)_{A2}) + \delta_2((\sigma_z)_{(i,j)} - (\sigma_z)_{A2}) = q_2 \Delta t \quad (5.6)$$

$$\xi_3(V_{(i,j)} - V_{A3}) + \beta_3(P_{(i,j)} - P_{A3}) + \omega_3((\dot{u}_z)_{(i,j)} - (\dot{u}_z)_{A3}) + \delta_3((\sigma_z)_{(i,j)} - (\sigma_z)_{A3}) = q_3 \Delta t \quad (5.7)$$

$$\xi_4(V_{(i,j)} - V_{A4}) + \beta_4(P_{(i,j)} - P_{A4}) + \omega_4((\dot{u}_z)_{(i,j)} - (\dot{u}_z)_{A4}) + \delta_4((\sigma_z)_{(i,j)} - (\sigma_z)_{A4}) = q_4 \Delta t \quad (5.8)$$

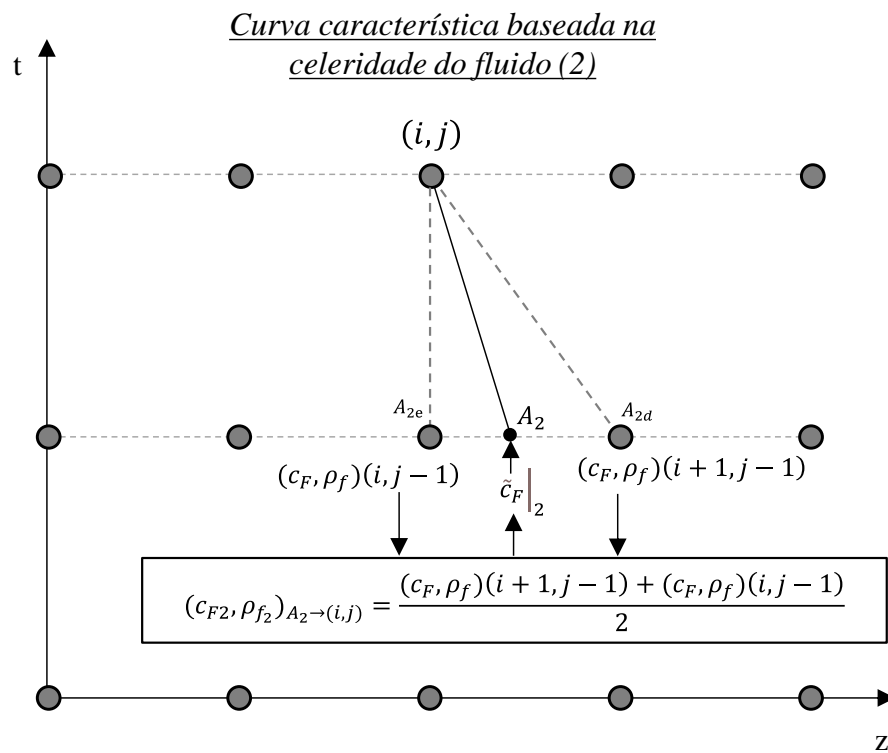
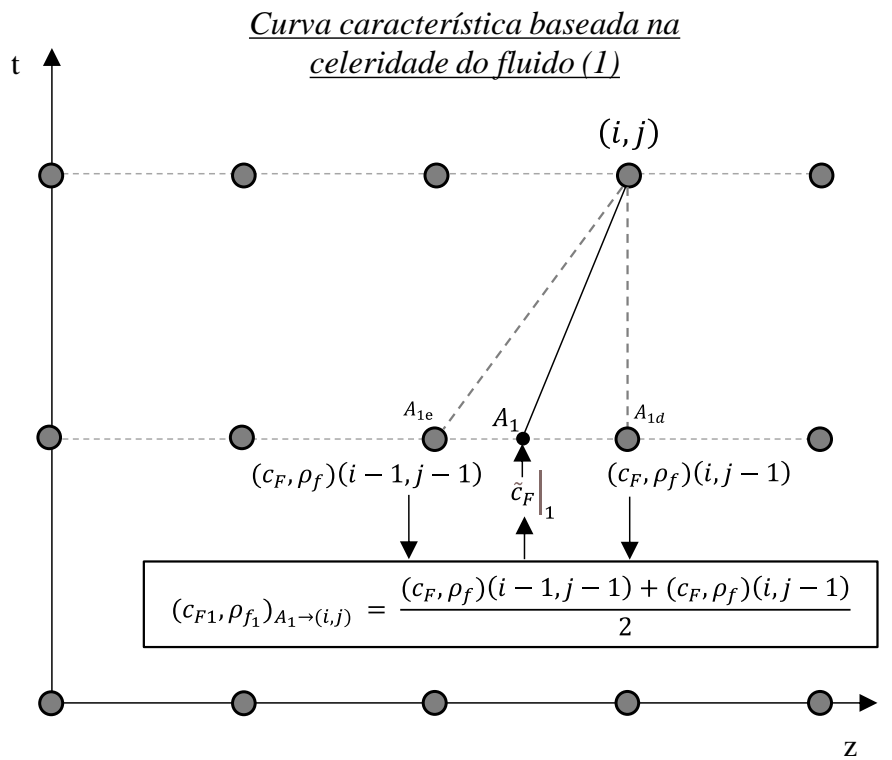
As equações (5.5)-(5.8) produzem um sistema de equações que é solucionado para a obtenção dos valores de interesse no ponto  $(i, j)$ :  $(V, P, \dot{u}_z, \sigma_z)_{(i,j)}$ . Após a solução deste sistema, a fração de vazio no ponto  $\alpha_{(i,j)}$  é calculada conforme a equação de expansão isotérmica, como definido anteriormente na equação (4.78):

$$\alpha_{(i,j)} = \alpha_0 \frac{P_0}{P_{(i,j)}} \quad (5.9)$$

É importante destacar que os coeficientes  $(\xi, \beta, \omega, \delta)$  do lado esquerdo das equações variam de acordo com  $\rho_f(\alpha)$  e  $c_F(P, \alpha)$ , e as parcelas  $q$  do lado direito, variam de acordo com  $\rho_f(\alpha)$ ,  $c_F(P, \alpha)$ ,  $V$  e  $\dot{u}_z$ . Por isso, os coeficientes e parcelas referidos deverão ser recalculados a cada *step* de tempo, tomando-se os valores das variáveis de interesse conhecidas no *step* anterior, para que então sejam considerados como constantes durante a integração no tempo do *step* corrente. Porém, para que sejam obtidos os valores no *step* anterior, é necessário que os mesmos sejam capturados de acordo com cada uma das quatro curvas características, com direções que precisam ser definidas com base em:  $\tilde{c}_F|_1, -\tilde{c}_F|_2, \tilde{c}_t|_3, -\tilde{c}_t|_4$ . Para que estas direções sejam obtidas, elas são calculadas com base em celeridades estimadas tomando-se uma média dentro de intervalos selecionados no *step* anterior, intervalos estes que são definidos de formas diferentes, dependendo se a curva advém da celeridade no fluido ou da celeridade no tubo. Para as curvas advindas da celeridade no fluido (curvas 1 e 2), os cálculos de  $\rho_f(\alpha)$  e  $c_F(P, \alpha)$ , para que então sejam calculados  $\tilde{c}_F|_1, \tilde{c}_F|_2$  (e definidas as direções características associadas), são realizados conforme demonstrado na Figura 14. Para as curvas advindas da celeridade no tubo (curvas 3 e 4), os cálculos são realizados conforme Figura 15. Em seguida, é possível calcular os coeficientes  $(\xi, \beta, \omega, \delta)$  e parcelas  $q$ , e solucionar o sistema (5.5) a (5.8).

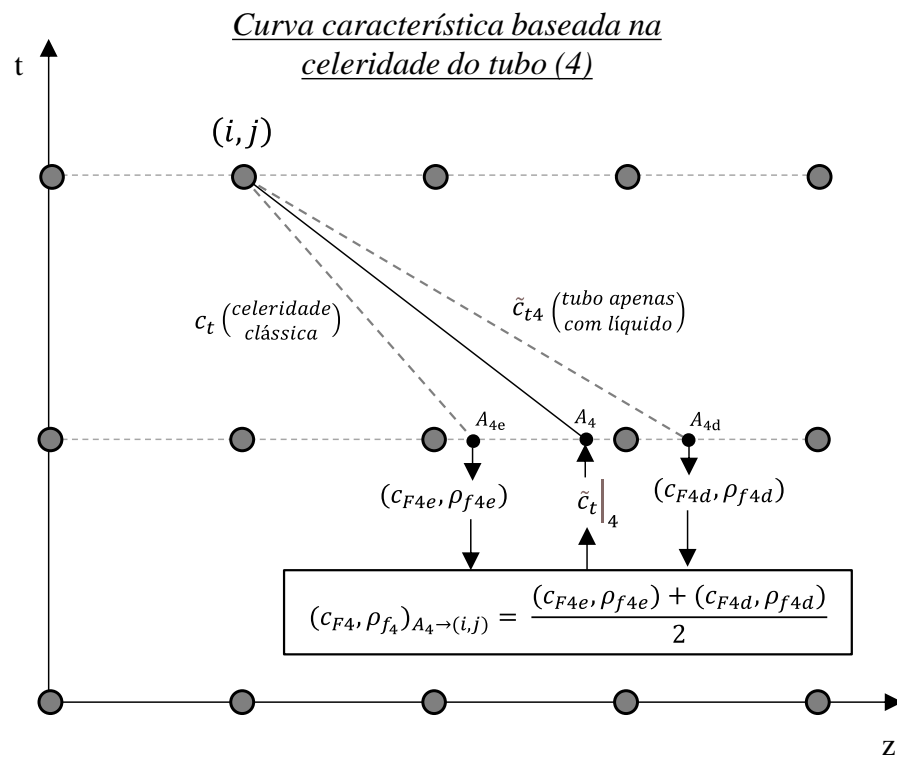
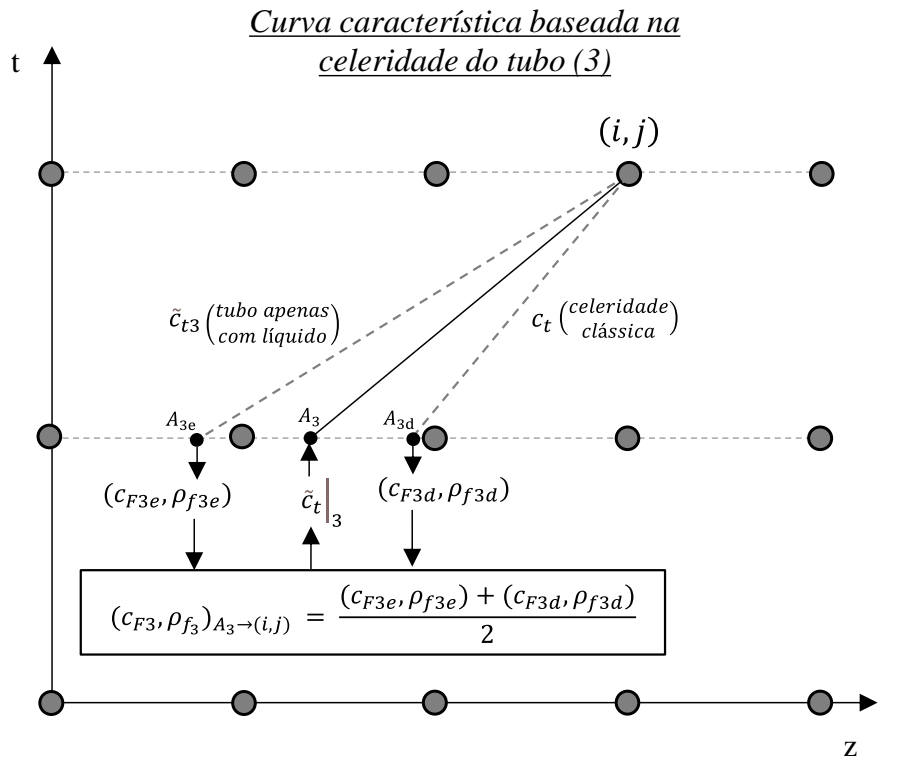
Destaca-se que a distância  $\Delta z$  entre os pontos na direção  $z$  é definida conforme a condição de Courant ( $\Delta z = \tilde{c}_F \Delta t$ ), considerando-se apenas a celeridade no líquido puro, que é maior que no escoamento bifásico. Assim, o número de elementos  $N$  na tubulação é calculado com base no  $\Delta t$  escolhido, e escolhe-se o  $\Delta t$  de forma que sejam obtidos ao menos 16 elementos, número este considerado capaz de produzir bons resultados, com base nos resultados apresentados por (TIJSSELING, A S, 1993). Ao ser considerado um escoamento bifásico, como a celeridade é menor neste tipo de fluido, sabe-se que nas curvas características do fluido (curvas 1 e 2) os pontos  $A_1$  e  $A_2$  cairão sempre entre os nós anteriores:  $(i-1, j-1)$  e  $(i, j-1) / (i+1, j-1)$  e  $(i, j-1)$ , respectivamente (como mostrado na Figura 14). Já para as curvas do tubo (curvas 3 e 4), as celeridades são sensivelmente maiores, e os pontos  $A_3$  e  $A_4$  cairão afastados da região imediatamente anterior, porém se sabe que para qualquer valor de fração de vazão, a celeridade estará sempre entre a celeridade do tubo totalmente preenchido por líquido ( $\tilde{c}_t$ ) e do tubo sem líquido ( $c_t$ ). Assim, estes são os limites adotados para definir o domínio onde se estabelecerá a média da celeridade no tubo preenchido com um escoamento bifásico para que se definam as curvas 3 e 4, como mostrado na Figura 15.

Figura 14 – Fluxo de cálculo das celeridades e de definição das curvas características fluidas para um dado ponto  $(i,j)$ .



Fonte: Autor.

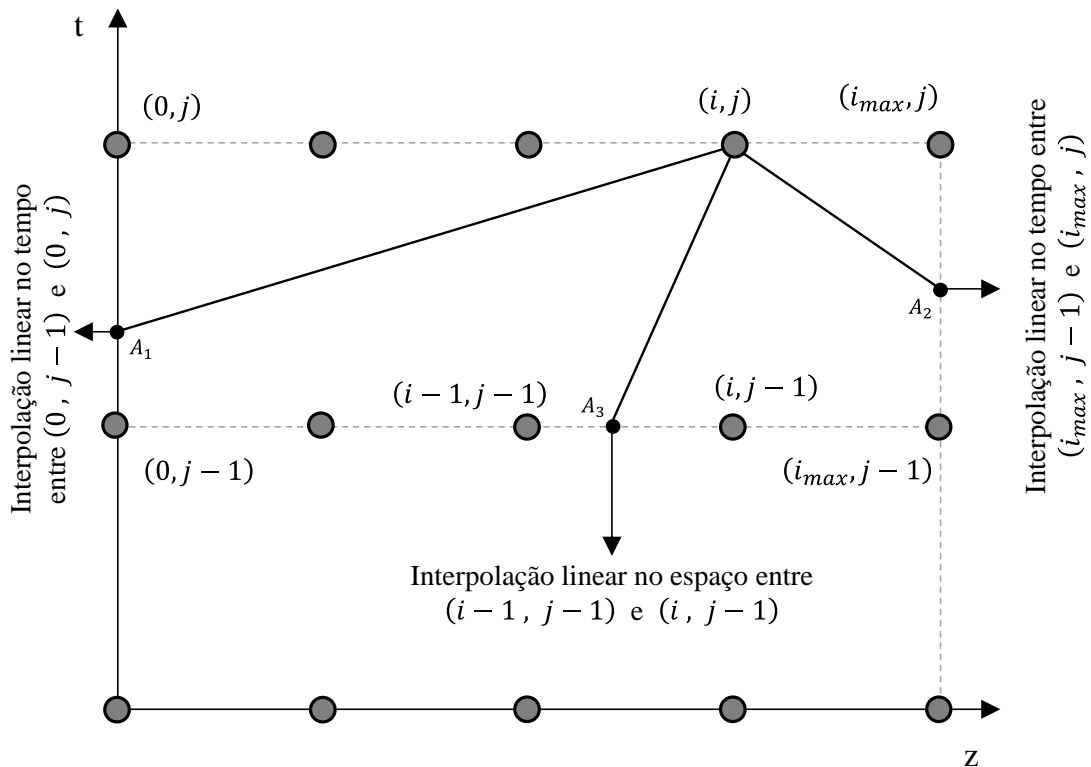
Figura 15 – Fluxo de cálculo das celeridades e de definição das curvas características no tubo para um dado ponto (i,j).



Fonte: Autor.

Observa-se nas figuras esquemáticas mostradas que as curvas características se cruzam no *step* anterior em espaços intermediários, entre os pontos em que os valores são de fato conhecidos. Para a obtenção dos valores no ponto exato de cruzamento, realiza-se uma interpolação linear no tempo (no cruzamento das curvas características com as extremidades), e no espaço (no cruzamento das curvas em espaço intermediário do *step* anterior), como demonstrado na Figura 16.

Figura 16 – Obtenção dos valores anteriores por interpolação.



Fonte: Autor.

