

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA**

DOIS SISTEMAS DE LÓGICA NÃO REFLEXIVA

Fernando Paulo Christe Adorno

São Paulo, fevereiro de 2001

**ADORNO, F.P.C.
2001**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA**

DOIS SISTEMAS DE LÓGICA NÃO REFLEXIVA

Dissertação apresentada à Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, da Universidade de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de mestre na área de concentração de Lógica sob a orientação da Prof.^a Dr.^a Andréa Maria Altino de Campos Loparić.

Fernando Paulo Christe Adorno

São Paulo, fevereiro de 2001

À minha querida filha, Anáí, e aos meus pais, José e Maria de Lourdes, certo de que merecem muito mais.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de registrar aqui meus mais sinceros agradecimentos a quantos, de uma forma ou de outra, contribuíram para o êxito desta pesquisa. Sou particularmente grato à Prof.^a Dr.^a Andréa Loparić, por sua orientação tão zelosa e amiga durante todos esses anos, e aos professores Dr. Luiz Henrique Lopes dos Santos e Dr. Luiz Carlos Pereira, por suas sugestões e críticas.

Estendo também meu reconhecimento à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo que, com seu apoio financeiro, tornou viável a realização deste trabalho.

RESUMO

Em seu artigo *Les négations et les univers du discours* (in VVAA, *Lacan avec les philosophes*, Paris, Albin Michel, 1991), a Prof.^a Dr.^a Andréa Loparić apresenta-nos duas semânticas de primeira ordem, Q_1 e Q_2 , que diferem da clássica basicamente por fazerem um uso diferente do símbolo de identidade e não garantirem que os valores possíveis de serem atribuídos às variáveis segundo uma interpretação sejam apenas os elementos pertencentes ao domínio de uma estrutura; isto é, por admitirem que o universo de discurso numa dada interpretação não esteja limitado aos objetos pertencentes ao domínio da estrutura na qual está definida.

Nessas semânticas,

- uma estrutura A foi definida como sendo formada por um conjunto $|A|$ não vazio e por um conjunto de relações n -árias sobre $|A|$ contendo, particularmente, a relação de identidade — fixada como a diagonal de $|A|^2$ e, portanto, não aplicável senão aos objetos da estrutura;

- uma interpretação para uma linguagem de predicados numa dada estrutura foi entendida como sendo um par $\langle ?_I, I \rangle$, onde $?_I$ é um elemento que pode pertencer — mas não necessariamente pertence — ao domínio da estrutura e I é uma interpretação clássica da linguagem na estrutura; assim, se $?_I$ pertencer ao domínio da estrutura, tudo se comportará nessas semânticas de maneira clássica, mas, caso contrário, $?_I$ não somente não poderá ser nomeado, como também não ocorrerá em nenhum conjunto que corresponda a um predicado primitivo da linguagem; e,

- por meio de alterações convenientes na valoração e nas regras de atribuição de valores de verdade às sentenças quantificadas, liberou-se o elemento $?_I$ como valor possível das variáveis; em Q_1 tal liberação estendeu-se apenas sobre o quantificador existencial — permanecendo clássico o universal — e em Q_2 , apenas sobre o quantificador universal — permanecendo clássico o existencial.

Ora, dessas lógicas observam-se interessantes características: devido ao fato de os quantificadores não mais apresentarem comportamento clássico, certas sentenças gerais de uma teoria que tenha modelos não clássicos soam, internamente a esses modelos, como aludindo a algo que não pode ser dito idêntico a si mesmo e que, por conseguinte, não pode ser numericamente diferenciado. Ademais, a negação de um predicado não determina um outro predicado que seja complementar ao primeiro.

Nosso propósito aqui, será o de estender a linguagem dos sistemas apresentados, de forma a envolver um léxico categorial mais rico, que contenha também constantes individuais e símbolos funcionais; reconstruir sua semântica, de modo a integrar a extensão feita na linguagem; verificar qual é neles o estado de algumas das leis da lógica clássica; apresentar um sistema de dedução natural; por fim, provar sua correção e completude.

ABSTRACT

Andréa Loparic, in her article *Les négations et les univers du discours* (in VVAA, *Lacan avec les philosophes*, Paris, Albin Michel, 1991), presents two first order semantics, Q_1 and Q_2 , which differ from the classical basically because they make a different use of identity symbol and do not guarantee that the only values that may be attributed to the variables according to an interpretation are the elements that belong to the domain of the structure, that is, by acknowledging that the universe of discourse of a particular interpretation need not be limited to the objects that belong to the domain of the structure where it is defined.

In these semantics:

- a structure A was defined as consisting of a nonempty set $|A|$ and a set of n -ary relations over $|A|$ containing mainly, the relation of identity — fixed as a diagonal of $|A|^2$ and, thus, applicable only to objects of the structure;

- an interpretation for a language of predicates in a given structure was understood as being a pair $\langle ?_I, I \rangle$, where $?_I$ is an element that can, but does not necessarily, belong to the domain of the structure and I is a classical interpretation of the language in the structure. Thus, if $?_I$ belongs to the domain of the structure, everything in these semantics will behave in a classical way. However, if the opposite occurs, $?_I$ will not only not be named, but will also not occur in any set that corresponds to a primitive predicate of the language; and,

- by convenient alterations in the valuation and in the rules that attribute truth values to the quantified sentences, the element $?_I$ was freed to be a possible value of the variables; in Q_1 this freeing was only extended to the existential quantifier — the universal remaining classical — and in Q_2 only to the universal quantifier — the existential remaining classical.

Interesting characteristics are observed with the use of this logic: because the quantifiers no longer present classical behavior, certain general sentences of a theory containing nonclassical models appear in these models to be alluding to something that cannot be expressed identically as itself and consequently cannot be differentiated numerically. Also, negating one predicate does not acknowledge another predicate that is complementary to the first.

The objective here is to extend the language of the systems presented, so that a richer lexical category is engaged, which also contains individual constants and functional symbols; to reconstruct the semantics, so as to integrate the extension of the language; to verify in them the state of some of the laws of classical logic; to present a system of natural deduction; and finally, to test for soundness and completeness.

“(...) the objects we are to be understood to admit are precisely the objects which we reckon to the universe of values over which the bound variables of quantification are to be considered to range.”

W.V.O. Quine

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
O CÁLCULO Q_1	9
1) Sintaxe de Q_1 : A linguagem L para Q_1	9
2) Semântica de Q_1 : Definições.....	10
3) Uma extensão de Q_1 — o cálculo Q_{1p}	13
3.1) Linguagem L' para Q_{1p}	13
3.2) Semântica para Q_{1p}	14
3.3) Noção de consequência tautológica em Q_{1p}	16
3.4) Propriedades semânticas de Q_{1p}	17
3.5) Um sistema dedutivo S para Q_{1p}	42
3.6) Conjuntos saturados, completos e pró-completos.....	43
Teorema 1:.....	43
Teorema 2:.....	44
Teorema 3:.....	50
Teorema 4:.....	52
Teorema 5:.....	52
Lema 1:.....	60
Lema 2:.....	62
Teorema 6:.....	64
3.7) Legitimidade de Q_{1p} com respeito ao sistema dedutivo S.....	68
Lema 3:.....	68
Teorema 7:.....	71
4) Dedutibilidade em Q_1	72
4.1) Teorema da Correção de Q_1	72
4.2) Propriedade à Lindenbaum.....	73
Lema 4:.....	73
Teorema 8:.....	74
4.3) Teorema da Completude de Q_1	78
O CÁLCULO Q_2	79
BIBLIOGRAFIA.....	81

INTRODUÇÃO

Em seu artigo *Les négations et les univers du discours*, a Prof.^a Dr.^a Andréa Loparić apresenta-nos dois sistemas heterodoxos de lógica de primeira ordem, nomeados Q_1 e Q_2 , que se notabilizaram pela particularidade de sua aplicação. Propostos como parte de um esforço para interpretar as fórmulas de sexuação usadas por Lacan em sua *Lógica do Fantasma*, tais sistemas no entanto encontravam-se ainda em versões simplificadas e necessitavam ser desenvolvidos não só semântica, mas também (e principalmente) sintaticamente. Interessados que de início estávamos em, dentre outras coisas, melhor compreender a lógica clássica, seus contornos e conceitos, dispusemo-nos então a estudá-los e, sob a orientação da Prof.^a Andréa Loparić, acabamos por colaborar em seu desenvolvimento. Estendemos sua linguagem, de forma a envolver um léxico categorial mais rico, que contivesse também constantes individuais e símbolos funcionais. Reconstruímos sua semântica, de modo a integrar a extensão que fizemos na linguagem. Verificamos qual é neles o estado de algumas das leis da lógica clássica. Elaboramos um sistema de dedução natural. E por fim, demonstramos sua correção e completude. O resultado de nossas pesquisas é o que, nesta dissertação, gostaríamos de apresentar.

Antes, no entanto, nesta introdução, lembraremos rapidamente algumas das características desses sistemas, talvez as mais importantes e interessantes, ainda que estejamos certos de que não poderíamos apresentar algo que fosse mais completo, claro e introdutório do que o artigo escrito pela Prof.^a Andréa Loparić acima referido.

Os sistemas Q_1 e Q_2 caracterizam-se mais convenientemente pelo fato de serem eles lógicas alternativas de predicado que, em certo sentido, infringem o princípio clássico de identidade. Eles foram precisamente construídos para que dois tipos de valores para as variáveis fossem admitidos. Valores que apresentassem um comportamento clássico e pudessem ser tratados como objetos comuns; e valores que, por não poderem ser reconhecidos como idênticos a si mesmos, não pudessem ser, estritamente falando, tidos como objetos.

Ora, haveria duas maneiras de se obter, por via semântica, sistemas que possuíssem essa característica: ou alterando o tratamento conjuntista dos conceitos semânticos metateóricos, ou modificando convenientemente a noção de interpretação e a definição de verdade clássicas. A primeira maneira de tratar a questão, como facilmente se pode ver, iria naturalmente exigir importante adaptação de nossas ferramentas metateóricas; ela estaria imbuída de dificuldades não só relativas à caracterização da noção de multiplicidade e da estranha categoria de pseudo-objetos, mas também relativas às operações conjuntistas usuais.

A segunda maneira poupa-nos desses inconvenientes metateóricos e foi por ela que a Prof.^a Andréa Loparić se orientou. Vejamos então, em linhas gerais, como Q_1 e Q_2 foram construídos e analisemos alguns de seus aspectos.

Nesses sistemas, uma estrutura A é definida como sendo formada por um conjunto não vazio $|A|$, chamado domínio, e por um certo número de relações n -árias sobre $|A|$, dentre as quais se encontra particularmente a assim chamada relação de identidade; i.e., o conjunto dos pares ordenados do tipo $\langle \bar{e}, \bar{e} \rangle$, onde \bar{e} é um elemento de $|A|$. Apesar de equivalente à que com frequência é apresentada na lógica clássica, essa definição de estrutura difere por nos possibilitar a compreender o predicado de identidade de uma maneira diversa da usual. Sempre distinguida numa dada estrutura, essa relação de identidade é, nesses sistemas, invariavelmente associada por meio da noção de satisfação ao símbolo lógico de igualdade e é sempre ela a extensão semântica deste. O símbolo de igualdade é, por assim dizer, o representante lingüístico, não de um conceito metalingüístico de identidade, mas, antes, de uma relação binária especialmente estabelecida e não aplicável senão aos objetos pertencentes ao domínio de uma dada estrutura. Fixado como a diagonal do cartesiano do domínio, o predicado de identidade varia, assim, de estrutura para estrutura e seu significado, ainda que determinado pelo sistema lógico, é independente do predicado de identidade da metalinguagem. Uma infração que nas linguagens Q_1 e Q_2 se cometa contra o princípio de identidade não nos leva, por conseguinte, a algum questionamento da validade desse princípio na metalinguagem.

Mas, se a todos os elementos do domínio duma estrutura se aplica o predicado de identidade, como é possível que nesses sistemas se infrinja o princípio de identidade? Uma interpretação $?I$ para uma linguagem de predicados L numa dada estrutura A é definida como sendo um par $\langle ?_I, I \rangle$, onde $?_I$ é um objeto, chamado *questão* da interpretação, que pode pertencer — mas não necessariamente pertence — ao domínio de A , e I é uma função, entendida tal como na lógica clássica, do conjunto dos símbolos não lógicos de L na estrutura A . Assim, qualquer interpretação cuja questão seja um elemento do domínio da estrutura comportar-se-á como uma interpretação clássica e fará com que, nesses sistemas, tudo se passe como se estivéssemos num cálculo clássico. As leis lógicas serão aí as da lógica clássica; o universo de discurso será o domínio da interpretação; e todos os elementos que a ele pertençam poderão ser afirmados idênticos a si mesmos. O comportamento heterodoxo de Q_1 e Q_2 , então, dar-se-á somente quando a questão de uma interpretação não for um elemento do domínio da estrutura.

Se o primeiro elemento do par que constitui uma interpretação não pertencer à estrutura na qual está definida, não poderá ele ser compreendido pela relação de identidade e, conseqüentemente, de um ponto de vista interno à linguagem, ser afirmado idêntico a si mesmo — lembremo-nos de que esse predicado, nesses sistemas, apesar de lógico, está restrito aos objetos que pertencem ao domínio da estrutura. Além disso, também não poderá a questão ser nomeada por uma constante individual, ou mesmo compreendida na extensão de algum símbolo de predicado, dado que os símbolos não lógicos da linguagem são, todos eles, associados a elementos que pertencem à estrutura. No entanto, isso não implica, por si, que esse elemento não pertença ao universo de discurso dessas interpretações. Várias sentenças de uma teoria que se apóie sobre essas lógicas e que tenha

modelos não clássicos soam como sentenças que aludem a esse elemento inominável e indistinguível de modo positivo¹.

Por meio de convenientes alterações nos conceitos de valoração e de satisfação, em Q_1 e Q_2 são admitidos como possíveis valores para uma variável, segundo uma interpretação ${}^?I$ numa estrutura A , não só os elementos do domínio de A , mas também a questão de ${}^?I$, independentemente de ser essa questão um elemento do domínio da estrutura. Desse modo, o universo de discurso nesses sistemas, que como na lógica clássica é o conjunto dos valores possíveis para uma variável segundo uma interpretação, não coincide necessariamente com o domínio da estrutura. Compreende-o, na verdade, mas é de tal maneira definido que, não sendo a questão da interpretação um elemento do domínio da estrutura, o universo aparece como uma multiplicidade de limites não bem definidos, que contém objetos como elementos, conjuntos como partes, mas que, no contexto da linguagem — mas não no da metalinguagem! — pode não ser considerado como conjunto. Torna-se ele algo mais amplo do que o conjunto dos objetos nomeáveis da estrutura — i.e., do que o conjunto dos objetos que podem ser ditos idênticos a si mesmos, que pertencem ao domínio da estrutura —, passando a incluir também algo inominável.

Ora, é com essa possibilidade de, segundo uma interpretação, atribuir-se a uma variável um valor que não só não pertence ao domínio da estrutura como também não pode ser afirmado idêntico a si mesmo, que se pode variar a extensão dos quantificadores existencial e universal e construir sistemas lógicos distintos entre si, nos quais, tanto os quantificadores quanto a negação podem apresentar comportamento não clássico. Sistemas em que a relação de identidade não mais seja necessariamente reflexiva, não obstante continue sendo simétrica e transitiva.

Se, cumpridas certas condições, o universo de discurso, contrariamente ao que se dá na lógica clássica, pode ser considerado de um ponto de vista interno à linguagem como algo que não seja um conjunto, a negação, quando aplicada a uma fórmula aberta α , não nos leva necessariamente — como o faz na lógica clássica — ao conjunto complementar do conjunto-solução de α . Porque a noção de universo de discurso nesses sistemas heterodoxos pode ser diferente da noção homógrafa num sistema clássico, as noções de conjunto-solução naqueles e nesse sistema também podem diferir uma da outra e, por conseguinte, o efeito da negação sobre elas pode não ser igual num e noutros sistemas, embora a definição dada ao conectivo da negação seja a mesma em todos eles. De fato, se a questão de uma interpretação ${}^?I$ não pertence ao domínio da estrutura, uma fórmula aberta α que contém como livres somente ocorrências das variáveis ξ_1, \dots, ξ_n divide as n -uplas formadas pelos elementos do universo de discurso de ${}^?I$ em duas classes: a classe das n -uplas que satisfazem α segundo ${}^?I$, e a classe da n -uplas que, segundo ${}^?I$, não satisfazem α e

¹ Uma vez que os símbolos não lógicos da linguagem são, por definição de interpretação, associados aos elementos de uma estrutura, todos os predicados de um elemento que não pertence ao domínio da estrutura são, nesses sistemas, predicados negativos. O inominável *não* é idêntico a si mesmo, *não* é idêntico a nenhum dos elementos do domínio da estrutura, *não* pertence a nenhum dos conjuntos associados ao símbolos de predicado de carência 1, *nem* tem, com o que quer que seja, qualquer relação exprimível por predicado de carência maior do que 1.

que, pela definição de satisfação, sabemos então satisfazerem as contraditórias de α . Ora, não é difícil percebermos que, devido à presença no universo de discurso de um elemento não distinto, ao qual a linguagem não predica a identidade, no máximo uma dessas duas classes pode, de um ponto de vista interno à linguagem, ser considerada conjunto². Temos assim, nessas condições, que a relação estabelecida entre a classe das n-uplas que são as soluções para uma fórmula aberta e a classe das n-uplas que são as soluções para as contraditórias dessa fórmula não pode ser reconhecida como sendo a de complementaridade, caso queiramos guardar o sentido clássico do termo.

Examinemos agora o comportamento semântico dos quantificadores nessas linguagens.

Em Q_1 , o quantificador existencial é definido de modo a compreender não só os objetos do domínio da estrutura, mas também a questão da interpretação, ao passo que o quantificador universal mantém-se com comportamento clássico, referindo-se apenas aos elementos do domínio da estrutura. Em Q_2 , o que se dá é o inverso; o primeiro desses quantificadores mantém-se com comportamento clássico e o segundo passa a referir-se também ao primeiro elemento do par que constitui a interpretação. Assim, num contexto de uma interpretação cuja questão não pertence ao domínio da estrutura, o quantificador universal, ainda que em Q_1 expresse uma noção que tenha o sentido clássico de um conjunto, de uma classe à qual pertencem somente objetos distintos, e que equivalha intuitivamente a “todos os objetos que são idênticos a si mesmos e que pertencem ao domínio da estrutura”, em Q_2 remete-nos ele ao universo de discurso como um todo, a uma multiplicidade que, por conter em particular a questão da interpretação, não pode ser, de um ponto de vista interno à linguagem, considerada como um conjunto, como uma multiplicidade de limites bem estabelecidos. E o quantificador existencial, que tem em Q_2 o mesmo sentido que na lógica clássica e corresponde à expressão “existe no domínio da estrutura pelo menos um objeto (idêntico a si mesmo)”, em Q_1 , equivale intuitivamente a “existe pelo menos um objeto no universo de discurso (não necessariamente idêntico a si mesmo)”.

Com isso, podemos afirmar que, nesses sistemas, num contexto não clássico, há duas noções de totalidade e duas de existência que diferem entre si por ser uma mais restrita, limitada ao domínio da estrutura, e outra mais abrangente, referindo-se em particular à questão da interpretação. Em Q_1 , a noção mais restrita de totalidade é a associada ao quantificador universal e a mais abrangente resulta de uma certa combinação da negação com o quantificador existencial numa sentença. Uma sentença do tipo $\ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$ ³ propõe-nos, intuitivamente falando, que todos os elementos do domínio da estrutura possuam a propriedade α ; já uma do tipo $\ulcorner \neg \exists \xi \neg \alpha \urcorner$, que todos os elementos do universo de

² Cf. Andréa Loparić, “Les négations et les univers du discours”, in VVAA, *Lacan avec les philosophes*, 1991, páginas: 256 a 258.

³ Nesta dissertação, tal como Quine em *Mathematical Logic*, colocaremos entre os sinais ‘ \ulcorner ’ e ‘ \urcorner ’ as expressões que contenham ocorrências de símbolos tanto da linguagem quanto da metalinguagem.

discurso — e em particular a questão da interpretação — possuam a propriedade α .⁴ No que diz respeito às noções de existência, a mais abrangente é aí a que está associada ao quantificador existencial, enquanto que a mais restrita é a que resulta de uma certa combinação da negação com o quantificador universal numa sentença; uma sentença do tipo $\lceil \exists x \alpha \rceil$ propõe-nos, intuitivamente, que exista pelo menos um elemento do universo de discurso que possua a propriedade α — podendo, talvez, ser a questão da interpretação... —, e uma sentença do tipo $\lceil \neg \forall x \neg \alpha \rceil$ propõe-nos que exista pelo menos um elemento do domínio da estrutura que possua a propriedade α .⁵ Em Q_2 , por sua vez, *mutatis mutandis*, o mesmo se dá; a noção mais abrangente de totalidade é a que é associada ao quantificador universal e a mais restrita é a que resulta da combinação da negação com o quantificador existencial numa sentença; a noção mais restrita de existência é a que é associada ao quantificador existencial e a mais abrangente é a que resulta da combinação da negação com o quantificador universal numa sentença.

Vemos então que, por meio dos quantificadores, pode-se circunstancialmente fazer referência ao elemento que não cai sob a relação de identidade desses sistemas e assim neles construir sentenças cuja condição de verdade em certas interpretações comporta-se de maneira oposta à estabelecida pelo princípio de identidade na lógica clássica. Sentenças como $\lceil \exists x \neg x=x \rceil$, em Q_1 , e $\lceil \neg \forall x x=x \rceil$, em Q_2 , não são mais consideradas contradições, e podem ser verificadas somente por interpretações cuja questão não pertença ao domínio da estrutura e, por conseguinte, cujo universo de discurso contenha um elemento ao qual a identidade desses sistemas não se aplica. Por outro lado, sentenças como $\lceil \forall x x=x \rceil$, em Q_1 , e $\lceil \neg \exists x \neg x=x \rceil$, em Q_2 , continuam sendo válidas, porém não são senão expressões de um princípio, digamos fraco, de identidade cujo alcance restringe-se ao domínio da estrutura e que, por isso, não se aplica ao universo de discurso como um todo. Desse modo, o fato de uma dada teoria nesses sistemas heterodoxos ser clássica não é mais um pressuposto geral da semântica, garantido por uma estipulação formulada na metalinguagem, mas antes uma proposição interna dessa teoria que exige esse tipo de situação; em Q_1 , deverão ser conseqüências de uma teoria com essa característica, sentenças como $\lceil \neg \exists x \neg x=x \rceil$ e, em Q_2 , sentenças como $\lceil \forall x x=x \rceil$, que exigem que todos os elementos do universo de discurso sejam idênticos a si mesmos.

Gostaríamos ainda de às rápidas chamar a atenção para duas outras características dessas lógicas não reflexivas. A primeira delas é a de que, se todas as diferenças entre Q_1 e Q_2 e a lógica clássica baseiam-se na possibilidade de, segundo uma interpretação, atribuir-se a uma variável um valor que infrinja o princípio de identidade, então o fragmento proposicional desses sistemas, mesmo para as teorias que tenham modelos não clássicos, comporta-se de maneira totalmente clássica. Aí continuam valendo todas as tautologias da

⁴ Notemos com isso que, enquanto num sistema clássico uma sentença do tipo $\lceil \forall x \alpha \rceil$ é equivalente a uma sentença do tipo $\lceil \neg \exists x \neg \alpha \rceil$, em Q_1 , não.

⁵ Notemos também com isso que, enquanto num sistema clássico uma sentença do tipo $\lceil \exists x \alpha \rceil$ é equivalente a uma sentença do tipo $\lceil \neg \forall x \neg \alpha \rceil$, em Q_1 , não.

lógica proposicional clássica; valem, assim, o princípio do terceiro excluído, o da não contradição e o da identidade proposicional.

A segunda característica está relacionada com o conhecido princípio de identidade dos indistinguíveis⁶. Se tivéssemos definido, nesses sistemas, uma interpretação para uma linguagem L numa estrutura A de uma maneira um pouco mais ampla, como sendo um par $\langle \Gamma, I \rangle$, onde a função I fosse entendida da mesma maneira que o foi, mas Γ fosse, ao invés de um objeto, um conjunto (não vazio e possivelmente infinito) de objetos que pudessem não pertencer ao domínio de A , uma curiosa consequência se seguiria. De um ponto de vista interno à linguagem, seria indiferente se considerássemos um, dois ou mais elementos fora do domínio da estrutura, uma vez que os predicados de um desses elementos seriam exatamente os mesmo predicados de todos os demais⁷. Ou seja, nesses sistemas, não haveria nenhum procedimento lingüístico para contar quantos seriam os elementos aos quais não se atribui o predicado de identidade e, por conseguinte, qualquer distinção que fosse feita entre elementos desse tipo teria de ser uma distinção estabelecida na metalinguagem. Numa teoria que possuísse modelos não clássicos, jamais se poderiam distinguir, entre si, os objetos que não pertencessem ao domínio da estrutura. Desse modo, seria uma propriedade dos sistemas Q_1 e Q_2 que, se uma dada teoria T possuísse modelos não clássicos, então T possuiria pelo menos um modelo não clássico definido por um par cujo primeiro elemento fosse um conjunto unitário.

A demonstração da correção e completude dos sistemas Q_1 e Q_2 que apresentamos aqui aproxima-se, em alguma medida, da que Henkin apresenta para a lógica clássica.

Sem nos preocuparmos com Q_2 — já que esse cálculo pôde ser entendido como passível de definição⁸ em Q_1 —, iniciamos nosso texto expondo a sintaxe — com o léxico categorial mais rico do que o usado pela Prof.^a Andréa Loparić em seu artigo — e a semântica de Q_1 , reconstruída de modo a integrar o incremento feito no vocabulário da linguagem. Em seguida, apresentamos o cálculo Q_{1p} , uma extensão de Q_1 que nos auxiliará na demonstração da correção e completude de nossos sistemas heterodoxos. Um cálculo que contém como suas todas as sentenças de Q_1 e que desse sistema se diferencia basicamente por ter acrescida às constantes não lógicas da linguagem uma nova categoria: a dos parâmetros; uma categoria cujos elementos têm, nesse cálculo, não obstante às

⁶ Quine, em *From a logical point of view*, pag. 71, escreve: “In general we might propound this maxim of the *identification of indiscernibles*: Objects indistinguishable from one another within the terms of a given discourse should be construed as identical for that discourse. More accurately: the references to the original objects should be reconstrued for purposes of the discourse as referring to other and fewer objects, in such a way that indistinguishable originals give way each to the same new object.”

Notemos que o princípio da indistinguibilidade dos idênticos, mais conhecido como *princípio da substituição*, continua valendo nesses sistemas heterodoxos, uma vez que são eles cálculos extensionais. Cf. propriedade 3.4.25, pág.40.

⁷ O fato de os elementos que não pertencem ao domínio da estrutura terem todos os mesmo predicados parece-nos ser uma óbvia decorrência do fato de que, nessas linguagens, todos os predicados de um elemento que não pode ser dito nem mesmo idêntico a si mesmo são predicados negativos. Cf. nota 1.

⁸ Cf. págs. 79 e 80.

possíveis diferenças semânticas, um comportamento sintático semelhante ao dos nomes em Q_1 . A noção de interpretação em Q_{1p} — aí nomeada pró-interpretação — é definida em função da noção de interpretação em Q_1 , da seguinte maneira: uma pró-interpretação ${}^?I_p$ em Q_{1p} é um par cujo primeiro elemento é uma interpretação ${}^?I$ de Q_1 — chamada base em Q_1 da pró-interpretação ${}^?I_p$ — e cujo segundo elemento é uma função que associa, a cada parâmetro, algum elemento do universo de discurso de ${}^?I$ — possivelmente a questão de ${}^?I$ —, e a cada uma das demais constantes não lógicas da linguagem, o mesmo elemento que ${}^?I$ lhe associa em Q_1 . Desse modo, em Q_{1p} , um parâmetro é um termo fechado que, segundo uma pró-interpretação, pode ter como denotação um objeto que não pertence ao domínio da estrutura, enquanto que, em Q_1 , um objeto que não pertence ao domínio da estrutura jamais poderá ser, segundo uma interpretação, a denotação de um termo fechado. É fácil, no entanto, percebermos que qualquer sentença α que não contenha ocorrências de parâmetros é verdadeira segundo uma pró-interpretação ${}^?I_p$ se, e somente se, também o for segundo a base de ${}^?I_p$ em Q_1 .

Foi assim, lançando mão desse procedimento metodológico e estendendo o cálculo Q_1 , que pudemos contornar a maior dificuldade com que nos deparamos quando tentávamos construir um sistema de dedução natural correto e completo para esse sistema. Perguntávamo-nos naquela ocasião o que poderíamos inferir de sentenças que pudessem fazer alusão a algo que não fosse necessariamente idêntico a si mesmo e, ademais, como poderíamos fazer, sintaticamente, tal inferência. A solução que encontramos foi, intuitivamente falando, a de tratar esse algo que pode não ser idêntico a si mesmo *como se* fosse um objeto como os demais, nomeando-o com o auxílio de termos que não pertencessem à linguagem de Q_1 : os parâmetros. Fizemos assim com que a linguagem tratasse tudo cuja existência pudesse ser nela afirmada *como se* necessariamente fossem objetos. *Como se!*, talvez esse seja um estratagema inevitável da linguagem.

Construímos então Q_{1p} , analisamos algumas de suas propriedades semânticas e apresentamos, na pág. 42, um sistema dedutivo para esse cálculo, a fim de que pudéssemos definir a noção de dedutibilidade em Q_1 em função da noção de dedutibilidade em Q_{1p} . Uma sentença α será dedutível em Q_1 de um conjunto de sentenças Γ se, e só se, α for pró-dedutível de Γ em Q_{1p} .

A legitimidade de Q_{1p} — demonstrada no teorema 7, pág. 71 — assegurou-nos a correção de Q_1 ; e a demonstração da completude de Q_1 se deu, em linhas gerais, da seguinte maneira:

- dada uma sentença α e um conjunto Γ de sentenças tais que α não fosse dedutível de Γ , demonstramos⁹ que sempre seria possível obter um conjunto máximo Δ que contivesse Γ e que fosse α -saturado¹⁰, completo e pró-completo;

⁹ Cf. teorema 8, pág. 74.

¹⁰ I.e, fosse tal que, com respeito a ele, a noção de 'pertencer' fosse equivalente à de 'ser pró-dedutível'. Cf. teorema 1, pág. 43.

- demonstramos¹¹ também que, dado um conjunto Δ qualquer α -saturado, completo e pró-completo, sempre seria possível obter uma pró-interpretação — a que chamamos canônica — que verificasse todas (e somente) as sentenças que pertencesse a esse conjunto Δ ;
- e assim, tornamo-nos capazes de demonstrar, pela contrapositiva, que, se α é conseqüência semântica de Γ , então α é dedutível de Γ . Com efeito, se α não fosse dedutível de Γ , a base da pró-interpretação canônica para um conjunto máximo de Γ em Q_1 seria um modelo de Γ que falsificaria α .

¹¹ Cf. teorema 6, pág.64.

