Universidade de São Paulo
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas
Departamento de Filosofia
Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Uma Prova de Incompletude da Aritmética Baseada no Teorema das Definições Recursivas

Luciano Vicente

São Paulo
2008

Luciano Vicente

Uma Prova de Incompletude da Aritmética Baseada no Teorema das Definições Recursivas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, sob orientação da Profa. Dra. Andréa Maria Altino de Campos Loparic para obtenção do título de Mestre em Filosofia

São Paulo
2008

Agradecimentos

Agradeço à professora Andréa pela confiança, aos meus colegas e mestres pela inspiração, ao pessoal da secretária pela solicitude, aos meus amigos e familiares pelo reconforto, à filosofia pela exasperação.

Resumo

VICENTE, L.. *Uma Prova de Incompletude da Aritmética Baseada no Teorema das Definições Recursivas*. 2008. 108 folhas. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

Esta dissertação estabelece a incompletude de um sistema formal cujas únicas constantes não-lógicas são 0 e *s* (respectivamente, o número natural 0 e a função sucessor segundo a interpretação *standard*), fundamentando-se, para tanto, em um teorema cuja prova necessita essencialmente da maquinária lógica de segunda-ordem e que foi designado de Teorema das Definições Recursivas.

Palavras-chave

Lógica

Teoria do Tipos

Aritmética Formal

Definições Recursivas

Incompletude

Abstract

VICENTE, L.. *A Proof of Incompleteness for Arithmetic by means of the Theorem of the Definion by Recursion*. 2008. 108 f. (Master degree in Philosophy) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008..

We establish here the incompleteness of the formal system S_2 for arithmetic−a formal system whose signature is $\{0, s\}$−by means of the Theorem of the Definition by Recursion (TDR). However, unlike the standard proofs of incompleteness, the proof of TDR, by virtue of restricted signature, uses essentially the power of second-order logic.

Key Words

Logic

Type Theory

Arithmetic

Definition by Recursion

Incompleteness

Índice

Capítulo III

Aritmetização da Sintaxe de S_2

Capítulo IV

Incompletude de S_2

Apêndice

Provas do Capítulo II

Considerações Iniciais

Estas considerações iniciais constituem uma pequena estória das dificuldades e dos objetivos, alcançados ou não, da minha pesquisa. Temos plena consciência de que os conceitos propostos a seguir ainda não encontraram uma versão ideal e de que a exposição ainda não apagou o rastro de sua própria história: objetivos frustados estão presentes na “deselegância” do encadeamento das provas e na irrelevância de alguns resultados para o estabelecimento do **Grande Teorema Final**. Um dos motivos pelos quais mantivemos a estrutura da exposição é bem simples: paradoxalmente, uma tentativa de superar estes defeitos poderia distanciar-me demais da prova do **Grande Teorema**.

Minha pesquisa começou quando, após uma leitura coletiva do artigo de 1931 de Gödel sobre a incompletude, a professora Andréa sugeriu que eu apresentasse uma nova exposição do argumento gödeliano. Retomei, imediatamente, o texto de Gödel para uma análise mais detida e uma nota de rodapé me chamou a atenção. Gödel dizia:

“*A adição dos Axiomas de Peano bem como outras modificações introduzidas no sistema PM* [o sistema de Whitehead e Russell] *servem apenas para simplificar a prova e são em princípio dispensáveis*”.

Eu deveria, então, expor o argumento gödeliano tentando deixar de lado exatamente aquilo que seria “*em princípio dispensável*”. Pensei, então, que essa poderia ser uma boa ocasião para aprender algo sobre a Teoria dos Tipos; dois coelhos em uma cajadada, incompletude e teoria dos tipos, a idéia me pareceu boa. Esbocei, assim, um primeiro plano de pesquisa: primeiro, eu me familiarizaria com a teoria dos tipos; depois, derivaria os Axiomas de Peano dos postulatos da teoria dos tipos; e, finalmente, retomaria, a partir daí, a argumentação de Gödel.

Um pouco mais familiarizado com os mecanismos da teoria dos tipos, optei por uma Teoria Simples dos Tipos (como Church e o próprio Gödel após a distinção de Ramsey entre paradoxos lógicos e paradoxos semânticos). Contudo, havia um problema: cerca de 900 páginas de *Principia* separavam a definição de soma aritmética dos enunciados iniciais de PM, e, mesmo que eu me livrasse de tudo o que não era essencial ao estabelecimento da incompletude, a tarefa seria longa e difícil (principalmente, se levada a cabo no formalismo restrito necessário ao argumento gödeliano). Em todo caso, eu já tinha uma definição adequada de uma linguagem formal para a Teoria Simples dos Tipos e uma idéia de como estabelecer uma semântica formal para ela (cf. a linguagem L_1, Cap.I, §1, pp.1-3).

Nesse momento, o livro de Copi *The Theory of Logical Types* veio me socorrer. Copi apresenta aí uma prova dos axiomas de Peano, enquanto teoremas da teoria simples dos tipos, em algumas poucas páginas (pp.45-54); de modo que eu poderia apresentar a prova de Copi (com as modificações necessárias) e, a partir dela, estabelecer, à maneira de Gödel, a incompletude da formalização da teoria dos tipos proposta (cf. o sistema S_1, Cap.I, §5, pp.6-7) . Uma primeira etapa parecia transposta; eu deveria me concentrar, agora, na primeira parte do argumento gödeliano e na constelação de conceitos relacionados a ela, nos conceitos de calculabilidade, recursividade, representação, bem como nas técnicas de aritmetização. Explorei, a partir de então, a bibliografia, notadamente, os livros *Introduction to Metamathematics* de Kleene e *Gödel's Incompleteness Theorems* de Smullyan.

Depois de me familiarizar com algumas abordagens do conceito de calculável (por exemplo, teoria das funções recursivas, máquinas de Turing) e munido de um sistema formal adequadamente definido, parecia-me o momento de derivar, seguindo as indicações de Copi, os axiomas de Peano em S_1. Contudo, encontrei um problema no argumento de Copi: o conceito de sucessor, tal como exposto pelo autor, tem como contrapartida formal **um conjunto de fórmulas** e não **uma única fórmula**; em outras palavras, não é uma fórmula que **representa** (ou mesmo, **expressa**) a relação de sucessão entre números naturais, mas um **esquema**. Tal abordagem leva Copi posteriormente a inserir na linguagem o que é, de fato, uma variável metalingüística−e até mesmo quantificar sobre ela!− para, em seguida, propor uma demonstração dos axiomas de Peano sem recurso a um teorema da infinitude−o que, por si só, já indica que algo não vai lá muito bem no argumento do autor.

Em todo caso, nas exposições que eu conhecia do argumento de Gödel, era sempre **uma fórmula** que representava **uma relação informal** e eu não poderia aplicar o argumento gödeliano ao sistema proposto por Copi sem modificações. A partir de então, três caminhos se abriram para mim: primeiro, apresentar uma definição alternativa de "representação" e ver se eu poderia adequá-la ao argumento gödeliano (devemos notar que a utilização de esquemas, ainda que possivelmente contrária aos paradigmas do logicismo, poderia conduzir a uma prova da incompletude); segundo, encontrar uma contrapartida diferente para a relação de sucessão adequada ao conceito usual de representação e derivar por conta própria os axiomas de Peano; ou, ainda, retomar a batalha contra a floresta de definições da aritmética, pensada como uma Teoria dos Cardinais Finitos. Frente às opções, preferi ainda uma quarta: abandonar a teoria dos tipos em favor de uma aritmética formal; uma aritmética cujo único conceito primitivo é a sucessão e cuja lógica subjacente é a teoria simples dos tipos (cf. o sistema S_2, Cap.I, §6, p.7).

Além dessas mudanças de foco, novas exigências foram paulatinamente acrescentadas ao plano geral de trabalho, no caso, um plano já razoavelmente modificado. Smullyan, no livro acima citado, oferece uma simplificação do argumento gödeliano introduzindo axiomas para a potenciação em uma aritmética formal de primeira ordem. Ora, do ponto de vista da teoria das funções recursivas, adição, multiplicação e potenciação são funções recursivas; eu poderia, então, ter acesso às simplicações propostas por Smullyan, além de outras, formalizando diretamente a maquinária da teoria das funções recursivas em S_2; o que, incidentalmente, equivaleria também a dispensar as sutilezas da função β.

Além dessa, ainda outra exigência se firmava. Repetindo quase sem alterações as considerações iniciais ao Capítulo II, o **Teorema V** do artigo de Gödel sobre a Incompletude da Aritmética estabelece: "As instâncias de relações ou propriedades definíveis em termos de funções recursivas primitivas são ou demonstráveis ou refutáveis no sistema **P**" (o sistema do artigo de Gödel). Em uma nota de rodapé Gödel comenta, ao mesmo tempo, as limitações da prova apresentada e a possilidade de ultrapassá-las:

"*Quando esta prova é conduzida em detalhes*, *r*, *é claro, não é definida indiretamente com a ajuda de seu significado*, *mas em termos de sua estrutura meramente formal*", onde *r* é uma relação definível em termos de funções recursivas primitivas.

Juntar-se-ia, então, aos objetivos expostos anteriormente o de conduzir a prova em detalhes e em termos da *estrutura meramente formal*. É com este objetivo que são propostos tanto os conceitos puros (§1) quanto os conceitos n (§2) do Capítulo II.

Neste momento tudo parecia bem, talvez meu último grande problema (fora o trabalho maçante de aritmetizar o formalismo) fosse o de dar uma descrição metalingüística uniforme do esquema da recursão. Isso me parecia possível pelo fato de, para um sistema apresentado por Church em *Introduction to Mathematical Logic* e muito parecido com S_2, as definições de soma e multiplicação serem já razoavelmente uniformes. Contudo, minhas primeiras (e inúmeras) tentativas foram frustradas e eu não conseguia encontrar uma descrição metalingüística que preservasse as propriedades $\cap$ de suas subfórmulas, apesar de ter encontrado já neste primeiro momento algumas descrições pelo menos à primeira vista corretas desse esquema.

Além disso, eu não conseguia provar que a multiplicação, tal como definida por Church ,possuia as propriedades metamatemáticas relevantes para "conduzir a prova em detalhes e em termos da estrutura meramente formal"—o que obviamente não quer dizer não haja tal prova. Tendo em vista que os resultados para a adição não foram difíceis de alcançar, imaginei que o análogo pudesse ser obtido para a multiplicação; e então, rendendo-me à função β, poderia estabelecer diretamente a incompletude do sistema S_2. Como tal não se deu, a solução provisória foi, então, adicionar em S_2 axiomas para a soma e para a multiplicação, permitindo deste modo que eu pudesse substituir a seção sobre a teoria da recursão (na qual deveria ser demonstrado o Teorema da Definições Recursivas do título) por seções que tratassem separadamente das propriedades metamatemáticas da soma e da multiplicação em uma extensão S_3 do sistema S_2 (tanto o sistema S_3 quanto as seções supracitadas não fazem parte da redação final desta dissertação); em outras palavras, eu havia abandonado o objetivo de formalizar diretamente a teoria das funções recursivas em S_2.

Entretanto, após a elaboração de uma teoria da ordem (dos números naturais) em S_3 (que também não faz parte da redação final desta dissertação) nos moldes das teorias da ordem mais comuns (baseadas na soma e cuja lógica subjacente é a de primeira ordem), notei que talvez eu pudesse conseguir uma descrição metalingüística adequada do **esquema da recursão,** utilizando as ferramentas da teoria da ordem. Além disso, notei que existia uma prova de que a contrapartida do **esquema da recursão** que eu acabara de conceber produz **efetivamente funções** quando aplicado a **funções efetivamente calculáveis** (os resultados estão em §6, Capítulo II) e que tal prova seria análoga àquela do Teorema da Definições por Indução de Richard Dedekind (p.43, Teorema 126, *Essays on the Theory of Numbers*), embora o objetivo de Dedekind fosse diferente do meu. Na verdade, Dedekind demonstra, baseando-se na extensionalidade de seu *Sistema de Objetos*, que o esquema de recursão produz uma **única** função, enquanto, para meus propósitos, bastava que produzisse uma **função**, sendo irrelevante sua unicidade ou, mais precisamente, bastava que eu tivesse sempre em mãos, devido à necessidade de efetividade dos cálculos, a prova da **funcionalidade** da relação produzida pelo esquema.

Para abreviar, embora eu ainda não esteja seguro de que não existam provas mais simples para tais resultados e de que formulações mais simples possam cumprir papel da contrapartida do esquema de recursão apresentado (utilizando, por exemplo, ferramentas de minimização), finalmente eu encontrara uma prova **detalhada** de um teorema equivalente ao **Teorema V** de Gödel (o nosso **Teorema 7.2**) em termos da **estrutura meramente formal**.

Contudo−devo chamar atenção− ao contrário do que eu esperava, não houve ganhos em termos de simplificação: minha prova de que as funções recursivas são representáveis em S_2 é, na verdade, mais complexa do que as provas (mais difundidas) baseadas na codificação de seqüências numéricas finitas ou na função β e que podem ser levadas a cabo em sistemas muito mais fracos do que S_2 (por exemplo, nos sistemas Q e R de Rosser).

Obviamente, existem aspectos em que minha abordagem mostra força, por exemplo: todas as funções recursivas são representáveis em S_2, e isso é tudo; no caso das aritméticas de primeira ordem, todas as funções recursivas são nelas representáveis *porque* duas ou três delas o são. Em outras palavras, o sistema S_2 trata de funções numéricas porque trata antes de números, enquanto as aritméticas de primeira ordem (tanto fracas como fortes) tratam de funções numéricas porque desde sempre já estavam tratando de funções numéricas.

Além disso, surgiu um problema **adicional**, como ficou implícito, e também um outro, por assim dizer, **residual**. O problema adicional: tornou-se necessário, para que fosse possível aplicar o argumento acima em S_2, que eu estabelecesse uma teoria da ordem dos naturais em S_2, objetivo que não foi totalmente alcançado (contudo, resultados parciais podem ser encontrados na seção 5 do capítulo II e na parte correspondente do apêndice). O problema residual: os conceitos de n-representação e n-determinação, mostrando-se mais adequados ao tratamento de aritméticas de primeira ordem, perderam um pouco de sua força em favor do conceito, concebido tardiamente, de n-cálculo (cf. §2, Capítulo II e, por exemplo, o **Teorema 6.2** do Capítulo II).

Em todo caso, para cumprir ao menos parcialmente meus objetivos iniciais: primeiro, mostrei (cf. §1, Capítulo III) como transformar os resultados das seções de Kleene sobre funções recursivas primitivas em resultados metamatemáticos para S_2, enquanto o ideal seria o desenvolvimento, por assim dizer, interno de tais resultados; depois, fiz indicações de (cf. §§2-4, Capítulo III) como aritmetizar a sintaxe S_2, o ideal seria levá-la a cabo em todos seus detalhes; e, finalmente, demonstrei duas formas do teorema da incompletude para S_2 (Capítulo IV), enquanto o ideal seria estabelecer uma série de variantes e corolários do teorema – principalmente, em um sistema como S_2 rico em definições parciais de verdade.

Com a intenção de facilitar a leitura, as provas do Capítulo II são apresentadas em apêndice.

Capítulo I
Teoria Simples dos Tipos e Aritmética: Linguagem e Axiomática Formal

Neste capítulo, introduziremos as linguagens L_1 e L_2 (**§1** e **§2** respectivamente): L_1 será uma linguagem pura para a teoria simples dos tipos; L_2, adicionalmente, incluirá termos abertos e numerais de tipo *i*. Ventilaremos, ainda em **§1**, algumas considerações sobre uma possível definição de verdade matematicamente adequada e aplicável às fórmulas de L_1. Introduziremos também operações de substituição tanto em L_1 quanto em L_2 (**§3**). Além disso, apresentaremos os sistemas formais S_1 e S_2 em **§4** e **§5**. O sistema S_1 será uma formalização (parcial, na medida em que, por princípio, o argumento gödeliano é aplicável a S_1) da teoria simples dos tipos; enquanto o sistema S_2 será uma formalização (parcial) da aritmética sem nenhuma restrição de ordem (alguns autores, devido à aritmetização da análise, chamariam tal sistema de análise). E, finalmente, em **§6** e **§7** apresentaremos regras de derivação aplicáveis aos sistemas formais S_1 e S_2 bem como alguns de seus teoremas mais úteis sem nenhuma justificação formal; o objetivo aqui é estabelecer uma notação uniforme que permita abreviar as demonstrações dos capítulos posteriores.

§1. A Linguagem L_1

Definimos, primeiramente, as *matrizes típicas* de L_1:

M_0: '*i*' é uma matriz típica;

M_1: Se t_1 e t_2 e ... e t_n são matrizes típicas, então $(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma matriz típica.

Definimos, então, as *variáveis* de L_1:

V_0: Se σ é uma seqüência finita de ocorrências de '*v*' e μ é uma matriz típica, então $\sigma\mu$ é uma variável de tipo μ.(1)

Nota sobre variáveis. Escrevemos x_1 em lugar de *v*, x_2 em lugar de *vv*, x_3 em lugar de *vvv*, x_4 em lugar de *vvvv*, e, em geral, x_n em lugar de uma seqüência de ocorrências de '*v*' de comprimento *n*. Escreveremos também *x* em lugar de *v*, *y* em lugar de *vv*, *z* em lugar de *vvv*, *w* em lugar de *vvvv*.

O *vocabulário* de L_1 é constituído pelos símbolos: $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, ~,), (, ,, e pelas variáveis de L_1.

---

1. Para facilitar a leitura as matrizes serão sobrescritas; assim, usaremos σ^μ para $\sigma\mu$.

Definimos as *fórmulas atômicas* de L_1:

F_0: Se ϖ é uma variável cuja matriz típica é $(t_1, t_2, ..., t_n)$ e $\varpi_1, \varpi_2, ..., \varpi_n$ são variáveis cujas matrizes típicas são respectivamente $t_1, t_2, ..., t_n$, então $\varpi(\varpi_1, \varpi_2, ..., \varpi_n)$ é uma fórmula atômica.

Definimos, agora, as *fórmulas* de L_1:

F_1: Toda fórmula atômica é uma fórmula;

F_2: Se α, β são fórmulas, ϖ é uma variável, $*$ é $\supset$ ou $\wedge$ ou $\vee$, Q é $\forall$ ou $\exists$; então $(\alpha * \beta)$, $\sim\alpha$, $Q\varpi\,\alpha$ são fórmulas.

Algumas abreviações:

Se α e β são fórmulas de L_1, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ *é abreviação de* $((\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha))$;

Se $\boldsymbol{x}^t$ e $\boldsymbol{y}^t$ são variáveis de tipo t de L_1; $\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{y}^t$ *é abreviação de* $\forall x^{(t)}(x^{(t)}(\boldsymbol{x}^t) \leftrightarrow x^{(t)}(\boldsymbol{y}^t))$; e $\boldsymbol{x}^t \neq \boldsymbol{y}^t$ *é abreviação de* $\sim\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{y}^t$;

$\forall x^i_n / x^i_{n+m}$ *é abreviação de* $\forall x^i_n \forall x^i_{n+1} ... \forall x^i_{n+m}$;

$\exists x^i_n / x^i_{n+m}$ *é abreviação de* $\exists x^i_n \exists x^i_{n+1} ... \exists x^i_{n+m}$.

Nota sobre a aritmetização de L_1. Os conceitos metalingüisticos de L_1 podem ser aritmetizados atribuindo os números de Gödel 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, respectivamente, a $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\sim$,), (, ›, *v*, *i* e usando o Teorema Fundamental da Aritmética[(2)] na determinação do número de Gödel de expressões. Assim, $2^1.3^3.5^0.7^2.11^3.13^0.17^4.19^4.23^3.29^1.31^1.37^0.41^2.43^1.47^1.53^1.59^3.61^0.67^4.71^4$ é, por exemplo, o número de Gödel de $v^{(i,\,(i))}(vv^i, vvv^{(i)})$.

Nota sobre as interpretações de L_1. A idéia subjacente às interpretações das linguagens formais para teorias dos tipos em geral − e para L_1 em particular − é estabelecer um domínio de significação D_t para as variáveis de tipo *t* e, a partir dele, estabelecer domínios de significação para os demais tipos de variáveis respeitando algumas restrições que evitem os paradoxos da teoria dos conjuntos. Seguindo Russell e Whitehead[(3)], se os homens são, por exemplo, os possíveis valores das variáveis das funções proposicionais "... é filho de Laio", "... é pai de Desdêmona" e "... é irmão de um rei", os homens serão, neste caso, o domínio de significação dessas variáveis. Suponhamos agora que os homens são o domínio de significação das variáveis de tipo *t*; então, um possível valor para as variáveis de tipo $(t, (t))$ será "... é irmão de um ...",

2. Um dos enunciados do Teorema é "Para qualquer número natural *n* maior que 0, existe uma única decomposição de *n* em fatores primos"; conferir, por exemplo, Milies, César Polcino e Coelho, Sônia Pitta, *Números: Uma Introdução á Matemática*, pp.77-86.

3. Whitehead, Alfred North e Russell, Bertrand, *Principia Mathematica*, Vol. I, Introduction, II, pp.47-8.

expressão com a qual poderíamos construir, por exemplo, a sentença "Ronaldinho é irmão de um futebolista famoso". Do mesmo modo, um possível valor para variáveis de tipo (t, t) seria "... é pai de ...", com a qual poderíamos construir a sentença "Domingos da Guia é pai de Ademir da Guia"; contudo, todo cuidado deve ser tomado para que "... é pai de ..." nunca seja um valor para variáveis de tipo $(t, (t))$.

Esboço de uma interpretação extensional para L_1. Afim de obtermos uma definição matematicamente adequada de *verdade segundo uma interpretação* e, a partir daí, dos conceitos semânticos de satisfação e verdade para L_1[4], podemos, por exemplo, associar às variaveis de cada tipo especificado uma seqüência infinita de valores, de modo que os valores de verdade de todas as fórmulas atômicas e, conseqüentemente, de todas as fórmulas de L_1 sejam, por meio dos métodos tarskianos de definição de verdade, determinados pela associação.

Um pouco mais detalhadamente, uma seqüência $\langle s^i_1, s^i_2, ..., s^i_n, ...\rangle$, cujos membros são elementos de um domínio D_i especificado de indivíduos (chamado domínio de significação das variáveis de tipo i), deverá ser associada às variáveis de tipo i; uma seqüência $\langle s^{(i)}_1, s^{(i)}_2, ..., s^{(i)}_n, ...\rangle$, cujos membros serão subconjuntos de D_i (abreviadamente, cujos membros serão elementos de $\mathsf{P}(\mathsf{D}_i)$, ou seja, elementos do conjunto potência de D_i), deverá ser associada às variáveis de tipo (i); uma seqüência cujos membros são elementos de $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathsf{D}_i))$ deverá ser associada às variárias de tipo $((i))$, e assim sucessivamente. Agora, se denotarmos D_i por $\mathsf{P}^0(\mathsf{D}_i)$; $\mathsf{P}(\mathsf{D}_i)$ (ou seja, o conjunto potência de D_i) por $\mathsf{P}^1(\mathsf{D}_i)$ e, mais genericamente, se denotarmos a aplicação a D_i da potenciação n vezes reiterada por $\mathsf{P}^n(\mathsf{D}_i)$; então, seqüências cujos membros são, por exemplo, elementos de $\mathsf{P}^1(\mathsf{D}_i) \times \mathsf{P}^3(\mathsf{D}_i)$ poderão ser associadas às variáveis de tipo $((i), (((i))))$ e aquelas cujos membros são elementos de $(\mathsf{P}^0(\mathsf{D}_i) \times \mathsf{P}^0(\mathsf{D}_i)) \times \mathsf{P}^1(\mathsf{D}_i)$ poderão ser associadas às variáveis de tipo $((i, i), (i))$. Notemos que tal procedimento acabaria por associar seqüências infinitas às variáveis de cada um dos tipos sem, entretanto, permitir um curto-circuito de domínios de significação, ou seja, sem permitir que diferentes tipos de variáveis sejam associados a domínios que compartilhem elementos.

Consideremos uma função I que associe a cada um dos tipos de variáveis de L_1 uma seqüência, cujos membros são elementos de domínios submetidos às restrições do parágrafo anterior; e chamemos tal função de uma *interpretação* (extensionalmente correta) de L_1. Agora, se supusermos que

4. Peter B. Andrews em *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory*: *To Truth Through Proof* (pp.185-7) faz uma apresentação completa de uma semântica formal para uma linguagem da teoria simples dos tipos; contudo, a linguagem de Andrews difere bastante em relação a L_1 quanto às estratégias de formalização.

uma interpretação I foi atribuída adequadamente a L_1, poderemos, então, determinar os valores de verdade de todas as fórmulas atômicas (e, conseqüentemente, de todas as fórmulas) de L_1. Por exemplo, a fórmula $x^{(t)}_j(x^t_i)$ será verdadeira se e somente se $s^t_i \in s^{(t)}_j$, onde I associa $\langle s^t_1, s^t_2, ..., s^t_n, ...\rangle$ às variáveis de tipo t, e $\langle s^{(t)}_1, s^{(t)}_2, ..., s^{(t)}_n, ...\rangle$ às variáveis de tipo (t); ou seja, o sobrescrito da variável determina o tipo de seqüência que lhe é associada e o subescrito, o lugar na seqüência no qual devemos procurar seu valor.

§2. A Linguagem L_2

As definições de matriz típica e variáveis de L_2 são as mesmas de L_1.

Definimos os *numerais* de L_2:

N_0: 0 é um numeral.

N_1: Se σ é uma seqüência finita de ocorrências de '*s*', então $\sigma 0$ é um numeral.

Observações sobre numerais. Os numerais de L_2 são *constantes de tipo i*; numerais de complexidade $n+1$ serão denotados sucintamente por $\overline{n}$ ou, ainda, por s^n0.

Definimos, agora, os *termos de tipo i* de L_2:

T_0: Todo numeral é um termo;

T_0': Se σ é uma seqüência finita de ocorrências de '*s*' e ϖ é uma variável de tipo *i*, então $\sigma\varpi$ é um termo (no caso, um termo aberto);

O *vocabulário* de L_2 é constituído pelos respectivos símbolos: $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, ~,), (, ›, pelas variáveis, e pelos termos de L_2.

Definimos as *fórmulas atômicas* de L_2:

F_0: Se ϖ é uma variável de tipo $(t_1, t_2, ..., t_n)$ e $\varpi_1, \varpi_2, ..., \varpi_n$ são variáveis ou termos cujos tipos são respectivamente $t_1, t_2, ..., t_n$, então $\varpi(\varpi_1, \varpi_2, ..., \varpi_n)$ é uma fórmula atômica.

E, finalmente, definimos as *fórmulas* de L_2 por meio das mesmas regras F_1 e F_2 de L_1.

§3. Operações de Substituição em L_1 e L_2

Operação de *substituição de variáveis* em uma fórmula de L_1 (de L_2):

S: Se α é uma fórmula e $\varpi_1, \varpi_2, ..., \varpi_n$ são variáveis, então $[\alpha](\varpi_1, \varpi_2; \varpi_3, \varpi_4; ...; \varpi_{n-1}, \varpi_n)$ é o resultado da substituição das ocorrências da variável ϖ_1 por ocorrências da variável ϖ_2, da variável ϖ_3 por ocorrências da variável ϖ_4, ..., da variável ϖ_{n-1} por ocorrências da variável ϖ_n em α.

A operação de *substituição de variáveis livres por variáveis* (5) *ou termos* em uma fórmula de L_1 (de L_2) é definida indutivamente:

S_0: Se α é uma fórmula atômica e ϖ e τ são variáveis (ou τ é um termo) de mesmo tipo, então $[\alpha]^{\varpi}_{\tau}$ é o resultado da substituição de todas as ocorrências da variável ϖ em α por ocorrências de τ;

S_1: Se α e β são fórmulas e ϖ e τ são variáveis (ou τ é um termo) de mesmo tipo, então

$[\alpha \supset \beta]^{\varpi}_{\tau}$ é igual a $[\alpha]^{\varpi}_{\tau} \supset [\beta]^{\varpi}_{\tau}$,

$[\alpha \wedge \beta]^{\varpi}_{\tau}$ é igual a $[\alpha]^{\varpi}_{\tau} \wedge [\beta]^{\varpi}_{\tau}$,

$[\alpha \vee \beta]^{\varpi}_{\tau}$ é igual a $[\alpha]^{\varpi}_{\tau} \vee [\beta]^{\varpi}_{\tau}$,

$[\sim\alpha]^{\varpi}_{\tau}$ é igual a $\sim[\alpha]^{\varpi}_{\tau}$;

$[\forall\varpi_1\alpha]^{\varpi}_{\tau}$ é igual a $\forall\varpi_1[\alpha]^{\varpi}_{\tau}$, para variáveis distintas ϖ_1 e ϖ,

$[\exists\varpi_1(\alpha)]^{\varpi}_{\tau}$ é igual a $\exists\varpi_1[\alpha]^{\varpi}_{\tau}$, para variáveis distintas ϖ_1 e ϖ;

S_2: Se α é uma fórmula e ϖ_1 e ϖ_2 são variáveis quaisquer, então

$[\forall\varpi_1\alpha]^{\varpi_1}_{\varpi_2}$ é igual a $\forall\varpi_1\alpha$,

$[\exists\varpi_1\alpha]^{\varpi_1}_{\varpi_2}$ é igual a $\exists\varpi_1\alpha$;

§4. O Sistema S_1

O sistema abaixo é baseado nos postulados dos grupos A1 e A2 do sistema de *Introduction to Metamathematics* de Kleene (p.82) aplicados à linguagem L_1. A diferença essencial está na introdução do axioma A_{13}, o axioma da compreensão.

---

5. Uma definição desse tipo de substituição (um tanto diferente da mais usual) é apresentada por Raimond M. Smullyan em *First-Order Logic* (p.44).

Os *axiomas* de S_1 são instâncias dos esquemas [6]:

A_1: $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$;

A_2: $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset (\alpha \supset \gamma))$;

A_3: $\alpha \supset (\beta \supset (\alpha \wedge \beta))$;

A_4: $(\alpha \wedge \beta) \supset \alpha$;

A_5: $(\alpha \wedge \beta) \supset \beta$;

A_6: $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$;

A_7: $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$;

A_8: $(\alpha \supset \delta) \supset ((\beta \supset \delta) \supset ((\alpha \vee \beta) \supset \delta))$;

A_9: $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset {\sim}\beta) \supset {\sim}\alpha)$;

A_{10}: ${\sim}{\sim}\alpha \supset \alpha$;

A_{11}: $\forall \varpi_1 \alpha \supset [\alpha]^{\varpi_1}_{\varpi_2}$;

A_{12}: $\alpha \supset \exists \varpi_2 [\alpha]^{\varpi_1}_{\varpi_2}$;

A_{13}: $\exists \varpi \forall \varpi_1 \forall \varpi_2 \ldots \forall \varpi_n (\varpi(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n) \leftrightarrow \alpha)$, desde que $[\alpha]^{\varpi}_{\varpi_i}$ seja α para qualquer variável ϖ_i; no caso, $\varpi, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ são variáveis cujas matrizes típicas são, respectivamente, $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

As regras de *inferência* de S_1 são:

I_1: De α e $\alpha \supset \beta$ infere-se β;

I_2: De $\alpha \supset \beta$ infere-se $\alpha \supset \forall \varpi_2 [\beta]^{\varpi_1}_{\varpi_2}$, desde que nenhuma variável ϖ_1 ocorra em α e nenhuma variável ϖ_2 ocorra em β;

I_3: De $\alpha \supset \beta$ infere-se $\exists \varpi \alpha \supset \beta$, com as mesmas restrições de I_2.* Para facilitar a leitura as matrizes serão

6. Omitiremos freqüentemente os parenteses externos e os parenteses cuja ambigüidade gerada pela falta é logicamente inessencial (no sentido em que as duas possibilidades de leitura da fórmula $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ são logicamente equivalentes).

E, finalmente, definimos *derivação* de uma fórmula em S_1 a partir de um conjunto:

D_0: $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$ é uma *derivação* de α_n (em S_1) a partir de H [escrevemos $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle_{\mathsf{H}}$] se e somente se, para todo α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, (*a*) α_i é um axioma ou (*b*) α_i é um elemento de H ou (c_1) α_i é inferido de α_j e α_l por I_1, onde $j < i$ e $l < i$ ou (c_2) α_i é inferido de α_j por I_2 ou I_3, onde $j < i$.

Derivações a partir do conjunto vazio são chamadas *provas* (em S_1). Se existe uma derivação de α a partir de H, dizemos que α é *derivável* de H e escrevemos $\mathsf{H} \vdash_{\mathsf{S}_1} \alpha$. Se existe uma prova de α, dizemos que α é um *teorema* de S_1 e escrevemos $\vdash_{\mathsf{S}_1} \alpha$.