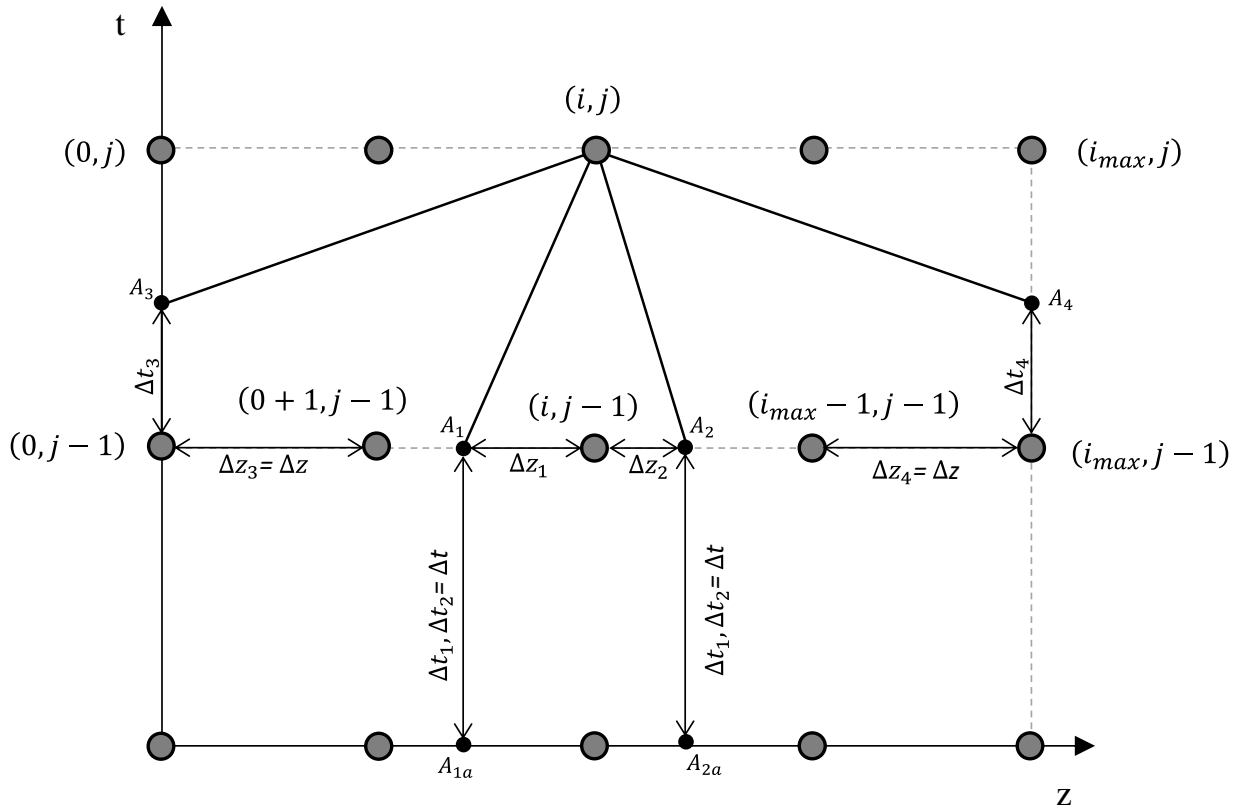
Para o cálculo das parcelas  $q_{(cur=1,2,3,4)}$ , além de se obter  $\rho_f(\alpha)$  e  $c_F(P, \alpha)$  para cada parcela, conforme a curva característica a que a parcela esteja atrelada (como demonstrado nos esquemas anteriores), também é necessário que seja calculado o termo de atrito  $\tau_0$ . Como demonstrado no capítulo 4.7,  $\tau_0 = \tau_s + \tau_u$ . Admitindo-se que seja considerado apenas o termo estático  $\tau_s$ , o termo de atrito é calculado da seguinte forma (com “*cur*” variando de 1 até 4, conforme a curva característica):

$$\tau_0 = \rho_f \frac{f V_{rel} |V_{rel}|}{8} \approx \rho_{f_{cur}} \frac{f V_{rel_{A_{cur}}} |V_{rel_{A_{cur}}}|}{8} \quad (5.10)$$

Porém, considerando-se que também seja incorporado o termo de atrito transiente  $\tau_u$ , é necessário que se defina como serão calculadas numericamente as derivadas espaciais e temporais conforme o método IAB de Vítkovský (capítulo 4.7.2), sendo este o método incluído no modelo para que seja avaliado o atrito transiente. O método de Vítkovský é aplicado conforme equação (5.11), com “*cur*” (subscrito associado às curvas de validade no domínio) variando de 1 até 4 conforme a curva característica, as constantes  $K_{ut}$  e  $K_{ux}$  definidas em seus intervalos típicos conforme a literatura (capítulo 3.5.1), e as derivadas conforme a Figura 17:

$$\tau_u = \frac{\rho_{f_{cur}} R}{2} \left[ K_{ut} \frac{\partial V_{rel}}{\partial t} \Big|_{A_{cur}} + K_{ux} \text{Sinal}(V_{rel}) c_{F_{cur}} \left| \frac{\partial V_{rel}}{\partial z} \right|_{A_{cur}} \right] \quad (5.11)$$

Figura 17 – Definição das derivadas para cálculo do atrito de Vítkovský (IAB) em cada ponto.



$$\left| \frac{\partial V_{rel}}{\partial z} \right|_{A_1} \approx \frac{|V_{rel_{A_1}} - V_{rel_{(i,j-1)}}|}{\Delta z_1}$$

$$\left| \frac{\partial V_{rel}}{\partial z} \right|_{A_2} \approx \frac{|V_{rel_{A_2}} - V_{rel_{(i,j-1)}}|}{\Delta z_2}$$

$$\frac{\partial V_{rel}}{\partial t} \Big|_{A_1} \approx \frac{V_{rel_{A_1}} - V_{rel_{A_{1a}}}}{\Delta t_1}$$

$$\frac{\partial V_{rel}}{\partial t} \Big|_{A_2} \approx \frac{V_{rel_{A_2}} - V_{rel_{A_{2a}}}}{\Delta t_2}$$

$$\left| \frac{\partial V_{rel}}{\partial z} \right|_{A_3} \approx \frac{|V_{rel_{(0,j-1)}} - V_{rel_{(0+1,j-1)}}|}{\Delta z_3}$$

$$\left| \frac{\partial V_{rel}}{\partial z} \right|_{A_4} \approx \frac{|V_{rel_{(imax,j-1)}} - V_{rel_{(imax-1,j-1)}}|}{\Delta z_4}$$

$$\frac{\partial V_{rel}}{\partial t} \Big|_{A_3} \approx \frac{V_{rel_{A_3}} - V_{rel_{(0,j-1)}}}{\Delta t_3}$$

$$\frac{\partial V_{rel}}{\partial t} \Big|_{A_4} \approx \frac{V_{rel_{A_4}} - V_{rel_{(imax,j-1)}}}{\Delta t_4}$$

Fonte: Autor.

Todos os demais itens necessários para que se calcule as parcelas são considerados constantes durante todo o transitório e deverão ser definidos conforme a simulação que se pretende. Assim, os cálculos são realizados para todos os nós intermediários, seguindo-se o método descrito, de integração por diferenças finitas de primeira ordem, com solução explícita. Este método de integração normalmente é considerado suficiente para a solução do problema, pois são introduzidos intervalos de tempo

muito pequenos para a solução numérica, gerando uma ótima convergência já na primeira iteração.

No entanto, para ampliar a abrangência e a versatilidade do modelo numérico, foi criada uma sub-rotina capaz de refazer os cálculos em cada *step* em  $n$  iterações ( $n$  definido como valor de entrada), de forma que após terem sido obtidos os valores das variáveis de interesse no ponto  $(i, j)$ , realizando-se todos os cálculos conforme descritos anteriormente, a celeridade e a massa específica passam a ser conhecidos no ponto  $(i, j)$  e podem ser utilizadas para se recalcularem os valores médios de  $\rho_f$  e  $c_F$  mostrados nas Figura 14 e Figura 15, para as iterações seguintes dentro do mesmo *step* de tempo. Assim,  $\rho_f$  e  $c_F$  passam a ser calculados conforme a equação (5.12) para as iterações seguintes, com “*cur*” variando de 1 a 4 conforme a curva característica:

$$(c_{F_{cur}}, \rho_{f_{cur}})_{A_{cur} \rightarrow (i,j)} \Big|_n = \frac{[(c_F, \rho_f)_{A_{cur}} \Big|_n + (c_{F(i,j)}, \rho_{f(i,j)}) \Big|_{n-1}]}{2} \quad (5.12)$$

Os cálculos apresentados neste capítulo são realizados dentro de todo o domínio espaço-tempo, para os nós intermediários. Porém, para os pontos na condição inicial, antes do transitório se iniciar, e também para os pontos localizados nas extremidades, as condições iniciais e de contorno precisam ser estabelecidas para que os cálculos possam ser realizados de forma adequada, conforme explicado nos capítulos a seguir.

Por fim, é relevante destacar que as formulações apresentadas neste capítulo, funcionando em conjunto para contemplar a variabilidade das celeridades em um fluido bifásico, com IFE e atrito transitório, são uma importante contribuição deste trabalho, visto que representam uma forma de solução matemática-numérica ainda não descrita na literatura para que se possa aplicar o MOC com IFE para este tipo escoamento, utilizando-se a formulação de quatro equações de (TIJSSELING, A S, 1993).



## 5.2 Condições iniciais

As condições iniciais se referem ao estado estacionário antes do transitório hidráulico e são definidas conforme apresentado por (ALMEIDA, 2018). Assume-se que a tubulação esteja em um estado de regime permanente com escoamento constante. Ao se definir as condições iniciais serão estabelecidos os valores das variáveis de interesse ao longo do tubo para o tempo  $t = 0$ , ou seja,  $P(z, 0)$ ,  $V(z, 0)$ ,  $\sigma_z(z, 0)$  e  $\dot{u}_z(z, 0)$ . Os valores iniciais das variáveis básicas são (considerando os elementos do sistema descritos no capítulo 2.1):

$$P(z, 0) = P_{reservatório} - \left( \frac{f V_{rel} |V_{rel}|}{4gR} + sen \gamma \right) \rho_l g z \quad (5.13)$$

$$V(z, 0) = constante \quad (5.14)$$

$$\sigma_z(z, 0) = \sigma_{zválvula} + \left( \frac{\rho_l f V_{rel} |V_{rel}|}{8e \left(1 + \frac{e}{2R}\right)} + \rho_t g sen \gamma \right) (L - z) \quad (5.15)$$

$$\dot{u}_z(z, 0) = 0 \quad (5.16)$$

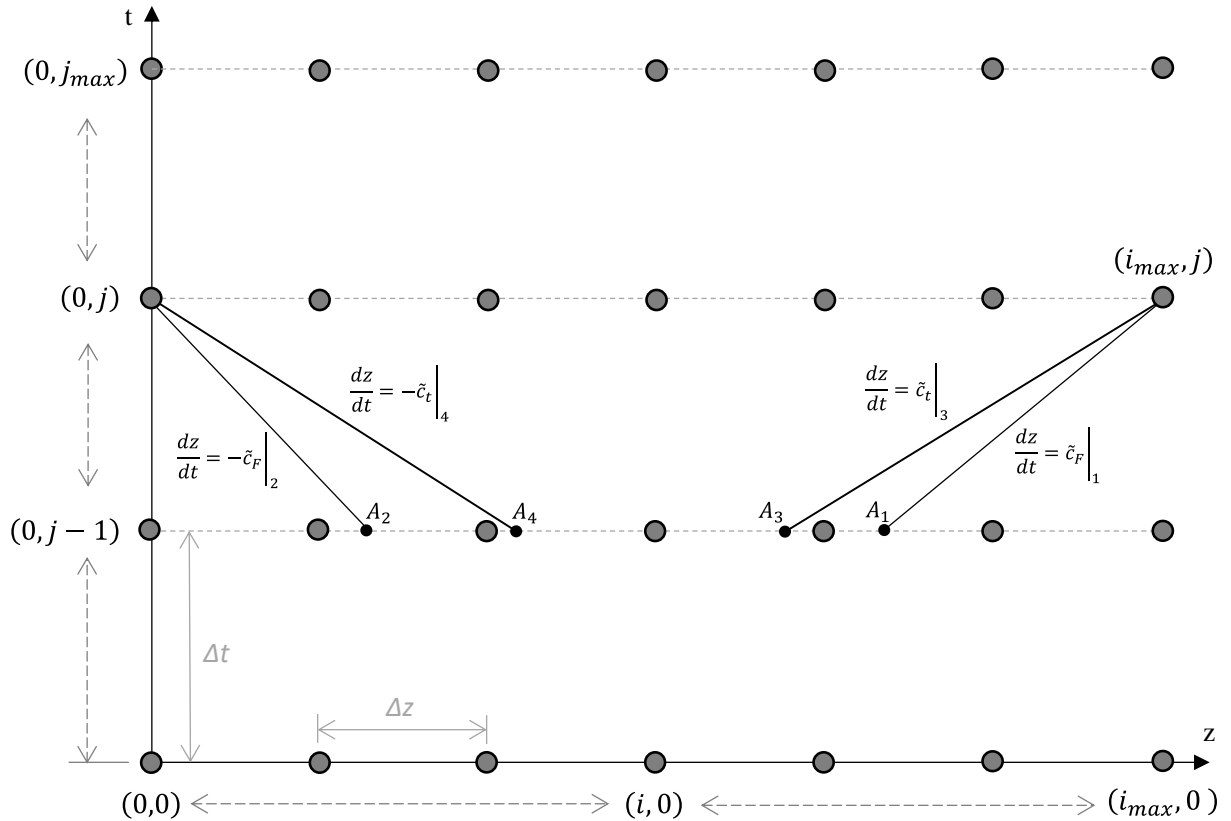
Para a definição das condições iniciais, como não existem picos de pressão e a fração de vazio é baixa conforme premissas do modelo, a massa específica do fluido é aproximada pela do líquido  $\rho_f \approx \rho_l$  apenas como simplificação para cálculo de pressão e tensão na condição em regime permanente (visto que para baixas frações de vazio a diferença de massa específica com e sem fase gasosa é muito pequena). Assim, as variáveis são calculadas em todos os pontos iniciais ( $t = 0$ ). Após esta etapa, a pressão calculada em cada ponto é utilizada para que seja calculada a fração de vazio  $\alpha(z, 0)$  em todos os pontos iniciais:

$$\alpha(z, 0) = \frac{\alpha_0 P_0}{P(z, 0)} \quad (5.17)$$

### 5.3 Condições de contorno

Nos pontos localizados nas extremidades em  $(0, j)$  e  $(i_{max}, j)$ , apenas estão disponíveis duas curvas características, como pode ser observado na Figura 18. Desta forma, estão disponíveis apenas duas equações, para que sejam obtidas as variáveis de interesse.

Figura 18 – Curvas características nas extremidades.



Fonte: Autor.

Nos próximos capítulos, serão apresentadas as equações adicionais a serem consideradas para estes pontos localizados nas extremidades do modelo, para que todas as variáveis de interesse possam ser obtidas nestas localidades, resolvendo-se sistemas de equações diferentes do formado pelas equações (5.5)-(5.8). As equações faltantes nestes pontos são substituídas pelas condições de contorno apresentadas a seguir, definidas com base em (ALMEIDA, 2018) e com ajuste de curva de fechamento da válvula conforme (JENSEN et al., 2018).

### 5.3.1 Reservatório com pressão constante

O reservatório é considerado infinito, desta forma mantém a pressão constante durante o transitório. Esta condição faz com que na entrada do tubo a pressão seja igual a do reservatório, qualquer que seja o tempo. Além disto, considera-se que a tubulação é rigidamente engastada ao reservatório e ambos não se movem.

$$P(0, t) = P_{reservatório} \quad (5.18)$$

$$\dot{u}_z(0, t) = 0 \quad (5.19)$$

### 5.3.2 Válvula de saída

A válvula de saída pode ser modelada como sendo rigidamente fixa, com restrição de movimentos axiais, ou podendo se mover axialmente. Além disto, o tempo de fechamento da válvula pode ser instantâneo ou pode variar dependendo da condição que se pretenda simular. As seguintes relações satisfazem tais condições:

#### Fechamento instantâneo e válvula fixa

$$V(L, t) = 0 \quad (5.20)$$

$$\dot{u}_z(L, t) = 0 \quad (5.21)$$

#### Fechamento instantâneo e válvula sem restrição de movimentos axiais

$$V(L, t) = \dot{u}_z(L, t) \quad (5.22)$$

$$A_f \Delta P = A_t \Delta \sigma_z \quad (5.23)$$

#### Fechamento com tempo variável

Substituem-se as equações (5.20) e (5.22) pela seguinte equação:

$$\Delta P = P_{saída\ da\ válvula} + K_v \rho_f \frac{V_{rel}|V_{rel}|}{2} \quad (5.24)$$

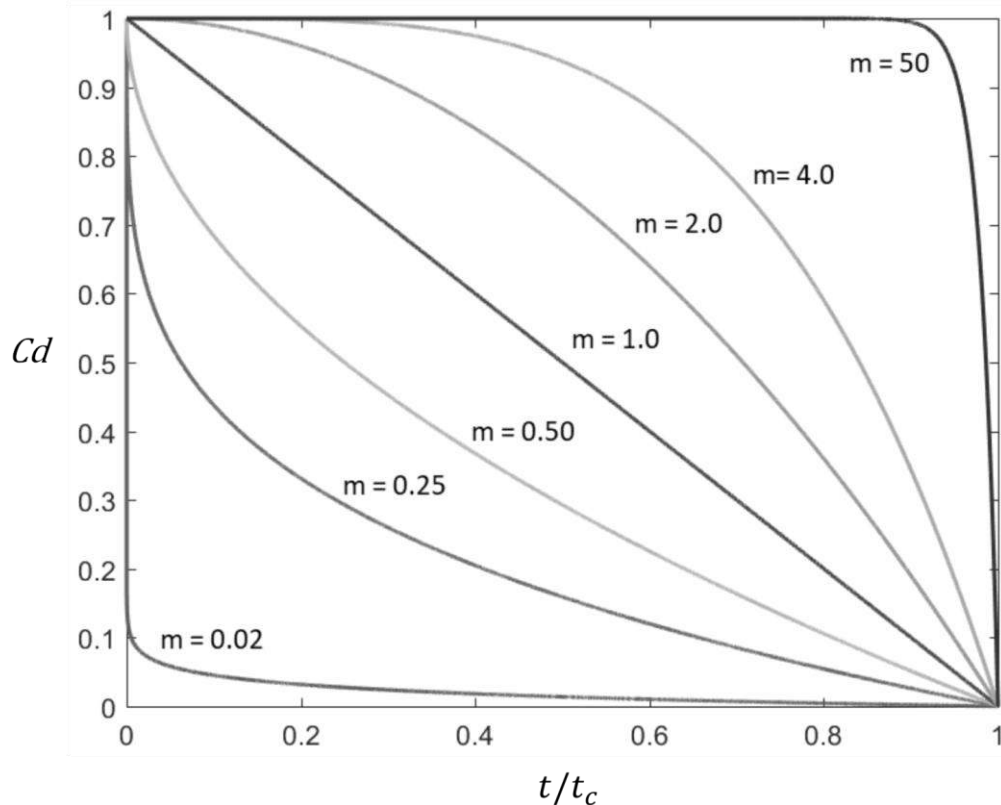
Onde  $V_{rel}$  e  $\rho_f$  são definidos de mesma forma que (5.10) e  $K_v$  é o coeficiente de perda de carga na válvula:

$$K_v = \frac{1}{Cd^2} - 1 \quad (5.25)$$

Sendo  $Cd$  o coeficiente de descarga da válvula, que varia conforme o tipo de válvula ou de atuador que é utilizado e com o percentual de abertura da válvula. Para que o modelo seja capaz de incorporar os mais diversos tipos de curvas possíveis, foi implementada uma solução de curva ajustável no modelo, com uma formulação conforme a demonstrada abaixo (equação (5.26)), e plotada na Figura 19, para diferentes exemplos de condições.

$$Cd = \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_c} \right)^m \right] \quad (5.26)$$

Figura 19 – Coeficientes de descarga da válvula.



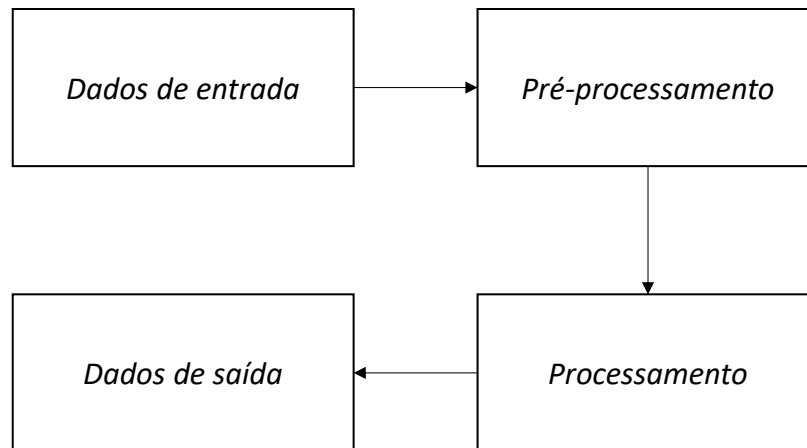
Fonte: Autor.