O CÁLCULO Q_1

1) Sintaxe de Q_1 : A linguagem L para Q_1

O vocabulário de L é formado por:

- i) um conjunto infinito e enumerável de variáveis: $\{x, x_1, x_2, \dots\}$;
- ii) constantes lógicas, a saber:
 - um conectivo unário: $'\neg'$,
 - quatro conectivos binários: $'\wedge'$, $'\vee'$, $'\rightarrow'$, $'\leftrightarrow'$,
 - dois símbolos de quantificação: $'\exists'$, $'\forall'$, e
 - um símbolo de igualdade: $'=''$; e
- iii) constantes não lógicas, a saber:
 - um conjunto infinito e enumerável de nomes: $\{a, a_1, a_2, \dots\}$;
 - um conjunto infinito e enumerável de símbolos funcionais: símbolos do tipo φ_i^n , onde φ é a letra 'f' do vocabulário da Língua Portuguesa, 'n' e 'i' são números naturais, e 'n' é diferente de zero; e
 - um conjunto infinito e enumerável de símbolos de predicados: símbolos do tipo π_i^n , onde π é a letra 'P' do vocabulário da Língua Portuguesa, 'n' e 'i' são números naturais, e 'n' é diferente de zero¹²; e
- iv) sinais de pontuação: $'(, ')$ '.

Chamamos *símbolos individuais* às variáveis e nomes de L.

Definição de *termo*:

- i) qualquer símbolo individual é um termo; e
- ii) para quaisquer naturais i e n, se φ_i^n é um símbolo funcional e τ_1, \dots, τ_n são termos, então $\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ também é um termo.

Um termo é dito *fechado* quando nele não há nenhuma ocorrência de variável; caso contrário, é dito *aberto*.

Definição de *fórmula*:

- i) para quaisquer naturais i e n, se π_i^n é um símbolo de predicado e τ_1, \dots, τ_n são termos, então $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ é uma fórmula (**atômica**);
- ii) se τ_1 e τ_2 são termos, então $\tau_1 = \tau_2$ é uma fórmula (**atômica**);
- iii) se α e β são fórmulas, então $\neg \alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fórmulas (**moleculares**);
- iv) se K é um símbolo de quantificação, ξ é uma variável e α é uma fórmula, então $K\xi\alpha$ é uma fórmula (**geral**).

¹² Enquanto o sobrescrito das constantes não lógicas indicam a carência de tais símbolos, o subscrito serve para distinguir diferentes símbolos com a mesma carência.

Em fórmulas gerais, do tipo $K\xi\alpha$, a seqüência de símbolos $K\xi$ é chamada de **quantificador em ξ** , enquanto que a fórmula α é chamada de **escopo** do quantificador $K\xi$.

Uma ocorrência de uma variável ξ numa fórmula α é **ligada** se, ou é a ocorrência de ξ que compõe um quantificador $K\xi$ em α , ou encontra-se dentro do escopo de um quantificador $K\xi$ em α . Caso contrário, a ocorrência é **livre**.

Chamamos **sentença** à fórmula em que não há ocorrência de variáveis livres.

Chamamos **ordem alfabética** dos nomes à induzida pela ordem crescente dos índices destes.

Uma ocorrência de um símbolo individual σ em uma fórmula α é **objetual** se é uma ocorrência de um nome ou uma ocorrência livre de uma variável.

Denotaremos por $\alpha^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} / \rho_1, \dots, \rho_n$ o resultado da substituição simultânea na fórmula α de todas as ocorrências objetuais dos termos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ por ocorrências de termos ρ_1, \dots, ρ_n , respectivamente. Uma substituição é **regular** se todas as ocorrências de constantes forem substituídas por ocorrências de termos fechados e todas as de variáveis, por termos abertos.

Um termo τ é **livre com respeito a um nome c ou a uma variável livre ξ** numa fórmula α se, e somente se, nenhuma ocorrência de c ou ξ em α se encontra dentro do escopo de qualquer quantificador Ky , onde y é uma variável que ocorre em τ .

2) Semântica de Q_1 : Definições

2.1) Uma estrutura A é formada por:

- I. um conjunto não vazio denominado **domínio** da estrutura (usualmente notado por $|A|$);
- II. um conjunto de relações n -árias em $|A|$, contendo:
 - i) a relação de identidade em $|A|$ (i.e., o conjunto dos pares ordenados do tipo $\langle \bar{e}, \bar{e} \rangle$, onde \bar{e} é um elemento de $|A|$) — em símbolos, $=_A$;
 - ii) para cada $n \geq 1$, um certo número de relações n -árias em $|A|$ (i.e., conjuntos de n -uplas ordenadas do tipo $\langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \rangle$, onde cada \bar{e}_j , para $1 \leq j \leq n$, é um elemento de $|A|$); e
 - iii) para cada $n \geq 1$, um certo número de operações n -árias em $|A|$.

2.2) Uma interpretação $?I$ de L numa estrutura A é um par $\langle ?I, I \rangle$, onde:

- i) $?I$ é um elemento que pode pertencer, ou não, a $|A|$; e
- ii) I é uma função que associa:
 - algum objeto de $|A|$, $I(c)$, a cada nome c ;
 - uma operação n -ária em $|A|$, $I(\varphi_i^n)$, a cada símbolo funcional de carência n , φ_i^n , e
 - uma relação n -ária em $|A|$, $I(\pi_i^n)$, a cada símbolo de predicado de carência n , π_i^n .

2.3) Seja ${}^?I$ uma interpretação de L numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I \rangle$. Dizemos então que:

${}^?I$ é a *questão* de ${}^?I$ e
a união de $\{ {}^?I \}$ com $|A|$ é o *sobredomínio* de ${}^?I$.

2.4) Seja ${}^?I$ uma interpretação de L numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I \rangle$. Então ${}^?I$ é dita *completa* se, e somente se, para cada elemento \bar{e} de $|A|$, existe um nome c tal que $I(c) = \bar{e}$.

2.5) Uma *sobrevalorção* s , numa estrutura A e com respeito a uma interpretação ${}^?I$ de L nessa estrutura, é uma função que associa as variáveis de L a elementos do sobredomínio de ${}^?I$. Assim, $s(\xi)$ será o elemento pertencente ao sobredomínio de ${}^?I$ atribuído à variável ξ por s .

2.6) Seja ${}^?I$ uma interpretação de L numa estrutura A . Sejam s e s' duas sobrevalorções em A com respeito a ${}^?I$ e ξ uma variável de L . Então dizemos que s é *normal em ξ* , se $s(\xi)$ é um elemento de $|A|$; e que s e s' são *ξ -variantes*, se ambas atribuem os mesmos valores a todas as variáveis que não ξ — isto é, para toda variável y diferente de ξ , $s(y) = s'(y)$.

2.7) Seja ${}^?I$ uma interpretação de L numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I \rangle$. Seja s uma sobrevalorção em A com respeito a ${}^?I$. Definimos, para a sobrevalorção s , a *função preenchimento por ${}^?I$* , s_I , como a que associa a cada termo τ de L um elemento $s_I(\tau)$ no sobredomínio de ${}^?I$, da seguinte maneira:

- i) se τ é uma variável, então $s_I(\tau)$ é $s(\tau)$;
- ii) se τ é um nome, então $s_I(\tau)$ é $I(\tau)$; e
- iii) se τ é do tipo $\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$, então:
 - $s_I(\tau)$ é $I(\varphi_i^n)(s_I(\tau_1), \dots, s_I(\tau_n))$, se, para todo k , $1 \leq k \leq n$, $s_I(\tau_k) \in |A|$;
 - e $s_I(\tau)$ é ${}^?I$, caso contrário.

2.8) Definição de *satisfação* (para L e ${}^?I$):

Seja ${}^?I$ uma interpretação de L numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I \rangle$ e s uma sobrevalorção em A com respeito a ${}^?I$. Seja α uma fórmula. Então, dizemos que s satisfaz α segundo ${}^?I$ — em símbolos, $s \text{ sat}_I^? \alpha$ — se:

I. α é uma fórmula atômica:

- i) do tipo $\tau_1 = \tau_2$ e o par $\langle s_I(\tau_1), s_I(\tau_2) \rangle$ pertence à $=_A$; ou
- ii) do tipo $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ e a n -upla $\langle s_I(\tau_1), \dots, s_I(\tau_n) \rangle$ pertence à relação $I(\pi_i^n)$; ou

II. α é uma fórmula molecular:

- i) do tipo $\neg \beta$ e não é o caso de $s \text{ sat}_I^? \beta$; ou
- ii) do tipo $(\beta_1 \wedge \beta_2)$ e $s \text{ sat}_I^? \beta_1$ e $s \text{ sat}_I^? \beta_2$; ou
- iii) do tipo $(\beta_1 \vee \beta_2)$ e $s \text{ sat}_I^? \beta_1$ ou $s \text{ sat}_I^? \beta_2$; ou
- iv) do tipo $(\beta_1 \rightarrow \beta_2)$ e ou não é o caso de $s \text{ sat}_I^? \beta_1$ ou $s \text{ sat}_I^? \beta_2$; ou
- v) do tipo $(\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)$ e ou $s \text{ sat}_I^? \beta_1$ e $s \text{ sat}_I^? \beta_2$ ou nem é o caso de $s \text{ sat}_I^? \beta_1$ nem de $s \text{ sat}_I^? \beta_2$; ou

III. α é uma fórmula geral:

- i) do tipo $\lceil \forall \xi \beta \rceil$ e, para qualquer sobrevaloração s' ξ -variante de s normal em ξ , $s' \text{ sat}_I^? \beta$; ou
- ii) do tipo $\lceil \exists \xi \beta \rceil$ e, para alguma sobrevaloração s' ξ -variante de s , $s' \text{ sat}_I^? \beta$.

2.9) Seja $^?I$ uma interpretação de L numa estrutura A . Então:

- i) uma sentença α é *verdadeira segundo $^?I$* — em símbolos, $\models_{^?I} \alpha$ — se, e somente se, qualquer sobrevaloração em A e com respeito a $^?I$ satisfaz α segundo $^?I$; e
- ii) uma sentença α é *falsa segundo $^?I$* se, e somente se, nenhuma sobrevaloração em A e com respeito a $^?I$ satisfaz α segundo $^?I$.

2.10) Uma interpretação $^?I$ de L numa estrutura A é um *modelo* para um conjunto Γ de sentenças se, e somente se, todas as sentenças de Γ são verdadeiras segundo $^?I$.

2.11) Um conjunto Γ de sentenças é *consistente* se, e somente se, há um modelo para Γ .

2.12) Uma sentença α é *satisfazível* se, e somente se, há uma interpretação $^?I$ (de L numa estrutura A) segundo a qual α é satisfeita por pelo menos uma das sobrevalorações em A com respeito a $^?I$.

2.13) Dizemos que uma sentença α é *logicamente válida* — em símbolos, $\models \alpha$ — se, e somente se, α é verdadeira segundo qualquer interpretação.

2.14) Uma sentença α *implica logicamente* uma sentença β se, e somente se, em cada interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz α também satisfaz β .

2.15) Uma sentença α é *conseqüência lógica* de um conjunto Γ de sentenças — em símbolos, $\Gamma \models \alpha$ — se, e somente se, em cada interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das sentença de Γ também satisfaz α .

3) Uma extensão de Q_1 — o cálculo Q_{1p}

Como procedimento metodológico de prova faremos mão de uma linguagem auxiliar L' e construiremos o cálculo Q_{1p} de maneira que seja ele uma extensão de Q_1 .

3.1) Linguagem L' para Q_{1p}

A linguagem L' é obtida a partir de L acrescentando-se às constantes não lógicas uma nova categoria, um conjunto infinito e enumerável de símbolos, ditos *parâmetros*: $\{p, p_1, p_2, \dots\}$.

Os parâmetros têm comportamento sintático em Q_{1p} semelhante ao dos nomes em Q_1 . Por conseguinte, compreendemos por *símbolos individuais de L'* , obviamente, as variáveis, os nomes e os parâmetros de L' . A estas duas últimas constantes chamaremos *pronomes*.

Definimos, assim, *pró-termo*:

- i) qualquer símbolo individual de L' é um pró-termo; e
- ii) para quaisquer naturais i e n , se φ_i^n é um símbolo funcional e τ_1, \dots, τ_n são pró-termos, então $\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ também é um pró-termo.

Dizemos que um pró-termo τ_s é um *sub-pró-termo* de um pró-termo τ se τ é τ_s ou se τ é do tipo $\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ e τ_s é um sub-pró-termo de algum τ_j , para $1 \leq j \leq n$.

Definimos *pró-fórmula* da seguinte maneira:

- i) para quaisquer naturais i e n , $n \neq 0$, se π_i^n é um símbolo de predicado e τ_1, \dots, τ_n são pró-termos, então $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ é uma pró-fórmula (*atômica*) de L' ;
- ii) se τ_1 e τ_2 são pró-termos, então $\lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil$ é uma pró-fórmula (*atômica*) de L' ;
- iii) se α e β são pró-fórmulas de L' , então $\lceil \neg \alpha \rceil$, $\lceil (\alpha \wedge \beta) \rceil$, $\lceil (\alpha \vee \beta) \rceil$, $\lceil (\alpha \rightarrow \beta) \rceil$, $\lceil (\alpha \leftrightarrow \beta) \rceil$ são pró-fórmulas (*moleculares*) de L' ;
- iv) se K é um símbolo de quantificação, ξ é uma variável e α é uma pró-fórmula de L' , então $K\xi\alpha$ é uma pró-fórmula (*geral*) de L' .

As noções de *quantificador*, *escopo*, *variável ligada* e *variável livre* são, *mutatis mutandis*, definidas como em Q_1 . Um pró-termo é dito *fechado* se nele não há nenhuma ocorrência de variável; caso contrário, é dito *aberto*. Um pró-termo é dito *restrito* se nele não há nenhuma ocorrência de parâmetros. *Pró-sentenças* são pró-fórmulas em que não há nenhuma ocorrência de variável livre.

Chamamos *ordem alfabética* dos parâmetros à induzida pela ordem crescente dos índices destes.

Uma ocorrência de um símbolo individual σ de L' em uma pró-fórmula α é *objetual* se é uma ocorrência de um pronome ou uma ocorrência livre de uma variável.

Denotaremos por $\alpha^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} / \rho_1, \dots, \rho_n$ o resultado da substituição simultânea na pró-fórmula α de todas as ocorrências objetuais dos pró-termos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ por ocorrências de pró-termos ρ_1, \dots, ρ_n , respectivamente.

Um pró-termo τ é *livre com respeito a um pronome σ ou à uma variável livre ξ* numa pró-fórmula α se, e somente se, nenhuma ocorrência de σ ou de ξ em α se encontra dentro do escopo de qualquer quantificador Ky , onde y é uma variável que ocorre em τ .

Notemos, a partir das definições de termos e fórmulas de L e de pró-termos e pró-fórmulas de L' , que o conjunto dos termos de L está contido no dos pró-termos de L' , e o das fórmulas de L está contido no das pró-fórmulas de L' .

3.2) Semântica para Q_{1p}

3.2.1) Uma pró-interpretação ${}^?I_p$ de L' numa estrutura A é um par $\langle {}^?I, I_p \rangle$, onde:

- i) ${}^?I$ é uma interpretação de L em A ; e
- ii) I_p é uma função definida no conjunto das constantes não lógicas de L' tal que:
 - para toda constante não lógica η de L , $I_p(\eta)$ é o mesmo que $I(\eta)$; e
 - para cada parâmetro ξ , $I_p(\xi)$ é algum elemento do sobredomínio de ${}^?I$.

3.2.2) Se ${}^?I$ é uma interpretação de L numa estrutura A e ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' em A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$, então dizemos que ${}^?I$ é a *base em L de ${}^?I_p$* .

3.2.3) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A cuja base em L é uma interpretação ${}^?I$ formada pelo par $\langle {}^?I, I \rangle$. Diremos então que a questão e o sobredomínio de ${}^?I_p$ são, respectivamente, a questão e o sobredomínio de ${}^?I$.

3.2.4) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A e ${}^?I$ sua base em L ; então, ${}^?I_p$ é dita *completa* se, e somente se, ${}^?I$ é completa; e, *pró-completa* se, e somente se, para cada elemento \bar{e} do sobredomínio de ${}^?I$, existe um pronome σ tal que ${}^?I(\sigma) = \bar{e}$.

3.2.5) Uma *sobrevaloração* s , numa estrutura A e com respeito a uma pró-interpretação ${}^?I_p$ de L' nessa mesma estrutura, é uma função que associa as variáveis de L' a elementos do sobredomínio de ${}^?I_p$. Assim, $s(\xi)$ será o elemento pertencente ao sobredomínio de ${}^?I_p$ atribuído à variável ξ por s .

Notemos que, sendo ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A cuja base em L é ${}^?I$, o conjunto das sobrevalorações em A com respeito a ${}^?I_p$ é o mesmo que o das sobrevalorações em A com respeito a ${}^?I$; isto é, que qualquer que seja a sobrevaloração s , s é em A com respeito a ${}^?I_p$ se, e somente se, s é em A com respeito a ${}^?I$.

3.2.6) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A . Sejam s e s' duas sobrevalorações em A com respeito a ${}^?I_p$ e ξ uma variável de L' . Então dizemos que s é *normal em ξ* , se $s(\xi)$ é um elemento do domínio de A e que s e s' são *ξ -variantes*, se ambas atribuem os mesmos valores a todas as variáveis que não ξ — isto é, para toda variável y diferente de ξ , $s(y) = s'(y)$.

3.2.7) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ de L' numa estrutura A . Seja s uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$. Definimos, para a sobrevaloração s , a *função preenchimento por ${}^?I_p$* , s_{I_p} , como a que associa a cada pró-termo τ de L' um elemento $s_{I_p}(\tau)$ no sobredomínio de ${}^?I_p$, da seguinte maneira:

- i) se τ é uma variável, então $s_{I_p}(\tau)$ é $s(\tau)$;
- ii) se τ é um pronome, então $s_{I_p}(\tau)$ é $I_p(\tau)$; e
- iii) se τ é do tipo $\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$, então:
 - $s_{I_p}(\tau)$ é $I_p(\varphi_i^n)[s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_n)]$, se, para todo k , $1 \leq k \leq n$, $s_{I_p}(\tau_k) \in |A|$;
 - e, $s_{I_p}(\tau)$ é $?_I$, caso contrário.

3.2.8) Definição de *satisfação* (para L' e ${}^?I_p$):

Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ e s uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$. Seja α uma pró-fórmula. Então, dizemos que s satisfaz α segundo ${}^?I_p$ (em símbolos, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$) se:

I. α é uma pró-fórmula atômica:

- (1) do tipo $\tau_1 = \tau_2$ e o par $\langle s_{I_p}(\tau_1), s_{I_p}(\tau_2) \rangle$ pertence à relação de identidade em $|A|$; ou
- (2) do tipo $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ e a n -upla $\langle s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_n) \rangle$ pertence à relação $I_p(\pi_i^n)$; ou

II. α é uma pró-fórmula molecular:

- (1) do tipo $\neg \beta$ e não é o caso de $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta$; ou
- (2) do tipo $(\beta_1 \wedge \beta_2)$ e $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1$ e $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_2$; ou
- (3) do tipo $(\beta_1 \vee \beta_2)$ e $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1$ ou $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_2$; ou
- (4) do tipo $(\beta_1 \rightarrow \beta_2)$ e ou não é o caso de $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1$ ou $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_2$; ou
- (5) do tipo $(\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)$ e ou $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1$ e $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_2$ ou nem é o caso de $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1$ nem o de $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_2$; ou

III. α é uma pró-fórmula geral:

- (1) do tipo $\forall \xi \beta$ e, para qualquer sobrevaloração s' ξ -variante de s normal em ξ , $s' \text{ sat}_{I_p}^? \beta$; ou
- (2) do tipo $\exists \xi \beta$ e, para alguma sobrevaloração s' ξ -variante de s , $s' \text{ sat}_{I_p}^? \beta$.

3.2.9) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A . Então:

- i) uma pró-sentença α de L' é *verdadeira segundo ${}^?I_p$* — em símbolos, $\models_{I_p}^? \alpha$ — se, e somente se, qualquer sobrevaloração em A e com respeito a ${}^?I_p$ satisfaz α segundo ${}^?I_p$; e
- ii) uma pró-sentença α de L' é *falsa segundo ${}^?I_p$* se, e somente se, nenhuma sobrevaloração em A e com respeito a ${}^?I_p$ satisfaz α segundo ${}^?I_p$.

Notemos que, sendo ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A cuja base em L é ${}^?I$, para qualquer variável ou nome σ de L e para qualquer sentença α temos,

como decorrência imediata das definições de função preenchimento, satisfação e verdade, que:

- i) para qualquer sobrevaloração s em A , $s_I(\sigma)$ é $s_{I_p}(\sigma)$; e
- ii) para qualquer sobrevaloração s em A , $s \text{ sat}_I^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$; e
- iii) α é verdadeira segundo $^?I$ se, e somente se, α é verdadeira segundo $^?I_p$.

3.2.10) Dizemos que uma pró-sentença α é **pró-válida logicamente** — em símbolos, $\triangleright \alpha$ — se, e somente se, α é verdadeira segundo qualquer pró-interpretação.

3.2.11) Uma pró-sentença α é **pró-conseqüência lógica** de um conjunto Γ de pró-sentenças (em símbolos, $\Gamma \triangleright \alpha$) se, e somente se, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ também satisfaz α .

3.3) Noção de conseqüência tautológica em Q_{1p}

Seja B o conjunto das pró-sentenças de L' .

Definimos a função $cm: B \rightarrow \omega$, chamada **complexidade molecular** de β , da seguinte maneira: para cada β , $\beta \in B$,

- i) se β é atômica ou geral, então $cm(\beta)=1$;
- ii) se β é $\lceil \neg\beta_1 \rceil$, então $cm(\beta)=cm(\beta_1)+1$;
- iii) se β é $\lceil (\beta_1 \star \beta_2) \rceil$, então $cm(\beta)=cm(\beta_1)+cm(\beta_2)+1$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Uma **valoração booleana** é uma função $\phi: B \rightarrow \{V, F\}$ tal que, para cada pró-sentença β , se $cm(\beta)>1$, então $\phi(\beta)=V$ se, e somente se:

- i) β é do tipo $\lceil \neg\beta_1 \rceil$ e $\phi(\beta_1)=F$; ou
- ii) β é do tipo $\lceil (\beta_1 \wedge \beta_2) \rceil$ e $\phi(\beta_1)=\phi(\beta_2)=V$; ou
- iii) β é do tipo $\lceil (\beta_1 \vee \beta_2) \rceil$ e $\phi(\beta_1)=V$ e/ou $\phi(\beta_2)=V$; ou
- iv) β é do tipo $\lceil (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \rceil$ e $\phi(\beta_1)=F$ e/ou $\phi(\beta_2)=V$; ou
- v) β é do tipo $\lceil (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \rceil$ e $\phi(\beta_1)=\phi(\beta_2)$.

Seja $\Gamma \cup \{\alpha\}$ um subconjunto de B . Dizemos que α é **conseqüência tautológica** de Γ se não existe nenhuma valoração booleana que atribua 'V' a cada elemento de Γ e 'F' a α .

3.4) Propriedades semânticas de Q_{1p}

3.4.1) Para quaisquer pró-interpretações ${}^?I_p, {}^?I_p'$ de L' numa estrutura A , quaisquer sobrevalorações s em A e com respeito a ${}^?I_p$ e s' em A e com respeito a ${}^?I_p'$, qualquer conjunto de símbolos interpretáveis Σ , qualquer número n de quaisquer símbolos individuais de L' distintos k_1, \dots, k_n , qualquer pró-termo τ cujos símbolos estão em $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$, e quaisquer pró-termos ρ_1, \dots, ρ_n , não necessariamente distintos, se ocorre que:

- (i) a questão de ${}^?I_p$ é igual à questão de ${}^?I_p'$, e
- (ii) para qualquer $\sigma \in \Sigma$, $I_p(\sigma)$ é igual a $I_p'(\sigma)$, e
- (iii) para $1 \leq i \leq n$, $s_{I_p}(k_i)$ é igual a $s'_{I_p'}(\rho_i)$,

então temos que $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n)$.

Demonstração:

Por indução na complexidade m de τ .

Seja A uma estrutura. Sejam ${}^?I_p, {}^?I_p', s, s', \Sigma, k_1, \dots, k_n, \rho_1, \dots, \rho_n$ tais que as condições (i), (ii) e (iii) acima estejam satisfeitas. Seja τ um pró-termo, de complexidade m , cujos símbolos estejam em $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$.

Base: $m=0$

Temos os seguintes casos a considerar:

I. τ é uma variável.

- (1) Então τ pertence a $\{k_1, \dots, k_n\}$; ou seja, τ é algum k_i , para $1 \leq i \leq n$.
- (2) Logo, $\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n$ é ρ_i .
- (3) Ora, pela condição (iii) acima, sabemos que $s_{I_p}(k_i)$ é igual a $s'_{I_p'}(\rho_i)$, para qualquer $1 \leq i \leq n$.
- (4) Portanto, $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n)$.

II. τ é um pronome.

- (1) Então τ pertence a $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$.
- (2) Suponhamos, primeiramente, que τ é algum k_i , para $1 \leq i \leq n$.
- (3) Então $\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n$ é ρ_i .
- (4) Ora, pela condição (iii) acima, sabemos que $s_{I_p}(k_i)$ é igual a $s'_{I_p'}(\rho_i)$, para qualquer $1 \leq i \leq n$.
- (5) Logo, $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n)$.
- (6) Suponhamos, por outro lado, que τ não seja nenhum k_i , para $1 \leq i \leq n$.
- (7) Então, $\tau \in \Sigma$ e $\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n$ é τ .
- (8) Pela definição da função preenchimento, temos que $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $I_p(\tau)$ e que $s'_{I_p'}(\tau)$ é igual a $I_p'(\tau)$.
- (9) Ora, pela condição (ii) acima, sabemos que $I_p(\tau)$ é igual a $I_p'(\tau)$.
- (10) Logo, $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n)$.
- (11) Portanto, se τ é um pronome, $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau^{k_1, \dots, k_n} / \rho_1, \dots, \rho_n)$.

Passo indutivo: $0 < r < m$

Hipótese indutiva: Para quaisquer ${}^?I_p, {}^?I_p', \Sigma, s, s', n, k_1, \dots, k_n, \rho_1, \dots, \rho_n$ que satisfaçam as condições (i), (ii) e (iii) do enunciado, e para todo pró-termo τ , de complexidade r , cujos símbolos estão em $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$, temos que $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n})$.

Mostremos agora que um pró-termo τ de complexidade m , cujos símbolos estejam em $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$, também possui essa propriedade.

- (1) τ é do tipo $\varphi^q \tau_1 \dots \tau_q$.
- (2) Então $\tau^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ será $\varphi^q \tau_1^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n} \dots \tau_q^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$.
- (3) Ora, pela definição da função preenchimento, temos que $s_{I_p}(\tau)$ é:
 - i) ou $I(\varphi^q)[s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_q)]$, caso ocorra, para todo $i, 1 \leq i \leq q$, que $s_{I_p}(\tau_i) \in |A|$,
 - ii) ou a questão de ${}^?I_p$, caso ocorra, para algum $i, 1 \leq i \leq q$, que $s_{I_p}(\tau_i) \notin |A|$.
- (4) Mas, podemos afirmar:
 - i) pela condição (ii) do enunciado, que $I_p(\varphi^q)$ é igual a $I_p'(\varphi^q)$ — pois $\varphi^q \in \Sigma$; e,
 - ii) pela hipótese indutiva, que $s_{I_p}(\tau_i)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau_i^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n})$, para todo $i, 1 \leq i \leq q$ — pois os símbolos de τ_1, \dots, τ_q estão em $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$ e a complexidade de cada um desses pró-termos é menor que m .
- (5) Assim, do item ii de (4), pela condição (i) do enunciado, temos que, para $1 \leq i \leq q, s_{I_p}(\tau_i) \notin |A|$ se, e somente se, $s'_{I_p'}(\tau_i^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}) \notin |A|$.
- (6) Logo, de (3), (4) e (5), inferimos que:
 - i) ou $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $I'(\varphi^q)[s'_{I_p'}(\tau_1^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}), \dots, s'_{I_p'}(\tau_q^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n})]$, se, para todo $i, 1 \leq i \leq p, s'_{I_p'}(\tau_i) \in |A|$,
 - ii) ou $s_{I_p}(\tau)$ é igual à questão de ${}^?I_p'$, se, para algum $i, 1 \leq i \leq q, s'_{I_p'}(\tau_i) \notin |A|$.
- (7) Portanto, pela definição da função preenchimento, $s_{I_p}(\tau)$ é igual a $s'_{I_p'}(\tau^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n})$.

3.4.2) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação qualquer de L' numa estrutura A . Se τ é um pró-termo cujas variáveis ocorrem na lista ξ_1, \dots, ξ_k ($k \geq 0$; quando $k=0$, τ não tem variáveis), e se s e s' são duas sobrevalorações em $|A|$ com respeito a ${}^?I_p$ que concordam na atribuição que fazem a ξ_1, \dots, ξ_k , então $s_{I_p}(\tau) = s'_{I_p}(\tau)$.

Demonstração:

- (1) Sejam ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ a mesma pró-interpretação de L' numa estrutura A .
- (2) Então ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ têm o mesmo sobredomínio e concordam na atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis de qualquer pró-termo.
- (3) Seja Σ o conjunto dos símbolos interpretáveis que ocorrem num pró-termo τ .

- (4) Então as condições (i) e (ii) da propriedade 3.4.1 acima demonstrada estão satisfeitas e, se fizermos k_1, \dots, k_n serem as variáveis distintas entre si que ocorrem em τ e, para $1 \leq i \leq n$, ρ_i ser k_i , satisfaremos também a condição (iii) dessa mesma propriedade para quaisquer duas sobrevalorações s e s' que concordem na atribuição que fazem às variáveis de τ .
- (5) Assim, pela propriedade 3.4.1, podemos afirmar que $s_{I_p}(\tau) = s'_{I_p}(\tau^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n})$.
- (6) Mas, como $\tau^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ é $\tau^{k_1, \dots, k_n / k_1, \dots, k_n}$, $\tau^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ é τ .
- (7) Portanto, inferimos que $s_{I_p}(\tau) = s'_{I_p}(\tau)$.

3.4.3) Para quaisquer pró-interpretações ${}^?I_p, {}^?I_p'$ de L' numa estrutura A , quaisquer sobrevalorações s em A e com respeito a ${}^?I_p$ e s' em A e com respeito a ${}^?I_p'$, qualquer conjunto de símbolos interpretáveis Σ , qualquer número n de quaisquer símbolos individuais de L' distintos k_1, \dots, k_n , qualquer pró-fórmula α cujos símbolos interpretáveis e variáveis livres estão em $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$ e quaisquer pró-termos de L' , não necessariamente distintos, ρ_1, \dots, ρ_n , se ocorre que:

- (i) a questão de ${}^?I_p$ é igual à questão de ${}^?I_p'$, e
- (ii) para qualquer $\sigma \in \Sigma$, $I_p(\sigma)$ é igual a $I_p'(\sigma)$, e
- (iii) para $1 \leq i \leq n$, $s_{I_p}(k_i)$ é igual a $s'_{I_p'}(\rho_i)$, e
- (iv) para $1 \leq i \leq n$, ρ_i é livre com respeito a k_i em α ,

então temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p'}^? \alpha^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$.