§5. O Sistema S_2

No sistema S_2 (definido em L_2), além de acrescentarmos as contrapartidas formais dos axiomas de Peano, estenderemos a validade dos axiomas A_{11} e A_{12} para termos, tais axiomas passam a ter a seguinte formulação (onde τ é um termo livre para ϖ em α[7] e ϖ é uma variável qualquer):

A_{11}: $\forall \varpi \alpha \supset [\alpha]^{\varpi}_{\tau}$;

A_{12}: $[\alpha]^{\varpi}_{\tau} \supset \exists \varpi \alpha$;

As contrapartidas formais dos axiomas de Peano são:

P_1: $\forall x^i_1 (s x^i_1 \neq 0)$;

P_2: $\forall x^i_1 \forall x^i_2 (s x^i_1 = s x^i_2 \supset x^i_1 = x^i_2)$;

P_3: $\forall x^{(i)}_1 ((x^{(i)}_1(0) \wedge \forall x^i_1 (x^{(i)}_1(x^i_1) \supset x^{(i)}_1(s x^i_1))) \supset \forall x^i_1 (x^{(i)}_1(x^i_1)))$.

As definições de derivação, prova e teorema para S_2 são modificações óbvias das definições apresentadas na seção anterior.

7. Para uma definição de *termo livre para* ϖ *em* α, conferir: Kleene, S. C.. *Introduction to Metamathematics*, p.79.

§6. Coletânea de Regras Aplicaveis a S_1 e S_2

Apresentaremos, no próximo capítulo, esquemas da forma:

(1)	H_1	$\vdash_{\mathsf{S}}$	β_1	Tal e Tal
(2)	H_2	$\vdash_{\mathsf{S}}$	β_2	Tal e Tal
(3)	H_3	$\vdash_{\mathsf{S}}$	β_3	Tal e Tal
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(n)	H_n	$\vdash_{\mathsf{S}}$	β_n	Tal e Tal

$1, 2, 3, ..., n$ são chamados os números de linha, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ são fórmulas, $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, ..., \mathsf{H}_n$ são chamadas dívidas das respectivas linhas e Tal e Tal é o comentário da linha. Tais esquemas podem ser usados para construir uma derivação de β_n a partir de H_n, tanto em S_1 quanto em S_2 (obviamente, respeitando os respectivos âmbitos das variáveis metalingüísticas). Apresentaremos abaixo uma coletânea desses esquemas (chamados esquemas de *dedução*); omitiremos, contudo, os algoritmos de construção das respectivas derivações.

Eliminação da Conjunção. Seja α_j uma das fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ e sejam as linhas de (1) até (n+m-1) um esquema de dedução, então as linhas abaixo até (n+m) são também um esquema de dedução.

(1)	H_1	$\vdash_{\mathsf{S}}$	β_1	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(n)	H	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$((\cdots(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \cdots) \wedge \alpha_n)$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(n+m-1)	H_2	$\vdash_{\mathsf{S}}$	β_j	
(n+m)	H	$\vdash_{\mathsf{S}}$	α_j	E($\wedge$)(n)

As condições para os esquemas abaixo serem esquemas de dedução serão tratadas como óbvias e ficarão subentendidas, o que nos permite evitar repetições de condições tais como: “se as linhas de (1) até (n+m-1) são um esquema de dedução, então as linhas até (n+m) também serão um esquema de dedução.” e “se as linhas de (1) até (m-1) são um esquema de dedução, então as linhas até (m) serão também um esquema de dedução.”

Introdução da Conjunção.

(k)	G	$\vdash_{\mathsf{S}}$	α_1	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(n)	H	$\vdash_{\mathsf{S}}$	α_2	

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(n+m) \quad H \cup G \vdash_S \alpha_1 \wedge \alpha_2 \qquad I(\wedge)(k,n)$

Negação do Conjuntivo. Seja α_j uma das fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$(n) \quad H \vdash_S \sim\alpha_j$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(m) \quad H \vdash_S \sim((\cdots(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \cdots) \wedge \alpha_n) \qquad I_2(\wedge)(n)$

Modus Ponens.

$(n) \quad H \vdash_S \alpha_1 \supset \alpha_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(k) \quad G \vdash_S \alpha_1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(m) \quad H \cup G \vdash_S \alpha_2 \qquad E(\supset)(n,k)$

Modus Tolens.

$(n) \quad H \vdash_S \sim\alpha_1 \supset \sim\alpha_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(k) \quad G \vdash_S \alpha_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(m) \quad H \cup G \vdash_S \alpha_1 \qquad E_2(\supset)(n,k)$

Ou ainda:

$(n) \quad H \vdash_S \alpha_1 \supset \alpha_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(k) \quad G \vdash_S \sim\alpha_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(m) \quad H \cup G \vdash_S \sim\alpha_1 \qquad E_2(\supset)(nk)$

Eliminação do Condicional por meio da Disjunção.

$(n) \quad H \vdash_S \alpha_1 \vee \alpha_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(k) \quad G \vdash_S \alpha_1 \supset \beta$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(l) \quad G \vdash_S \alpha_2 \supset \beta$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(m) \quad H \cup G \vdash_S \beta \qquad E_3(\supset)(n,k,l)$

Introdução do Condicional.

(n)	$H \cup \{\beta\}$	$\vdash_S$	α	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\beta \supset \alpha$	$I(\supset)(n)$

Introdução do Condicional.

(n)	H	$\vdash_S$	α	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\beta \supset \alpha$	$I_2(\supset)(n)$

Introdução do Condicional.

(n)	H	$\vdash_S$	$\sim\beta$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\beta \supset \alpha$	$I_3(\supset)(n)$

Introdução do Bicondicional.

(n)	H	$\vdash_S$	$\alpha_1 \supset \alpha_2$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(k)	G	$\vdash_S$	$\alpha_2 \supset \alpha_1$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	$H \cup G$	$\vdash_S$	$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$	$I(\leftrightarrow)(n,k)$

Eliminação da Disjunção.

(n)	H	$\vdash_S$	$\alpha \vee \beta$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
($n+k$)	G	$\vdash_S$	$\sim\alpha$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
($n+m$)	$H \cup G$	$\vdash_S$	β	$E(\vee)(n,k)$

Ou ainda:

(n)	H	$\vdash_S$	$\alpha \vee \beta$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
($n+k$)	G	$\vdash_S$	$\sim\beta$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
($n+m$)	$H \cup G$	$\vdash_S$	α	$E(\vee)(n,k)$

Introdução da Disjunção.

$$
\begin{array}{llll}
(n) & H & \vdash_S \alpha & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(m) & H & \vdash_S \beta \vee \alpha & \mathrm{I}(\vee)(n)
\end{array}
$$

Ou ainda:

$$
\begin{array}{llll}
(n) & H \cup \{\beta\} & \vdash_S \alpha & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(n+m) & H & \vdash_S \alpha \vee \beta & \mathrm{I}(\vee)(n)
\end{array}
$$

Redução por Absurdo.

$$
\begin{array}{llll}
(n) & \{\sim\beta\} & \vdash_S \sim\alpha & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(k) & H & \vdash_S \alpha & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(m) & H & \vdash_S \beta & \mathrm{R}(\sim)(n,k)
\end{array}
$$

Ou ainda:

$$
\begin{array}{llll}
(n) & \{\beta\} & \vdash_S \sim\alpha & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(k) & H & \vdash_S \alpha & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(m) & H & \vdash_S \sim\beta & \mathrm{R}(\sim)(n,k)
\end{array}
$$

Instanciação Universal. Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ variáveis quaisquer e $t_1, t_2, ..., t_n$ termos quaisquer.

$$
\begin{array}{llll}
(n) & H & \vdash_S \forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n \alpha(v_1, v_2, ..., v_n) & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(m) & H & \vdash_S \alpha(t_1, t_2, ..., t_n) & \mathrm{E}(\forall)(n)
\end{array}
$$

Generalização Universal.

$$
\begin{array}{llll}
(n) & H & \vdash_S \alpha(v_1, v_2, ..., v_n) & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(m) & H & \vdash_S \forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n \alpha(v_1, v_2, ..., v_n) & \mathrm{I}(\forall)(n)
\end{array}
$$

Desde que $v_1, v_2, ..., v_n$ não ocorram em fórmulas de H.

Generalização Existencial.

(n)	H	$\vdash_S$	α	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\exists v\alpha(v)$	I($\exists$)(n)

Instanciação Existencial.

(n)	H	$\vdash_S$	$\exists v\alpha(v)$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H,$\alpha(t)$	$\vdash_S$	β	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(o)	H	$\vdash_S$	β	E($\exists$)(n,m)

Introdução de Hipóteses.

(n)	{n}	$\vdash_S$	α	H

Introdução de Teoremas. Seja α um teorema S.

(n)	$\varnothing$	$\vdash_S$	α	T

Equivalências entre Conjunção e Disjunção.

(n)	H	$\vdash_S$	$((\cdots(\sim\alpha_1 \wedge \sim\alpha_2) \wedge \cdots) \wedge \sim\alpha_n)$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\sim((\cdots(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \cdots) \vee \alpha_n)$	($\wedge\leftrightarrow\vee$)($n$)

Ou ainda:

(n)	H	$\vdash_S$	$\sim((\cdots(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \cdots) \vee \alpha_n)$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$((\cdots(\sim\alpha_1 \wedge \sim\alpha_2) \wedge \cdots) \wedge \sim\alpha_n)$	($\wedge\leftrightarrow\vee$)($n$)

Equivalências entre Conjunção e Condicional.

(n)	H	$\vdash_S$	$\sim(\alpha \wedge \beta)$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\alpha \supset \sim\beta$	($\wedge\leftrightarrow\supset$)($n$)

Intercâmbio de Quantificadores.

(n)	H	$\vdash_S$	$\forall \boldsymbol{x}\alpha$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\sim\exists \boldsymbol{x}\sim\alpha$	$(\forall\leftrightarrow\sim\exists\sim)(n)$

Intercâmbio de Quantificadores.

(n)	H	$\vdash_S$	$\sim\forall \boldsymbol{x}\alpha$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\exists \boldsymbol{x}\sim\alpha$	$(\sim\forall\leftrightarrow\exists\sim)(n)$

Intercâmbio de Quantificadores.

(n)	H	$\vdash_S$	$\exists \boldsymbol{x}\alpha$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\sim\forall \boldsymbol{x}\sim\alpha$	$(\exists\leftrightarrow\sim\forall\sim)(n)$

Intercâmbio de Quantificadores.

(n)	H	$\vdash_S$	$\sim\exists \boldsymbol{x}\alpha$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\forall \boldsymbol{x}\sim\alpha$	$(\sim\exists\leftrightarrow\forall\sim)(n)$

τ, τ_1 e τ_2 serão abaixo termos quaisquer.

Introdução da Identidade.

(n)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\tau = \tau$	I(=)

Simetria da Identidade.

(n)	H	$\vdash_S$	$\tau_1 = \tau_2$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	H	$\vdash_S$	$\tau_2 = \tau_1$	Sim(=)(n)

Ou ainda:

(n)	H	$\vdash_S$	$\tau_1 \neq \tau_2$	
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
($n+m$)	H	$\vdash_S$	$\tau_2 \neq \tau_1$	Sim(=)(n)

Substituições.

$$\begin{array}{llll}
(n) & \mathsf{H} & \vdash_{\mathsf{S}} \tau_1 = \tau_2 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(k) & \mathsf{G} & \vdash_{\mathsf{S}} \alpha(\tau_1) & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(m) & \mathsf{H} \cup \mathsf{G} & \vdash_{\mathsf{S}} \alpha(\tau_2) & \text{Subs}(=)(n, k)
\end{array}$$

Ou ainda:

$$\begin{array}{llll}
(n) & \mathsf{H} & \vdash_{\mathsf{S}} \tau_1 = \tau_2 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(k) & \mathsf{G} & \vdash_{\mathsf{S}} \alpha(\tau_2) & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(m) & \mathsf{H} \cup \mathsf{G} & \vdash_{\mathsf{S}} \alpha(\tau_1) & \text{Subs}(=)(n, k)
\end{array}$$

A proxima regra é aplicável apenas em S_2.

Indução.

$$\begin{array}{llll}
(n) & \mathsf{H} & \vdash_{\mathsf{S}_2} \alpha(0) & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(n+k) & \mathsf{G} & \vdash_{\mathsf{S}_2} \alpha(v_1) \supset \alpha(sv_1) & \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
(n+m) & \mathsf{H} \cup \mathsf{G} & \vdash_{\mathsf{S}_2} \forall v_1 \alpha(v_1) & \text{Ind}(n, k)
\end{array}$$

§7. Propriedades Básicas da Identidade

Reflexividade da Identidade ou Ref(=). $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x^i(x^i = x^i)$.

Simetria da Identidade ou Sim(=). $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x^i \forall y^i(x^i = y^i \supset y^i = x^i)$;

Transitividade da Identidade ou Trans(=). $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x^i \forall y^i \forall z^i((x^i = y^i \wedge y^i = z^i) \supset x^i = z^i)$;

Univocidade da Identidade ou Uni(=). $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x^i \forall y^i \forall z^i((x^i = y^i \wedge x^i = z^i) \supset y^i = z^i)$.

Capítulo II
Algumas Propriedades Metamatemáticas de Fórmulas de L_1 e L_2 nos sistemas S_1 e S_2

Em termos relativamente vagos, devido à falta de todas as definições relevantes, o **Teorema V** [8] do famoso artigo de Gödel sobre a Incompletude da Aritmética estabelece: "As instâncias de relações ou propriedades definíveis em termos de funções recursivas primitivas são ou demonstráveis ou refutáveis no sistema **P**" (o sistema do artigo de Gödel). Em uma nota de rodapé Gödel comenta, ao mesmo tempo, as limitações da prova apresentada e a possilidade de ultrapassá-las:

"*Quando esta prova é conduzida em detalhes, r, é claro, não é definida indiretamente com a ajuda de seu significado, mas em termos de sua estrutura meramente formal*" [9], onde *r* é uma relação definível em termos de funções recursivas primitivas.

O objetivo das próximas seções será conduzir tal prova em detalhes e em termos da estrutura meramente formal (obviamente, em nosso caso, de S_2).

§1. Distribuição e Determinação em S_1 e S_2

Definição Auxiliar 1. Uma fórmula de L_1 ou L_2, cujas variáveis livres de tipo *i* são exatamente $x^i_1, \ldots, x^i_n$, será denotada por $\mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_n)$.

Convenção Auxiliar. Usaremos S para expressar propriedades que valem indiferentemente para S_1 e S_2.

Definição de Distribuição. Uma fórmula $\mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_n)$ é uma *distribuição* em S − abreviadamente, $\mathsf{D}(\mathrm{F})$ − se e somente se $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x^i_1 / x^i_{n-1} \exists x^i_n \mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_{n-1}, x^i_n)$.

Definição de Determinação. Uma fórmula $\mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_n)$ é uma *determinação* em S − ou, $\mathsf{e}(\mathrm{F})$ − se e somente se $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x^i_1 / \forall x^i_n \forall x^i_{m+1}((\mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_{n-1}, x^i_n) \wedge \mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_{n-1}, x^i_{m+1})) \supset x^i_n = x^i_{m+1})$, onde *m* é o maior índice de variável em $\mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_{n-1}, x^i_n)$.

Definição de Determinação Universal. Uma fórmula $\mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_n)$ é uma *determinação universal* em S − ou, $\mathsf{De}(\mathrm{F})$ − se e somente se $\mathrm{F}(x^i_1, \ldots, x^i_n)$ é uma determinação e uma distribuição em S.

---

8. Kurt Gödel, "On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I", *in* From Frege to Gödel, p.607.

9. Idem, *Ibidem*, p.607, nota 41.

Devemos notar que o conceito de determinação é a contrapartida formal do conceito de função parcial; o conceito de determinação universal é, por sua vez, contrapartida formal do conceito de função (total).

Um exemplo de determinação universal é a fórmula $x_1^i = x_2^i$.

Teorema[(10)] **1.1.** $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x_1^i \exists x_2^i (x_1^i = x_2^i)$, ou seja, $x_1^i = x_2^i$ é uma distribuição em S, ou ainda, $\mathsf{D}(x_1^i = x_2^i)$.

Teorema 1.2. $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x_1^i / x_3^i ((x_1^i = x_2^i \wedge x_1^i = x_3^i) \supset x_2^i = x_3^i)$, ou seja, $\mathsf{e}(x_1^i = x_2^i)$.

Dos teoremas 1.1 e 1.2, então:

Teorema 1.3. $x_1^i = x_2^i$ é uma determinação universal em S.

Definição Auxiliar 2. $s^0\boldsymbol{x}$ denotará $\boldsymbol{x}$, onde $\boldsymbol{x}$ é uma variável individual; $s^n\boldsymbol{x}$ denotará $s\cdots s\boldsymbol{x}$, onde $\boldsymbol{x}$ é uma variável individual ou 0 e $s\cdots s$ é uma seqüência de n, $n > 0$, ocorrências de 's'.

Teorema 1.4. Para quaisquer naturais n e m, $s^n x_1^i = s^m x_2^i$ é uma determinação em S_2.

Além disso:

Teorema 1.5. $s^n x_1^i = x_2^i$ é uma determinação universal em S_2.

Contudo:

Teorema 1.6. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \sim \mathsf{De}(x_1^i = s^n x_2^i)$.

De modo que se S_2 é consistente, então $x_1^i = s^n x_2^i$ não é uma determinação universal.

§2. Conceitos n em S

Definição Auxiliar 3. $\mathrm{F}(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n)$ será a substituição das variáveis livres de $\mathrm{F}(x_1^i, \ldots, x_n^i)$, respectivamente, pelos numerais $\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n$.

Definição de n-representação. Uma fórmula $\mathrm{F}(x_1^i, \ldots, x_n^i)$ é uma n-*representação* em S_2 –ou, abreviadamente, $\mathsf{Rep}(\mathrm{F})$– se e somente se, para quaisquer numerais $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_n$:

a) ou $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathrm{F}(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_n)$;

b) ou $\vdash_{\mathsf{S}_2} \sim\mathrm{F}(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_n)$.

---

10. Lembramos aos leitores que as provas dos teoremas do Capítulo II estão no apêndice.

Observação. Existem dois casos interessantes (e, por assim dizer, limítrofes) relacionados ao conceito de n-representação: o primeiro é o caso no qual uma contradição é derivada em S_2, neste caso, todas as fórmulas de S_2 seriam n-representações; o segundo é o caso no qual o fecho universal de uma fórmula é derivado em S_2, neste caso, tal fórmula seria uma n-representação na medida em que todas as suas instâncias são também deriváveis em S_2.

Definição de n-distribuição. Uma fórmula $F(x^i_1,...,x^i_n,x^i_{n+1})$ é uma n-*distribuição* em S_2 (ou Dn(F)) se e somente se, para quaisquer numerais $\overline{k}_1,...,\overline{k}_n$, existe um numeral $\overline{k}$ tal que $\vdash_{\mathsf{S}_2} F(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k})$.

Definição de n-determinação. Uma fórmula $F(x^i_1,...,x^i_n,x^i_{n+1})$ é uma n-*determinação* em S_2 −ou, en(F)− se e somente se, para quaisquer numerais $\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k}_{n+1},\overline{k}$, se $\vdash_{\mathsf{S}_2} F(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k}_{n+1})$ e $\vdash_{\mathsf{S}_2} F(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k})$, então $\vdash_{\mathsf{S}_2} \overline{k}_{n+1}=\overline{k}$.

Definição de n-determinação universal. Uma fórmula $F(x^i_1,...,x^i_n,x^i_{n+1})$ é uma n-*determinação universal* em S_2 −ou Den(F)− se e somente se $F(x^i_1,...,x^i_n,x^i_{n+1})$ é uma n-determinação e uma n-distribuição.

Definição de n-inconsistência. Um sistema S, definido em L_2, é n-*inconsistente* se e somente se existe uma fórmula $F(x^i_1)$ tal que $\vdash_{\mathsf{S}_2} \exists x^i_1 F(x^i_1)$ e, para todo numeral $\overline{k}$, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \sim F(\overline{k})$, do contrário, S é n-*consistente*.(11)

Definição de n-cálculo. Um esquema de dedução E é um n-*cálculo* para $F(x^i_1,...,x^i_n,x^i_{n+1})$ −$\mathsf{E}(F, x^i_{n+1})$− se e somente se, para quaisquer $\overline{k}_1,...,\overline{k}_n$, a última linha de E seja da forma $\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2} F(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k})$ para algum $\overline{k}$.

Os conceitos metalingüísticos de n-representação, n-distribuição, n-determinação, n-determinação universal e n-consistência serão coletivamente chamados de n-*conceitos*; em contraste com os conceitos de distribuição, determinação e determinação universal da seção anterior ditos *conceitos puros*. Os próximos teoremas estabelecem algumas relações entre tais conceitos.

Teorema 2.1. Se $F(x^i_1,...,x^i_n)$ é uma determinação, então $F(x^i_1,...,x^i_n)$ é uma n-determinação.

Teorema 2.2. Se S_2 é n-consistente e $F(x^i_1,...,x^i_n)$ é uma distribuição, então $F(x^i_1,...,x^i_n)$ é uma n-distribuição.

11. A n-consistência aqui não é nada além daquilo que é normalmente chamado ω-consistência.

Segue-se dos teoremas 2.1 e 2.2, o teorema:

Teorema 2.3. Se S_2 é n-consistente e $F(x_1^i,...,x_n^i)$ é uma determinação universal, então $F(x_1^i,...,x_n^i)$ é uma n-determinação universal.

O teorema abaixo é uma conseqüência imediata das definições:

Teorema 2.4. Se existe um n-cálculo para $F(x_1^i,...,x_n^i)$, então $F(x_1^i,...,x_n^i)$ é uma n-distribuição.

Teorema 2.5. $x_1^i = x_2^i$ é uma n-representação.

Teorema 2.6. Se existe um n-cálculo para $F(x_1^i,...,x_n^i)$ e $F(x_1^i,...,x_n^i)$ é uma determinação universal, então $F(x_1^i,...,x_n^i)$ é uma n-representação.

Teorema 2.7. $x_1^i = x_2^i$ é uma n-determinação universal.

Definição 2.1. Seja $\mathsf{E}(=)$ o esquema de dedução (1) $\varnothing \vdash_S \overline{k} = \overline{k}$ I(=).

Ora, $\mathsf{E}(=)$ é um n-cálculo para $x_1^i = x_2^i$, então:

Teorema 2.8. Existe um n-cálculo para $x_1^i = x_2^i$.

§3. Teoria das Funções Iniciais em S_2

Existem, na teoria das funções recursivas tal como apresentada por Gödel(12) e, depois, aprimorada por Kleene(13), funções a partir das quais podemos, por meio de esquemas apropriados, gerar outras funções recursivas; tais funções foram denominadas por Kleene(14) *funções iniciais*. E, embora não seja necessário (ou mesmo, desejável) expor informalmente aqui a teoria das funções recursivas, notamos que as funções iniciais de Kleene serão uma espécie de guia heurístico da seção.

Abreviação 3.1. Seja $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$ uma abreviação de $sx_1^i = x_2^i$.

Teorema 3.1. $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$ é uma determinação universal em S_2.

Teorema 3.2. Existe um n-cálculo para $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$.

---

12. Kurt Gödel, *Ibidem*, p.602.

13. Stephen Cole Kleene, *Introduction to Metamathematics*, pp.217-220.

14. Idem, *Ibidem*, p.219.

Teorema 3.3. $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$ é uma n-representação e uma n-determinação universal em S_2 (da função "sucessor").

Uma possibilidade de leitura dos resultados é a seguinte: supõe-se estabelecida a relação entre números naturais e numerais de S_2, então, para quaisquer naturais k_1 e k_2, o fato de que "k_2 é *um* sucessor de k_1 é derivável em S_2" e de que "k_2 não é *um* sucessor de k_1 é derivável em S_2" são assegurados por $\mathsf{Rep}(\mathbf{S})$; e, assim, pela combinação dos resultados, se S_2 é consistente, então a fórmula $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$ separa, por meio da derivação, todas as duplas de números naturais; que $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$ seja a definição de uma função (quando nos restringimos aos números naturais) é conseqüência de $\mathsf{Den}(\mathbf{S})$. Notemos, também, que, pelo teorema 3.1, temos que, de todo modo, $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$ é uma função, seja qual for o campo de definição proposto. Em suma, demonstramos que a fórmula supracitada é *formalmente adequada* enquanto contrapartida de uma *função* e que os axiomas de S_2 *formalizam completamente* a função associada a $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$.

Além disso (no sentido preciso de além das características meramente formais), a fórmula $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$ pode ser pensada como uma contrapartida formal para a *função sucessor*; é por esse motivo que "sucessor" (a palavra sucessor) aparece no enunciado do teorema acima. Contudo, uma demonstração rigorosa desse fato demandaria uma definição da própria função sucessor em um ambiente diverso do sistema S_2 (por exemplo, em uma teoria dos conjuntos); as aspas duplas em ' ... "sucessor").' indicam a ausência de tal definição. Em todo caso, os parênteses em '... (da função "sucessor").' denotam que essa ausência é, salvo indicação contrária, irrelevante para os resultados posteriores que dependem do teorema 3.3; devemos lembrar que estamos preocupados apenas com os aspectos meramente formais envolvidos.

O teorema 3.4 ilustrará o fato de que 3.1 não é equivalente ao teorema 1.3.

Abreviação 3.2. Seja $\mathbf{A}(x_1^i, x_2^i)$ uma abreviação de $x_1^i = sx_2^i$.

Teorema 3.4. $\mathbf{A}(x_1^i, x_2^i)$ é uma n-representação (da relação "anteceder"), é uma n-determinação, mas não é uma n-determinação universal em S_2 (desde que S_2 seja consistente).

Abreviação 3.3. Seja $\mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$ uma abreviação de $(\cdots(x_1^i = x_1^i \wedge \cdots) \wedge x_n^i = x_n^i) \wedge \overline{k} = x_{n+1}^i)$.

Teorema 3.5. $\mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$ é uma determinação universal em S_2.

Teorema 3.6. $\mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$ é uma n-representação, uma n-determinação e uma n-determinação universal em S_2 (da função n-ária "constante em k").

Definição 3.1. Seja $\mathsf{E}(\mathbf{C}_k^n)$ o esquema de dedução abaixo:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}=\overline{k}$	I(=)
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k_1}=\overline{k_1}$	I(=)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k_2}=\overline{k_2}$	I(=)
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$(2+n)$	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k_n}=\overline{k_n}$	I(=)
$(3+n)$	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\cdots(\overline{k_1}=\overline{k_1}\wedge\cdots)\wedge\ \overline{k_n}=\overline{k_n})\wedge\overline{k}=\overline{k})$	$\mathrm{I}(\wedge)(2,\ldots,2+n,1)$

Desde que $\mathsf{E}(\mathbf{C}_k^n)$ é um n-cálculo para $\mathbf{C}_k^n(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+1}^i)$, então:

Teorema 3.7. Existe um n-cálculo para $\mathbf{C}_k^n(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+1}^i)$.

Abreviação 3.4. Seja $\mathbf{P}_j^n(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+1}^i)$ uma abreviação de $(\cdots(x_1^i=x_1^i\wedge\cdots)\wedge x_n^i=x_n^i)\wedge x_j^i=x_{n+1}^i)$.

O próximo teorema, diferentemente dos 2 anteriores, será valido para os sistemas S_1 e S_2.

Teorema 3.8. $\mathbf{P}_j^n(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é uma determinação universal em S.

Teorema 3.9. $\mathbf{P}_j^n(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é uma n-representação e uma n-determinação universal em S_2 (da função *n*-ária "projeção do *j*-ésimo argumento").

Definição 3.2. Seja $\mathsf{E}(\mathbf{P}_j^n)$ o esquema de dedução abaixo:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k_1}=\overline{k_1}$	I(=)
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(j)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k_j}=\overline{k_j}$	I(=)
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(n)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k_n}=\overline{k_n}$	I(=)
$(n+1)$	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\cdots(\overline{k_1}=\overline{k_1}\wedge\cdots)\wedge\ \overline{k_j}=\overline{k_j})\wedge\cdots)\wedge\overline{k_j}=\overline{k_j})$	$\mathrm{I}(\wedge)(1,\ldots,n)$
$(n+2)$	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathbf{P}_j^n(\overline{k_1},\ \ldots,\ \overline{k_n},\ \overline{k_j})$	Abreviação 3.4

Desde que $\mathsf{E}(\mathbf{P}_j^n)$ é um n-cálculo para $\mathbf{P}_j^n(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+1}^i)$, então:

Teorema 3.10. Existe um n-cálculo para $\mathbf{P}_j^n(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+1}^i)$.

Quando pensadas em termos informais, as funções "sucessor", "constantes" e "projeções", como foi sugerido anteriormente, são a base da teoria das funções recursivas; coletivamente elas são denominadas "funções iniciais". Pensando nestes termos, os teoremas 3.3, 3.6, 3.9 estabelecem **a)** que as funções iniciais são $\cap$-determináveis em S_2, **b)** de que modo elas podem ser determinadas; e, finalmente, supondo a consistência de S_2, **c)** proporciona métodos de decisão para elas.

§4. Teoria da Composição em S_1 e S_2

Tal como na seção anterior, em que as funções iniciais serviram de guia heurístico, esta seção tentará dar conta, em termos totalmente formais, da maquinária relacionada ao *esquema de substituição*, outro dos elementos da teoria das funções recursivas[15].

Abreviação 4.1. Seja $C(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ uma abreviação de $\forall x_{n+2}^i/x_{n+m+1}^i(\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i, x_{n+2}^i) \wedge \mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+3}^i) \wedge \cdots \wedge \mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+m+1}^i)) \supset \mathbf{F}(x_{n+2}^i,x_{n+3}^i,...,x_{n+m+1}^i,x_{n+1}^i))$.

Teorema 4.1. Se $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ são determinações universais e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$ é uma determinação em S, então $C(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é também uma determinação em S.

Teorema 4.2. Se $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ são determinações universais e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$ é uma determinação universal em S, então $C(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é também uma determinação universal em S.

Comentário. É importante notar que os teoremas 4.1 e 4.2 valem, segundo a denotação de S, para os sistemas S_1 e S_2. Assim, sem entrarmos em considerações sobre a possível distinção entre lógica e matemática, podemos argumentar, mobilizando os teoremas, que a "composição de funções" é uma operação de natureza lógica, mesmo que as próprias funções não o sejam. Uma pergunta análoga pode ser feita em relação à "definição por recursão"; neste caso, se aceitamos a "grande lógica" (teoria dos tipos irrestrita, teoria dos conjuntos), devemos também aceitar a natureza lógica da recursão e tudo está bem. A pergunta intrigante é: o que é necessário aceitar como "lógica" para que a recursão seja considerada uma operação lógica e não uma operação essencialmente aritmética?

15. Cf. Kurt Gödel, *Ibidem*, p.602, nota 27 e Stephen Cole Kleene, *Ibidem*, pp.217-220.

Teorema 4.3. Se $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ são determinações universais e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$ é uma n-representação em S_2, então $\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é uma n-representação em S_2.

Teorema 4.4. Se $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ são n-determinações universais e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$ é uma n-distribuição, então $\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é uma n-distribuição em S_2.

Teorema 4.5. Se $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ são n-determinações universais e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$ é uma n-determinação em S_2, então $\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é também uma n-determinação em S_2.

Os teoremas 4.5 e 4.6 juntos produzem:

Teorema 4.6. Se $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ são n-determinações universais e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$ é uma n-determinação universal em S_2, então $\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é também uma n-determinação universal em S_2.

Teorema 4.7. Se existem n-cálculos para $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$, existe um n-cálculo para $\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$.

§5. Teoria da Ordem em S_2

Antes de enfrentarmos a teoria da recursão da próxima seção, resta-nos ainda uma última etapa intermediária, uma teoria da ordem. Contudo, deixaremos para outra ocasião a apresentação completa das provas dos teoremas abaixo[16](algumas delas podem ser encontradas no apêndice do Capítulo II).

Abreviação 5.1. $\mathsf{S}(x^{(i)})$ *é abreviação de* $x^{(i)}(0) \wedge \forall x_1^i \forall x_2^i((x^{(i)}(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset x^{(i)}(x_2^i))$.

---

16. Em todo caso, dados alguns dos resultados encontrados nas fases preliminares desta investigação, poderíamos desenvolver de maneira alternativa a teoria da ordem. Para tanto, definiríamos, primeiramente, a soma de dois números naturais e demonstraríamos que tal definição apresenta as propriedades metamatemáticas relevantes (é uma determinação, é uma distribuição) sem recorrermos à teoria da recursão da próxima seção. O que é factível. Assim, munidos de tal definição, definiríamos, por sua vez, da maneira usual a relação de ordem e derivaríamos, finalmente, os teoremas relevantes do mesmo modo que eles são derivados nas aritméticas de primeira ordem.

Informalmente, diríamos algo como "se é verdade que $\mathsf{S}\,(x^{(i)})$, então (a extensão de) $x^{(i)}$ é um segmento inicial (não vazio) dos números naturais".

Abreviação 5.2. $\mathsf{S}_n(x_1^i)$ *é abreviação de* $x_1^i = 0 \vee x_1^i = s^1 0 \vee \ldots \vee x_1^i = s^{n\text{-}1}0 \vee x_1^i = s^n 0$.