## 5.4 Código computacional

Foi produzido um código computacional integralmente novo para o cálculo do modelo, desenvolvido na linguagem *Python* (versão 3.8 – 64 bits), com uso da plataforma *Anaconda 3 / Jupyter Notebook* (versão 6.3.0) e dos pacotes *math* (versão 1.2.1), *numpy* (versão 1.20.1), *scipy* (versão 1.6.2) e *matplotlib* (versão 3.3.4). O código é capaz de resolver o conjunto de equações matemáticas apresentadas, que descrevem o fenômeno do transitório hidráulico com interação fluido-estrutura, em uma tubulação com escoamento bifásico homogêneo.

O código é composto por quatro blocos principais: dados de entrada, pré-processamento, processamento (resolução das equações) e pós-processamento, que fornecerão as variáveis de interesse, com fluxo conforme mostrado na Figura 20.

Figura 20 – Processo de cálculo do modelo numérico.



Fonte: Autor.

Os dados de entrada são as variáveis que irão caracterizar o transitório estudado. Eles estão demonstrados na Tabela 4 e têm seus valores inseridos diretamente no texto do código desenvolvido, conforme simulação pretendida.

Tabela 4 – Dados de entrada

<b>Dados</b>	<b>Descrição</b>
$L$	comprimento da tubulação [m]
$t_{max}$	tempo máximo [s]
$t_{points}$	número de pontos de tempo incluindo os pontos inicial e final
$P_D$	pressão à direita da válvula [mcl]
$\sigma_{ZD}$	tensão à direita da válvula [Pa]
$V_0$	velocidade inicial do fluido [m/s]
$U_0$	velocidade inicial da parede da tubulação [m/s]
$\rho_l$	massa específica da fase líquida [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	massa específica da fase gasosa [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_t$	massa específica da tubulação [kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	coeficiente de Poisson da tubulação
$E$	módulo de elasticidade da tubulação [Pa]
$K_l$	compressibilidade do fluido [Pa]
$f$	fator de atrito turbulento
$R$	raio da tubulação [m]
$e$	espessura da parede da tubulação [m]
$g$	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$t_c$	tempo para o fechamento completo da válvula [s]
$val_{cond}$	condição de contorno da válvula [livre ou fixa]
$\alpha_0$	fração de vazio volumétrica inicial
$P_{out}$	pressão ambiente [Pa]
$Atrito$	termo de atrito $\tau_o$ [estático/transitório]
$K_{ut}$	coeficiente de atrito transitório - tempo
$K_{ux}$	coeficiente de atrito transitório - espaço
$n$	número de loops de iteração em um intervalo de tempo
$\gamma$	angulação da tubulação

Fonte: Autor.

O pré-processamento é responsável pela criação das diversas funções que serão utilizadas posteriormente no processamento, além da declaração de outras variáveis, cujo cálculo é função das variáveis de entrada. Na Tabela 5 estão apresentadas ações que fazem parte do pré-processamento.

Tabela 5 – Ações do pré-processamento

1. Cálculo área interna da seção transversal da tubulação
2. Cálculo das celeridades clássicas iniciais no tubo e no fluido
3. Definição do intervalo espacial considerando a condição de Courant
4. Criação das matrizes de variáveis $(P, V, \sigma_z, \dot{u}_z, \alpha)$ .
5. Definição da função de interpolação
6. Definição da função de cálculo de atrito (Estático/Dinâmico)
7. Definição da função de cálculo das celeridades variáveis
8. Definição da função de cálculo do coeficiente da válvula $(Cd)$
9. Cálculo das condições iniciais

Fonte: Autor.

O processamento é a parte do código em que, de fato, se calcula o transitório e as equações de compatibilidade apresentadas. São estabelecidos dois *loops* usando-se o comando “FOR”: O externo é o *loop* no tempo e o interno, o do espaço. Varia-se o tempo de zero até o valor limite determinado nos dados de entrada ( $t_{max}$ ). O *loop* interno percorre todo o comprimento da tubulação, variando de zero a  $L$ . Como utilizou-se a linguagem *Python*, decidiu-se por uma arquitetura matricial de variáveis, por ser essa uma linguagem que se adequa bem a este tipo de estrutura de dados. Desta forma, os dados ficam integralmente armazenados nas matrizes, considerando-se cada ponto  $(i, j)$  calculado.

Em cada *step* de tempo, inicialmente são calculadas as extremidades da tubulação, para que em seguida sejam calculados todos os pontos internos, tendo disponibilidade completa de dados para que sejam processadas as interpolações necessárias, com o uso da função de interpolação. O módulo de processamento calcula o transitório a partir das equações apresentadas nos capítulos 5.1, 5.2 e 5.3, por meio das funções de solução criadas para cada tipo de nó, com funções de solução específicas para os nós das extremidades, que são calculados primeiro, e outra função de solução definida para os nós intermediários.

Os dados de saída são produzidos por comandos e sub-rotinas específicos para que sejam gerados os dados gráficos ou numéricos. A saída dos dados é feita de diversas formas, utilizando-se recursos do ambiente *Python* e de seus pacotes; e atendendo-se assim às mais diversas necessidades de simulação, como demonstrado nos dados de saída apresentados no próximo capítulo.

É importante destacar que o código numérico desenvolvido no presente trabalho não será divulgado, conforme decisão estratégica atual definida para o desenvolvimento na linha de pesquisa de transitórios hidráulicos, no âmbito do Centro de Engenharia Nuclear (IPEN). Porém, pretende-se que a divulgação ocorra no futuro, conforme regras a serem definidas oportunamente pelo Centro de Engenharia Nuclear (IPEN), após a integração do modelo desenvolvido neste trabalho com outros modelos que se encontram atualmente em desenvolvimento dentro da mesma linha de pesquisa, e que são objeto de estudo de outros trabalhos.



## 6 ANÁLISE DE RESULTADOS

### 6.1 Validação do Modelo

Nos capítulos de validação, serão realizadas diversas verificações e comparações para que sejam avaliadas as respostas fornecidas pelo modelo desenvolvido neste trabalho, e para que se possa verificar a validade do modelo. De forma geral, serão realizadas as seguintes análises:

1. Adequação ao escoamento monofásico: será verificado se os resultados produzidos pelo modelo desenvolvido neste trabalho, considerando-se um escoamento monofásico, são aderentes aos resultados disponíveis na literatura. Desta forma, busca-se verificar (considerando-se um caso de escoamento mais simples que o bifásico e com resultados mais abundantes na literatura) se a estrutura de cálculo e o fluxo de informações do código numérico desenvolvido estão funcionando adequadamente;
2. Verificação qualitativa de comportamento com escoamento bifásico: em seguida será verificado, ao ser introduzido o escoamento bifásico, se o comportamento qualitativo dos resultados produzidos está conforme o que se espera fisicamente;
3. Verificação comparativa com dados experimentais: será realizada uma comparação de resultados experimentais com os resultados produzidos pelo modelo desenvolvido neste trabalho, obtendo-se assim uma confirmação quantitativa do correto funcionamento do modelo; e
4. Verificação do cálculo da celeridade variável: com essa verificação adicional, será visualizado de forma explícita se o cálculo das celeridades variáveis, realizado internamente pelo modelo, está sendo processado adequadamente. Realiza-se esta verificação pois o cálculo adequado da celeridade é vital para que o fenômeno do transitório hidráulico em um escoamento bifásico seja capturado adequadamente.

### 6.1.1 Adequação ao escoamento monofásico

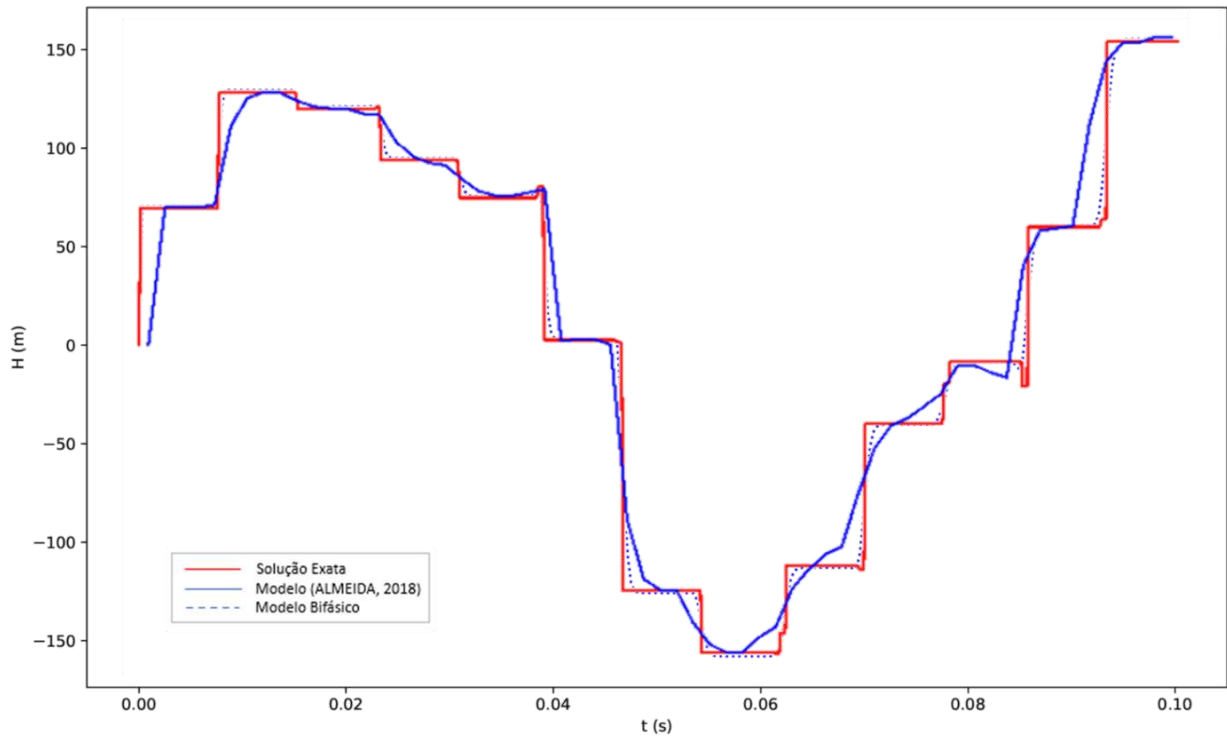
Para que seja garantida a validade do modelo, inicialmente, é realizada uma comparação direta com os modelos produzidos por (ALMEIDA, 2018) e com a solução exata de (TIJSSELING, ARRIS S, 2003) para fluidos monofásicos. Para tanto, utiliza-se o modelo numérico produzido neste trabalho, considerando-se a fração de vazio igual a zero, com dados de entrada conforme Tabela 6 e resultados conforme Figura 21, Figura 22 e Figura 23 na extremidade da válvula de saída do escoamento.

Tabela 6 – Dados de simulação para comparação com fluido monofásico

<b>Dado</b>	<b>Valor</b>	<b>Descrição</b>
$L$	20,0	comprimento da tubulação [m]
$t_{max}$	0,1	tempo máximo [s]
$t_{points}$	300	número de pontos de tempo incluindo os pontos inicial e final
$P_D$	0,0	pressão à direita da válvula [mcl]
$\sigma_{zD}$	0,0	tensão à direita da válvula [Pa]
$V_0$	1,0	velocidade inicial do fluido [m/s]
$U_0$	0,0	velocidade inicial da parede da tubulação [m/s]
$\rho_l$	1000,0	massa específica da fase líquida [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	1,0	massa específica da fase gasosa [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_t$	7900	massa específica da tubulação [kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	0,3	coeficiente de Poisson da tubulação
$E$	$210 \cdot 10^9$	módulo de elasticidade da tubulação [Pa]
$K_l$	$2,1 \cdot 10^9$	compressibilidade do fluido [Pa]
$f$	0,02	fator de atrito turbulento
$R$	0,399	raio da tubulação [m]
$e$	0,008	espessura da parede da tubulação [m]
$g$	9,81	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$t_c$	0,0	tempo para o fechamento completo da válvula [s]
$val_{cond}$	Livre	condição de contorno da válvula
$\alpha_0$	0,0	fração de vazio volumétrica inicial
$P_{out}$	2026500	pressão ambiente [Pa]
$Atrito$	Estático	termo de atrito
$n$	0	número de loops de reiteração em um intervalo de tempo
$\gamma$	0	angulação da tubulação
$N$	30	número de elementos da tubulação (definido conforme Courant)

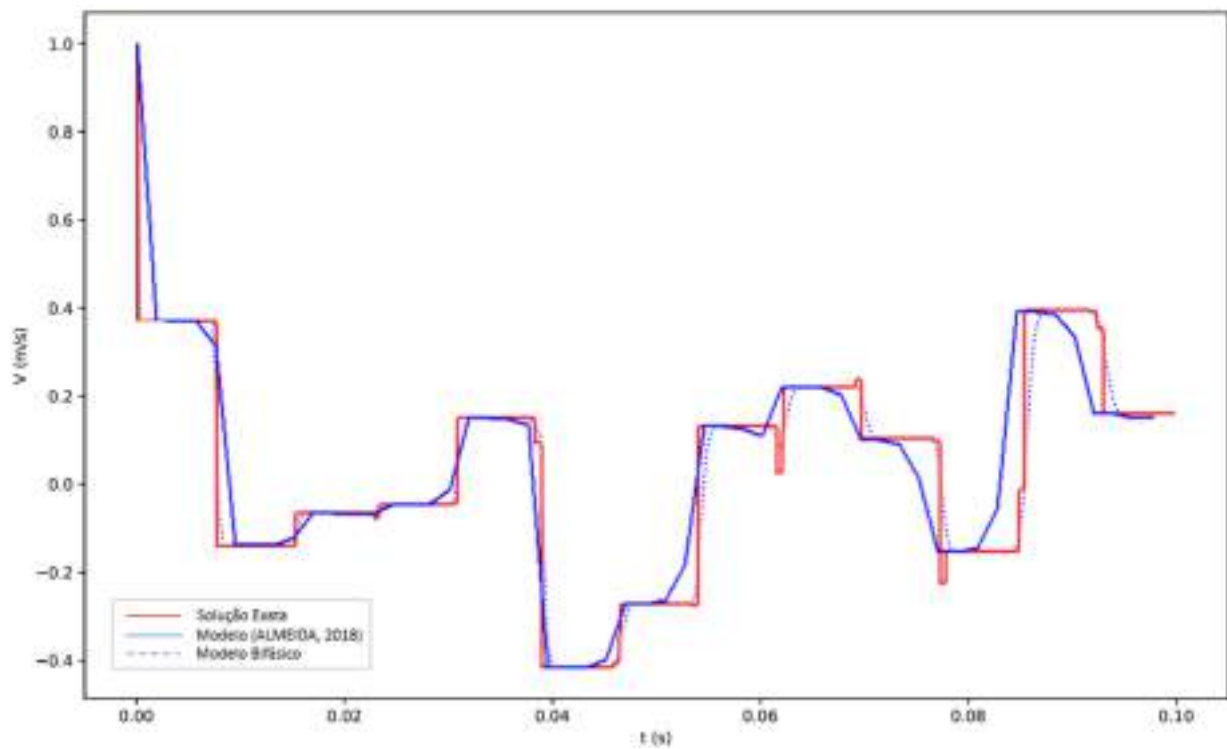
Fonte: Autor.

Figura 21 – Resultado comparativo monofásico (fechamento instantâneo) – Pressão x Tempo na válvula.



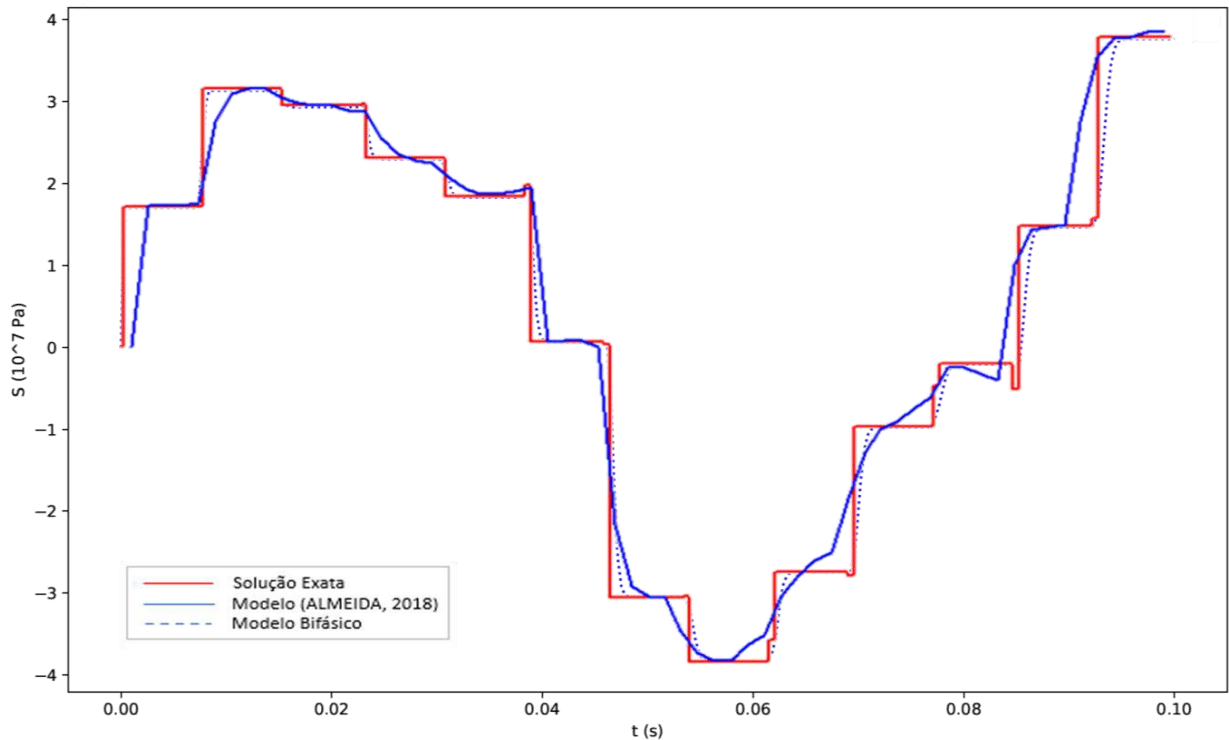
Fonte: Autor.

Figura 22 – Resultado comparativo monofásico (fechamento instantâneo) – Velocidade do Fluido x Tempo na válvula.



Fonte: Autor.

Figura 23 – Resultado comparativo monofásico (fechamento instantâneo) – Tensão x Tempo na válvula.



Fonte: Autor.