Demonstração:

Por indução na complexidade m de α .

Seja A uma estrutura. Sejam ${}^?I_p, {}^?I_p', s, s', \Sigma, k_1, \dots, k_n, \rho_1, \dots, \rho_n$ tais que as condições (i), (ii), (iii) e (iv) acima estejam satisfeitas. Seja α uma pró-fórmula, cujos símbolos interpretáveis e variáveis livres estão em $\Sigma \cup \{k_1, \dots, k_n\}$.

Base: $m=0$

Então α é atômica. Temos dois casos a considerar:

I. α é do tipo ' $\tau_1 = \tau_2$ '.

- (1) Então $\alpha^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ é ' $\tau_1^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n} = \tau_2^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ '.
- (2) E, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, o par $\langle s_{I_p}(\tau_1), s_{I_p}(\tau_2) \rangle$ pertence à relação de identidade em $|A|$.
- (3) Mas, pela propriedade 3.4.1 acima demonstrada, podemos afirmar que $s_{I_p}(\tau_j) = s'_{I_p'}(\tau_j^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n})$, para qualquer $j \in \{1, 2\}$.
- (4) E, por conseguinte, que o par $\langle s_{I_p}(\tau_1), s_{I_p}(\tau_2) \rangle$ pertence à relação de identidade em $|A|$ se, e somente se, também a ela pertencer o par $\langle s'_{I_p'}(\tau_1^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}), s'_{I_p'}(\tau_2^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}) \rangle$.
- (5) Portanto, pela definição de satisfação, inferimos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p'}^? \alpha^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$.

- (4) Ora, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{\mathbb{I}_p}^? \alpha$ se, e somente se, qualquer sobrevaloração em A com respeito a ${}^? \mathbb{I}_p$ ξ -variante de s normal em ξ satisfaz β segundo ${}^? \mathbb{I}_p$.
- (5) Seja s^b uma das sobrevalorações normais em ξ e que difiram de s no máximo pela atribuição que fazem à variável ξ .
- (6) Seja $s^\#$ a mesma sobrevaloração que s' exceto por atribuir à variável ξ o mesmo elemento que s^b lhe atribui.
- (7) Então, de (5) e (6), pela condição (i) do enunciado, podemos afirmar:
- que $s^\#$ é ξ -variante de s' normal em ξ , e
 - mais genericamente, que existe uma função bijetora entre o conjunto das sobrevalorações ξ -variantes de s normais em ξ e o conjunto das sobrevalorações ξ -variantes de s' normais em ξ , já que a cada sobrevaloração ξ -variante de s normal em ξ podemos associar a sobrevaloração ξ -variante de s' que atribui à variável ξ o mesmo elemento de $|A|$ que s lhe atribui; e vice-versa.
- (8) Ora, como, por construção e pela propriedade 3.4.2, temos:
- de (1), que, para $1 \leq i \leq n$, $s^b_{\mathbb{I}_p}(k_i) = s_{\mathbb{I}_p}(k_i)$, e
 - de (2), que, para $1 \leq i \leq n$, $s^\#_{\mathbb{I}_p}(\rho_i) = s'_{\mathbb{I}_p}(\rho_i)$,
- pela condição (iii) do enunciado, podemos inferir que, para $1 \leq i \leq n$, $s^b_{\mathbb{I}_p}(k_i) = s^\#_{\mathbb{I}_p}(\rho_i)$.
- (9) E, por conseguinte, que todas as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do enunciado estão satisfeitas para as sobrevalorações s^b com respeito a ${}^? \mathbb{I}_p$ e $s^\#$ com respeito a ${}^? \mathbb{I}_p$.
- (10) Assim, como β tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, $s^b \text{ sat}_{\mathbb{I}_p}^? \beta$ se, e somente se, $s^\# \text{ sat}_{\mathbb{I}_p}^? \beta^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$.
- (11) Logo, de (4), (5), (7) e (10), pela condição (i) do enunciado, inferimos que $s \text{ sat}_{\mathbb{I}_p}^? \alpha$ se, e somente se, todas as sobrevalorações em A ξ -variantes de s' e normais em ξ satisfazem $\beta^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ segundo a pró-interpretação ${}^? \mathbb{I}_p$.
- (12) Portanto, pela definição de satisfação, $s \text{ sat}_{\mathbb{I}_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{\mathbb{I}_p}^? \alpha^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$.

III. α é do tipo $\ulcorner \exists \xi \beta \urcorner$.

(1) Tal como para o caso anterior, teríamos dois casos a considerar:

- ξ é algum dos k_1, \dots, k_n , ou
- ξ não é nenhum dos k_1, \dots, k_n .

Mas, pelos mesmos motivos lá apresentados, podemos considerar sem perda de generalidade apenas o caso em que ξ não é nenhum dos k_1, \dots, k_n .

(2) Sabemos, pela condição (iv) do enunciado, que ξ não é nenhum dos elementos de $\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$.

(3) Então $\alpha^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ é $\ulcorner \exists \xi \beta^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n} \urcorner$.

- (4) Ora, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha \text{ se}$, e somente se, alguma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$ ξ -variante de s satisfaz β segundo ${}^?I_p$.
- (5) Seja s^b uma sobrevaloração que difira de s no máximo pela atribuição que faz à variável ξ .
- (6) Seja $s^\#$ a mesma sobrevaloração que s^b exceto por atribuir à variável ξ o mesmo elemento que s^b lhe atribui.
- (7) Então, de (5) e (6), pela condição (i) de enunciado, podemos afirmar:
- que $s^\#$ é ξ -variante de s^b , e
 - mais genericamente, que existe uma função bijetora entre o conjunto das sobrevalorações ξ -variantes de s e o conjunto das sobrevalorações ξ -variantes de s^b , já que a cada sobrevaloração ξ -variante de s podemos associar a sobrevaloração ξ -variante de s^b que atribui à variável ξ o mesmo elemento do sobredomínio que s lhe atribui; e vice-versa.
- (8) Ora, como, por construção e pela propriedade 3.4.2, temos:
- de (1), que, para $1 \leq i \leq p$, $s_{I_p}^b(k_i) = s_{I_p}(k_i)$, e
 - de (2), que, para $1 \leq i \leq p$, $s_{I_p}^\#(\rho_i) = s_{I_p}^b(\rho_i)$,
- pela condição (iii) do enunciado, podemos afirmar que $s_{I_p}^b(k_i) = s_{I_p}^\#(\rho_i)$.
- (9) E, por conseguinte, que todas as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do enunciado estão satisfeitas para as sobrevalorações s^b com respeito a ${}^?I_p$ e $s^\#$ com respeito a ${}^?I_p$.
- (10) Assim, como β tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, $s^b \text{ sat}_{I_p}^? \beta \text{ se}$, e somente se, $s^\# \text{ sat}_{I_p}^? \beta^{k_1, \dots, k_n}_{\rho_1, \dots, \rho_n}$.
- (11) Logo, de (4), (5), (7) e (10), pela condição (i) do enunciado, inferimos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha \text{ se}$, e somente se, alguma sobrevaloração em A ξ -variante de s^b satisfaz $\beta^{k_1, \dots, k_n}_{\rho_1, \dots, \rho_n}$ segundo a pró-interpretação ${}^?I_p$.
- (12) Portanto, pela definição de satisfação, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha \text{ se}$, e somente se, $s^b \text{ sat}_{I_p}^? \alpha^{k_1, \dots, k_n}_{\rho_1, \dots, \rho_n}$.

3.4.4) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L numa estrutura A e s e s' sobrevalorações em A com respeito a ${}^?I_p$. Seja α uma pró-fórmula cujas variáveis livres ocorrem na lista ξ_1, \dots, ξ_n . Então, se ocorre que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, $s(\xi_i) = s'(\xi_i)$, então $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha \text{ se}$, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.

Demonstração:

- Sejam ρ_1, \dots, ρ_n símbolos individuais tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, ρ_i é ξ_i .
- Sejam s e s' sobrevalorações em A com respeito a ${}^?I_p$ tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, $s(\xi_i) = s'(\xi_i)$.
- Seja ${}^?I_p^*$ a mesma pró-interpretação que ${}^?I_p$ e s^* a mesma sobrevaloração que s' .

- (4) Então não só ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ têm o mesmo sobredomínio e concordam na atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis da pró-fórmula α como também, para todo i , $1 \leq i \leq n$, $s_{I_p}(\xi_i) = s_{I_p'}^*(\rho_i)$, dado que $s_{I_p}(\xi_i) = s_{I_p}^*(\xi_i)$ e $s_{I_p'}^*(\xi_i) = s_{I_p'}(\xi_i)$.
- (5) Seja Σ o conjunto dos símbolos interpretáveis que ocorrem em α .
- (6) Então as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da propriedade 3.4.3 estão satisfeitas e, com isso, podemos afirmar que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s^* \text{ sat}_{I_p'}^? \alpha^{\xi_1, \dots, \xi_n}_{\rho_1, \dots, \rho_n}$.
- (7) Portanto, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.

3.4.5) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ e s uma sobrevaloração nessa estrutura com respeito a essa pró-interpretação; seja α uma pró-fórmula contendo $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ como símbolos individuais de L' distintos. Então, para quaisquer pró-termos ρ_1, \dots, ρ_n de L' tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, ρ_i é livre com respeito a σ_i em α e $s_{I_p}(\sigma_i) = s_{I_p}(\rho_i)$, podemos afirmar que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}_{\rho_1, \dots, \rho_n}$.

Demonstração:

- (1) Sejam ρ_1, \dots, ρ_n pró-termos tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, ρ_i é livre com respeito a σ_i em α e $s_{I_p}(\sigma_i) = s_{I_p}(\rho_i)$.
- (2) Seja ${}^?I_p'$ a mesma pró-interpretação que ${}^?I_p$ e s' a mesma sobrevaloração que s .
- (3) Então não só ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ têm o mesmo sobredomínio e concordam na atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis da pró-fórmula α como também, para todo i , $1 \leq i \leq n$, $s_{I_p}(\sigma_i) = s_{I_p'}^*(\rho_i)$.
- (4) Seja Σ o conjunto dos símbolos interpretáveis que ocorrem em α .
- (5) Então as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da propriedade 3.4.3 estão satisfeitas e, com isso, podemos afirmar que s satisfaz α segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, s' satisfaz $\alpha^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}_{\rho_1, \dots, \rho_n}$ segundo ${}^?I_p'$.
- (6) Portanto, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha^{\sigma_1, \dots, \sigma_n}_{\rho_1, \dots, \rho_n}$.

- (4) Ora, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, alguma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$ ξ -variante de s satisfaz β segundo ${}^?I_p$.
- (5) Seja s^b uma sobrevaloração que difira de s no máximo pela atribuição que faz à variável ξ .
- (6) Seja $s^\#$ a mesma sobrevaloração que s' exceto por atribuir à variável ξ o mesmo elemento que s^b lhe atribui.
- (7) Então, de (5) e (6), pela condição (i) de enunciado, podemos afirmar:
- que $s^\#$ é ξ -variante de s' , e
 - mais genericamente, que existe uma função bijetora entre o conjunto das sobrevalorações ξ -variantes de s e o conjunto das sobrevalorações ξ -variantes de s' , já que a cada sobrevaloração ξ -variante de s podemos associar a sobrevaloração ξ -variante de s' que atribui à variável ξ o mesmo elemento do sobredomínio que s lhe atribui; e vice-versa.
- (8) Ora, como, por construção e pela propriedade 3.4.2, temos:
- de (1), que, para $1 \leq i \leq p$, $s_{I_p}^b(k_i) = s_{I_p}(k_i)$, e
 - de (2), que, para $1 \leq i \leq p$, $s_{I_p}^\#(\rho_i) = s'_{I_p}(\rho_i)$,
- pela condição (iii) do enunciado, podemos afirmar que $s_{I_p}^b(k_i) = s_{I_p}^\#(\rho_i)$.
- (9) E, por conseguinte, que todas as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do enunciado estão satisfeitas para as sobrevalorações s^b com respeito a ${}^?I_p$ e $s^\#$ com respeito a ${}^?I_p$.
- (10) Assim, como β tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, $s^b \text{ sat}_{I_p}^? \beta$ se, e somente se, $s^\# \text{ sat}_{I_p}^? \beta^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$.
- (11) Logo, de (4), (5), (7) e (10), pela condição (i) do enunciado, inferimos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, alguma sobrevaloração em A ξ -variante de s' satisfaz $\beta^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$ segundo a pró-interpretação ${}^?I_p$.
- (12) Portanto, pela definição de satisfação, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha^{k_1, \dots, k_n / \rho_1, \dots, \rho_n}$.

3.4.4) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A e s e s' sobrevalorações em A com respeito a ${}^?I_p$. Seja α uma pró-fórmula cujas variáveis livres ocorrem na lista ξ_1, \dots, ξ_n . Então, se ocorre que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, $s(\xi_i) = s'(\xi_i)$, então $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.

Demonstração:

- Sejam ρ_1, \dots, ρ_n símbolos individuais tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, ρ_i é ξ_i .
- Sejam s e s' sobrevalorações em A com respeito a ${}^?I_p$ tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, $s(\xi_i) = s'(\xi_i)$.
- Seja ${}^?I_p$ a mesma pró-interpretação que ${}^?I_p$ e s' a mesma sobrevaloração que s' .

3.4.6) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$; s e s^v sobrevalorações nessa estrutura com respeito a essa pró-interpretação e tais que seja s^v uma sobrevaloração ξ -variante de s . Seja α uma pró-fórmula. Então, para um pró-termo ρ de L' livre com respeito à variável ξ em α e tal que $s_{I_p}(\rho) = s^v_{I_p}(\xi)$, podemos afirmar que $s^v \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha^{\xi/\rho}$.

Demonstração:

- (1) Seja ${}^?I_p'$ a mesma pró-interpretação que ${}^?I_p$.
- (2) Então ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ não só têm o mesmo sobredomínio como também concordam na atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis de α .
- (3) Seja s^v uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p'$ tal que, para qualquer variável ξ^* que não ξ , $s^v(\xi^*) = s(\xi^*)$.
- (4) Seja ρ um pró-termo de L' livre com respeito à variável ξ em α e tal que $s_{I_p}(\rho) = s^v_{I_p}(\xi)$; e seja Σ o conjunto dos símbolos interpretáveis que ocorrem em α .
- (5) Então, as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da propriedade 3.4.3 estão satisfeitas e, com isso, podemos afirmar que s^v satisfaz α segundo ${}^?I_p'$ se, e somente se, s satisfaz $\alpha^{\xi/\rho}$ segundo ${}^?I_p$.
- (6) Mas como ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ são a mesma pró-interpretação, s^v é a sobrevaloração s^v ξ -variante de s tal que $s_{I_p}(\rho) = s^v_{I_p}(\xi)$.
- (7) Portanto, $s^v \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha^{\xi/\rho}$.

3.4.7) Para quaisquer pró-interpretações ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ de mesmo sobredomínio formadas respectivamente pelos pares $\langle {}^?I, I_p \rangle$ e $\langle {}^?I', I_p' \rangle$, qualquer sobrevaloração s e qualquer pró-fórmula α , se ocorre que I_p e I_p' diferem entre si no máximo quanto à atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis que não ocorrem em α , então temos que s satisfaz α segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, s satisfaz α segundo ${}^?I_p'$.

Demonstração:

- (1) Seja α uma pró-fórmula, e ${}^?I_p$ e ${}^?I_p'$ duas pró-interpretações de mesmo sobredomínio formadas respectivamente pelos pares $\langle {}^?I, I_p \rangle$ e $\langle {}^?I', I_p' \rangle$ e tais que I_p e I_p' diferem entre si no máximo quanto à atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis que não ocorrem em α .
- (2) Ora, como essas pró-interpretações têm o mesmo sobredomínio, toda sobrevaloração com respeito a ${}^?I_p$ é também uma sobrevaloração com respeito a ${}^?I_p'$.
- (3) Seja s uma sobrevaloração com respeito a ${}^?I_p$, e s^v a sobrevaloração com respeito a ${}^?I_p'$ tal que s^v é igual a s .
- (4) Seja Σ o conjunto dos símbolos interpretáveis de α .
- (5) Seja k_1, \dots, k_n as variáveis livres, distintas entre si, que ocorrem em α e, para $1 \leq i \leq n$, seja $\rho_i k_i$.

- (6) Então as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da propriedade 3.4.3 estão satisfeitas e, por conseguinte, podemos afirmar que s satisfaz α segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, s' satisfaz $\alpha^{k_1, \dots, k_n}/\rho_1, \dots, \rho_n$ segundo ${}^?I_p$.
- (7) Mas, $\alpha^{k_1, \dots, k_n}/\rho_1, \dots, \rho_n$ é α , e s e s' são a mesma sobrevaloração.
- (8) Portanto, s satisfaz α segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, s satisfaz α segundo ${}^?I_p$.

3.4.8) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' numa estrutura A , s uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$ e α uma pró-sentença qualquer. Então:

- i) se s satisfaz α segundo ${}^?I_p$, então α é verdadeira segundo ${}^?I_p$; e
- ii) se s não satisfaz α segundo ${}^?I_p$, então α é falsa segundo ${}^?I_p$.

Demonstração:

a) do item i

- (1) Suponhamos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.
- (2) Seja s' uma sobrevaloração qualquer com respeito a ${}^?I_p$.
- (3) Então, como α é uma pró-sentença (i.e, nela não há nenhuma ocorrência de variável livre), pela propriedade 3.4.4, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.
- (4) Logo, $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.
- (5) Assim, como s' é qualquer, podemos afirmar que qualquer sobrevaloração satisfaz α segundo ${}^?I_p$.
- (6) E, pela definição de verdade, que α é verdadeira segundo ${}^?I_p$.

b) do item ii

- (1) Suponhamos que não é o caso de $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.
- (2) Seja s' uma sobrevaloração qualquer com respeito a ${}^?I_p$.
- (3) Então, como α é uma pró-sentença — i.e, nela não há nenhuma ocorrência de variável livre —, pela propriedade 3.4.4, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.
- (4) Logo, não é o caso de $s' \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$.
- (5) Assim, como s' é qualquer, podemos afirmar que qualquer sobrevaloração não satisfaz α segundo ${}^?I_p$.
- (6) E, pela definição de falsidade, que α é falsa segundo ${}^?I_p$.

3.4.9) Seja $?I_p$ uma pró-interpretação e α uma pró-sentença qualquer. Então ou α é verdadeira segundo $?I_p$ ou α é falsa segundo $?I_p$.

Demonstração:

- (1) Suponhamos que α não é verdadeira segundo $?I_p$.
- (2) Então, pela definição de verdade, podemos afirmar que há uma sobrevaloração s que não satisfaz α segundo $?I_p$.
- (3) Logo, como α é uma pró-sentença, pela propriedade 3.4.8.ii, inferimos que α é falsa segundo $?I_p$.
- (4) E, portanto, temos que α é verdadeira segundo $?I_p$ ou α é falsa segundo $?I_p$.

3.4.10) Seja α uma pró-sentença e Γ um conjunto de pró-sentenças. Então α é consequência tautológica de Γ somente se α é pró-consequência lógica de Γ .

Demonstração:

- (1) Suponhamos que α é consequência tautológica de Γ .
- (2) Então, pela definição de consequência tautológica, não existe nenhuma valoração booleana que atribua V a cada elemento de Γ e F a α .
- (3) Suponhamos também, por absurdo, que $\Gamma \not\vdash \alpha$.
- (4) Então, pela definição de pró-consequência, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s que, segundo uma pró-interpretação $?I_p$, satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ mas não satisfaz α .
- (5) Pela propriedade 3.4.8, inferimos então que há uma pró-interpretação $?I_p$ segundo a qual:
 - i) cada uma das pró-sentenças de Γ é verdadeira, e
 - ii) α é falsa.
- (6) Seja ϕ a valoração booleana tal que, para toda pró-sentença β de L' , $\phi(\beta)=V$ se, e somente se, β é verdadeira segundo $?I_p$.
- (7) Então ϕ é tal que associa:
 - i) V a cada uma das pró-sentenças de Γ e
 - ii) F a α .
- (8) Logo, podemos afirmar que existe uma valoração booleana que atribui V a cada elemento de Γ mas F a α . Contradição com (2)!
- (9) Portanto, $\Gamma \vdash \alpha$.

3.4.11) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação completa de L' numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$; e s uma sobrevaloração nessa estrutura com respeito a essa pró-interpretação. Então $s \text{ sat}^?_{I_p} \alpha^{\S}/c$, para todo nome c se, e somente se, $s \text{ sat}^?_{I_p} \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.

Demonstração:

- (1) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação de L' em A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ e tal que, para cada elemento \bar{e} de $|A|$, existe um nome c tal que $s_{I_p}(c) = \bar{e}$;
- (2) Então podemos afirmar a existência de uma bijeção entre o conjunto dos nomes de L' e o conjunto das sobrevalorações \S -variantes de s normais em \S — a saber, a função que associa cada nome c à sobrevaloração s' \S -variante de s tal que $s'_{I_p}(\xi)$ é igual a $s_{I_p}(c)$, e vice-versa.

a) ida

- (3) Suponhamos que, para todo nome c , $s \text{ sat}^?_{I_p} \alpha^{\S}/c$.
- (4) Seja c^* um nome qualquer e s^* a sobrevaloração \S -variante de s tal que $s^*_{I_p}(\xi)$ é igual a $s_{I_p}(c^*)$.
- (5) Então todas as condições da propriedade 3.4.6 estão satisfeitas e, com isso, podemos afirmar que $s \text{ sat}^?_{I_p} \alpha^{\S}/c^*$ se, e somente se, $s^* \text{ sat}^?_{I_p} \alpha$.
- (6) Logo, como c^* é qualquer, de (2), (3) e (5), inferimos que todas as sobrevalorações \S -variantes de s normais em \S satisfazem α segundo ${}^?I_p$.
- (7) Portanto, pela definição de satisfação, $s \text{ sat}^?_{I_p} \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.

b) volta

- (3) Suponhamos que $s \text{ sat}^?_{I_p} \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.
- (4) Então, pela definição de satisfação, podemos afirmar que todas as sobrevalorações \S -variantes de s normais em \S satisfazem α segundo ${}^?I_p$.
- (5) Seja s^* uma sobrevaloração \S -variante de s normal em \S e c^* o nome tal que $s^*_{I_p}(\xi)$ é igual a $s_{I_p}(c^*)$.
- (6) Então todas as condições da propriedade 3.4.6 estão satisfeitas e, com isso, podemos afirmar que $s \text{ sat}^?_{I_p} \alpha^{\S}/c^*$ se, e somente se, $s^* \text{ sat}^?_{I_p} \alpha$.
- (7) Logo, como s^* é qualquer, de (2), (4) e (6), inferimos que, para todo nome c , $s \text{ sat}^?_{I_p} \alpha^{\S}/c$.

3.4.12) Para qualquer pró-sentença α , se α é um elemento do conjunto de pró-sentenças Γ , então α é pró-conseqüência lógica de Γ .

Demonstração:

- (1) Suponhamos que o conjunto Γ de pró-sentenças e a pró-sentença α sejam tais que $\alpha \in \Gamma$.
- (2) Então, qualquer sobrevaloração que satisfaça, segundo uma pró-interpretação qualquer, cada uma das pró-sentenças de Γ , satisfará em particular α .

- (3) Logo, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ também satisfaz α .
- (4) Portanto, pela definição de pró-conseqüência lógica, $\Gamma \triangleright \alpha$.

3.4.13) A pró-sentença 'a=a' é pró-válida logicamente.

Demonstração:

- (1) Suponhamos, por absurdo, que 'a=a' não é logicamente pró-válida.
- (2) Então podemos afirmar, pela definição de pró-validade, que existe uma pró-interpretação ${}^?I_p$ segundo a qual 'a=a' não é verdadeira.
- (3) E, pela definição de verdade, que existe uma sobrevaloração s em A que não satisfaz 'a=a' segundo ${}^?I_p$.
- (4) Logo, pela definição de satisfação, podemos afirmar que o par $\langle s_p(a), s_p(a) \rangle$ não pertence à relação de identidade em $|A|$.
- (5) E assim, pela definição de estrutura, inferimos que $s_p(a)$ não é um elemento de $|A|$.
- (6) Mas como, pela definição da função preenchimento, temos que $s_p(a)$ é $I_p(a)$, pela definição de pró-interpretação, de (5) podemos afirmar que $I_p(a)$ não é um objeto de $|A|$; o que vai de encontro à definição de pró-interpretção!
- (7) Portanto, \triangleright 'a=a'.

3.4.14) Seja α uma pró-sentença atômica e ξ um parâmetro qualquer. Então, se ξ ocorre em α , a pró-sentença ' $(\alpha \rightarrow \xi = \xi)$ ' é pró-válida logicamente.

Demonstração:

- (1) Seja α uma pró-sentença atômica e ξ um parâmetro tais que ξ ocorre em α .
- (2) Então:
 - i) ou α é do tipo ' $\tau_1 = \tau_2$ ' e ξ ocorre em algum τ_i , $i \in \{1, 2\}$,
 - ii) ou α é do tipo $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ e ξ ocorre em algum τ_i , $1 \leq i \leq n$.
- (3) Suponhamos agora, por absurdo, que ' $(\alpha \rightarrow \xi = \xi)$ ' não é logicamente pró-válida.
- (4) Então podemos afirmar, pela definição de pró-validade, que existe uma pró-interpretação segundo a qual ' $(\alpha \rightarrow \xi = \xi)$ ' não é verdadeira.
- (5) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação numa estrutura A tal que, segundo ${}^?I_p$, ' $(\alpha \rightarrow \xi = \xi)$ ' não é verdadeira.
- (6) Pela definição de verdade, podemos então afirmar que existe uma sobrevaloração s em A e com respeito a ${}^?I_p$ que não satisfaz ' $(\alpha \rightarrow \xi = \xi)$ ' segundo ${}^?I_p$.

- (7) Logo, pela definição de satisfação, temos que, segundo I_p ,
- i) s satisfaz α mas
 - ii) s não satisfaz $\ulcorner \xi = \xi \urcorner$.
- (8) Suponhamos, por um lado, que α é do tipo $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$.
- (9) Então, pela definição de satisfação, do item i de (7) podemos afirmar que o par $\langle s_{I_p}(\tau_1), s_{I_p}(\tau_2) \rangle$ pertence à relação de identidade em A e, pela definição de estrutura, que tanto $s_{I_p}(\tau_1)$ quanto $s_{I_p}(\tau_2)$ pertencem ao domínio de A .
- (10) Logo, do item i de (2), de (8) e de (9), pela definição da função preenchimento, inferimos que, se α é do tipo $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$, então $s_{I_p}(\xi) \in |A|$.
- (11) Suponhamos, por outro lado, que α é do tipo $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$.
- (12) Então, pela definição de satisfação, do item i de (7) podemos afirmar que a n -upla $\langle s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_n) \rangle$ pertence à relação $I_p(\pi_i^n)$ e, pela definição de pró-interpretação, que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $s_{I_p}(\tau_j)$ que pertence ao domínio de A .
- (13) Logo, do item ii de (2), de (11) e de (12), pela definição da função preenchimento, inferimos que, se α é do tipo $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$, então $s_{I_p}(\xi) \in |A|$.
- (14) Por conseguinte, de (2), (10) e (13), podemos afirmar que $s_{I_p}(\xi) \in |A|$.
- (15) Mas, do item ii de (7) temos, pela definição de satisfação, que o par $\langle s_{I_p}(\xi), s_{I_p}(\xi) \rangle$ não pertence à relação de identidade em $|A|$ e, assim, pela definição de estrutura, que $s_{I_p}(\xi) \notin |A|$. Contradição com (14)!
- (16) Portanto, $\triangleright \ulcorner \alpha \rightarrow \xi = \xi \urcorner$.

3.4.15) Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pró-sentenças e $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ conjuntos de pró-sentenças tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, α_i é pró-conseqüência lógica de Γ_i . Então, se uma pró-sentença β é conseqüência tautológica de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, então β é pró-conseqüência lógica de $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$.

Demonstração:

- (1) Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são pró-sentenças e $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ são conjuntos de pró-sentenças tais que, para todo i , $1 \leq i \leq n$, α_i é pró-conseqüência lógica de Γ_i , então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que, em cada pró-interpretação, qualquer sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ_i também satisfaz α_i , para todo i , $1 \leq i \leq n$.
- (2) Seja β uma pró-sentença tal que β é pró-conseqüência tautológica de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.
- (3) Então, pela propriedade 3.4.10, podemos afirmar que β é pró-conseqüência lógica de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e, pela definição de pró-conseqüência, que, em cada pró-interpretação, qualquer sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ também satisfaz β .

- (4) Suponhamos, por absurdo, que β não seja pró-conseqüência lógica de $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$.
- (5) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s que, segundo uma pró-interpretação ${}^?I_p$,
 - i) satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ mas
 - ii) não satisfaz β .
- (6) Logo, de (1) e do item i de (5), inferimos que, segundo ${}^?I_p$, s satisfaz α_i , para todo i , $1 \leq i \leq n$.
- (7) Ou seja, que, segundo ${}^?I_p$, s satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.
- (8) Assim, de (3) e (7), podemos afirmar que s também satisfaz β segundo ${}^?I_p$.
Contradição com o item ii de (5)!
- (9) Portanto, $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n \triangleright \beta$.

3.4.16) Sejam α e β pró-sentenças e Γ um conjunto de pró-sentenças. Então, β é pró-conseqüência lógica de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ se, e somente se, $\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$ é pró-conseqüência lógica de Γ .

Demonstração:

a) ida:

- (1) Suponhamos que α , β e Γ sejam tais que $\Gamma \cup \{\alpha\} \triangleright \beta$.
- (2) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ também satisfaz β .
- (3) Assumamos, por absurdo, que $\Gamma \not\triangleright \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$.
- (4) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s que, segundo alguma pró-interpretação ${}^?I_p$:
 - i) satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ e
 - ii) não satisfaz $\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$.
- (5) Do item ii de (4), pela definição de satisfação, inferimos que s , segundo a pró-interpretação ${}^?I_p$, satisfaz α mas não satisfaz β .
- (6) Logo, do item i de (4) e de (5), temos que s satisfaz, segundo a pró-interpretação ${}^?I_p$, cada uma das fórmulas de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ mas não satisfaz β .
Contradição com (2)!
- (7) Portanto, $\Gamma \triangleright \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$.

b) volta:

- (1) Suponhamos que α , β e Γ sejam tais que $\Gamma \triangleright \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$.
- (2) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ também satisfaz $\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner$.

