UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE FILOSOFIA, LETRAS E CIÊNCIAS HUMANAS
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

Guilherme Messias Pereira Lima

Semântica Topológica para a Lógica Modal Quantificada: Sob uma Perspectiva Metafísica

Versão Corrigida

São Paulo
2021

Guilherme Messias Pereira Lima

Semântica Topológica para a Lógica Modal Quantificada: Sob uma Perspectiva Metafísica

Versão Corrigida

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Área de concentração: Filosofia

Orientador: Prof. Dr. Edelcio Gonçalves de Souza

São Paulo
2021

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo

Lima, Guilherme Messias Pereira
L732s Semântica topológica para a lógica modal quantificada: sob uma perspectiva Metafísica / Guilherme Messias Pereira Lima; orientador Edelcio Gonçalves de Souza - São Paulo, 2021.
402 f.

Tese (Doutorado)- Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo. Departamento de Filosofia. Área de concentração: Filosofia.

1. Lógica modal. 2. Metafísica. 3. Lógica formal. 4. Topologia. I. de Souza, Edelcio Gonçalves , orient. II. Título.

LIMA, G. M. P. **Semântica Topológica para a Lógica Modal Quantificada: Sob uma Perspectiva Metafísica**. Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. ____________________ Instituição: ____________________

Julgamento: ____________________ Assinatura: ____________________

Prof. Dr. ____________________ Instituição: ____________________

Julgamento: ____________________ Assinatura: ____________________

Prof. Dr. ____________________ Instituição: ____________________

Julgamento: ____________________ Assinatura: ____________________

Agradecimentos

Sou imensamente grato a meu orientador, prof. Dr. Edélcio Gonçalves de Souza, pela cuidadosa tutoria ao longo destes anos e pelos esforços realizados para que nossa formação, como grupo de pesquisa, fosse tão robusta e eclética quanto possível, formação essa obtida por meio de sua organização em nossos seminários semanais; sem ela este trabalho não teria o mesmo escopo. Agradeço-lhe, também, pelos conselhos, em especial por me ajudar a dar “forma” a este trabalho, em que embora tenha tentado ser tão coeso quanto possível, fez-se necessário suas observações para me auxiliar nesta tarefa de síntese, à qual, deve reconhecer, não sou tão habilidoso. A ele e ao prof. Dr. Rodrigo Bacellar, que me orientou por dois anos no programa de iniciação científica deste departamento, sou extremamente grato pela profunda liberdade que me deram para selecionar e conduzir meus estudos; ao prof. Rodrigo, em especial, agradeço por todos os cursos oferecidos e momentos de ricas reflexões.

Ao prof. Dr. Alexandre Costa-Leite devo muito desta pesquisa, por conselhos e direcionamentos desde o momento em que leu os manuscritos rudimentares do projeto durante a qualificação para o mestrado; sua leitura atenciosa de todo o material, além de suas suas observações detalhistas, foram extremamente úteis para que o trabalho pudesse ser enriquecido e melhorado. Agradeço também ao prof. Dr. Otávio Bueno por aceitar participar da banca de avaliação deste trabalho, assim como seu auxílio receptivo e prestativo quando da oportunidade de realizar um estágio sob sua orientação - que infelizmente não pode se concretizar devido aos acontecimentos de 2020.

Aos colegas que passaram pela departamento, agradeço pelas oportunidades de conversa e estudos em que discutimos problemas de lógica e filosofia: Felipe de Souza Salvatore, Pedro Alonso Amaral Falcão, Daniel Arvage Nagase, Matheus Cury Vieira, Diogo Henrique Bispo Dias, Rodolfo Cunha Carnnier, Euclides Torres Ometto Stolf, Fernanda Birolli Abrahão, Marcos Antonio Antoneli Gaiarsa e Levi Melo Magalhães.

Este momento representa a finalização de uma etapa em uma longa caminhada, à qual sou grato aos professores do Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas FFLCH-USP, assim como a toda a equipe da secretaria. Sou grato também aos professores do Departamento de Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas IBILCE-UNESP, em especial aos prof. Dr. Jose Carlos Ferreira Costa, com o qual pude me iniciar nos estudos da Teoria das Singularidades, e à prof. Dra. Neuza Kazuko Kakuta, que teve a paciência de conversar com um aluno jovem, ouvir-me e orientar-me para iniciar meus estudos acadêmicos pessoais na área de Topologia, inclusive sendo ponte para que eu realizasse minha primeira iniciação sob a supervisão do prof. Dr.

Edvaldo Lopes do Santos, hoje no Departamente de Matemática da UFSCAR, a quem sou extremamente grato por toda atenção despendida nos momentos iniciais de minha formação, em especial pela escolha do tema de nosso trabalho, extremamente instigante e desafiador.

Por fim, sou muito grato a meus pais, Norival e Maria Cleide (*in memorian*) por sempre incentivarem o estudo em nossa casa; nossa pequena biblioteca e as leituras na cama, ainda muito pequeno, me mostraram a importância dos livros em nossas vidas; obviamente sou grato por todo o suporte recebido ao longo dos anos. Sou grato também às minhas tias Solange e Sueli pela preocupação maternal que tiveram comigo, mesmo após adulto. Devo também agradecer ao Arthur, sem o qual seu companheirismo e suporte ao longo dos últimos anos teria tornado impossível concilar todas as atividades necessárias para a conclusão deste trabalho.

"Com secreto,
Feminil artifício, assim conseguem
Separar o parecer do ser, que todos
Substância juram ser o que é aparência."
Fausto - (GOETHE, 2018). Linha 11 970

Resumo

LIMA, G. M. P. **Semântica Topológica para a Lógica Modal Quantificada: Sob uma Perspectiva Metafísica**. 2021. 402 f. Tese (Doutorado). Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas. Departamento de Filosofia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Usualmente, filósofos analíticos utilizam, implícita ou explicitamente, a formalização lógica em seus argumentos com o objetivo de regular inferências válidas em certos contextos racionais; nesse contexto, a lógica modal é usada para estruturar argumentos metafísicos. Porém, a própria escolha do sistema lógico que se pretende adotar exige certas assunções inicias. A relação entre espaços topológicos e a lógica modal proposicional **S4** é conhecida desde 1944. Em 2008, Awodey e Kishida demonstraram que a lógica **FOS4** - modal de primeira ordem - é completa em relação à classe de feixe-interpretações, interpretações fibradas com estrutura topológica. Neste projeto, investigo as propriedades topológicas das semânticas para **S4** e **FOS4**. Tais sistemas, em particular **S4**, são localmente similares ao espaço euclidiano. De acordo com a física contemporânea, o espaço físico pode ser descrito como localmente euclidiano; mais do que isso, parece possível argumentarmos que nosso espaço de representação, lugar em que nossas ideias e conceitos são re-presentados, também é localmente similar ao espaço euclidiano. Tal similaridade local entre nossos espaço de representação, espaço de percepção (físico) e espaço lógico (racional) é meu principal argumento em favor da axiomática para **S4** como caracterizadora do sistema que captura as leis lógicas para noções metafísicas. Tal posição é baseada em uma perspectiva cética-moderada, porque leva em conta a possibilidade de que tais leis existam, mas também reconhece nossas limitações para acessá-las. Procuro argumentar que nossas limitações epistêmicas e linguísticas em relação à completude dos "fatos do mundo" podem ser contornadas pela razão com a admissão de tais leis, a partir do qual podemos, de maneira um pouco mais segura, explorar questões relativas a problemas clássicos sobre o *ser*, *identidade* e a *essência* das coisas.

Palavras-chave: Lógica modal. Lógica S4. Lógica FOS4. Metafísica. Semântica topológica.

Abstract

LIMA, G. M. P. **Topological Semantics for Quantified Modal Logic: a Metaphysical Perspective**. 2021. 402 p. Thesis (Doctoral). Faculty of Philosophy, Languages and Literature, and Human Sciences. Department of Philosophy, University of São Paulo, São Paulo, 2021.

It's usual to analytical philosophers to use, implicitly or explicitly, logical formalization in their arguments, it aims to regulate valid inferences in certain rational contexts; for instance, modal logic is used to represent metaphysical notions. But the very adoption of a logical system demands philosophical assumptions. The relationship between topological spaces and the propositional modal system **S4** is known since 1944. In 2008, Awodey and Kishida demonstrated that the logic **FOS4** - first order modal logic - is complete concerning the class of sheaf-interpretations, bundle interpretations with topological structure. In this project, I investigate the topological properties of those semantics for **S4** and **FOS4**. Such systems, in particular **S4**, are locally similar to Euclidean spaces. According to contemporary physics, physical space can be described as locally Euclidean; moreover, it seems easy to argue that our space of representation, where our ideas and concepts are re-presented, is also locally euclidean. This local similarity between our representation space, perception (physical) space and logical (rational) space is my main argument in favor of **S4**-axioms as the system that captures the logical laws for metaphysical notions. Such a position is based on a skeptical-moderate perspective because it takes into account the possibility that those laws exist, but it also recognizes our limited ability to access them. I seek to argue that ours epistemic and linguistic limitations to the fullness of the "facts of the world" can be circumvented by reasoning, with the admission of those laws, from which it's possible to explore, with a little more security, questions concerning classical problems about *being*, *identity* and the *essence* of things.

Keywords: Modal logic. S4 logic. FOS4 logic. Metaphysics. Topological semantics.

Sumário

Introdução

A pergunta socrática "O que é ...?" é, talvez, a ideia que mais se aproxima de uma noção comum a respeito da *prática filosófica*, na medida em que esta indagação reflete a inquietude a respeito da natureza do mundo que nos é imposto, sem solicitação, ao nascermos. A dúvida a respeito da natureza do *ser*, como substantivo que denota algo, ou como verbo que parece impor sua existência, já que *é*, está nos alicerces da tradição filosófica, desde seu nascimento, e continua a ser combustível para desdobramentos diversos em suas reflexões. Estando o *ser* no fundamento de todo o discurso, e portanto sua compreensão sendo necessária para toda e qualquer ciência, entendida como conhecimento sobre particulares, seria na *metafísica* que deveríamos nos fiar, como condutora, nas reflexões a respeito das fontes primordiais do conhecimento das coisas. Sendo assim, qualquer aventura *ontológica* que procure desbravar todas as múltiplas possibilidades de existência embasa-se numa lógica muito particular que visa compreender o *ser* na sua mais completa generalidade.

Em face dessas constatações, parece legítimo propiciar um ambiente de debate seguro no qual as fronteiras argumentativas sejam conhecidas. Esta prática, comum à tradição da filosofia analítica, pode ser descrita como sendo o ato de exibir um sistema (lógico) formal que captura o funcionamento racional de certas noções e conceitos de determinado discurso, possibilitando a formalização de argumentos, de maneira que os avanços das últimas décadas da lógica formal matemática possam ser incorporados na discussão filosófica, na medida em que são instrumentos para o desvelamento de certas noções elementares (axiomas ou postulados) que subjazem a todo e qualquer discurso (pois todo conteúdo discursivo se baseia em crenças iniciais), guiando a realização de inferências válidas na análise dos conceitos envolvidos no discurso - portanto uma valorização do que pode ser analiticamente demonstrado.

Assumindo que o conhecimento metafísico, por sua natureza transcendental, não possa ser reduzido a puras noções formais, seria justificada a crença de que certas *verdades* não possam ser, portanto, reduzidas ao puro logicismo. Por isso, desejo sustentar que se for admitido que algumas noções de necessidade são distintas entre si, então aquela que refere-se à necessidade metafísica, ou seja, que depende da realidade primordial das *coisas-por-si-mesmas*, é melhor representada pelo contexto do sistema lógico modal, já que esse expande os limites da lógica clássica ao regular, racionalmente, a relação entre noções filosóficas como contingência e necessidade, por exemplo[1].

[1] Portanto, é uma defesa de uma "metafísica clássica", comprometida com um "mundo" sem vagueza, consistente e com identidade definida - ou seja, uma idealização teorética. Logo, é aquilo que posso considerar uma *metafísica clássica científica*, em contraposição a uma "metafísica especulativa": ambas

Todavia, parece não ser conveniente contentar-se com a exibição de formalismos matemáticos para o estabelecimento, ou uso, de um sistema lógico modal, utilizado como pano de fundo para a operação de argumentos filosófico-metafísicos; na verdade, tal tese pode ser sustentada para o uso de qualquer sistema lógico que procure ser norteador de algum contexto racional. Há um motivo para isso: a abstração de um sistema sintático de cálculo - baseado na ideia leibniziana de um *calculus ratiocinator* - capaz de verificar a validade de argumentos com a manipulação de símbolos destituídos de significados, apesar de sua utilidade, é incapaz de capturar a exigência - profundamente humana - da ação da intuição. É essa crença que motiva a discussão, neste trabalho, de uma semântica topólógica para a lógica modal quantificada, discussão essa que pode ser justificada por dois pontos principais.

Primeiramente, as noções semânticas de *verdade*, *consequência lógica* e *validade* são mais "naturais" do que aquelas que envolvem noções como *teorema*, *dedução* ou *derivação*, essas sintáticas[2]; sendo assim, a aparente naturalidade de tais noções são um indício que nos ajuda a confiar a elas o papel de reguladoras na busca por um sistema lógico que reflita certo contexto racional, ao invés da pura abstração manipuladora de signos que, mesmo que pragmaticamente útil, pode deixar escapar certas dimensões "intuitivas" da intelecção humana.

Em segundo lugar, embora a semântica de Kripke, que atingiu certo *status standard* de aplicação, seja uma poderosa ferramenta para o estudo semântico de sistemas modais, ela não escapa de diversas críticas, como a imposição *ad hoc* de um substrato no qual uma relação, não muito bem explicada, se dá entre mundos possíveis.

Argumento aqui que se considerarmos que a semântica para um sistema formal possa funcionar como uma bússola para nossa intuição a respeito de noções lógicas, essa estrutura deve possuir certas características evidentes e fortemente intuitivas, ao mesmo tempo maleáveis, já que desejamos uma pluralidade de estruturas para representar uma possível pluralidade de sistemas lógicos. Por isso, procuro justificar que "noções geométricas primitivas" podem cumprir esse papel, na medida em que estão relacionadas, como espaciais, com as noções mais básicas pelas quais "capturamos" o mundo que está fora de nós (sujeito cognoscente); essas noções geométricas primitivas são bem encapsuladas, acredito, por noções topológicas.

Portanto, reconhecendo a importância filosófica de questões referentes ao *ser*, à natureza da existência dos indivíduos, como necessários ou contingentes, e portanto sobre

---

com mesmo valor, mas a primeira, embora limitada em sua inquirição, possui proposições cuja confiança (científica), espero, ser mais relevante do que a confiança nas proposições da segunda, resultado esse dependente do "uso" da teoria metafísica em questão.

[2] Por serem mais naturais, utilizarem signos usuais da linguagem e utilizados no "dia-a-dia", facilitando assim a compreensão *sobre* o que se fala. Obviamente, noções semânticas não têm confiabilidade maior em sua justificação do que noções sintáticas, embora sejam mais facilmente inteligíveis - em certa medida, até intuídos.

as reflexões a respeito do ponto primordial que determina a individualidade dos indivíduos, ou seja, daquilo que faz algo *ser-aquilo-que-é*, acredito na relevância em explicitar uma estrutura semântica, de apelo geométrico-intuitivo, que possa servir de apoio à discussão filosófica, na medida em que ela explicita, de maneira singular - por seu apelo "espacial" - quais deveriam ser as características principais de um sistema lógico que reflita a natureza da necessidade (possibilidade) metafísica, do conceito de existência e do tratamento da identidade dos indivíduos, peças básicas para a construção de argumentos metafísico-ontológicos.

No primeiro capítulo procurarei delinear certas hipóteses que sustentam minha argumentação e do qual depende, em certa medida, a defesa que faço neste trabalho, embora momentânea, da axiomática para **S4** para "explicitar" a *forma* das verdades metafísicas, assim como justifico os limites do que seria possível afirmarmos sobre tais "verdades".

Nos capítulos dois e três procuro discutir noções formais elementares da lógica modal, assim como discutir parte do histórico de desenvolvimento da *metafísica* como ciência, em especial, dando os contornos para os debates a partir da tradição analítica; porém, não perco de vista alguns aspectos da "tradição", na medida em que desejo mostrar como a composição de várias interpretações ou visões sobre "os fatos do mundo" podem nos ajudar a modelar as facetas que compõem o quadro interpretativo que nos auxilia a entendê-lo.

Já no capítulo quatro procuro evidenciar de que maneira podemos reconstruir *noções lógicas* utilizando *re-presentações* (tornar novamente presente) mentais, de maneira a construir imageticamente relações lógicas, baseados em noções intuitivas que possuímos do espaço, já que dependemos delas para embasar a construção de nossas representações mentais complexas, assim como a compreensão e codificação do espaço que "nos cerca". Com isso, pretendo justificar uma tripartição "espacial"[3] necessária para nos entendermos, como sujeitos, no mundo: **espaço físico**, **espaço representacional** e **espaço lógico**[4]. Se desejarmos falar sobre a *meta*-física, então tal triangulação pode trazer certo método para a investigação filosófica, a partir de uma posição relativamente cética sobre a possibilidade

[3] Aqui, o termo *espaço* empresta sua função usual na linguagem comum, carregando certa concretude. Porém, nenhum destes "espaços" são entidades concretas; em diferentes níveis eles representam lugares de especificidades distintas para que aloquemos 1. coisas exteriores à percepção do sujeito, 2. nossos pensamentos e representações (mentais), conteúdos individuais e resultado, no sujeito, da ação do *logos* e 3. estrutura que norteia o funcionamento da racionalidade coletiva.

[4] Há várias relações de proximidade entre o "espaço físico" e o "representacional", mas a principal diferença é que enquanto o primeiro é *em*, o segundo é *no*, ou seja, aquele que tem consciência apercebe-se "em" um espaço físico (fora), mas tem consciência dele, e de si, "no" espaço de representação (dentro). Ambos são transpassados por um fator normativo, provavelmente convencionado, que é o da teoria euclidiana de representação do espaço e das formas. Tal convenção não é aleatória, acredito, porém não existe uma relação "essencial" entre a teoria euclidiana, como teoria geométrica, e a natureza intrínseca do espaço. Um estudo detalhado, embora não em plena conformidade com a forma com a qual trato alguns dos conceitos de "espaço" neste trabalho, pode ser encontrado em (CARNAP, 1922)

de *afirmarmos* conhecimentos sobre enunciados metafísicos.

No capítulo cinco resgato a construção dos modelos topo-canônicos para as lógicas modais proposicionais **S4** e **S5**. A partir deles já estabeleço uma contribuição formal deste trabalho ao analisar algumas características elementares destes espaços topológicos. Por exemplo, sabemos que a lógica **S4** é fortemente completa em relação à classe dos espaços métricos denso-em-si-mesmos (KREMER, 2013)[5], porém, há diversos espaços métricos como esse que localmente possuem algumas propriedades topológicas distintas (logo, não são homeomórficos)[6]. Ao analisar a estrutura do modelo topo $S4$-canônico, apresento uma segunda contribuição; enquanto (TARSKI; MCKINSEY, 1944) demonstraram que toda teoria $S4$-consistente é completa em relação a algum espaço topológico, por meio das álgebras de interior, (BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2007) demonstraram a completude construindo o modelo topo-canônico, porém, não exibiram a métrica que *gera* tal espaço métrico, métrica essa que exibo no capítulo quatro.

No capítulo seis reconstruo o núcleo da tese (KISHIDA, 2011), em que é demonstrada a completude de **FOS4** em relação à classe de feixe-interpretações. Em epecial, discuto de que forma a teoria das contrapartes de David Lewis aparece na interpretação dessa lógica, conforme demonstrado por Kishida.

Por fim, para poder utilizar minha argumentação em relação a uma lógica modal de primeira ordem - com o intuito de nela interpretar noções metafísicas -, similar ao que foi realizado no capítulo quatro com a lógica modal proposicional, eu precisaria estudar as propriedades topológicas locais da lógica **FOS4**; para isso, como em (KISHIDA, 2011) a completude não é demonstrada a partir da construção do modelo canônico, utilizo o capítulo sete para, a partir da tese de Kishida, construir o modelo topo $FOS4$-canônico. De fato, com esta construção, consigo uma estrutura canônica (topológica) que interpreta uma linguagem modal quantificada (de primeira ordem), no qual posso repetir o estudo de propriedades topológicas locais, como realizado no modelo topo $S4$-canônico. Embora há publicações recentes estudando a completude da lógica **FOS4** em relação a diversos tipos de estruturas determinadas - ver (KREMER, 2014) ou (LANDO, 2014), exibo neste capítulo a construção do *modelo canônico* para **FOS4**.

Porém, considerando certa limitação filosófica-interpretativa do modelo topo $FOS4$-canônico, procuro elaborar um "experimento intelectual" para construir uma segunda estrutura interpretativa $FOS4$-completa, no qual seja possível que nem todos os objetos possuam *contrapartes* "existentes" em todos os *mundos possíveis*. Com isso, tento esboçar uma maneira de formalizarmos uma noção mais "fraca" de necessidade metafísica.

[5] Trabalho que melhorou os resultados de Rasiowa e Sikorski, que mostrou a completude de **S4** em relação a espaços métricos separáveis denso-em-si-mesmos.

[6] Por exemplo, a completude de **S4** no conjunto de Cantor ou em um intervalo fechado, limitado e não desconexo da reta real, por exemplo

1 Premissas

Neste trabalho, tratarei de algumas reflexões sobre problemas metafísicos fundamentais, evidenciando como um sistema da lógica modal quantificada pode ajudar na análise de argumentos filosóficos. Todavia, meu intuito é discutir como apresentar uma estrutura semântica - de natureza geométrica - que represente a noção de consequência lógica nesse sistema; a tese central para fundamentar tal estratégia é a de que noções geométricas primitivas (topológicas) devem ser usadas como substrato para guiar, de maneira intuitiva - dado seu apelo geométrico-espacial, a análise a respeito dos fundamentos lógicos desse sistema, evidenciando a relação entre tais fundamentos e os problemas filosóficos a eles relacionados. Tal abordagem inspira-se na crença de Henri Pincaré (1854 - 1912): "É por lógica que provamos, mas pela intuição que descobrimos."(p. 746) (POINCARÉ, 2001).

Para realizar tal tarefa adotarei três princípios filosóficos como guias. O primeiro deles é a tese aristotélica de que a virtude reside no meio termo entre o excesso e a deficiência, em outras palavras, procurarei fugir de posições extremas, acomodando-nos em um movimento que procure harmonizar os aspectos coerentes de posições contrárias, i.e., reconhecer o movimento dialético da razão (Fitche/Hegel) que encontra, entre duas posições contrárias - *tese* e *antítese* - a *síntese* que mais se aproxima da *verdade*.

O segundo, que é uma posição natural em vista da anterior, se baseia no *princípio de tolerância* proposto por Rudolf Carnap (1891 - 1970), formulado em (CARNAP, 2000):

> "Quando era perguntado sobre qual posição filosófica eu mantinha, era incapaz de responder. Eu apenas dizia que minha maneira geral de pensar era próxima à dos físicos e daqueles filósofos que estavam em contato com o trabalho científico. Somente gradualmente, no decorrer dos anos, que reconheci claramente que minha forma de pensar era neutra em relação às tradicionais controvérsias, i.e., realismo *versus* idealismo, nominalismo *versus* platonismo (realismo dos universais), materialismo *versus* espiritualismo, e assim por diante."(p. 258 - tradução livre).

Ou seja, defendo posições a partir de certas pressupostos, esperando demonstrar a coerência dos argumentos, mas entendendo que para a admissão da validade da conclusão necessita-se da aceitação dos pressupostos como válidos; porém, mesmo sem tal aceitação, o debate entre visões contrárias, o entendimento dos pressupostos assumidos por essas visões, exigência da prática filosófica, é salutar.

Por fim, me inspiro em um princípio pragmático praticado por Charles S. Peirce (1839 - 1914), subsumido por Peter Kunzmann em (KUNZMANN; BURKARD; WIED-

MANN, 2016):

> "Os resultados [da *experimentação intelectual*] assim adquiridos devem ser confirmados por um *processo comunicacional* de sujeitos que agem e pesquisam em conjunto. É dessa forma que a verdade vai se constituindo como um acordo entre todos os membros de uma “comunidade infinita de pesquisadores."(p. 167 - tradução livre).

Neste capítulo pretendo ter esses princípios como força-motriz para explicitar os pressupostos ou hipóteses que sustentam este trabalho.

1.1 Metafísica

Muitos autores apontam o nascimento da *metafísica* junto ao desenvolvimento da doutrina eleata. Segundo David Sedley (em *Parmênides e Melisso*, (LONG, 2008)), no poema escrito por Parmênides no século V a.C., o eleata narra sua jornada em direção à Mansão da Noite, simbolizando o distanciamento do mundo fenomênico. Lá, uma Deusa fará a exposição filosófica de seus argumentos em duas partes: a primeira, que corresponde à Via da Verdade, e a segunda parte, correspondente à Via do Parecer. É no primeiro momento do poema que a Deusa apresentará para Parmênides as duas vias para a verdade: a do que "necessariamente é" e a do que "necessariamente não é"[1]; em seguida, argumenta indiretamente a favor da primeira.

Como apontado por Sedley, "*esti*" é o verbo grego correspondente ao "é" da argumentação no poema, e ele não exige, na sentença, um complemento para que esta tenha significado; porém, *esti* é um verbo incompleto, na medida em que o que é (esti), é algo. Sendo assim, apesar de ser possível interpretarmos "é" como "existe", Parmênides, em seu poema, não se refere à noção particular de existência, como podemos ser levados a interpretar com o uso do verbo "existir" em uma leitura moderna do verbo 'ser'. Sendo assim, o uso da tradução para *esti* (existe), na interpretação de Parmênides, deve ser cauteloso. Para melhor compreensão do uso de *esti* na descrição "do-que-é", a Deusa apresenta uma lista de seus predicados: o *ser* é um não-gerado e imperecível, um todo único, imóvel, perfeito e equilibrado.

Não é de meu interesse nessa investigação me aprofundar pormenorizadamente na análise do poema de Parmênides, muito menos em discutir suas interpretações; basta apontar para duas coisas: 1) A relevância do problema do *ser*, i.e., aquilo de que se pode dizer que é (algo) da maneira mais geral e inespecífica. 2) A importância do distanciamento do mundo físico, a Via do Parecer, para nos aproximarmos da *verdade* por meio da razão. O que se conhece do poema de Parmênides gira em torno desta problemática, evidenciando, segundo argumentado pela Deusa, a ideia primordial de que o que é, "é necessariamente", e de que a contingência percebida pelo homem só é desta maneira concebida devido ao mundo fenomênico ilusório. É tarefa do filósofo, na procura por conhecer a coisa "pelo que ela é", utilizar-se da razão para evitar o engano causado pelas aparências. Em última instância, podemos afirmar que este é o problema nuclear da metafísica.

Obviamente, a teoria exposta por Parmênides[2] terá repercussão em seus sucessores.

[1] Posteriormente, a Deusa apresenta a via para o 'que contingencialmente é'. Porém, tal via seria ilusória – pertencente à Via do Parecer. Ela funciona, na argumentação, apenas para realçar a debilidade de aceitação humana da condição do *ser*, devido seu mergulho no mundo fenomênico e, portanto, da confusão entre o *ser* e o *não-ser* que isso acarreta, gerando a ideia da contingência do *ser* e de sua instabilidade.

[2] Apesar de outros pré-socráticos terem tratado anteriormente do problema do *ser*, do que se conhece, Parmênides inaugurou uma forma nova e radical para lidar com tal questão.

O problema da relação do *uno* com o *múltiplo*, o problema do movimento e, como discutido no diálogo *Parmênides* de Platão, que relata um diálogo entre Zenão, Sócrates e Parmênides, as objeções que as teses eleatas poderiam levantar ao *eidos* platônico mostram a relevância que estas ideias apresentadas pelo filósofo de Eleia irão perpetrar por séculos de inquirição filosófica. Como apontado por Paul Ricoeur em (RICOEUR, 2014), é muito provável que o estagirita esteja altamente implicado na última fase do platonismo, portanto, neste diálogo. Assim, apesar das diferenças entre Aristóteles e Platão[3], não é de se espantar, pelo conteúdo deste diálogo, o quanto a *Filosofia Primeira* (metafísica) tem caráter central na construção da filosofia aristotélica.

No livro de Ricoeur anteriormente citado, o autor segue uma reconstrução genética da obra Aristotélica, como sugerida por W. Jaeger[4], na qual ela deve ser estudada não como um todo sistemático, como apresentado tradicionalmente desde a antiguidade, mas seguindo a evolução histórica do amadurecimento das ideias filosóficas de Aristóteles. Nessa perspectiva, referente ao problema do *ser* (na metafísica aristotélica), Ricoeur afirma:

> "O problema do ser, antes do remanejamento provocado pela inserção da teoria da substância (livros *Z*, *H*, e θ da Metafísica), é saber se há uma realidade suprassensível. A questão é platônica em sua resposta, se considerarmos que a teologia (astral ou não) toma o lugar da teoria das Ideias; assim, a metafísica é uma "teologia" (e mais precisamente uma "teologia astral"). Procurar o ser é procurar um ser (ou seres). A introdução da teoria da substância vai reequilibrar o sentido do ser pela incorporação à filosofia de autênticos seres sensíveis. Ao mesmo tempo, a noção de ser deverá ser recuada para além da bifurcação entre o sensível e o suprassensível, e a metafísica será uma ontologia. Portanto, pela perspectiva histórica, o ponto terminal é o que se considerava como o ponto inicial pela perspectiva sistemática, ou seja, a famosa teoria dos "sentidos múltiplos do ser" (*E*2–4), dominada pela noção de "o ser enquanto ser", totalmente dissociada da noção de um ser supremo, suprassensível. É aí que se deverá procurar a derradeira e frágil síntese do aristotelismo: numa espécie de "fenomenologia ontológica", nas palavras de W. Jaeger; essa elucidação das múltiplas significações segundo as quais o ser se diz permitirá que a teoria da substância seja integrada na filosofia primeira."(pp. 34 - 35)

Platão, parece legítimo afirmar, foi o filósofo capaz de sistematizar os problemas metafísicos ao apresentar em sua teoria do *eidos* uma legitimação para o ser (ou seres)

[3] Como não conhecemos todas as obras de Aristóteles, principalmente as de sua juventude, podemos apenas afirmar sobre as diferenças constatadas no pensamento de ambos os autores ao analisarmos a obra que conhecemos de sua maturidade, portanto, do pensamento aristotélico já desenvolvido enquanto afastado da influência platônica.

[4] Apesar de algumas críticas quanto ao caráter geral da concepção histórica adotada, a saber, que compreende Aristóteles indo de uma fase metafísica, inicialmente, para uma fase empírica.

suprassensíveis. Porém, é Aristóteles quem trará esses seres transcendentes, já que povoam o "mundo das ideias", para uma realidade imanente, por meio de sua teoria das formas (ANTISERI; REALE, 2003a).

Em Aristóteles, a metafísica encontra quatro definições: I. A ciência sobre as causas ou princípios supremos; II. A ciência do ser enquanto ser; III. A ciência da substância (*ousía*) e IV. A ciência sobre a substância suprassensível e Deus, ou teologia. Os tipos de causas (formal, material, eficiente e final) defendidos por Aristóteles terão papel central no enfrentamento da metafísica a partir das questões referentes à interpretação de I. Para Aristóteles, a tese eleata da unicidade do *ser*, cuja discussão é um dos objetivos a serem alcançados pela metafísica, segundo II, pode ser destruída ao se compreender os múltiplos significados que o *ser* possui; são eles: o ser em si, o ser como ato e como potência, o ser como acidente e o ser como verdadeiro (não-ser como falso).

Enquanto do ser como verdadeiro, ou do não-ser como falso, é a lógica que se ocupa, e como pela contingencialidade do ser acidental não é possível existir uma ciência sobre ele – que apresenta-se somente de modo casual e fortuito – a metafísica se ocupa do ser em si e do ser como ato e como potência. Ou seja, é sobre estes significados do *ser* que a metafísica desenvolverá uma ciência sobre o ser. Sendo assim, a Filosofia Primeira se ocupa com as realidades que estão para além do mundo físico, mas que sustentam essa "realidade"; Aristóteles considera, portanto, que a metafísica é a ciência mais elevada, por não estar ligada a necessidades materiais, cujo objetivo é investigar os primeiros princípios.

Segundo (ANTISERI; REALE, 2003a), sabemos que

> "Aristóteles introduz sua grande reforma, que implica na superação total da ontologia eleática; o ser não tem apenas um, mas múltiplos significados. Tudo aquilo que não é puro nada encontra-se a pleno título na esfera do ser, seja uma realidade sensível, seja uma realidade inteligível."(p. 186)

Com sua teoria das formas e causas, Aristóteles é capaz de conectar as realidades sensível e suprassensível, na medida em que a matéria é causa do ser, sendo causa material, e a forma, ou ideia, causa formal. Todavia, a fisicalidade do *ser* (substância) não é imperativa na metafísica aristotélica, pois há o conceito de *sinolo*, composto de matéria e forma, que fornecem, juntas, a substancialidade do indivíduo. É a forma que faz algo ser o que *aquilo é*, portanto, embora no sentido empírico é o indivíduo (sinolo) que é substância, Aristóteles deixa claro que a forma ou essência de cada coisa também é substância, aliás, *substância primeira*. Portanto, há substâncias não materiais (suprassensíveis) e mesmo estas (as formas), não são transcendentes ao mundo, como no *Topus Uranus* platônico, mas imanentes a ele, na medida em que são causa formal de seres materiais.

As consequências da problemática sobre o *ser*, sobre a substância (e a essência) na obra aristotélica se repercutirão por toda história da filosofia. Na escolástica reflete, por exemplo, no problema dos universais[5]; nessa época, embora Aristóteles tenha sido lido através de lentes "neoplatônicas", o que influenciaria no debate desde Santo Agostinho até Tomás de Aquino a respeito da multiplicidade das Ideias em Deus, por exemplo, é evidente a possibilidade de interpretações diversas da obra aristotélica (a partir da interação de partes da obra), combinada com o platonismo, a fim de fundir sincreticamente a teologia cristã com a filosofia grega, ou melhor, construir sistemas filosóficos que, olhando para os sábios do passado, fossem capazes de legitimar a verdadeira fé, tendo em vista que Aristóteles é obrigado, pela sua teoria das causas, a afirmar a existência de um ser imóvel, eterno e incorruptível, causa de todos os movimentos, porém ele mesmo não movimentado por nada, ou seja, a teologia cristã seria capaz de determinar a contraparte de *Deus* na filosofia aristotélica: o Primeiro Motor.

No período em que a maior parte das universidades européias estava sobre a administração de grupos religiosos, a produção filosófica se desenvolveu, em grande parte, na esteira da procura por soluções filosóficas para os problemas da teologia cristã. Com o ressurgimento tardio da *física* aristotélica na Europa (via cultura árabe), principalmente com seu estudo nas universidades britânicas, constata-se o florescimento de filósofos interessados por questões ligadas ao mundo sensível; vemos assim o preparo para o alvorecer do racionalismo e do empirismo[6]. Como delineado por (GILSON, 2013), tal movimento foi gradual e fundamental para as bases do desenvolvimento da matemática e ciências naturais na Modernidade. Portanto, é nesse contexto de busca por uma ruptura do pensamento medieval, na tentativa de se afastar dos métodos escolásticos e imprimir a importância da razão, da experiência, do método e do sujeito no desenvolvimento da filosofia e das ciências, características fundamentais para a Modernidade, que a investigação filosófica muda de direção.

Se até então a investigação filosófica se interessava por perguntas como: *Algo existe? O que é?* e *O ser é necessário?*, a Modernidade se interessa por compreender como o sujeito cognoscente é capaz de conhecer: *Como garantir, se possível, a existência daquilo que conhecemos? O que conhecemos? Como conhecemos?* e *Como podemos determinar a correção ou adequação de nosso pensamento, ou o que nos é conhecido, com o objeto ou o*

[5] Um universal é uma propriedade comum compartilhada por diversos indivíduos. Por exemplo, todos os objetos circulares instanciam a propriedade (universal) 'ser circular'. O "problema dos universais" opunha realistas (Platão), para os quais os universais constituíam, de fato, algo – como a Ideia (no sentido platônico) do círculo, e os nominalistas, para os quais os universais se referiam apenas a *nomes*, ou expressões linguísticas que se referiram a um conceito abstrato, puramente formal e sem realidade. Portanto, enquanto para realistas as espécies, por exemplo, admitiam certo status ontológico – o de *serem algo*, para nominalistas, uma *espécie* era apenas uma palavra utilizada para fazermos agrupamento de certos indivíduos a partir de certas características compartilhadas.

[6] Obviamente, o ressurgimento de parte da obra aristotélica foi apenas mais um motivador para a guinada do pensamento filosófico, culminando com o fim do período escolástico. Há razões intelectuais, culturais, políticas e religiosas para isso.

ser a se conhecer?. Destarte, a investigação filosófica, que até então estava centrada em questões relacionadas às coisas, ao mundo, portanto voltada para investigações metafísicas, ontológicas e teológicas, na Modernidade procura compreender como se dá o conhecimento. As questões epistemológicas e a teoria do conhecimento ganham destaque, pois centram se no sujeito e na determinação de como este "conhece" e se relaciona com o mundo[7].

A crença no poder da razão e no sujeito, como concebido pela Modernidade, encontrará nos ideais iluministas o seu auge, na ideia de que o homem se emanciparia por meio do conhecimento e do progresso causado pelo uso de sua racionalidade e da técnica[8]. Porém, será precisamente em sua reflexão sobre o sujeito e seu mecanismo de apreensão do mundo, que Kant (sec. XVIII) impõe limites para a razão e, com isso, fundamenta sua crítica à metafísica.

Na *Crítica da Razão Pura* (CRP) (KANT, 2002), Kant conclui[9] que o conhecimento do sujeito está restrito aos fenômenos, i.e., o sujeito cognoscente tem acesso apenas ao fenômeno, sendo a ele impossível obter conhecimento direto daquilo que é sua origem, ou seja, da *coisa-em-si*. Logo, se o sujeito, que é o centro do conhecimento – pois é ele quem conhece – não é capaz de ter acesso à coisa-em-si, o conhecimento metafísico, por consequência, é impossível de ser adquirido a partir dos fundamentos de todas as metafísicas que já haviam sido desenvolvidas, conclui Kant[10]. Embora na *Crítica da Razão Prática* Kant seja capaz de recolocar as questões a respeito da imortalidade da alma, da liberdade humana e da existência de Deus, próprias à metafísica, ele o faz pela necessidade de discutir problemas morais e éticos. E mesmo tal recuperação não se dá pelo uso da razão, pois tais questões – ou suas respostas – são colocadas como pressupostos que possibilitam a ele explicitar a lei moral e sua prática. Sendo assim, esses problemas metafísicos são

7 Há novamente uma mudança de paradigma na prática filosófica, à esteira da revolução científica vivenciada a partir do século XVIII. Pode-se distinguir, portanto, segundo E. Tugendhat, três grandes movimentos (ou paradigmas) na prática filosófica: o paradigma do ser, o paradigma do conhecimento e o paradigma da linguagem. É muito provável, acredito, que a discussão, orientada por apenas um desses paradigmas, seja de menor valor do que aquela capaz de compreender a necessidade de interação desses três fatores para a compreensão da realidade - pelo menos no limite em que essa realidade possa ser conhecida pelo homem.

8 Novamente, aqui não estou interessado em analisar detalhadamente as questões históricas e filosóficas a respeito do desenlace das noções esboçadas nestes parágrafos. Pretendo, sim, evidenciar uma cadeia histórica que mostra, de uma maneira geral, como a metafísica, como *corpus* filosófico, se desenvolveu e foi compreendida ao longo da história da filosofia ocidental.

9 Sobre a crítica de Kant à metafísica, nos apoiamos no artigo de Michelle Grier, *Kant's Critique of Metaphysics*, (GRIER, 2018)

10 Nos *Prolegómenos a Toda a Metafísica Futura* (KANT, 2008), Kant argumenta a favor de seu projeto de "crítica", um desdobrar da crítica *à* metafísica de David Hume. Segundo Kant, somente após a solução do que chama de *Antinomias da Razão*, e do perfeito entendimento sobre o conhecimento humano (problemas sobre a intuição, conhecimento *a priori* etc), que pode-se considerar possível o emprendimento da metafísica (vista como ciência). "A minha intenção é convencer todos os que creêm na utilidade de se ocuparem de metafísica de que lhes é absolutamente necessário interromper o seu trabalho, considerar como inexistente tudo o que se fez até agora e levantar antes de tudo a questão: de se uma coisa como a metafísica é simplesmente possível."(KANT, 2008) - ver conclusão deste trabalho.

respondidos por Kant por postulados, para que ele possa desenvolver sua teoria ética, e não porque fosse capaz de resolvê-los, por meio de argumentos, à partir dos elementos fundantes de sua filosofia.

Todavia, a Modernidade não testemunhou apenas críticas à metafísica, alguns filósofos procuraram mostrar sua legitimidade *qua* ciência filosófica. Leibniz (1646 - 1716), por exemplo, crítico da *nova filosofia*, procura restaurar os problemas da *philosophia perennis*[11], reconciliando-os com os novos conhecimentos sobre o mundo físico advindos da *philosophia novi* ((LEIBNIZ, 2004) e (LEIBNIZ, 2016)). Ele reconhece as dificuldades do discurso metafísico, apontando inclusive para questões objetivas a tal respeito nas obras de Platão, Aristóteles e de escolásticos ((ANTISERI; REALE, 2003b)). Porém, afirma a impossibilidade de reduzir todas as causas a explicações causais meramente físicas. Para ele, as questões: 'Por que há o *ser*?' e 'Por que o que é, é assim, e não de outra forma?' são necessariamente metafísicas e só podem ser resolvidas por uma investigação de caráter metafísico. Por isso, para a investigação dessas questões, precisamos estar munidos de ferramentas que certas filosofias, como a cartesiana, não são capazes de fornecer. Assim, conclui que existem planos distintos em que tanto a *philosophia novi* quanto a *philosophia perennis* operam; por isso mesmo, uma não seria oponente da outra, mas ambas trabalhariam para propiciar respostas a perguntas que a outra não poderia fornecer. Para Leibniz, apesar da grande utilidade dos novos sistemas, por serem capazes de fornecer explicações precisas sobre a realidade dos fenômenos físicos, por exemplo, somente uma explicação filosófica (mais geral) da realidade poderia fornecer as causas para aquilo que as explicações mecânicas não são capazes, i.e., para as questões de natureza metafísica[12].

Assim, será com a articulação entre o plano da explicação filosófica geral e o plano da explicação científica particular que Leibniz mediará o ponto de vista antigo com o moderno, pois acredita que suas *formas substanciais* fornecem uma explicação global, portanto mais geral, segundo uma ótica diferente daquela propiciada por muitos filósofos modernos. Para justificar tal posição, Leibniz apontará que extensão, figura, número e movimento, noções articuladoras da filosofia cartesiana, pertencem apenas ao plano da aparência, logo, qualquer explicação que se pretenda fundacional (para além do sensível) é de natureza metafísica, pois mesmos os princípios reguladores das explicações causais físicas são eles mesmos conceitos que, em última instância, pertenceriam ao plano físico.

Leibniz retoma a noção de substância, usando o termo *enteléquia*, já utilizado por Aristóteles, para representar a substância que tem em si mesma sua determinação e perfeição

[11] Termo utilizado para se referir a conceitos filosóficos fundamentais como "forma substancial", que haviam sido colocados em xeque pela revolução científica iniciada por Bacon e Descartes.

[12] Convém lembrar que Leibniz, quase concomitantemente a Isaac Newton (1643 - 1727), desenvolveu os alicerces para o cálculo. Porém, a abordagem de Newton era mais pragmática e diretamente relacionada/interpretada pelo significado físico dos conceito envolvidos. Kant, posteriormente, adotou o modelo espacial da mecânica proposta por Newton, baseada no cálculo das fluxões, como uma descrição objetiva e precisa do mundo físico.

essencial, i.e., sua finalidade interior. Desenvolve também sua teoria sobre as mônadas (unidade ou aquilo que é uno), termo utilizado para representar as substâncias-forças primitivas em sua metafísica. Dessa forma, é capaz de construir um sistema filosófico-metafísico que compreende que em instâncias últimas, explicações meramente físicas ou fenomênicas são incapazes de fundamentar a descrição da realidade. Com a adoção de dois princípios[13] metafísicos, a filosofia leibniziana é capaz de fornecer um modo de explicar a individualidade de cada substância, a variedade infinita de substâncias e a harmonia do universo.

Em Leibniz, Deus é o ser necessário; para provar tal proposição, utiliza-se do argumento ontológico[14] e das noções de essência e existência, já que em Deus, tais noções coincidiriam. Assim, Deus é o único ser que, sendo possível, existe. Além disto, Deus é fonte das essências e das existências; as essências na filosofia leibniziana dizem o que as coisas "são", e são essências tudo aquilo que pode ser pensável sem que ocorra contradição; digamos então que essências são os possíveis, e estes são infinitos em número. Porém, alguns, apesar de serem possíveis, não são co-possíveis junto a outros, i.e., mundos possíveis são completados por possíveis que, para além de não gerarem contradição, são co-possíveis entre si. Todos esses mundos podem ser realizados por Deus, mas Deus só realiza um deles, o melhor deles, promovendo-o à existência.

Tal descrição permite compreender uma distinção feita por Leibniz entre *verdades da razão* e *verdades de fato*. O conjunto das verdades na mente de Deus constitui as verdades da razão; as verdades da razão são aquelas cujo oposto são impossíveis, no sentido clássico de impossibilidade, ou seja, se fundamentam nos princípios de identidade, não-contradição e do terceiro excluído. Já as verdades de fato referem-se aos acontecimentos contingentes, sendo seus opostos não impossíveis. As verdades da matemática, por exemplo, seriam verdades da razão, enquanto a verdade da proposição 'Você está sentado lendo esta frase' seria uma verdade de fato, já que tal afirmação, se verdadeira, não é necessária.

Como a existência das verdades de fato não depende do princípio da não-contradição[15], já que seus opostos também são possíveis, Leibniz precisa arquitetar um princípio que regule tais verdades: o *princípio da razão suficiente*. Segundo tal princípio, tudo o que acontece de fato tem uma *razão que é suficiente para determinar por que aconteceu, e por que aconteceu da forma como aconteceu e não de outra*. Embora seja impossível ao homem determinar a razão suficiente da maioria dos fatos particulares, pois estes dependem, por sua vez, de uma cadeia – talvez infinita – de fatos particulares aos quais o homem não tem acesso, para Deus, que possui o conhecimento de todas as coisas, é possível apontar a razão

[13] 1) Princípio da identidade dos indiscerníveis (substâncias que compartilham as mesmas propriedades são idênticas) e 2) Princípio da razão suficiente.
[14] De maneira resumida: Deus é perfeito. Tudo o que é perfeito necessariamente existe, caso contrário não seria perfeito (lhe faltaria existência). Deus necessariamente existe.
[15] Pois em **S4** nenhuma contradição segue-se de $\Diamond p$ e $\Diamond \neg p$.

suficiente de todas elas. Como o mundo atualizado por Deus foi escolhido por ser o melhor entre todos os possíveis, é o princípio da razão suficiente que "explica o mundo" (mundo atual); tal princípio tem, em Deus, uma escolha moral: a escolha do melhor. A distinção entre verdades da razão e verdade de fato tem, em Leibniz, bases metafísicas. As verdades da razão baseiam-se na natureza da necessidade lógico-metafísica, enquanto as verdades de fato, em Deus, estão ligadas simplesmente à obrigação moral de Deus, por ser Deus, de fazer o melhor. Por isso são verdades contingentes, já que mesmo o conhecimento perfeito de Deus, e sua presciência sobre eles, não é capaz de mudar sua natureza contingente.

Com a metafísica leibniziana temos não só uma tentativa de salvaguardar a inquirição metafísica do ataque de filosofias que são incapazes de compreender a importância destas questões, como um arcabouço de conceitos e noções que, apesar de ressoarem fortemente a linguagem clássica, propiciam uma nova abordagem a problemas que, para alguns, seriam questões filosóficas não mais pertinentes. Se as verdades da razão são verdadeiras em função de sua estrutura lógica, as verdades de fato não podem ser determinadas por questões puramente lógicas; as verdades de fato, segundo Leibniz, dependem do princípio da razão suficiente e da natureza das entidades que envolvem, ou seja, são possibilidades que, a critério de Deus, se atualizam. Como reflexo dessa oposição, Leibniz coloca uma distinção fundamental entre algumas noções de necessidade. Certas verdades são necessárias em virtude da natureza dos conceitos lógicos envolvidos, i.e., ela e sua negação são contraditórias; outras, todavia, não são impossíveis com sua negação e só se caracterizam como verdades necessárias em função da natureza de seus constituintes – são necessidades metafísicas.

É comum encontrarmos a discussão sobre a distinção entre necessidade (possibilidade) metafísica e lógica em argumentos que procuram sustentar, ou criticar, a legitimidade da metafísica como prática filosófica. É evidente que o mundo atual é possível, todavia, não é possível determinar *a priori* se tal disposição das coisas é necessária, pois há limites na operação da racionalidade para determinar o que de fato é possível e o que é necessário[16]. A simples constatação empírica de uma situação não determina sua necessidade, apenas sua possibilidade; inversamente, se tal constatação determina sua possibilidade, ela nada pode assegurar sobre sua necessidade. Porém, parece que existem certas verdades necessárias, ou possíveis, que operam para além do campo lógico, ou seja, sua constatação não é *a priori* e depende da análise de como são, de fato, as coisas envolvidas nessas verdades. Tal análise, que procura compreender de uma maneira ampla e geral como algo "é", é tarefa metafísica; sendo assim, não parece estranho pressupor que exista uma noção de verdade necessária – ou possível – mais ampla que aquela conhecida como necessidade (possibilidade) lógica: a noção de necessidade (possibilidade) metafísica.

[16] Para ampliar este debate, pode-se consultar (SOUJA-JUNIOR, 2021).

Noções lógicas se referem a propriedades formais e relações entre proposições, enquanto noções metafísicas dizem respeito ao ser e seus modos; a constatação de verdades lógicas se refere apenas à forma como o mundo (atual), ou como somos capazes de apreendê-lo racionalmente, é, e como os constituintes destas verdades se relacionam logicamente; verdades metafísicas, por outro lado, são transcendentes e revelam como o mundo *é* ou como *poderia ser* – noções metafísicas não são puramente lógicas, são ontológicas. Enquanto a possibilidade lógica de uma proposição é garantida pela não implicação de uma contradição, a possibilidade metafísica de uma proposição é, na verdade, a possibilidade de um conjunto de situações (estado de coisas), que também podem ser representadas; portanto não se verifica a possibilidade metafísica de uma proposição isoladamente, verifica-se se é possível existir alguma situação em que esta proposição seja o caso. Como colocado por Leibniz, uma proposição é metafisicamente possível se existir pelo menos um "mundo" em que ela é verdadeira.

Mesmo que a diferença conceitual entre necessidade (possibilidade) lógica e metafísica tenha sido muito discutida, pode-se objetar que tal diferença é apenas formal, que as necessidades lógica e metafísica, em extensão, são as mesmas. Contudo, tal objeção não pode ser feita *a priori*, quiçá olhando para o mundo como ele é. Faz-se metafísica ao pensar se algo *é* por necessidade ou contingência; faz-se metafísica ao se ponderar sobre as noções mais básicas que envolvem a realidade: existência, essência, substância, indivíduo e identidade. O recurso à filosofia de Leibniz e às noções de mundos possíveis ou estados de coisas, como discutido, proporciona mecanismos para que possamos tentar compreender tais noções de uma forma mais geral do que aquela adotada ao nos restringirmos a uma análise puramente formal dos termos e seus significados.

Embora seja possível afirmar que a Modernidade e a ciência tenham trazido à humanidade a possibilidade de compreender o mundo por meio do conhecimento (científico) objetivo, a discussão própria sobre o tecido que sustenta o real – e a validade de nosso conhecimento – se dá por meio de uma inquirição que pretenda atingir mais intimamente, as coisas como são em si mesmas, algo que o método científico, isoladamente, não pode fornecer, já que em última instância pode apenas fornecer teorias respaldadas pelo fenômeno, somente[17].

Convém notarmos como Henri Bergson (1859 - 1941) inicia seu artigo *Defining Metaphysics* (BERGSON, 1963), para que possamos ser capazes de ilustrar, com essa ótima descrição, o que foi discutido até aqui:

> "Se compararmos as várias formas de definir a Metafísica e de conceber o absoluto, perceberemos, a despeito de discrepâncias aparentes, que os filósofos concordam em fazer uma profunda distinção entre duas formas de conhecer algo.

[17] Sobre o importante papel da metafísica na busca sobre essa "estrutura do real" (ver também (COSTA-LEITE, 2012))

A primeira implica seguir rodeando-a, a segunda entrando nela. A primeira depende do ponto de vista escolhido e dos símbolos empregados, enquanto a segunda não tem ponto de vista e não exige símbolos. O primeiro tipo de conhecimento dizemos que se limita ao relativo, do segundo tipo, se possível, que está atado ao absoluto."(p. 175 - tradução livre)

1.2 Primeiras Hipóteses: Metafísica, Lógica e Método

Como a análise da história da filosofia evidencia, a reflexão filosófica se debruçou *sobre* noções lógicas e se *utilizou de* noções lógicas ao longo de sua prática. Sendo assim, a linguagem, por meio da qual se filosofa, razão e lógica estão intrinsicamente relacionados[18]. Sobre tal relação existente entre razão, lógica e linguagem, adoto aqui uma posição pragmática muito próxima daquela apresentada por Newton da Costa em seu *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica* (DA-COSTA, 1996). Tal posição parece legitimar a ideia de que a lógica é importante para a construção e análise de qualquer discurso e, por transitividade, para o discurso filosófico. Todavia, não nos preocuparemos com o discurso filosófico de um modo geral: estamos interessados no discurso metafísico, mesmo este sendo analisado em um recorte de toda sua extensão.

Exatamente por isso, tendo aqui a compreender "as lógicas" no sentido plural: Não há UMA lógica, mas muitas. Porém, defendo que ao procurar um sistema lógico (princípios) para fundamentar os raciocínios internos à inquirição sobre o conhecimento metafísico (uma metafísica científica e com grande "graus" de confiança em suas proposições), esses princípios deveriam ser os da lógica clássica combinados com noções intuitivas mais elementares a respeito da nossa percepção do espaço, que regulariam as relações entre necessidade e contingência, como uma interpretação topológica dos operadores modais clássicos $\Box$ e $\Diamond$.

1.2.1 Hipótese Analítica

A partir do século XIX, com a revolução dos fundamentos vivenciada pela matemática, a lógica clássica pode receber, por meio de certas ferramentas de formalização (lógica simbólica), investigações sobre seus princípios. Porém, essas mesmas ferramentas foram capazes de organizar formalmente outros sistemas, que possibilitaram a legitimação de

[18] Entre muitos filósofos e lógicos contemporâneos prevalece a opinião da conceituação da lógica como linguagem. Obviamente, quando tratada em relação a sistemas formais, com suas regras de composição de símbolos e inferência, ela é uma linguagem. Porém, como aponta Oswaldo Chateaubriand em (CHATEAUBRIAND, 2001), "vejo [a lógica] como uma teoria ontológica que é parte de uma teoria sobre as características mais gerais e universais da realidade; do ser enquanto ser"(p. 4), posição esta que se evidencia ao analisarmos as noções envolvendo realidade, verdade e racionalidade, que vêm a tona por meio do escrutínio dos fundamentos de um sistema lógico.

lógicas em que certas leis clássicas não eram verdadeiras - em similitude ao que ocorreu com as geometrias não-euclidianas.

Com o desenvolvimento das ciências naturais, por exemplo, leis básicas da lógica aristotélica , como o *princípio de não-contradição*[19], a *lei da identidade*[20] e a *lei do terceiro excluído*[21], passaram a ser questionadas. As próprias categorias delineadas por Aristóteles mostraram-se inadequadas a certos discursos, tanto que novos sistemas categoriais foram propostos[22] - ver (BENVENISTE, 1966) e (ARISTÓTELES, 2011). A mecânica quântica, as geometrias não-euclidianas, o próprio desenvolvimento das chamadas ciências humanas, como antropologia, sociologia e psicologia, exigiram que certas noções consideradas lógicas, necessárias e universais, fossem encaradas como passíveis de dialetização. A constatação, junto destas novas necessidades, de que outros sistemas formais poderiam ser construídos, e que estes refletiriam formalmente princípios racionais que regulariam tais discursos, evidenciou o caráter relativo/histórico da razão[23].

Como explicitado por Newton da Costa em seu *Ensaio*, a razão se baliza em dois pontos de apoio: o construtivo e o pragmático. Sem a ilusão de uma única lógica verdadeira, todo discurso, seja ele do cotidiano, científico ou filosófico, se organiza por meio de um processo racional que opera, pelos princípios pragmáticos da razão, da seguinte forma:

1. A razão se expressa por meio de uma lógica que lhe é subjacente;
2. Fixado um contexto, tal lógica é única;
3. Fixado o contexto, a lógica escolhida deve ser aquela que melhor se adapta a ele.

Desses pontos[24] segue que, consciente ou inconscientemente, todo indivíduo que profere um discurso racional o faz por meio de princípios lógicos. Estes, por sua vez, são subjacentes a um sistema lógico, formal ou não. Tal sistema deve ser único, caso contrário, não poderíamos derivar de tal discurso nenhuma conclusão que pudesse ser tida como lógica ou racional. Esse sistema lógico é aquele que, dentre todos os possíveis, melhor se adapta à situação ou objeto sobre que se fala, ou seja, ao contexto racional inserido.

[19] Seja p uma proposição: o princípio de *não-contradição* nos assegura que nunca é o caso que p e sua negação se verificam, ou seja, $\neg(p \wedge \neg p)$.

[20] Seja x um objeto: a lei da identidade garante que x é idêntico a si mesmo, ou seja, $\forall x(x = x)$.

[21] Seja p uma proposição: a lei do terceiro excluído nos garante que, ou p é verificada, ou sua negação é verificada, i.e., é o caso que $p \vee \neg p$.

[22] Estou fazendo aqui uma simplificação da noção de categoria e suas variações ao longo da história. Exemplo: embora as categorias kantianas, apresentadas na *Crítica da Razão Pura* (KANT, 2002), apresentem um caráter transcendental, diferentemente das categorias aristotélicas (quer as consideremos como uma classificação ontológica, quer as consideremos como uma classificação gramatical), elas também intentam ordenar e conceituar os fenômenos.

[23] Para mais detalhes sobre o problema da relação entre razão, lógica e linguagem, seguimos muito próximos ao primeiro capítulo de *Razão, Lógica e Linguagem*, de (DA-COSTA, 1996)

[24] Estamos fazendo uma descrição da posição do autor, naquele momento, no texto citado. Obviamente, o item 2, que afirma que a lógica é única para um dado contexto, só parece ser harmoniosa com a defesa deste trabalho se entendermmos "contexto" com todas as assunções e premissas filosóficas utilizadas para embasar tal escolha: no final, esta escolha é, como o nome diz, uma "escolha".

A sentença ‘Não pode estar chovendo e não estar chovendo’ expressa o princípio da lógica clássica de não-contradição, tendo em vista a interpretação de que o interlocutor deseja afirmar que ‘Não é o caso que esteja chovendo e não esteja chovendo no mesmo ponto do espaço-tempo’. Porém, a afirmação ‘Não é o caso que a luz seja, ao mesmo tempo, uma onda e uma partícula’ não é válida, à luz da física contemporânea, pois em um mesmo momento t, em um lugar j, a luz apresenta comportamento tanto ondulatório quanto corpuscular, i.e., em j, no momento t, ‘A luz é[25] onda e partícula’, ou seja, ‘A luz é onda e é não-onda’. Sendo assim, vemos que a lógica clássica, devido ao princípio da não-contradição, não traduz os princípios racionais que melhor se adaptam ao contexto da mecânica quântica, por exemplo.

Em toda investigação de caráter filosófico existem princípios racionais que norteiam tal tarefa, que são subjacentes ao trabalho racional que desenvolve a argumentação filosófica. É por meio deles que somos capazes de formular perguntas (com sentido) e constatar a plausibilidade das respostas; em última instância, são eles os responsáveis pela coerência de qualquer discurso. Se há princípios racionais que norteiam a inquirição filosófica, existem princípios lógicos, formais ou não, que espelham tal prática racional[26]. É o contexto do problema a ser investigado, segundo o princípio pragmático da razão, que determina as especificidades das leis lógicas consideradas válidas, ou seja, o sistema lógico que melhor se adequa a determinado discurso. Porém, isso não exige o comprometimento a uma tese de que a investigação filosófica se dê, necessariamente, em certos contextos rigorosos como aqueles exigidos para o discurso científico (denominemos tal tese de *logicismo extremo* ou *logicismo radical*). A maior parte das questões filosóficas são importantes devido ao caráter especulativo que possuem. Nesse sentido, apesar de exigirmos rigor (o termo **rigor** também admitirá plasticidade em nosso contexto) ao discurso filosófico, este não poderá ser, todas as vezes, o mesmo que o exigido nas investigações de caráter científico. Embora o método científico possa ser aplicado à prática filosófica, esta terá seu fundamento alicerçado, em grande parte do tempo, em terrenos que, devido sua natureza, são incapazes de admitir um tratamento rigorosamente igual àquele dado à prática científica, como usualmente entendida, por exemplo, nas ciências naturais.

Portanto, o reconhecimento de que, queira-se ou não, existe um sistema lógico que subjaz na estrutura de uma argumentação filosófica não implica na determinação rigorosa, no sentido de determinação cientificamente rigorosa, de toda a argumentação, na medida em que, em geral, para além das questões puramente lógicas argumentativas,

---

[25] Reconheço ser problemático o uso do verbo “é” neste contexto. Consideremos que nesta afirmação, pretende-se dizer que a luz apresenta, no mesmo momento, características tanto ondulatórias quanto corpusculares; nesse sentido, a luz “é” onda (satisfaz as características de uma onda) quanto “é” partícula (satisfaz o comportamento que se espera para um corpo corpuscular).

[26] Devo indicar que há outras dimensões que devem ser levadas em conta ao discutirmos a racionalidade, sejam elas de caráter epistemológico, psicológico, cultural etc. Como não é meu objetivo analisar a *razão* e os desdobramentos recorrentes a tal estudo, foco nos princípios relacionados à esfera lógica, importantes para justificar minha posição.

existem posições diversas[27] mais básicas que são, em última instância, impossíveis de serem fundamentadas cientificamente.

Esta posição adotada é contrária a certo *logicismo filosófico extremo*[28]. Sustento que não é possível reduzir todo enunciado filosófico a bases puramente lógicas. Além disso, como constatado pelos teoremas da incompletude de Gödel (GÖDEL, 2009), mesmo se tal fosse possível, não seríamos capazes de verificar, dentro do próprio sistema lógico, se certos enunciados ou suas negações são demonstráveis, i.e., todo sistema lógico[29] abarcaria enunciados, nele formulados, que são por ele indecidíveis.

Espero com isso justificar a adoção da **Hipótese Analítica** [H 1.1]:

Em todo discurso filosófico existem certos princípios e leis lógicas[30]*, conceitos e noções racionais elementares, que regulam o processo de inferência lógica internamente a esse discurso.*

[27] Metafísicas, ontológicas, epistemológicas, morais etc.

[28] Com essa expressão procuro descrever uma ideia de que todos os problemas filosóficos pudessem ser resolvidos pela simples análise lógico-formal da linguagem. Reconhecer a importância da linguagem no discussão filosófica, assim como em investigar as fronteiras do racional por meio das investigações lógicas, é uma coisa totalmente diferente daquela que procura reduzir a prática filosófica a um mero jogo de símbolos vazios, em uma tentativa de replicar, de maneira acrítica, práticas das ciências matemáticas.

[29] Que satisfaçam as condições dos teoremas da incompletude, i.e., sejam certo tipo de extensão para a lógica de predicados de primeira ordem, consistentes e recursivamente axiomatizáveis, logo que contenham a aritmética *standard*.

[30] Assumo aqui *princípio lógico* mais "fundamental" do que *lei lógica* - essa representando a formalização, em uma linguagem e sistema específico - de princípios lógicos.

1.2.2 Hipóteses Filo-Logicista e Husserliana

A investigação filosófica tem como seu aliado operacional o experimento intelectual[31], ancestral direto da prática contemporânea adotada pelas ciências naturais; a prática experimental trouxe um surpreendente salto qualitativo para as ciências (duras). Todavia, seria ilusório acreditar que a mera quantização seja capaz de nos *mostrar* o que é o mundo - chamemos isso de *ilusão cientificista*[32] (que assola os "maus" cientistas e boa parte do público leigo, em geral), qual seja, acreditar que a ciência (natural) diz o que *é* o mundo (objetos com que lida), sem reconhecer a distância entre realidade e discurso, e que os métodos e práticas da ciência são internos à própria ciência, e portanto só têm acesso àquilo que pode ser formulado no próprio discurso científico. Porém, tudo o que a ciência produz são modelos que descrevem os fenômenos no mundo e, quanto maior o grau de precisão das previsões fornecidas, mais seguro é o *modelo* - sempre aperfeiçoável em função das condições histórico-sociais (KUHN, 2013) ou (FEYERABEND, 1989).

Segundo o filósofo romeno Lucian Blaga (1895 - 1961), cujo trabalho prenunciou muitas das teses defendidas por Khun, todo experimento (ciências naturais) necessita de base teórica para ocorrer, por isso, demanda de fundamentos que expliquem os seus pressupostos e sob quais lentes os resultados devem ser interpretados (BLAGA, 2014), ou seja, a ilusão cientificista reside na incapacidade de compreender que a ciência (ou o método científico por si só) é incapaz de fornecer respostas absolutas sobre o que é o

[31] Espinosa, no contexto da emergência dos "experimentos investigativos" (Roger Bacon, Francis Bacon, Descartes, Galileu etc.), pode ser considerado um precursor de Husserl na defesa do *experimentum* na prática filosófica. Em contraposição a alguns de seus contemporâneos, Espinosa defende o método geométrico de demonstração para contrapor a crença e o saber, esse demonstrativo, logo claro e distinto, portanto uma ideia adequada, em contraste com aquela, subjetiva e particular. A partir de suas obras e por cartas por ele trocadas, é possível traçar (ver (CHAUÍ, 1999)) a distinção espinosana entre a experiência comum, imediata e intuitiva, e o experimento intelectual, esse formal, que em similitude ao experimento científico, é capaz de ajudar [o experimento intelectual] a estabelececer uma filosofia segura (verdadeira, em contraposição à melhor), por meio do método geométrico (*sintético*) das demonstrações metafísicas - que Descartes julga ser impossível, sendo somente o *analítico* adequado a essa ciência. Enquanto para Espinosa há dois tipos de experiência, a experiência errante (que procura livrar-se das singularidades por meio de universais abstratos mal fundados, de maneira que a ignorância real é ocultada pela ilusão do saber - como na súbita iluminação pessoal religiosa criticada por F. Bacon) e a ensinante (que parte do saber comum, intuído e geral, e impele à necessidade de se alcançar certas essências das coisas a partir do que é singular), o único *experimentum* [físico ou intelectual] de fato válido seria aquele regulado e ordenado, o que permite, segundo Espinosa, que se conclua, segundo as leis eternas, cada coisa que acontece, de forma que se torna claro a natureza íntima entre causas e efeitos; ele defende que o experimento [intelectual], distinto das experiências (errante ou ensinante), pois regulado e intelectualmente controlado, não é prova, nem demonstração, mas crença e opinião, que só pode participar da esfera da ciência quando, determinado pelo intelecto, orienta a capacidade discriminatória da experiência - portanto essa é anterior e necessária ao *experimentum* - para que assim, por sua regulação e ordenamento, se torne verificação, confirmação ou comprovação - ver capítulo 7.

[32] Adoto tal termo como uma reformulação de uma observação, feita pelo prof. Dr. Alexandre Costa-Leite, a respeito da tese de que as verdades metafísicas seriam fundadas, ou estariam enraizadas, nas relações entre objetos (coisas), suas propriedades e as leis naturais, posição por ele denominada de "ilusão pré-metafísica". O termo que adoto aqui, utilizo pois acredito que ele reforça a supervalorização contemporânea do que a ciência - como método - pode ofertar de certeza sobre a "realidade do mundo" - ver também (COSTA-LEITE, 2012).

mundo - faz-se filosofia ao postular quais são os fundamentos que suportam as teorias científicas, por meio dos quais os experimentos são interpretáveis.

Blaga em (BLAGA, 2014) nomeia de suprametódo (ciência galileu-newtoniana) a estratégia adotada pela ciência contemporânea de aliar princípios qualitativos com quantitativos, constituindo um *par metodológico* - esse seria o método científico de pesquisa. Nesse par, a matemática é presença constante (quantitativa), aliando-se a outros métodos para fundir o que conhecemos atualmente como método científico; todavia, qualquer método específico de tal tipo nunca se funde à matemática - que aparece como uma ferramenta da investigação. Sendo assim, segundo Blaga, a matemática passa a ser norteadora dos métodos de pesquisa (qualitativos), junto com os pressupostos teóricos que esse método exige, que lhe são particulares, auxiliando, inclusive (sentido lógico), com uma fundamentação mais rigorosa de métodos como a *analogia* e a *indução*. Nessa perspectiva, o método (científico), para longe de ser uma simples matematização metodológica do saber, é um procedimento em que hipóteses e teses são tratadas como princípios pragmáticos, cujos resultados qualitativos/intuitivos são analisados por modelos matemáticos que servem como mecanismo de mensuração dos resultados obtidos pelos experimentos científicos.

Se a filosofia pode ser discutida por meio de modelos que pretendem descrever certos contextos, e tais modelos são experimentos intelectuais, podemos dizer que o método científico poderia, em tese, ser aplicado à filosofia. Edmund Husserl (1859 - 1938) descreveu tal empreendimento, principalmente em (HUSSERL, 2002), onde critica o *naturalismo* (especificamente nas ciências naturais) - a redução do método científico ao objetual (particular), i.e., o abandono dos princípios qualitativos em favor da exclusividade dos princípios quantitativos - e o *historicismo* - a pura reconstrução histórica de argumentos, sem levar em conta os seus aspectos histórico-culturais. Com essas duas críticas, Husserl aponta para como a filosofia poderia assimilar o "rigor" das ciências naturais contemporâneas, preservando-se na sua especificidade particular.

Para Husserl, a filosofia, como ciência teorética, para ser vista como uma ciência rigorosa deveria se confrontar com a ideia da prática (experimentos). Além disso, esse rigor só poderia ser atingido por meio do trabalho coletivo, com a colaboração entre gerações na pesquisa acerca dos problemas filosóficos. Somente com a aplicação desses dois procedimentos, que mimetizam a prática das ciências naturais, que a filosofia, mudando de paradigma, poderia tornar-se rigorosa. Nesse caso, ela precisaria abandonar seu longo desejo de "profundidade", pois essa característica seria, na verdade, a sua imperfeição. Por não ser mais um trabalho "pessoal", mas de colaboração, o filósofo deveria deixar de ter a pretensão de construir sistemas "completos", mas repetir o procedimento das ciências e, em colaboração, atacar problemas particulares. O desejo de profundidade das ciências naturais, segundo Husserl, foi superado ainda na Renascença, e hoje a ciência genuína, segundo ele, não seria seria mais "profunda" - uma das razões para seu sucesso. Em certo sentido, Husserl advoga pelo amadurecimento da prática filosófica ao aliar história (retornar aos problemas e "soluções" da tradição para recuperá-los), tempo e cooperação; ele recoloca o procedimento de apresentação de teses e opiniões contrárias, do qual emergeriam teses "melhores", à similitude do "processo dialético"[33] de Georg W. F. Hegel (1770 - 1831). Por outro lado, ele aponta para a especificidade da filosofia em mover-se na esfera da *intuição*. Husserl julga que a intuição filosófica, no sentido correto, seria capturada pela análise fenomenológica das essências - portanto, em conformidade com a noção de par metodológico defendida por Blaga, Husserl defende que o método de investigação não deve ser somente experimental, mas também possuir uma análise *eidética* . Somente dessa forma a intuição pura conseguiria capturar o fenômeno físico (fluxo) que é imediatamente dado e não natural (sendo natural o que é objetivamente apontável - objeto das ciências naturais); nesse sentido residiria a especificidade da filosofia. Enquanto a redução eidética, por meio da consciência comunal, forneceria essências, o método empírico capturaria o individual/particular.

Seguindo os passos descritos por Husserl, vemos que a prática da apreensão das formas ou essências (*noesis*) é o procedimento filosófico fundamental. Se *definir* é delimitar a potência infinita do ser, o processo negativo de investigação metafísica demanda, ao buscar o mais simples - livre de todas as determinações que não lhe são necessárias - efetuar um processo de abstração para sair do sensível (o que é intuído) para o inteligível.

Na investigação metafísica sobre a *estrutura da realidade*, seu objeto, temos de ter a consciência dos limites aos quais estamos sujeitos; um indivíduo, dentro de uma casa, só pode ter acesso indireto ao conhecimento estrutural desse edifício, por meio da análise ponderada de suas características, já que não poderia retirar-lhe a sua casca externa para ter acesso direto à estrutura, pois se retirasse, qual seria o suporte de sustentação para tal indivíduo?

Com isso, espero poder justificar as hipóteses seguintes:

Hipótese Filo-Logicista [H 1.2]:

A filosofia não pode ser subsumida à mera manipulação de símbolos de determinado sistema dedutivo formal. Pertence à sua especificidade levantar hipóteses que, por mais que estejam sujeitas à lógica de um discurso racional, tais hipóteses o transcende. É tarefa do filósofo investigar os princípios, leis, noções e conceitos fundantes do contexto racional em que determinado discurso filosófico opera.

Hipótese Husserliana [H 1.3]:

A filosofia pode se tornar um discurso rigoroso, similar ao das ciências naturais, mas o método que deve adotar precisa levar em consideração sua especificidade. Ela precisa

[33] Estou desconsiderando as particularidades do processo descrito por Hegel, descrevendo um movimento mais geral a partir da ideia por ele apresentada, esta restrita à análise histórica.

atuar pontualmente sobre problemas a partir do trabalho em conjunto de gerações de filósofos, abandonado o pretenso ideal de "profundidade" e "sistemas" filosóficos, mimetizando assim a práxis *reformadora das ciências naturais.*[34]

1.2.3 Hipóteses sobre Linguagem e o Mundo

E sobre a abordagem da metafísica pela tradição da filosofia analítica? Esta tradicionalmente se utiliza do método de análise da linguagem para fundamentar a inquirição filosófica. Nesse aspecto em especial, a prática filosófica se apoia sobre os constituintes mesmos da linguagem lógica, sobre os fundamentos da interação entre esses elementos e o mundo, e sobre os limites dessa investigação para conhecer o mundo vivido. É nesse aspecto que o estudo da lógica moderna se intersecta com questões de natureza ontológica - quando a tradição analítica, se desgarrando de uma posição lógico-positivista extremada, se debruça sobre os problemas metafísicos - ver (WILLIAMSON, 2014).

Procurarei delinear a teoria metafísica exposta por Ludwig Wittgenstein (1889 - 1951) no *Tratactus Logico-Philosophicus* (WITTGENSTEIN, 2017), obra pilar da tradição analítica. Nela, o autor esboça como os aspectos da linguagem e da lógica estão presentes na análise do mundo, na busca pelo conhecimento daquilo que, de fato, do mundo pode ser conhecido, e como essa prática filosófica, guiada por princípios racionais (lógicos), pode responder (ou dissolver) os problemas metafísicos.

Na rápida discussão que se segue, me apoiarei no *Tratactus*, assim como na introdução à obra escrita por Bertrand Russell (1872 - 1970), que figura, ao lado de Frege, como um dos pais da lógica simbólica contemporânea, e no artigo de Luiz Henrique Lopes dos Santos, *A Essência da Proposição e a Essência do Mundo*, em (WITTGENSTEIN, 2017).

Em (WITTGENSTEIN, 2017), o autor lança os fundamentos de uma teoria filosófica-metafísica que versa sobre o mundo, mas que em contraposição com a prática clássica, assimila as preocupações referentes à linguagem, novo paradigma da filosofia, e ao crescente espírito de logicização da filosofia, na tentativa de reproduzir, de alguma forma, o caráter positivista das ciências naturais (Brentano - sec. XIX, Husserl). Porém, temos de salientar que Wittgenstein se encontra na fronteira dessas práticas, já que reconhece os limites da lógica e da linguagem em relação ao discurso sobre o mundo, admitindo que "Há por certo o inefável. Isso se *mostra*, é o Místico." (aforismo 6.522). Com essa afirmação, o autor reconhece, além dos limites da ciência - encarada como sinônimo de objetividade, os limites da própria filosofia, negando que lógica mais linguagem pudessem resolver todas as perguntas sobre a existência; essa dupla seria capaz de dissolver os falsos problemas filosóficos que residiriam em problemas em relação à forma e linguagem, mas

[34] Esta ação se refere a estratégia de método que a filosofia pode simular, mas não ao **telos** de investigação - filosofia e ciência (natural) têm objetivos concorrentes, mas distintos em especificidade, o olhar filosófico perpassa as barreiras impostas ao olhar científico.

não as questões mais profundas sobre o mundo; sobre essas, “o silêncio é recomendado (...). Diante do enigma da existência, a linguagem atinge seus limites insuperáveis.” ((HADOT, 2014) p. 298).

É possível afirmar que um dos grandes marcos na obra de Wittgenstein é a tentativa de costurar a “filosofia continental” com a nascente prática analítica, evidenciar a possibilidade do discurso metafísico a partir da nova linguagem lógico-simbólica nascente e a admissão dos limites inerentes ao homem e sua racionalidade frente ao mundo, mas que não o impede de investigar a própria natureza desse mundo, dentro dos limites de sua razão (linguagem). Esbocemos as bases da metafísica de Wittgenstein (primeiro Wittgenstein) apresentada no *Tratactus*, que será fundamento para a metafísica desenvolvida à luz da filosofia analítica.

Na obra, o *mundo* é descrito como a totalidade dos fatos; essa totalidade (maximalidade) determina aquilo que é o caso e aquilo que não-é, portanto o mundo é uma coleção maximal de noções atômicas - os fatos do mundo. Um *estado de coisas* é a ligação entre os objetos do mundo, já que esses não existem *soltos*, fora dos fatos em que participam: os fatos do mundo são o substrato no qual os objetos se sustentam.

Aquilo que é lógico não pode ser meramente possível, portanto as noções lógicas são necessárias[35]. Assim, todas as possibilidades de aparecimento de um objeto em um estado de coisas já devem estar contidas na natureza desse objeto, i.e., conhecidos *todos* os objetos, conhece-se todos os *possíveis* estados de coisas.

Esses objetos, ou as coisas do mundo, não podem ser concebidos na ausência de um espaço (sentido metafísico), pois é ele que possui caráter fundamental como substrato para os fatos do mundo, que garante a possibilidade dos objetos. Dessa forma, são os objetos que podem ser ditos “substância” do mundo, ao invés das propriedades, i.e., as coisas são ontologicamente anteriores às propriedades e relações entre objetos. Portanto, se há alguma *forma* comum entre mundos possíveis e o mundo real, essa forma são seus objetos (*Princípio de recombinação de Leibniz* - ver capítulo 3).

A conexão dos fatos do mundo e o homem (razão) se dá pelo processo de configuração. A configuração é o procedimento que relaciona fatos com proposições (suas figurações); no *Tratactus* uma proposição diz respeito à figuração de um fato (por sinais sonoros ou escritos), o conteúdo ou significado do fato do mundo é transmitido pelo *conteúdo proposicional* da proposição. Assim, as formas como os objetos se vinculam são dadas pela estrutura do estado de coisas que representa a ligação desses objetos no mundo - que é a totalidade dos estados de coisas existentes. Dito de outra forma, a realidade total *é* o

[35] Se p for uma proposição, no sentido do *Tratactus*, então se p for necessária, ela não possui *sentido* específico (sendo uma tautologia ou contradição), pois sua necessidade, que é lógica, depende exclusivamente de sua *forma*, e não do sentido - conteúdo essencial para a designação de um estado de coisas.

mundo.

Como aponta Luiz Henrique Lopes em (WITTGENSTEIN, 2017), Wittgenstein estabelece “a estrutura essencial do mundo”; a forma (racional) para se investigar o mundo é utilizar a relação de figuração que ocorre entre fatos e proposições. Fatos são figurados e uma figuração representa uma situação (no espaço lógico) da existência, ou não, de um estado de coisas. Sendo assim, a utilização da figuração, como modelo para tratar a realidade, exibe a forma do fato, representando seu objeto por fora, pelo ponto de vista da forma da representação, de maneira que toda figuração resume-se ao seu caráter lógico (formal). Logo, a verdade ou não-verdade de uma figuração reside, no *Tratactus*, na concordância ou não de seu sentido (conteúdo proposicional) com a própria realidade: o fato. Ou seja, para o autor não existiria uma figuração que pudesse ser verdadeira *a priori*, já que se um estado de coisas é *pensável*, então ele é figurável. Nossos pensamentos nada mais são do que a configuração lógica de fatos, portanto tudo o que é pensável, segundo Wittgenstein (no *Tratactus*), seria possível - o que também é uma tese humeana.

Wittgenstein aponta que o pensamento, em face do sinal de uma proposição, pensa o sentido da mesma - a proposição contém apenas a forma de seu conteúdo, embora não contenha o conteúdo mesmo. Em vista dessa conclusão, segundo Luiz Henrique Lopes dos Santos, (WITTGENSTEIN, 2017), Wittgenstein é capaz de invalidar todo e qualquer problema filosófico que se revele análogo a um problema científico, já que ambos residiriam em distintos espaços: o científico no da objetividade e o filosófico no da subjetividade do *sujeito metafísico*. Os problemas dessas esferas são essencialmente distintos e não podem ser compreendidos, analisados e investigados da mesma maneira. A filosofia não seria uma teoria, como as ciências naturais, mas uma atividade ((HADOT, 2014)) que tem como papel "limitar o impensável de dentro"((WITTGENSTEIN, 2017), p. 28), por meio do pensável.