Observando-se as Figura 21, Figura 22 e Figura 23, para o caso de fechamento instantâneo da válvula de saída, com extremidade livre para se movimentar, é possível constatar que o modelo consegue produzir resultados ainda mais próximos da solução exata produzida por (TIJSSELING, ARRIS S, 2003), comparando-se com os resultados produzidos por (ALMEIDA, 2018).

Os resultados foram ainda melhores que os do modelo de (ALMEIDA, 2018), possivelmente pelo fato de no presente trabalho ter sido integralmente elaborado um novo modelo numérico em linguagem *Python*, utilizando-se uma estrutura de dados totalmente matricial. Esta estrutura de dados é diferente da estrutura vetorial adotada no modelo desenvolvido em linguagem “C” do (ALMEIDA, 2018). Além disso, o modelo desenvolvido neste trabalho contou com pacotes robustos disponíveis no ambiente *Python* para definição das funções e cálculo dos sistemas de equações, o que tende a produzir melhores resultados. Também se destaca que, ao se reescrever um novo código, quaisquer possíveis erros existentes e não verificados no código de (ALMEIDA, 2018) podem ter sido intrinsecamente corrigidos.

Esta primeira avaliação também se repete para as condições em que o fechamento da válvula de saída não é instantâneo, como o caso mostrado na Figura 24, em

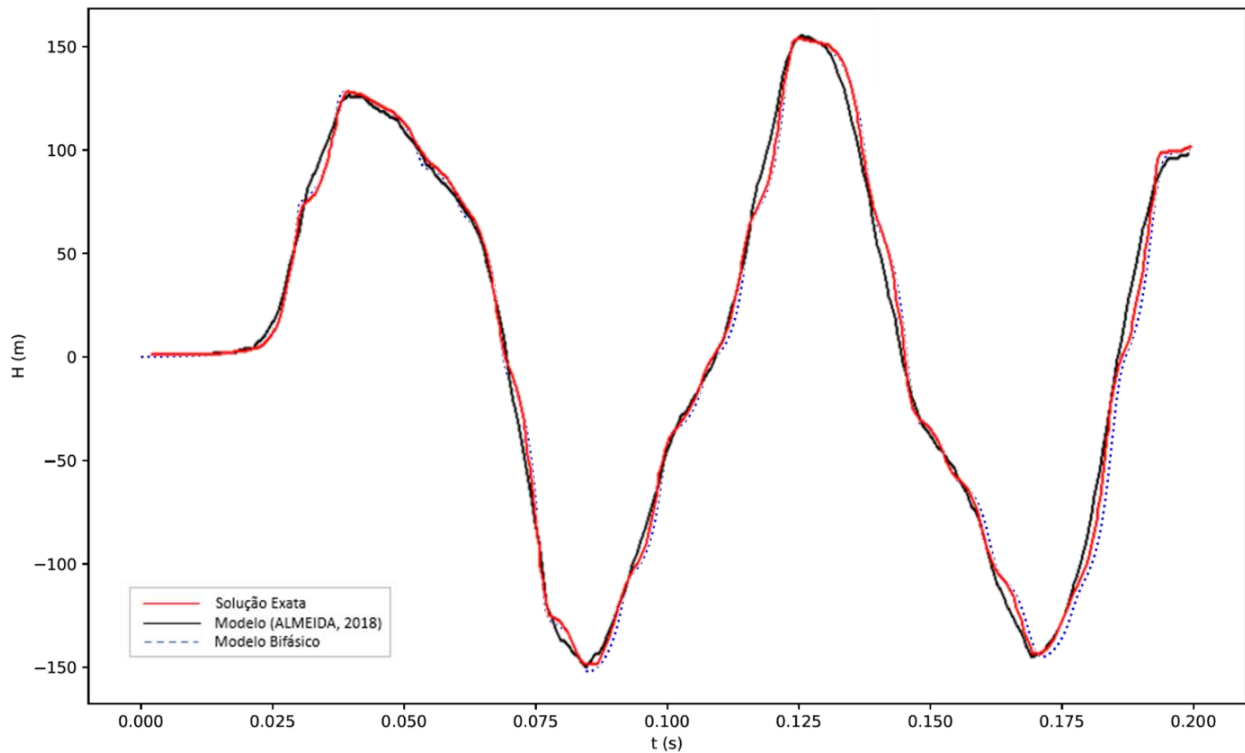
que o tempo de fechamento é de 30 ms, com dados de entrada conforme mostrados na Tabela 7.

Tabela 7 – Dados de entrada para comparação com fluido monofásico (fechamento em 30 ms)

<b>Dado</b>	<b>Valor</b>	<b>Descrição</b>
$L$	20,0	Comprimento da tubulação [m]
$t_{max}$	0,2	tempo máximo [s]
$t_{points}$	300	número de pontos de tempo incluindo os pontos inicial e final
$P_D$	0,0	pressão à direita da válvula [mcl]
$\sigma_{ZD}$	0,0	tensão à direita da válvula [Pa]
$V_0$	1,0	velocidade inicial do fluido [m/s]
$U_0$	0,0	velocidade inicial da parede da tubulação [m/s]
$\rho_l$	1000,0	massa específica da fase líquida [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	1,0	massa específica da fase gasosa [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_t$	7900	massa específica da tubulação [kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	0,3	coeficiente de Poisson da tubulação
$E$	$210 \cdot 10^9$	módulo de elasticidade da tubulação [Pa]
$K_l$	$2,1 \cdot 10^9$	compressibilidade do fluido [Pa]
$f$	0,02	fator de atrito turbulento
$R$	0,399	raio da tubulação [m]
$e$	0,008	espessura da parede da tubulação [m]
$g$	9,81	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$t_c$	0,03	tempo para o fechamento completo da válvula [s]
$m$	0,3	fator de ajuste da curva de fechamento da válvula
$val_{cond}$	Livre	condição de contorno da válvula
$\alpha_0$	0,0	fração de vazio volumétrica inicial
$P_{out}$	2026500	pressão ambiente [Pa]
$Atrito$	Estático	termo de atrito
$n$	0	número de loops de reiteração em um intervalo de tempo
$\gamma$	0	angulação da tubulação
$N$	30	número de elementos da tubulação (definido conforme Courant)

Fonte: Autor.

Figura 24 – Resultado comparativo monofásico (fechamento em 30 ms) – Pressão x Tempo na válvula.



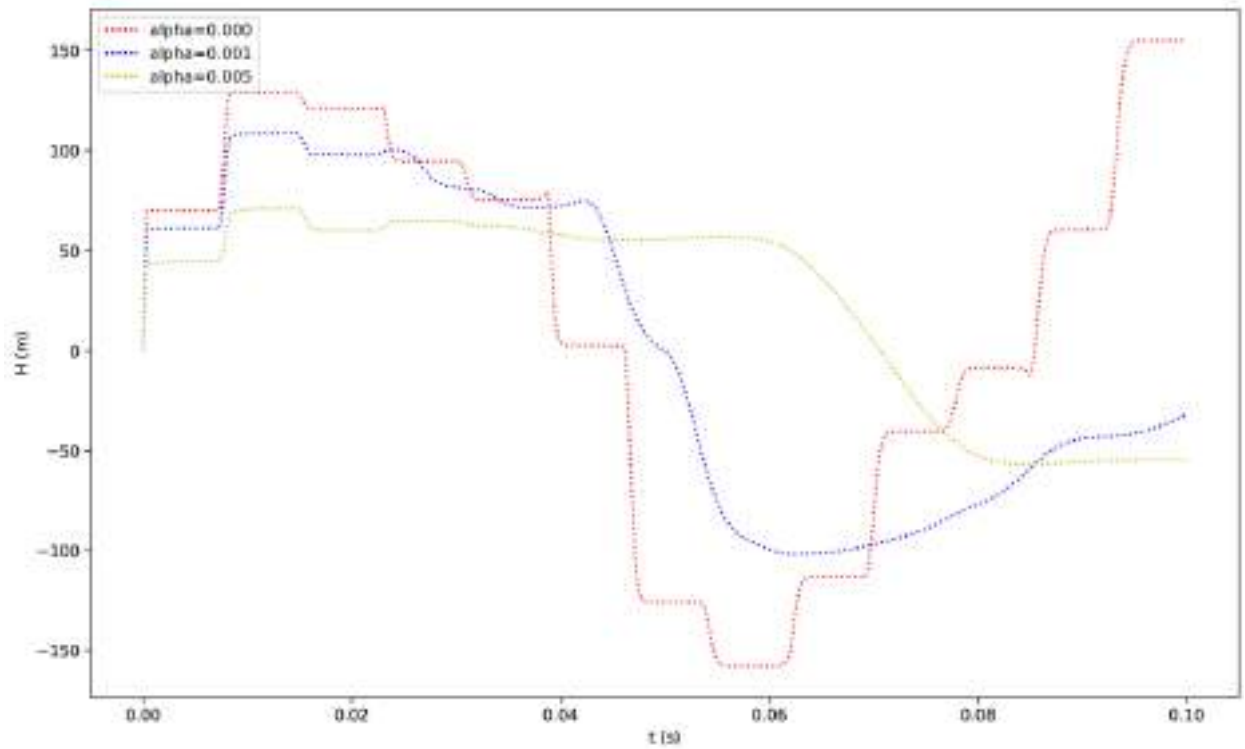
Fonte: Autor.

Feitas estas primeiras comparações, é possível concluir que o modelo bifásico produzido tem ainda melhor capacidade de capturar o comportamento do sistema para os casos de escoamento monofásico.

### 6.1.2 Verificação qualitativa de comportamento com escoamento bifásico

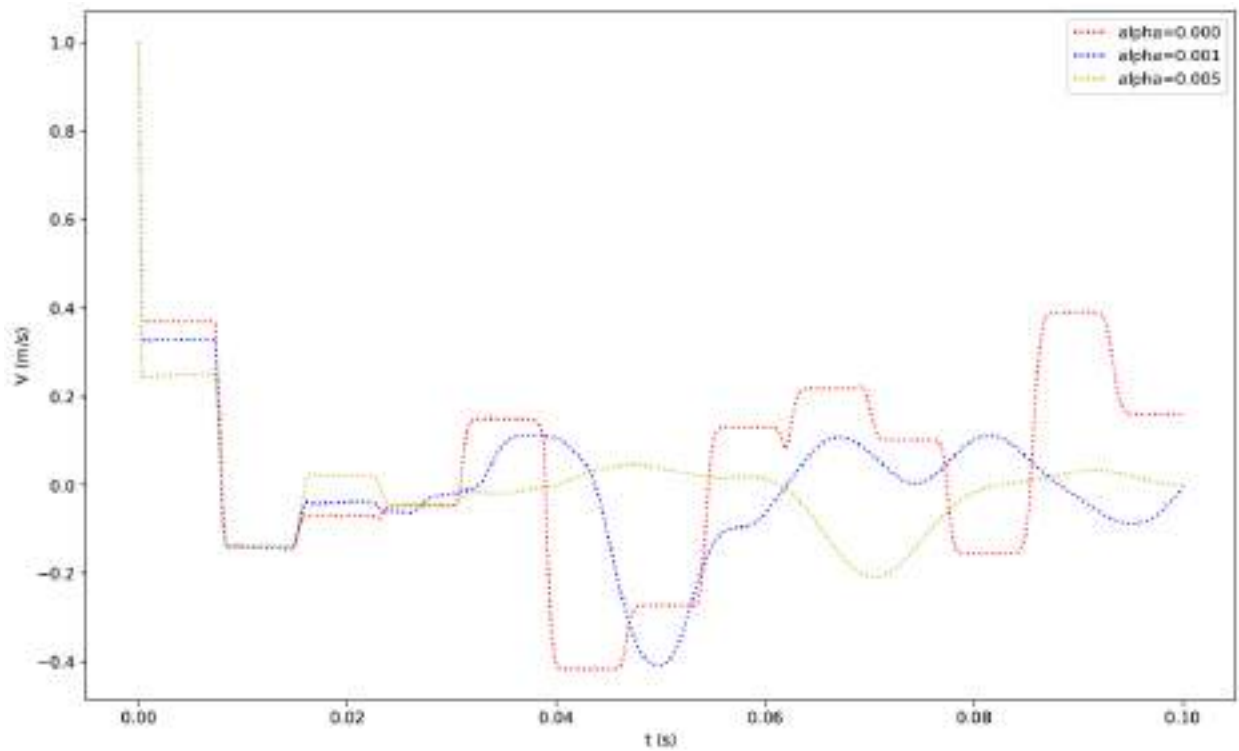
A partir deste ponto, inicia-se a validação do modelo quando se introduz um fluido bifásico homogêneo para ser analisado. Inicialmente, com o intuito de que seja feita uma confirmação qualitativa do resultado, são considerados os mesmos dados de entrada utilizados para a validação do fluido monofásico (Figura 21 a Figura 23), porém com a adição de pequenos incrementos da fração de vazio inicial ( $\alpha_o = 0,001$  e  $\alpha_o = 0,005$ ) para que seja possível verificar se a modificação dos resultados ocorre conforme o que se espera qualitativamente. Nas Figura 25, Figura 26 e Figura 27 pode ser observado o comportamento da curva conforme aumenta-se a fração de vazio.

Figura 25 – Resultado da simulação com fração de vazio – Pressão x Tempo na válvula.



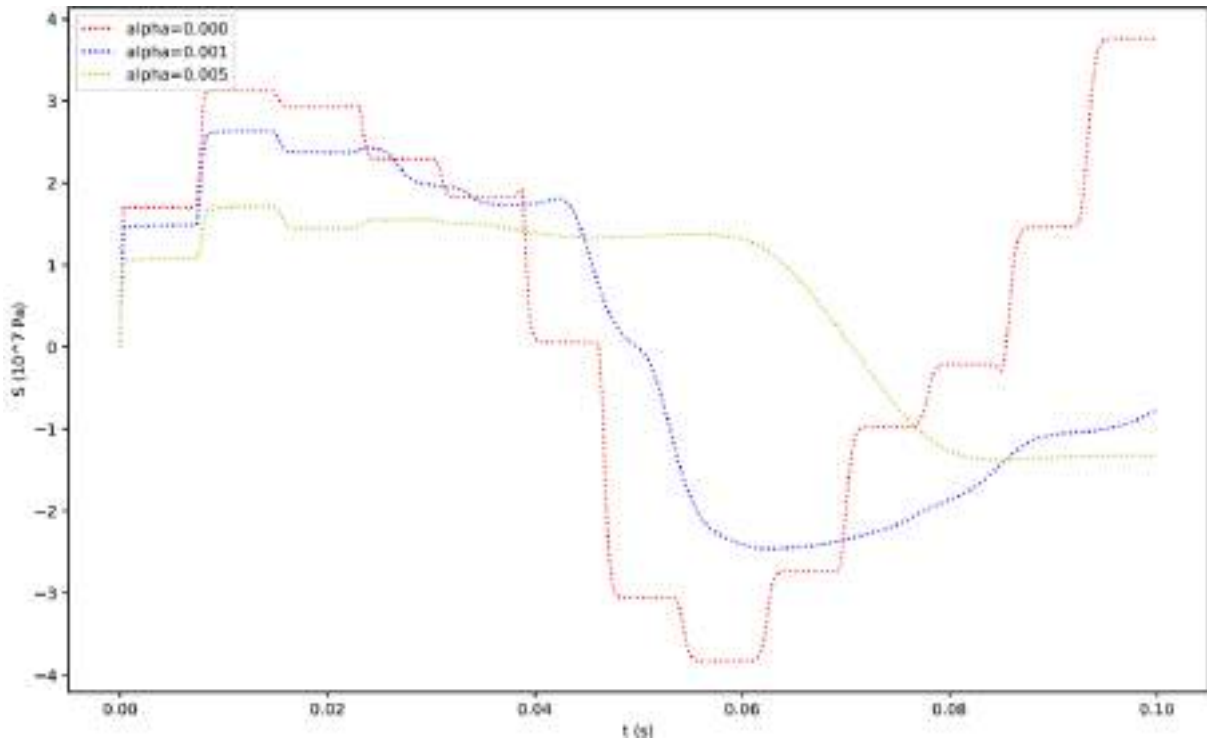
Fonte: Autor.

Figura 26 – Resultado da simulação com fração de vazio – Velocidade do Fluido x Tempo na válvula.



Fonte: Autor.

Figura 27 – Resultado da simulação com fração de vazio – Tensão x Tempo na válvula.



Fonte: Autor.

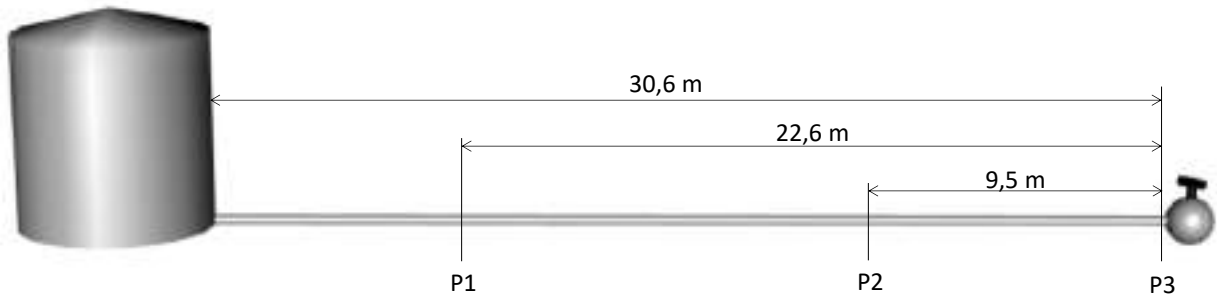
Observando-se o resultado, pode-se verificar que a amplitude dos picos se reduz com o aumento da fração de vazio e que a frequência dos pulsos também tende a se reduzir. O resultado confirma o comportamento físico esperado devido a redução da celeridade no fluido, quando comparado com o fluido monofásico formado apenas pela fase líquida. Verifica-se, também, que o modelo continua sendo capaz de capturar os comportamentos do fluido e da estrutura, assim como demonstrado para o fluido monofásico, mesmo com a introdução de um escoamento bifásico.

### 6.1.3 Verificação comparativa com dados experimentais

Para que seja garantida a capacidade do modelo de produzir bons resultados quantitativamente, foram considerados os dados obtidos em um experimento desenvolvido no *Georgia Institute of Technology*, em que foi analisado o comportamento de um escoamento bifásico homogêneo quando submetido ao fechamento rápido da válvula de saída do escoamento. Os resultados experimentais foram publicados por (CHAUDRY et al., 1990), bem como as principais propriedades e dados de entrada considerados. Dados mais detalhados, não divulgados no artigo indicado, foram gentilmente cedidos pela instituição para fins de pesquisa. Um desenho esquemático do experimento está demonstrado na Figura 28.