- (3) Logo, pela definição de satisfação, inferimos que, em cada pró-interpretção, qualquer sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ , ou não satisfaz α , ou satisfaz β .
- (4) Assumamos, por absurdo, que $\Gamma \cup \{\alpha\} \not\vdash \beta$.
- (5) Então, pela definição de pró-consequência, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s que, segundo alguma pró-interpretção ${}^?I_p$,
- i) satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ e
 - ii) não satisfaz β .
- (6) Ou seja, que existe uma sobrevaloração s que, segundo alguma pró-interpretção ${}^?I_p$, satisfaz todas as pró-sentenças de Γ , satisfaz α mas não satisfaz β . Contradição com (3)!
- (7) Portanto, $\Gamma \cup \{\alpha\} \triangleright \beta$.

3.4.17) Seja τ um pró-termo fechado e ξ_1, \dots, ξ_n ($n \geq 0$; quando $n=0$, τ é um pró-termo restrito) os parâmetros que ocorrem em τ . Se ${}^?I_p$ é uma pró-interpretção de L' numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ e tal que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $I_p(\xi_j) \in |A|$, e s é uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$, então $s_{I_p}(\tau) \in |A|$.

Demonstração:

Por indução na complexidade de τ .

Seja τ um pró-termo fechado e ξ_1, \dots, ξ_n ($n \geq 0$) os parâmetros que nele ocorrem. Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretção de L' numa estrutura A formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ e tal que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $I_p(\xi_j) \in |A|$. Seja s uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$.

Base: $m=0$

Temos os seguintes casos a considerar:

I. τ é um nome.

- (1) Pela definição da função preenchimento, podemos então afirmar que $s_{I_p}(\tau)$ é $I_p(\tau)$.
- (2) Mas, pela definição de pró-interpretção, sabemos que $I_p(\tau) \in |A|$.
- (3) Portanto, temos que $s_{I_p}(\tau) \in |A|$.

II. τ é um parâmetro.

- (1) Pela definição da função preenchimento, podemos então afirmar que $s_{I_p}(\tau)$ é $I_p(\tau)$.
- (2) Mas, por suposição, temos que τ é algum ξ_j e que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $I_p(\xi_j) \in |A|$.
- (3) Portanto, disso inferimos que $s_{I_p}(\tau) \in |A|$.

Passo indutivo: $0 < r < m$

Hipótese indutiva: Para qualquer pró-termo fechado τ° de complexidade r e lista $\xi_1^\circ, \dots, \xi_n^\circ$ ($n \geq 0$) de parâmetros que ocorrem em τ° , vale que: se ${}^?I_p^\circ$ é uma pró-interpretação de L° numa estrutura A° formada pelo par $\langle {}^?I_p^\circ, I_p^\circ \rangle$ e tal que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $I_p^\circ(\xi_j^\circ) \in |A^\circ|$, e s° é uma sobrevaloração em A° com respeito a ${}^?I_p^\circ$, então $s_{I_p^\circ}^\circ(\tau^\circ) \in |A^\circ|$.

Mostremos, agora, que um pró-termo fechado τ de complexidade m , e tal que nele ocorram os parâmetros ξ_1, \dots, ξ_n ($n \geq 0$), também possui essa propriedade.

- (1) τ é do tipo $\varphi_i^p \tau_1 \dots \tau_p$.
- (2) Ora, como, para todo j , $1 \leq j \leq p$, τ_j tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, podemos afirmar que $s_{I_p}(\tau_j) \in |A|$.
- (3) E, assim, pela definição da função preenchimento, inferimos que $s_{I_p}(\tau)$ é $I_p(\varphi_i^p)[s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_p)]$.
- (4) Portanto, pela definição de pró-interpretação, podemos afirmar que $s_{I_p}(\tau) \in |A|$.

3.4.18) Seja τ um pró-termo fechado e ξ_1, \dots, ξ_n ($n \geq 0$; quando $n=0$ τ é um pró-termo restrito) os parâmetros que ocorrem em τ . Sejam Γ e $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ conjuntos de pró-sentenças ($n \geq 0$; quando $n=0$, a seqüência é vazia). Então, se uma pró-sentença do tipo $\ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$ é pró-conseqüência lógica de Γ e, para todo j , $1 \leq j \leq n$, a pró-sentença $\ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$ é pró-conseqüência lógica de Γ_j , então α^s / τ é pró-conseqüência lógica de $\Gamma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$.

Demonstração:

- (1) Suponhamos que:
 - i) $\Gamma \triangleright \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$ e,
 - ii) para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\Gamma_j \triangleright \ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$.
- (2) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que, em cada pró-interpretação:
 - i) toda sobrevaloração que satisfaz cada pró-sentença de Γ satisfaz também $\ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$; e
 - ii) toda sobrevaloração que satisfaz cada pró-sentença de Γ_j satisfaz também $\ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$, $1 \leq j \leq n$.
- (3) Seja s uma sobrevaloração que, segundo uma pró-interpretação ${}^?I_p$ de L' numa estrutura A , satisfaz cada pró-sentença de $\Gamma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$.
- (4) Então, segundo essa pró-interpretação ${}^?I_p$,
 - i) s satisfaz $\ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$ e
 - ii) s satisfaz $\ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$, para todo j , $1 \leq j \leq n$.

- (5) Pela definição de satisfação, podemos então afirmar que:
- i) segundo ${}^?I_p$, todas as sobrevalorações ξ -variantes de s normais em ξ satisfazem α ;
 - ii) e que todos os pares $\langle s_p(\xi_j), s_p(\xi_j) \rangle$, $1 \leq j \leq n$, pertencem à relação de identidade definida em A .
- (6) Mas como, do item ii de (5), pela definição de estrutura, sabemos que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $s_p(\xi_j) \in |A|$, pela propriedade 3.4.17, podemos inferir que $s_p(\tau) \in |A|$.
- (7) Seja s' a sobrevaloração ξ -variante de s tal que $s'_p(\xi)$ é igual a $s_p(\tau)$.
- (8) Então s' é uma sobrevaloração ξ -variante de s normal em ξ e, do item i de (5), podemos afirmar que s' satisfaz α segundo ${}^?I_p$.
- (9) Ora, pela propriedade 3.4.6, sabemos também que s' satisfaz α segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, s satisfaz $\alpha^{\xi/\tau}$ segundo ${}^?I_p$.
- (10) Logo, de (8) e (9), podemos inferir que s satisfaz $\alpha^{\xi/\tau}$ segundo ${}^?I_p$.
- (11) E, por conseguinte, que qualquer sobrevaloração que, segundo uma pró-interpretção, satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ também satisfaz $\alpha^{\xi/\tau}$.
- (12) Assim, em cada pró-interpretção, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ também satisfaz $\alpha^{\xi/\tau}$.
- (13) E, portanto, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que $\Gamma \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n \triangleright \alpha^{\xi/\tau}$.

3.4.19) Seja σ um pronome; $\alpha^{\xi/\sigma}$ uma pró-sentença e Γ um conjunto de pró-sentenças. Então, se σ não ocorre nos elementos do conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\}$, $\alpha^{\xi/\sigma}$ é pró-conseqüência lógica de Γ somente se $\forall \xi \alpha$ é pró-conseqüência lógica de Γ .

Demonstração:

- (1) Sejam σ , α , e Γ tais que σ não ocorre nos elementos de $\Gamma \cup \{\alpha\}$.
- (2) Suponhamos:
 - i) que $\Gamma \triangleright \alpha^{\xi/\sigma}$, e
 - ii) por absurdo, que $\Gamma \not\triangleright \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.
- (3) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar, do item i de (2), que, em cada pró-interpretção, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ também satisfaz $\alpha^{\xi/\sigma}$.
- (4) E, do item ii de (2), que existe pelo menos uma sobrevaloração que, segundo alguma pró-interpretção, satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ mas não satisfaz $\ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.

- (5) Seja s uma sobrevaloração que, segundo uma pró-interpretação ${}^?I_p$ formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$,
- i) satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ mas
 - ii) não satisfaz $\ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.
- (6) Então, do item ii de (5), pela definição de satisfação, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s' ξ -variante de s normal em ξ que não satisfaz α segundo ${}^?I_p$.
- (7) Seja ${}^?I_p'$ a pró-interpretação de mesmo sobredomínio que ${}^?I_p$, formada pelo par $\langle {}^?I', I_p' \rangle$ e tal que:
- i) $I_p'(\sigma)$ é igual a $s'_{I_p'}(\xi)$ e,
 - ii) para toda constante não lógica ζ que não o pronome σ , $I_p'(\zeta)$ é igual a $I_p(\zeta)$.
- (8) Então, I_p e I_p' têm as mesmas sobrevalorações e diferem entre si no máximo quanto à atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis que não ocorrem em $\Gamma \cup \{\alpha\}$.
- (9) Estão assim satisfeitas todas as condições da propriedade 3.4.7 e podemos, por conseguinte, inferir:
- i) do item i de (5), que s satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ segundo ${}^?I_p'$, e
 - ii) de (6), que s' não satisfaz α segundo ${}^?I_p'$.
- (10) Mas como $s'_{I_p'}(\xi) = s'_{I_p'}(\sigma)$ e, pela propriedade 3.4.6, temos que s' sat ${}^?I_p'$ α se, e somente se, s sat ${}^?I_p'$ $\alpha^{\xi/\sigma}$, do item ii de (9) podemos afirmar que s não satisfaz $\alpha^{\xi/\sigma}$ segundo ${}^?I_p'$.
- (11) Logo, do item i de (9) e (10), inferimos que existe uma pró-interpretação segundo a qual uma sobrevaloração satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ mas não satisfaz $\alpha^{\xi/\sigma}$. Contradição com (3)!
- (12) Portanto, $\Gamma \triangleright \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.

3.4.20) Sejam Γ_1 e Γ_2 conjuntos de pró-sentenças; seja ξ um parâmetro, e $\alpha^{\xi/\xi}$ e β pró-sentenças. Então, se $\ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$ é pró-consequência lógica de Γ_1 , β é pró-consequência lógica de $\Gamma_2 \cup \{\alpha^{\xi/\xi}\}$ e ξ não ocorre nos elementos de $\Gamma_2 \cup \{\alpha, \beta\}$, então β é pró-consequência lógica de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Demonstração:

- (1) Suponhamos que Γ_1 , Γ_2 , ξ , α e β , sejam tais que:
 - i) $\Gamma_1 \triangleright \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$, e
 - ii) $\Gamma_2 \cup \{\alpha^{\xi/\xi}\} \triangleright \beta$, e
 - iii) ξ não ocorre nos elementos de $\Gamma_2 \cup \{\alpha, \beta\}$.
- (2) Suponhamos também, por absurdo, que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \not\triangleright \beta$.

- (3) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar,
- i) do item i de (1), que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ_1 também satisfaz $\lceil \exists \xi \alpha \rceil$; e
 - ii) do item ii de (1), que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma_2 \cup \{\alpha^{\xi/\xi}\}$ também satisfaz β ; e
 - iii) de (2), que existe uma sobrevaloração s que, segundo uma pró-interpretação ${}^?I_p$, satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mas não satisfaz β .
- (4) Dos itens i e iii de (3), temos então que s satisfaz $\lceil \exists \xi \alpha \rceil$ segundo ${}^?I_p$.
- (5) Logo, pela definição de satisfação, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s' ξ -variante de s que satisfaz α segundo ${}^?I_p$.
- (6) Seja ${}^?I_p'$ a pró-interpretação de mesmo sobredomínio que ${}^?I_p$, formada pelo par $\langle {}^?I', I_p' \rangle$ e tal que $I_p'(\xi)$ é igual a $s'_{I_p}(\xi)$ e, para toda constante não lógica ζ que não o parâmetro ξ , $I_p'(\zeta)$ é igual a $I_p(\zeta)$.
- (7) Então, I_p e I_p' diferem entre si no máximo quanto à atribuição que fazem aos símbolos interpretáveis que não ocorrem em $\Gamma_2 \cup \{\alpha, \beta\}$ e todas as condições da propriedade 3.4.7 estão satisfeitas; por conseguinte, inferimos:
- i) do item iii de (3), que, segundo ${}^?I_p'$, s satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ_2 mas não satisfaz β ; e
 - ii) de (5), que s' satisfaz α segundo ${}^?I_p'$.
- (8) Mas como $s'_{I_p}(\xi) = s_{I_p}(\xi)$ e, pela propriedade 3.4.6, temos que s' sat $^?_{I_p}$ α se, e somente se, s sat $^?_{I_p}$ $\alpha^{\xi/\xi}$, de (5) podemos afirmar que s satisfaz $\alpha^{\xi/\xi}$ segundo ${}^?I_p'$.
- (9) E desse modo, do item i de (7) e (8), inferimos que existe uma pró-interpretação segundo a qual uma sobrevaloração satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma_2 \cup \{\alpha^{\xi/\xi}\}$ mas não satisfaz β . Contradição com o item ii de (3)!
- (10) Portanto, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \triangleright \beta$.

3.4.21) Seja τ um pró-termo fechado, $\alpha^{\xi/\tau}$ uma pró-sentença e Γ um conjunto de pró-sentenças. Então, se $\alpha^{\xi/\tau}$ é pró-conseqüência lógica de Γ , $\lceil \exists \xi \alpha \rceil$ também o é.

Demonstração:

- (1) Suponhamos que τ , α e Γ sejam tais que $\Gamma \triangleright \alpha^{\xi/\tau}$.
- (2) E suponhamos também, por absurdo, que $\Gamma \not\triangleright \lceil \exists \xi \alpha \rceil$.
- (3) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar, de (1), que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ satisfaz também $\alpha^{\xi/\tau}$.

- (4) E, de (2), que existe uma sobrevaloração s que, segundo alguma pró-interpretção ${}^?I_p$, satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ mas não satisfaz $\exists \xi \alpha$.
- (5) Pela definição de satisfação temos então, de (4), que nenhuma sobrevaloração ξ -variante de s satisfaz α segundo ${}^?I_p$; em particular, não satisfaz α segundo ${}^?I_p$ a sobrevaloração s' ξ -variante de s e tal que $s'_{ip}(\xi)$ é igual a $s_{ip}(\tau)$.
- (6) Logo, pela propriedade 3.4.6, podemos afirmar que s não satisfaz $\alpha^{\xi/\tau}$ segundo ${}^?I_p$.
- (7) Desse modo, de (4) e (6) temos que existe uma sobrevaloração s que, segundo uma pró-interpretção ${}^?I_p$, satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ mas não satisfaz $\alpha^{\xi/\tau}$. Contradição com (3)!
- (8) Portanto, $\Gamma \triangleright \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$.

3.4.22) Seja Γ um conjunto de pró-sentenças. Então qualquer pró-sentença do tipo $\ulcorner \neg \forall \xi \neg \alpha \urcorner$ é pró-consequência lógica de Γ somente se $\ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$ também o for.

Demonstração:

- (1) Suponhamos que α e Γ sejam tais que $\Gamma \triangleright \ulcorner \neg \forall \xi \neg \alpha \urcorner$.
- (2) Então, pela definição de pró-consequência, podemos afirmar que, em cada pró-interpretção, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ também satisfaz $\ulcorner \neg \forall \xi \neg \alpha \urcorner$.
- (3) Seja s uma sobrevaloração que, segundo uma pró-interpretção ${}^?I_p$, satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ .
- (4) Então s satisfaz $\ulcorner \neg \forall \xi \neg \alpha \urcorner$ segundo ${}^?I_p$ e, pela definição de satisfação, inferimos que existe uma sobrevaloração s' ξ -variante de s normal em ξ que satisfaz α segundo ${}^?I_p$.
- (5) Logo, existe uma sobrevaloração ξ -variante de s que satisfaz α segundo ${}^?I_p$ e, pela definição de satisfação, podemos afirmar que s satisfaz $\ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$ segundo ${}^?I_p$.
- (6) Assim, de (3) e (5), podemos afirmar que, em cada pró-interpretção, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ também satisfaz $\ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$.
- (7) Portanto, $\Gamma \triangleright \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$.

3.4.23) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ de L' numa estrutura A e s uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$. Sejam τ_1, τ_2, ρ_1 e ρ_2 pró-termos fechados. Então, se $s_{I_p}(\rho_1)$ é igual a $s_{I_p}(\rho_2)$ e τ_2 resulta de τ_1 por substituição de uma ou mais ocorrências de ρ_1 por ocorrências de ρ_2 , $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $s_{I_p}(\tau_2)$.

Demonstração:

Por indução na complexidade m de τ_1 .

Sejam ${}^?I_p, s, \rho_1$ e ρ_2 tais que $s_{I_p}(\rho_1)$ é igual a $s_{I_p}(\rho_2)$. Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados tais que τ_2 resulta de τ_1 por substituição de uma ou mais ocorrências de ρ_1 por ocorrências de ρ_2 .

Base: $m=0$

- (1) Então τ_1 é um pronome.
- (2) E, por conseguinte, ρ_1 é τ_1 .
- (3) τ_2 é assim ρ_2 .
- (4) Portanto, como $s_{I_p}(\rho_1)$ é igual a $s_{I_p}(\rho_2)$, de (2) e (3), inferimos que $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $s_{I_p}(\tau_2)$.

Passo indutivo: $0 < r < m$

Hipótese indutiva: Se ${}^?I_p^\circ, s^\circ, \rho_1^\circ$ e ρ_2° são tais que $s_{I_p^\circ}(\rho_1^\circ)$ é igual a $s_{I_p^\circ}(\rho_2^\circ)$ e τ_1° e τ_2° são pró-termos fechados tais que τ_2° resulta de τ_1° por substituição de uma ou mais ocorrências de ρ_1° por ocorrências de ρ_2° , então $s_{I_p^\circ}(\tau_1^\circ)$ é igual a $s_{I_p^\circ}(\tau_2^\circ)$.

Mostremos agora que, para um pró-termo τ_1 de complexidade m , essa propriedade se mantém.

Temos dois casos a considerar:

I. ρ_1 é o próprio τ_1 .

- (1) Então τ_2 é ρ_2 .
- (2) E portanto, como $s_{I_p}(\rho_1)$ é igual a $s_{I_p}(\rho_2)$, inferimos que $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $s_{I_p}(\tau_2)$.

II. ρ_1 não é τ_1 .

- (1) Então, uma vez que τ_1 é do tipo $\phi_i^n \tau'_1 \dots \tau'_n$, ρ_1 ocorre em um ou mais dos pró-termos τ'_1, \dots, τ'_n .
- (2) Seja $\tau''_1, \dots, \tau''_n$ a seqüência de pró-termos obtida a partir de τ'_1, \dots, τ'_n e tal que $\phi_i^n \tau''_1 \dots \tau''_n$ é τ_2 .
- (3) Então, para todo $j, 1 \leq j \leq n$, τ''_j ou é τ'_j ou resulta de τ'_j por substituição de uma ou mais ocorrências de ρ_1 por ocorrências de ρ_2 .
- (4) Mas se τ''_j é τ'_j , então evidentemente $s_{I_p}(\tau''_j)$ é igual a $s_{I_p}(\tau'_j)$.

- (5) E se τ''_j resulta de τ'_j por substituição de uma ou mais ocorrências de ρ_1 por ocorrências de ρ_2 , então, pela hipótese indutiva, também podemos afirmar que $s_{I_p}(\tau''_j)$ é igual a $s_{I_p}(\tau'_j)$, dado que τ'_j tem complexidade menor que m .
- (6) Logo, para todo j , $1 \leq j \leq n$, temos que $s_{I_p}(\tau''_j)$ é igual a $s_{I_p}(\tau'_j)$.
- (7) Ora, pela definição da função preenchimento, sabemos:
- que $s_{I_p}(\tau_1)$ é $I_p(\varphi_1^n)[s_{I_p}(\tau'_1), \dots, s_{I_p}(\tau'_n)]$, se, para j , $1 \leq j \leq n$, $s_{I_p}(\tau'_j) \in |A|$ e,
 - caso contrário, que $s_{I_p}(\tau_1)$ é a questão de ${}^?I_p$.
- (8) Então, de (6) e (7), podemos concluir que:
- $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $I_p(\varphi_1^n)[s_{I_p}(\tau''_1), \dots, s_{I_p}(\tau''_n)]$, se, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $s_{I_p}(\tau''_j) \in |A|$ e,
 - caso contrário, que $s_{I_p}(\tau_1)$ é a questão de ${}^?I_p$.
- (9) Portanto, pela definição da função preenchimento, inferimos que $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $s_{I_p}(\tau_2)$.

3.4.24) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretação formada pelo par $\langle {}^?I, I_p \rangle$ de L' numa estrutura A e s uma sobrevaloração em A com respeito a ${}^?I_p$. Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados; e α e β pró-sentenças. Então, se $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $s_{I_p}(\tau_2)$ e β resulta de α por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 , $s \text{ sat}^?_{I_p} \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}^?_{I_p} \beta$.

Demonstração:

Por indução na complexidade m de α .

Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados tais que $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $s_{I_p}(\tau_2)$. Sejam α e β pró-sentenças tais que β resulta de α por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 .

Base: $m=0$

Temos dois casos a considerar:

I. α é do tipo $\tau'_1 = \tau'_2$.

- Então ρ_1 ocorre em τ'_1 ou em τ'_2 .
- Sejam τ''_1 e τ''_2 os pró-termos obtidos a partir de τ'_1 e τ'_2 tais que $\tau''_1 = \tau''_2$ é β .
- Então, para $j \in \{1, 2\}$, τ''_j ou é τ'_j ou resulta de τ'_j por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 .
- Se τ''_j é o próprio τ'_j , então é evidente que $s_{I_p}(\tau''_j)$ é igual a $s_{I_p}(\tau'_j)$.
- E se τ''_j resulta de τ'_j por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 , então, pela propriedade 3.4.23, também podemos concluir que $s_{I_p}(\tau''_j)$ é igual a $s_{I_p}(\tau'_j)$.
- Logo, para $j \in \{1, 2\}$, $s_{I_p}(\tau''_j)$ é igual a $s_{I_p}(\tau'_j)$.

- (7) Mas como, pela definição de satisfação, sabemos que $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \alpha$ se, e somente se, o par $\langle s_{\text{Ip}}(\tau'_1), s_{\text{Ip}}(\tau'_2) \rangle$ pertence à relação de identidade definida em A, de (6) podemos afirmar que $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \alpha$ se, e somente se, o par $\langle s_{\text{Ip}}(\tau''_1), s_{\text{Ip}}(\tau''_2) \rangle$ pertence à relação de identidade definida em A.
- (8) Portanto, pela definição de satisfação, inferimos que $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \beta$.

II. α é do tipo $\pi_i^n \tau'_1 \dots \tau'_n$.

- (1) Então ρ_1 ocorre em um ou mais dos pró-termos τ'_1, \dots, τ'_n .
- (2) Seja $\tau''_1, \dots, \tau''_n$ a seqüência de pró-termos obtida a partir de τ'_1, \dots, τ'_n e tal que $\pi_i^n \tau''_1 \dots \tau''_n$ é β .
- (3) Então, para todo j , $1 \leq j \leq n$, τ''_j ou é τ'_j ou resulta de τ'_j por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 .
- (4) Se τ''_j é τ'_j , então é evidente que $s_{\text{Ip}}(\tau''_j)$ é igual a $s_{\text{Ip}}(\tau'_j)$.
- (5) E se τ''_j resulta de τ'_j por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 , então, pela propriedade 3.4.23, também podemos concluir que $s_{\text{Ip}}(\tau''_j)$ é igual a $s_{\text{Ip}}(\tau'_j)$.
- (6) Logo, para todo j , $1 \leq j \leq n$, temos que $s_{\text{Ip}}(\tau''_j)$ é igual a $s_{\text{Ip}}(\tau'_j)$.
- (7) Mas como, pela definição de satisfação, sabemos que $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \alpha$ se, e somente se, $\langle s_{\text{Ip}}(\tau'_1), \dots, s_{\text{Ip}}(\tau'_n) \rangle \in I_{\text{p}}(\pi_i^n)$, de (6) podemos afirmar que $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \alpha$ se, e somente se, $\langle s_{\text{Ip}}(\tau''_1), \dots, s_{\text{Ip}}(\tau''_n) \rangle \in I_{\text{p}}(\pi_i^n)$.
- (8) Portanto, pela definição de satisfação, inferimos que $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? \beta$.

Passo indutivo: $0 < r < m$

Hipótese indutiva: Se $^?I_p$, s° , τ_1° e τ_2° são tais que $s^\circ_{\text{Ip}^\circ}(\tau_1^\circ)$ é igual a $s^\circ_{\text{Ip}^\circ}(\tau_2^\circ)$ e se α° é uma pró-sentença de complexidade r e β° uma pró-sentença uma que resulta de α° por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 , então: $s^\circ \text{ sat}_{\text{Ip}^\circ}^? \alpha^\circ$ se, e somente se, $s^\circ \text{ sat}_{\text{Ip}^\circ}^? \beta^\circ$.

Mostremos agora que, para uma pró-sentença α de complexidade m , essa propriedade se mantém.

Temos os seguintes casos a considerar:

I. α é uma pró-sentença molecular.

Então α possui essa propriedade em decorrência da hipótese indutiva e do comportamento booleano dos conectivos.

II. α é do tipo $^? \forall \xi \alpha_1$.

- (1) Então, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{\text{Ip}}^? ^? \forall \xi \alpha_1$ se, e somente se, todas as sobrevalorações ξ -variantes de s normais em ξ satisfazem α_1 segundo $^?I_p$.
- (2) Seja β_1 a pró-fórmula que resulta de α_1 por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 e é tal que $^? \exists \xi \beta_1$ é β .

- (3) Pela hipótese indutiva, podemos então afirmar que uma sobrevaloração ξ -variante de s normal em ξ satisfaz α_1 segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, também satisfaz β_1 segundo ${}^?I_p$.
- (4) E assim, de (1) inferimos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \ulcorner \forall \xi \alpha_1 \urcorner$ se, e somente se, todas as sobrevalorações ξ -variantes de s normais em ξ satisfazem β_1 segundo ${}^?I_p$.
- (5) Portanto, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta$.

III. α é do tipo $\ulcorner \exists \xi \alpha_1 \urcorner$.

- (1) Então, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \ulcorner \exists \xi \alpha_1 \urcorner$ se, e somente se, alguma sobrevaloração ξ -variante de s satisfaz α_1 segundo ${}^?I_p$.
- (2) Seja β_1 a pró-fórmula que resulta de α_1 por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 e é tal que $\ulcorner \exists \xi \beta_1 \urcorner$ é β .
- (3) Pela hipótese indutiva, podemos então afirmar que uma sobrevaloração ξ -variante de s satisfaz α_1 segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, também satisfaz β_1 segundo ${}^?I_p$.
- (4) E assim, de (1) inferimos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \ulcorner \exists \xi \alpha_1 \urcorner$ se, e somente se, alguma sobrevaloração ξ -variante de s satisfaz β_1 segundo ${}^?I_p$.
- (5) Portanto, pela definição de satisfação, temos que $s \text{ sat}_{I_p}^? \alpha$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta$.

3.4.25) Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados, α e β pró-sentenças e Γ_1 e Γ_2 conjuntos de pró-sentenças. Então, se $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ é pró-conseqüência lógica de Γ_1 , α é pró-conseqüência lógica de Γ_2 e β resulta de α por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 , então β é pró-conseqüência lógica de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Demonstração:

- (1) Suponhamos que τ_1 , τ_2 , α , β , Γ_1 e Γ_2 sejam tais que:
 - i) $\Gamma_1 \triangleright \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$, e
 - ii) $\Gamma_2 \triangleright \alpha$, e
 - iii) β resulta de α por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 .
- (2) Então pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar,
 - i) do item i de (1), que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ_1 também satisfaz $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$, e
 - ii) do item ii de (1), que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ_2 satisfaz também α .
- (3) Suponhamos agora, por absurdo, que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \not\triangleright \beta$.

- (4) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s que, segundo alguma pró-interpretação ${}^?I_p$,
- i) satisfaz cada uma das pró-sentenças de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$
 - ii) mas não satisfaz β .
- (5) Dos itens i de (2) e (4), inferimos então que $s \text{ sat}^?_{I_p} \lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil$.
- (6) E, dos itens ii de (2) e i de (4), que $s \text{ sat}^?_{I_p} \alpha$.
- (7) Assim, de (5), pela definição de satisfação, podemos afirmar que $s_{I_p}(\tau_1)$ é igual a $s_{I_p}(\tau_2)$.
- (8) E, do item iii de (1), de (6) e de (7), pela propriedade 3.4.24, temos que $s \text{ sat}^?_{I_p} \beta$. Contradição com o item ii de (4).
- (9) Portanto, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \triangleright \beta$.

3.4.26) Seja α uma pró-sentença e Γ um conjunto de pró-sentenças. Então α é pró-conseqüência lógica de Γ somente se, para qualquer conjunto de pró-sentenças Γ^* (possivelmente infinito) tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, α é pró-conseqüência lógica de Γ^* .

Demonstração:

- (1) Sejam α e Γ tais que $\Gamma \triangleright \alpha$.
- (2) Seja Γ^* um conjunto de pró-sentenças tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.
- (3) E suponhamos, por absurdo, $\Gamma^* \not\triangleright \alpha$.
- (4) Então, pela definição de pró-conseqüência, podemos afirmar:
 - i) de (1), que, em cada pró-interpretação, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ também satisfaz α e
 - ii) de (3), que existe uma sobrevaloração s que, segundo alguma pró-interpretação ${}^?I_p$, satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ^* mas não satisfaz α .
- (5) Ora, como todas as pró-sentenças de Γ são também pró-sentenças de Γ^* , do item ii de (4) podemos inferir que existe uma sobrevaloração s que, segundo uma pró-interpretação ${}^?I_p$, satisfaz cada uma das pró-sentenças de Γ mas não satisfaz α . Contradição com o item i de (4)!
- (6) Portanto, $\Gamma^* \triangleright \alpha$.

3.5) Um sistema dedutivo S para Q_{1p}

Uma *pró-dedução* no sistema dedutivo S para Q_{1p} é uma seqüência finita de linhas l_1, l_2, \dots, l_n construída segundo as regras abaixo apresentadas e tal que cada linha l_i , $1 \leq i \leq n$, tem o formato $\mu (i) \alpha$; onde:

- i é o número natural que identifica a linha (chamado *número de linha*);
- α é uma pró-sentença (chamada *afirmação da linha i*);
- μ é um conjunto cujos elementos são números de linha não superiores a i (chamado *conjunto das dívidas da linha i*).