Nesse ponto, os contornos da razão se exibem nos contornos da linguagem. No aforismo 3.411 Wittgenstein aponta para a similaridade entre os espaços geométrico e lógico: eles coincidem no fato de exibirem a possibilidade de existência (dos entes geométrico e ontologicamente bem fundado, respectivamente). Assim, a linguagem mostra a totalidade das proposições - do que pode ser representado, então pensável. No aforismo 4.1212 reforça a distinção entre conteúdo e forma lógica das proposições, ao afirmar que tudo aquilo que pode ser *mostrado* não pode ser dito. O termo *mostrado* é utilizado com um sentido extremamente poderoso: ele parece reivindicar a necessidade de certas “operações intuitivas” do intelecto, capazes de aperceber aquilo que é mostrado, que de outro modo não poderia ser capturado pela linguagem; na lógica, as formas são evidenciadas, enquanto a linguagem afigura os fatos do mundo que não podem ser *mostrados*.

Essa colocação do autor se relaciona diretamente com a própria pretensão do filósofo de filosofar (sobre o mundo); é no aspecto da subjetividade do discurso filosófico que se insere o “eu”, de tal modo que o sujeito que se coloca na posição do filósofo fala “[d]o mundo que é meu mundo” ((WITTGENSTEIN, 2017), p. 25): o “eu” do sujeito metafísico, um *limite* do mundo, ao invés de parte dele. Somente por essa perspectiva, segundo Wittgenstein, se pode construir um discurso metafísico, i.e., que se pode falar sobre o mundo; esse discurso se dá no encontro das “experiências” que são comuns aos sujeitos metafísicos (reconhecimento da forma lógica), sendo construído por meio da linguagem, é uma visão sobre a estrutura da realidade, de como essa realidade (fatos do mundo) é percebida igualmente (reconhecimento das formas) por esses sujeitos. Dessa maneira, o autor pode concluir que a filosofia é uma atividade que conduz à compreensão da estrutura essencial e dos fundamentos absolutos do mundo, fugindo do solipsismo.

A partir da exposição dos elementos basilares do *Tratactus*, pretendo começar a explicitar a linguagem filosófica que será utilizada para discorrer sobre problemas metafísicos. Nosso discurso, embora assentado em bases lógicas, reconhece os limites a que está imposto, como apontado por Wittgenstein, e é exatamente por tais limites que o recurso à história da filosofia nos propicianará ferramentas para investigar questões filosóficas por meio do maior número de ferramentas possíveis, de maneira a procurar posições pragmáticas que repousam, confortavelmente, sobre firmes pontos de apoio, por meio de um processo de costura entre a prática “clássica” de se fazer filosofia e a “analítica”[36].

Com isso, pretendo justificar as hipóteses a seguir:

Hipótese Epistemológica-Linguística [H 1.4]:

A linguagem impõe um limite para tudo o que pode ser conhecido pelo homem. O “místico” só nos mostra*, imprime em nossas impressões algo escorregadio e incerto, uma névoa, não gera, portanto, conhecimento sobre o mundo e não pode ser objetivamente compartilhado por meio da linguagem.*

Hipótese Metafísica Leibniz-Wittgenstein [H 1.5]:

Somente a inquirição metafísica pode fornecer vislumbres sobre a “realidade” do mundo. As ciências naturais são incapazes de dar significado último sobre a realidade dos fenômenos físicos; elas só operam como modelos, lentes a partir das quais interpretamos o

[36] Aquilo que é universalmente compreensível - leis da razão - está condicionado pelo arcabouço lógico-linguístico em que nossas representações e o discurso estão submetidos. O método científico procura ordenar as informações que recebemos do mundo; ao operar internamente à lógica do método científico, somente, ou da análise linguística, é impossível alcançarmos completamente a própria compreensão da complexidade do mundo e do problema da existência, já que nossa razão e linguagem nos condicionam nessa experiência do mundo. Nesse aspecto, as intuições “cruas” são de fundamental importância para a análise criteriosa das relações lógicas entre (e das representações) as coisas do mundo; elas que devem ser norteadoras do processo racional de investigação. Portanto, o conhecimento da tradição filosófica que ponderou, por diversos prismas, a relação entre o mundo percebido - intuído - e as relações racionais - construções sistemáticas - deve sempre estar no horizonte, pois somente o discurso filosófico é capaz de *mostrar* aquilo que não podemos representar (Wittgenstein).

mundo.

Hipótese Wittgensteiniana [H 1.6]:

O mundo (como cosmos) é a totalidade dos fatos; os fatos no mundo são o substrato que sustenta os objetos do mundo e o espaço metafísico é o que sustenta os fatos do mundo - nesse sentido, ele é primevo.

1.2.4 Hipótese Semântica

Em (TARSKI, 2006), a metalinguagem apresentada por Tarski para um sistema lógico contém a linguagem objeto. É na metalinguagem que se contrói conceitos semânticos e explicita-se a noção formal de dedução, portanto, semanticamente, a verdade depende da noção de satisfação por certas sequências de objetos do domínio da estrutura. Portanto, se a linguagem for rica o suficiente para conter a aritmética, verdade e demonstrabilidade não são conceitos coincidentes.

Defendo aqui, portanto, que em extrapolação a tal distinção, caso sejamos capazes de utilizar estruturas diversas como semânticas para uma linguagem formal, podemos indiretamente - para além da linguagem - investigar as características relacionais entre os constituintes formais (linguísticos) por meio das relações entre os elementos da estrutura (não-linguísticos); para isso, é preciso estabelecer uma conexão entre a linguagem formal e seus princípios regulatórios (lógica) e a estrutura interpretativa, por meio de uma noção de satisfatibilidade das fórmulas pela estrutura e do teorema da completude. Assim, escapamos de uma análise simplesmente formalística da linguagem para falar sobre as consequências lógicas de um sistema formal, ao avaliar as características elementares da estrutura interpretativa da linguagem. E com isso, poderemos utilizar de elementos outros (aqui, propriedades geométricas elementares) para compreender as relações lógicas entre símbolos de uma linguagem formal - as suas fórmulas.

Portanto, a análise semântica caminhando lado a lado com o estudo dos sistemas lógicos formais (sintático), por meio da análise das estruturas interpretativas para tais sistemas, garante um "apelo intuitivo" sobre o qual nossa razão pode operar para melhor analisar as relações lógicas entre os elementos do sistema e seus significados.

Essas considerações, em especial a defesa da análise semântica defendida por Tarski, espero serem suficientes para fundamentar a próxima hipótese. De fato, Williamson afirma (ver (WILLIAMSON, 2014)):

> "A metodologia de construção de modelos, que trouxe tanto sucesso às ciências naturais, pode, portanto, ser aplicada na filosofia, também, e prover novos "insights" para velhos problemas."(p. 32 - tradução livre)

Hipótese Semântica [H 1.7]:

Analisar as estruturas semânticas de um sistema lógico possibilita uma melhor compreensão de seus fundamentos e princípios.

1.3 Outras Hipóteses

1.3.1 O Problema do Conhecimento

Um dos mais instigantes problemas filosóficos é o problema conceitual sobre "a" *verdade*. É necessário me posicionar aqui, para a argumentação que será desenvolvida, sobre os contornos significativos que a palavra "verdade" irá assumir.

A vida humana é finita e limitada; em relação à maior parte dos eventos ou circunstâncias que vivenciamos, parece que sempre possuímos acesso limitado às informações sobre eles, sempre são informações inacabadas. Nesse sentido, o senso comum que se tem sobre o conceito de verdade nunca é completamente realizado, a verdade (absoluta) é sempre incompletamente vivenciada por nós, pois é parcial (por força das circunstâncias humanas); ela só poderia ser contemplada, em ato, por um ser ilimitado, infinito e onisciente. Se esse é o caso, quando enunciamos uma sentença, ela pode admitir certos *graus de verdade*. Se a verdade, em sentido absoluto, for irrealizável para o homem em ato, necessitamos, para viver, de certos graus de certeza sobre as coisas do mundo.

A impossibilidade de abarcar o absoluto sobre a maior parte dos conhecimentos que esperamos obter sobre o mundo pode ser melhor ilustrada pelos limites à qual estamos sujeitos quando desejamos tratar da noção de verdade internamente a um sistema lógico formal. Nesses sistemas, tal noção depende de uma estrutura, ou modelo, que faça com que um conjunto de sentenças (da linguagem), aquelas que desejamos chamar de verdadeiras, se tornem, relativamente àquele universo representado pelo modelo, realizáveis. Portanto, nessa situação, o conceito de verdade é sempre relativo. Por outro lado, dizemos que são formalmente válidas todas as sentenças satisfeitas por todos os modelos (compatíveis àquela estrutura lógica parcial, representada pelo sistema formal). Logo, em certo sentido, a noção formal de verdade é relativa: uma fórmula é válida (verdadeira) *na lógica clássica* ou em uma lógica *paraconsistente*, e assim sucessivamente.

Parece óbvio que existe, de fato, certas coisas às quais podemos dizer serem verdadeiras, como por exemplo o fato de você estar lendo essas palavras; todavia, mesmo que aceitemos que a verdade de alguns fatos possa sim ser totalmente abarcada por seres finitos, seria ingenuidade acreditar que podemos, epistemologicamente, garantir facilmente o acesso a essas verdades, se de fato elas existirem (dúvida hiperbólica cartesiana). Todavia, esse empecilho não pode ser tomado como desculpa para o abandono de qualquer investigação intelectual, pois embora não possamos ter, individualmente, o conhecimento da totalidade das *verdades*, ou mesmo possamos duvidar da nossa capacidade de justificar aquelas pequenas verdades dos fatos do mundo que vivenciamos, somos responsáveis por direcionar a humanidade no caminho do conhecimento verdadeiro sobre as coisas. Se a constatação de nossa fragilidade frente ao problema do conhecimento sobre o mundo reforça a angústia de nossa existência[37], é o trabalho humano, em busca de alguma verdade (justificação), refletido nas investigações milenares sobre teologia, filosofia, ciências, artes etc., que caracteriza o "espírito humano", o responsável por diminuir tal "angústia essencial".

Teoricamente, no trato do conceito "verdade", todos os filósofos se defrontaram com problemas que parecem, em determinada medida, insuperáveis. Isso se deve à especificidade desse conceito: a verdade do *mundo* (como totalidade = cosmo) é imanente[38], mas para vislumbrá-la, é preciso transcendê-lo; nessa passagem hipotética de exteriorização, a verdade *é* o próprio mundo, i.e., ter acesso à verdade, nesse caso, seria ter acesso ao próprio mundo em sua totalidade no espaço-tempo.

Adoto nesse trabalho a posição de que há verdades sobre o mundo; embora não possamos alcançar a algumas delas em toda sua plenitude, como indivíduos, podemos, por meio da investigação racional e de todas as ferramentas possíveis das quais somos dotados, como os sentidos, caminhar assintoticamente em sua direção.

No geral, utilizarei "verdade" para significar algo que se alinha à definição aristotélica: verdade *é dizer do que é, que ele é, e do que não é, que não é*, posição essa usualmente representada pela teoria da correspondência, na medida em que a uma crença, sentença ou discurso que se diga verdadeiro, há um fato, ou cadeia de fatos, na realidade, de maneira que o par crença (verdadeira) e fato (realidade) formem uma correspondência entre a realidade e o que está sendo expresso (ideia). Tal posição é similar à adotada por Bertrand Russell ou mesmo o Wittgenstein do *Tratactus* ((WITTGENSTEIN, 2017)). Portanto, é um conceito de adequação dos fatos do mundo (que são imanentes em relação ao mundo, como cosmos) à linguagem de um sujeito *no* mundo.

Ao falarmos sobre o mundo, na perspectiva da tradição fornecida pela filosofia analítica, utilizamos uma sistema formal para tratar da noção de verdade, sobre esse mundo, a partir da linguagem desse sistema: uma noção de verdade que deve satisfazer a teoria tarskiana[39]. Todavia, a verdade sobre o mundo, que procuramos ser capazes de

[37] Parece-me que é nesse sentido que, por diversas formulações, justificativas e caminhos, certas práticas filosóficas da antiguidade procuraram estancar parte da estranheza humana frente ao mundo ao esboçarem estratégias de adequação do homem à sua existência, como demonstrado pelo ceticismo, epicurismo e estoicismo - apenas para falarmos na perspectiva cultural do Ocidente.

[38] Essa afirmação só pode ser compreendida em um sentido de mundo como o descrito por Espinosa, oposto àquele delineado pelos escolástios, por exemplo, em que a verdade do mundo não lhe é imanente, mas está contida em Deus, na ideia (forma) do mundo.

[39] Teoria que explicita as condições formais para o conceito de verdade formalizado, a condição formal (correção) e de adequação material - ver (TARSKI, 1996).

distinguir entre espessas sombras, é algo concreto, pois negar tal concretude implicaria mergulharmos numa posição radicalmente cética, na qual nenhum discurso se torna possível. Ao reconhecermos os limites de nosso discurso e compararmos as afirmações das ciências com nossa percepção do mundo vivido, aumentamos nossa aproximação ao mundo (à *verdade*); fazemos isso quando investigamos a interação do mundo fenomênico (aquele vivido), o mundo da ciência (com suas leis de representação de generalidades internas a um sistema específico de códigos) e o "mundo filosófico", que propicia a substância aglutinadora desses mundos distintos para que a razão se aproxime dessa verdade[40] inacessível que é o mundo em si (o real)[41].

Admitirei aqui o qualificador *verdadeiro* para as sentenças de uma linguagem formal que admitem um correspondente para seu conteúdo (proposição) com algum fato do mundo - como totalidade; considerando nossa incapacidade em ter acesso à totalidade desses fatos para completar as duas lacunas dessa relação, precisamos de um critério que guie a razão no agrupamente de sentenças que pretendam descrever o mundo (seus fatos); nestes momentos, acredito que pode-se tratar pragmaticamente a noção de verdade de uma proposição pelo critério de coerência da mesma com outras proposições admitidas como verdadeiras - embora esse critério pode admitir, para a proposição, um menor grau de "verdade". Sob tal perspectiva, esse critério nos ajuda a formular um discurso sobre o mundo por meio do qual nossa razão, limitada por diversos fatores conhecidos (finitude, impossibilidade de acesso direto às coisas exteriores à ela etc.), possa operar com relativo grau de confiança[42]. Esses problemas pertencem ao discurso filosófico desde seu nascimento, porém, com a tradição da filosofia analítica, abarcar a noção de verdade em um sistema formal parece ser exigência para a construção de um sistema que seja capaz de articular esse debate filosófico, sendo dele pano de fundo (nível semântico). Dessa forma, a noção de *verdade* nesse trabalho aparecerá de maneira um pouco ambígua, mas o contexto dessa aparição, acredito, deixará claro em que situação ela está sendo compreendida: a noção filosófica-metafísica (relação de correspondência entre o discurso e as coisas do mundo) e a noção formal (sentido tarskiano para a noção de verdade em sistemas formais). Em certo sentido, se considerarmos que a noção filosófica de verdade (sobre o mundo) está sempre escapando por entre nossos dedos, compreendemos que a noção formal é uma tentativa de sistematizarmos nosso discurso para, plautinamente, por meio da razão, aprimorarmos nossos conhecimentos sobre o mundo, o que nos leva ao problema da justificação.

[40] "Quase-verdade" - se não estivermos lidando com uma idealização da linguagem, este é o conceito formal que pode ser utilizado para encapsular a possibilidade de "falarmos" (de maneira formal) sobre o mundo.

[41] A estrutura do real - o mundo em totalidade - é objetiva; o que não é objetivo são as relações que estabelecemos para compreendê-lo, devido ao acesso limitado ao fenômeno e a sua representação (limitação linguística) - ver "O escândalo da filosofia" (Heidegger), tratado na Conclusão do trabalho.

[42] Esse grau de confiança diz respeito à própria precisão da confiabilidade dos dados utilizados pela razão para sua operação, dito de outra forma, determinar como se dá o conhecimento e, se em bases empíricas, a segurança que pode ser colocada nos dados recebidos pelos sentidos.

Segundo o aforismo 2 do *Tratactus*, o mundo é a totalidade dos fatos. Portanto, a verdade reside na relação de correspondência entre o que é enunciado (linguagem) e o mundo (fatos). Aquilo que julgamos ser o caso é denominado de *crença*; pode-se encontrar na história da filosofia, de maneira geral, a opinião de que o conhecimento é a coleção de todas as crenças que possuímos que são ao mesmo tempo verdadeiras e justificadas; não posso ter conhecimento de algo sobre o mundo que não é o caso (falso), da mesma maneira que não posso ter o conhecimento de algo sobre o mundo que não pode ser apoiado em algum tipo de justificativa, caso contrário, estaríamos fadados a nos encontrarmos mergulhados em uma plenitude de mundos particulares subjetivos e conflitantes, um universo em que não existe a possibilidade de construção de agrupados sociais[43].

Considerando a busca da humanidade pelo conhecimento, seja na tentativa de responder suas questões existenciais, seja na tentativa de dominar a natureza para encontrar melhores condições de vida, o escrutínio da noção de *justificação* na história do pensamento, como constatado pela longa tradição filosófica, se justifica. Todavia, por todos os limites que a humanidade possui, como já esboçado, fica latente a extrema dificuldade para se encontrar o suporte sobre o qual podemos justificar nossas crenças: não temos acesso à totalidade do mundo; sobre o que temos acesso, esse acesso não é objetivo, já que temos acesso apenas ao fenômeno das coisas que nos são apresentadas no mundo, e não às coisas mesmas, mesmo se supormos que há coisas onde ocorra tal acesso, ele é sempre parcial, já que a coisa-mesma é externa ao sujeito cognoscente.

Se a justificação da verdade de uma sentença for aquilo que objetiva positivamente a relação entre a sentença e o fato do mundo que a proposição representada por ela exprime, então um ceticismo extremo pode nos levar à consideração de que nenhuma sentença de nossa linguagem, que se refere ao mundo, possa ser justificada, e portanto não seríamos capazes de obter nenhum conhecimento sobre o mundo. Qual é, então, o sentido da filosofia, ou da ciência, a partir dessa posição?

Nas *Meditações Metafísicas*, Descartes (1596 - 1650) procura refutar essa posição cética, que duvida mesmo da existência do mundo, ao identificar a certeza objetiva da existência do ser pensante (o "ergo cogito, ergo sum", cuja certeza é restrita ao indivíduo que pensa). A conclusão cartesiana é que o conhecimento sobre si é imediato, enquanto o de todas as coisas externas é mediato, tendo portanto o conhecimento do sujeito de si-mesmo precedência sobre o conhecimento do mundo exterior. As ideias possuem realidade e, da posse de um conjunto de ideias inatas, o sujeito seria capaz de conhecer o mundo, numa espécie de idealização da estrutura do mundo, em seu aspecto cognoscível ao sujeito. Descartes pode concluir esse ponto de justificação do conhecimento, tendo em vista sua

[43] A racionalidade não está "no" homem, o homem é um animal **a**rracional, a racionalidade está no coletivo, na humanidade.

rejeição na confiança total dos dados dos sentidos, ao introduzir as ideias inatas, que provêm de Deus ((LANDIN, 2009a)). Nesse sentido, a filosofia cartesiana é um exemplo de *idealismo* na concepção de como se dá a construção do conhecimento, em contraposição a uma posição *empirista*, na qual há, se não totalmente, primazia dos dados dos sentidos para a construção de nossas representações e conhecimento.

A afirmação cartesiana da realidade objetiva das ideias é problemática e Espinosa (1632 - 1677) procurou dissolver tal problema, embora não abandonando uma posição idealista sobre o conhecimento, por meio da análise da noção de *ideia*; com tal análise, Espinosa mostra que um indivíduo ter a ideia de X não implica que ele tenha o conhecimento de X. No axioma 6 de (ESPINOSA, 2009), postula que a verdade é a correspondência entre a ideia e seu objeto, i.e., a verdade residiria na conformidade da ideia com o mundo exterior. Sendo assim, há uma distinção entre as ideias; àquelas que justificam o conhecimento, Espinosa dá o nome de ideias adequadas, já que elas se encontram na relação de correspondência entre ideias e o mundo ((LANDIN, 2009b)). Todavia, essa lacuna na passagem dos objetos externos e o sujeito cognoscente é preenchida, por Espinosa, assim como pelos escolásticos, pela figura de Deus[44]. De maneira objetiva, podemos dizer que em Espinosa não se dá de maneira final a solução para o problema de relacionar as ideias, as verdades e o mundo exterior, i.e., justificar o conhecimento sem a introdução de noções que são, em última instância, inverificáveis ao homem aprioristicamente[45].

Por toda a história da filosofia, esse dualismo a respeito da construção do conhecimento, portanto do enfrentamento a respeito da justificação de crenças, entre teses idealistas (reminiscência platônica) e teses realistas/empiristas (Aristóteles, David Hume), mostra a dificuldade em estabelecer a conexão entre, em linguagem kantiana, as coisas do mundo (*númeno*), as coisas como percebemos (*fenómeno*) e nossa razão (ideias). Como Kant coloca, não temos acesso às coisas que nos são exteriores; Espinosa aponta que a verdade se encontra na relação entre as ideias e o mundo, mas se não podemos afirmar a existência de ideias inatas (como faz Descartes), e se nossos sentidos podem facilmente nos enganar em relação aos fenômenos que "observamos", como garantir essa correspondência entre nossas ideias (representações) das coisas do mundo e a realidade do mundo? Kant considera que, embora deve-se negar à razão um *status* de critério absoluto para o conhecimento das coisas do mundo, ela é a única capaz de operar, a partir de certa estrutura, as *categorias do entendimento*, de maneira a oferecer critérios de segurança à respeito de nossos raciocínios, escapando assim de um ceticismo estéril por meio do conceito da *razão pura*; nela, as ideias inatas cartesianas (material bruto para o trabalho da razão) são substituídas por intuições recebidas por estruturas do intelecto humano - que modelam a

[44] Embora o Deus espinosano (substância única, do qual o mundo consiste apenas da manifestação de seus modos) seja distinto do Deus encontrado usualmente na filosofia escolástica

[45] Em Leibniz, por exemplo, esse problema se resolve por meio das noções de *mônodas* e *harmonia pré-estabelecida*.

forma como percebemos a “realidade” (no tempo e no espaço), de maneira que os fatos da experiência possam ser usados por um *eu* metafísico que escapa do subjetivismo através do recurso ao senso comum, na adequação dessas experiências dos diversos eu’s metafísicos da comunidade, adequação constatada ao longo da história.

Provavelmente nunca poderemos ter conhecimento de todas as verdades do mundo, mas podemos admitir certos graus de confiabilidade para crenças, admitindo como conhecimento aquelas que forem altamente confiáveis. Analisemos o que Kant tem a oferecer sobre essa situação: ele nomeia, na *Crítica da Razão Pura*, de “idealidade da razão externa” o problema sobre o conhecimento, já que esse reside na relação entre as coisas-em-si e o sujeito cognoscente, cujas coisas do mundo (exterior) lhe são sempre inacessíveis. Nessa obra, o autor argumenta que não há prioridade do que ocorre em nós sobre o que existe fora de nós, contrariando a Descartes, refutando assim uma posição epistemológica idealista; ele vai além e tenta demonstrar que o próprio conhecimento dos objetos é condição, para o sujeito, para o conhecimento de si.

Segundo Landin ((LANDIN, 2009c)), Kant afirma que a conjugação de certas teses como i) a ideia de que o que é imediatamente percebido é indubitável, ii) tese de realismo epistemológico e iii) a teoria causal da percepção de Hume, conduzem à uma atitude cética sobre a existência das coisas fora de nós. Kant reconhece não conseguir identificar as relações causais necessárias entre todas as coisas e, fundando sua certeza no conhecimento das coisas do mundo físico, sendo fortemente influenciado pela física newtoniana, assume a existência de ferramentas próprias ao homem que lhe possibilitam justificar o conhecimento das coisas que lhe são externas; tais ferramentas dizem respeito à intuição, que opera em um nível mais básico do que a razão.

Kant argumenta que por meio desses elementos primordiais somos capazes de construir representações - ideias; tais elementos são aqueles provindos do que chama de *intuições puras*; por meio delas Kant opera a ligação entre as coisas-em-si do mundo e o sujeito cognoscente que, não tendo acesso direto a elas, pode obter a “certeza” de sua existência (não a certeza do que a coisa é em sua completude, mas somente de que é algo) e construir enunciados sobre o mundo. Dessa forma, abre-se uma terceira via entre o idealismo e o realismo, uma tentativa de justificar as verdades - obtenção de conhecimento - do mundo exterior, ao mesmo tempo que escapa de um ceticismo extremo sobre a própria realidade do mundo.

É claro que opero aqui em uma simplificação da teoria kantiana, e que há aspectos epistemológicos e/ou psicológicos que poderiam ser envolvidos nessa discussão. Todavia, procuro apenas nos balizar frente à posição de que, de alguma forma, nossas percepções, aquelas às quais a grande maioria de indivíduos racionais conseguem entrar em acordo, de fato têm algum fundamento para ser tomadas como balizadoras de atribuição de confiabilidade para certas crenças (conhecimento), i.e., quando levamos em consideração fenômenos cuja percepção se encontra de acordo na maioria dos casos individuais, parece plausível supor que há um alto grau de confiabilidade nas informações que são compartilhadas por tais percepções. Além do mais, como seres racionais mergulhados em um mundo físico (espaço físico), supondo que não vivenciamos coletivamente uma simulação artificial ou que não estamos presos em um ambiente simulacro como a caverna de Platão, se deixarmos aberta a possibilidade de negar todo tipo de intuição fundamental que possuímos sobre aquilo que recebemos diretamente do mundo, nos encotraríamos desconcertantemente abertos à qualquer argumento que possa vir a contrariar nossas experiências do mundo vivido, única certeza que de fato podemos ter: a recepção dessas percepções e de nossa existência como seres pensantes que as percebem.

Ao assumir essas *estruturas de pensamento a priori*, fundamentais para o sujeito, as intuições puras do tempo e do espaço, Kant demarca que o problema da justificação das crenças verdadeiras reside no fato de que além de nossa percepção temporal do antes, agora e depois, os fatos do mundo só são apreendidos (percebidos) por meio da sensibilidade, através do qual os objetos que nos são exteriores são colocados perante o sujeito, e é nesse espaço que as representações dos dados percebidos pelos diversos sentidos podem ser construídas, organizadas e relacionadas[46].

Com isso, espero justificar a adoção das seguintes hipóteses.

Hipótese Cética-Moderada [H 2.1]:

Sobre a grande maioria dos acontecimentos, ou fatos do mundo, somos incapazes de ter acesso em sua completude, i.e., a todas as suas facetas e causas, mesmo consequências. Portanto, a verdade *- entendida como um vislumbre absoluto sobre os fatos do mundo em sua totalidade complexa - é um objetivo inalcançável para a mente humana. Isso não significa, por outro lado, que não podemos "falar sobre o mundo" ou que estejamos justificados a negar quaisquer tipos de certeza (graus de certeza) às coisas que vivenciamos, caso contrário, a vida individual, mais ainda a social, seria impossível. Portanto, a filosofia deve permanecer conectada com os fatos que "emanam do mundo" para, criticamente, investigar ao máximo esse próprio mundo.*

Hipótese sobre a "Verdade" [H 2.2]:

A interação entre o mundo vivido, a ciência e a filosofia pode fornecer estratégias seguras para vislumbrarmos a estrutura do mundo, garantindo maiores graus de certeza

[46] Em (FRIEDMAN, 2012), o autor defende que a percepção e razão humana fundamentam-se nessas intuições puras, elas são conformadas a essas características de apreensão do tempo e do espaço; é a partir delas que podemos formar conceitos abstratos. Porém, esse espaço não é o espaço geométrico - que para Kant é o espaço euclidiano de três dimensões, mas o espaço metafísico, a "pura forma" de todas as intuições empíricas de todo e qualquer objeto que possa existir nesse espaço: é o espaço da *Estética Transcendental* - uma "condição de possibilidade". Ele é uma representação *a priori* que precede toda percepção empírica, não a representação de uma noção abstraída de nossas percepções empíricas dos objetos físicos espaciais.

sobre os fatos desse mundo - nos aproximando assintoticamente da verdade sobre ele - entendido como totalidade, essa inacessível à espécie humana.

1.3.2 Hipótese Epistemológica-Kantiana

Sobre a necessidade de se estipular certas estruturas capazes de realizar uma conexão entre extremidades explicativas sobre como se dá o conhecimento, o idealismo e o realismo, Kant argumenta na introdução da Crítica da Razão Pura (*CRP*):

> "Igualmente, na parte analítica da Crítica se demonstrará que o espaço e o tempo são apenas formas da intuição sensível, quer dizer, somente condições de existência das coisas como fenômenos e que, a par disso, não possuímos conceitos do entendimento e, portanto, tampouco elementos para o conhecimento das coisas, senão quando nos pode ser dada a intuição correspondente a esses conceitos. Daí não podemos ter conhecimento de nenhum objeto, enquanto coisa em si, mas tão somente como objeto da intuição sensível."(p. 34)

Pretendo expor uma justificação para a inclusão de certas noções intuitivas que operam no processo de formação de juízos sobre o mundo, por meio do qual podemos fazer afirmações com sentido sobre esse mundo que é exterior ao indivíduo pensante[47]. De fato, Kant considera que a experiência é uma ligação sintética das intuições. Porém, há uma classe especial de juízos sintéticos que não possuem tal elo: os juízos sintéticos *a priori*[48], que se dividem em três grandes grupos, os juízos matemáticos, os da ciência da natureza e os da metafísica.

Nos juízos metafísicos não são empregados os métodos analíticos de decomposição de conceitos para que eles possam ser explicitados em partes menores, pelo contrário, os enunciados metafísicos, segundo Kant, servem para alargar nossa compreensão do mundo, de modo que sempre estamos, sinteticamente, acrescentando a certo conceito dado alguma coisa que não estava anteriormente nele contida. Mas esse alargamento não demanda a experiência direta do mundo, tendo em vista que os enunciados metafísicos têm caráter *a priori*. Dessa forma, podemos concluir que, para Kant, os juízos metafísicos exigem a operação da intuição para serem construídos.

Na análise kantiana, o grande problema da *razão pura* reside na pergunta: como são possíveis os juízos sintéticos *a priori*? Além disso, a dificuldade em separar esses dois tipos de juízos, analítico e sintético, seria a causa do fracasso das teorias metafísicas até

---

[47] Portanto, estou voltando-me aos aspectos epistemológicos da teoria kantiana, e não sobre sua teoria do juízo.

[48] Em (QUINE, 2011a), Quine sustenta que tal oposição kantiana, de separar juízos analíticos e sintéticos, é equivocada. Assim como sua crítica à lógica modal, não abordaremos os detalhes da posição desse autor nesse trabalho.

então desenvolvidas. Para o autor, é a razão pura "que contém os princípios para conhecer algo absolutamente *a priori*."((KANT, 2002), p. 58), e o conhecimento que não se ocupa dos objetos individualmente como objetos, mas que se interessa com os modos de conhecer tais objetos, é denominado transcendental. Como afirma no final da introdução à *CRP*:

> "Parece-nos (...) que há dois troncos do conhecimento humano, porventura oriundos de uma raiz comum, mas para nós desconhecida, que são a “sensibilidade” e o “entendimento”. A primeira nos fornece os objetos, e na segunda esses objetos são “pensados”. Como a sensibilidade deverá conter representações *a priori*, que constituem as condições mediante as quais os objetos nos são dados, pertence à filosofia transcendental. A teoria transcendental da sensibilidade deve formar a primeira parte da ciência dos elementos, porquanto as condições, pelas quais unicamente nos são dados os objetos do conhecimento humano, precedem as condições segundo as quais esses mesmos objetos são “pensados”."(p. 61)

É na *doutrina transcendental dos elementos* que Kant procura exibir a conexão entre teses idealistas/racionalistas e realistas/empiristas com a colocação de seu argumento a respeito dessas “representações *a priori*”, necessárias para que os objetos sejam levados a nosso entendimento, a partir de seus fenômenos, para que, a partir dessas representações, a razão possa operar na construção do conhecimento. O pensamento, em última instância, sempre irá se referir a elementos da intuição, pois são os dados sensíveis que nos fornecem informações sobre os objetos e é ela que se encontra imediatamente relacionada a tais informações sensoriais. Essa posição de Kant é uma separação radical da ideia lockeana de tábula rasa, pois aqui ele justifica que se o conteúdo de todos os fenômenos são dados apenas posteriormente ao indivíduo, a sua forma deve estar contida *a priori* no mesmo indivíduo, ou seja, existiria no sujeito cognoscente uma estrutura *a priori* que contém as formas dos fenômenos que o indivíduo, *a posteriori*, terá acesso. Formas *a priori*, que independem completamente dos sentidos, são denominadas de *intuições puras*, pois elas se encontram *a priori* no espírito e são formas de intuições gerais. As intuições puras, que fornecem a própria forma de todos os fenômenos, são as únicas coisas que a sensibilidade *a priori* pode fornecer; elas não são formas da intuição empírica, mas condições necessárias para o recebimento dessas percepções (espaço - externo/ tempo - interno).

Em resumo, Kant advoga que a existência de intuições puras é necessária para que qualquer tipo de conhecimento possa ser obtido, i.e., sem essas intuições, o indivíduo pensante, isolado em seus pensamentos, não tem como justificar as crenças que, porventura, possa vir a acreditar. Por outro lado, reconhece os limites da relação sujeito/coisa-em-si, evidenciando a problemática de se justificar certas crenças por meio de instrumentos empíricos, apenas. Razão e sentidos formam uma dupla, operando articuladamente como ferramentas para o funcionamento do sujeito cognoscente.

As intuições puras situam-se em duas categorias: as intuições puras temporais e as intuições puras espaciais. Com as intuições puras temporais o intelecto é capaz de fazer clivagens que delimitam exatamente a ordem e posições das informações recebidas, de maneira que seja possível apontar para um antes, um agora e um depois. Aqui, me interesse particularmente na existência das intuições puras espaciais.

Primeiramente, devo lembrar que Kant foi um entusiasta da física newtoniana. Dessa forma, a sua concepção de espaço (filosófico) deriva muito das conclusões sobre o espaço físico que podem ser extraídas a partir da física newtoniana (ou clássica). De uma maneira geral, Kant considera que i) o espaço não é um conceito empírico abstraído de experiências externas, ii) ele é uma representação *a priori* e necessária, sendo fundamento para todas as outras intuições externas (não puras), iii) não é um conceito discursivo, mas uma intuição pura apercebida e iv) a representação do espaço é uma grandeza infinita dada, já que todas as partes do espaço (representações) existem ao mesmo tempo no espaço infinito ((KANT, 2002). pp. 68 - 69).

Kant argumenta que o espaço [espaço metafísico] (forma pura da intuição) deve ser uma intuição originária já que, se fosse apenas como um conceito, não poderia extrair dele mesmo proposições que o ultrapassassem. Portanto, o espaço é uma intuição pura e não empírica, que está no sujeito aprioristicamente, possibilitando que o sujeito cognoscente possa obter uma representação imediata dos objetos (no espaço de representação), o que denomina de *intuição formal* de tais objetos; o espaço [espaço metafísico] nada mais seria do que o suporte para a forma da intuição empírica de todos os sentidos externos, condição subjetiva da sensibilidade, que permite a intuição do mundo exterior ao sujeito.

> "A forma constante dessa captação, a que denominamos sensibilidade, é uma condição necessária de todas as relações nas quais os objetos são intuídos como exteriores a nós e, ao separarmos mentalmente esses objetos, temos uma intuição pura que leva o nome de espaço."((KANT, 2002), p. 71)

Tal posição adotada por Kant frente à intuição do espaço pode ser melhor compreendida na dualidade entre realidade empírica do espaço, já que é condição necessária para toda e qualquer experiência exterior, e a idealidade transcendental do espaço, já que ele nada é se o considerarmos como base das coisas em si. Logo, os objetos em si mesmos nunca são conhecidos pelo sujeito cognoscente; o que denominamos de objetos exteriores são apenas representações de nossa sensibilidade, e tal sensibilidade tem um formato *a priori*, suporte para todas as outras intuições, "(...) todavia, [o espaço] se reporta, tão somente, à forma pura da intuição, não incluindo em si nenhuma sensação - nada de empírico."((KANT, 2002), p. 72).

Acredito que Kant opera em uma chave idealista, procurando escapar tanto do radicalismo de um Berkeley, por exemplo, mas atento a uma preocupação empirista, na tentativa de enfrentar o ceticismo humeano. Por isso, defendo que o *idealismo transcendental* de Kant (no sentido de teoria epistemológica) possa ser encarado como uma via do meio entre idealistas e realistas. Contra Descartes ou Leibniz, não são mais *ideias* inatas ao homem, mas estruturas de percepção (intuições puras) que propiciam o arcabouço pelo qual o juízo possa operar a construção e representação de conceitos.

1.3.2.1 Kant e a Filosofia Analítica

Robert Hanna defende em (HANNA, 2005) que a tradição analítica deveria entrar em acordo com seu passado intelectual "e, em particular, com o livro que tornou a tradição analítica possível"(p. 410), a *Crítica da Razão Pura*, já que para ele, Kant foi o filósofo que primeiramente trouxe para a cena da discussão filosófica, de maneira consistente, a questão da análise semântica; não por acaso, para ele, Quine representaria a "guinada científica" da filosofia analítica - seguindo Reichenbach (*The Rise of Scientific Philosophy*), que considera que após Quine, a filosofia analítica é *filosofia científica*.

Tal tese é forte, mas assim como Wittgenstein nos mostrou os limites de nosso discurso racional pelas fronteiras da linguagem, Kant, ao formular a relação entre consciência e intuição (razão e sensibilidade) nos mostra que também não somos capazes de escapar dos limites de nossa intuição - que fornece o material para a produção de nossos conceitos e juízos. Hanna defende que Kant, em CRP, desenvolve uma *semântica cognitiva geral*: uma teoria de representação mental objetiva. Tal teoria exige certas estruturas de sensibilidade *a priori*, o espaço e o tempo (intuições puras). O "transcendental" na (CRP) refere-se, portanto, não àquilo que está além de toda a experiência, mas ao que na verdade a precede - esse é o *idealismo cognitivo* kantiano. Nesse sentido, são delineados os limites para o conhecimento humano na demonstração entre a relação entre as coisas-em-si-mesmas (*número*) e nossas representações mentais (imaginação).

Porém, em uma ruptura com muitas posições de filósofos modernos, como Descartes, diferentemente de um *inatismo de conteúdo* (ideias inatas), a teoria kantiana é um *inatismo de capacidade*, segundo Hanna. A cognoscibilidade humana dependeria, então, da intuição, distinta da imaginação, essa um maquinário de síntese, de maneira que por meio da imaginação os conceitos pudessem ser formulados a partir de conteúdos intuitivos, que seriam *a priori* ou empíricos. Como Kant estabelece na CRP, os pensamentos sem conteúdos são vazios, enquanto as intuições sem conteúdo, cegas. Esta orientação semântica - atenção aos conceitos - da filosofia kantiana lhe daria o papel de predecessor de Frege, Russell e Wittgenstein, para Hanna. Mais do que isso, a obra de Kant, primeiro autor a discutir a natureza da analiticidade, faz de Kant um precursor da filosofia analítica, principalmente por ele não ter desenvolvido uma teoria psicologicista, pelo contrário, já que defendeu uma teoria epistêmica que escapa das armadilhas de uma redução cega do conhecimento a processos mentais e psicológicos.

Michael Dummet, em seu artigo *Can Analytical Philosophy be Sistematic?* (DUMMETT, 1978), afirma que "a filosofia analítica é filosofia pós-fregeana", e tal afirmação parece sustentar a relação de Kant com a tradição analítica, expressa pela seguinte passagem de Frege em (FREGE, 2021):

> "Considero que Kant prestou um grande serviço ao traçar a distinção entre juízos sintéticos e analíticos. Ao chamar as verdades da geometria de sintéticas e *a priori*, ele revelou a verdadeira natureza delas. [...] O que era importante para ele era que existem coisas como juízos sintéticos *a priori*; se podem ser encontrados apenas na geometria, ou também na aritmética, não é tão importante."(p. 38)

Nesta passagem Frege parece endossar a distinção realizada por Kant entre juízos analíticos, como 'Todo homem solteiro é não-casado', e juízos da geometria; deixando de lado o problema de determinar se os juízos da matemática em geral são sintéticos *a priori* (Kant defende que as proposições da aritmética também são sintéticas *a priori*), a obra de Frege mostra que compreende o papel *sui generis* das demonstrações geométricas e que Kant traduziu muito bem essa especificidade na sua classificação das proposições matemáticas (da geometria).

Na teoria do conhecimento de Frege (FREGE, 2009), vemos o quanto ela é kantiana, na medida em que postula três tipos de fontes para o conhecimento: 1) fonte lógica (pensar e conceituar); 2) fonte geométrica (intuição espacial) e 3) percepção sensorial. É por meio dos conhecimentos obtidos pela fonte geométrica que as deduções lógicas podem ser realizadas - a fonte geométrica fornece as premissas primitivas para a operação da fonte lógica na demonstração das proposições geométricas. Por meio dessa distinção, Frege impede um logicismo radical, promovendo uma interação entre aspectos lógico/semântico e cognitivo/epistêmico, sem que nenhum deles domine sobre o outro em seu par de articulação ((HANNA, 2005)). Em (FREGE, 2021), Frege reconhece a importância de uma *gestalt* representacional para que, a partir dela, a razão possa operar e criar conceitos e juízos.

Em Frege a intuição é incomunicável, portanto indexical. As intuições geométricas têm uma papel ainda mais fundamental do que as outras para o indivíduo,

> "As verdades da geometria governam tudo o que é espacialmente possível de ser intuído... As visões mais loucas dos delírios, as invenções mais ousadas das lendas e da poesia... tudo isso continua, contanto que ainda continuem

> passíveis de serem intuídos, ainda sujeitos aos axiomas da geometria. Apenas o pensamento conceitual de certa forma pode se livrar desses grilhões ao assumir, digamos, um espaço de quatro dimensões ou uma curvatura positiva. O estudo de tais conceitos não é, de forma alguma, inútil, mas significa deixar o domínio da intuição totalmente para trás. Se realmente usamos a intuição aqui, como auxiliar, ainda é a mesma velha intuição do espaço euclidiano, o único cujas estruturas podemos intuir."((FREGE, 2021), pp. 29 - 30)

A intuição espacial (euclidiana) é, defende Frege, um guia para nossos processos mentais de abstração de conceitos em espaços geométricos não-euclidianos. Nos fiamos nessas intuições *a priori* (no sentido kantiano) para separar o que é particular e o que é essencial nos conceitos, abstraindo o essencial para espaços de natureza mais geral. Exatamente por isso, essa intuição, subjetiva e interna ao sujeito, é incomunicável.

Hanna defende um paralelo entre tal "incomunicável" fregeano e o "indizível" wittgensteiniano. Segundo ele, assim como as formas lógicas são imanentes das proposições, ou por elas são exibidas, as intuições puras do espaço (e do tempo) são imanentes da intuição empírica. Logo, do mesmo modo como Wittgenstein afirma que as proposições *mostram* sua forma lógica, a natureza do espaço (geométrico) não pode ser discursivamente descrita, mas apenas imediatamente *intuída* pelo indivíduo. Hanna afirma:

> "O modo como o puro intuidor representa o espaço (...) como formas autônomas (...) refletindo sobre o componente transcendental de sua capacidade de representar coisas espaciais (...), é fundamentalmente afim do modo como o lógico cria uma linguagem formalizada para a representação das formas lógicas que são de fato imanentes na linguagem natural."((HANNA, 2005), p. 245)

Acredito que muitas das teses defendidas em (HANNA, 2005) justificam a adesão parcial que faço nesse trabalho de certas teses kantianas, em especial aquelas que defendem algum sentido especial para as intuições espaciais. Mais do que isso, podemos ver que tais teses são muito caras à tradição analítica, e que o abandono radical delas se deve, em certa medida, a uma "guinada logicista radical" que, a meu ver, pode facilmente desvirtuar a prática filosófica, que dessa maneira se transforma em um pretenso *discurso científico* - sem respeitar a especificidade filosófica, tornando-o de pouco, talvez nenhum, valor.

De fato, em (WILLIAMSON, 2014), ele afirma:

> "Oponentes da filosofia analítica frequentemente a associam com o positivismo lógico. De um ponto de vista histórico, é claro que um importante fator no desenvolvimento da grande tradição conhecida como "filosofia analítica" foi,

> sem dúvidas, o positivismo lógico do círculo de Viena, com seu austero princípio de significado verificacionista e sua exclusão da metafísica, como cognitivamente sem sentido. Outro fator de desenvolvimento da filosofia analítica, a filosofia da linguagem comum, tende a considerar igualmente suspeita a forma com a qual metafísicos fazem o uso livre de palavras comuns, distante do sentido que elas têm no seu uso do dia-a-dia, sentido esse que deste uso dependeria. Apesar dessa história, contudo, as décadas recentes viram o crescimento e florescimento de ousadas metafísicas especulativas internamente à tradição analítica. Longe de terem sido inibidas pelos escrúpulos do positivismo lógico ou da filosofia da linguagem, tais metafísicas analíticas podem ser descritas, por aqueles não simpáticos a elas, como *pre-críticas*, se apoiando para além da experiência, mais próximas, em espírito, de Leibniz do que de Kant."(p. 7 - tradução livre)

Com isso, julgo que é possível uma abordagem filosófica, ainda que assumindo certo alicerce lógico, que também se assente, de alguma forma, a aspectos da experiência, justificando:

Hipótese Epistemológica-Kantiana [H 2.3]:

Consideremos altamente confiáveis as informações mais básicas recebidas pelos sentidos e compartilhadas pela grande maioria dos sujeitos pensantes. Tais intuições aumentam a confiabilidade de nossas crenças mais básicas sobre o mundo vivido. Em certo sentido, adotemos uma posição epistemológica moderada entre o racionalismo e o empirismo, na medida em que aceitemos algum tipo de apriorismo de certas noções sensíveis irredutíveis, como o espaço e o tempo, e que os dados sensíveis são os blocos de construção utilizados pela razão na sua operação de formulação de conceitos e juízos.

1.3.3 Hipótese Epistemológica-Carnapiana

Na sua tese de doutoramento *Der Raum* ((CARNAP, 1922)), de 1922, Carnap utiliza-se de uma filosofia da matemática fortemente influenciada pela teoria kantiana da intuição, mais especificamente da intuição espacial.

Nela, ele considera que as abordagens para o noção de *espaço* oferecidas por Russel e Hilbert (formal/lógico), Einstein - entre outros - (de natureza empírica/física) e por Kant e Husserl (intuitivo), estão todas corretas quando compreendidas a partir de suas distintas especificidades, já que todas falam sobre diferentes significados para o termo "espaço". Apesar de posteriormente abandonar uma noção de espaço intuitivo (*a priori*), Carnap continua a manter ao longo de sua obra alguns aspectos epistemológicos da teoria kantiana.

Em *Der Raum* está presente a tese kantiana de que a estrutura geométrica do espaço é determinada pela forma de nossa intuição (espacial); em um capítulo sobre o espaço intuitivo, Carnap procura generalizar a estrutura euclidiana global do espaço, já que Kant adota a geometria euclidiana para nossa intuição espacial (exterior), de maneira que as geometrias não-euclidianas (de curvaturas variáveis) pudessem ser usadas em argumentos que invocassem o mesmo tipo de intuição espacial, já que a teoria da relatividade de Einstein exige, para a noção de espaço físico, tal tipo de geometria. Para isso, ele opera uma reorganização da axiomática de Hilbert (David Hilbert: 1862 - 1943) para a geometria euclidiana de maneira a descrever, com essa nova axiomática, uma estrutura necessária (*a priori*) de toda região pequena (local) do espaço, da forma como ela se apresenta imediatamente a nós ((HUSSERL, 1999)). Então, uma estrutura métrica é adicionada a limitadas (muito pequenas) regiões do espaço. Dessa forma, a estrutura global é determinada por postulados que estipulam como essas estruturas locais (geometria euclidiana) e infinitesimais (métricas) devem ser "coladas". Essa estrutura global passa então a satisfazer a estrutura do espaço físico (espaço-tempo) utilizada por Einstein, a saber, variedades que localmente são difeomórficas[49] ao espaço euclidiano e que, como um todo, admitem uma geometria (semi) riemanniana com curvatura variável[50].

A tese de Carnap em *Der Raum* é de que apenas as estruturas topológicas locais do espaço (geométrico) podem ser substrato (necessário) para os fatos que obtemos da experiência sensorial e, portanto, essas estruturas se impõem univocamente. Já as métricas são resultado de escolhas livres realizadas posteriormente. A estrutura generalizada evidencia a forma de intuição que possuímos para o espaço, sendo compatível com todas as estruturas métricas riemanianas possíveis ((FRIEDMAN, 2015)).

> "Tem sido discutido frequentemente, por matemáticos assim como por filósofos, que o argumento de Kant acerca do significado do espaço para a experiência não é abalado pela teoria dos espaços não-euclidianos, mas que esse precisaria ser reformulado, a partir do sistema euclidiano tridimensional, o único conhecido por ele, para um mais geral. (...) De acordo com essas reflexões anteriores, o argumento de Kant deve ser aceito. O sistema espacial que possui significado para constituir a experiência, no lugar daquele sugerido por Kant, pode ser precisamente especificado com um espaço topológico intuitivo com indefinidamente muitas dimensões. Dito isso, não somente os atributos desse

[49] Isomorfismo suave entre variedades diferenciáveis, i.e., o homomorfismo é contínuo e inversível, em que tanto ele quanto sua inversa são suaves (possuem derivadas de todas as ordens).

[50] Em (FRIEDMAN, 2015) Friedman aponta para um erro técnico cometido por Carnap nessa reestruturação da axiomática de Hilbert. Este erro não é desprezível, mas como nosso intuito não é o de dar um tratamento formal sobre esse problema, nos restringiremos a discutir a tese de Carnap e reivindicar suas conclusões como hipóteses de forte apelo filosófico. Superficialmente, o erro cometido por Carnap estaria em ter tomado como equivalentes certas estruturas geométricas projetivas e estruturas topológicas; enquanto a última seria comum a todas as variedades tridimensionais - mesmo com curvaturas variáveis, as estruturas projetivas só seriam comuns a estruturas de curvatura constante, independentemente do sinal dessa curvatura.

> sistema, mas ao mesmo tempo aqueles com a mesma estrutura são ditos serem condições de possibilidade para a experiência de qualquer objeto que seja."(p. 5 - tradução livre)

Essa posição de Carnap foi se alterando ao longo do tempo. Em 1924 ele defendeu que o espaço que possui uma forma necessária não era mais o espaço topológico tridimensional intuitivo (mundo físico), mais o bidimensional, relativo ao nosso campo de visão. Nessa mesma época apontou para o problema epistemológico de distinguir as experiências subjetivas e privadas daquelas do mundo físico exterior. Essas teses se alinham com alguns dos problemas tratados pelo Wittgenstein da maturidade - (TRAJAN, 2010).

Já em 1928, com a publicação de sua obra *Aufbau* ((CARNAP, 1928) - cuja tradução para o Inglês seria autorizada somente em 1967) Carnap abandona a ideia de que haveria uma noção necessária para a forma da percepção do espaço, logo há um distanciamento da teoria das intuições puras kantianas, principalmente aquela referente ao espaço, assim como da admissão de proposições sintéticas *a priori*. Ele passa a aceitar o apriorismo para experiências que se constituem de conceitos que são lógico-formais. O espaço (no sentido físico) passa a ser considerado como aquilo que, no *Der Raum*, era tido como espaço formal. Dessa forma, somente a estrutura topológica de $\mathbb{R}^4$ é considerada uma constituidora da experiência do espaço-tempo, de forma que $\mathbb{R}^3$ constitui o substrato para o espaço físico e $\mathbb{R}$ para o tempo. Assim, tempo e espaço (no sentido físico), passam a figurar como representações formais, coordenadas de um sistema espaço-temporal, mas não são identificados como meras entidades formais, porém introduzidos como percepções essenciais e, nesse sentido, intuitivos, i.e., espaço e tempo (no sentido físico) permanecem dependentes de um espaço e de um tempo da percepção, esses intuitivos, embora não mais *a priori*, como na teoria kantiana.

Não me atentarei a uma minuciosa análise dos pormenores da obra filosófica de Carnap e sua evolução, mas apenas em mostrar que essa noção intuitiva do espaço, seja em um sentido forte (*a priori*) como utilizado por Kant, seja em um sentido relativizado, como aplicado por ele na *Aufbau*, constituidora da forma com a qual formamos nossas experiências (privadas ou exteriores), é uma poderosa hipótese sobre os limites da constituição de nossos conhecimentos e da interação entre experiência e razão. Essa hipótese é fortalecida pelo fato de que, na física contemporânea, apesar da estrutura global requerida para o espaço físico pela teoria da relatividade geral não ser euclidiana (forma do espaço físico defendida por Kant), como por milênios se acreditava, as variedades riemaniannas são, localmente, estruturas topologicamente equivalentes ao espaço euclidiano de três dimensões (quando observado apenas o "caráter físico" do espaço). Sendo assim, os dados recebidos por nossa percepção, apesar dos limites físicos que nos são impostos, são coerentes com o grande quadro da estrutura geométrica local do universo (modelo físico contemporâneo); essa coerência parece apontar para uma explicação sobre o mundo - sobre sua forma e estrutura - que está mais aproximada de sua verdade do que jamais obtivemos antes, dando conta das discrepâncias encontradas em níveis globais e locais (relatividade e teoria quântica). Podemos, a partir disso, assumir.

Hipótese Epistemológica-Carnapiana [H 2.4]:

Estruturas locais do espaço físico são substrato necessário para a aquirição dos dados sensíveis. Logo, tais estruturas se impõem univocamente à razão. Podemos abarcar racionalmente essas estruturas por meio da linguagem topológica; elas se comportam como generalizações de estruturas métricas, estruturas posteriormente escolhidas pelo sujeito - portanto são mais fundamentais, já que as estruturas métricas são obtidas, a partir das topológicas, por meio da explicitação de um sistema de orientação (referencial). De acordo com essa tese defendida por Carnap em Der Raum*, noções topológicas evidenciam nossa forma de intuição do espaço - portanto imediata.*

1.4 Reflexões

Sobre o Problema da Verdade

Consideremos um breve exemplo a seguir para ilustrarmos a problemática relativa à noção de verdade.

Suponhamos que João, um mecânico, há muito tempo deixou de trabalhar em uma grande indústria de peças mecânicas e montou um estabelecimento comercial, onde sempre mantinha uma aprendiz; por razões diversas, um de seus antigos chefes decidiu-se vingar do antigo funcionário e, sem o conhecimento de ninguém, conseguiu colocar uma peça defeituosa na oficina de João.

Certo dia, Paulo foi até a oficina de João para um reparo na parte hidráulica de seu automóvel. O aprendiz observou cuidadosamente o procedimento realizado por João no veículo de Paulo. Após sair da oficina, Paulo estava dirigindo despreocupadamente e, ao observar que um semáforo havia acabado de se fechar, apesar de estar dentro do limite de velocidade da via, não conseguiu parar o carro devido a uma falha no sistema de freios, resultando no atropelamento e morte de um pedestre.

No julgamento de Paulo encontrava-se em discussão a tese sobre a culpabilidade de Paulo pela morte do pedestre. A primeira testemunha acreditava na culpa do réu, por afirmar que ele, mesmo dentro dos limites de velocidade, não respeitou o semáforo e a ordem para parar no cruzamento. Na versão apresentada por Paulo, ele afirmou que mesmo se estivesse em velocidade menor, acreditava que ainda existiria risco ao pedestre, já que fora devido a uma falha mecânica do seu automóvel que ele não conseguiu pará-lo, seu advogado apresentou a tese de que a causa da morte do pedestre, indiretamente, fora o problema mecânico do carro de seu cliente, e anexou aos autos um laudo pericial que apontou para o defeito na peça que havia sido trocada por João. João, acusado de ter sido negligente, tentou provar, com o depoimento de seu aprendiz, que havia realizado todos os procedimentos adequados no momento do conserto do veículo. Porém, um laudo da empresa fabricante da peça utilizada demonstrou que havia ocorrido adulteração na peça, e que nenhuma outra peça do mesmo lote apresentava o mesmo problema, não sendo, portanto, um erro ocasionado pelo fabricante. Poucos dias antes do julgamento, o verdadeiro responsável pela sabotagem morreu, sem contar para mais ninguém o que havia feito para se vingar de João. Com as informações apresentadas ao júri, Paulo foi absolvido do crime, enquanto João foi considerado culpado pela adulteração da peça mecânica, sendo responsabilizado pela morte ocorrida no acidente de trânsito.

Da situação apresentada podemos retomar rapidamente o problema da verdade ao mostrarmos que, mesmo nos fatos do dia a dia, a verdade é parcial e incompleta (quase-verdade), basta observarmos as facetas sobre os fatos do mundo, e respectivos juízos de valor sobre elas, considerados indevidamente verdadeiros, por exemplo, pela testemunha do acidente, por Paulo, por João e por seu aprendiz. Em todos os casos, esses indivíduos expressaram juízos que julgavam ser verdadeiros, devido aos fatos limitados às quais tinham acesso, portanto, acreditavam serem tais crenças justificadas. Porém, em um sentido absoluto para a palavra "verdade", nenhuma das crenças proferidas no julgamento eram verdadeiras em relação ao fator causal do acidente que levou à morte do pedestre, a saber o ato deliberado de adulteração e troca de uma peça do estoque. Tal verdade completa sobre o mundo está perdida para sempre do conhecimento humano, já que o único detentor do conhecimento da cadeia de fatos causais que levou a essa tragédia, morreu sem compartilhar essas informações.

Assim, parece-me uma atitude comedida sempre levantar dúvidas a respeito de toda e qualquer afirmação que encontrarmos; todavia, essa dúvida não deve ser radical, pois isso nos afastaria da possibilidade de falarmos significativamente sobre o mundo. A dúvida nos protege de erros desmedidos, a inquirição e a tentativa de justificação nos aproximam do conhecimento e, portanto, nos levam para mais próximos da verdade.

A justificação de crenças, por seu turno, pode nos levar a um impasse entre o problema do indivíduo isolado em si mesmo e o de explicitar os mecanismos de interação entre experiência e razão. Me parece que uma posição similar àquela proposta por Kant reside, como conciliatória, entre dois extremos. Como vimos, Kant defendeu que o espaço e o tempo são as formas que condicionam todas as intuições sensíveis e, por isso, por serem condições para a intuição de tudo que é exterior, são estruturas *a priori* do sujeito, i.e., condições pelas quais os fenômenos podem ser apercebidos, e não condição de existência das coisas-em-si. Tal posição possui dois benefícios: 1) não nos compromete com a realidade objetiva dos objetos, apenas com a percepçao dos fenômenos recebidos por meios da percepção sensível e 2) explicita a relação - sem primazia - entre intelecto e sentidos, ou como Kant coloca, entre sensibilidade e entendimento; a postulação desses dois ramos com mesma raiz, responsáveis pela construção de todo conhecimento humano, nos ajuda a compreender o quanto racionalistas, assim como empiristas, estão parcialmente corretos nas descrições de como podemos justificar crenças verdadeiras, de maneira a obtermos conhecimento, ou graus de verdade, sobre o que dizemos a respeito dos fatos do mundo, já que não teríamos acesso à verdade total de todos eles[51].

Um ponto que precisa ficar claro é que, embora para Kant todo conhecimento principia-se pela experiência, pois exige elementos fundamentais que são intuídos por meios sensíveis, isso não implica que todo conhecimento deriva-se da experiência, tendo em vista, por exemplo, a afirmação analítica[52] 'Todo homem solteiro não é casado'. Segundo Kant, precisamos da intuição pura (espaço e tempo) para operarmos, no entendimento, a separação entre sujeito e predicado, mas nesse caso, como o predicado (não ser casado) está contido no sujeito (homem solteiro), não precisamos de nenhuma experiência de qualquer fenômeno exterior para derivar o conhecimento dessa sentença, ou seja, entendermos que ela é uma crença justificada (uma verdade).

Sobre o Problema da Justificação

Gostaria também de justificar a ideia de que o espaço se apresenta (inteligivelmente) de uma forma intuitiva e necessária ao sujeito cognoscente, suporte para a representação de todas as ideias do intelecto, a partir do exame de uma situação hipotética e limítrofe.

Línguas de diferentes especificidades, como a língua portuguesa e a japonesa, nos mostram que a forma com que pensamos e construímos ideias complexas depende dos símbolos que possuímos para representar os conteúdos dessas ideias e da própria lógica interna à língua utilizada; no Português, o encadeamento das sílabas forma palavras, signos que representam certos conteúdos (concretos ou abstratos), enquanto em partes da língua escrita japonesa, os ideogramas carregam significados que, dependendo da composição, passam a representar conteúdos complexos de sentenças - os signos carregam um conteúdo na sua totalidade.

Similarmente, surdos de nascença que utilizam a linguagem de sinais demonstram, quando incentivados a utilizar a linguagem escrita (ver (BARBOSA, 2013)), uma estrutura textual muito diferente dos não-surdos, mesmos quando ambos utilizam a mesma "língua formal" (por exemplo, língua portuguesa e libras). Esses exemplos nos mostram que há

[51] Ver (COSTA-LEITE,).
[52] Em Kant, analiticidade e necessidade não são sinônimos.

uma profunda conexão entre a concatenação de ideias fundamentais (representações) com o ambiente linguístico que se coloca ao indivíduo. Porém, há um substrato comum, identificado pelo conteúdo das intuições que podemos ter daquelas coisas que percebemos pelos sentidos.

Imaginemos agora que um indivíduo surdo-mudo de nascença tenha que construir representações para as coisas exteriores a ele. Essas representações não possuirão nenhum tipo de conexão sonora, como as lembranças de uma criança que ouvia sua avó cantando para ela dormir. Suponhamos que tal indivíduo seja também cego, nesse caso, as representações não terão cores (ou ele não será capaz de identificá-las em um sistema de códigos linguístico), embora possam ter formatos, tendo em vista que que há ainda a presença do tato para fornecer os conteúdos necessários à construção de representações sensoriais (pela razão). Se retirarmos desse indivíduo também o olfato e o paladar, tornaríamos extremamente difícil a criação de conexões entre os dados recebidos pelo tato e todas as demais coisas que são percebidas no mundo a partir de outros sentidos, já que essa pessoa não poderia mais diferenciar dois objetos quaisquer de mesmo formato por meio da cor, cheiro ou gosto. Ainda assim, por meio do tato, ela poderia representar algo do objeto, algo que está alocado no espaço de sua representação cognitiva, a representação da percepção da *forma* do objeto.

Agora, o que aconteceria se fôssemos mais cruéis e retirássemos desse indivíduo, além de todos esses sentidos, o seu tato? É difícil imaginarmos uma pessoa nessas condições que seja capaz de ter conteúdos de ideias complexas, minimamente organizadas em certos tipos de representação, já que não haveria para isso nenhum material, sonoro, figurativo, imagético ou abstrato, para serem utilizados como matéria prima para a formação dessas representações ou construção das ideias.

Antes de David Hume (1711 - 1773), John Locke (1603 - 1794) postulara a necessidade dos sentidos para a contrução das ideias, o que parece legitimar as conclusões dessa experiência mental que realizamos. Na verdade, o empirismo britânico retoma a tese aristotélica de que não há construção de ideias sem os dados do sentidos. Mesmo George Berkeley (1685 - 1753), que é capaz de negar, internamente à sua argumentação, a existência do mundo exterior, reconhece que todo conhecimento provém dos sentidos, mesmo que o que seja experimentado por nós não seja consequência, ou fenômeno, proveniente diretamente da coisa mesma - externa ao sujeito, mas apenas sensações colocadas e organizadas em nossa consciência por Deus.

No fundo da consciência daquele indivíduo de nosso experimento, privado desde seu nascimento de todos os seus sentidos, é difícil supormos que, se vivo, seria incapaz de ter “consciência de si” no mundo. Essa consciência residiria em um espaço de representação que lhe é único e, nos parece, muito semelhante àquele que vivenciamos ao fecharmos nossos olhos, desfazendo-nos de todas nossas ideias, em um processo de autorreflexão[53]. Acredito que aí reside o espaço bruto, fundamental, de representações de nossos conteúdos cognitivos. No sentido kantiano, ele é *a priori*, tendo a forma de uma intuição pura (sem a exigência da experiência), substrato necessário para que o entendimento possa operar as açoes da razão na operação de formação "imagética" de representações.

Será que esse indivíduo que mencionamos, tendo nascido privado de todos seus sentidos, teria o mesmo espaço interno de representações do "meu" *eu*? Se tal espaço for uma estrutura *a priori* de nossas categorias de entendimento, como argumenta Kant, é plausível supor que a resposta para essa pergunta é positiva. Mais ainda, pode-se perguntar se ele terá a forma do espaço euclidiano tridimensional, seja esta percepção condicionada por certas estruturas inatas, como Kant advogou, seja por ser condicionada pelo próprio mundo?[54]

Pelo experimento realizado, podemos responder que não: há uma distinção entre o espaço metafísico, *a priori*, substrato, e o que informalmente estávamos chamando por espaço de representação. Porém, também este espaço de representação difere do espaço físico, que "se apresenta" como exterior. Logo, consideremos o espaço metafísico *a priori* como primevo, substrato irredutível para os "espaços" responsáveis pela captação dos dados sensíveis, abstração e raciocínio lógico.

Posso agora delinear definições não formais sobre três conceitos: *espaço físico*, *espaço de representação* e *espaço lógico*.

O **espaço físico** refere-se à percepção que o sujeito tem, ou apreende, de imersão: o pertencimento a um certo tecido de sustentação material. Quando teoriza-se sobre problemas de geometria e/ou física (química - no limite), teoriza-se sobre esse substrato que suporta aquilo que acreditamos ser as coisas-mesmas, lugar de onde provém os fenômenos percebidos pelos sentidos[55].

Os sentidos, por sua vez, conforme Descartes já demonstrou nas *Meditações Metafísicas* (DESCARTES, 2001), não são confiáveis - de fato, parece que podemos nos fiar, somente, em certas impressões mais elementares, primitivas e estruturantes, de percepção que temos, a nível local, da estrutura desse substrato - seja física ou temporal. Digamos que tais impressões, embora não conhecemos sua origem e determinação, possuam esse caráter apriorístico das intuições puras kantianas, em especial, a intuição espacial.

Tais impressões que afetam os sentidos e que, portanto, determinam a forma como capturamos esse substrato no qual temos a sensação de estarmos mergulhados (ou é por

[53] Diferente de nós, ele não teriam um outro qualquer, externo, para contrapor-se a si-mesmo, já que não teria forma, visão, olfato, paladar ou tato para re-presentar a *forma* de um algo diferente da consciência de si.

[54] E se novos sentidos fossem incluídos, novas características (de percepção) poderiam surgir?

[55] Neste sentido, o *espaço geométrico* seria uma decodificação formal utilizada para descrever, em certos códigos, o espaço físico. Portanto, enquanto o físico é um espaço imediado, o geométrico é mediado.

ele determinada), vincula uma conexão local indissolúvel entre as formas (*eidos*) que utilizamos para representar mentalmente conceitos, relações, recordar momentos e, de fato, afigurar os nossos pensamentos. Chamemos o "local" de desenlace e re-presentação de tal atividade de **espaço de representação**.

Por fim, há essa estrutura para a consciência do ser pensante, como indivíduo que se compreende e olha a si mesmo, como ser pensante, que é a racionalidade. Digamos que essa *abertura*[56] do homem para o mundo, e que ao mesmo tempo é abertura para dentro, é capaz de organizar-se a si-mesma, estruturando-se, por meio de um auto-padrão interno. Assim, nas construções racionais que norteiam a abertura na estruturação de seu discurso (*logos*), opera princípios e leis fundamentais, que podemos denominar de princípios e leis *lógicas* - tais "regras" compõem aqui o que podemos denominar de **espaço lógico**, ou seja, a estrutura elementar que permite a racionalidade controlar-se ou vigiar-se a si mesma.

Agora, podemos alargar nossa hípótese H 1.3, considerando a hipótese assuminda H 1.7, assim como as discussões e hipóteses dessa seção, para estabelecer a perspectiva que defendo neste trabalho:

Hipótese Filosófico-Matemática [H 2.5]:

Assumindo parcialmente a posição de Brentano - para quem o método filosófico não poderia ser diferente do das ciências naturais[57] *(ver (BRENTANO, 2004)), mas respeitando sua especificidade, como defendido por Husserl, e admitindo a hipótese H 2.4, postulamos a associação, formando um* par metodológico*, da investigação filosófica sobre a "estrutura do mundo" com a teoria dos espaços topológicos, já que a* topologia *é a área da matemática que lida com a estrutura (geométrica) do "espaço" na sua mais completa generalidade.*

[56] Obviamente, o termo aqui não está sendo utilizado como encontramos em Heidegger (ver (HEIDEGGER, 2018)), porém ele foi escolhido não só para reforçar a imagem do que se pretende afirmar, mas por reforçar fortemente essa especificidade do homem, como homem - compreendido metafisicamente pelo conceito de *dasein*.

[57] Vera philosophiae methodus nulla alia nisi scientiae naturalis est (1866).

2 Lógica Modal

Compreende-se como lógica modal qualquer sistema lógico em que são válidos os princípios e leis da lógica clássica, mas que além dos operadores verofuncionais, existe uma coleção de operadores modais que são irredutíveis por operadores lógicos clássicos. Um sistema de lógica modal proposicional é, portanto, um sistema construído sobre a linguagem ampliada da linguagem proposicional, com o acréscimo dos operadores modais e das respectivas regras de boa formação, de maneira a acrescenter à formulação sintática da lógica clássica os axiomas que introduzem a interação entre os conectivos clássicos e modais, mais as regras de inferência para fórmulas envolvendo tais operadores[1].

No presente trabalho, considerarei um sistema modal com o acréscimo dos operadores de *necessidade* ($\Box$) e *possibilidade* ($\Diamond$), i.e., uma abordagem *standard* para sistemas modais aléticos. No presente texto, lógica modal e lógica modal alética serão tratadas como sinônimos ao pensarmos na aplicação ou interpretação de um sistema lógico.

[1] Pode-se construir novos sistemas modais mais "complexos", a partir de outros mais simples, por meio de construções matemáticas, como as lógicas modais multidimensionais. Não tenho interesse no estudo desses sistemas no presente trabalho, mas o processo de construção desses sistemas, dadas as modificações pertinentes, pode ser genericamente descrito como acima.

2.1 Lógica e Metafísica

Seja uma linguagem proposicional enumerável L[2] e S um sistema de lógica clássica construído sobre essa linguagem, de maneira que há (esquemas[3] de) axiomas[4] e regras de inferência (*modus ponens*) que regulam a noção de dedução lógica ($\vdash_S$) nesse sistema[5]. Como os operadores de S são verofuncionais, sabemos que podemos adotar como primitivos a negação ($\neg$) e a conjunção ($\wedge$), por exemplo. Adotarei esses operadores primitivos para facilitarmos as demonstrações. Todavia, faremos diversas vezes menção aos significados das operações sobre as estruturas interpretativas para realçar o caráter intuitivo dessas relações lógicas a partir das relações (conjuntistas) internas à estrutura.

Devemos notar que serão chamados de *teoremas* as fórmulas de L que são deduzidas utilizando somente os axiomas e as regras de inferência do sistema, i.e., α é teorema se e somente se $\vdash_S \alpha$ (quando estiver implícito, omitiremos o sistema S). Além disso, em S vale o *teorema da dedução*, a saber:

$$\Gamma, \alpha \vdash_S \beta \text{ se e somente se } \Gamma \vdash_S \alpha \supset \beta$$

Seja $L_p \subset L$ o subconjunto formado por todas as variáveis proposicionais de L (fórmulas atômicas) e v uma função que atribui a cada $p \in L_p$ o valor 0 ou 1. Uma semântica V para S é uma extensão de v, tal que $V : For(L) \to \{0, 1\}$ e satisfaz:

i) Se $\alpha \in L$, então $V(\neg\alpha) = 1 - V(\alpha)$

ii) Se α e β são elementos de L, então $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \cdot V(\beta)$

Nesse caso, o operador V é chamado de *valoração booleana*, que atribui valores de verdade (0 para falso e 1 para verdadeiro) às fórmulas de L; se considerarmos que as variáveis proposicionais representam os fatos mais simples do mundo, as proposições mais elementares - que não podem ser "quebradas" pelo uso dos recursos lógicos (conectivos) da linguagem, as valorações do tipo v atribuem valor de verdade 1 para esses fatos atômicos do mundo, e a valoração booleana V atribui 1 para todos os outros fatos "verdadeiros" (fórmulas não-atômicas), obtidos por meio do "cálculo booleano" a partir dos princípios lógicos clássicos. É dito então que uma fórmula é satisfatível se existir uma valoração que

[2] Contém variáveis proposicionais (digamos $p_1, p_2, \ldots$), os conectivos verofuncionais (operadores lógicos), regras para formação de fórmulas bem formadas e parênteses - quando não for necessário, eles poderão ser omitidos das fórmulas.

[3] Com a inclusão de esquemas de axiomas, podemos evitar a inclusão da regra da substituição.

[4] Uma axiomatização para S pode ser encontrada em (ACKERMANN; HILBERT, 1968) ou (TARSKI, 1956a).

[5] Uma dedução de α à partir de um subconjunto Γ de fórmulas de L é uma sequência finita de fórmulas de Γ, de axiomas ou fórmulas inferidas por meio das regras de inferência à partir de fórmulas anteriores da sequência, de maneira que a última fórmula é α. Notação: $\Gamma \vdash_S \alpha$.

retorne valor 1 para a fórmula (insatisfatível caso contrário); se uma fórmula for satisfeita por todas as valorações, então ela é válida.

Dada uma fórmula de L com quantidade finita de variáveis proposicionais, as conhecidas tabelas de verdade para essa fórmula mostram os valores de verdade da respectiva fórmula para as diferentes possibilidades de valorações (linhas da tabela), em relação apenas à atribuição de valores para as variáveis proposicionais que aparecem na fórmula, já que o que essa valoração atribui para todos os outros valores (variáveis não significativas) passa a ser indiferente para o valor de verdade da referida fórmula. Ou seja, as linhas de uma tabela de verdade para uma fórmula correspondem às possibilidades de combinações das condições elementares dos fatos simples do mundo que impactam na determinação da condição de verdade da fórmula. Sabemos que a lógica clássica é completa em relação ao cálculo booleano como descrito pelas tabelas de verdade.

No cálculo dos teoremas do sistema S, utilizamos os axiomas e as regras de inferência para deduzir as *consequências necessárias* desse sistema, ou seja, as *tautologias*. Quando calculamos as tabelas de verdade (semântica) das fórmulas tautológicas, para qualquer distribuição de valores para as variáveis proposicionais, o valor resultante da valoração é igual a 1, i.e., qualquer que seja a "configuração do mundo" (distribuição de valores de verdade para as variáveis proposicionais ou "fatos brutos do mundo" (verdadeiros)), essa fórmula é sempre verdadeira. Portanto, como Wittgenstein afirmou no *Tratactus* (ver capítulo 1), a verdade dessas fórmulas não depende do sentido que elas expressam, mas simplesmente da *forma* que exibem. O mesmo raciocínio pode ser feito para as *contradições*.

Portanto, a lógica clássica nos fornece ferramentas para separar, a partir dos fatos do mundo, quais possuem valor de verdade devido a seu formato (contradições e tautologias) e quais dependem do seu conteúdo, do significado dessas proposições, para exibirem um valor de verdade. Todavia, isso não é o bastante para discutirmos quais tipos de relações entre os fatos do mundo são necessários e quais são contingentes, mesmo quais são possíveis, já que somente por meio da investigação das fronteiras do que é possível se afirmar sobre o *mundo* - entendido como cosmos ou totalidade - é que podemos compreender, mais profundamente, o tecido do real (ver ((COSTA-LEITE, 2012)).

Se desejamos investigar os limites do possível, e considerando que estamos presos ao uso de nossa linguagem, ou seja, presos àquilo que é possível ser pensado e representado, podemos apenas reconhecer os fatos sobre o mundo da maneira como podem ser representados e comunicados. Mas se mesmo as verdades absolutas do mundo são, em última instância e na sua grande maioria, inalcançáveis - por serem transcendentes ao mundo do qual fazemos parte[6] - resta-nos compreender a relação desses fatos do mundo a

[6] Todo fato verdadeiro sobre o mundo é imanente a ele, mas sua apreensão total só é possível "de fora",

partir das relações internas entre as representações desses fatos, às quais temos acesso.

Denominarei como proposição uma expressão que diz algo sobre o mundo; essa proposição pode ser representada pelo símbolo proposicional p. As proposições são verdadeiras se for o caso de que há no mundo, independentemente do tempo[7], um acontecimento no qual a relação entre representação e conteúdo seja verificada, ou seja, há algo no mundo que corresponda a esse fato representado na linguagem pelo símbolo proposicional (ou fórmulas).

Nesse momento precisamos fazer uma distinção entre os fatos do mundo, como uma totalidade acabada e transcendente ao próprio mundo, e os contextos racionais próprios de inferência lógica, que são regulados por certos princípios distintos daqueles da lógica clássica (capítulo 1). Sabemos que, à luz na mecânica quântica, não podemos afirmar com precisão a posição e a velocidade de uma partícula, pois quanto maior a precisão na posição, menor será a precisão de sua velocidade; nesse sentido, inferências sobre proposições que envolvam conceitos quânticos são realizadas em contextos nos quais algumas leis lógicas clássicas não são válidas. O mesmo pode ser dito para inferências relativas a proposições que envolvam noções como dever, crença, sentimentos etc. Porém, afirmo que, embora cada uma dessas proposições sejam reguladas, internamente a um discurso, por contextos racionais distintos, que guiam o processso de inferência lógica internamente ao conteúdo desses contextos, as proposições - separadamente - representam fatos brutos sobre o mundo, sendo verdadeiras ou falsas no mundo atual, i.e., desejamos afirmar que coisas como atitudes proposicionais, por exemplo, podem ser transformadas em fatos sobre o mundo, de maneira que essas novas proposições (traduzidas como fatos brutos) passam a operar sobre o contexto racional da lógica clássica, participando assim de estados de coisas que descrevem possibilidades de configuração do mundo.

Por exemplo, a sentença 'A crê que p', embora não possa ser utilizada para inferências em contextos clássicos (verbo "crer"), pode ser transformada em uma proposição que representa um fato de uma configuração do mundo: é fato que A quê que p. Problemas relativos a tempo também podem ser subsumidos em um contexto clássico ao transformarmos a sentença 'A perguntou para B: você está com fome?' na seguinte proposição: é fato que A, no tempo t e no lugar j, perguntou para B: você está com fome?.

Minha ideia é que, embora contextos racionais distintos existam para nortear o processo de inferência ("cálculo" de conclusões) em certos contextos distintos do clássico, como discutimos no capítulo 1, qualquer fato sobre o mundo (verdadeiro ou falso) pode

subsumido em sua totalidade, que é transcendente ao mundo.

[7] Acredito que essa posição possa ser adotada, pois pretendo obter uma abordagem metafísica a respeito do mundo, entendido em sua totalidade e forma, apenas. O mesmo não seria possível caso os operadores modais se referissem ao tempo (lógica temporal); nesse caso, o contexto racional no qual os argumentos são apresentados exige e a interação dos fatos do mundo com uma perspectiva temporal entre eles - já que procura-se calcular como, a partir dos fatos do mundo, podemos obter outros fatos do mundo que são consequências lógicas de relações temporais entre eles.

ser traduzido por uma proposição - que descreve aquele fato sobre o mundo - e essa, no contexto da lógica clássica, se torna elemento de constituição de estados de coisas, formas como o mundo poderia (ou poderá) assumir[8]. Representemos então os fatos que foram, são ou que serão em determinada configuração do mundo, de maneira a compreender a totalidade configuracional dos fatos possíveis, analisando dessa forma os limites do possível e a estrutura do mundo - nos limites do que é cognoscível ao homem. Isto representará para nós o conteúdo das fórmulas dessa linguagem idealizada.

2.2 Lógica Modal Proposicional

Sejam $\mathcal{L}$ a linguagem obtida ao ampliarmos L com o acréscimo de dois operadores modais, $\Box$ e $\Diamond$, mais a seguinte regra de formação: Se α é fórmula bem formada, então $\#\alpha$ é uma fórmula bem formada da linguagem ampliada, em que $\#$ representa um dos operadores modais. Interpretaremos $\Box\alpha$ como: α é necessária, e $\Diamond\alpha$ como: α é possível. Nessa interpretação *standard* dos operadores modais, podemos assumir o operador de necessidade como primitivo:

$\Diamond\alpha =_{df} \neg\Box\neg\alpha$

Um sistema modal proposicional $\mathcal{S}$ é obtido ao ampliarmos o sistema S com a inclusão de (esquemas) axiomas e regras de inferência específicas para fórmulas contendo os operadores modais. Portanto, podemos construir diversos sistemas modais ao acrescentarmos diferentes (esquemas) axiomas - cada axioma carrega certas "teses filosóficas" ao sistema. As variáveis proposicionais de $\mathcal{L}$ representam fatos que podem ser o caso (inteligíveis).

É importante notarmos que o *teorema da dedução*, em geral, não vale para os sistemas modais. Isso se deve às suposições (fórmulas de Γ) envolvidas, se são axiomas, hipóteses globais ou locais. Para mais detalhes (ver (FITTING; MENDELSOHN, 1998) ou (HAKLI; NERI, 2010)).

Observação 1) Da maneira como $\mathcal{S}$ foi construído, podemos rapidamente inferir que todo teorema da lógica proposicional clássica também é teorema desse sistema.

Observação 2) Os sistemas $\mathcal{S}$ que estamos interessados (por motivos filosóficos - ver capítulos 3, 4 e 5) em investigar satisfazem o seguinte esquema de axioma para todas as fórmulas α e β de $\mathcal{L}$:

K: $\Box(\alpha \supset \beta) \supset (\Box\alpha \supset \Box\beta)$

Um sistema que possui o axioma K, as regras de *necessitação* e *modus ponens* é

[8] Se estivermos apenas interessados em entender a relação entre estes fatos brutos do mundo. Não desejo inferir as consequências desses fatos "no" mundo - ai, as inferências dependeriam dos princípios lógicos do contexto racional em que eles ocorrem.

denominado *normal*. O sistema **K** é o menor sistema modal normal.

Observação 3) Outros esquemas de axiomas importantes (considere $\alpha \in For(\mathcal{L})$):

T: $\Box\alpha \supset \alpha$

B: $\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$

4: $\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$

E: $\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$

Observação 4) Os sistemas modais (normais) que mais serão discutidos nesse trabalho são: **K**, cujo único axioma modal é o axioma K; **S4**, obtido pela inclusão no sistema **K** de dois axiomas modais: T e 4, e **S5**, obtido pela inclusão no sistema K de dois axiomas modais: T e E (ou T, 4 e B). Dessa construção segue que **S4** é subsistema (próprio) de **S5**.