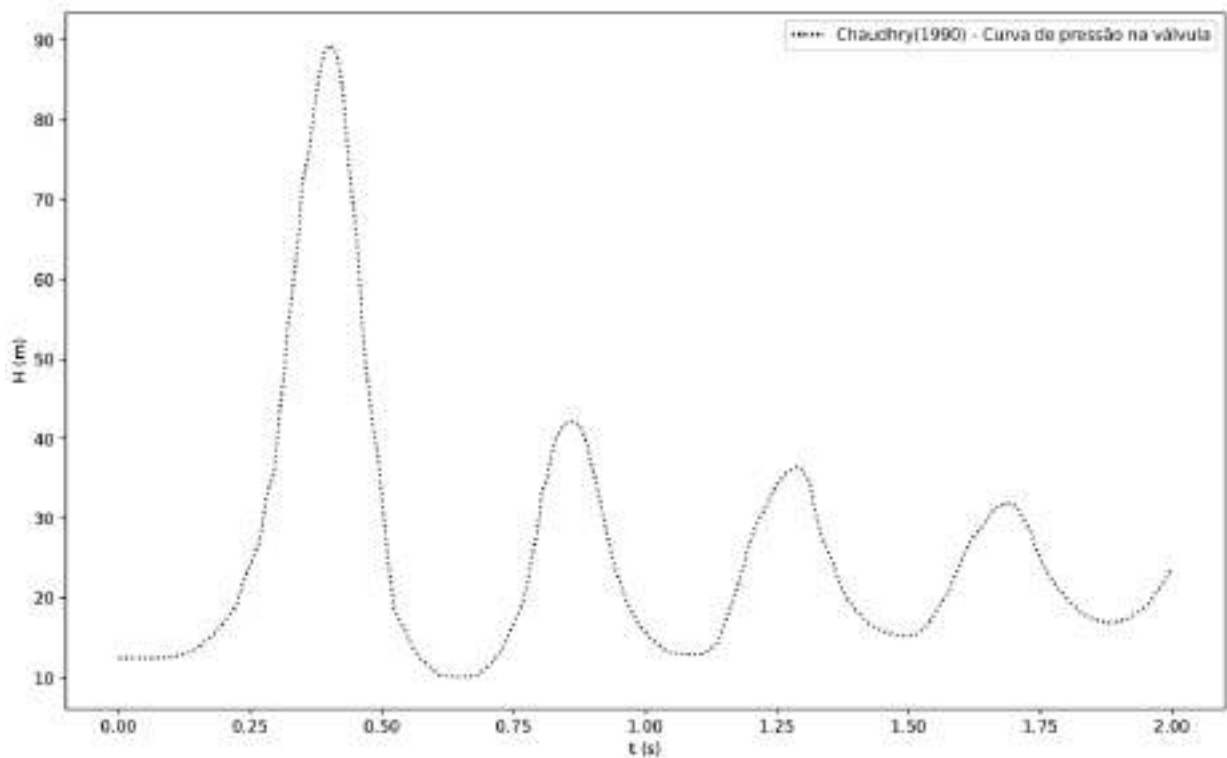
Figura 28 – Modelo esquemático do experimento de CHAUDHRY et al, 1990.



Fonte: Autor.

No experimento, foram integrados sensores de pressão nos diferentes pontos “P” mostrados, e foram obtidos os dados de pressão durante o evento de fechamento rápido da válvula. Para que fosse feita uma comparação com os resultados gerados pelo modelo produzido no presente trabalho, a curva de pressão gerada na seção da válvula (ponto P3) foi inserida como condição de contorno nesta extremidade, e a curva de pressão de saída gerada pela modelo foi comparada com a curva de pressão experimental obtida no ponto P2. Este ponto foi selecionado, visto que se trata do ponto em que ocorrem as maiores variações de pressão, dentro dos dados experimentais disponíveis. Na Figura 29 está demonstrada a curva de pressão inserida como condição de contorno no ponto P3.

Figura 29 – Curva de pressão inserida como condição de contorno no ponto P3.



Fonte: Autor.

Os dados de entrada considerados no modelo para que o experimento pudesse ser adequadamente representado, estão apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Dados de simulação para validação

<b>Dado</b>	<b>Valor</b>	<b>Descrição</b>
$L$	30,6	comprimento da tubulação [m]
$t_{max}$	2,0	tempo máximo [s]
$t_{points}$	800	número de pontos de tempo incluindo os pontos inicial e final
$P_D$	12,5	pressão à direita da válvula [mcl]
$\sigma_{ZD}$	0	tensão à direita da válvula [Pa]
$V_0$	2,94	velocidade inicial do fluido [m/s]
$U_0$	0	velocidade inicial da parede da tubulação [m/s]
$\rho_l$	1000	massa específica da fase líquida [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	1	massa específica da fase gasosa [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_t$	7900	massa específica da tubulação [kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	0,3	coeficiente de Poisson da tubulação
$E$	$2,46 \cdot 10^9$	módulo de elasticidade da tubulação [Pa]
$K_l$	$2,1 \cdot 10^9$	compressibilidade do fluido [Pa]
$f$	0,0195	fator de atrito turbulento
$R$	0,0127	raio da tubulação [m]
$e$	0,00635	espessura da parede da tubulação [m]
$g$	9,81	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$val_{cond}$	Fixa	condição de contorno da válvula
$\alpha_0$	0,0053	fração de vazio volumétrica inicial
$P_{out}$	0,00001	pressão ambiente [Pa]
$Atrito$	Estático	termo de atrito
$n$	0	número de loops de reiteração em um intervalo de tempo
$\gamma$	0	angulação da tubulação
$N$	23	número de elementos da tubulação (definido conforme Courant)

Fonte: Autor.

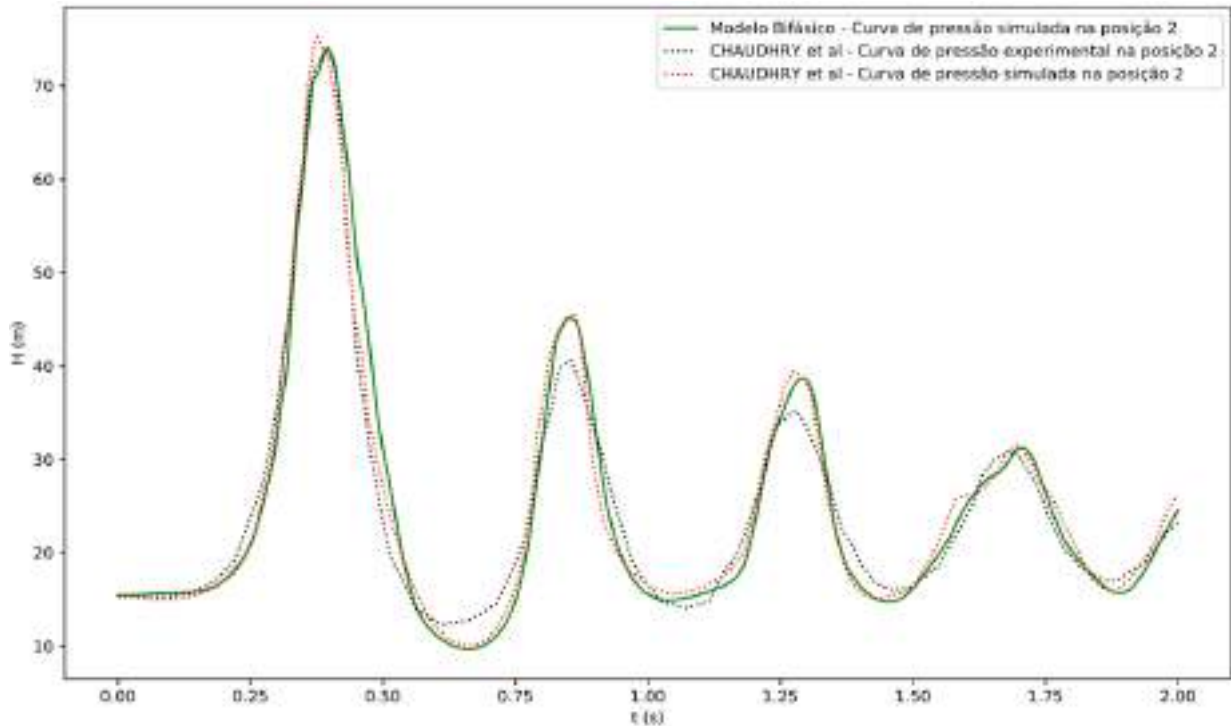
Destaca-se que a espessura de tubulação utilizada extrapola a condição de tubo de parede fina, porém a mesma foi adotada de forma que seja idêntica à tubulação acrílica utilizada no experimento (conforme dados compartilhados pelo *Georgia Institute of Technology*) e, mesmo tolerando-se algum erro atrelado a essa aproximação, poderá ser verificado nas comparações a seguir que os resultados produzidos são aderentes ao experimento.

Considerando-se os dados apresentados, inicialmente foi verificado se, de fato, a celeridade no fluido com o experimento preenchido apenas pela fase fluida está conforme o valor de 715 m/s obtido experimentalmente, apontado em (CHAUDRY et al., 1990). A confirmação está demonstrada na equação abaixo.

$$\begin{aligned}
c_F &= \left[ \rho_l \left( \frac{1}{K_l} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \right]^{-1/2} \\
&= \left[ 1000 \left( \frac{1}{2,1 * 10^9} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - 0,3^2) \frac{2 * 0,0127}{2,46 * 10^9 * 0,00635} \right) \right]^{-1/2} = 715 \text{ m/s}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Após essa breve verificação que, além da confirmação da celeridade no líquido, também garante que os dados estruturais considerados para a tubulação ( $R$ ,  $E$ ,  $e$ ,  $\nu$ ) produzem um resultado de celeridade em acordo com o que foi medido no experimento, foi então realizada a comparação completa entre os dados do modelo bifásico produzido neste trabalho e os dados de pressão do experimento. Além disso, também foram inseridos os resultados da simulação produzida por (CHAUDRY et al., 1990), que também aplicou uma solução de curvas características para a simulação, porém utilizando o esquema de Gabutti e apenas para duas equações, sem contemplar a IFE. O gráfico comparativo pode ser verificado na Figura 30 e os principais dados do gráfico estão indicados na Tabela 9.

Figura 30 – Gráfico comparativo entre experimento e simulações no ponto P2 – Pressão x Tempo.



Fonte: Autor.

Tabela 9 – Resultados comparativos entre experimento e simulações no ponto P2 – Pressão x Tempo

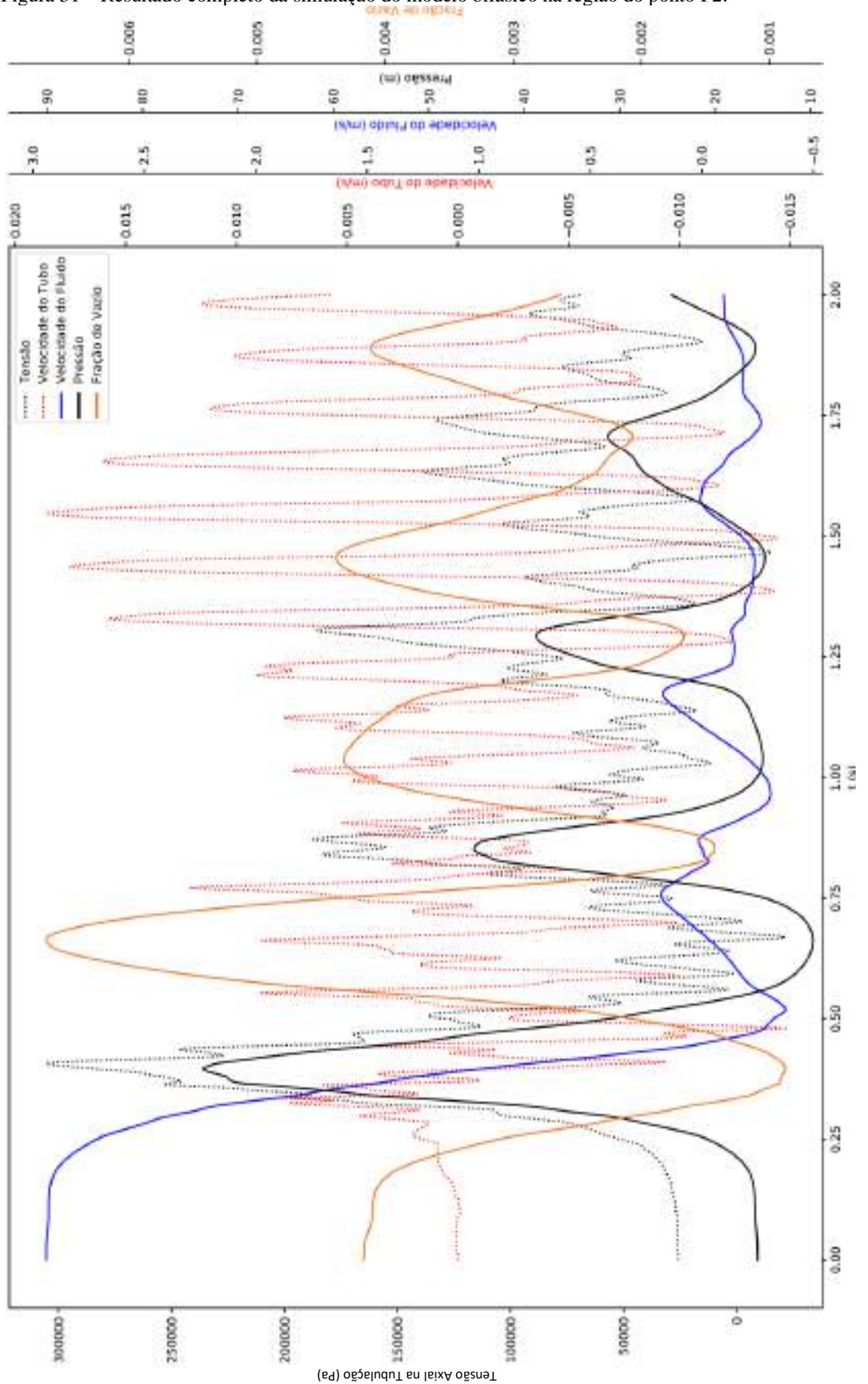
	<i>Modelo Bifásico</i> <i>(Simulação)</i>	<i>CHAUDHRY et al</i> <i>(Simulação)</i>	<i>CHAUDHRY et al</i> <i>(Experimento)</i>	
<b>Pico 1</b>	$P_{max}$ [m]	74,07	75,31	74,05
	$t$ [s]	0,40	0,38	0,40
	<i>erro na pressão</i>	0,02%	1,70%	-
	<i>erro no tempo</i>	0,00%	-4,68%	-
<b>Pico 2</b>	$P_{max}$ [m]	45,21	45,68	40,67
	$t$ [s]	0,85	0,86	0,85
	<i>erro na pressão</i>	11,17%	12,32%	-
	<i>erro no tempo</i>	-0,29%	0,87%	-
<b>Pico 3</b>	$P_{max}$ [m]	38,69	39,51	35,31
	$t$ [s]	1,29	1,28	1,28
	<i>erro na pressão</i>	9,56%	11,90%	-
	<i>erro no tempo</i>	1,10%	0,00%	-
<b>Pico 4</b>	$P_{max}$ [m]	31,27	31,61	30,85
	$t$ [s]	1,71	1,70	1,69
	<i>erro na pressão</i>	1,35%	2,44%	-
	<i>erro no tempo</i>	1,01%	0,41%	-
<b>Média</b>	<i>freq. média</i> [Hz]	2,29	2,27	2,32
	<i>média de erro na pressão</i>	5,52%	7,09%	-
	<i>erro na freq. média</i>	-1,31%	-1,93%	-

Fonte: Autor.

Pode ser verificado que o modelo bifásico desenvolvido neste trabalho foi capaz de capturar os resultados do experimento de forma satisfatória, sendo bastante aderente ao

resultado do primeiro pico de pressão, o que é um dos principais focos das análises transitórias, e mantendo um comportamento geral também bastante aderente, similar ao modelo simulado por (CHAUDRY et al., 1990). Além disso, conforme demonstrado no gráfico da Figura 31, o modelo bifásico desenvolvido foi capaz de capturar a influência da IFE em todos os pontos, o que faz com que o modelo produza resultados mais abrangentes e completos do que os produzidos pela simulação realizada por (CHAUDRY et al., 1990).

Figura 31 – Resultado completo da simulação do modelo bifásico na região do ponto P2.



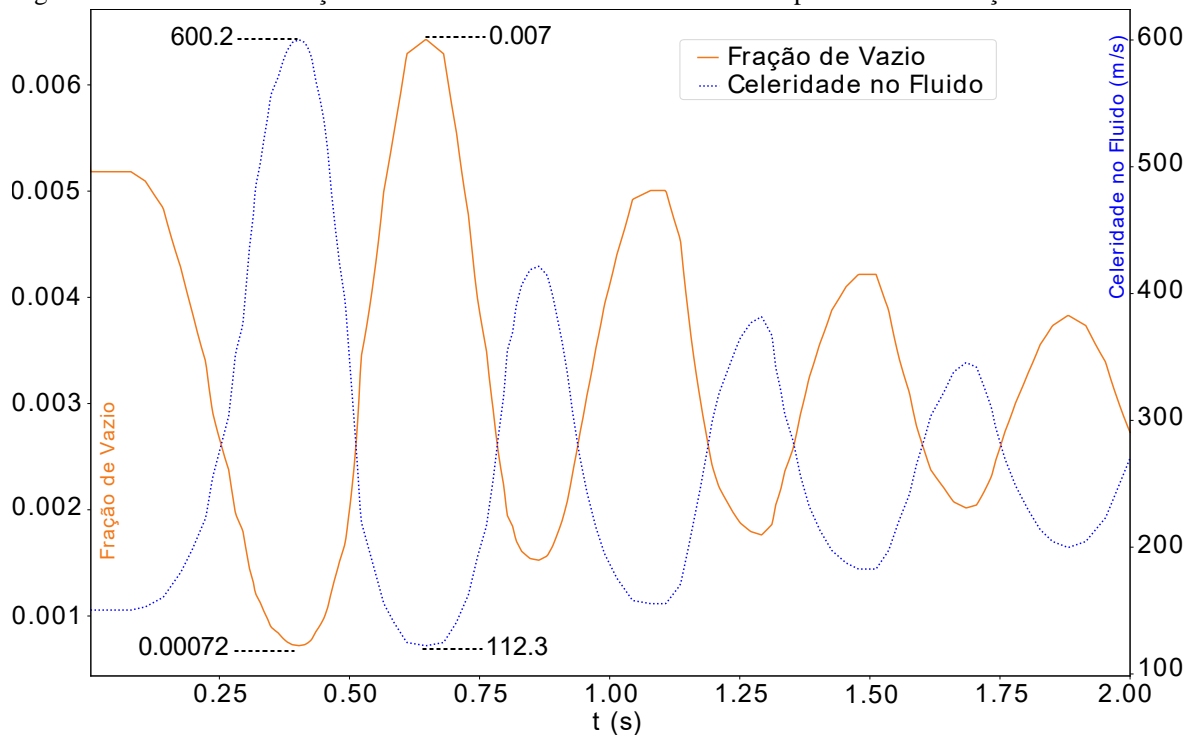
Fonte: Autor.