Seja D uma pró-dedução com $j-1$ linhas, $j \geq 1$. Então podemos construir uma pró-dedução D' a partir de D acrescentando:

pela regra P, a linha $\{j\} (j) \alpha$, onde α é uma pró-sentença qualquer; ou

pela regra Ax_1 , a linha $\{j\} (j) \alpha$, se α é a pró-sentença ' $a=a$ '; ou

pela regra Ax_2 , a linha $\{j\} (j) \ulcorner \alpha \rightarrow \xi = \xi \urcorner$, se ξ é um parâmetro que ocorre numa pró-sentença atômica α ; ou

pela regra T, a linha $\mu_1 \cup \dots \cup \mu_n (j) \beta$, se β é uma pró-sentença que é conseqüência tautológica de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e se ocorrem em D n linhas $\mu_1 (i_1) \alpha_1, \dots, \mu_n (i_n) \alpha_n$; ou

pela regra C, a linha $\mu (j) \ulcorner \beta \rightarrow \alpha \urcorner$, se ocorrem em D as linhas $\{i_1\} (i_1) \beta$ e $\mu \cup \{i_1\} (i_2) \alpha$; ou

pela regra IU, • a linha $\mu (j) \alpha^{\$/\tau}$, se ocorre em D a linha $\mu (i) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$ e τ é um pró-termo restrito fechado qualquer, ou

- a linha $\mu \cup \mu_1 \cup \dots \cup \mu_n (j) \alpha^{\$/\tau}$, se ocorrem em D as linhas $\mu (i) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$, $\mu_1 (i_1) \ulcorner \xi_1 = \xi_1 \urcorner, \dots, \mu_n (i_n) \ulcorner \xi_n = \xi_n \urcorner$, τ é um pró-termo fechado qualquer e ξ_1, \dots, ξ_n são os parâmetros que ocorrem em τ ; ou

pela regra GU, a linha $\mu (j) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$, se ocorre em D a linha $\mu (i) \alpha^{\$/\sigma}$ e σ é um pronome que não ocorre nem em α nem nas pró-sentenças mencionadas em μ ; ou

pela regra IE, a linha $\mu_1 \cup \mu_3 (j) \beta$, se ocorrem em D as linhas $\mu_1 (i_1) \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$, $\{i_2\} (i_2) \alpha^{\$/\xi}$ e $\mu_3 \cup \{i_2\} (i_3) \beta$ e se ξ é um parâmetro que não ocorre nem em α , nem em β e nem nas pró-sentenças mencionadas em μ_3 ; ou

pela regra GE, a linha $\mu (j) \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$, se ocorre em D a linha $\mu (i) \alpha^{\$/\tau}$ e τ é um pró-termo fechado; ou

pela regra E, a linha $\mu (j) \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$, se ocorre em D a linha $\mu (i) \ulcorner \neg \forall \xi \neg \alpha \urcorner$; ou

pela regra I, a linha $\mu_1 \cup \mu_2 (j) \beta$, se ocorrem em D as linhas $\mu_1 (i_1) \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ e $\mu_2 (i_2) \alpha$, e se τ_1 e τ_2 são pró-termos fechados e β resulta de α por substituição de uma ou mais ocorrências de τ_1 por ocorrências de τ_2 .

Se uma pró-sentença β é a afirmação de uma linha j numa pró-dedução e j pertence ao conjunto μ das dívidas de uma linha i dessa mesma pró-dedução, dizemos que β é *mencionada em* μ .

Dizemos que uma pró-sentença α é *pró-dedutível* de um conjunto de pró-sentenças Γ — em símbolos, $\Gamma \Vdash \alpha$ —, se existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ (i) α e todas as pró-sentenças mencionadas em μ pertencem a Γ .

3.6) Conjuntos saturados, completos e pró-completos.

Passemos à análise de algumas das propriedades da lógica Q_{1p} com respeito ao sistema dedutivo S.

Um conjunto Δ de pró-sentenças é um *conjunto α -saturado* — sendo α uma pró-sentença qualquer — se, e somente se, $\Delta \nVdash \alpha$ e, para qualquer pró-sentença β , se $\beta \notin \Delta$, então $\Delta \cup \{\beta\} \Vdash \alpha$.

Um conjunto Δ de pró-sentenças é um *conjunto completo* se, e somente se, para cada pró-sentença α do tipo $\exists \xi (\xi = \xi \wedge \alpha_1)$, se $\alpha \in \Delta$, então, para algum nome c , $\alpha_1^s/c \in \Delta$.

Um conjunto Δ de pró-sentenças é um *conjunto pró-completo* se, e somente se, para cada pró-sentença α do tipo $\exists \xi \alpha_1$, se $\alpha \in \Delta$, então, para algum pronome σ , $\alpha_1^s/\sigma \in \Delta$.

Teorema 1:

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado e β uma pró-sentença qualquer. Então $\beta \in \Delta$ se, e somente se, $\Delta \Vdash \beta$.

Demonstração:

I) ida

(1) Suponhamos que $\beta \in \Delta$.

(2) Então, pela regra P, podemos construir a seguinte pró-dedução:

{1} (1) β .

(3) E, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que $\Delta \Vdash \beta$.

II) volta

(1) Suponhamos que $\Delta \Vdash \beta$.

(2) Então, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{1\Delta}$ (i₁) β , onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ .

(3) Suponhamos agora, por absurdo, que $\beta \notin \Delta$.

(4) Então, do fato de que Δ é α -saturado, podemos afirmar:

i) tanto que $\Delta \nVdash \alpha$,

ii) quanto que $\Delta \cup \{\beta\} \Vdash \alpha$.

(5) Do item ii de (4), temos então, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{2\Delta} \cup \mu_\beta$ (i₂) α , onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ , e a mencionada em μ_β é β .

(6) Mas, se isso se dá, de (2) e (5), contraditoriamente ao item i de (4), podemos afirmar que $\Delta \Vdash \alpha$, pois a tais pró-deduções de β e α poderíamos acrescentar duas linhas e obter uma pró-dedução para α a partir de Δ , tal como se segue:

	⋮		
$\mu_{1\Delta}$	(i ₁)	β	
	⋮		
$\mu_{2\Delta} \cup \mu_{\beta}$	(j)	α	[onde j é i ₁ +i ₂]
$\mu_{2\Delta}$	(j+1)	$\lceil \beta \rightarrow \alpha \rceil$	j/C
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta}$	(j+2)	α	i ₁ , j+1/T

(7) Logo, $\beta \in \Delta$.

Teorema 2:

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado e β_1 e β_2 pró-sentenças quaisquer. Então:

- 2.1) $\beta_1 \in \Delta$ se, e somente se, $\lceil \neg \beta_1 \rceil \notin \Delta$;
- 2.2) $\lceil (\beta_1 \wedge \beta_2) \rceil \in \Delta$ se, e somente se, $\beta_1 \in \Delta$ e $\beta_2 \in \Delta$;
- 2.3) $\lceil (\beta_1 \vee \beta_2) \rceil \in \Delta$ se, e somente se, $\beta_1 \in \Delta$ ou $\beta_2 \in \Delta$;
- 2.4) $\lceil (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \rceil \in \Delta$ se, e somente se, ou $\beta_1 \notin \Delta$ ou $\beta_2 \in \Delta$;
- 2.5) $\lceil (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \rceil \in \Delta$ se, e somente se, ou β_1 e β_2 pertencem a Δ ou β_1 e β_2 não pertencem a Δ .

Demonstração:

- De 2.1:

I) ida

- (1) Suponhamos que $\beta_1 \in \Delta$.
- (2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \beta_1$.
- (3) E por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{1\Delta}$ (i₁) β_1 , onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ .
- (4) Suponhamos agora, por absurdo, que $\lceil \neg \beta_1 \rceil \in \Delta$.
- (5) Então temos, pelo teorema 1 novamente, que $\Delta \Vdash \lceil \neg \beta_1 \rceil$.
- (6) E, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{2\Delta}$ (i₂) $\lceil \neg \beta_1 \rceil$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ .
- (7) Mas, se isso se dá, de (3) e (6) podemos afirmar que $\Delta \Vdash \alpha$, pois poderíamos justapor tais pró-deduções de β_1 e $\lceil \neg \beta_1 \rceil$ e acrescentar três linhas, obtendo uma pró-dedução para α a partir de Δ , tal como se segue:

	⋮		
$\mu_{1\Delta}$	(i ₁)	β_1	
	⋮		
$\mu_{2\Delta}$	(j)	$\lceil \neg \beta_1 \rceil$	[onde j é i ₁ +i ₂]
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta}$	(j+1)	$\lceil (\beta_1 \wedge \neg \beta_1) \rceil$	i ₁ , j/T
{ }	(j+2)	$\lceil ((\beta_1 \wedge \neg \beta_1) \rightarrow \alpha) \rceil$	/T
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta}$	(j+3)	α	j+1, j+2/T

(8) Δ , no entanto, é um conjunto α -saturado; por conseguinte, $\Delta \not\models \alpha$. Contradição com (7)!

(9) Logo, $\lceil \neg\beta_1 \rceil \notin \Delta$.

II) volta

(1) Suponhamos que $\lceil \neg\beta_1 \rceil \notin \Delta$.

(2) Então, dado que Δ é α -saturado, podemos afirmar:

i) que $\Delta \not\models \alpha$ e

ii) que $\Delta \cup \{\beta_1\} \models \alpha$.

(3) Pela definição de pró-dedutível, temos então, do item ii de (2), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{1\Delta} \cup \mu_{\neg\beta_1} (i_1) \alpha$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ , e a mencionada em $\mu_{\neg\beta_1}$ é $\lceil \neg\beta_1 \rceil$.

(4) Suponhamos agora, por absurdo, que $\beta_1 \notin \Delta$.

(5) Então, dado que Δ é α -saturado, podemos também afirmar que $\Delta \cup \{\beta_1\} \models \alpha$.

(6) E, novamente pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{2\Delta} \cup \mu_{\beta_1} (i_2) \alpha$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ , e a mencionada em μ_{β_1} é β_1 .

(7) Mas, se isso se dá, de (3) e (6), contraditoriamente ao item i de (2), podemos afirmar que $\Delta \models \alpha$, pois poderíamos justapor tais pró-deduções de α e acrescentar quatro linhas, obtendo uma pró-dedução para α a partir de Δ , tal como se segue:

	\vdots		
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{\neg\beta_1}$	(i ₁)	α	
	\vdots		
$\mu_{2\Delta} \cup \mu_{\beta_1}$	(j)	α	[onde $j \in i_1 + i_2$]
$\mu_{1\Delta}$	(j+1)	$\lceil \neg\beta_1 \rightarrow \alpha \rceil$	i ₁ /C
$\mu_{2\Delta}$	(j+2)	$\lceil \beta_1 \rightarrow \alpha \rceil$	j/C
{ }	(j+3)	$\lceil (\beta_1 \vee \neg\beta_1) \rceil$	/T
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta}$	(j+4)	α	j+1, j+2, j+3/T

(8) Logo, $\beta_1 \in \Delta$.

▪ De 2.2:

I) ida

(1) Suponhamos que $\lceil (\beta_1 \wedge \beta_2) \rceil \in \Delta$.

(2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \models \lceil (\beta_1 \wedge \beta_2) \rceil$.

(3) E por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{\Delta} (i) \lceil (\beta_1 \wedge \beta_2) \rceil$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{Δ} pertencem a Δ .

(4) Mas, se isso se dá, $\Delta \models \beta_1$ e $\Delta \models \beta_2$, pois a tal pró-dedução de $\lceil (\beta_1 \wedge \beta_2) \rceil$ poderíamos acrescentar duas linhas tal como se segue e obter uma pró-dedução para β_1 e para β_2 :

	\vdots		
μ_{Δ}	(i)	$\lceil (\beta_1 \wedge \beta_2) \rceil$	
μ_{Δ}	(i+1)	β_1	i/T
μ_{Δ}	(i+2)	β_2	i/T

(5) Logo, novamente pelo teorema 1, temos tanto que $\beta_1 \in \Delta$ quanto que $\beta_2 \in \Delta$.

II) volta

(1) Suponhamos que $\beta_1 \in \Delta$ e $\beta_2 \in \Delta$.

(2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que:

i) $\Delta \Vdash \beta_1$ e

ii) $\Delta \Vdash \beta_2$.

(3) Por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, inferimos:

i) do item i de (2), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma

$\mu_{1\Delta} (i_1) \beta_1$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ ; e

ii) do item ii de (2), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma

$\mu_{2\Delta} (i_2) \beta_2$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ .

(4) Mas, se isso se dá, $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \wedge \beta_2) \urcorner$, pois poderíamos justapor tais pró-deduções de β_1 e β_2 e acrescentar uma linha, obtendo uma pró-dedução para $\ulcorner (\beta_1 \wedge \beta_2) \urcorner$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcccl}
 & & \vdots & & \\
 & \mu_{1\Delta} & (i_1) & \beta_1 & \\
 & & \vdots & & \\
 & \mu_{2\Delta} & (j) & \beta_2 & \text{[onde } j \text{ é } i_1+i_2\text{]} \\
 \mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta} & (j+1) & \ulcorner (\beta_1 \wedge \beta_2) \urcorner & & i_1, j/T
 \end{array}$$

(5) Logo, novamente pelo teorema 1, temos que $\ulcorner (\beta_1 \wedge \beta_2) \urcorner \in \Delta$.

▪ De 2.3:

I) ida

(1) Suponhamos que $\ulcorner (\beta_1 \vee \beta_2) \urcorner \in \Delta$.

(2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \vee \beta_2) \urcorner$.

(3) E por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{1\Delta} (i_1) \ulcorner (\beta_1 \vee \beta_2) \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ .

(4) Suponhamos agora, por absurdo, que nem $\beta_1 \in \Delta$, nem $\beta_2 \in \Delta$.

(5) Então temos, pelo teorema 2.1, que $\ulcorner \neg \beta_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \neg \beta_2 \urcorner \in \Delta$.

(6) E, pelo teorema 1, que:

i) $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$ e

ii) $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$.

(7) Por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, inferimos:

i) do item i de (6), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{2\Delta} (i_2) \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ ; e

ii) do item ii de (6), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{3\Delta} (i_3) \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{3\Delta}$ pertencem a Δ .

- (8) Mas, se isso se dá, $\Delta \Vdash \alpha$, pois poderíamos justapor tais pró-deduções de $\lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$, $\lceil\neg\beta_1\rceil$ e $\lceil\neg\beta_2\rceil$ e acrescentar cinco linhas, obtendo uma pró-dedução para α , tal como se segue:

	\vdots		
$\mu_{1\Delta}$	(i)	$\lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$	
	\vdots		
$\mu_{2\Delta}$	(i)	$\lceil\neg\beta_1\rceil$	[onde i é i_1+i_2]
	\vdots		
$\mu_{3\Delta}$	(j)	$\lceil\neg\beta_2\rceil$	[onde j é $i+i_3$]
$\mu_{1\Delta}$	(j+1)	$\lceil\neg\beta_1 \rightarrow \beta_2\rceil$	i_1/T
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta}$	(j+2)	β_2	$i, j+1/T$
μ_{Δ}	(j+3)	$\lceil\neg\beta_2 \wedge \beta_2\rceil$	$j, j+2/T$ [onde μ_{Δ} é $\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta} \cup \mu_{3\Delta}$]
{ }	(j+4)	$\lceil(\neg\beta_2 \wedge \beta_2) \rightarrow \alpha\rceil$	$/T$
μ_{Δ}	(j+5)	α	$j+3, j+4/T$

- (9) Δ , no entanto, é um conjunto α -saturado; por conseguinte, $\Delta \nVdash \alpha$. Contradição com (8)!

- (10) Logo, ou $\beta_1 \in \Delta$, ou $\beta_2 \in \Delta$.

II) volta

- (1) Suponhamos que ou $\beta_1 \in \Delta$, ou $\beta_2 \in \Delta$.
(2) Então, pelo teorema 1, inferimos que ou $\Delta \Vdash \beta_1$, ou $\Delta \Vdash \beta_2$.
(3) Suponhamos, inicialmente, que $\Delta \Vdash \beta_1$.
(4) Então podemos afirmar, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{\Delta} (i) \beta_1$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{Δ} pertencem a Δ .
(5) E, por conseguinte, que $\Delta \Vdash \lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$, pois a tal pró-dedução de β_1 poderíamos acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$, tal como se segue:

	\vdots		
μ_{Δ}	(i)	β_1	
μ_{Δ}	(i+1)	$\lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$	i/T

- (6) Suponhamos, agora, que $\Delta \Vdash \beta_2$.
(7) Então podemos afirmar, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{\Delta} (i) \beta_2$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{Δ} pertencem a Δ .
(8) E, por conseguinte, que $\Delta \Vdash \lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$, pois a tal pró-dedução de β_2 poderíamos acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$, tal como se segue:

	\vdots		
μ_{Δ}	(i)	β_2	
μ_{Δ}	(i+1)	$\lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$	i/T

- (9) Logo, de (2), (5) e (8), inferimos que $\Delta \Vdash \lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil$.
(10) E, pelo teorema 1 novamente, que $\lceil(\beta_1 \vee \beta_2)\rceil \in \Delta$.

- De 2.4:

I) ida

- (1) Suponhamos que $\lceil(\beta_1 \rightarrow \beta_2)\rceil \in \Delta$.
(2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \lceil(\beta_1 \rightarrow \beta_2)\rceil$.

- (3) E, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{1\Delta} (i_1) \ulcorner \beta_1 \rightarrow \beta_2 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ .
- (4) Suponhamos agora, por absurdo, que nem $\beta_1 \in \Delta$, nem $\beta_2 \in \Delta$.
- (5) Então temos, pelo teorema 2.1, que $\beta_1 \in \Delta$ e $\ulcorner \neg \beta_2 \urcorner \in \Delta$.
- (6) E, pelo teorema 1, que:
- i) $\Delta \Vdash \beta_1$ e
 - ii) $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$.
- (7) Por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, inferimos:
- i) do item i de (6), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{2\Delta} (i_2) \beta_1$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ ; e
 - ii) do item ii de (6), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{3\Delta} (i_3) \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{3\Delta}$ pertencem a Δ .
- (8) Mas, se isso se dá, $\Delta \Vdash \alpha$, pois poderíamos justapor tais pró-deduções de $\ulcorner \beta_1 \rightarrow \beta_2 \urcorner$, β_1 e $\ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$ e acrescentar quatro linhas, obtendo uma pró-dedução para α , tal como se segue:

	⋮		
$\mu_{1\Delta}$	(i ₁)	$\ulcorner \beta_1 \rightarrow \beta_2 \urcorner$	
	⋮		
$\mu_{2\Delta}$	(i)	β_1	[onde i é i ₁ +i ₂]
	⋮		
$\mu_{3\Delta}$	(j)	$\ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$	[onde j é i+i ₃]
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta}$	(j+1)	β_2	i ₁ , i/T
μ_{Δ}	(j+2)	$\ulcorner \neg \beta_2 \wedge \beta_2 \urcorner$	j, j+1/T [onde μ_{Δ} é $\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta} \cup \mu_{3\Delta}$]
{ }	(j+3)	$\ulcorner ((\neg \beta_2 \wedge \beta_2) \rightarrow \alpha) \urcorner$	/T
μ_{Δ}	(j+4)	α	j+2, j+3/T

- (9) Δ , no entanto, é um conjunto α -saturado; por conseguinte, $\Delta \nVdash \alpha$. Contradição com (8)!

- (10) Logo, ou $\beta_1 \in \Delta$ ou $\beta_2 \in \Delta$.

II) volta

- (1) Suponhamos que ou $\beta_1 \notin \Delta$, ou $\beta_2 \in \Delta$.
- (2) Então podemos afirmar, pela propriedade 2.1, que ou $\ulcorner \neg \beta_1 \urcorner \in \Delta$, ou $\beta_2 \in \Delta$.
- (3) E, pela propriedade 1, que:
- i) ou $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$,
 - ii) ou $\Delta \Vdash \beta_2$.
- (4) Suponhamos, primeiramente, que $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$.
- (5) Então podemos afirmar, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{\Delta} (i) \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{Δ} pertencem a Δ .

- (6) E, por conseguinte, que $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner$, pois a tal pró-dedução de $\ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$ poderíamos acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcll} & \vdots & & \\ \mu_\Delta & (i) & \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner & \\ \mu_\Delta & (i+1) & \ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner & i/T \end{array}$$

- (7) Suponhamos, agora, que $\Delta \Vdash \beta_2$.
 (8) Então podemos afirmar, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_\Delta (i) \beta_2$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .
 (9) E, por conseguinte, que $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner$, pois a tal pró-dedução de β_2 poderíamos acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcll} & \vdots & & \\ \mu_\Delta & (i) & \beta_2 & \\ \mu_\Delta & (i+1) & \ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner & i/T \end{array}$$

- (10) Logo, de (3), (6) e (9), inferimos que $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner$.
 (11) E, pelo teorema 1 novamente, que $\ulcorner (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \urcorner \in \Delta$.

▪ De 2.5:

I) ida

- (1) Suponhamos que $\ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner \in \Delta$.
 (2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$.
 (3) E, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_\Delta (i) \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .
 (4) Mas, se isso se dá, então $\Delta \Vdash \ulcorner ((\beta_1 \wedge \beta_2) \vee (\neg \beta_1 \wedge \neg \beta_2)) \urcorner$, pois a tal pró-dedução de $\ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$ poderíamos acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\ulcorner ((\beta_1 \wedge \beta_2) \vee (\neg \beta_1 \wedge \neg \beta_2)) \urcorner$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcll} & \vdots & & \\ \mu_\Delta & (i) & \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner & \\ \mu_\Delta & (i+1) & \ulcorner ((\beta_1 \wedge \beta_2) \vee (\neg \beta_1 \wedge \neg \beta_2)) \urcorner & i/T \end{array}$$

- (5) Logo, pelo teorema 1 novamente, podemos afirmar que $\ulcorner ((\beta_1 \wedge \beta_2) \vee (\neg \beta_1 \wedge \neg \beta_2)) \urcorner \in \Delta$.
 (6) E, pelos teoremas 2.1, 2.2 e 2.3, que ou β_1 e β_2 pertencem a Δ ou β_1 e β_2 não pertencem a Δ .

II) volta

- (1) Suponhamos que ou β_1 e β_2 pertencem a Δ ou β_1 e β_2 não pertencem a Δ .
 (2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que:
 i) ou $\Delta \Vdash \beta_1$ e $\Delta \Vdash \beta_2$,
 ii) ou $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$ e $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$.
 (3) Suponhamos, primeiramente, que $\Delta \Vdash \beta_1$ e $\Delta \Vdash \beta_2$.

(4) Então, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar:

i) que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{1\Delta} (i_1) \beta_1$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ ; e

ii) que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{2\Delta} (i_2) \beta_2$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ .

(5) Por conseguinte, $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$, pois poderíamos justapor tais pró-deduções de β_1 e β_2 e acrescentar uma linha, obtendo uma pró-dedução para $\ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcll} \mu_{1\Delta} & (i_1) & \beta_1 & \\ & \vdots & & \\ \mu_{2\Delta} & (j) & \beta_2 & \text{[onde } j \text{ é } i_1+i_2\text{]} \\ \mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta} & (j+1) & \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner & i_1, j/T \end{array}$$

(6) Suponhamos, agora, que $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$ e $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$.

(7) Então, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar:

i) que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{1\Delta} (i_1) \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ pertencem a Δ ; e

ii) que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{2\Delta} (i_2) \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ .

(8) Por conseguinte, $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$, pois poderíamos justapor tais pró-deduções de $\ulcorner \neg \beta_1 \urcorner$ e $\ulcorner \neg \beta_2 \urcorner$ e acrescentar três linhas, obtendo uma pró-dedução para $\ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcll} \mu_{1\Delta} & (i_1) & \ulcorner \neg \beta_1 \urcorner & \\ & \vdots & & \\ \mu_{2\Delta} & (j) & \ulcorner \neg \beta_2 \urcorner & \text{[onde } j \text{ é } i_1+i_2\text{]} \\ \mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta} & (j+1) & \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner & i_1, j/T \end{array}$$

(9) Logo, de (2), (5) e (8), inferimos que $\Delta \Vdash \ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner$.

(10) E, pelo teorema 1, que $\ulcorner (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \urcorner \in \Delta$.

Teorema 3:

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado e completo. Então a pró-sentença $\ulcorner \forall \xi \beta \urcorner$ pertence a Δ se, e somente se, para cada nome c , a pró-sentença β^s/c pertence a Δ .

Demonstração:

I) ida

(1) Suponhamos que $\ulcorner \forall \xi \beta \urcorner \in \Delta$.

(2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \ulcorner \forall \xi \beta \urcorner$.

(3) E, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{\Delta} (i) \ulcorner \forall \xi \beta \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{Δ} pertencem a Δ .

- (4) Mas, se isso se dá, então, para qualquer nome c , $\Delta \Vdash \beta^s/c$, pois à pró-dedução de $\ulcorner \forall \xi \beta \urcorner$ poderíamos acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para β^s/c , tal como se segue:

	⋮		
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \forall \xi \beta \urcorner$	
μ_Δ	(i+1)	β^s/c	i/IU

- (5) Logo, pelo teorema 1, temos que, para cada nome c , $\beta^s/c \in \Delta$.

II) volta

- (1) Suponhamos que, para todo nome c , $\beta^s/c \in \Delta$.
(2) Suponhamos também, por absurdo, que $\ulcorner \forall \xi \beta \urcorner \notin \Delta$.
(3) Então podemos afirmar, de (2), pelo teorema 2.1, que $\ulcorner \neg \forall \xi \beta \urcorner \in \Delta$.
(4) E, por conseguinte, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \ulcorner \neg \forall \xi \beta \urcorner$.
(5) Pela definição de pró-dedutível, temos então que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ_Δ (i) $\ulcorner \neg \forall \xi \beta \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .
(6) E assim, podemos afirmar que $\Delta \Vdash \ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner$, pois a tal pró-dedução de $\ulcorner \neg \forall \xi \beta \urcorner$ poderíamos acrescentar 13 linhas, tal como se segue, e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner$:

	⋮		
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \neg \forall \xi \beta \urcorner$	
{i+1}	(i+1)	$\ulcorner \neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner$	/P
{i+2}	(i+2)	$\ulcorner \neg \forall \xi \neg (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner$	/P
{i+2}	(i+3)	$\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner$	i+2/E
{}	(i+4)	$\ulcorner (\neg \forall \xi \neg (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \rightarrow \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta)) \urcorner$	i+2, i+3/C
{i+1}	(i+5)	$\ulcorner \forall \xi \neg (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner$	i+1, i+4/T
{i+1}	(i+6)	$\ulcorner \neg (c=c \wedge \neg \beta^s/c) \urcorner$	i+5/IU [onde c é um nome que não ocorre em β]
{}	(i+7)	$a=a$	/Ax ₁
{}	(i+8)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	i+7/GU
{}	(i+9)	$\ulcorner c=c \urcorner$	i+8/IU
{i+1}	(i+10)	β^s/c	i+6, i+9/T
{i+1}	(i+11)	$\ulcorner \forall \xi \beta \urcorner$	i+10/GU
{}	(i+12)	$\ulcorner (\neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \rightarrow \forall \xi \beta) \urcorner$	i+1, i+11/C
μ_Δ	(i+13)	$\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner$	i, i+12/T

- (7) Pelo teorema 1, inferimos então que $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \beta) \urcorner \in \Delta$.
(8) E, dado que Δ é completo, que $\ulcorner \neg \beta^s/c \urcorner \in \Delta$, para algum nome c .
(9) Ora, pelo teorema 2.1, temos então que, para algum nome c , $\beta^s/c \notin \Delta$; contradição com (1)!
(10) Logo, $\ulcorner \forall \xi \beta \urcorner \in \Delta$.

Teorema 4:

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado e pró-completo. Então a pró-sentença $\lceil \exists \xi \beta \rceil$ pertence Δ se, e somente se, para algum pronome σ , a pró-sentença β^s/σ pertence Δ .

Demonstração:

I) ida

(1) Suponhamos que $\lceil \exists \xi \beta \rceil \in \Delta$.

(2) Então, como Δ é pró-completo, para algum pronome σ , a pró-sentença $\beta^s/\sigma \in \Delta$.

II) volta

(1) Suponhamos que, para algum pronome σ , a pró-sentença $\beta^s/\sigma \in \Delta$.

(2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \beta^s/\sigma$.

(3) E, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ_Δ (i) β^s/σ , onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .

(4) Mas, se isso se dá, então $\Delta \Vdash \lceil \exists \xi \beta \rceil$, pois a tal pró-dedução de β^s/σ poderíamos acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\lceil \exists \xi \beta \rceil$, tal como se segue:

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \mu_\Delta & (i) & \beta^s/\sigma \\ \mu_\Delta & (i+1) & \lceil \exists \xi \beta \rceil \quad i/GE \end{array}$$

(5) Logo, pelo teorema 1 novamente, inferimos que $\lceil \exists \xi \beta \rceil \in \Delta$.

Teorema 5:

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado, completo e pró-completo. Então:

5.1) para todo pró-termo restrito fechado τ , $\lceil \tau = \tau \rceil \in \Delta$; e

5.2) para qualquer pró-termo fechado τ , se $\lceil \tau = \tau \rceil \in \Delta$, então existe um nome c tal que $\lceil \tau = c \rceil \in \Delta$; e

5.3) para qualquer pró-termo fechado τ , se $\lceil \tau = \tau \rceil \notin \Delta$, então existe um parâmetro ξ tal que $\lceil \xi = \xi \rceil \notin \Delta$; e

5.4) para quaisquer pró-termos fechados τ_1 e τ_2 , se $\lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil \in \Delta$, então $\lceil \tau_1 = \tau_1 \rceil \in \Delta$ e $\lceil \tau_2 = \tau_2 \rceil \in \Delta$; e

5.5) para quaisquer pró-termos fechados τ_1 e τ_2 , se $\lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil \in \Delta$, então $\lceil \tau_2 = \tau_1 \rceil \in \Delta$; e

5.6) para quaisquer pró-termos fechados τ_1, \dots, τ_n , se, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\lceil \tau_j = \tau_j \rceil \in \Delta$, então existe um nome c tal que $\lceil \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = c \rceil \in \Delta$, qualquer que seja o símbolo funcional φ_i^n ; e

5.7) para quaisquer pró-termos fechados τ e τ_s , se τ_s é um sub-pró-termo de τ e $\lceil \tau_s = \tau_s \rceil \notin \Delta$, então $\lceil \tau = \tau \rceil \notin \Delta$.

Demonstração:

▪ De 5.1:

- (1) Seja τ um pró-termo restrito fechado qualquer.
- (2) Então o seguinte esquema de pró-dedução mostra-nos que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau = \tau \urcorner$.

{ }	(1)	$a = a$	$/Ax_1$
{ }	(2)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	$1/GU$
{ }	(3)	$\ulcorner \tau = \tau \urcorner$	$2/\Pi U$

- (3) Por conseguinte, podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \in \Delta$.
- (4) E, portanto, para todo pró-termo restrito fechado τ , temos que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \in \Delta$.

▪ De 5.2:

- (1) Seja τ um pró-termo fechado tal que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \in \Delta$.
- (2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau = \tau \urcorner$.
- (3) E, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ_Δ (i) $\ulcorner \tau = \tau \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .
- (4) Por conseguinte, $\Delta \Vdash \ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \tau = \xi) \urcorner$, pois à essa pró-dedução de $\ulcorner \tau = \tau \urcorner$ poderíamos acrescentar duas linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \tau = \xi) \urcorner$, tal como se segue:

	\vdots		
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \tau = \tau \urcorner$	
μ_Δ	(i+1)	$\ulcorner (\tau = \tau \wedge \tau = \tau) \urcorner$	i/T
μ_Δ	(i+2)	$\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \tau = \xi) \urcorner$	$i+1/GE$

- (5) Logo, pelo teorema 1, podemos afirmar que $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \tau = \xi) \urcorner \in \Delta$.
- (6) E, como Δ é um conjunto completo, inferimos que, para algum nome c , $\ulcorner \tau = c \urcorner \in \Delta$.