Uma posição que procuro defender é que investigar estruturas interpretativas para sistemas lógicos (em específico a lógica modal) contribui para melhor compreender os princípios reguladores dos contextos racionais representados pelos sistemas lógicos - hipótese H 1.7.

Relativamente à lógica modal, os trabalhos de A. Tarski e J.C. McKinsey ((TARSKI; MCKINSEY, 1944) ou (TARSKI, 1956b), por exemplo) foram cruciais, ainda na década de 1940, para desenvolver uma teoria de correspondência semântica (algébrica) para os sistemas lógicos[9]. Após os trabalhos de Saul Kripke (década de 1960) e a semântica de mundos possíveis, sobre o qual discorremos mais detalhadamente nas próximas seções, E. J. Lemmon e D. Scott apresentaram, em meados da década de 1970, uma importante relação entre as estruturas semânticas algébricas e as estruturas de mundos possíveis - o *Teorema da Representação* (ver (GORSKY, 2008)). Enquanto as semânticas algébricas possuíam um forte aparato técnico, em comparação com a semântica proposta por Rudolf Carnap (*Meaning and Necessity* (CARNAP, 2013)), por exemplo, e pouco apelo intuitivo, a semântica de mundos posssíveis apresentava tanto o apelo filosófico-intuitivo quanto o técnico-computacional; por isso, a demonstração da "equivalência" entre esses dois tipos de estrutura acabou fortalecendo a utilização da semântica proposta por Kripke - já que essa continha a segurança (formal) das semânticas algébricas e o apelo intuitivo necessário para a construção de argumentações filosóficas - ver (COPELAND, 2002).

[9] Estruturas semânticas algébricas e topológicas podem ser colocadas em correspondência (*Teorema da Representação de Stone*) - portanto as primeiras semânticas para a lógica modal possuíam esse apelo algébrico-topológico, sendo anteriores às semânticas relacionais.

2.2.1 Axiomatização Alternativa para $S4$

De acordo com a axiomatização que apresentamos para o sistema **S4**, temos os seguintes esquemas de axiomas e regras adicionais, para φ e ψ fórmulas de $\mathcal{L}$:

1) Todos os teoremas da lógica clássica;

2) $\vdash_{S4} \varphi \Rightarrow \vdash_{S4} \Box\varphi$ (Regra de necessitação);

3) $\vdash_{S4} \Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$ (Axioma K);

4) $\vdash_{S4} \Box\varphi \supset \varphi$ (Axioma T);

5) $\vdash_{S4} \Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$ (Axioma 4).

Em (HAKLI; NERI, 2010) podemos encontrar uma discussão detalhada a respeito do teorema da dedução para a lógica modal, em que são explicitados os problemas acerca da caracterização desse resultado, de acordo com os tipos de suposições assumidas no antecedente da implicação material, se são suposições globais ou locais. Porém, sabemos que em 1946 e 1953, Barcan mostrou que o teorema da dedução - para a axiomatização padrão e suposições locais - é válido para os sistemas **S4** e **S5**, respectivamente, e que não é válido para alguns sistemas modais mais fracos, como **S2**. Portanto, assumirei esses resultados para os dois sistemas.

Definição 2.2.1. *Seja S' um sistema modal clássico que contém a regra de inferência* Modus Ponens *mais as seguintes características:*

i*) Todos os teoremas da lógica clássica;*

ii*)* $\vdash_{S'} \varphi \Rightarrow \vdash_{S'} \Box\varphi$ *(Regra de necessitação);*

iii*)* $\varphi \vdash_{S'} \psi \Rightarrow \Box\varphi \vdash_{S'} \Box\psi$ *(regra M);*

iv*)* $\vdash_{S'} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \supset \Box(\varphi \wedge \psi)$ *(esquema de axioma);*

v*)* $\vdash_{S'} \Box\varphi \supset \varphi$ *(esquema de axioma);*

vi*)* $\vdash_{S'} \Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$ *(esquema de axioma).*

Mostremos que o sistema S' é o sistema modal **S4**.

Lema 2.2.1. *S' é subsistema de* ***S4****.*

Demonstração Temos que S' já possui a regra de inferência *Modus Ponens*, a regra de necessitação, os teoremas da lógica clássica, os axiomas T (v) e 4 (vi). Mostremos que a regra de inferência *iii*) e o esquema de axioma *iv*) são válidos em **S4**.

I) Suponhamos que $\varphi \vdash_{S4} \psi$, então para todo Γ: $\Gamma, \{\varphi\} \vdash_{S4} \psi$, logo $\vdash_{S4} \varphi \supset \psi$. Pela regra de necessitação temos:

$\vdash_{S4} \Box(\varphi \supset \psi)$.

Do axioma K e aplicando *Modus Ponens* segue que $\vdash_{S4} \Box\varphi \supset \Box\psi$. Neste caso, para todo Γ é o caso que $\Gamma, \{\Box\varphi\} \vdash_{S4} \Box\psi$ e, portanto $\Box\varphi \vdash_{S4} \Box\psi$.

II) Sabe-se que em **S4** vale o teorema da dedução. Por isso, a regra M e axioma K produzem a *regra de regularidade*, regra derivada (ver (FITTING; MENDELSOHN, 1998) p. 68).

Portanto, temos a tautologia:

$\vdash_{S4} \varphi \supset (\psi \supset (\varphi \wedge \psi))$ (1)

Aplicando a regra de regularidade em (1) tem-se:

$\vdash_{S4} \Box\varphi \supset \Box(\psi \supset (\varphi \wedge \psi))$ (2)

$\vdash_{S4} \Box(\psi \supset (\varphi \wedge \psi)) \supset (\Box\psi \supset \Box(\varphi \wedge \psi))$ (3) – $Ax.K$

Por teorema da lógica clássica em (2) e (3) segue que:

$\vdash_{S4} \Box\varphi \supset (\Box\psi \supset \Box(\varphi \wedge \psi))$ (4)

Novamente por teorema da lógica clássica em (4):

$\vdash_{S4} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \supset \Box(\varphi \wedge \psi)$ (5)

■

Lema 2.2.2. *S4 é subsistema de S'.*

Demonstração Temos que **S4** já possui a regra de inferência *Modus Ponens*, a regra de necessitação, os teoremas da lógica clássica, os axiomas T e 4. Mostremos que o axioma K é teoremas de S'.

Como S' possui *MP*, segue que:

$(\varphi \supset \psi) \wedge \varphi \vdash_{S'} \psi$ (1)

Aplicando a regra M:

$\Box((\varphi \supset \psi) \wedge \varphi) \vdash_{S'} \Box\psi$ (2)

Para qualquer Γ: $\Gamma, \{\Box((\varphi \supset \psi) \wedge \varphi)\} \vdash_{S'} \Box\psi$, logo:

$\vdash_{S'} \Box((\varphi \supset \psi) \wedge \varphi) \supset \Box\psi$ (3)

Mas de *iv*):

$\vdash_{S'} (\Box(\varphi \supset \psi) \wedge \Box\varphi) \supset \Box((\varphi \supset \psi) \wedge \varphi)$ (4)

Considerando (3) + (4):

$\vdash_{S'} (\Box(\varphi \supset \psi) \wedge \Box\varphi) \supset \Box\varphi$ (5)

Aplicando teorema da lógica clássica:

$\vdash_{S'} \Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$.

■

Teorema 2.2.1. *O sistema proposicional S' é equivalente a **S4**.*

Demonstração Segue diretamene dos lemas anteriores.

■

2.3 Semântica de Mundos Possíveis

A semântica de mundos possíveis representou uma grande revolução no estudo da lógica modal, pois além de propiciar ferramentas facilmente manipuláveis para o cálculo dos valores de verdade para sentenças modais, propiciou um ambiente filosófico riquíssimo para a construção de argumentos a partir de cenários alternativos - a ideia sistematizada de *mundo possível*. Façamos uma breve descrição dessas estruturas interpretativas.

Um mundo possível na semântica de Kripke está baseado na noção leibniziana de configurações co-possíveis que poderiam ter sido atualizados por Deus (ver capítulo 1). Retornaremos a uma discussão mais detalhada do que seriam tais "mundos" no próximo capítulo. A ideia central é que tais mundos representariam configurações consistentes (maximais) de como as coisas poderiam ter sido.

Tal semântica[10] para o nosso sitema modal $\mathcal{S}$ é construída a partir de uma *estrutura* base (*frame*), que é um par $F =< W, @, R >$, onde W é o conjunto de todos os mundos possíveis, $@ \in W$ é o mundo atual e R uma relação binária em $W \times W$, denominada *relação de acessibilidade*. Um *modelo* (tradicionalmente proposto por Kripke) para o sistema é um par $\mathcal{M} =< F, V >$, em que $V : For(\mathcal{L}) \times W :\to \{0, 1\}$ é uma função que satisfaz:

i) Para cada $w \in W$, V é uma valoração booleana para as fórmulas de L (linguagem sem operadores modais).

ii) Para toda fórmula $\alpha \in For(\mathcal{L})$ e para todo $w \in W$, temos[11]:

$$V(\Box\alpha, w) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha, w') = 1 \text{ para todo } w' \in W \text{ tal que } (w, w') \in R$$

Quando $V(\alpha, w) = 1$, dizemos que α é *verdadeira*, em w, com relação ao modelo $< F, @, V >$. Quando $V(\alpha, w) = 1$ para toda valoração V de um frame F, dizemos que α

[10] Seguiremos de maneira próxima à construção exposta em (CRESSWELL; HUGHES, 1996).

[11] Similarmente, $V(\Diamond\alpha, w) = 1$ se e somente se $V(\alpha, w') = 1$ para algum $w' \in W$ tal que $(w, w') \in R$.

é válida em F. Quando para qualquer *frame* F de uma classe de frames $\mathcal{C}$, qualquer que seja V, α for válida em F, dizemos que α é $\mathcal{C}$*-válida*.

Notemos que o conjunto $\{V(\alpha, @) = 1 \mid \alpha \in For(\mathcal{L})\}$ contém todas as expressões da linguagem que são verdadeiras no mundo atual do modelo $< F, @, V >$. Além disso, a forma como descrevemos essas estruturas interpretativas nos compromete com a aceitação de que para toda fórmula atômica p da linguagem $\mathcal{L}$, podemos dizer que a proposição representada por ela é verdadeira ou falsa em um mundo qualquer $w \in W$, i.e., poderíamos considerar os elementos de W como sendo o conjunto formado por todas as configurações consistentes e maximais de L, dado que para cada elemento w de W, $V_w(\alpha) = V(\alpha, w)$ é uma valoração booleana.

De acordo com a semântica de Kripke (relacional), sabemos que tipos diferentes de relações R sobre W caracterizam sistemas modais distintos. Enunciaremos a seguir o teorema da completude (todas as fórmulas válidas na semântica são teoremas do sistema e todos os teoremas do sistema são fórmulas válidas na semântica) para os sistemas modais proposicionais em relação à semântica de Kripke. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em diversos textos introdutórios sobre lógica modal, um dos textos clássicos é (CRESSWELL; HUGHES, 1996).

Seja R a relação de acessibilidade de um *frame* F. Tal relação pode ser:

Reflexiva: nesse caso, para todo $w \in W$, temos $(w, w) \in R$. O *frame* $< W, R >$ construído de maneira tal que R seja uma relação reflexiva será chamado de *frame reflexivo*.

Simétrica: nesse caso, para todos w_1, w_2 de W, sabemos que se (w_1, w_2) é elemento de R, então $(w_2, w_1) \in R$. O *frame* $< W, R >$ construído de tal maneira que R seja uma relação simétrica será chamado de *frame simétrico*.

Transitiva: nesse caso, para todos w_1, w_2 e w_3 de W, sabemos que se (w_1, w_2) e (w_2, w_3) são elementos de R, então $(w_1, w_3) \in R$. O *frame* $< W, R >$ construído de tal maneira que R seja uma relação transitiva será chamado de *frame transitivo*.

Resultado 1: Os sistemas **K**, **S4** e **S5** são corretos em relação à classe de todos os *frames*, à classe de *frames* reflexivos e transitivos e à classe de *frames* reflexivos, simétricos e transitivos, respectivamente.

Resultado 2: Os sistemas **K**, **S4** e **S5** são completos em relação à classe de todos os *frames*, à classe de *frames* reflexivos e transitivos e em relação à classe de *frames* reflexivos, simétricos e transitivos, respectivamente.

Por exemplo, diz-se que **K** é a lógica da classe de todos os *frames* relacionais, pois todos os teoremas desse sistema são satisfeitos por um *frame* relacional. Qualquer característica mais detalhada sobre a classe de *frames* relacionais impõe mais axiomas para a lógica (sistema) que caracterizará tais estruturas.

2.3.1 O Éter Modal

Se considerarmos que a metafísica, mais do que legitimada como campo de investigação filosófica, é necessária (como corpo teórico) para que possamos fundamentar qualquer discurso sobre o mundo, que a noção de necessidade metafísica não pode ser reduzida à necessidade lógica e que há relativo consenso de que o contexto racional em que as discussões filosóficas que envolvem problemas metafísicos se desenvolvem é aquele melhor descrito pela lógica modal alética, então a explicitação de um sistema lógico que subjaz à argumentação de um problema filosófico-metafísico, é a chave para a compreensão de certas noções que escapam de uma definição formal e rigorosa no contexto, sendo aliada na construção e análise dos argumentos envolvidos.

Supondo que o conceito de necessidade metafísica é distinto da noção usual de necessidade (lógica), já que tal conceito seria incapaz de dar conta do ser por aquilo que ele é (o *ser-enquanto-ser*), o estudo de sistemas lógicos modais, em especial a lógica modal quantificada, seria de especial interesse na discussão de problemas metafísicos como existência, identidade, essência etc. É por isso que o desenvolvimento de semânticas para tais sistemas lógicos é de fundamental importância, não meramente técnica, mas filosófica - em vista da hipótese H 1.7.

Porém, a semântica de Kripke dos mundos possíveis[12] não deixou de receber certas críticas. Aqui vamos nos ater a alguns problemas, como discutidos por Thomas Forster em seu artigo *The Modal Aether* (FORSTER, 2005).

Devemos a Aristóteles a noção de validade de um argumento: um argumento é válido se não for possível que suas premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa. Tal noção envolve apenas elementos semânticos como verdade e falsidade; é claro que poderíamos discutir como determinar o valor de verdade de uma proposição, em todos os sentidos possíveis que a palavra *verdade* pode ser interpretada, porém isto não fará diferença para o ponto que desejo observar. A questão aqui é que a verificação da validade de um argumento, em uma estrutura clássica, pode ser feita através de noções internas aos elementos da estrutura – não é necessário nenhum suporte "externo" para tal verificação. Porém, levando em conta a semântica de mundos possíveis, sabemos que uma proposição é necessária em um mundo[13] w_0 se for verdadeira em todo mundo w que seja acessado

[12] Sobre a crítica a respeito do "éter modal", ela diz respeito à semântica de Kripke na medida em que ela é uma *semântica relacional*; todavia, é possível que semânticas utilizem-se da noção de mundos possíveis sem serem semânticas relacionais - para elas, tal crítica não é justificada.

[13] A própria noção de mundo possível levanta questões: um mundo possível é um ente puramente abstrato ou concreto? É um conjunto coerente de proposições? Se sim, qual o tamanho máximo que um mundo

por w_0. Desta forma, a noção de verdade de uma proposição em w_0 depende da situação desta proposição nesses mundos possíveis w. Forster argumenta em (FORSTER, 2005) que tal noção de necessidade, que exige certas noções anteriores como as de mundo possível, não está claramente fundada em noções absolutas, além do que, a necessidade de tal proposição não parece depender exclusivamente dela mesmo, mas sim em certas atribuições que podem parecer voluntárias, como a atribuição das proposições "que compõem" um mundo possível, se não forem considerados consistentes maximais.

A estrutura da semântica de mundos possíveis é complexa. Além da própria concepção de mundo possível, exigimos também que certas relações internas a esses mundos existam, como as relações existentes entre os indivíduos que os habitam. Nesse sentido, como *traduzir* certa propriedade de um mundo w_0 em um mundo w_1? Será possível, de fato, traduzir todas as afirmações de um mundo para outro? E os indivíduos? Será possível que um mesmo indivíduo povoe mais de um mundo? Essa questão está intimamente ligada ao problema anterior. Se indivíduos existem em apenas um mundo, como traduzir em w_1 uma sentença sobre um indivíduo a que habita em w_0? Uma inquirição ulterior pode questionar até se é possível fazer afirmações necessárias sobre o indivíduo contingente a, já que é possível supor que em nenhum mundo w, acessado por w_0, existam afirmações verdadeiras sobre a (considerando que indivíduos existam em um único mundo possível). Ainda mais, as proposições e sentenças, além dos indivíduos, são *designadas a um mundo* ou um *mundo é constituído* intrinsecamente por elas (Wittgenstein)? Parece intuitivo supor que, pelo menos em relação ao mundo atual, o que é verdadeiro e o que nele existe não são coisas meramente designadas, mas constituem esse mundo por si, sendo isto o que faz o mundo atual *ser atual*.

Por fim, é preciso de mais uma relação especial: ao conjunto estrutural da semântica relacional de mundos possíveis, Forster dá o nome de *maquinário*; a necessidade de uma sentença φ depende da relação de acessibilidade entre os mundos de um modelo. Portanto, o *maquinário* da semântica de mundos possíveis exige, além da noção estrutural de mundo possível e das relações internas destes mundos, outra relação que se dá entre mundos. Como um mundo "acessa" outro mundo? Que tipo de relação é esta? Onde ela ocorre? Como não existe nenhum "mundo" ou região no qual tal relação ocorre, argumenta Foster, parece que existe um *"éter" modal* que sustenta tal relação. Este éter não está explicitado no modelo, mas é por ele exigido, pois é nele que se sustentam os "mundos possíveis" e, portanto, a relação de acessibilidade. Para Forster:

> "Se desejarmos ficar com a semântica de mundos possíveis, ficamos comprometidos com o maquinário; a especificação de verdades dependerá deste maquinário; parece que não existe nenhuma alternativa à percepção de que proposições

possível pode ter? Qual a quantidade máxima de mundos possíveis em um modelo? É possível que todos os mundos possíveis de um modelo não formem um conjunto?

sobre o maquinário são não contingentes; não parece que há alguma forma para que tal necessidade apareça a partir da verdade em todos os mundos possíveis. Ela só pode vir do éter.

Isto é mais uma bagunça do que uma catástrofe, mas aceitar a realidade do éter modal faz com que nos comprometemos a uma filosofia no qual a distinção medieval entre conhecimento a partir da razão (em relação à estrutura interna dos mundos possíveis) e conhecimento a partir da fé (sobre o éter) assuma um papel maior do que alguém desejaria."(pp. 123 - 124, tradução livre)

Não desejo encontrar uma resposta absoluta e definitiva para tais questões, já que é muito provável que esta não exista. Porém, é inegável que semânticas para a lógica modal que não necessitam de tais estruturas *ad hoc* possam iluminar o tratamento de certos problemas filosóficos, em comparação com a abordagem por meio de semânticas relacionais do tipo de Kripke. Portanto, discutir tais problemas à luz de uma semântica desse tipo é o principal objetivo desse trabalho.

2.4 Lógica de Primeira Ordem

Na lógica proposicional lidamos com afirmações que são o caso, ou não, em função da sua totalidade. Porém, em muitos casos somos capazes de aumentar nosso conhecimento sobre as coisas ao analisarmos a estrutura das proposições da lógica proposicional. Por exemplo, o conteúdo da sentença A: 'Poincaré foi um matemático alemão', pode ser visto como uma proposição, cuja verificação se dá caso forem verdadeiras as relações entre os constituintes da sentença. Digamos que p seja o símbolo proposicional que representa o conteúdo da sentença A. Nesse caso, uma semântica confere o valor verdadeiro para a proposição p caso exista no mundo o fato descrito por A. Sabemos que a sentença A é falsa, todavia, não somos capazes de aperfeiçoar nossos conhecimentos sobre o mundo a partir de tal constatação, pois na lógica proposicional, o valor de verdade dessa proposição não é dado em função da análise de sua estrutura e/ou constituintes. Todavia, sejam q e r símbolos proposicionais para as sentenças 'Poincaré foi um matemático' e 'Poincaré nasceu na Alemanha', respectivamente. Agora, a mesma sentença A pode ser representada na lógica proposicional pela fórmula $q \wedge r$. Como tal sentença é falsa, qualquer valoração booleana retorna valor *falso* para pelo menos um dos conjuntos. Como Poincaré foi um dos mais importantes matemáticos de todos os tempos, podemos concluir que a proposição r é falsa, logo, a não verificação da proposição p se deve ao fato de que Poincaré não nasceu na Alemanha. Ao quebrarmos a proposição p (complexo) em duas outras proposições, o resultado são sentenças mais simples, ação que nos possibilita obter mais conhecimentos sobre o mundo do que através da análise de p.

Porém, nem todas as proposições podem ser satisfatoriamente reorganizadas, internamente à lógica proposicional, de maneira a termos acesso a seus constituintes mais simples. Mais do que isso, certas afirmações sobre o mundo não podem, mesmo como complexos, sequer serem devidamente traduzidas na linguagem proposicional.

Analisemos a afirmação ‘Todo filósofo foi discípulo de Sócrates’. A proposição, conteúdo de tal sentença, é falsa, mas não podemos vislumbrar como reescrevê-la, em uma linguagem proposicional, de modo a evidenciar o que a falsifica. Poderíamos analisar uma segunda proposição, ‘Aristóteles não foi discípulo de Sócrates’, mas não somos capazes, no interior do sistema formal proposicional, de concluir a contradição entre as duas proposições. Para sermos capazes de adquirir um conhecimento mais refinado sobre o fato trasmitido por tais afirmações, seria necessário que pudéssemos nos referir aos objetos, nesse caso filósofos, que estão sendo referenciados pela quantificação (‘todo filósofo’), a fim de gerarmos uma contradição a partir da afirmação sobre Aristóteles (filósofo que não satisfaz a expressão que segue à quantificação).

Para tanto, nossa linguagem precisaria lidar com o problema relativo a esta quantificação sobre indivíduos, exigindo variáveis para representá-los; tais objetos ou indivíduos formariam o domínino para o discurso de nossa nova linguagem. Em tal linguagem, precisaríamos de mais símbolos para falar sobre as propriedades de tais indivíduos e para representar as relações entre eles. Logo, a nova linguagem é uma expansão da linguagem formal proposicional, obtida ao acrescentarmos ferramentas suficientes para prover um sistema formal nos quais expressões que lidam com tais indivíduos possam ser representadas. O impulso para a formalização de sistemas formais de primeira ordem ocorreu, principalmente, devido à necessidade de se estabelecer meios para sistemas formais de dedução como aqueles exigidos pela matemática contemporânea.

Para uma descrição mais completa da diferença fundamental entre lógica proposicional e de predicados (ver também (SMULLYAN, 2009)), acompanhemos a demarcação feita por Chateaubriand em (CHATEAUBRIAND, 2001):

> "(...) A lógica proposicional pode ser vista como uma teoria muito geral sobre as relações de verdade entre as proposições, totalmente independente de qualquer análise da estrutura lógica das proposições e de sua expressão linguística. Concebida como uma teoria geral sobre as relações de verdade entre as proposições, é natural dizer que a lógica proposicional formula leis da verdade.
> A lógica de predicados tem dois aspectos distintos. Por um lado, ela pode ser concebida como uma teoria geral de propriedades e objetos baseada em algumas propriedades e operações lógicas específicas. (...) Neste sentido, a lógica de predicados não é uma teoria da verdade lógica, ou da implicação

lógica, mas uma teoria da realidade.
A distinção entre formular leis da lógica como leis da realidade e caracterizar a verdade lógica e a implicação lógica revela o outro aspecto da lógica de predicados. Este envolve uma preocupação com a estrutura proposicional e a sua relação com a realidade. A conexão entre a lógica de predicados e a lógica proposicional é derivada da análise da estrutura lógica das proposições."(pp. 4 - 5)

Analisemos a construção de um sistema clássico quantificado de primeira ordem com mais detalhes.

Estenderemos a lógica proposicional clássica para um sistema lógico de primeira ordem que possui identidade, constantes e símbolos funcionais.

Seja L^* uma linguagem de primeira ordem estendida de L pela inclusão de:

A) *Símbolos*

1) Uma lista (enumerável) de símbolos de predicado P_i^n, para cada aridade $n \in \mathbb{N}^*$. Se necessário podemos empregar para símbolos de predicados letras romanas maiúsculas como G^n, R^n ou F^n, por exemplo. Quando ficar implícito, pelo contexto, omitiremos a aridade do predicado P. Caso $n = 0$ obteríamos os símbolos proposicionais, já em L. Em especial, admitiremos em nossa linguagem um predicado binário representado pelo símbolo $=$, chamado de predicado de identidade ou igualdade.

2) Uma lista (enumerável) de variáveis individuais x_i. Se necessário, podemos empregar para variáveis individuais algumas letras romanas minúsculas como x, y ou z.

3) Uma lista (enumerável) de constantes individuais c_i. Se necessário, podemos empregar para constantes individuais algumas letras romanas minísculas como a, b ou c - porém, em geral, estas letras serão utilizadas para representar os objetos do domínio denotados pelas constantes.

4) Uma lista (enumerável) de símbolos funcionais f_j^n, com $n \in \mathbb{N}^*$ a aridade da função. Se necessário podemos empregar para símbolos funcionais algumas letras romanas minúsculas como f, g ou h, por exemplo. Quando ficar implícito, pelo contexto, omitiremos a aridade do símbolo f. Caso $n = 0$ obteríamos as constantes, já em L^*.

5) Quantificador existencial: $\exists$. Por praticidade adotamos o quantificador existencial como primitivo. Notamos que o quantificador universal $\forall$ pode ser definido por: $\forall x\alpha =_{df} \neg\exists x\neg\alpha$.

Observação: símbolos do tipo 2) e 3) serão denominados termos. Adotaremos $\bar{t}$ como símbolo para n-uplas de termos $(t_1, \ldots, t_n)$. Dessa forma, para cada símbolo funcional f do tipo 4), de aridade n, será também um termo a sequência $f(\bar{t})$; omitiremos a aridade do símbolo funcional quando esta estiver implicitamente determinada.

B) *Regras de formação*

Como L é uma sublinguagem de L^*, toda fórmula de L é fórmula de L^*. Com relação aos novos símbolos, temos:

1) Se P^n é símbolo de predicado, então $P^n(\bar{t})$ é fórmula (atômica) de L^*. Em especial, se t_1 e t_2 forem termos, então é fórmula atômica a sequência $t_1 = t_2$.

2) Dadas x uma variável de L^* e α uma fórmula, então $\exists x\alpha$ também é fórmula de L^*.

3) Se α e β forem fórmulas de L^*, então $\neg\alpha$ e $\alpha \wedge \beta$ são fórmulas de L^*.

Serão fórmulas de nossa linguagem estendida L^* todas as sequências de símbolos como definidos pelas regras acima, e somente estas.

Observação 1: Se α e β forem fórmulas de L^* e β ocorrer na sequência α, então β é dita **subfórmula** de α. Note que α é subfórmula (não-própria) de si-mesma.

Observação 2: A ocorrência de uma variável x em uma fórmula α de L^* é dita **livre** se x não ocorrer no escopo de um quantificador para x. Quando a ocorrência de uma variável x em uma fórmula α não é livre ela é dita **ligada**.

Observação 3: Diremos que uma fórmula (ou termo) de L^* é fechada se ela não possuir ocorrências de variáveis livres. Caso contrário, diremos que a fórmula (ou termo) é aberta. Denotaremos por $\alpha(x)$ fórmulas em que no máximo a variável x tem ocorrência livre.

Uma fórmula sem ocorrência de variáveis livres é chamada de **sentença**.

Notação: Sejam α uma fórmula de L^*, x uma variável e t um termo. Denotamos por $\alpha[t/x]$ o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de x, em α, por t.

Se S for uma axiomatização para a lógica proposicional clássica, então S^* é uma axiomatização para a lógica quantificada ao acrescentarmos em S axiomas e regras de inferência relativos ao acréscimo dos quantificadores, como[14]:

[14] Esse sistema é o mesmo como apresentado em (FITTING; MENDELSOHN, 1998).

A) *Esquemas de Axiomas adicionais*[15]

I) Seja $\alpha \in L^*$ em que não há ocorrência livre de x: $\forall x\alpha \equiv \alpha$

II) $(\forall x)(\alpha \supset \varphi) \supset (\forall x\alpha \supset \forall x\varphi)$

III) $(\forall x)(\forall y)\alpha \equiv (\forall y)(\forall x)\alpha$

IV) Seja y substituível em x em $\alpha(x)$[16]: $(\forall y)(\forall x\alpha(x) \supset \alpha(y))$

B) *Regra de inferência adicional*

Generalização Universal: Se não há ocorrência livre de x em α, então $\alpha \vdash \forall x\alpha$.

Já exploramos como um sistema formal lida com as regras de inferência entre fórmulas de uma linguagem que contém as regras para a combinação de seus símbolos para obtermos fórmulas bem formadas (simplesmente fórmulas); nos sistemas formais, os símbolos são destituídos de qualquer conteúdo. Por outro lado, as estruturas semânticas dão significados aos símbolos, evidenciando a conexão entre "realidade" (na perspectiva de modelo) e as noções lógicas presentes nos conectivos e nas regras de inferência.

Como Oswaldo Chateubriand afirma, "Na concepção tarskiana de lógica a noção de significado em grande parte desaparece e é substituída pelas noções de satisfação e verdade"(ver (CHATEAUBRIAND, 2001), p. 4). Essa observação evidencia a importância que estas estruturas têm na fundamentação, e sentido, da relação entre sintaxe e semântica. Acredito que a pergunta "O que a forma dessas estruturas é capaz de nos revelar sobre a lógica (a que está associada)?" é de fundamental relevância filosófica.

As interpretações na lógica proposicional podem ser descritas por valorações, que associam a cada fórmula da linguagem um valor de verdade. Já as estruturas de primeira ordem M requerem construções mais sofisticadas.

Um *modelo* para uma teoria de primeira ordem é uma estrutura do formato $M = (D_M, V_M, I_M, \{M(P_i^n)\}_{i \in I}, \{M(f_j^n)\}_{j \in J})$, tais que:

i) $D_M \neq \emptyset$ é um conjunto de objetos, ou indivíduos, chamado de *domínio* do modelo M.

ii) V_M é uma valoração booleana para as fórmulas de L, subconjunto de L^*.

iii) I_M é uma interpretação para as constantes e variáveis individuais de L^*, satisfazendo:

Se c for uma constante que denota algum objeto em M, então $I_M(c) \in D_M$ é o objeto denotado por c.

[15] Consideremos $\equiv$ o símbolo lógico para equivalência.
[16] Isto é, se não há em $\alpha(x)$ nenhuma ocorrência livre de y.

Se x for uma variável individual que denota algum objeto em M, então $I_M(x) \in D_M$ representa um indivíduo de D_M.

v) Para todo símbolo de função n-ária $f_j^n \in L^*$, para valores adequados de $\bar{t}$, existe $M(f_j^n) : D_M^n \to D_M$ pertencente à família $\{M(f_j^n)\}_{j \in J}$, de maneira que $M(f_j^n(\bar{t})) = M(f_j^n(I_M(\bar{t}))) = M(f_j^n)(I_M(t_1), \ldots, I_M(t_n))$ é a interpretação do termo em M.

iv) Para todo símbolo de predicado n-ário $P_i^n \in L^*$, $M(P_i^n) \subseteq D_M^n$ pertence à família $\{M(P_i^n)\}_{i \in I}$.

Para um modelo M fixo com uma interpretação I_M, dizemos que I_M^k é uma interpretação *k-variante* de I_M, sobre M, se ambas as interpretações coincidem em todos os termos, com exceção de, no máximo, ao que atribuem a k variável.

Denotaremos que uma fórmula $\alpha \in L^*$ é *satisfeita* por uma interpretação M da seguinte forma: $\models_M \alpha$.

Verificamos se um modelo M satisfaz uma fórmula φ de L^* por indução na complexidade da fórmula:

1) Se $\varphi \in For(L)$, então $\models_M \varphi$ se e somente se $V_M(\varphi) = 1$.

2) Se $\bar{t}$ for uma n-upla de termos de L^* e $\varphi = P(\bar{t})$, então $\models_M \varphi$ se e somente se $M(P^n(\bar{t})) \in \{M(P_i^n)\}$. Em particular, se $\varphi = (t_1 = t_2)$, então $\models_M \varphi$ se e somente se $I_M(t_1) = I_M(t_2)$, i.e., $M(t_1 = t_2) \subseteq \Delta(D_M)$, em que $\Delta(D_M) =_{df} \{(x, x) \in D_M \times D_M\}$.

3) Se $\varphi = \exists x \alpha(x) \in L^*$, então $\models_M \varphi$ se e somente se existir um modelo M_k, diferente de M no máximo em relação à sua interpretação I_M^k, k-variante de I_M, tal que $\models_{M_k} \alpha[k/x]$.

4) Se $\varphi = \neg\alpha$, então $\models_M \varphi$ se e somente se $\not\models_M \alpha$.

5) Se $\varphi = \alpha \wedge \beta$, então $\models_M \varphi$ se e somente se $\models_M \alpha$ e $\models_M \beta$.

6) Se $\varphi = \alpha(\bar{x})$ for fórmula aberta com no máximo $x_1, \ldots, x_n$ variáveis livres, então $\models_M \varphi$ se e somente se o modelo M satisfaz o *fecho* de α, i.e., $\models_M \forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(\bar{x})$.

2.5 Lógica Modal Quantificada

A passagem da lógica quantificada clássica para sua versão modal se faz de maneira análoga àquela realizada entre lógica proposicional e lógica modal proposicional, estendendo a linguagem com operador(es) modais e o sistema com regras de inferência apropriadas; todavia, na versão quantificada, essa transposição não se dá de maneira tão suave[17].

[17] Os axiomas que caracterizam os sistemas modais, como explicitados anteriormente, continuam a caracterizar os sistemas modais em sua forma quantificada; sendo assim, o axioma K é o mínimo

Em um sistema formal da lógica modal quantificada, qual será a relação entre quantificadores, modalidades e as variáveis? A conexão entre sentenças *de re/de dicto* é analisada a partir dessa perspectiva, pois com isso podemos evidenciar a relação entre as noções modais e os indivíduos através da colocação, nas fórmulas, dos operadores modais, dos quantificadores e das variáveis.

Para determinar se uma fórmula de um sistema quantificado de primeira ordem é ou não um teorema, deve-se apresentar uma demonstração da fórmula a partir dos axiomas e das regras de inferência do sistema. Sabemos que uma semântica completa e correta para tal sistema é uma estrutura que retorna um valor de verdade (ou um subconjunto de um cartesiano n-ário do domínio) para as fórmulas do sistema formal; quando toda estrutura satisfaz determinada fórmula, dizemos que a fórmula é válida; portanto, uma fórmula é válida se e somente se ela for teorema do sistema formal[18].

Na construção de uma semântica para um sistema modal quantificado, um problema filosófico aparece: nos mundos possíveis da semântica de Kripke, utilizados como ferramenta intuitiva para a construção de situações alternativas para os "fatos do mundo", precisamos determinar se esses mundos possíveis são habitados pelos mesmos indivíduos ou se por indivíduos distintos. Além disso, se são indivíduos distintos, como podemos garantir a satisfação de uma fórmula modalizada α, contendo o indivíduo denotado por c em um mundo w_1, se seu valor de verdade depender do que ocorre com essa fórmula em outros mundos, acessíveis por w_1, e não possuímos esse mesmo indivíduo nesses mundos para fazer referência a ele ao analisar a *intenção* (Carnap) ou o significado da fórmula α? Mais do que isso, α possui o mesmo significado em todos os mundos?

Vejamos alguns exemplos:

(1) 'É possível que Sócrates tenha nariz romano'.

(2) 'Necessariamente Sócrates tem nariz romano'.

A validade de (1) em um mundo possível exigiria a existência de um mundo, acessível ao atual, no qual o objeto Sócrates possuísse nariz romano. Já no caso de (2), sua validade em um mundo exigiria que pudéssemos garantir que em todos os mundos possíveis a ele acessíveis, exista um objeto, Sócrates, que possui nariz romano[19]. Em quaisquer um

exigido quando se deseja um sistema modal normal.

[18] Usarei o termo teorema de duas maneiras; em certos momentos, ele se refere às fórmulas do sistema formal que são deduzidas dos axiomas e das regras de inferência, em outros, utilizarei o termo *teorema* para identificar um resultado sobre o sistema formal de dedução. Neste caso, se desejássemos ser mais rigorosos, estes resultados deveriam ser chamados de *metateoremas*. Como os contextos em que ambos aparecem são facilmente discerníveis, adotarei uma simplificação me referindo, em ambos os casos, à palavra *teorema*. No primeiro sentido temos um teorema de um sistema lógico formal, no segundo sentido temos um resultado acerca do sistema formal, enunciado em um sistema (ou linguagem) superior, que refere-se às características do sistema formal.

[19] Pode-se argumentar que seria válida a sentença 'Sócrates tem nariz romano' em um mundo em que

dos casos, se esse objeto pudesse existir em mais de um mundo, ele poderia ser único e facilmente identificável?

Se os sistemas modais podem ser utilizados como crivo da consistência de argumentos metafísicos, é extremamente útil (e necessário) investigarmos os problemas filosóficos que permeiam a formalização de tais sistemas. Na leitura da afirmação (2), compreendemos a necessidade de acordo com sua interpretação *de dicto*. Por outro lado, é possível que interpretemos essa mesma sentença através da leitura *de re*; em tal caso, (2) afirmaria que o tipo de nariz romano é uma característica necessária (ou essencial) de Sócrates. Enquanto na leitura *de dicto*, apesar de ser necessário que Sócrates tenha nariz romano, não nos comprometemos com uma visão essencialista do objeto Sócrates, já que tal leitura não implica que seja essencial ao objeto Sócrates ter nariz romano para permanecer sendo Sócrates (ou outra propriedade); por outro lado, na leitura *de re*, a propriedade de ter nariz romano é essencial a Sócrates no sentido de que ela é, talvez entre tantas outras, aquilo que determina quem é Sócrates. Além do mais, ela abre as portas para uma interpretação que relaxa a cláusula de identificação de Sócrates em todos os mundos possíveis - ela afirmaria que é essencial a Sócrates ter nariz romano, portanto ela poderia ser verdadeira mesmo em um mundo em que Sócrates não existisse, pois faria referência à necessidade de que, aonde existisse, o indivíduo Sócrates teria nariz romano.

Em um sistema formal da lógica modal quantificada, as relações existentes entre o operador de necessidade, os objetos e as interpretações das sentenças (*de dicto*/ *de re*) são expostas por duas fórmulas da linguagem. Tendo em vista a simetria assumida entre os operadores de necessidade e possibilidade, podemos escrevê-las de maneira equivalente da seguinte forma:

Fórmula de Barcan (FB)[20]: $\Diamond(\exists x\varphi(x)) \supset \exists x(\Diamond\varphi(x))$

Recíproca de Barcan (RB)[21]: $\Box(\forall x P(x)) \supset \forall x(\Box P(x))$

Sendo a fórmula de Barcan teorema em um sistema modal quantificado, em relação ao operador $\Box$, temos a sanção da modalidade *de dicto* a partir da modalidade *de re*; O contrário ocorre quando a recíproca de Barcan é teorema do sistema. Ou seja, em um sistema modal quantificado que possui as duas fórmulas de Barcan como teoremas, as modalidades *de dicto* e *de re* são equivalentes em relação ao quantificador universal

esse indivíduo não existe, nunca existiu nem virá a existir, já que não existiria o objeto Sócrates que não possui nariz romano para negá-la (validade por vacuidade).

[20] Equivalente a $\forall x(\Box\varphi(x)) \supset \Box(\forall x\varphi(x))$.

[21] Equivalente a $\exists x(\Diamond\varphi(x)) \supset \Diamond(\exists x\varphi(x))$.

e ao operador $\Box$, ou equivalentes em relação ao operador existencial e o operador $\Diamond$. Filosoficamente, vemos que se φ for uma fórmula em que seja o caso ser possível existir um elemento do domínio (mundo possível) que satisfaz φ, então se FB for teorema, podemos assegurar que existe um mundo possível e um objeto c, que nele habita, tal que $\varphi(c)$.

É importante ressaltarmos o significado por trás da Fórmula de Barcan: Em um sistema em que esta fórmula é teorema, temos que se for possível que exista (algo), então existem objetos possíveis (para esse algo), ou seja, da mera possibilidade obtém-se a existência possível.

2.5.0.1 Aspectos Formais da Lógica Modal Quantificada

Seja $\mathcal{L}^*$ uma linguagem modal de primeira ordem, obtida ao acrescentarmos a L^* operadores modais (em nosso caso $\Box$ e $\Diamond$) e as seguintes regras de formação adicionais:

1) Se α e β são fórmulas de $\mathcal{L}^*$, o resultado de aplicar as regras de formação de L^* sobre elas resulta em nova fórmula de $\mathcal{L}^*$.

2) Se α é fórmula de $\mathcal{L}^*$, então $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha$ são fórmulas de $\mathcal{L}^*$.

Um sistema $\mathcal{S}^*$ da lógica modal quantificada (primeira ordem) será obtido ao estendermos o sistema de primeira ordem S^* com a regra da necessitação e com os esquemas de axiomas caracterizadores dos sistemas modais, aplicados a fórmulas de $\mathcal{L}^*$. Nesse caso, os sitemas modais assim obtidos possuem domínios de quantificação variáveis. Sabe-se que se acrescentarmos ao sistema $\mathcal{S}^*$, como esquemas de axioma, as fórmulas FB e RB, então os sistemas assim caracterizados terão domínio constante (ver (FITTING; MENDELSOHN, 1998)).

2.5.0.2 Domínios e Fórmulas de Barcan

Quando os domínios são constantes, os quantificadores agem sobre os mesmos indivíduos em todos os mundos possíveis. No caso de domínios variáveis, a atuação dos quantificadores depende do domínio do mundo em que a fórmula está sendo avaliada e dos domínios de outros mundos com o qual esse mundo se relaciona, dependendo do escopo de atuação do quantificador. O ponto principal é que a existência dos objetos entre os mundos pode variar. Podemos perceber que um grave problema operacional (e filosófico) emerge nessa passagem para a lógica modal quantificada: o problema da referência ((QUINE, 2011b)). Seja em sistemas com domínio constante, seja com domínios variáveis, como garantir que "nomes" (constantes) nomeiam o *mesmo* indivíduo? Essas questões levantam restrições ao uso do predicado de igualdade ($=$), das constantes e dos símbolos funcionais em $\mathcal{L}^*$. De uma forma ou de outra, acabaremos por esbarrar nesses problemas e procurarei me posicionar quanto a eles em um momento apropriado; como já mencionado, essa discussão é muito bem trabalhada em (FITTING; MENDELSOHN, 1998)[22] (ver capítulo 7).

Em uma semântica relacional para o sistema $\mathcal{S}^*$, sabemos que se a relação entre mundos for monotônica, i.e., se wRw', então $D(w) \subseteq D(w')$, a fórmula RB é válida (no modelo), valendo também a implicação contrária. O mesmo ocorre com casos em que a relação de acessibilidade é anti-monotônica, i.e., se wRw', então $D(w') \subseteq D(w)$, conclui-se a validade de FB. Logo, a inclusão dessas fórmulas como esquemas de axiomas nos sistemas modais de primeira ordem implica em características específicas no tipo de estruturas que serão modelos para tais sistemas; se quisermos domínios constantes, acrescentamos FB e RB como esquemas de axiomas (Ver (FITTING; MENDELSOHN, 1998)).

Se abordarmos os sistemas modais por uma perspectiva diferente daquela adotada por Kripke[23], conseguimos resultados diversos em relação à teoremicidade das FB e RB dentro do sistema (se não forem admitidas como axiomas). Acompanhemos um argumento em que interagem aspectos sintáticos com aspectos semânticos (mundos possíveis):

Consideremos $\mathcal{S}$ um sistema da lógica modal proposicional; se obtermos um novo sistema acrescentando à $\mathcal{S}$, de maneira adequada, um sistema de predicados de primeira ordem, obtemos um sistema modal de primeira ordem. Assumamos que em tal sistema todos os mundos possíveis possuem o mesmo domínio. Nesta construção, a fórmula de Barcan é teorema em sistemas que contenham o sistema Brouweriano[24], como o próprio **B** e **S5**[25]. Porém, em sistemas com essa formulação, como **K**, **T** e **S4**, FB não é teorema.

Com relação a esses sistemas modais quantificados, sabemos que as respectivas classes de frames dos sistemas proposicionais tornam corretos os sistemas S + FB da lógica modal quantificada, em relação à semântica de Kripke. Todavia, o mesmo resultado não é obtido ao considerarmos a completude de tais sistemas, i.e., provamos que nas respectivas

[22] Tais problemas já foram muito discutidos na literatura, talvez o argumento mais famoso é aquele que aponta as dificuldades que emergem ao lidarmos com dois nomes distintos, "estrela da manhã" e "estrela d'alva", como referência ao planeta Vênus. Frege procura evitar esses problemas ao interpretar os nomes de uma linguagem por meio de seu significado, e não de sua designação; Carnap com a sua distinção entre intenção e extensão.

[23] Hughes e Creswell adotam o termo Kripke-estilo para falar sobre a axiomatização de Kripke.

[24] O sistema Brouweriano é obtido ao ser acrescentado ao sistema T o esquema de axioma B (equivalente a $\Diamond\Box\varphi \supset \varphi$). O sistema obtido é mais fraco que **S5**, porém não está contido nem contém **S4**. A classe de frames que caracteriza um sistema broweriano é a das estruturas reflexivas e simétricas. Neste sistema é válida a seguinte regra de inferência:
$\dfrac{\vdash \Diamond\varphi \supset \phi}{\vdash \varphi \supset \Box\phi}$.

[25] Em sistemas como estes, a dedução de FB se dá da seguinte forma:
$\forall x(\Box\alpha) \supset \Box\alpha$
$\Diamond(\forall x(\Box\alpha)) \supset \Diamond\Box\alpha$
$\Diamond\Box\alpha \supset \alpha$
$\Diamond(\forall x(\Box\alpha)) \supset (\forall x\alpha)$
$(\forall x(\Box\alpha)) \supset \Box(\forall x\alpha)$

classes de frames são válidas as fórmulas que são teoremas do sistema quantificado, porém nem todos os teoremas são válidos na mesma classe de frames (Ver (CRESSWELL; HUGHES, 1996)).

Semanticamente, se a fórmula de Barcan for válida em determinada estrutura, então podemos afirmar que se tudo possui necessariamente ϕ, é necessariamente o caso que tudo possui ϕ; ou seja, se for possível existir algo que satisfaça ϕ, então existe algo que satisfaz ϕ. É claro que em domínios iguais entre mundos, essa relação é válida; por outro lado, pode-se argumentar que mesmo que tudo que atualmente existisse fosse necessariamente ϕ, pode ser possível que tenha havido ou que haverá coisas que não foram ou não serão ϕ. Assim, em vários mundos possíveis podem existir objetos com propriedades diferentes daquelas que possuem no mundo atual; é possível, inclusive, supormos a existência, nesses mundos, de objetos que sequer existam no mundo atual. É exatamente essa observação filosófica que invalida semanticamente FB, o que acarretaria na construção de sistemas que não admitem FB como teorema.

Que tipo de informação podemos inferir ao analisarmos a recíproca da Fórmula de Barcan? Como em seu antecendente não existe variável livre dentro do escopo do operador modal, pode ocorrer que em todos os mundos, tudo o que existe neste mundo seja ϕ; pode também ser o caso que haja algo em nosso mundo que não é ϕ em outro mundo, o qual seria a exigência do consequente, já que no escopo do operador modal a variável aparece livre. Portanto, é possível julgarmos RB menos plausível que a fórmula de Barcan, pois parece não ser difícil apontar para algo que existe atualmente e dizer, sobre tal coisa, que ela poderia não ter existido (FB), mas seria menos plausível apontar para algo que não existe e dizer que poderia ter existido. Neste sentido, parece ser mais plausível que um mundo acessível a partir de outro que contenha menos indivíduos em relação a este mundo que o acessa, ao invés de mais - ver argumentação no capítulo 7.

Seja $\mathcal{S}$ um sistema modal proposicional qualquer e consideremos o sistema quantificado obtido ao acrescentarmos à $\mathcal{S}$ a lógica de predicados (com domínios constantes). A fórmula $\exists x(\Box\varphi) \supset \Box(\exists x\varphi)$ é teorema deste sistema quantificado, enquanto sua recíproca não.

Isto ocorre porque no antecedente do teorema existe variável livre no escopo do operador modal, ou seja, há algo e, sobre esse algo, tal coisa é ϕ em todo mundo acessível. Já no consequente, a variável que aparece no escopo do operador de necessidade aparece ligada, ou seja, em todo mundo possível, a proposição de que algo é ϕ, não mais necessariamente a mesma coisa, é verdadeira. Em (CRESSWELL; HUGHES, 1996) (pp. 250 – 254) temos a demonstração da não equivalência das modalidades *de re* e *de dicto*, em relação aos operadores existencial e de necessidade, nos tipos de sistemas apresentados[26].

[26] Ver também (KRIPKE, 1959) e (KRIPKE, 1963) - em especial para aprofundamento sobre as semânticas

de mundos possíveis, relacionais e entendimento de visões "atualistas" e "possibilistas" para a noção de existência, que aprofundarei no próximo capítulo.

3 Metafísica e a Tradição Analítica

Neste capítulo procuro sintetizar abordagens diversas, na tradição analítica, para as questões metafísicas, em especial a articulação das noções modais aléticas, assim como a fundamentação de noções nucleares como ente, essência e identidade.

Tal revisão é essencial, tendo em vista as hipóteses assumidas no início deste trabalho, H 1.1 (Analítica), H 1.2 (Filo-Logicista), H 1.5 (Metafísica Leibniz-Wittgenstein), H 1.8 (Wittgensteiniana), H 1.7 (Semântica) e H 2.4 (Epistemológica-Carnapiana).

De fato, à luz da hipótese 2.2 (sobre a "Verdade") e em consonância com as outras hipóteses delineadas, tal *reconstrução conceitual* é essencial para o "desvelamento" intelectual do mundo, pois se o método defendido aqui para o trabalho do filósofo deve mimetizar o das ciências naturais, ainda assim ele irá atuar na especificidade da prática filosófica, pois como apontou Schlick:

> "(...) antes que as ciências possam descobrir a verdade ou a falsidade de uma proposição, elas devem descobrir a significação delas. (...) Assim, a filosofia é um fato importantíssimo nas ciências e merece plenamente o título de "rainha das ciências"[1]"(The Future of the Philosophy, p. 117 - *Form and Content* - citado em (SCHMITZ, 2019) p. 320).

[1] Notemos aqui o paralelo entre a Filosofia e a Matemática, pelo menos em relação ao título que ambas receberam por Schlick e Gauss, respectivamente.

3.1 Metafísica das Modalidades

O trato filosófico sobre as modalidades compreende uma extensa lista de diferentes abordagens com as quais podemos analisar a especificidade (ou modo) com que uma sentença ou afirmação pode ser compreendida. Modalidades deônticas, modalidades temporais, modalidades epistemológicas etc., procuram realçar características próprias a determinados contextos discursivos, como contextos normativos, temporais ou epistêmicos, respectivamente. Entretanto, os vestígios que encontramos sobre o início da investigação modal remontam, de maneira geral, para a diferenciação mais básica sobre dois ((BOBZIEN, 2006)) modos distintos sobre os quais podemos diferenciar certa sentença S, a saber, se S é necessária ou contingente.

Nesta seção lidarei com noções nucleares envolvendo a interpretação da lógica modal alética, modos de necessidade e possibilidade. Por isso, também discutirei a diferença entre diversas interpretações de conceitos da semântica de Kripke, como o de mundo possível, que, conforme já discutimos, pode ser considerado problemático. Esta análise das interpretações mais comuns que encontramos na literatura permitirá evidenciar os problemas que tais conceitos podem levantar a respeito da natureza dos objetos envolvidos na estrutura da semântica de mundos possíveis e na relação entre estas estruturas, como estruturas, e a realidade - mais precisamente, na relação entre as estruturas e aquilo que, de fato, representa tais estruturas.

Procurarei na discussão que se segue adotar a taxonomia corrente mais utilizada para agrupar os autores de interpretações próximas com relação a seu posicionamento sobre determinados conceitos e noções. Esta taxonomia seguirá, de maneira geral, a adotada por Andrea Borghini em (BORGHINI, 2016), assim como me beneficiarei, em grande parte, da apresentação de Borghini para nortear nossa análise relativa aos temas necessários para o desenvolvimento desta argumentação. Obviamente, tais classificações não são rígidas e não devem ser consideradas como uma partição dos posicionamentos filosóficos disponíveis, mas apenas como um facilitador para a análise das diversas abordagens distintas sobre variados conceitos formais e filosóficos.

As modalidades aléticas[2] de necessidade e possibilidade são essenciais a qualquer discussão acerca de problemas metafísicos, já que a predicação de tais modos a uma sentença

[2] Do grego $\alpha\lambda\eta\theta\varepsilon\iota\alpha$ (alétheia), que designa a verdade ou realidade. No estudo etimológico do termo, Heidegger apontou para a distinção entre o significado grego de alétheia e a noção usual de verdade, que implica no apontamento daquilo que é real. Heidegger (ver (HEIDEGGER, 2018)) mostra que alétheia se refere ao 'desvelamento' da verdade, ou seja, refere-se àquilo que pode, por si só, ser compreendido pela razão humana. Alétheia então não se refere à coerência de um sistema de proposições, mas ao desvelamento ontológico do mundo. Nessa perspectiva, compreendemos a ideia heraclitiana sobre o trabalho do filósofo: se a natureza sempre está a se ocultar, ao filófoso cabe desvendar seus mistérios e interpretá-la. O *logos* heraclitiano deve ser interpretado, ele é imagético - o filósofo desvela os mistérios da natureza. Notemos que esta ideia de logos distingue-se do logos de Parmênides, absoluto, estático, abstrato e teorético (ver (JAEGER, 2018)).

S revela a própria estrutura ontológica que fundamenta *S*. A filosofia de Parmênides, por exemplo, expressa aquilo que poderia ser classificado hoje como um *monismo metafísico*, na medida em que para ele o universo existe necessariamente e tudo o que existe, existe necessariamente do jeito que é[3].

Retomando a construção histórica do pensamento metafísico, constatamos que Platão discorre sobre a metafísica no *Timeu*, onde é apresentada uma teoria a respeito da ontologia do mundo e, principalmente, onde encontramos a teoria das formas inteligíveis, que esculpe a metafísica platônica (ver (ANTISERI; REALE, 2003a)).

Motivado a contrapor tal ontologia, Aristóteles fará um tratamento sistemático sobre as modalidades ao tratar da teoria dos silogismos modais. Acompanhemos um comentário de Marilena Chauí (CHAUÍ, 2009) a respeito da teoria desenvolvida pelo estagirita com respeito as modalidades.

> "Nas Categorias e na Física, Aristóteles concebe o necessário como aquilo que não depende de uma decisão voluntária, mas decorre da própria *phýsis*; em contrapartida, o possível é aquilo que depende de uma visão voluntária ou de uma escolha entre alternativas contrárias, escolha feita em vista de um fim visado pela vontade do agente; o contingente, por sua vez, é que não depende nem da phýsis nem da vontade, mas acontece quando duas séries causais, cada qual dotada de seu próprio sentido e fim, acidentalmente se encontram (o contingente é o encontro fortuito de causalidades independentes). Aristóteles dizia que o necessário e o contingente não estão em nosso poder; e que o possível é exatamente o que está em nosso poder e nele se alicerça nossa liberdade."(p. 27)

Em resumo, a análise das características das noções modais de necessidade e possibilidade desenvolveu-se concomitantemente à inquirição metafísica, pois, de uma maneira geral, espera-se que por meio destas noções as coisas se revelem mais intimamente como são - como as coisas são em função de sua natureza (*phýsis*) - devido sua própria constituição. Porém, estas noções parecem abarcar certas especificidades que exigem categorizações mais detalhadas. A análise das três sentenças a seguir pode nos ajudar a compreender esse ponto.

[3] Neste sentido, a metafísica de Parmênides está próxima às teorias que atualmente classificamos como *necessitistas*. Uma exemplificação moderna de uma teoria próxima a esta é a metafísica de Espinosa; para ele, o universo e todas as manifestações que vemos no mundo são necessárias na medida em que 1: Deus (...) existe necessariamente (proposição 11 – parte I (ética)), 2: além de Deus, nenhuma outra substância pode ser concebida (proposição 14 – parte I), 3: Da necessidade da natureza de Deus devem se seguir infinitas coisas, de infinitas maneiras (proposição 16 – parte I), 4: Deus é causa imanente de todas as coisas (proposição 18 – parte I) e 5: Nada existe, na natureza das coisas, que seja contingente; em vez disso, tudo é determinado, pela necessidade da natureza divina, a existir e operar de uma maneira definida (proposição 35 – parte I) (ESPINOSA, 2009).

(1) 'A atração exercida pelo planeta Terra em um corpo sobre sua superfície é diretamente proporcional à sua massa'.

(2) 'Todo homem solteiro não é casado'.

(3) 'A água é H_2O'.

Pode-se argumentar que as três sentenças acima são necessárias. Justifiquemos:

1) De acordo com a segunda lei de Newton, justificada por observações experimentais, sabemos que $\vec{p} = m\vec{g}$, o que implica que se tomarmos o módulo dos vetores força peso e gravidade (constante sobre a superfície terrestre), teremos $\frac{p}{m} = g$ para qualquer objeto de massa m, ou seja, a força peso sobre a superfície do planeta e a massa do objeto são, necessariamente, grandezas diretamente proporcionais. Esta noção de necessidade exige uma interpretação física ou natural do conceito de necessidade, pois a natureza da necessidade da afirmação reside nas características naturais dos objetos envolvidos e das leis físicas a que estão submetidos. Neste caso, dizemos que a noção de necessidade exemplificada é a de *necessidade natural* ou *física*.

2) Pela definição da palavra 'solteiro' sabemos que se um homem é solteiro, então necessariamente ele não pode ser casado[4]. Esta noção de necessidade exige uma interpretação semântica do conceito, tendo em vista que o modo é atribuído à sentença pelo significado do termo 'solteiro' e das relações lógicas entre os constituintes da sentença (tudo o que tem as propriedades definidoras de um conceito A, é A). Nesse caso, dizemos que a noção de necessidade exemplificada é a de *necessidade lógica* ou *semântica*.

3) Tendo em vista que a molécula da água é composta por dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, necessariamente, a composição química da água é H_2O. Não existe nenhuma conexão lógica ou semântica que relaciona a palavra "água"[5] com sua composição química. *Hidrogênio* e *Oxigênio* são nomes (signos), dados contingencialmente a estruturas físicas (átomos) que formam o modelo da estrutura química a qual damos o nome de água: substância insípida, incolor e sem cheiro, que recobre mais de 70% da superfície terrestre e sem a qual a vida humana não seria possível. Não podemos, igualmente, estabelecer uma relação natural e necessária entre os constituintes da água. Por exemplo, digamos que existam i) outras realidades em que seres vivos sejam capazes de viver sem água (H_2O), ou ii) que seres vivos necessitem de um elemento com todas as características da água, porém sua estrutura química (se é que em tal realidade possamos falar sobre estrutura química) é totalmente diferente daquela da substância H_2O; ainda assim, 'A água é H_2O' é uma afirmação necessária, pois o termo "água", nessa sentença, refere-se a um feixe de

[4] Obviamente, um homem casado pode afirmar ser solteiro (e talvez acreditar nesta afirmação) por razões diversas, sobre as quais não temos interesse em discutir. Porém, neste caso, tal crença não é justificada, na medida em que opera em contexto racional diferente do assumido tradicionalmente, pois passaríamos a lidar com questões epistemológicas, psicológicas e/ou morais, por exemplo.

[5] Raciocínio semelhante evidenciaria mesmo tipo de relação entre a composição química do elemento água com as palavras 'water', 'eau' ou 'wasser'.

propriedades que inclui ser o elemento químico que, no planeta Terra, é indispensável à vida, e tal elemento, em Português, é representado pelo signo 'água'. Assim, tal afirmação seria verdadeira em qualquer cenário, incluindo i) e ii), ou seja, tal sentença é necessária[6].

A noção de necessidade abarcada pela sentença (3) é *sui generis*, na medida em que não pode ser confortavelmente alocada nas categorias de (1) e (2). Todas as noções de necessidade podem ser inseridas em algum campo dos descritos acima. Em geral, costuma-se identificar a relação entre os tipos mais gerais de necessidade da seguinte forma[7]:

$$\text{Necessidade Lógica} \subset \text{Necessidade Metafísica} \subset \text{Necessidade Física}$$

Dessa forma, a necessidade metafísica residiria entre aquelas que não podem ser determinadas exclusivamente pelas leis naturais[8], nem pelas leis lógicas.

Vale ressaltar que tal inclusão não é definitiva e sua aceitação depende de posicionamentos pragmáticos sobre outros conceitos metafísicos. Por exemplo, um defensor de certo essencialismo radical poderia defender que tudo o que é fisicamente necessário também seria metafisicamente necessário, já que estaria determinado, necessariamente, na essência do *ente*. Da mesma forma, um anti-essencialista poderia defender que tudo o que é logicamente possível é metafisicamente possível, já que não haveria nenhuma conexão necessária entre o ente e algum substrato não-lógico (metafísico) que "definiria" tal entidade.

Com relação à noção de possibilidade, Agostinho de Hipona (sec. V.) já utilizara a elaboração de *contrafatuais* para condicionar a análise de possibilidades; para ele, *meros*

[6] O uso do signo 'água' para representar tal elemento é uma convenção linguística. A necessidade está no fato do significante desse símbolo ser o composto químico que apresenta o feixe de propriedades que descrevemos.

[7] Em (HANNA, 2005), o autor demonstra que para a argumentação de Kant permanecer intacta, justificando a distinção entre analiticidade e sinteticidade e os juízos sintéticos *a priori* (por ele denominado *"o problema modal"*), é preciso demonstrar que na (CRP) Kant trabalha com um *dualismo modal* - duas modalidades que são irredutíveis: a necessidade geral e a restrita. A noção de necessidade geral representaria a necessidade presente em juízos analíticos (portanto no caráter da lógica), enquanto a necessidade restrita nos juízos sintéticos *a priori*, que exigem noções intuitivas - como aquelas da matemática (geometria) e da metafísica, sujeitas às condições de cognoscibilidade humana; uma proposição metafisicamente necessária seria, então, verdadeira em todos os mundos possíveis cognoscíveis ao homem - restritas as condições de espaço e tempo relacionadas ao aparato *a priori* de nossas intuições puras. Portanto, como a necessidade das leis naturais se relacionaria à cadeia de causas do mundo físico (Hume), teríamos em Kant a mesma cadeia de inclusão.

[8] Devo ressaltar a própria não aceitação universal das leis naturais; veja como exemplo o caso do posicionamento contrário que encontramos sobre tal princípio em Kant e David Hume (1711 - 1776). Hume, por exemplo, defendia a contingência das verdades empíricas (ver (HUME, 2000) seção 2, parte 2). Neste embate, Hume representa uma alternativa convencionalista para a interpretação das leis naturais, enquanto Kant representa determinado idealismo a respeito desta relação. Para Kant, "Não há nenhuma liberdade, mas tudo no mundo acontece unicamente segundo as leis da natureza"(ver (KANT, 2002)).

possibilia são entes genuínos (ver (ANTISERI; REALE, 2003c)). Notamos que as noções de modalidade parecem escapar da esfera lógica ou física ao longo da tradição filosófica ocidental. Por mais que existam argumentos que procurem reduzir algumas noções modais em categorias mais fundamentais como, por exemplo, a noção de necessidade metafísica ser reduzida à noção de necessidade lógica, é coerente supormos, como mostra a sentença (3), que existem contextos em que a noção de necessidade metafísica não pode ser explicada por nenhuma outra. Além disso, por sua pouca substancialidade, parece legítimo defender esta *definição negativa* da necessidade metafísica, na medida, por exemplo, em que a explicação da necessidade de (3) não se encaixa nas definições de necessidade lógica, nem natural.

Na Idade Média a discussão sobre as modalidades continuou a desempenhar papel fundamental na inquirição filosófica, refletindo sobre problemas comuns à época. Para Guilherme de Ockham (sec. XIII), tudo o que existe no mundo são entidades particulares; portanto, não existe *substrato* para conceitos universais, sendo estes apenas *nomes* que representam certos agrupados; sendo assim, modalidades (universais) são apenas disposições humanas apresentadas perante certas proposições (estas plurais), ou seja, não há um conceito universal sobre o ser 'necessário', já que há apenas *um* ser necessário: Deus. Neste sentido, a metafísica da modalidade na teoria de Guilherme de Ockham é minimalista, fazendo sentido, nesta teoria, apenas modalidades no sentido *composto/diviso*. Já para Jean Buridan (sec. XIV), também um nominalista, todos os termos de uma sentença referem-se a uma entidade, independente da verdade ou não da proposição, ou seja, mesmo quando uma proposição não é verdadeira, a entidade envolvida nesta proposição é um referente, mas um referente sem *substancialidade*[9].

Já na modernidade, a leitura de Leibniz da noção de necessidade é uma alternativa à apresentada por Espinosa, pois imprime certo determinismo no universo. Primeiramente, Leibniz é capaz de formular cenários possíveis tão ontologicamente bem fundados quanto o nosso; Deus atualiza nosso mundo por este ser "o" melhor, e não por ser lógico ou metafisicamente privilegiado, já que sua atualização reside em uma escolha moral. Em Leibniz, todas as propriedades de um indivíduo pertencem-lhe incondicionalmente, o que nos remente a um essencialismo radical, na medida em que um indivíduo, em todos os cenários possíveis, possui as mesmas propriedades, ou seja, apesar deste mundo não ser necessário (metafisicamente), todo indivíduo está essencialmente (necessariamente) determinado.

Esta concepção de indivíduo será de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria modal realista de David Lewis (1941 - 2001), aliada a alguns princípios filosóficos apresentados por Hume, entre eles o *princípio de separabilidade*. Segundo Hume, a) todo indivíduo é separável dos demais indivíduos, assim como b) todo evento é separável

[9] Vale a pena ressaltar certo paralelo com a teoria desenvolvida por Alexius Meinong sobre o problema geral dos existentes "ficcionais" (ver (KONYNDYK, 2008)).

dos demais eventos (a) e b) resumem o princípio de separabilidade de Hume). Portanto, em contraste com Leibniz, para Lewis, cada indivíduo deve ser tomado como sendo a união do mínimo de propriedades necessárias para sua definição, ou seja, cada indivíduo é tomado em seu mínimo. Segundo o princípio de separabilidade de Hume (HUME, 2000), se indivíduos e eventos são separáveis, todo indivíduo ou evento pode ser combinado de qualquer forma, a menos de contradição, ou seja, não há uma conexão necessária entre a natureza dos indivíduos. Portanto, algo é possível desde que seja concebível, i.e., tudo o que podemos conceber é possível, pelo menos no sentido metafísico, noção de possibilidade que está de acordo com nosso esquema apresentado sobre os sentidos fundamentais de possibilidades.

Essa discussão chega, contemporaneamente e na tradição da filosofia analítica, de uma maneira muito interessante, sintetizada por Kit Fine em 2005 (ver (FINE, 2005)) da seguinte maneira:

> "O atual pensamento sobre modalidades tem sido pesadamente influenciado, ou até mesmo dominado, por duas visões (...). A primeira delas, que está associada ao nome de Quine, diz que noções modais carecem de sentido. Não há uma distinção inteligível entre o que é necessariamente e o que é contingentemente o caso, ou entre as características essenciais e acidentais de um objeto. A segunda delas está associada ao nome de David Lewis, é que o possível e o atual formam um par ontológico. Outros mundos possíveis e seus habitantes são tão reais quanto o mundo atual e seus habitantes, e não há diferença entre eles nem em consideração ao grau e nem ao tipo de realidade que eles possuem."(citado em (COSTA, 2013)).

3.1.1 O Conteúdo de Noções Modais

Ao desenvolver uma teoria sobre as modalidades, exige-se uma interpretação dos conceitos modais para que a teoria possa ser capaz de explicar, de maneira consistente, as perguntas levantadas a respeito dos problemas que procura tratar. Nessa seção será distinguida uma interpretação opaca de tais conceitos, pois primeiramente lidarei com abordagens sobre a noção de modalidade que de alguma forma questionam a possibilidade de que expressões modais representem, de fato, algum conteúdo cognitivo que nos faça apreender ou conhecer algo sobre uma "realidade" concreta para além do indivíduo cognoscente.

A respeito das modalidades aléticas, podemos dividir esta interpretação opaca das modalidades em dois grandes grupos: *ceticismo modal* e *expressivismo modal*. Enquanto para os autores do primeiro grupo essas noções (necessidade e possibilidade) apenas expressam, de maneira obscura, algum tipo de conteúdo conceitual, para os expressivistas, modalidades não expressam conteúdo conceitual algum. Ou seja, um cético modal deve suspender as opiniões a respeito das modalidades, já que estas não expressam conteúdo conceitual claro sobre o qual possamos nos remeter de maneira objetiva, direta e inquestionável. Por outro lado, um expressivista modal nega completamente a possibilidade de que expressões modais carreguem algum conteúdo cognitivo, sendo apenas modos em que atitudes não-cognitivas do falante são expressas.

Para um expressivista modal, as noções modais, como estados não-cognitivos, estão ligadas a uma ação ao invés de uma representação, sendo, portanto, impossível que possamos, através de uma destas noções, formar algum conhecimento objetivo a respeito de determinada realidade. Essa interpretação ressoa na paráfrase de Quine feita por Borghini: "[A] necessidade reside na estrutura da mente, no qual nos relacionamos com as coisas, não nas coisas com as quais nos relacionamos."((BORGHINI, 2016), p. 42). Portanto, uma expressão modal S não poderia ser reduzida a noções semânticas como verdade e falsidade, pois a noção modal expressa por S não estaria relacionada a uma situação concreta (objetiva), mas a um sentimento ou a uma expressão de modo, utilizado pelo falante, para se referir ao conteúdo não modal de S. Sendo assim, para um expressivista modal, se A for uma sentença sem conteúdo modal, as expressões 'É possível que A', 'Pode ser o caso que A', 'Talvez A' ou 'É provável que A' são todas distintas, já que em cada caso, as sentenças modais obtidas com o uso de A referem-se a expressõs (sentimentos) distintas sobre A; por exemplo, o sentimento expresso pelo modo "talvez" é diferente daquele expresso por "é provável que". Portanto, embora um expressivista possa considerar legítima certa interpretação *de re* de uma modalidade (o modo refere-se, ou a um sentimento, ou a uma estrutura mental do falante em relação a um objeto (ou coisa) que pertence à situação expressa pela sentença modalizada), em geral, a interpretação de uma sentença modal deve ser *de dicto*. Obviamente, tal interpretação das modalidades levanta uma crítica pertinente: se os modos se referem a sentimentos, que não pertencem ao campo da lógica, como construir uma teoria lógica - com tal fundamentação - que trate de inferências realizadas a partir de sentenças modais?

A respeito de um cético modal, ao contrário, podemos apontar diversas nuances interpretativas. Quine, por exemplo, tende a interpretar as modalidades no sentido *de dicto*, já que considera ilegítimas as interpretações *de re*; acredita que toda modalidade, quando se refere aos objetos, é vazia de significado conceitual; porém, ao modalizar uma sentença, tal significado modal se refere apenas aos aspectos sobre o qual falamos sobre a situação, e não sobre ela mesma. Portanto, o conteúdo conceitual expresso por essa afirmação, no sentido *de dicto*, não é claro em relação à situação propriamente dita; é por isso que Quine é um crítico ao *essencialismo* e da (crença de uma) noção de *necessidade metafísica*.

O uso de *cenários possíveis* na análise da noção modal de possibilidade é uma importante ferramenta. Porém, P. Van Inwagen acredita que todo juízo sobre cenários não-físicos devem ser suspensos; mais do que isso, para ele, cenários possíveis não possuem tal fundamentação *física* necessária para que pudéssemos sustentar nossos juízos sobre as modalidades. Desta forma, a teoria modal de Van Inwagen pode ser classificada como cética epistêmica, na medida em que não podemos julgar afirmações sobre cenários abstratos sobre o qual não podemos ter acesso concreto, impossibilitando assim a análise da noção modal de possibilidade por meio de cenários possíveis.

Estas posições nos encaminham para problemas relacionados a certas abordagens a respeito do conteúdo das noções modais que podem ser consideradas como uma interpretação cética radical. Se não podemos nos fiar nas noções modais, ou seja, se devemos ser céticos em relação ao conteúdo conceitual e cognitivo que carregam, como tratar a análise das noções modais de necessidade e possibilidade quando compreendidas à luz da semântica de mundos possíveis? Considerando que uma sentença S é possível caso exista um "cenário" em que S descreve uma proposição ou fato desse cenário, como interpretar esta análise se estamos nos referindo a um *mero possibilia*, caso em que o cenário em discussão não for concreto ou atual? O discurso modal só tem significado quando se refere a entidades e situações atuais? Um cético radical questionará semanticamente o significado de expressões referentes a *meros possibilia*; no sentido epistêmico, ele duvidará que seja possível, inclusive, ter acesso a uma confirmação desta afirmação sobre o *possibilia*. Um cético radical terá pouca simpatia pela metafísica, à medida que, para ele, devido suas particularidades, *meros possibilia* pertencem a uma categoria de cenários aos quais filósofos não deveriam discutir, portanto, sobre os quais deveriam suspender radicalmente qualquer tentativa de juízo de valor sobre questões por eles levantadas.

As críticas a tal abordagem cética radical sobre as modalidades podem ser fundamentadas em dois pontos principais. Primeiramente, um cético radical exige que as características do universo possam ser compreendidas somente pela experiência (empírica), posição questionável. É possível argumentar que, assim como o possível, mesmo o atual não pode ser apreendido completamente pela experiência, tendo em vista que não podemos ter acesso a todo o presente, muito menos ao passado ou ao futuro. Além disso, de acordo com o ceticismo humeano (a mera observação sobre eventos presentes não produz conhecimento para que se estabeleça uma implicação lógica sobre eventos futuros), o núcleo do raciocínio indutivo não pode justificar qualquer conhecimento *a posteriori*. Em segundo lugar, se supusermos que existem aspectos da experiência humana que são *a priori*, então entenderíamos que os cenários possíveis não-concretos pertenceriam a tal categoria, por estarem restritos à esfera da imaginação, responsável também, em cada indivíduo, pela representação da realidade por ele vivida. Nessa suposição, suspender o juízo sobre possibilidades implicaria na suspensão de juízo sobre parte da realidade - aquela *experienciada* pelo indivíduo.

Considerando as críticas a tais interpretações opacas das noções modais, parece que se desejarmos investigar as consequências do discurso metafísico e das noções de necessidade e possibilidade, de maneira a investigar *o mundo como é* e determinar se seus fenômenos são contingentes ou necessários, seria plausível assumirmos que tais noções modais possuem, de fato, algum conteúdo conceitual - i.e., nos afastarmos de tais interpretações modais negativas. Obviamente, o problema agora residirá no “acesso” a tais conteúdos.

3.1.2 Teorias Modais

Assumamos que as noções modais não são conceitos opacos, que elas de fato expressam certo conteúdo cognitivo que nos fornece ferramentas para compreender ou analisar a realidade. Com esta assunção, alguns autores, em oposição a outros que adotam uma posição cética ou expressivista a este respeito, são capazes de colocar e, em parte explicar, problemas filosóficos que demandam noções modais.

Usual em filosofia, o método de genealogia pretende desvelar noções mais básicas em que repousam certos conceitos que podem parecer, à primeira vista, irredutíveis. Portanto, a pergunta ‘É possível analisar conceitos modais, reduzindo-os a outros conceitos mais básicos?’ pode ser respondida de duas maneiras: sim ou não. Segundo Borghini (BORGHINI, 2016), entre os filósofos contemporâneos que responderiam afirmativamente a essa pergunta estão os *disposicionalistas*, os *realistas modais*, os *ersatzistas*, os *ficcionalistas* e os *agnósticos*. Apontarei mais a frente as particularidades de cada uma destas abordagens modais. No momento, analisemos qual a posição dos autores que respondem de forma negativa à questão colocada, os *modalistas*.

3.1.2.1 Modalistas

Segundo o *modalismo*, uma modalidade é um fato bruto - não pode ser explicada ou reduzida a partes mais simples; as sentenças modais expressam um conteúdo que pode ser completamente compreendido, ou seja, modalistas não têm interpretação opaca das modalidades e, portanto, esses conteúdos não expressam qualquer forma de sentimento, na medida em que são fatos. Portanto, embora um modalista admita que seja necessário, para o desenvolvimento de uma teoria filosófica que trate de noções modais, o uso da linguagem modal, a redução da análise desses conceitos a cenários possíveis, ou à valoração de uma sentença nestes cenários (verdadeira em todos os mundos possíveis ou falsa em algum mundo possível), é inadmissível, já que os conceitos modais de necessidade e possibilidade seriam irredutíveis (nesse caso estariam sendo reduzidos ou explicados pelas noções de verdade, falsidade e/ou mundos possíveis). Ou seja, a necessidade de um cenário é, por si só, um fato bruto; as sentenças modais podem ser verdadeiras ou falsas, porém, não podemos reduzir os conceitos de necessidade, possibilidade ou contingência, à verdade de uma sentença não modal em *todo* ou *algum* mundo possível, situação que ocorre, segundo modalistas, ao utilizarmos as semânticas de mundos possíveis para interpretar sistemas lógicos modais.

Enquanto os símbolos $\Box$ e $\Diamond$ são lidos semanticamente, por um adepto da semântica de Kripke, como verdade em relação a todos ou algum cenário, respectivamente - portanto admitindo certo caráter quantificacional sobre mundos possíveis - um modalista os interpreta em relação ao mundo atual, devido à presunção de que a necessidade de um cenário é um fato bruto. Disso resulta que um dos principais problemas de uma teoria modalista é a diminuição do poder expressivo da linguagem; outro problema é o de caracterizar propriamente o poder expressivo destes símbolos na lógica modal. Pode-se questionar também que, sem a redução a mundos possíveis, não é possível falar sobre possibilidades, em relação ao mundo atual, sem recair em qualquer outro tipo de estrutura similar à de mundos possíveis[10].

3.1.2.2 Reducionistas

Tratemos agora daqueles que respondem que sim, é possível analisar noções modais por meio de uma redução a conceitos mais simples. Estes autores podem ser divididos em dois grandes grupos; o primeiro deles, os *disposicionalistas*, não utiliza a estrutura da semântica relacional para esta análise, enquanto os do segundo grupo, sim. Como o segundo grupo é mais numeroso e diversificado; farei uma breve apresentação de como disposicionalistas se colocam em relação a tal redução do discurso modal em termos de noções mais básicas.

Para um disposicionalista, uma *disposição* não pode ser definida, ou seja, é uma noção primitiva. Em Aristóteles, a palavra disposição (*hexis*) está ligada, por exemplo, à virtude moral, já que ela implica na ação deliberada em conformidade com a reta razão; para o estagira, um dos significados para esta palavra abarca a noção de certas características que um homem possui, como saúde, caráter ou conhecimento. Ou seja, uma disposição é algo possuído - mas não concreto - por um indivíduo, não sendo uma faculdade, nem uma paixão, nem uma característica como a cor dos olhos, por exemplo. Esta interpretação em Aristóteles ressoa muito bem a noção pretendida atualmente por filósofos que advogam uma posição disposicionalista para os conteúdos modais. Segundo eles, podemos explicar o significado de uma sentença modal da linguagem comum em termos das disposições das entidades do mundo atual. Isto implicaria na postulação da existência de tais propriedades disposicionais[11] e na necessidade de demonstração de como tais propriedades são suficientes para explicar o significado de sentenças modais.

[10] O trabalho de Charles Chiahara seria um exemplo de uma teoria modalista.

[11] Sobre o problema do trato destas propriedades a partir de uma posição empírica, além da discussão acerca das diferenças entre propriedades disposicionais e categoriais, remeto a (BORGHINI, 2016).

Pode-se concluir que para um disposicionalista apenas o nosso mundo é relevante e tais disposições parecem possuir um caráter intencional, na medida em que *nós* identificamos as disposições das coisas; em certo sentido, somente o mundo atual existe e somente sobre ele podemos fazer julgamentos. Isto coloca em evidência um problema na abordagem disposicionalista: como analisar a veracidade de uma afirmação sobre uma possibilidade, mesmo que envolvendo apenas entidades atuais, com relação a certas disposições que não são atuais, mas poderiam ter sido? Ou seja, qual a conexão entre existência atual e possível? Se a fundação das noções modais reside no fato de que *tudo o que é, é em virtude do que poderia ter sido*, como podemos fazer afirmações sobre possibilidades que não são atuais, porém, parece ser razoável supor que poderiam ter sido, ou que possam a vir a ser realizáveis? Nesse caso, o disposicionalismo parece limitar as noções modais a contextos que reduzem o poder expressivo e argumentativo do discurso filosófico, afastando-o das discussões de grande importância para a solução de problemas metafísicos fundamentais, a saber, aquelas que envolvem meros *possibilia*[12].

Para que possa discutir a posição de diversos autores acerca da redução do discurso modal, precisarei primeiramente me concentrar em um ponto de crucial importância para uma teoria modal que utilize a noção de *mundo possível*. Como já explicitado anteriormente, algumas objeções à semântica de Kripke baseiam-se na crítica a esse conceito, problemático para alguns.

Em filosofia, é perigoso fazermos afirmações sobre a forja de determinadas expressões ou conceitos. Embora a prática do uso de cenários alternativos, dentro de uma argumentação filosófica, seja anterior à Leibniz, foi este filósofo que ao utilizar-se da abstração de *mundos possíveis* para representar uma sucessão - não no sentido de linearidade - de cenários realizáveis, possibilitou que engrenagens mais sofisticadas utilizassem da mesma noção para analisar certos argumentos filosóficos que escapam à nossa condição atual. Embora Ludwig Wittgenstein e Rudolf Carnap, por exemplo, já tivessem apresentado descrições filosóficas precisas do que tais conceitos poderiam desempenhar numa formalização lógica, foi através do desenvolvimento dos trabalhos de Jaakko Hintikka (1929 - 2015) e Saul Kripke (1940), principalmente, que o conceito de mundo possível foi apresentado de uma maneira mais objetiva, sistemática e rigorosa.