#### 6.1.4 Verificação do cálculo da celeridade variável

Uma outra verificação feita para complementar a validação dos cálculos realizados pelo modelo foi a comparação da celeridade no fluido calculada manualmente para os pontos de máxima e mínima fração de vazio, com a maior e a menor celeridade no fluido conforme calculadas pelo modelo. As celeridades e frações de vazio máximas e mínimas calculadas pelo modelo estão demonstradas na Figura 32 e as confirmações obtidas por meio do cálculo direto estão demonstradas nas equações (6.2) a (6.9). Com esta confirmação, é possível garantir que o modelo está realizando o cálculo correto da celeridade variável no escoamento bifásico homogêneo.

Ainda com relação à celeridade, destaca-se que para casos em que a celeridade no fluido atinge valores relativamente baixos, quando comparados com a velocidade inicial do escoamento, a aproximação acústica adotada no capítulo 4.1 pode começar a perder validade, aumentando-se o grau de desvio do resultado produzido pela simulação. Para informação, neste presente caso comparativo simulado,  $V_o$  representa 2,6% da menor celeridade atingida no fluido.

Figura 32 – celeridades e fração de vazio máximas e mínimas calculadas pelo modelo na seção da válvula.



Fonte: Autor.

- Confirmação do cálculo da celeridade mínima realizado pelo modelo:

$$\rho_{fmin} = \rho_l(1 - \alpha_{max}) + \rho_g \alpha_{max} = 1000(1 - 0,007) + 0,007 = 992,99 \text{ kg/m}^3 \quad (6.2)$$

$$P_{min} = 90089,2 \text{ Pa} \quad (6.3)$$

$$K_{fmin} = \frac{1}{\frac{\alpha_{max}}{p_{min}} + \frac{1}{K_l}} = \frac{1}{\frac{0,007}{90089,2} + \frac{1}{2,1 * 10^9}} = 12758989,2 \text{ Pa} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} c_{Fmin} &= \left[ \rho_{fmin} \left( \frac{1}{K_{fmin}} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \right]^{-1/2} \\ &= \left[ 992,99 \left( \frac{1}{12758989,2} + (1 - 0,3^2) \frac{2 * 0,0127}{2,46 * 10^9 * 0,00635} \right) \right]^{-0,5} \\ &= 112,3 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (6.5)$$

- Confirmação do cálculo da celeridade máxima realizado pelo modelo:

$$\rho_{fmax} = \rho_l(1 - \alpha_{min}) + \rho_g \alpha_{min} = 1000(1 - 0,00072) + 0,00072 = 999,28 \text{ kg/m}^3 \quad (6.6)$$

$$P_{max} = 877104,2 \text{ Pa} \quad (6.7)$$

$$K_{fmax} = \frac{1}{\frac{\alpha_{min}}{p_{max}} + \frac{1}{K_l}} = \frac{1}{\frac{0,00072}{877104,2} + \frac{1}{2,1 * 10^9}} = 770403871,96 \text{ Pa} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} c_{Fmax} &= \left[ \rho_{fmax} \left( \frac{1}{K_{fmax}} + (1 - \nu^2) \frac{2R}{Ee} \right) \right]^{-1/2} \\ &= \left[ 999,28 \left( \frac{1}{770403871,96} + (1 - 0,3^2) \frac{2 * 0,0127}{2,46 * 10^9 * 0,00635} \right) \right]^{-0,5} \\ &= 600,2 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Feitas estas comparações e análises, é possível garantir que o modelo produzido é capaz de capturar corretamente o comportamento de fluidos monofásicos e de escoamentos bifásicos homogêneos, com IFE, gerando resultados aderentes e confiáveis.



## 6.2 Análise Complementar de Resultados

Neste capítulo, com o objetivo de complementar os resultados apresentados no capítulo anterior, são realizadas simulações para que se possa capturar o impacto de variáveis de importância do modelo sobre o comportamento da curva de pressão na seção da válvula, que se trata da região comumente considerada como a de maior interesse prático. Para que as análises sejam realizadas, utiliza-se como referência o caso simulado para o fluido monofásico demonstrado na Tabela 7 e bifásico apresentado na Tabela 8, aplicando-se alterações estratégicas para se verificar principalmente o impacto da introdução do fluido bifásico no escoamento e as variações da curva de fechamento da válvula, do termo de atrito e do número de iterações do modelo.

### 6.2.1 Variação da curva e do tempo de fechamento da válvula

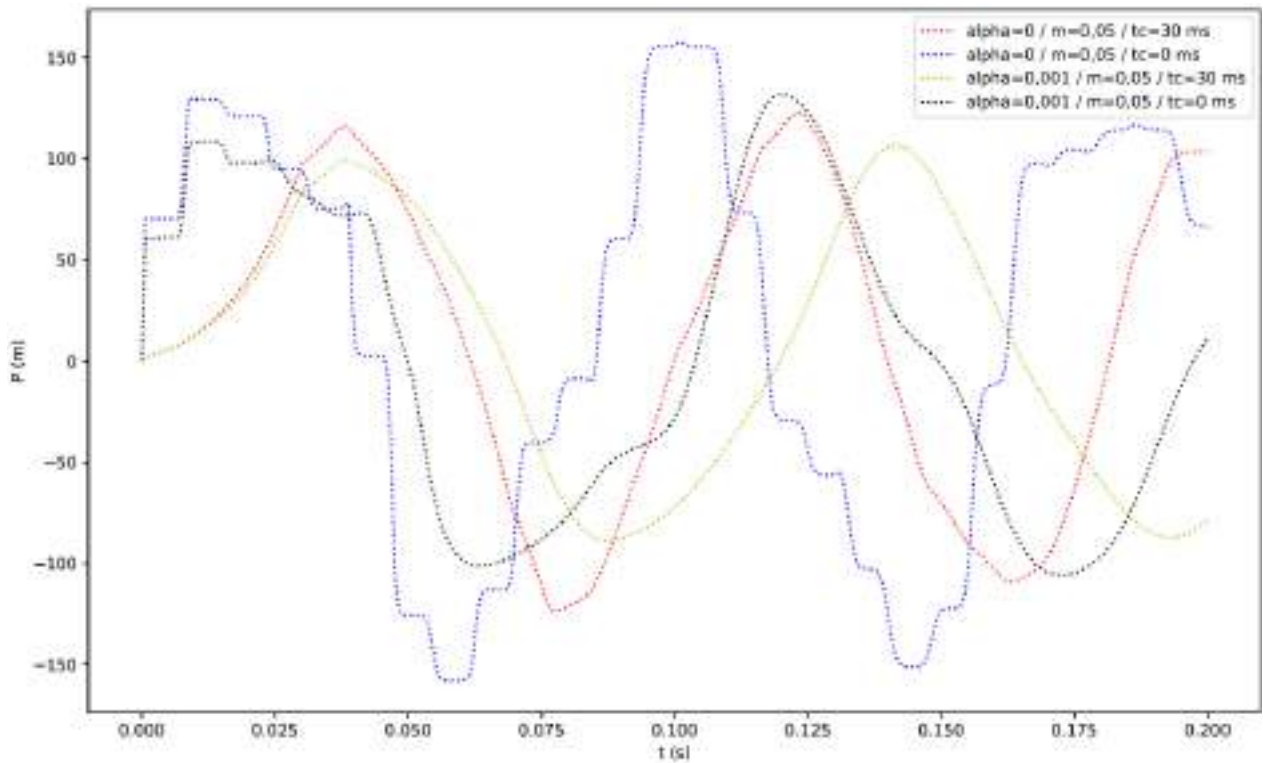
Nas Figura 33, Figura 34 e Figura 35, estão demonstradas as diferentes simulações analisadas. Foram selecionadas para as simulações diferentes curvas de fechamento da válvula ( $m = 0,05$ ,  $m = 0,3$  e  $m = 1$ ), para diferentes frações de vazão ( $\alpha_o = 0$  e  $\alpha_o = 0,001$ ) e com tempos de fechamento diferentes ( $t_c = 30$  ms e  $t_c = 0$ ), para que possa ser analisada a pressão na seção da válvula durante a ação de fechamento. Os dados de entrada considerados na simulação estão demonstrados na Tabela 10.

Tabela 10 – Dados de simulação:  $\alpha_0 = (0 ; 0,001) / m = (0,05 ; 0,3 ; 1) / t_c = (30 ; 0)$  ms

<b>Dado</b>	<b>Valor</b>	<b>Descrição</b>
$L$	20,0	Comprimento da tubulação [m]
$t_{max}$	0,2	tempo máximo [s]
$t_{points}$	300	número de pontos de tempo incluindo os pontos inicial e final
$P_D$	0,0	pressão à direita da válvula [mcl]
$\sigma_{ZD}$	0,0	tensão à direita da válvula [Pa]
$V_0$	1,0	velocidade inicial do fluido [m/s]
$U_0$	0,0	velocidade inicial da parede da tubulação [m/s]
$\rho_l$	1000,0	massa específica da fase líquida [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	1,0	massa específica da fase gasosa [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_t$	7900	massa específica da tubulação [kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	0,3	coeficiente de Poisson da tubulação
$E$	$210 \cdot 10^9$	módulo de elasticidade da tubulação [Pa]
$K_l$	$2,1 \cdot 10^9$	compressibilidade do fluido [Pa]
$f$	0,02	fator de atrito turbulento
$R$	0,399	raio da tubulação [m]
$e$	0,008	espessura da parede da tubulação [m]
$g$	9,81	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$t_c$	<b>(0 ; 0,03)</b>	<b>tempo para o fechamento completo da válvula [s]</b>
$m$	<b>(0,05 ; 0,3 ; 1)</b>	<b>fator de ajuste da curva de fechamento da válvula</b>
$val_{cond}$	Livre	condição de contorno da válvula
$\alpha_0$	<b>(0,0 ; 0,001)</b>	<b>fração de vazio volumétrica inicial</b>
$P_{out}$	2026500	pressão ambiente [Pa]
$Atrito$	Estático	termo de atrito
$n$	0	número de loops de reiteração em um intervalo de tempo
$\gamma$	0	angulação da tubulação
$N$	30	número de elementos da tubulação (definido conforme Courant)

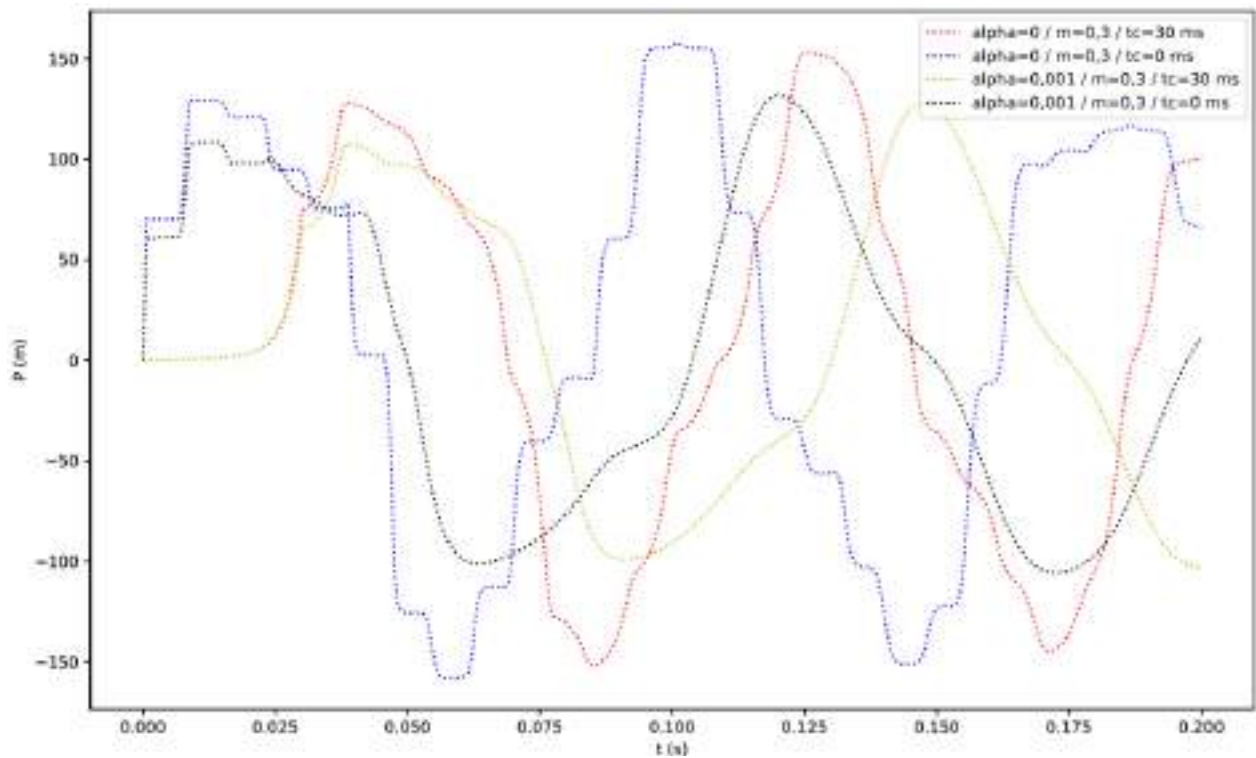
Fonte: Autor.

Figura 33 – Simulação de pressão na seção da válvula:  $\alpha_o = (0 ; 0,001) / m = (0,05) / t_c = (30 ; 0)$  ms.



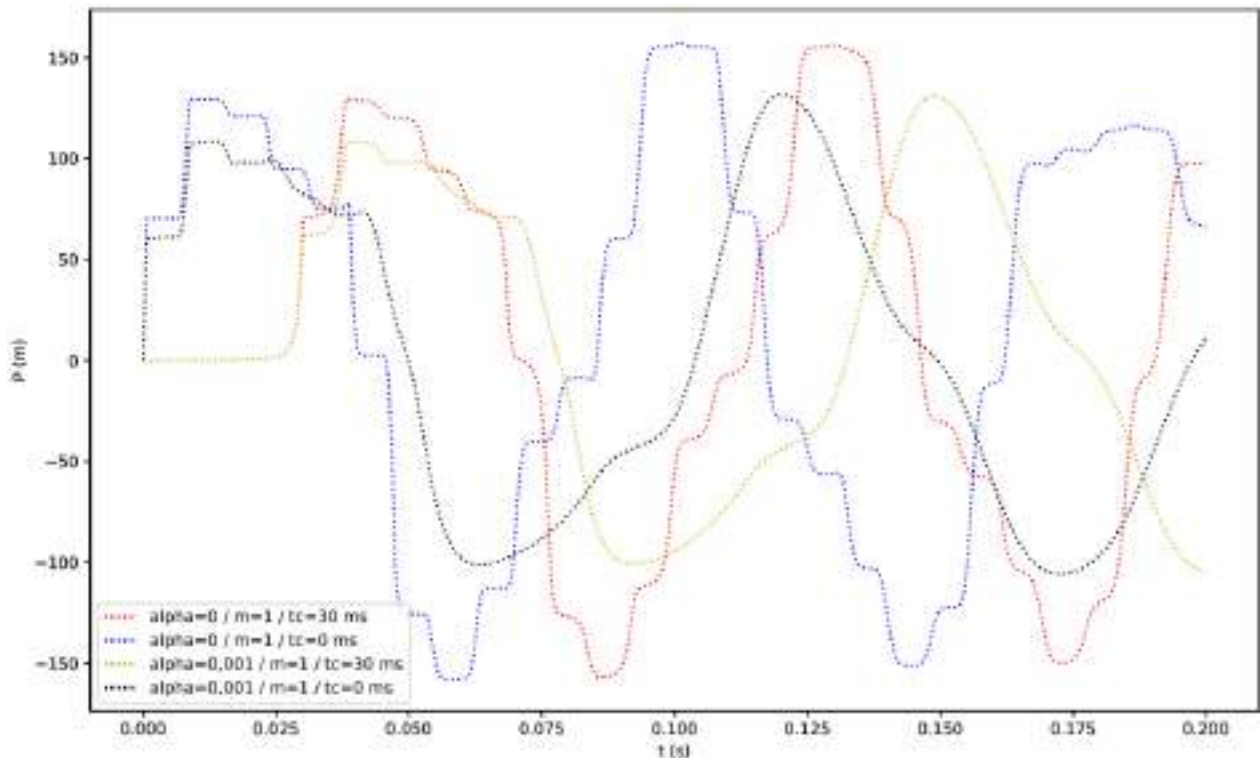
Fonte: Autor.

Figura 34 – Simulação de pressão na seção da válvula:  $\alpha_o = (0 ; 0,001) / m = (0,3) / t_c = (30 ; 0)$  ms.



Fonte: Autor.

Figura 35 – Simulação de pressão na seção da válvula:  $\alpha_o = (0 ; 0,001) / m = (1,0) / t_c = (30 ; 0)$  ms.



Fonte: Autor.

Ao serem considerados os resultados produzidos para essa análise, é possível verificar que, como esperado, quanto menor o tempo de fechamento da válvula, maior é a pressão gerada, para quaisquer que sejam as frações de vazio  $\alpha_o$ . Porém, ao serem variadas as curvas de fechamento  $m$ , para um mesmo tempo de fechamento  $t_c$ , é possível observar que, quanto maior o coeficiente  $m$ , maiores são os picos de pressão, e menor é o grau de atenuação das “batidas de Poisson”. As “batidas de Poisson” são caracterizadas pelas oscilações internas de cada pico produzidas pela contração-expansão gerada na tubulação pela onda de propagação de tensão, que é mais veloz que a propagação da pressão.

Pode-se avaliar que o comportamento está de acordo com o que se espera, pois, valores mais elevados de  $m$  significam dizer que a válvula terá a velocidade de seu fechamento mais acentuada na parte final do processo, gerando-se grande variação de vazão em uma pequena faixa de tempo. Este tipo de perturbação mais rápida é normalmente responsável por picos maiores de pressão no transitório hidráulico produzido pelo evento.

Ao se introduzir a fase gasosa, é possível verificar que os picos de pressão são atenuados, e que existe uma redução na frequência. Além disso, as “batidas de Poisson” aparecem no primeiro pico, mas são mais rapidamente dissipadas nos picos seguintes, evidenciando o comportamento típico atenuante do escoamento bifásico homogêneo. Pode ser observado também que, quanto menor o valor de  $m$ , adotando-se curvas da válvula mais

suaves próximas ao final do fechamento, mais rapidamente ocorre a dissipação das “batidas de Poisson”, inclusive com a presença da fase gasosa.

### 6.2.2 Variação do termo de atrito

Na Figura 36, estão demonstradas diferentes simulações a serem analisadas. Nelas, foram definidas diferentes frações de vazio ( $\alpha_o = 0$ ,  $\alpha_o = 0,001$  e  $\alpha_o = 0,005$ ) com e sem atrito transiente (IAB), para que possa ser analisado o impacto na pressão da seção da válvula gerado pela inclusão do termo de atrito transiente, com dados de entrada como demonstrados na Tabela 11.