▪ De 5.3:

- (1) Seja τ um pró-termo fechado tal que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta$.
- (2) Então podemos afirmar, pelo teorema 5.1, que τ não é um pró-termo restrito.
- (3) Sejam ξ_1, \dots, ξ_n os parâmetros que ocorrem em τ .
- (4) E suponhamos, por absurdo, que não exista nenhum parâmetro ξ tal que $\ulcorner \xi = \xi \urcorner \notin \Delta$.
- (5) Então, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner \in \Delta$.
- (6) Pelo teorema 1 temos então que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\Delta \Vdash \ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$.
- (7) Logo, pela definição de pró-dedutível, inferimos que existem pró-deduções contendo linhas da forma $\mu_{1\Delta}$ (i₁) $\ulcorner \xi_1 = \xi_1 \urcorner, \dots, \mu_{n\Delta}$ (i_n) $\ulcorner \xi_n = \xi_n \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}, \dots, \mu_{n\Delta}$ pertencem a Δ .

- (8) Por conseguinte, $\Delta \Vdash \ulcorner \tau = \tau \urcorner$, pois poderíamos justapor essas pró-deduções de $\ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$, para $1 \leq j \leq n$, e acrescentar três linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau = \tau \urcorner$, tal como se segue:

	⋮		
$\mu_{1\Delta}$	(i ₁)	$\ulcorner \xi_1 = \xi_1 \urcorner$	
	⋮		
$\mu_{2\Delta}$	(j ₂)	$\ulcorner \xi_2 = \xi_2 \urcorner$	[onde j ₂ é i ₁ +i ₂]
	⋮		
$\mu_{n\Delta}$	(j _n)	$\ulcorner \xi_n = \xi_n \urcorner$	[onde j _n é i ₁ +...+i _n]
	{ }	(j _n +1) a=a	/Ax ₁
	{ }	(j _n +2) $\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	j _n +1/GU
$\mu_{1\Delta} \cup \dots \cup \mu_{n\Delta}$	(j _n +3)	$\ulcorner \tau = \tau \urcorner$	i ₁ , j ₂ , ..., j _n , j _n +2/TU

- (9) Pelo teorema 1, podemos então afirmar que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \in \Delta$. Contradição com 1!

- (10) Portanto, se $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta$, então existe um parâmetro ξ tal que $\ulcorner \xi = \xi \urcorner \notin \Delta$.

▪ De 5.4:

- (1) Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados tais que $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.
(2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$.
(3) E, pela definição de pró-dedutível, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ_Δ (i) $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .

- (4) Temos então três casos a considerar:

- i) τ_1 e τ_2 são ambos pró-termos restritos;
- ii) nem τ_1 nem τ_2 são pró-termos restritos; e
- iii) um dos pró-termos é restrito, mas o outro não.

- (5) Suponhamos, primeiramente, que tanto τ_1 quanto τ_2 sejam restritos.

- (6) Então podemos afirmar, pelo teorema 5.1, que $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.

- (7) Logo, se τ_1 e τ_2 são ambos pró-termos restritos, então $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.

- (8) Suponhamos, agora, que nem τ_1 nem τ_2 são restritos.

- (9) Sejam ξ_1, \dots, ξ_n os parâmetros que ocorrem em τ_1 ou em τ_2 .

- (10) Então, de (3), inferimos que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner$ e $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner$, pois à pró-dedução de $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ poderíamos acrescentar $2n+4$ linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner$, tal como se segue:

	⋮		
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$	
{ }	(i+1)	$\ulcorner (\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \xi_1 = \xi_1) \urcorner$	/Ax ₂
	⋮		
{ }	(i+n)	$\ulcorner (\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \xi_n = \xi_n) \urcorner$	/Ax ₂
μ_Δ	(j ₁)	$\ulcorner \xi_1 = \xi_1 \urcorner$	i, i+1/T [onde j ₁ é i+n+1]
	⋮		
μ_Δ	(j ₁ +n)	$\ulcorner \xi_n = \xi_n \urcorner$	i, i+n/T
{ }	(j ₂)	a=a	/Ax ₁ [onde j ₂ é j ₁ +n+1]
{ }	(j ₂ +1)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	j ₂ /GU
μ_Δ	(j ₂ +2)	$\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner$	j ₁ , ..., j ₁ +n, j ₂ +1/TU
μ_Δ	(j ₂ +3)	$\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner$	j ₁ , ..., j ₁ +n, j ₂ +1/TU

- (11) Por conseguinte, podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.

- (12) Logo, se nem τ_1 nem τ_2 são pró-termos restritos, então $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.

- (13) Suponhamos, finalmente, que um dos pró-termos é restrito e o outro não.
- (14) Façamos com que τ_p seja τ_1 , se τ_1 não é restrito; caso contrário, façamos com que τ_p seja τ_2 .
- (15) Sejam ξ_1, \dots, ξ_n os parâmetros que ocorrem em τ_p .
- (16) Então, de (3), inferimos que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner$ e $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner$, pois à pró-dedução de $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ poderíamos acrescentar $2n+4$ linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner$, tal como se segue:

\vdots			
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$	
{}	(i+1)	$\ulcorner (\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \xi_1 = \xi_1) \urcorner$	/Ax ₂
	\vdots		
{}	(i+n)	$\ulcorner (\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \xi_n = \xi_n) \urcorner$	/Ax ₂
μ_Δ	(j ₁)	$\ulcorner \xi_1 = \xi_1 \urcorner$	i, i+1/T [onde j ₁ é i+n+1]
	\vdots		
μ_Δ	(j ₁ +n)	$\ulcorner \xi_n = \xi_n \urcorner$	i, i+n/T
{}	(j ₂)	$a=a$	/Ax ₁ [onde j ₂ é j ₁ +n+1]
{}	(j ₂ +1)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	j ₂ /GU
{}	(j ₂ +2)	$\ulcorner \tau_r = \tau_r \urcorner$	j ₂ +1/IU [onde τ_r é τ_2 , se τ_p é τ_1 ; caso contrário, τ_r é τ_1]
μ_Δ	(j ₂ +3)	$\ulcorner \tau_p = \tau_p \urcorner$	j ₁ , ..., j ₁ +n, j ₂ +1/IU

- (17) Por conseguinte, podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.
- (18) Logo, se um dos pró-termos é restrito e o outro não, então $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.
- (19) Portanto, de (4), (7), (12) e (18), inferimos que $\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$ e $\ulcorner \tau_2 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.

▪ De 5.5:

- (1) Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados tais que $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.
- (2) Então podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$.
- (3) E, pela definição de pró-dedução, que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ_Δ (i) $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .
- (4) Temos então dois casos a considerar:
- i) τ_1 é um pró-termo restrito; e
 - ii) τ_1 não é restrito.
- (5) Suponhamos que τ_1 é um pró-termo restrito.
- (6) Então $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner$, pois à pró-dedução de $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ poderíamos acrescentar quatro linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner$, tal como se segue:

\vdots			
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$	
{}	(i+1)	$a=a$	/Ax ₁
{}	(i+2)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	i+1/GU
{}	(i+3)	$\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner$	i+2/IU
μ_Δ	(i+4)	$\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner$	i, i+3/I

- (7) Por conseguinte, podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$.
- (8) Logo, se τ_1 é um pró-termo restrito, $\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$.
- (9) Suponhamos, agora, que τ_1 não é restrito.
- (10) Sejam ξ_1, \dots, ξ_n os parâmetros que ocorrem em τ_1 .

(11) Então $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner$, pois a tal pró-dedução de $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ poderíamos acrescentar $2n+4$ linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner$, tal como se segue:

\vdots			
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$	
{}	(i+1)	$\ulcorner (\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \xi_1 = \xi_1) \urcorner$	/Ax ₂
	\vdots		
{}	(i+n)	$\ulcorner (\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \xi_n = \xi_n) \urcorner$	/Ax ₂
μ_Δ	(j ₁)	$\ulcorner \xi_1 = \xi_1 \urcorner$	i, i+1/T [onde j ₁ é i+n+1]
	\vdots		
μ_Δ	(j ₁ +n)	$\ulcorner \xi_n = \xi_n \urcorner$	i, i+n/T
{}	(j ₂)	a=a	/Ax ₁ [onde j ₂ é j ₁ +n+1]
{}	(j ₂ +1)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	j ₂ /GU
μ_Δ	(j ₂ +2)	$\ulcorner \tau_1 = \tau_1 \urcorner$	j ₁ , ..., j ₁ +n, j ₂ +1/IU
μ_Δ	(j ₂ +3)	$\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner$	i, j ₂ +2/I

(12) Por conseguinte, podemos afirmar, pelo teorema 1, que $\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$.

(13) Logo, se τ_1 não é restrito, então $\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$.

(14) Portanto, de (4), (8) e (13), inferimos que $\ulcorner \tau_2 = \tau_1 \urcorner \in \Delta$.

▪ De 5.6:

(1) Sejam τ_1, \dots, τ_n pró-termos fechados tais que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner \in \Delta$.

(2) Então, pelo teorema 5.2, podemos afirmar que, para cada j , $1 \leq j \leq n$, existe um nome c_j^* tal que $\ulcorner \tau_j = c_j^* \urcorner \in \Delta$.

(3) Logo, temos, para todo j , $1 \leq j \leq n$:

i) pelo teorema 5.4, que $\ulcorner c_j^* = c_j^* \urcorner \in \Delta$; e

ii) pelo teorema 5.5, que $\ulcorner c_j^* = \tau_j \urcorner \in \Delta$.

(4) Pelo teorema 1, inferimos então que, para todo j , $1 \leq j \leq n$:

i) $\Delta \Vdash \ulcorner c_j^* = c_j^* \urcorner$; e

ii) $\Delta \Vdash \ulcorner c_j^* = \tau_j \urcorner$.

(5) Por conseguinte, pela definição de pró-dedução, podemos afirmar que existem pró-deduções contendo linhas da forma $\mu_{1\Delta}(i_1) \ulcorner c_1^* = c_1^* \urcorner, \dots, \mu_{n\Delta}(i_n) \ulcorner c_n^* = c_n^* \urcorner, \mu_{n+1\Delta}(i_{n+1}) \ulcorner c_1^* = \tau_1 \urcorner, \dots, \mu_{2n\Delta}(i_{2n}) \ulcorner c_n^* = \tau_n \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em cada $\mu_{h\Delta}$, para $1 \leq h \leq 2n$, pertencem a Δ .

(6) Então, qualquer que seja o símbolo funcional φ_i^n , $\Delta \Vdash \ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = \xi) \urcorner$, pois podemos justapor as pró-deduções de $\ulcorner c_j^* = c_j^* \urcorner$ e de $\ulcorner c_j^* = \tau_j \urcorner$, para $1 \leq j \leq n$, e acrescentar seis linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = \xi) \urcorner$, tal como se segue:

$\mu_{1\Delta}$	\vdots	(i_1)	$\ulcorner c_1^* = c_1^* \urcorner$	
	\vdots			
$\mu_{2\Delta}$	\vdots	(i'_2)	$\ulcorner c_2^* = c_2^* \urcorner$	[onde i'_1 é $i_1 + i_2$]
	\vdots			
$\mu_{n\Delta}$	\vdots	(i'_n)	$\ulcorner c_n^* = c_n^* \urcorner$	[onde i'_n é $i_1 + \dots + i_n$]
	\vdots			
$\mu_{n+1\Delta}$	\vdots	(i'_{n+1})	$\ulcorner c_1^* = \tau_1 \urcorner$	[onde i'_{n+1} é $i_1 + \dots + i_{n+1}$]
	\vdots			
$\mu_{n+2\Delta}$	\vdots	(i'_{n+2})	$\ulcorner c_2^* = \tau_2 \urcorner$	[onde i'_{n+2} é $i_1 + \dots + i_{n+2}$]
	\vdots			
$\mu_{2n\Delta}$	\vdots	(i'_{2n})	$\ulcorner c_n^* = \tau_n \urcorner$	[onde i'_{2n} é $i_1 + \dots + i_{2n}$]
{ }	{ }	(j)	$a = a$	/Ax ₁ [onde j é i'_{2n+1}]
{ }	{ }	(j+1)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	j/GU
$\mu_{1\Delta} \cup \dots \cup \mu_{n\Delta}$		(j+2)	$\ulcorner \varphi_i^n c_1 \dots c_n = \varphi_i^n c_1^* \dots c_n^* \urcorner$	$i_1, i'_2, \dots, i'_n, j+1/\text{I}$
$\mu_{1\Delta} \cup \dots \cup \mu_{2n\Delta}$		(j+3)	$\ulcorner \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n \urcorner$	$i'_{n+1}, \dots, i'_{2n}, j+2/\text{I}$
$\mu_{1\Delta} \cup \dots \cup \mu_{2n\Delta}$		(j+4)	$\ulcorner (\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n \wedge \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n) \urcorner$	j+3/T
$\mu_{1\Delta} \cup \dots \cup \mu_{2n\Delta}$		(j+5)	$\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = \xi) \urcorner$	j+4/GE

(7) Pelo teorema 1, temos então que $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = \xi) \urcorner \in \Delta$.

(8) E, como Δ é completo, podemos afirmar que, para algum nome c , $\ulcorner \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = c \urcorner \in \Delta$.

(9) Portanto, inferimos que, se τ_1, \dots, τ_n são pró-termos fechados tais que, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner \in \Delta$, então existe um nome c tal que $\ulcorner \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = c \urcorner \in \Delta$, qualquer que seja φ_i^n .

▪ De 5.7:

Por indução na complexidade m de τ .

Sejam τ e τ_s pró-termos fechados tais que τ_s é um sub-pró-termo de τ e $\ulcorner \tau_s = \tau_s \urcorner \notin \Delta$.

Base: $m=0$

Obs: τ não pode ser um nome, pois, se o fosse, τ_s teria de ser o próprio τ (o único sub-pró-termo de τ que existiria) e, pelo teorema 5.1, teríamos que $\ulcorner \tau_s = \tau_s \urcorner \in \Delta$, contrariamente à nossa hipótese.

(1) Então τ é um parâmetro.

(2) E τ_s é o próprio τ , uma vez que τ é o único sub-pró-termo de τ que, neste caso, existe.

(3) Portanto, $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta$.

Passo indutivo: $0 < r < m$

Hipótese indutiva: Para quaisquer pró-termos fechados τ° de complexidade r e τ_s° tais que τ_s° é um sub-pró-termo de τ° , se $\ulcorner \tau_s^\circ = \tau_s^\circ \urcorner \notin \Delta$, então $\ulcorner \tau^\circ = \tau^\circ \urcorner \notin \Delta$.

Mostremos agora que, para um pró-termo τ de complexidade m , essa propriedade se mantém.

- (1) τ é então do tipo $\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$.
- (2) E τ_s é ou o próprio τ ou um sub-pró-termo de algum τ_j , para $1 \leq j \leq n$.
- (3) Suponhamos, primeiro, que τ_s é o próprio τ .
- (4) Então, como $\ulcorner \tau_s = \tau_s \urcorner \notin \Delta$, também $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta$.
- (5) Suponhamos, agora, que τ_s é um sub-pró-termo de algum τ_j , para $1 \leq j \leq n$.
- (6) Então, como τ_j tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, podemos inferir que $\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner \notin \Delta$.
- (7) Sejam ξ_1, \dots, ξ_p os parâmetros que ocorram em τ .
- (8) E suponhamos, por absurdo, que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \in \Delta$.
- (9) Então, pelo teorema 1, temos que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau = \tau \urcorner$.
- (10) Assim, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ_Δ (i) $\ulcorner \tau = \tau \urcorner$, onde as pró-sentenças mencionadas em μ_Δ pertencem a Δ .
- (11) Logo, $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner$, pois poderíamos acrescentar $2n+3$ linhas à pró-dedução de $\ulcorner \tau = \tau \urcorner$ e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner$, tal como se segue:

\vdots			
μ_Δ	(i)	$\ulcorner \tau = \tau \urcorner$	
{}	(i+1)	$\ulcorner (\tau = \tau \rightarrow \xi_1 = \xi_1) \urcorner$	/Ax ₂
	\vdots		
{}	(i+n)	$\ulcorner (\tau = \tau \rightarrow \xi_p = \xi_p) \urcorner$	/Ax ₂
μ_Δ	(j ₁)	$\ulcorner \xi_1 = \xi_1 \urcorner$	$i, i+1/T$ [onde j_1 é $i+n+1$]
	\vdots		
μ_Δ	(j ₁ +n)	$\ulcorner \xi_p = \xi_p \urcorner$	$i, i+n/T$
{}	(j ₂)	$a = a$	/Ax ₁ [onde j_2 é j_1+n+1]
{}	(j ₂ +1)	$\ulcorner \forall \xi \xi = \xi \urcorner$	j_2/GU
μ_Δ	(j ₂ +2)	$\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner$	$j_1, \dots, j_1+n, j_2+1/IU^{13}$

- (12) Por conseguinte, pelo teorema 1, podemos afirmar que $\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner \in \Delta$.

Contradição com (6)!

- (13) Logo, se τ_s é um sub-pró-termo de algum τ_j , para $1 \leq j \leq n$, $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta$.
- (14) Portanto, de (2), (4) e (13), inferimos que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta$.

Apresentamos, a seguir, algumas definições necessárias para a formulação de dois lemas que nos auxiliarão na demonstração do próximo teorema.

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado, completo e pró-completo.

Chamamos então \mathbb{T} ao conjunto dos pró-termos fechados de Q_{1p} ;

$\mathbb{T}^?$ ao conjunto $\{\tau \in \mathbb{T} \mid \ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta\}$; e

\mathbb{T}^- ao conjunto $\mathbb{T} - \mathbb{T}^?$.¹⁴

¹³ Uma vez que ξ_1, \dots, ξ_p são todos os parâmetros que ocorram em τ e que τ_j é um sub-pró-termo de τ , qualquer parâmetro que ocorra em τ_j é um dos ξ_1, \dots, ξ_p .

Definimos, para cada $\tau \in \mathbb{T}$, a função τ_Δ , como se segue:

- i) se $\tau \in \mathbb{T}^-$, τ_Δ é o primeiro nome c , na ordem alfabética dos nomes, tal que $\ulcorner \tau = c \urcorner \in \Delta$;
- ii) se $\tau \in \mathbb{T}^?$, τ_Δ é o primeiro parâmetro ξ , na ordem alfabética dos parâmetros, tal que $\xi \in \mathbb{T}^?$.¹⁵

Chamamos U_Δ ao conjunto $\{\tau \in \mathbb{T} \mid \text{para algum } \tau' \in \mathbb{T}^-, \tau \text{ é } \tau'_\Delta\}$;

$=_{U_\Delta}$ à relação $\{\langle \tau, \tau \rangle \mid \tau \in U_\Delta\}$; e

X_Δ ao conjunto $\{\xi \in \mathbb{T} \mid \text{para algum } \tau \in \mathbb{T}^?, \xi \text{ é } \tau_\Delta\}$.¹⁶

Definimos o objeto $?_\Delta$, tal como se segue:

- i) se $\mathbb{T}^?$ não é vazio, então $?_\Delta$ é o único elemento de X_Δ ; e
- ii) se $\mathbb{T}^?$ é vazio, então $?_\Delta$ é o nome 'a'.

Definimos, para cada símbolo funcional ϕ_i^n de L , a operação $\phi_i^n[U_\Delta]: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}$, tal como se segue:

- se, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\tau_j \in \mathbb{T}^-$ e se, para algum nome c , $\ulcorner \phi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = c \urcorner \in \Delta$ ¹⁷, então $\phi_i^n[U_\Delta](\tau_1, \dots, \tau_n)$ é c_Δ ; e
- se, para algum j , $1 \leq j \leq n$, $\tau_j \in \mathbb{T}^?$, então $\phi_i^n[U_\Delta](\tau_1, \dots, \tau_n)$ é $?_\Delta$.

Definimos também, para cada predicado π_i^n de L , a relação $\pi_i^n[U_\Delta]$, tal como se segue:

$\pi_i^n[U_\Delta]$ é o conjunto $\{\langle \tau_{1\Delta}, \dots, \tau_{n\Delta} \rangle \in U_\Delta^n \mid \pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n \in \Delta\}$.

¹⁴ Notemos que, se ξ é um parâmetro, ξ pode pertencer a \mathbb{T}^- ou a $\mathbb{T}^?$; e também que $\mathbb{T}^?$ pode ser vazio. Além disso, a partir do teorema 5.1, podemos afirmar que, para todo pró-termo restrito e fechado τ , $\tau \in \mathbb{T}^-$.

¹⁵ Notemos que:

- i) se $\tau \in \mathbb{T}^-$, então podemos afirmar, pela definição de \mathbb{T}^- , que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \in \Delta$ e, pelo teorema 5.2, que existe um nome c tal que $\ulcorner \tau = c \urcorner \in \Delta$; e
- ii) se $\mathbb{T}^?$ não é vazio, podemos afirmar, pelo teorema 5.3, que existe um parâmetro ξ tal que $\ulcorner \xi = \xi \urcorner \in \Delta$.

¹⁶ Notemos que:

i) U_Δ não é vazio, pois

- (1) $\ulcorner a = a \urcorner \in \Delta$
- (2) 'a' é o primeiro nome da ordem alfabética dos nomes, e,
- (3) por conseguinte, a_Δ é 'a'.

ii) os elementos de U_Δ são todos nomes de L , pois qualquer que seja $\tau \in \mathbb{T}^-$, τ_Δ é um nome;

iii) uma ordem para U_Δ pode ser induzida a partir da ordem alfabética dos nomes de L ; e

iv) X_Δ tem, no máximo, um elemento, pois, para quaisquer dois pró-termos τ_1 e τ_2 pertencentes a $\mathbb{T}^?$, $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ são um mesmo parâmetro (a saber, o primeiro da ordem alfabética dos parâmetros pertencentes a $\mathbb{T}^?$).

¹⁷ Notemos que o teorema 5.6 nos assegura que há um nome c tal que $\ulcorner \phi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = c \urcorner \in \Delta$, qualquer que seja ϕ_i^n , se τ_1, \dots, τ_n são pró-termos fechados tais que, para qualquer j , $1 \leq j \leq n$, $\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner \in \Delta$.

(7) Logo, $\Delta \Vdash \tau_1=c_2$ e $\Delta \Vdash \tau_2=c_1$, pois poderíamos justapor as pró-deduções de $\tau_1=\tau_2$, $\tau_1=c_1$ e $\tau_2=c_2$, acrescentar duas linhas e obter uma pró-dedução para $\tau_1=c_2$ e $\tau_2=c_1$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcll}
 & \vdots & & \\
 \mu_{1\Delta} & (i_1) & \tau_1=\tau_2 & \\
 & \vdots & & \\
 \mu_{2\Delta} & (j) & \tau_1=c_1 & \text{[onde } j \text{ é } i_1+i_2\text{]} \\
 & \vdots & & \\
 \mu_{3\Delta} & (l) & \tau_2=c_2 & \text{[onde } l \text{ é } j+i_3\text{]} \\
 \mu_{1\Delta} \cup \mu_{3\Delta} & (l+1) & \tau_1=c_2 & i_1, l/l \\
 \mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta} & (l+2) & \tau_2=c_1 & i_1, j/l
 \end{array}$$

(8) Assim, pelo teorema 1, podemos afirmar que $\tau_1=c_2$ e $\tau_2=c_1$ também pertencem a Δ .

(9) Suponhamos agora, por absurdo, que c_1 não é o mesmo nome que c_2 .

(10) Então, ou c_1 precede c_2 na ordem alfabética dos nomes, ou é c_2 que precede c_1 .

(11) Ora, se c_1 precede c_2 na ordem alfabética dos nomes, então, pela definição, $\tau_{2\Delta}$ não é o nome c_2 , dado que, de (8), podemos afirmar a existência de um nome c_1 anterior a c_2 nessa ordem e tal que $\tau_2=c_1 \in \Delta$. Contradição com o item ii de (4)!

(12) E, se c_2 precede c_1 na ordem alfabética dos nomes, então, pela definição, $\tau_{1\Delta}$ não é o nome c_1 , dado que, de (8), podemos afirmar a existência de um nome c_2 anterior a c_1 nessa ordem e tal que $\tau_1=c_2 \in \Delta$. Contradição com o item i de (4)!

(13) Logo, c_1 é o mesmo nome que c_2 .

(14) E, portanto, se τ_1 e τ_2 são pró-termos fechados tais que $\tau_1=\tau_2 \in \Delta$, podemos inferir que $\tau_{1\Delta}$ é o mesmo nome que $\tau_{2\Delta}$.

II) volta

(1) Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados tais que $\tau_{1\Delta}$ é o mesmo nome que $\tau_{2\Delta}$.

(2) Seja c o nome que $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ são.

(3) Então, pela definição de $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$, temos que¹⁹:

i) c é o primeiro nome, na ordem alfabética dos nomes, tal que $\tau_1=c \in \Delta$;

ii) c é o primeiro nome, na ordem alfabética dos nomes, tal que $\tau_2=c \in \Delta$.

(4) Assim, pelo teorema 5.5, do item ii de (3), inferimos que $c=\tau_2 \in \Delta$.

(5) Pelo teorema 1, podemos então afirmar:

i) do item i de (3), que $\Delta \Vdash \tau_1=c$, e

ii) de (4), que $\Delta \Vdash c=\tau_2$.

(6) Por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existem pró-deduções contendo linhas da forma $\mu_{1\Delta} (i_1) \tau_1=c$ e $\mu_{2\Delta} (i_2) c=\tau_2$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ e $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ .

¹⁹ Se $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ são um pró-termo restrito, nem τ_1 nem τ_2 pertencem a $\mathbb{T}^?$; pois, caso contrário, $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ seriam um parâmetro.

(7) Logo, $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_1=c_2 \urcorner$ e $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_2=c_1 \urcorner$, pois poderíamos justapor as pró-deduções de $\ulcorner \tau_1=\tau_2 \urcorner$, $\ulcorner \tau_1=c_1 \urcorner$ e $\ulcorner \tau_2=c_2 \urcorner$, acrescentar duas linhas e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau_1=c_2 \urcorner$ e $\ulcorner \tau_2=c_1 \urcorner$, tal como se segue:

	\vdots		
$\mu_{1\Delta}$	(i ₁)	$\ulcorner \tau_1=\tau_2 \urcorner$	
	\vdots		
$\mu_{2\Delta}$	(j)	$\ulcorner \tau_1=c_1 \urcorner$	[onde j é i ₁ +i ₂]
	\vdots		
$\mu_{3\Delta}$	(l)	$\ulcorner \tau_2=c_2 \urcorner$	[onde l é j+i ₃]
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{3\Delta}$	(l+1)	$\ulcorner \tau_1=c_2 \urcorner$	i ₁ , l/I
$\mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta}$	(l+2)	$\ulcorner \tau_2=c_1 \urcorner$	i ₁ , j/I

(8) Assim, pelo teorema 1, podemos afirmar que $\ulcorner \tau_1=c_2 \urcorner$ e $\ulcorner \tau_2=c_1 \urcorner$ também pertencem a Δ .

(9) Suponhamos agora, por absurdo, que c_1 não é o mesmo nome que c_2 .

(10) Então, ou c_1 precede c_2 na ordem alfabética dos nomes, ou é c_2 que precede c_1 .

(11) Ora, se c_1 precede c_2 na ordem alfabética dos nomes, então, pela definição, $\tau_{2\Delta}$ não é o nome c_2 , dado que, de (8), podemos afirmar a existência de um nome c_1 anterior a c_2 nessa ordem e tal que $\ulcorner \tau_2=c_1 \urcorner \in \Delta$. Contradição com o item ii de (4)!

(12) E, se c_2 precede c_1 na ordem alfabética dos nomes, então, pela definição, $\tau_{1\Delta}$ não é o nome c_1 , dado que, de (8), podemos afirmar a existência de um nome c_2 anterior a c_1 nessa ordem e tal que $\ulcorner \tau_1=c_2 \urcorner \in \Delta$. Contradição com o item i de (4)!

(13) Logo, c_1 é o mesmo nome que c_2 .

(14) E, portanto, se τ_1 e τ_2 são pró-termos fechados tais que $\ulcorner \tau_1=\tau_2 \urcorner \in \Delta$, podemos inferir que $\tau_{1\Delta}$ é o mesmo nome que $\tau_{2\Delta}$.

II) volta

(1) Sejam τ_1 e τ_2 pró-termos fechados tais que $\tau_{1\Delta}$ é o mesmo nome que $\tau_{2\Delta}$.

(2) Seja c o nome que $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ são.

(3) Então, pela definição de $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$, temos que¹⁹:

i) c é o primeiro nome, na ordem alfabética dos nomes, tal que $\ulcorner \tau_1=c \urcorner \in \Delta$;

ii) c é o primeiro nome, na ordem alfabética dos nomes, tal que $\ulcorner \tau_2=c \urcorner \in \Delta$.

(4) Assim, pelo teorema 5.5, do item ii de (3), inferimos que $\ulcorner c=\tau_2 \urcorner \in \Delta$.

(5) Pelo teorema 1, podemos então afirmar:

i) do item i de (3), que $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_1=c \urcorner$, e

ii) de (4), que $\Delta \Vdash \ulcorner c=\tau_2 \urcorner$.

(6) Por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existem pró-deduções contendo linhas da forma $\mu_{1\Delta}$ (i₁) $\ulcorner \tau_1=c \urcorner$ e $\mu_{2\Delta}$ (i₂) $\ulcorner c=\tau_2 \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}$ e $\mu_{2\Delta}$ pertencem a Δ .

¹⁹ Se $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ são um pró-termo restrito, nem τ_1 nem τ_2 pertencem a $\mathbb{T}^?$; pois, caso contrário, $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ seriam um parâmetro.

(7) Logo, $\Delta \Vdash \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$, pois poderíamos justapor as pró-deduções de $\ulcorner \tau_1 = c \urcorner$ e $\ulcorner c = \tau_2 \urcorner$, acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcccl} & \vdots & & & \\ & \mu_{1\Delta} & (i_1) & \ulcorner \tau_1 = c \urcorner & \\ & \vdots & & & \\ & \mu_{2\Delta} & (j) & \ulcorner c = \tau_2 \urcorner & \text{[onde } j \text{ é } i_1 + i_2\text{]} \\ \mu_{1\Delta} \cup \mu_{2\Delta} & (j+1) & \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner & i_1, j/I & \end{array}$$

(8) Pelo teorema 1, podemos então afirmar que $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.

(9) Portanto, se τ_1 e τ_2 são pró-termos fechados tais que $\tau_{1\Delta}$ é o mesmo nome que $\tau_{2\Delta}$, então $\ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner \in \Delta$.

Lema 2:

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado, completo e pró-completo. Seja ${}^?I_p$ a pró-interpretação canônica de Δ ; e s uma sobrevaloração qualquer com respeito a ${}^?I_p$. Então, para qualquer pró-termo fechado τ , $s_{I_p}(\tau)$ é τ_Δ .

Demonstração:

Por indução na complexidade m de τ .

Seja τ um pró-termo fechado qualquer.