"$\mathsf{S}_n(x_1^i)$ é o segmento inicial que vai até n".

A notação ultilizada nas próximas abrevições é auto-explicativa.

Abreviação 5.3. $x_1^i \leqslant x_2^i$ *é abreviação de* $\forall x^{(i)}((x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}\,(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i))$.

Abreviação 5.4. $x_1^i < x_2^i$ *é abreviação de* $sx_1^i \leqslant x_2^i$.

Abreviação 5.5. $x_1^i \geqslant x_2^i$ *é abreviação de* $x_2^i \leqslant x_1^i$.

Abreviação 5.6. $x_1^i > x_2^i$ *é abreviação de* $x_2^i < x_1^i$.

Teorema 5.1. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(\mathsf{S}_n(sx_1^i) \supset \mathsf{S}_n(x_1^i))$.

Ou seja, "se o sucessor de um número pertence a um segmento inicial, então este número também pertence ao segmento".

Teorema 5.2. Para qualquer n, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathsf{S}\,(\mathsf{S}_n)$.

Algo como "Um segmento inicial que vai até n é **realmente** um segmento inicial" .

Teorema 5.3. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(x_1^i \leqslant x_1^i)$.

Teorema 5.4. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(x_1^i < sx_1^i)$.

Teorema 5.5. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(x_1^i \leqslant 0 \leftrightarrow x_1^i = 0)$.

Teorema 5.6. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(0 \leqslant x_1^i)$.

Teorema 5.7. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i {\sim}(x_1^i < 0)$.

Teorema 5.8. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant sx_2^i)$.

Teorema 5.9. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i(sx_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i)$.

Teorema 5.10. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(x_1^i \neq 0 \supset \exists x_2^i(sx_2^i = x_1^i))$.

Abreviação 5.3. $s(\varphi)(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $\varphi(x_1^i) \vee \exists x_n^i(\varphi(x_n^i) \wedge x_1^i = sx_n^i)$, onde $\varphi(x_1^i)$ é uma fórmula cuja única variável livre de tipo i é x_1^i.

A propriedade $s(\varphi)$ é chamada de *escada de* φ.

Teorema 5.11. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x^{(i)}(\mathsf{S}\,(x^{(i)}) \supset \mathsf{S}\,(s(x^{(i)})))$.

Ou seja, "a escada de um segmento inicial é também um segmento inicial".

Teorema 5.12. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(x^{(i)}(x_1^i) \supset s(x^{(i)})(sx_1^i))$.

"Os sucessores dos números que satisfazem $x^{(i)}$ são degraus (elementos) da escada de $x^{(i)}$".

Teorema 5.13. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x^{(i)} \forall x_1^i(\mathsf{S}\,(x^{(i)}) \wedge {\sim}x^{(i)}(x_1^i)) \supset {\sim}s(x^{(i)})(sx_1^i))$.

Algo como, "se n é um degrau da escada de um segmento inicial, então o antecessor de n é um degrau de tal segmento".

Teorema 5.14. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i(sx_1^i \leqslant sx_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i)$.

Teorema 5.15. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant x_2^i \supset (x_1^i < x_2^i \vee x_1^i = x_2^i))$.

Teorema 5.16. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(0 < x_1^i \supset x_1^i \neq 0)$.

Teorema 5.17. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant x_2^i \supset sx_1^i \leqslant sx_2^i)$.

Teorema 5.18. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i((x_1^i \leqslant x_2^i \wedge {\sim}sx_1^i \leqslant x_2^i) \supset x_1^i = x_2^i)$.

Teorema 5.19. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant x_2^i \vee x_2^i \leqslant x_1^i)$.

§6. Teoria da Recursão em S_2

Apresentaremos, agora, a última peça do quebra-cabeça, uma contrapartida formal do *esquema de recursão*[17].

Abreviação 6.1. $x^{(0,i)\to i}(\varphi)$ *é uma abreviação de* $\forall x_1^i / x_3^i(x_1^i = 0 \supset (\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)))$, onde $\varphi(x_2^i, x_3^i)$ é uma fórmula cujas únicas variáveis livres são x_2^i e x_3^i.

No caso, a relação $x^{(0,i)\to i}(\varphi)$ é chamada de φ-*base*.

---

17. Cf. Kurt Gödel, *Ibidem*, p.602, esquema 2 e Stephen Cole Kleene, *Ibidem*, pp.217-220.

Abreviação 6.2. $x^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_4^i, x_n^i)$ *é uma abreviação de* $x_1^i < x_n^i \wedge x^{(i,i,i)}(x_1^i/x_3^i) \wedge \phi(x_1^i/x_4^i)$, para $n > 4$.

Abreviação 6.3. $x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_n^i)$ *é uma abreviação de* $\forall x_1^i/x_4^i(x^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_4^i, x_n^i) \supset x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i))$. A relação $x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_n^i)$ é chamada de ϕ-*expansão limitada por* x_n^i.

Abreviação 6.4. $(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_n^i)$ *é uma abreviação de* $x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_n^i)$.

Abreviação 6.5. $\mathsf{R}(\varphi,\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ *é uma abreviação de* $\exists x_n^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_n^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$. A relação $\mathsf{R}(\varphi,\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ é chamada de ϕ-*expansão de* φ (*limitada arbitrariamente*).

Observação. Sempre que as variáveis de uma fórmula forem irrelevantes para uma determinada passagem da argumentação ou do enunciado, tais variáveis poderão ser excluidas da notação. Por exemplo, "$\mathsf{R}(\varphi,\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ é uma determinação" será o mesmo que "$\mathsf{R}(\varphi,\phi)$ é uma determinação".

Teorema 6.1. Se φ e ϕ são n-distribuições, então $\mathsf{R}(\varphi,\phi)$ é uma n-distribuição.

Teorema 6.2. Se existem n-cálculos para φ e ϕ, então existe um n-cálculo para $\mathsf{R}(\varphi,\phi)$.

Seja, por exemplo, $\mathbf{A}^2$ ou $\mathsf{R}(\mathbf{C}_0^1, \mathsf{C}(\mathbf{P}_1^1; \mathsf{C}(\mathbf{S}; \mathbf{P}_3^3))$ (a leitura é um pouco difícil: a expansão da projeção do primeiro argumento $\mathbf{P}_1^1$ por meio do sucessor da projeção do terceiro $\mathsf{C}(\mathbf{S}; \mathbf{P}_3^3)$). Desde que existem n-cálculos para as funções iniciais (no caso, $\mathbf{P}_1^1$, $\mathbf{P}_3^3$ e $\mathbf{S}$) e, pelo teorema 4.7, para a composição de funções iniciais (no caso de $\mathbf{P}_3^3$ e $\mathbf{S}$), existe um n-cálculo para $\mathbf{A}^2$. Agora, desde que $\mathbf{A}^2$ é a formalização da definição recursiva de soma de 2 números naturais (Kleene, p.222), podemos, por meio do n-cálculo para $\mathbf{A}^2$, encontrar os valores da soma de quaisquer números naturais.

Ainda, pelo teorema 6.3, a formalização da definição recursiva de multiplicação de 2 números, $\mathsf{R}(\mathbf{C}_0^1, \mathsf{C}(\mathbf{A}^2; \mathbf{P}_2^3, \mathbf{P}_3^3))$ ou $\mathbf{M}^2$ permite, por meio do respectivo n-cálculo, encontrar os valores da multiplicação de quaisquer números naturais (e, mais genericamente, os valores para quaisquer funções recursivas primitivas no sentido exposto por Kleene).

Consideremos a formalização da definição recursiva da exponenciação, por exemplo; no caso, a fórmula será $\mathsf{R}(\mathbf{C}_1^1, \mathsf{C}(\mathbf{M}^2; \mathbf{P}_2^3, \mathbf{P}_3^3))$ ou, mais sucintamente, $\mathbf{E}^2$; o n-cálculo para $\mathbf{E}^2$ e os valores 3, 2 produzem a prova de $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{E}^2(3,2,8)$: o n-cálculo para $\mathbf{C}_1^1$ e 2 produzem (a prova de) $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{C}_1^1(2,1)$, logo, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{E}^2(0,2,1)$; o n-cálculo para $\mathbf{M}^2$ e $\langle 2,1\rangle$ produzem $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{M}^2(2,1,2)$ de modo que $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{E}^2(1,2,2)$; o n-cálculo para $\mathbf{M}^2$ e $\langle 2,2\rangle$ produzem $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{M}^2(2,2,4)$ de modo que $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{E}^2(2,2,4)$; e, finalmente, O n-cálculo para $\mathbf{M}^2$ e $\langle 2,4\rangle$ produzem $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{M}^2(2,2,8)$ e, assim, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{E}^2(3,2,8)$.

O próximo problema (possivelmente, subestimado por Gödel, e causador de alguns mal-entendidos) é demonstrar que se S_2 é consistente, então *apenas* valores que são gerados por meio de n-cálculos são valores para tais "funções". Minha estratégia será análoga àquela de Dedekind na prova de que "existe *apenas uma* função que é definida recursivamente a partir de outras" [18], das quais uma das condições necessárias é exatamente a de que "definições recursivas *produzem* funções". Em outras palavras, provarei que "se φ e ϕ são funções, então $\mathsf{R}(\varphi,\phi)$ é também uma função"; tal teorema será chamado informalmente de *teorema das definições recursivas* (TDR).

Para tanto, apresentaremos uma série relativamente extensa de resultados preliminares.

Abreviação 6.3.1. $\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ *é uma abreviações de* $x_1^i = 0 \wedge \varphi(x_2^i, x_3^i)$.

A relação φ_0 é chamada de *base induzida por* φ.

Teorema 6.3. $\vdash_{S_2} \varphi_0{}^{(0,i)\to i}(\varphi)$.

Ou seja, "a base induzida por φ é uma φ-base".

Teorema 6.4. $\vdash_{S_2} \varphi_0{}^{(si,i)\to i}(\phi)(0)$.

Lemos "a base induzida por φ é uma ϕ-expansão limitada pelo 0".

Teorema 6.5. $\vdash_{S_2} \mathsf{e}(\varphi) \supset \mathsf{e}(\varphi_0)$.

"Se φ é uma determinação, então a base induzida por φ é também uma determinação".

Abreviação 6.6.1. $\mathsf{S}(s^n 0, x^{(i,i,i)})$ *é abreviação de* $\forall x_1^i (s^n 0 < x_1^i \supset \forall x_2^i \forall x_3^i (\sim x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)))$.

Se isso ocorre, diremos que: "$x^{(i,i,i)}$ pára em $s^n 0$". Por exemplo, a relação $(x_1^i = 0 \wedge x_2^i + 1 = x_3^i) \vee (x_1^i = 1 \wedge x_2^i + 2 = x_3^i)$ pára em 1.

Teorema 6.6. $\vdash_{S_2} \mathsf{S}(0, \varphi_0)$.

Ou seja, "a base induzida por φ pára em 0".

Abreviação 6.7.1. $\mathsf{D}(s^n 0, x^{(i,i,i)})$ *é abreviação de* $\forall x_1^i (x_1^i \leqslant s^n 0 \supset \forall x_2^i \exists x_3^i (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)))$.

A fórmula $\mathsf{D}(s^n 0, x^{(i,i,i)})$ significa que "quando restrita a $s^n 0$, $x^{(i,i,i)}$ é uma distribuição". Por exemplo, a relação $(x_1^i = 0 \wedge x_2^i + 1 = x_3^i) \vee (x_1^i = 1 \wedge x_2^i + 2 = x_3^i)$ é uma distribuição quando restrita a 1.

18. Cf. Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, pp.42-3.

Teorema 6.7. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathsf{D}(\varphi) \supset \mathsf{D}(0, \varphi_0)$.

"Se φ é uma distribuição, então a base induzida por φ é uma distribuição quando restrita a 0".

Abreviação 6.8.1. $\mathsf{DS}(s^n0, x^{(i,i,i)})$ *é abreviação de* $\mathsf{D}(s^n0, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{S}(s^n0, x^{(i,i,i)})$.

A fórmula $\mathsf{DS}(s^n0, x^{(i,i,i)})$ significa "$x^{(i,i,i)}$ é uma distribuição que pára em s^n0".

Abreviação 6.8.2. $\mathsf{DeS}(s^n0, x^{(i,i,i)})$ *é abreviação de* $\mathsf{DS}(s^n0, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{e}(x^{(i,i,i)})$.

Ou seja, "$x^{(i,i,i)}$ é uma determinação que pára em s^n0".

Os teoremas 6.3-6.7, serão utilizados na base da indução da prova do teorema das definições recursivas. Demonstraremos, no caso, que "existe uma determinação que pára em 0"; tal determinação será exatamente uma base induzida por uma determinação universal.

Passaremos agora aos teoremas relativos ao passo indutivo de TDR.

Abreviação 6.8.3. $=(x^i_1, sx^i_n; x^i_2, x^i_m; x^i_3, x^i_j)$ *é abreviação de* $x^i_1 = sx^i_n \wedge x^i_2 = x^i_m \wedge x^i_3 = x^i_j$.

Abreviação 6.8.4. $x^{(Si,i,i)}(\phi)(x^i_n, x^i_m, x^i_j, x^i_f)$ *é abreviação de* $x^{(i,i,i)}(x^i_n, x^i_m, x^i_j) \wedge \phi(x^i_n, x^i_m, x^i_j, x^i_f)$.

Abreviação 6.8.5. $x^{(Si,i,i)}(\phi)(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_n, x^i_m, x^i_j, x^i_f)$ *é abreviação de* $x^{(Si,i,i)}(x^i_n, x^i_m, x^i_j, x^i_f) \wedge \mathsf{S}(x^i_n, x^{(i,i,i)}) \wedge =(x^i_1, sx^i_n; x^i_2, x^i_m; x^i_3, x^i_f)$.

Abreviação 6.8.6. $x^{(Si,i,i)}(\phi)(x^i_1, x^i_2, x^i_3)$ *é abreviação de* $\exists\langle x^i_n, x^i_m, x^i_j, x^i_f\rangle(x^{(Si,i,i)}(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_n, x^i_m, x^i_j, x^i_f))$.

Abreviação 6.8.7. $Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x^i_1, x^i_2, x^i_3)$ *é abreviação de* $x^{(i,i,i)}(x^i_1, x^i_2, x^i_3) \vee x^{(Si,i,i)}(x^i_1, x^i_2, x^i_3)$.

Podemos chamar a relação $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ de a ϕ-adjunção para $x^{(i,i,i)}$.

Teorema 6.8. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x^i_4(\mathsf{S}(x^i_4, x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{S}(sx^i_4, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$.

"Se a relação $x^{(i,i,i)}$ pará em n, então a ϕ-adjunção para $x^{(i,i,i)}$ pára em $n+1$".

Teorema 6.9. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x^i_5((\mathsf{DS}(x^i_5, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)) \supset \forall x^i_2 \exists x^i_3(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx^i_5, x^i_2, x^i_3)))$.

Teorema 6.10. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x^i_5((\mathsf{DS}(x^i_5, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)) \supset \mathsf{DS}(sx^i_5, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$.

Ou seja, "se $x^{(i,i,i)}$ é uma distribuição que pára em n e ϕ é uma distribuição, então a ϕ-adjunção para $x^{(i,i,i)}$ pára em $n+1$ argumentos".

Abreviação 6.11.1. $Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i \leqslant (x_n^i), x_2^i, x_3^i)$ *é abreviação de* $x_1^i \leqslant x_n^i \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge \mathsf{Ds}(x_n^i, x^{(i,i,i)})$.

Teorema 6.11. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i/x_4^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$..

"Se $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ é uma ϕ-adjunção para $x^{(i,i,i)}$ que pára em n, então, até n, os argumentos que satisfazem $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ satisfazem também $x^{(i,i,i)}$".

Teorema 6.12. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i/x_5^i((\mathsf{Ds}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)) \supset x_1^i \leqslant sx_5^i)$.

"Se $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ é uma ϕ-adjunção para $x^{(i,i,i)}$ que pára em n e a trinca $\langle i, j, l\rangle$ satisfaz $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$, então i é menor ou igual a $n+1$".

Abreviação 6.13.1. $x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_4^i, x_n^i)$ *é abreviação de* $\mathsf{e}(\phi) \wedge \mathsf{Des}(x_n^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$.

Teorema 6.13. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i/x_5^i(x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_5^i) \supset x_3^i = x_4^i)$.

"Se $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ é uma ϕ-adjunção para uma determinação que pára em n e ϕ é uma determinação, então $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ é uma determinação".

Abreviação 6.14.1. $x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i < (sx_n^i)/x_4^i))$ *é abreviação de* $x_1^i < sx_n^i \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge \phi(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i) \wedge \mathsf{Ds}(x_n^i, x^{(i,i,i)})$.

Teorema 6.14. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i/x_5^i(x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i < (sx_5^i)/x_4^i)) \supset Sx^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)))$.

"Se $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ é uma ϕ-adjunção para uma determinação que pára em n, então $Sx^{(i,i,i)}(\phi)$ chega até, pelo menos, $n+1$ ".

O próximo resultado, juntamente com 6.2, produz, por assim dizer, uma versão construtiva e um preliminar do teorema 126 de Dedekind ,citado anteriormente; a partir de uma descrição de um n-cálculo para $\mathsf{R}(\varphi, \phi)$ e do teorema 6.15 (onde φ e ϕ são determinações e n-distribuições) podemos refutar em S_2 todos os valores não alcançados por meio do n-cálculo, quaisquer que sejam os argumentos de $\mathsf{R}(\varphi, \phi)$. Contudo, para nossos objetivos, diferentemente de Dedekind, não precisaremos provar que tal função é **única** (na verdade, para essa demonstração seria necessário adicionar um axioma de extensionalidade a nosso sistema).

Teorema 6.15. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \forall x_5^i \exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(\mathrm{s}i,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)}))$.

"Se φ e ϕ são determinações universais, então, para todo natural *n*, existe uma determinação que pára em *n*".

Teorema 6.16. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \mathsf{e}(\mathsf{R}(\varphi, \phi))$.

"Se φ e ϕ são determinações universais, então a ϕ-expansão de φ é uma determinação".

Teorema 6.17. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathsf{D}(\varphi) \wedge \mathsf{D}(\phi) \supset \forall x_1^i \forall x_2^i \exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi, \phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i)$.

Teorema 6.18. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathsf{D}(\varphi) \wedge \mathsf{D}(\phi) \supset \mathsf{D}(\mathsf{R}(\varphi, \phi))$.

"Se φ e ϕ são distribuições, então a ϕ-expansão de φ é uma distribuição".

E, portanto, de 6.16 e 6.18:

Teorema 6.19. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \mathsf{De}(\mathsf{R}(\varphi, \phi))$.

"Se φ e ϕ são determinações universais, então a ϕ-expansão de φ é uma determinação universal".

§7. Teoria das Fórmulas Recursivas em S_2

Definição 7.1. Definiremos, agora, as *fórmulas recursivas* de L_2:

R_0: As fórmulas **S**, $\mathbf{C}_k^n$ e $\mathbf{P}_j^n$ são todas fórmulas recursivas de L_2;

R_1: Se α, β_1, β_2, ..., β_n são fórmulas recursivas de L_2, então $\mathsf{C}(\alpha; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ é também uma fórmula recursiva de L_2.

R_2: Se α e β são fórmulas recursivas de L_2, então $\mathsf{R}(\alpha, \beta)$ é também uma fórmula recursiva de L_2.

Segue-se dos teoremas 3.2, 3.1, 3.7, 3.5, 3.10, 3.8, 4.7, 4.1, 6.2 e 6.18 que:

Teorema 7.1. Se φ é uma fórmula recursiva, então existe um n-cálculo para φ em S_2 e φ é uma determinação universal em S_2.

E de 7.1 temos que:

Teorema 7.2. Se φ é uma fórmula recursiva de L_2, então, para um *k* qualquer, $\varphi(x_1^i, ..., x_n^i, \overline{k})$ é uma n-representação em S_2.

E, finalmente, encontramos um equivalente *meramente formal* para **Teorema V** de Gödel.

Definição 7.2. Se $F(x_1^i, ..., x_n^i)$ é uma fórmula do tipo $\varphi(x_1^i, ..., x_n^i, 0)$, onde φ é uma fórmula recursiva de L_2, diremos, então, que $F(x_1^i, ..., x_n^i)$ é uma *fórmula de Kleene*.

E é óbvio que:

Teorema 7.3. Se $F(x_1^i, ..., x_n^i)$ é uma fórmula de Kleene, F é uma n-representação em S_2.

Capítulo III
Aritmetização da Sintaxe de S_2

§1. Operações e Relações Recursivas em S_2

Abreviação 1.1. $x_1^i + x_2^i = x_3^i$ (ou apenas $+$) *é uma abreviação de* $\mathsf{R}(\mathbf{P}_1^1, \mathsf{C}(\mathbf{S}; \mathbf{P}_3^3))$.[19]

A abreviação é auto-explicativa; contudo, existe um abuso de linguagem: o simbolo de igualdade deve ser pensado, no caso, como parte de um símbolo composto $\cdots + \cdots =$ (devemos notar que s é o único símbolo funcional de L_2), diferindo assim do uso do mesmo símbolo em $sx_2^i = sx_3^i$, que é abreviação de $\forall x^{(i)}(x^{(i)}(sx_2^i) \leftrightarrow x^{(i)}(sx_3^i))$. Em todo caso, desde que $+$ é uma fórmula recursiva, $+$ é uma determinação universal, o que justifica em termos informais tal uso do símbolo de igualdade.

Abreviação 1.2. $x_1^i \times x_2^i = x_3^i$ (ou apenas $\times$) *é uma abreviação de* $\mathsf{R}(\mathbf{C}_0^1, \mathsf{C}(+; \mathbf{P}_2^3, \mathbf{P}_3^3))$.

Abreviação 1.3. $x_1^{i\,x_2^i} = x_3^i$ (ou apenas $\mathbf{E}$) *é uma abreviação de* $\mathsf{R}(\mathbf{C}_1^1, \mathsf{C}(\times; \mathbf{P}_2^3, \mathbf{P}_3^3))$.

Em geral, o método das definições explícitas de Kleene[20] permite que encontremos abreviações adequadas (adequadas porque mostram que *as fórmulas assim abreviadas* são *fórmulas recursivas* de L_2[21]; e, portanto, que elas são determinações e que temos n-cálculos para elas) para todas as funções recursivas primitivas (no sentido de Kleene). Das propriedades metamatemáticas das fórmulas recursivas de L_2 em S_2 (teoremas 7.1 e 7.2 do capítulo anterior) temos, então, que:

Teorema 1.1. Todos os resultados das seções §44, §45 e §46 de *Introduction to Metamathematics* de Kleene podem ser adequadamente convertidos em resultados metamatemáticos para as fórmulas recursivas de L_2 em S_2.

Por exemplo, segundo o teorema #D de Kleene p.228: "O predicado $\bar{Q}(x_1^i, \ldots, x_n^i)$ é recursivo primitivo em Q"; tal resultado pode ser convertido em "se $Q(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$ é uma fórmula recursiva, então $\bar{Q}(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$ é uma fórmula recursiva e, portanto, $\bar{Q}(x_1^i, \ldots, x_n^i, 0)$ é uma n-representação em S_2", onde $\bar{Q}(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$ uma abreviação adequada no sentido acima.

---

19. Segundo as abreviações anteriores, x_1^i, x_2^i e x_3^i são **real e exatamente** as variáveis livres de $\mathsf{R}(\mathbf{P}_1^1, \mathsf{C}(\mathbf{S}; \mathbf{P}_3^3))$.

20. Cf. Kleene, *Ibidem*, §44, 220-3.

21. Comparemos, por exemplo, a abreviação 1.1 com a análise de Kleene da soma (p.222) e as abreviações 1.2 e 1.3 com as análises #2 e #3 de Kleene (também p.222).

Devemos notar, ainda, que a distinção de Kleene entre ***simbolismo intuitivo*** e ***simbolismo formal*** (p.225) é, de certa forma, preservada em nossas considerações de caráter meramente formal: se Q é uma fórmula de L_2, então as fórmulas $\sim Q(x_1^i, ..., x_n^i, , 0)$ e $\bar{Q}(x_1^i, ..., x_n^i, 0)$ não são, de maneira alguma, fórmulas idênticas de L_2; e, mesmo que fossem, por exemplo, equivalentes (em um sentido determinado), isto não seria, obviamente, garantia de que compartilhassem outras propriedades metamatemáticas.

No restante desta e nas próximas seções, suporemos que os resultados de Kleene foram adequadamente convertidos em resultados para S_2 (não obstante, permitamo-nos algumas variações de notação em relação ao autor). De modo que:

Teorema 1.2. $x_1^i * x_2^i = x_3^i$ (cf. Kleene, #21, pp.230-1) é uma fórmula recursiva em S_2 e, portanto, existe um n-cálculo para essa fórmula e essa fórmula é uma determinação universal em S_2.

Suponha que $p_0^{k_0} \times p_1^{k_1} \times \cdots \times p_m^{k_m}$ seja a decomposição de x_1^i em fatores primos (ou, mais sucintamente, decomposição de x_1^i) e, por sua vez, que $p_0^{h_0} \times p_1^{h_1} \times \cdots \times p_n^{h_n}$ seja a decomposição de x_2^i; então o n-cálculo para $x_1^i * x_2^i = x_3^i$ produzirá o número x_3^i, cuja decomposição é $p_0^{k_0} \times p_1^{k_1} \times \cdots \times p_m^{k_m} \times p_{m+1}^{h_0} \times p_{m+2}^{h_1} \times \cdots \times p_{m+n}^{h_n}$. (os primos são dispostos em ordem de magnitude). Ou seja, x_3^i é uma espécie de "concatenação da decomposição dos argumentos da determinação universal $x_1^i * x_2^i = x_3^i$".

As próximas abreviações são similares às construções apresentadas por Smullyan em *Gödel's Incompleteness Theorems*, Capítulo II, §2, pp.30-33; contudo, tais abreviações estão baseadas na concatenação de Kleene (e isso vale, em geral, para quaisquer operações recursivas deste capítulo, como ficou implícito anteriormente).

Abreviação 1.4. $\mathrm{C}(x_1^i, x_2^i)$ *é uma abreviação de* $(Ex_3^i)_{x_3^i \leq x_2^i}(x_1^i * x_3^i = x_2^i)$.

Podemos ler: "a decomposição de x_1^i começa a decomposição de x_2^i".

Abreviação 1.5. $\mathrm{T}(x_1^i, x_2^i)$ *é uma abreviação de* $(Ex_3^i)_{x_3^i \leq x_2^i}(x_3^i * x_1^i = x_2^i)$.

"A decomposição de x_1^i termina a decomposição de x_2^i".

Abreviação 1.6. $\mathrm{P}(x_1^i, x_2^i)$ *é uma abreviação de* $(Ex_3^i)_{x_3^i \leq x_2^i}(\mathrm{C}(x_3^i, x_2^i)\ \&\ \mathrm{T}(x_1^i, x_3^i))$.

"A decomposição de x_1^i é parte da decomposição de x_2^i (ou, sucintamente, x_1^i é parte de x_2^i)".

Abreviação 1.7. $\mathrm{Seq}(k)(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{C}(s^k0, x_1^i)$ & $\mathrm{T}(x_1^i, s^k0)$ & $\overline{\mathrm{P}}(s^k0 * s^k0, x_1^i)$.

Lemos: "a decomposição de x_1^i começa e termina com k e k não ocorre seguidamente na decomposição de x_1^i". Para explicitar, se n é tal que $\mathrm{Seq}(k)(s^n0)$ se verifica, então n pode ser pensado como um código para uma k-seqüência finita de números diferentes de k. Tais números codificam seqüências de números da seguinte maneira: suponha que n seja uma 2-seqüência finita de números e que 2 ocorra, digamos, 4 vezes na decomposição de n; a decomposição de n, neste exemplo, será algo do tipo $2^1 \times \cdots \times p_m^1 \times \cdots \times p_{m+n}^1 \times \cdots \times p_{m+n+j}^1$ e n será a codificação de uma 2-seqüência de 3 números (diferentes de 2), números cuja decomposição é parte de uma parte de n começada e terminada por 2.

Abreviação 1.8. $x_1^i \in \mathrm{Seq}(k)(x_2^i)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Seq}(k)(x_2^i)$ & $\mathrm{P}((s^k0 * x_1^i) * s^k0, x_2^i)$ & $\overline{\mathrm{P}}(s^k0, x_1^i)$.

Ou seja, "x_1^i é um dos membros da k-seqüência x_2^i".

Abreviação 1.9. $\mathrm{Seq}(k)(x_3^i)(x_1^i \prec x_2^i)$ *é uma abreviação de* $x_1^i \in \mathrm{Seq}(k)(x_3^i)$ & $x_2^i \in \mathrm{Seq}(k)(x_3^i)$ & $(Ex_4^i)_{x_4^i \leqslant x_3^i}(\mathrm{C}(x_4^i, x_3^i)$ & $\mathrm{P}(x_1^i, x_4^i)$ & $\overline{\mathrm{P}}(x_2^i, x_4^i))$.

"x_1^i é anterior a x_2^i na k-seqüência x_3^i".

§2. As expressões de L_2

Convenções Auxiliares. Para o resto da dissertação, escreveremos $\mathrm{Seq}(x_1^i)$ em lugar de $\mathrm{Seq}(2)(x_1^i)$.

Com vistas à aritmetização da sintaxe de S_2, associamos, primeiramente, a cada símbolo de L_2 um número natural do modo abaixo:

/	i	e	a	v	$'$	s	0	)	(	~	$\supset$	$\wedge$	$\vee$	$\forall$	$\exists$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Associamos, agora, a uma expressão α, um natural $\mathrm{g}(\alpha)$, dito o número de Gödel de α, como se segue: se α tem comprimento1, então $\mathrm{g}(\alpha)$ será 2^{k}, onde k é o natural associado ao único símbolo de α; seja α a concatenação das expressões β_1 e β_2; o número associado a α será, então, $p_0^{k_0} \times p_1^{k_1} \times \cdots \times p_m^{k_m} \times p_{m+1}^{h_0} \times p_{m+2}^{h_1} \times \cdots \times p_{m+n}^{h_n}$, onde a decomposição do número associado β_1 é $p_0^{k_0} \times p_1^{k_1} \times \cdots \times p_m^{k_m}$ e a decomposição do número associado β_2 é $p_0^{k_0} \times p_1^{k_1} \times \cdots \times p_n^{k_n}$. Assim temos que $g(ei) = 2^3 \times 3^2 = 72$, $g(iei) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$. É importante notar que se α é diferente de β, então $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são diferentes e que toda expressão de L_2 tem um número de Gödel.

Notemos que: a cada número natural *n* corresponde um numeral s^n0 de L_2, de modo que o sistema S_2 pode ser pensado como a contrapartida formal de uma teoria cujo universo de discurso inclui os números naturais. Por sua vez, a cada expressão α de L_2, corresponde um número natural, por exemplo, *n* e, portanto, um numeral s^n0 de L_2, de modo que o sistema S_2 pode ser pensado como a contrapartida formal de uma teoria cujo universo de discurso inclui as expressões de L_2, no mesmo sentido, em que inclui, por exemplo, os números naturais primos, ou os números naturais pares. Ainda, neste sentido, $\exists x_2^i(\overline{2}\times x_2^i=x_1^i)$ ou $(Ex_2^i)_{x_2^i\leqslant x_1^i}(\overline{2}\times x_2^i=x_1^i)$ − se quisermos continuar no âmbito das fórmulas recursivas − são possíveis contrapartidas do predicado aritmético “ser um número par” em L_2. A pergunta seria, então, qual a contrapartida de “ser uma expressão de L_2” em L_2? Contudo, é desnecessário responder tal pergunta; o que nos interessa aqui não são expressões quaisquer de L_2, mas apenas alguns tipos especiais delas. Trataremos desses tipos em seguida.

Antes de continuarmos, todavia, convém substituir a regra concernente às matrizes típicas de L_2 pela regra abaixo.

Definimos as *matrizes típicas* de L_2:

M_0: ‘*i*’ é uma matriz típica;

M_1: Se t_1 e t_2 são matrizes típicas, então et_1 e at_1t_2 são matrizes típicas.

Observação. Nos capítulos anteriores escreveríamos, por exemplo, (t_1) em lugar de et_1; t_1, t_2 em lugar de at_1t_2; e (t_1, t_2) em lugar de eat_1t_2; e (t_1, t_2, t_3) para $aat_1t_2t_3$ e também para $at_1at_2t_3$.

Abreviação 2.1. $\mathrm{M}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ *é uma abreviação de* $\overline{2}^3 * x_1^i = x_3^i \ \vee\ \overline{2}^4 * x_1^i * x_2^i = x_3^i$.

Podemos ler assim “ou x_3^i é uma tipificação de x_1^i ou uma tipificação de x_1^i e x_2^i”. Deve-se notar que $\vee$ abrevia uma fórmula correlata a uma operação recursiva e difere do símbolo $\vee$ de L_2, como já havíamos rapidamente mencionado no início da p. 32.

