UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

Sobre uma Sistematização do Eletromagnetismo

NELSON PINHEIRO ANDION

Dissertação apresentada ao Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Filosofia

Área de Concentração: LÓGICA
Orientador: PROF. DR. NEWTON C. A. DA COSTA

Versão corrigida e acrescida com as sugestões da Comissão Julgadora

SÃO PAULO
Janeiro de 2003

Agradecimentos

Ao
Prof. Dr. Newton C. A. da Costa,
pela orientação.

Aos Professores
Dr. Emerson J. V. de Passos, Dr. Roque da C. Caiero e Ricardo Miranda Filho,
pelas críticas e sugestões.

Aos Membros da Comissão Julgadora,
Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues e Prof. Dr. Edélcio Gonçalves de Souza,
pelas valiosas sugestões, incorporadas a esta versão final.

Resumo

É apresentada uma sistematização do eletromagnetismo com base em oito axiomas enunciados informalmente. O cerne desse sistema de axiomas consiste do princípio de reciprocidade, da conservação da carga e do princípio de superposição. A equação da força de Lorentz decorre dos cinco primeiros axiomas. A lei de Faraday é postulada após mostrar-se que em alguns casos particulares ela pode ser inferida, mesmo galileanamente, dos axiomas anteriores. No caso não-estacionário, no entanto, o conjunto de equações torna-se insolúvel, o que é corrigido com a definição da corrente de deslocamento, tendo-se assim as equações de Maxwell. A abordagem permite esclarecer aspectos obscuros da teoria eletromagnética, como a origem e a duplicidade do potencial escalar magnético e a analogia entre os vetores descritivos do campo elétrico e os do campo magnético. Além disso, ela é formulada sem apelo a um particular sistema de unidades. Ao contrário, as fórmulas incorporam cinco constantes, arbitrárias a menos de uma relação entre quatro delas e a velocidade da luz. Os sinais dessas constantes são analisados mostrando-se, a partir de considerações sobre o balanço de energia, que estão limitados por apenas duas desigualdades, podendo-se-lhes em particular atribuir a todas o sinal positivo, ainda que existam três outras alternativas fisicamente equivalentes. A escolha simultânea de um sistema de unidades mecânicas e das cinco constantes acima referidas determina um sistema de unidades eletromagnéticas. A sistematização aqui elaborada pode servir de base para uma apresentação pedagógica concisa da teoria eletromagnética, onde um pequeno conjunto de princípios básicos substitui o acervo de leis usualmente postulado.

Palavras-chave: filosofia da ciência; filosofia da física; fundamentos das teorias científicas; física clássica; eletromagnetismo.

Abstract

A systematization of electromagnetism based on eight informally stated axioms is developed. The kernel of this system of axioms consists of the reciprocity principle, the conservation of electric charge and the superposition principle. Lorentz force equation arises as a consequence of the first five axioms. Faraday's law of induction is postulated after being itself inferred from the previous axioms in the case of some particular electromagnetic systems. Nevertheless, in the time dependent case the set of electromagnetic equations becomes unsolvable. In order to achieve consistency, displacement current is defined, leading to Maxwell's equations. This approach clarifies some obscure features of electromagnetic theory as the twofoldness of scalar magnetic potential and the analogy between the vector describing the electric fields and those describing the magnetic fields. Furthermore, it is proposed without invoking the aid of any particular system of units. Instead, formulae bear five constants deriving from the principles which are previously assumed. These constants are arbitrary, unless for a single relation holding among four of them and the velocity of light. Based on energy balance considerations, an analysis of the signs of the referred constants is performed showing that they are restricted by only two inequalities. In particular, each one can be made positive, although three other sets of signs are allowable and physically equivalent. The simultaneous choice of a system of mechanical units and of these constants defines a system of electromagnetic units. The systematization presented here might be used as a basis for a concise pedagogical approach to electromagnetic theory, where the group of laws usually proposed is replaced by a small amount of basic principles.

Key-words: philosophy of science; philosophy of physics; foundations of scientific theories; classical physics; electromagnetism.

Notação e Nomenclatura

A abordagem é feita sem adoção de um particular sistema de unidades; cinco constantes ajustáveis suprem a diversidade de sistemas e, mesmo, uma presumível ampliação do seu número. Ao conjunto dessas constantes $\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$, correspondem os seguintes valores ordenados, para os sistemas usuais:

SI $\{1/\epsilon_0, \mu_0, 1, 1; 1\}$;
Gaussiano $\{4\pi, 4\pi/c, 1, 1/c; 4\pi\}$;
Heaviside-Lorentz $\{1, 1/c, 1, 1/c; 1\}$.

Denomina-se e denota-se:
vetor campo elétrico, **E**;
vetor deslocamento, **D**;
vetor indução magnética, **B**;
vetor intensidade magnética, **H**.

Índice

Introdução

O eletromagnetismo é um ramo antigo do conhecimento. A abordagem da sua fenomenologia evoluiu desde observações episódicas e o estabelecimento de uma nomenclatura incipiente, na antiguidade, até a completa sistematização teórica, por Maxwell [1] no século XIX, passando depois pela sua integração à Física Moderna através da relatividade - que contribuiu para desvelar - e chegando aos nossos dias sob roupagens matemáticas atualizadas. Algumas vezes independentemente, outras de forma concomitante, a linguagem matemática a ele associada evoluiu correspondentemente, propiciando o melhor entendimento dos fenômenos e a ampliação do leque de aplicações. A forma como os manuais incorporam essa linguagem está condicionada, em grande parte, por necessidades objetivas da comunidade científica e, como pretendemos mostrar neste trabalho, pode ela própria condicionar a apresentação e a ênfase dos conceitos que embasam a teoria.

Um manual comumente reflete não só a realidade acadêmica do centro onde é elaborado, como também a realidade econômica da região em que esse centro se encontra e do momento histórico que ela atravessa. Da primeira injunção é testemunha a grande quantidade de seções e capítulos optativos dedicados a aplicações da teoria exposta como tema essencial. Nos textos de teoria eletromagnética, por exemplo, tais seções e capítulos podem ser dedicados a temas como física de plasmas, supercondutividade e circuitos elétricos, afora outros. A segunda injunção, a da realidade econômica regional ou nacional e das circunstâncias históricas que cercam a elaboração de um manual, incide sobre o conjunto da obra somando-se a - e quiçá até condicionando - os paradigmas inerentes a uma comunidade científica. O esforço de guerra, em particular o desenvolvimento do radar, levou a substanciais mudanças na apresentação da teoria eletromagnética em manuais editados durante [2] e a partir da Segunda Guerra Mundial, dando-lhes uma feição mais completa. Além disso, implicou em se conferir ênfase às aplicações. Daí resultou o tom pragmático que permeia os manuais elaborados no ocidente a partir de então: a ênfase maior é posta no treinamento em técnicas de cálculo, em detrimento da apresentação e discussão de conceitos. Isto, que poderia ser bem aceito em se lidando com um alunato de carreira técnica, deve ser objeto de cuidadosa avaliação quando se lida com alunos da área científica - Física, em particular -, até porque muitos textos são dirigidos indistintamente aos dois tipos de estudantes. A excessiva ênfase nas técnicas de cálculo em detrimento do domínio conceitual pode levar ao comprometimento do espírito crítico e da criatividade do futuro profissional da ciência. Em contraposição a isso, o trabalho aqui apresentado baseia-se na idéia de expor a teoria eletromagnética de forma unitária, evitando o mosaico de postulados que usualmente a impregna.

Os textos sobre Eletromagnetismo dedicados aos alunos "senior" evoluíram no sentido da incorporação de técnicas de cálculo matemático mais poderosas, tornando-se mais volumosos e prolixos. Do *Treatise* de Maxwell aos manuais de hoje a evolução do aparato matemático é muito grande, mesmo quando se analisa apenas textos dedicados a alunos da graduação em física, por exemplo; nos últimos é freqüente o uso de operadores diferenciais do cálculo vetorial e outros recursos não usados por Maxwell. Essa distinção é também notória ao se comparar textos mais antigos [3]-[4] com os do pós-guerra [5]-[8]. Apesar disso, não se faz uso de tais facilidades matemáticas para a apresentação mais despojada da teoria, isto é, repete-se o acervo de postulados usados antes e que são também usados em textos mais elementares, como os dedicados aos cursos médio e universitário básico, ao invés de se adotar uma postulação "fraca" - postulados mais primários e em menor número - o que é viável a partir dos teoremas e demais recursos matemáticos agora usuais.

A abordagem por nós adotada funda-se: (i) numa base matemática, conjunto de noções da álgebra e do cálculo vetorial, sobretudo o teorema de Helmholtz; (ii) quanto aos aspectos fenomenológicos, num conjunto de três experimentos básicos: primeiro, o do pêndulo eletrostático; segundo, o da interação entre ímãs; finalmente, o da interação entre a descarga produzida por um gerador Van de Graaff e uma bússola; (iii) quanto ao aspecto conceitual, no Princípio de Superposição e no Princípio de Reciprocidade das interações de cargas e correntes estacionárias, bem como na conservação da carga.

Com relação ao teorema de Helmholtz lembremos aqui sucintamente o seu teor (trata-se, na verdade, de um teorema de unicidade associado à proposição e comprovação da solução, esta sim, atribuída a Helmholtz; no Capítulo 1 do texto êle será discutido em detalhe) [9]: *dadas as densidades de pólos e de vórtices de um campo vetorial,*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = s(\mathbf{r}) \tag{1}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{c}(\mathbf{r}), \tag{2}$$

fica determinado de maneira única o vetor $\mathbf{F}$. Este teorema é um instrumento muito poderoso na elaboração da teoria, uma vez que, do estabelecimento de s e $\mathbf{c}$ nas equações 1 e 2, respectivamente, decorre de maneira única a definição de $\mathbf{F}$. Daí que a pesquisa daquelas duas grandezas se constitua num ponto de partida privilegiado da formulação de uma teoria sobre o campo **F**, procedimento que adotamos e que descreveremos adiante.

Cabe notar que a importância do teorema de Helmholtz é ressaltada em vários textos [6, 10], chegando a ser usado como ponto de partida para a exposição da teoria [11], ainda que de forma diversa da nossa.

Além disso, o teorema admite um corolário que facilita a apresentação e a compreensão do conceito de potencial escalar magnético (v. o Capítulo 1, adiante). Cabe, em contrapartida, assinalar a limitação do uso do teorema de Helmholtz ao caso estacionário, vez que no caso dinâmico a velocidade finita das interações coloca óbice à sua aplicação.

Ainda no plano matemático, nota-se que as multiplicações escalar e vetorial, entre dois vetores no $\mathbf{R}^3$, podem ser definidas como as (únicas) operações cujos resultados - um escalar invariante e um vetor, respectivamente - são bilineares em ambos vetores; daí decorrem a forma e as propriedades dos seus produtos.

A apresentação da teoria tem início com a discussão dos aspectos fenomenológicos referidos no item (ii) acima. Em seguida buscam-se as quantidades descritivas do estado dinâmico estacionário de um sistema de cargas admitidas, de início, puntiformes. Adotando-se tratamento análogo ao hidrodinâmico chega-se às expressões de ρ e $\mathbf{J}$ e aos seus significados físicos. Postula-se então a conservação da carga elétrica, traduzindo-a em termos matemáticos na equação da continuidade.

Do exposto conclui-se que as equações (1) e (2) aplicadas aos vetores representativos dos campos elétrico e magnético, denotados $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e identificados como o *vetor campo elétrico* e o *vetor indução magnética*, levam de imediato às equações de Helmholtz para ambos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = k_1 \rho,$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = k_2 \mathbf{J}.$$

Estas equações confirmam que ρ e $\mathbf{J}$ representam as fontes ("lato sensu") de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente, sendo ρ a densidade de pólos de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ a densidade de vórtices de $\mathbf{B}$. Ora, sendo a interação entre sistemas estacionários um fenômeno recíproco, conclui-se pela identidade entre fonte e "sensor" de um campo. Em outras palavras se ρ é o elemento-fonte do campo $\mathbf{E}$, ele deverá também ser o que sofre a ação do campo elétrico externo, o análogo ocorrendo entre $\mathbf{J}$ e o campo magnético. Acresce-se a isso o princípio de superposição, que implica serem as forças elétrica e magnética lineares em relação tanto aos respectivos campos como aos elementos que sofrem sua ação. Daí decorre a equação da força de Lorentz.

O exposto constitui a base conceitual para o desenvolvimento de toda a Eletrostática e Magnetostática, sem mais postulações e sem omissões.

Chega-se então à análise do caso quasi-estacionário e ao fenômeno da indução eletromagnética. Aqui também é evitado o excesso de postulações, adotando-se uma abordagem próxima à do texto de Tamm [4], isto é, trata-se de obter a lei que rege o fenômeno por meio de uma mudança de referencial a partir daquele em que o campo magnético é estacionário, mas não-uniforme. Apesar da restrição a uma transformação galileana, o resultado é o da lei de indução (de Faraday) nesse caso particular. Como no texto referido, anotam-se tanto a limitação do método como a generalidade do resultado, que pode ser admitido sem restrições; no presente trabalho essa generalização é feita por meio de um axioma. Tal abordagem contribui para revelar a estreita afinidade entre a lei de indução e a lei de força de Lorentz, que se mostram aqui indissociáveis.

Montadas na nova forma, as equações do campo eletromagnético somadas à equação da continuidade e à da força de Lorentz constituem o conjunto descritivo do caso quase-estacionário. Por outro lado, verifica-se a insolubilidade desse conjunto para descrição da fenomenologia dependente do tempo no caso mais geral. Vem daí a necessidade de imposição da corrente de deslocamento e a análise do seu significado físico. Em outras palavras, o estabelecimento das equações de Maxwell.

Conclui-se com a análise das conseqüências mais importantes das equações de Maxwell, chegando-se, em particular, ao estabelecimento das equações da onda eletromagnética para **E** e **B** e à determinação de uma relação entre as constantes já referidas, bem como dos seus sinais.

Além do ganho em concisão, a abordagem proposta apresenta algumas vantagens adicionais no plano pedagógico:

1. as equações de campo já são propostas no "formato" das equações de Maxwell, isto é, na forma diferencial, em termos dos operadores divergência e rotacional, sendo seguidamente ajustadas até chegar às de Maxwell;

2. a teoria apresenta-se mais compacta, exibindo o paralelo entre Eletricidade e Magnetismo;

3. a apresentação dos conceitos dá-se de forma mais fácil e fluente, permitindo ao aluno uma melhor compreensão dos mesmos; é o que acontece, por exemplo, com os de potencial vetor e potencial escalar magnético;

4. a compacidade e a fluência permitem que se chegue a um fecho conveniente, dado pelas equações de Maxwell. A eventual abordagem dos seus desdobramentos pode transcorrer de maneira independente deste formalismo;

5. A teoria é exposta sem que se apele para o uso de um sistema de unidades preestabelecido. Ao invés disso, assume uma forma universal, em que cinco constantes podem ter seus valores ajustados segundo o sistema (S.I., gaussiano ou outro) que se queira adotar.

Esse último aspecto parece-nos de especial interesse, pois ao que nos consta o tema da formulação universal no que tange a sistemas de unidades nunca foi colocado de forma completa num tratamento da teoria eletromagnética, havendo, em lugar disso, a proposta de alguns métodos "ad hoc" de conversão de fórmulas e grandezas [13]. Por outro lado, com freqüência é feita, sobretudo em livros que datam da fase em que a escolha de um ou outro sistema de unidades suscitava acirrada polêmica, a discussão genérica sobre as grandezas eletromagnéticas e as presumíveis vantagens de um ou outro sistema, segundo a opinião do autor [12, 14]. Uma análise detalhada desses discursos implicaria estender este trabalho além do que seria desejável, inclusive por comprometer a sua objetividade. Permitimo-nos, no entanto, transcrever comentários dos prefácios de dois conceituados manuais, para ilustrar o assunto e revelar até onde êle pôde envolver os protagonistas. O primeiro, de Stratton, data de 1941 [14]:

> The m.k.s. system of units has been employed exclusively. There is still the feeling among many physicists that this system is being forced upon them by a subversive group of engineers. Perhaps it is, although it was Maxwell himself who first had the idea. At all events, it is a good system, easily learned, and one that avoids endless confusion in practical applications. At the moment there appears to be no doubt of its universal adoption in the near future. Help for the tories among us who hold to the Gaussian system is offered on page 241.

Ao contrário dessa previsão, ainda em 1962 J. D. Jackson advertia, na primeira edição do seu livro a sua opção pelo sistema gaussiano, com postura mais fleumática [15]:

> In the appendix I have attempted to show the logical steps involved in setting up a system of units, without haranguing the reader as to the obvious virtues of *my* choice of units (grifado, no original).