Base: $m=0$

- (1) Então τ é um pronome.
- (2) Pela definição da função preenchimento, podemos então afirmar que $s_{I_p}(\tau)$ é $I_p(\tau)$.
- (3) Portanto, pela construção de ${}^?I_p$, temos que $s_{I_p}(\tau)$ é τ_Δ .

Passo indutivo: $0 < r < m$

Hipótese indutiva: Para qualquer pró-termo fechado τ° de complexidade r , $s_{I_p}(\tau^\circ)$ é τ°_Δ .

Mostremos agora que, para um pró-termo τ de complexidade m , essa propriedade se mantém.

- (1) Então τ é do tipo $\varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$.
- (2) Pela definição da função preenchimento, podemos então afirmar que:
 - i) ou $s_{I_p}(\tau)$ é $I_p(\varphi_i^n)[s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_n)]$, se, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $s_{I_p}(\tau_j) \in |A|$,
 - ii) ou $s_{I_p}(\tau)$ é $?_I$, caso contrário.
- (3) Logo, pela construção de ${}^?I_p$, inferimos que:
 - i) ou $s_{I_p}(\tau)$ é $\varphi_i^n[U_\Delta][s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_n)]$, se, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $s_{I_p}(\tau_j) \in U_\Delta$,
 - ii) ou $s_{I_p}(\tau)$ é $?_\Delta$, caso contrário.
- (4) Ora, como, para todo j , $1 \leq j \leq n$, τ_j tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, temos que:
 - i) ou $s_{I_p}(\tau)$ é $\varphi_i^n[U_\Delta](\tau_{1\Delta}, \dots, \tau_{n\Delta})$, se, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\tau_{j\Delta} \in U_\Delta$,
 - ii) ou $s_{I_p}(\tau)$ é $?_\Delta$, caso contrário.
- (5) Suponhamos, primeiro, que para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\tau_{j\Delta} \in U_\Delta$.
- (6) Então, do item i de (4), temos que $s_{I_p}(\tau)$ é $\varphi_i^n[U_\Delta](\tau_{1\Delta}, \dots, \tau_{n\Delta})$.
- (7) Seja, para cada j , $1 \leq j \leq n$, $c_j \tau_{j\Delta}$.
- (8) Então, $s_{I_p}(\tau)$ é $\varphi_i^n[U_\Delta](c_1, \dots, c_n)$.

- (9) E, pela definição da operação $\varphi_i^n[U_\Delta]$, podemos afirmar que $s_{\text{fp}}(\tau)$ é c^*_Δ , onde c^* é tal que $\ulcorner \varphi_i^n c_1 \dots c_n = c^* \urcorner \in \Delta$.
- (10) Ora, como, pela definição de $\tau_{j\Delta}$, sabemos que $\ulcorner \tau_j = c_j \urcorner \in \Delta$, pelo teorema 5.5, podemos afirmar que $\ulcorner c_j = \tau_j \urcorner \in \Delta$, para $1 \leq j \leq n$.
- (11) Por conseguinte, pelo teorema 1, temos:
- i) de (9), que $\Delta \Vdash \ulcorner \varphi_i^n c_1 \dots c_n = c^* \urcorner$, e
 - ii) de (10), que, para $1 \leq j \leq n$, $\Delta \Vdash \ulcorner c_j = \tau_j \urcorner$.
- (12) Logo, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existem pró-deduções contendo linhas da forma $\mu_{1\Delta}(i_1) \ulcorner c_1 = \tau_1 \urcorner, \dots, \mu_{n\Delta}(i_n) \ulcorner c_n = \tau_n \urcorner, \mu_{n+1\Delta}(i_{n+1}) \ulcorner \varphi_i^n c_1 \dots c_n = c^* \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em $\mu_{1\Delta}, \dots, \mu_{n+1\Delta}$ pertencem a Δ .
- (13) Mas, se isso se dá, então $\Delta \Vdash \ulcorner \tau = c^* \urcorner$, pois poderíamos justapor as pró-deduções de $\ulcorner \varphi_i^n c_1 \dots c_n = c^* \urcorner$ e $\ulcorner c_j = \tau_j \urcorner$, para $1 \leq j \leq n$, acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\ulcorner \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = c^* \urcorner$, tal como se segue:

	\vdots		
$\mu_{1\Delta}$	(i ₁)	$\ulcorner c_1 = \tau_1 \urcorner$	
	\vdots		
$\mu_{2\Delta}$	(i' ₂)	$\ulcorner c_2 = \tau_2 \urcorner$	[onde i' ₁ é i ₁ +i ₂]
	\vdots		
$\mu_{n\Delta}$	(i' _n)	$\ulcorner c_n = \tau_n \urcorner$	[onde i' _n é i ₁ +...+i _n]
	\vdots		
$\mu_{n+1\Delta}$	(i' _{n+1})	$\ulcorner \varphi_i^n c_1 \dots c_n = c^* \urcorner$	[onde i' _{n+1} é i ₁ +...+i _{n+1}]
$\mu_{1\Delta} \cup \dots \cup \mu_{n+1\Delta}$	(i' _{n+1} +1)	$\ulcorner \varphi_i^n \tau_1 \dots \tau_n = c^* \urcorner$	i ₁ , i' ₂ , ..., i' _{n+1} /I

- (14) Logo, pelo teorema 1, temos que $\ulcorner \tau = c^* \urcorner \in \Delta$.
- (15) E assim, pelo lema 1, podemos afirmar que τ_Δ é o mesmo nome que c^*_Δ .
- (16) Portanto, de (5), (9) e (15), temos que $s_{\text{fp}}(\tau)$ é τ_Δ , se, para todo j , $1 \leq j \leq n$, $\tau_{j\Delta} \in U_\Delta$.
- (17) Suponhamos, agora, que para algum j , $1 \leq j \leq n$, $\tau_{j\Delta} \notin U_\Delta$.
- (18) Então, do item ii de (4), temos que $s_{\text{fp}}(\tau)$ é $?_\Delta$.
- (19) E, da definição de U_Δ , que $\tau_{j\Delta} \in \mathbb{T}^?$.
- (20) Logo, pela definição de $\tau_{j\Delta}$, podemos afirmar que $\tau_j \in \mathbb{T}^?$; pois, caso contrário, $\tau_{j\Delta}$ seria um nome e, conseqüentemente, pertenceria a \mathbb{T}^- .
- (21) Pela definição de $\mathbb{T}^?$, temos então que $\ulcorner \tau_j = \tau_j \urcorner \notin \Delta$.
- (22) E, como τ_j é sub-pró-termo de τ , pelo teorema 5.7, inferimos que $\ulcorner \tau = \tau \urcorner \notin \Delta$ também.
- (23) Por conseguinte, $\tau \in \mathbb{T}^?$.
- (24) E, pela definição de τ_Δ , temos que τ_Δ é o primeiro parâmetro ξ , na ordem alfabética dos parâmetros, tal que $\xi \in \mathbb{T}^?$.
- (25) Pelas definições de X_Δ e de $?_\Delta$, podemos então afirmar que τ_Δ é $?_\Delta$.
- (26) Portanto, de (17), (18) e (25), temos que $s_{\text{fp}}(\tau)$ é τ_Δ , se para algum j , $1 \leq j \leq n$, $\tau_{j\Delta} \notin U_\Delta$.
- (27) Portanto, de (4), (16) e (26), inferimos que $s_{\text{fp}}(\tau)$ é τ_Δ .

Teorema 6:

Seja Δ um conjunto de pró-sentenças α -saturado, completo e pró-completo. Então existe uma pró-interpretação ${}^?I_p$ numa estrutura A tal que, para qualquer pró-sentença β , β é verdadeira segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, $\beta \in \Delta$.

Demonstração:

Por indução na complexidade m de β .

Seja ${}^?I_p$ a pró-interpretação canônica de Δ e β uma pró-sentença qualquer. Mostremos então que β é verdadeira segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, $\beta \in \Delta$.

Base: $m=0$

Então β é atômica. Temos dois casos a considerar

I. β é do tipo $\lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil$.

a) ida

- (1) Suponhamos que $\lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil$ seja verdadeira segundo ${}^?I_p$.
- (2) Então, pela definição de verdade, temos que todas as sobrevalorações satisfazem $\lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil$ segundo ${}^?I_p$.
- (3) Seja s uma sobrevaloração qualquer.
- (4) Então temos, pela definição de satisfação, que $\langle s_{I_p}(\tau_1), s_{I_p}(\tau_2) \rangle \in =_{U_A}$.
- (5) Por conseguinte, pela definição de $=_{U_A}$, podemos afirmar:
 - i) que $s_{I_p}(\tau_1)$ e $s_{I_p}(\tau_2)$ pertencem a U_A ; e
 - ii) que $s_{I_p}(\tau_1)$ e $s_{I_p}(\tau_2)$ são ambos um mesmo nome, digamos c .
- (6) De (5), pelo lema 2, temos então que τ_{1A} e τ_{2A} pertencem a U_A e são ambos o nome c .
- (7) Pela definição de τ_{1A} e τ_{2A} podemos então afirmar que:
 - i) c é o primeiro nome, na ordem alfabética dos nomes, tal que $\lceil \tau_1 = c \rceil \in \Delta$; e
 - ii) c é o primeiro nome, na ordem alfabética dos nomes, tal que $\lceil c = \tau_2 \rceil \in \Delta$.
- (8) Logo, pelo teorema 5.5, do item ii de (7) temos que $\lceil c = \tau_2 \rceil \in \Delta$.
- (9) E assim, pelo teorema 1, podemos afirmar:
 - i) do item i de (7), que $\Delta \Vdash \lceil \tau_1 = c \rceil$ e
 - ii) de (8), que $\Delta \Vdash \lceil c = \tau_2 \rceil$.
- (10) Desse modo, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existem pró-deduções contendo linhas da forma $\mu_{1A}(i_1) \lceil \tau_1 = c \rceil$ e $\mu_{2A}(i_2) \lceil c = \tau_2 \rceil$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{1A} e μ_{2A} pertencem a Δ .
- (11) Mas, se isso se dá, então $\Delta \Vdash \lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil$, pois poderíamos justapor as pró-deduções de $\lceil \tau_1 = c \rceil$ e $\lceil c = \tau_2 \rceil$, acrescentar uma linha e obter uma pró-dedução para $\lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil$, tal como se segue:

$$\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
 \mu_{1A} & (i_1) & \lceil \tau_1 = c \rceil \\
 & \vdots & \\
 \mu_{2A} & (j) & \lceil c = \tau_2 \rceil \quad [\text{onde } j \text{ é } i_1 + i_2] \\
 \mu_{1A} \cup \mu_{2A} & (j+1) & \lceil \tau_1 = \tau_2 \rceil \quad i_1, j/I
 \end{array}$$

(12) Portanto, pelo teorema 1, $\beta \in \Delta$.

b) volta

(1) Suponhamos que $\tau_1 = \tau_2 \in \Delta$.

(2) Então, pelo lema 1, podemos afirmar que $\tau_{1\Delta}$ é o mesmo nome que $\tau_{2\Delta}$.

(3) Então, como $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ são restritos, pelo teorema 5.1, podemos afirmar que

$\tau_{1\Delta} = \tau_{1\Delta} \in \Delta$ e que $\tau_{2\Delta} = \tau_{2\Delta} \in \Delta$.

(4) Logo, $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ pertencem a Γ^- .

(5) Seja c o nome que $\tau_{1\Delta}$ e $\tau_{2\Delta}$ são.

(6) Então, pela definição de U_Δ , podemos afirmar que $c \in U_\Delta$.

(7) E, pela definição de $=_{U_\Delta}$, que $\langle c, c \rangle \in =_{U_\Delta}$.

(8) Logo, de (5) e (7), inferimos que $\langle \tau_{1\Delta}, \tau_{2\Delta} \rangle \in =_{U_\Delta}$.

(9) Seja s uma sobrevaloração qualquer com respeito a ${}^?I_p$.

(10) Então, pelo lema 2, temos que $s_{I_p}(\tau_1)$ é $\tau_{1\Delta}$ e que $s_{I_p}(\tau_2)$ é $\tau_{2\Delta}$.

(11) Logo, de (8) e (10), podemos afirmar que $\langle s_{I_p}(\tau_1), s_{I_p}(\tau_2) \rangle \in =_{U_\Delta}$.

(12) Pela definição de satisfação temos então que s sat ${}^?I_p$ $\tau_1 = \tau_2$.

(13) E, como s é qualquer, podemos afirmar que qualquer sobrevaloração satisfaz $\tau_1 = \tau_2$ segundo ${}^?I_p$.

(14) Portanto, pela definição de verdade, inferimos que β é verdadeira segundo ${}^?I_p$.

II. β é do tipo $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$.

a) ida

(1) Suponhamos que $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ é verdadeira segundo ${}^?I_p$.

(2) Então, pela definição de verdade, todas as sobrevalorações satisfazem $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ segundo ${}^?I_p$.

(3) Seja s uma sobrevaloração qualquer.

(4) Então, pela definição de satisfação, temos que $\langle s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_n) \rangle \in I_p(\pi_i^n)$.

(5) E assim, pelo lema 2, podemos afirmar que $\langle \tau_{1\Delta}, \dots, \tau_{n\Delta} \rangle \in I_p(\pi_i^n)$.

(6) Pela construção de ${}^?I_p$, temos então que $\langle \tau_{1\Delta}, \dots, \tau_{n\Delta} \rangle \in \pi_i^n[U_\Delta]$.

(7) Portanto, pela definição de $\pi_i^n[U_\Delta]$, inferimos que $\beta \in \Delta$.

b) volta

(1) Suponhamos que $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n \in \Delta$.

(2) Então, pela definição de $\pi_i^n[U_\Delta]$, podemos afirmar que $\langle \tau_{1\Delta}, \dots, \tau_{n\Delta} \rangle \in \pi_i^n[U_\Delta]$.

(3) E, pela construção de ${}^?I_p$, que, $\langle \tau_{1\Delta}, \dots, \tau_{n\Delta} \rangle \in I_p(\pi_i^n)$.

(4) Seja s a sobrevaloração qualquer com respeito a ${}^?I_p$.

(5) Então, pelo lema 2, temos que $\langle s_{I_p}(\tau_1), \dots, s_{I_p}(\tau_n) \rangle \in I_p(\pi_i^n)$.

(6) Logo, pela definição de satisfação, podemos afirmar s sat ${}^?I_p$ $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$.

(7) E, como s é uma sobrevaloração qualquer, que qualquer sobrevaloração satisfaz $\pi_i^n \tau_1 \dots \tau_n$ segundo ${}^?I_p$.

(8) Portanto, pela definição de verdade, β é verdadeira segundo ${}^?I_p$.

Passo indutivo: $0 < p < m$

Hipótese indutiva: qualquer pró-sentença β° de complexidade p possui esta propriedade: β° é verdadeira segundo ${}^?I_p$ se, e somente se, $\beta^\circ \in \Delta$.

Mostremos agora que uma pró-sentença β de complexidade m também possui essa propriedade.

I. β é uma pró-sentença molecular

Então β possui essa propriedade em decorrência da hipótese indutiva e do comportamento booleano dos conectivos.

II. β é do tipo $\ulcorner \forall \xi \beta_1 \urcorner$.

a) ida

- (1) Suponhamos que $\ulcorner \forall \xi \beta_1 \urcorner$ é verdadeira segundo ${}^?I_p$.
- (2) Então, pela definição de verdade, temos que todas as sobrevalorações satisfazem $\ulcorner \forall \xi \beta_1 \urcorner$ segundo ${}^?I_p$.
- (3) Seja s uma sobrevaloração qualquer.
- (4) Então, como ${}^?I_p$ é completa, pela propriedade 3.4.11, podemos afirmar que, para todo nome c , s satisfaz β_1^s/c segundo ${}^?I_p$.
- (5) Ora, como s é uma sobrevaloração qualquer, de (4) podemos inferir que, para todo nome c , qualquer sobrevaloração satisfaz β_1^s/c segundo ${}^?I_p$.
- (6) E assim, pela definição de verdade, temos que, para qualquer nome c , β_1^s/c é verdadeira segundo ${}^?I_p$.
- (7) Logo, como β_1^s/c tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva podemos afirmar que, para qualquer nome c , $\beta_1^s/c \in \Delta$.
- (8) Portanto, pelo teorema 3, podemos afirmar que $\beta \in \Delta$.

b) volta

- (1) Suponhamos que $\ulcorner \forall \xi \beta_1 \urcorner \in \Delta$.
- (2) Então, pelo teorema 3, temos que, para cada nome c , $\beta_1^s/c \in \Delta$.
- (3) Mas, como β_1^s/c tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, podemos afirmar que, para cada nome c , β_1^s/c é verdadeira segundo ${}^?I_p$.
- (4) E, por conseguinte, pela definição de verdade, que todas as sobrevalorações satisfazem β_1^s/c segundo ${}^?I_p$, para todo nome c .
- (5) Seja s uma sobrevaloração qualquer.
- (6) Então, pela propriedade 3.4.11, podemos afirmar que s satisfaz $\ulcorner \forall \xi \beta_1 \urcorner$ segundo ${}^?I_p$.
- (7) E assim, como s é uma sobrevaloração qualquer, podemos inferir que qualquer sobrevaloração satisfaz β segundo ${}^?I_p$.
- (8) Portanto, pela definição de verdade, temos que β é verdadeira segundo ${}^?I_p$.

III. β é do tipo $\ulcorner \exists \xi \beta_1 \urcorner$.

a) ida

- (1) Suponhamos que $\ulcorner \exists \xi \beta_1 \urcorner$ é verdadeira segundo ${}^?I_p$.
- (2) Então, pela definição de verdade, podemos afirmar que todas as sobrevalorações satisfazem $\ulcorner \exists \xi \beta_1 \urcorner$ segundo ${}^?I_p$.
- (3) Seja s uma sobrevaloração qualquer.
- (4) Então, pela definição de satisfação, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração ξ -variante de s que satisfaz β_1 segundo ${}^?I_p$.
- (5) Seja s' uma tal sobrevaloração e chamemos τ a $s'_{I_p}(\xi)$.
- (6) Por definição da função preenchimento, podemos então afirmar que τ pertence ao sobredomínio de ${}^?I_p$ e, pela construção de ${}^?I_p$, que existe um pronome σ^* tal que σ^*_Δ é τ . (Obs: no sobredomínio de ${}^?I_p$ só há elementos que são valor de alguma função σ^*_Δ !)
- (7) Desse modo, como, pelo lema 2, temos que σ^*_Δ é $s_{I_p}(\sigma^*)$, de (5) e (6), podemos afirmar que $s_{I_p}(\sigma^*)$ é $s'_{I_p}(\xi)$.
- (8) E assim, pela propriedade 3.4.6, temos que $s' \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1^{\xi/\sigma^*}$.
- (9) Logo, de (5) e (8), inferimos que s satisfaz β_1^{ξ/σ^*} segundo ${}^?I_p$.
- (10) Ora, como β_1^{ξ/σ^*} é uma pró-sentença, pelo item i da propriedade 3.4.8, podemos afirmar que β_1^{ξ/σ^*} é verdadeira segundo ${}^?I_p$.
- (11) Logo, dado que β_1^{ξ/σ^*} tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, de (10) temos que $\beta_1^{\xi/\sigma^*} \in \Delta$.
- (12) Portanto, pelo teorema 4, podemos inferir que $\beta \in \Delta$.

b) volta

- (1) Suponhamos que $\ulcorner \exists \xi \beta_1 \urcorner \in \Delta$.
- (2) Então podemos afirmar, pelo teorema 4, que, para algum pronome σ , $\beta_1^{\xi/\sigma} \in \Delta$.
- (3) Logo, dado que $\beta_1^{\xi/\sigma}$ tem complexidade menor que m , pela hipótese indutiva, temos que, para algum pronome σ , $\beta_1^{\xi/\sigma}$ é verdadeira segundo ${}^?I_p$.
- (4) Pela definição de verdade, inferimos então que, para algum pronome σ , todas as sobrevalorações satisfazem $\beta_1^{\xi/\sigma}$ segundo ${}^?I_p$.
- (5) Seja s uma sobrevaloração qualquer e s' a sobrevaloração ξ -variante de s e tal que $s'_{I_p}(\xi)$ é o mesmo que $s_{I_p}(\sigma)$.
- (6) Então, pela propriedade 3.4.6, podemos afirmar que $s' \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1$ se, e somente se, $s \text{ sat}_{I_p}^? \beta_1^{\xi/\sigma}$.
- (7) Logo, s' satisfaz β_1 segundo ${}^?I_p$.
- (8) E, por conseguinte, podemos afirmar que existe pelo menos uma sobrevaloração ξ -variante de s que satisfaz β_1 segundo ${}^?I_p$.
- (9) Assim, pela definição de satisfação, inferimos que s satisfaz $\ulcorner \exists \xi \beta_1 \urcorner$ segundo ${}^?I_p$.

- (10) E, como s é qualquer sobrevaloração, temos que qualquer sobrevaloração satisfaz $\lceil \exists \beta_1 \rceil$ segundo \mathcal{I}_p .
- (11) Portanto, pela definição de verdade, temos que β é verdadeira segundo \mathcal{I}_p .

3.7) Legitimidade de Q_{1p} com respeito ao sistema dedutivo S

Lema 3:

Para toda linha da forma μ (i) α de uma pró-dedução D em S, se Γ é um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ , então α é pró-conseqüência lógica de Γ .

Demonstração:

Por indução no número i de linha.

Base: $i=1$

Temos os seguintes casos a considerar:

I. A linha i foi introduzida pela regra P .

- (1) Então i é da forma $\{1\}$ (1) α .
- (2) Seja Γ um conjunto que contém α .
- (3) Então, pela propriedade 3.4.12, podemos afirmar que $\Gamma \triangleright \alpha$.

II. A linha i foi introduzida pela regra Ax_1 .

- (1) Então i é da forma $\{\}$ (1) $a=a$.
- (2) Ora, pela propriedade 3.4.13, sabemos que $\triangleright 'a=a'$.
- (3) Seja Γ um conjunto qualquer.
- (4) Então $\{\} \subseteq \Gamma$ e, por conseguinte, pela propriedade 3.4.26, podemos afirmar que $\Gamma \triangleright 'a=a'$.

III. A linha i foi introduzida pela regra Ax_2 .

- (1) Então i é da forma $\{\}$ (1) $\lceil (\alpha_1 \rightarrow \xi = \xi) \rceil$, onde ξ é um parâmetro que ocorre na pró-sentença atômica α_1 .
- (2) Ora, pela propriedade 3.4.14, sabemos que $\triangleright \lceil (\alpha_1 \rightarrow \xi = \xi) \rceil$.
- (3) Seja Γ um conjunto qualquer.
- (4) Então $\{\} \subseteq \Gamma$ e, por conseguinte, pela propriedade 3.4.26, podemos afirmar que $\Gamma \triangleright \lceil (\alpha_1 \rightarrow \xi = \xi) \rceil$.

IV. A linha i foi introduzida pela regra T.

- (1) Então i é da forma $\{\}$ (1) α , onde α é conseqüência tautológica do vazio.
- (2) Ora, pela propriedade 3.4.15, sabemos que α é conseqüência tautológica do vazio somente se $\{\} \triangleright \alpha$.
- (3) Seja Γ um conjunto qualquer.
- (4) Então $\{\} \subseteq \Gamma$ e, por conseguinte, pela propriedade 3.4.26, podemos afirmar que $\Gamma \triangleright \alpha$.

Passo indutivo: $1 < r < i$

Hipótese indutiva: Para qualquer linha r° da forma $\mu^\circ (r^\circ) \alpha^\circ$ de uma pró-dedução D° em S , se Γ° é um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ° , então $\Gamma^\circ \triangleright \alpha^\circ$.

Mostremos agora, para a linha de número i , que essa propriedade se mantém.

I. A linha i foi introduzida pela regra P.

- (1) Então i é da forma $\{i\} (i) \alpha$.
- (2) Seja Γ um conjunto que contém α .
- (3) Então, pela propriedade 3.4.12, podemos afirmar que $\Gamma \triangleright \alpha$.

II. A linha i foi introduzida pela regra Ax_1 .

- (1) Então i é da forma $\{\} (i) a=a$.
- (2) Ora, pela propriedade 3.4.13, sabemos que $\triangleright 'a=a'$.
- (3) Seja Γ um conjunto qualquer.
- (4) Então $\{\} \subseteq \Gamma$ e, por conseguinte, pela propriedade 3.4.26, podemos afirmar que $\Gamma \triangleright 'a=a'$.

III. A linha i foi introduzida pela regra Ax_2 .

- (1) Então i é da forma $\{\} (i) '(\alpha_1 \rightarrow \xi = \xi)'$, onde ξ é um parâmetro que ocorre na pró-sentença atômica α_1 .
- (2) Ora, pela propriedade 3.4.14, sabemos que $\triangleright '(\alpha_1 \rightarrow \xi = \xi)'$.
- (3) Seja Γ um conjunto qualquer.
- (4) Então $\{\} \subseteq \Gamma$ e, por conseguinte, pela propriedade 3.4.26, podemos afirmar que $\Gamma \triangleright '(\alpha_1 \rightarrow \xi = \xi)'$.

IV. A linha i foi introduzida pela regra T.

- (1) Então i é da forma $\mu_1 \cup \dots \cup \mu_n (i) \alpha$, onde α é consequência tautológica de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e, para $1 \leq z \leq n$, α_z é afirmação de uma linha da forma $\mu_z (i_z) \alpha_z$, $i_z < i$.
- (2) Seja Γ_z um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ_z , para $1 \leq z \leq n$.
- (3) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que, para todo z , $1 \leq z \leq n$, $\Gamma_z \triangleright \alpha_z$.
- (4) E, pela propriedade 3.4.15, que $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n \triangleright \alpha$.
- (5) Seja Γ um conjunto que contém $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$.
- (6) Então, pela propriedade 3.4.26, podemos inferir que $\Gamma \triangleright \alpha$.

V. A linha i foi introduzida pela regra C.

- (1) Então i é da forma $\mu (i) '(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)'$, onde α_1 é afirmação de uma linha da forma $\{i_1\} (i_1) \alpha_1$, $i_1 < i$, e α_2 é afirmação de uma linha da forma $\mu \cup \{i_1\} (i_2) \alpha_2$, $i_2 < i$.
- (2) Seja Γ um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ .
- (3) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma \cup \{\alpha_1\} \triangleright \alpha_2$.
- (4) E assim, pela propriedade 3.4.16, que $\Gamma \triangleright '(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)'$.

VI. A linha i foi introduzida pela regra IU.

(1) Então i :

- i) ou é da forma $\mu (i) \alpha^s/\tau$, onde τ é um pró-termo restrito fechado qualquer e α tal que ocorra em D uma linha da forma $\mu (i_1) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$, $i_1 < i$;
- ii) ou é da forma $\mu \cup \mu_1 \cup \dots \cup \mu_n (i) \alpha^s/\tau$, onde τ é um pró-termo restrito fechado qualquer, ξ_1, \dots, ξ_n são os parâmetros que ocorram em τ , as linhas $\mu_j (i_j) \ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$, $i_j < i$, para $1 \leq j \leq n$, ocorram em D e α é tal que uma linha da forma $\mu (i_0) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$, $i_0 < i$, ocorra em D .

(2) Suponhamos, primeiramente, que i é da forma $\mu (i) \alpha^s/\tau$, onde τ é um pró-termo restrito fechado qualquer e α tal que ocorra em D uma linha da forma $\mu (i_1) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$, $i_1 < i$.

(3) Seja Γ um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ .

(4) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma \triangleright \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.

(5) E, pela propriedade 3.4.18, que $\Gamma \triangleright \alpha^s/\tau$.

(6) Suponhamos, agora, que i é da forma $\mu \cup \mu_1 \cup \dots \cup \mu_n (i) \alpha^s/\tau$, onde τ é um pró-termo restrito fechado qualquer, ξ_1, \dots, ξ_n são os parâmetros que ocorram em τ , as linhas $\mu_j (i_j) \ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$, $i_j < i$, para $1 \leq j \leq n$, ocorram em D e α é tal que uma linha da forma $\mu (i_0) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$, $i_0 < i$, ocorra em D .

(7) Seja Γ_0 um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ , e Γ_j um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ_j , para $1 \leq j \leq n$.

(8) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma_0 \triangleright \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$ e também que, para $1 \leq j \leq n$, $\Gamma_j \triangleright \ulcorner \xi_j = \xi_j \urcorner$.

(9) Logo, pela propriedade 3.4.18, temos que $\Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_n \triangleright \alpha^s/\tau$.

(10) Seja Γ um conjunto que contém $\Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_n$.

(11) Então, pela propriedade 3.4.26, podemos inferir que $\Gamma \triangleright \alpha^s/\tau$.

VII. A linha i foi introduzida pela regra GU.

(1) Então i é da forma $\mu (i) \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$, onde α é tal que α^s/σ é afirmação de uma linha da forma $\mu (i_1) \alpha^s/\sigma$, $i_1 < i$, e σ é um pronome que não ocorre nem em α nem nas pró-sentenças mencionadas em μ .

(2) Seja Γ um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ .

(3) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma \triangleright \alpha^s/\sigma$.

(4) E, pela propriedade 3.4.19, que $\Gamma \triangleright \ulcorner \forall \xi \alpha \urcorner$.

VIII. A linha i foi introduzida pela regra IE.

(1) Então i é da forma $\mu_1 \cup \mu_3 (i) \beta$ e ocorrem em D três linhas: uma da forma $\mu_1 (i_1) \exists \xi \alpha$, outra da forma $\{i_2\} (i_2) \alpha^s/\xi$ e outra da forma $\mu_3 \cup \{i_2\} (i_3) \beta$, onde $i_1 < i$, $i_2 < i_3 < i$ e ξ é um parâmetro que não ocorre nem em α , nem em β e nem nas pró-sentenças mencionadas em μ_3 .

(2) Seja Γ_1 um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ_1 ; e Γ_3 um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ_3 .

(3) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma_1 \triangleright \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$ e também que $\Gamma_3 \cup \{\alpha^s/\xi\} \triangleright \beta$.

- (4) Logo, pela propriedade 3.4.20, temos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \triangleright \beta$.
- (5) Seja Γ um conjunto que contém $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$.
- (6) Então, pela propriedade 3.4.26, podemos inferir que $\Gamma \triangleright \beta$.

IX. A linha i foi introduzida pela regra GE.

- (1) Então i é da forma $\mu (i) \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$, onde α é tal que α^s/τ é afirmação de uma linha da forma $\mu (i_1) \alpha^s/\tau$, $i_1 < i$, e τ é um pró-termo fechado.
- (2) Seja Γ um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ .
- (3) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma \triangleright \alpha^s/\tau$.
- (4) E, pela propriedade 3.4.21, que $\Gamma \triangleright \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$.

X. A linha i foi introduzida pela regra E.

- (1) Então i é da forma $\mu (i) \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$, onde α é tal que ocorre em D uma linha da forma $\mu (i_1) \ulcorner \neg \forall \xi \neg \alpha \urcorner$, $i_1 < i$.
- (2) Seja Γ um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ .
- (3) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma \triangleright \ulcorner \neg \forall \xi \neg \alpha \urcorner$.
- (4) E, pela propriedade 3.4.22, que $\Gamma \triangleright \ulcorner \exists \xi \alpha \urcorner$.