Abreviação 2.2. $\mathrm{Seq_M}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Seq}(x_1^i)\ \&\ (x_2^i)_{x_2^i\leqslant x_1^i}(x_2^i\in \mathrm{Seq}(x_1^i) \rightarrow \overline{2}^2 = x_2^i \ \vee$ $(Ex_3^i)_{x_3^i\leqslant x_2^i}(Ex_4^i)_{x_4^i\leqslant x_2^i}(\mathrm{Seq}(x_1^i)(x_3^i \prec x_2^i)\ \&\ \mathrm{Seq}(x_1^i)(x_4^i \prec x_2^i)\ \&\ \mathrm{M}(x_3^i, x_4^i, x_2^i)))$.

Lê-se “A sequência x_1^i é uma seqüência de formação de matrizes típicas”.

Abreviação 2.3. $\mathrm{Mat}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $(Ex_2^i)_{x_2^i \leqslant (\mathrm{lh}(x_1^i)+2)!}(\mathrm{Seq_M}(x_2^i)\ \&\ x_1^i \in \mathrm{Seq}(x_2^i))$.

"x_1^i é (o número de Gödel de) uma matriz típica de L_2"; notemos também que $\mathrm{lh}(k)$ é "o comprimento da decomposição de k"; $k!$ é "o fatorial de k". Tais funções utilizadas na limitação do existencial de $\mathrm{Mt}(x_1^i)$ estão em Kleene #4 e #20 (pp.22 e 230) e são utilizadas em $\mathrm{Mt}(x_1^i)$ apenas porque ali estão; em termos computacionais, poderíamos facilmente encontrar uma limitação mais eficiente (mais restrita) para tal existencial.

Abreviação 2.4. $\mathrm{Sa}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $(x_2^i)_{x_2^i \leqslant x_1^i}(\mathrm{P}(x_2^i, x_1^i) \rightarrow \mathrm{P}(\overline{2}^6, x_2^i))$.

"x_1^i é uma seqüência de $'$'s".

Abreviação 2.5. $\mathrm{Var}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $(Ex_2^i)_{x_2^i \leqslant x_1^i}(Ex_3^i)_{x_3^i \leqslant x_1^i}(\mathrm{Sa}(x_2^i)\ \&\ \mathrm{Mat}(x_3^i)\ \&\ \overline{2}^5 * x_2^i * x_3^i = x_1^i)$.

"x_1^i é (o número de Gödel de) uma variável de L_2".

Abreviação 2.6. $\mathrm{Ss}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $(x_2^i)_{x_2^i \leqslant x_1^i}(\mathrm{P}(x_2^i, x_1^i) \rightarrow \mathrm{P}(\overline{2}^7, x_2^i))$.

"x_1^i é uma seqüência de s's".

Abreviação 2.7. $\mathrm{Num}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $(Ex_2^i)_{x_2^i \leqslant x_1^i}(\mathrm{Ss}(x_2^i)\ \&\ x_2^i * \overline{2}^8 = x_1^i)$.

"x_1^i é (o número de Gödel de) um numeral de L_2".

Convenção 2.8. Usaremos $\mathrm{Ft}(x_1^i)$ para indicar a fórmula de L_2 que aritmetiza a noção de "x_1^i é (o número de Gödel de) uma fórmula atômica de L_2".

Abreviação 2.9. $\mathrm{Neg}(x_1^i) = x_2^i$ *é uma abreviação de* $\overline{2}^{10} * \overline{2}^{11} * x_1^i * \overline{2}^9 = x_2^i$.

$\mathrm{Neg}(x_1^i)$ é pensada como a operação unária de negação. Então, desde que $\mathrm{Neg}(x_1^i) = x_2^i$ é uma fórmula recursiva de S_2 (supondo a adequada conversão dos resultados de Kleene), se x_1^i é o número de Gödel de α, então o $\cap$-cálculo produz o número de Gödel de $\sim\alpha$. O mesmo vale para as fórmulas abaixo.

Abreviação 2.10. $\mathrm{Imp}(x_1^i, x_2^i) = x_3^i$ *é uma abreviação de* $2^{10} * x_1^i * \overline{2}^{12} * x_2^i * \overline{2}^9 = x_3^i$.

"x_3^i (o número de Gödel) da condicional formada pelas (possíveis) fórmulas cujos números de Gödel são respectivamente x_1^i e x_2^i".

Abreviação 2.11. $\mathrm{Con}(x_1^i, x_2^i) = x_3^i$ *é uma abreviação de* $\overline{2}^{10} * x_1^i * \overline{2}^{13} * x_2^i * \overline{2}^9 = x_3^i$.

$\mathrm{Con}(x_1^i, x_2^i)$ é "a operação binária de conjunção".

Abreviação 2.12. $\mathrm{Dis}(x^i_1,x^i_2,x^i_3)$ *é uma abreviação de* $\overline{2}^{10}*x^i_1*\overline{2}^{14}*x^i_2*\overline{2}^9=x^i_3$.

$\mathrm{Dis}(x^i_1,x^i_2)$ é "a operação binária de disjunção".

Abreviação 2.13. $\mathrm{Gu}(x^i_1,x^i_2)=x^i_3$ *é uma abreviação de* $\overline{2}^{15}*x^i_1*x^i_2=x^i_3$.

$\mathrm{Gu}(x^i_1,x^i_2)$ é "a operação binária de generalização universal de x^i_2 com respeito a x^i_1".

Abreviação 2.14. $\mathrm{Ge}(x^i_1,x^i_2)=x^i_3$ *é uma abreviação de* $\overline{2}^{16}*x^i_1*x^i_2=x^i_3$.

$\mathrm{Ge}(x^i_1,x^i_2)$ é "a operação binária de generalização existencial de x^i_2 com respeito a x^i_1".

Abreviação 2.15. $\mathrm{F}(x^i_1,x^i_2,x^i_3)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Neg}(x^i_1)=x^i_2 \vee \mathrm{Imp}(x^i_1,x^i_2)=x^i_3 \vee \mathrm{Con}(x^i_1,x^i_2)=x^i_3 \vee \mathrm{Dis}(x^i_1,x^i_2)=x^i_3 \vee (Ex^i_4)_{x^i_4\leqslant x^i_3}(\mathrm{Var}(x^i_4)\ \&\ \mathrm{Gu}(x^i_4,x^i_1)=x^i_3) \vee (Ex^i_4)_{x^i_4\leqslant x^i_3}(\mathrm{Var}(x^i_4)\ \&\ \mathrm{Ge}(x^i_4,x^i_1)=x^i_3)$.

Podemos ler "ou x^i_3 é uma sobreformulação de x^i_1 ou uma sobreformulação de x^i_1 e x^i_2".

Abreviação 2.16. $\mathrm{Seq}_{\mathrm{F}}(x^i_1)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Seq}(x^i_1)\ \&\ (x^i_2)_{x^i_2\leqslant x^i_1}(x^i_2\in \mathrm{Seq}(x^i_1)\rightarrow \mathrm{Ft}(x^i_2) \vee (Ex^i_3)_{x^i_3\leqslant x^i_2}(Ex^i_4)_{x^i_4\leqslant x^i_2}(\mathrm{Seq}(x^i_1)(x^i_3\prec x^i_2)\ \&\ \mathrm{Seq}(x^i_1)(x^i_4\prec x^i_2)\ \&\ \mathrm{F}(x^i_3,x^i_4,x^i_2))$.

"A sequência x^i_1 é uma seqüência de formação de fórmulas".

Abreviação 2.11. $\mathrm{For}(x^i_1)$ *é uma abreviação de* $(Ex^i_2)_{x^i_2\leqslant (\mathrm{lh}(x^i_1)+2)!}(\mathrm{Seq}_{\mathrm{F}}(x^i_2)\ \&\ x^i_1\in \mathrm{Seq}(x^i_2))$.

"x^i_1 é (o número de Gödel de) uma fórmula de L_2".

§3. Aritmetização da Substituição em S_2

A substituição é talvez o mais difícil dos tópicos concernentes à aritmetização; muitas vezes, tenta-se contornar tais dificuldades modificando, no próprio sistema (a ser aritmetizado), as regras relativas à substituição, um exemplo disso é o sistema devido a Kalish e Montague apresentado por Smullyan em *Gödel's Incompleteness Theorems* (cf. axioma L_7 p.29); outra vez, trabalhando com fórmulas equivalentes a uma dada substituição, mas de estrutura mais simples (cf. Smullyan, p.25), estratégia que tem suas limitações. Não obstante tais recursos, as operações de substituição ligam-se intimamente ao tipo de codificação de expressões proposto pela aritmetização−talvez valesse fazer um estudo mais detido dos vários tipos de substituição relativos aos vários tipos de codificação. Nossos problemas são: primeiro, definir uma substituição para S_2, um sistema mais complexo do que os sistemas aos quais tivemos acesso (inclusive o de Gödel); segundo, encontrar a melhor estratégia para aritmetização proposta. É bem provável que, dispondo de mais tempo, pudéssemos chegar a soluções mais simples e elegantes. Em todo caso, apresentaremos uma operação de substituição (o ideal seria trabalhar com várias) que, pelo menos à primeira vista, parece sustentar nossos resultados.

Abreviação 3.1. $\mathrm{PriSubs}[x^i_1]^{x^i_3}_{x^i_4}=x^i_2$ *é uma abreviação de* $((Ex^i_5)_{x^i_5\leqslant x^i_1}(Ex^i_6)_{x^i_6\leqslant x^i_1}((x^i_5 * x^i_3 * x^i_6 = x^i_1 \;\&\; (x^i_7)_{x^i_7\leqslant x^i_5}(\mathrm{P}(x^i_3,x^i_5) \rightarrow \mathrm{P}(x^i_7,\mathrm{Ge}(x^i_3,x^i_7)) \;\&\; \mathrm{P}(\mathrm{Ge}(x^i_3,x^i_7),x^i_5))) \rightarrow x^i_5 * x^i_4 * x^i_6 = x^i_2) \vee ((x^i_5)_{x^i_5\leqslant x^i_3}((x^i_5 = x^i_3 \rightarrow \overline{\mathrm{P}}(x^i_5,x^i_1)) \rightarrow x^i_1 = x^i_2) \vee ((x^i_5)_{x^i_5\leqslant x^i_3}((x^i_5 = x^i_3 \;\&\; \mathrm{P}(x^i_5,x^i_1) \;\&\; (Ex^i_6)_{x^i_6\leqslant x^i_1}(\mathrm{P}(x^i_5,\mathrm{Ge}(x^i_5,x^i_6)) \rightarrow x^i_1 = x^i_2)$.

A fórmula $\mathrm{PriSubs}[x^i_1]^{x^i_3}_{x^i_4}=x^i_2$ é da forma $\alpha \vee \beta \vee \gamma$, onde β nos diz que "se (a decomposição de) x^i_3 não é parte de (a decomposição de) x^i_1, então a PriSubs de x^i_3 por x^i_4 em x^i_1 é o próprio x^i_1", γ nos diz que "se todas ocorrências (da decomposição de) x^i_3 em (a decomposição de) x^i_1 ocorrem em uma parte de x^i_1 que é uma generalização universal (ou seja, são "ligadas"), então a PriSubs de x^i_3 por x^i_4 em x^i_1 é novamente o próprio x^i_1", e, finalmente, α nos diz que "se existe x^i_3 que é uma parte não ligada de x^i_1, então a PriSubs de x^i_3 por x^i_4 em x^i_1 é o resultado de substituir a primeira ocorrência (a ocorrência mais à esquerda) não ligada de x^i_3 em x^i_1 por x^i_4".

Abreviação 3.2. $\mathrm{Subs}(x^i_1)[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}=x^i_3$ *é uma abreviação de* $\mathsf{R}\,(\mathbf{P}^3_1, \mathsf{C}\,(\mathrm{PriSubs}; \mathbf{P}^5_2, \mathbf{P}^5_3, \mathbf{P}^5_4, \mathbf{P}^5_5))$.

No vocabulário do final do Capítulo II, $\mathrm{Subs}(x^i_1)[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}=x^i_3$ é a $\mathsf{C}\,(\mathrm{PriSubs}; \mathbf{P}^5_2, \mathbf{P}^5_3, \mathbf{P}^5_4, \mathbf{P}^5_5)$-expansão da identidade; de modo que $\mathrm{Subs}(0)[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}=x^i_2$, ou seja, a substituição 0 na fórmula cujo número de Gödel é x^i_2 é o próprio x^i_2; $\mathrm{Subs}(\overline{1})[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}=\mathrm{PriSubs}[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}$, ou seja, a substituição 1 equivale à substituição da primeira ocorrência de x^i_4 exposta acima; $\mathrm{Subs}(\overline{2})[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}=\mathrm{PriSubs}[\mathrm{Subs}(\overline{1})[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}]^{x^i_4}_{x^i_5}$, ou seja, a substituição 2 equivale à substituição da primeira ocorrência de x^i_4 na substituição 1 e assim sucessivamente. $\mathrm{Subs}(x^i_1)[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}=x^i_3$ é, portanto, no caso relevante, a substituição das primeiras x^i_1 ocorências de x^i_4 em x^i_2 por x^i_5.

Segue-se, então, que limitando as substituições pelo comprimento da decomposição de x^i_1, ou seja, por lh, a fórmula abaixo será uma contrapartida da substituição de todas as variáveis livres da fórmula cujo número de Gödel é x^i_1.

Abreviação 3.3. $\mathrm{Subs}[x^i_1]^{x^i_3}_{x^i_4}=x^i_2$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Subs}(\mathrm{lh}(x^i_1))[x^i_1]^{x^i_3}_{x^i_4}=x^i_2$.

Usando a fórmula recursiva $\mathrm{Subs}(x^i_1)[x^i_2]^{x^i_4}_{x^i_5}=x^i_3$, podemos, ainda, definir a substituição de uma parte qualquer da decomposição (por exemplo, a parte que codifica a segunda ocorrência de um numeral que ocorre 3 vezes na codificação da fórmula), substituindo, primeiramente, as ocorrências de tal parte (no caso do exemplo, a primeira) por um número adequado, depois, fazendo a substituição desejada e, finalmente, recolocando a ocorrência anterior no seu lugar.

§4. A sintaxe de S_2

Embora não tenhamos levado a cabo uma arimetização completa da sintaxe de S_2, apresentaremos, não obstante, algumas indicações de como realizá-la; lembremos que nosso objetivo não é demostrar que tal empreendimento é factível−este resultado é bem conhecido−, mas sim proporcionar uma notação adequada para o estabelecimento dos teoremas finais desta dissertação.

Devemos, primeiro, aritmetizar cada um dos esquemas axiomáticos de S_2. Tomamos como exemplo o esquema A_1 (obviamente os esquemas que pressupõem a operação de substituição são muito mais complicados):

Abreviação 4.1. $\mathrm{A}_1(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $(Ex_2^i)_{x_2^i \leqslant x_1^i}(Ex_3^i)_{x_3^i \leqslant x_1^i}(\mathrm{For}(x_2^i)\ \&\ \mathrm{For}(x_3^i)\ \&\ \mathrm{Imp}(x_2^i, \mathrm{Imp}(x_3^i, x_2^i), x_1^i))$.

O que significa: "x_1^i é (o número de Gödel de) uma das instâncias do esquema A_1 de S_2". Notemos que se a descrição $\mathrm{Imp}(x_1^i, \mathrm{Imp}(x_2^i, x_1^i), x_3^i))$ fosse realizada no espírito do Capítulo II (antes de supormos feita a conversão dos resultados de Kleene), teríamos ao invés de $\mathrm{Imp}(x_1^i, \mathrm{Imp}(x_2^i, x_1^i), x_3^i))$ algo como $\mathsf{C}\,(\mathrm{Imp}; \mathbf{P}_1^2, \mathsf{C}\,(\mathrm{Imp}; \mathbf{P}_2^2, \mathbf{P}_1^2))(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$.

Supondo, agora, as fórmulas recursivas associadas a cada um dos esquemas axiomáticos ou axiomas de S_2, temos, então, uma fórmula recursiva associada a "x_1^i é (o número de Gödel de) um axioma de S_2":

Abreviação 4.2. $\mathrm{A}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{A}_1(x_1^i) \vee \cdots \vee \mathrm{A}_{13}(x_1^i) \vee \mathrm{P}_1(x_1^i) \vee \mathrm{P}_2(x_1^i) \vee \mathrm{P}_3(x_1^i)$.

Devemos, em seguida, aritmetizar cada uma das regras de inferência de S_2. Por exemplo, a regra I_1:

Abreviação 4.3. $\mathrm{I}_1(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Imp}(x_1^i, x_3^i) = x_2^i$.

Suponhamos que fórmulas recursivas de S_2 estão associadas adequadamente a cada uma das regras de inferência de S_2, de modo que possamos, então, encontrar uma fórmula recursiva associada a "x_3^i é (o número de Gödel de) uma fórmula derivável em S_2 a partir das fórmulas cujos números de Gödel são, respectivamente, x_1^i e x_2^i"; podemos então prosseguir:

Abreviação 4.4. $D(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ *é uma abreviação de* $I_1(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee I_2(x_1^i, x_3^i) \vee I_3(x_1^i, x_3^i) \vee I_4(x_1^i, x_3^i)$.

Finalmente, teremos:

Abreviação 4.5. $\mathrm{Seq}_{\mathrm{Dem}}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Seq}(x_1^i)$ & $(x_2^i)_{x_2^i \leqslant x_1^i}(x_2^i \in \mathrm{Seq}(x_1^i) \rightarrow A(x_2^i) \vee (Ex_3^i)_{x_3^i \leqslant x_2^i}(Ex_4^i)_{x_4^i \leqslant x_2^i}(\mathrm{Seq}(x_1^i)(x_3^i \prec x_2^i)$ & $\mathrm{Seq}(x_1^i)(x_4^i \prec x_2^i)$ & $D(x_3^i, x_4^i, x_2^i))$).

Ou seja, "x_1^i é (o número de Gödel de) uma prova de S_2".

Sempre debaixo da suposição de que as conversões dos resultados de Kleene foram realizadas adequadamente, segue-se, então, que $\mathrm{Seq}_{\mathrm{Dem}}(x_1^i)$ é da forma $\varphi(x_1^i, 0)$ e que $\varphi(x_1^i, 0)$ é uma fórmula recursiva de L_2 e, portanto, pelo teorema 7.2 do Capítulo II, que:

Teorema 4.1. $\mathrm{Seq}_{\mathrm{Dem}}(x_1^i)$ é uma n-representação em S_2.

Abreviação 4.6. $\mathrm{Dem}(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $\exists x_2^i(\mathrm{Seq}_{\mathrm{Dem}}(x_2^i)$ & $x_1^i \in \mathrm{Seq}(x_2^i))$.

Ou seja, "x_1^i é (o número de Gödel de) um teorema de S_2".

Notemos que $\mathrm{Dem}(x_1^i)$ não é da forma $\varphi(x_1^i, 0)$ − onde $\varphi(x_1^i, 0)$ é uma fórmula recursiva de L_2−, na verdade, será demonstrado no próximo capítulo que se S_2 é n-consistente, não existe nenhuma fórmula de Kleene que n-represente $\mathrm{Dem}(x_1^i)$.

Capítulo IV

Incompletude de S_2

§1. Diagonalização em S_2

Abreviação 1.1. $S{*}(x_1^i) = x_2^i$ *é uma abreviação de* $\overline{2}^7 * x_1^i = x_2^i$.

Nos casos relevantes, "se x_1^i é o número de Gödel do numeral $\overline{n}$, então x_2^i é o número de Gödel de $s\overline{n}$".

Abreviação 1.2. $N(x_1^i) = x_2^i$ *é uma abreviação de* $\mathsf{R}\,(\mathbf{C}^1_{2^8}, \mathsf{C}\,(S{*}; \mathbf{P}^2_2))$.

Dado o n-cálculo para $N(x_1^i)$, 0 produziá 2^8, ou seja, o número de Gödel de 0; 1 produzirá $2^7 \times 2^8$, ou seja, o número de Gödel de $\overline{1}$; 2 produziá $2^7 \times 2^7 \times 2^8$, ou seja, o número de Gödel de $\overline{2}$; e, assim, sucessivamente. Em outras palavras, "x_2^i é o (número de Gödel do) numeral de x_1^i".

Abreviações Auxiliares. v_1 *é uma abreviação de* $2^5 \times 3^6 \times 5^2$; v_2 *é uma abreviação de* $2^5 \times 3^6 \times 5^6 \times 7^2$; v_3 *é uma abreviação de* $2^5 \times 3^6 \times 5^6 \times 7^6 \times 11^2$.

Abreviação 1.3. $\mathrm{PriVarSubs}[x_1^i](x_2^i) = x_3^i$ *é uma abreviação de* $\mathrm{Subs}[x_1^i]^{v_1}_{x_2^i} = x_3^i$.

Apenas para os casos relevantes, temos algo como "x_3^i é o número de Gödel do resultado da substituição, na fórmula de número de Gödel x_1^i, da primeira variável pela expressão cujo número de Gödel é x_2^i".

Abreviação 1.4. $D[x_1^i] = x_2^i$ *é uma abreviação de* $\mathrm{PriVarSubs}[x_1^i](N(x_1^i)) = x_2^i$.

$D[x_1^i] = x_2^i$ é "a função diagonal". Seja, por exemplo, k_1 o número de Gödel da fórmula $F(x_1^i)$ e $p_0^{k_0} \times \cdots \times p_m^{k_m} \times p_{m+1}^5 \times p_{m+2}^6 \times p_{m+3}^2 \times p_{m+4}^g \times \cdots \times p_{m+n}^h$ a decomposição de k_1. O n-cálculo para $D[x_1^i]$ junto com k_1 produzirá, por exemplo, a prova de $D[\overline{k_1}] = \overline{k}$ para um k determinado, cuja decomposição é $p_0^{k_0} \times \cdots \times p_m^{k_m} \times p_{m+1}^7 \times \cdots \times p_{m+k}^7 \times p_{m+k+1}^8 \times p_{m+k+2}^g \times \cdots$. De modo que k é o número de Gödel de $F(\overline{k_1})$, onde $\overline{k_1}$ é o número de Gödel de $F(x_1^i)$, ou seja, "k é o número de Gödel da diagonal de $F(x_1^i)$".

Em termos gerais, temos que:

Teorema 1.1. Se é k_1 o número de Gödel da fórmula $F(x_1^i)$, então $\vdash_{\mathsf{S}_2} D[\overline{g(F(x_1^i))}] = \overline{g(F(\overline{k_1}))}$.

§2. Teorema de Tarski e Teorema da Incompletude de Gödel-Tarski

Vamos supor nesta seção uma definição apropriada de **verdade segundo uma interpretação** juntamente com suas propriedades usuais.

Convenções 2.1. A é uma interpretação (extensionalmente correta) de L_2 tal que $\mathsf{A}(\mathsf{D}_i)$ é o conjunto dos naturais, $\mathsf{A}(s)$ é a função sucessor e $\mathsf{A}(0) = 0$. Se α é uma sentença de L_2, então $\mathsf{A}(\alpha) \in \{V, F\}$ e é dito o valor de verdade α segundo A; além disso, T será o conjunto $\{\alpha : \mathsf{A}(\alpha) = V\}$, F será o conjunto $\{\alpha : \mathsf{A}(\alpha) = F\}$.

Definição 2.2. Um sistema S é (aritmeticamente) *correto* se e somente se, para qualquer sentença α da linguagem de S, se $\vdash_{\mathsf{S}} \alpha$, então $\alpha \in \mathsf{T}$ **.**

Teorema 2.1. Se S_2 é correto e k_1 o número de Gödel de $F(x_1^i)$, então $D[g(F(x_1^i))] = g(F(\overline{k}_1)) \in \mathsf{T}$.

Teorema de Tarski. Se S_2 é aritmeticamente correto, então não existe nenhuma fórmula $T(x_1^i)$ de L_2 tal que, para qualquer α, $T(g(\alpha)) \in \mathsf{T}$ se e somente se $\alpha \in \mathsf{T}$.

Abreviações e Convenções Auxiliares. $\tilde{T}^*(x_1^i)$ é uma abreviação de $\forall x_2^i(D[x_1^i] = x_2^i \supset \sim T(x_2^i))$, $\tilde{t}^*$ é o número de Gödel de $\tilde{T}^*(x_1^i)$.

Prova. Suponhamos que exista uma fórmula $T(x_1^i)$ de L_2 tal que, para qualquer α, $T(\overline{g(\alpha)}) \in \mathsf{T}$ sse $\alpha \in \mathsf{T}$; assim, como $T(x_1^i)$ é uma fórmula de L_2, $\tilde{T}^*(x_1^i)$ será uma fórmula de L_2 e $\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*})$ será uma sentença de L_2.

Se $\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}) \in \mathsf{T}$, ou seja, se $D[\overline{g(\tilde{T}^*(x_1^i))}] = \overline{g(\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}))} \supset \sim T(\overline{g(\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}))}) \in \mathsf{T}$; então, pelo teorema 2.1, temos que $\sim T(\overline{g(\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}))}) \in \mathsf{T}$ e, segundo as condições para $T(x_1^i)$, também que $\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}) \notin \mathsf{T}$; ou seja, uma contradição.

Se $\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}) \notin \mathsf{T}$, segue-se que $\sim(D[\overline{g(\tilde{T}^*(x_1^i))}] = \overline{g(\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}))} \supset \sim T(\overline{g(\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}))})) \in \mathsf{T}$, ora, pelo teorema 2.1, $D[\overline{g(F(x_1^i))}] = \overline{g(F(\overline{k}_1))} \in \mathsf{T}$, logo, $\sim T(\overline{g(\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}))})) \notin \mathsf{T}$ e, segundo as condições para $T(x_1^i)$, $\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}^*}) \in \mathsf{T}$; ou seja, novamente uma nova contradição.

Ora, $\tilde{T}^*(\overline{\tilde{t}}^*) \in \mathsf{T}$ ou $T^*(\overline{\tilde{t}}^*) \notin \mathsf{T}$, então, tal como especificada, $T(x_1^i)$ não pode existir.

Definição 2.3. Um sistema S é (aritmeticamente) *completo* se e somente se, para qualquer sentença α da linguagem de S, se $\alpha \in \mathsf{T}$, então $\vdash_{\mathsf{S}} \alpha$; do contrário, S é *incompleto* .

Definição 2.4. Um sistema S é *inconsistente* se e somente se, para alguma sentença α, $\vdash_{\mathsf{S}} \alpha$ e $\vdash_{\mathsf{S}} \sim\alpha$; do contrário, I é *consistente*.

Teorema de Gödel-Tarski. Se S_2 é consistente e correto, então S_2 incompleto.

Prova. Se S_2 fosse completo, então existiria uma fórmula $T(x_1^i)$ de L_2 tal que, para qualquer α, $T(g(\alpha)) \in \mathsf{T}$ se e somente se $\alpha \in \mathsf{T}$, a saber, dada hipótese da constência de S_2, a fórmula $Dem(\overline{g(\alpha)})$, o que contradiz o teorema anterior.

§3. Teorema Incompletude de Gödel

Abreviações 3.1. Escreveremos $P(x_1^i, x_2^i)$ em lugar de $Seq_{Dem}(x_2^i)$ & $x_1^i \in Seq(x_2^i)$; $\tilde{P}^*(x_1^i)$ no lugar de $\forall x_2^i \forall x_3^i (D[x_1^i] = x_3^i \supset \sim P(x_3^i, x_2^i))$; $\tilde{p}^*$ será o número de Gödel de $\tilde{P}^*(x_1^i)$ e $d\tilde{p}^*$ será o número de Gödel de $\forall x_2^i \forall x_3^i (D[\overline{\tilde{p}}^*] = x_3^i \supset \sim P(x_3^i, x_2^i))$, ou seja, de $\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$.

Teorema 3.1. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*) \supset \sim\exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$D[\overline{\tilde{p}}^*] = \overline{d\tilde{p}}^* \supset \sim P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	E(∀)(1)
(3)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$D[\overline{\tilde{p}}^*] = \overline{d\tilde{p}}^*$	Teorema 1.1
(4)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	E(⊃)(2,3)
(5)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_2^i \sim P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	I(∀)(4)
(6)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	(~∃↔∀~)(5)
(7)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*) \supset \sim\exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	I(⊃)(1,7)

Teorema 3.2. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \sim\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*) \supset \exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$.

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$	H
(2)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_2^i \sim \forall x_3^i(D[\overline{\tilde{p}}^*] = x_3^i \supset \sim P(x_3^i, x_2^i))$	$(\exists\sim\leftrightarrow\sim\forall)(1)$
(3)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\forall x_3^i(D[\overline{\tilde{p}}^*] = x_3^i \supset \sim P(x_3^i, x_2^i))$	$E(\forall)(2)$
(4)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_3^i \sim(D[\overline{\tilde{p}}^*] = x_3^i \supset \sim P(x_3^i, x_2^i))$	$(\exists\sim\leftrightarrow\sim\forall)(3)$
(5)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim(D[\overline{\tilde{p}}^*] = x_3^i \supset \sim P(x_3^i, x_2^i))$	$E(\exists)(4)$
(6)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$P(x_3^i, x_2^i)$	$E(\supset)(5)$
(7)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$D[\overline{\tilde{p}}^*] = x_3^i$	$E(\supset)(5)$
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$D[\overline{\tilde{p}}^*] = \overline{d\tilde{p}}^*$	Teorema 1.1
(9)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	Subs(=)(7,8)
(10)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	$I(\exists)(9)$
(11)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*) \supset \exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$	$I(\supset)(1,10)$

Teorema 3.3. Se S_2 é consistente, $g(\alpha) = k$ e $\vdash_{\mathsf{S}_2} \sim Dem(\overline{k})$, então $\nvdash_{\mathsf{S}_2} \alpha$.

Prova. Se $\vdash_{\mathsf{S}_2} \sim Dem(\overline{k})$; então, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_2^i \sim P(\overline{k}, x_2^i)$. Desde que para toda derivação em S_2 existe um número de Gödel que lhe é correspondente e que nenhum desses números é o número da derivação de α, temos que $\nvdash_{\mathsf{S}_2} \alpha$; notamos que a existência de tal número tornaria S_2 inconsistente, desde que teríamos, sucessivamente, $\vdash_{\mathsf{S}_2} P(\overline{k}, \overline{k}_1)$, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \exists x_2^i P(\overline{k}, x_2^i)$ e, portanto, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \sim\forall x_2^i P(\overline{k}, x_2^i)$.

Teorema 3.4. Se S_2 é n-consistente, $g(\alpha) = k$ e $\vdash_{\mathsf{S}_2} Dem(\overline{k})$, então $\vdash_{\mathsf{S}_2} \alpha$.

Prova. Se $\vdash_{\mathsf{S}_2} Dem(\overline{k})$; então, pela n-consistência, temos que, para algum k_1, $\vdash_{\mathsf{S}_2} P(\overline{k}, \overline{k}_1)$; de modo que k_1 será o número de Gödel de uma derivação de α; reconstruída tal derivação, teremos que $\vdash_{\mathsf{S}_2} \alpha$.

Teorema da Incompletude. Se S_2 é consistente, então $\nvdash \tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$. Se S_2 é n-consistente, então $\nvdash$ $\sim\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$. Se S_2 é n-consistente, então S_2 incompleto.

Prova. Suponhamos que S_2 é consistente e que $\vdash_{S_2} \tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$, pelo teorema 3.1, temos, portanto, que $\vdash_{S_2} \sim\exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$, ou seja, que $\vdash_{S_2} \sim Dem(\overline{d\tilde{p}}^*)$ e, portanto, pelo teorema 3.3, $\nvdash_{S_2} \tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$.

Suponhamos que S_2 é n-consistente e que $\vdash_{S_2} \sim\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$, pelo teorema 3.2, temos que $\vdash_{S_2}$ $\exists x_2^i P(\overline{d\tilde{p}}^*, x_2^i)$, ou seja, que $\vdash_{S_2} Dem(\overline{d\tilde{p}}^*)$ e, portanto, pelo teorema 3.4, $\vdash_{S_2} \tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$; desde que um sistema n-consistente é também consistente, então $\nvdash \sim\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$.

Na hipótese de S_2 ser n-consistente, como se dá tanto $\nvdash \tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$ quanto $\nvdash \sim\tilde{P}^*(\overline{\tilde{p}}^*)$, segue-se que S_2 incompleto.

Considerações Finais

Limitações inerentes serão, para nós, aquelas limitações que só podem ser contornadas pela re-estruturação de toda exposição; por exemplo, a substituição do sistema S_2 por outro seria um meio de contornar limitações inerentes ao sistema S_2. E *limitações residuais*, aquelas limitações que podem ser superadas pelo simples acréscimo de outros resultados à exposição; por exemplo, a apresentação de uma Teoria da Ordem mais completa para S_2, seguindo as indicações de §5, II, seria um meio de superar limitações residuais de nossa exposição.

As limitações inerentes podem ser exploradas em termos das vantagens e desvantagens de nossa abordagem em relação a outras possíveis; as limitações residuais, em termos das possibilidades deixadas abertas por nossa própria exposição.