Parece-nos, em todo o caso, muito lúcida a argumentação de Becker no seu prefácio (1930) [3]:

> It does not seem possible at present to set up a system of units which will satisfy the electrical engineer and the physicist alike. With regard to Maxwell's theory, the difference between the physicist and the electrician is not a matter of notation merely, but of principle. The technical view adheres much more strictly than current physics does to the original form of the Faraday-Maxwell theory. The engineer looks upon the vectors **E** and **D** - even in a vacuum - as magnitudes of quite different kinds, related to one another more or less like tension and extension in the theory of elasticity. From this point of view it must of course seem a very questionable procedure, in an exposition of fundamental principles, to put the factor of proportionality K, in the equation $\mathbf{D} = K\mathbf{E}$, equal to 1 for empty space, thus artificially attributing to **D** and **E** the same dimensions. On the other hand, the distinction in principle between **D** and **E**, which is closely connected with the mechanical theory of the aether, has been absolutely abandoned in modern physics, the electromagnetic conditions at any point in empty space being now regarded as completely defined when we are given *one* electric vector **E** and *one* magnetic vector **B** (or **H**). The numerical identity of **E** and **D** (for empty space) in the Gaussian system of units is not, for the physicist, the result of an arbitrary definition, but the expression of the fact that **E** and **D** are actually the same thing. The introduction by the engineer of a dielectric constant and permeability not equal to 1 in a vacuum seems to the physicist to be merely an artifice, by means of which formulae are reduced to a shape which is convenient for practical calculations.

A prazo mais longo, no entanto, a previsão do primeiro parece se cumprir. Até o próprio Jackson, na sua terceira edição [13] já adota uma mudança de postura: na primeira parte do livro, referente a campos estáticos, é adotado o S.I. e na segunda, dedicada a campos dependentes do tempo e aplicações, mantém-se o gaussiano. A tendência à adoção universal do S.I. é hoje uma realidade. Resta saber se ela é boa ou má para a ciência tendo-se em vista a rica bibliografia escrita na linguagem de outros sistemas - sobretudo o gaussiano - que poderá ser desdenhada em função dessa hegemonia, afora a contradição apontada por Becker.

Capítulo 1
Histórico e Base Matemática

1.1 Histórico

Eletricidade, Galvanismo e Magnetismo antes do Experimento de Oersted

A Eletricidade e o Magnetismo desenvolveram-se independentemente, sendo os respectivos fenômenos familiares não só aos estudiosos como à gente simples desde a Antiguidade. Contudo, é difícil traçar precisamente o desenvolvimento do que se poderia chamar de conhecimento científico em torno a esses temas. Alguns fatos, no entanto, podem ser destacados.

Das que se tem notícia, a primeira referência ao magnetismo entre estudiosos data do século XII; foi feita pelo monge Alexander Neckam de uma forma que sugere ter precedentes. No século XIII Pierre de Maricourt, na França, identificou por primeira vez os pólos de um ímã num trabalho que, passados quase seiscentos anos, inspiraria Faraday na sua conceituação de "linhas de força". Em 1600 Gilbert, de Colchester, Inglaterra, associa por primeira vez ao globo terrestre um grande ímã, ao tempo em que explica a fenomenologia por trás da orientação dos ímãs em geral.

Da Eletricidade sabe-se que experimentos já se haviam feito no âmbito da Grécia Antiga. No século XVII o próprio Gilbert fez algumas especulações a respeito da sua origem, mas foi no século XVIII que Priestley e Coulomb descobriram a sua lei central, a da atração/repulsão segundo o inverso do quadrado das distâncias. Seguiram-se muitos desenvolvimentos da teoria, que levaram a importantes descobertas, em particular a famosa Garrafa de Leyden, que permitiu a "estocagem" da eletricidade.

Naquela época, por "Eletricidade", enquanto objeto de estudo, entendia-se o que hoje chamamos Eletrostática; até a última década do século XVIII os *eletricistas* só se dedicavam à eletricidade estática. Foi quando uma descoberta veio forçar o estudo da eletricidade em movimento, sob o nome de Galvanismo. A partir de uma ocorrência acidental no seu laboratório em 1780, Luigi Galvani, anatomista bolonhês, passou a observar a reação dos músculos e nervos de rãs ao contato com diferentes metais, em diferentes situações. Ao cabo de alguns anos de estudo do tema, concluiu que as patas de uma rã são contraídas sempre que uma conexão entre os seus nervos e músculos é feita por meio de um arco metálico, em geral formado por mais de um tipo de metal. Galvani chegou a crer que tal se dava pela passagem através do circuito assim formado de um fluido peculiar, indo dos nervos para os músculos do animal. A esse fluido logo se deu o nome de "Galvanismo" ou "Eletricidade Animal". O próprio Galvani não tardou em conjecturar que esse fluido era o "fluido elétrico" ordinário, vendo em todo o fenômeno uma similaridade com a descarga de uma Garrafa de Leyden.

Esse achado despertou a atenção da comunidade dos pesquisadores, especialmente a de Alessandro Volta, de Pavia. Volta imediatamente deduziu que o fenômeno observado por Galvani era produzido pela conexão de dois metais diferentes por um corpo úmido; em seguida descartou a possibilidade de existência de qualquer eletricidade animal peculiar. Norteado por essas convicções ele desenvolveu um aparelho constituído do empilhamento de camadas de dois metais e papelão umedecido em solução salina, em sucessão. Após diversas tentativas apenas parcialmente bem sucedidas, em que usava a configuração metal1-papelão-metal2-papelão como elemento-base, obteve completo êxito em 1800, ao adotar como base a configuração metal1-metal2-papelão. As tentativas de associar a "eletricidade voltaica" com a usualmente produzida por fricção culminou com o carregamento de uma Garrafa de Leyden por meio do aparelho desenvolvido por Volta. A *pilha de Volta* ou *pilha voltaica*, como ficou conhecido esse aparelho, teve extraordinária importância no desenvolvimento ulterior não só das três disciplinas eletromagnéticas como da própria química e constitui o núcleo a partir do qual se desenvolveram as pilhas e baterias ainda hoje usadas em aparelhos elétricos e eletrônicos. O próprio acumulador de automóveis teve sua origem num desdobramento da pesquisa sobre a pilha de Volta.

Em suma, naquela transição de século tinham-se duas disciplinas que abordavam fenômenos estacionários - a Eletricidade e o Magnetismo - e uma nova que começava a esboçar a fenomenologia em torno à produção da corrente elétrica. Nenhum conhecimento científico havia que correlacionasse as duas primeiras; o que sim despertava a atenção dos estudiosos eram certas ocorrências de fenômenos naturais envolvendo as grandes descargas elétricas de tormentas e o surgimento de efeitos anômalos de natureza magnética cujas tentativas de explicação não passavam do terreno das conjecturas.

1820: a Fusão de Teorias

O Galvanismo foi sendo desvelado gradativamente, por diferentes personagens. Na verdade a sua perfeita elucidação dependeria do desenvolvimento da química, desenvolvimento para o qual contribuiu enormemente. Essa é uma história que, pela sua riqueza, constitui um manancial de exemplos dessa e de outras características do desenvolvimento científico. Pela sua importância e significação, a descoberta da correlação entre Eletricidade, Galvanismo e Magnetismo merece uma posição de destaque na história da ciência.

Em 1820, após muitos anos de tentativas, Hans Christian Oersted conseguiu por primeira vez demonstrar essa relação, que já havia sido àquela época sugerida por uma série de episódios naturais. Numa aula sobre "Eletricidade, Galvanismo e Magnetismo" em Copenhague, ele conseguiu dispor um fio condutor e uma bússola de tal forma que ao fazer passar uma corrente elétrica pelo fio a agulha da bússola girava sobre o seu eixo, mostrando assim que a corrente elétrica provocava o mesmo efeito de um ímã, ou seja, um efeito magnético. Após confirmar esse efeito com aparatos mais poderosos, ele fez o anúncio público da sua descoberta em Julho de 1820. Concluiu que o efeito magnético se dava "no condutor e no espaço circunvizinho" e deu-lhe o nome de "conflito de eletricidade". Chegou a deduzir, corretamente, que o "conflito" descrevia círculos em torno do condutor, assim como que, em condições adequadas, "o arco galvânico deve ser movimentado pelo ímã", ou seja, deve não só provocar como também sofrer a influência magnética. Apesar disso as observações e conclusões de Oersted eram qualitativas; a quantificação desses efeitos viria a ser elaborada por outros pesquisadores a partir de experimentos adicionais.

O trabalho pioneiro de Oersted foi sucedido por uma longa série de experimentos de diferentes pesquisadores, da que aqui se fará uma breve exposição. Ante uma sessão da Academia Francesa, em 11 de Setembro de 1820, Arago descreveu o trabalho de Oersted. Uma semana depois, ante a mesma Academia, André-Marie Ampère mostraria que dois fios paralelos conduzindo correntes elétricas no mesmo sentido se atraem, repelindo-se se as correntes têm sentidos opostos. Numa reunião da Academia de Ciências de 30 de Outubro de 1820, Jean-Baptiste Biot e Félix Savart apresentaram resultados semiquantitativos sobre a força de interação entre um pólo magnético e um fio reto conduzindo corrente elétrica. Ampère, por seu turno, prosseguiu na sua linha de investigação até que, em 1825, apresentou uma memória em que estabelecia precisamente a expressão geral da força de interação entre dois circuitos de corrente.

Como se vê, o "paradigma eletromagnético" já havia incorporado, nesse estágio, os três paradigmas anteriores: da "Eletricidade" (Eletrostática), do Galvanismo e do Magnetismo. Pode-se inquirir: quando se deu e a quem se deve atribuir a descoberta da correlação entre as três teorias? É inegável que coube a Oersted o mérito do pioneirismo nessa área, não só pela sua descoberta de 1820 e pelos desdobramentos que realizou a partir dela, como pelo fato de ter abraçado decididamente essa linha de investigação já em 1807. No entanto, os aspectos quantitativos da nova teoria, sem os quais nenhum avanço real seria possível, foram realizados por vários outros em diferentes datas e situações, até a culminação do processo com a memória de Ampère. Muito significativa é a opinião externada meio século depois por James Clerk Maxwell sobre o tema: chama Ampère de "o Newton da eletricidade", tece rasgados elogios ao seu trabalho e classifica a expressão da força entre dois circuitos afastados de "fórmula cardinal da eletrodinâmica" (por "eletrodinâmica" entendia-se, na época, o estudo das forças entre circuitos elétricos).

Essas duas considerações parecem suficientes para constatar a ambigüidade da questão levantada acima. Acresça-se a isso o fato de o que chamamos *paradigma eletromagnético* ter sofrido decisiva evolução - ou, quem sabe, *revoluções* - depois dos trabalhos de Ampère, de sorte que só com a memória apresentada por Maxwell à Royal Society em 1864 ("Uma Teoria Dinâmica do Campo Eletromagnético") pode ele ser dado como plenamente estabelecido, não sem antes ter experimentado, com a descoberta da indução eletromagnética por Faraday (1832), mais um grande avanço. Em outras palavras, o período entre 1820 e 1864 não foi, para usar mais um conceito de Kuhn [16], o de *ciência normal* para essa área. Ao contrário, ele está caracterizado por uma febril atividade voltada explicitamente para novas descobertas, ainda que se possa identificar a aquisição de vários "paradigmas setoriais" - ainda hoje vigentes em áreas específicas - que se vão complementando até a totalização do paradigma eletromagnético.

As observações de Oersted e sucessores desvendavam um fato novo que, sem negar o conhecimento prévio, impunha a necessidade de vincular o que se tinha - ao menos formalmente - como disjunto. De imediato essa fusão não demandou mudança dos conceitos vigentes nas duas teorias - Eletricidade e Magnetismo -, mas em longo prazo foi ela que levou à descoberta da indução eletromagnética, por Faraday, e daí às equações de Maxwell; essas descobertas, sem dúvida, trouxeram profundas mudanças nos conceitos até então aceitos em ambas ciências. Outra não poderia ser a conseqüência final da convivência numa mesma teoria de dois campos por si só muito ricos do ponto de vista fenomenológico, que antes se haviam desenvolvido independentemente.

De Ohm a Maxwell

Ao tempo em que se desenvolviam paralelamente a Eletricidade e o Magnetismo, o Galvanismo seguia o seu rumo de forma quase independente. Aos trabalhos de Galvani e Volta nessa área sucederam-se e somaram-se os de vários outros pesquisadores, entre eles Ohm e Faraday.

Davy havia mostrado que diferentes fios de um mesmo metal conectados a uma mesma pilha voltaica respondem segundo o seu "poder condutor", que é diretamente proporcional à área da sua seção transversal - sendo independente da forma dessa seção - e inversamente proporcional ao seu comprimento. Além disso, comparou as condutividades de diferentes metais. No "poder condutor" acima referido identifica-se imediatamente o inverso da *resistência elétrica* do objeto. Ohm, por sua vez, procurou entender como a *impulsão* ("driving-power") de uma pilha afetava a corrente que fluía através de um fio. Para isso foi necessária a formulação de um conceito mais preciso, já que "impulsão" era um conceito muito vago. Ohm, que tinha familiaridade com o trabalho de Fourier *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), fez uso da similaridade dos dois processos. Daí resultou, nas palavras de E. T. Whittaker [17], que: "A comparação entre o fluxo de eletricidade e o fluxo de calor sugeriu a pertinência de introduzir uma quantidade cujo comportamento em problemas elétricos se assemelhasse ao da temperatura na teoria do calor. A diferença nos valores de tal quantidade em dois pontos de um circuito proveria o que era tão necessário, ou seja, uma medida da 'impulsão' que atuava sobre a eletricidade entre esses pontos". Em outras palavras, assim como o fluxo de "calórico" entre dois pontos de um corpo é proporcional à temperatura, assim também o "fluxo de eletricidade", i. e., a *corrente elétrica*, seria proporcional a essa nova grandeza. Essa grandeza viria a ser identificada, depois de depurada de mal-entendidos da interpretação do próprio Ohm e de seus contemporâneos, como o *potencial elétrico*, de sorte que a lei de Ohm assumiria a sua forma atual: $I=(1/R)V$.

O depoimento do historiador atesta claramente que no caso da lei de Ohm ou, mais precisamente, no caso da formulação do conceito de potencial elétrico, deu-se a interferência de um paradigma anterior - o da teoria do calor, certamente bem estabelecido àquela época - no desenvolvimento do novo paradigma. A importância desse episódio ressai na medida da importância que viria a ter no desenvolvimento ulterior do eletromagnetismo o próprio conceito de potencial elétrico.

O desenvolvimento do Galvanismo foi prolongado. A complexidade do fenômeno, ocultada sob a aparência banal de uma pilha constituída de três elementos dispostos de forma ordenada, só cederia sob árduas investigações que envolveram estudiosos da Química, como Berzelius, além daqueles dedicados especificamente à Física. Para ilustrar o desenvolvimento paralelo do Galvanismo, da Eletricidade e da Química baste-nos aqui pontuar alguns aspectos desse longo processo que, como já foi relatado, iniciou-se no final do século XVIII:

(i) Em 1812 Berzelius enuncia a *teoria eletroquímica* que pode ser sintetizada na sua asserção: "Dois corpos que têm afinidade um pelo outro e que foram postos em mútuo contacto, são encontrados após a separação em estados elétricos opostos. Aquele que tem afinidade pelo oxigênio usualmente torna-se positivamente eletrizado, e o outro negativamente". Essa associação entre afinidade química e eletricidade levou-o a admitir que os átomos possuem dois pólos, um positivo e um negativo, cujos campos eletrostáticos são a causa da atividade química. Como frequentemente ocorre, o detalhamento desse modelo incorporaria um certo número de especulações sem correspondência com a realidade, mas é evidente o avanço que ele representou para o desenvolvimento da química a partir de então.

(ii) Em 1833 Faraday, mostrando que todos os efeitos da eletricidade - fisiológicos, magnéticos, luminosos, caloríficos, químicos e mecânicos - podem ser obtidos indiferentemente da eletricidade proveniente da fricção e da proveniente de uma pilha de Volta, evidencia definitivamente a identidade das duas.

(iii) No mesmo ano Faraday propõe a terminologia que viria a ser consagrada para a decomposição eletroquímica: *eletrólitos, eletrodos* - *anodo* e *catodo* - e *íons* - *ânions* e *cátions*. Estabelece ainda a *lei dos equivalentes químicos* para essa decomposição.

(iv) Em 1846, num texto em que especula em torno a uma teoria eletromagnética da luz [18], Faraday - mais uma vez Faraday - especula também sobre a estrutura da matéria, admitindo que os átomos nada mais seriam que campos de força - elétricos, magnéticos e gravitacionais - com um centro comum, sem dimensão definida, mas, em vez disso, distribuídos por todo o espaço. Propôs um modelo que permitiria que se abandonasse o conceito de éter ("dismiss the aether"), ou o substituísse por linhas de força cujos centros seriam as partículas das substâncias materiais. É impressionante a força da intuição desse personagem, que o leva a desafiar os arraigados conceitos da sua comunidade, em particular os conceitos mecanicistas, em favor de conceitos como o de campo (ainda que não formulado à maneira como o vemos hoje) e, quase até, o da identificação entre matéria e energia, cerca de sessenta anos antes do advento da Relatividade[1].