Intuitivamente, podemos pensar que um mundo possível é um cenário completo e consistente de como nosso mundo poderia ter sido. É claro que a questão sobre a composição desse cenário, se composto por fatos, proposições ou sentenças, por exemplo, terá múltiplas respostas. Todavia, tal fundamentação ontológica de um mundo possível desempenhará papel lógico e filosófico importantíssimo em qualquer teoria modal que

[12] Na medida em que impede a fundamentação ontológica de entidades ou indivíduos não-atuais, já que a estes não podemos atribuir disposições, quiçá analisá-las de maneira satisfatória.

pretenda explicar as noções de necessidade e contingência, por exemplo, a partir dele. Além disso, pode-se argumentar que esta imagem que criamos a respeito dos mundos possíveis exclui cenários que são totalmente desconectados do nosso mundo, ou seja, em que as leis físicas (no sentido de leis naturais), ou mesmo a própria compreensão do termo "vida", sejam totalmente diferentes daquilo que conhecemos ou que somos capazes de imaginar e que, portanto, tal ferramenta não seria poderosa o suficiente para investigarmos os limites do que é *metafisicamente possível*.

Todas as diferentes visões sobre mundos possíveis podem ser abarcadas em dois grandes grupos: os *abstracionistas* e os *concretistas*. Um abstracionista assume que um mundo possível é apenas um modo em que as coisas poderiam ter sido, sem identificar tal modo com qualquer tipo de realidade, ao passo que um concretista considera que cada mundo possível é uma realidade tão concreta quanta a nossa. Analisarei com mais cuidado estas distinções e algumas de suas implicações ao continuarmos a descrição das teorias modais que acreditam que conceitos modais podem ser reduzidos em função de conceitos mais básicos, por meio das noções da semântica de mundos possíveis.

Teoria das contrapartes

David Lewis é o principal proponente de uma visão concreta para os mundos possíveis - o *realismo modal*, desenvolvendo tal teoria, principalmente, em sua obra *Sobre as Pluralidades de Mundos* (LEWIS, 1979a). Em seu programa, todos os cenários e indivíduos existem no mesmo sentido que os cenários e indivíduos atuais, ou seja, há infinitos mundos tão concretos quanto o nosso. Para conciliar sua crença de que todo indivíduo possível existe da mesma forma que um indivíduo atual e sua noção de existência concreta de infinitos mundos possíveis, D. Lewis postula, na *teoria das contrapartes*, que cada indivíduo habita em um e somente um único mundo[13].

Entretanto, podemos indicar que para Lewis, assim como para um realista modal, a afirmação (a) 'Poderiam ter existido mais estrelas do que existem', possui significado cognitivo compreensível e não é, de forma alguma, a expressão de um sentimento de quem afirma, mas sim uma afirmação genuína sobre um cenário concreto (possível). Dessa forma, um realista modal se opõe a um cético e a um expressivista modal. Contrário a um modalista, um realista modal acredita que as noções modais podem ser analisadas por intermédio das noções de mundos possíveis, ou seja, as modalidades podem ser reduzidas a conceitos mais simples, tais conceitos relacionados à semântica de mundos posssíveis. Nesse caso, a sentença 'Há um mundo no qual há mais estrelas do que em nosso mundo' é uma tradução para um realista modal da afirmação (a). Um realista modal, ao admitir a existência de infinitos mundos, alguns dos quais diferem muito pouco do nosso, e considerar

[13] De fato, a teoria das contrapartes é cronologicamente anterior à proposta filosófica do realismo modal.

qualquer um destes mundos tão bem fundamentado ontologicamente quanto o mundo atual, desenha um quadro em que entre os infinitos mundos possíveis, todos concretos, nenhum deles, inclusive o atual, é privilegiado metafisicamente em relação aos demais.

Na teoria das contrapartes, os mundos possuem o máximo de indivíduos, sendo todos isolados dos demais, ou seja, a teoria das contrapartes admite que 1) um mundo é composto por seus habitantes (o conjunto maximal de indivíduos de um mundo o determina); 2) cada mundo, de seu ponto de vista, é atual (atual é apenas um índice da teoria) e 3) nenhum indivíduo habita em mais do que um mundo.

A teoria das contrapartes apresentada por D. Lewis (ver (LEWIS, 1979b)) possui quatro predicados primitivos e oito postulados. Uma estrutura para essa teoria satisfaz esses oito postulados para os predicados primitivos da linguagem. A consequência é uma ontologia disjunta de indivíduos possíveis. Os predicados são:

Wx (x é um mundo possível);

Ixy (x está em um mundo possível y);

Cxy (y é uma contraparte de x);

Ax (x é atual).

O postulado P1. afirma que se x está em algum y, então y é um mundo possível; P2. afirma que todo indivíduo x pertence a um único mundo; os postulados P3. e P4. asseguram que se x é uma contraparte de y, existem mundos que contêm x e y, já P5. assegura que se x e y estão em um mesmo mundo e são contrapartes, então são o mesmo objeto, logo, como consequência, P6. assevera que todo indivíduo é contraparte de si mesmo. Por fim, P7. e P8. asseguram que há um mundo em que qualquer coisa é atual se e somente se está nesse mundo[14].

Pode ser feita a seguinte objeção: internamente ao realismo modal e considerando que se pretende reduzir as noções modais por meio do recurso a mundos possíveis, como podemos falar sobre a possibilidade, ou necessidade, de um fato envolvendo um indivíduo específico, se objetivamente falando, tal indivíduo só pertence a um único mundo? A resposta para a questão reside no fato de que tal teoria é desenvolvida com a inspiração de dois princípios: *princípio da plenitude*[15] e uma reformulação do *princípio de recombinação* de Leibniz[16].

[14] Ver no capítulo 6 a axiomática para a teoria das Contrapartes.

[15] Plenitude das possibilidades: tudo o que poderia ser, é.

[16] Existe pelo menos um problema epistemológico evidente nesta concepção, a saber, como determinar o que é possível. Para uma argumentação a favor do realismo modal que admita o princípio da plenitude, seria necessário evidenciar como, epistemologicamente, podemos ter acesso cognitivo ao que é possível e garantir que tudo ao qual temos acesso como possível (imaginável?) é realmente possível. Como tal discussão extrapola os limites do presente trabalho, não nos aprofundaremos nestes detalhes.

Isto é feito pela introdução de duas noções. i) *Propriedades naturais*: são as propriedades que, ou possibilitam as explicações de relação de causa fundamentais, ou fundam a "similaridade" de tipos naturais; ii) *Duplicados intrínsecos*: são os indivíduos que compartilham todas as propriedades naturais. Portanto, ao falarmos sobre um indivíduo em um mundo em que ele não existe, podemos analisar as informações não modais a respeito de seu duplicado intrínseco, que divide com o indivíduo original, que é referido pela sentença modal, todas as suas propriedades naturais, ou seja, eles deveriam dividir entre si as propriedades metafísicas necessárias para a investigação da veracidade da afirmação modal.

Segundo David Lewis, as vantagens do realismo modal em relação a outras teorias modais que pretendem a redução de conceitos modais a noções mais básicas residem em:

1) A redução de noções modais a não-modais;

2) A análise por meio de contrafatuais (cenários não-atuais);

3) Teoria metafísica robusta, já que comporta mais *possibilia* do que aqueles comportados pela linguagem[17];

4) Ontologia minimal, já que o que existe são mundos (ou suas partes, de acordo com o princípio de recombinação). Como os mundos são completamente determinados por seus indivíduos, toda a fundamentação ontológica para a teoria segue da existência destes mundos;

5) Ser um modelo, considerado por ele simples e elegante, que é capaz de explicar o comportamento dos agentes[18].

As críticas à teoria das contrapartes, e ao próprio realismo modal, abordam diversos aspectos da teoria. Há uma grande resistência em admitir por completo a principal tese realista, a saber, de que todo mundo possível existe da mesma maneira que o atual, pelo medo de que a teoria resultante seja completamente desconectada da percepção que temos sobre a realidade e do mundo que nos cerca. Na teoria de Lewis, especificamente, o uso do princípio de recombinação é especialmente problemático. Em primeiro lugar, porque se argumenta que inerente ao princípio existe a necessidade do uso de noções modais, o que acarretaria na falha, proposta pela teoria, de reduzir noções modais a não-modais (já que para isso, na teoria das contrapartes, é fundamental o uso do princípio da recombinação; se em tal princípio aparecem noções modais, a redução é ineficiente); em segundo lugar, porque alguns apontam para um círculo vicioso, interno ao processo de redução dos conceitos modais, já que as modalidades podem ser explicadas por meio

[17] Verificar o tamanho do domínio do modelo topo $FOS4$-canônico, subseção 7.1.1.2, em linguagem enumerável.

[18] Cada agente, como indivíduo, está completamente determinado (junto de suas ações) pela sua relação de pertinência ao único mundo que compõe.

da noção de mundos possíveis, que por sua vez dependem do princípio de recombinação (quais duplicados seriam co-possíveis).

Abstracionistas

Ficcionalismo e *agnosticismo modal* são outras duas tentativas de *explicar* a interpretação de noções modais por meio de conceitos mais simples.

Um ficcionalista se dá a liberdade de escolher, dentre as teorias modais disponíveis capazes de reduzir noções modais, aquela que melhor se adapta a sua visão sobre conceitos modais. Porém, as estratégias formais dessas teorias são vistas por ele como ferramentas; as sentenças modais exigem uma teoria para serem explicadas e, em geral, a teoria dos mundos possíveis é a melhor escolha, mas os mundos possíveis seriam apenas ficções que auxiliam na interpretação das sentenças modais, ou seja, as teorias que exigem que um mundo possível tenha fundamento ontológico devem ser preteridas por um ficcionalista. O conteúdo das sentenças modais, por outro lado, não é uma ficção, ou seja, na sentença modal 'É possível que S', onde S é uma sentença não modal, um ficcionalista aceita que existe um conteúdo cognitivo expresso pela sentença modal; teorias baseadas na ideia de mundos possíveis são uma ferramenta para explicitar tal conteúdo, ou seja, se a sentença modal é verdadeira, sabemos que na ficção de uma teoria de mundos possíveis, existe um mundo em que S ocorre. Portanto, um ficcionalista procura evitar os problemas metafísicos e epistemológicos relacionados à noção concreta de mundo possível, mas se agarra ao potente poder explicativo das teorias baseadas na semântica de Kripke. Podemos levantar as seguintes objeções: até que ponto seria legítimo utilizarmos uma teoria modal como ferramenta para redução de noções modais, mas não nos comprometermos filosoficamente com a explicação dos conceitos envolvidos nesta teoria? Mesmo que um mundo possível, ou os indivíduos que habitam estes mundos, seja uma ficção, não seria ingenuidade omitir o problema de fundamentação (grounding)?

Diferentemente de um ficcionalista, um agnóstico modal não pretende reduzir noções modais a conceitos mais básicos, mas utilizar-se de outras noções mais básicas para *explicar* as noções modais, não se comprometendo, portanto, com a visão de que conceitos modais possam ser reduzidos - ou definidos - a noções não-modais. Para isso, o *agnosticismo modal* utiliza-se da semântica de mundos possíveis sem se preocupar com a "verdade" ou adequação dessa ferramenta, já que apenas pretende explicar as noções modais utilizando-se dela (ou suas noções de mundo possível e acessibilidade) como uma ferramenta para isso. Assim, o agnosticismo tem um forte viés antirrealista, na medida em que não está preocupado com o problema da existência de mundos possíveis[19].

[19] Para o agnóstico modal, este problema é irrelevante ao utilizar mundos possíveis para explicar o significado de expressões modais. Portanto, nega que sentenças modais, mesmo interpretadas pela semântica de mundos possíveis, nos comprometam com a existência de mundos diferentes do nosso.

Por fim, discutiremos a posição mais comumente assumida por teoristas modais[20], a de que as modalidades podem, de fato, ter seu conteúdo epistemológico reduzido por noções mais básicas e que isso pode ser feito por meio do discurso de mundos possíveis. Porém, tais mundos, talvez infinitos, não são como o nosso, mas apenas *substitutos* (do alemão *ersatz*) para o nosso mundo (ou partes dele). Estes autores consideram, em geral, um sistema de lógica modal quantificada (QML) *standard* e admitem a noção de identidade entre mundos, ou seja, rejeitam a teoria *world-bound*, a tese realista modal de que cada indivíduo pode povoar um único mundo possível. Tais teorias se contrapõem ao realismo modal tanto no sentido semântico, já que os domínios de mundos possíveis apresentam intersecção, quanto no sentido metafísico, pois mundos possíveis são apenas substitutos do mundo atual, tendo este, portanto, prioridade sobre aqueles. Dessa forma, a noção de possibilidade metafísica é traduzida como *inteligibilidade*, na medida em que S é possível, a partir do mundo atual[21], se for possível imaginar certo substituto desse mundo (ou de parte dele) em que S é o caso, portanto o metafisicamente possível está relacionado com aquilo que é inteligível ao homem. Seguiremos Borghini (em (BORGHINI, 2016)) na distinção de quatro teorias do *ersatzismo*, diferindo-as por suas concepções sobre mundos possíveis.

Um autor que assume as posições básicas do ersatzismo e concebe mundos possíveis como conjuntos consistentes e completos de sentenças de uma linguagem é chamado de *ersatzista linguístico*. Nesse caso, ele não deseja reduzir uma explicação modal a uma linguagem não modal, tendo em vista que conceitos como consistência (compatibilidade) e maximalidade seriam noções modais (sobre o modo como as coisas podem ser arranjadas e descritas). Portanto, o conteúdo de noções modais pode ser apreendido em função de explicações que utilizam a noção de conjuntos de sentenças.

Certa corrente do ersatzismo é denominada *combinatorialista*; nela, exige-se o uso do *princípio de recombinação* (realismo modal) para explicar as noções modais, já que a explicação destas noções ocorreria por intermédio de entidades atuais aplicadas com o princípio de recombinação. Mundos possíveis são, então, recombinações abstratas de elementos do mundo atual; tais recombinações exemplificam *estados de coisas*, complexos formados por diversos constituintes através de uma ordem estruturada. Portanto, os constituintes de um mundo possível estão bem ordenados e são elementos constitutivos do mundo atual. Temos assim a visão metafísica de que um mundo possível é o rearranjo de indivíduos e universais do mundo atual, onde indivíduos (particulares) e universais são

[20] Alguns autores que estão mais intimamente ligados com esta abordagem a respeito das modalidades e da noção de mundos possíveis são: Leibniz, L. Wittgenstein, R. Carnap, A. Plantinga e R. Stalnaker, entre outros.

[21] Pode-se considerar como mundo atual aquele a partir do qual fazemos referência ou, como certos teoristas assumem, o mundo atual é construído, a partir de entidades intencionais, como certa entidade maximal que representa tudo o que é o caso.

os constituintes desta recombinação; por exemplo: o cão Dudu (particular) instancia o universal *ser cachorro*, e todos estes constituintes, o universal cachorro e o particular Dudu, são atuais. Estes constituintes podem ser atômicos, se não possuírem partes próprias, ou não-atômicos. A principal diferença entre o uso do princípio de recombinação entre combinatorialistas e realistas modais reside no fato de que enquanto os primeiros consideram universais como constituintes, portanto aptos à recombinação, realistas modais consideram como constituintes apenas os indivíduos (particulares). Um dos argumentos contrários ao combinatorialismo repousa sobre o fato da possibilidade de o mundo atual conter mais (expansão) ou menos (contração) indivíduos (constituintes) do que os possíveis; uma tentativa de resolver tal problema é assumir a posição metafísica defendida pelo *princípio da plenitude*, ao considerar que o mundo atual consiste de tudo o que poderia ter sido o caso, não só em relação ao número, mas em variedade.

Outro posicionamento para um ersatzista é denominado *ersatzismo atômico*. Nessa concepção, mundos não possuem estrutura; mundos possíveis são, portanto, átomos que têm, por si mesmos, plena integridade; eles representariam como o nosso mundo poderia ser, não sendo formados por partes de outro mundo, nem mesmo do mundo atual. Isso é justificado pelo fato de que somos capazes de imaginar a divisão de uma entidade em partes, sem que tal divisão seja de fato realizada, ou seja, o discurso de mundos possíveis pode explicar noções modais não por meio de constituintes, mas pelo seu poder representacional. Porém, ao adotar tal perspectiva, o teorista modal precisa responder como explicar, metafisicamente, a forma como esta representação se dá, ou seja, ao procurar não se comprometer com o problema metafísico de determinar o que é um mundo possível, ele não escapa de ter de se posicionar sobre os mecanismos metafísicos que legitimam o problema da representação.

Resta-nos esboçar o tipo de posição acerca dos mundos possíveis como substitutos do mundo atual que tem grande importância para a teoria das modalidades, posição esta denominada *ersatzismo pictórico*, em que mundos possíveis são tomados como representações não-linguísticas de formas como o mundo poderia ser, seja considerados como proposições ou como estado de coisas. Não estando atrelados a uma linguagem, não há limitações para o número de cenários possíveis. Assim como o ersatzista linguístico, o pictórico considera que um mundo possível, como representação, é maximal e consistente; Essas configurações podem ser concebidas, preferencialmente, de três formas: a) como conjuntos consistentes e maximais de proposições; b) como estados de coisas complexos, que não são meramente recombinações do estado de coisas atual ou c) como imagens.

No caso a) as noções metafísicas primitivas são: proposição, conjunto e relação (verdade em). A existência das proposições independe da existência atual das entidades nelas presentes ou de uma linguagem que as expresse, portanto, cada uma delas não é nem incompleta nem contraditória (em relação a si mesma). Desta forma, a noção de verdade (e portanto das modalidades) reside na relação entre sentenças e conjuntos de proposições. No caso b) ao invés das proposições, são os estados de coisas que estão no fundamento da noção de mundo possível. Ao fazer tal deslocamento, o teórico modal procura se distanciar dos problemas sobre a determinação da relação entre sentenças e proposições e sobre a indicação do status ontológico das proposições como entes isolados. Alvin Plantinga pode ser apontado como o principal teórico modal a se enquadrar nessa abordagem teorética sobre as modalidades. Nessa concepção, não é exigido o uso do princípio da recombinação, como no caso dos combinatorialistas; aqui, os constituintes dos estados de coisas não precisam ser entidades atuais, o que acomoda de maneira mais suave as possibilidades não-atuais. Além disso, é possível explicar a existência de possíveis não-atuais ao postular que os constituintes de um estado de coisas existem necessariamente, i.e., se há o estado de coisas que contém tal constituinte, tal constituinte necessariamente existe, o que é feito, em Plantinga, por exemplo, pela noção de *essência individual*

No caso c) mundos são vistos como imagens, portanto não são representações com estrutura linguística ou lógica[22]. A existência de um mundo possível como imagem não implica na existência concreta daquilo que é imagem, já que podemos, por exemplo, formar uma imagem, mesmo que rebuscada, de um centauro, sem nos comprometermos com sua existência concreta. Tal interpretação recebe algumas críticas; destaquemos duas delas: em primeiro lugar, conseguimos com esta ferramenta teórica dar uma explicação, e não uma definição, da noção de possibilidade, pois ela repousa em argumentos baseados em entidades não objetivas (imagens); em segundo lugar, não parece ser claro como podemos usar a noção de mundo possível como uma simples imagem, já que espera-se que tal noção deva envolver, no mínimo, uma figura interpretada, ou seja, retorna-se ao problema da representação.

Outras Reduções Modais

Barbara Vetter em (VETTER, 2011) nomeia certas teorias modais contemporâneas de *novo atualismo modal*. A grosso modo, estes teriam uma estreita relação com disposicionalistas, pois acreditam que outras noções modais, como disposições ou essências, são responsáveis por prover a análise das noções de necessidade e possibilidade. Além disso, muitos deles acreditam que a noção de mundos possíveis não é capaz de suprir uma análise viável das noções modais, pois estas devem encontrar no mundo atual o que as sustenta, ou sua fonte. Entre as questões de especial interesse para esses autores está a seguinte: 'Como suprir o fundamento ontológico para o maquinário da semântica de mundos possíveis? Resposta: Na impossibilidade de encontrar tal fundamento, utilizar o significado de sentenças modais, dado por essa semântica, sem se preocupar com a

[22] Uma figura seria diferente da representação de um objeto, já que a representação envolve um código interpretativo.

teoria necessária para fundamentá-la, ou seja, as noções que o maquinário da semântica de mundos possíveis produz servem apenas para nortear a investigação, já que a análise dos conceitos modais de necessidade e possibilidade será feita pela redução desses conteúdos a outras noções mais fundamentais, como disposições ou essências.

Para alguns autores, existem diversas vantagens nesta abordagem aos conceitos modais. Citemos algumas tentativas.

Para Kit Fine (ver (FINE, 1994)), ao adotarmos como fundamental a noção de essência, podemos ser mais específicos ao falarmos sobre indivíduos particulares, pois tais noções referem-se diretamente ao particular. O autor argumenta que invocar a noção modal da *essência de Sócrates* nos permite explicar, intuitivamente, porque Sócrates é mais fundamental do que o conjunto unitário que contém Sócrates, i.e., falar do indivíduo sem termos que fazer referência ao domínio de um mundo possível em que Sócrates existe. A razão para isso estaria no fato de que a existência de Sócrates faz parte da noção de conjunto unitário que contém Sócrates, porém, não faz parte da ideia de Sócrates (essência de Sócrates, como apontado por Fine) que ele esteja contido em um conjunto unitário.

Já para E. J. Lowe (LOWE, 2001), cada indivíduo é identificado à sua essência, i.e., as essências fornecem fundação adequada para a definição de noções modais, de maneira que fundem-se as ideias de "indivíduo" e "características individuais". Plantinga, por outro lado, considera que as essências são parcelas dos mundos possíveis (estados de coisas), dessa forma, embora as essências se relacionem intrinsecamente com as definições dos indivíduos, Plantinga consegue articular o conceito de essências de objetos não atuais que continuam a ser constituintes de mundos possíveis, concluindo que são as essências que dão suporte às noções sobre mundos possíveis. Esses dois autores se utilizam da noção de essência para explicar noções modais; segundo eles, ela fornece um território seguro para uma nova proposta semântica e epistemológica das modalidades. Essas abordagens, conhecidas por *essencialismo atualista*, compartilham a primazia da noção de essência, sendo que por meio dela, as noções modais de necessidade e possibilidade podem ser analisadas.

3.2 Ser, Essência e Existência

Filósofos contemporâneos que utilizam a noção de mundos possíveis para construir um sistema metafísico precisam explicar que tipo de coisas são mundos possíveis, de que são formados e qual a "natureza" dos habitantes que possuem: são seres contingentes ou necessários? Podem habitar em mais de um mundo ou existem simultaneamente em diversos mundos possíveis? A natureza dos mundos possíveis (como entidades concretas ou fictícias) e de seus habitantes deve estar espelhada na estrutura do sistema lógico utilizado para realizar inferências argumentativas a respeito de tais teorias, no sentido de determinar as fórmulas lógicas que são consequências de tais posições fundamentais, na busca por respostas a problemas filosóficos.

Pode-se, com as noções de ser, essência e existência, dar fundamento para os princípios intuitivos que são utilizados para construir um discurso que versa sobre o mundo. Quando formamos uma sentença, ela sempre envolve a formulação de um enunciado que diz respeito a "algo" (concreto ou abstrato), referenciado de alguma forma no mundo. Portanto, isso sempre é feito de maneira a termos nossa intenção direcionada a alguma coisa, a algum conteúdo que suporte esse pensamento representado pela sentença; a noção de ser (ou não-ser) faz-se presente, independentemente de nossa constatação, no mundo, do seu conteúdo - pelo menos no nível linguístico. Tendo em vista a multiplicidade de objetos às quais temos contato, ou que somos capazes de inteligir, somos tentados a criar normas que nos permitam diferenciar tais objetos: indivíduos e conceitos; a noção de essência (e correlatas) em geral cumpriu este papel ao longo da tradição filosófica ocidental. Por fim, a reunião das noções de ser e essência impõe outro problema: a determinação daquilo que existe. Todo ser possui existência? Até que ponto um ser pode sofrer alterações de maneira que sua identidade permaneça constante? Será que tal alteração é possível? Mais ainda, até que ponto podemos alterar sua constituição e afirmar a própria possibilidade da continuação de sua existência (*qua* mesmo indivíduo)?

3.2.1 Visão Geral na Antiguidade

Segundo Ricoeur (RICOEUR, 2014), a Ideia (*eidos*), noção socrática/platônica, é una e constante, no sentido de que é individual e não composta por partes, e sempre será a mesma, portanto, a noção de essência desempenha a função de unidade e identidade na teoria platônica a respeito dos indivíduos. Em Platão/Sócrates, o conceito de essência está intimamente ligado à pergunta ontológica 'O que é X?'. Nela, o verbo "ser" é referenciado duas vezes: primeiro como fundamento do ser, já que X *é*, e como cópula, já que sobre o objeto que é, afirmamos algo (que ele é X). Sendo assim, a questão do ser é subjacente à função de identidade da essência, já que a essência *estaria* nas coisas. Para Ricoeur, nos primeiros diálogos platônicos a essência *é* nas coisas e estas *têm* a essência, enquanto nos últimos, Platão insistirá na distância, ao invés da posse, entre as coisas particulares e suas essências. Ao enfatizar a imperfeição da relação das essências com as coisas, considerando tal distância, Ricoeur julga que Platão passa a priorizar o *ser em si*, já que as coisas passam a ser apenas semelhantes a suas essências (*eidos*). De acordo com essa interpretação, é na multiplicidade interna da unidade da Ideia que residiria o problema da definição do que uma coisa é, ou seja, da determinação de sua essência. Tal multiplicidade se esconde na possibilidade que temos de analisar a Ideia, apesar de una, em razão da divisibilidade de suas características. Portanto, uma *definição* para algo, que almejaria substituir o *definido* (a coisa simples) por um *definidor* (o múltiplo), supõe que toda Ideia seja uma "pluralidade articulada".

Revela-se então nesse momento uma relação necessária entre o nome (signo) e o conteúdo de algo (sua essência), de maneira que a linguagem passa a ter papel fundamental para demarcar o que uma coisa é (o ser) e, por consequência, o que ela não é (o não-ser). Essa função de identidade que as essências passam a desempenhar ocorre em razão do *princípio de determinação das essências*: o que delimita seu "contorno" e que lhes garante o título de *eidos* na teoria platônica. À multiplicidade de informações no uno corresponde um único indivíduo plenamente identificável, cuja existência é fundamentada pelo ser de sua Ideia (una).

Tal noção ressoa na imagem aristotélica essencialista. No livro VII da *Metafísica* (ARISTÓTELES, 2012) o estagirita afirma que são equivalentes as perguntas 'O que é o ser?' e 'O que é a substância?', sendo assim entendida como ciência que estuda o *ser enquanto ser*, a metafísica teria como fim último o estudo da substância (*ousia*). Para Aristóteles, o que existe são as substâncias individuais (essências individuais), pois ela pode ser entendida no sentido de essência, já que ela é, junto da individualidade de cada objeto, a unidade numérica do que algo é em si e por si mesmo (o que na escolástica foi nomeado por "quididade" do ente), ou seja, a natureza da coisa. Portanto, substância é a unidade *real* e *inteligível* das propriedades necessárias (essenciais) que determinam aquilo que a coisa *é* - notemos a profunda conexão com a noção de essência em Platão, embora não exista a equivalência entre a *ousia* aristotélica (unidade com multiplicidade interna) e o *eidos* platônico (também uma unidade com multiplicidade interna).

Na filosofia aristotélica, de acordo com essa definição do conceito de *ousia*, o sentido de substância (primeira) desdobra-se em três momentos:

1. Ontológico: é o que possibilita a existência do *ser*, fundamento metafísico último de qualquer realidade.

2. Lógico: de acordo com as categorias aristotélicas, é aquilo que vem antes de todos os outros seres, sendo o substrato ou suporte das propriedades essenciais[23].

3. Epistemológico: é o que permite a ciência (conhecimento) dos seres.

Como a substância é essência individual e sujeito fundamental, tudo o que individualiza o particular é inerente à sua substância, não sendo contingente. Sendo assim, a

[23] Por isso, Aristóteles afirma, nas Categorias (ARISTÓTELES, 2011), que a substância primeira é o único modo de se dizer o *ser* que possui existência separada de qualquer outro modo, pois diz-se que uma substância *é* o sujeito fundamental, portanto nunca pode ser um predicado, um atributo ou propriedade. Por sujeito fundamental pretendo nomear a substância primeira aristotélica, aquela de que é possível ser predicada de todas as categorias, mas não é predicável a nenhum delas. Por exemplo: na afirmação 'O homem é alto', homem e alto (altura) são modos de se dizer o *ser*. Altura é uma qualidade, enquanto homem é substância (substância primeira); homem é passível de ser predicado da altura, embora nenhum outro ser (categoria) pode receber homem como predicado.

filosofia aristotélica é essencialista, na medida em que são necessárias a qualquer indivíduo as propriedades ou atributos que lhe individualizam ou que determinam sua identidade. No essencialismo aristotélico, a identificação do indivíduo se dá pela separação das suas propriedades que lhe são essenciais (necessárias)[24] daquelas meramente acidentais (contingentes).

Em (FIGUEIREDO, 2012), Viviane Vieira Figueiredo sumariza como que em uma teoria essencialista como a aristotélica 1) pode-se afirmar que existem coisas que possuem uma essência; 2) As coisas podem ter outras propriedades essenciais além da identidade; 3) as propriedades essenciais, assim como as acidentais, são inteligíveis; 4) a essência de algo independe da maneira pela qual pensamos ou falamos dela e 5) existem verdades necessárias acerca das coisas.

Na *Metafísica* (1029b14), Aristóteles afirma que "a essência de uma coisa é o que é dito a respeito da mesma"[25]; tal caracterização aponta para uma teoria das propriedades essencias relacionada à definição do ente. Tal relação é enfatizada por Aristóteles ao afirmar que "uma definição é uma explicação que significa uma essência"(*Tópicos* 102a3). Por outro lado, diferencia as propriedades contingenciais de uma maneira menos surpreendente, ao afirmar que é acidental a um indivíduo uma propriedade "que pode tanto pertencer, ou não pertencer a alguma coisa por si mesma"(*Organon* 102b6-7) - ver (ARISTÓTELES, 2016). Porém, Aristóteles deixa claro ao longo de seus escritos lógicos (*Categorias, Tópicos* e *Segundos Analíticos*) que existe uma relação real entre definição e essência; tal *definição real* se refere ao gênero do indivíduo apontando para a *diferença específica* da espécie. A definição aponta para aquilo que o indivíduo é por sua natureza, ou seja, essencialmente. Nesse sentido, "apenas as espécies de um gênero possuem uma essência"(*Metafísica* 1030a11-12). Isto aponta para uma noção coletivista da noção essencial, na medida em que buscamos a essência do indivíduo como pertencente a uma classe de similares, ou seja, a definição de cachorro não diz o significado da palavra ‘cachorro’, mas aponta para o que é *ser um cachorro.*

Devemos notar que se a *definição* é fórmula da essência, então a definição de ‘cachorro’ indica o que é ser cachorro por si mesmo, como espécie do gênero animal. Nesse caso, a teoria aristotélica não diz respeito à essência do cachorro Lulu, mas àquilo que o faz pertencer a um gênero e o que diferencia especificamente como espécie de tal gênero. Portanto, surge uma diferença definicional: existe a *definição real*, que define o

[24] No artigo Essence and Modality (FINE, 1994), Kit Fine aponta para uma assimetria entre essencialidade e necessidade; não entrarei em uma discussão detalhada a este respeito no presente trabalho. Embora, o tipo de articulação que proponho no presente, com o uso da noção de heccedidade - ver capítulo 7, mostra que, de fato, entendo tal assimetria, em meu caso relacionando a diferença entre o que é necessário para determinar a identidade do indivíduo e o que dessa coleção pode ser conhecido ao homem ou por ele representado (em uma linguagem).

[25] Em termos aristotélicos, esta fórmula não implica na essencialidade de todas as propriedades de um indivíduo, já que sobre a propriedade P que um indivíduo a não possui, negar tal propriedade a ele pela expressão ‘a não possui P’ não é afirmar (positivamente) algo sobre a.

que um indivíduo é, e existe a *definição nominal*, que define o significado de uma palavra. Obviamente, em termos metafísicos, quando queremos investigar a natureza essencial de um objeto internamente à filosofia aristotélica, estamos interessados na definição real do indivíduo, pois indica uma relação de equivalência entre *definiendum* e o *definiens*.

3.2.2 Visão Geral na Escolástica

A escolástica marca um importante e longo período de transição na história das ideias, mesmo na estrutura social e política do mundo ocidental. Influenciados por Aristóteles, neoplatonistas e comentadores aristotélicos árabes como Avicena e Averróis, a filosofia ocidental continuou o programa aristotélico de sistematização do conhecimento humano, sempre no intuito de harmonizar o conhecimento filosófico, representando a racionalidade humana, com a verdade revelada da fé. A metafísica neste período se beneficiará de um debate enriquecedor sobre os alicerces e limites do intelecto humano e de como a teologia (em especial, a cristã), como corpo de investigação, com ela se relacionaria. Nesta breve discussão, baseada nos trabalhos (ANTISERI; REALE, 2003c) e (GILSON, 2013), apresentarei o núcleo da teoria metafísica de três filósofos, cuja articulação de ideias é de fundamental importância para a compreensão de um quadro mais amplo do debate metafísico contemporâneo.

Tomás de Aquino

A metafísica de Tomás de Aquino (Sec. XII) se sustenta no movimento de distinção entre dois conceitos: *ente* e *essência*. Diferentemente da metafísica platônica, que pode ser identificada com a pergunta 'O que é X?' (uma metafísica da essência), a metafísica tomista indaga 'O que é o ser?' – é uma metafísica do *ser*. O conceito de ente abarca tudo o que existe; enquanto as coisas no mundo *têm* ser, somente Deus *é* o *ser*, quebra ontológica fundamental. Nessa teoria, os entes podem ser de dois tipos: lógico (conceitual) ou real (extramental, uma teoria de realismo moderado, já que nem todos os entes lógicos admitem correspondência real, tendo apenas a função de cópulas - unificação de conceitos). O real está sempre no indivíduo e é o poder intelectual do homem, pela racionalidade, que o possibilita explicar as noções universais por meio do processo mental de abstração.

Para Aquino, a noção de essência é responsável por apontar para 'o que é' uma coisa, dito de outro modo, sua *potência de ser*. Somente em Deus existe coincidência entre potência (de ser) e existência, já que Deus é ato puro, ou seja, seu ser é subsistente; no mundo, não há esta correspondência entre a potência de ser e o ser real. Todo objeto real tem o *ato* (*Actus essendi* = atualização da essência) pelo qual deixa de ser apenas um ente lógico. Sendo assim, todo objeto real, se existe, não existe por necessidade, já que somente em Deus essência e *actus essendi* são coincidentes. Deus é o único ente necessário, todos os outros contingentes.

Ao ente, Tomás de Aquino associa três noções transcendentais, pois estão além das categorias singulares. São elas o *uno*, o *verdadeiro* e o *bom*. O *Uno* diz respeito à unidade transcendental do ente, já que é não-contraditório e não divisível, apesar de participável; quanto maior o grau do ser, maior sua unidade: Deus é a unidade da simplicidade, enquanto a unidade de Pedro, por exemplo, é a da composição (essência + *actus essendi*). Já o *verdadeiro* diz respeito à característica de inteligibilidade de todo ente. No livro VI da *Metafísica*, Aristóteles indica que esta tem como objeto o ser, e não a busca pela verdade (tarefa da lógica e das ciências particulares), e que a verdade não está nas coisas, mas na mente. Aquino, ao contrário, considera que a *verdade* também diz respeito à metafísica, ao ser entendida como verdade ontológica, pois trata da adequação do ente ao intelecto divino. A verdade ontológica é distinta da verdade humana, que apenas tende à adequação de nosso intelecto às coisas[26]. A verdade ontológica de um ente depende do seu grau de ser: Deus é a *suma verdade* por ser o sumo *ser*, todos os outros entes são tão mais verdadeiros quanto maior for sua participação no ser divino (grau de ser). Em uma reminiscência agostiniana, Tomás de Aquino aponta que todo ente é fruto da suprema bondade divina e, por consequência, é *bom*, pois possui grau de ser e de perfeição. Disto segue que a metafísica tomista é otimista, pois o mundo é a primeira tentativa de expressar a *suma bondade* divina, já que a bondade divina se esparrama pelos entes que participam do seu ser.

Diferentemente de Aristóteles, que constrói sua metafísica preocupado em estabelecer as relações entre as categorias de entes finitos, Aquino deseja estabelecer a relação entre Deus (ente infinito) e o mundo (entes finitos). O uso das noções transcendentais o faz construir uma *metafísica da analogia*, onde entes finitos se assemelham em parte a Deus, e em parte não, devido sua participação (incompleta) no *ser* divino, estabelecendo a semelhança e dessemelhança que constituem essa relação entre entes finitos e *o* ente infinito, a *relação analógica*: um intermediário entre a univocidade (completa igualdade) e a equivocidade (diferença absoluta).

Duns Escoto

A respeito da determinação das individualidades dos entes do mundo, João Duns Escoto (sec. XIII) sistematiza uma ideia já apresentada por Aristóteles. Em primeiro lugar, Escoto aponta para importância da análise de conceitos na construção de uma teoria, justificada pelo afastamento dos equívocos, contradições ou má-compreensão que o uso indiscriminado

[26] Notamos como essa definição de Aquino diferencia o ser humano, racional, das outras coisas, além de explicitar uma analogia (fraca) entre dois tipos de pólos: Deus/Mundo e Homem/coisas no mundo.

da linguagem comum poderia causar. Em vista disso, baseia-se na *doutrina da distinção*, centro de sua teoria lógica (similaridade com as categorias aristotélicas).

As distinções escotistas são: *distinção da razão* (refere-se ao campo da lógica), *distinção real* (como aquela observada entre Sócrates e Platão), *distinção formal* (como aquela observada entre Inteligência e Vontade) e *distinção modal* (graus de intensidade). O uso das distinções por Escoto tem a finalidade de reduzir os conceitos complexos em conceitos simples, irredutíveis. Tudo aquilo sobre o qual refletimos ao enfrentar o mundo é complexo. Para o filósofo medievo, é tarefa da filosofia dissipar tal complexidade colocando ordem nos conceitos, de acordo com suas complexidades. A distinção da razão difere de todas as outras, pois trata da dissolução de um conceito com o intuito de analisar seu conteúdo, sem exigir sua dissociação com a realidade, já que essa divisão tem natureza lógica, ao passo que em todas as outras distinções, as divisões são exigidas por necessidade ontológica.

Em tal doutrina, o conceito mais simples é o do ente enquanto predicável a tudo, sendo ele, portanto, unívoco, já que é o ente obtido ao abandonarmos todos os outros modos específicos em que é concretizado. Tanto Deus quanto o homem são unívocos; do primeiro retira-se o modo infinito de sua realidade, enquanto do segundo o seu modo finito. Vemos que nessas circunstâncias, o ente unívoco, fundamento da metafísica escotista, tem a máxima universalidade e mínima especificidade, o que a diferencia da metafísica tomista, pois enquanto esta concebe o ser como analógico, aquela concebe-o na sua universalidade, na medida em que é predicável de igual maneira a todas as coisas. Para Escoto, é no *ente unívoco* (ente enquanto ente) que reside o objeto de investigação intelectual humana, concebida para conhecer tudo o que existe, contrapondo sua maximalidade na extensão com sua minimalidade de conteúdo.

Sabemos que Sócrates e Platão tinham em alta consideração o universal em detrimento do particular. No escotismo, por meio da *teoria da individuação*, o que individualiza os singulares não é matéria, não é a forma, nem o composto, mas a realidade última do ente que *é* matéria, *é* forma e *é* composto, ou seja, sua perfeição, "(...) graças à qual uma realidade *haec est*, o ser este e não outro" (citado em (ANTISERI; REALE, 2003c), p. 284). Gilson explica em (GILSON, 2013) o funcionamento da noção de *heccedidade* em Duns Escoto:

> "Para explicar o individual, [Duns Escoto] deve, de fato, partir aqui como alhures, da natureza, ou essência comum, nem universal, nem particular, que o metafísico considera. Resolver este problema consiste, pois, inevitavelmente, para ele, em acrescentar à essência uma determinação individuante. Essa determinação não poderia ser uma forma, porque toda forma é comum aos indivíduos de uma espécie; portanto, ela deve se acrescentar à forma a partir

do interior. De fato, diz [Duns Escoto], ela é sua atualidade última. É a famosa "heccedidade" [escotista], o ato último que determina a forma da espécie à singularidade do indivíduo."(p. 274)

Duns Escoto oferece uma formalização estruturada do *tóde ti* aristotélico, o "este aqui", assim como a noção escolástia de quididade articula a ideia, já desenvolvida pelo estagirita, do *to ti en einai*, ou aquilo que expressa a "essência" de algo (ver (VOEGELIN, 2014a)) - nesse sentido, a "estrutura do mundo".

Guilherme de Ockham

Por fim, façamos uma breve recapitulação de pontos na obra de Guilherme de Ockham (sec. XIV) relevantes para a argumentação que desejo construir. Ockham viveu em um período em que grandes transformações começaram a se articular na organização social, política e cultural da Europa: conflitos que demarcavam novas concepções de poder, a acentuação da rivalidade entre filosofia e teologia, o início da ruptura entre os Estados nacionais nascentes e a Igreja e a dissolução de uma concepção unitária da humanidade (ocidental), com a subsequente divisão entre as esferas temporais e espirituais (ver (VOEGELIN, 2014b)).

Em seu trabalho, Guilherme de Ockham reforça a ideia de separação entre a filosofia e a teologia, advogando pela autonomia do aspecto temporal em relação ao espiritual, já que para ele, "a fé é independente da razão"(citado em (ANTISERI; REALE, 2003c), p. 299), pois existem planos assimétricos que contêm cada uma destas esferas. O plano do saber racional busca a clareza e a evidência lógica, enquanto o plano da doutrina teológica visa a moral e a fé; cada uma destas esferas são independentes e autônomas, por causa da própria assimetria apontada. Há aqui um deslocamento da tradição escolástica; o autor rejeita o sistema das formas platônicas, essências universais ou doutrinas de analogia, como a de Tomás de Aquino, pois para ele todos estes subterfúgios procuram ser um meio caminho entre fé e razão, uma espécie de interligação entre estas esferas que seriam irreconciliáveis.

Todo conhecimento, para Ockham, pode ser dividido em duas categorias: os não-complexos (termos singulares e objetos a que designam) e os complexos (proposições resultantes da composição de não-complexos). O conhecimento não-complexo é a base para todo conhecimento, podendo ser intuitivo (sensível ou intelectual) ou abstrativo. Os conhecimentos intuitivos atestam a existência ou não de uma realidade, pois é conhecimento fundamental, e por isso move-se na esfera da contingência. Os conhecimentos abstrativos são obtidos pela repetição da presença de muitos singulares, que nos permitem realizar o que denominamos abstração. Enquanto o conhecimento intuitivo trata das verdades contingentes (pois exige a experiência da “coisa”), o abstrativo trata das verdades universais e necessárias; ele não exige o conhecimento atual do objeto para apontar sua existência, já que não é causado por essa existência, como o intuitivo, mas é posterior à sua apreensão[27]. De acordo com tal construção, o universal não é real, já que a realidade são os singulares.

Mas então, o que acontece com o conhecimento abstrativo, ligado a tais universais? Segundo Ockham, os universais são apenas formas verbais por meio do qual a mente humana estabelece uma série de relações de dimensão exclusivamente lógica. O conhecimento abstrativo é aquele inferido a partir de muitos objetos individuais; a repetição de diversos conhecimentos singulares semelhantes gera, no intelecto, o conhecimento de algo que não é singular, mas uma multiplicidade de coisas semelhantes.

Com sua filosofia, Ockham exclui qualquer tipo de sistema de leis universais ou de estrutura hierarquizada para o universo. Neste processo, rejeita o platonismo das essências e o aristotelismo, assim como o ser analógico de Aquino e o ser unívoco de Escoto, todas estas rejeições baseadas no seu princípio de economia, ou *navalha de Ockham*: *não se deve multiplicar os entes se não for necessário*. Segundo o filósofo, a junção desse princípio de economia com o fato de que o que conhecemos nas coisas são suas qualidades ou acidentes, conhecidos através da experiência, leva-nos a concluir que a noção de substância passa a ser irrelevante; julga então que o tomismo e o escotismo passam a representar a *via antiqua*, enquanto o ockhamismo a *via moderna*.

O fundamento teórico do primado do indivíduo, a insistência na importância da experiência para a obtenção do conhecimento e a defesa da intuição como base para todo conhecimento possível, são características extremamente reveladores da posição de Guilherme de Ockham na história do pensamento Ocidental. Porém, é crucial enfatizar aqui que ele também constrói um impressionante sistema lógico e faz uma observação crucial a respeito dos signos: os sinais de uma linguagem só possuem força representativa, sendo que a realidade reside naquilo que o símbolo representa, que é diferente dele mesmo. Abre-se espaço para que a lógica obtenha a autonomia e o rigor necessários para seu desenvolvimento, além do escopo aristotélico, pois *mostra* a diferença entre *realidade* e *lógica*. O lógico pode então tratar dos termos como meros símbolos (a manipulação destes signos, no plano lógico, não deve se preocupar com as realidades designadas, ideia de caráter central para a lógica contemporânea), ganhando precisão nos enunciados construídos a partir dos termos vistos como signos, ou seja, a manipulação desses signos, no plano lógico, não deve se preocupar com as realidades designadas, ideia de caráter central para a lógica simbólica.

Julgo que este princípio nos possibilite pensar que seja possível abordarmos o estudo da lógica em duas perspectivas, desde que tenhamos ciência de qual perspectiva adotada em cada momento. A primeira é aquele em que o lógico sabe distinguir os símbolos

[27] Note a relação com a crítica humeana sobre o argumento indutivo.

que manipula dos seus supostos referentes, ou aquilo que representam. Na segunda, o lógico compreende em que medida sua ação é fortemente *ontológica* (pelo menos na esfera do ser como inteligibilidade), como expressado por Chateaubriand - ver capítulo 1. Ver também (KNEALE; KNEALE, 1962).

3.2.3 O Ser na Tradição Analítica

Willian G. Lycan (1945) em (LYCAN, 1994) propõe um quadro enxuto sobre como, de uma maneira geral, as respostas para a pergunta ‘O que me faz ser quem eu sou?’ (‘O que faz as coisas serem o que elas são?’) podem ser classificadas a partir da perspectiva lógico-filosófica[28] desenvolvida a partir do século XX. Em geral, elas estão em quatro grandes grupos:

A) Os indivíduos possuem certas qualidades que lhe são essenciais, sendo elas propriedades ou conjuntos de propriedades que os individualizam. Tais propriedades são expressas de alguma forma, similar às *descrições definidas* de Russell, como “O atual rei da frança”, por exemplo, e temos facilmente acesso epistemológico a elas (são inteligíveis).

B) Os indivíduos possuem qualidades essenciais que são inacessíveis. Elas podem até ser expressas, como Kripke (ver (LYCAN, 1994) e (MITCHELL; MOGGI, 1996)) faz utilizando o operador λ: $\lambda x(x \text{ é } F \text{ e } G \text{ e } \ldots)$ refere-se ao (único) objeto x que reúne todas as qualidades F, G etc, e que faz x ser x.

C) Os indivíduos possuem essências individuais, mas elas não são qualitativas. Nesse caso, retornamos à noção escotista de *heccedidade*, já que aquilo que faz um indivíduo x ser “o Guilherme”, por exemplo, é o fato de possuir essa propriedade, essencial, que é ser *este* Guilherme.

D) Os indivíduos não possuem nenhum tipo de essência.

W. O. Quine possuía fortes reservas à lógica modal, em particular à leitura *de re* das modalidades; para ele, o modo se apresenta na dimensão do discurso, e não na realidade das coisas ou em alguma “natureza”. Tal posição mostra um forte antiessencialismo, na medida em que questiona a inteligibilidade da noção de essência e, portanto, da distinção entre propriedades essenciais e propriedades acidentais. Como o argumento que proponho se afasta radicalmente da crítica de Quine, não me aprofundarei nas discussões a respeito

[28] Ou seja, a tradição analítica. Diversas tradições contemporâneas buscaram discutir problemas metafísicos fundamentais, como o problema do ser; em especial as tradições fenomenológica e existencialista. Não podemos, nesse quesito, deixar de citar a importância de Heidegger na discussão contemporânea, já que, como ele delineia em *Ser e Tempo*, a história da filosofia ocidental nada mais é do que um processo de “esquecimento do ser”, sendo a fenomenologia a estratégia adotada por ele para desvelar o ser, que permaneceu encoberto - pela prática filosófica - desde os gregos antigos. A própria noção de ser construída por Heidegger retoma criticamente a obra aristotélica e kantiana. Retornarei a Heidegger na conclusão do presente trabalho.

dessas reservas à lógica modal quantificada.

3.2.3.1 Essencialismo

Entre as posições metafísicas contemporâneas da tradição analítica, há aquelas que exigem a noção de essência para o desenvolvimento de teorias modais. O *essencialismo atualista* baseia-se na ideia de que a noção de essência provê uma fundação segura para uma nova proposta de interpretação semântica e epistemológica concernente às modalidades; portanto, é a partir da noção de essência, ao invés das modalidades *necessidade* ou *possibilidade*, que as teorias modais se baseiam, segundo adeptos de tal posição. No geral, tal visão pode ser dividida em dois grandes grupos teóricos: *essencialismo individual* e *essencialismo de propriedades*.

A proposta de Kit Fine em relação ao uso da noção de essência em uma teoria metafísica aponta para o cerne do *essencialismo individual*; ele propõe que as essências individuais de objetos atuais sejam utilizadas como ferramenta para a explicação das modalidades. Sendo assim, as essências são fundamento das verdades metafísicas, enquanto as verdades lógicas são fundamentadas pela necessidade lógica e as científicas pela necessidade nômica[29]. Isto se deve, em Fine, pela admissão da hipótese de que existem diferentes tipos de necessidade.

> "Cada classe de objetos, sejam eles conceitos ou indivíduos ou entidades de outro tipo, gerará seu próprio domínio de verdades necessárias, verdades essas que emanam da natureza dos objetos em questão. As verdades metafisicamente necessárias podem então ser identificadas com as proposições que são verdades em virtude da natureza de todos os objetos, quaisquer que sejam eles."(p. 8 - tradução livre).

O filósofo Edward J. Lowe (1950 - 2014) possuía grande afinidade com o essencialismo individual[30], porém, ao contrário de Fine que utiliza a noção de essência para fundamentar somente as verdades metafísicas, Lowe propõe que as noções essenciais são capazes de explicar todas as noções modais. Portanto, a versão de modalismo (*modalismo realista*) inspirada pela teoria das essências de Lowe tem caráter mais fundamental do que o essencialismo individual, como apresentado por Fine, por exemplo.

No modalismo de Lowe, a noção de essência tem papel primordial, já que são as essências que fornecem o fundamento metafísico para as modalidades e são, dessa

[29] Do grego *nómos* = lei ou convenção.

[30] Para Lowe, *essência* é tomada como sinônimo de *identidade que define* um indivíduo; tal concepção, diferente da que toma essência em termo das propriedades essenciais ao indivíduo, compromete o modalista com a existência dos indivíduos de que fala, já que se são as essências que dão fundamento para as modalidades, e é a essência a própria identidade do indivíduo (aquilo que o determina). Possível crítica a esta visão: Como uma entidade pode ser fundamento metafísico para si mesma?

forma, definições reais dos indivíduos de que são essência. É o fato de sermos, como humanos, racionais, que nos possibilita entender que certas essências são reais e, portanto, termos algum tipo de acesso a como as coisas *são*, *poderiam* ou *podem vir* a ser. Sendo assim, diferentemente da maioria dos modalistas que assumem uma posição antirrealista, como explicitado por Borghini em (BORGHINI, 2016), já que não se comprometem metafisicamente com outras noções além daquelas espelhadas pelos operadores $\Box$ e $\Diamond$ na lógica modal quantificada (QML), a teoria modal de Lowe exige os conhecidos *truthmakers* - entidades espaço-temporal concretas, cuja real definição são as essências - para as sentenças modais em QML; notemos que são concretos por serem atuais, já que para Lowe não há outro mundo além do atual.

Segundo o *essencialismo de propriedades*, a pergunta a respeito de quais entidades são possíveis depende da caracterização das essências das propriedades de entidades atuais, sendo assim, o indivíduo, logo a noção de identidade individual, perde o *status* ontológico fundamental, sendo este agora ocupado pelas propriedades. Variação do essencialismo de propriedades, o *essencialismo intrínseco* defende que as essências das propriedades dependem das características intrínsecas dessas propriedades; nesse caso, se Lulu é um cachorro, Lulu é essencialmente (necessariamente) um animal, já que é intrínseco à propriedade *ser cachorro* a propriedade *ser animal*. O *essencialismo científico* (tipo particular de essencialismo de propriedades), por seu turno, defende que as verdades metafísicas estão enraizadas nas propriedades fundamentais, e estas são determinadas pelas ciências naturais; nesse sentido, as relações necessárias entre indivíduos são aquelas determinadas pelas propriedades de tais indivíduos, cuja relação entre elas (as propriedades) são determinadas essencialmente por meio das leis da ciência natural, em virtude das características essenciais das propriedades fundamentais de tais indivíduos.

Em todos os casos expostos sobre o essencialismo, a noção de essência, de alguma forma, passa a ser o fundamento (*grounding*) das noções modais.

3.2.3.2 Noções Modais

Usualmente, teorias da modalidade utilizam a ideia de cenários para analisar o caso sobre coisas possíveis e coisas necessárias; uma teoria de mundos posssíveis, como vimos, toma como necessário aquilo que deve ser o caso em todos os mundos (cenários), enquanto possível aquilo que ocorra em algum mundo. Segue-se dessa colocação que a determinação do necessário ou possível, ao utilizarmos a noção de mundos possíveis, depende da fronteira que somos capazes de delimitar sobre os cenários possíveis. Como determinar esta fornteira sem recairmos em um círculo vicioso? É esta observação que levou alguns filósofos a conjecturarem que o trato sobre noções modais deve se fundar em elementos mais básicos. Como vimos, K. Fine e E. J. Lowe, por exemplo, argumentam que a noção de essência deve ser vista como não-modal, no sentido de que explicações essenciais não dependem do conceito modal de necessidade/possibilidade. Verifiquemos uma afirmação de Kit Fine a respeito deste problema:

> "As literaturas sobre modalidades anteriores, que surgiram do trabalho de Quine, foram caracterizadas por um desprezo injustificável por noções modais. A literatura subsequente, originária dos trabalhos de Kripke, tem sido caracterizada por um entusiasmo injustificável. Este último entusiasmo têm duas formas, embora sejam correlatas. O primeiro, que podemos chamar de "mania modal", repousa em ver todas as coisas como modais; toda noção associada de algum modo a características modais é tomada como modal. O segundo, que podemos chamar de "miopia modal", é o fato de ver todas as modalidades como metafísicas; de alguma forma, toda modalidade seria compreendida como uma forma de modalidade metafísica."((FINE, 2005), pp. 51 - 52. Tradução livre)

Tal crítica de Fine soa generalizada, pois nela o autor reconhece os limites da atuação das modalidades e, mais precisamente, aponta para a necessidade de se limitar a compreensão do que são, de fato, as modalidades metafísicas. Esta delimitação, junto da caracterização das noções modais de necessidade e possibilidade, tem papel primordial na discussão sobre os fundamentos das modalidades. Faremos aqui uma contraposição de duas visões: o *monismo modal* e o *pluralismo modal*.

De acordo com o monismo modal, as noções metafísicas de necessidade e possibilidade[31] são básicas, e através delas todas as outras noções modais podem ser explicadas (fundamentadas). Considere todas as coisas que um indivíduo *pode* ser ou *necessariamente* é; todas as outras noções modais podem ser analisadas através dos cenários construídos a partir destas possibilidades. Nesse sentido, a necessidade física, por exemplo, é reduzida à necessidade metafísica por meio da fundamentação das noções metafísicas aléticas; por exemplo, a noção de necessidade física pode ser obtida ao restringirmos os mundos possíveis para aqueles que possuem leis físicas compatíveis com aquelas existentes no mundo atual. Portanto, o monismo modal baseia-se na ideia de Kripke de que necessidade, essência e identidade são capturadas em termos de mundos possíveis; a restrição da noção de necessidade é obtida com a restrição dos mundos (domínios) da análise.

Para um pluralista modal, duas ou mais noções modais são necessárias[32] para dar fundamentação para todas as outras noções modais. Fine apresenta uma proposta para uma teoria modal pluralista ao argumentar que a metafísica é um campo de inquirição

[31] Como podem ser consideradas interdefiníveis, estas noções usualmente são consideradas como únicas, daí o termo monismo, já que uma única noção modal (necessidade ou possibilidade) é fundamento para todas as outras.

[32] Similar ao que Kant faz com suas noções de necessidade irredutíveis (lógica e metafísica) - ver (HANNA, 2005).

próprio, autônomo em relação à física, química etc[33]; da mesma forma, podemos considerar que certas verdades modais naturais não possam ser compreendidas utilizando noções metafísicas. Levando isso em consideração, Fine aponta para três fontes autônomas de necessidade: metafísica, natural e normativa. Outros autores apontam para mais distinções de modalidades irredutíveis. Por exemplo, a noção de necessidade matemática e lógica. Sobre as verdades da matemática e da lógica pode-se afirmar que i) têm *status* especial em relação ao espaço-tempo, já que '2+ 2 = 4' parece ser uma verdade necessária em todos os mundos possíveis, sem distinção de tempo ou espaço; ii) são transcendentes, pois seriam independentes dos cenários.

De tudo o que foi exposto até aqui, pode-se afirmar que existem diversas hipóteses para a fundamentação das noções modais no que concerne à noção de essência de um individuo a (para alguém que considera tal distinção inteligível), ou seja, aquilo que diferencia o ser específico deste indivíduo, do *ser* como ser, são as propriedades que lhe são essenciais, sem as quais deixaria de ser o que é, em oposição às acidentais.

3.3 *Existência* em Sistemas Formais

Ao tratarmos da lógica quantificada, estamos particularmente interessados em investigar as relações existentes entre indivíduos ou objetos sobre o qual podemos nos referir no discurso formal. Todavia, nos deparamos com um dilema interno ao sistema formal que se refere à representação, nele, daquilo que denominamos *existência*. Tal problema reflete a questão ontológica a respeito da natureza da existência: que tipo de coisa é essa? Há somente um tipo de noção existencial, que privilegia atuais (concretos) a entidades meramente possíveis ou abstratas? Apenas a menção do objeto, no sistema, nos compromete à aceitação de sua existência?

Nesta seção farei uma síntese do artigo de Jaakko Hintikka (ver (HINTIKKA, 1969)) que reflete sobre o problema de traduzir, em um sistema formal, a noção filosófica de existência. Nele, Hintikka aponta para um problema na abordagem contemporânea da lógica simbólica, que considera de suma importância: a distinção no uso da noção de existência para o trato sobre *tipos de indivíduos* e de indivíduos *como indivíduos*. Enquanto a primeiro noção é muito debatida, como por exemplo através da formalização da teoria de tipos de Russell, falta um trato sistemático a respeito da segunda, segundo ele. Obviamente, enquanto a primeira possui um caráter formal, portanto facilmente adaptável em sistemas formais, a segunda é, primeiramente, um problema de natureza filosófica. Provavelmente, segundo o autor, esta é uma das razões que explicam a dificuldade enfrentada pela lógica simbólica de esclarecer as noções de necessidade e possibilidade; por ter sido abordada

[33] As ciências naturais não podem fornecer respostas para problemas metafísicos, pois estes escapam de sua jurisdição.

primeiramente, em nível de lógica simbólica, por meios exclusivamente sintáticos, faltou à lógica certos elementos capazes de criar "iluminação filosófica" a respeito de tais questões. Hintikka aponta como melhor caminho para o surgimento de tais iluminações a abordagem semântica, já que considera que a intuição é melhor moldada para pensar a respeito das condições de verdade dos diferentes tipos de sentenças: a noção lógica (intuitiva) de satisfabilidade é mais poderosa do que a de demonstrabilidade - ver hipótese H 1.7.

A partir desta premissa, Hintikka esboça estratégias para incluir a noção existencial em um sistema formal, partindo de considerações semânticas a respeito do sistema (lógica clássica de primeira ordem).

A partir dos pressupostos existenciais da lógica (clássica) de primeira ordem, Hintikka utiliza o que denomina *conjuntos modelos*; por meio deles, retrata formalmente as condições usuais a respeito de uma **verdade lógica**.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem e μ um conjunto de fórmulas bem formadas dessa linguagem. A primeira caracterização de um conjunto modelo é dada por:

C.$\neg$. Seja φ uma fórmula atômica ou uma identidade, então não pode ocorrer que φ e $\neg\varphi$ sejam ambas elementos de μ (Como μ não é maximal, pode ser o caso que nenhuma das duas pertença ao conjunto).

C. $\wedge$. Se $(\varphi \wedge \psi)$ é fórmula de μ, então tanto φ quanto ψ são fórmulas de μ.

C. $\vee$. Se $(\varphi \vee \psi)$ é fórmula de μ, então pelo menos uma das fórmulas φ e ψ é elemento de μ.

C. E. Se $\exists x\varphi$ for elemento de μ, então $\varphi[b/x]$ é elemento de μ para pelo menos um símbolo individual b que ocorra nas fórmulas de μ.

C. U. Se $\forall x\varphi$ for elemento de μ, então $\varphi[b/x]$ é elemento de μ para todo símbolo individual b que ocorra nas fórmulas de μ.

C. = Sejam φ fórmula atômica ou identidade em μ e $(a = b) \in \mu$; se $\varphi[a/b]$ e $\psi[a/b]$ são a mesma fórmula, então ψ é elemento de μ.

C. A.I. Se b ocorre em fórmulas de μ, então $(b = b)$ é elemento de μ.

Nessas condições, um conjunto de fórmulas λ é satisfatível se e somente se existe um conjunto modelo μ tal que $\lambda \subseteq \mu$, i.é, μ pode ser considerado como a descrição de uma estado de coisas logicamente possível, portanto, um conjunto modelo comporta-se como se fosse um mundo possível "incompleto". Devemos notar que esta definição não é equivalente à noção de satisfatibilidade usual, pois nos afastamos da construção tradicional de estruturas que satisfazem um conjunto de fórmulas; além disso, temos o problema relativo ao domínio do discurso.

Em síntese temos duas observações: 1) essa noção de satisfatibilidade parece não exigir a construção de estruturas que satisfaçam as fórmulas da linguagem; 2) a falta dessas estruturas implica no distanciamento da noção existencial dos objetos a quem as fórmulas do conjunto modelo se referem, em que a mera menção parece assegurar a existência.

Segundo Hintikka, esta construção se apoia em certos pressupostos existenciais que estão presentes, embora não explicitamente, nos sistemas formais. Na condição universal, estamos afirmando, dada a hipótese, que para qualquer indivíduo atualmente existente x, a fórmula φ, instanciada em x, ocorre em μ, isto é, φx é verdadeira. Portanto, todo símbolo b que ocorre em μ refere-se a um indivíduo que existe atualmente, logo, tudo o que pode ser substituído por um símbolo individual livre precisa se referir a algum indivíduo, sendo assim, tudo o que pode ser especificado por um termo singular existe: este é o *pressuposto existencial* que mascara a existência do domínio em um conjunto modelo.

Em contextos modais, a linguagem formal não é usada de maneira meramente descritiva; muitas vezes é necessário nos referirmos a coisas que *poderiam ter sido*, portanto, que não possuem uma descrição, em termos atuais, do que são. Sobre essas coisas, a aplicação usual de "existir" parece deslocada, como por exemplo, ao pensarmos sobre a questão 'O que teria ocorrido se Napoleão não tivesse existido?'. Sendo assim, o autor argumenta que é necessária a formalização da sentença 'a existe', dando ao objeto a uma propriedade especial: ser atual. Nesse caso, ao objeto a passa-se a predicar tal característica, a existência, o que nos impele a considerar, no sistema formal, a existência como um predicado.

Quais as condições formais adotadas por Hintikka para acomodar a existência como predicado nessa construção, de maneira a eliminar os pressupostos existencias implícitos na formalização anteriormente apresentada? A ideia é relativamente simples: adicionar formalmente o predicado existencial $Q(a)$ para a. Sendo assim, os novos postulados (para quantificação) para a construção dos conjuntos modelos seriam:

C. $\forall$. Se $\forall x\varphi \in \mu$ e $Q(a)$, então $\varphi[a/x] \in \mu$.

C. $\exists$. Se $\exists x\varphi \in \mu$, então $\varphi[a/x] \in \mu$ e $Q(a) \in \mu$, para pelo menos um símbolo individual livre a.

Em que $Q(a) =_{df} (\exists x)(a = x)$ ou $Q(a) =_{df} (\exists x)(x = a)$.

Segue da análise destas duas construções que, inicialmente, a mera presença de um símbolo a (tipo individual) em μ implicaria na existência de um indivíduo, no estado de coisas descrito por μ, denotado por a. Por outro lado, a derrubada desse pressuposto existencial implica que um indivíduo de nome a existe no estado de coisas somente se $Q(a)$ for elemento de μ, ou seja, tal conjunto modelo proposto por Hintikka ganha poder explicativo, já que abre a possibilidade de formalização de sentenças que dizem respeito a indivíduos não-atuais, basta que para esse indivíduo, digamos b, $Q(b)$ não esteja em μ.

Por outro lado, uma pergunta ainda precisa ser respondida: *É a existência um predicado?*

Como vimos, no sistema proposto por Hintikka esse é o caso, porém, tal predicado não é irredutível, já que é definido em função do quantificador existencial. Para o autor, se a negação de que a noção de existência é um predicado significa, tradicionalmente, negar que a noção de predicado possa ser expressa de maneira lógica e independente do quantificador existencial, então tal negação parece correta, mas então, a questão crucial acerca da noção existencial residiria nas regras que governam os quantificadores; é por meio dessa análise que pode-se discutir a respeito da característica lógica da noção de existência.

Hintikka compreende que a existência pode ser tratada como um predicado, no sentido de que é possível usar uma expressão formal, como $Q(a)$, contendo um símbolo indivual livre, para traduzir o significado da proposição 'a existe', de maneira a evitar dificuldades lógicas com a inclusão desse tipo de fórmula; inclusive pode-se incluir expressões do tipo $\neg(\exists x)(x = a)$ ('a não existe'), que propicia a tradução de sentenças como 'Homero não existe', salvando-a das críticas a respeito da interpretação de que *Homero*, um nome próprio, poderia ser visto como uma descrição camuflada, já que isto não seria permitido para tal indivíduo, afinal, como descrever o que não é?.

3.4 O Meinongianismo

Qual o valor de verdade da sentença 'O atual rei da França é careca'? Bertrand Russell (RUSSELL, 1919) responde essa questão por meio de sua teoria das descrições definidas. Negando a tese de que tal sentença não poderia receber um valor de verdade, já que não possuiria sentido por não ter um referencial (o atual rei da França), Russell demonstra que tal sentença é falsa; o filósofo utiliza ferramentas técnicas para mostrar que a falsidade da sentença se deve à quantificação, nela introduzida, pela definição descritiva "o atual rei da França". Desssa forma, a sentença sobre a condição estética do atual rei da França pode ser traduzida, em uma linguagem de primeira ordem, por meio de uma conjunção em uma sentença quantificada[34]. Mas tal conclusão se dá devido ao fato de que a França não possui atualmente um rei, é esta peculiaridade da sentença apresentada que a falsifica[35]. Todavia, nem todas as sentenças podem receber o mesmo tratamento. Russell considera que não podemos fazer afirmações significativas sobre coisas que não existem

[34] Considerando P e C as propriedades *ser o atual rei da França* e *ser careca*, respectivamente, a sentença 'O atual rei da França é careca', em uma linguagem de primeira ordem, pode ser traduzida como $\exists x((Px \wedge (\forall y)(Py \supset (x = y))) \wedge Cx)$.

[35] Sobre problemas relacionados à teoria da descrição de tipos, Russell destaca três pontos principais: o problema da substitutibilidade, do terceiro excluído e dos existenciais negativos.

(atualmente); no caso analisado, apesar de atualmente a França não possuir um rei, há um país chamado França e há como verificarmos se há algum objeto atual que possui a propriedade 'ser rei da França'; em casos onde isso não ocorre, muitos filósofos, como o próprio Russell, negam a possibilidade que tais tipos de sentenças contenham algum tipo de significado[36] - ver também (HAACK, 1998).

O filósofo autríaco Alexius Meinong defendeu, no final do século XIX, a ideia de que afirmações, mesmo sobre não existentes (não concretos e não atuais), possuem algum tipo de significado. Para ele, o cotidiano nos mostra que podemos ter pensamentos significativos sobre objetos que não existem atualmente; mais do que isso, para falarmos sobre algo, tal coisa, de alguma forma, precisa *ser*. A originalidade de Meinong está em criar uma ontologia[37] com três níveis, possibilitando uma distinção ontológica precisa sobre os *graus de ser* que um objeto pode possuir. No primeiro nível estão os objetos possíveis e inteligíveis, como os unicórnios; esses possuem a *absistência*. É interessante notar que entre essas entidades estão algumas que, em um primeiro momento, poderíamos negar qualquer possibilidade de inteligibilidade, como um quadrado arredondado: apesar de não sermos capazes de imaginá-lo, no sentido de criarmos uma representação mental desta entidade, ela é inteligível, pois somos capazes de compreender as características de tal ente (nesse caso haveria uma confusão entre as noções de inteligibilidade e representação). No segundo nível estão os objetos que, apesar não pertencerem necessariamente ao mundo físico/concreto, seu conceito não contém nenhum tipo de impossibilidade (ou contradição interna), como números e teoremas da matemática; esses possuem a *subsistência*. No terceiro nível estão os objetos atuais do mundo físico; esses possuem aquilo que cotidianamente entendemos por *existência*. Nesta ontologia, os níveis são acumulativos, tudo o que existe é conceitualizável e não-contraditório, e todos os conceitos são imagináveis ou inteligíveis (mesmo que contraditórios, sua inteligibilidade permitiria a compreensão da contradição). O *ser* de algo, em virtude de sua inteligibilidade, é então claramente diferente da *existência* dessse

[36] Seria um exemplo de tal situação a sentença 'O atual rei de Numenór é careca'. Numenór foi um reino que, no período da Guerra do Anel na obra de J.R.R. Tolkien, há muito tempo já havia sido submergido pelos mares que separam a Terra Média de Valinór. Por não ser atual, alguns filósofos considerariam que tal sentença não possui conteúdo significativo, logo, não pode assumir qualquer valor de verdade. Por outro lado, há aqueles que reconhecem algum tipo de conteúdo significativo, adquirido pelo posicionamento da sentença dentro de um contexto de discurso: nesse exemplo, o contexto da obra. Obviamente, essa discussão é muito rica e não irei me ater a todas as suas facetas; porém, é importante que observemos que é possível distinguirmos características de objetos ficcionais, como Sherlock Holmes, ou mitológicos, como Zeus, daqueles que são fruto da imaginação de uma pessoa, mas que não possui um estado de coisas que fundamente a verificação de afirmações sobre tais objetos. Por exemplo: posso imaginar Lala, um unicórnio que habita o mundo cor de rosa de Zurulândia; porém, ser incapaz de responder, neste contexto de discurso, se Lala teriam uma melhor amiga, já que diferentemente de contextos ficcionais "completos" (como uma possível obra literária), o objeto imaginado poderia não ter tal propriedade sido imaginada ou explicitada, para que fosse possível julgar a validade da sentença 'Lala tem uma melhor amiga'. Todavia, é possível construir um contra-argumento em que, mesmo em um universo ficcional criado, existam afirmações a respeito de Sherlock Holmes, por exemplo, que não podem ter conteúdo significativo verificado, o que equipararia os indivíduos Sherlock Holmes e Lala.

[37] Meinong considerava sua teoria como um sistema puramente descritivo que abarcava atuais e *meros possibilia*.

algo, sendo a existência o *status* ontológico atribuído, por excelência, a coisas como cavalos, e não a unicórnios.

Muitos críticos a Meinong denominaram este cenário inflacionado por entes como *selva de Meinong* (Quine). Embora objetos não-existentes possíveis estão presentes tanto na prática filosófica (contrafatuais), quanto no cotidiano (quando ponderamos como certas coisas poderiam ter sido), e a admissão destas entidades nos permita entender noções existenciais negativas, que acomodam a intencionalidade de certas entidades mentais, muitos filósofos rejeitam tal posição, pois consideram absurda a ideia de que certa entidade (ou mesmo um mundo possível) possa ter a propriedade de *não ser atual*.

Meinong creditava certa noção existencial não apenas a todas as coisas que *poderiam ser*, mas também a tudo aquilo que *não poderia ser*. Os críticos podem então utilizar a navalha de Ockham para se oporem è multiplicação de entidades criadas, embora Meinong considerasse que tal uso do princípio estaria incorreto, já que a navalha valeria apenas a objetos atuais, enquanto as entidades "indesejadas" pelos críticos, em relação a tal princípio, não são atuais, logo passariam incólumes ao seu uso.

Segundo Lycan (ver (LYCAN, 1994)), Russell considerava que faltava à abordagem de Meinong em relação aos não-atuais (meros possíveis) certo *senso de realidade*; já para Quine, a ontologia meinongiana era *superpopulada*, uma *selva desordenada de elementos*. Contra tais críticas, a resposta de Meinong seria

> "Sem nenhuma dúvida, a metafísica lida com tudo o que existe. Contudo, a totalidade dos existentes, incluindo aquilo que já existiu ou virá a existir, é infinitamente menor quando comparada com a totalidade dos *Objetos do Conhecimento* [inteligíveis]. Este fato facilmente passa desapercebido, provavelmente em razão do vívido interesse na realidade, que é parte de nossa natureza, favorecendo o exagero de considerar o não-real um mero nada, ou, mais precisamente, que considera o não-real como algo de nenhuma aplicação para a ciência ou, no máximo, como algo cuja aplicação à ciência tem pouco valor."(Em *Sobre a Teoria dos Objetos* (1904), citado em (LYCAN, 1994), p. 4 - tradução livre)

3.5 O Sistema Modal para as Modalidades Metafísicas

Em *Modal Logic as Metaphysics* (WILLIAMSON, 2013), Timothy Williamson constrói uma argumentação a favor de uma visão necessitista do problema existencial, afirmando que o sistema lógico que melhor reflete as características desse espaço de argumentação filosófica (metafísica) é o sistema quantificado de segunda ordem **S5**. Há diversas posições a esse respeito, a grande maioria delas assumindo algum tipo de sistema modal para esse substrato lógico - contexto racional para a metafísica. Há também posições que advogam que interpretação de noções modais, como contingência e necessidade, são melhor captadas por estruturas mais complexas, como as *galáxias* (ver (BENSUSAN; COSTA-LEITE; DE-SOUZA, 2015)).

Argumentei anteriormente que embora existam posições que consideram equivalentes as noções de necessidade lógica e metafísica, são intuitivos os argumentos que questionam essa distinção, apontando para diferenças nessas modalidades. Parece ser mais fácil identificarmos a diferença entre necessidade/possibilidade lógica e física, todavia, os limites, se existirem, entre a divisão lógica/metafísica parecem ser mais nebulosos.

Em *The Possibility of Metaphysics* (LOWE, 2001), E. Lowe afirma que enquanto as ciências naturais referem-se sobre "aquilo que é o caso", representando a necessidade física, elas não têm nada a dizer sobre *o que deve* ou *poderia ter sido* o caso. Nesse sentido, compreendendo que a metafísica lida com as possibilidades do ser, na medida em que se busca conhecer a estrutura da realidade, seria no reino da noção de necessidade (possibilidade) metafísica que as perguntas a respeito de *como as coisas poderiam ter sido*, se não fossem como são, deveriam ser respondidas. A metafísica é um espaço de inquirição crítica; não há evidências que suportem a pretensão de que nosso senso comum sobre a natureza, ou a representação dela feita pelas ciências naturais, reflita a *estrutura fundamental da realidade* (embora pareça ser improvável que sejam a elas contraditórias), portanto, a metafísica, desde seu nascimento, parece o melhor espaço de inquirição capaz de suprir as fundações para tal investigação. Além disso, o conteúdo do discurso metafísico não está preso a uma dimensão meramente linguística[38], pois nesse caso, nunca seríamos capazes de escapar da esfera linguística (todavia, devemos reconhecer os limites linguíticos-representacionais ao qual estamos submetidos).

Se considerarmos que a razão, de alguma forma, tem o traçado de suas fronteiras influenciado por características sociais/culturais, ainda assim a questão sobre como encontrarmos essa estrutura fundamental da realidade não pode ser respondida meramente por critérios empíricos (ciências naturais); a razão, mesmo delimitada por um *domínio de discurso racional*, é a única capaz de fornecer respostas sólidas e satisfatórias, embora sempre dialetizáveis[39], para o problema proposto. Como Lowe ((LOWE, 2001)) afirma:

> "Porém, eu não afirmo que a metafísica, por si mesma, em geral, pode nos dizer *o que há*. Antes, para uma primeira aproximação, sustento que a metafísica por

[38] Michael Dummett, em (DUMMETT, 1993) por exemplo, defende essa subscrição da dimensão metafísica à linguagem. Nesse caso, a pretensa "estrutura" da realidade seria um mero fenômeno linguístico.

[39] Razão mais experiência - essa interpretada por estruturas *a priori* de intelecção que nos permitem a representação (imaginação) de informações a respeito do mundo a partir de elementos mais básicos recebidos (apreendidos) pelos sentidos, pelo menos tal é a tese defendida neste trabalho - que está em acordo com a tese epistemológica de Hume.

> si mesma somente nos diz o que poderia ser. Mas assumindo que a metafísica nos tenha dado essa resposta, a experiência pode nos dizer quais das várias alternativas de possibilidades metafísicas são verdadeiramente plausíveis na atualidade. O ponto é que, embora o que é atual precisa, por princípio racional, ser possível, a experiência sozinha não pode determinar o que é atual, na falta de uma delimitação metafísica do possível. Em resumo, a metafísica por si mesma é possível, mesmo necessária, como uma forma de inquirição racional humana porque a possibilidade metafísica é um determinante, do qual não se pode escapar, da atualidade."(p. 9 - tradução livre)

Essa defesa é mais evidente quando nos damos conta que conceitos como objeto, propriedade, relação, indivíduo, substância, existência e identidade, por exemplo, são a única forma que possuímos para delimitar racionalmente o problema de investigar tais estruturas da *realidade*; tais conceitos são ontológicos, portanto pertencem ao reino da metafísica, já que dizem respeito ao *ser* ou ao seus modos. Por outro lado, as noções lógicas se resumem ao trato de *propriedades formais de*, ou *relação entre*, proposições, ou seja, a mera estrutura da linguagem e seus constituintes, que embora reflita algo da realidade, reflete não a coisa-em-si, mas a representação da coisa enquanto coisa apreendida. A possibilidade de um estado de coisas, por exemplo, não depende somente de ausência de contradições entre as proposições que o forma; logo, parece existir uma faceta a respeito da relação entre os conceitos metafísicos que a noção de necessidade lógica é incapaz de atingir.

Para alguns autores, como Burgess (BURGESS, 2003), qualquer tipo de sistema formal que procure refletir as modalidades aléticas, deveria ser reflexivo[40] (em relação à classe dos *frames* que validam os axiomas de tais sistemas); seriam sistemas fortes o suficiente para isso **B** (sistema Broweriano), **S4** ou **S5**, por exemplo, i.e., qualquer extensão de **B**. Como em **S5** todos os mundos são acessíveis por qualquer mundo, tal autor sustenta que o que caracteriza a validade das afirmações seria exclusicamente sua forma, concluindo que **S5** representaria a noção de necessidade lógica, enquanto **S4** a de necessidade metafísica.

Que tipos de critério são utilizados para a "determinação" do sistema modal que melhor reflete a noção de necessidade metafísica? Acredito que retornamos aqui ao problema da explicitação de certos pressupostos que, muita das vezes, permanecem implícitos; são eles que determinam a posição de um filósofo a respeito dessa questão. Se os pressupostos são harmônicos com a axiomatização de determinado sistema e, se do sistema obtido dessa axiomatização não for deduzida nenhuma fórmula que contradiga o discurso filosófico (metafísco) de um autor, então esse sistema será, para ele, aquele que melhor representa as modalidades metafísicas. A investigação desses princípios explicita os pressupostos

[40] Portanto, o sistema visto como sua contraparte semântica relacional.

adotados, o que possibilita que o próprio diálogo entre posições filosóficas distintas possa se tornar viável.

Em **S5** podemos formular da seguinte forma a noção de contingência: se φ for contingente, o que será denotado por $\triangledown\varphi$, então $\Diamond\varphi \wedge \neg\Box\varphi$.

Portanto, se φ for uma proposição falsa, porém contingente, então é o caso que:

$(\neg\varphi \wedge \Diamond\varphi)$

Similarmente, se φ for falsa e necessária (necessariamente falsa), é o caso que:

$(\neg\varphi \wedge \neg\Diamond\varphi)$ (i.e., φ não seria contingente, como esperado)

Se extrapolarmos o raciocínio apresentado, dizer que φ é impossível, para *qualquer* modo como as coisas pudessem ter sido, é equivalente a dizer que é o caso $(\neg\Diamond\varphi \wedge \neg\Diamond\Diamond\varphi)$ (I).

Da mesma forma, a proposição φ é impossível para *algum* modo de ser das coisas quando $(\neg\Diamond\varphi \wedge \Diamond\Diamond\varphi)$ (II).

Aplicando regras básicas da lógica, inferimos de (I) que $\neg(\neg\Diamond\varphi \supset \Diamond\Diamond\varphi)$ e $\neg(\neg\Diamond\Diamond\varphi \supset \Diamond\varphi)$, resultados nada surpreendentes.

Porém, de (II) inferirmos $\neg(\Diamond\Diamond\varphi \supset \Diamond\varphi)$, ou seja, não podemor inferir o possível do possivelmente possível. Ao mesmo tempo que tal afirmação parece ser razoável, não seria estranho encontrarmos argumentos contrários a tal afirmação sobre a iteração dos operadores de possiblidade.