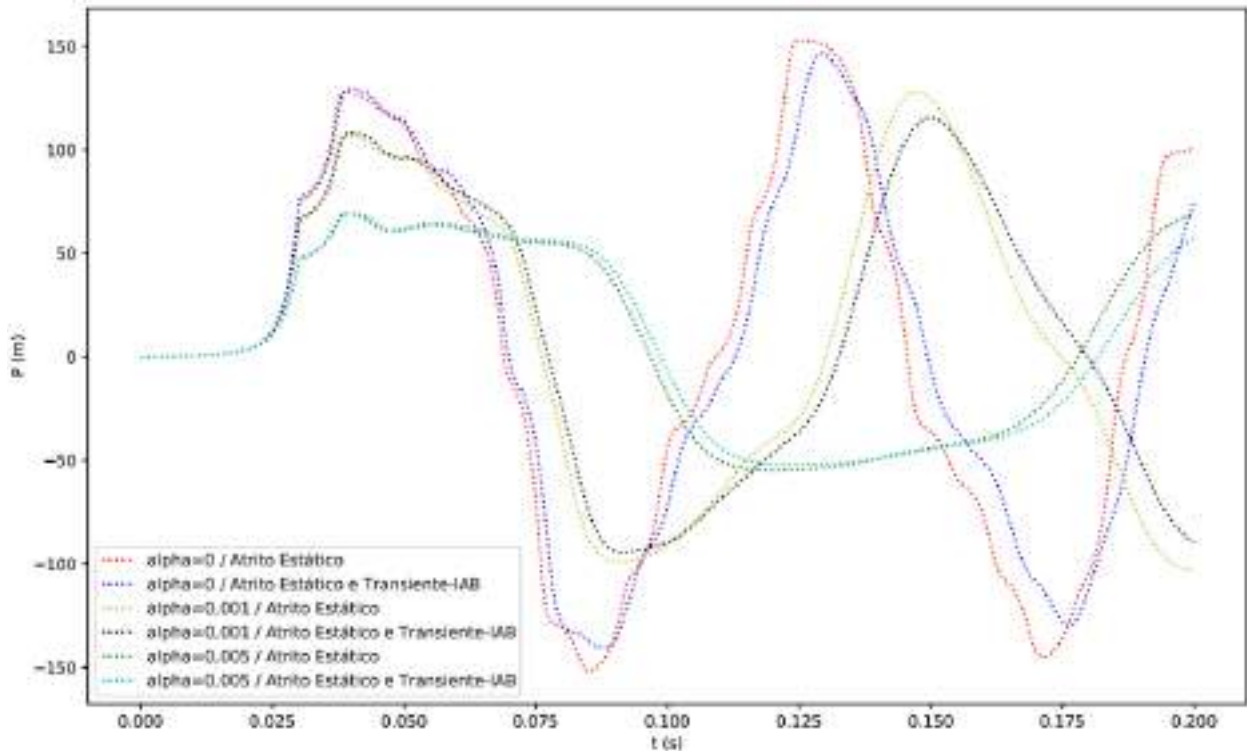
Além disso, foi realizada uma nova simulação comparativa com os dados experimentais, considerando-se os dados de entrada mostrados na Tabela 8, porém variando-se o termo de atrito, para que se verifique a influência da inclusão do termo de atrito transiente (IAB) em comparação com os resultados experimentais. Os dados gerados estão apresentados na Figura 37 e na Tabela 12.

Tabela 11 – Dados de simulação:  $\alpha_o = (0 ; 0,001 ; 0,005)$  / *Atrito Estático* / *Atrito Estático e Transiente*

<b>Dado</b>	<b>Valor</b>	<b>Descrição</b>
$L$	20,0	Comprimento da tubulação [m]
$t_{max}$	0,2	tempo máximo [s]
$t_{points}$	300	número de pontos de tempo incluindo os pontos inicial e final
$P_D$	0,0	pressão à direita da válvula [mcl]
$\sigma_{ZD}$	0,0	tensão à direita da válvula [Pa]
$V_0$	1,0	velocidade inicial do fluido [m/s]
$U_0$	0,0	velocidade inicial da parede da tubulação [m/s]
$\rho_l$	1000,0	massa específica da fase líquida [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_g$	1,0	massa específica da fase gasosa [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_t$	7900	massa específica da tubulação [kg/m <sup>3</sup> ]
$\nu$	0,3	coeficiente de Poisson da tubulação
$E$	$210 \cdot 10^9$	módulo de elasticidade da tubulação [Pa]
$K_l$	$2,1 \cdot 10^9$	compressibilidade do fluido [Pa]
$f$	0,02	fator de atrito turbulento
$R$	0,399	raio da tubulação [m]
$e$	0,008	espessura da parede da tubulação [m]
$g$	9,81	aceleração da gravidade [m/s <sup>2</sup> ]
$t_c$	0,03	tempo para o fechamento completo da válvula [s]
$m$	0,3	fator de ajuste da curva de fechamento da válvula
$val_{cond}$	Livre	condição de contorno da válvula
$\alpha_o$	<b>(0,0 ; 0,001 ; 0,005)</b>	<b>fração de vazio volumétrica inicial</b>
$P_{out}$	2026500	pressão ambiente [Pa]
<b>Atrito</b>	<b>Estático e Transiente</b>	<b>termo de atrito</b>
$n$	0	número de loops de reiteração em um intervalo de tempo
$\gamma$	0	angulação da tubulação
$N$	30	número de elementos (definido conforme Courant)

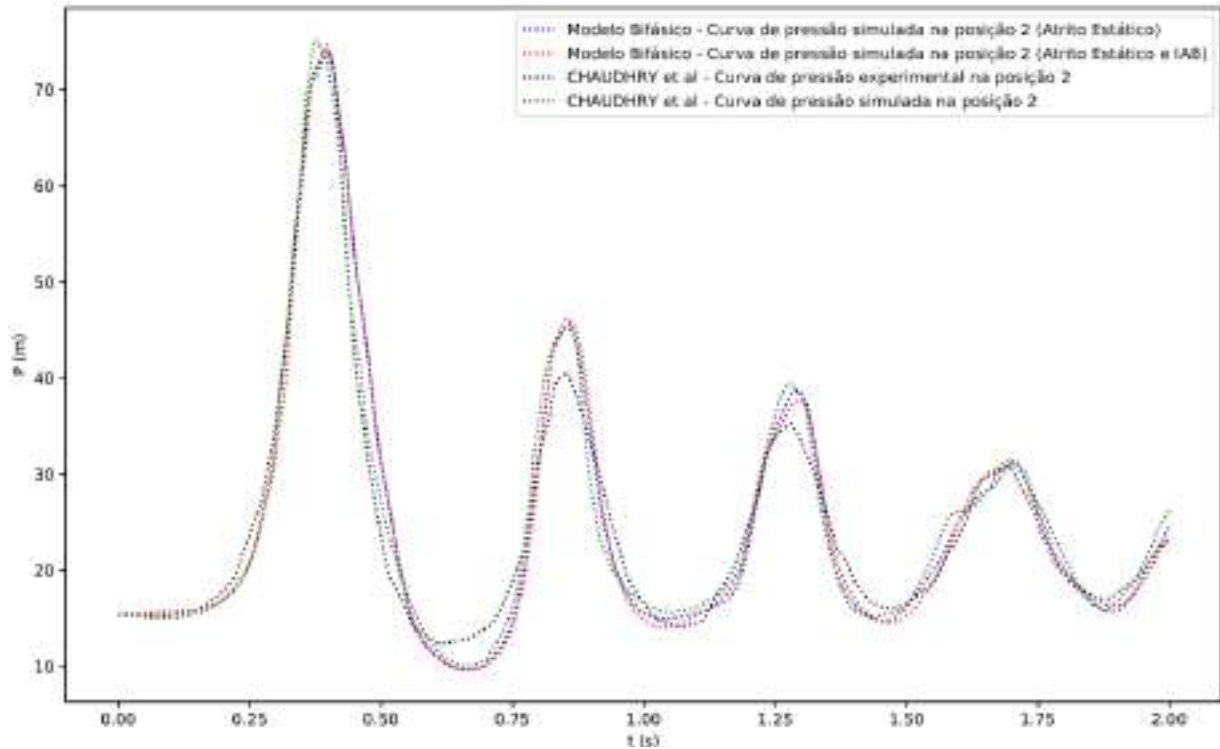
Fonte: Autor.

Figura 36 – Simulação de pressão na válvula:  $\alpha_0 = (0 ; 0,001 ; 0,005)$  / *Atrito Estático* / *Atrito Estático e Transiente*.



Fonte: Autor.

Figura 37 – Resultados comparativos entre experimento e simulações com atrito estático e transiente.



Fonte: Autor.

Tabela 12 – Resultados comparativos entre experimento e simulações com atrito estático e transiente

		<i>Modelo Bifásico (Simulação: Atrito Estático)</i>	<i>Modelo Bifásico (Simulação: Atrito Estático e Transiente-IAB)</i>	<i>CHAUDHRY et al (Experimento)</i>
<i>Pico 1</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	74,07	74,61	74,05
	<i>t [s]</i>	0,40	0,40	0,40
	<i>erro na pressão</i>	0,02%	0,76%	-
	<i>erro no tempo</i>	0,00%	0,00%	-
<i>Pico 2</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	45,21	46,07	40,67
	<i>t [s]</i>	0,85	0,85	0,85
	<i>erro na pressão</i>	11,17%	13,28%	-
	<i>erro no tempo</i>	-0,29%	-0,29%	-
<i>Pico 3</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	38,69	37,60	35,31
	<i>t [s]</i>	1,29	1,29	1,28
	<i>erro na pressão</i>	9,56%	6,49%	-
	<i>erro no tempo</i>	1,10%	1,10%	-
<i>Pico 4</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	31,27	30,96	30,85
	<i>t [s]</i>	1,71	1,70	1,69
	<i>erro na pressão</i>	1,35%	0,34%	-
	<i>erro no tempo</i>	1,01%	0,57%	-
	<i>freq. média [Hz]</i>	2,29	2,30	2,32
<i>Média</i>	<i>média de erro na pressão</i>	5,52%	5,22%	-
	<i>erro na freq. média</i>	-1,31%	-0,74%	-

Fonte: Autor.

Observando-se os resultados apresentados na Figura 36, é possível verificar que, ao ser introduzido o fator de atrito transiente, os primeiros picos de pressão têm pouca modificação, mas os picos seguintes começam a ter uma atenuação maior e uma redução na frequência, assim como previsto por (ABDELDAYEM et al., 2021). É possível observar também que esta mudança de comportamento no fluido ocorreu para diferentes frações de vazio, de forma semelhante.

Na Tabela 12, é possível observar que ao se comparar os resultados obtidos na simulação de atrito transiente, com os dados experimentais, existe uma pequena redução no erro médio dos picos de pressão e da frequência. Além disso, observa-se que os erros associados aos picos de pressão concentrados na segunda metade do transitório tendem a diminuir, assim como previsto por (ABDELDAYEM et al., 2021) sobre a redução dos erros após os picos de pressão iniciais, quando da introdução do termo de atrito transiente.

Analisando-se os dois problemas com resultados demonstrados nas Figura 36 e Figura 37, também é possível verificar que no primeiro problema a atenuação dos picos de pressão subsequentes é maior. Isso possivelmente está ligado ao fato de se tratar de uma tubulação com menor comprimento e em que ocorrem maiores celeridades no fluido. Como



o termo de atrito transiente utilizado se baseia na aceleração instantânea (IAB), ele então é dependente da variação da velocidade, com relação ao tempo e ao espaço. Em situações em que a tubulação é menor em comprimento, e em que a celeridade é maior, a onda de pressão perturba mais vezes o mesmo local da tubulação durante um mesmo período de tempo, e isso faz com que a atenuação tenha tendência de ser maior para estes tipos de caso, assim como verificado. Para informação, a celeridade mínima no fluido, atingida para o caso com atrito transiente (IAB) e com  $\alpha_o = 0,005$  da Figura 36, foi de 436,0 m/s, bastante superior à celeridade do experimento, que foi de 112,3 m/s.

De forma geral, pode-se concluir que a introdução do atrito transiente (IAB) teve a tendência de aproximar os resultados da simulação dos resultados experimentais, gerando pouco impacto nos picos iniciais de pressão e melhorando a convergência dos picos subsequentes, assim como previsto na literatura (ABDELDAYEM et al., 2021).

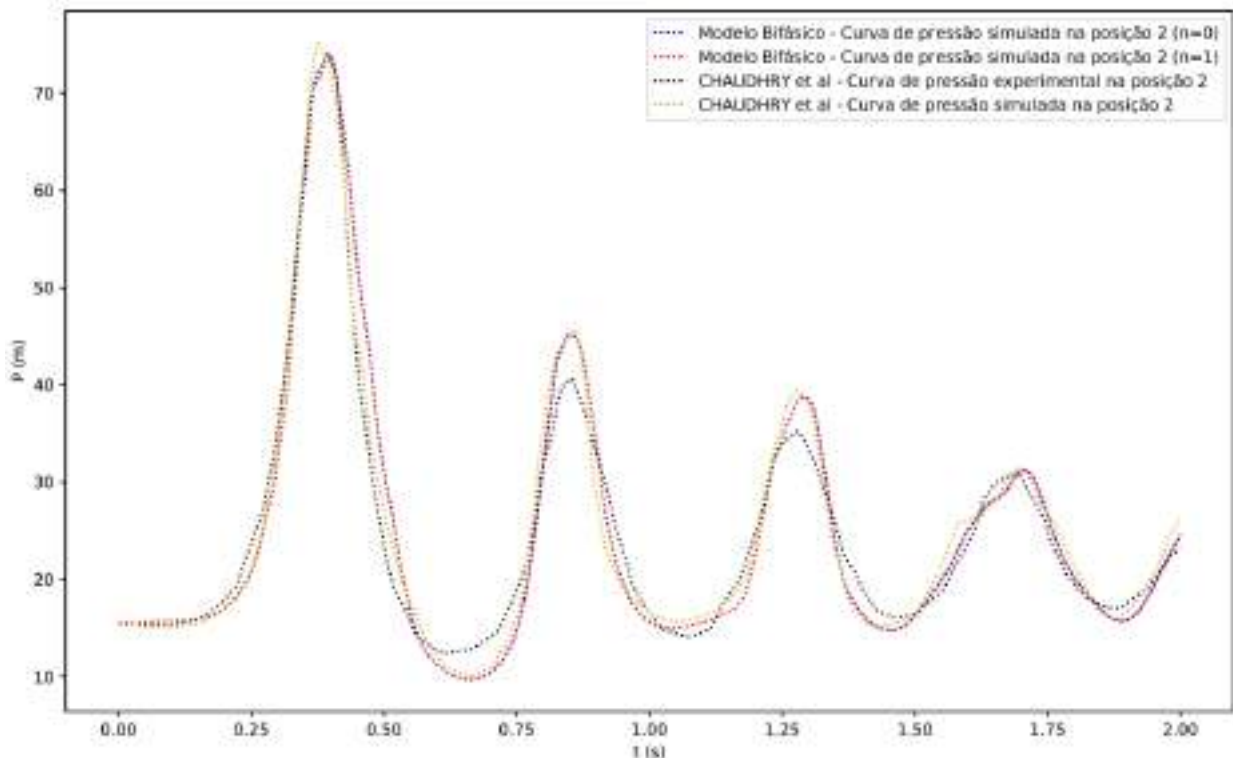
### 6.2.3 Variação do número de iterações

Para se verificar se o resultado calculado precisaria de mais iterações para que convergisse em um resultado mais preciso, foi realizada uma comparação, considerando-se os dados de entrada conforme mostrados na Tabela 8, porém variando-se o número de iterações. Foi considerada uma primeira simulação sem nenhuma reiteração ( $n = 0$ ), e uma segunda simulação com uma iteração de cálculo a mais ( $n = 1$ ).

O procedimento iterativo foi realizado de forma que os valores calculados em um determinado ponto sejam reutilizados para atualizar a celeridade neste mesmo ponto, recalculando-se mais uma vez os valores de interesse na iteração seguinte (procedimento descrito no capítulo 5.1).

Os resultados das simulações estão demonstrados na Figura 38 e na Tabela 13, onde também estão incluídos os dados experimentais para efeito de comparação.

Figura 38 – Resultados comparativos entre experimento e simulação com  $n = (0 ; 1)$ .



Fonte: Autor.

Tabela 13 – Resultados comparativos entre experimento e simulação com  $n = (0 ; 1)$ 

		<i>Modelo Bifásico (Simulação n=0)</i>	<i>Modelo Bifásico (Simulação n=1)</i>	<i>CHAUDHRY et al (Experimento)</i>
<i>Pico 1</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	74,07	74,09	74,05
	<i>t [s]</i>	0,40	0,40	0,40
	<i>erro na pressão</i>	0,02%	0,06%	-
	<i>erro no tempo</i>	0,00%	0,00%	-
<i>Pico 2</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	45,21	45,12	40,67
	<i>t [s]</i>	0,85	0,85	0,85
	<i>erro na pressão</i>	11,17%	10,94%	-
	<i>erro no tempo</i>	-0,29%	-0,29%	-
<i>Pico 3</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	38,69	38,75	35,31
	<i>t [s]</i>	1,29	1,29	1,28
	<i>erro na pressão</i>	9,56%	9,75%	-
	<i>erro no tempo</i>	1,10%	1,10%	-
<i>Pico 4</i>	<i>P<sub>max</sub> [m]</i>	31,27	31,27	30,85
	<i>t [s]</i>	1,71	1,71	1,69
	<i>erro na pressão</i>	1,35%	1,35%	-
	<i>erro no tempo</i>	1,01%	1,01%	-
<i>Média</i>	<i>freq. média [Hz]</i>	2,29	2,29	2,32
	<i>média de erro na pressão</i>	5,525%	5,526%	-
	<i>erro na freq. média</i>	-1,306%	-1,306%	-

Fonte: Autor.

Assim como já previsto anteriormente, é possível verificar na Tabela 13 que, ao se introduzir um *loop* recursivo a mais na solução de cada *step* de tempo, os valores calculados praticamente não sofrem alteração, com as curvas de pressão recaindo uma sobre a outra, como pode ser observado na Figura 38.

Desta forma, confirma-se que a convergência, para este tipo de problema que possui um número elevado de intervalos de tempo, já foi atingida no primeiro cálculo, sem a necessidade de procedimento recursivo até que se atinja um resultado convergente.

Ainda assim, o modelo produzido mantém a capacidade de realizar os cálculos recursivos para que esta mesma questão possa ser avaliada em quaisquer outros casos futuros que possam despertar interesse.

## 7 CONCLUSÃO

O modelo numérico desenvolvido neste trabalho teve como foco o cálculo de transitórios hidráulicos em um sistema formado por um reservatório, uma tubulação reta e uma válvula de saída, com escoamento bifásico homogêneo e interação fluido-estrutura. Buscou-se desenvolver e implementar numericamente uma metodologia adequada para se obter as variáveis de interesse (pressão média no fluido, velocidade média do escoamento, velocidade axial da parede da tubulação, tensão axial na tubulação e fração de vazio) durante transitórios hidráulicos gerados para diferentes configurações do sistema e diferentes situações de fechamento da válvula de saída do escoamento.