Estabelecida em forma definitiva na memória *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, apresentada em 1864 à Royal Society, as equações de Maxwell foram o fecho do processo iniciado por Oersted em 1820. Ao menos do ponto de vista de um referencial particular, o do éter, a teoria eletromagnética, incluindo também a lei de Ohm, as leis de força e outras relações auxiliares e englobando todos os fenômenos elétricos, magnéticos e galvânicos, podia ser considerada completa. Restaria, no entanto, um ajuste crucial: o da teoria no seu todo com a Mecânica Newtoniana. Ajuste que na verdade nunca se daria, pelo contrário: por força da sua não-consecução a Mecânica, como teoria afeta a um acervo de fenômenos - conhecidos ou idealizados -, sofreria uma profunda revisão ou, em termos kuhnianos, uma revolução. Em contrapartida, a teoria eletromagnética ganharia campo mais vasto, mostrando ser uma teoria covariante, isto é, válida para todo referencial inercial e não só para o referencial "absoluto" (do éter), como se pensava até então.

Paradoxalmente Maxwell, o seu último grande artífice, aquele a quem coube estabelecer a sua forma final, não foi capaz de perceber o cerne revolucionário envolto nas suas equações. Fortemente arraigado a uma visão mecanicista buscou, ainda nas suas tentativas mais incipientes, a explicação dos fenômenos eletromagnéticos num modelo calcado na própria Mecânica Newtoniana ou, quando muito, na Mecânica dos Fluidos. E, munido de extraordinárias habilidade e determinação, encontrou-o, conseguindo com ele explicar o conhecido e deduzir o desconhecido da teoria.

O modelo maxwelliano é essencialmente um modelo do éter, do meio que se-

[1]É certo que Faraday revela alguma insegurança quanto às suas concepções, confessando-a em vários trechos do texto citado (a carta intitulada *Thoughts on Ray Vibrations,* dirigida ao presidente da Royal Instituition, sobre a preleção que improvisadamente tinha feito na reunião anterior dessa instituição), em particular no seu final:

> "I do not think I should have allowed these notions to have escaped from me, had I not been led unawares, and without previous consideration, by the circumstances of the evening on which I had to appear suddenly and occupy the place of another. Now that I have put them on paper, I feel that I ought to have kept them much longer for study, consideration, and, perhaps, final rejection; and it is only because they are sure to go abroad in one way or another, in consequence of their utterance on that evening, that I give them a shape, if shape it may be called, in this reply to your inquiry".

Em todo o caso, o alcance e o pioneirismo dessas idéias são notáveis.

ria responsável pela transmissão das ações elétricas e magnéticas. Este constaria de uma associação entre um fluido elástico disposto em células estanques ao longo das linhas de força do campo magnético, cujas paredes seriam constituídas de partículas elétricas, funcionando estas como "engrenagens ociosas" ("idle wheels"). A necessidade desse artifício vem do fato do fluido estar em rotação ou, dito de outra forma, das suas células constituírem-se em vórtices do campo magnético, sendo o seu eixo dado pela direção da linha de força do campo naquele ponto ou região. Para garantir a não-descontinuidade do sentido de rotação dos vórtices faz-se necessário admitir as referidas "engrenagens ociosas", funcionando elas como transmissores do movimento de uma célula do fluido à sua vizinha. Frise-se, *en passant*, que Maxwell buscou justificação para o seu modelo em Faraday, que acabaria por propor à comunidade que dispensasse o éter; isso porque o último, no início da sua investigação, sugeriu que o magnetismo tinha caráter de movimento de rotação e a eletricidade o tinha de movimento de translação.

Mesmo a postulação da *corrente de deslocamento*, ápice da formulação maxwelliana, perde algo do seu brilho ante o modelo do autor, uma vez que nesse modelo ambas correntes - de condução e de deslocamento - têm a mesma origem e natureza: as partículas elétricas ou engrenagens ociosas, que são a única componente elétrica do éter. Para justificar essa postulação Maxwell apenas advoga que *as correntes elétricas são sempre circuitais* e, com isso, que nos trechos do "circuito" onde a corrente de condução eventualmente é interrompida, pela inexistência de material condutor, deve-se manifestar uma corrente de outra forma, a referida corrente de deslocamento.

Esse quadro, em que o Eletromagnetismo é apresentado por um dos seus maiores teóricos como uma espécie de apêndice da Mecânica, impõe-nos uma reflexão a respeito da conjuntura em que esse juízo se desenvolveu. Atentemos para o que relata e comenta Whittaker [17] logo no início do capítulo dedicado ao próprio Maxwell. Inicialmente referindo-se a W. Thomson, ele afirma:

> In this power to which Gauss attached so much importance, of devising dynamical models and analogies for obscure physical phenomena, perhaps no-one has ever excelled W. Thomson;

Em seguida, em nota de rodapé, complementa:

> As will appear from the present chapter, Maxwell had the same power in a very marked degree. It has always been cultivated by the 'Cambridge school' of natural philosophers, founded by Green,

Stokes and W. Thomson, which was dominated by the belief that all physical action is founded on dynamics. The value of a dynamical model is, that it will have properties other than those which suggested its construction; the question then arises as to whether these properties are found in nature.

Reproduzimos a nota até o seu final pelo teor da sua crítica, que vem ao encontro da nossa. A nota revela, por um lado, o ambiente acadêmico em que Maxwell se achava imerso e indica as pressões que esse ambiente exerceria sobre a comunidade local. A sentença "dominados pela crença" diz bem do papel quase religioso que desempenhava o *paradigma newtoniano* ante aquela comunidade (ainda que fosse uma fração de uma comunidade científica, o seu peso acadêmico e os compromissos ao seu interior possivelmente fariam dela uma pesada "âncora" para os seus membros e uma forte influência na *comunidade global*). Em suma, parece óbvio que estamos diante de um *paradigma metafísico* que desempenhou papel decisivo no trabalho de Maxwell.

Enfim, na evolução da teoria eletromagnética entre 1820 e 1864 nota-se a prevalência de um grande paradigma, o da Mecânica Newtoniana. A rigidez desse paradigma mostrou-se em toda a sua evidência, sobretudo no período final, onde Maxwell e o próprio W. Thomson, afora muitos outros, quem sabe a maioria da comunidade científica, mostraram-se seus árduos defensores, como se por seu intermédio aquele paradigma travasse uma batalha decisiva pela própria sobrevivência ou hegemonia, já condenada a partir das próprias equações de Maxwell. Tanto é assim que a Einstein bastou a análise comparativa entre o quadro teórico da Mecânica Newtoniana e o da Teoria Eletromagnética para inferir as mudanças que se faziam necessárias. Pouco ou nada influíram no seu trabalho os escassos dados empíricos alegados em favor ou contra a necessidade de uma mudança.

1.2 Base Matemática

O teorema de Helmholtz pode ser expresso na forma [9, 10, 19]:

Teorema de Helmholtz: *Dadas as funções* $s(\mathbf{r})$ *e* $\mathbf{c}(\mathbf{r})$, *que se anulam no infinito e cuja integral em todo o espaço é finita, e dado o sistema de equações:*

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = s(\mathbf{r}) \tag{3}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{c}(\mathbf{r}), \tag{4}$$

existe uma e apenas uma solução para $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ *que se anula no infinito. Essa solução está dada por:*

$$\mathbf{V} = -\nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}, \tag{5}$$

onde ϕ e $\mathbf{A}$ são os potenciais escalar e vetor, respectivamente, dados por:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{6}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{c}\,(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \tag{7}$$

As integrais acima são calculadas em todo o espaço. O estabelecimento de s e $\mathbf{c}$ em (3) e (4) constitui a tarefa primordial para determinação do vetor $\mathbf{V}$. As equações (6) e (7) mostram que, do ponto de vista matemático, $s\,(\mathbf{r}')$ e $\mathbf{c}\,(\mathbf{r}')$ desempenham o papel de fontes do campo, localizadas no ponto $\mathbf{r}'$ e tendo natureza escalar e vetorial, respectivamente. Conseqüentemente, se $\mathbf{V}$ é um campo físico, $s\,(\mathbf{r}')$ e $\mathbf{c}\,(\mathbf{r}')$ representam as grandezas físicas que medem as intensidades das suas fontes. Tomando como básicos êsses resultados, procederemos no sentido de descrever os campos vetoriais $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em termos da carga e da corrente elétricas.

O teorema de Helmholtz admite corolários, entre eles o que se segue [10]:

Corolário : *Se num domínio simplesmente conexo D do espaço a divergência e o rotacional de um campo $\mathbf{V}$ se anulam:*

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

e

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0,$$

então existe ϕ^*, tal que

$$\mathbf{V} = -\nabla\phi^*,$$

valendo para ϕ^* a equação de Laplace,

$$\nabla^2\phi^* = 0,$$

no referido domínio.

Outro instrumento matemático básico é a linearidade dos produtos envolvendo vetores. Assim sendo, mostra-se por meios simples que:

1. A menos de fator constante, a multiplicação de um vetor $\mathbf{v}$ por um escalar c é a única operação bilinear que associa a esse par um vetor.

2. A menos de um fator constante, a usual multiplicação escalar de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é a única operação bilinear que associa a êles uma grandeza escalar invariante pelo grupo ortogonal.

3. Escolhida uma orientação do espaço e a menos de fator constante, a multiplicação vetorial de um par ordenado de vetores $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ é a única operação bilinear que associa a êsse par um vetor invariante pelo grupo ortogonal especial, $SO(3R)$, i.e., se

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

é o produto vetorial do par ordenado $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ e g é uma operação do citado grupo, então,

$$g(\mathbf{w}) = g(\mathbf{u}) \times g(\mathbf{v}).$$

Capítulo 2
Campos Estáticos

2.1 Base Teórica

Utilizaremos aqui o termo *axioma* como sinônimo de um princípio fisicamente fundamental para o desenvolvimento da nossa sistematização. Aliás, esse é o sentido no qual o termo é utilizado por Hilbert [20].

Uma propriedade essencial envolvendo os conceitos de campo e de interação *estáticos* é o princípio de reciprocidade:

Axioma 1: *Um sistema material elementar sofre a ação de um campo aplicado na mesma medida em que gera um campo desse tipo.*

Em outras palavras, o mesmo atributo da matéria gera e sofre os efeitos de campos de um dado tipo, a interação sendo possível apenas entre objetos similares. De acordo com a discussão do teorema de Helmholtz, concluímos que um campo $\mathbf{V}$ descrito por (3) e (4) age sobre um dado sistema material se e somente se êste é caracterizado por grandezas físicas descritas por s e $\mathbf{c}$, ou ao menos uma delas.

Nós assumiremos basicamente que a carga elétrica é uma grandeza escalar que dá lugar a ambos os campos elétrico e magnético. Estabeleçamos, portanto, suas propriedades essenciais e algumas grandezas correlatas. A carga elétrica manifesta-se em quantidades discretas q (p.ex., em sistemas microscópicos) ou distribuída, em cujo caso ela é descrita por sua densidade volumétrica $\rho(\mathbf{r})$. Para um grupo de partículas carregadas q_i, localizadas nos pontos $\mathbf{r}_i$, as descrições macroscópica e microscópica estão relacionadas por

$$\rho_m = \sum_i q_i \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\right). \tag{8}$$

Fazendo a média espacial dessa expressão, somos levados à densidade de carga associada a um grupo de portadores de carga idênticos:

$$\rho = Nq, \tag{9}$$

sendo N o número de partículas por unidade de volume e q a carga de uma partícula individual.

Similarmente, assumindo que as cargas estão em movimento podemos escrever, para a média macroscópica relacionada com um grupo de portadores de carga idênticos,

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}, \tag{10}$$

sendo **v** uma velocidade efetiva ou média desses portadores de carga.

Formulemos, neste ponto, o nosso segundo axioma:

Axioma 2: *A carga elétrica é uma grandeza localmente conservada.*

Tendo em vista o axioma supra, a aplicação do teorema da divergência ao fluxo de carga através de uma superfície fechada leva à equação da continuidade:

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Também faremos uso do Princípio de Superposição:

Axioma 3: *No que diz respeito à física clássica, a interação eletromagnética é um fenômeno linear em todos os aspectos.*

Com isto se quer dizer que a intensidade de um campo elétrico (magnético) é uma função linear da intensidade das suas próprias fontes e que a fôrça que êle exerce em outra fonte de campo elétrico (magnético) é linear tanto na intensidade desta como na intensidade do campo a ela aplicado.

Os axiomas acima são o cerne do nosso formalismo. No entanto, para desenvolvê-lo completamente são necessários alguns outros. Para embasar a sua formulação convém, inclusive do ponto de vista didático, estabelecer três experimentos fundamentais: com base neles podem-se definir os conceitos de carga e de corrente elétrica, de interação elétrica e magnética, assim como algumas das propriedades essenciais dessas grandezas e fenômenos. Eles podem ser apresentados como experimentos imaginários, mas são de realização viável. Previamente definem-se carga e interação elétricas por meio de uma série de ensaios clássicos, em que corpos atritados atraem ou repelem objetos leves. Define-se como *carga elétrica* a propriedade que têm os corpos que exercem essas fôrças e como *campo elétrico* o que media essa interação (lembremo-nos que se trata, por ora, de uma interação estática; portanto, podemos falar de *interação entre objetos* sem incorrer em contradição com conceitos relativistas).

No primeiro experimento imagina-se um *pêndulo eletrostático*[2] acionado por um bastão de material adequado, convenientemente atritado. Nota-se que a interação elétrica depende da distância mas não depende da orientação dos elementos interagentes. Do fato dessa interação não depender da orientação dos

[2]Definimos como pêndulo eletrostático um dispositivo constituído de uma bola diminuta de material isolante e leve (papel ou sabugueiro, por exemplo) suspensa por um fio também leve e também isolante. A bola é, nêsse caso muito sensível à indução elétrica, tendendo a se aproximar de um corpo eletrizado; ou ser repelida, se entrar em contato com êle. O ângulo que o fio forma com a vertical dá a medida da fôrça com que o corpo atrai a bola.

elementos depreende-se que a carga elétrica tem *caráter escalar*. O campo elétrico é representado pelo *vetor campo elétrico*, denotado **E**. No segundo experimento, uma bússola é imaginada colocada na presença de um ímã cuja posição e orientação são feitas variar. Em particular, nota-se que a partir de uma certa distância o ímã é incapaz de alterar o alinhamento natural da bússola (essa tendência ao alinhamento da bússola é notada antes de colocada na presença de ímã: ao final pode-se concluir pela existência de um campo natural do mesmo tipo daquele do ímã e atribuí-lo à Terra). Essa interação se qualifica de *magnética*. O *caráter vetorial* dessas fontes fica evidenciado pela influência da orientação das mesmas no campo e por algumas variantes da segunda experiência. Isto é confirmado por fatos experimentais consagrados.

Em suma, concluímos que, no estado estacionário, o campo elétrico tem fontes de natureza escalar, enquanto que o campo magnético as tem de natureza vetorial. O campo magnético é representado pelo *vetor indução magnética*, denotado **B**.

Na terceira experiência pressupõe-se um gerador Van de Graaff, de porte conveniente que é identificado com o bastão da experiência anterior, isto é, nota-se que os seus bornes estão impregnados do mesmo atributo que propicia o fenômeno elétrico do bastão e do pêndulo, a que chamamos carga elétrica. Nota-se ainda que a descarga, através de um cabo de resistência conveniente, das placas de um capacitor[3] carregado por êsse gerador produz a movimentação da agulha de uma bússola, à semelhança do que fazia o ímã. Conclui-se que uma descarga elétrica é equivalente a um ímã, isto é, aquela provoca também um campo magnético, sendo portanto uma fonte ("lato sensu") do mesmo. Segue-se uma discussão sobre a pertinência da representação de toda fonte magnética por cargas em movimento, concluindo-se afirmativamente, tendo em vista que a terceira experiência nos mostra que, ainda que existam fontes de outra natureza, qualquer delas pode ser feita equivalente a cargas em movimento. A partir daí podem-se estabelecer os dois axiomas que se seguem. O primeiro deles tem a seguinte formulação:

Axioma 4: *Sob condições estáticas, a carga elétrica, grandeza escalar, é a única fonte do campo elétrico.*

Aplicando (3) e (4) ao vetor campo elétrico e levando em conta os Axiomas 3 e 4, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = k_1 \rho \tag{12}$$

[3]Naturalmente, a apresentação de um capacitor deve ser precedida da definição e apresentação de materiais condutores que, por sua vez, se pode dar com base na dicotomia isolante-condutor.