Nossas considerações finais serão dedicadas ao tratamento de algumas dessas limitações.

As linguagens L_1 e L_2:

Uma das possíveis vantagens conceituais das linguagens L_1 e L_2 é que nelas se dá, por assim dizer, um tratamento primitivo das relações. As variáveis de L_1 e L_2 são **variáveis relacionais de aridade e tipo quaisquer**. Essas linguagens se distinguem, em primeiro lugar, da linguagem do sistema ***P*** de Gödel, na qual, relações são pensadas em termos de certas propriedades especiais (mais especificamente, relações *n*-árias são pensadas como propriedades de entidades *n*-ordenadas); e, em segundo lugar, da linguagem da Teoria Simples dos Tipos de Church, que trata as relações como funções proposicionais. No primeiro caso, poderíamos argumentar que existe uma vantagem das linguagens L_1 e L_2 do ponto de vista da **fundamentação do formalismo**, na medida em que o sistema de Gödel pressupõe alguns conceitos conjuntistas. No segundo caso, as coisas são um pouco mais controversas e qualquer discussão se revestiria rapidamente de um **caráter filosófico**; se é vantajoso ou não, do ponto de vista conceitual, tratar as relações como primitivas é algo que pressupõe que respondamos perguntas do tipo: Qual é a relação entre conceito e proposição? Existe subordinação entre eles? De que natureza é esta subordinação? Desde que está muito longe de nossas pretensões atuais trazer respostas para tais questões, ficam elas aqui em aberto.

Do ponto de vista técnico, todavia, as vantagens dos sistemas de Gödel e Church são enormes: tais sistemas são muito mais fáceis de aritmetizar. Temos duas indicações claras disso: primeira, a redefinição de matriz típica proposta na seção 2 do Capítulo III, cuja fraqueza é a ambigüidade em relação à definição original (§1, Capítulo I); segunda, o recurso desesperado à **Convenção 2.8** do Capítulo III para estabelecermos a contrapartida formal de "x_1^i é (o número de Gödel de) uma fórmula atômica de L_2" sem mudanças profundas em L_2.

Notemos, em todo caso, que, desde que os conceitos originais de matriz típica e fórmula atômica de L_2 são decidíveis, sua aritmetização é possível (por mais barroca que venha a ser); do contrário, teríamos um contra-exemplo para a Tese de Church. Essa garantia, contudo, não nos isenta, do ponto de vista da investigação formal, de substituir a **Convenção 2.8** pela aritmetização adequada de "x_1^i é (o número de Gödel de) uma fórmula atômica de L_2". Essa é a primeira das nossas limitações residuais.

Duas outras limitações desse tipo precisariam ser superadas para avançarmos na investigação formal das linguagens L_1 e L_2: primeiro, o estabelecimento de uma semântica matematicamente adequada para tais linguagens; segundo, a hierarquização dos tipos de fórmulas dessas linguagens (por exemplo, fórmulas de tal ou tal ordem, fórmulas recursivas ou analíticas, etc.), juntamente com definições parciais de verdade. Tal clivagem permitiria, então, o estabelecimento intrassistêmico (por exemplo, em S_2) de vários dos metateoremas das lógicas de primeira e segunda ordem mais conhecidos e de outros tantos teoremas da teoria da recursão (na verdade, todos estes teoremas e metateoremas são passíveis de tratamento em S_2). Outro refinamento óbvio, desde que estejamos munidos das definições de verdade relevantes, consistiria em um estudo mais detido das possibilidades expressivas (dos vários tipos de fórmulas) das linguagens L_1 e L_2.

Os sistemas S_1 e S_2:

As regras e axiomas concernentes aos quantificadores, tanto de S_1 quanto de S_2, apesar de corretos (na acepção técnica da palavra), merecem um estudo mais profundo para evitar possíveis redundâncias (de que, ao que tudo indica, sofrem S_1 e S_2).

Outro refinamento instrutivo: poderíamos definir um sistema S_3 (bastante parecido com S_2), no qual o axioma P_3 (ou seja, a indução matemática) não aparecesse e cuja linguagem fosse a extensão simples $\mathsf{L}_2 \cup \{N\}$ de L_2; num sistema assim formulado, a constante não-lógica N seria tomada como a contrapartida do conjunto dos naturais, o que juntamente com axiomas definitórios de N, permitiria a derivação da indução matemática.

Apêndice I
Provas dos Teoremas do Capítulo II

§1. Distribuição e Determinação em S_1 e S_2

Teorema 1.1. $\mathsf{D}(x_1^i = x_2^i)$.

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\forall x_2^i \sim(x_1^i = x_2^i)$	H
(2)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\sim(x_1^i = x_1^i)$	I($\forall$)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$x_1^i = x_1^i$	I(=)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\sim\forall x_2^i \sim(x_1^i = x_2^i)$	I(~)(1,2,3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\exists x_2^i (x_1^i = x_2^i)$	($\sim\forall\sim\leftrightarrow\exists$)(4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\forall x_1^i \exists x_2^i (x_1^i = x_2^i)$	I($\forall$)(5)

Teorema 1.2. $\mathsf{e}(x_1^i = x_2^i)$.

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$x_1^i = x_2^i \wedge x_1^i = x_3^i$	H
(2)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$x_1^i = x_2^i$	E($\wedge$)(1)
(3)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$x_1^i = x_3^i$	E($\wedge$)(1)
(4)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$x_2^i = x_3^i$	Subs(=)(2,3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$(x_1^i = x_2^i \wedge x_1^i = x_3^i) \supset x_2^i = x_3^i$	I($\supset$)(1,4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\forall x_1^i / x_3^i ((x_1^i = x_2^i \wedge x_1^i = x_3^i) \supset x_2^i = x_3^i)$	I($\forall$)(5)

Dos lemas 1.1 e 1.2, então:

Teorema 1.3. $\mathsf{De}(x_1^i = x_2^i)$.

Teorema 1.4. Para quaisquer naturais n e m, $\vdash_{\mathsf{S}} \mathsf{e}(s^n x_1^i = s^m x_2^i)$.

Prova. Substitui-se x_1^i por $s^n x_1^i$, x_2^i por $s^m x_2^i$ e x_3^i por $s^m x_3^i$ na prova do teorema 1.2.

Teorema 1.5. $\mathsf{De}(s^n x_1^i = x_2^i)$.

Prova. O teorema anterior e o argumento abaixo produzem o resultado.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_2^i \sim(s^n x_1^i = x_2^i)$	H
(2)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim(s^n x_1^i = s^n x_1^i)$	E(∀)(1)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$s^n x_1^i = s^n x_1^i$	I(=)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\forall x_2^i \sim(s^n x_1^i = x_2^i)$	I(~)(1,2,3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_2^i (s^n x_1^i = x_2^i)$	(~∀~↔∃)(4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i \exists x_2^i (s^n x_1^i = x_2^i)$	I(∀)(5)

Teorema 1.6. $\sim\mathsf{De}(x_1^i = s^n x_2^i)$.

Prova.

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim(s^n x_2^i = 0)$	E(∀)(P_1)
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim(0 = s^n x_2^i)$	Sim(=)(1)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_2^i \sim(0 = s^n x_2^i)$	I(∀)(2)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\exists x_2^i (x_1^i = s^n x_2^i)$	(∀~↔~∃)(3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_1^i \sim\exists x_2^i (x_1^i = s^n x_2^i)$	I(∃)(4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\forall x_1^i \exists x_2^i (x_1^i = s^n x_2^i)$	(~∀↔∃~)(5)

§2. Conceitos n em S

Teorema 2.1. Se e(F), então en(F).

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$F(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	H
(2)	$\{2\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$F(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k})$	H
(3)	$\{3\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i / x_{n+1}^i \forall x_{m+1}^i ((F(x_1^i, \ldots, x_{n+1}^i) \wedge F(x_1^i, \ldots, x_{m+1}^i)) \supset x_{n+1}^i = x_{m+1}^i)$	H
(4)	$\{3\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(F(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}) \wedge F(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k})) \supset \overline{k}_{n+1} = \overline{k}$	E(∀)(3)
(5)	$\{1,2\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$F(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}) \wedge F(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k})$	I(∧)(1,2)
(6)	$\{1,2,3\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}_{n+1} = \overline{k}$	E(⊃)(4,5)

Se $F(x^i_1, ..., x^i_n)$ é uma determinação; temos, por definição, que $\vdash_{S_2} \forall x^i_1 / x^i_{n+1} \forall x^i_{m+1}((F(x^i_1, ..., x^i_{n+1}) \wedge F(x^i_1, ..., x^i_{m+1})) \supset x^i_{n+1} = x^i_{m+1})$; supomos, agora, que $\vdash_{S_2} F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$ e $\vdash_{S_2} F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})$, assim, pelo esquema acima, $\vdash_{S_2} \overline{k}_{n+1} = \overline{k}$, de modo que $F(x^i_1, ..., x^i_n)$ é uma n-determinação.

Teorema 2.2. Se S_2 é n-consistente e D(F), então Dn(F).

Prova. Para quaisquer $\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n$, $\vdash_{S_2} \exists x^i_1 F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, x^i_1)$, desde que D(F); logo, pela hipótese da n-consistência, para algum k, $\vdash_{S_2} F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})$.

Segue-se dos teoremas 2.1 e 2.2:

Teorema 2.3. Se S_2 é n-consistente e De(F), então Den(F).

O teorema abaixo é uma conseqüência imediata das definições:

Teorema 2.4. Se existe um n-cálculo para $F(x^i_1, ..., x^i_n)$, então Dn(F).

Teorema 2.5. $\mathsf{Rep}(x^i_1 = x^i_2)$.

Prova. Para quaisquer numerais $\overline{k}_1, \overline{k}_2$ ou $\overline{k}_1$ é mais complexo que $\overline{k}_2$ ou $\overline{k}_2$ é mais complexo que $\overline{k}_1$ ou $\overline{k}_1$ e $\overline{k}_2$ são numerais de mesma complexidade. A partir dos 3 esquemas abaixo é possível construir derivações ou de $\overline{k}_1 = \overline{k}_2$ ou de $\sim\overline{k}_1 = \overline{k}_2$ segundo um dos casos.

Esquema 1. $\overline{k}_2$ é de complexidade k_2 e $\overline{k}_1$ é de complexidade k_1, onde k_1 é maior do que k_2.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_1 = \overline{k}_2$	H
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$s\overline{k}_1\text{-}1 = s\overline{k}_2\text{-}1 \supset \overline{k}_1\text{-}1 = \overline{k}_2\text{-}1$	E(∀)(P_2)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_1\text{-}1 = \overline{k}_2\text{-}1$	E(⊃)(1, 2)
⋮			⋮	⋮
($2+2k_2$)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$s\overline{k}_1\text{-}k_2 = s\overline{k}_2\text{-}k_2 \supset \overline{k}_1\text{-}k_2 = \overline{k}_2\text{-}k_2$	E(∀)(P_2)
($3+2k_2$)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_1\text{-}k_2 = \overline{k}_2\text{-}k_2$	E_1(⊃)($1+2k_2$, $2+2k_2$)

Ora, $\overline{k}_2\text{-}k_2$ é igual a 0; e $\overline{k}_1\text{-}k_2$ é diferente de 0 na medida em que $\overline{k}_1$ é mais complexo do que $\overline{k}_2$, logo, para algum $\overline{k}$, $\overline{k}_1\text{-}k_2$ é igual a $s\overline{k}$. Então, é possível reescrever as duas últimas linhas:

($2+2k_2$)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$ss\overline{k} = s0 \supset s\overline{k} = 0$	E(∀)(P_2)
($3+2k_2$)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$s\overline{k} = 0$	E(⊃)($1+2k_2$, $2+2k_2$)

Contudo, pelo axioma P_1:

($4+2k_2$)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$s\overline{k} \neq 0$	E(∀)(P_1)

O que gera uma contradição e, assim, pela contrapartida formal da redução por absurdo:

(5+2k_2) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\sim\overline{k}_1 = \overline{k}_2$ E(~)(3+2k_2, 4+2k_2)

Esquema 2. $\overline{k}_2$ é mais complexo que $\overline{k}_1$.

(1) {1} $\vdash_{S_2}$ $\overline{k}_1 = \overline{k}_2$ H

(2) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $s\overline{k}_1\text{-}1 = s\overline{k}_2\text{-}1 \supset \overline{k}_1\text{-}1 = \overline{k}_2\text{-}1$ E(∀)(P$_2$)

(3) {1} $\vdash_{S_2}$ $\overline{k}_1\text{-}1 = \overline{k}_2\text{-}1$ E(⊃)(1, 2)

⋮ ⋮ ⋮

(2+2k_1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $s\overline{k}_1\text{-}k_1 = s\overline{k}_2\text{-}k_1 \supset \overline{k}_1\text{-}k_1 = \overline{k}_2\text{-}k_1$ E(∀)(P$_2$)

(3+2k_1) {1} $\vdash_{S_2}$ $\overline{k}_1\text{-}k_1 = \overline{k}_2\text{-}k_1$ E(⊃)(1+2k_1, 2+2k_1)

Ora, $\overline{k}_1\text{-}k_1$ é igual a 0; e $\overline{k}_2\text{-}k_1$ é diferente de 0 na medida em que $\overline{k}_2$ é mais do complexo que $\overline{k}_1$, logo, para algum $\overline{k}$, $\overline{k}_2\text{-}k_1$ é igual a $s\overline{k}$. Então, é possível reescrever as duas últimas linhas:

(2+2k_1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $s0 = ss\overline{k} \supset 0 = s\overline{k}$ E(∀)(P$_2$)

(3+2k_1) {1} $\vdash_{S_2}$ $0 = s\overline{k}$ E(⊃)(1+2k_1, 2+2k_1)

(4+2k_1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $s\overline{k} = 0$ Sim(=)(3+2k_1)

Repete-se, então, as duas linhas finais do esquema anterior:

(5+2k_1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $s\overline{k} \neq 0$ E(∀)(P$_1$)

(6+2k_1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\sim\overline{k}_1 = \overline{k}_2$ E(~)(4+2k_1, 5+2k_1)

Esquema 3. $\overline{k}_1$ e $\overline{k}_2$ são numerais de mesma complexidade, de modo que $\overline{k}_1$ e $\overline{k}_2$ são, na verdade, o mesmo numeral. Assim:

(1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\overline{k}_1 = \overline{k}_2$ I(=)

E, portanto, pelos esquemas 1, 2 e 3, Rep($x_1^i = x_2^i$).

Observação. Que $x_1^i = x_2^i$ seja uma $\cap$-representação é uma propriedade metamatemática da fórmula, no entanto, é importante perceber que fatores, por assim dizer, tanto externos (e, em nosso caso, não formalizados) quanto internos (teoremas de S) contribuem para o estabelecimento do resultado; pois, diferentemente de $\forall x_1^i(x_1^i = x_1^i)$ que é um teorema de S, o fato de que "numerais de mesma complexidade sejam um mesmo numeral", apesar de evidente, ainda assim não é um teorema de S.

Teorema 2.6. Se existe um n-cálculo para $F(x_1^i, ..., x_n^i)$ e e(F), então Rep(F).

Prova. Seja $\mathsf{E}(F)(x_n^i)$ um n-cálculo para $F(x_1^i, ..., x_n^i)$, cuja última linha é, para quaisquer numerais $\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n$, $\varnothing \vdash_{S_2} F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})$; ora, desde que $\mathsf{Rep}(=)$, para um k_{n+1} qualquer, ou $\vdash_{S_2} \overline{k} = \overline{k}_{n+1}$ ou $\vdash_{S_2} {\sim}\overline{k} = \overline{k}_{n+1}$; assim, se $\vdash_{S_2} \overline{k} = \overline{k}_{n+1}$, então $\vdash_{S_2} F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$; e se $\vdash_{S_2} {\sim}\overline{k} = \overline{k}_{n+1}$, desde que e(F) e, portanto, $\vdash_{S_2} (F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}) \wedge F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})) \supset \overline{k}_{n+1} = \overline{k}$ (por E($\forall$)), então $\vdash_{S_2} {\sim}F(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$.

Teorema 2.7. $\mathsf{Den}(x_1^i = x_2^i)$.

Prova. Para quaisquer numerais $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}$:

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_1 = \overline{k}_2$	H
(2)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_1 = \overline{k}$	H
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_2 = \overline{k}_1$	Sim(=)(1)
(4)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_2 = \overline{k}$	Subs(=)(2,3)

Supomos, agora, que $\vdash_{S_2} \overline{k}_1 = \overline{k}_2$ e $\vdash_{S_2} \overline{k}_1 = \overline{k}_2$, assim, pelo esquema acima, $\vdash_S \overline{k}_1 = \overline{k}$, e, portanto, $x_1^i = x_2^i$ é uma n-determinação.

Desde que, para qualquer numeral $\overline{k}$, pela reflexividade da identidade, $\vdash_{S_2} \overline{k} = \overline{k}$, assim, $x_1^i = x_2^i$ é uma n-determinação universal em S_2. Deste modo, 2.8 fica demonstrado.

Definição 2.1. Seja $\mathsf{E}(=)$ o esquema de dedução (1) $\varnothing \vdash_{S_2} \overline{k} = \overline{k}$ I(=).

Ora, $\mathsf{E}(=)$ é um n-cálculo para $x_1^i = x_2^i$, então:

Teorema 2.8. Existe um n-cálculo para $x_1^i = x_2^i$.

§3. Teoria das Funções Iniciais em S_2

Teorema 3.1. De(**S**).

Prova. Conferir teorema 1.5.

Teorema 3.2. Existe um n-cálculo para $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$.

Prova. O esquema de dedução (1) $\varnothing \vdash_{S_2} s\overline{k} = s\overline{k}$ I(=) é um n-cálculo para $\mathbf{S}(x_1^i, x_2^i)$.

Teorema 3.3. Den(**S**) e Rep(**S**).

Prova. Para quaisquer numerais $\overline{k}_1, \overline{k}_2$ ou $s\overline{k}_1$ é mais complexo do que $\overline{k}_2$ ou $\overline{k}_2$ é mais complexo do que $s\overline{k}_1$ ou $s\overline{k}_1$ e $\overline{k}_2$ são numerais de mesma complexidade. De modo que, pela aplicação dos esquemas 1, 2 e 3 do teorema 2.5, Rep(**S**); pelos teorema 2.1 e 3.1, en(**S**); e, pelos teoremas 2.4 e 3.2, Den(**S**).

Teorema 3.4. $\mathbf{A}(x_1^i, x_2^i)$ é uma n-representação (da relação "anteceder"), é uma n-determinação, mas não é uma n-determinação universal em S_2 (desde que S_2 seja consistente).

Prova. Novamente, os esquemas 1, 2 e 3 podem ser aplicados. Contudo, pelo axioma P_1, para qualquer numeral $\overline{k}$, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \overline{k} \neq 0$, de modo que se $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{A}(0, \overline{k})$, ou seja, $\vdash_{\mathsf{S}_2} 0 = s\overline{k}$, para algum $\overline{k}$, então S_2 seria inconsistente.

Teorema 3.5. $\mathsf{De}(\mathbf{C}_k^n)$.

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i) \wedge \mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+2}^i)$	H
(2)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k} = x_{n+1}^i$	E($\wedge$)(1)
(3)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k} = x_{n+2}^i$	E($\wedge$)(1)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k} = x_{n+1}^i \supset x_{n+1}^i = \overline{k}$	E($\forall$)(Sim(=))
(5)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_{n+1}^i = \overline{k}$	E($\supset$)(2, 4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(x_{n+1}^i = \overline{k} \wedge \overline{k} = x_{n+2}^i) \supset x_{n+1}^i = x_{n+2}^i$	E($\forall$)(Trans(=))
(7)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_{n+1}^i = \overline{k} \wedge \overline{k} = x_{n+2}^i$	I($\wedge$)(5, 3)
(8)	$\{1\}$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_{n+1}^i = x_{n+2}^i$	E($\supset$)(7, 6)
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i) \wedge \mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+2}^i)) \supset x_{n+1}^i = x_{n+2}^i$	I($\supset$)(1, 8)

E, assim, depois da aplicação de sucessivas generalizações universais, derivamos, finalmente, $\vdash_{\mathsf{S}} \forall x_1^i / x_{n+2}^i(\mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i) \wedge \mathbf{C}_k^n(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+2}^i)) \supset x_{n+1}^i = x_{n+2}^i)$. Logo, $\mathsf{e}(\mathbf{C}_k^n)$.

O esquema abaixo completa a prova:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k} = \overline{k}$	I(=)
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i = x_1^i$	I(=)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_2^i = x_2^i$	I(=)
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(2+n)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_n^i = x_n^i$	I(=)
(3+n)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\cdots(x_1^i = x_1^i \wedge \cdots) \wedge x_n^i = x_n^i) \wedge \overline{k} = \overline{k})$	I($\wedge$)(2, ..., 2 + n, 1)
(4+n)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_{n+1}^i(\cdots(x_1^i = x_1^i \wedge \cdots) \wedge x_n^i = x_n^i) \wedge \overline{k} = x_{n+1}^i)$	I($\exists$)(3+n)

Deriva-se, então, $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i / x_n^i \exists x_{n+1}^i(\cdots(x_1^i = x_1^i \wedge \cdots) \wedge x_n^i = x_n^i) \wedge \overline{k} = x_{n+1}^i)$ por meio de n generalizações universais de modo que $\mathsf{D}(\mathbf{C}_k^n)$. E, portanto, $\mathsf{De}(\mathbf{C}_k^n)$.

Teorema 3.6. Den($\mathbf{C}^n_k$) e Rep($\mathbf{C}^n_k$).

Prova. Para quaisquer numerais $\overline{k}_{n+1}$, $\overline{k}$: **a)** ou $\overline{k}_{n+1}$ é mais complexo do que $\overline{k}$; **b)** ou $\overline{k}$ é mais complexo do que $\overline{k}_{n+1}$; **c)** ou $\overline{k}_{n+1}$ e $\overline{k}$ são numerais de mesma complexidade. Para os casos **a)**, **b)** e **c)**, mostraremos como é possível construir derivações de $\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$ ou derivações de $\sim\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$, para quaisquer numerais $\overline{k}_1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_n$.

a) Se $\overline{k}_{n+1}$ é mais complexo do que $\overline{k}$, então, pelo esquema 2 do teorema 2.5:

(1) $\varnothing \vdash_{S_2} \sim\overline{k} = \overline{k}_{n+1}$

Ora, a negação de uma conjunção é derivável da negação de um dos seus conjuntivos, portanto:

(2) $\varnothing \vdash_{S_2} \sim(\cdots(\overline{k}_1 = \overline{k}_1 \wedge \cdots) \wedge \overline{k}_n = \overline{k}_n) \wedge \overline{k} = \overline{k}_{n+1})$

Ou seja:

(2) $\varnothing \vdash_{S_2} \sim\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$

b) Se $\overline{k}$ é mais complexo do que $\overline{k}_{n+1}$, então, substituindo o esquema 2 do teorema 2.5 pelo esquema 1 do mesmo teorema no caso a acima, temos novamente:

(2) $\varnothing \vdash_{S_2} \sim\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$

c) Se $\overline{k}_{n+1}$ e $\overline{k}$ são numerais de mesma complexidade, então, pelo esquema 3 do teorema 2.5:

(1) $\varnothing \vdash_{S_2} \overline{k} = \overline{k}_{n+1}$

E, por n instâncias da reflexividade da identidade:

(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_1 = \overline{k}_1$	E(∀)(Ref(=))
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_2 = \overline{k}_2$	E(∀)(Sim(=))
⋮			⋮	⋮
(2+n)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_n = \overline{k}_n$	E(∀)(Sim(=))

Por meio de introduções sucessivas da conjunção:

(3+n)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\cdots(\overline{k}_1 = \overline{k}_1 \wedge \cdots) \wedge \overline{k}_n = \overline{k}_n) \wedge \overline{k} = \overline{k}_{n+1})$	I(∧)(2, ..., 2 + n, 1)
(4+n)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	Abreviação 3.3

De modo que Rep($\mathbf{C}^n_k$).

d) O esquema abaixo estabelece que en($\mathbf{C}^n_k$).

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	H
(2)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2})$	H

(3) $\{1\} \vdash_{S_2} \overline{k}_{n+1} = \overline{k}$ E(∧)(1)

(4) $\{2\} \vdash_{S_2} \overline{k}_{n+2} = \overline{k}$ E(∧)(2)

(5) $\varnothing \vdash_{S_2} \overline{k}_{n+2} = \overline{k} \supset \overline{k} = \overline{k}_{n+2}$ E(∀)(Sim(=))

(6) $\{2\} \vdash_{S_2} \overline{k} = \overline{k}_{n+2}$ E(⊃)(4,5)

(7) $\varnothing \vdash_{S_2} (\overline{k}_{n+1} = \overline{k} \wedge \overline{k} = \overline{k}_{n+2}) \supset \overline{k}_{n+1} = \overline{k}_{n+2}$ E(∀)(Trans(=))

(8) $\{1,2\} \vdash_{S_2} \overline{k}_{n+1} = \overline{k} \wedge \overline{k} = \overline{k}_{n+2}$ I(∧)(3,6)

(9) $\{1,2\} \vdash_{S_2} \overline{k}_{n+1} = \overline{k}_{n+2}$ E(⊃)(8,7)

Supomos, agora, que $\vdash_{S_k} \mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$ e $\vdash_{S_k} \mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2})$, assim, $\vdash_{S_k} \overline{k}_{n+1} = \overline{k}_{n+2}$, e, portanto, en($\mathbf{C}^n_k$).

e) Para quaisquer numerais $\overline{k}_1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_n$, o esquema abaixo é a derivação de $\mathbf{C}^n_k(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})$ em S_2:

(1) $\varnothing \vdash_{S_2} \overline{k} = \overline{k}$ E(∀)(Ref(=))

(2) $\varnothing \vdash_{S_2} \overline{k}_1 = \overline{k}_1$ E(∀)(Ref(=))

(3) $\varnothing \vdash_{S_2} \overline{k}_2 = \overline{k}_2$ E(∀)(Ref(=))

⋮ ⋮ ⋮

(2+n) $\varnothing \vdash_{S_2} \overline{k}_n = \overline{k}_n$ E(∀)(Ref(=))

(3+n) $\varnothing \vdash_{S_2} (\cdots(\overline{k}_1 = \overline{k}_1 \wedge \cdots) \wedge \overline{k}_n = \overline{k}_n) \wedge \overline{k} = \overline{k})$ I(∧)(2, ..., 2+n, 1)

Logo, Dn($\mathbf{C}^n_k$) e, de d), Den($\mathbf{C}^n_k$).

Desde que E($\mathbf{C}^n_k$) é um n-cálculo para $\mathbf{C}^n_k(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$, então:

Teorema 3.7. Existe um n-cálculo para $\mathbf{C}^n_k(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$.

Teorema 3.8. De($\mathbf{P}^n_j$).

Prova. A estrutura da derivação abaixo é exatamente a mesma da derivação apresentada na primeira parte do teorema 3.5.

(1) $\{1\} \vdash_{S} \mathbf{P}^n_j(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1}) \wedge \mathbf{P}^n_j(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+2})$ H

(2) $\{1\} \vdash_{S} x^i_j = x^i_{n+1}$ E(∧)(1)

(3)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$x^i_j = x^i_{n+2}$	E($\wedge$)(1)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$x^i_j = x^i_{n+1} \supset x^i_{n+1} = x^i_j$	E($\forall$)(Sim(=))
(5)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$x^i_{n+1} = x^i_j$	E($\supset$)(2, 4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$(x^i_{n+1} = x^i_j \wedge x^i_j = x^i_{n+2}) \supset x^i_{n+1} = x^i_{n+2}$	E($\forall$)(Trans(=))
(7)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$x^i_{n+1} = x^i_j \wedge x^i_j = x^i_{n+2}$	I($\wedge$)(5, 3)
(8)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$x^i_{n+1} = x^i_{n+2}$	E($\supset$)(7, 6)
(9)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$(\mathbf{P}^n_j(x^i_1, \ldots, x^i_n, x^i_{n+1}) \wedge \mathbf{P}^n_j(x^i_1, \ldots, x^i_n, x^i_{n+2})) \supset x^i_{n+1} = x^i_{n+2}$	I($\supset$)(1, 8)
(10)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\forall x^i_1 / x^i_{n+2}((\mathbf{P}^n_j(x^i_1, \ldots, x^i_n, x^i_{n+1}) \wedge \mathbf{P}^n_j(x^i_1, \ldots, x^i_n, x^i_{n+2})) \supset x^i_{n+1} = x^i_{n+2})$	I($\forall$)(9)

Logo, $\mathsf{e}(\mathbf{P}^n_j)$.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$\forall x^i_{n+1} \sim(\cdots(x^i_1 = x^i_1 \wedge \cdots) \wedge x^i_j = x^i_{n+1})$	H
(2)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$\sim(\cdots(x^i_1 = x^i_1 \wedge \cdots) \wedge x^i_j = x^i_j)$	E($\forall$)(1)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$x^i_1 = x^i_1$	I(=)
(4)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$\sim(\cdots(x^i_2 = x^i_2 \wedge \cdots) \wedge x^i_j = x^i_j)$	E($\wedge$)(2,3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$x^i_2 = x^i_2$	I(=)
(6)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$\sim(\cdots(x^i_3 = x^i_3 \wedge \cdots) \wedge x^i_j = x^i_j)$	E($\wedge$)(4,5)
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(2n+2)	$\{1\}$	$\vdash_S$	$\sim(x^i_j = x^i_j)$	E($\wedge$)(2n,2n+1)
(2n+3)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$x^i_j = x^i_j$	I(=)
(2n+4)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\sim\forall x^i_{n+1} \sim(\cdots(x^i_1 = x^i_1 \wedge \cdots) \wedge x^i_j = x^i_{n+1})$	R(~)(1,2n+2,2n+3)
(2n+5)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\exists x^i_{n+1}(\cdots(x^i_1 = x^i_1 \wedge \cdots) \wedge x^i_n = x^i_n) \wedge \overline{k} = x^i_{n+1})$	($\sim\forall\sim\leftrightarrow\exists$)(2$n$+4)
(2n+6)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\forall x^i_1 / x^i_n \exists x^i_{n+1}(\cdots(x^i_1 = x^i_1 \wedge \cdots) \wedge x^i_j = x^i_{n+1})$	I($\forall$)(2n+5)

Logo, $\mathsf{D}(\mathbf{P}^n_j)$ e, portanto, $\mathsf{De}(\mathbf{P}^n_j)$.

Teorema 3.9. $\mathsf{Den}(\mathbf{P}^n_j)$ e $\mathsf{Rep}(\mathbf{P}^n_j)$.

Prova. Para quaisquer numerais $k_1, \ldots, \overline{k}_j, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}$: **a)** ou $\overline{k}_{n+1}$ é mais complexo do que $\overline{k}_j$; **b)** ou $\overline{k}_j$ é mais complexo do que $\overline{k}_{n+1}$; **c)** ou $\overline{k}_{n+1}$ e $\overline{k}_j$ são numerais de mesma complexidade. Em **a)**, **b)** e **c)**, mostramos como é possível construir derivações de $\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$ ou derivações de $\sim\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$, para quaisquer numerais $\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}$.

a) Se $\overline{k}_{n+1}$ é mais complexo do que $\overline{k}_j$, então, o esquema 2 do teorema 2.5 justifica a linha (1):

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\overline{k}_j = \overline{k}_{n+1}$	
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	$I_2(\wedge)(1)$

b) Se $\overline{k}_j$ é mais complexo do que $\overline{k}_{n+1}$, então, o esquema 1 do teorema 2.5 justifica a linha (1):

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\overline{k}_j = \overline{k}_{n+1}$	
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	$I_2(\wedge)(1)$

c) Se $\overline{k}_{n+1}$ e $\overline{k}_j$ são numerais de mesma complexidade, logo, $\overline{k}_{n+1}$ e $\overline{k}_j$ são, na verdade, o mesmo numeral, assim:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_j = \overline{k}_{n+1}$	I(=)
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_1 = \overline{k}_1$	I(=)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_2 = \overline{k}_2$	I(=)
⋮			⋮	⋮
$(2+n)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_n = \overline{k}_n$	I(=)
$(3+n)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	$I(\wedge)(2,...,2+n,1)$

De modo que $\mathsf{Rep}(\mathbf{P}^n_j)$.

d) O esquema abaixo estabelece que $\mathbf{P}^n_j(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$ é uma n-determinação.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	H
(2)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2})$	H
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_j = \overline{k}_{n+1}$	$E(\wedge)(1)$
(4)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_j = \overline{k}_{n+2}$	$E(\wedge)(2)$
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_j = \overline{k}_{n+1} \supset \overline{k}_{n+1} = \overline{k}_j$	$E(\forall)(Sim(=))$
(6)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_{n+1} = \overline{k}_j$	$E_1(\supset)(3,5)$
(7)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\overline{k}_{n+1} = \overline{k}_j \wedge \overline{k}_j = \overline{k}_{n+2}) \supset \overline{k}_{n+1} = \overline{k}_{n+2}$	$E(\forall)(Trans(=))$
(8)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_{n+1} = \overline{k}_j \wedge \overline{k}_j = \overline{k}_{n+2}$	$I(\wedge)(6,4)$
(9)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_{n+1} = \overline{k}_{n+2}$	$E(\supset)(8,7)$

Supomos, agora, que $\vdash_{S_2} \mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$ e $\vdash_{S_2} \mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2})$, assim, $\vdash_{S_2} \overline{k}_{n+1} = \overline{k}_{n+2}$, e, portanto, $\mathsf{en}(\mathbf{P}^n_j)$.

e) Para quaisquer numerais $\overline{k}_1, ..., \overline{k}_j,, ..., \overline{k}_n$, o esquema abaixo é a derivação de $\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_j)$ em S_2:

(1)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}_1 = \overline{k}_1$	I(=)
⋮		⋮	⋮
(*j*)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}_j = \overline{k}_j$	I(=)
⋮		⋮	⋮
(*n*)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}_n = \overline{k}_n$	I(=)
(*n*+1)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\cdots(\overline{k}_1 = \overline{k}_1 \wedge \cdots) \wedge \overline{k}_j = \overline{k}_j) \wedge \cdots) \wedge \overline{k}_j = \overline{k}_j)$	I(∧)(1,...,*n*)
(*n*+2)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_j)$	Abreviação 3.4

Logo, $\mathsf{Dn}(\mathbf{P}^n_j)$ e, portanto, $\mathsf{Den}(\mathbf{P}^n_j)$.