Sabemos, por exemplo, que em **S4** e **S5**, a fórmula $\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$ (*)[41] é teorema, mas não em sistemas como **B** (ou mais fracos). Para muitos, tal fórmula parece refletir a intuição mas simples que possuímos sobre a noção de necessidade metafísica - O que é metafisicamente necessário deve ser necessariamente necessário. Nesse caso, apenas sistemas iguais ou mais fortes que **S4** poderiam representar tal noção.

Evidenciamos assim o problema de iteração dos operadores modais. Sabe-se que **S5** é o primeiro sistema formal no qual a iteração de todas as modalidades são redutíveis, sendo equivalentes $\Box\Box\varphi$ e $\Box\varphi$, $\Diamond\Diamond\varphi$ e $\Diamond\varphi$, $\Box\Diamond\varphi$ e $\Diamond\varphi$, $\Diamond\Box\varphi$ e $\Box\varphi$ (as demonstrações são por indução na complexidade modal das fórmulas - número de operadores modais iterados). Se os pressupostos teóricos são consistentes com essas equivalências, um filósofo então considerará que esse sistema é o que melhor reflete as modalidades metafísicas, podendo usar tal redução como um dos argumento para justificar sua posição; por outro lado, outro que desconfie dessas equivalências, como aquele que porventura tenha considerado (*) problemática, mas mesmo assim considere que o sistema formal deva refletir

[41] Notemos que esse resultado não pode ser obtido pela regra de necessitação no caso de $\Box\varphi$ não ser teorema do sistema formal.

a relação reflexiva, como acredita Burgess - em (BURGESS, 2003), ele escolherá outro sistema, como **B** ou **S4**. Uma outra possível crítica a **S5**, em função das equivalências apresentadas, seria questionar se realmente tudo o que é possível é necessariamente possível.

Alvin Plantinga defende que todo mundo possível deve ser acessível a todo mundo possível. Tanto para aqueles que seguem esse argumento, quanto para aqueles que consideram a relação de acessibilidade entre mundos, na semântica de Kripke, uma ideia problemática e obscura, a admissão[42] de **S5** como melhor sistema para representar as modalidades metafísicas representa esse pressuposto teórico de que, em tais circunstâncias, as noções metafísicas são representadas sem qualquer tipo de restrição sobre essa "conexão" entre as formas como as coisas poderiam ter sido. Todavia, existem certas objeções ao uso do sistema **S5** para a formalização de discursos em contextos metafísicos[43].

No último capítulo de *The Nature of Necessity* (PLANTINGA, 1979), Plantinga atualiza o argumento ontológico dado por Santo Anselmo (sec. XII) para a necessidade da existência de Deus, utilizando uma inferência regulada em **S5**, com o uso de alguns conceitos como *grandeza máxima* e *excelência máxima*. (PLANTINGA, 1976)

Pode-se rejeitar **S5** em virtude dessa inferência, que demonstra a existência de Deus, se esse for o desejo, ou utilizar estratégias para barrá-la - criticando os conceitos introduzidos por Plantinga - sendo esta uma objeção contundente à adoção do sistema formal **S5**.

Outra objeção foi apresentada por N. Salmon e H. S. Chandler em 1989, (SALMON; CHANDLER, 1989), mostrando que, se o intuito é representar as modalidades metafísicas, o sistema não deve permitir a relação de transitividade na acessibilidade entre mundos - tal objeção foi denominada como *Caso Woddy* em (FURTADO, 2014))[44]. Todavia, ao derrubar a transitividade, nem mesmo **S4** resiste. Um dos sistemas que poderia então ocupar esse papel seria **B**.

Vimos assim que **S4** e **S5** cobrem a grande maioria dos sistemas (modais) adotados como aqueles que melhor representam as noções metafísicas de necessidade, possibilidade e contingência (devido suas axiomáticas e consequências). Meu intuito, portanto, será procurar compreender como certas estruturas alternativas à semântica de mundos possíveis

[42] Com uma noção irrestrita de acessibilidade.

[43] Uma apresentação mais detalhada sobre essas críticas pode ser encontrada em (FURTADO, 2014).

[44] Resumidamente: Uma mesa de madeira (Woody) foi feita no mundo atual com o pedaço de madeira m, enquanto em um mundo w_1, feita com um pedaço m', que difere infimamente de m, digamos um átomo; continuando esse processo para um número grande e apropriado, em w_n a mesa Woddy difereria razoalvelmente da mesma mesa do mundo atual, assim, embora seja necessário que a mesa Woddy seja a mesa Woddy, não é necessariamente necessário que Woddy seja Woddy .

se comportam em relação a tais sistemas - ver capítulo 5.

3.6 O Necessitismo em Timothy Williamson

Em (WILLIAMSON, 2013), o autor argumenta que ao vivenciarmos o mundo, percebemos que certos eventos poderiam ter acontecido de forma diferente de como se desenrolaram. Se este for o caso, o que podemos falar, então, a respeito da existência destes possíveis eventos? Aqueles que argumentam que é contingente o que há, podem utilizar como evidência a intuição de que poderia haver mais tipos de coisas, ou menos tipos de coisas, do que os tipos de coisas que existem (atualmente), assim como poderia não ter havido nada; mesmo se existissem os mesmos tipos de coisas, os indivíduos poderiam ser diferentes. Portanto, para um *contingentista*, existe algo atualmente que poderia não ter existido, podendo mesmo ter existido algo que não é, atualmente, nada. Por outro lado, há aqueles que argumentam (por exemplo, (WITTGENSTEIN, 2017), segundo Williamson) que, embora seja contingente *como* as coisas são, é necessário *o que* as coisas são. Portanto, para um *necessitista*, tudo o que existe, existe necessariamente, e é apenas uma contingência a forma como aquilo que é, é.

Há uma dimensão temporal para esse problema, que pode ser dividido entre duas concepções distintas; o *permanentismo*: sempre tudo é sempre alguma coisa; e o *temporatismo*: nem sempre tudo é sempre algo. Tais distinções não são intercambiáveis com o necessitismo ou o contingentismo e não são ferramentas proeminentes na discussão a respeito das modalidades metafísicas, portanto não irei tratar sobre elas. Mais do que isso, elas não interferem no escopo ao qual pretendo abordar os fatos do mundo que podem ser representados pela lógica modal, já que desejo considerar que esses fatos devem ser considerados em sua totalidade em relação ao mundo (abstração transcendente dos fatos que "compõem" o mundo[45]).

3.6.1 Necessitismo *versus* Contingentismo

Usualmente, sob uma primeira consideração, dificilmente toma-se a posição necessitista como sendo algo de grande apelo intuitivo; Williamson argumenta, porém, que o necessitismo não é contra-intuitivo. Com relação aos objetos concretos do mundo físico, quando damos conta de que um agrupamento de partículas elementares, embora seja contingencial sua formulação, é composto por partículas que necessariamente existem no

[45] Podemos traduzir fatos que envolvem relações temporais como proposições classicamente compreendidas, de maneira que o tempo seja um indexical do "fato" do mundo representado pela proposição: 'É fato que no tempo t, no lugar j, é o caso que ...'. Nesse caso, não obtemos um sistema para inferir conclusões necessárias ou possíveis em função do indexical tempo - ou lugar (não é uma lógica temporal), mas apenas inferir *qual* a forma inerente às coisas que são necessárias (possíveis) - ver capítulo 1.

universo[46], poderia-se perceber que a afirmação necessitista não é implausível, pois como vimos, não seria necessário *como* as coisas são, mas *o que* elas são.

Por outro lado, para Williamson, a questão pode ser recolocada em um nível mais fundamental: o que podemos falar sobre a estrutura dessas partículas elementares? Elétrons, nêutrons ou mesmo partículas mais elementares são, foram e serão sempre os mesmos? Será possível que, sob certas circunstâncias, as leis físicas pudessem ser outras, de maneira que essas partículas elementares fossem em quantidade diferente daquela que existe no universo, quiça nem mesmo existissem? Nesse caso, temos a impressão de recaírmos sob o manto da contingência a respeito das partículas elementares. O autor conjectura, porém, que um necessitista não precisa ter medo desse problema, tendo em vista que a assunção de que poderia ter havido mais coisas concretas do que aquelas que há, em uma perspectiva necessitista, implicaria na conclusão de que algo atualmente não-concreto poderia ter sido concreto, i.e., a identidade e a distinção, por não serem consideradas contingentes, provêm um suporte metafísico para essas coisas que, embora não são atualmente concretas (como tais partículas elementares), são necessariamente algo (algo que poderia ter sido concreto, como um elétron)[47].

Sobre essa mesma questão, o que podemos falar sobre entidades abstratas? Elas recaem sob a mesma categoria dos não concretos? Williamson afirma que um número é uma entidade abstrata e, ao mesmo tempo, não-concreta. Porém, diferentemente do conceito abstrato, ao nos referirmos ao número como ente não-concreto, a negatividade do conceito não parece refletir na noção de número, tendo em vista que a ele não parece ter a ausência da concretude. Portanto, abstrato e não-concreto não seriam sinônimos, tendo em vista que abstrato não tem o mesmo significado negativo de não-concreto. Por outro lado, não existe pura negatividade na noção de não-concreto. Um ente não-concreto não é o *não-ser* absoluto. Sendo assim, abstrato e não-concreto não seriam "categorias" (em um sentido informal) contraditórias, embora possam ser contrárias. Todavia, o argumento anteriormente exposto se adapta facilmente às entidades abstratas. Segundo Williamson, a tese necessitista não é assim tão absurda quanto inicialmente pudesse parecer.

Outra questão que um necessitista deve responder é: como lidar com a tese essencialista? i.e., uma propriedade P é essencial a o somente se for necessário que sempre que o for algo (existir), então o é P? Se o é um indivíduo que possui uma essência, digamos a de ser um tigre, então necessariamente quando for algo, o deve ser um tigre. Parece existir uma tensão entre tal tese e o necessitismo; nesse caso, um necessitista deveria, para aceitar uma tese essencialista, determinar quais ajustes deveriam ser feitos a essa tese para que ela

[46] O autor sustenta que a matéria presente no universo, em nível fundamental, é sempre a mesma. Sua combinação para formação dos diversos elementos é que propicia o aparente movimento de mudança. Porém, pode-se questionar como podemos "saber" isso.

[47] O argumento simétrico, em relação ao caso em que poderia haver menos coisas concretas do que aquelas que há, parece seguir a mesma estrutura.

se torne harmoniosa com a condição de necessidade da existência dos entes. Nesse cenário, poderia-se contra-argumentar que no necessitismo há a multiplicação de entes, não respeitando o princípio descrito pela navalha de Ockham, pois postula-se um número infinito de entidades possíveis e não-concretas (que são), suporte para a atualização de todas as entidades concretas (como são). Não é mais possível usar o princípio de recombinação para explicar a variedade de possiblidades que estão abertas, pois não teríamos como necessário a existência de certas entidades. Contra tal argumento pode-se utilizar a tese de que a multiplicação de entidades, a fim de manter a plausibilidade teórica, simplicidade, elegância e economia em princípios, é razoável; Williamson utiliza raciocínio semelhante a esse para mostrar que, talvez, a economia não deve ser realizada na ontologia[48], mas na exposição dos princípios fundamentais, ou pressupostos filosóficos, da teoria metafísica. Sob tais considerações, o autor é capaz de reforçar uma ideia que, para muitos, possa parecer evidente: o senso comum não tem autoridade ilimitada sobre o tipo de afirmações feitas sobre esses problemas. Sendo assim, a estranheza inicial que alguns possam sentir pela tese necessitista pode ser disssipada. Afinal, como podemos saber, fora de uma teoria, que não poderia ter havido algo não-concreto (não atual)? Além disso, por sermos capazes de, internamente a uma teoria, imaginarmos a possibilidde de existência de coisas de determinado tipo, isso não implica na possibilidade de sabermos, fora da teoria, que não poderiam haver tais coisas - que é a tese contingentista.

Williamson procura demonstrar, então, a plausibilidade da posição necessitista que defende. Como apresentamos até aqui, tal empreendimento é compreensível, tendo em vista a estranheza inicial que tal tese costuma causar. Porém, no discurso modal, a existência dos possíveis, como entidades ou situações, é indispensável para a análise dos modos de necessidade e possibilidade. Como o autor lida com essa aparente divergência entre a tese necessitista e a noção de possibilidade (contingência)? O necessitismo, segundo ele, não necessita as coisas *como* são, mas sim *o que* são. Por isso, o aparente atrito entre tal tese e a noção de contingência, obtida cruamente da experiência vivida, pode ser desfeito ao analisarmos duas leituras distintas do operador modal de possibilidade: as leituras *predicativa* e *atributiva*.

Na leitura predicativa de 'possível a', temos o seguinte significado: *uma entidade é a e poderia ter existido*; nessa leitura, é necessário que todos os possíveis a sejam a, pois caso se atualizassem, seriam necessariamente a. Já na leitura atributiva, o significado para a expressão é: *uma entidade poderia ter sido a*; agora, não é necessário que os possíveis a sejam sempre a. O autor considera tal leitura a mais natural e correta para um necessitista; em primeiro lugar, porque resguarda todos os objetos *possíveis* (não no sentido de que são, mas de como são) de suas particularidades *qua* possíveis e, em segundo lugar, porque reflete o axioma B. Na leitura atributiva temos a inferência de que 'x é possivelmente

[48] Verificar a disjunção dos domínios no modelo topo $FOS4$-canônico mais o uso da noção de heccedidade.

a’ a partir do fato de que ‘x é a’, o que reflete o princípio de que tudo o que ocorre é possível. Nela, excluímos a inferência permitida na leitura predicativa de que se ‘x é um possível a, então se atual, x será a, necessariamente’. A noção de *mero possibilia* reforça esse argumento, já que a afirmação de que ‘x é meramente um possível a’ é equivalente à afirmação ‘x é possivelmente a, mas x não é a’. Como na leitura predicativa de ‘possível a’, possível age como um predicado de x, atuando tacitamente como “existe”; não parece que tal leitura legitima a existência de *meros possibilias*. O que um necessitista exige para os objetos possíveis não-concretos é o fato de que sejam meramente possíveis, e na leitura predicativa, temos que todo meramente possível é possível (pouco intuitivo) e que possível não implica, necessariamente, em meramente possível. Portanto, a leitura atributiva se mostra, novamente, mais em consonância com os princípios intuitivos a respeito dos *possibilia*, já que nela, um possível a é equivalente a um a, seja ele atual ou um meramente possível a.

Dada a generalidade do discurso necessitista, qual deve ser a leitura dos quantificadores? Para um contingentista, parece ser plenamente acomodável a ideia de restringir o domínio de quantificação (nesse caso, para os objetos existentes (atuais)). Um necessitista, por outro lado, pode acreditar, em um primeiro momento, que tal generalidade é um ponto a favor, já que não lhe seria imposto a necessidade de restrição do domínio. Só que nesse caso, como ele seria capaz de diferenciar, de maneira rigorosa, os objetos concretos dos não-concretos, atuais de meros possíveis?

Se para um necessitista, como apontado por Williamson, tudo necessariamente é alguma coisa, o uso dos quantificadores em um sistema formal, para ele, parece ser completamente ilimitado. Mas para adequar seu discurso ao fato da contingencialidade de coisas concretas[49], um necessitista poderia restringir o alcance dos quantificadores apenas a objetos concretos. Com isso, os discursos necessitista e contingentista passariam a estar em sintonia, propiciando o diálogo entre teorias que tomam como base pressupostos filosóficos distintos. Porém, o autor não considera ilegítimo o uso dos quantificadores irrestritos[50], pelo contrário, pois julga completamente inteligível a presença de quantificadores irrestritos quando o contexto assim os permite.

Todavia, segundo Williamson, o uso irrestrito de quantificadores não trivializa o necessitismo, pois seu uso não implicaria que há, ou que poderia ter havido, qualquer objeto x meramente possível para o qual “alguma coisa”, qualquer que seja ela, pudesse ser válida para x; como contra-exemplo para essa situação, cita a afirmação, falsa, de que existe um objeto a que representa um assassino de Kant: como o filósofo não foi

[49] Segundo o necessitismo, necessariamente os objetos concretos são alguma coisa, mas é possível que sejam concretos apenas contingencialmente, já que não é necessário *como* tais coisas são.

[50] Muitos filósofos utilizam o paradoxo de Russell para questionar a validade do uso generalizado de quantificadores. Williamson procura demonstrar que os contextos em questão são diferentes, e que o referido paradoxo não é aplicável à situação apresentada sobre o uso de quantificadores.

assassinado (no mundo atual), não pode existir qualquer coisa que seja como a, ou seja, um assassino de Kant; portanto, tal indivíduo nunca seria referenciado por qualquer tipo de quantificador, nem mesmo com alcance irrestrito sobre as entidades necessárias do necessitismo. Sobre tal uso generalizado dos quantificadores, Williamson faz a seguinte observação a respeito do realismo modal[51]:

> "(...) David Lewis e outros realistas modais interpretam os operadores modais de 'necessidade' e 'possibilidade' como quantificadores sobre coisas como sistemas espaço-temporais concretos e maximais, como o nosso, o qual chamam de "mundos possíveis". Consideram o uso explícito de tais quantificadores como metafisicamente mais perspicazes do que o uso dos operadores modais, pois o modo como se expressam os quantificadores que operam sobre mundos, melhor articula o que é relevante a respeito da estrutura. Em contextos comuns, realistas modais afirmam, os quantificadores sobre mundos possíveis restringem tacitamente os quantificadores individuais explícitos, em relação ao escopo dos habitantes do sistema espaço-temporal em questão. Na visão deles, 'Poderia não ter existido macacos' é uma verdade em vista de que, em algum sistema espaço-temporal, não existem macacos. Contudo, realistas modais também permitem quantificação irrestrita; eles a usam quando fazem metafísica. Falando irrestritamente, dizem que algumas coisas não são *companheiros-de-mundo* (não pertencem ao mesmo sistema espaço-temporal)."(WILLIAMSON, 2013) (p. 16 - tradução livre)

Portanto, no escopo do realismo modal, haveria implicitamente o uso irrestrito dos quantificadores. Na afirmação necessitista 'Necessariamente, tudo é necessariamente algo', quando um realista modal utiliza os quantificadores, não mais percorrendo a coleção de indivíduos, mas os mundos possíveis, as duas ocorrências de 'necessariamente' passariam a ser redundantes, já que agora tal quantificador percorre por todas as coisas "em um mundo" (modo restrito), em todos os mundos possíveis (modo irrestrito, já que percorre tudo o que há). Williamson considera então que muitas das afirmações que toma como verdadeiras, por exemplo a posição necessitista, são trivializadas pelo realismo modal; exatamente por isso - pela falta dos pressupostos, ou condições, que deveriam ser assumidas para mostrar que tais afirmações são, de fato, verdadeiras, ao invés de trivializá-las - é que Williamson rejeita o realismo modal, pois para ele tais verdades, em virtude do interesse filosófico, deveriam ser demonstradas a partir destas condições básicas, não simplesmentre trivializadas.

[51] Ver também (WILLIAMSON; FARA, 2005).

3.6.1.1 O Problema da *Identidade*

Como adepto da tese essencialista, Williamson precisa explicar a relação entre *identidade* e *distinção*, internamente a uma teoria necessitista, já que ingenuamente, tais conceitos parecem ser facilmente acomodados em uma teoria contingentista.

Segundo Williamson, o princípio clássico modal de identidade afirma que *idênticos são necessariamente idênticos*, enquanto sobre a noção de distinção temos que *coisas distintas são necessariamente distintas*. Os argumentos a favor destes conceitos foram dados por Ruth Barcan em 1947, em artigos do *Jornal of Simbolic Logic*, números 11 e 12:

1) Suponhamos que x e y sejam os mesmos objetos[52]. Pelo princípio de identidade dos indiscerníveis sabemos que se x é tudo o que y é, então x é necessariamente idêntico a y, ou seja, poderíamos supor que:

$$\Box((x = y) \supset \Box(x = y))$$

2) Suponhamos que x seja distinto de y. Seja C uma circunstância contrafatual em que x é idêntico a y. Pelo argumento anterior segue que x seria idêntico a y em todas as outras circunstâncias, logo, no cenário atual, x é idêntico a y. (Contradição)

Williamson conclui então em (WILLIAMSON, 2013)

> "(...) Enfraquecer, complicar, e enfeiar, sem uma razão extremamente forte para tal, com o intuito de meramente bloquear a derivação da necessidade ou permanência da identidade, seria um passo para a lógica e a metafísica tão retrógrado e contrário à razão quanto cientistas naturais poderiam considerar a respeito do sacrifício dessas mesmas virtudes em uma teoria física."(p. 27 - tradução livre)

Em uma versão contingentista, as noções de identidade e distinção exigiriam princípios restritivos. São eles: 1) Necessariamente, se x for idêntico a y então necessariamente quando x for algo, x será idêntico a y. 2) Necessariamente se x for algo distinto de y então sempre, necessariamente, x nunca é idêntico a y. A restrição 'quando x for algo' evitaria a inflação ontológica, pois assim o contingentista se comprometeria com a existência apenas "daquilo que é algo" (atual).

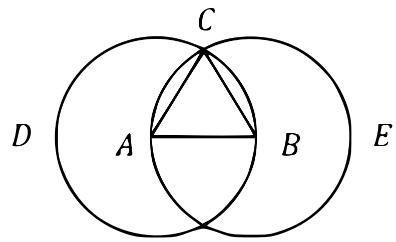
[52] Para a validade do argumento, x e y são variáveis para objetos, portanto ele não é válido para descrições definidas ou coisas do mesmo gênero. A não correção do argumento para tais tipos de entidades pode ser exemplificada por alguns dos argumento de Quine contra a lógica modal quantificada.

4 Lógica e Intuição Espacial

No livro 1 dos *Elementos*, Euclides demonstra o teorema *Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada*, primeiro teorema do livro - (EUCLIDES, 2009):

"*Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.*

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA e CB.



E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada AB."

Nessa demonstração, a existência do ponto C, encontro das duas circunferências centradas em A e B, é garantida pela visualização da construção geométrica, ou seja, o apelo geométrico, de caráter visual e intuitivo, faz parte organicamente da noção de demonstração nesse "sistema dedutivo", considerado o primeiro de seu tipo na história[1]. Nos *Elementos*, o apelo geométrio é de suma importância para conduzir a razão, intuitivamente, no processo de construção do conhecimento. Sabemos que essa mesma intuição, aprisionada pelos limites do espaço euclidiano ao qual estamos sujeitos (ilimitado, contínuo e homogêneo), pode nos guiar no processo de abstração de conceitos em espaços euclidianos de dimensões maiores ($\mathbb{R}^n$), espaços puramente abstratos, como espaços de funções ou matrizes, ou mesmo espaços geométricos singulares, como aqueles descritos pelas geometrias não-euclidianas. Sendo assim, a afirmação de que a intuição geométrica é um poderoso guia para a razão não soa, de forma alguma, exagerada.

[1] Uma teoria fundada em noções elementares, axiomas e postulados, cujos resultados são obtidos por meio de inferências lógicas a partir desse conjunto de pressupostos.

O reflexo de ações geométricas traduzidas formalmente em teorias matemáticas abundam, por exemplo, a soma de dois números reais gera o deslocamento da reta real[2].

Assim como a "interpretação geométrica" (espacial e de movimento) de operações matemáticas são capazes de guiar nossa *intuição* no processo de abstração do "sentido" destas operações, julgo que a formação de conceitos e juízos também pode ser guiada por ela, devido a natureza geométrica e re-presentativa do nosso *espaço de representação*, já que ela pode, inclusive, incrementar nossa capacidade para "visualizar" estratégias de demonstração. A razão para isso reside no forte apelo geométrico-espacial que essa representação possui sobre nosso maquinário intelectual.

Porém, a demonstração de que os axiomas da geometria euclidiana, portanto do espaço-geométrico usual o qual temos a impressão de estarmos submetidos, não descrevem teoreticamente, nem fisicamente, o único "espaço" possível, levou ao questionamento da validade dos argumentos, como os de Kant, a respeito do apriorismo de juízos derivados a partir da experiência sensorial, como aqueles da intuição espacial[3]. Acredito que por mais que seja possível questionar a universalidade de afirmações geométricas do espaço euclidiano, seja por que nossa percepção do mundo esteja condicionada por esse espaço, seja por que nosso mecanismo racional condiciona nossa experiência *nesse* tipo de espaço, é nele que estamos "mergulhados", e seguindo o pressuposto de que todo conhecimento se principia *com* a experiência[4], defendo que o processo de abstração de certas noções espaciais seja capaz de refinar nossa compreensão da natureza do espaço (abstrato), e que essas noções abstratas, por herdarem o apelo intuitivo das noções espaciais, são uma poderosa ferramenta (matemática) para atuar como par metodológico na reflexão filosófica ao investigarmos problemas através de modelos ou experimentos intelectuais, mais especificamente, para esclarecer certas questões metafísicas[5] - ver hipóteses H 2.3 e H 2.4, capítulo 1.

Em especial, ao traçarmos o paralelo entre as estruturas dos espaços lógico-dedutivos e dos espaços físicos-geométricos, evidenciado pelas "formas" que geram tais estruturas - operador de fecho dedutivo e operador de fecho topológico, reforça-se a tese de conexão

---

[2] Pode-se ilustrar também com a multiplicação entre números reais ou complexos (no último caso, uma rotação do plano).

[3] Em (HANNA, 2005), o autor discute mecanismos apresentados para o enfrentamento de tais argumentos, no sentido de salvaguardar a teoria kantiana da sinteticidade *a priori* dos juízos da geometria.

[4] Pela necessidade de elementos sensoriais, blocos formadores para a criação de conceitos ou juízos. Como delineado no capítulo 1, em Kant, por exemplo, o que não significa que para ele todo o conhecimento se segue *da* experiência (ver (KANT, 2002) e (HANNA, 2005)).

[5] Problemas filosóficos éticos, epistemológicos ou estéticos, por exemplo, podem ser avaliados na perspectiva de experimentos intelectuais sobre situações "concretas", como a análise moral ou estética de diferentes culturas e tempos, assim como é possível trazermos elementos e ferramentas das investigações científicas para, empiricamente e por critérios objetivos, justificar hipóteses e teses epistemológicas. Já para a invetigação metafísica, esses elementos não existem, a razão está sozinha na articulação conceitual e inferencial que opera. Por isso defendo que a triangulação entre os espaços físico, de representação e lógico pode ser utilizada como apoio para os experimentos intelectuais construídos para embasar argumentos metafísicos.

local entre os espaços físico, lógico e de representação, relação essa que procuro utilizar para defender certa abordagem metodológica para a investigação metafísica - ver hipótese H 2.5.

4.1 Abstração de Noções Espaciais

O espaço euclidiano é descrito, dentro de uma teoria matemática (álgebra linear), como um *espaço vetorial normado*. Tais espaços possuem poderosas ferramentas capazes de "medir" o comprimento de seus elementos (vetores) e mensurar ângulos entre eles, de maneira que noções geométricas como paralelismo e perpendicularidade possam ser representadas.

Um *espaço vetorial* é uma estrutura formada por um conjunto básico (vetores), munido de um conjunto numérico (corpo) e duas funções; uma é a soma de vetores e a outra o produto de vetor por escalar; a soma de vetores satisfaz: é comutativa, associativa, existe um único elemento nulo e todo vetor possui um oposto que, ao serem somados, resulta no vetor nulo; a multiplicação de vetor por escalar satisfaz: é associativa em relação a escalares, todo vetor multiplicado pelo elemento unitário do corpo resulta nele mesmo, o produto de vetor se distribui em relação à soma dos escalares e a soma de vetores se distribui em relação ao produto por um escalar. Portanto, um espaço vetorial pode ser visto como uma teoria lógica no qual todo modelo "herda" certas noções geométricas dos espaços euclidianos; dessa maneira, em espaços vetoriais de funções ou matrizes, por exemplo, o comportamento e a relação dos vetores, nesse caso objetos abstratos, herdam a "visualização" de características e movimentos "espaciais" dos vetores no espaço euclidiano (três dimensões).

Ao diminuirmos os recursos de uma estrutura vetorial, de que tipo de coisas podemos falar sobre o "espaço geométrico" resultante? Menos condições sobre uma estrutura significa a diminuição dos axiomas dessa teoria, portanto aumenta-se o número de modelos que satisfazem tais axiomas. Dessa forma, uma teoria desse tipo diminuiria seu poder discursivo, em relação aos espaços vetoriais, refletindo certas noções geométricas mais "elementares". Mas perguntamos, que tipo de estrutura seria essa?

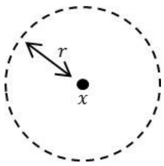
Um *espaço métrico* é uma estrutura formada por um conjunto munido de uma operação binária (métrica) do cartesiano do conjunto no conjunto dos reais. Uma *métrica* satisfaz: é simétrica, satisfaz a desigualdade triangular e seu valor é sempre não-negativo, sendo igual a zero se e somente se o argumento da função pertencer à diagonal do cartesiano do domínio da função. O módulo de um número real (considerando aqui a função de dois lugares que associa a cada par de números reais o módulo da diferença desses números) satisfaz a definição de métrica, portanto, o conjunto dos números reais é um espaço métrico, considerando como métrica a operação módulo - todo espaço euclidiano é um espaço métrico. Todavia, existem métricas singulares que não estão associadas a nenhum espaço vetorial. Um exemplo de métrica não *standard* é a *métrica discreta*, em que para todos os pares de pontos fora da diagonal do domínio da função, ela retorna valor igual a 1.

Um espaço métrico é uma estrutura mais simples do que um espaço vetorial, mas a partir da noção de distância entre os pontos dessa estrutura podemos discutir diversas noções geométricas como separação, densidade etc. O suporte estrutural para os espaços métricos são as *bolas abertas*.

Seja (A, d) um espaço métrico. Para todo ponto $x \in A$ e para todo número real r, podemos definir a *bola aberta* centrada em x e de raio $r > 0$:

$$B(x, r) = \{y \in A \mid d(x, y) < r\}$$

Esse nome é sugestivo ao analisarmos a representação desse conjunto no plano (espaço euclidiano de dimensão 2) com a métrica usual.



Note que para todo ponto x_0 da bola aberta centrada em x e raio r, existe um número $\epsilon \leq r - d(x, x_0)$ tal que a bola aberta centrada em x_0 e com raio $\epsilon > 0$ está totalmente contida na bola aberta original.

Por meio dessa estrutura geométrica básica, toda teoria dos espaços métricos é desenvolvida - com ela podemos falar sobre convergência de sequências, continuidade de funções, densidade, separação, mensurar a quantidade de "buracos" no espaço etc.

Será possível diminuirmos ainda mais a exigência sobre algumas estruturas, de maneira a ser possível, mesmo sob condições mais gerais, continuar a discutir certas "noções geométricas" nesse espaço abstraído?

Quando excluímos a função métrica e relacionamos a um conjunto A uma coleção de seus subconjuntos que satisfaz algumas condições, somos capazes de recriar uma nova estrutura para A, dessa vez sem envolver nenhuma noção externa ao próprio A, como o corpo algébrico, no caso dos espaços vetoriais, e o conjunto dos reais, no caso dos espaços métricos, de maneira que possamos falar, a partir de tal estrutura formada apenas por elementos do próprio conjunto A, sobre noções geométricas como conexidade, separação e densidade, por exemplo. Tal estrutura é denominada *espaço topológico*[6]; nela não podemos mais mensurar a distância entre os pontos do conjunto A; são as características representáveis por tal estrutura que denominamos, nesse trabalho, de *noções geométricas primitivas*.

[6] Indico uma caracterização formal de estruturas "geométricas" que vai em direção da abstração de suas noções basilares; essa caracterização não corresponde à ordem cronológica, em que os espaços métricos são definidos posteriormente à definição formal dos espaços topológicos.

4.1.1 Topologia e *Noções Geométricas Primitivas*

Noções geométricas primitivas são entendidas aqui como aquelas que exigem o mínimo de uma estrutura para serem definidas. A noção de perpendicularidade, por exemplo, exige que a estrutura possa falar sobre ângulos entre os elementos do espaço. Nos espaços vetoriais, isso é feito pelo *produto interno*; vemos assim que tal noção exige uma estrutura com certos recursos especificos para ser expressa. Como a noção de *norma* de um vetor[7] é definida pelo produto interno, tal característica também exige uma estrutura com muitos recursos[8]. Se diminuirmos os recursos da estrutura, de maneira a ser possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer, porém não mais a sua norma, temos então uma estrutura com menos recursos do que os espaços vetoriais, denominada *espaço métrico*.

Ao abstrairmos os elementos básicos dos espaços métricos, as bolas abertas, que dão a estrutura métrica de um espaço (métrico), podemos simular as características da estrutura métrica nessa nova estrutura geométrica mais geral. Os novos elementos básicos são os abertos (básicos)[9], e a ideia é de que, assim como os elementos internos de toda bola aberta (espaço métrico), os abertos (básicos) de um espaço topológico formam a base para a construção de todos os abertos do espaço topológico.

Espaço topológico

Um espaço topológico é, então, um conjunto munido de uma estrutura (topologia) que abstrai a estrutura geométrica dos espaços métricos para casos mais gerais, em que não é possível sequer exibir uma distância numérica entre os elementos ou pontos desse espaço. Tal estrutura é um sistema de vizinhanças (abertas) dada, nos espaços métricos, pelas bolas abertas, e nos espaços topológicos pelos abertos básicos.

Portanto, defendo a posição de que intuições espaciais mais básicas, necessárias para a operação da razão na formulação de conceitos e juízos, podem ser representadas pela teoria matemática dos espaços topológicos, já que tais estruturas operam sob o signo de noções espaciais cruas, mas que são gerais, na medida em que diversos tipos de "suportes"

7 Nem todos os espaços vetoriais são normados.

8 Um vetor no espaço euclidiano possui três características: direção, sentido e norma; a norma é o comprimento do vetor. Na reta real, vista como espaço vetorial, a norma de um vetor (número real) é o seu módulo.

9 Ou fechados, já que uma topologia pode ser definida por meio de abertos ou fechados.

geométricos podem ser encapsulados por tipos de estruturas topológicas distintas, em função das diferentes topologias que podem ser associadas a um mesmo conjunto, gerando então distintos espaços topológicos - ver hipótese H 2.4.

4.2 Elementos de Topologia

Farei uma rápida apresentação da teoria básica da Topologia Geral, seguindo mais de perto como referência (MUNKRES, 2002) - ver também (KELLEY, 1991).

Definição 4.2.1. *Uma* ***topologia*** *para um conjunto A é uma coleção τ de subconjuntos de A que satisfaz:*

1) $\emptyset \in \tau$ e $A \in \tau$;

2) A união de elementos de τ é elemento de τ;

3) A intersecção finita de elementos de τ é elemento de τ.

Dá-se o nome de ***espaço topológico*** *ao par (A, τ). Muitos vezes podemos nos referir genericamente ao espaço topológico A, mas implicitamente há uma topologia τ a esse conjunto associada.*

Os elementos de τ são os *abertos* desse espaço topológico e, para todo U elemento de τ, o complementar de U em A é chamado de *fechado* do espaço topológico. Então, de acordo com operações elementares da teoria dos conjuntos, poderíamos definir uma topologia (fechada) por meio da noção de fechados, desde que essa coleção de subconjuntos de A, contendo o conjunto vazio e o próprio A, fosse fechada em relação à operação de intersecção (qualquer) e a uniões finitas. Ou seja, os abertos (ou fechados), subconjuntos do próprio espaço topológico, fornecem a "estrutura" topológica (geométrica) a esse espaço, i.e., é uma estrutura internamente induzida pelo próprio conjunto.

O análogo às bolas abertas dos espaços métricos são os abertos básicos de um espaço topológico - que formalmente dão origem à topologia.

Definição 4.2.2. *Seja A um conjunto. Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de A é uma* ***base*** *para uma topologia τ (para A) se satisfizer:*

1) Para todo elemento $a \in A$, existe ao menos um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in \mathcal{B}$;

2) Sejam $B_1 \neq B_2$ elementos de $\mathcal{B}$. Para todo $a \in (B_1 \cap B_2)$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B_3$ e $B_3 \subseteq (B_1 \cap B_2)$.

Dá-se o nome de ***aberto básico*** *aos elementos de $\mathcal{B}$. Nesse caso, a topologia τ gerada por $\mathcal{B}$ é definida da seguinte forma:*

$$\tau = \{U \subseteq A : \forall a \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } a \in B \text{ e } B \subseteq U\}$$

Notemos que todo elemento de $\mathcal{B}$ pertence a τ, ou seja, os abertos são formados por uniões de abertos básicos.

Definição 4.2.3. *Seja A um conjunto. Uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de A é uma* ***subbase*** *para uma topologia τ para A se a união dos elementos de $\mathcal{S}$ for igual a A.*

Se $\mathcal{S}$ for subbase de uma topologia τ para A, temos:

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = A$$

$$\tau = \{\bigcup (\bigcap_{i=1}^{n} S) : S \in \mathcal{S}\}$$

Disto segue que os abertos básicos são obtidos pela intersecção finita dos elementos da subbase.

Definição 4.2.4. *Seja $X \subseteq A$ subconjunto de um espaço topológico.*

Definimos o ***interior de*** *X ($int(X)$) como a união de todos os abertos contidos em X.*

$$int(X) = \bigcup \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X,\ U_\alpha \in \tau\}$$

Definimos o ***fecho de*** *X ($\overline{X}$) como a intersecção de todos os fechados que contêm X.*

$$\overline{X} = \bigcap \{F_\alpha : X \subseteq F_\alpha,\ A - F_\alpha \in \tau\}$$

Observações: Seguem das definições de fecho e interior que:

1) $int(X)$ é aberto.

2) $\overline{X}$ é fechado.

3) $int(X) \subseteq X \subseteq \overline{X}$

4) X é aberto $\Leftrightarrow int(X) = X$.

5) X é fechado $\Leftrightarrow \overline{X} = X$.

Definição 4.2.5. *Uma* ***vizinhança*** *para um ponto a, do espaço topológico A, é um aberto de A que contém a.*

Utilizo aqui a definição de vizinhança como adotada por Munkres (ver (MUNKRES, 2002)), por exemplo, em que toda vizinhança é sempre um aberto. Na definição clássica (ver (KELLEY, 1991)), uma vizinhança V de um ponto a é um subconjunto de A que contém um aberto U, tal que $a \in U$.

Definição 4.2.6. *Sejam A um espaço topológico e $X \subseteq A$.*

Um ponto $a \in A$ é ***ponto de acumulação*** *(ponto limite) de X se toda vizinhança de a intersecta X em um ponto diferente de a. Denotamos o conjunto de pontos de acumulação de X por X' (conjunto derivado de X).*

Um ponto $x \in X$, em que X é subconjunto de A, é dito ***ponto isolado*** *de X se existir uma vizinhança de x em que somente esse ponto pertence a X.*

Teorema 4.2.1. *Dado A um espaço topológico e $X \subseteq A$, então $\overline{X} = X \cup X'$.*

Para a demonstração desse resultado, consultar uma das referências.

Definição 4.2.7. *Seja X um subconjunto de um espaço topológico A.*

A ***fronteira*** *de X é dada por: $\partial(X)$ ou $FR(X) = \overline{X} \cap \overline{A - X}$*

Uma rápida investigação nos mostra que $int(X)$ e $FR(X)$ são conjuntos disjuntos e que $\overline{X} = int(X) \cup FR(X)$.

Topologia por Fechados

Definição 4.2.8. *Um* ***operador de fecho topológico*** *em A é um operador $K : \wp(A) \to \wp(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas, conhecidos por axiomas de fecho de Kuratowski*[10].

Para todos subconjuntos X e Y de A, são válidos:

i) $X \subseteq K(X)$

ii) $K(K(X)) = K(X)$

iii) $K(X) \subseteq K(X \cup Y)$

iv) $K(X \cup Y) = K(X) \cup K(Y)$

v) $K(\emptyset) = \emptyset$

Devemos notar que pela dualidade das noções de aberto e fechado, o operador interior pode ser caracterizado da seguinte forma:

Definição 4.2.9. *Um* ***operador interior*** *em A é um operador $I : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$ que satisfaz os seguintes axiomas:*

I) $I(X) \subseteq X$

ii) $I(I(X)) = I(X)$

[10] O axioma 3 não é, em geral, listado, mas segue do fato de K ser uma função. Tal descrição do operador de fecho topológico será de especial interesse para a apresentação dos espaços de fecho dedutivos.

iii) $I(X) \subseteq I(X \cup Y)$

iv) $I(X \cap Y) = I(X) \cap I(Y)$

v) $I(A) = A$

Da dualidade entre os operadores segue que para todo $X \subseteq A$, sobre o qual estão definidos um operador de fecho (topológico) e um operador interior, temos $I(X) = A - K(A - X)$ e $K(X) = A - I(A - X)$.

As demonstrações dos resultados apresentados e não demonstrados nessa seção podem ser encontradas em (MUNKRES, 2002).

Teorema 4.2.2. *Seja K um operador de fecho sobre A. Definamos $\mathfrak{F}$ o conjunto formado por todos os subconjuntos X de A tais que $K(X) = X$*[11] *e τ a família formada por todos os complementares de $X \in \mathfrak{F}$ em relação a A.*

Então τ é uma topologia para A, no qual para qualquer subconjunto X de A, $\overline{X} = K(X)$.

Verifica-se facilmente que o fecho em um espaço topológico, como definido anteriormente, satisfaz os axiomas de fecho de Kuratowski, como esperado.

Proposição 1. *Se (A, τ) é um espaço topológico, então o fecho topológico de tal espaço é um operador de fecho.*

O próximo resultado será demonstrado aqui, pois não encontramos essa demonstração na literatura indicada. Por mais que seja um resultado trivial, ele é importante para compararmos fechados topológicos com os conjuntos fechados da teoria de espaços de fecho dedutivo, que será apresentada na próxima seção.

Lema 4.2.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes propriedades:*

1) $\forall a \in A, \exists C \in \mathcal{C}$ *tal que* $a \notin C$.

2) Se existem C_1, C_2 elementos distintos de $\mathcal{C}$ tais que $C_1 \cup C_2 \neq A$, então para todo $a \notin C_1 \cup C_2$, existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $a \notin C_3 \subsetneq A$ e $C_1 \cup C_2 \subseteq C_3$.

Então $\mathcal{B} = \{(A - C) \mid C \in \mathcal{C}\}$ é base para uma topologia de A. Os elementos de $\mathcal{C}$ serão denominados de fechados básicos.

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ a coleção descrita no lema. Mostremos que ela satisfaz as condições de base para uma topologia de A.

[11] A família formada pelos pontos fixos de $\wp(A)$ por K.

1) Por hipótese, para todo $a \in A$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $a \notin C$, logo $a \in (A - C) = B \in \mathcal{B}$.

2) Ainda por hipótese, se existem elementos de $\mathcal{C}$ distintos C_1 e C_2 tais que $C_1 \cup C_2 \neq A$, então para todo $a \notin C_1 \cup C_2$ existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $a \notin C_3 \subsetneq A$ e $C_1 \cup C_2 \subseteq C_3$.

Se tal for o caso, existem elementos distintos $B_1 = (A - C_1)$ e $B_2 = (A - C_2)$ tais que $a \notin [(A - B_1) \cup (A - B_2)]$, ou seja, $a \notin A - (B_1 \cap B_2)$, isto é, $a \in (B_1 \cap B_2)$.

Sabemos que para tais conjuntos, existe $C_3 \neq A$ tal que $C_1 \cup C_2 \subseteq C_3$ e $a \notin C3$, o que implica que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, com $B_3 = A - C_3$ e $a \in B_3$.

■

É importante salientarmos que as características topológicas de um espaço (A, τ) não são propriedades intrínsecas do conjunto A, mas dependem de τ. Por exemplo, o espaço topológico $\mathbb{R}$, com a topologica induzida pela distância de pontos sobre a reta (espaço euclidiano de uma dimensão com distância usual), não é compacto, pois se considerarmos a coleção $\{(a-2, a+2) \mid a = 2m,\ m \in \mathbb{Z}\}$, cobertura para $\mathbb{R}$, ela não admite subcobertura finita para os reais. Por outro lado, se τ for a família de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contém $\emptyset$, o próprio conjunto, e todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ cujo complementar é finito (τ é a topologia co-finita), então $(\mathbb{R}, \tau)$ é compacto[12].

Defendo que as noções intuitivas que possuímos, referentes à apreensão imediata do espaço (euclidiano), são o suporte para a construção, por meio da abstração, de conceitos e noções espaciais de forte apelo espaço-sensorial, e que as ferramentas topológicas propiciam um mecanismo de formalização abstrativo destas noções, sendo capazes de transmitir as relações intrísencas das intuições geométrica-espaciais que possuímos para espaços de natureza distinta da euclidiana, espaços esses em que a estrutura espacial mais fina é determinada pelas mais diversas (e exóticas) topologias. Exatamente por isso, tais noções topológicas podem ser denominadas de noções geométricas primitivas.

4.3 Topologia e Lógica

Sobre a teoria dos espaços de fecho dedutivo, sigo a abordagem realizada por Norman Martin e Stephen Pollard em (MARTIN; POLLARD, 1996).

Podemos definir a topologia para um espaço topológico por meio de funções ou operadores, tomando como topologia a imagem de tais operadores, ou considerando a

[12] Se uma cobertura aberta qualquer não contém $\mathbb{R}$ (caso contrário, bastaria tomarmos a subcobertura unitária com o próprio $\mathbb{R}$), escolhendo um elemento qualquer da cobertura, existiria um número finito, digamos n, de elementos de $\mathbb{R}$ fora desse aberto. Portanto, no máximo mais n elementos da cobertura original seriam necessários para cobrir todo o conjunto $\mathbb{R}$, ou seja, obteríamos uma subcobertura finita.

topologia como a coleção de abertos, imagem do operador interior ou os complementares da imagem do operador de fecho (topológico), como apresentados nas definições 4.2.8 e 4.2.9.

A relação entre topologia e lógica é plenamente evidenciável ao analisarmos a relação entre o operador de fecho topológico com a noção de dedução lógica. Tal noção é a mesma adotada por A. Tarski em seus espaços dedutivos em (TARSKI, 1996) (em 1941) (ver também (MARTIN; POLLARD, 1996)), com a diferença de não precisarmos impor a condição de dedução finita.

Definição 4.3.1. *Seja $\Gamma \subseteq S$, em que S é o conjunto de fórmulas bem formadas de uma linguagem L, associada a um sistema lógico com uma noção de dedução $\vdash$. Definamos como $CL(\Gamma)$ o conjunto formado por todas as sentenças de S deduzidas a partir de Γ. Isso é:*

$$CL(\Gamma) = \{\alpha \in S \mid \Gamma \vdash \alpha\}$$

*O operador CL é chamado de **operador de fecho dedutivo**.*

Proposição 2. *O operador $CL : \wp(S) \to \wp(S)$ satisfaz os axiomas de Kuratowski de i) a iii).*

Demonstração. Como $\vdash$ representa a noção usual de dedução lógica (ver capítulo 2), sabemos que:

i) Se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \alpha$, o que implica que se $\alpha \in \Gamma$, então $\alpha \in CL(\Gamma)$.

ii) Se $CL(\Gamma) \vdash \alpha$, então $\Gamma \vdash \alpha$, sendo assim, se $\alpha \in CL(CL(\Gamma))$, então $\alpha \in CL(\Gamma)$ (o outro lado da inclusão é trivial).

iii) Se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \cup \Gamma^* \vdash \alpha$, logo se $\alpha \in CL(\Gamma)$, então $\alpha \in CL(\Gamma \cup \Gamma^*)$.

■

Os axiomas de Kuratowski de i) a iii) representam, portanto, a noção de dedução dos espaços dedutivos de Tarski[13]. Por outro lado, os axiomas iv) e v) violam certos princípios que podem ser exemplificados por meio da lógica proposicional clássica.

Exemplo 1: O axioma iv) viola um dos princípios de dedução da lógica clássica. Consideremos p uma variável proposicional, $\Gamma = \{p\}$ e $\Gamma^* = \{\neg p\}$. Temos:

$$CL(\Gamma) = \{Tautologias\} \cup \{p\}$$

$$CL(\Gamma^*) = \{Tautologias\} \cup \{\neg p\}$$

[13] Um espaço de Tarski é um espaço de fecho dedutivo em que S é no máximo enumerável e toda dedução tem conjunto finito de premissas.

Obviamente, $CL(\Gamma \cup \Gamma^*) = S \neq CL(\Gamma) \cup CL(\Gamma^*) = \{Tautologias\} \cup \{p, \neg p\}$.

Exemplo 2: O axioma v) viola a dedução de teoremas da lógica clássica. Consideremos φ uma tautologia da lógica proposicional clássica, sabemos que $\emptyset \vdash \varphi$, i.e., $CL(\emptyset) \neq \emptyset$.

Definição 4.3.2. *Seja S um sistema lógico com a noção de dedução $\vdash$. Tal dedução induz um único operador CL sobre S, de maneira que (S, CL) é denominado **espaço de fecho dedutivo**.*

Por convenção, adota-se $\cap\emptyset = S$ (para que certos detalhes técnicos sejam uniformizados - ver (MARTIN; POLLARD, 1996)).

Dessa forma, devido a analogia que pode ser estabelecida entre o operador de fecho dedutivo CL com o operador de fecho topológico, podemos adaptar praticamente todas as definições topológicas internamente à teoria de espaços de fecho dedutivo e com isso recuperar o apelo geométrico das noções topológicas para tratar de noções lógicas; ou seja, noções topológicas podem ser utilizadas para representar noções lógicas.

Como as noções de aberto e fechados são o suporte para as estruturas topológicas, precisamos determinar o que é um aberto - ou fechado - em um espaço de fecho dedutivo. Isso é feito de maneira trivial: se $\Gamma \subseteq S$, então Γ é *fechado* se e somente se $CL(\Gamma) = \Gamma$ (então os fechados do espaço de fecho dedutivo são as *teorias* - conjuntos dedutivamente fechados); Δ é *aberto* se e somente se existir $\Gamma \subseteq S$ fechado tal que $S - \Gamma = \Delta$. Notemos que se Δ for um subconjunto aberto de um espaço de fecho dedutivo, então existe uma teoria Γ tal que Δ é o conjunto de todos os não-teoremas de Γ. Podemos relacionar os fechados de um espaço de fecho dedutivo com os fechados de um espaço topológico - a relação entre os operadores de fecho é evidenciada pelo lema 4.2.1, onde podemos "interpretar" que um fechado básico (topológico) seria um "conjunto consistente não maximal".

Teorema 4.3.1. *Seja A um conjunto qualquer e $K : \wp(A) \longrightarrow \wp(A)$. K é um operador de fecho dedutivo se e somente se satisfizer:*

$$D(0) : X \subseteq K(Y) \Leftrightarrow K(X) \subseteq K(Y)$$

Para quaisquer X e Y subconjuntos de A.

Ver (MARTIN; POLLARD, 1996). A demonstração desse teorema enfatiza que $D(0)$ é equivalente à conjunção dos axiomas de Kuratowski i), ii) e iii).

Portanto, o operador dedutivo (no sentido de Tarski) pode ser visto como um "quase" operador de fecho topológico. Essa aproximação nos permitirá fazer algumas considerações a respeito da relação entre propriedades topológicas (geométricas primitivas) e dedutivas, de maneira a evidenciar certa intuição geométrica para as noções lógicas representadas nos espaços de fecho dedutivo, ou seja, evidenciar a relação estrutural entre os espaços de representação, físico e lógico.

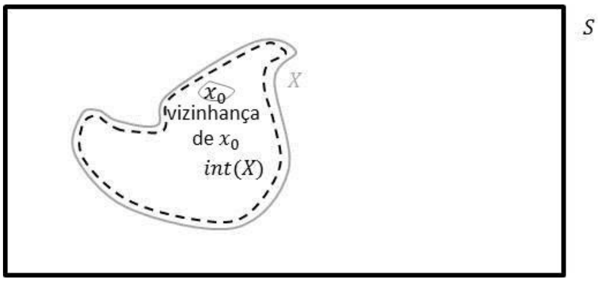
4.3.1 Representando Imageticamente Relações Lógicas

Consideremos (S, CL) um espaço de fecho dedutivo e (A, τ) um espaço topológico. Discutirei algumas traduções de noções topológicas para as noções lógicas do espaço de fecho dedutivo. Um estudo mais pormenorizado dessa bela teoria de lógica abstrata pode ser encontrado em (MARTIN; POLLARD, 1996).

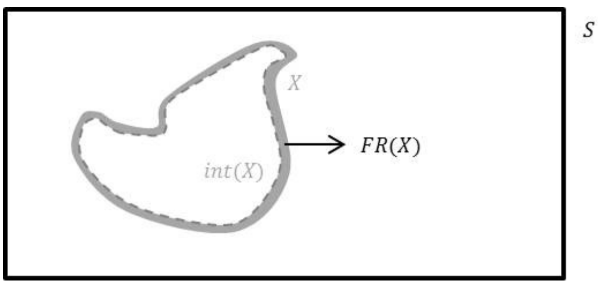
Densidade: A propriedade topológica de densidade para um conjunto D significa que tal conjunto não é separável do conjunto A por meio da estrutura topológica do espaço.

Similarmente, se $CL(\Gamma) = S$ dizemos que Γ é denso, ou seja, densidade é traduzida - em linguagem lógica - em inconsistência ou trivialidade, já que Γ inconsistente deduz qualquer fórmula de S.

Fronteira: Todo ponto interior de um subconjunto possui uma vizinhança totalmente contida no interior.

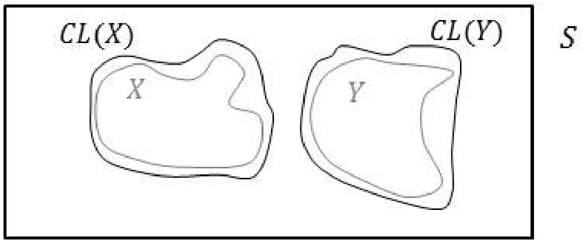


A fronteira de um subconjunto X de um espaço topológico $(FR(X))$ é obtida ao retirarmos o interior do fecho dele (disso segue que abertos não possuem fronteira e fechados são os conjuntos que contêm todos os pontos de sua fronteira). Para um ponto na fronteira de um conjunto, todas as suas vizinhanças intersectam tanto o conjunto quanto seu complementar.



Se uma fórmula α está no interior de um conjunto Γ, então existe uma teoria Γ' que não contém α, pois sabemos que existe um aberto contendo α totalmente contido em Γ e que o complementar desse conjunto, um fechado, é uma teoria ($CL(\Gamma')$). Logo, em uma teoria, todas as suas consequências pertencem ao conjunto, ou seja, a fronteira de teorias pertence ao conjunto e $\alpha \in FR(\Gamma)$ se e somente se $\Gamma \vdash \alpha$ e $S - \Gamma \nvdash \alpha$.

Separação e conexidade: Dois subconjuntos disjuntos e não vazios X e Y de um espaço de fecho dedutivo S sao ditos *desconexos* se $Cl(X) \cap Y = \emptyset$ e $CL(Y) \cap X = \emptyset$.



Uma *desconexão* de Z são dois subconjuntos desconexos de S tais que $X \cup Y = Z$, ou seja, Z é formado por duas partes cujos elementos são isolados dedutivamente, i.e., as consequências dedutivas de X não pertencem a Y, e vice-versa. Caso Z não for desconexo ele é dito *conexo*, ou seja, não existe uma "separação" de Z em duas partes que são não sejam dedutivamente "ligadas" em relação à noção de dedução $\vdash$ do sistema.

Por meio da teoria de espaços de fecho dedutivo podemos criar representações imagéticas para noções lógicas, representações essas de caráter geométrico e que simulam noções topológicas - que abarcam as noções geométricas primitivas de qualquer tipo de espaço. Estas "imagens", que possuem características distintas de acordo com a estrutura topológica do espaço, espelham também esta característica de distinção imagética de acordo com o tipo de fecho dedutivo CL, ou seja, em função da noção de dedução $\vdash$ do sistema formal adotado. Conseguimos assim obter uma forte conexão entre a "razão" (princípios e leis que regulam inferências lógicas em contextos racionais) e noções intuitivas espaciais ou noções geométricas primitivas (topológicas).

4.4 Semânticas Quase-Geométricas

A lógica nos fornece ferramentas para investigação de certos discursos a partir de bases conceituais seguras, ao explicitarmos os fundamentos racionais que norteiam o processo de inferência argumentativa - ver hipóteses H 1.1 e H 1.2, capítulo 1.

Acredito que a lógica modal é aquela que melhor representa os pressupostos racionais no qual o discurso metafísico se desenvolve. Considerando que a prática filosófica é enriquecida pelo uso de experimentos intelectuais, e que a matemática é a responsável, como par metodológico de todas as ciências contemporâneas, por trazer determinado tipo de rigor à inquirição científica, rigor esse pretendido pela filosofia contemporânea, nos parece que investigar estruturas matemáticas que sejam suporte para semânticas para a lógica modal é uma tarefa necessária - ver hipótese H 1.3.

Para além dessa exigência, as estruturas semânticas para sistemas lógico-dedutivos oferecem um ganho intelectual pelo poder persuasivo de suas imagens explicativas. Mais do que cruas regras de mera operação entre símbolos, estruturas semânticas possuem forte apelo intuitivo, por interpretarem - por meio dos signos próprios da estrutura - o funcionamento de noções e conceitos lógicos. Adotando a hipótese de que noções espaciais, por suas características peculiares no processo de obtenção de dados sensíveis e de formação de conceitos e juízos, são intuitivamente e imediatamente processadas pelo aparato cognitivo humano, quer sejam elas determinadas pelo espaço em que estamos mergulhados, quer nosso próprio espaço de representação por elas esteja condicionado, já que não podemos delas nos desvenciliarmos tão facilmente, assim como de nossa linguagem, então estruturas geométricas encontram-se em posição privilegiada para cumprir tal tarefa, pois poderemos, com maior grau de confiança, fazermos asserções de natureza técnica-formal e filosófica, por meio de representações imagéticas de conceitos lógicos formuladas em uma linguagem "geométrica".

4.4.1 Modelos e Espaços de Fecho Dedutivo

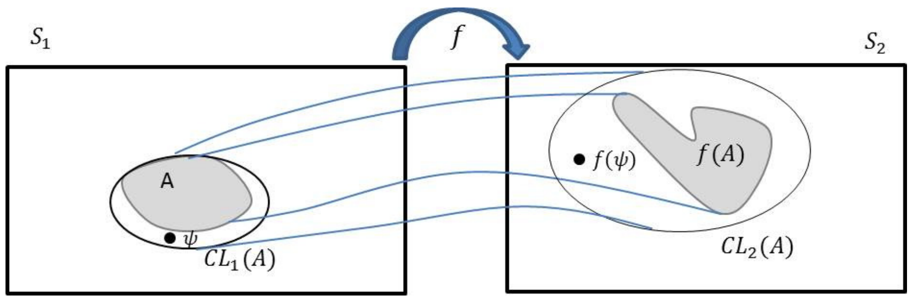
Utilizando a teoria dos espaços de fecho dedutivo, com os operadores de fecho dedutivo (quase-topológico - ver discussão relacionada em (FEITOSA, 2015)), podemos determinar relações entre sistemas dedutivos como imersões e interpretações. Além disso, podemos estabelecer operações no próprio sistema dedutivo para definir os conectivos verofuncionais da lógica clássica.

Uma aplicação contínua f entre espaços de fecho dedutivo (S_1, CL_1) e (S_2, CL_2) preserva a noção de dedução, tendo em vista que se f for contínua e tivermos $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash_1 \psi$, então $\{f(\varphi_1), ..., f(\varphi_n)\} \vdash_2 f(\psi)$. Tal definição é equivalente à definição topológica usual, que utiliza a noção de abertos para caracterizar as aplicações contínuas - ver apêndice B.

Façamos uma construção imagética do significado da continuidade de uma função f entre espaços de fecho dedutivo:

Notemos que se $A \vdash_{S_1} \psi$, então $f(A) \vdash_{S_2} f(\psi)$.

Dado S^* um conjunto qualquer e T um de seus subconjuntos, não vazio, podemos



definir o operador CL_T, de domínio e contradomínio $\wp(S^*)$, da seguinte forma:

$$CL_T(X) = \begin{cases} T & \text{se } X \subseteq T \\ S^* & \text{se } X \nsubseteq T \end{cases}$$

O conjunto T é denominado de valores designados e (S^*, CL_T) um espaço de fecho dedutivo, no qual os valores designados funcionam como o "verdadeiro" da lógica clássica, e o operador CL_T associa valores designados a valores designados. Além disso, uma função $f : (S, CL) \to (S^*, CL_T)$ é chamada de *valoração* para S. Destaquemos alguns resultados importantes (MARTIN; POLLARD, 1996).

Teorema 4.4.1. *Seja V uma valoração para S.*

A valoração é contínua se e somente se para todo subconjunto X de S, caso $V(X) \subseteq T$, então $V(CL(X)) \subseteq T$.

Em uma valoração contínua V, a aplicação associa um valor designado a cada membro de $CL(A)$ sempre que associa valores designados aos membros de A, preservando valores de verdade designados em relação ao operador de fecho dedutivo. Também, os valores dos teoremas lógicos ($CL(\emptyset)$) por V são elementos designados (valores em T) e $V^{-1}(T)$ é sempre um conjunto fechado de (S, CL).

Definição 4.4.1. *Uma valoração V é* normal *se e somente se for contínua e $V(S)$ não for um subconjunto de T.*

Portanto, valorações normais são aquelas que preservam, em relação ao operador de fecho dedutivo, valores de verdade designados e que não trivializam a atribuição de valores de verdade designados aos elementos de S.

Sabemos também que se V for valoração normal e $X \subseteq S$ tal que $V(X)$ é subconjunto de T (V retorna valores designados para todos os elementos de X), então X é consistente. Se V (normal) atribui valores designados a todos os elementos de Γ, então V atribui valores não designados a todas as sentenças que são incompatíveis com Γ; portanto, se x for um elemento contraditório de S, então $V(x) \notin T$.

Se V for uma valoração normal, ela atribui valores não designados a toda sentença contraditória. Além disso, se V for uma valoração contínua que atribui valor não designado a pelo menos uma sentença, ela também irá atribuir valores não designados a toda sentença contraditória. Destas observações resulta que:

Teorema 4.4.2. *Seja V uma valoração para S. V é uma valoração normal se e somente se $V^{-1}(T)$ for fechado e consistente.*

Definição 4.4.2. *Sejam $S^* = \{\top, \bot\}$, $T = \{\top\}$ e (S, CL) um espaço de fecho dedutivo.*

A aplicação $V : S \longrightarrow S^*$ é chamada de bivaloração.

Se V for uma bivaloração e $CL(\emptyset) \neq S$, então $V^{-1}(T) = CL(\emptyset)$. Portanto, V é normal e $V(x) = \top$ se e somente se x for um teorema lógico. Além disso, se $x \notin CL(\emptyset)$, então $V(x) = \bot = V(\neg x)$, ou seja, a bivaloração V não lida classicamente com a negação; logo, o fato da bivaloração ser normal nos garante apenas que $V^{-1}(T) = CL(\emptyset)$, o que é um resultado relativamete fraco, já que tal valoração só retorna verdadeiro para os teoremas lógicos.

Definição 4.4.3. *Uma valoração V é* correta *se e somente se $V^{-1}(T)$ for consistente maximal.*

Teorema 4.4.3. *Toda valoração correta é normal.*

Esses resultados são importantes, pois podemos agora definir, internamente aos sistemas de fecho dedutivo, os operadores lógicos que precisamos.

4.4.1.1 Valorações em Espaços Dedutivos

Definição 4.4.4. *Seja $\neg : S \longrightarrow S$ uma aplicação unária. A aplicação $\neg$ é a negação clássica em S se e somente se forem satisfeitas:*

1) $\{x, \neg x\}$ for denso.

2) $CL(X \cup \{x\}) \cap CL(X \cup \{\neg x\}) \subseteq CL(X)$, para todo $x \in S$ e $X \subseteq S$.

Teorema 4.4.4. *Se $\neg$ for a negação clássica em S e V uma valoração correta, então para todo $x \in S$, $V(\neg x) \in T$ se e somente se $V(x) \notin T$.*

Do teorema anterior segue que um modo natural de definir que α é consequência de Γ é garantir que não há valoração correta V para S tal que $V(\Gamma) \subseteq T$ e $V(\alpha) \notin T$.

Teorema 4.4.5. *Seja (S, CL) um espaço de fecho dedutivo finitário e $\neg$ a negação clássica em S.*

Se $x \in S$ e $X \subseteq S$, pode-se afirmar que x é consequência de X se e somente se $x \in CL(X)$.

Definição 4.4.5. *Seja* $\wedge : S \times S \longrightarrow S$ *uma aplicação binária. A aplicação* $\wedge$ *é a conjunção clássica em* S *se e somente se para todos os elementos* x *e* y *de* S*, for satisfeito:*

$$CL(\{x, y\}) = CL(\{x \wedge y\})$$

Teorema 4.4.6. *Sejam* $\wedge$ *a conjunção clássica em* S *e* V *uma valoração contínua para* S*. Para todos os elementos* x *e* y *de* S*, se* $V(x \wedge y) \in T$*, então* $V(x)$ *e* $V(y)$ *são elementos de* T*.*

Definição 4.4.6. *Seja* $\vee : S \times S \longrightarrow S$ *uma aplicação binária. A aplicação* $\vee$ *é a disjunção clássica em* S *se e somente se para todo* $X \subseteq S$ *e todos elementos* x *e* y *de* S*, for satisfeito:*

$$CL(X \cup \{x \vee y\}) = CL(X \cup \{x\}) \cap CL(X \cup \{y\})$$

Teorema 4.4.7. *Se* $\vee$ *for a disjunção clássica em* S *e* V *uma valoração correta para* S*, então para cada* x *e* y *elementos de* S*, pode-se afirmar que* $V(x \vee y) \in T$ *se e somente se pelo menos um dos elementos* $V(x)$ *ou* $V(y)$ *pertencer a* T*.*

Definição 4.4.7. *Seja* $\supset: S \times S \longrightarrow S$ *uma aplicação binária. A aplicação* $\supset$ *é a implicação positiva em* S *se, para todo* $X \subseteq S$ *e* x*,* y *elementos de* S*, for satisfeito:*

$$(x \supset y) \in CL(X) \Leftrightarrow y \in CL(X \cup \{x\})$$

Teorema 4.4.8. *Se* $\supset$ *é a implicação positiva em* S *e* V *uma valoração correta para* S*, então para cada* x *e* y *elementos de* S *pode-se afirmar que* $V(x \supset y) \in T$ *se e somente se* $V(x) \notin T$ *ou* $V(y) \in T$*.*

O teorema anterior e 4.4.4 nos permite concluir que em um espaço de fecho dedutivo com a negação clássica e a implicação positiva, a lei de Peirce é teorema lógico[14].

Do que foi exposto até aqui, podemos concluir que se (S, CL) for um espaço de fecho dedutivo finitário e V uma valoração correta para S, então para a negação clássica, conjunção, disjunção e implicação positiva, são válidos:

A) $V(\neg x) \in T$ se e somente se $V(x) \notin T$.

B) $V(x \wedge y) \in T$ se e somente se $V(x)$ e $V(y)$ são elementos de T.

C) $V(x \vee y) \in T$ se e somente se $V(x)$ ou $V(y)$ é um elemento de T.

D) $V(x \supset y) \in T$ se e somente se $V(x) \notin T$ ou $V(y) \in T$.

E) $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\alpha \in CL(\Gamma)$.

[14] Lei de Peirce: $((\varphi \supset \psi) \supset \varphi) \supset \varphi$. É necessária a negação clássica para ser válida a lei de Peirce, já que há uma correlação entre ela e a equivalência entre $\neg\neg\varphi$ e φ; na lógica intuicionista, por exemplo, se acrescentarmos a Lei de Peirce como axioma, demonstra-se que a negação intuicionista inserida pelos seus axiomas se trivializa (na negação clássica), sendo posssível mostrar a equivalência anteriormente citada - ver capítulo 9 de (MARTIN; POLLARD, 1996)

Se S for a lógica clássica proposicional, esses resultados nos dão um vislumbre de como as bivalorações corretas podem ser usadas como estruturas semânticas para a lógica clássica. É possível formalizar tal demonstração, como encontrado no capítulo 8 de (MARTIN; POLLARD, 1996). Para tal demonstração seria necessário um leque de ferramentas que extrapolam meu presente interesse. Todavia, podemos elaborar uma estrutura semântica para lógicas modais proposicionais por meio da noção de *modelos*.

4.4.1.2 Bases e Modelos

Sejam $B \subseteq S$ e $W \subseteq \wp(S)$.

Definição 4.4.8. *O conjunto B é* reduzido de W *se e somente se $B = \bigcap W$. Alternativamente, diz-se que W reduz B.*

Se o conjunto B for reduzido de W, todos os elementos de B pertencem a todos os elementos de W, ou seja, para todo $X \in W$, tem-se que $B \subseteq X$. Sendo assim, se existe algum elemento $\alpha \in S$ tal que $\alpha \in X$, para todo $X \in W$, então $\alpha \in B$.

Definição 4.4.9. *Seja $Z \subseteq \wp(S)$. Se para todo $X \in Z$ existe $W' \subseteq W$ tal que X seja reduzido de W', então diremos que Z é* gerado *por W, e denotaremos tal relação por $Z \Lleftarrow W$.*

Para quaisquer dois elementos de $\wp(S)$, definamos $\Lleftarrow$ a relação geração, *como descrita anteriormente.*

A relação $\Lleftarrow$ é reflexiva, transitiva, mas não simétrica, portanto não é uma relação de equivalência. Se C for o conjunto de todos os fechados de (S, CL), espaço de fecho dedutivo, então $C - \{S\}$ é o conjunto de todos os conjuntos fechados consistentes de S, já que S é o único fechado tal que $CL(S) = S$ (inconsistente).

Definição 4.4.10. *Seja $\beta \subseteq \wp(S)$. Então β é uma* base fechada *para S se e somente se forem satisfeitas duas condições:*

i) $\beta \subseteq C - \{S\}$

ii) $C - \{S\} \Lleftarrow \beta$

Os elementos de β são chamados de conjuntos fechados básicos.

Da definição de uma base fechada β, qualquer fechado consistente pode ser gerado por β, i.e., toda teoria pode ser descrita como a intersecção de um subconjunto de β. Além disso, é interessante notarmos o paralelo entre as bases fechadas para um espaço de fecho dedutivo (cujos elementos básicos são consistentes) e a base fechada para um espaço topológico qualquer, devido ao operador de fecho dedutivo ser quase-topológico - ver seção 4.2.

Sabemos que todo espaço de fecho dedutivo tem pelo menos uma base fechada e que se β for uma dessas bases, então $C \Lleftarrow \beta$ (ver (MARTIN; POLLARD, 1996)). Um conjunto $B \subseteq S$ é redutível se e somente se $\{B\} \Lleftarrow C - \{B, S\}$; todo redutível é fechado e consistente e, além disso, para toda base β tem-se que $\{B\} \Lleftarrow \beta - \{B\}$.

Definição 4.4.11. *Uma base fechada β é* minimal *se e somente se não existir $\mu \subsetneq \beta$ tal que μ seja uma base fechada para (S, CL).*

Sobre as bases minimais conhecemos três importantes resultados: 1) β é minimal se e somente se não contém nenhuma outra base própria; 2) toda base minimal é subconjunto de toda base fechada; 3) todo espaço de fecho dedutivo tem, no máximo, uma base minimal.

Definição 4.4.12. *Diz-se que um conjunto fechado básico B* satisfaz*, ou é um* modelo*, para cada um de seus membros ou subconjuntos.*

Proposição 3. *Um subconjunto qualquer de S é satisfeito, no sentido da definição anterior, se e somente se for consistente.*

Definição 4.4.13. *Seja A um subconjunto de S, em que β é uma base fechada do espaço dedutivo (S, CL). Define-se o conjunto de* modelos *de A (ou* conjunto verdade*) da seguinte forma:*

$$MOD(A) = \{B \in \beta \mid A \subseteq B\}$$

Os modelos de A são todos os fechados básicos que contêm A.

Sobre os conjuntos de modelos de um subconjunto X de S, tem-se que:

$$MOD(X) = MOD(CL(X)) \text{ e } CL(X) = \cap MOD(X)$$

Proposição 4. *Para qualquer espaço de fecho dedutivo (S, CL) de base β, o fecho dedutivo de $\emptyset$ é igual à intersecção de todos os elementos de β.*

Na definição de espaço de fecho dedutivo, para que a teoria se adapte a qualquer sistema dedutivo, assumimos os axiomas de Kuratowski que não permitem, por exemplo, inferir que $CL(\emptyset) = \emptyset$, como ocorre em um espaço topológico em relação ao operador de fecho (topológico). Porém, do resultado anterior, vemos que se β for uma base fechada para (S, CL), então $\emptyset$ é fechado se e somente se a intersecção de todos os conjuntos fechados básicos de β for vazia. Nesses casos, o sistema associado à linguagem não possui teoremas lógicos[15].

Podemos agora, com esse aparato, inserir uma noção semântica na teoria da seguinte forma:

[15] Lógica K_3 de Kleene, por exemplo.

Definição 4.4.14. *Dois subconjuntos X e Y de um espaço de fecho dedutivo são* equivalentes *se e somente se $CL(X) = CL(Y)$.*

Definição 4.4.15. *Sejam A um subconjunto de um espaço de fecho dedutivo (S, CL) e x um elemento de S. Define-se que A* implica *o ponto x (ou que x é consequência de A), cuja notação é $A \models x$, caso $MOD(A) \subseteq MOD(\{x\})$.*

Caso $\emptyset \models x$ diremos que x é válida*.*

Com a definição de implicação apresentada, introduzimos na teoria de espaços de fecho dedutivo uma noção semântica de consequência lógica. Esta noção é construída por intermédio do conceito de *modelo* que, como vimos, é por sua vez definido por meio das bases fechadas para o espaço de fecho dedutivo. Como os elementos de uma base fechada são, em última instância, determinados pelo operador de fecho dedutivo (pois são construídos com os fechados consistentes), esta noção semântica está intrinsicamente relacionada com a noção de dedução $\vdash$ do sistema lógico.

Proposição 5. *Sejam $A \subseteq S$ e $x \in S$. $A \models x$ se e somente se $x \in CL(A)$.*

Uma consequência trivial da proposição é que $\emptyset \models x$ se e somente se $x \in CL(\emptyset)$, como desejado.

Definição 4.4.16. *Uma* base de Henkin *é uma base fechada cujos elementos são todos consistentes maximais.*

Todos os espaços de fecho dedutivo têm, no máximo, uma base Henkin, formada por todos os consistentes e maximais do espaço de fecho. Portanto, se um espaço de fecho dedutivo tem base Henkin, infere-se que todo subconjunto consistente de S está contido em um consistente maximal, logo, tal espaço de fecho dedutivo satisfaz o teorema de Lindenbaum[16].

4.4.1.3 Semântica para Sistemas Modais

Seja (S, CL) um espaço de fecho dedutivo em que S é o conjunto de fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$ contendo um operador $\Box$, tal que $\Box : S \longrightarrow S$ associa, a cada $\alpha \in S$, a fórmula $\Box\alpha$. Dado $A \subseteq S$ subconjunto, a notação $\Box A$ será usada no lugar do conjunto $\{\Box\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Definição 4.4.17. *O operador $\Box$ é dito* operador modal *caso, para todo A subconjunto de S, $\Box CL(A) \subseteq CL(\Box A)$.*

[16] Todo consistente pode ser estendido a um consistente maximal.

De acordo com a definição apresentada, podemos concluir que se (S, CL) for um espaço de fecho dedutivo com um operador modal $\Box$, será verificada a seguinte relação de dedutibilidade: se $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$ então $\{\Box\varphi_1, ..., \Box\varphi_n\} \vdash \Box\varphi$. Além disso, segue da definição de $\Box$ que o operador modal é uma função contínua - notar a relação com a regra M da axiomática alternativa para **S4**, ver subseção 2.2.1.

Apresentarei como utilizar a noção de *modelos* e de *satisfatibilidade* em espaços de fecho dedutivo para construir uma semântica para a lógica modal proposicional, em especial sistemas normais. As demonstrações para os resultados sobre espaços de fecho podem ser encontrados em (MARTIN; POLLARD, 1996).

Definição 4.4.18. *Seja $\alpha \in S$. A fórmula α é modal se e somente se α pertence ao conjunto imagem do operador modal $\Box$.*

No restante do capítulo, consideremos $\Box$ um operador modal de (S, CL).

Proposição 6. *Sempre é válido que $\Box CL(\emptyset) \subseteq CL(\emptyset)$.*

Observações:

A) Segue do teorema anterior que se $\vdash \alpha$, então $\vdash \Box\alpha$, i.e., a regra de necessitação é válida em (S, CL).

B) Seja $A \subseteq S$ inconsistente. Então $\Box S = \Box CL(A) \subseteq CL(\Box A) \Rightarrow$
$CL(\Box A) = S$. Portanto, $\Box A$ é inconsistente.

C) Sejam $\Box$ e $\Diamond$ operadores modais sobre S. Segue da proposição 5 que $\Box \circ \Diamond$ é um operador modal sobre S.

Definição 4.4.19. *Denota-se por $ACC(X)$ o conjunto:*

$$MOD(\Box^{-1}X) = MOD(\{\alpha \mid \Box\alpha \in X\})$$

Definamos uma relação de acessibilidade *em (S, CL): se um conjunto Y pertence a $ACC(X)$, diz-se que Y é* acessível *por X.*

Dado um subconjunto X de S, o conjunto $ACC(X)$ contém todos os fechados básicos da base β que contêm $\{\alpha \mid \Box\alpha \in X\}$. Intuitivamente, cada conjunto fechado básico, por ser consistente, representa uma configuração mínima de fórmulas de $\mathcal{L}$ co-possíveis. Desta forma, para a análise do status semântico de uma fórmula envolvendo o operador modal, é necessário analisar todas as configurações co-possíveis. Podemos pensar que os elementos de $ACC(X)$ são mundos possíveis e que a *relação de acessibilidade* descrita pretende simular, internamente à estrutura da base β de (S, CL), a relação de acessibilidade entre os mundos possíveis da semântica de Kripke.

Teorema 4.4.9. *Se X for um subconjunto fechado de S, então $\Box^{-1}X$ também é fechado.*

Teorema 4.4.10. *Se X for um subconjunto fechado de S, então $\cap ACC(X) = \Box^{-1}X$.*

Desse fato segue que se X for fechado, a intersecção de todos os fechados básicos de β que contêm $\{\alpha \mid \Box\alpha \in X\}$ resulta no próprio conjunto $\{\alpha \mid \Box\alpha \in X\}$. Se B for fechado (mundo possível), então $\Box\alpha$ é verdadeira em B caso α seja verdadeira em todo mundo possível acessível por B.

Definição 4.4.20. *A relação de acessibilidade definida por $ACC(X)$ pode ser classificada como:*

I) Reflexiva*: se para todo conjunto básico B for o caso que $B \in ACC(B)$.*

II) Transitiva*: se para todo conjunto básico B e todo $D \in ACC(B)$ for o caso que $ACC(D) \subseteq ACC(B)$.*

III) Euclidiana*: se para todo conjunto básico B e todo $D \in ACC(B)$ for o caso que $ACC(B) \subseteq ACC(D)$.*

Teorema 4.4.11. *A relação de acessibilidade é reflexiva se e somente se para toda $\alpha \in S$, $\{\Box\alpha\} \models \alpha$.*

Segue desse teorema que se a relação de acessibilidade for reflexiva, será válido o princípio modal T: $\models \Box\varphi \supset \varphi$.

Teorema 4.4.12. *A relação de acessibilidade é transitiva se e somente se, para todo conjunto básico B e toda fórmula $\alpha \in S$, se $\Box\alpha \in B$ então $\Box\alpha \in \cap ACC(B)$.*

Nos casos em que a relação de acessibilidade é reflexiva e transitiva, então $\Box\alpha$ é verdadeira em um mundo possível B se e somente se $\Box\alpha$ for verdadeira em todo mundo acessível por B. Notemos que a ida é garantida pelo teorema anterior e a volta pelo teorema 4.4.11.

Teorema 4.4.13. *A relação de acessibilidade é transitiva se e somente se, para toda $\alpha \in S$, $\{\Box\alpha\} \models \Box\Box\alpha$.*

Segue desse teorema que se a relação de acessibilidade for transitiva, será válido o princípio modal 4: $\models \Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$.

Como desejado, a relação de acessibilidade, definida por meio da noção de modelos em espaços de fecho dedutivo com um operador modal, se comporta de maneira similar à relação de acessibilidade da semântica de Kripke, de maneira que os axiomas modais T e 4 são satisteitos pelos mesmos "tipos" de relações. Diferentemente da acessibilidade nas semânticas relacionais, na semântica de espaços de fecho tal relação é determinada internamente à estrutura do espaço (S, CL).

Teorema 4.4.14. *A relação de acessibilidade é euclidiana se e somente se, para todo conjunto básico B e toda fórmula $\alpha \in S$, se $\Box\alpha \in \cup ACC(B)$ então $\Box\alpha \in B$.*

Se a relação de acessibilidade for reflexiva e euclidiana, então $\Box\alpha$ é verdadeira em um mundo possível B se e somente se for verdadeira em algum mundo possível acessível por B. Notemos que a volta é garantida pelo teorema anterior, enquanto a ida pelo teorema 4.4.11.

Teorema 4.4.15. *Seja $\neg$ a negação exclusiva (negação clássica). A relação de acessibilidade é euclidiana se e somente se, para toda $\alpha \in S$, for o caso $\{\neg\Box\alpha\} \models \Box\neg\Box\alpha$.*

Segue desse teorema que se a relação de acessibilidade for euclidiana, será válido o princípio modal E: $\models \Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$, basta tomarmos $\varphi = \neg\alpha$ e $\Diamond = \neg\Box\neg$.

Do que foi exposto, vimos como construir semânticas para sistemas modais normais proposicionais como **T**, **S4** e **S5** por meio da teoria dos espaços de fecho dedutivo. Essas semânticas herdam algumas das formas de representar noções geométricas primitivas do espaço, mas agora utilizadas para construir quadros pictóricos que encapsulam conceitos lógicos, conforme delineamos em seções anteriores, devido o fato de que o operador de fecho dedutivo ser quase-topológico. Além disso, a noção de acessibilidade não exige um *locus* indeterminado onde se sustenta tal relação, como na semântica de Kripke, já que essa acessibilidade é determinada pela base fechada β do espaço de fecho dedutivo que é, em última instância, caracterizado pelo operador de fecho dedutivo CL, tradutor da noção de dedução $\vdash$ do sistema lógico, o que contorna a crítica relativa ao "éter modal".