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \tag{13}$$

sendo k_1 uma constante a ser definida de acordo com o sistema de unidades escolhido. Em outras palavras, em vista do Axioma 3 a densidade de pólos do vetor campo elétrico $\mathbf{E}$ tem que ser diretamente proporcional à densidade local de carga elétrica, que é a sua única fonte, conforme o Axioma 4. Ademais, este assegura que a vorticidade do campo, dada por (13), é nula. Comparando (3) e (4) com (12) e (13), respectivamente, e adaptando (5)-(7) ao vetor campo elétrico $\mathbf{E}$, obtemos as equações que estabelecem a forma do potencial eletrostático ϕ e do próprio campo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi, \tag{14}$$

com

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'. \tag{15}$$

Isso significa que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'. \tag{16}$$

A essa altura, devemos enfatizar que, no que tange à geração de campos magnéticos, momentos magnéticos intrínsecos de natureza microscópica são equivalentes a distribuições de corrente. De fato, a equivalência entre ímãs e correntes pode ser confirmada *a posteriori* desta postulação, quando se mostrará que os ímãs se comportam como distribuições volumétricas e superficiais de corrente elétrica (correntes de magnetização) [13]. Assim, podemos afirmar que:

Axioma 5: *Todo campo magnético estático pode ser visto como originando-se do movimento de cargas elétricas representado por uma densidade de corrente constante,* $\mathbf{J}(\mathbf{r})$.

O movimento de cargas elétricas é inteiramente descrito pela função $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Procedendo de forma análoga à dedução de (12) e (13) somos levados a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{17}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = k_2\mathbf{J}(\mathbf{r}), \tag{18}$$

onde o vetor indução $\mathbf{B}$ descreve o campo magnético no vácuo e k_2 é outra constante relacionada com um sistema de unidades. Assim, comparando (17) e (18) com (3)-(7), obtemos

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{19}$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' \tag{20}$$

é o potencial vetor magnético. Segue-se

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'. \tag{21}$$

Aplicada a (12), (15), (18) e (20), a análise do teorema de Helmholtz mostra que ρ e $\mathbf{J}$ são as fontes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente.

A associação dos princípios de reciprocidade e de superposição (Axiomas 1 e 3, respectivamente), leva imediatamente à equação da força de Lorentz. Com efeito, calculemos inicialmente a força exercida por um campo elétrico externo sobre um sistema elétrico. De acordo com o princípio de superposição, essa força deve ser linear em ambas grandezas físicas que medem sua causa imediata: a intensidade do campo elétrico externo, dada pelo vetor $\mathbf{E}_{ext}$, e a densidade de carga elétrica na posição em que é feita a observação $\rho(\mathbf{r})$ que, conforme o princípio de superposição é a medida da sensibilidade local do sistema à ação elétrica externa. Em vista do que foi destacado com relação aos produtos envolvendo vetores (Seção 1.2), a única maneira de se combinar essas duas grandezas para se obter um resultado linear é a multiplicação do vetor $\mathbf{E}_{ext}$ pelo escalar ρ. Logo, devemos ter, para a *densidade local de força:*

$$\mathbf{f}_e = \alpha\rho\mathbf{E}_{ext}, \tag{22}$$

sendo α outra constante referente ao sistema de unidades.

No caso de uma carga puntiforme q, localizada no ponto $\mathbf{r}_1$, tem-se

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)$$

e (22) assume a forma

$$\mathbf{f}_e = \alpha q\mathbf{E}_{ext}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1). \tag{23}$$

Integrando-se esta numa vizinhança do ponto $\mathbf{r}_1$ tem-se a força que atua numa carga puntiforme

$$\mathbf{F}_e = \alpha q\mathbf{E}, \tag{24}$$

onde, por supérflua, aboliu-se a caracterização "*ext*" de $\mathbf{E}$.

Por outro lado, sendo o produto vetorial a única possibilidade de combinar linearmente dois vetores para se obter uma nova grandeza vetorial (v., ainda, a Seção 1.2), a densidade de força magnética que resulta da ação de um campo externo, $\mathbf{B}_{ext}$, sobre um sistema descrito por $\mathbf{J}$, deve ser dada por

$$\mathbf{f}_m = \beta \mathbf{J} \times \mathbf{B}_{ext}, \tag{25}$$

sendo β mais uma constante associada a sistemas de unidades. Analogamente ao que foi feito para se obter a força elétrica sobre uma carga puntiforme, obtem-se para a força magnética de um campo $\mathbf{B}$ sobre uma partícula carregada:

$$\mathbf{F}_m = \beta q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{26}$$

onde q é a carga da partícula e $\mathbf{v}$ a sua velocidade. Somando-se (24) e (26) obtem-se a equação da força de Lorentz:

$$\mathbf{F}_{em} = q\left(\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right). \tag{27}$$

A equação acima foi deduzida sob a hipótese de que a partícula que sofre a ação da força $\mathbf{F}_{em}$ pertence a um fluxo estacionário. No entanto, deve ser notado que essa condição não restringe o tipo de movimento de uma partícula *individual* do fluxo. Com efeito, entre as infinitas possibilidades de fluxo estacionário é sempre possível encontrar partículas tendo qualquer velocidade e qualquer aceleração que queiramos preestabelecer. Portanto, chegamos à conclusão de que (27) é válida qualquer que seja o movimento da partícula.

De (16) e (27) segue-se a equação da força de Coulomb entre cargas q_1 e q_2, localizadas nos pontos $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, respectivamente:

$$F_{12} = \frac{\alpha k_1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}, \tag{28}$$

enquanto que da aplicação da fôrça de Lorentz a (21) decorre a força (por unidade de comprimento) entre dois fios longos portadores de correntes I_1 e I_2, distantes d um do outro:

$$F_{12} = \frac{\beta k_2}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}. \tag{29}$$

O conjunto de equações fundamentais das interações elétricas e magnéticas fica assim completo. A escolha das constantes k_1, k_2, α e β em (12), (18) e (27) implica definir um sistema de unidades. Depois de obter as equações de Maxwell estaremos habilitados a deduzir a relação única entre elas: $\alpha k_1/\beta k_2 = c^2$, sendo c a velocidade da luz, e de restringir os seus sinais à condição de serem todos positivos.

2.2 Dipolos e Campos Dipolares

Consideremos um circuito portador de corrente I, envolvendo uma área $\mathbf{S}$ e imerso num campo externo $\mathbf{B}_{ext}$. Se $\mathbf{S}$ é suficientemente pequena, êsse circuito pode ser considerado um *dipolo magnético.* Adaptando convenientemente (26) para obter a força sobre circuitos de corrente e aplicando o resultado a um dipolo magnético, nós obtemos, em primeira aproximação, o torque sobre ele:

$$\boldsymbol{\tau}_m = \beta I\mathbf{S} \times \mathbf{B}_{ext}. \tag{30}$$

Para fins de generalidade, definimos o *momento de dipolo magnético* como

$$\mathbf{m} = \beta I\mathbf{S} \tag{31}$$

e, em conformidade com isso, escrevemos:

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{ext}. \tag{32}$$

A equação (32) representa uma escolha universal em termos de sistemas de unidades[4]. De (20) deduzimos, em primeira aproximação, o potencial vetor devido a um dipolo magnético na posição $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi\beta}\frac{\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{33}$$

Por outro lado, um dipolo elétrico consiste de um par de cargas iguais e de sinais opostos, $\pm q$, separadas por uma distância suficientemente pequena, $2d$. Em vista de (24) o torque que ele sofre quando imerso num campo elétrico $\mathbf{E}_{ext}$ está dado, em primeira aproximação e sendo $2\mathbf{d}$ um vetor dirigido da carga negativa para a positiva, por

$$\boldsymbol{\tau}_e = \alpha q(2\mathbf{d})\times\mathbf{E}_{ext}. \tag{34}$$

Em analogia[5] com as definições relacionadas com os dipolos magnéticos, definimos o *momento de dipolo elétrico* como

$$\mathbf{p} = 2\alpha q\mathbf{d}, \tag{35}$$

[4] No sistema gaussiano e nos similares isso implica $\mathbf{m} = (1/c)I\mathbf{S}$; no S.I. $\mathbf{m}$ é simplesmente $I\mathbf{S}$.

[5] A menos dessa analogia, poderíamos eliminar α de (35) e incluí-la em (36), uma vez que $\alpha = 1$ para todos os sistemas de unidades. No entanto as equações dos campos tornar-se-iam, nesse caso, assimétricas e sua interpretação seria obscurecida.

o que leva à relação universal

$$\tau_e = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ext}. \tag{36}$$

Aplicando (15) à configuração do dipolo elétrico obtemos, em vista de (35),

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi\alpha} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{37}$$

para o seu potencial elétrico.

2.3 Campos na Presença de Meios Materiais

Dislétricos e materiais magnéticos podem ser representados por distribuições volumétricas de dipolos descritas pela polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ e pela magnetização $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, respectivamente. Esses vetores representam as densidades de momento de dipolo elétrico e magnético. Assim, temos

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r})dV \tag{38}$$

e

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r})dV, \tag{39}$$

para os momentos de dipolo associados a um volume elementar dV do meio material. Em vista de (37) e (33), têm-se

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi\alpha} \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \tag{40}$$

e

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi\beta} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \tag{41}$$

para o potencial escalar elétrico e o potencial vetor magnético surgidos da polarização de dielétricos e da magnetização de materiais magnéticos. Correspondentemente, esses materiais criam campos $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ e $\mathbf{B}_s(\mathbf{r})$ que decorrem de (40) e (41) em conformidade com (14) e (19), respectivamente (cf. Tabela ao final deste trabalho). A aplicação a eles do teorema de Helmholtz nos conduz um passo adiante. Com efeito, as equações (12) e (18) asseguram que esses campos vetoriais devem ter fontes também na forma de densidades de carga e de corrente elétrica. A determinação dos seus valores é feita por um meio indireto adequado, que consiste em transformar (40) e (41) de acordo com identidades do cálculo vetorial. Cumprindo esse procedimento [10] chega-se a

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi} \int \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{k_1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS', \tag{42}$$

onde

$$\rho_P = -\frac{1}{\alpha}\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{43}$$

e

$$\sigma_P = \frac{1}{\alpha}\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \tag{44}$$

sendo a integral de superfície calculada sobre os contornos dos dielétricos, cuja normal é representada por $\mathbf{n}$. Também obtemos, por transformação de (41),

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|}dV' + \frac{k_2}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|}dS', \tag{45}$$

com

$$\mathbf{J}_M = \frac{1}{\beta}\nabla \times \mathbf{M} \tag{46}$$

e

$$\mathbf{j}_M = \frac{1}{\beta}\mathbf{M} \times \mathbf{n}. \tag{47}$$

As equações (42) e (45) descrevem os campos induzidos através de um modelo "helmholtziano", i.e., em termos das suas densidades de polos e vórtices, similarmente aos campos indutores. Conforme a isso, elas também provêm um meio de definir novos vetores dos campos, cujas densidades de polos e vórtices são simplesmente as densidades de cargas e de correntes *reais*. Para chegar a eles partimos do campo elétrico $\mathbf{E}$, que pode ser expresso como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s, \tag{48}$$

sendo $\mathbf{E}_p$ e $\mathbf{E}_s$ suas componentes indutora e induzida, respectivamente. Na medida em que não se considerem as superfícies de contorno, decorre de (42) que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = -\nabla^2\phi_s = k_1\rho_P. \tag{49}$$

ou, em vista de (43),

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = -\frac{k_1}{\alpha}\nabla \cdot \mathbf{P}. \tag{50}$$

Além disso, sendo ρ a *densidade de carga livre*, obtemos, calculando a divergência de ambos membros da (48):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = k_1\rho - \frac{k_1}{\alpha}\nabla \cdot \mathbf{P}, \tag{51}$$

ou

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{k_1}\mathbf{E} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{P} \right) = \rho. \tag{52}$$

Definimos o *vetor deslocamento* $\mathbf{D}$ como:

$$\mathbf{D} = \gamma\alpha \left(\frac{1}{k_1}\mathbf{E} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{P} \right), \tag{53}$$

da que decorre

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \gamma\alpha\rho. \tag{54}$$

O fator γ é a quinta e última constante do nosso conjunto. Esse fator adimensional surge para conferir simetria às equações de Maxwell no sistema gaussiano, que é um sistema *convencional* (não-racionalizado). Nesse tipo de sistema ambas k_1 e k_2 exibem o fator 4π no sentido de simplificar as expressões das leis de força de Coulomb e de Ampère; em conformidade com isso, $\gamma = 4\pi$ para sistemas convencionais. Para sistemas racionalizados, $\gamma = 1$.

A polarização $\mathbf{P}$ de um dielétrico isotrópico linear é proporcional a $\mathbf{E}$. De acordo com a expressão entre parênteses em (53), a relação de proporcionalidade

$$\mathbf{P} \propto \frac{\alpha}{k_1}\mathbf{E}, \tag{55}$$

requer apenas um fator adimensional para ser transformada numa igualdade. Em conformidade com o uso geral em diferentes sistemas de unidades, devemos definir a *susceptibilidade elétrica* χ_e de tal forma que

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{k_1}\gamma\chi_e\mathbf{E}, \tag{56}$$

sendo χ_e uma grandeza adimensional. De (53) chegamos a

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \tag{57}$$

onde

$$\epsilon = \frac{\gamma\alpha}{k_1}(1 + \gamma\chi_e) \tag{58}$$

é a *permissividade elétrica* do meio. Correspondentemente, a *permissividade elétrica do vácuo* é[6]:

$$\epsilon_0 = \frac{\gamma\alpha}{k_1}. \tag{59}$$

[6]Para o sistema S.I., (59) reduz-se a uma identidade.

Expressemos o campo de indução total **B** como

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_s, \tag{60}$$

sendo $\mathbf{B}_p$ and $\mathbf{B}_s$ suas componentes indutora e induzida, respectivamente. Na medida em que superfícies de contorno não são consideradas, pode-se mostrar que, de (45) e do teorema de Helmholtz, advém

$$\nabla \times \mathbf{B}_s = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_s = k_2 \mathbf{J}_M, \tag{61}$$

ou, em vista de (46)

$$\nabla \times \mathbf{B}_s = \frac{k_2}{\beta} \nabla \times \mathbf{M}. \tag{62}$$

Ademais, sendo **J** a *densidade de corrente livre*, temos

$$\nabla \times \mathbf{B}_p = k_2 \mathbf{J}. \tag{63}$$

Aplicando o operador rotacional a ambos membros de (60) e levando em conta (62) e (63) obtemos, após operar adequadamente,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{k_2}\mathbf{B} - \frac{1}{\beta}\mathbf{M} \right) = \mathbf{J}. \tag{64}$$

Definimos o *vetor intensidade magnética* como

$$\mathbf{H} = \gamma\beta \left(\frac{1}{k_2}\mathbf{B} - \frac{1}{\beta}\mathbf{M} \right), \tag{65}$$

que provê

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\beta \mathbf{J}. \tag{66}$$

De (65) resulta

$$\mathbf{B} = \frac{k_2}{\gamma\beta} (\mathbf{H} + \gamma \mathbf{M}). \tag{67}$$

Para meios magnéticos isotrópicos e lineares, **M** é proporcional a **B** ou, equivalentemente, a **H**. Assim, para esses materiais podemos escrever a definição universal de susceptibilidade magnética χ_m:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}; \tag{68}$$

χ_m é, obviamente, adimensional. De tudo isso decorre

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{69}$$

onde

$$\mu = \frac{k_2}{\gamma\beta}(1+\gamma\chi_m) \tag{70}$$

é a *permeabilidade magnética* do meio. Para materiais não-magnéticos e para o vácuo, $\chi_m = 0$. Assim sendo, a *permeabilidade magnética do vácuo* está dada por[7]:

$$\mu_0 = \frac{k_2}{\gamma\beta}. \tag{71}$$

2.4 Origem e Natureza do Potencial Escalar Magnético

O campo magnético induzido é representado por

$$\mathbf{B}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s, \tag{72}$$

sendo $\mathbf{A}_s$ dado por (41). Por um procedimento frequentemente usado [5], que consiste em aplicar à (41) algumas identidades do cálculo vetorial, (72) é transformada em

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{\beta}\mathbf{M}(\mathbf{r}) - \frac{k_2}{4\pi\beta}\nabla \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \tag{73}$$

Além disso, aplicando a definição (65) ao vetor induzido $\mathbf{H}_s$ obtemos

$$\mathbf{H}_s = \gamma\beta\left(\frac{1}{k_2}\mathbf{B}_s - \frac{1}{\beta}\mathbf{M}\right). \tag{74}$$

Em vista de (73) temos, então,

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = -\nabla\psi_s, \tag{75}$$

onde

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{4\pi}\int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \tag{76}$$

[7]Para o sistema S.I., (71) reduz-se a uma identidade.

A comparação entre (76) e (40) mostra que, em analogia com (42), podemos escrever

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{4\pi}\int \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV' + \frac{\gamma}{4\pi}\oint_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dS', \tag{77}$$

onde

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \tag{78}$$

e

$$\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \tag{79}$$

são a *densidade de polo magnético* e a *densidade superficial de intensidade de polo magnético*, respectivamente.

Operando com a divergência ambos membros de (75), temos

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = -\nabla^2 \psi_s, \tag{80}$$

e, em vista de (77), chegamos a

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = \gamma \rho_M. \tag{81}$$

De (75) nós também obtemos

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = 0. \tag{82}$$

Do acima exposto, em particular das equações (77), (81) e (82), se evidencia que ψ_s é o potencial associado a $\mathbf{H}_s$ (e não a $\mathbf{B}_s$), da mesma maneira que o potencial escalar elétrico ϕ é associado ao campo $\mathbf{E}$ (e não ao vetor deslocamento $\mathbf{D}$).