Definição 3.2. Seja $\mathsf{E}(\mathbf{P}^n_j)$ o esquema de dedução abaixo:

(1)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}_1 = \overline{k}_1$	I(=)
⋮		⋮	⋮
(*j*)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}_j = \overline{k}_j$	I(=)
⋮		⋮	⋮
(*n*)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\overline{k}_n = \overline{k}_n$	I(=)
(*n*+1)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\cdots(\overline{k}_1 = \overline{k}_1 \wedge \cdots) \wedge \overline{k}_j = \overline{k}_j) \wedge \cdots) \wedge \overline{k}_j = \overline{k}_j)$	I(∧)(1,...,*n*)
(*n*+2)	$\varnothing \vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathbf{P}^n_j(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_j)$	Abreviação 3.4

Desde que $\mathsf{E}(\mathbf{P}^n_j)$ é um n-cálculo para $\mathbf{P}^n_j(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$, então:

Teorema 3.10. Existe um n-cálculo para $\mathbf{P}^n_j(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$.

§4. Teoria da Composição em S_1 e S_2

Abreviação 4.0.1. Seja $\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4))$ uma abreviação de $\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, x^i_4))$.

Em termos informais, $\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4))$ é uma n-determinação universal em S_2 (na verdade, é *candidata* a n-determinação) da função “sucessor da projeção do segundo argumento”. O que é importante é que $\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4)$ e $\mathbf{S}(x^i_1, x^i_2)$ são determinações, determinações universais, n-representações, etc. em S_2, desde que “definem” funções iniciais.

Teorema 4.0.1. $\mathsf{De}(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2))$, $\mathsf{Den}(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2))$ e $\mathsf{Rep}(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2))$ (da função “sucessor da projeção do segundo argumento”).

Prova. Desde que $\mathbf{P}^3_2(x^i_1,x^i_2,x^i_3,x^i_4)$ é uma determinação universal a linha (1) está justificada, desde que $\mathbf{S}(x^i_1,x^i_2)$ é uma determinação a linha (11) também está justificada; de modo que o esquema abaixo demonstra que a parte **a)** do teorema.

(1)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\exists x^i_4(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_4))$	E(∀)(T3.8)
(2)	{2}	$\vdash_S$	$\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5)$	H
(3)	{3}	$\vdash_S$	$\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_4)) \wedge \mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_6))$	H
(4)	{3}	$\vdash_S$	$\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_4))$	E(∧)(3)
(5)	{3}	$\vdash_S$	$\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_6))$	E(∧)(3)
(6)	{3}	$\vdash_S$	$\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_4)$	E(∀)(4)
(7)	{3}	$\vdash_S$	$\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_6)$	E(∀)(5)
(8)	{2,3}	$\vdash_S$	$\mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_4)$	E(⊃)(6)
(9)	{2,3}	$\vdash_S$	$\mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_6)$	E(⊃)(7)
(10)	{2,3}	$\vdash_S$	$\mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_4) \wedge \mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_6)$	I(∧)(8,9)
(11)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$(\mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_4) \wedge \mathbf{S}(x^i_5,\ x^i_6)) \supset x^i_4 = x^i_6$	E(∀)(T3.1)
(12)	{2,3}	$\vdash_S$	$x^i_4 = x^i_6$	E(⊃)(10,11)
(13)	{3}	$\vdash_S$	$\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5) \supset x^i_4 = x^i_6$	E(⊃)(2,12)
(14)	{14}	$\vdash_S$	$\sim(x^i_4 = x^i_6)$	H
(15)	{3,14}	$\vdash_S$	$\sim(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5))$	E(⊃)(13,14)
(16)	{3,14}	$\vdash_S$	$\forall x^i_5{\sim}\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5)$	I(∀)(15)
(17)	{3}	$\vdash_S$	$\sim(x^i_4 = x^i_6) \supset \forall x^i_5{\sim}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5))$	I(⊃)(14,16)
(18)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\sim\forall x^i_5{\sim}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_5))$	(~∀~↔∃)(1)
(19)	{3}	$\vdash_S$	$x^i_4 = x^i_6$	E(⊃)(17,18)
(20)	$\varnothing$	$\vdash_S$	$\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_4)) \wedge \mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1,\ x^i_2,\ x^i_3,\ x^i_6)) \supset x^i_4 = x^i_6$	I(⊃)(3,19)

Temos, então, $\vdash_S \forall x^i_1/x^i_4\forall x^i_6((\mathrm{F}(x^i_1, ..., x^i_4) \wedge \mathrm{F}(x^i_1, ..., x^i_3, x^i_6)) \supset x^i_4 = x^i_6)$ após sucessivas introduções do universal, onde $\mathrm{F}(x^i_1, ..., x^i_4)$ é exatamente $\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4))$; assim, $\mathsf{e}(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2))$.

Desde que $\mathsf{De}(\mathbf{S})$:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i/x_3^i \exists x_4^i \mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_5^i)$	T3.8
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i \exists x_2^i \mathbf{S}(x_5^i, x_4^i)$	T3.1
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i/x_5^i((\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i) \wedge \mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_5^i)) \supset x_4^i = x_5^i)$	T3.8
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\exists x_4^i \mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i)$	E(∀)(1)
(5)	{5}	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{50}^i)$	H
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\exists x_2^i \mathbf{S}(x_{50}^i, x_2^i)$	E(∀)(4)
(7)	{7}	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\mathbf{S}(x_{50}^i, x_{40}^i)$	H
(8)	{8}	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{500}^i)$	H
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$(\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{50}^i) \wedge \mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{500}^i)) \supset x_{50}^i = x_{500}^i$	E(∀)(3)
(10)	{5,8}	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{50}^i) \wedge \mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{500}^i)$	I(∧)(5,9)
(11)	{5,8}	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$x_{50}^i = x_{500}^i$	E(⊃)(9,10)
(12)	{5,7,8}	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\mathbf{S}(x_{500}^i, x_{40}^i)$	Subs(=)(7,11)
(13)	{5,7}	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{500}^i) \supset \mathbf{S}(x_{500}^i, x_{40}^i)$	I(⊃)(8,12)
(14)	{5,7}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_5^i(\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{500}^i) \supset \mathbf{S}(x_{500}^i, x_{40}^i))$	I(∀)(13)
(15)	{5,7}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_4^i \mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i))$	I(∃)(14)
(16)	{5}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_4^i \mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i))$	E(∃)(6,7,15)
(17)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\exists x_4^i \mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i))$	E(∃)(4,5,17)
(18)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}}$	$\forall x_1^i/x_3^i \exists x_4^i \mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i))$	I(∀)(17)

Logo, $\mathsf{D}(\mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3))$ e, portanto, $\mathsf{De}(\mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3))$.

Estabeleceremos, agora, que $\mathsf{Rep}(\mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3))$. O objetivo é, portanto, demonstrar que, para quaisquer números naturais k_1, k_2, k_3, k, ou $\vdash_{\mathsf{S}_2} \mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}))$, ou $\vdash_{\mathsf{S}_2} {\sim}\mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}))$. Notemos que a demonstração estará fundamentada em 3 fatos distintos (mas não totalmente independentes) referentes às subfórmulas de $\mathbf{S}(\mathbf{P}_2^3(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i))$: **1)** $\mathsf{e}(\mathbf{P}_2^3)$; **2)** $\mathsf{en}(\mathbf{P}_2^3)$; e **3)** $\mathsf{Rep}(\mathbf{S})$ (o que sugere uma trama conceitual muito mais intrincada do que se poderia esperar em um primeiro momento).

Desde que Rep(**S**), temos um dos dois casos: **caso 1**, $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{S}(\overline{k}_4, \overline{k})$; **caso 2**, $\vdash_{S_2}$ $\sim\mathbf{S}(\overline{k}_4, \overline{k})$.

Caso 1. Desde que Den($\mathbf{P}^3_2$), temos a linha (1); e, desde que e($\mathbf{P}^3_2$) é uma determinação, temos a linha (4) do esquema abaixo:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4)$	$T_{3.9}$
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(\overline{k}_4, \overline{k})$	Caso 1
(3)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5)$	H
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4) \wedge \mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5)) \supset \overline{k}_4 = x^i_5$	E(∀)($T_{3.8}$)
(5)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4) \wedge \mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5)$	I(∧)(1,3)
(6)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_4 = x^i_5$	E_1(⊃)(4,5)
(7)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(x^i_5, \overline{k})$	Subs(=)(2,6)
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, \overline{k})$	I(⊃)(3,7)
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, \overline{k}))$	I(∀)(8)

Desde que Den($\mathbf{P}^3_2$), temos a linha (1):

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4)$	$T_{3.9}$
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\mathbf{S}(\overline{k}_4, \overline{k})$	Caso 2
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4) \wedge \sim\mathbf{S}(\overline{k}_4, \overline{k})$	I(∧)(1,2)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim(\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4) \supset \mathbf{S}(\overline{k}_4, \overline{k}))$	(∧↔⊃)(3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^i_5\sim(\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, \overline{k}))$	I(∃)(4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, \overline{k}))$	(~∀↔∃~)(5)

Logo, estabelecemos que Rep($\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2)$).

Desde que e($\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2)$), então, pelo teorema 2.4, en($\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2)$).

Desde que, por 3.3 Dn(**S**), então, para qualquer numeral $\overline{k}_4$ existe um numeral $\overline{k}$ tal que $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{S}(\overline{k}, \overline{k}_4)$; deste modo, pelo esquema:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4)$	$T_{3.9}$
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(\overline{k}_4, \overline{k})$	$T_{3.3}$

(3) $\{3\}$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5)$ H

(4) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $(\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4) \wedge \mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5)) \supset \overline{k}_4 = x^i_5$ E(∀)($T_{3.8}$)

(5) $\{3\}$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4) \wedge \mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5)$ I(∧)(1,3)

(6) $\{3\}$ $\vdash_{S_2}$ $\overline{k}_4 = x^i_5$ E_1(⊃)(4,5)

(7) $\{3\}$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{S}(x^i_5, \overline{k})$ Subs(=)(2,6)

(8) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, \overline{k})$ I(⊃)(3,7)

(9) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, \overline{k}))$ I(∀)(8)

Temos que $\mathsf{Dn}(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2))$ e, portanto, $\mathsf{Den}(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2))$.

Devemos notar que, pelo menos a primeira vista, seria possível estabelecer as propriedades n de $\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4))$ (n-representação, n-determinação e n-determinação universal) por meio tão-somente das propriedades n de suas subfórmulas, desde que assumíssemos a n-consistência de S.

Vamos, agora, abrir um parêntese relativo à aplicação de esquemas. As contrapartidas formais de, por exemplo, “2 é sucessor do segundo argumento de $\langle 0, 1, 2\rangle$”, “1 não é sucessor do segundo argumento de $\langle 0, 1, 2\rangle$” e “2 é único sucessor do segundo argumento de $\langle 0, 1, 2\rangle$” são, respectivamente, deriváveis segundo os esquemas abaixo:

(1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, s0)$ $T_{3.9}$

(2) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{S}(s0, ss0)$ $T_{3.3}$

(3) $\{3\}$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5)$ H

(4) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\forall x^i_1/x^i_5((\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4) \wedge \mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4)) \supset x^i_4 = x^i_5)$ $T_{3.8}$

(5) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, s0) \wedge \mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5)) \supset s0 = x^i_5$ E(∀)(4)

(6) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, s0) \wedge \mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5)$ I(∧)(1,3)

(7) $\{3\}$ $\vdash_{S_2}$ $s0 = x^i_5$ E(⊃)(5,6)

(8) $\{3\}$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{S}(x^i_5, ss0)$ Subs(=)(2,7)

(9) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, ss0)$ I(⊃)(3,8)

(10) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, ss0))$ I(∀)(9)

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, s0)$	$T_{3.9}$
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\mathbf{S}(s0, s0)$	$T_{3.3}$
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, s0) \wedge \sim\mathbf{S}(s0, s0)$	I(∧)(1,2)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, s0) \supset \mathbf{S}(s0, s0))$	(∧↔⊃)(3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^i_5 \sim(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, s0))$	I(∃)(4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\forall x^i_5(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5) \supset \mathbf{S}(x^i_5, s0))$	(~∀↔∃~)(5)

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_1/x^i_5((\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_4)) \wedge \mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_5))) \supset x^i_4 = x^i_5)$	$T_{5.0.1}$
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, ss0)) \wedge \mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5))) \supset ss0 = x^i_5$	E(∀)(1)
(3)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5))$	H
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, ss0)$	$T_{5.0.1}$
(5)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, ss0)) \wedge \mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5))$	I(∧)(1,2)
(6)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$ss0 = x^i_5$	E(⊃)(5,6)
(7)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5)) \supset ss0 = x^i_5$	I(⊃)(3,6)
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_5(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5)) \supset ss0 = x^i_5)$	I(∀)(5)
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, ss0)) \wedge \forall x^i_5(\mathbf{S}(\mathbf{P}^3_2(0, s0, ss0, x^i_5)) \supset ss0 = x^i_5)$	I(∧)(4,8)

Retomaremos agora as considerações de caráter geral sobre a composição.

Teorema 4.1. Se $\mathsf{De}(\mathbf{F}_1)$, $\mathsf{De}(\mathbf{F}_2)$, ..., $\mathsf{De}(\mathbf{F}_m)$ e $\mathsf{e}(\mathbf{F})$, então $\mathsf{e}(\mathsf{C}\,(\mathbf{F}; \mathbf{F}_1, ..., \mathbf{F}_m))$.

A idéia subjacente à demonstração do teorema é, em termos informais, que quaisquer valores para $x^i_1, ..., x^i_n$ determinam uma *saída* para cada uma das "funções" $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_m$; ora, desde que *entradas* iguais determinam uma e mesma saída para a "função" $\mathbf{F}$, então as saídas de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_m$ também determinam uma e mesma saída para $\mathbf{F}$. A dificuldade em estabelecer (e, possivelmente, em acompanhar a demonstração de) tal resultado é o cuidado necessário na utilização das variaveis livres na descrição metalingüística da construção das provas, não obstante, o esquema abaixo não é nada mais que a formalização do argumento anterior.

Abreviação Auxiliar. Seja $\mathbf{F}_{1\cdots m}(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m})$ uma abreviação da conjunção $\mathbf{F}_1(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+1})$ $\wedge$ $\mathbf{F}_2(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+2}) \wedge \cdots \wedge \mathbf{F}_m(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+m})$.

Prova. As linhas (1), (4), ..., (3m-2) do esquema abaixo são justificadas pelo fato de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_m$ serem determinações universais e a linha (3m+9) pelo fato de $\mathbf{F}$ ser uma determinação. Além disso, a variável x^i_j, que aparece pela primeira vez na linha (3m+4) e determina a escolha das variáveis das linhas (3), (6), ..., (3m) é tal que j é o sucessor do maior índice de variável que ocorre (livre ou ligada) em $\mathbf{S}^{\mathbf{F}}_{\mathbf{F}_1\cdots\mathbf{F}_m}$, E é o conjunto {3, 6, ..., 3m} e E_1 é o conjunto {3, 6, ..., 3m, 3m+2}.

(1)	H	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\forall x^i_1/x^i_n \exists x^i_{n+1} \mathbf{F}_1(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	H
(2)	H	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\exists x^i_{n+1} \mathbf{F}_1(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	E(∀)(1)
(3)	{3}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}_1(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+1})$	H
(4)	H	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\forall x^i_1/x^i_n \exists x^i_{n+1} \mathbf{F}_2(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	H
(5)	H	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\exists x^i_{n+1} \mathbf{F}_2(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	E(∀)(4)
(6)	{6}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}_2(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+2})$	E(∃)(5)
⋮			⋮	⋮
(3m-2)	H	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\forall x^i_1/x^i_n \exists x^i_{n+1} \mathbf{F}_m(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	H
(3m-1)	H	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\exists x^i_{n+1} \mathbf{F}_m(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	E(∀)(3m-2)
(3m)	{3m}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}_m(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+m})$	E(∃)(3m-1)
(3m+1)	E	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}_{1\cdots m}(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m})$	I(∧)(3, ..., 3m)
(3m+2)	{3m+2}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1}) \wedge \mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_j)$	H
(3m+3)	{3m+2}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	E(∧)(3m+2)
(3m+4)	{3m+2}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_j)$	E(∧)(3m+2)
(3m+5)	{3m+2}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}_{1\cdots m}(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}) \supset \mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_{n+1})$	E(∀)(3m+3)
(3m+6)	{3m+2}	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}_{1\cdots m}(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}) \supset \mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_j)$	E(∀)(3m+4)
(3m+7)	E_1	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_{n+1})$	E_1(⊃)(3m+1,3m+5)
(3m+8)	E_1	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_j)$	E_1(⊃)(3m+1,3m+6)
(3m+9)	∅	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\forall x^i_1 \cdots \forall x^i_{m+1} \forall x^i_j((\mathbf{F}(x^i_1, ..., x^i_{m+1}) \wedge \mathbf{F}(x^i_1, ..., x^i_j)) \supset x^i_{m+1} = x^i_j)$	T
(3m+10)	∅	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$(\mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_{n+1}) \wedge \mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_j)) \supset x^i_{n+1} = x^i_j$	E(∀)(3m+9)
(3m+11)	E_1	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$\mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_{n+1}) \wedge \mathbf{F}(x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m}, x^i_j)$	I(∧)(3m+7,3m+8)
(3m+12)	E_1	$\vdash_{\mathrm{S}}$	$x^i_{n+1} = x^i_j$	E_1(⊃)(3m+10,3m+11)

$(3m+13)$	E	$\vdash_S$	$(\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1/\mathbf{F}_m)(x_1^i/x_n^i, x_{n+1}^i) \wedge \mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1/\mathbf{F}_m)(x_1^i/x_n^i, x_j^i)) \supset x_{n+1}^i = x_j^i$	$\mathrm{I}(\supset)(3m+2,3m+12)$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$(4m+13)$	H	$\vdash_S$	$(\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1/\mathbf{F}_m)(x_1^i/x_{n+1}^i) \wedge \mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1/\mathbf{F}_m)(x_1^i/x_n^i, x_j^i)) \supset x_{n+1}^i = x_j^i$	$\mathrm{E}(\exists)(3m-1,3m,4m+12)$

Agora, sucessivas $\forall$-introduções produzem, então, H $\vdash_S \forall x_1^i/x_{n+1}^i \forall x_j^i((\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_m)(x_1^i/x_n^i, x_{n+1}^i) \wedge \mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_m)(x_1^i/x_n^i, x_j^i)) \supset x_{n+1}^i = x_j^i)$; logo, $\mathsf{e}(\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_m))$.

Teorema 4.2. Se $\mathsf{De}(\mathbf{F}_1)$, $\mathsf{De}(\mathbf{F}_2)$, ..., $\mathsf{De}(\mathbf{F}_m)$ e $\mathsf{De}(\mathbf{F})$, então $\mathsf{De}(\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_m))$.

Prova. E é o conjunto $\{4, 7, \ldots, l+5\}$, E_1 é o conjunto $\{4, 7, \ldots, l+5, l+6\}$, E- é o conjunto $\{7, \ldots, l+5\}$.

(1)	H	$\vdash_S$	$\mathsf{De}(\mathbf{F}_1) \wedge \mathsf{De}(\mathbf{F}_2) \wedge \ldots \wedge \mathsf{De}(\mathbf{F}_m) \wedge \mathsf{De}(\mathbf{F})$	H
(2)	H	$\vdash_S$	$\forall x_1^i/x_n^i \exists x_{n+1}^i \mathbf{F}_1(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\wedge)(1)$
(3)	H	$\vdash_S$	$\exists x_{n+1}^i \mathbf{F}_1(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\forall)(2)$
(4)	{4}	$\vdash_S$	$\mathbf{F}_1(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+m}^i)$	H
(5)	H	$\vdash_S$	$\forall x_1^i/x_n^i \exists x_{n+1}^i \mathbf{F}_2(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\wedge)(1)$
(6)	H	$\vdash_S$	$\exists x_{n+1}^i \mathbf{F}_2(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\forall)(5)$
(7)	{7}	$\vdash_S$	$\mathbf{F}_2(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+m+1}^i)$	H
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(l)	H	$\vdash_S$	$\forall x_1^i/x_n^i \exists x_{n+1}^i \mathbf{F}_m(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\wedge)(1)$
$(l+1)$	H	$\vdash_S$	$\exists x_{n+1}^i \mathbf{F}_m(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\forall)(l)$
$(l+2)$	$\{l+2\}$	$\vdash_S$	$\mathbf{F}_m(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+2m}^i)$	H
$(l+3)$	H	$\vdash_S$	$\forall x_1^i/x_n^i \exists x_{n+1}^i \mathbf{F}(x_1^i, \ldots, x_n^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\wedge)(1)$
$(l+4)$	H	$\vdash_S$	$\exists x_{n+1}^i \mathbf{F}(x_{n+m}^i, \ldots, x_{n+2m}^i, x_{n+1}^i)$	$\mathrm{E}(\forall)(l+3)$
$(l+5)$	$\{l+5\}$	$\vdash_S$	$\mathbf{F}(x_{n+m}^i, \ldots, x_{n+2m}^i, x_{n+2m+1}^i)$	H
$(l+6)$	$\{l+6\}$	$\vdash_S$	$\mathbf{F}_1(x_1^i,\ldots,x_n^i, x_{n+j}^i) \wedge \mathbf{F}_2(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+j+1}^i) \wedge \cdots \wedge \mathbf{F}_m(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+j+m}^i)$	H
$(l+7)$	$\{l+6\}$	$\vdash_S$	$\mathbf{F}_1(x_1^i,\ldots,x_n^i, x_{n+j}^i)$	$\mathrm{E}(\wedge)(l+6)$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$(l+m+7)$	$\{l+6\}$	$\vdash_S$	$\mathbf{F}_m(x_1^i,\ldots,x_n^i,x_{n+j+m}^i)$	$\mathrm{E}(\wedge)(l+6)$

Desde que $\mathsf{e}(\mathbf{F}_1) \wedge \mathsf{e}(\mathbf{F}_2) \wedge ... \wedge \mathsf{e}(\mathbf{F}_m)$, das linhas $(l+7)$-$(l+m+7)$ e (4), (7), ..., $(l+2)$ teremos, então, as igualdades:

(o)	$\{l+6,4\}$	$\vdash_S$	$x^i_{n+j} = x^i_{n+m}$	E(⊃)(?)
⋮			⋮	⋮
$(o+m)$	$\{l+6,l+2\}$	$\vdash_S$	$x^i_{n+j+m} = x^i_{n+2m}$	E(⊃)(?)
$(o+m+7)$	E_1	$\vdash_S$	$\mathbf{F}(x^i_{n+j}, ..., x^i_{n+j+m}, x^i_{n+2m+1})$	Subs(=)(o-$o+m$,$l+6$)
$(o+m+8)$	E	$\vdash_S$	$(\mathbf{F}_1(x^i_1, ..., x^i_{n+j}) \wedge \cdots \wedge \mathbf{F}_m(x^i_1, ..., x^i_{n+j+m})) \supset \mathbf{F}(x^i_{n+j}, ..., x^i_{n+j+m}, x^i_{n+2m+1})$	I(⊃)($l+6$,$o+m+7$)
$(o+m+9)$	E	$\vdash_S$	$\forall x^i_{n+j}/x^i_{n+j+m}((\mathbf{F}_1(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+j}) \wedge \cdots) \supset \mathbf{F}(x^i_{n+j}, ..., x^i_{n+j+m}, x^i_{n+2m+1}))$	I(∀)($o+m+8$)
$(o+m+10)$	E	$\vdash_S$	$\exists x^i_{n+1}\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	I(∃)($o+m+9$)
$(o+m+11)$	E-	$\vdash_S$	$\exists x^i_{n+1}\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	E(∃)(3,4,$o+m+10$)
⋮			⋮	⋮
(p)	H	$\vdash_S$	$\exists x^i_{n+1}\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	E(∃)($l+4$,$l+5$,p-1)
$(p+1)$	H	$\vdash_S$	$\forall x^i_1/x^i_n\exists x^i_{n+1}\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x^i_1, ..., x^i_n, x^i_{n+1})$	I(∀)(p)

Teorema 4.3. $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_1)$, $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_2)$, ..., $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_m)$ e $\mathsf{R}(\mathbf{F})$, então $\mathsf{Rep}(\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m))$.

Abreviação Auxiliar. Seja $\mathbf{F}_{1\cdots m}(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n, x^i_{j+1}, ..., x^i_{j+m})$ uma abreviação da conjunção $\mathbf{F}_1(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n, x^i_{j+1}) \wedge \mathbf{F}_2(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n, x^i_{j+2}) \wedge \cdots \wedge \mathbf{F}_m(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n, x^i_{j+m})$.

Prova. Desde que $\mathbf{F}$ é uma n-representação em S_k, um dos dois casos: **caso 1**, $\vdash_{S_2} \mathbf{F}(\bar{k}_{n+1}, \bar{k}_{n+2}, ..., \bar{k}_{n+m}, \bar{k})$; **caso 2**, $\vdash_{S_2} \sim\mathbf{F}(\bar{k}_{n+1}, \bar{k}_{n+2}, ..., \bar{k}_{n+m}, \bar{k})$.

Desde que $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ..., \mathbf{F}_m$ são n-determinações universais, temos, para algum $\bar{k}_{n+1}, \bar{k}_{n+2}, ..., \bar{k}_{n+m}$, as linhas de (1) até (m). Desde que $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ..., \mathbf{F}_m$ são determinações, temos as linhas de $(2m+3)$ até $(3m+4)$, a linha $(m+1)$ é relativa ao caso 1:

(1)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_1(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n, \bar{k}_{n+1})$	T
(2)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_2(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n, \bar{k}_{n+2})$	T
⋮		⋮		⋮
(m)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_m(\bar{k}_1, ..., \bar{k}_n, \bar{k}_{n+m})$	T
$(m+1)$	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}(\bar{k}_{n+1}, \bar{k}_{n+2}, ..., \bar{k}_{n+m}, \bar{k})$	Caso 1

$(m+2)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+1}, \ldots, x^i_{j+m})$	H
$(m+3)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+1})$	$E(\wedge)(m+2)$
$(m+4)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_2(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+2})$	$E(\wedge)(m+2)$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$(2m+2)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_m(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+m})$	$E(\wedge)(m+2)$
$(2m+3)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}) \wedge \mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+1})) \supset \overline{k}_{n+1} = x^i_{j+1}$	$E(\forall)(T)$
$(2m+4)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2}) \wedge \mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+2})) \supset \overline{k}_{n+2} = x^i_{j+2}$	$E(\forall)(T)$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$(3m+2)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+m}) \wedge \mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+m})) \supset \overline{k}_{n+m} = x^i_{j+m}$	$E(\forall)(T)$
$(3m+3)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_{n+1} = x^i_{j+1}$	$E(\supset)(I(\wedge)(1,m+3),2m+3)$
$(3m+4)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_{n+2} = x^i_{j+2}$	$E(\supset)(I(\wedge)(2,m+4),2m+4)$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$(4m+2)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\overline{k}_{n+m} = x^i_{j+m}$	$E(\supset)(I(\wedge)(m,2m+2),3m+2)$
$(4m+3)$	$\{m+2\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}(x^i_{j+1}, x^i_{j+2}, \ldots, x^i_{j+m}, \overline{k})$	$Subs(=)(m+1,3m+3,3m+4, \ldots,4m+3)$
$(4m+4)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, x^i_{j+1}, \ldots, x^i_{j+m}) \supset \mathbf{F}(x^i_{j+1}, x^i_{j+2}, \ldots, x^i_{j+m}, \overline{k})$	$I(\supset)(m+2,4m+3)$
$(4m+4)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{C}(\mathbf{F}; \mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_m)(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k})$	$I(\forall)(4m+4)$

Abreviação Auxiliar. Seja $\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}, \ldots, \overline{k}_{n+m})$ uma abreviação da conjunção $\mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}) \wedge \mathbf{F}_2(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2}) \wedge \cdots \wedge \mathbf{F}_m(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+m})$.

Desde que $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_m$ são n-determinações universais, temos, para algum $\overline{k}_{n+1}, \ldots, \overline{k}_{n+m}$, as linhas de (1) até ($m$), enquanto a linha ($m$+1) é relativa ao caso 2:

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_1(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$	T
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_2(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2})$	T
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
(m)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_m(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+m})$	T
$(m+1)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim\mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, \ldots, \overline{k}_{n+m}, \overline{k})$	Caso 2
$(m+2)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}, \ldots, \overline{k}_{n+m}) \wedge \sim\mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, \ldots, \overline{k}_{n+m}, \overline{k})$	$I_2(\wedge)(1,\ldots,m+1)$
$(m+3)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim(\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}, \ldots, \overline{k}_{n+m}) \supset \mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, \ldots, \overline{k}_{n+m}, \overline{k}))$	$(\wedge\leftrightarrow\supset)(m+2)$

(m+4) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\exists x^i_{n+2}/x^i_{n+m+2}{\sim}(\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, x^i_{n+2}, ..., x^i_{n+m+2}) \supset \mathbf{F}(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, x^i_{n+2}, ..., x^i_{n+m+2}))$ I(∃)(m+3)

(m+5) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\sim\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})$ (~∀↔∃~)(m+4)

De modo que $\mathsf{Rep}(\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m))$.

Teorema 4.4. Se $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_1)$, $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_2)$, ..., $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_m)$ e $\mathsf{Dn}(\mathbf{F})$, então $\mathsf{Dn}(\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m))$.

Prova. Desde que $\mathbf{F}(x^i_1,\ldots,x^i_m,x^i_{m+1})$ é uma n-distribuição, então, para quaisquer numerais $\overline{k}_{n+1},\overline{k}_{n+2},...,\overline{k}_{n+m}$ existe um numeral $\overline{k}$ tal que $\vdash_{S_k}\mathbf{F}(\overline{k}_{n+1},\overline{k}_{n+2},...,\overline{k}_{n+m},\overline{k})$; podemos, então, substituir a linha (m+1) do esquema relativo ao caso 1 do teorema 5.3 pela próxima linha:

(m+1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m}, \overline{k})$ T

Desde que a substituição não altera o caráter dedutivo do esquema; temos, então, que $\vdash_{S_2}\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k})$ para quaisquer numerais $\overline{k}_1$, ..., $\overline{k}_n$ e, portanto, que $\mathsf{Dn}(\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m))$.

Teorema 4.5. Se $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_1)$, $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_2)$, ..., $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_m)$ e $\mathsf{en}(\mathbf{F})$, então $\mathsf{en}(\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m))$.

Abreviação Auxiliar. Seja $\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k}_{n+1},\overline{k}_{n+2},...,\overline{k}_{n+m})$ uma abreviação da conjunção $\mathbf{F}_1(\overline{k}_1,..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}) \wedge \mathbf{F}_2(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k}_{n+2}) \wedge \cdots \wedge \mathbf{F}_m(\overline{k}_1,...,\overline{k}_n,\overline{k}_{n+m})$.

Prova. Desde que $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_m$ são n-determinações universais, temos, para algum $\overline{k}_{n+1}$, $\overline{k}_{n+2}$, ..., $\overline{k}_{n+m}$, as linhas de (1) até (m).