Dos teoremas analisados nessa seção, identifica-se que, em espaços de fecho dedutivo com um operador modal nos quais a base β gera uma relação de acessibilidade reflexiva e transitiva no conjunto de modelos, noção essa que é suporte para noção da consequência lógica $\models$, os princípios necessários para a caracterização dos sistemas modais **S4** ou **S5** são válidos (na estrutura semântica). Dessa forma, somos capazes de exibir uma estrutura que é suporte para um sistema modal normal que satisfaz, como discutido anteriormente, as pretensas condições exigidas para a noção de necessidade metafísica.

4.4.2 Semântica de Vizinhanças

Uma semântica de vizinhança é uma generalização de semânticas relacionais em que não é mais exigido uma relação binária entre os "pontos", ou mundos, da estrutura lógica (*frame*), mas apenas as "vizinhanças" de um determinado ponto. Tal semântica foi desenvolvida, paralelamente, por Danna Scott (SCOTT, 1970) e Richard Montague (MONTAGUE, 1970). Tal desenvolvimento foi uma tentativa de aumentar o poder de análise sobre estruturas relacionais, a partir dos sistemas de vizinhança, permitindo inclusive o tratamento de sistemas lógicos mais fracos do que o sistema **K**, portanto não-normais. Intuitivamente, o nome "sistema de vizinhanças" tem forte apelo figurativo, pois retoma a imagem das vizinhanças (abertas) de um ponto em um espaço topológico. Como vimos, abertos básicos formam a "estrutura fundamental" dos espaços topológicos, espaços matemáticos que abstraem as noções geométricas mais elementares; dessa maneira, parte do apelo intuitivo-geométrico que busco em estruturas semânticas para a lógica modal pode ser encontrado nas semânticas de vizinhança.

Definição 4.4.21. *Seja Γ a coleção de todos os conjuntos consistentes e maximais da lógica proposicional clássica construídos sobre a linguagem L.*

Definição 4.4.22. *Seja A um conjunto não-vazio e $N : A \to \wp(\wp(A))$ uma aplicação. Tal aplicação será denominada **aplicação vizinhança**. Ao par (A, N) denominaremos **frame de vizinhanças**[17].*

Definição 4.4.23. *Seja $\mathcal{F} = (\Gamma, N)$ um frame de vizinhanças e L_P o conjunto de variáveis proposicionais de L.*

*Denominaremos de **valoração-total** a uma aplicação da forma $V : L_P \to \wp(\Gamma)$.*

*Denominaremos de **modelo** a tripla $\mathcal{M} = (\Gamma, N, V)$.*

Definição 4.4.24. *Como a coleção Γ é formada por conjuntos consistentes e maximais de fórmulas de L, para cada modelo $\mathcal{M}$ constrói-se, por indução na complexidade das fórmulas, uma aplicação **valoração-modelo** $V_{\mathcal{M}} : L \to \wp(\Gamma)$, que satisfaz:*

i) $V_{\mathcal{M}}(p) = V(p)$ *para* $p \in L_p$;

ii) $V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = \Gamma - V_{\mathcal{M}}(\varphi)$;

iii) $V_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = V_{\mathcal{M}}(\varphi) \cap V_{\mathcal{M}}(\psi)$.

Se Γ for a coleção de conjuntos consistentes e maximais de $For(L)$, então cada aplicação vizinhança N determina a coleção de vizinhanças de determinado $\gamma \in \Gamma$; esta aplicação determina exclusivamente um único frame $\mathcal{F}$. Fixado um frame $\mathcal{F}$ e uma valoração-total V, determina-se um único modelo $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{F}$ e V.

Com isto, podemos definir, para $\mathcal{L}$ linguagem modal proposicional, extensão de L com o acréscimo do operador modal (primitivo) $\Box$, uma extensão para a aplicação $V_{\mathcal{M}}$, aplicação $V'_{\mathcal{M}} : \mathcal{L} \to \wp(\Gamma)$, por indução na complexidade das fórmulas, da seguinte forma:

Definição 4.4.25. *i)* $V'_{\mathcal{M}}(p) = V_{\mathcal{M}}(p)$ *para* $p \in L_p$

[17] Esta definição geral da aplicação vizinhança permite a construção de semânticas para sistemas modais não-normais.

ii) $V'_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = \Gamma - V'_{\mathcal{M}}(\varphi)$

iii) $V'_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = V'_{\mathcal{M}}(\varphi) \cap V'_{\mathcal{M}}(\psi)$

iv) $V'_{\mathcal{M}}(\Box\varphi) = \{\gamma \in \Gamma \mid \exists U \in N(\gamma) \wedge U \subset V'_{\mathcal{M}}(\varphi)\}$

Definição 4.4.26. *Construamos uma noção de satisfação $\models_{\mathcal{M}}$ para as fórmulas de $\mathcal{L}$, para cada modelo $\mathcal{M}$ e cada $\gamma \in \Gamma$, por indução na complexidade das fórmulas, de acordo com os seguintes critérios:*

1) $\gamma \models_{\mathcal{M}} p$ *se e somente se* $\gamma \in V'_{\mathcal{M}}(p)$

2) $\gamma \models_{\mathcal{M}} \neg\varphi$ *se e somente se* $\gamma \not\models_{\mathcal{M}} \varphi$

3) $\gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$ *se e somente se* $\gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi$ *e* $\gamma \models_{\mathcal{M}} \psi$

4) $\gamma \models_{\mathcal{M}} \Box\varphi$ *se e somente se* $\gamma \in V'_{\mathcal{M}}(\Box\varphi)$

Se $\gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$*, denotaremos* $\models_{\mathcal{M}} \varphi$*.*

Vemos assim que a coleção de consistentes e maximais da linguagem clássica L induz, dado um frame $\mathcal{F}$, uma semântica para a linguagem modal proposicional, obtida pela extensão de L.

Definição 4.4.27. *Dado um modelo $\mathcal{M}$ e a satisfação $\models_{\mathcal{M}}$ por ele induzida, construímos uma interpretação $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}}$ para todas as fórmulas $\varphi \in \mathcal{L}$ da seguinte forma:*

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi\}$$

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ será satisfatível no modelo $\mathcal{M}$ se existir γ tal que $\gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi$. Uma fórmula φ será satisfatível se existir $\mathcal{M}$ tal que φ é satisfatível em $\mathcal{M}$. Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ será válida em $\mathcal{M}$ se para todo γ for o caso que $\gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi$.

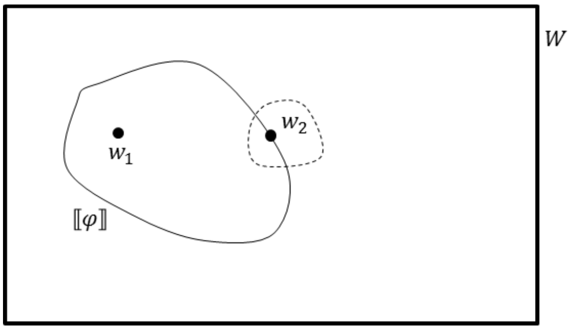
Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ será válida em um frame em $\mathcal{F}$ se existir um modelo $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{F}$ no qual φ é válida. Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ será válida em uma classe de frames de vizinhanças ser for válida em todo modelo construído sobre um frame da classe.

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ será válida em uma semântica de vizinhanças se for válida em toda classe de frames de vizinhanças.

O conjunto $N(\gamma)$ representa todas as vizinhanças de γ no frame $\mathcal{F}$, de maneira que podemos fazer um paralelo entre essas estruturas e as estruturas topológicas de um sistema de vizinhanças. Todavia, da maneira como definimos vizinhanças topológicas, restringimos o uso dessa noção a subconjuntos específicos do espaço: os abertos. Na semântica de vizinhanças apresentada, não há qualquer imposição sobre a natureza dessas vizinhanças, pois não há restrições na construção de tais estruturas, tendo em vista a definição da aplicação N. Em relação às fórmulas que não contêm operadores modais, seu tratamento na semântica de vizinhanças opera similarmente àquele da lógica clássica, já que a determinação da satisfatibilidade dessas fórmulas depende unicamente dos valores de verdade atribuídos às sentenças atômicas da linguagem por meio de uma valoração booleana.

Por outro lado, o valor de verdade das fórmulas que envolvem os operadores modais, em um ponto γ, como $\Box\alpha$, é determinado pelo que ocorre com a fórmula α nos elementos de $N(\gamma)$, i.e., em vizinhanças de γ. Por 4) temos que $\gamma \models_{\mathcal{M}} \Box\alpha$ se e somente se existe uma vizinhança de γ em que todos seus pontos satisfazem α.

Fazendo paralelos com a linguagem topológica, todo ponto γ de qualquer aberto em um espaço topológico é elemento de outro aberto totalmente contido no aberto original. Além disso, os pontos de fronteira de um conjunto A são tais que todo aberto que o contém intersecta tanto o conjunto A quanto seu complementar.



No exemplo da imagem, consideremos W o conjunto de todos os consistentes maximais e w seus elementos: $w_1 \models_{\mathcal{M}} \Box\varphi$ já que $[\![\varphi]\!]$ é uma vizinhança de w_1, assim como $w_2 \models_{\mathcal{M}} \Diamond\varphi$, já que qualquer vizinhança de w_2 intersecta $[\![\varphi]\!]$.

Notemos que estamos recuperando na afiguração anterior a noção "topológica" de vizinhança (abertos), mas da definição da aplicação vizinhança, em modelos de vizinhanças pode ocorrer que um ponto w nem pertença a nenhuma de suas vizinhanças. De uma maneira geral, pela definição 4.2.5, adotando a definição clássica de vizinhanças topológicas, para que $\Box\alpha$ seja satisfeita em w bastaria que uma das vizinhanças de w estivesse contida em $[\![\varphi]\!]$.

4.4.2.1 Contra-exemplo para Sistemas Normais

No modelo de uma semântica de vizinhanças $\mathcal{M}$, não existe menção a nenhum tipo de relação de acessibilidade entre os pontos de W. Nessa perspectiva, a crítica de Forster sobre o *éter modal* (ver capítulo 2) parece ser solucionada; mas tal impressão é apenas aparente, na medida em que há um deslocamento da questão sobre 'Onde se dá tal relação de acessibilidade?' para o problema de como se determinar tais vizinhanças, já que não existe uma noção articuladora, de caráter construtivo e "natural", para a aplicação vizinhança N, como aquela que é subjacente à noção topológica de vizinhanças.

Um exemplo apresentado por Eric Pacuit, no artigo (PACUIT, 2014), evidencia esse problema em relação à não aplicabilidade de qualquer semântica de vizinhanças para sistemas modais normais.

Sejam $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ um conjunto de pontos, L' uma linguagem proposicional clássica, em que o conjunto das fórmulas atômicas é $\{p, q\}$, e $\mathcal{L}'$ a linguagem proposicional modal estendida de L'.

Definamos a aplicação vizinhança N da seguinte forma:

$N(w_1) = \{\{w_2\}, \{w_1, w_3\}\}$

$N(w_2) = \{\{w_1\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}\}$

$N(w_3) = \{\emptyset, \{w_1\}, \{w_2, w_3\}\}$

Seja $\mathcal{F} = (W, N)$ nosso *frame de vizinhanças.*

Definamos a valoração-total V_T para o frame $\mathcal{F}$ da seguinte forma:

$V_T(p) = \{w_1, w_2\}$

$V_T(q) = \{w_2, w_3\}$

Consideremos o modelo de vizinhanças $\mathcal{M} = (W, N, V)$, para V valoração-modelo, uma valoração booleana obtida por V_T.

Afirmação: No modelo $\mathcal{M}$, $w_1 \models_{\mathcal{M}} \Box(p \wedge q)$, embora $w_1 \not\models_{\mathcal{M}} \Box p$.

Justificativa: No modelo $\mathcal{M}$, considerando as sentenças atômicas, temos que $[\![p]\!]_{\mathcal{M}} = V(p)$, assim como $[\![q]\!]_{\mathcal{M}} = V(q)$; sendo assim, $[\![p \wedge q]\!]_{\mathcal{M}} = \{w_2\} \in N(w_1)$, portanto, $w_1 \models_{\mathcal{M}} \Box(p \wedge q)$.

Por outro lado, $[\![p]\!]_{\mathcal{M}} \notin N(w_1)$, ou seja, $w_1 \not\models_{\mathcal{M}} \Box p$.

Afirmação: Em um modelo relacional (semântica de Kripke), se $p \wedge q$ é necessária em um mundo w, então p é necessária em W.

Justificativa: Suponhamos que em um modelo da semântica de Kripke, para qualquer sistema proposicional (i.e., um modelo baseado na classe de todos os frames), se $p \wedge q$ for necessária em um mundo w, então $p \wedge q$ é verdadeira em todo mundo acessível por w; disso segue que em todo mundo acessível por w, p é verdadeira, logo p será necessária em w.

É consequência das duas afirmações anteriores que a semântica de vizinhanças não é forte o suficiente para garantir que a estrutura oferecida seja suporte para a interpretação de um sistema modal normal (tendo em vista que o axioma K é válido na classe de todos os frames relacionais), devido a inexistência de restrições sobre a construção das vizinhanças. Podemos impor condições para fortalecer tal estrutura e possibilitar a representação de sistemas mais fortes; tais condições implicarão que as vizinhanças obtidas recuperarão o apelo geométrico-intuitivo pretendido.

4.5 Considerações Finais

Com relação à semântica de vizinhanças, vimos que as restrições impostas à aplicação vizinhança não são suficientes para garantir que as vizinhanças obtidas espelhem as propriedades geométricas pretendidas. Sabemos que todo sistema de vizinhanças de um ponto em um espaço topológico forma um *filtro*[18], porém nas condições dessa semântica, não podemos garantir essa propriedade para o sistema de vizinhanças obtido. Isso explica porque tal ferramenta é um poderosa arma no trato de sistemas modais mais fracos do que **K**.

Nessa direção, a semântica de vizinhanças - na forma trabalhada na literatura - não é uma estrutura apropriada para discutirmos sistemas modais que espelhem a noção de necessidade metafísica, considerando a hipótese de que certos sistemas modais normais são aqueles que melhor descrevem o contexto para tal discurso racional. Porém, parece-me proveitosa a tentativa de fortalecer as condições sobre o sistema de vizinhanças, de maneira a obtermos uma estrutura com os apelos intuitivos pretendidos: um sistema de *vizinhanças topológicas*.

Com relação à teoria dos espaços de fecho dedutivo, faremos as seguintes observações:

1. O apelo geométrico intuitivo fornecido pela estrutura de espaços de fecho dedutivo não traduz, de maneira completa, as noções geométricas primitivas que discutimos anteriormente. Apesar do poder expressivo da teoria de espaços de fecho dedutivo, estes ainda não são espaços topológicos.

2. De acordo com a teoria exposta, uma fórmula α é necessária em um "mundo possível" B se α for verdadeira em todos os mundos possíveis acessíveis por B. Aqui, a noção de satisfatibilidade depende da noção de modelo apresentada na teoria exposta sobre espaços de fecho dedutivo (sintática). Embora essa noção não seja a mesma da teoria

[18] Um filtro F é um subconjunto não vazio de um conjunto P parcialmente ordenado (por $\leq$) tal que: 1) para todos x, y de F existe outro elemento de F, digamos z, e $z \leq x$ assim como $z \leq y$; 2) Se $x \leq y$, para x em F e y em P, então y também é elemento de F.

dos modelos, ficamos circunscritos, pelo menos aparentemente, a um discurso que relaciona a necessidade de α ao fato de todos os "modelos" satisfazerem α, i.e., superficialmente temos a impressão de que não saímos do nível sintático - ver hipótese H 1.7.

3. Embora a teoria de espaços de fecho dedutivo explicite as relações internas de uma linguagem proposicional, ela parece, em um primeiro momento, dificultar a análise detalhada a respeito da natureza de alguns dos objetos necessários em uma linguagem de primeira ordem, a saber, os constituintes de seu domínio. Sob a perspectiva de uma análise ontológica-metafísica a respeito da natureza desses objetos, a construção de uma estrutura semântica para um sistema modal quantificado deveria evidenciá-los, ao invés de mascará-los.

Essas indagações sobre estruturas quase-geométricas parecem legitimar a busca por uma estrutura alternativa que possa ser uma semântica para a lógica modal, de maneira a garantir o apelo geométrico intuitivo defendido (uma semântica "geométrica" de fato), que explicite as características dos objetos constituintes do domínio da linguagem lógica e evite algumas da críticas dirigidas as semânticas relacionais.

5 Semântica Topológica para a Lógica Modal Proposicional

Segundo o que assumimos na hipótese H 1.6, o *mundo* (cosmos) é a totalidade dos fatos que o compõem e, de acordo com a hipotese H 1.7, a lógica modal propicia uma ferramenta imagética (heurística) para analisarmos formalmente (hipóteses H 1.1, H 1.2, H 1.3, H 1.4 e H 1.5) problemas metafísicos, a partir da configuração das totalidades de coisas possíveis, talvez distintas da atual. Porém, de acordo com a hipótese H 2.2, a "verdade" do mundo (de sua estrutura compreendida em sua totalidade) escapa à possibilidade de conhecimento pleno do homem; mas a prática filosófica, aliada a certos métodos de investigação, como delineado pela hipótese H 2.5, é capaz de iluminar nosso entendimento sobre a *estrutura do real*, nos limites do que pode ser conhecido, no que tange aos aspectos da intencionalidade do sujeito cognoscente, questão própria à metafísica e incapaz de ser resolvida por meios puramente científicos.

Estruturas topológicas serão utilizadas nesse trabalho para resgatar certas representações espaciais, de maneira que possamos utilizar noções espaciais intuitivas, de natureza geométrica-primitiva (topológica), a fim de encontrarmos uma similaridade entre o *lugar das representacões* e o *lugar lógico* para o discurso metafísico.

Apesar de podermos compreender a ideia de que um mundo *é* em sua totalidade dos fatos, essa ideia transcende à própria experiência do mundo que vivenciamos, por isso podemos apenas representar os elementos dessa totalidade intuível, mas não cognoscível em todas suas partes. Nossa razão e nossas experiências (como coletividade) são os mecanismos pelos quais poderíamos determinar a *forma* daquilo que é necessário ou possível, metafisicamente, logo são elas que nos guiam na investigação da *forma* da realidade e, a partir dessa forma, posicionarmos frente aos problemas metafísicos: um par dialético-metodológico - razão e experiência.

Se não somos capazes de afirmar o conhecimento "objetivo" e "particular" de *todas* as verdades necessárias (possíveis) metafisicamente, podemos distinguir a *forma* com que verdades metafísicas se apresentam/são cognoscíveis ao homem[1]. Essa forma está circunscrita não só por princípios "lógicos" (racionais), mas também por certos princípios da sensibilidade (algo como as formas puras de intuição kantianas). É esse aspecto que nos autoriza a reivindicar as estruturas topológicas como fornecedoras de um substrato

[1] Portanto, não a forma do objeto em-si (mundo), mas a percepção do seu efeito sobre nós (percepção atravessada pela intencionalidade, que marca o caráter subjetivo da percepção).

organizador para o espaço representacional que simula a *forma* com a qual vivenciamos o espaço físico - o "aquilo" elementar, comum às percepções, e que agrega as diferentes intenções, propiciando solo comum para o estabelecimento do diálogo racional - H 2.3.

A experiência (espaço físico) nos coloca imediatamente frente a seus fatos brutos, aos quais temos acesso por nossa estrutura sensorial e que codificamos por uma estrutura linguística/representacional (espaço de representação). A partir daí, a razão pode operar em um processo de abstração (espaço lógico), para que com isso possamos investigar os limites do que é metafisicamente possível e do que é necessário, e por consequência desvelar a estrutura do mundo, i.e., a *forma* como a realidade pode ser apreendida (empiria) e representada (razão) pelo homem. É nesse sentido que podemos "ver" cada mundo possível como uma totalidade consistente (classicamente, pois é pelos princípios e leis lógicas clássicas que apreendemos e representamos, nos limites racionais da experiência vivida, os fatos que experienciamos na vida cotidiana) e maximal (já que o mundo é a totalidade dos fatos que contém, e podemos compreender essa totalidade no sentido transcendente, portanto estamos idealizando essa totalidade "por fora"). Logo, é uma posição que defende a possibilidade da investigação metafísica, porém reconhece os limites aos quais essa investigação está subsumida, e que suas conclusões só podem ser assumidas mediante o entendimento das limitações de objetividade que possui - H 2.1.

Analisarei como estruturas topológicas se comportam como semânticas para a lógica modal proposicional e verificarei, dentre alguns sistemas da lógica modal, qual aquele que melhor capta, por certa perspectiva, tais noções geométricas primitivas que possuem. Tal sistema, pelo que foi exposto, é um forte candidato para traduzir formalmente as relações e princípios lógicos (formais) que envolvem as noções aléticas de necessidade e possibilidade - H 2.4.

5.1 Perspectiva Histórica

No artigo (MCKINSEY, 1941), McKinsey demonstrou que **S4** é completo em relação a estruturas topológicas[2] finitas. Já no artigo de 1944 (TARSKI; MCKINSEY, 1944), os autores demonstraram esse mesmo resultado para espaços topológicos quaisquer que satisfizessem a condição de E-espaço de Tarski; portanto, se o espaço topológico não fosse finito, ele precisaria satisfazer a essa condição para que a completude fosse válida.

5.1.1 Demonstrações

Antes de delinear as duas ideias de prova indicadas, precisamos retomar alguns conceitos particulares das definições adotadas por Tarski e Mckinsey para os espaços topológicos.

Para definir espaço topológico, adotou-se nesses artigos indicados o operador de fecho (topológico) que satisfaz condições distintas daquelas delineadas por Kuratowski, como apresentamos na definição 4.2.8. Enquanto para a definição de espaço topológico Tarski adotava a estrutura obtida pelo conjunto base mais o operador de fecho "restrito" (como definido a seguir), que ele indicava por *espaço topológico no sentido estrito* (que denominarei nesse trabalho de Tarski-espaço topológico), aquilo que definimos como espaço topológico ele indicava por *espaço topológico no sentido geral.*

Definição 5.1.1. *Um* Tarski-espaço topológico *é um conjunto base A mais um operador de fecho F (de $\wp(S)$ em $\wp(S)$) que satisfaz:*

i) Se $X \subseteq A$, então $X \subseteq F(X)$;

ii) Para todo $X \subseteq A$, tem-se $F(F(X)) = F(X)$;

iii) Para todos X e Y subconjuntos de A, tem se que $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$;

iv) $F(X) = X$ se $X \subseteq A$ possuir no máximo um elemento.

A diferença entre a utilização do operador de fecho de Kuratowski e o restrito de Tarski é que o segundo gera um espaço topológico no qual todo subconjunto unitário é fechado. Portanto, em todo Tarski-espaço topológico A, para todo elemento x, $A - \{x\}$ é um aberto do espaço; se A não for unitário, todas as vizinhanças de x intersectam A em um ponto distinto de x, desde que para nenhum $x \in A$ tenha-se $A - \{x\}$ fechado, ou seja, de acordo com a definição B.1.8 (Apêndice B), se A for um Tarski-espaço topológico no qual $A - \{x\}$ nunca é fechado, para qualquer $x \in A$, o espaço é *denso-em-si-mesmo.*

[2] Tanto McKinsey quanto Tarski, nessa época, usavam uma definição diferente da forma *standard* adotada atualmente para espaços topológicos; discutirei com mais detalhes essa questão.

Definição 5.1.2. *Um* E-espaço de Tarski *é um A Tarski-espaço topológico que satisfaz a seguinte condição:*

Para todo n natural e todo subconjunto $X \subseteq A$ aberto, existem abertos não vazios, disjuntos dois-a-dois, $U_1, \ldots, U_n$, tais que:

1) $U_1 \cup \ldots \cup U_n \neq X$ e $U_1 \cup \ldots \cup U_n \subset X$;

2) $F(X) - X \subseteq F(X - (U_1 \cup \ldots \cup U_n))$;

3) $X - (U_1 \cup \ldots \cup U_n) \subseteq F(U_1) \cap \ldots \cap F(U_n)$.

Teorema 5.1.1. *Todo Tarski-espaço topológico normal, denso-em-si-mesmo e com base enumerável é um* E-espaço de Tarski.

Tarski demonstra (não nesta linguagem) esse resultado em (TARSKI, 1956a). Sabe-se (ver (MUNKRES, 2002) ou (KELLEY, 1991)) que todo espaço topológico normal e com base enumerável é metrizável, Como todo *Tarski-espaço topológico* é espaço topológico, todo *E-espaço de Tarski* é metrizável; notemos que nem todo espaço métrico é um E-espaço (há espaços métricos cuja base não é enumerável). De acordo com a definição anterior, E-espaços possuem caracterísitcas topológicas refinadas: pode-se demonstrar que tais características espelham a noção usual de métrica dos espaços euclidianos (de quaisquer dimensão), i.e., os *E-espaços de Tarski* são espaços topológicos que simulam[3] localmente algumas das propriedades métricas-topológicas dos espaços euclidianos com a topologia induzida pela métrica euclidiana.

5.1.1.1 Demonstração Algébrica

No artigo de 1944, Tarski e McKinsey demonstram o resultado por meio de construções algébricas. Para isso, dada uma álgebra construída sobre um espaço topológico S (construção de Lindenbaum), ao acrescentarmos um novo operador (fecho ou interior)[4], de maneira a obtermos uma nova álgebra[5] (álgebra de fecho ou álgebra de interior, respectivamente), obtemos o seguinte resultado:

Se S for um espaço topológico qualquer, existe um Tarski-espaço topológico S_1 tal que a álgebra de fecho sobre S é isomórfica a uma subálgebra de fecho sobre S_1 (TARSKI; MCKINSEY, 1944).

O operador de fecho (ou interior) é tal que satisfaz exatamente as condições dos operadores $\Diamond$ (ou $\Box$) da lógica modal **S4**, i.e., há uma relação direta entre os princípios que governam o sistema **S4** e as álgebras de fecho ou interior. Desse resultado segue que

3 Tal simulação é mais fraca do que o homeomorfismo (local) entre as estruturas.
4 Os operadores algébricos mimetizam sobre os elementos da álgebra o comportamento dos operadores topológicos, assim como os operadores booleanos as operações conjuntistas.
5 Formalmente tal álgebra pode ser construída sobre uma álgebra de Boole com a adição dos operadores de fecho ou interior.

toda álgebra de fecho (mesmo sem ser construída sobre um espaço topológico) é isomórfica a uma subálgebra de uma álgebra de fecho construída sobre um espaço topológico, em que os elementos dessa álgebra são subconjuntos do espaço topológico, os operadores lógicos clássicos funcionam como suas interpretações conjuntistas em uma álgebra de Boole e o operador algébrico de fecho (interior) se comporta como o operador de fecho topológico (operador interior).

Para refinar esse resultado, os autores apresentam a definição de uma álgebra de fecho dissecável, cujas propriedades refletem, *mutatis mutandis*, as propriedades topológicas de E-espaços de Tarski. Com essa definição, pode-se por fim provar que *toda álgebra de fecho sobre um Tarski-espaço topológico normal, denso-em-si-mesmo e com base numerável é dissecável*, por exemplo a álgebra de fecho sobre espaços euclidianos, que é dissecável. Nos casos válidos para esse teorema, há um isomorfismo entre álgebras de fecho dissecáveis e a álgebra de fecho constituída sobre os Tarski-espaços topológicos que satisfazem as hipóteses do teorema.

5.1.1.2 Demonstração via Intuicionismo

A lógica intuicionista é um sistema heterodoxo cuja axiomatização, apesar de muito próxima à do cálculo sentencial clássico (ver (TARSKI, 1956a)), difere na definição implícita de sua negação - em certo sentido mais "fraca" que a negação clássica; com isso, certas leis lógicas aristotélicas, como o princípio da explosão, não são válidas no cálculo intuicionista, a saber, na lógica intuicionista não derivamos, a partir da contradição $p \wedge \neg p$, qualquer sentença da linguagem.

No artigo (TARSKI, 1956a), originalmente publicado em 1937, Tarski utilizou o método de matrizes para construir semânticas para o cálculo sentencial clássico e o intuicionista. Tal método (pode ser estendido para outros sistemas lógicos) corresponde em tomar a estrutura formada por um conjunto base W, um subconjunto destacado (unitário para representar a noção "verdadeiro" na lógica bivalorada), que corresponde ao subconjunto T de conjuntos de valores designados de um espaço de fecho dedutivo (ver capítulo 4), além de funções sobre os elementos (ou subconjuntos) de W - que representam as funções lógicas do sistema. Tarski então traduz as fórmulas lógicas para a linguagem matricial demonstrando que i) as fórmulas demonstráveis no cálculo sentencial clássico (fórmula lógica) são aquelas cujas traduções matriciais são satisfeitas por subconjuntos densos de um Tarski-espaço topológico e ii) as fórmulas (lógicas) do cálculo intuicionista são exatamente aquelas fórmulas matriciais cujas traduções são satisfeitas em todos os subconjuntos abertos de um E-espaço de tarski.

Gödel (GÖDEL, 1933) anunciou, e Tarski e McKinsey demonstraram em (TARSKI; MCKINSEY, 1948), que φ é demonstrável no cálculo intuicionista se sua tradução modal (tradução Gödel-Tarski) é demonstrável em **S4**. Essa tradução consiste em prefixar a toda subfórmula de φ o símbolo $\Box$, de forma que toda fórmula intuicionista é então reescrita como uma fórmula do cálculo modal proposicional, ou seja, mergulhamos a lógica intuicionista na lógica modal proposicional e as fórmulas demonstráveis do cálculo intuicionista são demonstráveis em **S4**.

O cálculo intuicionista é satisfeito pelos E-espaços de Tarski, como vimos através do método matricial; como a lógica intuicionista pode ser mergulhada em **S4**, esses espaços topológicos também devem "satisfazer" pelo menos parte desse sistema lógico modal. Com tal resultado, em conjunto com a simetria que encontramos entre o operador topológico interior e a axiomatização para **S4**, conseguimos obter um paralelismo entre os E-espaços de Tarski e o sistema modal **S4**.

5.2 Modelos Topo-Canônicos

Nessa seção pretendo explicitar como a *semântica topológica* recupera certas intuiçõs imediatas que possuímos a respeito do espaço físico que vivenciamos, de maneira que tal apelo intuitivo possa ser utilizado para replicar, no espaço de representações, conceitos geométricos-primitivos que nos auxiliam na construção e abstração de conceitos lógicos e filosóficos, alinhados aos limites representacionais e cognitivos aos quais estamos sujeitos, para discutirmos questões de natureza lógico-filosófica a partir dessa semântica para a lógica modal.

Assim como discutido no capítulo anterior, há uma forte correlação entre certos princípios dedutivos e noções geométricas primitivas (topológicas), como evidenciado pela teoria dos *espaços de fecho dedutivo* - cuja estrutura é quase-topológica (nomenclatura utilizada, por exemplo, em (FEITOSA, 2015)). Todavia, quando construímos semânticas para a lógica modal proposicional, por meio da teoria de espaços de fecho dedutivo, à nível do discurso continuávamos presos à ideia de que certas fórmulas eram válidas se fossem satisfeitas por todos os modelos, sem termos uma especificação imagética (representacional) de que tipo de estrutura subjaz entre esses modelos. Tal imagem podia ser encontrada ao fazermos paralelos com as vizinhanças da *semântica de vizinhanças* e as vizinhanças (abertas) dos espaços topológicos (noção geométrica-primitiva que recupera o apelo intuitivo espacial pretendido); contudo, as condições fornecidas pela *semântica de vizinhanças* não eram fortes o suficiente para garantir o mínimo de leis lógicas que, segundo a grande maioria de autores e filósofos concordam, seja necessário para embasar corretamente o discurso racional em que argumentações de caráter metafísico ocorrem (não validam teoremas lógicos dos sistemas normais).

Pretendo evidenciar que ao fortalecermos as condições sobre a *aplicação vizinhança* da *semântica de vizinhanças*, de maneira a garantir que o conjunto imagem dessa aplicação forneça, de fato, um sistema de vizinhanças topológicas ao conjunto representacional de todos os mundos possíveis, então obtemos uma estrutura - a *semântica topológica* - a partir da qual podemos discutir a *forma* com que se apresentam as verdades metafísicas.

É conhecido que **S4** é a lógica da classe de todos os espaços topológicos, assim como **K** a lógica da classe de todos os *frames* relacionais; também é conhecido que **S4** é completo em relação aos espaços topológicos do tipo E-espaço de Tarski.

Como usual, a prova da correção é mais corriqueira e pode ser feita ao fazermos os paralelos entre axiomas e regras de inferência do sistema lógico e as propriedades satisfeitas pelo operador interior em qualquer espaço topológico (admitindo o operador $\Box$ como primitivo no sistema lógico). O outro lado, contudo, consistirá na criação de um modelo canônico; a prova aqui apresentada é uma ligeira modificação daquela encontrada em (BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2007) ou (AIELLO; VAN-BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2003)[6], com essas modificações pretendemos evidenciar o caráter topológico das estruturas, realçando as propriedades geométricas que possuem; também realizarei nesse modelo canônico a análise topológica de suas propriedades, para compararmos com os resultados obtidos via álgebra por Tarski e McKinsey, análise essa não encontrada por mim na literatura. Além disso, neste capítulo exibo uma métrica que gera a topologia do espaço topológico do modelo canônico, resultado também não encontrado na literatura.

Demonstrações da completude de **S4**, por meios estritamente geométricos, são encontradas para estruturas topológicas específicas, como o espaço topológico dos números reais com a topologia usual, o espaço de Cantor (com a topologia induzida de subespaço da reta real), ou mesmo o espaço dos números racionais - ver (BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2007). Nesse mesmo texto anteriormente citado, os autores discutem a relação das estrutura topológica com os *frames* relacionais para **S4** (reflexivo + transitivo), mostrando uma correspondência biunívoca entre esses *frames* relacionais finitos e espaços topológicos de Alexandroff[7].

5.2.1 Restrição Topológica à Semântica de Vizinhanças

Seja W o conjunto de todos os consistentes e maximais da lógica proposicional clássica, construídos sobre a linguagem finitária e enumerável L.

Definição 5.2.1. *Seja N_T a* aplicação vizinhança topológica*, que satisfaz as condições da subseção 4.4.2, além das seguintes restrições:*

A) Se $U \in N_T(w_1)$, então para todo $w \neq w_1$ tal que $w \in U$, segue que $U \in N_T(w)$;

---

6 Tais provas, por sua vez, são uma sistematização - para vizinhanças topológicas - da prova de completude para sistemas lógicos em uma semântica de vizinhanças quaisquer, como aparece em (CHELLAS, 1980).

7 Um espaço topológico A é um *espaço de Alexandroff* se a intersecção de qualquer família de abertos de A continua sendo um aberto de A.

B) Para todo $w \in W$ temos que $W \in N_T(w)$, e se $U \in N_T(w)$ então $w \in U$;

C) Para cada $w \in W$, se $\{U_\alpha\}$ for uma família de vizinhanças de w, então $\bigcup U_\alpha$ é uma vizinhança de w;

D) Para cada $w \in W$, se $\{U_\alpha\}$, com $\alpha \in I$ finito, for uma família de vizinhanças de w, então $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha$ é uma vizinhança de w.

Proposição 7. *O conjunto imagem da aplicação vizinhança topológica é uma base para uma topologia em W.*

Demonstração: De acordo com a definição 4.2.2, devemos mostrar:

1) Seja $w \in W$. Da condição B) temos que $W \in N_T(w)$ para todo w, portanto existe $U \in Im(N_T)$ tal que $w \in U$.

2) Sejam U_1 e U_2 elementos distintos, não vazios e não disjuntos de $Im(N_T)$, de maneira que U_1 e U_2 são vizinhanças de w_1 e w_2, respectivamente. Seja $w \in U = (U_1 \cap U_2)$; da condição A) segue que U_1 e U_2 são vizinhanças de w, da condição D) segue que U é vizinhança de w.

■

Do resultado anterior segue que o nome *aplicação vizinhança topológica* está justificado, além disso, seja τ_{N_T} a topologia gerada pela imagem do operador N_T, então $F_T = (W, \tau_{N_T})$ é um espaço topológico, que denominaremos de *frame* de vizinhanças topológicas. Notemos que os elementos de $Im(N_T)$ são exatamente as vizinhanças abertas de todos os pontos $w \in W$ em τ_{N_T}, isso é garantido pelas condições da definição 5.2.1.

Portanto, ao impormos as restrições na definição da aplicação de vizinhança topológica, fazemos com que o sistema de vizinhanças obtidas "herde" as propriedades geométricas desejadas (topológicas). Observe que N_T gera uma topologia para W, mas diversas topologias podem ser geradas, de acordo com o tipo de atribuição de vizinhanças pela aplicação N_T. Esse resultado não nos fornece qual a "estrutura" topológica do *frame*, somente nos diz que ele *é* um espaço topológico.

Seja F_T um *frame* de vizinhanças topológicas para W e L a linguagem para a lógica proposicional clássica (finitária e enumerável). De acordo com a seção 4.4.1 da construção de semânticas de vizinhança, existe uma valoração V que associa, a cada p fórmula atômica de L, o subconjunto de W de pontos que contêm p. Definiremos o modelo de vizinhanças topológicas M_T, construído sobre F_T e V. Podemos estender, por indução na complexidade da fórmula, a noção de satisfação das fórmulas atômicas de L para todas as fórmulas da linguagem modal proposicional $\mathcal{L}$, estendendo a noção de satisfação $\models_{M_T}$ sobre as fórmulas de $\mathcal{L}$ - como no capítulo 4. Dessa forma, denotaremos por $[\![\alpha]\!]_{M_T} = \{w \in W \mid w \models_{M_T} \alpha\}$.

À semântica de vizinhanças assim construída denominaremos de *semântica topológica* para a lógica modal proposicional.

Lema 5.2.1. *Em um modelo de vizinhanças topológicas são válidas as identidades:*

$$[\![\Box\alpha]\!]_{M_T} = int([\![\alpha]\!]_{M_T}) \text{ e } [\![\Diamond\alpha]\!]_{M_T} = \overline{[\![\alpha]\!]}_{M_T}$$

Demonstração: Como discutido no capítulo anterior, por termos agora um sistema de vizinhanças (abertas) topológicas, sabemos que:

1) $w \models_{M_T} \Box\varphi$ se e somente se existe uma vizinhança U de w tal que, para todo $w' \in U$, tem-se $w' \models_{M_T} \varphi$;

2) $w \models_{M_T} \Diamond\varphi$ se e somente se, para toda vizinhança U de w, existe $w' \in U$ tal que $w' \models_{M_T} \varphi$.

A partir das observações acima e das definições 4.2.4 e 4.2.5, concluímos que na semântica topológica é válido $[\![\Box\alpha]\!]_{M_T} = int([\![\alpha]\!]_{M_T})$ e $[\![\Diamond\alpha]\!]_{M_T} = \overline{[\![\alpha]\!]}_{M_T}$.

■

Utilizarei nesse capítulo a axiomatização alternativa para o sistema **S4**, como apresentado na definição 2.2.1: Regra de inferência *Modus Ponens*, regra de Necessitação, todos os teoremas da lógica clássica e a regra e esquemas adicionais:

Regra M) $\varphi \vdash_{S4} \psi \Rightarrow \Box\varphi \vdash_{S4} \Box\psi$

γ) $\vdash_{S4} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \supset \Box(\varphi \wedge \psi)$

T) $\vdash_{S4} \Box\varphi \supset \varphi$

4) $\vdash_{S4} \Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$

Considerando A espaço topológico e X e Y seus subconjuntos, tem-se:

i) $int(X) \subseteq X$

ii) X é aberto $\Leftrightarrow int(X) = X$

iii) $int(int(X)) = int(X)$

iv) Se $X \subseteq Y$ então $int(X) \subseteq int(Y)$

v) $int(X) \cap int(Y) = int(X \cap Y)$

vi) $int(A) = A$

Por fim, note que se $\models_{M_T} \varphi \supset \psi$, segue a inclusão $[\![\varphi]\!]_{M_T} \subseteq [\![\psi]\!]_{M_T}$.

5.2.1.1 Correção da Semântica Topológica

Lema 5.2.2. *O sistema **S4** é correto em relação aos modelos M_T da semântica topológica.*

Demonstração: Mostremos que todo axioma de **S4** é válido nos modelos M_T, que também preservam as regras de inferência; nesse caso, segue a correção desejada, pois M_T preserva os teoremas de **S4** . Para essa demonstração usaremos os critérios de satisfação e validade da semântica de vizinhanças (levando em conta a especificidade das vizinhanças topológicas), como apresentado nas definições da subseção 4.4.2.

Sejam φ e ψ fórmulas de $\mathcal{L}$.

1) Suponhamos que φ seja teorema da lógica clássica. Então $\varphi \in w$ para todo $w \in W$. Portanto $[\![\varphi]\!]_{M_T} = W$, logo $\models_{M_T} \varphi$.

2) Pela propriedade iv), se $[\![\varphi]\!]_{M_T} \subseteq [\![\psi]\!]_{M_T}$ então $int([\![\varphi]\!]_{M_T}) \subseteq int([\![\psi]\!]_{M_T})$, portanto se $\varphi \models_{M_T} \psi$ então $\Box\varphi \models_{M_T} \Box\psi$.

3) Pela propriedade v) $int([\![\varphi]\!]_{M_T}) \cap int([\![\psi]\!]_{M_T}) \subseteq int([\![\varphi]\!]_{M_T} \cap [\![\psi]\!]_{M_T})$,
logo $\models_{M_T} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \supset \Box(\varphi \wedge \psi)$.

4) Pela propriedade i) segue que $int([\![\varphi]\!]_{M_T}) \subseteq [\![\varphi]\!]_{M_T}$, logo $\models_{M_T} \Box\varphi \supset \varphi$.

5) Pela propriedade iii) segue que $int([\![\varphi]\!]_{M_T}) \subseteq int(int([\![\varphi]\!]_{M_T}))$, logo
$\models_{M_T} \Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$.

6) Suponhamos que $\models_{M_T} \varphi$, então $[\![\varphi]\!]_{M_T} = W$. Pela propriedade vi) segue que $\models_{M_T} \Box\varphi$.

7) Suponhamos que exista $w \in W$ tal que $w \models_{M_T} \varphi \supset \psi$, i.e., $w \in [\![\varphi \supset \psi]\!]_{M_T}$, ou seja, $w \notin [\![\varphi]\!]_{M_T}$ ou $w \in [\![\psi]\!]_{M_T}$. Como $w \models_{M_T} \varphi$ segue que $w \in [\![\psi]\!]_{M_T}$, logo $w \models_{M_T} \psi$.

■

Do resultado anterior segue que qualquer extensão de **S4** é correta para a classe de estruturas valorativas formada por espaços topológicos.

5.2.2 Modelos Canônicos

Consideremos $\mathcal{L}$ linguagem modal proposicional finitária e enumerável. Iremos retomar a ideia da prova da completude para estes modelos canônicos por meio da construção do modelo canônico: como mundos são consistentes e maximais (coleção de fórmulas da linguagem) tal que, se a fórmula for verdadeira ela pertence ao mundo e, portanto, se ela pertencer a todos os mundos possíveis, ela é teorema.

5.2.2.1 Modelo Topo $S4$-canônico

Definição 5.2.2. *Seja* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L})$*.*

O conjunto Γ *é* $S4$-consistente *se não existir* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *subconjunto finito de* Γ *tal que* $\vdash_{S4} \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$*.*

Definição 5.2.3. *Um conjunto* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L})$ *é* $S4$-consistente maximal *se for* $S4$*-consistente e, para toda* $\varphi \in \mathcal{L}$*, tivermos* $\varphi \in \Gamma$ *ou* $\neg\varphi \in \Gamma$*. Da* $S4$*-consistência sabemos que se* $\varphi \in \Gamma$*, então* $\neg\varphi \notin \Gamma$*.*

Consideremos $W' = \{w \subseteq For(\mathcal{L}) \mid w \text{ é } S4\text{-consistente }\}$.

Sabemos que sistemas modais proposicionais também possuem a propriedade de Lindenbaum, ver (FITTING; MENDELSOHN, 1998), por exemplo. Então, para cada $w' \in W'$, existe um único $w \subseteq For(\mathcal{L})$ que é $S4$-consistente maximal e que contém w'.

Definição 5.2.4. *Seja* W *o conjunto de todas as* $S4$ *extensões de* W'*, i.e.,* $W = \{w \subseteq For(\mathcal{L}) \mid w \text{ é } S4\text{-consistente maximal }\}$*.*

Proposição 8. *a)* $\vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\varphi$ *e* $\vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\psi$

b) $\vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \equiv (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

Demonstração: a) Como a demonstração das duas fórmulas é idêntica, devido à simetria dos conjuntos em $(\varphi \wedge \psi)$ nos axiomas da lógica clássica que inferem φ e ψ, façamos apenas a demonstração da primeira fórmula.

$$
\begin{array}{rll}
[\text{Ax. } T] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset (\varphi \wedge \psi) & (1)\\
[\text{Ax. clássico}] & \vdash_{S4} (\varphi \wedge \psi) \supset \varphi & (2)\\
[\text{Ax. clássico (1) + (2)}] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset \varphi & (3)\\
[\text{R. } M)] & \vdash_{S4} (\Box(\varphi \wedge \psi) \supset \varphi) \supset (\Box\Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\varphi) & (4)\\
[MP \text{ (4) + (3)}] & \vdash_{S4} \Box\Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\varphi & (5)\\
[\text{Ax. 4}] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\Box(\varphi \wedge \psi) & (6)\\
[\text{Ax. clássico (6) + (5)}] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\varphi & (7)
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{rll}
[\text{Ax. } \gamma)] & \vdash_{S4} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \supset \Box(\varphi \wedge \psi) & (1)\\
[\text{item a)}] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\varphi & (2)\\
[\text{item a)}] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset \Box\psi & (3)\\
[\text{Ax. clássico (2) + (3)}] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \supset (\Box\varphi \wedge \Box\psi) & (4)\\
[\text{Def. } \equiv \text{ (1) + (4)}] & \vdash_{S4} \Box(\varphi \wedge \psi) \equiv (\Box\varphi \wedge \Box\psi) & (5)
\end{array}
$$

■

Definição 5.2.5. *Consideremos $\varphi \in For(\mathcal{L})$. Definamos $[\varphi] = \{w \in W \mid \varphi \in w\}$ o conjunto de $S4$-consistentes maximais que contêm φ.*

Definição 5.2.6. *Seja $\mathfrak{B} = \{B_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{L}}$ uma família formada a partir de fórmulas de $\mathcal{L}$, tal que $B_\varphi = [\Box\varphi]$. Consideremos $\tau_C = \{(\bigcup_{\varphi \in \Gamma} B_\varphi)_{\Gamma \in W'}\}$.*

Teorema 5.2.1. *O par $F_C = (W, \tau_C)$ é um espaço topológico, denominado* frame topo $S4$-canônico*, cuja topologia é gerada por $\mathfrak{B}$.*

Demonstração: Mostremos que $\mathfrak{B}$ é base para uma topologia, como consequência τ_C é a topologia gerada.

De acordo com a definição 4.2.2, devemos mostrar:

1) Seja $w \in W$. Da $S4$-consistência maximal de w podemos afirmar que existe $\varphi \in \mathcal{L}$, teorema da lógica clássica, tal que $\varphi \in w$:

$$\vdash_{S4} \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash_{S4} \Box\varphi \quad \Rightarrow \quad \Box\varphi \in w \quad \Rightarrow \quad w \in B_\varphi$$

2) Seja $B_\varphi \neq B_\psi$ elementos não vazios de $\mathfrak{B}$ tais que $B_\varphi \cap B_\psi \neq \emptyset$.

Tomemos $w \in B_\varphi \cap B_\psi$. Então $\Box\varphi \in w$ e $\Box\psi \in w$. Da maximalidade de w segue que $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \in w$; pela proposição 8, item b), $\Box(\varphi \wedge \psi) \in w$.

Seja $\theta = \Box(\varphi \wedge \psi)$. Obviamente $w \in B_\theta$ e novamente por 8, item a), segue que

$$\begin{cases} \vdash_{S4} \Box\theta \supset \Box\varphi \\ \vdash_{S4} \Box\theta \supset \Box\psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_\theta \subseteq B_\varphi \\ B_\theta \subseteq B_\psi \end{cases} \Rightarrow \quad B_\theta \subseteq B_\varphi \cap B_\psi$$

De 1) e 2) segue que $\mathfrak{B}$ é base para a topologia τ_C, ver definição 5.2.6, logo F_C é um espaço topológico (*frame* de vizinhanças topológicas), justificando o nome adotado.

■

Na definição dos conjuntos w $S4$-consistentes maximais, está implícita uma aplicação V_C das fórmulas atômicas de L no conjunto das partes de W, tal que para cada fórmula atômica p de L, $V_C(p) = \{w \in W \mid p \in w\}$. Claramente V_C é uma *valoração-mundo* e $M_C = (F_C, V_C)$ é um modelo de vizinhanças topológicas, que denominaremos *modelo topo $S4$-canônico.*

Como a notação $[\![\alpha]\!]_{M_C}$ indica o conjunto $\{w \in W \mid w \models_{M_C} \alpha\}$, de acordo com a noção de satisfação de vizinhanças topológicas, segue do lema 5.2.1 que $[\![\Box\alpha]\!]_{M_C} = int([\![\alpha]\!]_{M_C})$. Notemos também que $B_\varphi = [\Box\varphi]$ é um aberto do frame F_C. Devemos agora encontrar a relação entre os conjuntos $[\alpha]$ e $[\![\alpha]\!]_{M_C}$, para todas as fórmulas α de $\mathcal{L}$.

Proposição 9. *Para todas as fórmulas φ e ψ de $\mathcal{L}$ são válidos:*

a) $[\Box\varphi] \subseteq [\varphi]$

b) Se $[\Box\psi] \subseteq [\varphi]$ *então* $[\Box\psi] \subseteq [\Box\varphi]$

Demonstração: a) Se $w \in [\Box\varphi]$ então $\Box\varphi \in w$. Da $S4$-consistência maximal de w segue que $\varphi \in w$, logo $w \in [\varphi]$.

b) Suponhamos que $[\Box\psi] \subseteq [\varphi]$ e seja $w \in [\Box\psi]$.

Sabemos que existe $\Gamma \subseteq w$ tal que $\Gamma \vdash_{S4} \Box\psi$ e, da hipótese, $\Gamma \cup \{\Box\psi\} \vdash_{S4} \varphi$. Temos:

$$\begin{aligned}
&[\text{Hipótese}]\ \Gamma \vdash_{S4} \Box\psi && (1)\\
&[\text{Ax. 4)}]\ \Gamma \vdash_{S4} \Box\Box\psi && (2)\\
&[\text{Hipótese}]\ \Gamma, \Box\psi \vdash_{S4} \varphi && (3)\\
&[\text{R. } M)]\ \Gamma, \Box\Box\psi \vdash_{S4} \Box\varphi && (4)\\
&[\text{Hip. local} + (2)]\ \Gamma \vdash_{S4} \Box\Box\psi \supset \Box\varphi && (5)\\
&[MP\ (5) + (2)]\ \Gamma \vdash_{S4} \Box\varphi && (6)
\end{aligned}$$

Como $\Gamma \subseteq w$, concluímos que $w \in [\Box\varphi]$, ou seja, $[\Box\psi] \subseteq [\Box\varphi]$, como desejado.

■

Proposição 10. $\vdash_{S4} \Box\psi \supset \Diamond\psi$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
&[\text{Ax. } T]\ \vdash_{S4} \Box\psi \supset \psi && (1)\\
&[\text{Contrapositiva Ax. } T]\ \vdash_{S4} \neg\varphi \supset \neg\Box\varphi && (2)\\
&[\varphi = \neg\psi]\ \vdash_{S4} \psi \supset \neg\Box\neg\psi && (3)\\
&[\text{Def. } \Diamond]\ \vdash_{S4} \psi \supset \Diamond\psi && (4)\\
&[\text{Ax. clássico } (1) + (4)]\ \vdash_{S4} \Box\psi \supset \Diamond\psi && (5)
\end{aligned}$$

■

Teorema 5.2.2. *[Teorema Fundamental do Modelo Canônico **S4**]*

Para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$:

$$w \models_{M_C} \varphi \textit{ se e somente se } w \in [\varphi]$$

Demonstração: A demonstração, como usual, será por indução na complexidade da fórmula φ.

Concluímos da consistência maximal dos elementos w:

a) $[\neg\varphi] = W - [\varphi]$

b) $[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$

1. Seja $\varphi = p$, fórmula atômica de L.

$$w \models_{M_C} p \quad \Leftrightarrow \quad w \in [\![p]\!]_{M_C} \quad \Leftrightarrow \quad p \in w \quad \Leftrightarrow \quad w \in [p]$$

2. Seja $\varphi = \neg\alpha$.

$$w \models_{M_C} \neg\alpha \quad \Leftrightarrow \quad w \models_{M_C} \varphi \quad \Leftrightarrow_{HI} \quad w \in [\varphi] \quad \Leftrightarrow_{a)} \quad w \in W - [\alpha] \quad \Leftrightarrow \quad w \in [\neg\alpha]$$

3. Seja $\varphi = \alpha \wedge \beta$.

$$w \models_{M_C} \alpha \wedge \beta \; \Leftrightarrow \; w \models_{M_C} \varphi \; \Leftrightarrow_{HI} \; \varphi \in w \; \Leftrightarrow \; \alpha \wedge \beta \in w \; \Leftrightarrow \; \begin{cases} \alpha \in w \\ \beta \in w \end{cases} \; \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} w \in [\alpha] \\ w \in [\beta] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad w \in [\alpha] \cap [\beta] \quad \Leftrightarrow_{b)} \quad w \in [\alpha \wedge \beta]$$

4. Seja $\varphi = \Box\alpha$.

$\Rightarrow$) Se $w \models_{M_C} \Box\alpha \;\Rightarrow\; w \in [\![\Box\alpha]\!]_{M_C} = int([\![\alpha]\!]_{M_C})$ (lema 5.2.1).

Então, existe $U \subseteq [\![\alpha]\!]_{M_C}$ vizinhança aberta de w tal que, para todo $w' \in U$, $w' \models_{M_C} \alpha \;\Rightarrow_{HI}\; w' \in [\alpha] \;\Rightarrow\; U \subseteq [\alpha]$.

Como todo aberto é a união de abertos básicos, existe ao menos um aberto básico $B_\psi \subseteq U$, tal que $w \in B_\psi$, portanto $w \in B_\psi = [\Box\psi] \subseteq U \subseteq [\alpha]$.

Da proposição 9 item b), temos que $[\Box\psi] \subseteq [\Box\alpha] \Rightarrow\; w \in [\Box\alpha]$.

$\Leftarrow$) Seja $w \in [\Box\alpha] = B_\alpha$ vizinhança aberta de w.

Da proposição 9 item a), sabemos que $[\Box\alpha] \subseteq [\alpha]$. Portanto, para todo $w' \in B_\alpha$, $w' \in [\alpha]$, aplicando a hipótese de indução para a fórmula α temos que $w' \models_{M_C} \alpha$, que é o critério nos modelos de vizinhanças topológicas, como em M_C, para que $w \models_{M_C} \Box\alpha$.

■

Corolário 5.2.1. *Para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ segue a igualdade $[\![\varphi]\!]_{M_C} = [\varphi]$.*

Lema 5.2.3. *Seja $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L})$, podendo ser vazio.*

Se $\Gamma \models_{M_C} \varphi$ então $\Gamma \vdash_{S4} \varphi$

Demonstração: Suponhamos que $\Gamma \nvdash_{S4} \varphi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é $S4$-consistente, portanto existe $w \in W$ tal que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq w$, i.e., $w \models_{M_C} \neg\varphi$. Porém:

$$w \models_{M_C} \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \neg\varphi \in w \quad \Leftrightarrow \quad w \not\models_{M_C} \varphi$$

Logo w é um contra-modelo para $\Gamma \cup \{\varphi\}$, o que era necessário para provar o resultado pela contrapositiva.

■

Teorema 5.2.3. *O sistema modal proposicional **S4** é correto e completo em relação ao* modelo topo $S4$-canônico*.*

Demonstração: O resultado é consequência imediata dos lemas 5.2.2 e 5.2.3.

■

Concluímos assim que o *modelo topo $S4$-canônico* é isomórfico a uma semântica topológica para a lógica modal proposicional. Contudo, que tipo de estrutura topológica possui esse modelo canônico nos quais as fórmulas válidas são exatamente, e somente esses, os teoremas de **S4**? Sabemos que **S4** é caracterizado pelos espaços métricos denso-em-si-mesmos, mas qual a estrutura do modelo canônico, este único?

Antes de realizar a análise da estrutura topológica do modelo topo $S4$-canônico, seguirei a construção do modelo canônico para a lógica **S5**.

5.2.2.2 Modelo Topo $S5$-canônico

Seja TD a classe de todos os espaços topológicos em que todos os conjuntos fechados são também abertos; como os conjuntos fechados são os complementares dos abertos, então todo aberto também deve ser fechado. Logo, podemos caracterizar a classe TD da seguinte forma:

$$TD = \{A \mid A \text{ é espaço topológico em que } X \subseteq A \text{ é aberto } \Leftrightarrow \text{ for fechado } \}$$

Da definição segue que para qualquer espaço topológico $A \in TD$, se $X \subseteq A$ então $\overline{X} = int(\overline{X})$. Como o nome sugere, isto caracteriza a classe dos espaços topológicos totalmente desconexos.

Conforme foi discutido em capítulos anteriores, é quase consenso na discussão contemporânea que os sitemas modais considerados mais adequados para representar o contexto racional em que discussões metafísicas ocorrem são **S4** ou **S5**; exatamente por isso minha atenção se concentrará na análise de estruturas valorativas para esses sistemas.

Seja o sistema modal proposicional **S5** uma extensão de **S4** com a adição do (esquema) de axioma E. Todos os $S4$-teoremas são teoremas de **S5**, assim como $\vdash_{S5} \Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$ e todas as fórmulas deduzidas a partir desse conjunto de (esquemas) axiomas. Dessa construção resulta:

Proposição 11. *O sistema* ***S4*** *é subsistema de* ***S5****.*

Demonstra-se em **S5** a redução de qualquer iteração de operadores modais; essas provas podem ser encontradas em (CHELLAS, 1980), (CRESSWELL; HUGHES, 1996) ou (KONYNDYK, 2008). Em especial, sabemos que:

Proposição 12. $\vdash_{S5} \Diamond\varphi \equiv \Box\Diamond\varphi$

$\vdash_{S5} \Box\varphi \equiv \Diamond\Box\varphi$

Seja F_{TD} um *frame* de vizinhanças topológicas tal que $F_{TD} \in TD$, então M_{TD}, modelo de vizinhanças construído sobre o *frame* F_{TD}, será, obviamente, um *modelo de vizinhanças topológicas.*

Lema 5.2.4. *O sistema* ***S5*** *é correto em relação aos modelos* M_{TD} *da semântica topológica.*

Demonstração: Do fato de M_{TD} ser um modelo de vizinhanças topológicas segue, do lema 5.2.2, que é correto em relação à regra de Necessitação, *Modus Ponens* e todos os (esquemas) axiomas de **S4**.

Para provarmos o lema, basta mostrarmos que o axioma E é válido em M_{TD}.

Seja $\varphi \in \mathcal{L}$. Como M_{TD} é um sistema de vizinhanças topológicas, podemos aplicar o lema 5.2.1, assim como F_{TD} ser um espaço topológico pertencente à classe TD nos permite usar o fato de que todo fecho é igual ao seu interior, por ser aberto. Logo:

$$[\![\Diamond\varphi]\!]_{M_{TD}} = \overline{[\![\varphi]\!]}_{M_{TD}} = int(\overline{[\![\varphi]\!]}_{M_{TD}}) = int([\![\Diamond\varphi]\!]_{M_{TD}}) = [\![\Box\Diamond\varphi]\!]_{M_{TD}} \;\Rightarrow$$

$$[\![\Diamond\varphi]\!]_{M_{TD}} \subseteq [\![\Box\Diamond\varphi]\!]_{M_{TD}}$$

Do critério para a implicação em um sistema de vizinhanças temos que $\models_{M_{TD}} \Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$.

■

Definição 5.2.7. *Seja* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L})$ *a linguagem modal proposicional.*

O conjunto Γ *é* $S5$-consistente *se não existir* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *subconjunto finito de* Γ *tal que* $\vdash_{S5} \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$*.*

Definição 5.2.8. *Um conjunto* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L})$ *é* $S5$-consistente maximal *se for* $S5$*-consistente e, para toda* $\varphi \in For(\mathcal{L})$*, tivermos* $\varphi \in \Gamma$ *ou* $\neg\varphi \in \Gamma$*. Da* $S5$*-consistência sabemos que se* $\varphi \in \Gamma$*, então* $\neg\varphi \notin \Gamma$*.*

Consideremos $W' = \{w \subseteq For(\mathcal{L}) \mid w \text{ é } S5\text{-consistente } \}$.

Adotando novamente a propriedade de Lindenbaum para sistemas modais proposicionais, sabemos que para cada $w' \in W'$, existe um único $w \subseteq For(\mathcal{L})$, $S5$-consistente maximal, que contém w'.

Definição 5.2.9. *Na construção dessa seção, adotemos* W *como o conjunto de todas as* ***S5*** *extensões de* W'*, i.e.,* $W = \{w \subseteq For(\mathcal{L}) \mid w \text{ é } S5\text{-consistente maximal } \}$*.*

Definição 5.2.10. *Consideremos* $\varphi \in \mathcal{L}$*. Definamos* $\lfloor\varphi\rfloor = \{w \in W \mid \varphi \in w\}$ *o conjunto de* $S5$*-consistentes maximais que contêm* φ*.*

Proposição 13. *Para todas as* ψ*,* φ *e* α *em* $\mathcal{L}$*, temos:*

a) Se $\lfloor\Diamond\Box\psi\rfloor \subseteq \lfloor\alpha\rfloor$ *então* $\lfloor\Diamond\Box\psi\rfloor \subseteq \lfloor\Box\alpha\rfloor$

b) $\lfloor\Diamond\Box\varphi\rfloor \subseteq \lfloor\varphi\rfloor$

Demonstração: a) Seja $w \in \lfloor\Diamond\Box\psi\rfloor$, por hipótese, existe $\Gamma \subset w$ tal que $\Gamma \vdash_{S5} \Diamond\Box\psi$ e $\Gamma \cup \{\Diamond\Box\psi\} \vdash_{S5} \alpha$.

$$
\begin{aligned}
\text{[Hipótese] } & \Gamma \vdash_{S5} \Diamond\Box\psi && (1)\\
\text{[Prop. 12] } & \vdash_{S5} \Diamond\Box\psi \equiv \Box\psi && (2)\\
\text{[(2) em (1)] } & \Gamma \vdash_{S5} \Box\psi && (3)\\
\text{[Ax. 4] } & \Gamma \vdash_{S5} \Box\Box\psi && (4)\\
\text{[Hipótese + (2)] } & \Gamma, \{\Box\psi\} \vdash_{S5} \alpha && (5)\\
\text{[R. } M\text{)] } & \Gamma\{\Box\Box\psi\} \vdash_{S5} \Box\alpha && (6)\\
\text{[Hip. local + (4)] } & \Gamma \vdash_{S5} \Box\Box\psi \supset \Box\alpha && (7)\\
\text{[MP (7) + (3)] } & \Gamma \vdash_{S5} \Box\alpha && (8)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \Box\alpha \in w \ \Rightarrow \ \lfloor\Diamond\Box\psi\rfloor \subseteq \lfloor\Box\alpha\rfloor$

b) Da proposição 12 sabemos que $\lfloor\Diamond\Box\varphi\rfloor = \lfloor\Box\varphi\rfloor$.

Pelo axioma T, $\vdash_{S5} \Box\varphi \supset \varphi$. Então $\lfloor\Box\varphi\rfloor \subset \lfloor\varphi\rfloor$, logo $\lfloor\Diamond\Box\varphi\rfloor \subseteq \lfloor\varphi\rfloor$.

∎

Definição 5.2.11. *Seja* $\mathfrak{B} = \{B_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{L}}$ *uma família formada a partir de fórmulas de* $\mathcal{L}$ *tal que* $B_\varphi = \lfloor \Diamond\Box\varphi \rfloor$. *Consideremos* $\tau_5 = \{(\bigcup_{\varphi \in \Gamma} B_\varphi)_{\Gamma \in W'}\}$.

Teorema 5.2.4. *O par* $F_5 = (W, \tau_5)$ *é um espaço topológico, denominado* frame topo $S5$-canônico, *cuja topologia é gerada por* $\mathfrak{B}$.

Demonstração: Mostremos que $\mathfrak{B}$ é base para uma topologia, como consequência τ_5 é a topologia gerada. De acordo com a definição 4.2.2, devemos mostrar:

1) Seja $w \in W$. Da $S5$-consistência maximal de w podemos afirmar que existe $\varphi \in For(\mathcal{L})$, teorema da lógica clássica, tal que $\varphi \in w$:

$$\vdash_{S5} \varphi \quad \Rightarrow \quad \vdash_{S5} \Box\varphi \quad \Rightarrow_{\text{Prop.12}} \quad \Diamond\Box\varphi \in w \quad \Rightarrow \quad w \in B_\varphi$$

2) Seja $B_\varphi \neq B_\psi$ elementos não vazios de $\mathfrak{B}$ tais que $B_\varphi \cap B_\psi \neq \emptyset$.

Tomemos $w \in B_\varphi \cap B_\psi$. Então $\Diamond\Box\varphi \in w$ e $\Diamond\Box\psi \in w$. Da proposição 12 e maximalidade de w segue que $\Box\varphi \wedge \Box\psi \in w$; pela proposição 8, item b), $\Box(\varphi \wedge \psi) \in w$, novamente a proposição 12 nos garante que $\Diamond\Box(\varphi \wedge \psi) \in w$.

Seja $\theta = \varphi \wedge \psi$. Obviamente, $w \in B_\theta$.

Pelas proposições 8 e 12: $\begin{cases} \vdash_{S5} \Diamond\Box\theta \supset \Diamond\Box\varphi \\ \vdash_{S5} \Diamond\Box\theta \supset \Diamond\Box\psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_\theta \subseteq B_\varphi \\ B_\theta \subseteq B_\psi \end{cases} \Rightarrow$ $B_\theta \subseteq B_\varphi \cap B_\psi$

De 1) e 2) segue que $\mathfrak{B}$ é base para a topologia τ_5, ver 5.2.6, logo F_5 é um espaço topológico.

■

Na definição dos conjuntos w $S5$-consistentes maximais, novamente temos implícita uma aplicação V_5 das fórmulas atômicas de L no conjunto das partes de W, e para cada p fórmula atômica de L: $V_5(p) = \{w \in W \mid p \in w\}$. Claramente V_5 é uma *valoração-mundo* e $M_5 = (F_5, V_5)$ é um modelo de vizinhanças, que denominaremos *modelo topo $S5$-canônico*.

Como a notação $[\![\alpha]\!]_{M_5}$ indica o conjunto $\{w \in W \mid w \models_{M_5} \alpha\}$, de acordo com a noção de satisfação de vizinhanças topológicas, segue do lema 5.2.1 que $[\![\Box\alpha]\!]_{M_5} = int([\![\alpha]\!]_{M_5})$, assim como $[\![\Diamond\alpha]\!]_{M_5} = \overline{[\![\alpha]\!]}_{M_5}$. Devemos agora encontrar a relação entre os conjuntos $\lfloor\alpha\rfloor$ e $[\![\alpha]\!]_{M_5}$, para todas as fórmulas α de $\mathcal{L}$.

Teorema 5.2.5. *[Teorema Fundamental do Modelo Canônico* ***S5****]*

Para toda $\varphi \in \mathcal{L}$:

$$w \models_{M_5} \varphi \textit{ se e somente se } w \in \lfloor \varphi \rfloor$$

Demonstração: O argumento apresentado aqui será similar àquele adotado no teorema 5.2.2, a única diferença ocorrerá com relação às fórmulas modalizadas. Por isso, da $S5$-consistência maximal dos elementos w de W segue, por indução na complexidade das fórmulas, que:

1. Seja $\varphi = p$, fórmula atômica de L.

$w \models_{M_5} p \quad \Rightarrow \quad w \in \lfloor p \rfloor$

2. Seja $\varphi = \neg\alpha$.

$w \models_{M_5} \neg\alpha \quad \Leftrightarrow_{HI} \quad w \in \lfloor \neg\alpha \rfloor$

3. Seja $\varphi = \alpha \wedge \beta$.

$$w \models_{M_5} \alpha \wedge \beta \;\Leftrightarrow_{HI} \begin{cases} \alpha \in w \\ \beta \in w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w \in \lfloor \alpha \rfloor \\ w \in \lfloor \beta \rfloor \end{cases} \Leftrightarrow \; w \in \lfloor \alpha \wedge \beta \rfloor$$

4. Seja $\varphi = \Box\alpha$.

$\Rightarrow$) Se $w \models_{M_5} \Box\alpha \;\Rightarrow\; w \in [\![\Box\alpha]\!]_{M_5} = int([\![\alpha]\!]_{M_5})$ (lema 5.2.1).

Então, existe $U \subseteq [\![\alpha]\!]_{M_5}$ vizinhança aberta de w tal que, para todo $w' \in U$, $w' \models_{M_5} \alpha \;\Rightarrow_{HI}\; U \subseteq \lfloor \alpha \rfloor$.

Então, existe ao menos um aberto básico $B_\psi \subseteq U$, tal que $w \in B_\psi$, portanto $w \in \lfloor \Diamond\Box\psi \rfloor \subseteq U \subseteq \lfloor \alpha \rfloor$.

Da proposição 13, item a), temos que $\lfloor \Diamond\Box\psi \rfloor \subseteq \lfloor \Box\alpha \rfloor \Rightarrow\; w \in \lfloor \Box\alpha \rfloor$.

$\Leftarrow$) Seja $w \in \lfloor \Box\alpha \rfloor$, como temos a igualdade $\lfloor \Diamond\Box\alpha \rfloor = \lfloor \Box\alpha \rfloor = B_\alpha$, vizinhança aberta de w, da proposição 13, item b), temos $\lfloor \Box\alpha \rfloor \subseteq \lfloor \alpha \rfloor$.

Portanto $B_\alpha \subseteq \lfloor \alpha \rfloor$. Logo, para todo $w' \in B_\alpha$ (vizinhança aberta de w), $w' \in \lfloor \alpha \rfloor$ $\Rightarrow_{HI}\; w \models_{M_5} \Box\alpha$.

■

Corolário 5.2.2. *Para toda fórmula $\varphi \in For(\mathcal{L})$ segue a igualdade $[\![\varphi]\!]_{M_5} = \lfloor \varphi \rfloor$.*

Lema 5.2.5. *Seja* $\Gamma \subseteq For(\mathcal{L})$*, podendo ser vazio.*

Se $\Gamma \models_{M_5} \varphi$ *então* $\Gamma \vdash_{S5} \varphi$

Demonstração: O argumento é o mesmo, *mutatis mutandis*, daquele utilizado no lema 5.2.3.

■

Proposição 14. *O* frame *de vizinhanças* F_5 *pertence à classe* TD*.*

Demonstração: Do corolário 5.2.2 temos que $[\![\varphi]\!]_{M_5} = \lfloor\varphi\rfloor$.

Como B_φ é um aberto básico de F_5, tem-se:

$\lfloor\Diamond\Box\varphi\rfloor = [\![\Diamond\Box\varphi]\!]_{M_5} = \overline{[\![\Box\varphi]\!]}_{M_5} = \overline{int([\![\varphi]\!]_{M_5})}$ (I)

Por outro lado, pela proposição 12, $\lfloor\Diamond\Box\varphi\rfloor = \lfloor\Box\varphi\rfloor = int([\![\varphi]\!]_{M_5})$ (II)

Ou seja, de (I) e (II) temos que para toda φ: $\overline{int([\![\varphi]\!]_{M_5})} = int([\![\varphi]\!]_{M_5})$.

Logo, todo aberto básico em F_5 é fechado, portanto todos os fechados são abertos e $F_5 \in TD$.

■

Teorema 5.2.6. *O sistema modal proposicional **S5** é correto e completo em relação ao* modelo topo $S5$-canônico*.*

Demonstração: O resultado é consequência imediata dos lemas 5.2.5, 5.2.4 e da proposição 14.

■

5.3 Estudando os Modelos Canônicos

Nesta seção explorarei, por meios topológicos, as características *geométricas primitivas* dos modelos canônicos construídos - ver construção em (AIELLO; VAN-BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2003), por exemplo. Portanto, conforme apontado anteriormente, esta seção traz contribuições originais ao explorar características topológicas destes modelos específicos e, portanto, da própria lógica (já que são os modelos canônicos).

5.3.1 Modelo Topo $S4$-canônico

Proposição 15. *Seja W o conjunto de todos os $S4$-consistentes maximais construídos sobre uma linguagem proposicional modal e enumerável $\mathcal{L}$.*

Se w_1 e w_2, elementos de W, coincidem em todas as fórmulas modalizadas da forma $\Box\varphi$, então $w_1 = w_2$.

Demonstração: Por hipótese $\Box\varphi \in w_1 \Leftrightarrow \Box\varphi \in w_2$, para toda fórmula φ. Neste caso, as configurações consistentes e maximais w_1 e w_2 têm as mesmas fórmulas necessárias, assim como as mesmas fórmulas contingentes.

Suponhamos $w_1 \neq w_2$, então existe φ fórmula tal que $\varphi \in w_1$ e $\neg\varphi \in w_2$.

Seja $\Box\psi$ um $S4$-teorema. Então:

$w_1 \models \Box\psi \supset \varphi$ e $w_2 \models \Box\psi \supset \neg\varphi$

Da regra M, axioma 4, *modus ponens* e o teorema da completude, segue que $w_1 \models \Box\psi \supset \Box\varphi$ e $w_2 \models \Box\psi \supset \Box\neg\varphi$, do fato de $\Box\psi$ ser $S4$-teorema, temos $w_1 \models \Box\varphi$ e $w_2 \models \Box\neg\varphi$; novamente pela completude e consistência maximal dos w's, $\Box\varphi \in w_1$ e $\Box\neg\varphi \in w_2$, o que contradiz a hipótese.

■

Teorema 5.3.1. *O* frame *de vizinhanças F_C tem base enumerável.*

Demonstração: Como $\mathfrak{B} = \{B_\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{L}}$ e $\mathcal{L}$ é enumerável, segue o resultado.

■

Teorema 5.3.2. *O* frame *de vizinhanças F_C é T_0.*

Demonstração: Seja $w_1 \neq w_2$ elementos de W. Da proposição 15 sabemos que eles não podem coincidir em todas as fórmulas modalizadas, logo existe $\varphi \in For(\mathcal{L})$ tal que $\Box\varphi \in w_1$ e $\Box\varphi \notin w_2$, i.e., $w_1 \in int([\![\varphi]\!]_{M_C})$ e $w_2 \notin int([\![\varphi]\!]_{M_C})$.

De acordo com a definição B.1.2 (apêndice B) encontramos um aberto que contém um dos pontos e não contém o outro, segue assim que F_C é T_0.

■

Teorema 5.3.3. *O* frame *de vizinhanças F_C é T_1.*

Demonstração: Seja w_1 em elemento de W. Pretendemos mostrar que $\{w_1\}$ é um fechado de F_C, o que resulta, de acordo com a definição B.1.3, que o espaço topológico é T_1.

Adotemos $A = \{ \Box\varphi \mid \Box\varphi \notin w_1\}$ e $A^{-1} = \{\varphi \in For(\mathcal{L}) \mid \Box\varphi \in A\}$, portanto A^{-1} contém todas as fórmulas φ de $\mathcal{L}$ (independentemente de sua complexidade) tais que $\Box\varphi \notin w_1$.

Seja $\mathfrak{B}_A^{-1} = \{B_\varphi \mid \varphi \in A^{-1}\} \subseteq \mathfrak{B}$. Para todo $B_\varphi \in \mathfrak{B}_A^{-1}$, temos que $w_1 \notin B_\varphi$.

Tomemos $w \in W - \{w_1\}$; da proposição 15 segue que existe $\psi \in A^{-1}$ tal que $\Box\psi \in w$ e $\Box\psi \notin w_1$, então $w \in B_\psi \in \mathfrak{B}_A^{-1}$, logo $W - \{w_1\} \subseteq \bigcup \mathfrak{B}_A^{-1}$ (I).

Seja agora $w \in \bigcup \mathfrak{B}_A^{-1}$, existe $\varphi \in A^{-1}$ tal que $w \in B_\varphi \in \mathfrak{B}_A^{-1}$, para pelo menos alguma $\varphi \in For(\mathcal{L})$, então $\Box\varphi \notin w_1$, ou seja, $w \neq w_1$, logo $w \in W - \{w_1\}$. Portanto temos que $\bigcup \mathfrak{B}_A^{-1} \subseteq W - \{w_1\}$ (II).

De (I) e (II) segue que $W - \{w_1\}$ é aberto e, portanto, $\{w_1\}$ é fechado.

Como w_1 foi arbitrariamente escolhido, segue o resultado procurado.

■

Corolário 5.3.1. *O* frame *de vizinhanças F_C é um Tarski-espaço topológico.*

Demonstração: De acordo com a definição 5.1.1, como F_C é espaço topológico cujos unitários são fechados, segue que é um Tarski-espaço topológico.

■

Teorema 5.3.4. *O* frame *de vizinhanças F_C é um espaço separável.*

Demonstração: Pelo teorema 5.3.1 concluímos que $\mathfrak{B}$ é uma base enumerável para F_C; seja $\{B_0, B_1, \ldots\}$ uma de suas enumerações. Façamos a seguinte construção:

Tomemos $w_0 \in B_0$ um elemento qualquer e $D_0 = \{w_0\}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, definamos o conjunto $D_n = \{w_n\}$, em que w_n é escolhido no conjunto $B_n - \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$.

Por fim, tomemos $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Obviamente, D é enumerável.

Suponhamos agora que D não seja denso em F_C. Existe F fechado tal que $\overline{D} = F \neq W$.

Nessas condições, $D \subseteq F$ e $U = W - F \neq \emptyset$ é aberto, tal que $U \cap D = \emptyset$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, a intersecção de U e D_n é vazia.

Como U é aberto, existe $K = \{k_1, k_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $U = \bigcup_{k \in K} B_k$, para $B_k \in \mathfrak{B}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$D_n \bigcap (\bigcup_{k \in K} B_k) = (D_n \cap B_{k_1}) \bigcup (D_n \cap B_{k_2}) \bigcup \ldots = \emptyset \ (*)$$

Observemos que o conjunto K é fixo e não vazio, ou seja, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 \in K$.

Como $(*)$ vale para todo número natural n e todo k elemento de K, então $D_{m_0} \cap B_{m_0} = \emptyset$.

Mas como $D_{m_0} = \{w_{m_0}\}$, tal que $w_{m_0} \in B_{m_0} - \{w_0, \ldots, w_{m_0 - 1}\}$, segue que $D_{m_0} \cap B_{m_0} = \{w_{m_0}\} \neq \emptyset$, para pelo menos um $m_0 = k \in K$. (Contradição)

Da contradição segue que D é um subconjunto denso enumerável de F_C, portanto um espaço topológico separável.

■

Teorema 5.3.5. *O espaço topológico F_C é denso-em-si-mesmo.*

Demonstração: Suponhamos que F_C não seja denso-em-si-mesmo (ver definição B.1.8).

Existe $w' \in W$ tal que $w' \notin \overline{W - \{w'\}} \Rightarrow \overline{W - \{w'\}} = W - \{w'\} \Rightarrow W - \{w'\}$ é fechado $\Rightarrow \{w'\}$ é aberto.

Todo aberto pode ser escrito como a união de abertos básicos (enumerável, já que a base de F_C é enumerável). Como $\{w'\}$ é unitário, existe φ fórmula tal que $\{w'\} = B_\varphi = [\![\Box\varphi]\!]_{M_C}$. Portanto, $\Box\varphi$, que pertence a um único $S4$-consistente maximal, não é $S4$ teorema (nem contradição, obviamente), logo φ não é $S4$ teorema. Do axioma T temos que $\{\Box\varphi, \varphi\} \subset w'$.

Seja φ_1 uma fórmula atômica que não apareça em nenhuma subfórmula de φ. Então, $\{\Box\varphi, \varphi, \varphi_1\}$ e $\{\Box\varphi, \varphi, \neg\varphi_1\}$ são $S4$-consistentes. Do teorema de Lindenbaum, existem w_1 e w_2 elementos de W que contêm cada um desses conjuntos $S4$-consistentes. Por construção, $w_1 \neq w_2$ e ambos são elementos de B_φ. Mas, por hipótese, $B_\varphi = \{w'\}$ era unitário. (contradição)

Portanto, para todo $w \in W$, temos que $w \in \overline{W - \{w\}}$, ou seja, F_C é denso-em-si-mesmo.

■

Notemos que como F_C é denso-em-si-mesmo, todo conjunto $W - \{w\}$, para todo $w \in W$, não é fechado, i.e., $\{w\}$ não é aberto, portanto conjuntos unitários em F_C são todos fechados e nenhum deles é aberto.

Teorema 5.3.6. *O espaço topológico F_C é Hausdorff.*

Demonstração: Vimos, pela proposição 15, que se $w_1 \neq w_2$, então esses pontos de W não podem coincidir em *todas* suas fórmulas modalizadas.

Suponhamos então que w_1 e w_2, elementos distintos de W, difiram em uma única fórmula modalizada, i.e., existe uma única $\varphi \in For(\mathcal{L})$ tal que $\Box\varphi \in w_1$ e $\Box\varphi \notin w_2$, por exemplo. Sendo assim, para todo fórmula α, com $\alpha \neq \varphi$, tem-se $\Box\alpha \in w_1$ se e somente se $\Box\alpha \in w_2$.