Por outro lado, por aplicação do operador divergência em $\mathbf{H}$ obtemos, de acordo com a definição (65) e sendo $\mathbf{B}$ solenoidal:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\gamma \nabla \cdot \mathbf{M} \tag{83}$$

e, em vista de (78),

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \gamma \rho_M. \tag{84}$$

À semelhança de (60) podemos também expressar $\mathbf{H}$ como a soma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p + \mathbf{H}_s, \tag{85}$$

de suas componentes indutora e induzida, respectivamente.

Subtraindo (81) de (84) e comparando o resultado com (85), vem

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_p = 0. \tag{86}$$

Realizando as mesmas operações sobre (82) e (66), temos

$$\nabla \times \mathbf{H}_p = \gamma\beta\mathbf{J}. \tag{87}$$

Inversamente, a aplicação do teorema de Helmholtz a (81) e (82) resulta em (75) e, em geral, em (77). Se aplicado a (86) e (87) esse mesmo teorema leva a

$$\mathbf{H}_p = \nabla \times \mathbf{A}_p, \tag{88}$$

com

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{r}) = \frac{\gamma\beta}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \tag{89}$$

Combinando (88) com (75) temos, em vista de (85),

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}_p - \nabla\psi_s. \tag{90}$$

Essa relação poderia também ser deduzida da aplicação direta do teorema de Helmholtz a (84) e (66). No entanto, as equações das fontes, (78) e (79), não seriam explicitamente obtidas. É importante notar que os potenciais $\mathbf{A}_s$ and ψ_s são do tipo comum, i.e., eles resultam da aplicação direta do teorema de Helmholtz às equações diferenciais sobre os vetores dos campos.

Por outro lado, associado a (86) e (87), o corolário do teorema de Helmholtz referido na Seção 1.2 implica que, se $\mathbf{J} = 0$, então

$$\mathbf{H}_p = -\nabla\psi^*, \tag{91}$$

sendo ψ^* um potencial escalar "de segunda espécie", no sentido que ele não pertence à classe representada por (6). Em particular, além do seu domínio estar restrito a regiões isentas de correntes, ele deve ser um *domínio simplesmente conexo.* Assim sendo, deve-se ter o cuidado de analisar a validade de (91). Havendo correntes livres, domínios simplesmente conexos podem em geral ser obtidos pela exclusão, juntamente com os pontos dos circuitos de corrente, de superfícies arbitrárias cujas bordas são esses circuitos. Por exemplo, no caso de um circuito circular essa superfície pode corresponder ao círculo interior ao circuito; ou ela pode ser escolhida como sendo um hemisfério cuja borda seja o circuito, etc.

A comparação de (88) e (91) provê um novo meio de escrever (90):

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi, \tag{92}$$

com

$$\psi = \psi_s + \psi^*. \tag{93}$$

Obviamente, as observações acerca do domínio de ψ^* também se aplicam ao de ψ na medida em que a primeira não é idênticamente nula, vez que ela é parte da última.

No entanto, na medida em que o campo tem origem em materiais magnéticos (p.ex., se suas fontes são ímãs permanentes), o potencial escalar é do tipo comum, dado pela eq. (6). Em particular, ele é contínuo através das interfaces entre meios magnéticos ou entre estes e o vácuo. Por outro lado, isso não é verdade para os valores do potencial escalar quando correntes reais estão presentes: pode-se mostrar que, sempre que o ponto de observação passa através de uma superfície excluída, referida acima, ψ^* e o próprio ψ experimentam uma descontinuidade de valor $\gamma\beta I$.

Duas conclusões se impõem quanto à origem e a natureza do potencial escalar magnético: a primeira é a de que ele está associado diretamente a $\mathbf{H}$, e não a $\mathbf{B}$; a segunda, a de que em geral ele é composto da soma de duas funções essencialmente diferentes. Ambas conclusões refletem-se no seu emprego, em particular nos problemas de valores de contorno, em que os vetores do campo magnético são objeto dos cálculos: deve-se ter em conta tanto a relação, primordial, entre o vetor $\mathbf{H}$ e o potencial ψ, como as diferentes características das duas parcelas em (93), especialmente no que tange às respectivas condições de continuidade.

Operando ambos membros de (92) com a divergência e comparando o resultado com (84), obtemos a equação de Poisson para o potencial escalar magnético:

$$\nabla^2\psi = -\gamma\rho_M, \tag{94}$$

que se reduz à equação de Laplace,

$$\nabla^2\psi = 0, \tag{95}$$

sempre que (cf. (78))

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0. \tag{96}$$

As equações (95) e (96) valem em três diferentes situações:

(i) para campos no *vácuo* ou em *materiais não-magnéticos* ($\mathbf{M} = 0$);

(ii) para campos em *meios magnéticos homogêneos, isotrópicos e lineares* (cf.(68) e (69));

(iii) para situações específicas, por exemplo no interior de meios com magnetização permanente uniforme ($\mathbf{M} = const$).

A equação de Poisson para campos eletrostáticos

$$\nabla^2 \phi = -k_1 \rho \tag{97}$$

(ρ= densidade de carga total) decorre de (12) e (14). A equação de Laplace,

$$\nabla^2 \phi = 0, \tag{98}$$

vale sempre que $\rho = 0$, o que ocorre no espaço livre assim como em *dielétricos homogêneos, isotrópicos e lineares* isentos de cargas livres (cf. (43), (56), (57) e (54)).

As condições de contorno sobre os vetores dos campos podem ser deduzidas da forma usual. Indexando as grandezas referentes a cada um dos meios com 1 e 2, e sendo $\mathbf{n}_{12}$ a normal dirigida do meio 1 ao meio 2, elas são estabelecidas em geral como:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \gamma\alpha\sigma; \tag{99}$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0; \tag{100}$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0; \tag{101}$$

e

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \gamma\beta\mathbf{j}, \tag{102}$$

onde σ e $\mathbf{j}$ são as densidades superficiais de cargas e correntes *livres*. Pode-se acrescer a esse conjunto a continuidade do potencial escalar elétrico através de contornos. Com relação ao potencial escalar magnético, a continuidade deve ser testada em termos das observações precedentes.

2.5 Analogia Entre os Vetores dos Campos Elétrico e Magnético

A questão de se **H** ou se **B** é o vetor do campo magnético que corresponde a **E** é algo obscura e controversa. Enquanto uns [4, 12, 13] advogam a analogia entre **B** e **E**, outros [21] a vêm entre **H** e **E**. Essencial é o que foi apontado por Becker (v., Introdução, pg. 6): no vácuo a distinção entre **D** e **E** assim como entre **B** e **H** é artificiosa. Essa distinção não se coaduna, em particular com a adoção do sistema gaussiano nem com o ideário da física moderna, que aboliu o éter[8]. Além disso, como mostramos abaixo, em meios materiais ambos **D** e **E** (**B** e **H**) representam em igualdade de condições o campo elétrico (magnético), sendo

[8] Apesar disso há inúmeros autores científicos que,ainda hoje, insistem nessa distinção; dentre estes, vários adotam o sistema gaussiano.

a determinação do par necessária para a completa descrição do problema, a menos que seja explicitado o vetor polarização **P** (o vetor magnetização **M**). Qualquer que seja o caso, do desenvolvimento que se segue decorre que nesses meios há uma completa analogia entre os vetores do par $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, assim como entre os de $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$; sobretudo quando se adota o sistema gaussiano, despojado (v. ainda Becker) das distorções pré-relativistas.

Idealmente, a abordagem da questão da analogia entre esses vetores requereria comparar os campos gerados pelas usuais distribuições de cargas, correntes e dipolos elétricos, no seu caso mais geral, com a sua "imagem especular" em termos magnéticos; em outras palavras, as densidades de carga, de corrente e de dipolo elétricos deveriam ser substituídos por densidades de pólos magnéticos e por densidades de "correntes" e dipolos magnéticos, respectivamente. Isto simetrizaria inteiramente o formalismo, propiciando a almejada analogia como equivalência algébrica entre as equações relacionando campos e fontes. No entanto, os polos magnéticos e seus fluxos não são considerados aqui - nem na maioria dos formalismos convencionais[9]. Essa dificuldade pode, no entanto, ser superada.

Mantendo a idéia norteadora de que, segundo o teorema de Helmholtz, um campo vetorial fica definido quando se conhecem a sua divergência e o seu rotacional, exponhamos inicialmente as equações válidas para os vetores dos campos elétrico e magnético dispostas em colunas separadas da mesma tabela, como abaixo. Em notas subseqüentes, nós explicamos os passos para a sua dedução.

Tabela I: Equações gerais sobre os vetores dos campos

	Vetores elétricos $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$		Vetores magnéticos $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$	
div	$\nabla \cdot \mathbf{E} = k_1\rho - (k_1/\alpha)\, \nabla \cdot \mathbf{P}$	(a)	$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\gamma\nabla \cdot \mathbf{M}$	(e)
rot	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	(b)	$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\beta\mathbf{J}$	(f)
div	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \gamma\alpha\rho$	(c)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(g)
rot	$\nabla \times \mathbf{D} = \gamma\nabla \times \mathbf{P}$	(d)	$\nabla \times \mathbf{B} = k_2\mathbf{J} + (k_2/\beta)\, \nabla \times \mathbf{M}$	(h)

NOTAS: (i) a equação (a) é uma conseqüência da comparação entre (53) e (54); no seu segundo membro, ρ representa a densidade de carga livre, a mesma que aparece em (c);

(ii) a equação (d) decorre da associação entre (13) e (53);

(iii) a equação (h) decorre de (66) e (67); no seu segundo membro, **J** representa a densidade de corrente livre, a mesma que surge em (f);

[9] Deve-se, no entanto, notar que essa inclusão é teoricamente possível; por exemplo, ela pode se dar pela adição, aos nossos axiomas, dos seus análogos com relação aos monopolos magnéticos e ao seu fluxo.

(iv) (b), (c), (e), (f) e (g) são meras transcrições de (13), (54), (83), (66) e (17), respectivamente.

Caso densidades de polos e de correntes magnéticas fossem introduzidas no formalismo, as equações (a)-(h) tornar-se-iam inteiramente simétricas: como pode ser notado da sua aparência geral, essas densidades "estão faltando" em (b), (d), (e) e (g). Como a teoria não inclui polos magnéticos nem o seu fluxo, uma via para superar a conseqüente assimetria é analisar as equações sobre os campos que surgem dessas equações gerais pela eliminação nelas das cargas e correntes elétricas *reais*, i.e., o caso em que ambos ρ e $\mathbf{J}$ se anulam. Isso equivale a considerar somente os campos surgidos de meios materiais polarizados (e, estritamente falando, magnetizados), representados por $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$. As equações resultantes estão mostradas na tabela seguinte:

Tabela II: Equações sobre vetores do campo relacionados a fontes materiais

	Vetores elétricos $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$		Vetores magnéticos $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$	
div	$\nabla \cdot \mathbf{E} = -(k_1/\alpha)\nabla \cdot \mathbf{P}$	(a1)	$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\gamma \nabla \cdot \mathbf{M}$	(e1)
rot	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	(b1)	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	(f1)
div	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	(c1)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(g1)
rot	$\nabla \times \mathbf{D} = \gamma \nabla \times \mathbf{P}$	(d1)	$\nabla \times \mathbf{B} = (k_2/\beta)\nabla \times \mathbf{M}$	(h1)

Um par conveniente de objetos obedecendo essas equações é o que consiste de dois corpos de forma idêntica, sendo um deles um *eletreto* com polarização $\mathbf{P}$ e o outro um *ímã permanente* com magnetização $\mathbf{M}$, o que é uma situação realizável na prática. Como, de acordo com o teorema de Helmholtz, um vetor fica definido de forma única pelas suas densidades de polos e de vórtices, conclui-se que distribuições análogas de polos e vórtices dão lugar a vetores análogos. Aplicando essa regra às equações da Tabela II prova-se imediatamente a nossa hipótese inicial, qual seja, a de que $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ e $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$ são os pares de vetores elétricos e magnéticos análogos.

A analogia torna-se ainda mais clara se as equações são escritas em unidades gaussianas:

Tabela III: Equações de campos materiais em unidades gaussianas[10]

	Vetores elétricos $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$		Vetores magnéticos $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$	
div	$\nabla \cdot \mathbf{E} =^{G} -4\pi \nabla \cdot \mathbf{P}$	(a2)	$\nabla \cdot \mathbf{H} =^{G} -4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}$	(e2)
rot	$\nabla \times \mathbf{E} =^{G} 0$	(b2)	$\nabla \times \mathbf{H} =^{G} 0$	(f2)
div	$\nabla \cdot \mathbf{D} =^{G} 0$	(c2)	$\nabla \cdot \mathbf{B} =^{G} 0$	(g2)
rot	$\nabla \times \mathbf{D} =^{G} 4\pi \nabla \times \mathbf{P}$	(d2)	$\nabla \times \mathbf{B} =^{G} 4\pi \nabla \times \mathbf{M}$	(h2)

Se, adicionalmente, nós assumirmos que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv^{G} \mathbf{M}(\mathbf{r}), \tag{103}$$

então os vetores elétricos e magnéticos serão não só análogos mas *idênticos*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv^{G} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \tag{104}$$

e

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) \equiv^{G} \mathbf{B}(\mathbf{r}), \tag{105}$$

Do que foi exposto depreende-se que: (i) não existe qualquer hierarquia entre os vetores elétricos, assim como tampouco entre os magnéticos; (ii) a analogia elétro-magnética dá-se entre **E** e **H** e entre **D** e **B**.

[10]Leia-se $=^{G}$ como: "igual em unidades gaussianas".

Capítulo 3
Campos Dependentes do Tempo

3.1 A Lei de Faraday e as Equações de Maxwell

A equação da força de Lorentz, (27), foi deduzida especificamente para campos elétricos e magnéticos estacionários. Cabe aqui generalizar esse resultado conforme o seguinte axioma:

Axioma 6: *A equação da força de Lorentz,*

$$\mathbf{F}_{em} = q\left(\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \tag{106}$$

é válida em geral, inclusive para campos dependentes do tempo.

Essa é a base para a determinação da transformação galileana dos campos. De fato, sejam Γ and Γ' dois sistemas de referência arbitrários e $\mathbf{V}$ a velocidade de Γ' com relação a Γ. Em vista da invariância galileana do tempo, da carga e da força, a equação (106) aplicada ao caso de uma partícula com carga q, movendo-se com relação a ambos sistemas de referência, leva à relação:

$$q\left[\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \beta \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\right] = q\left[\alpha \mathbf{E}'(\mathbf{r}',t) + \beta \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)\right], \tag{107}$$

sendo as variáveis com linha ($'$) referentes a Γ' e as suas análogas a Γ. De acordo com os padrões galileanos, a posição e a velocidade da partícula nesses referenciais estão relacionadas por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \tag{108}$$

e

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \tag{109}$$

Substituindo $\mathbf{v}'$ em (107) pela sua expressão em (109) e tendo em vista que a equação resultante é válida para todo valor de $\mathbf{v}$, obtemos imediatamente as relações que governam a transformação galileana do campos elétricos e magnéticos:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t) = \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \tag{110}$$

e

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{V} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t), \tag{111}$$

respectivamente.

A adoção de transformações galileanas impõe a restrição de serem as equações (110) e (111) resultados aproximados, válidos para

$$v \ll c \tag{112}$$

e

$$V \ll c, \tag{113}$$

com

$$v = |\mathbf{v}|$$

e

$$V = |\mathbf{V}|.$$

Mostra-se (v. Apêndice 1), que essa adoção implica, em termos da medida da *fôrça de Lorentz*, um desvio da ordem de V^2/c^2 ou $\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/c^2$, aceitável sob as condições dadas por (112) e (113).

Para obter as transformações galileanas dos operadores diferenciais espaciais e temporais, nós partimos da identidade:

$$g(\mathbf{r}', t) \equiv f(\mathbf{r}, t), \tag{114}$$

entre funções definidas em Γ e Γ', respectivamente, e das definições dos operadores "nabla":

$$\nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{115}$$

e

$$\nabla' \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z'}. \tag{116}$$

Fazemos uso de (108) para deduzir a identidade

$$\nabla' g(\mathbf{r}', t) \equiv \nabla f(\mathbf{r}, t). \tag{117}$$

Identidades análogas são obtidas para as demais operações com ∇ e ∇', demonstrando assim a identidade formal

$$\nabla' \equiv \nabla, \tag{118}$$

entre eles. Por outro lado, desenvolvendo a identidade

$$\frac{dg(\mathbf{r}', t)}{dt} \equiv \frac{df(\mathbf{r}, t)}{dt} \tag{119}$$

em termos das derivadas parciais espaciais e temporais e levando em conta (108), obtemos

$$\frac{\partial g(\mathbf{r}',t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial f(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\, f(\mathbf{r},t), \tag{120}$$

ou simplesmente

$$\partial_t' \equiv \partial_t + \mathbf{V}\cdot\nabla, \tag{121}$$

onde a derivada temporal no primeiro membro opera sobre uma função definida em Γ' e o segundo membro opera sobre sua função idêntica, definida em Γ.