(1) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}_1(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1})$ T

(2) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}_2(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+2})$ T

⋮ ⋮ ⋮

(m) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}_m(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+m})$ T

(m+1) {m+1} $\vdash_{S_2}$ $\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{j}\,)$ H

(m+2) {m+2} $\vdash_{S_2}$ $\mathsf{C}\,(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{i}\,)$ H

(m+3) {m+1} $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m}) \supset \mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m}, \overline{j}\,)$ E(∀)(m+1)

(m+5) {m+2} $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m}) \supset \mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m}, \overline{i}\,)$ E(∀)(m+2)

(m+6) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}_{1\cdots m}(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m})$ I(∧)(1, ..., m) (m+7) {m+1} $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m}, \overline{j}\,)$ E(⊃)(m+1)

(m+8) {m+2} $\vdash_{S_2}$ $\mathbf{F}(\overline{k}_{n+1}, \overline{k}_{n+2}, ..., \overline{k}_{n+m}, \overline{i}\,)$ E(⊃)(m+2)

Agora, desde que $\mathbf{F}(x_1^i, ..., x_m^i, x_{m+1}^i)$ é uma n-determinação em S_2:

(m+9) {m+1, m+2} $\vdash_{S_2}$ $\overline{j} = \overline{i}$ E(⊃)(m+2)

Segue-se, portanto, de $\vdash_{S_2} \mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{j}\,)$ e $\vdash_{S_2} \mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(\overline{k}_1, ..., \overline{k}_n, \overline{i}\,)$ que $\vdash_{S_2} \overline{j} = \overline{i}$.

Os teoremas 4.5 e 4.6 juntos produzem:

Teorema 4.6. Se $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_1)$, $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_2)$, ..., $\mathsf{Den}(\mathbf{F}_m)$ e $\mathsf{Den}(\mathbf{F})$, então $\mathsf{Den}(\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m))$..

Teorema 4.7. Se existem n-cálculos para $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$, existe um n-cálculo para $\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$.

Prova. O n-cálculo para $\mathsf{C}(\mathbf{F};\mathbf{F}_1,...,\mathbf{F}_m)(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ é a seqüência dos n-cálculos para $\mathbf{F}_1(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, $\mathbf{F}_2(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$, ..., $\mathbf{F}_m(x_1^i,...,x_n^i,x_{n+1}^i)$ e $\mathbf{F}(x_1^i,...,x_m^i,x_{m+1}^i)$, constrói-se tal seqüência por meio da renumeração adequada das linhas dos n-cálculos.

§5. Teoria da Ordem em S_2 (Incompleta)

Teorema 5.1. Para qualquer n, $\vdash_{S_2} \forall x_1^i(\mathsf{S}_n(sx_1^i) \supset \mathsf{S}_n(x_1^i))$.

Teorema 5.2. Para qualquer n, $\vdash_{S_2} \mathsf{S}(\mathsf{S}_n)$.

Abreviação Auxiliar. Seja $x_1^i \neq 0/n$ uma abreviação de $x_1^i \neq 0 \wedge x_1^i \neq s^1 0 \wedge \cdots \wedge x_1^i \neq s^n 0$.

Prova.

(1) {1} $\vdash_{S_2}$ $x_1^i \neq 0/n$ H

(2) {1} $\vdash_{S_2}$ $\sim\mathsf{S}_n(x_1^i)$ (∧↔∨)(1)

(3) {1} $\vdash_{S_2}$ $\sim(\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i)$ I(∧)(2)

(4) {1} $\vdash_{S_2}$ $(\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i)$ I_3(⊃)(3)

(5) {1} $\vdash_{S_2}$ $\forall x_2^i((\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i))$ I(∀)(4)

(6) {6} $\vdash_{S_2}$ $\sim x_1^i \neq 0/n$ H

(7) {6} $\vdash_{S_2}$ $\mathsf{S}_n(x_1^i)$ (∧↔∨)(6)

(8) {8} $\vdash_{S_2}$ $\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i$ H

(9)	{8}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = sx_2^i$	E(∧)(8)
(10)	{6,8}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_n(sx_2^i)$	Subs(=)(6,9)
(11)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_n(sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i)$	E(∀)($T_{5.1}$)
(12)	{6,8}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_n(x_2^i)$	E(⊃)(10,11))
(13)	{6}	$\vdash_{S_2}$	$(\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i)$	I(⊃)(8,12)
(14)	{6}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i((\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i))$	I(∀)(13)
(15)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\sim x_1^i \neq 0/n \supset \forall x_2^i((\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i))$	I(⊃)(6,14)
(16)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \neq 0/n \supset \forall x_2^i((\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i))$	I(⊃)(1,5)
(17)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \neq 0/n \vee \sim x_1^i \neq 0/n$	T
(18)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i((\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i))$	E(⊃)(15-7)
(19)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i((\mathsf{S}_n(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset \mathsf{S}_n(x_2^i))$	I(∀)(18)
(20)	∅	$\vdash_{S_2}$	$0 = 0$	I(=)
(21)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_n(0)$	I(∨)(20)
(22)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(\mathsf{S}_n)$	I(∧)(21)

Teorema 5.3. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i(x_1^i \leqslant x_1^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(x_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(x_1^i)$	E(∧)(1)
(3)	∅	$\vdash_{S_2}$	$((x^{(i)}(x_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i)$	I(⊃)(1,2)
(4)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^{(i)}(((x^{(i)}(x_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i))$	I(∀)(3)
(5)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i \leqslant x_1^i)$	I(∀)(4)

Teorema 5.4. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i(x_1^i < sx_1^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(sx_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(sx_1^i)$	E(∧)(1)
(3)	∅	$\vdash_{S_2}$	$((x^{(i)}(sx_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(sx_1^i)$	I(⊃)(1,2)
(4)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^{(i)}(((x^{(i)}(sx_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(sx_1^i))$	I(∀)(3)
(5)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i < sx_1^i)$	I(∀)(4)

Teorema 5.5. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i(x_1^i \leqslant 0 \leftrightarrow x_1^i = 0)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = 0$	H
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$0 \leqslant 0$	E(∀)(T$_{5.3}$)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant 0$	Subs(=)(1,2)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = 0 \supset x_1^i \leqslant 0$	I(⊃)(1,3)
(5)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant 0$	H
(6)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$(\mathsf{S}_0(0) \wedge \mathsf{S}(\mathsf{S}_0)) \supset \mathsf{S}_0(x_1^i)$	E(∀)(5)
(7)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_0(0)$	Ref(=)
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(\mathsf{S}_0)$	E(∀)(T$_{5.2}$)
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_0(0) \wedge \mathsf{S}(\mathsf{S}_0)$	I(∧)(7,8)
(10)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_0(x_1^i)$	E(⊃)(6,9)
(11)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant 0 \supset x_1^i = 0$	I(⊃)(5,10)
(12)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant 0 \leftrightarrow x_1^i = 0$	I(↔)(4,11)
(13)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i \leqslant 0 \leftrightarrow x_1^i = 0)$	I(∀)(12)

Teorema 5.6. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i(0 \leqslant x_1^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(x_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(x^{(i)})$	E(∧)(1)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(0)$	E(∧)(2)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(x^{(i)}(x_1^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(0)$	I(⊃)(1,3)
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$0 \leqslant x_1^i$	I(∀)(4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(0 \leqslant x_1^i)$	I(∀)(5)

Teorema 5.7. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i \sim(x_1^i < 0)$.

Prova.

(1)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(\mathsf{S}_0)$	T$_{5.2}$
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$0 = 0$	I(=)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_0(0)$	I(∨)(2)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}_0(0) \wedge \mathsf{S}(\mathsf{S}_0)$	I(∧)(1,3)

(5)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$sx_1^i \neq 0$	$\mathrm{E}(\forall)(\mathrm{P}_1)$
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\mathsf{S}_0(sx_1^i)$	$(\wedge\leftrightarrow\vee)(5)$
(7)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\mathsf{S}_0(0) \wedge \mathsf{S}(\mathsf{S}_0)) \wedge \sim\mathsf{S}_0(sx_1^i)$	$\mathrm{I}(\wedge)(4,6)$
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim((\mathsf{S}_0(0) \wedge \mathsf{S}(\mathsf{S}_0)) \supset \mathsf{S}_0(sx_1^i))$	$(\wedge\leftrightarrow\supset)(7)$
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x^{(i)}\sim((x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(sx_1^i))$	$\mathrm{I}(\exists)(8)$
(10)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim(x_1^i < 0)$	$(\exists\sim\leftrightarrow\sim\forall)(9)$
(11)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i\sim(x_1^i < 0)$	$\mathrm{I}(\forall)(10)$

Teorema 5.8. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i (x_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant sx_2^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(sx_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})$	H
(2)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}(x^{(i)})$	$\mathrm{E}(\wedge)(1)$
(3)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i((x^{(i)}(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset x^{(i)}(x_2^i))$	$\mathrm{E}(\wedge)(2)$
(4)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(x^{(i)}(sx_2^i) \wedge sx_2^i = sx_2^i) \supset x^{(i)}(x_2^i)$	$\mathrm{E}(\forall)(3)$
(5)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(sx_2^i)$	$\mathrm{E}(\wedge)(1)$
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$sx_2^i = sx_2^i$	Ref(=)
(7)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(sx_2^i) \wedge sx_2^i = sx_2^i$	$\mathrm{I}(\wedge)(5,6)$
(8)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(x_2^i)$	$\mathrm{E}(\supset)(4,7)$
(9)	{9}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant x_2^i$	H
(10)	{9}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i)$	$\mathrm{E}(\forall)(9)$
(11)	{1,9}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})$	$\mathrm{I}(\wedge)(8,2)$
(12)	{1,9}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(x_1^i)$	$\mathrm{E}(\supset)(10,11)$
(13)	{9}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(x^{(i)}(sx_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i)$	$\mathrm{I}(\supset)(1,12)$
(14)	{9}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant sx_2^i$	$\mathrm{I}(\forall)(13)$
(15)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant sx_2^i$	$\mathrm{E}(\supset)(9,14)$
(16)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant sx_2^i)$	$\mathrm{I}(\forall)(15)$

Teorema 5.9. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i (sx_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})$	H

(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(x^{(i)})$	E(∧)(1)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i((x^{(i)}(x_1^i) \wedge x_1^i = sx_2^i) \supset x^{(i)}(x_2^i))$	E(∧)(2)
(4)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$sx_1^i \leqslant x_2^i$	H
(5)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$(x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(sx_1^i)$	E(∀)(4)
(6)	{1,4}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(sx_1^i)$	E(⊃)(1,5)
(7)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$(x^{(i)}(sx_1^i) \wedge sx_1^i = sx_1^i) \supset x^{(i)}(x_1^i)$	E(∀)(3)
(8)	∅	$\vdash_{S_2}$	$sx_1^i = sx_1^i$	Ref(=)
(9)	{1,4}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(sx_1^i) \wedge sx_1^i = sx_1^i$	I(∧)(6,8)
(10)	{1,4}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i)}(x_1^i)$	E(⊃)(7,9)
(11)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$(x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i)$	I(⊃)(1,10)
(12)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant x_2^i$	I(∀)(11)
(13)	∅	$\vdash_{S_2}$	$sx_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i$	I(⊃)(4,12)
(14)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i(sx_1^i \leqslant x_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i)$	I(∀)(13)

Teorema 5.10. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i(x_1^i \neq 0 \supset \exists x_2^i(sx_2^i = x_1^i))$.

Prova.

(1)	∅	$\vdash_{S_2}$	$0 = 0$	E(∀)(Ref(=))
(2)	∅	$\vdash_{S_2}$	$0 \neq 0 \supset \exists x_2^i(sx_2^i = 0)$	I_3(⊃)(1)
(3)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_2^i(sx_1^i = sx_2^i)$	E(∀)($T_{1.1}$)
(4)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$sx_1^i = sx_2^i$	H
(5)	∅	$\vdash_{S_2}$	$sx_1^i = sx_2^i \supset sx_2^i = sx_1^i$	E(∀)(Sim(=))
(6)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$sx_2^i = sx_1^i$	E_1(⊃)(4,5)
(7)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_2^i(sx_2^i = sx_1^i)$	I(∃)(6)
(8)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_2^i(sx_2^i = sx_1^i)$	E(∃)(3,4,7)
(9)	∅	$\vdash_{S_2}$	$sx_1^i \neq 0 \supset \exists x_2^i(sx_2^i = sx_1^i)$	I_3(⊃)(8)
(10)	∅	$\vdash_{S_2}$	$(sx_1^i \neq 0 \supset \exists x_2^i(sx_2^i = sx_1^i)) \supset (\sim(sx_1^i = 0) \supset \exists x_2^i(sx_2^i = sx_1^i))$	I_3(⊃)(9)
(11)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i \neq 0 \supset \exists x_2^i(sx_2^i = x_1^i))$	Ind(2,10)

Abreviação 5.3. $s(\varphi)(x_1^i)$ *é uma abreviação de* $\varphi(x_1^i) \vee \exists x_n^i(\varphi(x_n^i) \wedge x_1^i = sx_n^i)$, onde $\varphi(x_1^i)$ é uma fórmula cuja única variável livre de tipo i é x_1^i.

A propriedade $s(\varphi)$ é chamada de *escada de* φ.

Teorema 5.11. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x^{(i)}(\mathsf{S}\,(x^{(i)}) \supset \mathsf{S}\,(s(x^{(i)})))$.

Ou seja, "a escada de um segmento inicial é também um segmento inicial".

Teorema 5.12. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i(x^{(i)}(x_1^i) \supset s(x^{(i)})(sx_1^i))$.

"Os sucessores da propriedade $x^{(i)}$ são degraus da escada de $x^{(i)}$".

Teorema 5.13. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x^{(i)}\forall x_1^i(\mathsf{S}\,(x^{(i)}) \wedge {\sim}x^{(i)}(x_1^i)) \supset {\sim}s(x^{(i)})(sx_1^i))$.

Algo como, "se *n* é um degrau da escada de um segmento inicial, então o antecessor de *n* é um degrau de tal segmento".

Teorema 5.14. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i \forall x_2^i(sx_1^i \leqslant sx_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	${\sim}x_1^i \leqslant x_2^i$	H
(2)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x^{(i)}{\sim}((x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}\,(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i))$	$(\exists{\sim}\leftrightarrow{\sim}\forall)(1)$
(3)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	${\sim}((x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}\,(x^{(i)})) \supset x^{(i)}(x_1^i))$	H
(4)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(x_2^i) \wedge \mathsf{S}\,(x^{(i)}) \wedge {\sim}x^{(i)}(x_1^i)$	$(\wedge\leftrightarrow\supset)(3)$
(5)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}\,(x^{(i)}) \wedge {\sim}x^{(i)}(x_1^i)$	$E(\wedge)(4)$
(6)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(x_2^i)$	$E(\wedge)(4)$
(7)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}\,(x^{(i)})$	$E(\wedge)(4)$
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i)}(x_2^i) \supset s(x^{(i)})(sx_2^i)$	$E(\forall)(T_{5.12})$
(9)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$s(x^{(i)})(sx_2^i)$	$E(\supset)(6,8)$
(10)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\mathsf{S}\,(x^{(i)}) \wedge {\sim}x^{(i)}(x_1^i)) \supset {\sim}s(x^{(i)})(sx_1^i)$	$E(\forall)(T_{5.13})$
(11)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	${\sim}s(x^{(i)})(sx_1^i)$	$E(\supset)(5,10)$
(12)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}\,(x^{(i)}) \supset \mathsf{S}\,(s(x^{(i)}))$	$E(\forall)(T_{5.11})$
(13)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}\,(s(x^{(i)}))$	$E(\supset)(7,12)$
(14)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$s(x^{(i)})(sx_2^i) \wedge \mathsf{S}\,(s(x^{(i)})) \wedge {\sim}s(x^{(i)})(sx_1^i)$	$I(\wedge)(9,11,13)$
(15)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	${\sim}(s(x^{(i)})(sx_2^i) \wedge \mathsf{S}\,(s(x^{(i)})) \supset s(x^{(i)})(sx_1^i))$	$(\wedge\leftrightarrow\supset)(14)$
(16)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x^{(i)}{\sim}(s(x^{(i)})(sx_2^i) \wedge \mathsf{S}\,(s(x^{(i)})) \supset s(x^{(i)})(sx_1^i))$	$I(\exists)(15)$
(17)	{3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	${\sim}sx_1^i \leqslant sx_2^i$	$(\exists{\sim}\leftrightarrow{\sim}\forall)(16)$

(18) $\{1\}$ $\vdash_{S_2}$ $\sim sx_1^i \leqslant sx_2^i$ E(∃)(2,3,17)

(19) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\sim x_1^i \leqslant x_2^i \supset \sim sx_1^i \leqslant sx_2^i$ I(⊃)(1,18)

(20) $\{20\}$ $\vdash_{S_2}$ $sx_1^i \leqslant sx_2^i$ H

(21) $\{20\}$ $\vdash_{S_2}$ $x_1^i \leqslant x_2^i$ $E_2(\supset)$(19,20)

(22) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $sx_1^i \leqslant sx_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i$ I(⊃)(20,21)

(23) $\{1\}$ $\vdash_{S_2}$ $\forall x_1^i \forall x_2^i (sx_1^i \leqslant sx_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i)$ I(∀)(22)

§6. Teoria da Recursão em S_2

Observação. Em virtude da falta de tempo hábil, algumas passagens da argumentação desta seção (principalmente referentes aos seus últimos teoremas) estão baseadas em regras e teoremas, apesar de claramente corretos, não justificados dedutivamente. Nesse caso, tais deduções podem ser pensadas como esboços de provas.

Teorema 6.1. Se $\mathsf{Dn}(\varphi)$ e $\mathsf{Dn}(\phi)$, então $\mathsf{Dn}(\mathsf{R}(\varphi, \phi))$.

Prova. Sejam $s^n 0, \overline{k}$ numerais quaisquer; desde que φ é uma n-distribuição, a linha (1) está justificada; desde que ϕ é uma n-distribuição, as linhas (9), (16), ..., (16+5n) estão todas justificadas.

(1) $\{h\}$ $\vdash_{S_2}$ $\varphi(\overline{k}, \overline{k}_0)$ H

(2) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\forall x_1^i (x_1^i = x_1^i)$ Sim(=)

(3) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $0 = 0$ E(∀)(2)

(4) $\{4\}$ $\vdash_{S_2}$ $(\varphi, \phi)(x^{(i,i,i)})(s^n 0)$ H

(5) $\{4\}$ $\vdash_{S_2}$ $\forall x_1^i / x_3^i (x_1^i = 0 \supset (\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)))$ E(∧)(4)

(6) $\{4\}$ $\vdash_{S_2}$ $0 = 0 \supset (\varphi(\overline{k}, \overline{k}_0) \leftrightarrow x^{(i,i,i)}(0, \overline{k}, \overline{k}_0))$ E(∀)(5)

(7) $\{4\}$ $\vdash_{S_2}$ $\varphi(\overline{k}, \overline{k}_0) \leftrightarrow x^{(i,i,i)}(0, \overline{k}, \overline{k}_0)$ E(⊃)(3,6)

(8) $\{h,4\}$ $\vdash_{S_2}$ $x^{(i,i,i)}(0, \overline{k}, \overline{k}_0)$ E(↔)(1,7)

(9) $\{h\}$ $\vdash_{S_2}$ $\phi(0, \overline{k}, \overline{k}_0, \overline{k}_1)$ H

(10) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $\forall x_1^i (x_1^i < sx_1^i)$ $T_{5.4}$

(11) $\varnothing$ $\vdash_{S_2}$ $0 < s0$ E(∀)(10)

(12) $\{h,4\}$ $\vdash_{S_2}$ $x^{(i,i,i)}(\phi)(0, \overline{k}, \overline{k}_0, \overline{k}_1, s0)$ I(∧)(7,8,10)

(13)	$\{4\}$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_4^i(x^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_5^i) \supset x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i))$	E(∧)(4)
(14)	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(\phi)(0,\overline{k},\overline{k}_0,\overline{k}_1, s0) \supset x^{(i,i,i)}(s0,\overline{k},\overline{k}_1)$	E(∀)(13)
(15)	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(s0,\overline{k},\overline{k}_1)$	E(⊃)(12,14)
(16)	$\{h\}$	$\vdash_{S_2}$	$\phi(s0,\overline{k},\overline{k}_1,\overline{k}_2)$	H
(17)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$s0 < s^2 0$	E(∀)(10)
(18)	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(\phi)(s0,\overline{k},\overline{k}_0,\overline{k}_1, s^2 0)$	I(∧)(15-7)
(19)	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(\phi)(s0,\overline{k},\overline{k}_0,\overline{k}_1, s^2 0) \supset x^{(i,i,i)}(s^2 0,\overline{k},\overline{k}_2)$	E(∀)(13)
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$(15+5n)$	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(s^{n\text{-}1}0,\overline{k},\overline{k}_{n\text{-}1})$	E(⊃)$(13+5n,14+5n)$
$(16+5n)$	$\{h\}$	$\vdash_{S_2}$	$\phi(s^{n\text{-}1}0,\overline{k},\overline{k}_{n\text{-}1},\overline{k}_n)$	H
$(17+5n)$	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$s^{n\text{-}1}0 < s^n 0$	E(∀)(10)
$(18+5n)$	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(\phi)(s^{n\text{-}1}0,\overline{k},\overline{k}_{n\text{-}1},\overline{k}_n, s^n 0)$	I(∧)$(15+5n,16+5n,17+5n)$
$(19+5n)$	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(\phi)(s^{n\text{-}1}0,\overline{k},\overline{k}_{n\text{-}1},\overline{k}_n, s^n 0) \supset x^{(i,i,i)}(s^n 0,\overline{k},\overline{k}_n)$	E(∀)(13)
$(20+5n)$	$\{h,4\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(s^n 0,\overline{k},\overline{k}_n)$	E(⊃)$(18+5n,19+5n)$
$(21+5n)$	$\{h\}$	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(s^n 0) \supset x^{(i,i,i)}(s^n 0,\overline{k},\overline{k}_n)$	I(⊃)$(4,20+5n)$
$(22+5n)$	$\{h\}$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(s^n 0) \supset x^{(i,i,i)}(s^n 0,\overline{k},\overline{k}_n))$	I(∀)$(21+5n)$
$(23+5n)$	$\{h\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{R}(\varphi,\phi)(s^n 0,\overline{k},\overline{k}_n)$	I(∃)$(22+5n)$

$\{h\}$ é uma espécie de hipótese coletiva $\{\varphi(\overline{k},\overline{k}_0), \phi(0,\overline{k},\overline{k}_0,\overline{k}_1), \ldots, \phi(s^{n\text{-}1}0,\overline{k},\overline{k}_{n\text{-}1},\overline{k}_n)\}$; devemos notar que $\mathsf{Dn}(\varphi)$ e $\mathsf{Dn}(\phi)$ implica $\vdash_{S_2} \varphi(\overline{k},\overline{k}_0) \wedge \phi(0,\overline{k},\overline{k}_0,\overline{k}_1) \wedge \ldots \wedge \phi(s^{n\text{-}1}0,\overline{k},\overline{k}_{n\text{-}1},\overline{k}_n)$ e, portanto, que $\mathsf{Dn}(\varphi)$ e $\mathsf{Dn}(\phi)$ implica $\vdash_{S_2} \mathsf{R}(\varphi,\phi)(s^n 0,\overline{k},\overline{k}_n)$, para quaisquer $n,\overline{k},\overline{k}_n$, de modo que $\mathsf{Dn}(\mathsf{R}(\varphi,\phi))$, se $\mathsf{Dn}(\varphi)$ e $\mathsf{Dn}(\phi)$.

Teorema 6.2. Se existem n-cálculos para φ e ϕ, então existe um n-cálculo para $\mathsf{R}(\varphi,\phi)$.

Prova. A introdução de um n-cálculo para φ antes da linha (1) e de n-cálculos para ϕ entre as linhas (1)–(1), (8)–(9), (15)–(16), ..., $(15+5n)$–$(16+5n)$ no esquema anterior produz um n-cálculo para $\mathsf{R}(\varphi,\phi)$.

Teorema 6.3. $\vdash_{S_2} \varphi_0^{(0,i)\to i}(\varphi)$.

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = 0$	H

(2) {2} $\vdash_{S_2}$ $\varphi(x_2^i, x_3^i)$ H

(3) {1,2} $\vdash_{S_2}$ $\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ I(∧)(1,2)

(4) {1} $\vdash_{S_2}$ $\varphi(x_2^i, x_3^i) \supset \varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ I(⊃)(2,3)

(5) {5} $\vdash_{S_2}$ $\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ H

(6) {5} $\vdash_{S_2}$ $\varphi(x_2^i, x_3^i)$ E(∧)(5)

(7) ∅ $\vdash_{S_2}$ $\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \supset \varphi(x_2^i, x_3^i)$ I(⊃)(5,6)

(8) {1} $\vdash_{S_2}$ $\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow \varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ I(↔)(4,7)

(9) ∅ $\vdash_{S_2}$ $x_1^i = 0 \supset (\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow \varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$ I(⊃)(1,8)

(10) ∅ $\vdash_{S_2}$ $\forall x_1^i / x_3^i (x_1^i = 0 \supset (\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow \varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$ I(∀)(9)

Teorema 6.4. $\vdash_{S_2} \varphi_0^{(si,i)\to i}(\phi)(0)$.

Prova.

(1) ∅ $\vdash_{S_2}$ $\forall x_1^i {\sim}(x_1^i < 0)$ $T_{5.3}$

(2) ∅ $\vdash_{S_2}$ ${\sim}(x_1^i < 0)$ E(∀)(1)

(3) ∅ $\vdash_{S_2}$ ${\sim}(\varphi_0(\phi)(x_1^i, \ldots, x_4^i, 0))$ I(∧)(2)

(4) ∅ $\vdash_{S_2}$ $\varphi_0(\phi)(x_1^i, \ldots, x_4^i, 0) \supset \varphi_0(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)$ I_3(⊃)(3)

(5) ∅ $\vdash_{S_2}$ $\forall x_1^i / x_4^i (\varphi_0(\phi)(x_1^i / x_4^i, 0) \supset \varphi_0(sx_1^i, x_2^i, x_4^i))$ I(∀)(4)

Teorema 6.5. $\vdash_{S_2} \mathrm{e}(\varphi) \supset \mathrm{e}(\varphi_0)$.

Prova.

(1) {1} $\vdash_{S_2}$ $\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge \varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$ H

(2) {1} $\vdash_{S_2}$ $\varphi(x_2^i, x_3^i)$ E(∧)(1)

(3) {1} $\vdash_{S_2}$ $\varphi(x_2^i, x_4^i)$ E(∧)(1)

(4) {1} $\vdash_{S_2}$ $\varphi(x_2^i, x_3^i) \wedge \varphi(x_2^i, x_4^i)$ I(∧)(2,3)

(5) {5} $\vdash_{S_2}$ $\mathrm{e}(\varphi)$ H

(6) {5} $\vdash_{S_2}$ $(\varphi(x_2^i, x_3^i) \wedge \varphi(x_2^i, x_4^i)) \supset x_3^i = x_4^i$ E(∀)(5)

(7) {1,5} $\vdash_{S_2}$ $x_3^i = x_4^i$ E(⊃)(4,6)

(8)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge \varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_4^i)) \supset x_3^i = x_4^i$	I(⊃)(1,7)
(9)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(\varphi_0)$	I(∀)(8)

Teorema 6.6. $\vdash_{S_2} \mathsf{S}(0, \varphi_0)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$0 < x_1^i$	H
(2)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(0 < x_1^i \supset \exists x_2^i(x_1^i = sx_2^i))$	T
(3)	∅	$\vdash_{S_2}$	$0 < x_1^i \supset \exists x_2^i(x_1^i = sx_2^i)$	E(∀)(2)
(4)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_2^i(x_1^i = sx_2^i)$	E(⊃)(1,3)
(5)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = sx_4^i$	H
(6)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i {\sim}(sx_1^i = 0)$	T
(7)	∅	$\vdash_{S_2}$	${\sim}sx_4^i = 0$	E(∀)(6)
(8)	{5}	$\vdash_{S_2}$	${\sim}x_1^i = 0$	Subs(=)(5,7)
(9)	{5}	$\vdash_{S_2}$	${\sim}(\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_4^i))$	I(∧)(8)
(10)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \forall x_3^i {\sim}(\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_4^i))$	I(∀)(9)
(11)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \forall x_3^i {\sim}(\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_4^i))$	E(∃)(4,5,10)
(12)	∅	$\vdash_{S_2}$	$0 < x_1^i \supset \forall x_2^i \forall x_3^i {\sim}(\varphi_0(x_1^i, x_2^i, x_4^i))$	I(⊃)(1,11)
(13)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(0, \varphi_0)$	I(∀)(12)

Teorema 6.7. $\vdash_{S_2} \mathsf{D}(\varphi) \supset \mathsf{D}(0, \varphi_0)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant 0$	H
(2)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i \leqslant 0 \supset x_1^i = 0)$	T
(3)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant 0 \supset x_1^i = 0$	E(∀)(2)
(4)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = 0$	E(⊃)(1,3)
(5)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\varphi)$	H
(6)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_2^i \varphi(x_2^i, x_2^i)$	E(∀)(5)
(7)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\varphi(x_2^i, x_3^i)$	H

(8)	{1,7}	$\vdash_{S_2}$	$\varphi_0(x^i_1, x^i_2, x^i_3)$	I(∧)(4,7)
(9)	{1,7}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^i_3(\varphi_0(x^i_1, x^i_2, x^i_3))$	I(∃)(8)
(10)	{1,5}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^i_3(\varphi_0(x^i_1, x^i_2, x^i_3))$	E(∃)(6,7,9)
(11)	{1,5}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_2 \exists x^i_3(\varphi_0(x^i_1, x^i_2, x^i_3))$	I(∀)(10)
(12)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$x^i_1 \leqslant 0 \supset \forall x^i_2 \exists x^i_3(\varphi_0(x^i_1, x^i_2, x^i_3))$	I(⊃)(1,11)
(13)	{5}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(0, \varphi_0)$	I(∀)(12)
(14)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\varphi) \supset \mathsf{D}(0, \varphi_0)$	E(⊃)(5,13)

Teorema 6.8. $\vdash_{S_2} \forall x^i_4(\mathbb{S}(x^i_4, x^{(i,i,i)}) \supset \mathbb{S}(sx^i_4, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathbb{S}(x^i_4, x^{(i,i,i)})$	H
(2)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$sx^i_4 < x^i_1$	H
(3)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_1 \forall x^i_2(sx^i_1 < x^i_2 \supset \exists x^i_3(x^i_2 = sx^i_3 \wedge x^i_1 < x^i_3))$	T
(4)	∅	$\vdash_{S_2}$	$sx^i_4 < x^i_1 \supset \exists x^i_3(x^i_1 = sx^i_3 \wedge x^i_4 < x^i_3))$	E(∀)(3)
(5)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^i_3(x^i_1 = sx^i_3 \wedge x^i_4 < x^i_3))$	E(⊃)(2,4)
(6)	{6}	$\vdash_{S_2}$	$x^i_1 = sx^i_{10} \wedge x^i_4 < x^i_{10}$	H
(7)	{6}	$\vdash_{S_2}$	$x^i_4 < x^i_{10}$	E(∧)(6)
(8)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^i_4 < x^i_{10} \supset \forall x^i_2 \forall x^i_3(\sim x^{(i,i,i)}(x^i_{10}, x^i_2, x^i_3))$	E(∀)(1)
(9)	{1,6}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_2 \forall x^i_3(\sim x^{(i,i,i)}(x^i_{10}, x^i_2, x^i_3))$	E(⊃)(7,8)
(10)	{1,6}	$\vdash_{S_2}$	$\sim x^{(i,i,i)}(x^i_{10}, x^i_{11}, x^i_{12})$	E(∀)(9)
(11)	{1,6}	$\vdash_{S_2}$	$\sim x^{(Si,i,i)}(\phi)(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_{10}, x^i_{11}, x^i_{12}, x^i_{13})$	I(∧)(10)
(12)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\sim x^{(Si,i,i)}(\phi)(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_{10}, x^i_{11}, x^i_{12}, x^i_{13})$	E(∃)(5,6,11)
(13)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_{10}/x^i_{13} \sim x^{(Si,i,i)}(\phi)(x^i_1, x^i_2, x^i_3, x^i_{10}, x^i_{11}, x^i_{12}, x^i_{13})$	I(∀)(12)
(14)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\sim x^{(Si,i,i)}(\phi)(x^i_1, x^i_2, x^i_3)$	(∀~↔~∃)
(15)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_1 \forall x^i_2(sx^i_1 < x^i_2 \supset x^i_1 < x^i_2)$	T
(16)	∅	$\vdash_{S_2}$	$sx^i_4 < x^i_1 \supset x^i_4 < x^i_1$	E(∀)(15)
(17)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$x^i_4 < x^i_1$	E(⊃)(15,16)

(18)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_4^i < x_1^i \supset \forall x_2^i \forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)))$	E(∀)(1)
(19)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E(⊃)(17,18)
(20)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\sim x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∀)(1)
(21)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\sim Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	I(∨)(14,20)
(22)	{1,2}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \forall x_3^i \sim Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	I(∀)(21)
(23)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$sx_4^i < x_1^i \supset \forall x_2^i \forall x_3^i \sim Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	I(⊃)(2,22)
(24)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(sx_4^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	I(∀)(23)
(25)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(x_4^i, x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{S}(sx_4^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	I(⊃)(1,24)
(26)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_4^i(\mathsf{S}(x_4^i, x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{S}(sx_4^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$	I(∀)(25)