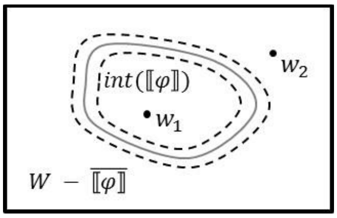
Lembremos que:

$FR(\llbracket\varphi\rrbracket_{M_C}) = \overline{\llbracket\varphi\rrbracket}_{M_C} \cap \overline{W - \llbracket\varphi\rrbracket}_{M_C}$ e $\overline{\llbracket\varphi\rrbracket}_{M_C} = int(\llbracket\varphi\rrbracket_{M_C}) \cup FR(\llbracket\varphi\rrbracket_{M_C})$

Como $w_1 \in B_\varphi$ e $w_2 \notin B_\varphi = int(\llbracket\varphi\rrbracket_{M_C})$, temos duas possibilidades para w_2:

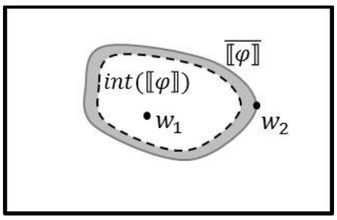
$$\begin{cases} w_2 \in FR(\llbracket\varphi\rrbracket_{M_C}) \ (a) \\ w_2 \in W - \overline{\llbracket\varphi\rrbracket}_{M_C} \ (b) \end{cases}$$

A) Suponhamos o caso (b).



Como $w_2 \in W - \overline{\llbracket\varphi\rrbracket}_{M_C}$, um aberto disjunto de $int(\llbracket\varphi\rrbracket_{M_C})$, aberto que contém w_1, encontramos um par de abertos disjuntos que contêm, cada um deles, um dos dois pontos distintos de W, portanto F_C seria Hausdorff (ver definição B.1.1).

Suponhamos agora o caso (a).



Por hipótese, se $\alpha \neq \varphi$, então $\Box\alpha \in w_1$ se e somente se $\Box\alpha \in w_2$, logo, todos os abertos básicos B_α, com exceção de B_φ, que contêm w_1, também contêm w_2.

Seja $\psi \neq \varphi$ uma fórmula de $\mathcal{L}$ tal que $\Box\psi \in w_1$ (deve existir uma, nem que seja teorema lógico).

Nesse caso, $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \in w_1 \;\Rightarrow\; \Box(\varphi \wedge \psi) \in w_1 \;\Rightarrow\; w_1 \in B_{\varphi\wedge\psi}$, já que w_1 é $S4$-consistente maximal.

Como φ não é $S4$-teorema, $\varphi \wedge \psi$ também não o é, além disso, $\varphi \wedge \psi$ não é $S4$-equivalente a φ, por hipótese, $w_2 \in B_{\varphi\wedge\psi}$.

$\therefore\; w_2 \in [\![\Box(\varphi \wedge \psi)]\!]_{M_C} = [\![\Box\varphi]\!]_{M_C} \cap [\![\Box\psi]\!]_{M_C} \quad \Rightarrow \; w_2 \in B_\varphi$ (contradição)

Logo, não pode ser o caso que $w_2 \in FR([\![\varphi]\!]_{M_C})$ e não exista nenhuma outra fórmula $\Box\psi \in \mathcal{L}$ tal que w_1 e w_2 difiram com relação a ela.

B) Suponhamos então, sem perda de generalidade, que exista somente uma única fórmula $\psi \neq \varphi$, tal que $\Box\psi \notin w_1$ e $\Box\psi \in w_2$, de maneira que, para qualquer outra fórmula $\alpha \in \mathcal{L}$, diferente de φ e ψ, $\Box\alpha \in w_1$ se e somente se $\Box\alpha \in w_2$. Nesse caso, temos:

$$\begin{cases} w_1 \in B_\varphi, \;\; w_1 \notin B_\psi \\ w_2 \notin B_\varphi, \;\; w_2 \in B_\psi \end{cases}$$

Suponhamos que $w_1 \notin FR([\![\psi]\!]_{M_C})$, então $w_1 \in W - \overline{[\![\psi]\!]}_{M_C}$, um aberto. Encontramos assim, novamente, dois abertos disjuntos que contêm, respectivamente, cada um dos dois pontos de W que desejávamos separar. Nesse caso, o espaço F_C seria Hausdorff, como desejado.

Por outro lado, se $w_1 \in FR([\![\psi]\!]_{M_C})$, temos novamente por hipótese que se α for diferente de φ e ψ, então $\Box\alpha \in w_1$ se e somente se $\Box\alpha \in w_2$. Seja $\phi \in For(\mathcal{L})$ distinta de φ e ψ, tal que $\Box\phi \in w_1$. É fato:

i) $\Box\phi \wedge \Box\varphi \in w_1$, $S4$-consistente maximal, então $w_1 \in B_{\phi\wedge\varphi}$, como $\phi \wedge \varphi$ é distinta tanto de ψ, quanto de φ, então $w_2 \in B_\varphi$ (contradição).

ii) $\Box\phi \wedge \Box\psi \in w_2$, $S4$-consistente maximal, então $w_2 \in B_{\phi\wedge\psi}$, como $\phi \wedge \psi$ é distinta tanto de ψ, quanto de φ, então $w_1 \in B_\psi$ (contradição).

Portanto, deve existir uma terceira fórmula, digamos β, distinta de φ e ψ, para o qual w_1 e w_2 difiram em relação à fórmula $\Box\beta$.

Da construção anterior e do fato de $\mathcal{L}$ ser enumerável, para quaisquer w_1 e w_2, elementos $S4$-consistentes maximais distintos, deve existir uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$ para o qual

$w_1 \in int([\![\varphi]\!]_{M_C})$ e $w_2 \in W - \overline{[\![\varphi]\!]}_{M_C}$, ou $w_2 \in int([\![\varphi]\!]_{M_C})$ e $w_1 \in W - \overline{[\![\varphi]\!]}_{M_C}$, i.e., dois elementos distintos de W são sempre separáveis por abertos disjuntos. Disso segue que F_C é Hausdorff.

■

Observação: No capítulo 2 de (BLACKBURN; VENEMA, 2002), os autores demonstram que algumas lógicas modais proposicionais podem ser "mergulhadas" na lógica de primeira ordem, de maneira que a propriedade de compacidade para os modelos de primeira ordem pode ser estendida aos modelos da lógica modal proposicional, como **S4**[8]. A demonstração da compacidade da lógica clássica de primeira ordem pode ser encontrada, além da obra anteriormente citada, em (PASEAU, 2010); nesse artigo, em especial, o autor discute a correlação entre a propriedade de compacidade (lógica) para (modelos) sistemas lógicos e a compacidade (no sentido topológico) do espaço dos modelos para o sistema lógico, cuja topologia é gerada de maneira trivial, como esboçamos aqui.

Teorema 5.3.7. *O espaço topológico F_C é compacto.*

Demonstração: De acordo com a proposição 59 - apêndice B, um espaço topológico em que toda família de conjuntos fechados com a PIF tem intersecção não-vazia é compacto.

Mostremos que F_C tem tal propriedade.

Seja $\{F_i\}_{i\in I}$ uma família de conjuntos fechados com a PIF. Como $\mathfrak{B}$ é base para a topologia do espaço, então $F_i^c = \bigcup\limits_{j\in J_i} B_{\varphi_{ij}}$, logo $F_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} B^c_{\varphi_{ij}}$.

Portanto, $\bigcup_{i\in I} F_i = \bigcup\limits_{i\in I}(\cup_{j\in J_i} B^c_{\varphi_{ij}})$ (I).

Consideremos $\Sigma = \{\neg\Box\varphi_{ij} \mid (i \in I) \wedge (j \in J_i)\}$ e $\Delta \subset_{Fin} \Sigma$, existem K e K_i subconjuntos finitos de I e J_i, respectivamente, que são índices para as fórmulas de Δ.

Como a família $\{F_i\}_{i\in I}$ tem a PIF, $\bigcap_{i\in K} F_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap\limits_{i\in K}(\cap_{j\in J_i} B^c_{\varphi_{ij}}) \subseteq \bigcap\limits_{i\in K}(\cap_{j\in K_i} B^c_{\varphi_{ij}})$. Portanto existe $w' \in \bigcap\limits_{i\in K}(\cap_{j\in K_i} B^c_{\varphi_{ij}})$ tal que $\Delta = \{\neg\Box\varphi_{ij} \mid (i \in K) \wedge (j \in K_i)\} \subset w'$.

O fato da lógica **S4** ter a propriedade de compacidade garante que se todo Δ finito possuir modelo, então Σ tem modelo. Como o conjunto Δ foi arbitrário, segue a hipótese de tal propriedade, ou seja, existe $w^* \in W$ tal que $\Sigma \subset w^*$.

[8] De fato, há demonstrações alternativas deste resultado utilizando o fato de que a lógica **S4** é canônica - caracterizada unicamente por uma classe de frames - e fortemente completa (em relação à semântica relacional), tal resultado mais específico pode ser encontrado na demonstração geral (ver (KREMER, 2013)) de que a lógica **S4** é fortemente completa em relação à classe de semânticas de vizinhanças construídas sobre espaços métricos denso-em-si-mesmos.

Portanto, para todo $i \in I$ e $j \in J_i$ tem-se que $w^* \models \neg\Box\varphi_{ij}$ então $w^* \in B^c_{\varphi_{ij}}$ para toda φ_{ij} com $i \in I$ e $j \in J_i$, logo $w^* \in \bigcap\limits_{i\in I}(\cap_{j\in J_i} B^c_{\varphi_{ij}}) = \bigcap\limits_{i\in I} F_i \Rightarrow \cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

■

É possível utilizarmos a métrica d, que será indicada mais adiante, que induz, conforme irei mostrar, a topologia do modelo topo $S4$-canônico, para mostrar a compacidade da lógica **S4**; como a compacidade desta lógica é um fato, não me alongarei nessa tarefa no presente trabalho.

Teorema 5.3.8. *O espaço topológico F_C é normal.*

Demonstração: O resultado segue da aplicação da proposição 60, do teorema 5.3.6 e do teorema anterior.

■

Teorema 5.3.9. *O frame de vizinhanças F_C é um espaço topológico regular.*

Demonstração: O resultado segue da aplicação dos teoremas 5.3.3, 5.3.8 e da proposição 57 - apêndice B.

■

Teorema 5.3.10. *O espaço topológico F_C é metrizável.*

Demonstração: O resultado segue da aplicação dos teoremas 5.3.9, 5.3.1 e do *teorema da metrização de Urysohn* (teorema B.1.1).

■

Proposição 16. *O* modelo topo $S4$-canônico *é construído sobre o E-espaço de Tarski F_C.*

Demonstração: O espaço topológico F_C é um Tarski-espaço topológico (corolário 5.3.1), normal (teorema 5.3.8), denso-em-si-mesmo (teorema 5.3.5) e com base enumerável (teorema 5.3.1). O resultado segue da aplicação do teorema 5.1.1.

■

Teorema 5.3.11. *O espaço topológico F_C é não enumerável.*

Demonstração: Já sabemos que F_C não possui pontos isolados, já que nenhum unitário é aberto, é compacto e é Hausdorff. Então, pelo teorema B.1.12 concluímos que F_C é não enumerável.

■

Teorema 5.3.12. *O espaço topológico F_C é localmente compacto.*

Demonstração: De acordo com o teorema B.1.10, precisamos mostrar que para todo $w \in W$ e toda vizinhança U de w, existe V vizinhança de w tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subseteq U$.

Como F_C é compacto, todo subconjunto fechado é compacto, logo $\overline{V}$ é compacto para toda vizinhança V de w.

Portanto, tomemos $w \in W$ e U uma de suas vizinhanças. Se $U = W$, o resultado é imediato, consideremos então $U \neq W$.

Sabemos que existe $\psi \in For(\mathcal{L})$ tal que $w \in B_\psi \subseteq U$. Seja então, em relação à métrica induzida d por $\mathfrak{B}$, a bola aberta $B' = B_d(w', \delta) \subseteq U$ tal que $w \in B'$.

Como nenhum aberto é unitário em F_C (denso-em-si-mesmo), existe $w'' \neq w'$ elemento de B'.

Se $w' \neq w$, consideremos $w_0 = w''$ e $w_1 = w$, por outro lado, se $w' = w$, consideremos $w_0 = w$ e $w_1 = w''$.

Em F_C sempre haverá abertos U_0 e U_1 disjuntos, tais que $w_0 \in U_0$ e $w_1 \in U_1$, pois o espaço é Hausdorff.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $w_0 = w$. Então $U' = U_0 \cap B'$ é um aberto que contém w, ou seja, existe $\delta' > 0$, com $\delta' < \delta$, tal que $w \in B^*$ e $B^* = B_d(w''', \delta') \subseteq B' \subseteq U$. Mas $w \in \overline{B^*} \subseteq B'$, logo B^* é a vizinhança V procurada.

■

Teorema 5.3.13. *Todas as vizinhanças de F_C são não enumeráveis.*

Demonstração: Sabemos que F_C é Hausdorff e compacto. Toda vizinhança de F_C são abertos, logo, como subespaços, também são Hausdorff. Do teorema anterior sabemos que o espaço é localmente compacto, ou seja, toda vizinhança de F_C pode ser vista como um subespaço topológico Hausdorff e compacto.

O resultado segue aplicando o teorema B.1.12 para cada vizinhança de F_C.

■

Como o frame F_C é um espaço metrizável, podemos procurar exibir uma métrica d que induz seus abertos básicos. De fato, considerando o teorema da completude e a construção do modelo canônico, sabemos pelo teorema de Tarski-Mckinsey que o espaço métrico, frame do modelo topo $S4$-canônico, deve ser denso-em-si mesmo, conforme discutimos aqui.

Utilizarei agora o método empregado pelos autores de (FEITOSA et al., 2013) para construir e exibir uma métrica para esse espaço. No artigo anteriormente citado, os autores determinam uma métrica para o espaço métrico formado pela coleção de modelos da lógica proposicional clássica; adaptarei essa estratégia para exibir a métrica que, de fato, origina o espaço topológico F_C.

Consideremos as seguintes definições:

Definição 5.3.1. *Seja $P = \{p_1, \ldots\}$ uma enumeração fixada para as variáveis proposicionais de $\mathcal{L}$.*

Definição 5.3.2. *Definimos recursivamente a* altura $h(\varphi)$ *de uma fórmula φ de $\mathcal{L}$ por:*

i) $h(p) = 0$ para toda variável proposicional p;

ii) $h(\neg\varphi) = h(\varphi)$;

iii) $h(\varphi \wedge \psi) = h(\varphi) + h(\psi) + 1$;

iv) $h(\Box\varphi) = h(\varphi) + 1$.

Definição 5.3.3. *Seja $For_n(\mathcal{L}) = \{\varphi \in For(\mathcal{L}) \mid \varphi(p_1, \ldots, p_k) : (1 \leq k \leq n) \wedge (0 \leq h(\varphi) \leq n)\}$, definido para todo $n \in \mathbb{N}$, para o qual $\varphi(p_1, \ldots, p_k)$ indica que as variáveis proposicionais em φ estão entre $\{p_1, \ldots, p_k\}$.*

Da definição anterior temos: $\emptyset = For_0(\mathcal{L}) \subseteq For_1(\mathcal{L}) \subseteq \ldots \subseteq For_n(\mathcal{L}) \subseteq \ldots$.

Notemos que $For(\mathcal{L}) = \bigcup_n For_n(\mathcal{L})$.

Definição 5.3.4. *Seja $For_n(\Box\mathcal{L}) = \{\Box\varphi \in \mathcal{L} \mid \Box\varphi(p_1, \ldots, p_k) : (1 \leq k \leq n) \wedge (0 \leq h(\Box\varphi) \leq n)\}$, definido para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Da definição anterior temos que $For_n(\Box\mathcal{L}) \subset For_n(\mathcal{L})$, para todo n.

Segue da proposição 15: Para todos os conjuntos $S4$-consistentes maximais w_1 e w_2, $w_1 = w_2$ se e somente se, para toda $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$, para todo n natural, tem-se $\Box\varphi \in w_1 \Leftrightarrow \Box\varphi \in w_2$.

Definição 5.3.5. *Sejam w_1, w_2 elementos de W.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $w_1 \equiv_n w_2$ se e somente se, para toda $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$ for o caso: $\Box\varphi \in w_1 \Leftrightarrow \Box\varphi \in w_2$.

Por vacuidade temos que para todo par (w_1, w_2): $w_1 \equiv_0 w_2$.

Lema 5.3.1. *1. Para todo n natural, $\equiv_n$ é relação de equivalência.*

2. Se $w_1 \equiv_n w_2$ então $w_1 \equiv_m w_2$ para todo $m \leq n$.

3. $w_1 = w_2$ se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$: $w_1 \equiv_n w_2$.

Demonstração: 1. Basta considerarmos a definição para verificar a reflexividade, simetria e transitividade da relação.

2. Suponhamos $w_1 \equiv_n w_2$, para toda $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$ tem-se $\Box\varphi \in w_1$ se e somente se $\Box\varphi \in w_2$ (*).

Para toda $\Box\psi \in For_m(\Box\mathcal{L})$ temos $\Box\psi \in For_n(\Box\mathcal{L})$, desde que $m \leq n$, portanto $\Box\psi \in w_1$ se e somente se $\Box\psi \in w_2$ - por (*) e, portanto, $w_1 \equiv_m w_2$.

3. $\Rightarrow$) Se $w_1 = w_2$ então para todo n natural, para toda $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$: $\Box\varphi \in w_1$ se e somente se $\Box\varphi \in w_2$, já que w_1 e w_2 compartilham as *mesmas* fórmulas.

$\Leftarrow$) Se para todo n: $w_1 \equiv_n w_2$, então para toda fórmula $\Box\varphi$ temos $\Box\varphi \in w_1$ se e somente se $\Box\varphi \in w_2$, da proposição 15 segue a igualdade procurada.

■

Usarei a seguir a seguinte notação:

$\psi^n_{\varphi,+} = \Box\neg\Box\neg\ldots\neg\Box\varphi$, com n símbolos $\Box$ e $n-1$ negações

$\psi^n_{\varphi,-} = \Box\neg\Box\neg\ldots\neg\Box\neg\varphi$, com n símbolos $\Box$ e n negações.

Note que $\Box p = \psi^1_{p,+}$ and $\Box\neg p = \psi^1_{p,-}$.

Definição 5.3.6. *Definamos os seguintes conjuntos de acordo com a enumeração P, para todo n natural:*

$\mathcal{A}_n = \{\psi^1_{p_1,+}, \ldots, \psi^1_{p_n,+}, \psi^2_{p_1,+}, \ldots, \psi^2_{p_n,+}, \ldots, \psi^n_{p_1,+}, \ldots, \psi^n_{p_n,+}, \psi^1_{p_1,-}, \ldots, \psi^1_{p_n,-}, \psi^2_{p_1,-}, \ldots, \psi^2_{p_n,-}, \ldots, \psi^n_{p_1,-}, \ldots, \psi^n_{p_n,-}\}$;

$\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n \cup \{p_1, \ldots, p_n\}$ *, i.e., $\mathcal{B}_n$ é a coleção que estende naturalmente $\mathcal{A}_n$ com a inclusão de todas as variáveis proposicionais de 1 até n.*

Proposição 17. *Para todo par w_1 e w_2 de elementos de W:*

$w_1 \equiv_n w_2$ se e somente se $w_1 \cap \mathcal{A}_n = w_2 \cap \mathcal{A}_n$

Demonstração: $\Rightarrow$) Se $w_1 \equiv_n w_2$ então $\Box\varphi \in w_1$ se e somente se $\Box\varphi \in w_2$, para toda fórmula $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$; mas $\mathcal{A}_n \subset For_n(\Box\mathcal{L})$, logo $w_1 \cap \mathcal{A}_n = w_2 \cap \mathcal{A}_n$.

$\Leftarrow$) Se $w_1 \cap \mathcal{A}_n = w_2 \cap \mathcal{A}_n$, então para todo $1 \leq i \leq n$, $1 \leq m \leq n$: $\psi^m_{p_i,+} \in w_1$ se e somente se $\psi^m_{p_i,+} \in w_2$, assim como $\psi^m_{p_i,-} \in w_1$ se e somente se $\psi^m_{p_i,-} \in w_2$.

Notemos que para toda fórmula $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$, para n o primeiro natural em que a fórmula aparece em $For(\Box\mathcal{L})$, então $\varphi(p_1, \ldots, p_k)$, para $k \leq n$, e altura de $h(\Box\varphi) \leq n$.

Desta forma, se φ for fórmula de $\mathcal{L}$ - em que $\varphi = \psi$ ou $\varphi = \neg\psi$, já que $h(\psi) = h(\neg\psi)$ - então $\Box\varphi$ pode ser deduzida, em $w \in W$, por uma das seguintes possibilidades:

a) Por necessitação, logo φ e teorema lógico e pertence a w:

Se $\varphi(p_1, \ldots, p_k)$ for $S4$-teorema, então $\varphi \in w$, para todo w.

Considerando $h(\varphi) = m$, para $m \geq k$, então $\Box\varphi \in For_p(\Box\mathcal{L})$ para todo $p \geq m + 1$, tal que $\Box\varphi \in w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$ para todo w.

b) Pela aplicação do axioma 4:

Se $\varphi(p_1, \ldots, p_k)$ então $h(\Box\varphi) = h(\varphi) + 1 = m > k$. Considerando o axioma T, $\Box\Box\varphi \in w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$, para $p \geq m + 1$, se e somente se[9] $\Box\varphi \in w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$, para $p \geq m$.

c) Pela aplicação do axioma γ:

Se $\Box\varphi = \Box(\psi_1 \wedge \psi_2)$, então é inferida de $\Box\psi_1$ e $\Box\psi_2$ em um w de W - segue da maximalidade de w. Consideremos $\psi_1(p_1, \ldots, p_{k_1})$, $\psi_2(p_1, \ldots, p_{k_2})$, $h(\Box\psi_1) = n_1$ e $h(\Box\psi_2) = n_2$, para $n_1 \geq k_1$ e $n_2 \geq k_2$; por fim, seja $n = \max\{n_1, n_2\}$.

Então $\Box\varphi \in w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$, para $p \geq n_1 + n_2$, se e somente se $\Box\psi_1 \in w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$, para $p \geq n_1$, e $\Box\psi_2 \in w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$, para $p \geq n_2$, se e somente se $\Box\psi_1$ e $\Box\psi_2$ pertencem a $w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$, para $p \geq n$, se e somente se $\Box\psi_1 \wedge \Box\psi_2 \in w \cap For_p(\Box\mathcal{L})$, para $p \geq n_1 + n_2 + 1$.

Logo, $\Box(\psi_1 \wedge \psi_2) \in w \cap For_n(\mathcal{L})$ se e somente se $\Box\psi_1$ e $\Box\psi_2$ já são elementos de $w \cap For_m(\mathcal{L})$, para algum $m < n$.

d) Da regra M e *modus pones*, segue que se $\varphi \supset \psi \in w \cap For_n(\mathcal{L})$, então $\Box\psi \in w \cap For_n(\Box\mathcal{L})$ somente se $\Box\varphi \in w \cap For_m(\mathcal{L})$, para algum $m < n$. Isso garante que as lógicas modais normais apresentem certa "homogeneidade" em relação à pertinência das fórmulas p e $\Box p$ nos conjuntos $S4$-consistentes e maximais w.

Por indução na altura da fórmula φ de $\mathcal{L}$, verificamos de a), b) e c) que o fato

[9] Vale pela equivalência entre as fórmulas em **S4**.

de $\Box\varphi \in w \cap For_n(\Box\mathcal{L})$ depende das fórmulas em $w \cap For_m(\Box\mathcal{L})$, para algum $m \leq n$. Portanto, pela consistência maximal de w, os elementos em $w \cap For_n(\Box\mathcal{L})$ são unicamente determinados pelos elementos $\psi^m_{p_i,+}$ de $\mathcal{A}_n$ presentes em w, para i e m menores ou iguais a n.

■

Como $\mathcal{B}_n$ estende $\mathcal{A}_n$ segue da proposição anterior que se $w_1 \cap \mathcal{B}_n = w_2 \cap \mathcal{B}_n$, então $w_1 \equiv_n w_2$; notemos que aqui não vale a volta.

Proposição 18. *Se φ for fórmula de altura 0, então $\Box\varphi \in w$ nos permite concluir que para fórmulas do tipo $\psi^n_{\varphi,+}$:*

Se n for par, $\psi^n_{\varphi,+} \notin w$; se n for ímpar, $\psi^n_{\varphi,+} \in w$. Neste caso, $\psi^1_{\varphi,-} \notin w$.

Demonstração: Seja $\psi^1_{\varphi,+} = \Box\varphi \in w$, então $\neg\Box\varphi \notin w$, logo $\psi^2_{\varphi,+} \notin w$.

Suponhamos que n é um número ímpar e $\psi^n_{\varphi,+} \in w$, como $\psi^n_{\varphi,+} \supset \neg\Box\neg\psi^n_{\varphi,+}$, novamente usando a regra M, axioma 4 e *modus ponens*, segue que $\psi^{n+2}_{\varphi,+} \in w$. Por indução sobre n (ímpar), segue o resultado procurado.

Seja n um número ímpar, vimos que $\psi^n_{\varphi,+} \in w$, logo $\psi^{n-1}_{\varphi,+} \notin w$, para $n-1$ par.

Se $\Box\varphi \in w$ então $\neg\Box\neg\varphi \in w$, logo $\psi^1_{\varphi,-} \notin w$.

■

Observação: $\psi^n_{\varphi,-}$ pode ser obtida de $\psi^n_{\theta,+}$ tomando $\theta = \neg\varphi$; neste caso, $\Box\neg\varphi \in w$ implica $\psi^1_{\theta,+} \in w$, ou seja, para n par, $\psi^n_{\varphi,-} \notin w$ e $\psi^n_{\varphi,-} \in w$, para n ímpar.

Da proposição anterior podemos inferir que para p variável proposicional:

Proposição 19. *Se $\Box p \notin w$ e/ou $\Box\neg p \notin w$, podemos concluir que:*

a) $\psi^1_{\varphi,+}$ e/ou $\psi^1_{\varphi,-}$ não pertencem a w.

b) Se $\psi^n_{\varphi,+}$ ($\psi^n_{\varphi,-}$) pertence a w, então $\psi^{n-1}_{\varphi,+}$ e $\psi^{n+1}_{\varphi,+}$ ($\psi^{n-1}_{\varphi,-}$ e $\psi^{n+1}_{\varphi,-}$) não pertencem a w.

c) Se $\psi^n_{\varphi,+}$ ($\psi^n_{\varphi,-}$) pertence a w, então $\psi^{n+2}_{\varphi,+}$ ($\psi^{n+2}_{\varphi,-}$) pertence a w.

Demonstração: a) Imediato da definição e hipótese.

b) Suponhamos que $\psi^n_{\varphi,+} \in w$, para $n > 1$.

Pelo axioma T temos que $\neg\psi^{n-1}_{\varphi,+} \in w$, logo $\psi^{n-1}_{\varphi,+} \notin w$. Por outro lado, se $\psi^{n+1}_{\varphi,+} \in w$, pelo mesmo argumento concluímos que $\psi^n_{\varphi,+} \notin w$, o que contradiz a hipótese, logo $\psi^{n+1}_{\varphi,+} \notin w$.

c) Suponhamos que $\psi^n_{\varphi,+} \in w$, para $n > 1$.

Sabemos que $\neg\Box\neg\psi^n_{\varphi,+} \in w$; aplicando a regra M, o axioma 4 e *modus ponens*, segue que $\psi^{n+2}_{\varphi,+} \in w$.

∎

Da proposição anterior podemos inferir que para p variável proposicional, em que $\Box p$ e $\Box\neg p$ não pertencem a w, pode ser expresso que $\psi^1_{p,+}$ e $\psi^1_{p,-}$ não pertencem a w. Por outro lado, as outras fórmulas da forma ψ estão "livres", respeitando o fato de que:

I) Se $\psi^n_{p,+}$ $(\psi^n_{p,-})$ pertence a w, então $\psi^m_{p,+}$ $(\psi^m_{p,-})$ pertence a w, para todo m de mesma paridade de n, maior ou igual a n.

II) Se $\psi^n_{p,+}$ $(\psi^n_{p,-})$ pertence a w, então $\psi^{n-1}_{p,+}$ e $\psi^{n+1}_{p,+}$ $(\psi^{n-1}_{p,-}$ e $\psi^{n+1}_{p,-})$ não pertencem a w.

Logo, as fórmulas da forma ψ^n, para $n > 1$, estão "livres", na medida em que se uma fórmula pertencer a w para algum n par (ímpar), então pertencerá a w para todo par (ímpar) subsequente, enquanto as fórmulas vizinhas $n-1$ e $n+1$ não pertencerão a w.

Por outro lado, se $\Box p \in w$ ou $\Box\neg p \notin w$, então as fórmulas $\psi^n_{p,-}$ $(\psi^n_{p,+})$ estão "livres", para $n \geq 2$, desde que respeitem as condições da proposição.

Proposição 20. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, existe* $\{v_j\}$ *família com* N^* *funções distintas, em que* $N^* = \displaystyle\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k}\cdot 2^{n-m-k}\cdot n^m\cdot n^k\cdot (n^2)^{n-m-k}$*, de maneira que para cada* $w \in W$*,* $w \cap \mathcal{B}_n = \{\varphi \in \mathcal{B}_n \mid v_j(\varphi) = 1\}$ *para um único* j *tal que* $1 \leq j \leq N^*$*.*

Demonstração: Dos resultados anteriores segue que para todo n natural, se p_i ou $\neg p_i$ for necessária em w, então à pertinência, em w, de p_i e $\psi^m_{p_i,+}$ para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq m \leq n$, ou de $\neg p_i$ e $\psi^m_{p_i,-}$, estão totalmente determinadas.

Caso para alguma p_i, $i \leq n$, for o caso que $\Box p_i \notin w$ e $\Box\neg p_i \notin w$, então a condição para $\psi^m_{p_i,\pm}$ satisfaz os resultados da proposição 19, assim como p_i pode ou não pertencer à w. Em cada caso, cada sequência $\psi^2_{p_i,+}, \ldots, \psi^n_{p_i,+}$, ou $\psi^2_{p_i,-}, \ldots, \psi^n_{p_i,-}$ se for o caso, em relação à pertinência em w[10], pode ocorrer de n formas distintas. Se p_i for necessária, ou sua negação, então há n formas possíveis de pertinência para as fórmulas "livres" do tipo ψ apropriado; caso p_i seja contingente em w, totaliza-se um total de n^2 formas distintas de pertinência para as fórmulas de tipo ψ_+ e ψ_-. Estas observações mais as proposições anteriores demonstram o resultado procurado.

∎

[10] Ou o que é equivalente, ao número possível de sequências de 0's ou 1's, imagem por uma função v de contradomínio $\{0, 1\}$ que representa a pertinência ou não das referidas fórmulas em w.

Seja $J_{N^*} = \{1, \ldots, N^*\}$, pela proposição anterior podemos construir um conjunto $N_n^* = \{w_{j_1}, \ldots, w_{j_{N^*}}\}$, com N^* elementos, cada um deles escolhidos por uma das funções da família $\{v_j\}_{j \in J_{N^*}}$.

Fixados $n \in \mathbb{N}$ e a família N_n^*, para todo $w \in W$ existe um único $w_{j_p} \in N_n^*$ tal que $w_{j_p} \equiv_n w$ e $w_{j_p} \cap \mathcal{B}_n = w \cap \mathcal{B}_n$.

Portanto posso agora exibir explicitamente a métrica d que irá gerar, conforme mostrarei a seguir, o espaço métrico dos modelos canônicos anteriormente apresentados, conforme encontrados na literatura. Considero este resultado uma importante contribuição formal do trabalho que apresento.

Definição 5.3.7. *Para todo par (w_1, w_2) de $W \times W$, podemos definir uma aplicação d da forma $W \times W \to \mathbb{R}$, por:*

$$d(w_1, w_2) = inf\{\frac{1}{n+1} \mid w_1 \equiv_n w_2\}$$

Lema 5.3.2. *A aplicação d satisfaz:*

1. $d(w_1, w_2) = \frac{1}{n}$ se e somente se $w_1 \equiv_m w_2$ para todo $m < n$ e não for o caso que $w_1 \equiv_n w_2$.

2. $d(w_1, w_3) \leq max\{d(w_1, w_2), d(w_2, w_3)\}$.

3. Se $d(w_1, w_2) \neq d(w_2, w_3)$ então $d(w_1, w_3) = max\{d(w_1, w_2), d(w_2, w_3)\}$.

Demonstração: 1. $\Rightarrow$) Seja $d(w_1, w_2) = \frac{1}{n}$; como $n < n + 1$ tem-se $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, portanto não é o caso que $w_1 \equiv_n w_2$. Mas para todo $m \leq n$ tem-se $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m+1}$, ou seja, $d(w_1, w_2) \leq \frac{1}{m+1}$ e, portanto, $w_1 \equiv_m w_2$.

$\Leftarrow$) Como não é o caso que $w_1 \equiv_n w_2$, existe $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$ tal que $\Box\varphi \in w_1$ e $\Box\varphi \notin w_2$.

Por hipótese, para todo $m < n$ tem-se $w_1 \equiv_m w_2$, portanto a coleção de índices para os quais esta relação é satisfeita é $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ ou seja, $d(w_1, w_2) = \frac{1}{(n-1)+1} = \frac{1}{n}$.

2. Sejam $d(w_1, w_2) = \frac{1}{m'+1}$ e $d(w_2, w_3) = \frac{1}{m''+1}$; para todo $n \leq m'$ temos $w_1 \equiv_n w_2$, para todo $n \leq m''$ temos $w_2 \equiv_n w_3$.

Tomando $m = min\{m', m''\}$, para todo $n \leq m$ temos $w_1 \equiv_n w_2$ e $w_2 \equiv_n w_3 \Rightarrow_{Trans.} w_1 \equiv_n w_3$.

Se $d(w_1, w_3) = \frac{1}{p+1} \Rightarrow n \leq p$ e $w_1 \equiv_n w_3$, logo $p \geq m$, ou seja, $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{m+1}$.

3. Suponhamos que $d(w_1, w_2) \neq d(w_2, w_3)$, para $d(w_1, w_2) = \frac{1}{m'+1}$ e $d(w_2, w_3) = \frac{1}{m''+1}$.

Como $m' \neq m''$, consideremos $m = min\{m', m''\}$, portanto m é o maior natural tal que, para todo $n \leq m$ tem-se $w_1 \equiv_n w_2$ e $w_2 \equiv_n w_3$, pela transitividade segue que m é o máximo para o qual $w_1 \equiv_n w_3 \Rightarrow d(w_1, w_3) = \frac{1}{m+1} = max\{d(w_1, w_2), d(w_2, w_3)\}$.

■

Proposição 21. *A aplicação $d : W \times W \to \mathbb{R}$ é uma métrica.*

Demonstração: 1. Da definição segue que $d(w_1, w_2) \geq 0$ para todo par $(w_1, w_2) \in W \times W$; por outro lado $d(w_1, w_2) = 0$ se e somente se $inf\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \wedge w_1 \equiv_n w_2\} = 0 \Leftrightarrow$ Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $w_1 \equiv_n w_2$, logo do lema 5.3.2, item 3), segue a igualdade desejada.

2. $d(w_1, w_2) = d(w_2, w_1)$, pois $\equiv_n$ é simétrica.

3. Para todo par $d(w_1, w_3)$ segue dos itens 2) e 3), lema 5.3.2, que $d(w_1, w_3) \leq max\{d(w_1, w_2), d(w_2, w_3)\}$ para qualquer w_2; mas $max\{d(w_1, w_2), d(w_2, w_3)\} \leq d(w_1, w_2) + d(w_2, w_3)$, já que as duas parcelas são números reais não-negativos.

■

Definição 5.3.8. *A* bola aberta *de centro w' e de raio $\frac{1}{r}$, para r natural, é dada por:*

$$B_{\frac{1}{r}}(w') = \{w \in W \mid d(w, w') < \frac{1}{r}\}$$

Notemos que se $d(w', w) < \frac{1}{r}$ então $d(w', w) \leq \frac{1}{r+1}$, então $B_{\frac{1}{r}}(w') = \{w \in W \mid w \equiv_r w'\} = \{w \in W \mid \forall \Box\varphi \in For_r(\Box\mathcal{L}) : \Box\varphi \in w' \Leftrightarrow \Box\varphi \in w\}$.

Definição 5.3.9. *Denominemos* espaço métrico $S4$-canônico *ao espaço topológico (W, d) gerado, sobre W, pela métrica d. Os abertos básicos deste espaço são as bolas abertas $B_{\frac{1}{r}}(w')$.*

Proposição 22. *Seja $\mathfrak{B} = \{B_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}\}$ a base para o frame do modelo topo $S4$-canônico.*

A topologia gerada pela métrica do espaço (W, d) é equivalente à topologia gerada por $\mathfrak{B}$. Portanto $(W, d) \cong F_C$ (homeomórficos).

Demonstração: a) Mostremos que os abertos básicos de $\mathfrak{B}$ são abertos de (W, τ_d) (em que τ_d é a topologia gerada pela métrica d).

Tomemos $B_\varphi \in \mathfrak{B}$ e $w' \in B_\varphi$. Existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Box\varphi \in For_n(\Box\mathcal{L})$.

Seja $w \in B_{\frac{1}{n}}(w') \Rightarrow d(w, w') < \frac{1}{n} \Rightarrow w \equiv_n w' \Rightarrow \Box\varphi \in w \Rightarrow w \in B_\varphi$.

Portanto $B_{\frac{1}{n}}(w') \subset B_\varphi$.

Como w' é arbitrário, todo ponto de B_φ é centro de uma bola aberta da métrica d contida em B_φ, i.e., B_φ é aberto do espaço métrico.

Isto mostra que $\tau_C \subset \tau_d$, para τ_C a topologia do frame canônico F_C .

b) Mostremos que as bolas abertas de (W, d) são abertos de F_C.

Seja $B_{\frac{1}{n}}(w')$ uma bola aberta de (W, d) e w^* um de seus elementos, incluindo, possivelmente, o próprio w^*. Por definição, $w^* \equiv_n w'$, i.e., (proposição 17) $w^* \cap \mathcal{A}_n = w' \cap \mathcal{A}_n$.

Notemos que para $n' \geq n$, $B_{\frac{1}{n'}(w^*)} \subseteq B_{\frac{1}{n}}(w')$, pois se $w \in B_{\frac{1}{n'}}(w^*)$, então $w \cap \mathcal{A}_{n'} = w^* \cap \mathcal{A}_{n'}$; como $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n'}$ segue que $w \cap \mathcal{A}_n = w^* \cap \mathcal{A}_n = w' \cap \mathcal{A}_n$, logo $w \in B_{\frac{1}{n}}(w')$.

Sejam $K_\Box^+ = \{i \leq n' \mid \Box p_i \in w^*\}$ e $K_\Box^- = \{i \leq n' \mid \Box\neg p_i \in w^*\}$; então $K_\Box^+ \cap K_\Box^+ = \emptyset$ e $|K_\Box^+| + |K_\Box^+| \leq n'$.

Para todo $i \in K_\Box^+ \cup K_\Box^-$, se $i \in K_\Box^+$ a sequência $\psi^2_{p_i,-}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,-}$ possui n' formas distintas de pertencer ou não, cada elemento, em w^*, e as fórmulas da forma ψ_+ ficam fixadas; já se $i \in K_\Box^-$ a sequência $\psi^2_{p_i,+}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,+}$ possui n' formas distintas de pertencer ou não, cada elemento, em w^*, e as fórmulas da forma ψ_- ficam fixadas.

Para todo $i \leq n'$ tal que $i \notin K_\Box^+ \cup K_\Box^-$, temos $\neg\Box\neg p_1 \wedge \neg\Box p_1 \in w^*$, i.e., p_i é contingente em w^* (e na bola aberta de raio $\frac{1}{n'}$). Neste caso, a sequência $\psi^2_{p_i,+}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,+}$ possui n' formas distintas de pertencer ou não, cada elemento, em w^*, assim como n' formas distintas para a sequência $\psi^2_{p_i,-}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,-}$.

Definamos $K_\Diamond = \{i \leq n' \mid i \notin K_\Box^+ \cup K_\Box^+\}$.

Segue do resultado da proposição 20 que para $i \in K_\Diamond$, temos:

Se $\psi^2_{p_i,+} \in w^*$, esta fórmula fixa a pertinência ou não de todos os elementos $\psi^m_{p_i,+}$ em w^*, para $m \leq n'$.

Se $\psi^3_{p_i,+}$ for o primeiro elemento desta sequência ψ^+ em w^*, esta fórmula fixa a pertinência ou não de todos os elementos $\psi^m_{p_i,+}$ em w^*, para $m \leq n'$.

Se $\psi^4_{p_i,+}$ for o primeiro elemento desta sequência ψ^+ em w^*, a fórmula $(\psi^4_{p_i,+} \wedge \neg\psi^2_{p_i,+}) = \neg(\neg\psi^4_{p_i,+} \vee \psi^2_{p_i,+})$ fixa a pertinência ou não de todos os elementos $\psi^m_{p_i,+}$ em w^*, para $m \leq n'$.

Se $\psi^5_{p_i,+}$ for o primeiro elemento desta sequência ψ^+ em w^*, a fórmula $(\psi^5_{p_i,+} \wedge \neg\psi^3_{p_i,+} \wedge \neg\psi^2_{p_i,+}) = \neg(\neg\psi^5_{p_i,+} \vee \psi^3_{p_i,+} \vee \psi^2_{p_i,+})$ fixa a pertinência ou não de todos os elementos $\psi^m_{p_i,+}$ em w^*, para $m \leq n'$.

Repetindo o procedimento, deduzimos que se a última fórmula $\psi^{n'}_{p_i,+}$ for o primeiro elemento da sequência que pertence a w^*, então a fórmula $(\psi^{n'}_{p_i,+} \wedge \neg\psi^{n'-2}_{p_i,+} \wedge \ldots \wedge \neg\psi^{2}_{p_i,+}) = \neg(\neg\psi^{n'}_{p_i,+} \vee \psi^{n'-2}_{p_i,+} \vee \ldots \vee \psi^{2}_{p_i,+})$ fixa a pertinência ou não de todos os elementos da sequência; caso contrário, se nenhuma das fórmulas da sequência ψ^+ (limitadas por n') pertencerem a w^*, então a fórmula $\neg(\psi^{n'}_{p_i,+} \vee \ldots \vee \psi^{2}_{p_i,+})$ fixa a pertinência de todas as fórmulas que aparecem na sequência em w^*.

Portanto, em qualquer um dos n' casos, é possível determinar uma fórmula $\psi_{p_i,+}$ - como indicado acima - que representa a pertinência ou não das fórmulas $\psi^{2}_{p_i,+}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,+}$ em w^*. O mesmo pode ser afirmado, similarmente, para a fórmula $\psi_{p_i,-}$, representando a pertinência das fórmulas de $\psi^{2}_{p_i,-}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,-}$ em w^*.

Neste caso, para todo $i \in K_\Diamond$ definamos as fórmulas $\psi^{w^*}_{p_i,+} = \neg\psi^{1}_{p_i,+} \wedge \psi_{p_i,+} \in w^*$ e $\psi^{w^*}_{p_i,-} = \neg\psi^{1}_{p_i,-} \wedge \psi_{p_i,-} \in w^*$; seja $\varphi^{w^*}_{p_i} = \psi^{w^*}_{p_i,+} \wedge \psi^{w^*}_{p_i,-}$, fórmula que é elemento de w^* - na verdade, elemento de todos os w's em $B_{\frac{1}{n'}}(w^*)$.

Similarmente, se $i \in K^+_\Box$ ($K^-_\Box$) a fórmula $\psi^{w^*}_{p_i,-} = \neg\psi^{1}_{p_i,-} \wedge \psi_{p_i,-}$ ($\psi^{w^*}_{p_i,+} = \neg\psi^{1}_{p_i,+} \wedge \psi_{p_i,+}$) fixa as fórmulas "livres" em relação a p_i, de maneira que $\varphi^{w^*}_{p_i} = \Box p_i \wedge \psi^{w^*}_{p_i,-}$ ($\Box\neg p_i \wedge \psi^{w^*}_{p_i,+}$) é elemento de w^* - na verdade, elemento de todos os w's em $B_{\frac{1}{n'}}(w^*)$.

A fórmula $\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \vee \neg\Box\varphi^{w^*}_{p_i}$ é $S4$-teorema e $(\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i}) \vee (\neg\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i})$ pertence a w^*, para todo $i \leq n'$, já que $\varphi^{w^*}_{p_i}$ é w^* elemento. Neste caso:

$$w^* \vdash_{S4} (\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \vee \neg\Box\varphi^{w^*}_{p_i}) \supset ((\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i}) \vee (\neg\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i}))$$

Aplicando a regra M (teorema de dedução para **S4**), necessitação e *modus ponens*, segue que $w^* \vdash_{S4} \Box((\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i}) \vee (\neg\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i}))$.

Portanto $\Box((\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i}) \vee (\neg\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i})) \in w^*$ para todo $i \leq n'$.

Considerando $\varphi_{p_i} = (\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i}) \vee (\neg\Box\varphi^{w^*}_{p_i} \wedge \varphi^{w^*}_{p_i})$ segue que $w^* \in B_{\varphi_{p_i}}$.

Qualquer que seja $i \leq n'$, para todo $w \in B_{\varphi_{p_i}}$ tem-se:

$w \cap \{\psi^{1}_{p_i,+}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,+}, \psi^{1}_{p_i,-}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,-}\} = w^* \cap \{\psi^{1}_{p_i,+}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,+}, \psi^{1}_{p_i,-}, \ldots, \psi^{n'}_{p_i,-}\}$, pois $\varphi^{w^*}_{p_i} \in w$.

Definamos:

$$\Box\varphi := (\bigwedge_{K^+_\Box} \Box\varphi_{p_i}) \bigwedge (\bigwedge_{K^-_\Box} \Box\varphi_{p_i}) \bigwedge (\bigwedge_{K_\Diamond} \Box\varphi_{p_i}) \equiv \Box((\bigwedge_{K^+_\Box} \varphi_{p_i}) \bigwedge (\bigwedge_{K^-_\Box} \varphi_{p_i}) \bigwedge (\bigwedge_{K_\Diamond} \varphi_{p_i})).$$

Por fim, consideremos um aberto básico de (W, τ_C), o conjunto $B_\varphi = [\![\Box\varphi]\!]_{M_C}$, não vazio, já[11] que $w^* \in B_\varphi$.

[11] Se $K^+_\Box$, $K^-_\Box$ ou $K_\Diamond$ for vazio, então a conjunção nele baseada não aparecerá na definição de φ.

Para todo $i \leq n'$ e todo $w \in B_\varphi$, se:

i) $i \in K_\Box^+$, então $\Box p_i \in w$ e $\psi^{w^*}_{p_i,-} \in w$;

ii) $i \in K_\Box^-$, então $\Box\neg p_i \in w$ e $\psi^{w^*}_{p_i,+} \in w$;

iii) $i \in K_\Diamond$, então $\psi^{w^*}_{p_i,+} \wedge \psi^{w^*}_{p_i,-} \in w$.

E as três condições são entre si excludentes e exaustivas para i.

Portanto, para todo $w \in B_\varphi$ temos $w \cap \mathcal{A}_{n'} = w^* \cap \mathcal{A}_{n'}$, ou seja, $w \cap \mathcal{A}_n = w^* \cap \mathcal{A}_n = w' \cap \mathcal{A}_n$, i.e., $w^* \in B_\varphi \subseteq B_{\frac{1}{n}}(w')$.

Como w^* é arbitrário, segue que para todo ponto w^* de $B_{\frac{1}{n}}(w')$ existe um aberto básico de (W, τ_C) que contém w^* e está totalemente contido na bola aberta de centro w', logo tal bola aberta é aberto do espaço (W, τ_C).

Isso mostra que $\tau_d \subset \tau_C$.

De a) e b) segue que as topologias geradas pelas bolas abertas da métrica d e pela base $\mathfrak{B}$ são equivalentes.

■

Proposição 23. *O espaço (W, d) é totalmente limitado.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$, existe um menor n natural tal que $\frac{1}{n} \leq \epsilon$.

Seja $J = \{1, \ldots, N\}$ para N calculado como na proposição 20.

Seja $w \in W$, existe $w_j \in \{w_i\}_{i \in J}$, esta família construída sobre a família de funções $\{v_j\}_{j \in J}$, de maneira que $w \equiv_n w_j$, ou seja, $d(w, w_j) < \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow w \in B_\epsilon(w_j)$.

Portanto, para todo $w \in W$ temos $w \in \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(w_j) \Rightarrow W = \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(w_j)$ ou seja, (W, d) é um espaço totalmente limitado.

■

Teorema 5.3.14. *O espaço F_C é desconexo.*

Demonstração: Da proposição anterior sabemos que para cada $\epsilon > 0$ existe n natural e N, calculado em função de n, para os quais $W = \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(w_j)$, tal que cada w_j é escolhido a partir da família $\{v_j\}_{j=1}^{N}$, tal que $B_\epsilon(w_j) = \{w \in W \mid w \equiv_n w_j\}$.

Consideremos $J = \{1, \ldots, N\}$ para determinado ϵ fixado, tal que existe um n, $\frac{1}{n} < \epsilon$, que garanta que $J_\Box \neq \emptyset$, conjunto definido da seguinte forma:

Assumindo $J^+ = \{j \in J \mid \Box p_i \in w_j, 1 \leq i \leq n\}$; $J^- = \{j \in J \mid \Box\neg p_i \in w_j, 1 \leq i \leq n\}$ e $J_\Box = J^+ \cup J^-$.

A proposição anterior garante que, para cada enumeração das variáveis proposicionais da linguagem, existe um ϵ tal que $J_\Box \neq \emptyset$.

Podemos assim definir $J_* = J - J_\Box$, conjunto não-vazio - dado que o espaço é totalmente limitado e nem todas as variáveis proposicionais possam ser necessárias (ou sua negação) em todos os w's.

Sejam $W_\Box = \{w_j \mid j \in J_\Box\}$ e $W_* = \{w_j \mid j \in J_*\}$.

Portanto, se $w_j \in W_\Box$, como $B_\epsilon(w_j) = \{w \in W \mid w \equiv_n w_j\}$ segue que se $w \in B_\epsilon(w_j)$ temos que para algum $i \leq n$, $\Box p_i \in w$ ou $\Box\neg p_i \in w$. Por outro lado, se $w_j \in W_*$, então para $w \in B_\epsilon(w_j)$ e para todo $i \leq n$ tem-se $\Box p_i \notin w$ e $\Box\neg p_i \notin w$.

Ou seja:

$$\bigcup_{w_j \in W_\Box} B_\epsilon(w_j) = \{w \in W \mid \forall i \leq n : \Box p_i \in w \text{ ou } \Box\neg p_i \in w\};$$

$$\bigcup_{w_j \in W_*} B_\epsilon(w_j) = \{w \in W \mid \forall i \leq n : \Box p_i \notin w \text{ e } \Box\neg p_i \notin w\};$$

Como $\{w_j\}_{j=1}^N = W_\Box \cup W_*$, segue que

$$W = \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(w_j) = (\bigcup_{w_j \in W_\Box} B_\epsilon(w_j)) \bigcup (\bigcup_{w_j \in W_*} B_\epsilon(w_j)).$$

Notemos que, por construção, $(\bigcup_{i \in W_\Box} B_\epsilon(w_j)) \bigcap (\bigcup_{i \in W_*} B_\epsilon(w_j)) = \emptyset$.

Portanto, o espaço métrico é desconexo.

■

Vale observar que este espaço não é totalmente desconexo, pois como visto no resultado anterior, a demonstração depende da escolha de um valor de ϵ específico, que depende da enumeração das variáveis proposicionais da linguagem.

Mostramos topologicamente, portanto, que o *modelo topo $S4$-canônico* possui as propriedades para modelos completos em relação ao sistema modal proposicional **S4**, como demonstrado algebricamente por Tarski e McKinsey em (TARSKI; MCKINSEY, 1944). Vimos também que o espaço F_C é separável (teorema 5.3.4), possuindo portanto propriedades elementares locais dos espaços euclidianos (com a topologia induzida pela métrica usual), como ser Hausdorff e localmente compacto. Porém, o fato de F_C ser desconexo, compacto e totalmente limitado já nos mostra que a similaridade "geométrica" entre esses espaços não é total (não são homeomórficos), pois nenhum espaço euclidiano é compacto, por exemplo, ou seja, tal similaridade entre esses espaços é apenas local e "incompleta" - notemos que tal similaridade seria mais forte se o modelo topo $S4$-canônico fosse também localmente conexo - ver conclusão.

Ressalto que o fato de ser desconexo não implica não-conexidade local; observando as bolas abertas induzidas pela métrica d e a definição de tal métrica, nota-se que existem bolas abertas que não contêm subconjunto conexo por caminhos. Tal restrição deve-se ao fato de que $im(d) = \{0, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\} \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$, é um conjunto não-contínuo[12], o que segue da linguagem formal utilizada ser não-enumerável.

Teorema 5.3.15. *O espaço F_C não é localmente conexo.*

Demonstração: Seja w' um elemento de W e $f_{w'} : W \to [0,1]$ uma função, definida por: $f_{w'}(w) = d(w, w')$.

Assumindo $A = im(f_{w'}) = \{0, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$, seja $p : W \to A$ definida por $p(w) = f_{w'}(w)$. A função p é sobrejetora.

Considerando a topologia de subespaço de A, em relação à topologia usual da reta, sabemos que p é aplicação quociente[13].

Portanto, se W fosse localmente conexo, A seria localmente conexo, o que não é o caso - ver exercício 8 - § 25 (MUNKRES, 2002)).

■

5.3.2 Modelo Topo $S5$-canônico

Lembrando: os abertos básicos de F_5 são da forma $B_\varphi = \lfloor \Diamond \Box \varphi \rfloor = \lfloor \Box \varphi \rfloor$.

Proposição 24. *Seja W o conjunto de todos os $S5$-consistentes maximais construídos sobre uma linguagem enumerável modal $\mathcal{L}$.*

Se w_1 e w_2, elementos de W, coincidem em todas as fórmulas modalizadas da forma $\Box\varphi$, então $w_1 = w_2$.

O argumento para a demonstração desse resultado é o mesmo daquele apresentado na proposição 15, assim como para o seguinte teorema (ver teorema 5.3.1).

Teorema 5.3.16. *O* frame *de vizinhanças F_5 tem base enumerável.*

Teorema 5.3.17. *O* frame *de vizinhanças F_5 é T_0.*

[12] Já que $\mathbb{Q}$, como subespaço, não é conexo por caminhos. Sabemos que toda função contínua (de domínio real) é unicamente determinada por seus valores em $\mathbb{Q}$ (ver (JECH, 2017), cap. 10), logo, não há função contínua da forma $f : [0,1] \to W$, já que nem todo número racional é divisor de um número racional da forma $\frac{k_2 \ldots k_n \pm k_1 \pm k_3 \pm k_n \ldots k_1 \pm k_{n-1}}{k_1 \cdot \ldots \cdot k_n}$, para k_i naturais não-nulos.

[13] De fato, obteríamos a mesma topologia se utilizássemos a estrutura topológica de W e a aplicação p para induzir uma topologia em A, tomando $\tau_A = \{p(U) \mid U \text{ aberto de } W\}$.

Demonstração: Seja $w_1 \neq w_2$ elementos de W. Da proposição 24 sabemos que eles não podem coincidir em todas as fórmulas modalizadas, logo existe $\varphi \in For(\mathcal{L})$ tal que $\Box\varphi \in w_1$ e $\Box\varphi \notin w_2$, i.e., $w_1 \in \lfloor\Diamond\Box\varphi\rfloor = \lfloor\Box\varphi\rfloor = int([\![\varphi]\!]_{M_5})$ e $w_2 \notin int([\![\varphi]\!]_{M_5})$.

De acordo com a definição B.1.2 encontramos um aberto que contém um dos pontos e não contém o outro, segue assim que F_5 é T_0.

■

Teorema 5.3.18. *O* frame *de vizinhanças F_5 é T_1.*

Demonstra-se como no teorema 5.3.3.

Corolário 5.3.2. *O* frame *de vizinhanças F_5 é um Tarski-espaço topológico.*

Teorema 5.3.19. *O* frame *de vizinhanças F_5 é um espaço separável.*

A construção apresentada para o teorema 5.3.4 também demonstra o resultado acima.

Teorema 5.3.20. *O espaço topológico F_5 <u>não</u> é denso-em-si-mesmo.*

Demonstração: Como $F_5 \in TD$ e $\{w\}$ são fechados, para todo $w \in W$, então $\{w\}$ são todos abertos, ou seja, $W - \{w\}$ são fechados para todos os w's, logo para $w \in W$ temos que $w \notin \overline{W - \{w\}} = W - \{w\}$.

■

Do teorema anterior segue que F_5 não é um E-espaço de Tarski, ou seja, as similaridades locais dos espaços euclidianos, como apresentado pelo modelo topo $S4$-canônico, não se reproduzem igualmente no modelo topo $S5$-canônico.

Teorema 5.3.21. *O espaço topológico F_5 é Hausdorff.*

Demonstração: Sejam $w_1 \neq w_2$ elementos distintos de W, como F_5 é T_0 segue que existe U aberto tal que $w_1 \in U$ e $w_2 \notin U$.

Do fato de U ser aberto segue que $W - U$ é fechado, como F_5 é TD, $W - U$ é aberto.

Portanto, $w_1 \in U$, $w_2 \in W - U$ abertos e disjuntos, ou seja, o espaço é Hausdorff.

■

Observação: Assim como **S4**, o sistema modal proposicional **S5** pode ser "mergulhado" na lógica clássica de primeira ordem por meio de uma tradução de suas fórmulas (ver (CHELLAS, 1980)). Portanto, como o teorema da compacidade é válido para a lógica clássica de primeira ordem, o sistema modal proposicional **S5** também possui tal propriedade.

Teorema 5.3.22. *O espaço topológico F_5 é normal.*

Demonstração: O resultado segue da aplicação da proposição 60, do teorema 5.3.21 e da observação anterior.

■

Teorema 5.3.23. *O frame de vizinhanças F_5 é um espaço topológico regular.*

Demonstração: O resultado segue da aplicação dos teoremas 5.3.18, 5.3.22 e da proposição 57.

■

Teorema 5.3.24. *O espaço topológico F_5 é metrizável.*

Demonstração: O resultado segue da aplicação dos teoremas 5.3.23, 5.3.16 e do *teorema da metrização de Urysohn* (teorema B.1.1).

■

Teorema 5.3.25. *O frame de vizinhanças F_5 do* modelo topo $S5$-canônico M_5 *é totalmente desconexo.*

Demonstração: Seja $\emptyset \neq X \neq W$.

Como $F_5 \in TD$, sabemos que $\overline{X} = int(\overline{X})$. Como $\overline{X}$ é aberto então $W - \overline{X}$ é fechado, por outro lado, $\overline{X}$ é fechado e $W - \overline{X}$ é aberto.

Portanto $\overline{X} \cup W - \overline{X} = W$ é uma separação para W.

Observemos que essa construção pode ser realizada pois F_5 é T_1 e nele todos os unitários são abertos, logo X pode ser qualquer subconjunto não trivial de W.

■

5.4 Considerações Finais

§1. Como indicado anteriormente, há na literatura (ver (BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2007)) a demonstração "geométrica" para a completude do sistema **S4** em relação à semântica topológica em que o espaço utilizado é $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou C (conjunto de Cantor). Verifica-se facilmente que todos esses espaços são E-espaços de Tarski, como esperado. Porém, a reta real e o subespaço dos racionais não são compactos, embora o conjunto de Cantor, como subespaço, seja. Além disso, $\mathbb{R}$ é conexo (portanto, localmente conexo), mas $\mathbb{Q}$ e C não são localmente conexos. Vemos assim que a "similaridade" geométrica entre esses espaços restringe-se ao fato de serem E-espaços de Tarski.

Ao estudar, neste trabalho, o modelo topo $S4$-canônico, cuja notação foi ligeiramente modificada de (BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2007) e (AIELLO; VAN-BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2003) para deixar em destaque suas características topológicas, verifiquei que tal modelo de todos os "mundos possíveis", conjuntos $S4$-consistentes e maximais formados com o uso de uma linguagem enumerável, apresenta uma estrutura topológica que aparece ao interpretarmos o operador $\Box$ com a noção de necessidade alética, formando assim as "vizinhanças topológicas" da semântica de vizinhanças - esse operador transformando-se em um operador de interior topológico.

Este espaço topológico F_C tem base enumerável, é Hausdorff, localmente compacto, compacto e paracompacto, normal (completamente regular), globalmente metrizável, não eunumerável, separável e denso-em-si-mesmo, desconexo (embora não totalmente desconexo) e não localmente conexo. Por ser completamente regular, vimos que existe J para o qual F_C é homeomórfico a algum subespaço de $[0,1]^J$ - ver teorema B.1.14. Vimos pelos resultados que não-conexidade local (por caminhos) é consequência da linguagem ser enumerável, pois não conseguimos passar dos operadores lógicos e símbolos enumeráveis para o contínuo - basta vermos a definição que apresentei da métrica d - definição 5.3.7.

Já F_5, apesar de ter base enumerável, ser Hausorff e metrizável, não é denso-em-si-mesmo, portanto não é E-espaço de Tarski, e é totalmente desconexo. Portanto o espaço do modelo canônicos para **S5**, em relação à semântica de vizinhanças, possui uma estrutura próxima à das álgebras de Boole (já que toda álgebra de Boole é isomórfica a uma álgebra de Boole construída com os subconjuntos "clopen" de um espaço de Stone).

§2. De acordo com as hipóteses H 1.7 e H 2.5, assumi que o uso de estruturas interpretativas de sistemas lógicos pode clarificar a relação entre os constituintes lógicos do sistema (leis e princípios) e seus pressupostos (axiomas), analisando pela perspectiva semântica as características racionais (inferenciais) do contexto racional modelado pelo sistema lógico.

Em conformidade com H 2.1 e H 2.2, é o discurso metafísico que explora as fronteiras da realidade, sendo somente ele capaz de investigar racionalmente a "estrutura do real" (*to ti en einai*), já que as verdades metafísicas não se limitam às verdades lógicas, por um lado, nem pelas verdades físicas, por outro.

Já pelas hipóteses assumidas H 1.4, H 1.5, H 2.3 e H 2.4, admitimos que a linguagem e os sentidos nos impõem limites para o que pode ser pensado, representado e comunicado pela razão humana (inteligível). Defendo que essas são as fronteiras que nos limitam a identificar o que é metafisicamente possível (ou necessário), não o simplesmente lógico (analítico), nem o rigidamente físico - apesar desses critérios serem guias nessa busca.

Pela hipótese H 1.6, ver (WITTGENSTEIN, 2017), assumimos que o mundo é a "totalidade dos fatos" e, se pudermos olhar essa totalidade "por fora", pelo menos simular abstratamente o que isso significa, inteligimos o significado dessa estrutura complexa, admitindo que a lógica modal nos propicia o espaço lógico para construção de argumentos desse contexto racional, no qual se desenrola as inferências sobre essa totalidade dos fatos do *mundo* (cosmo).

Portanto, tomando o mundo em sua totalidade (os fatos que vivenciamos e todos os fatos existentes, mesmo aqueles aos quais não temos acesso, que foram, que são ou que serão), a totalidade das *verdades* sobre a estrutura do mundo nos é inalcançável. Porém, essas verdades, no sentido absoluto, sobre os fatos do mundo são a ele imanentes, pois residem na correlação entre os enunciados desses fatos (que se originam de um ser cognoscente no mundo) e os fatos em si, do mundo, que a eles correspondem. Parece-me, portanto, infrutífero alimentarmos o desejo de conhecermos *todas* as verdades necessárias, possíveis ou contingentes do mundo, já que nunca poderíamos justificar juízos (crenças) para garantirmos seu conhecimento.

Todavia, circunscritos por nossas limitações físicas, epistêmicas e linguísticas, ao reconhecermos esses limites, acredito ser possível identificar a *forma* (eidos) da realidade, pelo menos de como se nos apresenta e de como é por nós inteligida, i.e., tal forma indica de que maneira as verdades metafísicas se expressam nessa sua manifestação imanente ao mundo do qual fazemos parte. Para isso, defendo que que bastaríamos abstrair a completude desses fatos, representados por uma linguagem formal (e um sistema lógico), e, com o auxílio da matemática como par metodológico de experimentos intelectuais, poderíamos assegurar certo "rigor" à prática filosófica, investigando as propriedades desses sistemas lógicos por meio de suas estruturas interpretativas, numa relação de semelhança entre essas estruturas e a própria estrutura do mundo; observa-se uma triangulação[14] (local) entre *espaço físico*, *espaço de representação* e *espaço lógico*.

§3. No capítulo anterior procurei mostrar como a razão e a intuição espacial se relacionam, por meio de operadores de fecho (fecho dedutivo ou operador de consequência e fecho topológico); acredito que essa relação evidencia a importância de certas noções imediatas e intuitivas, como as espaciais, no papel que possuem em nossos mecanismos de apreensão do mundo e de formação de conhecimento. Se a *forma* como percebemos o espaço exterior, no qual nossa vida se desenlaça, está condicionada por certas "estruturas *a prior*" de nosso arcabouço racional (algo como as intuições puras kantianas), ou se é a sua própria "natureza" que condiciona essas percepções, moldando essas intuições imediatas a respeito do espaço que "aloca" os fenômenos exteriores ao sujeito, não podemos saber, mas julgo que reconhecendo nossos limites de percepção, podemos descobrir como, por meio da abstração, elevar a razão para um espaço "fora" de tais limites, sendo essa a única esperança para podermos, de fato, presumir algum tipo de conhecimento sobre o mundo para além do físico, aquele imediatamente percebido, ou seja, alcançarmos o conhecimento que a ciência (natural) não pode nos oferecer.

Se nossos mecanismos de representação estão limitados pela linguagem, parece-me, portanto, que a linguagem enumerável $\mathcal{L}$, no qual a lógica modal foi formulada nesse trabalho, é capaz de representar *todos* os fatos do mundo - pelo menos a totalidade de fatos humanamente representáveis (em linguagem formal, embora idealizada) e cognoscíveis; vista como totalidade acabada e atemporal, as fórmulas dessa linguagem representam a *totalidade* do *mundo* (cosmo) - pois estamos operando numa idealização da linguagem e entendendo esta "totalidade" como totalidade possível (do que pode ser representada ou inteligível ao homem, no limite) . Nesse sentido, o que há de metafisicamente necessário deve obedecer aos princípios lógicos gerais sobre os fatos da realidade como são por nós apercebidos (relembremos que indicamos que mesmo fatos exteriores ao contexto racional lógico clássico poderiam ser traduzidos, como fatos brutos do *mundo* - em contexto clássico - se forem vistos externamente como fatos acabados e completos, representáveis, assim, pela lógica modal - ver capítulo 2).

Em face de tais colocações, argumento que as semânticas topológicas são estruturas valorativas capazes de modelar o contexto racional em que a discussão metafísica ocorre, pois respeitam tanto nossa limitação linguística, quanto a sensível. Em paralelo à defesa de Carnap (capítulo 1), argumento que os espaços topológicos auxiliam na construção imagética da organização (espacial) do conjunto de todos os *estados de coisas* logicamente possíveis. A estrutura geométrica por eles fornecida exibe, assim, a *forma* das verdades me-

[14] A sustentação para isso se dá no substrato do espaço metafísico.

tafísicas; essa exibição emana do modelo, já que a estrutura topológica surge naturalmente da relação entre as fórmulas (proposições ou fatos) que representam os *estados de coisas*.

Tal organização, distinta daquela dos *frames* relacionais, soluciona o problema apresentado por Forster, em (FORSTER, 2005), acerca do "éter modal" da semântica de Kripke (semânticas relacionais). Agora, a relação entre os "mundos possíveis" passa a *mimetizar* a relação entre as *verdades do mundo*: são as verdades dos mundos possíveis (seus fatos) que determinam a "proximidade" (vizinhanças) no espaço dos modelos (modelos topo-canônicos); dessa maneira, a ideia de tais vizinhanças pode ser facilmente abstraída (a partir de sua referência geométrica imediatamente intuída) pelo intelecto por meio da analogia com noções de estruturas elementares do espaço físico, como interior/exterior, fronteira, densidade, conexidade/separação, próximo/longe etc.

Servindo-nos das discussões filosóficas presentes na tradição analítica, que em sua grande maioria julgam ser **S4** ou **S5** os sistemas modais que melhor descrevem a *forma* das verdades metafísicas, analisei o comportamento das semânticas topológicas para esses sitemas. Essas semânticas, por serem semânticas de vizinhanças, recuperam o apelo intuitivo da ideia de proximidade física/geométrica que o conceito de "vizinhanças" carrega, porém, agora, como vimos, de uma maneira mais forte, pois tal proximidade é, nas semânticas topológicas, realmente "geométrica". Sabe-se que os espaços topológicos formam, com sistemas iguais ou mais fortes do que **S4**, uma cadeia de inclusão em relação às características dos espaços topológicos e os axiomas que vão sendo acrescentados para fortalecer os sistemas lógicos (ver (BENTHEM; BEZHANISHVILI, 2007)).

Enquanto **S4** (proposicional) é completa (modelo topo $S4$-canônico) em relação a um espaço topológico localmente similar - em relação a certas características - a um espaço euclidiano (não estou afirmando que ele é localmente homeomórfico a um espaço euclidiano), espaço físico que experienciamos, estando portanto em conformidade com o tipo de estrutura física espacial defendida pela ciência contemporânea (já que na teoria da relatividade, o espaço-tempo pode ser descrito por uma *variedade riemanniana* - ver definição B.1.34), a lógica **S5** é completa em relação a estruturas topológicas que, embora sejam metrizáveis, são totalmente desconexas, não possuindo a mesma similaridade (local) com os espaços euclidianos (F_5 não é um E-espaço de Tarski).

Tendo em vista a argumentação a respeito de nosso *espaço de representação*, que julgo ser similar ao espaço euclidiano (pelo menos localmente), sinto-me também compelido a defender **S4** como o sistema lógico que, axiomaticamente, "carrega" a *forma* com que as verdades (metafísicas) se esparramam pelo mundo (pelo menos a partir do qual podem ser por nós "reconhecidas" ou intuídas), já que a estrutura interpretativa completa em relação a esse sistema, o modelo topo $S4$-canônico, encontra-se em acordo com nossas limitações representacionais (linguagem e empiria) e é suavemente similar a estruturas matemáticas que utilizamos para analisar, classificar e representar racionalmente o mundo que nos cerca (espaço da experiência).

Por ora, a lógica modal proposicional não nos oferece ferramentas para discutirmos certos problemas de natureza metafísico-ontológica, já que nela não podemos nos referir a objetos, sendo impossível endereçarmos, no plano lógico, conceitos como *ser*, *essência* e *existência*. Assim, conforme apresentado no capítulo 2, estruturas interpretativas para lógicas quantificadas são tradicionalmente construídas sobre as estruturas que interpretam sistemas lógicos proposicionais. Logo, meu intuito é utilizar o contexto da semântica topológica para a lógica modal proposicional para avaliar uma estrutura similar (canônica) que interprete a lógica modal quantificada, e a partir dessa perspectiva recuperar noções intuitivas espaciais, modelando certo espaço lógico de representação para tais problemas - espaço esse que herda o apelo geométrico-espacial das estruturas topológicas.

6 Lógica $FOS4$

Neste capítulo faço uma costura das abordagens em (AWODEY; KISHIDA, 2012) e (KISHIDA, 2011) para discutir como utilizar a estrutura lógica de um topos e construir interpretações para a lógica de primeira ordem, assim como para a lógica modal quantificada, reconstruindo, assim, o argumento apresentado por Awodey e Kishida para demonstrar o teorema da completude para a lógica **FOS4**.

A partir do teorema da completude, irei construir seu modelo canônico, no próximo capítulo, para repetirmos o estudo topológico do modelo topo $S4$-canônico, agora para sua versão de primeira ordem, considerando a extensão **FOS4** para a lógica **S4**.

De fato, para tratarmos sobre problemas centrais da filosofia, como existência, identidade, essencia etc., é necessário termos, na linguagem formal, ferramentas da lógica quantificada. Os resultados do capítulo anterior, que apontaram, a partir de certas premissas, para uma defesa de **S4** como a lógica que estruturaria argumentos metafísicos, nos levam a adotar então, para este empreendimento, a versão quantificada de **S4**, que pode ser obtida por mais de uma maneira. O resultado demonstrado por Kishida, relacionando diretamente **FOS4** com espaços topológicos, é que justifica nosso interesse nesta lógica em específico. No capitulo 7 e na conclusão, as análises topológicas realizadas no interior desta lógica modal quantificada, a meu ver, justificam este empreendimento.

6.1 Semântica para Lógica Clássica de Primeira Ordem

Para a demonstração do teorema da completude de **FOS4**, Kishida estuda algumas boas propriedades de lógica clássica de primeira ordem. Seguiremos a estrutura de seu argumento e nomenclatura.

Definição 6.1.1. *Uma L^*-estrutura M para a lógica clássica de primeira ordem é uma tupla do tipo $M = (V_M, I_M, \{M(P_i^n)\}, \{M(f_k^n)\})$, tal que:*

*1) $|M| \neq \emptyset$ é o **universo do modelo**;*

2) Tomando $|M|^0 = \{\emptyset\}$, considerando $1 = \{\emptyset\}$ e $0 = \emptyset$, temos que $\mathbf{2} = \wp(|M|^0)$ e V_M é valoração booleana no reduto proposicional de L^*, função definida recursivamente a partir das valorações sobre os símbolos proposicionais em $\mathbf{2}$.

3) Existe um símbolo de predicado binário "$=$" tal que $=_M :=_{df} \{(a, a) \mid a \in |M|\}$;

4) Para todo símbolo de predicado n-ário ($n \geq 1$), $M(P_i^n) \subseteq |M|^n$;

5) Para todo símbolo funcional n-ário f ($n \geq 1$), $M(f_k^n) \subseteq |W|^{n+1}$;

6) I_M é uma função que associa as constantes c_j da linguagem a indivíduos do domínio do modelo.

Às funções da forma $\sigma : Var(L^*) \to |M|$ denominamos **atribuições de valores** para as variáveis de L^*; para cada L^*-estrutura M existem várias atribuições $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$, se $|M|$ não for unitário.

Denotaremos que φ é satisfeita por M, em relação à atribuição σ, por $M \models_\sigma \varphi$.

Uma atribuição σ' de M será dita k-variante de σ se σ' difere de σ no máximo no que atribui à k (notação: $\sigma' = [a/k]\sigma$) - ver capítulo 2.

Com estas observações, podemos indicar a noção de satisfação de fórmulas de L^* por uma L^*-estrutura da seguinte forma:

$S1$) [Neg.] $M \models_\sigma \neg\varphi \Leftrightarrow M \not\models_\sigma \varphi$

$S2$) [Conj.] $M \models_\sigma \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow M \models_\sigma \varphi$ e $M \models_\sigma \psi$

$S3$) [Disj.] $M \models_\sigma \varphi \vee \psi \Leftrightarrow M \models_\sigma \varphi$ ou $M \models_\sigma \psi$

$S4$) [Imp. mat.] $M \models_\sigma \varphi \supset \psi \Leftrightarrow M \not\models_\sigma \varphi$ ou $M \models_\sigma \psi$

$S5$) [Exist.] $M \models_\sigma \exists x\varphi \Leftrightarrow M \models_{[a/x]\sigma} \varphi$ para algum $a \in |M|$

$S6$) [Univ.] $M \models_\sigma \forall x\varphi \Leftrightarrow M \models_{[a/x]\sigma} \varphi$ para todo $a \in |M|$

$S7$) [Atôm.] $M \models_\sigma P_i^n(\bar{x}) \Leftrightarrow \sigma(\bar{x}) \in M(P_i^n)$.

Observações: 1) Se t for um termo de L^*, denotaremos sua interpretação em M, de acordo com a atribuição σ[1], por $(M, \sigma(t))$

2) Diremos que na estrutura M, com atribuição σ, a fórmula $P(x, c_1, c_2)$ é satisfeita se $(\sigma(x), I_M(c_1), I_M(c_2)) \in M(P)$.

Dada uma L^*-estrutura M, uma fórmula φ é **satisfatível** em M se existir $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$ tal que $M \models_\sigma \varphi$. Se φ for satisfatível em M, qualquer que seja a atribuição $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$, então dizemos que φ é **válida** em M, denotando $M \models \varphi$.

Portanto, podemos formalizar estas noções da seguinte forma:

Definição 6.1.2. *Fixada uma L^*-estrutura M, temos um par $(M, \models_{-} -)$ de relação de satisfação tal que $(M, \models) \subseteq |M|^{Var(L^*)} \times For(L^*)$, para $For(L^*)$ as fórmulas de L^*. Se M for uma L^*-estrutura, tal noção de satisfação que satisfaz $S1$ - $S7$ será denominada **relação de satisfação clássica** para L^*.*

Definição 6.1.3. *A classe de todas as relações de satisfação clássicas para L^* será denominada **semântica clássica** para L^*.*

Se φ for satisfeita por toda M na semântica clássica para L^*, então φ é dita simplesmente **classicamente válida** ou **válida**, neste caso será denotada por $\models \varphi$.

Seja S^* uma lógica de primeira ordem construída sobre L^*, com certos axiomas e regras de inferência. Considerando $\models$ uma relação de satisfação clássica para L^* sobre M, uma L^*-estrutura, diremos que (Γ, φ) é uma inferência de S^* válida em $(M, \models)$ quando, para toda $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$, for o caso que se para toda $\psi \in \Gamma$ tivermos $M \models_\sigma \psi$, então $M \models_\sigma \varphi$.

Desta forma, uma inferência ou sentença de L^* é dita válida na classe de todas as relações de satisfação clássicas para L^* se forem válidas em todos os elementos da classe.

Definição 6.1.4. *Se $(M, \models)$ for uma relação de satisfação clássica para L^*, dizemos que $\varphi \in For(L^*)$ é **localmente determinada** em $(M, \models)$ se para todas as atribuições σ e β for o caso: Se $\sigma(x) = \beta(x)$ para toda variável livre x em φ:*

$$M \models_\sigma \varphi \Leftrightarrow M \models_\beta \varphi$$

A determinação local de uma fórmula em $(M, \models)$ garante que sua satisfação não depende das variáveis que não ocorrem livres em φ.

Se toda fórmula φ de L^* for localmente determinada em $(M, \models)$, então a relação de satisfação clássica $(M, \models)$ é dita **localmente determinada**. Uma classe de relações de satisfação clássica para L^* é dita **locamente determinada** se todos os seus elementos forem localmente determinados.

[1] Se t for constante, a atribuição σ é irrelevante e $(M, \sigma(t)) = I_M(t)$.

Proposição 25. *Todas as relações de satisfação da semântica clássica para L^* são localmente determinadas*[2].

A noção de determinação local é necessária para garantir que a verdade das sentenças (fórmulas fechadas) de L^* não dependa das atribuições σ, assim como para manter a conexão entre certos aspectos sintáticos e semânticos em relação aos predicados n-ários da linguagem.

Definição 6.1.5. *Seja $(M, \models)$ uma relação de satifscação clássica para L^*. Dizemos que $(M, \models)$ é uma semântica que **respeita substituição** para $\varphi \in For(L^*)$ se, qualquer que seja $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$, for o caso que para qualquer x variável e qualquer t termo individual, tivermos:*

$$M \models_\sigma \varphi[t/x] \Leftrightarrow M \models_{[(M,\sigma(t))/x]\sigma} \varphi$$

Desde que t seja livre para x em φ.

Dizemos que $(M, \models)$ é uma **semântica que respeita substituição**[3] se ela for semântica que respeita substituição para toda fórmula de L^*. Uma classe de relações de satisfação clássica para L^* é também uma semântica que respeita substituição se todos seus elementos forem semânticas que respeitam substituição. Nestes casos, se um indivíduo possui um propriedade, ou não, independe do termo usado na linguagem para denotar tal indivíduo.

Proposição 26. *Todas as relações de satisfação da semântica clássica para L^* respeitam substituição*[4].

Definição 6.1.6. *A fórmula φ_1 é uma α-**conversão** de φ_0 ($\varphi_0 \propto_0 \varphi_1$) se φ_1 for obtida de φ_0 substituindo todas as subfórmulas desta fórmula, da forma $\forall x\psi$ ou $\exists x\psi$, por, respectivamente, $\forall y(\psi[y/x])$ ou $\exists y(\psi[y/x])$, desde que y não ocorra livre em ψ e y seja livre para x em ψ.*

Em L^*, como os únicos operadores que ligam as variáveis são $\forall$ e $\exists$, o fecho reflexivo e transitivo de $\propto_0$ gera uma relação α tal que φ é dita **α-equivalente** de ψ se esta for obtida de φ por α, i.e., φ e ψ têm a mesma estrutura, compartilham as mesmas variáveis livres, ocupando exatamente as mesmas posições, só diferenciando-se nas ocorrências das

[2] Consultar: (KISHIDA, 2011) p. 54 ou (BELNAP, 2009). Também consultar (FAJARDO, 2017) p. 94, ou lema da página 19 em (SHOENFIELD, 1967).

[3] Determinação local e semântica que respeita substituição são propriedades estudadas e, desta maneira nomeadas em (BELNAP, 2009).

[4] Consultar (KISHIDA, 2011) p. 60; Ver também a regra de substituição, p. 31, em (SHOENFIELD, 1967).

variáveis ligadas. Como $\propto_0$ é uma relação simétrica, então α é uma relação de equivalência, ou seja, fórmulas que são α-equivalentes devem ser tratadas da mesma maneira, já que duas fórmulas α-equivalentes são iguais, com exceção da renomeação de suas variáveis ligadas.

Definição 6.1.7. *Seja $(M, \models)$ uma relação clássica de satisfação para L^*. Dizemos que $(M, \models)$* ***respeita α-equivalência*** *se para toda $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$ e todas φ, ψ fórmulas de L^* que são α-equivalentes:*

$$M \models_\sigma \varphi \Leftrightarrow M \models_\sigma \psi$$

Se todos os elementos de uma classe de relações de satisfação para L^* respeitarem α-equivalência, dizemos que a classe respeita α-equivalência. Ou seja, a interpretação trata igualmente fórmulas que são α-equivalentes.

Proposição 27. *Todas as relações de satisfação da semântica clássica para L^* respeitam α-equivalência*[5].

Portanto, as propriedades de determinação local, substituição e α-equivalência são essenciais para a validade de regras e axiomas da lógica clássica de primeira ordem, na perspectiva do teorema da completude.

6.1.1 Estrutura Interpretativa

A partir dos conceitos semânticos delineados anteriormente, podemos formular para toda L^*-estrutura M uma noção de interpretação das fórmulas de L^* em M tal que, se φ for fórmula de L^*, então $M \models \varphi$ se e somente se φ satisfaz certa relação com uma estrutura da forma $[\![- \,|\varphi]\!]$, como indicado a seguir.