As equações (110), (111), (118) e (121) permitem a determinação e a análise de expressões galileanamente invariantes. Assim, é óbvio que o primeiro membro de (17) é um invariante galileano, i.e., que

$$\nabla'\cdot\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t) \equiv \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t). \tag{122}$$

Além disso, o seu segundo membro é um escalar, portanto a equação (17) é ela própria um invariante galileano. Por outro lado, pode ser mostrado facilmente que (13) não o é, pois os campos elétricos não são, em si, invariantes galileanos. Ao invés disso, eles se transformam segundo (111). No entanto, (13) pode ser substituída por uma relação galileanamente invariante, pela aplicação do operador rotacional sobre ambos os membros de (111). De acordo com (118) obtemos:

$$\nabla'\times\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t) \equiv \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\beta}{\alpha}\nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)) \tag{123}$$

cujo último termo no segundo membro pode ser transformado segundo o cálculo vetorial e (17), de forma que resulta

$$\nabla'\times\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t) \equiv \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \frac{\beta}{\alpha}(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{B}(\mathbf{r},t). \tag{124}$$

A aplicação da identidade operacional (121) sobre (110) leva a

$$\frac{\partial\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}(\mathbf{r},t). \tag{125}$$

A multiplicação de ambos membros de (125) por β/α e a sua soma com (124) dá como resultado

$$\nabla'\times\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t) + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)}{\partial t} \equiv \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \tag{126}$$

que estabelece a invariância galileana de

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{127}$$

Esse é o invariante galileano relacionado com (13); para campos estáticos ambos termos dessa expressão se anulam e se tem

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{128}$$

o que obviamente representa uma *equação galileanamente invariante.* Provamos assim que sempre que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são independentes do tempo em algum referencial a *equação da indução eletromagnética*, (128), vale em todos os referenciais. Em outras palavras, mesmo sob um formalismo galileano a indução eletromagnética decorre de leis precedentes, ao menos em um número significativo de casos.

Pode-se argumentar que no caso mais geral o segundo membro de (128) não necessariamente é nulo. Porisso estabeleçamos como axioma essa nulidade:

Axioma 7: *A vorticidade do vetor campo elétrico está relacionada com a derivada temporal do vetor indução magnética pela equação*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{129}$$

Ele generaliza e substitui (13) no conjunto de equações dos campos eletromagnéticos e tem uma forma integral que pode ser obtida aplicando-se o teorema de Stokes ao seu primeiro membro e comutando a derivação parcial e a resultante integral de superfície, de acordo com a mútua independência das correspondentes variáveis. Se, além disso, ambos membros são multiplicados por α, a equação final adquire a forma:

$$\oint_C \alpha \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\beta \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS. \tag{130}$$

A integral no primeiro membro é imediatamente reconhecida como a força eletromotriz induzida (f.e.m.) ε no circuito C, enquanto a do segundo membro representa o fluxo da indução magnética Φ através da superfície S limitada por esse circuito. Conseqüentemente, ela pode ser escrita como

$$\varepsilon = -\beta \frac{d\Phi}{dt}. \tag{131}$$

Nessa forma ela é conhecida como a *lei de Faraday* da indução eletromagnética.

Dentre as equações remanescentes do conjunto de equações sobre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, só (17) é galileanamente invariante. Além disso, o novo conjunto de equações do campo não é consistente com a equação da continuidade (11), o que compromete o significado da teoria. Essa inconsistência foi levantada com a postulação por Maxwell da *corrente de deslocamento.* Traduzida em linguagem matemática e conceituação física contemporâneas[11], isso consiste em admitir a existência de um segundo termo no segundo membro da (18) [13]. A nova equação tem a forma:

$$\nabla \times \mathbf{B} = k_2 \mathbf{J} + \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{132}$$

No entanto essa equação tampouco é um invariante galileano. Somente a adoção de um formalismo inteiramente relativista pode eliminar essa inconsistência do conjunto de equações do campo eletromagnético.

(12), (17), (129) e (132) constituem o conjunto de *equações de Maxwell* para campos microscópicos.

As Equações de Maxwell para Campos Macroscópicos

Para campos estacionários macroscópicos, (12) e (18) são substituídas por (54) e (66), respectivamente. Mais uma vez, para campos dependentes do tempo a última deve ser modificada a bem da auto-consistência de acordo com o procedimento que levou à (132). Neste caso êsse procedimento leva a

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \beta \mathbf{J} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{133}$$

Essa e as equações macroscópicas não-modificadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \gamma \alpha \rho, \tag{134}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{135}$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{136}$$

constituem, no seu todo, o conjunto de *equações de Maxwell para campos macroscópicos.*

---

[11] Vale a pena insistir em que Maxwell presumia (v. Introdução) serem as correntes elétricas *circuitais*, mesmo aquelas associadas a campos dependentes do tempo; assim sendo, a sua concepção de *corrente de deslocamento* está ligada à de que o éter seria detentor de partículas elétricas passíveis de movimento, como um condutor, estando esse movimento, aí também, associado à vorticidade do campo magnético.

Mostra-se facilmente que, apesar das derivadas temporais introduzidas em (133) e (135), as condições de contorno para campos dependentes do tempo têm exatamente a mesma forma que para o caso estático, eq. (99) a (102).

3.2 Ondas Eletromagnéticas e Teorema de Poynting

Ondas Eletromagnéticas

Para completar o quadro deste formalismo, analisemos duas conseqüências das equações de Maxwell: as equações de onda nos potenciais eletromagnéticos e o balanço de energia descrito pelo teorema de Poynting. Adotando o procedimento usual [13] deduzimos, de (17) e (129), os potenciais vetor e escalar eletromagnéticos, $\mathbf{A}_{em}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi_{em}(\mathbf{r}, t)$, respectivamente, relacionados com os vetores do campo dependente do tempo por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\nabla \times \mathbf{A}_{em} \tag{137}$$

e

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla\phi_{em} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{A}_{em}}{\partial t}. \tag{138}$$

Aplicando a eles as restantes equações de Maxwell, (12) e (132), e impondo-lhes a condição de Lorentz, aqui estabelecida como,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{em} + \frac{k_2}{k_1}\frac{\partial \phi_{em}}{\partial t} = 0, \tag{139}$$

somos levados às equações de onda

$$\nabla^2\phi_{em} - \frac{\beta k_2}{\alpha k_1}\frac{\partial^2 \phi_{em}}{\partial t^2} = -k_1\rho \tag{140}$$

e

$$\nabla^2\mathbf{A}_{em} - \frac{\beta k_2}{\alpha k_1}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{em}}{\partial t^2} = -k_2\mathbf{J}. \tag{141}$$

Na ausência de cargas e correntes, as equações acima reduzem-se a equações de onda homogêneas em ϕ_{em} e $\mathbf{A}_{em}$, desde que $\beta k_2/\alpha k_1 > 0$ (do contrário essas equações levariam a soluções atenuadas ou, inversamente, "building-up", sem significado físico). Ademais, nesse caso $\alpha k_1/\beta k_2$ representa o quadrado da velocidade da onda eletromagnética, que é experimentalmente reconhecida como igual à velocidade da luz, c, as ondas luminosas pertencendo ao espectro eletromagnético. Assim sendo, temos o nosso último axioma:

Axioma 8: *As ondas eletromagnéticas propagam-se à velocidade c da luz, sendo esta uma particular onda do espectro eletromagnético,* e sua conseqüência imediata:

$$\frac{\alpha k_1}{\beta k_2} = c^2 > 0, \tag{142}$$

conforme antecipado no final da Seção 2.1.

Teorema de Poynting

Analisemos agora o teorema de Poynting, uma conseqüência das equações de Maxwell cuja importância se reflete em vários desdobramentos e aplicações da teoria; em particular, ele nos permitirá decidir sobre os sinais das constantes arbitrárias que introduzimos e que se referem aos sistemas de unidades.

Aplicando às equações (129) e (132) um tratamento análogo ao adotado por Landau e Lifshitz [21], somos levados a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_V \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{k_1}E^2 + \frac{\beta}{k_2}B^2\right) dV\right] + \alpha \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dV = -\oint_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}dS \tag{143}$$

sendo V o volume limitado pela superfície S. Essa equação é reconhecida como a relação de balanço de energia

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_V \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{k_1}E^2 + \frac{\beta}{k_2}B^2\right) dV + \sum K\right] = -\oint_S \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}dS, \tag{144}$$

onde a soma $\sum K$ representa a energia cinética total das partículas (carregadas) contidas em V ou, alternativamente, sua energia total, incluindo as massas de repouso (sendo constantes, sua inclusão não altera o valor final da derivada). A grandeza $\mathbf{S}$ no segundo membro é o vetor de Poynting, definido como:

$$\mathbf{S} = \frac{\alpha}{k_2}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}). \tag{145}$$

Se V for estendido a todo o espaço e as cargas e correntes formarem um sistema confinado, então (144) reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{k_1}E^2 + \frac{\beta}{k_2}B^2\right) dV + \sum K\right] = 0. \tag{146}$$

Essa equação nos diz que a grandeza entre chaves é conservada. Sendo $\sum K$ a energia cinética (ou total) das partículas do sistema, concluímos que a integral - agora calculada sobre todo o espaço - representa a energia acumulada no campo eletromagnético. Assim sendo o integrando

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{k_1}E^2 + \frac{\beta}{k_2}B^2\right) \tag{147}$$

está associado com a densidade de energia do campo. Logo, (144) é *o balanço de energia do sistema englobado por S* - o teorema de Poynting -, sendo $\mathbf{S}$ uma medida do fluxo de energia por unidade de área e por unidade de tempo. De (143) pode-se facilmente obter sua forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \tag{148}$$

Esse resultado é traduzido como o

Teorema de Poynting. O balanço local da energia eletromagnética está dado pela equação (148), onde o vetor de Poynting, $\mathbf{S}$, *dado pela (145), traduz em direção e intensidade o fluxo dessa energia por unidade de área e unidade de tempo;* w, *expresso pela (147), é a sua densidade volumétrica e* $\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ *representa a sua dissipação por efeito Joule.* [21]

Ondas em Meios Materiais

Por analogia com as deduções acima obtemos as equações de onda sobre os potenciais eletromagnéticos e o teorema de Poynting para campos em meios materiais. A condição de Lorentz (139) deve ser substituída por

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{em} + \frac{\beta}{\alpha}\epsilon\mu\frac{\partial \phi_{em}}{\partial t} = 0. \tag{149}$$

Aplicando (137) e (138) à (134) e levando em consideração (149) e (57)[12], deduzimos

$$\nabla^2 \phi_{em} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\epsilon\mu\frac{\partial^2 \phi_{em}}{\partial t^2} = -\frac{\gamma\alpha\rho}{\epsilon}. \tag{150}$$

Realizando os mesmos cálculos sobre (133) obtemos, com ajuda de (69),

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{em} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\epsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{em}}{\partial t^2} = -\gamma\beta\mu\mathbf{J}. \tag{151}$$

As equações (150) e (151) mostram que num meio material as ondas eletromagnéticas se propagam com velocidade

$$v = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \tag{152}$$

Usando (58), (70), (142) e (152) obtemos o *índice de refração* do meio atravessado pela onda:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{(1+\gamma\chi_e)(1+\gamma\chi_m)}. \tag{153}$$

[12]Consideramos aqui apenas meios isotrópicos e lineares que são também *homogêneos*.

Sendo n não só adimensional mas também independente de sistemas de unidades, também o serão $\gamma\chi_e$ e $\gamma\chi_m$. Operando (133) e (135) à maneira como foram operadas (129) e (132) obtemos, para meios homogêneos, lineares e isotrópicos, o teorema de Poynting na forma diferencial, equação (148), agora conforme as definições:

$$w = \frac{1}{2\gamma}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) \tag{154}$$

e

$$\mathbf{S} = \frac{\alpha}{\gamma\beta}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}), \tag{155}$$

expressões gerais da densidade de energia e do vetor de Poynting, respectivamente, em meios homogêneos, isotrópicos e lineares.

3.3 Constantes e Unidades Eletromagnéticas

Até aqui toda análise foi feita a menos da determinação dos sinais individuais das constantes do conjunto $\{k_1, k_2, \alpha, \beta\}$, o que podemos agora fazer. Com efeito, de (142) concluímos que os produtos αk_1 e βk_2 têm o mesmo sinal. O mesmo vale para α/k_1 e β/k_2. Logo a energia do campo, dada pela integral em (146), terá esse sinal comum. Em outras palavras, ela será positiva ou negativa conforme essas razões tenham sinal positivo ou negativo. No entanto, essa energia não pode ser negativa. De fato, ao deduzir a (146) não se assumiu qualquer relação entre a carga das partículas-fontes e suas massas ou suas velocidades. Portanto, sob a hipótese da energia do campo ser negativa poderíamos imaginar um sistema de partículas com valores das cargas suficientemente grandes e valores das massas e velocidades suficientemente pequenos, de tal forma que sua energia relativística total, i.e., sua *massa relativística*, dada pela grandeza entre chaves em (146), seria negativa, o que é obviamente impossível. Conseqüentemente devemos abolir a possibilidade de sinais negativos das razões α/k_1 e β/k_2 e concluir que: *O conjunto ordenado $\{k_1, k_2, \alpha, \beta\}$ pode possuir sinais apenas de acordo com os esquemas: (1) $\{++++\}$; (2) $\{+-+-\}$; (3) $\{-+-+\}$, ou (4) $\{----\}$, cada sinal sendo atribuído à constante que ocupa a mesma posição dentro das chaves; do ponto de vista físico esses sinais são não só admissíveis como também equivalentes.*

O significado físico dessas restrições é claro. A primeira delas,

$$\frac{\alpha}{k_1} > 0, \tag{156}$$

que equivale a

$$\alpha k_1 > 0, \tag{157}$$

representa a imposição de atração entres cargas de sinais opostos e repulsão entre as de mesmo sinal, como se pode notar na equação da força de Coulomb, (v. (28)). Por outro lado a desigualdade

$$\frac{\beta}{k_2} > 0 \tag{158}$$

reescrita como

$$\beta k_2 > 0, \tag{159}$$

define o sinal da força de Ampère entre fios condutores retos e infinitos, como se vê na (29). Sob essa condição, dois fios retos paralelos e infinitos, nos quais fluem cargas de *mesma natureza* no *mesmo sentido*, sofrem uma força de *atração*. A mudança, num dos fios, do sentido do fluxo ou da natureza das cargas que o constitui, levará a uma *repulsão* entre os mesmos. Alternativamente, essa condição pode ser interpretada com a *lei de Lenz*, cuja obtenção é tratada no Apêndice 2:

Lei de Lenz. Seja um circuito condutor imerso num campo magnético; se o fluxo deste no interior do circuito condutor sofrer variação, surgirá no circuito uma corrente induzida e, associado a ela, um campo magnético induzido que se oporá à variação de fluxo que o originou.

Do que foi acima exposto conclui-se que os sinais que antecedem as equações da lei de Coulomb e da lei de força de Ampère (ou o sinal imposto pela lei de Lenz sobre a lei de Faraday) são requeridos pelo balanço de energia eletromagnética e, no que diz respeito a esta abordagem, advêm dos axiomas que propusemos.

Note-se que essas restrições não comprometem a *simetria de paridade* no eletromagnetismo, que pode ser entendida como que a "imagem especular" de um sistema eletromagnético real é um sistema eletromagnético possível (respeitado o caráter pseudo-vetorial de algumas grandezas, como p. ex. a indução magnética **B**, que sofrem inversão no processo).

Enfim, as condições (156) e (158) são as únicas restrições que se impõem naturalmente sobre os sinais das constantes. Logo, duas condições adicionais devem ser impostas na forma de *convenção* para que esses sinais fiquem completamente definidos. Em outras palavras, deve-se decidir entre os conjuntos, fisicamente equivalentes, de sinais: $\{++++\}$, $\{+-+-\}$, $\{-+-+\}$, e $\{----\}$, em que cada sinal diz respeito a uma constante do conjunto ordenado $\{k_1, k_2, \alpha, \beta\}$, tomado na mesma ordem.