Para a elaboração deste trabalho, foi realizada uma ampla análise da literatura sobre o fenômeno dos transitórios hidráulicos, partindo-se de uma contextualização histórica e incluindo-se os estudos mais relevantes e recentes sobre o tema, com foco nos transitórios em tubulações com escoamento bifásico e considerando-se a interação fluido-estrutura entre fluido e tubulação. Diversas soluções matemáticas e numéricas propostas na literatura foram analisadas para a solução dos fenômenos físicos de atrito, compressibilidade e celeridade em escoamentos bifásicos com interação fluido-estrutura, de forma que pudesse ser proposta uma formulação que considerasse corretamente a atuação simultânea destes fenômenos, buscando-se produzir bons resultados.

A solução proposta neste trabalho se baseou na solução matemática do modelo de quatro equações implementado por (ALMEIDA, 2018), tendo sido proposta uma nova modelagem matemática e com o desenvolvimento integral de um novo código numérico em linguagem *Python*. Foram contempladas todas as adequações necessárias nas equações fluido-estruturais e nos coeficientes matemáticos não lineares para um escoamento bifásico. Além disso, após extensa revisão, optou-se por selecionar as metodologias clássica e de aceleração instantânea (IAB) para o atrito entre fluido e tubulação, realizando-se a devida implementação de ambas as formulações no modelo numérico desenvolvido.

A modelagem matemática foi apresentada, bem como o detalhamento do tratamento numérico proposto para a solução das equações do problema, resolvidas pelo método das características, aplicando-se diferenças finitas, com posterior integração numérica e inclusão de procedimento iterativo para a solução.

Para que fosse verificada a confiabilidade dos resultados produzidos pelo modelo desenvolvido neste trabalho, foi realizado um levantamento dos experimentos realizados e divulgados na literatura, estes que são sabidamente dispendiosos e escassos nesta área de estudo, destacando-se o realizado por (CHAUDRY et al., 1990). Também foram considerados os dados obtidos a partir da solução desenvolvida por (TIJSSELING, ARRIS S, 2003). Os resultados e dados dos estudos selecionados foram comparados com os resultados gerados pelo modelo produzido neste trabalho e pôde ser demonstrado que os resultados do modelo são bastante aderentes e confiáveis.

Adicionalmente, foi realizada uma verificação dos resultados obtidos para diferentes configurações do modelo desenvolvido, variando-se a condição de fechamento da válvula de saída do escoamento, o termo de atrito entre o escoamento e a tubulação e o número de iterações, de forma que fosse evidenciado e avaliado o impacto que cada um dos fatores selecionados poderia gerar nos resultados.

Por fim, verifica-se que o modelo proposto e desenvolvido é capaz de produzir bons resultados dentro do escopo de problema no qual ele está inserido, podendo a mesma solução proposta ser aplicada para diversos tipos de escoamento bifásicos com interação fluido-estrutura e ainda ser considerada no desenvolvimento de futuros modelos de transitórios hidráulicos.

## 8 SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

Para continuidade e aprofundamento futuro dos estudos desenvolvidos neste trabalho sugere-se:

- Elaboração de diferentes malhas de processamento, como a escalonada cruzada (ROCHA, M. DA S., 1998);
- Adequação e aplicação de outras metodologias matemáticas para a solução das equações fluidas do problema, como a solução por diferenças finitas com manutenção dos termos convectivos proposta por (OLORUNTOBA; KARA, 2017);
- Implementação de outras formulações de atrito, conforme modelos apresentados por (ABDELDAYEM et al., 2021);
- Implementação da solução para escoamentos bifásicos em sistemas com mais graus de liberdade, considerando-se estudos levantados por (FERRAS et al., 2018); e
- Análise de incerteza de parâmetros.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDELDAYEM, O. M.; FERRÀS, D.; VAN DER ZWAN, S.; KENNEDY, M. Analysis of unsteady friction models used in engineering software for water hammer analysis: Implementation case in WANDA. *Water*, v. 13, n. 4, p. 495, 2021.

ALLIEVI, L. Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione. *Ann. Soc. Ing. Arch. italiana*, 1903.

ALMEIDA, R. S. P. De. *Modelo numérico para cálculo do Transitório Hidráulico e Interação Fluido-Estrutura em sistemas de transporte de fluidos*. 2018. Dissertação de Mestrado – Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2018.

BERGANT, A.; ROSS SIMPSON, A.; VÍTKOVSK, J. Developments in unsteady pipe flow friction modelling. *Journal of Hydraulic Research*, v. 39, n. 3, p. 249–257, 2001.

BERGANT, A.; SIMPSON, A. R.; TIJSSELING, A. S. Water hammer with column separation: A historical review. *Journal of fluids and structures*, v. 22, n. 2, p. 135–171, 2006.

BERGANT, A.; TIJSSELING, A. S.; VÍTKOVSKÝ, J. P.; COVAS, D. I. C.; SIMPSON, A. R.; LAMBERT, M. F. Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing—Part 1: Mathematical tools. *Journal of Hydraulic Research*, v. 46, n. 3, p. 373–381, 2008. a.

BERGANT, A.; TIJSSELING, A. S.; VÍTKOVSKÝ, J. P.; COVAS, D. I. C.; SIMPSON, A. R.; LAMBERT, M. F. Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing—Part 2: Case studies. *Journal of Hydraulic Research*, v. 46, n. 3, p. 382–391, 2008. b.

BERGANT, A.; VAN'T WESTENDE, J. M. C.; KOPPEL, T.; GALE, J.; HOU, Q.; PANDULA, Z.; TIJSSELING, A. S. Water hammer and column separation due to accidental simultaneous closure of control valves in a large scale two-phase flow experimental test rig. In: PRESSURE VESSELS AND PIPING CONFERENCE, 2010, v. 49224, p. 923–932.

BEUTHE, T. G. Review of two-phase water hammer. In: CNS PROCEEDINGS OF THE 1997 CNA/CNS ANNUAL CONFERENCE ON POWERING CANADA'S FUTURE VOL 1, 2, 1997, Canada. p. 1122. Disponível em: [http://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig\\_q=RN:30020437](http://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:30020437)

BONIN, C. C. Water-Hammer Damage to Oigawa Power Station. *Journal of Engineering for Power*, v. 82, n. 2, p. 111–116, 1 abr. 1960. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3672721>

BRENNEN, C. E. *Fundamentals of multiphase flow*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005.

- BRUNONE, B.; GOLIA, U. M.; GRECO, M. Some remarks on the momentum equation for fast transients. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL MEETING ON HYDRAULIC TRANSIENTS WITH COLUMN SEPARATION, 1991, p. 201–209.
- CAO, H.; NISTOR, I.; MOHAREB, M. Effect of boundary on water hammer wave attenuation and shape. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 146, n. 3, p. 04020001, 2020.
- CHAUDHRY, M. H. *Applied Hydraulic Transients*. Third Ed., New York: Springer New York, NY, 2014. XIV–583 p.
- CHAUDRY, M. H.; BHALLAMUDI, S. M.; MARTIN, C. S.; NAGHASH, M. Analysis of transient pressures in bubbly, homogeneous, gas-liquid mixtures. *Journal of fluids engineering*, v. 112, n. 2, p. 225–231, 1990.
- CHENG, H. S.; KHAN, H. J.; ROHATGI, U. S. *Simulation of SBWR startup transient and stability*. [S.l.]: Brookhaven National Lab., 1998.
- CHOI, J.; PEREYRA, E.; SARICA, C.; LEE, H.; JANG, I. S.; KANG, J. Development of a fast transient simulator for gas-liquid two-phase flow in pipes. *Journal of Petroleum science and engineering*, v. 102, p. 27–35, 2013.
- COVAS, D.; STOIANOV, I.; RAMOS, H.; GRAHAM, N.; MAKSIMOVIĆ, Č.; BUTLER, D. Water hammer in pressurized polyethylene pipes: conceptual model and experimental analysis. *Urban Water Journal*, v. 1, n. 2, p. 177–197, 2004.
- D'SOUZA, A. F. Dynamic Response of Fluid Lines. *Transactions of the ASME, Ser. D.*, v. 86, n. 3, p. 589–598, 1964.
- DUAN, H. F.; MENICONI, S.; LEE, P. J.; BRUNONE, B.; GHIDAOU, M. S. Local and integral energy-based evaluation for the unsteady friction relevance in transient pipe flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 143, n. 7, p. 04017015, 2017.
- ELAOU, S.; HADJ-TAÏEB, E. Gas-liquid transient flow analysis in deformable pipes. *International Journal of Current Engineering and Technology*, v. 3, n. 4, p. 1367–1374, 2013.
- ELICSON, G. T.; HENRY, R. E.; HAMMERSLEY, R. J.; BURELBACH, J. P. Dynamic Benchmarking of TREMOLO--A Program for Pipe Line Two-Phase Flow Transient Analysis. In: NINTH INTERNATIONAL TOPICAL MEETING ON NUCLEAR REACTOR THERMAL HYDRAULICS (NURETH-9), SAN FRANCISCO, CALIFORNIA, OCTOBER, 1999, p. 3–8.
- FERNANDES, L. S. *Medição do Campo de Velocidade do Líquido no Escoamento Bifásico, Intermitente, em Duto Horizontal, Utilizando Velocimetria Estereoscópica*. 2017. Tese de Doutorado – PUC-Rio, 2017.
- FERRAS, D.; MANSO, P. A.; COVAS, D. I. C.; SCHLEISS, A. J. Fluid-structure interaction in pipe coils during hydraulic transients. *Journal of Hydraulic Research*, v. 55, n. 4, p. 491–505, 2017.
- FERRAS, D.; MANSO, P. A.; SCHLEISS, A. J.; COVAS, D. I. C. Fluid-structure interaction in straight pipelines: Friction coupling mechanisms. *Computers & Structures*, v. 175, p. 74–90, 2016.



- FERRAS, D.; MANSO, P. A.; SCHLEISS, A. J.; COVAS, D. I. C. One-dimensional fluid–structure interaction models in pressurized fluid-filled pipes: A review. *Applied Sciences*, v. 8, n. 10, p. 1844, 2018.
- FOX, J. A. *Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe*. [S.l.]: Macmillan International Higher Education, 1977.
- GALDINO, J. F. *Modelagem da propagação de pressão em fluidos de perfuração durante kick de gás*. 2016. 153 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica e de Materiais) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.
- GALE, J.; TISELJ, I.; HORVAT, A. Two-fluid model of the WAHA code for simulations of water hammer transients. *Multiphase Science and Technology*, v. 20, n. 3–4, , 2008.
- GIANNOPAPA, C.-G. *Fluid structure interaction in flexible vessels*. 2004. Tese de Doutorado – University of London, King’s College, London, UK, 2004.
- GIBSON, N. R. Pressures in Penstocks Caused by Gradual Closing of Turbine Gates. *Trans., Amer. Soc. Civil Engrs.*, v. 83, p. 707–775, 1919.
- HETSRONI, G. *Handbook of multiphase systems, Hemisphere Pub.* [S.l.]: Hemisphere Publishing Corporation, 1982.
- HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, v. 39, n. 1, p. 201–225, 1981.
- HOU, X.; SUN, Z.; LEI, W. Capability of RELAP5 code to simulate the thermal-hydraulic characteristics of open natural circulation. *Annals of Nuclear Energy*, v. 109, p. 612–625, 2017.
- JENSEN, R. K.; LARSEN, J. K.; LASSEN, K. L. *Modelling of a Two Phase Water Hammer*. 2018. Master thesis – Aalborg University, Denmark, 2018.
- JOUKOWSKI, N. E. Waterhammer Report (in russian). *Mem. Imperial Academy Soc. of St. Petersburg*, v. 9, n. 5, , 1898.
- KJERRUMGAARD JENSEN, R.; KÆR LARSEN, J.; LINDGREN LASSEN, K.; MANDØ, M.; ANDREASEN, A. Implementation and validation of a free open source 1d water hammer code. *Fluids*, v. 3, n. 3, p. 64, 2018.
- KOELLE, E. Transientes hidráulicos em instalações de condutos forçados: aplicações em engenharia. 1983.
- KOLEV, N. I. *Multiphase flow dynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- LAKSHMANAN, S. P.; PANDEY, M.; KUMAR, P. P.; IYER, K. N. Study of startup transients and power ramping of natural circulation boiling systems. *Nuclear engineering and design*, v. 239, n. 6, p. 1076–1083, 2009.
- LI, M. Transient Two-Phase Flow Modeling. In: 76TH SEMI-ANNUAL ADVISORY BOARD MEETING BROCHURE AND PRESENTATION, 2010, Oklahoma, OK, USA.
- MAMBRETTI, S. *Water hammer simulations*. [S.l.]: WIT press, 2013.
- MANDAIR, S.; MAGNAN, R.; MORISSETTE, J.-F.; KARNEY, B. Energy-based evaluation of 1D unsteady friction models for classic laminar water hammer with comparison to CFD. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 146, n. 3, p. 04019072, 2020.

- MARCEL, C. P.; ROHDE, M.; VAN DER HAGEN, T. Experimental and numerical investigations on flashing-induced instabilities in a single channel. *Experimental thermal and fluid science*, v. 33, n. 8, p. 1197–1208, 2009.
- MARTINS, N. M. C.; BRUNONE, B.; MENICONI, S.; RAMOS, H. M.; COVAS, D. I. C. CFD and 1D approaches for the unsteady friction analysis of low Reynolds number turbulent flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 143, n. 12, p. 04017050, 2017.
- MELIKHOV, O.; MELIKHOV, V.; PARFENOV, Y.; DAVYDOV, M.; TISELJ, I.; GALE, J.; PRIBATURIN, N.; ALEKSEEV, M. Modeling of Water Hammer in a Vertical Tube with WAHA code. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE NUCLEAR ENERGY FOR NEW EUROPE, PORTOROŽ, SLOVENIA, 2008, p. 1–7.
- MINAMI, K.; SHOHAM, O. Transient two-phase flow behavior in pipelines-experiment and modeling. *International journal of multiphase flow*, v. 20, n. 4, p. 739–752, 1994.
- OLORUNTOBA, O.; KARA, F. Simplified transient two-phase model for pipe flow. 2017.
- PAL, S.; HANMAIAHGARI, P. R.; KARNEY, B. W. An Overview of the Numerical Approaches to Water Hammer Modelling: The Ongoing Quest for Practical and Accurate Numerical Approaches. *Water*, v. 13, n. 11, p. 1597, 2021.
- PROSPERETTI, A.; TRYGGVASON, G. *Computational methods for multiphase flow*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- ROCHA, R. G. Da. *Interação Fluido-Estrutura em sistemas de tubulações conduzindo líquidos via Método de Glimm*. 2011. Tese de Doutorado – Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, 2011.
- ROCHA, M. da S. *Influência do fator de atrito no cálculo do transiente hidráulico*. 1998. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 1998.
- SIMIN, O. Translation of Waterhammer Report . *Proc. Amer. Water Works Assoc.*, v. 24, p. 341–424, 1904.
- SINHA, A. *Vibration of mechanical systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- SOARES, A. K.; MARTINS, N.; COVAS, D. I. C. Investigation of transient vaporous cavitation: experimental and numerical analyses. *Procedia Engineering*, v. 119, p. 235–242, 2015.
- STREETER, V. L.; WYLIE, E. B. *Fluid Transients*. First Ed., New York: McGraw-Hill Book Company, 1978.
- TAITEL, Y.; SHOHAM, O.; BRILL, J. P. Simplified transient solution and simulation of two-phase flow in pipelines. *Chemical engineering science*, v. 44, n. 6, p. 1353–1359, 1989.
- THORLEY, A. R. D. *Fluid transients in pipeline systems: a guide to the control and suppression of fluid transients in liquids in closed conduits*. Second Ed., London: Professional Engineering Publishing Limited, 2004.
- TIJSSELING, A S. Fluid-structure interaction in case of water hammer with cavitation. *Ph. D. Thesis*, 1993.

- TIJSSELING, A. S. Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: a review. *Journal of Fluids and Structures*, v. 10, n. 2, p. 109–146, 1996.
- TIJSSELING, A. S. Water hammer with fluid–structure interaction in thick-walled pipes. *Computers & structures*, v. 85, n. 11–14, p. 844–851, 2007.
- TIJSSELING, Arris S. Exact solution of linear hyperbolic four-equation system in axial liquid-pipe vibration. *Journal of Fluids and Structures*, v. 18, n. 2, p. 179–196, 2003.
- TISELJ, I.; ČERNE, G. Some comments on the behavior of the RELAP5 numerical scheme at very small time steps. *Nuclear science and engineering*, v. 134, n. 3, p. 306–311, 2000.
- TISELJ, I.; PETELIN, S. Modelling of two-phase flow with second-order accurate scheme. *Journal of Computational Physics*, v. 136, n. 2, p. 503–521, 1997.
- VAN DUYN, D. A.; MERILO, M. Water Hammer Handbook for Nuclear Plant Engineers and Operators. *Electric Power Research Institute (EPRI), TR-106438*, 1996.
- VARDY, A. E.; BROWN, J. M. B. Transient turbulent friction in fully rough pipe flows. *Journal of Sound and Vibration*, v. 270, n. 1–2, p. 233–257, 2004.
- VARDY, A. E.; BROWN, J. M. B. Transient turbulent friction in smooth pipe flows. *Journal of sound and vibration*, v. 259, n. 5, p. 1011–1036, 2003.
- VÍTKOVSKÝ, J. P.; LAMBERT, M. F.; SIMPSON, A. R.; BERGANT, A. Advances in unsteady friction modelling in transient pipe flow. 2000,
- WALLIS, G. B. *One-dimensional Two Phase Flow*. New York: McGraw-Hill, 1969.
- WIGGERT, D. C.; TIJSSELING, A. S. Fluid transients and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping. *Appl. Mech. Rev.*, v. 54, n. 5, p. 455–481, 2001.
- WIGGERT, Dc. Coupled transient flow and structural motion in liquid-filled piping systems: a survey. In: PROCEEDINGS OF THE ASME PRESSURE VESSELS AND PIPING CONFERENCE, 1986, v. 25,
- WOOD, D. J.; DORSCH, R. G.; LIGHTNER, C. Wave-plan analysis of unsteady flow in closed conduits. *Journal of the Hydraulics Division*, v. 92, n. 2, p. 83–110, 1966.
- WOOD, F. M. *Report No. 65 - History of Waterhammer*. Ontario, Canada.: [s.n.], 1970.
- XING, L.; SELA, L. Transient simulations in water distribution networks: TSNet python package. *Advances in Engineering Software*, v. 149, p. 102884, 2020.
- ZÁRUBA, J. *Water hammer in pipe-line systems*. [S.l.]: Elsevier, 1993.

---

---

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
Diretoria de Pesquisa, Desenvolvimento e Ensino  
Av. Prof. Lineu Prestes, 2242 – Cidade Universitária CEP: 05508-000  
Fone/Fax(0XX11) 3133-8908  
SÃO PAULO – São Paulo – Brasil  
<http://www.ipen.br>

**O IPEN é uma Autarquia vinculada à Secretaria de Desenvolvimento, associada à Universidade de São Paulo e gerida técnica e administrativamente pela Comissão Nacional de Energia Nuclear, órgão do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações.**

---

---