Teorema 6.9. $\vdash_{S_2} \forall x_5^i((\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)) \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i)))$.
Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(1)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_5^i \leqslant x_5^i \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(x_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)(2)
(4)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i \leqslant x_1^i)$	T
(5)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x_5^i \leqslant x_5^i$	E(∀)(4)
(6)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(x_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E(⊃)(3,5)
(7)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(x_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)(6)
(8)	{8}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_5^i, x_2^i, x_{30}^i)$	H
(9)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i / x_3^i \exists x_4^i(\phi(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i))$	E(∧)(1)
(10)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_4^i(\phi(x_1^i, x_2^i, x_{30}^i, x_4^i))$	E(∀)(9)
(11)	{11}	$\vdash_{S_2}$	$\phi(x_1^i, x_2^i, x_{30}^i, x_{40}^i)$	H
(12)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i = x_1^i)$	Sim(=)
(13)	∅	$\vdash_{S_2}$	$sx_5^i = sx_5^i$	E(∀)(12)
(14)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x_2^i = x_2^i$	E(∀)(12)
(15)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x_{40}^i = x_{40}^i$	E(∀)(12)
(16)	∅	$\vdash_{S_2}$	$=(sx_5^i, sx_5^i; x_2^i, x_2^i; x_{40}^i, x_{40}^i)$	I(∧)(13-5)
(17)	{8,11}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(\phi)(x_5^i, x_2^i, x_{30}^i, x_{40}^i)$	I(∧)(8,11)

(18)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E($\wedge$)(1)
(19)	{1,8,11}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(Si,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_{40}^i, x_5^i, x_2^i, x_{30}^i, x_{40}^i)$	I($\wedge$)(16,17,18)
(20)	{1,8,11}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(Si,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_{40}^i)$	I($\exists$)(19)
(21)	{1,8,11}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_{40}^i)$	I($\vee$)(20)
(22)	{1,8,11}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	I($\exists$)(22)
(23)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E($\exists$)(7,8,10,11,22)
(24)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	I($\forall$)(23)
(25)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$(\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)) \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	I($\supset$)(1,24)
(26)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_5^i((\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)) \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i)))$	I($\forall$)(26)

Teorema 6.10. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_5^i((\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)) \supset \mathsf{DS}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{D}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E($\wedge$)(1)
(3)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E($\wedge$)(1)
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_4^i(\mathsf{S}(x_4^i, x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{S}(sx_4^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$	$T_{6.9}$
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{S}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	E($\forall$)(4)
(6)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	E($\supset$)(3,5)
(7)	{7}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant sx_5^i$	H
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant sx_2^i \supset (x_1^i \leqslant x_2^i \vee x_1^i = sx_2^i))$	T
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant sx_5^i \supset (x_1^i \leqslant x_5^i \vee x_1^i = sx_5^i)$	E($\forall$)(8)
(10)	{7}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i \vee x_1^i = sx_5^i$	E($\forall$)(9)
(11)	{11}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i$	H
(12)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E($\forall$)(1)
(13)	{1,11}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E($\supset$)(11,12)
(14)	{1,11}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E($\forall$)(13)
(15)	{15}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	H
(16)	{15}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E($\vee$)(15)
(17)	{15}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I($\exists$)(16)

(18)	{1,11}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∃)(14,15,17)
(19)	{1,11}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∀)(18)
(20)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(⊃)(11,19)
(21)	{21}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = sx_5^i$	H
(22)	∅	$\vdash_{S_2}$	$(\mathrm{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathrm{D}(\phi)) \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)($T_{6.10}$)
(23)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E(⊃)(1,22)
(24)	{1,21}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	Subs(=)(21,23)
(25)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = sx_5^i \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(⊃)(21,24)
(26)	{1,7}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∨)(10,20,25)
(27)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant sx_5^i \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(⊃)(7,26)
(28)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathrm{DS}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	I(∀)(27)
(29)	∅	$\vdash_{S_2}$	$(\mathrm{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathrm{D}(\phi)) \supset \mathrm{DS}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	I(⊃)(1,28)
(30)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_5^i((\mathrm{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge \mathrm{D}(\phi)) \supset \mathrm{DS}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$	I(∀)(29)

Teorema 6.11. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i/x_4^i(Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i)$	H
(2)	{2}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	H
(3)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_{40}^i, x_{50}^i, x_{60}^i, x_{70}^i)$	H
(4)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$=(x_1^i,\, sx_{40}^i;\, x_2^i,\, x_{50}^i;\, x_3^i,\, x_{70}^i)$	E(∧)(3)
(5)	{3}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = sx_{40}^i$	E(∧)(4)
(6)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant x_4^i$	E(∧)(1)
(7)	{1,3}	$\vdash_{S_2}$	$sx_{40}^i \leqslant x_4^i$	Subs(=)(5,6)
(8)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathrm{DS}(x_4^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(1)
(9)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathrm{D}(x_4^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(8)
(10)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$sx_{40}^i \leqslant x_4^i \supset \forall x_2^i \exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(sx_{40}^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)(9)
(11)	{1,3}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(sx_4^i, x_2^i, x_3^i))$	E(⊃)(10)
(12)	{1,3}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i(x^{(i,i,i)}(sx_4^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)(11)

(13)	{1,3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\forall x_3^i\sim(x^{(i,i,i)}(sx_4^i, x_2^i, x_3^i))$	(~∀↔∃~)(12)
(14)	{1,3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_2^i\sim\forall x_3^i\sim(x^{(i,i,i)}(sx_4^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∃)(13)
(15)	{1,3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\forall x_2^i\forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(sx_4^i, x_2^i, x_3^i))$	(~∀↔∃~)(14)
(16)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i< sx_1^i)$	Teorema
(17)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_4^i< sx_4^i$	E(∀)(16)
(18)	{1,3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x_4^i< sx_4^i \wedge \sim\forall x_2^i\forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(sx_4^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∧)(15,17)
(19)	{1,3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim(x_4^i< sx_4^i \supset \forall x_2^i\forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(sx_4^i, x_2^i, x_3^i)))$	(∧↔⊃)(18)
(20)	{1,3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\exists x_8^i\sim(x_4^i< x_8^i \supset \forall x_2^i\forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(x_8^i, x_2^i, x_3^i)))$	I(∃)(19)
(21)	{1,3}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\forall x_8^i(x_4^i< x_8^i \supset \forall x_9^i\forall x_{10}^i(\sim x^{(i,i,i)}(x_8^i, x_2^i, x_3^i)))$	(~∀↔∃~)(20)
(22)	{1,2}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim\forall x_8^i(x_4^i< x_8^i \supset \forall x_9^i\forall x_{10}^i(\sim x^{(i,i,i)}(x_8^i, x_9^i, x_{10}^i)))$	E(∃)(2,3,19)
(23)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_8^i(x_4^i< x_8^i \supset \forall x_2^i\forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(x_8^i, x_2^i, x_3^i)))$	E(∧)(1)
(24)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim x^{(Si,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	R(~)(2,22,23)
(25)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∧)(1)
(26)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∨)(24,25)
(27)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i\leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	I(⊃)(1,26)
(28)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i/x_4^i(Sx^{(i,i,i)}(x_1^i\leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∀)(27)

Teorema 6.12. $\vdash_{\mathsf{S}_2} \forall x_1^i/x_5^i((\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)) \supset x_1^i\leqslant sx_5^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(1)
(3)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_5^i(\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{DS}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi)))$	T
(4)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{DS}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	E(∀)(3)
(5)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{DS}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	E(⊃)(2,4)
(6)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\mathsf{S}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)}(\phi))$	E(∧)(5)
(7)	{1}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$sx_5^i< x_1^i \supset \forall x_2^i\forall x_3^i(\sim Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)(6)
(8)	{8}	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\sim x_1^i\leqslant sx_5^i$	H
(9)	∅	$\vdash_{\mathsf{S}_2}$	$\forall x_1^i\forall x_2^i(\sim x_1^i\leqslant x_2^i \supset x_2^i< x_1^i)$	T

(10)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\sim x_1^i \leqslant sx_5^i \supset sx_5^i < x_1^i$	E(∀)(9)
(11)	{8}	$\vdash_{S_2}$	$sx_5^i < x_1^i$	E(⊃)(8,10)
(12)	{1,8}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \forall x_3^i(\sim Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E(⊃)(2,11)
(13)	{1,8}	$\vdash_{S_2}$	$\sim Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∀)(12)
(14)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∧)(1)
(15)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant sx_5^i$	E(~)(13,14)
(16)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\mathsf{Ds}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)) \supset x_1^i \leqslant sx_5^i$	I(⊃)(1,15)
(17)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_5^i((\mathsf{Ds}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i)) \supset x_1^i \leqslant sx_5^i)$	I(∀)(16)

Teorema 6.13. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i/x_5^i(x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(x_1^i/x_5^i) \supset x_3^i = x_4^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(x_1^i/x_5^i)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∧)(1)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(1)
(4)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Ds}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(3)
(5)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Ds}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	I(∧)(2,4)
(6)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_5^i((\mathsf{Ds}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)) \supset x_1^i \leqslant sx_5^i)$	$T_{6.13}$
(7)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$(\mathsf{Ds}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)) \supset x_1^i \leqslant sx_5^i$	E(∀)(6)
(8)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant sx_5^i$	E(⊃)(5,7)
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant sx_2^i \supset (x_1^i \leqslant x_2^i \vee x_1^i = sx_2^i))$	T
(10)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant sx_5^i \supset (x_1^i \leqslant x_5^i \vee x_1^i = sx_5^i)$	E(∀)(9)
(11)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i \vee x_1^i = sx_5^i$	E(⊃)(8,10)
(12)	{12}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i$	H
(13)	{1,12}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_5^i), x_2^i, x_3^i)$	I(∧)(12,2,4)
(14)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_4^i(Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	$T_{6.12}$
(15)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_5^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∀)(14)
(16)	{1,12}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(⊃)(13,15)
(17)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	E(∧)(1)

(18)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)}) \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	I(∧)(4,17)
(19)	{1,12}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_5^i), x_2^i, x_4^i)$	I(∧)(12,18)
(20)	∅	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_5^i), x_2^i, x_4^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	E(∀)(9)
(21)	{1,12}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(⊃)(19,20)
(22)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(x^{(i,i,i)})$	E(∧)(3)
(23)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$(x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)) \supset x_3^i = x_4^i$	E(∀)(22)
(24)	{1,12}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	I(∧)(16,21)
(25)	{1,12}	$\vdash_{S_2}$	$x_3^i = x_4^i$	E(⊃)(23,24)
(26)	{26}	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = sx_5^i$	H
(27)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(4)
(28)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$x_5^i < sx_5^i \supset \forall x_2^i \forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)(27)
(29)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i(x_1^i < sx_1^i)$	T
(30)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x_5^i < sx_5^i$	E(∀)(29)
(31)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(sx_5^i, x_2^i, x_3^i))$	E(⊃)(30,28)
(32)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \forall x_3^i(\sim x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	Subs(=)(26,31)
(33)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$\sim x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∀)(32)
(34)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$\sim x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	E(∀)(32)
(35)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∨)(2,33)
(36)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	E(∨)(17,34)
(37)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_6^i, x_7^i, x_8^i, x_9^i)$	E(∃)(35)
(38)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i, x_{10}^i, x_{11}^i, x_{12}^i, x_{13}^i)$	E(∃)(36)
(39)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$=(x_1^i, sx_6^i; x_2^i, x_7^i; x_3^i, x_9^i)$	E(∧)(37)
(40)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$=(x_1^i, sx_{10}^i; x_2^i, x_{11}^i; x_4^i, x_{13}^i)$	E(∧)(38)
(41)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_6^i, x_7^i, x_8^i, x_9^i)$	E(∧)(37)
(42)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_{10}^i, x_{11}^i, x_{12}^i, x_{13}^i)$	E(∧)(38)
(43)	{1,26}	$\vdash_{S_2}$	$\phi(x_6^i, x_7^i, x_8^i, x_9^i)$	E(∧)(41)

(44)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$\phi(x^i_{10}, x^i_{11}, x^i_{12}, x^i_{13})$	E(∧)(42)
(45)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x^i_6, x^i_7, x^i_8)$	E(∧)(41)
(46)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x^i_{10}, x^i_{11}, x^i_{12})$	E(∧)(42)
(47)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_1 = sx^i_6$	E(∧)(39)
(48)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_1 = sx^i_{10}$	E(∧)(40)
(49)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$sx^i_6 = sx^i_{10}$	Subs(=)(39,40)
(50)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^i_1 \forall x^i_2 (sx^i_1 = sx^i_2 \supset x^i_1 = x^i_2)$	T
(51)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$sx^i_6 = sx^i_{10} \supset x^i_6 = x^i_{10}$	E(∀)(50)
(52)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_6 = x^i_{10}$	E(⊃)(50,51)
(53)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_2 = x^i_7$	E(∧)(39)
(54)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_2 = x^i_{11}$	E(∧)(40)
(55)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_7 = x^i_{11}$	Subs(=)(53,54)
(56)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x^i_6, x^i_7, x^i_{12})$	Subs(=)(46,52,55)
(57)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$(x^{(i,i,i)}(x^i_6, x^i_7, x^i_8) \wedge x^{(i,i,i)}(x^i_6, x^i_7, x^i_{12})) \supset x^i_8 = x^i_{12}$	E(∀)(22)
(58)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x^i_6, x^i_7, x^i_8) \wedge x^{(i,i,i)}(x^i_6, x^i_7, x^i_{12})$	I(∧)(45,56)
(59)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_8 = x^i_{12}$	E(⊃)(57,58)
(60)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$\phi(x^i_6, x^i_7, x^i_8, x^i_{13})$	Subs(=)(44,52,55,59)
(61)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathrm{e}(\phi)$	E(∧)(1)
(62)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$(\phi(x^i_6, x^i_7, x^i_8, x^i_9) \wedge \phi(x^i_6, x^i_7, x^i_8, x^i_{13})) \supset x^i_9 = x^i_{13}$	E(∀)(61)
(63)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$\phi(x^i_6, x^i_7, x^i_8, x^i_9) \wedge \phi(x^i_6, x^i_7, x^i_8, x^i_{13})$	I(∧)(43,60)
(64)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_9 = x^i_{13}$	E(⊃)(62,63)
(65)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_3 = x^i_9$	E(∧)(39)
(66)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_4 = x^i_{13}$	E(∧)(40)
(67)	$\{1{,}26\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_3 = x^i_4$	Subs(=)(64-6)
(68)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_1 = sx^i_5 \supset x^i_3 = x^i_4$	I(⊃)(26,67)
(69)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^i_1 \leqslant x^i_5 \supset x^i_3 = x^i_4$	I(⊃)(12,25)

(70)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$(x_1^i \leqslant x_5^i \lor x_1^i = sx_5^i) \supset x_3^i = x_4^i$	I($\lor$)(68-9)
(71)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_3^i = x_4^i$	E($\supset$)(11,70)
(72)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(x_1^i/x_5^i) \supset x_3^i = x_4^i$	I($\supset$)(1,71)
(73)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_5^i(x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(x_1^i/x_5^i) \supset x_3^i = x_4^i)$	I($\forall$)(72)

Teorema 6.14. $\vdash_{S_2} \forall x_1^i/x_5^i(x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i<(sx_5^i)/x_4^i)) \supset Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i,\ x_2^i,\ x_4^i)))$.

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i<(sx_5^i), x_2^i, x_3^i, x_4^i))$	H
(2)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i < sx_2^i \supset x_1^i \leqslant x_2^i)$	T
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i < sx_5^i \supset x_1^i \leqslant x_5^i$	E($\forall$)(2)
(4)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i < sx_5^i$	E($\land$)(1)
(5)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i$	E($\supset$)(1,4)
(6)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{DS}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E($\land$)(1)
(7)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \land \phi(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i)$	E($\land$)(1)
(8)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E($\land$)(7)
(9)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i)$	I($\land$)(5,6,8)
(10)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_4^i(Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	$\mathrm{T}_{6.12}$
(11)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E($\forall$)(10)
(12)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E($\supset$)(9,11)
(13)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i(x_1^i \leqslant x_2^i \supset (x_1^i < x_2^i \lor x_1^i = x_2^i))$	T
(14)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i \leqslant x_5^i \supset (x_1^i < x_5^i \lor x_1^i = x_5^i)$	E($\forall$)(13)
(15)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$(x_1^i < x_5^i \lor x_1^i = x_5^i)$	E($\supset$)(5,14)
(16)	$\{16\}$	$\vdash_{S_2}$	$sx_1^i \leqslant x_5^i$	H
(17)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	I($\lor$)(12)
(18)	$\{1,16\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_5^i), x_2^i, x_3^i)$	I($\land$)(6,16,17)
(19)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_4^i(Sx^{(i,i,i)}(x_1^i \leqslant (x_4^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	$\mathrm{T}_{6.12}$
(20)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(sx_1^i \leqslant (x_5^i), x_2^i, x_3^i) \supset x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E($\forall$)(19)

(21)	$\{1,16\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E($\supset$)(18,20)
(22)	$\{1,16\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i,\ x_2^i,\ x_4^i)$	I($\vee$)(21)
(23)	$\{23\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i = x_5^i$	H
(24)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E($\wedge$)(6)
(25)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$[\mathsf{S}(x_5^i, x^{(i,i,i)})](x_1^i, x_8^i; x_2^i, x_9^i; x_3^i, x_{10}^i)$	($v\leftrightarrow v$)(24)
(26)	$\{1,23\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_1^i)$	Subs(=)(23,25)
(27)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$=(sx_1^i, sx_1^i; x_2^i, x_2^i; x_4^i, x_4^i)$	Teorema
(28)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i)$	I($\wedge$)(12,17)
(29)	$\{1,23\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i, x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i)$	I($\wedge$)(28,26,27)
(30)	$\{1,23\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(Si,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)$	I($\exists$)(29)
(31)	$\{1,23\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)$	I($\vee$)(30)
(32)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)$	Casos(15,22,31)
(33)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i < (sx_5^i), x_2^i, x_3^i, x_4^i)) \supset Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)$	I($\supset$)(1,32)
(34)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i / x_5^i (x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i < (sx_5^i), x_2^i, x_3^i, x_4^i)) \supset Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)))$	I($\forall$)(33)

Teorema 6.15. $\vdash_{S_2} \mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \forall x_5^i \exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{De}\,\mathsf{S}(x_5^i, x^{(i,i,i)}))$.

Prova.

(1)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi)$	H
(2)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{De}(\varphi)$	E($\wedge$)(1)
(3)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\varphi_0{}^{(0,i)\to i}(\varphi)$	$T_{6.4}$
(4)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\varphi_0{}^{(si,i)\to i}(\phi)(0)$	$T_{6.5}$
(5)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(\varphi) \supset \mathsf{e}(\varphi_0)$	$T_{6.6}$
(6)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(\varphi)$	E($\wedge$)(2)
(7)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(\varphi_0)$	E($\supset$)(5,6)
(8)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{S}(0, \varphi_0)$	$T_{6.7}$
(9)	$\varnothing$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\varphi) \supset \mathsf{D}(0, \varphi_0)$	$T_{6.8}$
(10)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(0, \varphi_0)$	E($\wedge$)(2)

(11)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Des}(0,\varphi_0)$	I(∧)(7,8,10)
(12)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\varphi_0{}^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge \varphi_0{}^{(si,i)\to i}(\phi)(0) \wedge \mathsf{Des}(0,\varphi_0)$	I(∧)(3,4,11)
(13)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(0) \wedge \mathsf{Des}(0,x^{(i,i,i)}))$	I(∃)(12)
(14)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i,x^{(i,i,i)}))$	H
(15)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i,x^{(i,i,i)})$	E(∃)(14)
(16)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Ds}(x_5^i,x^{(i,i,i)})$	E(∧)(15)
(17)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\phi)$	E(∧)(1)
(18)	{1,14}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Ds}(x_5^i,x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)$	I(∧)(16,17)
(19)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_5^i((\mathsf{Ds}(x_5^i,x^{(i,i,i)}) \wedge \mathsf{D}(\phi)) \supset \mathsf{Ds}(sx_5^i,Sx^{(i,i,i)}))$	$T_{6.11}$
(20)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Ds}(x_5^i,x^{(i,i,i)}) \supset \mathsf{Ds}(sx_5^i,Sx^{(i,i,i)})$	E(∀)(19)
(21)	{1,14}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Ds}(sx_5^i,Sx^{(i,i,i)})$	E(⊃)(18,20)
(22)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_5^i(x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(x_1^i/x_5^i) \supset x_3^i=x_4^i)$	$T_{6.14}$
(23)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(x_1^i/x_5^i) \supset x_3^i=x_4^i$	E(∀)(22)
(24)	{24}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_4^i)$	H
(25)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(\phi)$	E(∧)(1)
(26)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Des}(x_5^i,x^{(i,i,i)})$	E(∧)(14)
(27)	{1,14,24}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(x_1^i/x_5^i)$	I(∧)(24-6)
(28)	{1,14,24}	$\vdash_{S_2}$	$x_3^i=x_4^i$	E(⊃)(23,27)
(29)	{1,14}	$\vdash_{S_2}$	$(Sx^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_4^i)) \supset x_3^i=x_4^i$	I(⊃)(24,28)
(30)	{1,14}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(Sx^{(i,i,i)})$	I(∀)(29)
(31)	{1,14}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Des}(sx_5^i,Sx^{(i,i,i)})$	I(∧)(21,30)
(32)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i)$	E(∧)(14)
(33)	{33}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_4^i,sx_5^i)$ *ou* $x_1^i<sx_5^i \wedge Sx^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \wedge \phi(x_1^i/x_4^i)$	H
(34)	{14,33}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i<(sx_5^i),x_2^i,x_3^i,x_4^i))$	I(∧)(16,33)
(35)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_4^i(x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i<(sx_5^i),x_2^i,x_3^i,x_4^i)) \supset Sx^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_4^i))$	$T_{6.15}$
(36)	∅	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}Sx^{(i,i,i)}(\phi(x_1^i<(sx_5^i),x_2^i,x_3^i,x_4^i)) \supset Sx^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_4^i)$	E(∀)(35)

(37)	{14,33}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)$	E(⊃)(34,36)
(38)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$Sx^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_4^i, sx_5^i) \supset Sx^{(i,\ i,\ i)}(sx_1^i, x_2^i, x_4^i)$	I(⊃)(33,37)
(39)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(si,i)\to i}(\phi)(sx_5^i)$	I(∀)(36)
(40)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(0,i)\to i}(\varphi)$	E(∧)(14)
(41)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(sx_5^i) \wedge \mathsf{Des}(sx_5^i, Sx^{(i,i,i)})$	I(∧)(31,39,40)
(42)	{14}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(sx_5^i) \wedge \mathsf{Des}(sx_5^i, x^{(i,i,i)}))$	I(∃)(41)
(43)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_5^i \exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)}))$	Ind(∧)(13-4,42)
(44)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \forall x_5^i \exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)}))$	I(⊃)(1,43)

Teorema 6.16. $\vdash_{S_2} \mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \mathsf{e}(\mathsf{R}(\varphi, \phi))$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{R}(\varphi,\phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge \mathsf{R}(\varphi,\phi)(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_5^i\, \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)}) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∧)(1)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_5^i\, \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)}) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i))$	E(∧)(1)
(4)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)}) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))(x_5^i)$	E(∃)(2)
(5)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)}) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i))(x_6^i)$	E(∃)(3)
(6)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \forall x_5^i \exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)}))$	T
(7)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi)$	E(∃)(6)
(8)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_5^i \exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)}))$	E(⊃)(4,7)
(9)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)}))$	I(∀)(8)
(10)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x^{(i,i,i)}(x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_6^i) \wedge \mathsf{Des}(x_6^i, x^{(i,i,i)}))$	I(∀)(8)
(11)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_5^i) \wedge \mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E(∃)(1)
(12)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(0,i)\to i}(\varphi) \wedge x^{(si,i)\to i}(\phi)(x_6^i) \wedge \mathsf{Des}(x_6^i, x^{(i,i,i)})$	E(∃)(1)
(13)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_5^i)$	E(∧)(11)
(14)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_6^i)$	E(∧)(12)
(15)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_5^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∀)(4)
(16)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_6^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	E(∀)(5)
(17)	{1,7}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(⊃)(13,15)

(18)	{1,7}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	E(⊃)(14,16)
(19)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{Des}(x_5^i, x^{(i,i,i)})$	E(∧)(11)
(20)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(x^{(i,i,i)})$	E(∧)(19)
(21)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$(x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)) \supset x_3^i = x_4^i$	E(∀)(20)
(22)	{1,7}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_4^i)$	I(∧)(17,18)
(23)	{1,7}	$\vdash_{S_2}$	$x_3^i = x_4^i$	E(⊃)(21,22)
(24)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{R}(\varphi, \phi)(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \wedge \mathsf{R}(\varphi, \phi)(x_1^i, x_2^i, x_4^i) \supset x_3^i = x_4^i$	I(⊃)(1,23)
(25)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{e}(\mathsf{R}(\varphi, \phi))$	I(∀)(24)
(26)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{De}(\varphi) \wedge \mathsf{De}(\phi) \supset \mathsf{e}(\mathsf{R}(\varphi, \phi))$	E(⊃)(7,25)

Teorema 6.17. $\vdash_{S_2} \mathsf{D}(\varphi) \wedge \mathsf{D}(\phi) \supset \forall x_1^i \forall x_2^i \exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi, \phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i)$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\varphi) \wedge \mathsf{D}(\phi)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\varphi)$	E(∧)(1)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\phi)$	E(∧)(1)
(4)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi, \phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i)$	H
(5)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i / x_3^i (x_1^i = 0 \supset (\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)))$	E(∧)(4)
(6)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \varphi(x_2^i, x_3^i)$	E(∀)(2)
(7)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\varphi(x_2^i, x_3^i)$	H
(8)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$0 = 0 \supset (\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow x^{(i,i,i)}(0, x_2^i, x_3^i))$	E(∀)(5)
(9)	∅	$\vdash_{S_2}$	$0 = 0$	Ref(=)
(10)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$\varphi(x_2^i, x_3^i) \leftrightarrow x^{(i,i,i)}(0, x_2^i, x_3^i)$	E(⊃)(8,9)
(11)	{4,7}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(0, x_2^i, x_3^i)$	E(⊃)(7,10)
(12)	{4,7}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(0, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < 0$	I(∨)(11)
(13)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi, \phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(0, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < 0)$	I(⊃)(4,12)
(14)	{7}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi, \phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(0, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < 0))$	I(∀)(13)

(15)	$\{7\}$	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(0,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < 0))$	I(∃)(14)
(16)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(0,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < 0))$	E(∃)(6,7,14)
(17)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(0,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < 0))$	I(∀)(16)
(18)	$\{18\}$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i))$	H
(19)	$\{18\}$	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i))$	E(∀)(18)
(20)	$\{20\}$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i))$	H
(21)	$\{20\}$	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i)$	E(∀)(20)
(22)	$\{22\}$	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i)$	H
(23)	$\{20,22\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i$	E(⊃)(7,10)
(24)	$\{24\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i)$	H
(25)	$\{25\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_4^i < x_1^i$	H
(26)	$\{25\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_4^i < sx_1^i$	E(⊃)(Teorema,25)
(27)	$\{25\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i$	I(∨)(26)
(28)	$\{28\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_4^i < sx_1^i$	H
(29)	$\{28\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i$	I(∨)(28)
(30)	$\{30\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i < x_4^i$	H
(31)	$\{1\}$	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_4^i \phi(x_1^i / x_3^i, x_5^i)$	E(∀)(3)
(32)	$\{32\}$	$\vdash_{S_2}$	$\phi(x_1^i,x_2^i,x_3^i,x_5^i)$	H
(33)	$\{24,30,32\}$	$\vdash_{S_2}$	$x_1^i < x_4^i \wedge x^{(i,i,i)}(x_1^i,x_2^i,x_3^i) \wedge \phi(x_1^i,x_2^i,x_3^i,x_5^i)$	I(∧)(24,30,32)
(34)	$\{22\}$	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i/x_3^i \forall x_5^i(x^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_3^i,x_5^i,x_4^i) \supset x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_4^i))$	E(∧)(22)
(35)	$\{22\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(\phi)(x_1^i/x_3^i,x_5^i,x_4^i) \supset x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_4^i)$	E(∀)(20)
(36)	$\{22,24,30,32\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_4^i)$	E(⊃)(33,55)
(37)	$\{22,24,30,32\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i$	I(∨)(28)
(38)	$\{22,24,32\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i$	E(∨)(Teorema,25,30)
(39)	$\{20,22,32\}$	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(sx_1^i,x_2^i,x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i$	E(∨)(23,24,28,38)

(40)	{20,32}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i)$	E(⊃)(22,39)
(41)	{20,32}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i))$	I(∀)(40)
(42)	{20,32}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i))$	I(∃)(41)
(43)	{1,20}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i))$	E(∃)(31,32,42)
(44)	{1,18}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i))$	E(∃)(19,20,43)
(45)	{1,18}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_2^i \exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(sx_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < sx_1^i))$	I(∀)(44)
(46)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i \exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i))$	Ind(17,18,45)

Teorema 6.18. $\vdash_{S_2} \mathsf{D}(\varphi) \wedge \mathsf{D}(\phi) \supset \mathsf{D}(\mathsf{R}(\varphi,\phi))$.

Prova.

(1)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\varphi) \wedge \mathsf{D}(\phi)$	H
(2)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_1^i \forall x_2^i \exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i))$	E(⊃)(1,$T_{6.8}$)
(3)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i))$	E(∀)(2)
(4)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i))$	H
(5)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_1^i) \supset (x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_4^i < x_1^i)$	E(∀)(4)
(6)	{6}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_1^i)$	H
(7)	{4,6}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i) \vee x_1^i < x_1^i$	E(⊃)(4,6)
(8)	∅	$\vdash_{S_2}$	$\sim x_1^i < x_1^i$	Teorema
(9)	{4,6}	$\vdash_{S_2}$	$x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	E(∨)(7,8)
(10)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$(\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_1^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$	I(⊃)(6,9)
(11)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$\forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_1^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∀)(10)
(12)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∃)(11)
(13)	{4}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \exists x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	I(∃)(12)
(14)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\exists x_3^i \exists x_4^i \forall x^{(i,i,i)}((\varphi,\phi)(x^{(i,i,i)})(x_4^i) \supset x^{(i,i,i)}(x_1^i, x_2^i, x_3^i))$	E(∃)(3,4,13)
(15)	{1}	$\vdash_{S_2}$	$\mathsf{D}(\mathsf{R}(\varphi,\phi))$	I(∀)(10)

Referências Bibliográficas

ANDREWS, P. B.. *Introduction to Mathematical Logic and Type Theory*. Academic Press, 1986.

BUSS, S. R.. “An introduction to Proof Theory”, *Handbook of Proof Theory* (Cap. I). Elsevier Science B.; V., 1998.

_______. “First-order Proof Theory of Arithmetic”, *Handbook of Proof Theory* (Cap. II). Elsevier Science B.; V., 1998.

CHURCH, A.. *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press, 1956.

_______. “A note on the Entscheidungsproblem”, *The Journal of Simbolic Logic*, Vol. 1, No. 1 (março de 1936), pp. 40-41.

_______. “Correction to *A note on the Entscheidungsproblem*”, *The Journal of Simbolic Logic*, Vol. 1, No. 3 (setembro de 1936), pp. 101-102.

_______. “A formulation of the simple theory of types”, *The Journal of Simbolic Logic*, Vol. , No. (de 19), pp. 56-68.

COPI, I. M.. *The Theory of Logical Types*. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1971.

GÖDEL, K.. “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und werwandter Systeme I”, *Monatshefte fur Mathematik und Physik*, Vol. 38, 1931, pp. 173-198.

_______. *Obras Completas*. Tradução, introdução e notas de Jesús Mosterín.

_______. “On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I”, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (pp.596-616) editado por van Heijenoort, Havard University Press, Cambridge, 1967.

HENKIN, L.. “On mathematical induction”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 67, No. 4 (abril de 1960), pp. 323-338.

KLEENE, S. C. *Introduction to Metamathematics*. D. Van Nostrand Company, Princeton, 1962 (terceira reimpressão).

ROSSER, J. B.. “An informal exposition of proofs of Gödel’s theorem and Church’s theorem”, *The Journal of Simbolic Logic*, Vol. 4, No. 2 (junho de 1939), pp. 53-60.

SMULLYAN, R.. *Gödel’s Incompleteness Theorems*. Oxford University Press, Londres, 1992.

_______. *Recursion Theory for Metamathematics*. Oxford University Press, Londres, 1993.

VAN BENTHEM, J. e DOETS, K.. “Higher-order Logic”, *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. I (Elements of Classical Logic), D. Reidel Publishing, Dordrecht, Boston e Lancaster, 1983.

WHITEHEAD, A. N. e RUSSELL, B.. *Principia Mathematica*. Volumes I-III, Cambridge University Press, Londres, 1935 (reimpressão da segunda edição).