Visto sob outro ângulo, trata-se de definir o *sinal comum* das constantes k_1 e α e o das constantes k_2 e β. A escolha "natural" é a de atribuir sinal positivo ao par de constantes em cada caso, com o que resulta que as quatro têm todas esse sinal (primeiro conjunto acima). Em suma, adotaremos as *convenções* que se seguem com as respectivas interpretações:

Convenção de sinais e sua interpretação. Convencionam-se as seguintes desigualdades, em seguida interpretadas matematicamente:

(i) $k_1 > 0$ $(\alpha > 0)$; *a carga puntiforme positiva origina campo elétrico divergente e vice-versa & o campo elétrico e a força que ele origina sobre uma partícula positivamente carregada são colineares;*

(ii) $k_2 > 0$ $(\beta > 0)$; *direções da corrente num fio reto e do campo magnético correspondente são regidas pela regra da mão direita & direções da corrente num fio reto, de um campo magnético externo aplicado perpendicularmente sobre ele e da força que daí resulta são regidas pela regra da mão esquerda.*

As unidades eletromagnéticas estão relacionadas com as da mecânica por (142). Ou seja, essas unidades não são independentes do sistema de unidades mecânicas usado mas, ao invés disso, devem ser definidas em conexão com ele. Assim, os sistemas de unidades eletromagnéticas são baseados nos sistemas de unidades mecânicas, CGS e MKS, e os complementa. Enfim, há dois requisitos sobre eles:

Sistemas de unidades. Os sistemas de unidades estão sujeitos às duas condições seguintes:

1. *devem estar associados ao sistema CGS ou ao sistema MKS;*

2. *devem ter suas correspondentes constantes interrelacionadas pela equação*

$$\frac{\alpha k_1}{\beta k_2} = c^2. \tag{160}$$

Como é sabido, os sistemas mais usados são: o SI, associado ao MKS e tendo por constantes o conjunto ordenado $\{1/\varepsilon_0, \mu_0, 1, 1\}$ - na ordem previamente definida - e o sistema gaussiano, associado ao CGS e tendo por constantes $\{4\pi, 4\pi/c, 1, 1/c\}$. Note-se que ambos obedecem à (160). As equações deste formalismo podem ser imediatamente adaptadas a um sistema ou ao outro ou, ainda, a qualquer outro que se convencione estabelecer[13] pela substituição nelas dessas constantes.

[13]No sistema Heaviside-Lorentz, uma espécie de sistema gaussiano racionalizado, as constantes valem $\{1, 1/c, 1, 1/c\}$. Esse sistema é desusado; contudo, em vista da sua concisão o incluímos no formulário ao final do texto.

Conclusões

Tomando por base cinco axiomas simples é possível deduzir o conjunto completo de equações que regem os campos eletromagnéticos estáticos, assim como a da força de Lorentz; esta é depois generalizada por meio do sexto axioma, para sistemas e campos dependentes do tempo. A partir daí, adotando-se um formalismo galileano a equação da lei de Faraday pode ser obtida em casos particulares, com base na própria equação da força de Lorentz. Essa lei é, em seguida, generalizada por meio de um novo axioma. Junto com a equação do caráter circuital de **B**, ela constitui o par de equações homogêneas de Maxwell, invariantes do ponto de vista galileano. No entanto as equação não-homogêneas de Maxwell não o são; essa inconsistência é superada no contexto da relatividade. Um último axioma traduz o fato empírico da radiação luminosa pertencer ao espectro eletromagnético e, daí, terem as ondas eletromagnéticas velocidade c, igual à da luz.

Uma abordagem relativista poderá ser feita com base em um número menor de axiomas; além disso, esses axiomas têm natureza simples. A sua elaboração formal, incluíndo recursos de teoria de conjuntos, será objeto de um trabalho de pesquisa a ser encetado proximamente. Para tanto, este provê alguns norteamentos.

A axiomatização aqui exposta proporciona uma abordagem alternativa ao ensino do eletromagnetismo [22] e um instrumento de análise de um assunto controverso: o dos sistemas de unidades eletromagnéticas.

Tabelas de Fórmulas
em
Diferentes Sistemas de Unidades Eletromagnéticas

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Equação "ponte" (condição sobre as constantes)	$\frac{\alpha k_1}{\beta k_2} = c^2$	$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$	(identidade)	(identidade)
Equação da continuidade	$\nabla \bullet \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0^{(1)}$			
Densidade de carga	$\rho = Nq^{(1)}$			
Densidade de corrente	$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}^{(1)}$			
Equação da força de Lorentz	$\mathbf{F} = q(\alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$
Potencial escalar eletrostático	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$
Potencial vetor magnetostático	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$
Campo eletrostático	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$
Campo de indução magnética	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dV'$
Potencial eletrostático de uma carga puntiforme	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{k_1 q}{4\pi} \frac{1}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$
Campo de uma carga pt$^{\text{fme}}$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k_1 q}{4\pi} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$
Força sobre um circuito	$\mathbf{F} = \beta I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$	$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$	$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$	$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$
Lei de Biot e Savart	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{k_2 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi c} \int \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3}$

(1) Equações de forma universal são exibidas como uma só expressão ocupando todas as células da linha correspondente.

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	Relação	S.I.	Gaussiano	Heaviside-Lorentz
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Força de Ampère entre circuitos	$\mathbf{F}_{12} = \frac{\beta k_2 I_1 I_2}{4\pi} \int\int \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{\lvert \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \rvert^3}$	$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int\int \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{\lvert \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \rvert^3}$	$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int\int \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{\lvert \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \rvert^3}$	$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{4\pi c^2} \int\int \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{\lvert \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \rvert^3}$
Campo de um fio reto	$B(\rho) = \frac{k_2 I}{2\pi r}$	$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B(\rho) = \frac{2I}{cr}$	$B(\rho) = \frac{I}{2\pi cr}$
Lei de Gauss (microscópica)	$\oint \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} dS = k_1 \int \rho dV$	$\oint \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$	$\oint \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} dS = 4\pi \int \rho dV$	$\oint \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} dS = \int \rho dV$
Lei circuital de Ampère	$\oint \mathbf{B} \bullet d\mathbf{l} = k_2 \int \mathbf{J} \bullet \mathbf{n} dS$	$\oint \mathbf{B} \bullet d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \bullet \mathbf{n} dS$	$\oint \mathbf{B} \bullet d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{J} \bullet \mathbf{n} dS$	$\oint \mathbf{B} \bullet d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J} \bullet \mathbf{n} dS$
Lei de força de Coulomb	$F_{12} = \frac{\alpha k_1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{\lvert \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rvert^2}$	$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\lvert \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rvert^2}$	$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{\lvert \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rvert^2}$	$F_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{\lvert \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rvert^2}$
Força entre fios retos paralelos	$F_{12} = \frac{\beta k_2}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$	$F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$	$F_{12} = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 d}$	$F_{12} = \frac{I_1 I_2}{2\pi c^2 d}$
Momento de dipolo elétrico	$\mathbf{p} = 2\alpha q \mathbf{d}$	$\mathbf{p} = 2q\mathbf{d}$	$\mathbf{p} = 2q\mathbf{d}$	$\mathbf{p} = 2q\mathbf{d}$
Momento de dipolo magnético de um circuito	$\mathbf{m} = \beta I \mathbf{S}$	$\mathbf{m} = I\mathbf{S}$	$\mathbf{m} = \frac{1}{c} I \mathbf{S}$	$\mathbf{m} = \frac{1}{c} I \mathbf{S}$
Força sobre um dipolo elétrico	$\mathbf{F}_p = (\mathbf{p} \bullet \nabla)\mathbf{E}$			
Torque sobre um dipolo elétrico	$\boldsymbol{\tau}_p = \mathbf{p} \times \mathbf{E} + \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \bullet \nabla)\mathbf{E}$			
Energia potencial de um dip. el.	$W_p = -\mathbf{p} \bullet \mathbf{E}$			
Força sobre um dipolo magnético	$\mathbf{F}_m = (\mathbf{m} \bullet \nabla)\mathbf{B}$			
Torque sobre um dipolo magnético	$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B} + \mathbf{r} \times (\mathbf{m} \bullet \nabla)\mathbf{B}$			
Energia potencial de um dip. mag.	$W_m = -\mathbf{m} \bullet \mathbf{B}$			
Potencial eletrostático de um dip. el.	$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi\alpha} \frac{\mathbf{p} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$	$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$	$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$.	$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$
Potencial vetor de um dip. mag.	$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi\beta} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$	$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$	$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$	$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\lvert \mathbf{r} - \mathbf{r}' \rvert^3}$

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Expansão em multipolos do pot. eletrostático	$\phi(\mathbf{r}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \phi_n(\mathbf{r})$; $\phi_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{k_1}{4\pi n!} \int \rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$	$\phi_n(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{4\pi\epsilon_0 n!} \int \rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$	$\phi_n(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{n!} \int \rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$	$\phi_n(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{4\pi n!} \int \rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$
Termo de monopolo	$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{k_1 Q}{4\pi r}$;	$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$;	$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}$;	$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi r}$;
	Q = carga total = $\int \rho(\mathbf{r}') dV'$			
Termo de dipolo	$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi\alpha} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{p} = \alpha \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$	$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$	$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$	$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV'$
Expansão em multipolos do pot. vetor magnético	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(\mathbf{r})$; $\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{k_2}{4\pi n!} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$	$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{\mu_0}{4\pi n!} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$	$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{cn!} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$	$\mathbf{A}_n(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{4\pi cn!} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n \frac{1}{r} dV'$
Termo de monopolo	$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0$	$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0$	$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0$	$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0$
Termo de dipolo	$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi\beta} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{m} = \frac{\beta}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$	$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$	$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$	$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$; $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$
Potenciais de distribuições volumétricas de dipolos elétricos e magnéticos	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{k_1}{4\pi\alpha} \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{k_2}{4\pi\beta} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$	$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$	$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$; $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV'$
Densidades de carga de pol.	$\rho_P = -\frac{1}{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{P}$; $\sigma_P = \frac{1}{\alpha} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$	$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$; $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$	$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$; $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$	$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$; $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$
Densidades de corrente de magnetização	$\mathbf{J}_M = \frac{1}{\beta} \nabla \times \mathbf{M}$; $\mathbf{j}_M = \frac{1}{\beta} \mathbf{M} \times \mathbf{n}$	$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$; $\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$	$\mathbf{J}_M = c\nabla \times \mathbf{M}$; $\mathbf{j}_M = c\mathbf{M} \times \mathbf{n}$	$\mathbf{J}_M = c\nabla \times \mathbf{M}$; $\mathbf{j}_M = c\mathbf{M} \times \mathbf{n}$

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Vetor deslocamento	$\mathbf{D} = \gamma\alpha\left(\frac{1}{k_1}\mathbf{E} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{P}\right)$	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$
Intensidade magnética	$\mathbf{H} = \gamma\beta\left(\frac{1}{k_2}\mathbf{B} - \frac{1}{\beta}\mathbf{M}\right)$	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$
Lei de Gauss para **D**	$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}dS = \gamma\alpha\int \rho dV$	$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}dS = \int \rho dV$	$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}dS = 4\pi\int \rho dV$	$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}dS = \int \rho dV$
Lei de Ampère para **H**	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \gamma\beta\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}dS$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}dS$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}dS$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}dS$
$\mathbf{B}(\mathbf{H}, \mathbf{M})$	$\mathbf{B} = \frac{k_2}{\gamma\beta}(\mathbf{H} + \gamma\mathbf{M})$	$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$
$\mathbf{P}(\mathbf{E})$ (diel.linear isotrópico)	$\mathbf{P} = \frac{\gamma\alpha\chi_e}{k_1}\mathbf{E}$;	$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}$;	$\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$;	$\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$;
	χ_e = susceptibilidade elétrica			
ϵ = permissividade elétrica (constante dielétrica)	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$; $\epsilon = \frac{\gamma\alpha}{k_1}(1 + \gamma\chi_e)$	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$; $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$; $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$	$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$; $\epsilon = 1 + \chi_e$
$\mathbf{M}(\mathbf{H})$ (meio mag. linear isotrópico)	$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H}$; χ_m = susceptibilidade magnética			
μ = permeabilidade magnética	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$; $\mu = \frac{k_2}{\gamma\beta}(1 + \gamma\chi_m)$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$; $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$; $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$; $\mu = 1 + \chi_m$
Permis. elétrica do vácuo	$\epsilon_0 = \frac{\gamma\alpha}{k_1}$	(identidade)	$\epsilon_0 = 1$	$\epsilon_0 = 1$
Permeab. mag. do vácuo	$\mu_0 = \frac{k_2}{\gamma\beta}$	(identidade)	$\mu_0 = 1$	$\mu_0 = 1$
Potencial escalar magnético	$\mathbf{H} = -\nabla\psi$; $\psi = \psi_s + \psi^*$; $\psi_s \rightarrow$ meios materiais; $\psi^* \rightarrow$ correntes de condução			
ψ_s = potencial escalar magnético de meios magnetizados	$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{4\pi}\int \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dV' + \frac{\gamma}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dS'$	$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dV' + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dS'$	$\psi_s(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dV' + \int_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dS'$	$\psi_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dV' + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\sigma_M(\mathbf{r}')}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}dS'$

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Densidade de pólos magnéticos	$\rho_M = -\nabla \bullet \mathbf{M}$			
Dens. sup. de int. de pólos mag.	$\sigma_M = \mathbf{M} \bullet \mathbf{n}$			
ψ^* = potencial escalar magnético	$\psi^*(\mathbf{r}) = -\frac{\gamma\beta I}{4\pi}\Omega(\mathbf{r});$	$\psi^*(\mathbf{r}) = -\frac{I\Omega(\mathbf{r})}{4\pi};$	$\psi^*(\mathbf{r}) = -\frac{I\Omega(\mathbf{r})}{c};$	$\psi^*(\mathbf{r}) = -\frac{I\Omega(\mathbf{r})}{4\pi c};$
de cor. condução (para um circ.)	$\Omega(\mathbf{r})$ = ângulo sólido = $-\int \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\bullet\mathbf{n}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert^3} dS'$			
Descontinuidade do potencial escalar mag. através de uma camada dipolar	$\psi^+ - \psi^- = \Delta\psi$ $= \Delta\psi^* = \gamma\beta I$	$\psi^+ - \psi^- = \Delta\psi$ $= \Delta\psi^* = I$	$\psi^+ - \psi^- = \Delta\psi$ $= \Delta\psi^* = \frac{4\pi I}{c}$	$\psi^+ - \psi^- = \Delta\psi$ $= \Delta\psi^* = \frac{I}{c}$
Equação de Poisson para ϕ	$\nabla^2\phi = -k_1\rho$; ρ = dens. c^{ga} total	$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$	$\nabla^2\phi = -4\pi\rho$	$\nabla^2\phi = -\rho$
Equação de Laplace para ϕ	$\nabla^2\phi = 0$; no espaço livre e em dielétricos homogêneos, isotrópicos e lineares (HIL)			
Equação de Poisson para ψ	$\nabla^2\psi = \gamma\nabla \bullet \mathbf{M} = -\gamma\rho_M$	$\nabla^2\psi = \nabla \bullet \mathbf{M} = -\rho_M$	$\nabla^2\psi = 4\pi\nabla \bullet \mathbf{M} = -4\pi\rho_M$	$\nabla^2\psi = \nabla \bullet \mathbf{M} = -\rho_M$
Equação de Laplace para ψ	$\nabla^2\psi = 0$; onde $\nabla \bullet \mathbf{M} = 0$ (espaço livre, materiais magnéticos HIL, etc.)			
Condições de contorno sobre os vetores do campo (geral, para campos estacionários e dep. do tempo)	$\mathbf{n}_{12} \bullet (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \gamma\alpha\sigma$	$\mathbf{n}_{12} \bullet (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$	$\mathbf{n}_{12} \bullet (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi\sigma$	$\mathbf{n}_{12} \bullet (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$
	$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$	$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$, ou $\mathbf{E}_{1T} = \mathbf{E}_{2T}$		
	$\mathbf{n}_{12} \bullet (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$	$\mathbf{n}_{12} \bullet (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$, ou $B_{1n} = B_{2n}$		
	$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \gamma\beta\mathbf{j}$	$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}$	$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$	$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{1}{c}\mathbf{j}$
Lei de Ohm (local)	$\mathbf{J} = g\mathbf{E}$; g = condutividade			
Lei de Ohm ("integral")	$V = RI$			
Resistência elétrica de um condutor cilíndrico	$R = \frac{l}{gA}$			
Carga armazenada num capacitor	$Q = CV$			
Energia armazenada num capacitor	$W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$			

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Capacitância de um capacitor plano-paralelo	$C = \frac{\epsilon S}{\gamma \alpha d}$	$C = \frac{\epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$	$C = \frac{\epsilon S}{d}$
Transformação Galileana dos vetores do campo	$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{V} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$
	$\mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$			
Indução eletromagnética (forma diferencial)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Indução eletromagnética (forma integral)	ε = f.e.m. induzida.= $-\beta\frac{d\Phi}{dt}$	$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$	$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$
Indutância mútua e auto-ind.	$\varepsilon_i = -\sum_j M_{ij}\frac{dI_j}{dt}; \ (M_{ii} = L_i)$			
M_{ij} para meios lineares	$M_{ij} = \beta\frac{\Phi_{ij}}{I_j}; \ L_i = \beta\frac{\Phi_{ii}}{I_i}$	$M_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{I_j}; \ L_i = \frac{\Phi_{ii}}{I_i}$	$M_{ij} = \frac{1}{c}\frac{\Phi_{ij}}{I_j}; \ L_i = \frac{1}{c}\frac{\Phi_{ii}}{I_i}$	$M_{ij} = \frac{1}{c}\frac{\Phi_{ij}}{I_j}; \ L_i = \frac{1}{c}\frac{\Phi_{ii}}{I_i}$
Energia magnética de um sistema de circuitos	$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j$			
Fórmula de Neumann	$M_{ij} = \frac{\beta k_2}{4\pi}\oint_{C_i}\oint_{C_j}\frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{\lvert\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\rvert}$	$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_i}\oint_{C_j}\frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{\lvert\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\rvert}$	$M_{ij} = \frac{1}{c^2}\oint_{C_i}\oint_{C_j}\frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{\lvert\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\rvert}$	$M_{ij} = \frac{1}{4\pi c^2}\oint_{C_i}\oint_{C_j}\frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{\lvert\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\rvert}$