XI. A linha i foi introduzida pela regra I.

- (1) Então i é da forma $\mu_1 \cup \mu_2 (i) \beta$ e ocorrem em D duas linhas: uma da forma $\mu_1 (i_1) \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ e outra da forma $\mu_2 (i_2) \alpha$, onde $i_1 < i$, $i_2 < i$ e β resulta de α por substituição de uma ou mais ocorrências do pró-termo fechado τ_1 por ocorrências do pró-termo fechado τ_2 .
- (2) Seja Γ_1 um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ_1 , e Γ_2 um conjunto que contém as pró-sentenças mencionadas em μ_2 .
- (3) Então podemos afirmar, pela hipótese indutiva, que $\Gamma_1 \triangleright \ulcorner \tau_1 = \tau_2 \urcorner$ e também que $\Gamma_2 \triangleright \alpha$.
- (4) Logo, pela propriedade 3.4.18, temos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \triangleright \beta$.
- (5) Seja Γ um conjunto que contém $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
- (6) Então, pela propriedade 3.4.26, podemos inferir que $\Gamma \triangleright \beta$.

Teorema 7:

Seja α uma pró-sentença e Γ um conjunto de pró-sentenças. Então α é pró-dedutível de Γ somente se α é pró-conseqüência lógica de Γ .

Demonstração:

- (1) Suponhamos que $\Gamma \Vdash \alpha$.
- (2) Então, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu (i) \alpha$ e tal que todas as pró-sentenças mencionadas em μ pertencem a Γ .
- (3) Portanto, pelo lema 3, $\Gamma \triangleright \alpha$.

4) Dedutibilidade em Q_1

Dizemos que uma sentença α é *dedutível de* um conjunto de sentenças Γ — em símbolos, $\Gamma \vdash \alpha$ — se, e somente se, $\Gamma \Vdash \alpha$.

Se uma sentença α é dedutível do conjunto vazio — isto é, se α é uma sentença e existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\{ \} (i) \alpha$ —, dizemos que α é um *teorema* — em símbolos, $\vdash \alpha$.

4.1) Teorema da Correção de Q_1

Seja α uma sentença e Γ um conjunto de sentenças. Então α é conseqüência lógica de Γ , se α é dedutível de Γ .

Demonstração:

- (1) Suponhamos que $\Gamma \vdash \alpha$.
- (2) Então podemos afirmar, pela definição de dedutível, que $\Gamma \Vdash \alpha$.
- (3) E, pelo teorema 7, que $\Gamma \triangleright \alpha$.
- (4) Logo, pela definição de pró-conseqüência, temos que, em cada pró-interpretção, toda sobrevaloração que satisfaz cada uma das sentenças de Γ também satisfaz α .
- (5) Suponhamos agora, por absurdo, que $\Gamma \not\models \alpha$.
- (6) Então, pela definição de conseqüência, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração s que, segundo uma interpretação ${}^?I$, satisfaz cada uma das sentenças de Γ mas não satisfaz α .
- (7) Seja ${}^?I_p$ uma pró-interpretção cuja base em L é ${}^?I$.
- (8) Então, pelas definições de satisfação em Q_1 e em Q_{1p} , inferimos que, segundo ${}^?I_p$, s satisfaz cada uma das sentenças de Γ mas não satisfaz α .
- (9) Logo, podemos afirmar que existe uma sobrevaloração que, segundo uma pró-interpretção, satisfaz cada uma das sentenças de Γ mas não satisfaz α . Contradição com (4)!
- (10) Portanto, $\Gamma \models \alpha$.

4.2) Propriedade à Lindenbaum

Seja Γ um conjunto de pró-sentenças e α uma pró-sentença tal que $\Gamma \not\vdash \alpha$.

Construamos, com respeito a $\Gamma \cup \{\alpha\}$, uma lista Λ infinita $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ de pró-sentenças tal que:

- i) para cada pró-sentença δ de Q_{1p} , existe pelo menos um natural i tal que δ_i é δ ; e
- ii) para cada pró-sentença δ do tipo $\lceil \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \rceil$, existe pelo menos um natural i tal que δ_i é δ e δ_{i+1} é β^s/c — onde c é um nome que não ocorre nem nas pró-sentenças de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ nem em alguma pró-sentença δ_j da lista, $j \leq i$; e
- iii) para cada pró-sentença δ do tipo $\lceil \exists \xi \beta \rceil$, existe pelo menos um natural i tal que δ_i é δ e δ_{i+1} é β^s/σ — onde σ é um pronome que não ocorre nem nas pró-sentenças de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, nem em alguma pró-sentença δ_j da lista, $j \leq i$.²⁰

Construamos, a partir de Γ e dessa lista Λ , uma seqüência infinita Ξ de conjuntos encaixantes²¹ $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ da seguinte maneira:

- i) Δ_0 é Γ ; e
- ii) Δ_n é $\begin{cases} \Delta_{n-1} \cup \{\delta_n\}, & \text{se } \Delta_{n-1} \cup \{\delta_n\} \not\vdash \alpha; \text{ e} \\ \Delta_{n-1}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Definimos assim o *conjunto maximal* Δ de Γ com respeito a α como sendo $\cup \Delta_n$, para $n \geq 0$.

Lema 4:

Seja Γ um conjunto de pró-sentenças e α uma pró-sentença tal que $\Gamma \not\vdash \alpha$. Seja $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ a seqüência infinita de conjuntos encaixantes construída tal como a Ξ acima. Então, para qualquer $j \leq n$, a pró-sentença $\delta_j \in \Delta_n$ se, e somente se, $\delta_j \in \Delta_j$.

Demonstração:

I. ida

- (1) Suponhamos:
 - i) que $\delta_j \in \Delta_n$, e
 - ii) por absurdo, que $\delta_j \notin \Delta_j$.
- (2) Então, do item ii, pela construção de Δ_j , podemos afirmar que $\Delta_{j-1} \cup \{\delta_j\} \not\vdash \alpha$.
- (3) E, pela definição de pró-dedutível, inferimos que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu(i) \alpha$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ pertencem a $\Delta_{j-1} \cup \{\delta_j\}$.

²⁰ Notemos que é possível construir uma tal lista, uma vez que o conjunto das pró-sentenças de Q_{1p} é enumerável.

²¹ Isto é, tais que, para todo natural i e para todo natural j , se $i \leq j$, então $\Delta_i \subseteq \Delta_j$.

- (4) Ora, por construção de Δ_{j-1} e de Δ_n , sabemos:
- i) que $\Delta_{j-1} \subseteq \Delta_n$, pois os conjuntos da seqüência são encaixantes e $(j-1) < n$; e
 - ii) que $\Delta_n \not\models \alpha$.
- (5) Logo, dos itens i de (1) e (4), podemos afirmar, de (3), que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma μ (i) α , onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ pertencem a Δ_n .
- (6) Por conseguinte, pela definição de pró-dedutível, temos que $\Delta_n \models \alpha$.
Contradição com o item ii de (4)!
- (7) Portanto, se $\delta_j \in \Delta_n$, $\delta_j \in \Delta_j$.

II. volta

- (1) Suponhamos que $\delta_j \in \Delta_j$.
- (2) Mas, por construção, sabemos que, $\Delta_j \subseteq \Delta_n$, pois os conjuntos da seqüência são encaixantes e $j \leq n$.
- (3) Portanto, se $\delta_j \in \Delta_j$, então $\delta_j \in \Delta_n$.

Teorema 8:

Seja α uma sentença e Γ um conjunto de sentenças tais que $\Gamma \not\models \alpha$. Então há um conjunto Δ de pró-sentenças α -saturado, completo e pró-completo tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Demonstração:

Sejam α e Γ tais que $\Gamma \not\models \alpha$.

Então, pela definição de dedutibilidade, $\Gamma \not\models \alpha$.

Seja Λ a lista infinita de pró-sentenças de Q_{1p} $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ acima construída.

Seja Δ o conjunto maximal de Γ com respeito a α .

Provemos que Δ é α -saturado, completo, pró-completo e tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

I. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- (1) Por construção de Δ_0 , sabemos que Δ_0 é Γ .
- (2) E, pela definição de Δ , temos que Δ é $\cup \Delta_n$, $n \geq 0$.
- (3) Portanto, obviamente $\Gamma \subseteq \Delta$.

II. Δ é α -saturado.

a) $\Delta \not\models \alpha$.

- (1) Por hipótese $\Delta_0 \not\models \alpha$.
- (2) E, por construção de Δ_j , $\Delta_j \not\models \alpha$, para qualquer j , $j \geq 1$.
- (3) Suponhamos, por absurdo, que $\Delta \models \alpha$.
- (4) Então, pela definição de pró-dedutível, podemos afirmar que existe um pró-dedução contendo uma linha da forma μ (i) α , onde todas as sentenças mencionadas em μ pertencem a Δ .
- (5) Ora, como uma pró-dedução é uma seqüência finita de linhas, sabemos também que as sentenças mencionadas em μ são em número finito.
- (6) Seja Δ^* o conjunto formado exatamente pelas sentenças mencionadas em μ .

- (7) Então, $\Delta^* \subseteq \Delta$.
- (8) Seja m o número de elementos de Δ^* .
- (9) Podemos então dizer que Δ^* é $\{\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \dots, \delta_{i_m}\}$ — onde i_r , $1 \leq r \leq m$, é o menor índice de ocorrência, na lista Λ de pró-sentenças de Q_{1p} , da pró-sentença pertencente a Δ^* , e $i_r < i_j$ se, e só se, $r < j$.
- (10) Por conseguinte, pelo lema 4, de (7) e (9) podemos afirmar que $\Delta^* \subseteq \Delta_{i_m}$, para algum natural i_m , $i_m \geq 1$. (Obs: $i_m \neq 0$, pois Δ_0 é Γ e $\Gamma \not\vdash \alpha$.)
- (11) E assim, de (6) e (10), temos que todas as sentenças mencionadas em μ pertencem a Δ_{i_m} , para algum natural i_m , $i_m \geq 1$.
- (12) Logo, de (4) e (11), pela definição de pró-dedutível, inferimos que $\Delta_{i_m} \Vdash \alpha$, para algum natural i_m , $i_m \geq 1$. Contradição com (2)!
- (13) Portanto, $\Delta \not\vdash \alpha$.
- b) Para qualquer pró-sentença β , se $\beta \notin \Delta$, então $\Delta \cup \{\beta\} \Vdash \alpha$.
- (1) Seja β uma pró-sentença tal que $\beta \notin \Delta$.
- (2) Chamemos δ_i à ocorrência de menor índice de β na lista Λ de pró-sentenças de Q_{1p} .
- (3) Ora, pela construção de Δ_i , sabemos que $\Delta_i \subseteq \Delta$.
- (4) Então, de (1) e (3), podemos afirmar que $\delta_i \notin \Delta_i$.
- (5) Logo, pela construção de Δ_i , inferimos que $\Delta_{i-1} \cup \{\delta_i\} \Vdash \alpha$.
- (6) E, como, pela construção de Δ_{i-1} , sabemos que também $\Delta_{i-1} \subseteq \Delta$, de (5) podemos afirmar que $\Delta \cup \{\delta_i\} \Vdash \alpha$.
- (7) Portanto, para qualquer pró-sentença β , se $\beta \notin \Delta$, então $\Delta \cup \{\beta\} \Vdash \alpha$.
- III. Δ é completo.
- (1) Suponhamos que $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner \in \Delta$.
- (2) Então, pela definição de Δ , temos que, para algum j , $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner \in \Delta_j$.
- (3) Seja i o natural tal que, na lista Λ de pró-sentenças de Q_{1p} :
- i) δ_i é $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner$ e
- ii) δ_{i+1} é β^s/c , onde c é um nome que não ocorre nem nas pró-sentenças de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ nem em alguma pró-sentença δ_j da lista Λ , $j \leq i$.
- (4) Pelo lema 4, de (2) e do item i de (3), podemos então afirmar que $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner \in \Delta_i$.
- (5) E assim, pelo teorema 1, temos que $\Delta_i \Vdash \ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner$.
- (6) Pela definição de pró-dedutível, inferimos então que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{\Delta_i} (j) \ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{Δ_i} pertencem a Δ_i .
- (7) Suponhamos agora, por absurdo, que $\beta^s/c \notin \Delta$.
- (8) Então, pela definição de Δ , podemos afirmar que $\beta^s/c \notin \Delta_j$, qualquer que seja j , $j \geq 0$.
- (9) E, por conseguinte, que $\beta^s/c \notin \Delta_{i+1}$.

(10) Logo, pela construção de Δ_{i+1} , inferimos que:

- i) $\Delta_i \not\vdash \alpha$, e
- ii) $\Delta_i \cup \{\beta^s/c\} \vdash \alpha$.

(11) Pela definição de pró-dedutível, temos então que existe uma pró-dedução contendo linhas da forma $\{j_1\} (j_1) \beta^s/c$ e $\mu'_{\Delta_i} \cup \{j_1\} (j_2) \alpha$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ'_{Δ_i} pertencem a Δ_i .

(12) Desse modo, de (6) e (11), podemos inferir que $\Delta_i \vdash \alpha$ — contradição com o item i de (10)! —, pois poderíamos justapor as pró-deduções de $\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner$ e de α e acrescentar oito linhas e obter uma pró-dedução para α a partir de um subconjunto finito de Δ_i , tal como se segue:

	⋮		
μ_{Δ_i}	(j)	$\ulcorner \exists \xi (\xi = \xi \wedge \beta) \urcorner$	
	⋮		
{l}	(l)	β^s/c	[onde $l \acute{e} j+j_1$]
	⋮		
$\mu'_{\Delta_i} \cup \{l\}$	(l ₁)	α	[onde $l_1 \acute{e} j_2+l$]
μ'_{Δ_i}	(l ₁ +1)	$\ulcorner (\beta^s/c \rightarrow \alpha) \urcorner$	$l, l_1/C$
μ'_{Δ_i}	(l ₁ +2)	$\ulcorner \forall \xi (\beta \rightarrow \alpha) \urcorner$	l_1+1/GU^{22}
{l ₁ +3}	(l ₁ +3)	$\ulcorner (\xi = \xi \wedge \beta^s/c) \urcorner$	/P ²³
{l ₁ +3}	(l ₁ +4)	$\ulcorner \xi = \xi \urcorner$	l_1+3/T
{l ₁ +3}	(l ₁ +5)	β^s/c	l_1+3/T
$\mu'_{\Delta_i} \cup \{l_1+3\}$	(l ₁ +6)	$\ulcorner (\beta^s/c \rightarrow \alpha) \urcorner$	$l_1+2, l_1+4/IU$
$\mu'_{\Delta_i} \cup \{l_1+3\}$	(l ₁ +7)	α	$l_1+5, l_1+6/T$
$\mu_{\Delta_i} \cup \mu'_{\Delta_i}$	(l ₁ +8)	α	$j, l_1+3, l_1+7/IE$

(13) Logo, $\beta^s/c \in \Delta$.

(14) E, portanto, Δ é completo.

IV. Δ é pró-completo.

(1) Suponhamos que $\ulcorner \exists \xi \beta \urcorner \in \Delta$.

(2) Então, pela definição de Δ , temos que, para algum j , $\ulcorner \exists \xi \beta \urcorner \in \Delta_j$.

(3) Seja i o natural tal que, na lista Λ de pró-sentenças de Q_{1p} :

- i) δ_i é $\ulcorner \exists \xi \beta \urcorner$ e
- ii) δ_{i+1} é β^s/σ , onde σ é um pronome que não ocorre em nenhuma δ_j da lista Λ , $j \leq i$.

(4) Pelo lema 4, de (2) e do item i de (3), podemos então afirmar que $\ulcorner \exists \xi \beta \urcorner \in \Delta_i$.

(5) E assim, pelo teorema 1, temos que $\Delta_i \vdash \ulcorner \exists \xi \beta \urcorner$.

(6) Pela definição de pró-dedutível, inferimos então que existe uma pró-dedução contendo uma linha da forma $\mu_{\Delta_i} (j) \ulcorner \exists \xi \beta \urcorner$, onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ_{Δ_i} pertencem a Δ_i .

(7) Suponhamos agora, por absurdo, que $\beta^s/\sigma \notin \Delta$.

²² Notemos que, se c é um nome que não ocorre nem nas pró-sentenças de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ nem em alguma pró-sentença δ_j da lista Λ , $j \leq i$, então c não ocorre em nenhuma das pró-sentenças mencionadas em μ'_{Δ_i} , uma vez que estas pró-sentenças pertencem todas a Δ_i .

²³ Onde ξ é um parâmetro que não ocorre nem α , nem em β , nem nas pró-sentenças mencionadas em μ'_{Δ_i} .

- (8) Então, pela definição de Δ , podemos afirmar que $\beta^s/\sigma \notin \Delta_j$, qualquer que seja $j, j \geq 0$.
- (9) E, por conseguinte, que $\beta^s/\sigma \notin \Delta_{i+1}$.
- (10) Logo, pela construção de Δ_{i+1} , inferimos que:
- i) $\Delta_i \not\vdash \alpha$, e
 - ii) $\Delta_i \cup \{\beta^s/\sigma\} \vdash \alpha$.
- (11) Pela definição de pró-dedutível, temos então que existe uma pró-dedução contendo linhas da forma $\{j_1\}$ (j_1) β^s/σ e $\mu'_{\Delta_i} \cup \{j_1\}$ (j_2) α , onde todas as pró-sentenças mencionadas em μ'_{Δ_i} pertencem a Δ_i .
- (12) Desse modo, de (6) e (11), podemos inferir que $\Delta_i \vdash \alpha$ — contradição com o item i de (10)! —, pois poderíamos justapor as pró-deduções de $\ulcorner \exists \beta^s \urcorner$ e de α e acrescentar quatro linhas e obter uma pró-dedução para α a partir de um subconjunto finito de Δ_i , tal como se segue:

	⋮		
μ_{Δ_i}	(j)	$\ulcorner \exists \beta^s \urcorner$	
	⋮		
$\{1\}$	(l)	β^s/σ	[onde l é $j+1$]
	⋮		
$\mu'_{\Delta_i} \cup \{1\}$	(l_1)	α	[onde l_1 é j_2+1]
μ'_{Δ_i}	(l_1+1)	$\ulcorner (\beta^s/\sigma \rightarrow \alpha) \urcorner$	$l, l_1/C$
$\{l_1+2\}$	(l_1+2)	β^s/σ	$/P^{24}$
$\mu'_{\Delta_i} \cup \{l_1+2\}$	(l_1+3)	α	$l_1+1, l_1+2/T$
$\mu_{\Delta_i} \cup \mu'_{\Delta_i}$	(l_1+4)	α	$j, l_1+2, l_1+3/IE$

- (13) Logo, $\beta^s/\sigma \in \Delta$.
- (14) E, portanto, Δ é pró-completo.

²⁴ Notemos que, se σ é um pronome que não ocorre nem nas pró-sentenças de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ nem em alguma pró-sentença δ_j da lista Λ , $j \leq i$, então σ não ocorre em nenhuma das pró-sentenças mencionadas em μ'_{Δ_i} , uma vez que estas pró-sentenças pertencem todas a Δ_i .

4.3) Teorema da Completude de Q_1

Seja α uma sentença e Γ um conjunto de sentenças. Então, α é consequência lógica de Γ somente se α é dedutível de Γ .

Demonstração:

- (1) Suponhamos que $\Gamma \not\vdash \alpha$.
- (2) Então, pela definição de dedutibilidade, também $\Gamma \not\models \alpha$.
- (3) E assim, pelo teorema 8, podemos afirmar que há um conjunto Δ α -saturado, completo e pró-completo tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.
- (4) Logo, pelos teoremas 1 e 6, inferimos que existe uma pró-interpretação ${}^?I_p$ segundo a qual todas as pró-sentenças de Δ — e, em particular, as de Γ — são verdadeiras, mas α é falsa.
- (5) Seja ${}^?I$ a base de ${}^?I_p$ em L .
- (6) Então podemos afirmar que, segundo ${}^?I$, cada uma das sentenças de Γ é verdadeira mas α é falsa.
- (7) Portanto, pela definição de consequência lógica, podemos concluir que $\Gamma \not\models \alpha$.

O CÁLCULO Q₂

A sintaxe de Q₂ é a mesma de Q₁. E também a semântica, exceto pela definição de satisfação. Definimos, em Q₂, *satisfação* (para L e ¹I) da seguinte maneira:

Seja ¹I uma interpretação de L numa estrutura A formada pelo par $\langle ?_1, I \rangle$ e s uma sobrevaloração em A com respeito a ¹I. Seja α uma fórmula. Então, dizemos que s satisfaz α segundo ¹I — em símbolos, $s \text{ sat}_1^1 \alpha$ — se:

I. α é uma fórmula atômica:

- i) do tipo ' $\tau_1 = \tau_2$ ' e o par $\langle s_1(\tau_1), s_1(\tau_2) \rangle$ pertence à $=_A$; ou
- ii) do tipo $\pi_1^n \tau_1 \dots \tau_n$ e a n-upla $\langle s_1(\tau_1), \dots, s_1(\tau_n) \rangle$ pertence à relação $I(\pi_1^n)$; ou

II. α é uma fórmula molecular:

- i) do tipo ' $\neg \beta$ ' e não é o caso de $s \text{ sat}_1^1 \beta$; ou
- ii) do tipo ' $(\beta_1 \wedge \beta_2)$ ' e $s \text{ sat}_1^1 \beta_1$ e $s \text{ sat}_1^1 \beta_2$; ou
- iii) do tipo ' $(\beta_1 \vee \beta_2)$ ' e $s \text{ sat}_1^1 \beta_1$ ou $s \text{ sat}_1^1 \beta_2$; ou
- iv) do tipo ' $(\beta_1 \rightarrow \beta_2)$ ' e ou não é o caso de $s \text{ sat}_1^1 \beta_1$ ou $s \text{ sat}_1^1 \beta_2$; ou
- v) do tipo ' $(\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)$ ' e ou $s \text{ sat}_1^1 \beta_1$ e $s \text{ sat}_1^1 \beta_2$ ou nem é o caso de $s \text{ sat}_1^1 \beta_1$ nem o de $s \text{ sat}_1^1 \beta_2$; ou

III. α é uma fórmula geral:

- i) do tipo ' $\forall \xi \beta$ ' e, para qualquer sobrevaloração s' ξ -variante de s, $s' \text{ sat}_1^1 \beta$; ou
- ii) do tipo ' $\exists \xi \beta$ ' e, para alguma sobrevaloração s' ξ -variante de s normal em ξ , $s' \text{ sat}_1^1 \beta$.

Notemos que a definição de satisfação em Q₂ diferencia-se da de Q₁ apenas para as fórmulas gerais. Enquanto que, em Q₁, a quantificação universal refere-se ao domínio e a existencial ao sobredomínio de uma interpretação, em Q₂, verifica-se o contrário: a quantificação universal refere-se ao sobredomínio e a existencial ao domínio de uma interpretação. Assim, poderíamos afirmar, em Q₁, que tanto a fórmula ' $\forall \xi \alpha$ ' intuitivamente diz que todos os objetos do domínio da interpretação satisfazem α (ou seja, que não existe objeto do domínio da interpretação que não satisfaça α), quanto a fórmula ' $\exists \xi \beta$ ' intuitivamente diz que algum objeto do sobredomínio da interpretação satisfaz β (ou seja, que não é o caso de todos os objetos do sobredomínio da interpretação não satisfazerem β). Mas isso é exatamente o que, em Q₂, intuitivamente dizem as fórmulas ' $\neg \exists \xi \neg \alpha$ ' e ' $\neg \forall \xi \neg \beta$ ', respectivamente. Logo, se usarmos aqui índices nos símbolos de quantificação, a fim de identificarmos o cálculo a que as quantificações se referem²⁵, ' $\forall_1 \xi \alpha$ ' é equivalente a ' $\neg \exists_2 \xi \neg \alpha$ '; e ' $\exists_1 \xi \beta$ ' a ' $\neg \forall_2 \xi \neg \beta$ '.

²⁵ O índice '1' para quantificações em Q₁ e o índice '2' para quantificações em Q₂.

De fato; pois podemos definir as quantificações universal e existencial de Q_2 no cálculo Q_1 da seguinte maneira: introduzamos, em Q_1 , os símbolos ' \forall_2 ' e ' \exists_2 ' de modo que ' $\forall_2 \xi \alpha$ ' seja a abreviação de ' $\neg \exists \xi \neg \alpha$ ', e ' $\exists_2 \xi \alpha$ ' seja a abreviação de ' $\exists \xi (\xi = \xi \wedge \alpha)$ '. Então, em Q_1 , temos que $\vdash (\forall \xi \alpha \leftrightarrow \neg \exists_2 \xi \neg \alpha)$ e $\vdash (\exists \xi \beta \leftrightarrow \neg \forall_2 \xi \neg \beta)$, uma vez que, como nos mostra o seguinte esquema de pró-dedução, $\Vdash (\forall \xi \alpha \leftrightarrow \neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha))$ e $\Vdash (\exists \xi \beta \leftrightarrow \neg \neg \exists \xi \neg \beta)$ em Q_{1p} .

{1}	(1)	$\vdash \forall \xi \alpha$	/P
{2}	(2)	$\vdash \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha)$	/P
{3}	(3)	$\vdash (\xi = \xi \wedge \neg \alpha^s / \xi)$	/P [onde ξ é um parâmetro que não ocorre em α]
{3}	(4)	$\vdash \xi = \xi$	3/T
{3}	(5)	$\vdash \neg \alpha^s / \xi$	3/T
{1}	(6)	α^s / ξ	1, 3/IU
{1,3}	(7)	$\vdash (\alpha^s / \xi \wedge \neg \alpha^s / \xi)$	5, 6/T
{3}	(8)	$\vdash (\forall \xi \alpha \rightarrow (\alpha^s / \xi \wedge \neg \alpha^s / \xi))$	1, 7/C
{}	(9)	$\vdash \neg (\alpha^s / \xi \wedge \neg \alpha^s / \xi)$	/T
{3}	(10)	$\vdash \neg \forall \xi \alpha$	8, 9/T
{2}	(11)	$\vdash \neg \forall \xi \alpha$	2, 3, 10/IE
{}	(12)	$\vdash (\exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha) \rightarrow \neg \forall \xi \alpha)$	2, 11/C
{1}	(13)	$\vdash \neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha)$	1, 12/T
{}	(14)	$\vdash (\forall \xi \alpha \rightarrow \neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha))$	1, 14/C
{15}	(15)	$\vdash \neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha)$	/P
{16}	(16)	$\vdash \neg \forall \xi \neg (\xi = \xi \wedge \neg \alpha)$	/P
{16}	(17)	$\vdash \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha)$	16/E
{}	(18)	$\vdash (\neg \forall \xi \neg (\xi = \xi \wedge \neg \alpha) \rightarrow \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha))$	16, 17/C
{15}	(19)	$\vdash \forall \xi \neg (\xi = \xi \wedge \neg \alpha)$	15, 18/T
{15}	(20)	$\vdash \neg (c=c \wedge \neg \alpha^s / c)$	19/IU [onde c é um nome que não ocorre em α]
{}	(21)	$a=a$	/Ax ₁
{}	(22)	$\vdash \forall \xi \xi = \xi$	21/GU
{}	(23)	$c=c$	22/IU
{15}	(24)	α^s / c	20, 23/T
{15}	(25)	$\vdash \forall \xi \alpha$	24/GU
{}	(26)	$\vdash (\neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha) \rightarrow \forall \xi \alpha)$	15, 25/C
{27}	(27)	$\vdash \exists \xi \beta$	/P
{28}	(28)	β^s / ξ	/P [onde ξ é um parâmetro que não ocorre em β]
{28}	(29)	$\vdash \neg \neg \beta^s / \xi$	28/T
{28}	(30)	$\vdash \exists \xi \neg \neg \beta$	29/GE
{27}	(31)	$\vdash \exists \xi \neg \neg \beta$	27, 28, 30/IE
{27}	(32)	$\vdash \neg \neg \exists \xi \neg \neg \beta$	31/T
{}	(33)	$\vdash (\exists \xi \beta \rightarrow \neg \neg \exists \xi \neg \neg \beta)$	27, 32/C
{34}	(34)	$\vdash \neg \neg \exists \xi \neg \neg \beta$	/P
{34}	(35)	$\vdash \exists \xi \neg \neg \beta$	34/T
{36}	(36)	$\vdash \neg \neg \beta^s / \xi$	/P [onde ξ é um parâmetro que não ocorre em β]
{36}	(37)	β^s / ξ	36/T
{36}	(38)	$\vdash \exists \xi \beta$	37/GE
{34}	(39)	$\vdash \exists \xi \beta$	35, 36, 38/IE
{}	(40)	$\vdash (\neg \neg \exists \xi \neg \neg \beta \rightarrow \exists \xi \beta)$	34, 39/C
{}	(41)	$\vdash (\forall \xi \alpha \leftrightarrow \neg \exists \xi (\xi = \xi \wedge \neg \alpha))$	14, 26/T
{}	(42)	$\vdash (\exists \xi \beta \leftrightarrow \neg \neg \exists \xi \neg \neg \beta)$	33, 40/T

Portanto, o cálculo Q_2 pode ser definido em Q_1 ; e uma axiomática correta e completa adequada a este sê-lo-á também àquele.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BELL, John Lane; MACHOVER, Moshe. *A Course in Mathematical Logic*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1977. 599p.
- [2] CHANG, Chen Chung; KEISLER, H. Jerome. *Model Theory*. 3. ed. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1990. 650p. (Studies in Logic and the foundations of Mathematics, vol. 73)
- [3] ENDERTON, Herbert B.. *Elements of set theory*. New York: Academic Press, 1977. 279p.
- [4] HILBERT, David; ACKERMANN, Wilhelm. *Principles of Mathematical Logic*. New York: Chelsea Pub. Co., 1950. 172p.
- [5] LOPARIĆ, Andréa M. A. de Campos. "Les négations et les univers du discours". In: VVAA, *Lacan avec les philosophes*, Paris: Albin Michel, 1991. 452p. (Bibliothèque du Collège International de Philosophie)
- [6] MATES, Benson. *Elementary Logic*. 2. ed. New York: Oxford University Press, 1972. 327p.
- [7] MENDELSON, Elliott. *Introduction to Mathematical Logic*. 3. ed. Pacific Grove, California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1987. 341p.
- [8] QUINE, Willard Van Orman. *From a Logical Point of View*. 2. ed. rev. Cambridge: Harvard University Press, 1961. 184p. (Logico-Philosophical Essays, 9)
- [9] ————— *Mathematical Logic*. ed. rev. Cambridge: Harvard University Press, 1961. 346p.
- [10] SHOENFIELD, Joseph Robert. *Mathematical Logic*. 2. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1973. 344p.
- [11] SMULLYAN, Raymond M.. *First-Order Logic*. New York: Springer-Verlag, 1968. 158p.
- [12] SUPPES, Patrick. *Introduction to Logic*. Princeton: D. Van Nostrand Co., 1957. 312p.