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Equações de Maxwell microscópicas	$\nabla \bullet \mathbf{E} = k_1\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = k_2\mathbf{J} + \frac{k_2}{k_1}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \bullet \mathbf{E} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \bullet \mathbf{E} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$
Equações de Maxwell macroscópicas	$\nabla \bullet \mathbf{D} = \gamma\alpha\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\beta\mathbf{J} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \bullet \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \bullet \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \bullet \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$
Equações de onda sobre os vetores do campo (vácuo)	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{B}\end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{B}\end{Bmatrix} = 0,$ sob a imposição: $\frac{\alpha k_1}{\beta k_2} = c^2$ (equação-ponte, relacionando grandezas eletromagnéticas e mecânicas)			
Equações de onda sobre os vetores (m. mat., s/ carga livre)	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} = 0$	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} = 0$	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} = 0$	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{H}\end{Bmatrix} = 0$
Campos e potenciais dependentes do tempo	$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t};$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t};$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t};$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t};$
	$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}$			
Condição de Lorentz (vácuo)	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{k_2}{k_1}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$
Condição de Lorentz (m. mat.)	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{\beta}{\alpha}\epsilon\mu\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \epsilon\mu\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$
Equações de onda sobre os potenciais (vácuo)	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix}$ $= -\begin{Bmatrix}k_2\mathbf{J}\\k_1\rho\end{Bmatrix}$	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix}$ $= -\begin{Bmatrix}\mu_0\mathbf{J}\\\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{Bmatrix}$	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix}$ $= -\begin{Bmatrix}\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\4\pi\rho\end{Bmatrix}$	$\nabla^2\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix}\mathbf{A}\\\phi\end{Bmatrix}$ $= -\begin{Bmatrix}\frac{1}{c}\mathbf{J}\\\rho\end{Bmatrix}$

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Equações de onda sobre os potenciais (meios mat.)	$\nabla^2 \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} \gamma\beta\mu\mathbf{J} \\ \frac{\gamma\alpha\rho}{\epsilon} \end{matrix} \right\}$	$\nabla^2 \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} - \epsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} \mu\mathbf{J} \\ \frac{\rho}{\epsilon} \end{matrix} \right\}$	$\nabla^2 \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J} \\ \frac{4\pi\rho}{\epsilon} \end{matrix} \right\}$	$\nabla^2 \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{matrix} \right\} = -\left\{ \begin{matrix} \frac{\mu}{c}\mathbf{J} \\ \frac{\rho}{\epsilon} \end{matrix} \right\}$
Velocidade da onda em meios materiais	$v = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
Índice de refração	$n = \frac{c}{v} = \frac{\beta c}{\alpha} \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{(1+\gamma\chi_e)(1+\gamma\chi_m)}$	$n = \frac{c}{v} = c\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{(1+\chi_e)(1+\chi_m)}$	$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{(1+4\pi\chi_e)(1+4\pi\chi_m)}$	$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{(1+\chi_e)(1+\chi_m)}$
Teorema de Poynting, forma integral	$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w dV + \alpha \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = -\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$	$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = -\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$	$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = -\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$	$\frac{\partial}{\partial t}\int_V w dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = -\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS$
Teorema de Poynting, forma diferencial	$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$	$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$	$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$	$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$
Densidade de energia (vácuo)	$w = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{k_1}E^2 + \frac{\beta}{k_2}B^2\right)$	$w = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$	$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$	$w = \frac{1}{2}(E^2 + B^2)$
Vetor de Poynting (vácuo)	$\mathbf{S} = \frac{\alpha}{k_2}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$	$\mathbf{S} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
Densidade de energia (meios mat.)	$w = \frac{1}{2\gamma}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$	$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$	$w = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$	$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$
Vetor de Poynting (meios mat.)	$\mathbf{S} = \frac{\alpha}{\gamma\beta}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$	$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$	$\mathbf{S} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$

Relações Gerais		Relações Específicas		
Nome	**Relação**	**S.I.**	**Gaussiano**	**Heaviside-Lorentz**
Constantes Gerais	$\{k_1, k_2, \alpha, \beta; \gamma\}$	$\{\frac{1}{\epsilon_0}, \mu_0, 1, 1; 1\}$	$\{4\pi, \frac{4\pi}{c}, 1, \frac{1}{c}; 4\pi\}$	$\{1, \frac{1}{c}, 1, \frac{1}{c}; 1\}$
Ondas planas	$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, onde $\mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$ ou $\mathbf{B}$; $\mathbf{F}_0$ =cte., $\mathbf{k} = k\mathbf{e}$ (**e**=versor)			
(em meios materiais	$k = \frac{\beta\sqrt{\epsilon\mu}}{\alpha}\omega = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$	$k = \sqrt{\epsilon\mu}\,\omega = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$	$k = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega}{c} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$	$k = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega}{c} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$
isentos de cargas e	$\mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = 0$ $(\mathbf{F} \perp \mathbf{k})$			
correntes de condução)	$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{e} \times \mathbf{E} = \frac{\alpha n}{\beta c}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$ $= \frac{\alpha}{\beta v}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$ $(\mathbf{B} \perp \mathbf{E})$	$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{e} \times \mathbf{E} = \frac{n}{c}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$ $= \frac{1}{v}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{e} \times \mathbf{E} = n\mathbf{e} \times \mathbf{E}$ $= \frac{c}{v}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu}\,\mathbf{e} \times \mathbf{E} = n\mathbf{e} \times \mathbf{E}$ $= \frac{c}{v}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$
Ondas planas no vácuo	$\mathbf{k} = \frac{\beta\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{\alpha}\omega\mathbf{e} = \frac{\omega}{c}\mathbf{e}$; $\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,\mathbf{e} \times \mathbf{E} = \frac{\alpha}{\beta c}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$ $= \sqrt{\frac{\alpha k_2}{\beta k_1}}\,\mathbf{e} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{k} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,\omega\mathbf{e} = \frac{\omega}{c}\mathbf{e}$; $\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,\mathbf{e} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c}\mathbf{e} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{e}$; $\mathbf{B} = \mathbf{e} \times \mathbf{E}$	$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{e}$; $\mathbf{B} = \mathbf{e} \times \mathbf{E}$
Potencial escalar retardado	$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{k_1}{4\pi}\int \frac{[\rho(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{[\rho(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{[\rho(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\rho(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$
Potencial vetor retardado	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{k_2}{4\pi}\int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')]_{ret}}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$

Apêndice 1
Transformação Galileana dos Campos

Em termos do sistema gaussiano, as equações (110) e (111) escrevem-se:

$$\mathbf{B}' =^G \mathbf{B} \tag{161}$$

e

$$\mathbf{E}' =^G \mathbf{E}+\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}; \tag{162}$$

por sua vez as equações exatas, isto é, relativísticas são [13]:

$$\mathbf{B}'_{\|} =^G \mathbf{B}_{\|}; \tag{163}$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} =^G \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{B}_{\perp}-\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{E}\right); \tag{164}$$

$$\mathbf{E}'_{\|} =^G \mathbf{E}_{\|} \tag{165}$$

e

$$\mathbf{E}'_{\perp} =^G \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{E}_{\perp}+\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}\right). \tag{166}$$

Verifiquemos que a hipótese galileana leva a um desvio de segunda ordem na força de Lorentz. Com efeito, temos, ante as equações (163) - (166),

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}' &= {}^G q\left[\mathbf{E}'_{\|}+\mathbf{E}'_{\perp}+\frac{\mathbf{u}'}{c}\times\left(\mathbf{B}'_{\|}+\mathbf{B}'_{\perp}\right)\right] \\
&= q\left\{\begin{array}{c} \mathbf{E}_{\|}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{E}_{\perp}+\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}\right) \\ +\frac{\mathbf{u}'}{c}\times\left[\mathbf{B}_{\|}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\mathbf{B}_{\perp}-\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{E}\right)\right]\end{array}\right\},
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{F}' =^G q\left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_{\|}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\mathbf{E}_{\perp}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{u}'}{c}\times\left(\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{E}\right) \\ +\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}+\frac{\mathbf{u}'}{c}\times\mathbf{B}_{\|}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{u}'}{c}\times\mathbf{B}_{\perp}\end{array}\right].$$

Porém

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{\parallel}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\mathbf{E}_{\perp}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{u}'}{c}\times\left(\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{E}\right) \\
= \; & \mathbf{E}_{\parallel}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\mathbf{E}_{\perp}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{\mathbf{u}'}{c}.\mathbf{E}_{\perp}\right)\frac{\mathbf{V}}{c}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(\frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)\mathbf{E}_{\perp} \\
= \; & \mathbf{E}+t.s.m.o.
\end{aligned}
$$

Leia-se: $t.s.m.o.$ = termos de segunda ou maior ordem.

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\mathbf{u}'}{c}\times\mathbf{B}_{\parallel}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{u}'}{c}\times\mathbf{B}_{\perp} \\
= \; & \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{V})}{c}\times\mathbf{B}_{\parallel}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{(\mathbf{u}-\mathbf{V})}{c}\times\mathbf{B}_{\perp} \\
= \; & \frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{B}_{\parallel}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{B}_{\perp}-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{B}_{\perp} \\
= \; & \frac{\mathbf{u}}{c}\times\left(\mathbf{B}_{\parallel}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\mathbf{B}_{\perp}\right)\simeq\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{B}+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{B}_{\perp} \\
= \; & \frac{\mathbf{u}}{c}\times(\mathbf{B}+t.s.m.o.)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\mathbf{F}' =^G q\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{B}+t.s.m.o.\right)=\mathbf{F}+t.s.m.o.,
$$

como queríamos demonstrar.

Apêndice 2
Lei de Lenz

Pode-se mostrar que a condição

$$\beta/k_2 > 0 \tag{167}$$

é equivalente à *lei de Lenz.* Com efeito, admitamos que o fluxo de um campo magnético, descrito por $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, através de uma superfície S englobada por um circuito C, seja crescente no sentido da normal associada pela *regra da mão direita* a esse circuito:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS > 0 \tag{168}$$

(o caso oposto será obtido, ao final, por analogia). Levando esta ao segundo membro da (130), vem:

$$\frac{\alpha}{\beta}\oint_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{r} < 0. \tag{169}$$

Trata-se de responder à questão: qual o sentido do campo induzido, ou seja, é $\mathbf{B}_{ind}\cdot\mathbf{n}$ positivo ou negativo? Suporemos que C é um circuito plano. Mais precisamente, êle é o "eixo" de um circuito condutor de seção transversal ΔS muito pequena, de sorte que $\mathbf{E}$ pode ser considerado uniforme sobre essa seção. Temos, adaptando ao caso a (21):

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{ind} &= \frac{k_2}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}_{ind}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV' \\
&= \frac{k_2}{4\pi}\oint_C (J_{ind})_t\,\Delta S\frac{d\mathbf{r}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3},
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{J}_{ind}$ representa a corrente induzida no circuito e $(J_{ind})_t$ a sua componente segundo a tangente dessa curva orientada. A *lei de Ohm* consiste, essencialmente, na dependência linear da densidade de corrente $\mathbf{J}$ na força elétrica $\mathbf{F}$. Se q é uma carga positiva então $\mathbf{J}$ e $\mathbf{F}$ serão colineares (supomos meios isotrópicos). Em vista da forma da equação da força de Lorentz e dessa colinearidade tem-se então

$$\mathbf{J} = K(\alpha q\mathbf{E}),$$

onde K é uma constante *positiva.* Daí segue-se a lei de Ohm na forma habitual:

$$\mathbf{J} = \alpha g\mathbf{E},$$

com

$$g > 0.$$

Logo,

$$\mathbf{B}_{ind} = \frac{k_2 \alpha g}{4\pi} \Delta S \oint_C E_t \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3};$$

daí vem

$$\mathbf{B}_{ind} \cdot \mathbf{n} = \frac{k_2 \alpha g}{4\pi} \Delta S \oint_C E_t \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Admitindo-se que $d\mathbf{r}'$ e $\mathbf{n}$ estão compatibilizados pela regra da mão direita, tem-se para um circuito plano:

$$d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} = |d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')| = |d\mathbf{r}'| \, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \, sen\varphi,$$

onde φ é o ângulo ($< \pi$) entre os vetores $d\mathbf{r}'$ e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Logo,

$$\frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{|d\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} sen\varphi;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ind} \cdot \mathbf{n} &= \frac{k_2 \alpha g \Delta S}{4\pi} \int_C \frac{E_t \, |d\mathbf{r}'| \, sen\varphi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \\ &= \frac{g \Delta S}{4\pi} (k_2 \beta) \left(\frac{\alpha}{\beta} \oint_C \frac{sen\varphi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' \right), \end{aligned}$$

ou,

$$\frac{\mathbf{B}_{ind} \cdot \mathbf{n}}{k_2 \beta} = \frac{g \Delta S}{4\pi} \left(\frac{\alpha}{\beta} \oint_C \frac{sen\varphi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' \right). \tag{170}$$

Admitamos que a corrente de fato *circula* em C (ela poderia ter direções opostas em alguns trechos, convergindo em alguns pontos e divergindo em outros). Nesse caso $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'$ será sempre positivo ou sempre negativo e, por conseguinte, também o será o seu produto por um coeficiente positivo e, em particular, o integrando no segundo membro de (170). Isso implica ser o sinal do termo entre parênteses o mesmo que o do primeiro membro da (169), isto é, *negativo*. Como g e ΔS são ambos positivos, vem

$$\frac{\mathbf{B}_{ind} \cdot \mathbf{n}}{k_2 \beta} < 0. \tag{171}$$

Portanto, se

$$k_2 \beta > 0, \tag{172}$$

como requerido pelo balanço de energia, então, admitindo-se a premissa (168), tem-se

$$\mathbf{B}_{ind} \cdot \mathbf{n} < 0; \tag{173}$$

da nossa dedução vê-se obviamente que a inversão daquela premissa - ou seja, a admissão da premissa de um fluxo decrescente na direção **n** - levaria a uma inversão também da conseqüência (173). Esses resultados caracterizam claramente a lei de Lenz como decorrência da conservação da energia de um sistema eletromagnético. Ainda que essa correlação seja bem conhecida, é significativo que ela surja explícita e naturalmente no contexto teórico.

Bibliografia

[1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* , Vol. 2 (Dover Publications, Inc., New York, 1954).

[2] E. Hobsbawn, *A Era do Capital, 1848-1875*, 3ª ed. (Paz e Terra, Rio de Janeiro, 1982).

[3] M. Abraham and R. Becker, *Electricity and Magnetism* (Blackie & Son Ltd., London, 1937).

[4] I. E. Tamm, *Fundamentos de la Teoría de la Electricidad* (Ed. Mir, Moscou, 1979).

[5] J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory* (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1980).

[6] W. Hauser, *Introduction to the Principles of Electromagnetism* (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1971).

[7] J. B. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press Inc., New York, 1965).

[8] P. Lorrain and D. R. Corson, *Electromagnetic Fields and Waves* (W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1970).

[9] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd. ed. (Academic Press, New York, 1970).

[10] W. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley, Reading, 1955).

[11] D. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics* (Addison-Wesley Publ.Co., Reading, 1983).

[12] A. Sommerfeld, *Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1964).

[13] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd. ed. (John Wiley and Sons, New York, 1998).

[14] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1941).

[15] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 1rst. ed. (John Wiley and Sons, New York, 1962).

[16] T. S. Kuhn, *A Estrutura das Revoluções Científicas* (Ed. Perspectiva, São Paulo, 2000).

[17] E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity* (Humanities Press, New York, 1973).

[18] M. Faraday, *Thoughts on Ray-vibrations*, in *Experimental Researches in Electricity*, vol. iii (Apr. 1846).

[19] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vol.1 (McGraw-Hill Book Co., New York, 1953).

[20] D. Hilbert, "Axiomatisches Denken", *Math. Ann.* **78** (1918) 405-415 (citado a partir da versão em língua espanhola, in: *Galileo*, n. 1-2 (1989) 23-43).

[21] L. Landau and E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1951).

[22] N. P. Andion, *Minimizing postulation in a senior undergraduate course in electromagnetism*, e-print in *http://xxx.lanl.gov/physics/9810041* (1998).