Acrescentemos à L^* os símbolos de $\top$ e $\bot$. Definimos:

i) Se φ for sentença de L^*, então $[\![\varphi]\!] \in \wp(|M|^0)$;

ii) Se $P_i^n \in L^*$, então $[\![\bar{x}\,|P_i^n \bar{x}]\!] = M(P_i^n)$ para $\bar{x}$ sequência de n variáveis livres presentes em x;

iii) $[\![x, y\,|x = y]\!] = \{(a, a) \in |M|^2 \mid a \in |M|\}$;

iv) Para todo n natural, $[\![\bar{x}\,|\top]\!] = |M|^n$ e $[\![\bar{x}\,|\bot]\!] = \emptyset$;

v) Se $\varphi(\bar{x})$, $\bar{x}$ sequência de n variáveis livres, então $[\![\bar{x}\,|\varphi]\!] = \{\bar{a} \in |M|^n \mid M \models \varphi\} \subseteq |M|^n$;

vi) $[\![\bar{x}\,|\neg\varphi(\bar{x})]\!] = |M|^n - [\![\bar{x}\,|\varphi]\!]$;

[5] Consultar (KISHIDA, 2011) p. 62; ver também (FAJARDO, 2017) p. 117 ou o teorema das variantes p. 35 em (SHOENFIELD, 1967).

vii) $[\![\bar{x} \mid (\varphi \wedge \psi)(\bar{x})]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \cap [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$;

viii) $[\![\bar{x} \mid (\varphi \vee \psi)(\bar{x})]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \cup [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$;

ix) $[\![\bar{x} \mid (\varphi \supset \psi)(\bar{x})]\!] = (|M|^n - [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]) \cup [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$;

x) $[\![\bar{x} \mid \exists y \varphi]\!] = \{\bar{a} \in |M|^n \mid (\bar{a}, b) \in [\![\bar{x}, y \mid \varphi(\bar{x}, y)]\!]$ para algum $b \in |M|\}$;

xi) $[\![\bar{x} \mid \forall y \varphi]\!] = \{\bar{a} \in |M|^n \mid (\bar{a}, b) \in [\![\bar{x}, y \mid \varphi(\bar{x}, y)]\!]$ para todos $b \in |M|\}$;

xii) Se t for termo, então $[\![\bar{x} \mid t]\!]$ é uma função da forma $|M|^n \to |M|$ para todo $n \geq 0$; quando $n = 0$, tal função corresponde à interpretação I_M das constantes de L^*. Assim, $[\![\bar{x} \mid t]\!](\bar{b})$ é a interpretação de t substituindo as ocorrências de $\bar{x}$ por $\bar{b}$.

Observação: Se φ tiver, no máximo, $\bar{x}$ como variáveis livres, então $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \times |M| = [\![\bar{x}, y \mid \varphi]\!] \subseteq |M|^{n+1}$.

Definição 6.1.8. *Dadas uma L^*-estrutura M, uma relação de satisfação $(M, \models)$ e a interpretação $[\![-]\!]$ de tal estrutura, podemos definir a noção de validade em M, em relação a uma lógica S^* sobre L^*, da seguinte forma:*

a) $\varphi(\bar{x})$ é válida em $(M, \models)$ se $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!] = |M|^n$

b) A inferência $\varphi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ é válida em $(M, \models)$ se $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \subseteq [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$, para $\bar{x}$ conjunto das variáveis livres que ocorrem em φ ou ψ

c) Uma regra de inferência $(\Gamma \vdash \psi)$ é válida em $(M, \models)$ no caso em que se $[\![-]\!]$ satisfaz todas as fórmulas de Γ, então satisfaz ψ.

6.1.1.1 Interpretações e Imagens de Operadores

Seja n um número natural e $p_n : |M|^{n+1} \to |M|^n$ projeção tal que $p_n(\bar{a}, b) = \bar{a}$.

Podemos reformular as relações existentes entre a interpretação de uma L^*-estrutura M com as imagens de operadores, em especial as projeções apropriadas, da seguinte forma:

1) $[\![\bar{x} \mid \exists y \varphi(\bar{x})]\!] = p_n([\![\bar{x}, y \mid \varphi(\bar{x}, y)]\!])$

2) $[\![\bar{x}, y \mid \varphi(\bar{x})]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi(\bar{x})]\!] \times |M| = p_n^{-1}([\![\bar{x} \mid \varphi(\bar{x})]\!])$

Neste caso, para φ fórmula, temos:

$p_0([\![y \mid \varphi(y)]\!]) \neq \emptyset \Rightarrow [\![\exists y \varphi]\!] = \{\emptyset\}$

Portanto $[\![y \mid \varphi(y)]\!] \neq \emptyset$ se e somente se $[\![\exists y \varphi]\!] = \{\emptyset\}$.

Por outro lado, $[\![y \mid \varphi(y)]\!] \neq \emptyset \Leftrightarrow M \models \varphi[b/y]$ para algum $b \in |M|$ se e somente se $M \models \exists y \varphi \Leftrightarrow [\![\exists y \varphi]\!] = \{\emptyset\}$.

Desta forma, para φ fórmula com n variáveis livres, podemos estender recursivamente a interpretação de φ em sequências de comprimento $m > n$.

Observação: Para toda $f : X \to Y$ operação, a imagem direta de f é adjunta à esquerda da imagem inversa - ver apêndice A, pois

$$\frac{f(A) \subseteq B}{\overline{A \subseteq f^{-1}(B)}}$$

Logo, para $\varphi(\bar{x}, y)$ e $\psi(\bar{x}, y)$ fórmulas, temos:

$$\frac{[\![\bar{x} \mid \exists y\varphi]\!] = p_n([\![\bar{x}, y \mid \varphi]\!] \subseteq [\![\bar{x} \mid \psi]\!]}{\overline{[\![\bar{x}, y \mid \varphi]\!] \subseteq p_n^{-1}([\![\bar{x} \mid \psi]\!]) = [\![\bar{x}, y \mid \psi]\!]}}$$

Temos assim a validação da regra de inferência clássica em primeira ordem

$$\frac{\exists y\varphi \vdash \psi}{\overline{\varphi \vdash \psi}}$$

Portanto, $\exists$ é a imagem direta de determinada projeção p_n, sendo a (única) adjunta à esquerda da imagem inversa p_n^{-1}. Além disto, p_n^{-1} também possui (uma única) adjunta à direita, interpretada por $\forall$. De fato, corresponde à validação da regra de inferência para uma axiomatização da lógica de primeira ordem:

$$\frac{\varphi \vdash \forall y\psi}{\overline{\varphi \vdash \psi}}$$

O processo de substituição de termos de L^* também pode ser interpretado como imagens inversas. Sejam $\varphi(x)$ fórmula e $t(\bar{y})$ termo com n variáveis livres $\bar{y}$, nas quais x não ocorre livre. Temos, para toda $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$:

$[\![\bar{y} \mid \varphi(t(\bar{y}))]\!] = \{\bar{b} \in |M|^n \mid M \models_{[\bar{b},\bar{y}]\sigma} \varphi(t(\bar{y}))\} = \{\bar{b} \in |M|^n \mid M \models_{[[\![\bar{y} \mid t]\!](\bar{b}),x]\sigma} \varphi(x)\} = \{\bar{b} \in |M|^n \mid [\![\bar{y} \mid t]\!](\bar{b}) \in [\![x \mid \varphi]\!]\} = [\![\bar{y} \mid t]\!]^{-1}([\![x \mid \varphi]\!])$

De maneira geral, podemos colocar que se $\bar{x}, \bar{y}$ e z são variáveis disjuntas, $\varphi(\bar{x}, z)$ fórmula tal que $\bar{x}$ é uma n-upla, $\bar{y}$ uma m-upla e $|M|^n \times [\![\bar{y} \mid t]\!] : |M|^{n+m} \to |M|^{n+1}$ é função tal que $|M|^n \times [\![\bar{y} \mid t]\!]((\bar{a}, \bar{b})) = (\bar{a}, [\![\bar{y} \mid t]\!](\bar{b}))$, com t termo em que $\bar{y}$ são variáveis livres, então:

$$[\![\bar{x}, \bar{y} \mid \varphi[t/z]]\!] = (|M|^n \times [\![\bar{y} \mid t]\!])^{-1}([\![\bar{x}, z \mid \varphi]\!])$$

Em especial, dada a fórmula $\varphi(y, z)$, para obtermos $\varphi(y, y)$ por substituição, temos (para Δ a aplicação diagonal):

$[\![y \mid \varphi(y, y)]\!] = \{a \in |M| \mid (a, a) \in [\![y, z \mid \varphi(y, z)]\!]\} = \Delta^{-1}([\![y, z \mid \varphi]\!])$

De maneira geral:

$$[\![\bar{x}, y \,|\varphi[y/z]]\!] = (|M|^n \times \Delta)^{-1}([\![\bar{x}, y, z \,|\varphi]\!])$$

Ou seja, para o predicado de igualdade $=$, temos:

$$[\![x, y \,|x = y]\!] = \{(a, a) \in |M|^2 \mid a \in |M|\} = \Delta(|M|)$$

Nestas estruturas interpretativas, a partir das adjuntas, podemos mostrar a validade da regra para a igualdade para a lógica clássica baseada em L^*. Se y não ocorre livre em φ, temos:

$$\frac{\varphi \wedge (x = y) \vdash \psi}{\varphi \vdash \psi[x/y]}$$

É possível simplificar, a partir do que foi exposto, a estrutura interpretativa. Seja M uma L^*-estrutura pertencente à classe das semânticas clássicas para L^*; se φ for fórmula da linguagem proposicional L, então $[\![\varphi]\!] \subseteq |M|^0$, podemos subsumir a interpretação de φ à interpretação da família dos predicados de L^* (considerando $n = 0$), eliminando assim a valoração booleana V_M.

A estrutura M pode ser descrita da seguinte forma:

$$M = (|M|, |M|^{Var(L^*)}, \{M(c_j)\}, \{M(P_i^n)\}_{n\geq 0}, \{M(f_k^n)_{n\geq 1}\})$$

Se t for termo com $\bar{x}$ variáveis livres (para $\bar{x} = \emptyset$ temos o caso da interpretação das constantes), temos $[\![\bar{x} \,|t]\!] : |M|^n \to |M|$ funções que interpretam as constantes e os termos a partir das atribuições σ.

A noção de interpretação em M para as fórmulas de L^* se dá na complexidade das fórmulas. Considerando que $\bar{x}$ contém todas as n variáveis livres que ocorrem na fórmula, temos:

1) Para todo $P_i^n \in L^*$ (com $n \geq 0$), temos $[\![\bar{x} \mid P_i^n \bar{x}]\!] = M(P_i^n)$;

2) Em particular, $[\![x, y \mid x = y]\!] = \Delta(|M|)$;

3) $[\![\bar{x} \mid \top]\!] = |M|^n$ e $[\![\bar{x} \mid \bot]\!] = \emptyset$;

4) $[\![\bar{x} \,|\neg\varphi]\!] = |M|^n - [\![\bar{x} \,|\varphi]\!]$;

5) $[\![\bar{x} \,|\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\bar{x} \,|\varphi]\!] \cap [\![\bar{x} \,|\psi]\!]$[6];

6) $[\![\bar{x} \,|\varphi \vee \psi]\!] = [\![\bar{x} \,|\varphi]\!] \cup [\![\bar{x} \,|\psi]\!]$;

7) $[\![\bar{x} \,|\exists y \varphi(\bar{x})]\!] = p_n([\![\bar{x}, y \,|\varphi(\bar{x}, y)]\!])$;

8) $[\![\bar{x}, y \,|\varphi(\bar{x})]\!] = p_n^{-1}([\![\bar{x} \,|\varphi(\bar{x})]\!])$;

6 Notemos que em φ e ψ podem, separadamente, não ocorrer livres todas as variáveis livre de $\varphi \wedge \psi$.

9) Com $\varphi(\bar{x}, z)$ fórmula e $t(\bar{y})$ termo: $[\![\bar{x}, \bar{y} \mid \varphi[t/z]]\!] = (|M|^n \times [\![\bar{y} \mid t]\!])^{-1}([\![\bar{x}, z \mid \varphi]\!])$;

10) Com $\varphi(\bar{x}, y, z)$ fórmula: $[\![\bar{x}, y \mid \varphi[y/z]]\!] = (|M|^n \times \Delta)^{-1}([\![\bar{x}, y, z \mid \varphi]\!])$.

Observação: Notemos que nesta abordagem o domínio de quantificação e o domínio de atribuição para as variáveis de L^* são os mesmos, o universo do modelo $|M|$.

6.1.1.2 Domínios de Quantificação e Atribuição

Sejam L^* linguagem de primeira ordem clássica, S^* lógica clássica de primeira ordem e M uma L^*-estrutura, base para uma relação de satisfação clássica para L^* construída sobre M.

Pode-se construir uma estrutura de interpretação M' com dois domínios; um deles, o interno, relativo aos objetos "existentes" naquela interpretação - em uma leitura atual dos quantificadores; nesta interpretação a atuação dos quantificadores de L^* se restringe a este domínio interno, ou **domínio de quantificação**. Por outro lado, há também a possibilidade de um domínio externo - **domínio de atribuição**, relativo à totalidade dos objetos da estrutura M', e sobre este domínio definir as atribuições às variáveis de L^*.

Em relação à lógica clássica sem símbolos funcionais e constantes, construída sobre L^*, e suas interpretações na classe da semântica clássica, todos estes modelos com dois "domínios" podem ser restringidos à um único domínio D_M dos objetos atuais, o domínio de quantificação, de maneira que a validade ou não das fórmulas nestes modelos depende, exclusivamente, do que ocorre neste domínio D_M Ver (KISHIDA, 2011) p. 80.

De fato, quando em uma lógica o domínio de quantificação é distinto do domínio de atribuição de variáveis, pode-se construir estruturas que não validam as inferências $\vdash \forall x\varphi \supset \varphi$ e $\vdash \varphi \supset \exists x\varphi$.

Imaginemos uma linguagem de primeira ordem com somente um símbolo de predicado unário L e uma variável x. Interpretemos esta linguagem: Lx interpreta-se como x é lógico. Suponhamos que exista o domínio de atribuição $|M| = \{a, s\}$, domínio de quantificação $D_M = \{a\}$ e $M(L) = \{s\}$, ou seja, somente a "existe" e s é lógico nesta interpretação. Se $\varphi = Lx$ e $\sigma x = s$, então $[\![\varphi]\!]_\sigma = \{s\}$, porém $[\![\exists x\varphi]\!]_\sigma = \emptyset$, pois para toda x-variante de σ, $\sigma_x(x) \neq s$, já que s não está no domínio de quantificação, ou seja, não é o caso que $[\![\varphi]\!] \subseteq [\![\exists x\varphi]\!]$, portanto este modelo não validada a inferência $\vdash \varphi \supset \exists x\varphi$.

Observemos, todavia, que o fecho universal destas inferências é válido mesmo nos casos onde domínio de quantificação e atribuição são distintos.

Pode-se então afirmar que em estruturas interpretativas nas quais o domínio de quantificação e o de atribuição são iguais, para a semântica ser correta, a lógica subjacente deve possui aquilo que podemos chamar de **aporte existencial**.

6.1.2 Construções Lógicas em SET para Lógica de Primeira Ordem

No capítulo 7 utilizarei de instrumentos da teoria de categorias para construir uma semântica para a lógica **FOS4** que possibilite, diferentemente da proposta de Kishida, interpretarmos um sistema em que nem todos os objetos possuam contrapartes "existentes" em todos os mundos possíveis. Para isso, utilizaremos resultados gerais das categorias, ver Apêndice B, assim como o uso destas ferramentas para interpretar a lógica quantificada (clásssica).

No topos SET, sabemos que $Sub(D)$ é álgebra booleana, portanto o topos é booleano. Para todo $D \neq \emptyset$ objeto de SET, $(Sub(D), \subseteq)$ é reticulado e há um isomorfismo entre $Sub(D)$ e os morfismos $SET(D, \Omega)$. Como $Sub(\Omega) \cong \Omega^1$, podemos fazer um paralelo das construções das funções lógicas a partir de Ω e estender a definição dos operadores lógicos para estruturas mais gerais, de maneira que possamos interpretar em SET, por exemplo, as estruturas interpretativas da semântica clássica - ver apêndice A.

Consideremos L^* nossa linguagem clássica de primeira ordem enumerável, temos:

1) Variáveis e constantes individuais;

2) Variáveis proposicionais;

3) Símbolos de predicado n-ários, incluindo o binário para igualdade $=$;

4) Símbolos funcionais n-ários;

5) Operadores primitivos $\neg$, $\wedge$ e $\exists$, além dos definíveis $\vee$, $\supset$ e $\forall$;

6) Acrescentaremos também os símbolos $\top$ (*verum*) e $\top$ (*falsum*).

Os **termos** de L^* são variáveis individuais, constantes e expressões da forma $f\bar{t}$, para $\bar{t}$ sequência n-ária de termos e f símbolo funcional.

As **fórmulas atômicas** de L^* são as variáveis proposicionais e fórmulas da forma $P\bar{t}$, para $\bar{t}$ sequência n-ária de termos e P símbolo de predicado, em particular é fórmula $t_1 = t_2$.

Toda fórmula de L^* contém um número finito de símbolos, ou seja, toda fórmula é obtida pela aplicação de um número finito de operadores de L^*. Consideremos então $Sent(L^*)$ o conjunto das sentenças da linguagem (fórmulas do reduto proposicional mais fórmulas fechadas da lógica de primeira ordem).

Para toda L^*-estrutura M, existe D_M o domínio de quantificação e de atribuição de variáveis para L^*, que consideraremos o conjunto de objetos "existentes" do modelo. Em especial, admitirei que todos estes domínios são formados por *urelementos*, em que cada elemento representa um objeto único, ente primordial (elementar) existente no modelo. Sabemos que toda teoria de primeira ordem consistente é correta em relação a uma estrutura de primeira ordem M, de maneira que para cada fórmula φ satisfeita no modelo, existe $\bar{a}$ uma sequência de objetos de D_M que são testemunhas para tal fórmula; assim, podemos estender a linguagem com as constantes $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ apropriadas, de maneira que estas constantes, se necessárias, sejam denotação na linguagem da sequência $\bar{a}$[7].

Com esta construção, a extensão de L^* obtida de acordo com M (processo de Henkin), junto da extensão da lógica subjacente com a inclusão dos axiomas apropriados para cada uma das constantes testemunhas, continua sendo uma linguagem enumerável. Portanto, podemos assumir de antemão que para determinada L^*-estrutura M, a própria linguagem L^* já contém as constantes para todas as testemunhas de fórmulas que são satisfatíveis em M. Tal convenção simplificará nossa notação.

Sejam M uma L^*-estrutura da semântica clássica para L^*, linguagem clássica de primeira ordem, em que $D_M \neq \emptyset$ é tanto o domínio de quantificação quanto de atribuição de variáveis. A interpretação $[\![-]\!]$ para L^*, construída sobre M, pode ser vista em SET como uma interpretação categorial na relação entre subobjetos. Formalizemos:

i) Se $\bar{x}$ for uma sequência de n variáveis, então $[\![\bar{x} \mid \top]\!] = D_M^n$ e $[\![\bar{x} \mid \bot]\!] = \emptyset$.

ii) Se $\varphi \in Sent(L^*)$, então $[\![\varphi]\!]$ é elemento de Ω, ou seja, é morfismo $\mathbf{1} \to \Omega$.

iii) Se $\bar{x}$ for n-upla de variáveis de L^*, então $[\![\bar{x}]\!] = D_M^n$, em particular $[\![x]\!] = D_M$.

iv) Se c for constante de L^*, então $[\![c]\!]$ é morfismo $\mathbf{1} \to D_M$. Notemos que $\mathbf{1}$ em SET pode ser visto como $D_M^0 = \{\emptyset\}$.

v) Se t for termo com $\bar{x}$ variáveis livres, sequência n-ária, então $[\![\bar{x} \mid t]\!]$ é morfismo $D_M^n \to D_M$. Em particular, se $t = x_i \in \bar{x}$, então $[\![\bar{x} \mid x_i]\!] = Pr_i([\![\bar{x}]\!])$, projeção na i-ésima cordenada de $\bar{x}$. Obviamente se $n = 0$, então $t = c$ é constante e $[\![\bar{x} \mid t]\!] = [\![c]\!] : \mathbf{1} \to D_M$.

Notemos que se $\bar{t}$ for sequência de n termos, com $\bar{x}$ sequência de m variáveis livres em $\bar{t}$, então $[\![\bar{x} \mid \bar{t}]\!]$ é morfismo $D_M^m \to D_M^n$, ou seja, $[\![\bar{x} \mid \bar{t}]\!]$ é morfismo da forma $< [\![\bar{x} \mid t_1]\!], \ldots, [\![\bar{x} \mid t_n]\!] >$.

Se f for símbolo funcional n-ário[8], então $[\![f]\!]$ é morfismo $D_M^n \to D_M$; se $\bar{x}$ for sequência com m variáveis livres em $\bar{t}$ (sequência de n termos), então $[\![\bar{x} \mid f\bar{t}]\!]$ é morfismo $D_M^m \to D_M$ satisfazendo o diagrama, para cada $i = 1, \ldots, n$:

[7] Ver (BUTTON; WALSH, 2018) - cap. 1; (SHOENFIELD, 1967) pp. 43 - 46.
[8] Estamos considerando f definida em todo D_M^n. É possível apresentar tal definição para o caso em que f seja apenas uma função parcial.

$$\begin{tikzcd}
D_M & D_M^n \arrow[l, "Pr_i"'] \arrow[r, "[\![f]\!]"] & D_M \\
& D_M^m \arrow[ul, "[\![\bar{x} \mid t_i]\!]"] \arrow[u, "[\![\bar{x} \mid \bar{t}\ ]\!]"] \arrow[ur, "[\![\bar{x} \mid f\bar{t}\ ]\!]"'] &
\end{tikzcd}$$

vi) Se P for predicado n-ário então $[\![P]\!] \subseteq D_M^n$ e $[\![\bar{x} \mid P\bar{x}]\!] = [\![P]\!]$ se $\bar{x}$ for sequência n-ária que contém exatamente as variáveis que ocorrem em P, ou seja, $[\![P]\!]$ é subobjeto de D_M^n. Temos assim o pullback:

$$\begin{tikzcd}
([\![P]\!]) \arrow[r, hook] \arrow[d, "!_{[\![P]\!]}"] & D_M^n \arrow[d, "\chi_{[\![P]\!]}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Se $\bar{t} =< t_1, \ldots, t_n >$ for termo n-ário com $\bar{x}$ sequência com m variáveis livres, então $[\![\bar{x}|\ P\bar{t}\ ]\!]$ é subobjeto de D_M^m que completa o quadrado comutativo:

$$\begin{tikzcd}
([\![\bar{x}|\ P\bar{t}\ ]\!]) \arrow[r, hook] \arrow[d] & D_M^m \arrow[d, "[\![\bar{x}|\ \bar{t}\ ]\!]"] \\
([\![P]\!]) \arrow[r, hook] & D_M^n
\end{tikzcd}$$

Em particular, se em $t_1 = t_2$ existem n variáveis livres $\bar{x}$, então $[\![\bar{x}|t_1 = t_2\ ]\!]$ é subobjeto de $[\![\bar{x}]\!] = D_M^n$ tal que o monomorfismo e é equalizador para os morfismos $[\![\bar{x}|t_1]\!]$ e $[\![\bar{x}|t_2]\!]$, sendo $e : [\![\bar{x}|t_1 = t_2\ ]\!] \hookrightarrow D_M^n \rightrightarrows D_M$.

Para $t_1 = x$ e $t_2 = y$, então $[\![x, y \mid x = y\ ]\!] \hookrightarrow D_M^2 \rightrightarrows D_M$, equalizador para as projeções em x e y. Assim, $[\![x, y \mid x = y\ ]\!] = \Delta(D_M) \subseteq D_M^2$ para Δ a aplicação diagonal.

vii) Sejam φ e ψ fórmulas nas quais ocorrem, no máximo, $\bar{x}$ variáveis livres, então $[\![\bar{x}|\varphi]\!]$ e $[\![\bar{x}|\psi]\!]$ são subobjetos de D_M^n. Temos o seguinte diagrama para φ, pullback se a sequência for formada exatamente pelas variáveis livres de φ:

$$\begin{tikzcd}
([\![\bar{x} \mid \varphi]\!]) \arrow[r, tail] \arrow[d, "!"] & D_M^n \arrow[d, "\chi_{[\![\varphi]\!]}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Para os operadores primitivos, temos[9]:

I) $[\![\bar{x} \mid \neg\varphi]\!] = D^n_M - [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]^c$. Em SET temos o pullback:

$$\begin{tikzcd}
([\![\bar{x} \mid \neg\varphi]\!]) \arrow[r, tail] \arrow[d, "!"] & D^n_M \arrow[d, "\chi_{[\![\varphi]\!]}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\perp"] \arrow[d, "!"] & \Omega \arrow[d, "\neg"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Podemos então identificar o subobjeto $[\![\bar{x} \mid \neg\varphi]\!]$ com $\neg[\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$, seu complemento no reticulado dos subobjetos de D^n_M.

$$\begin{tikzcd}
([\![\bar{x} \mid \neg\varphi]\!]) \arrow[r, tail] \arrow[d, "!"] & D^n_M \arrow[d, "\chi_{[\![\neg\varphi]\!]} = \neg\circ\chi_{[\![\varphi]\!]}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

II) $[\![\bar{x} \mid \varphi \wedge \psi]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \cap [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$, que é subobjeto de D^n_M no reticulado $(Sub(D^n_M), \subseteq)$, de maneira que este subobjeto completa o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
([\![\bar{x} \mid \varphi \wedge \psi]\!]) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed, "{[\![\bar{x}|\varphi]\!] \cap [\![\bar{x}|\psi]\!]}"] & ([\![\bar{x} \mid \psi]\!]) \arrow[d, hook] \\
([\![\bar{x} \mid \varphi]\!]) \arrow[r, hook] & D^n_M
\end{tikzcd}$$

Podemos estabelecer o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & ([\![\bar{x} \mid \varphi \wedge \psi]\!]) \arrow[dl, hook] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, hook] & \\
([\![\bar{x} \mid \varphi]\!]) \arrow[r, tail] \arrow[d] & D^n_M \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & ([\![\bar{x} \mid \psi]\!]) \arrow[l, tail] \arrow[d] \\
1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega & 1 \arrow[l, tail, "\top"']
\end{tikzcd}$$

[9] Por abuso de linguagem, denotaremos por $[\![\varphi]\!]$ o morfismo inclusão em D^n_M para o subobjeto apropriado para φ com n variáveis livres. Pelas construções, veremos que esta mesma construção pode ser estendida - e utilizaremos a mesma notação - para n maior do que o número de variáveis livres presentes em φ - ver vi) e vii).

Ou seja, o morfismo inclusão de $[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$, subobjeto de D_M^n, é equalizador para os morfismos $\chi_{[\![\varphi]\!]}$ e $\chi_{[\![\psi]\!]}$. Podemos estender a notação $[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$ para tal morfismo, ficando com o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} ([\![\bar{x} \mid \varphi \wedge \psi]\!]) \arrow[r, hook, "{[\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]}"] & D_M^n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \Omega \end{tikzcd}$$

Logo, temos o pullback:

$$\begin{tikzcd} ([\![\bar{x} \mid \varphi \wedge \psi]\!]) \arrow[r, tail] \arrow[d, "!"] & D_M^n \arrow[d, "\chi_{[\![\varphi \wedge \psi]\!]}"] \\ 1 \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

III) $[\![\bar{x} \mid \exists y \varphi(\bar{x})]\!] = p_n([\![\bar{x}, y \mid \varphi(\bar{x}, y)]\!])$ é subobjeto de D_M^n. Notemos que $[\![\bar{x}, y \mid \varphi(\bar{x}, y)]\!]$ é subobjeto de D_M^{n+1} que faz o diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} ([\![\bar{x}, y \mid \varphi(\bar{x}, y)]\!]) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_n"] & D_M^{n+1} \arrow[d, "p_n"] \\ ([\![\bar{x} \mid \exists y \varphi(\bar{x})]\!]) \arrow[r, hook] & D_M^n \end{tikzcd}$$

Para $p_n(\bar{a}, b) = \bar{a}$ projeção da sequência $(\bar{a}, b)$.

Observação: Do apêndice A segue que podemos definir as interpretações para os operadores lógicos $\vee$, $\supset$ e $\forall$, a partir da interpretação no reticulado dos subobjetos apropriados e das operações $\sqcap$ (inf.), $\sqcup$ (sup.), $\sim$ (complemento.) e $\Rightarrow$ (pseudo-complemento relativo) em SET.

viii) As substituições estão bem definidas por meio de morfismos:

I) Sejam $\varphi(\bar{x}, z)$ e $t(\bar{y})$ termo, com $\bar{y} =< y_1, \ldots, y_m >$ livre para $\bar{x} =< x_1, \ldots, x_n >$ e z, e $D_M^n \times [\![\bar{y} \mid t]\!]$ for morfismo que satisfaz $(D_M^n \times [\![\bar{y} \mid t]\!])(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, c)$, tal que $[\![\bar{y} \mid t]\!](\bar{b}) = c$.

Portanto $[\![\bar{x}, \bar{y} \mid \varphi[t/z]]\!] = (D_M^n \times [\![\bar{y} \mid t]\!])^{-1}([\![\bar{x}, z \mid \varphi(\bar{x}, z)]\!])$, ou seja, $[\![\bar{x}, \bar{y} \mid \varphi[t/z]]\!]$ é subobjeto de $D_M^n \times D_M^m$.

II) Seja Δ a aplicação diagonal e $\varphi(\bar{x}, y, z)$ para $\bar{x}$ sequência com n variáveis. Temos a aplicação $D_M^n \times \Delta : D_M^n \times D_M \to D_M^n \times D_M^2$, associando $(\bar{a}, b)$ a $(\bar{a}, b, b)$.

Portanto $[\![\bar{x}, y \mid \varphi[y/z]]\!] = (D_M^n \times \Delta)^{-1}([\![\bar{x}, y, z \mid \varphi(\bar{x}, y, z)]\!])$, ou seja, $[\![\bar{x}, y \mid \varphi[y/z]]\!]$ é subobjeto de D_M^{n+1}.

Estas construções mostram que SET é um topos apropriado para elaborarmos, em termos categoriais e por meio de morfismos, a estrutura das semânticas clássicas para L^*.

6.1.3 Interpretação Geral em SET via Morfismos

Como todo subobjeto de um topos ε pode ser visto como um morfismo apropriado, tal interpretação categorial para a lógica de primeira ordem pode ser vista exclusivamente na perspectiva de morfismos - ver (GOLDBLATT, 2006). Reinterpretando as noções anteriores, de maneira apropriada, a noção de validade $\models$ em relação a esta estrutura categorial em SET pode ser identificada por meio de morfismos $\top_{D_M^n}$.

Definição 6.1.9. *Um número natural $n \geq 1$ é dito **apropriado** para uma fórmula φ se todas as variáveis que aparecem na fórmula (livres ou ligadas) estão na lista $x_1, \ldots, x_n$, uma enumeração fixada para as variáveis de L^*.*

Definição 6.1.10. *Para todo A conjunto, seja $\Delta_A : A \to A \times A$ o monomorfismo $< Id_A, Id_A >$ que representa a função diagonal de A. A característica de Δ_A é a função $\delta_A : A \times A \to \Omega$, função delta de Kroenecker, definida pelo pullback:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\Delta_A"] \arrow[d, "!_A"] & A \times A \arrow[d, "\chi_{\Delta_A}=\delta_A"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Seja o morfismo $\top_A \circ Pr_A : A \times \mathbf{1} \to A \to \Omega$. Sua adjunta exponencial é o morfismo $\mathbf{1} \to \Omega^A \cong PA$, ou seja, é o morfismo **nome** de $\top_A$, denotado por $\ulcorner \top_A \urcorner$.

Definição 6.1.11. *Define-se o morfismo $\forall_A : \Omega^A \to \Omega$ como o morfismo que faz o quadrado comutar:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\ulcorner \top_A \urcorner"] \arrow[d, "!"] & \Omega^A \arrow[d, "\forall_A"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Portanto $\forall_A$ é a característica de $\ulcorner \top_A \urcorner$, pois o diagrama é pullback.

Observação: Como $\Omega^A \cong PA$, tal morfismo satisfaz em SET:

$$\forall_A(X) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad X = A \\ 0 & \text{se} \quad X \neq A \end{cases}$$

Seja A conjunto e $\in_A := \{< x, B > | B \subseteq A \text{ e } x \in B\}$. Temos que $\in_A$ é subobjeto de $A \times \wp(A)$, pelo monomorfismo inclusão e_A, tal que $< x, B > \in \in_A$ se e somente se $x \in B$, portanto, para $< x, B > \in \in_A$ temos que $Pr_2(< x, B >) = B$, ou seja, $Pr_2(\in_A)$ é a coleção dos subconjuntos não-vazios de A. Temos o pullback:

$$\begin{tikzcd} \in_A \arrow[r, hook, "e_A"] \arrow[d, "!"] & A \times \Omega^A \arrow[d, "\chi_{e_A}"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ou seja, $\chi_{\in_A} = ev_A : A \times \Omega^A \to \Omega$.

Podemos obter uma fatoração epi-mono de $(Pr_2 \circ e_A)(\in_A)$:

$$\begin{tikzcd} \in_A \arrow[r, hook, "e_A"] \arrow[d, two heads] & A \times \Omega^A \arrow[d, "Pr_2"] \\ (Pr_2 \circ e_A)(\in_A) \arrow[r, tail, "Im(Pr_2 \circ e_A)"] & \Omega^A \end{tikzcd}$$

Definição 6.1.12. *Para o morfismo imagem de $(Pr_2 \circ e_A)$ temos que seu morfismo característica, que completa o pullback a seguir, é denotado por $\exists_A$:*

$$\begin{tikzcd} (Pr_2 \circ e_A)(\in_A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "!"] & \Omega^A \arrow[d, "\exists_A"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Observação: Tal morfismo satisfaz em SET:

$$\exists_A(X) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad X \neq \emptyset \\ 0 & \text{se} \quad X = \emptyset \end{cases}$$

Das definições anteriores, vemos que os morfismos $\forall_A$ e $\exists_A$ satisfazem as propriedades desejadas.

Definição 6.1.13. *Para todos os valores de m e i tais que $1 \leq i \leq m$, definimos os operadores $T_i^{m+1} : A^{m+1} \to A^m$ por meio da sequência das projeções apropriadas: $< Pr_2^{m+1}, \ldots, Pr_i^{m+1}, Pr_1^{m+1}, Pr_{i+2}^{m+1}, \ldots, Pr_{m+1}^{m+1} >$. Desta forma, podemos estabelecer $T_i^{m+1}(a, b_1, \ldots, b_m) =< b_1, \ldots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots, b_m >$, que troca a posição i-ésima da sequência $\overline{b}$ pelo valor a.*

Uma interpretação construída sobre uma relação de satisfação da semântica clássica para L^* é uma SET-estrutura dada por:

1) D_M é um conjunto não-vazio, ou seja, $SET(\mathbf{1}, D_M) \neq \emptyset$.

2) Para todo símbolo de predicado P^n de L^*, com $n \geq 0$, temos um morfismo $\llbracket P^n \rrbracket : D_M^n \to \Omega$ tal que:

$$\llbracket P^n \rrbracket(< x_1, \ldots, x_n >) = \begin{cases} 1 & \text{se} \qquad\qquad < x_1, \ldots, x_n > \in M(P_i^n) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observação: Se $n = 0$, o símbolo de predicado é variável proposicional, então $\llbracket P^n \rrbracket : D_M^0 = \mathbf{1} \to \Omega$ é valor de verdade.

3) Para toda constante c de L^* temos o morfismo $\llbracket c \rrbracket : \mathbf{1} \to D_M$, elemento de D_M.

4) Para todo símbolo funcional n-ário f $(n \geq 1)$ da linguagem temos um morfismo $\llbracket f \rrbracket : D_M^n \to D_M$.

5) Para todo termo t e para todo m apropriado a t, definimos o morfismo ρ_t^m da seguinte forma:

a) Se $t = x_i$ para algum $1 \leq i \leq m$, então $\rho_t^m = Pr_i^m : D_M^m \to D_M$;

b) Se $t = c$ para alguma constante $c \in L^*$, então $\rho_t^m = \llbracket c \rrbracket \circ !_{D_M^m} : D_M^m \to D_M$;

c) Se $t = f(\tau)$ para alguma função n-ária f e $\tau = < \tau_1, \ldots, \tau_n >$ sequência de n termos, então a função é definida recursivamente por $\rho_t^m = \llbracket f \rrbracket \circ \rho_\tau^m : D_M^m \to D_M$, para $\rho_\tau^m = < \rho_{\tau_1}^m, \ldots, \rho_{\tau_n}^m >$, tais que o diagrama comuta, para todo i menor ou igual a n:

$$\begin{tikzcd}
D_M & D_M^n \arrow[l, "Pr_i"'] \arrow[r, "\llbracket f \rrbracket"] & D_M \\
& D_M^m \arrow[ul, "\rho^m_{\tau_i}"] \arrow[u, "\rho^m_\tau"] \arrow[ur, "\rho^m_t"'] &
\end{tikzcd}$$

Seja m um número apropriado para as fórmulas φ e ψ.

I) $\llbracket \top \rrbracket^m = \top_{D_M^m}$ e $\llbracket \bot \rrbracket^m = \bot_{D_M^m}$ são os morfismos que satisfazem os diagramas:

$$\begin{tikzcd}
D_M^m \arrow[r, "!"] \arrow[dr, "\top_{D_M^m}"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D_M^m \arrow[r, "!"] \arrow[dr, "\bot_{D_M^m}"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\bot"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

II) Para t_1 e t_2 termos de L^* temos o morfismo $\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket^m = \delta_{D_M^m} \circ < \rho_{t_1}^m, \rho_{t_2}^m >$: $D_M^m \to \Omega$:

$$\begin{tikzcd}
D_M^m \arrow[r, "<\rho^m_{t_1}, \rho^m_{t_2}>"] \arrow[dr, "\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket^m"] & D_M^2 \arrow[d, "\delta_{D_M^m}"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

III) Para todo símbolo de predicado n-ário P ($n \geq 0$), temos:

a) Se $n = 0$, $\llbracket P^0 \rrbracket^m : \mathbf{1} \to \Omega$.

b) Se $n \geq 1$, $\llbracket P^n \rrbracket^m = \llbracket P^n \rrbracket \circ < \rho^m_{t_1}, \ldots, \rho^m_{t_n} >: D^m_M \to D_M$.

IV) $\llbracket \neg\varphi \rrbracket^m = \neg \circ \llbracket \varphi \rrbracket^m : D_M \to \Omega$.

V) $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket^m = \llbracket \varphi \rrbracket^m \cap \llbracket \psi \rrbracket^m = \wedge\circ < \llbracket \varphi \rrbracket^m, \llbracket \psi \rrbracket^m >: D^m_M \to \Omega$.

$$\begin{tikzcd}
& D^m_M \arrow[dl, "\llbracket \varphi \rrbracket^m"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\llbracket \psi \rrbracket^m"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\wedge"] & \Omega \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

Definição 6.1.14. *Seja $\llbracket \varphi \rrbracket^m$ morfismo; podemos determinar a composta $\llbracket \varphi \rrbracket^m \circ T^{m+1}_i$: $D_M \times D^m_M \to \Omega$ para algum $1 \leq i \leq m$, cuja adjunta exponencial é o morfismo $|\varphi|^m_i$: $D^m_M \to \Omega^{D_M}$.*

VI) $\llbracket \exists x_i \varphi \rrbracket^m = \exists_{D_M} \circ |\varphi|^m_i$, para $1 \leq i \leq m$.

$$\begin{tikzcd}
D^m_M \arrow[r, "|\varphi|^m_i"] \arrow[dr, "\llbracket \exists x_i \varphi \rrbracket^m"] & \Omega^{D_M} \arrow[d, "\exists_{D_M}"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

Para os outros conectivos não-primitivos, temos também:

VII) $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket^m = \llbracket \varphi \rrbracket^m \cup \llbracket \psi \rrbracket^m = \vee\circ < \llbracket \varphi \rrbracket^m, \llbracket \psi \rrbracket^m >: D^m_M \to \Omega$.

VIII) $\llbracket \varphi \supset \psi \rrbracket^m = \llbracket \varphi \rrbracket^m \Rightarrow \llbracket \psi \rrbracket^m : D^m_M \to \Omega$.

IX) $\llbracket \forall x_i \varphi \rrbracket^m = \forall_{D_M} \circ |\varphi|^m_i$, para $1 \leq i \leq m$.

$$\begin{tikzcd}
D^m_M \arrow[r, "|\varphi|^m_i"] \arrow[dr, "\llbracket \forall x_i \varphi \rrbracket^m"] & \Omega^{D_M} \arrow[d, "\forall_{D_M}"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

Sejam $\varphi(\bar{x})$ fórmula com n variáveis livres $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ e $g : D^n_M \to D_M$ função. Seja m um número apropriado para φ, ou seja, $m \geq n$, e $f : D^n_M \to D^m_M$ função da forma $< h_1, \ldots, h_m >$ definidas por:

$$h_j = \begin{cases} Pr^n_k & \text{se} \qquad\qquad j = i_k \; |1 \leq k \leq n \\ g & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observemos que é necessário que $D_M \neq \emptyset$ para que exista $g : D^0_M \to D_M$.

Mostra-se que para toda g temos o diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
D_M^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\llbracket\varphi\rrbracket"'] & D_M^m \arrow[d, "\llbracket\varphi\rrbracket^m"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
$$

Isto é, a interpretação $\llbracket - \rrbracket$ é insensível ao que ocorre nas variáveis não-livres de φ. Ou seja, para toda fórmula $\varphi \in For(L^*)$ apresentamos a interpretação categorial desta fórmula na L^*-estrutura M via morfismos de SET (a partir da análise categorial dos subobjetos da interpretação $\llbracket - \rrbracket$), de maneira que se n for o número de variáveis livres de φ, então $\llbracket\varphi\rrbracket : D_M^n \to \Omega$. Portanto em SET temos $M \models \varphi$ se e somente se $\llbracket\varphi\rrbracket = \top_{D_M^n}$. De fato, pode-se colocar, de maneira mais geral:

Teorema 6.1.1. *Se φ tem índice n (número de variáveis livres) e se m for apropriado à φ, então para determinada L^*-estrutura da semântica clássica M temos que $M \models \varphi$ se e somente se $\llbracket\varphi\rrbracket^m = \top_{D_M^m}$.*

Ver (GOLDBLATT, 2006)

6.2 Lógica de Primeira Ordem Modal

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem estendida de L^* com o acréscimo de $\Box$ e/ou $\Diamond$ (todas estas definições podem ser estendidas para a adição de mais operadores não-clássicos).

Definição 6.2.1. *As **fórmulas atômicas clássicas** de $\mathcal{L}$, AC($\mathcal{L}$), são de dois tipos:*

Tipo 1. FACP($\mathcal{L}$) - fórmula atômica clássica primitiva*: todas fórmulas atômicas de L^*.*

Tipo 2. FACNP($\mathcal{L}$) - fórmula atômica clássica não-primitiva*: todas fórmulas em que o principal operador é não-clássico, como $\Box\forall x(\varphi \supset \psi)$.*

Se $\varphi \in For(\mathcal{L})$ não possuir operadores não-clássicos ela será dita **fórmula clássica pura**. Se φ possuir operadores não-clássicos ela será dita **fórmula não-clássica**. Portanto, as relações de satisfação da semântica clássica para L^* interpretam (classicamente) *todas* as fórmulas clássicas de $\mathcal{L}$.

Há várias formas de estender as noções de satisfação das L^*-estruturas M para $\mathcal{L}$-estruturas $\mathcal{M}$, de maneira que para cada M, L^*-estrutura, várias $\mathcal{L}$-estruturas $\mathcal{M}$ podem ser construídas, coincidindo interpretações das fórmulas de L^*, isto depende da forma que é expandida a noção de satisfação para os operadores não-clássicos (dependente da lógica subjacente escolhida). É importante ressaltarmos que para cada M, L^*-estrutura, existe uma única relação de satisfação clássica para L^* - como definido na seção anterior.

Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura que satisfaz, no reduto clássico, para $\models$ relação de satisfação:

$S1)$ $\mathcal{M} \models_\sigma \neg\varphi \iff \mathcal{M} \not\models_\sigma \varphi$

$S2)$ $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{M} \models_\sigma \varphi$ e $\mathcal{M} \models_\sigma \psi$

$S3)$ $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi \vee \psi \iff \mathcal{M} \models_\sigma \varphi$ ou $\mathcal{M} \models_\sigma \psi$

$S4)$ $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi \supset \psi \iff \mathcal{M} \not\models_\sigma \varphi$ ou $\mathcal{M} \models_\sigma \psi$

$S5)$ $\mathcal{M} \models_\sigma \exists x\varphi \iff \mathcal{M} \models_{[a/x]\sigma} \varphi$ para algum $a \in |\mathcal{M}|$

$S6)$ $\mathcal{M} \models_\sigma \forall x\varphi \iff \mathcal{M} \models_{[a/x]\sigma} \varphi$ para todo $a \in |\mathcal{M}|$

$S7)$ $\mathcal{M} \models_\sigma P(t_1, \ldots, t_n) \iff (I_{\mathcal{M}}(t_1), \ldots, I_{\mathcal{M}}(t_n)) \in (P)_{\mathcal{M}}$ para todo predicado n-ário P

Para $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura "fixada" no reduto clássico de $\mathcal{L}$, podemos formular diversas estruturas de interpretação $(\mathcal{M}, \models)$ sobre $\mathcal{M}$ para a parte não-clássica, de tal maneira que todas coincidam no que interpretam na parte clássica.

O teorema a seguir é central para o argumento apresentado para demonstar a completude da lógica **FOS4**, por isso, indicarei aqui sua demonstração. Todos os outros resultados estão devidamente demonstrados em (KISHIDA, 2011) ou (AWODEY; KISHIDA, 2012), assim como resultados bem conhecidos da lógica clássica, que podem ser encontrados em (SHOENFIELD, 1967).

Teorema 6.2.1. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem não-clássica. Para toda $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$, há uma bijeção e entre $\wp(|\mathcal{M}|^{var(\mathcal{L})}\times$ FACNP($\mathcal{L}$)) e a classe de relações clássicas para $\mathcal{L}$ que satisfazem $S1$ - $S7$ (na parte clássica) e que coincidem com $(\mathcal{M}, \models)$ na parte clássica, i.e., estruturas que pertencem à semântica clássica para o reduto clássico de $\mathcal{L}$ e que coincidem no reduto clássico de $\mathcal{M}$. Além disso, para todo $A \subseteq |\mathcal{M}|^{var(\mathcal{L})}\times$ FACNP($\mathcal{L}$), segue que $e(A) = (\mathcal{M}, \models)$ é tal que para toda $\sigma \in |\mathcal{M}|^{var(\mathcal{L})}$ e $\varphi \in$FACNP($\mathcal{L}$), temos $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$ se e somente se $(\sigma, \varphi) \in A$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{M}'$ uma $\mathcal{L}$-estrutura fixada e $\mathcal{C}$ a classe de todas as relações de satisfação clássicas para L^*, reduto clássico de $\mathcal{L}$, que coincidem com a interpretação de $\mathcal{M}'$ em $For(L^*)$. Consideremos $r : \mathcal{C} \to \wp(|\mathcal{M}'|^{var(\mathcal{L})}\times$ FACNP($\mathcal{L}$)) definida por $r((\mathcal{M}, \models)) = \models\ \cap\ (|\mathcal{M}'|^{var(\mathcal{L})}\times$ FACNP($\mathcal{L}$)), portanto $r((\mathcal{M}, \models))$ destaca as atribuições e interpretações para as fórmulas atômicas clássicas não-primitivas de $\mathcal{L}$ de cada uma das $(\mathcal{M}, \models)$ em $\mathcal{C}$.

Logo, para todo $A \subseteq |\mathcal{M}'|^{var(\mathcal{L})} \times$ FACNP($\mathcal{L}$) e para toda $\varphi \in$ FACNP($\mathcal{L}$), para determinada $(\mathcal{M}, \models)$ em $\mathcal{C}$, temos que:

($\mathcal{M} \models_\sigma \varphi \Leftrightarrow (\sigma, \varphi) \in A$) se e somente se $r((\mathcal{M}, \models)) = A$.

Fixemos um destes A.

Sabemos que toda fórmula de $\mathcal{L}$ pode ser construída recursivamente por meio da aplicação dos operadores de $\mathcal{L}$ sobre fórmulas de AC($\mathcal{L}$) e sobre o resultado destas aplicações (basta aplicarmos indução nas fórmulas de AC($\mathcal{L}$)).

Como AC($\mathcal{L}$) = FACP($\mathcal{L}$) $\cup$ FACNP($\mathcal{L}$) e a interpretação das FACP em toda $(\mathcal{M}, \models) \in \mathcal{C}$ é única - coincidindo com as interpretações das fórmulas clássicas em $(\mathcal{M}', \models)$, segue que para este A fixo, existe uma única $(\mathcal{M}, \models)$ em $\mathcal{C}$ que interpreta as fórmulas de $\mathcal{L}$ não-clássicas de maneira apropriada com respeito à A, fórmulas de FACNP($\mathcal{L}$). Seja $e(A) = (\mathcal{M}_A, \models)$ tal $\mathcal{L}$-estrutura.

Assim, definimos $e : \wp(|\mathcal{M}'|^{var(\mathcal{L})} \times$ FACNP($\mathcal{L}$) $) \rightarrow \mathcal{C}$ que satisfaz $e(r((\mathcal{M}, \models)) = e(A) = (\mathcal{M}_A, \models)$.

Por construção, por outro lado, $r(e(A)) = r((\mathcal{M}_A, \models)) = A$, ou seja, e é bijeção.

$\blacksquare$

Do teorema segue que se $\mathcal{M}$ for uma $\mathcal{L}$-estrutura tal que, restrita ao reduto clássico de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{M}, \models)$ é uma semântica clássica, então existe uma bijeção entre o conjunto $\wp(|\mathcal{M}|^{var(\mathcal{L})} \times$ FACNP($\mathcal{L}$) $)$ e as relações de satisfação clássicas sobre $\mathcal{M}$, i.e., para todo $A \subseteq |\mathcal{M}|^{var(\mathcal{L})} \times$ FACNP($\mathcal{L}$) existe uma única interpretação $(\mathcal{M}, \models')$ tal que $(\sigma, \varphi) \in A$ se e somente se $\mathcal{M} \models'_\sigma \varphi$, ou seja, somente uma destas interpretações satisfaz exatamente, e somente estas, as fórmulas FACNP($\mathcal{L}$) que compõem A. Todavia, embora já tenhamos visto que as relações de satisfação na classe $\mathcal{C}$ se comportam bem com relação à α-equivalência, substituição e determinação local, o mesmo não ocorre com fórmulas modalizadas (exemplos em (KISHIDA, 2011) pp. 70 - 82).

Definição 6.2.2. *Uma extensão à noção de* ***relação de satisfação clássica*** *para uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$, não-clássica, será uma relação de satisfação $(\mathcal{M}, \models)$, sobre uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$, tal que $(\mathcal{M}, \models)$ satisfaz $S1$ - $S7$ no reduto clássico, mais α-**equivalência**, **substituição** e **determinação local** para todas as fórmulas de $\mathcal{L}$.*

Teorema 6.2.2. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem não-clássica e $(\mathcal{M}, \models)$ uma relação de satisfação para $\mathcal{L}$ que satisfaz $S1$ - $S7$. Então:*

i) Se for o caso que toda $\varphi \in$ FACNP($\mathcal{L}$) é localmente determinada em $(\mathcal{M}, \models)$, então tal relação de satisfação possui determinação local para toda fórmula de $\mathcal{L}$.

ii) Se for o caso que toda fórmula de $\mathcal{L}$ é localmente determinada em $(\mathcal{M}, \models)$ e, além disso, para toda $\varphi \in$ FACNP($\mathcal{L}$) tal relação de satisfação respeita substituição de termos em φ, então $(\mathcal{M}, \models)$ respeita substituição de termos para toda fórmula de $\mathcal{L}$.

iii) Se for o caso que para toda fórmula de $\mathcal{L}$ a relação de satisfação $(\mathcal{M}, \models)$ respeita determinação local e substituição de termos e, além disso, para quaisquer φ e ψ em FACNP($\mathcal{L}$) também respeita α-equivalência, então $(\mathcal{M}, \models)$ respeita α-equivalência para todo par de fórmulas de $\mathcal{L}$.

Demonstração, ver (KISHIDA, 2011) pp. 69 - 70.

Portanto, as "boas" propriedades da relação de satisfação clássica se *esparramam* em $\mathcal{L}$ se forem válidas em $FACNP(\mathcal{L})$.

As propriedades de α-equivalência, determinação local e substituição são necessárias para validar as regras de inferência (válidas em lógica de primeira ordem clássica)[10]

$$\frac{\Box\varphi \supset \Box\psi}{\Box\varphi \supset \forall x \Box\psi} \qquad\qquad \frac{\Box\varphi}{(\Box\varphi)[t/x]}$$

Lema 6.2.1. *Para toda $\mathcal{L}$ linguagem de primeira ordem (clássica ou não), existem uma linguagem de primeira ordem clássica $\mathcal{L}'$ para o qual $var(\mathcal{L}) = var(\mathcal{L}')$ e uma sobrejeção $\theta : For(\mathcal{L}) \twoheadrightarrow For(\mathcal{L}')$ de maneira que:*

Existe uma bijeção F, do tipo $(\mathcal{M}, \models) \to (\mathcal{M}', \models')$, restrita a classes de mesma cardinalidade, entre as relações de satisfação clássicas de $\mathcal{L}$ - no sentido estendido - a relações de satisfação clássicas de $\mathcal{L}'$, tal que se $F((\mathcal{M}, \models)) = (\mathcal{M}', \models')$ então:

a) $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$;

b) por consequência, $|\mathcal{M}|^{var(\mathcal{L})} = |\mathcal{M}'|^{var(\mathcal{L}')}$;

c) para toda $\sigma : var(\mathcal{L}) \to |\mathcal{M}|$ e para toda fórmula φ de $\mathcal{L}$, segue que $\mathcal{M} \models_\sigma \varphi$ se e somente se $\mathcal{M}' \models'_\sigma \theta\varphi$.

Demonstração - ver (KISHIDA, 2011) pp. 71 - 79.

A ideia geral para a construção de $\mathcal{L}'$ é que tal linguagem é uma "purificação" de $\mathcal{L}$ ao serem eliminados os operadores não-clássicos, acrescentando novos predicados necessários para reesccrever as fórmulas de $\mathcal{L}$ com operadores não-clássicos, i.e., $\mathcal{L}'$ é um extensão de $\mathcal{L}$ (descreverei a seguir o processo para uma linguagem com o único operador modal $\Box$).

[10] Ver (KISHIDA, 2011), p. 72.

Sendo assim, de maneira geral, se $\mathcal{L}$ for uma linguagem de primeira ordem com operadores não-clássicos e $(\mathcal{M}, \models)$ uma relação de satisfação clássica, no sentido estendido, segue do lema a existência de uma extensão puramente clássica $\mathcal{L}'$ para $\mathcal{L}$ tal que as relações de satisfação clássicas para as duas linguagens, nos respectivos sentidos, são equivalentes em relação às fórmulas de $\mathcal{L}$ e suas imagens pela sobrejeção θ, de maneira que as propriedades de α-equivalência, determinação local e substituição, em relação a $(\mathcal{M}, \models)$, são trivialmente demonstradas para a relação de satisfação clássica (standard) na imagem $(\mathcal{M}', \models')$, logo, o termo relação de satisfação clássica, dado para as relações de satisfação de $\mathcal{L}$, linguagem não-clássica, identificadas anteriormente, de fato é apropriado.

6.2.0.1 Restrição a Domínios de Quantificação

Definição 6.2.3. *Sejam X, V e U conjuntos e $D \subseteq X$. Uma apliação $f : X^V \to X^U$ é dita **restritível** a D se existir uma aplicação $g : D^V \to D^U$ que faz o diagrama comutar.*

$$\begin{tikzcd} X^V \arrow[r, "f"] & X^U \\ D^V \arrow[u, hook, "i_V"] \arrow[r, "g"] & D^U \arrow[u, hook, "i_U"'] \end{tikzcd}$$

Se existir tal g, ela é única.

Observação: Seja P um símbolo de predicado n-ário, então a interpretação de P em uma estrutura é trivialmente restritível, basta tomarmos $M(P_D) = M(P) \cap D^n$. Porém, o mesmo não ocorre quando lidamos com termos. O fato trivial a seguir pode ter a demonstração encontrada em (KISHIDA, 2011) p. 102.

Proposição 28. *Dados os conjuntos X, W, V e U tais que $D \subseteq X$ e $f : X^W \to X^V$ e $g : X^V \to X^U$ são aplicações restritíveis a D, então $g \circ f$ é restritível a D.*

Definição 6.2.4. *Uma extensão natural para a noção de restrição anterior é considerar X conjunto e D um de seus subconjuntos, com $i : D \hookrightarrow X$ inclusão, de maneira que se $f : \wp(X)^n \to \wp(X)^m$, então f dita **restritível** a D se existir uma única g tal que o diagrama a seguir comute:*

$$\begin{tikzcd} \wp(X)^n \arrow[r, "f"] & \wp(X)^m \\ \wp(D)^n \arrow[u, hook, "i^n"] \arrow[r, "g"] & \wp(D)^m \arrow[u, hook, "i^m"'] \end{tikzcd}$$

Das proposição e definição anteriores segue que:

Corolário 6.2.1. *Se X for conjunto e $D \subseteq X$, com $f : \wp(X)^n \to \wp(X)$, então f é restritível a D se e somente se para qualquer sequência $(A_1, \ldots, A_n) \in \wp(X)^n$, for o caso que $f(A_1 \cap D, \ldots, A_n \cap D) = f(A_1, \ldots, A_n) \cap D$.*

Corolário 6.2.2. *Se X for conjunto, $f : \wp(X)^n \to \wp(X)^m$ e $g : \wp(X)^m \to \wp(X)$ forem restritíveis a algum D, então $g \circ f$ também é restritível a este D.*

Denotemos por $\mathcal{L}^-$ uma linguagem de primeira ordem, clássica ou não, sem símbolos funcionais e constantes. Tratemos desta linguagem no restante desta seção.

Se $\mathcal{M}$ for uma $\mathcal{L}^-$-estrutura e $[\![\wedge]\!]$ interpreta o operador lógico $\wedge$, temos $[\![\wedge]\!] : \wp(|\mathcal{M}|)^2 \to \wp(|\mathcal{M}|)$, considerando $|\mathcal{M}|$ o domínio de atribuição da estrutura e $D_{\mathcal{M}}$ seu domínio de quantificação. Sabemos que tal operador é restritível e $[\![\wedge]\!]_{DQ} = [\![\wedge]\!] \cap D_{\mathcal{M}}$, ou seja, é restritível ao domínio de quantificação, o mesmo ocorrendo para os outros operadores clássicos [ver (KISHIDA, 2011) pp. 104 - 106].

Obviamente, como já apresentado anteriormente, todo predicado n-ário de $\mathcal{L}^-$ continua sendo restritível ao domínio de quantificação. Mesmo se a linguagem não for clássica, seu reduto clássico é restritível a domínios de quantificação. Mais ainda, mesmo se a linguagem possuir símbolos funcionais e constantes, com relação aos quantificadores, podemos afirmar serem restritíveis ao domínio de quantificação - ver (KISHIDA, 2011) pp. 110 - 112.

Sabemos que se $f : X \to Y$, existe um functor $f^* : \wp(X) \to \wp(Y)$ (apêndice A) com adjuntas $\exists_f$ e $\forall_f$ tais que se $A \subseteq X$, temos:

$$\frac{\exists_f(A) \subseteq B}{A \subseteq f^*(B)} \qquad\qquad \frac{f^*(B) \subseteq A}{B \subseteq \forall_f(A)}$$

Portanto, é válido para toda sequência $(A_1, \ldots, A_n) \in \wp(X)^n$:

$$\exists_f^n(A_1, \ldots, A_n) = (\exists_f(A_1), \ldots, \exists_f(A_n)) \text{ e } \forall_f^n(A_1, \ldots, A_n) = (\forall_f(A_1), \ldots, \forall_f(A_n))$$

Ou seja, os quantificadores $\forall$ e $\exists$ permutam em $\wp(X)^n$ em relação aos operadores $\forall_f^n$ e $\exists_f^n$, ou seja, têm o bom comportamento esperado com relação à restrição ao domínio de quantificação.

6.2.0.2 Operadores Modais e Sensibilidade

Definição 6.2.5. *Seja $\Box$ ($\Diamond$) operador modal; a interpretação do operador é dita* ***sensível a variáveis livres*** *se, para $\varphi(\bar{x})$ e $\psi(\bar{x})$ fórmulas com $\bar{x}$ variáveis livres, for o caso que $[\![\bar{x}|\varphi(\bar{x})]\!] = [\![\bar{x}|\psi(\bar{x})]\!]$ não implicar $[\![\bar{x}|\Box\varphi(\bar{x})]\!] = [\![\bar{x}|\Box\psi(\bar{x})]\!]$.*

Nesse caso, a interpretação sensível a variáveis livres resulta em uma semântica em que não temos a validação da regra de inferência da lógica modal normal[11]:

$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \psi \vdash \varphi}{\Box\varphi \vdash \Box\psi}$$

Definição 6.2.6. *Seja $\Box$ ($\Diamond$) operador modal; a interpretação do operador é dita **insensível a variáveis livres** se, para $\varphi(\bar{x})$ e $\psi(\bar{x})$ fórmulas com $\bar{x}$ variáveis livres, então $[\![\bar{x}|\varphi(\bar{x})]\!] = [\![\bar{x}|\psi(\bar{x})]\!]$ implica $[\![\bar{x}|\Box\varphi(\bar{x})]\!] = [\![\bar{x}|\Box\psi(\bar{x})]\!]$, ou seja, nesse caso, a interpretação do operador modal será dita **uniforme**.*

Propriedade especial 1: *Comutatividade do operador modal com as projeções.* O fato de operadores modais serem interpretados uniformemente garante a comutatividade entre a função interpretadora do operador modal e as projeções. Se $D = \sum D_i$, $\bar{x}$ for uma sequência n-ária de variáveis livres em φ e $[\![\Box]\!]_n : \wp(\sum D_i)^n \to \wp(\sum D_i)^n$ operador, ele interpreta $\Box$ uniformemente se a aplicação $[\![\bar{x}|\varphi(\bar{x})]\!] \mapsto [\![\bar{x}|\Box\varphi(\bar{x})]\!]$ fizer o quadrado comutar[12]:

$$\begin{tikzcd}
[\![\bar{x}|\varphi(\bar{x})]\!] \arrow[r, "[\![\Box]\!]_n"] \arrow[d, "p_n^{-1}"] & [\![\bar{x}|\Box\varphi(\bar{x})]\!] \arrow[d, "p_n^{-1}"] \\
[\![\bar{x}, y|\varphi(\bar{x})]\!] \arrow[r, "[\![\Box]\!]_{n+1}"] & [\![\bar{x}, y|\Box\varphi(\bar{x})]\!]
\end{tikzcd}$$

6.2.1 Tradução e Henkinização

Definição 6.2.7. *Para todas as fórmulas φ e ψ em $For(\mathcal{L})$, definamos $\varphi \preceq_0 \psi$ se e somente se $\psi = \varphi[t/x]$ tal que t é um termo livre para x em φ, i.e., quando ψ é obtida, a partir de φ, ao substituir uma das variáveis livres de φ por algum termo (livre para tal variável).*

Definição 6.2.8. *Seja $\preceq$ o fecho transitivo de $\preceq_0$, i.e., $\varphi \preceq \psi$ se e somente se existem $\theta_1, \ldots, \theta_n$ tais que $\varphi \preceq_0 \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_{n-1} \preceq_0 \theta_n \wedge \theta_n \preceq_0 \psi$, sendo que φ e ψ não possuem mais variáveis livres em comum.*

Definição 6.2.9. *Sejam φ e ψ fórmulas de $\mathcal{L}$. Dizemos que tais fórmulas são f-equivalentes ($\varphi \sim_f \psi$) se e somente se $\varphi \preceq \psi$ e $\psi \preceq \varphi$, i.e., as fórmulas têm a mesma estrutura, com exceção talvez da renomeação de suas variáveis livres. Notemos que f-equivalência é uma relação de equivalência.*

---

[11] Pois para tal regra ser válida, $\Box$ deve computar com as projeções - como veremos na propriedade especial 1.

[12] Ver (KISHIDA, 2011) p. 120.

Definição 6.2.10. *Seja $\Box$ o operador modal primitivo de $\mathcal{L}$. Definamos $\Box_{min}(\mathcal{L}) = \{\Box\varphi \in \mathcal{L} \mid \Box\varphi$ é $\preceq -minimal\}$. Desta forma, toda $\psi \in \Box_{min}(\mathcal{L})$ possui exatamente uma única ocorrência de suas variáveis livres e, se t for termo que contém símbolo funcional, há a ocorrência de uma variável ligada em t[13].*

Notemos que $\varphi \sim \psi := (\psi \sim_f \varphi)$ ou $(\psi \sim_\alpha \varphi)$ é uma relação de equivalência sobre as fórmulas de $\Box_{min}(\mathcal{L})$, de maneira que se $\varphi \in \Box_{min}(\mathcal{L})$, então $[\varphi]$ é classe de equivalência, para $[\varphi] = \{\psi \in \Box_{min}(\mathcal{L}) \mid \psi \sim_f \varphi \vee \psi \sim_\alpha \varphi\}$.

Neste caso, $\psi \in [\varphi]$ se e somente se ψ e φ possuem a mesma estrutura, com exceção, talvez, da renomeação de suas variáveis livres ou ligadas.

Definição 6.2.11. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem modal de primeira ordem com $\Box$ operador modal primitivo.*

Denotemos por $\mathcal{L}^\theta$ a lógica de primeira ordem não-modal, extensão de $\mathcal{L}$, obtida ao acrescentar a cada fórmula $\varphi \in \Box_{min}(\mathcal{L})$ um novo predicado n-ário, aridade de φ, denotado por $[\varphi]$. Como a linguagem $\mathcal{L}$ é enumerável, então $\mathcal{L}^\theta$ é ainda enumerável[14].

A tradução das fórmulas de $\mathcal{L}$, modais ou não, para fórmulas de $\mathcal{L}^\theta$, não-modais, é dada recursivamente por uma aplicação θ que satisfaz (ver lema 6.2.1):

1) Se $\varphi = P\bar{t}$, então $\varphi^\theta = P\bar{t}$, para P predicado n-ário.

2) Se $\varphi = \psi[\bar{t}/\bar{x}]$, para $\psi \in \Box_{min}(\mathcal{L})$, $\bar{x}$ variáveis livres de ψ, então $\varphi^\theta = [\psi]\bar{t}$.

3) $(\neg\varphi)^\theta = \neg\varphi^\theta$

4) $(\varphi \wedge \psi)^\theta = \varphi^\theta \wedge \psi^\theta$

5) $(\varphi \vee \psi)^\theta = \varphi^\theta \vee \psi^\theta$

6) $(\varphi \supset \psi)^\theta = \varphi^\theta \supset \psi^\theta$

7) $(\forall x\varphi)^\theta = \forall x\varphi^\theta$

8) $(\exists x\varphi)^\theta = \exists x\varphi^\theta$

Observação: Para toda fórmula $\varphi \in AC(\mathcal{L})$, se $\varphi \in FACP(\mathcal{L})$, então $\varphi^\theta = \varphi$; se $\varphi \in FACNP(\mathcal{L})$, então existe $\psi \in \Box_{min}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in [\psi]$, ou seja, $FACNP(\mathcal{L}) = \bigcup_{\psi \in \Box_{min}(\mathcal{L})} [\psi]$.

Como todas as fórmulas de $\mathcal{L}$ podem ser escritas recursivamente por fórmulas de $AC(\mathcal{L})$, então a definição anterior cobre a tradução, via θ, de todas as fórmulas de $\mathcal{L}$.

[13] De fato, mostra-se que para toda fórmula φ em $FACNP$, existe uma fórmula $\Box$-minimal equivalente a ela, basta utilizar para isso a inclusão de igualdades e quantificadores na construção da fórmula equivalente.

[14] Como $[\varphi]$ é classe de equivalência, podemos tomar um único representante para a classe e $\mathcal{L}^\theta$ é uma extensão da linguagem original, acrescentando esta coleção enumerável de predicados.

De fato, a cláusula 2) está bem definida, já que se $\varphi = \psi_0[\overline{t}/\overline{x}] = \psi_1[\overline{t'}/\overline{x'}]$ então $\overline{t} = \overline{t'}$ e $\psi_0 \sim_f \psi_1$, ou seja, $[\psi_0] = [\psi_1]$, logo $[\psi_0]\overline{t} = [\psi_1]\overline{t'}$.

Definição 6.2.12. *Se T for uma teoria de uma lógica S que contém a lógica clássica, na linguagem $\mathcal{L}$, então $T^\theta = \{\varphi^\theta \mid T \vdash \varphi\}$ é teoria (clássica) sobre $\mathcal{L}^\theta$ - linguagem clássica.*

Temos as seguintes propriedades:

a) Para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$, $(\varphi[t/x])^\theta = \varphi^\theta[t/x]$.

b) φ e φ^θ têm as mesmas variáveis livres.

c) Se $\varphi^\theta = \psi^\theta$ então $\varphi \sim_\alpha \psi$, basta considerarmos indução na construção das fórmulas de $\mathcal{L}$.

Definição 6.2.13. *Uma teoria T, S-consistente sobre $\mathcal{L}$, respeita $\sim_\alpha$ ($\sim_f$) equivalência se:*

$$T \vdash_S \varphi \text{ e } \varphi \sim_\alpha \psi \ (\varphi \sim_f \psi) \text{ então } T \vdash_S \psi$$

Proposição 29. *Se T for teoria que respeita α-equivalência, então $T \vdash \varphi$ se e somente se $T^\theta \vdash \varphi^\theta$ para todas as fórmulas $\varphi \in For(\mathcal{L})$.*

A demonstração deste fato segue diretamente das noções definidas anteriormente e suas propriedades. Obviamente, é consequência:

Corolário 6.2.3. *Se T for uma teoria S-consistente e respeita α-equivalência e T contém a lógica clássica, então T^θ contém a lógica clássica.*

6.2.1.1 Henkinização Preguiçosa

Para utilizar o procedimento de Henkin em teorias modais - em que $\Box$ é interpretado uniformemente, (*) $(\Box\varphi)[t/x] = \Box(\varphi[t/x])$, é necessário que para toda fórmula φ e testemunha para ela, devemos adicionar o axioma $\exists x\varphi \supset \varphi[c_\varphi/x]$, i.e., garantir que a teoria aumentada seja uma teoria de Henkin. Porém, nestes casos, pode ocorrer que tal extensão da teoria (modal) anterior não seja *conservativa*[15], quando consideramos o acréscimo do novo axioma. De fato, isso ocorre pois em **FOS4** há contra-exemplos para a fórmula $\Box\exists x\varphi \supset \exists x\Box\varphi$ - ver (AWODEY; KISHIDA, 2012), p.99.

Awodey e Kishida propõem o processo de adicionar à linguagem as testemunhas apropriadas, com relação à lógica modal que satisfaz (*), pelo método de *Henkinização-preguiçosa.*

[15] T' é uma *extensão conservativa* de T se toda fórmula (da linguagem) de T que é teorema de T' também for teorema de T. Por exemplo, quando a linguagem de T' é obtida a partir da linguagem de T ao adicionar novas constantes, atualizando os axiomas de T com relação a estas novas constantes adicionadas.

Definição 6.2.14. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem (modal ou não) e κ um cardinal. $\mathcal{L}_\kappa$ é a linguagem de primeira ordem obtida de $\mathcal{L}$ ao acrescentar a ela o conjunto $C_\kappa = \{c_\delta \mid \delta < \kappa\}$ de novas constantes.*

Se T for uma teoria de $\mathcal{L}$, então $T_\kappa = \{\varphi[\overline{c}/\overline{x}] \mid T \vdash \varphi$ e $c_i \in C_\kappa$ para toda $c_i \in \overline{c}\}$ ($\bar{c}$ pode ser vazia) em $\mathcal{L}_\kappa$, em que $\overline{x}$ não precisa conter todas as variáveis livres de φ e nem toda $x_i \in \overline{x}$ precisa ocorrer em φ, ou seja, T_κ é o conjunto de fórmulas de T com a substituição de (algumas) de suas variáveis livres por $\bar{c}$ constantes em C_κ[16]. Vale lembrar que T_κ ainda é uma teoria modal.

Proposição 30. *Se T é uma teoria S-consistente que respeita f-equivalência, então $T_\kappa \vdash \varphi[\overline{c}/\overline{x}]$ se e somente se $T \vdash \varphi$ para toda $\varphi \in \mathcal{L}$ e $\overline{c}$ sequência de constantes de C_κ.*

Demonstração: Se $\varphi \sim_f \psi$ então $T \vdash \varphi$ se e somente se $T \vdash \psi$, pois ambas só se distinguem em suas variáveis livres e T respeita f-equivalência.

Se $T \vdash \varphi$ então $T \vdash \varphi[\overline{y}/\overline{x}]$ para $\overline{y}$ novas em φ. Porém, $\varphi[\overline{c}/\overline{x}] \in T_\kappa$, logo $T_\kappa \vdash \varphi[\overline{c}/\overline{x}]$, quando $\bar{y}$ são substituídas por $\bar{c}$.

Se $T_\kappa \vdash \varphi[\overline{c}/\overline{x}]$, existe $\varphi \in For(\mathcal{L})$ tal que $\psi = \varphi[\overline{c}/\overline{x}] \in For(\mathcal{L}_\kappa)$, e $\overline{c}$ são constantes de C_κ; as constantes de φ são as mesmas constantes de ψ, com exceção das novas constantes de C_κ, portanto estas fórmulas se distinguem em apenas (algumas) das variáveis livres de φ e nestas novas constantes de C_κ.

Como T_κ é extensão conservativa de T, por sua definição, e ambas têm mesmas regras e esquemas de axiomas, então $T \vdash \varphi$.

■

Definição 6.2.15. *Seja $\mathfrak{M}$ um conjunto de estruturas de primeira ordem clássicas de uma linguagem L^*.*

Seja κ um cardinal tal que $||M|| \leq \kappa$ para toda $M \in \mathfrak{M}$.

Para toda M em $\mathfrak{M}$ define-se $e : \kappa \twoheadrightarrow |M|$, sobrejeção, e a estrutura M_e, expansão de M via e, na linguagem L^*_κ tal que, para todo $\delta < \kappa$, $c_\delta^{M_e} = e(\delta)$.

Consideremos $\mathfrak{M}_\kappa = \{M_e \mid M \in \mathfrak{M}$ e $e : \kappa \twoheadrightarrow |M|\}$, ou seja, cada M_e é uma "cópia" de M, com uma entre todas as interpretações possíveis para as novas constantes de C_κ. Tal conjunto contém todas as extensões possíveis de elementos de $\mathfrak{M}$, com cardinalidade menor do que κ, tais que $|M_e| = |M|$[17].

[16] Note que T_κ é extensão conservativa de T. Este procedimento é dito Henkinização-preguiçosa pois não acrescentamos os axiomas à teoria, acrescentando de uma só vez um estoque suficiente de "testemunhas" para todos os teoremas da teoria original T - e muito mais do que o necessário.

[17] Note que essa definição é a versão semântica para o processo sintático utilizado para a construção das teorias estendidas pelo método de Henkinização preguiçosa.

Lema 6.2.2. *Se T é teoria de $\mathfrak{M}$*[18]*, coleção de estruturas de primeira ordem tais que $||M|| \leq \kappa$, então T_κ é a teoria de $\mathfrak{M}_\kappa$, coleção de estruturas de primeira ordem tais que $||M_e|| \leq \kappa$.*

Demonstração: Como T é teoria de $\mathfrak{M}$, conjunto de estruturas de primeira ordem, então T respeita f-equivalência, logo $T_\kappa \vdash \varphi[\overline{c}, \overline{x}]$ se e somente se $T \vdash \varphi$.

São equivalentes:

i) Para toda M_e em $\mathfrak{M}_\kappa$: $M_e \models_{[\overline{b}/\overline{y}]} \varphi[\overline{c}/\overline{x}]$, para qualquer $\overline{b} \in |M_e|^n$

ii) Para toda M em $\mathfrak{M}$: $M \models_{[\overline{a},\overline{b}/\overline{x},\overline{y}]} \varphi$ para todos $\overline{a} \in |M|^m$ e $\overline{b} \in |M|^n$

Seja n o máximo entre as aridades de $\overline{a}$ e $\overline{b}$.

Sabemos que para todo $i \leq n$, $e(\delta_i) = c_{\delta_i}^{M_e}$ (1) e M_e uma das expansões de M (2).

$M_e \models_{[\overline{b}/\overline{y}]} \varphi[\overline{c}/\overline{x}] \Leftrightarrow_{(1)} M_e \models_{[e(\overline{\delta}),\overline{b}/\overline{x},\overline{y}]} \varphi \Leftrightarrow_{(2)} M \models_{[\overline{a},\overline{b}/\overline{x},\overline{y}]} \varphi$ para qualquer interpretação das novas constantes, já que $|M| = |M_e|$.

Portanto ii) $\Rightarrow$ i).

Sejam $M \in \mathfrak{M}$ e $\overline{a}$ e $\overline{b}$ sequências de elementos de $|M|$ com aridades apropriadas. Para toda $e : \kappa \to |M|$ tem-se $e(\overline{\delta}) = \overline{a}$ para alguma sequência $\overline{\delta}$.

Se $M \models_{[\overline{a},\overline{b}/\overline{x},\overline{y}]} \varphi$, então $M \models_{[e(\overline{\delta}),\overline{b}/\overline{x},\overline{y}]} \varphi$, ou seja, $M_e \models_{[\overline{b}/\overline{y}]} \varphi[\overline{c}/\overline{x}]$.

Portanto i) $\Rightarrow$ ii).

■

6.2.1.2 Relações entre Teorias

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem modal (com $\Box$ primitivo) e $\mathfrak{M}$ a classe de todas os modelos de uma teoria T nessa liguagem, de uma lógica S, que contém a lógica clássica de primeira ordem.

Delineamos o procedimento adotado por Awodey e Kishida para traduzir tal linguagem a uma linguagem de primeira ordem não-modal $\mathcal{L}^\theta$ e como construir T_κ teorias pelo precesso de Henkinização preguiçosa. Este resultado é uma aplicação específica do resultado mais geral delineado no lema 6.2.1. Temos os seguintes resultados.

Proposição 31. *Para toda linguagem de primeira ordem modal com $\Box$ primitivo, $(\mathcal{L}^\theta)_\kappa = (\mathcal{L}_\kappa)^\theta$.*

Demonstração: De fato, as relações de α e f-equivalência em $\mathcal{L}_\kappa$ são extensões das relações em $\mathcal{L}$, pois as linguagens só distinguem-se em relação ao acréscimo de constantes.

[18] Neste caso, $T \vdash \varphi$ se e somente se para toda M em $\mathfrak{M}$, M satisfaz φ.

Nas fórmulas $\varphi \in For(\mathcal{L}_\kappa)$ tais que $\varphi \notin For(\mathcal{L})$, $\varphi = \psi[\overline{c}/\overline{x}]$ tal que toda $c_i \in C_\kappa$, para $c_i \in \overline{c}$ e alguma $\psi \in For(\mathcal{L})$. Ou seja, φ não pode ser $\Box_{min}(\mathcal{L}_\kappa)$, logo $(\mathcal{L}_\kappa)^\theta = \mathcal{L}^\theta$, i.e., os novos predicados inseridos em $\mathcal{L}_\kappa$ e $\mathcal{L}$ são exatamente os mesmos em relação a tradução θ.

Obviamente, $(\mathcal{L}_\kappa)^\theta$ e $(\mathcal{L}^\theta)_\kappa$ possuem as mesmas novas constantes, portanto as linguagens têm os mesmos símbolos.

Logo $(\mathcal{L}_\kappa)^\theta = (\mathcal{L}^\theta)_\kappa$.

■

Proposição 32. *A aplicação $\theta_\kappa : For(\mathcal{L}_\kappa) \to For(\mathcal{L}^\theta_\kappa)$ é a extensão da aplicação θ para κ cardinal, já que estas linguagens só se diferem de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^\theta$ na inclusão das constantes de C_κ.*

Demonstração: Segue pela forma da construção das fórmulas de $\mathcal{L}_\kappa$ e do fato anterior, já que $(\mathcal{L}_\kappa)^\theta = (\mathcal{L}^\theta)_\kappa$.

■

Proposição 33. *Seja T uma teoria sobre $\mathcal{L}$ que contém a lógica clássica. Então $(T^\theta)_\kappa = (T_\kappa)^\theta$.*

Demonstração: Por definição $(T^\theta)_\kappa = \{\varphi^\theta[\overline{c}/\overline{x}] \mid T^\theta \vdash \varphi^\theta$ e $\overline{c}$ sequência de $C_\kappa\}$.

Como T contém lógica clássica, $T \vdash \varphi$ se e somente se $T^\theta \vdash \varphi^\theta$, mas $\varphi^\theta[\overline{c}/\overline{x}] = (\varphi[\overline{c}/\overline{x}])^\theta$, ou seja:

$$\{\varphi^\theta[\overline{c}/\overline{x}] \mid T^\theta \vdash \varphi^\theta \text{ e } \overline{c} \text{ sequência de } C_\kappa\} = \{(\varphi[\overline{c}/\overline{x}])^\theta \mid T \vdash \varphi \text{ e } \overline{c} \in C^n_\kappa\} = (T_\kappa)^\theta$$

■

Proposição 34. *Seja T teoria modal de primeira ordem sobre $\mathcal{L}$ que respeita f-equivalência. Então T^θ respeita f-equivalência.*

Demonstração: Sejam φ e ψ fórmulas de $\mathcal{L}^\theta$ tais que $\varphi \sim_f \psi$ e $T^\theta \vdash \varphi$.

Existe $\varphi_0 \in For(\mathcal{L})$, $\varphi = \varphi_0^\theta$ e $T \vdash \varphi_0$.

Como $\varphi \sim_f \psi$, então $\varphi = \psi[\overline{y}/\overline{x}]$ para $\overline{y}$ apropriadas. Seja $\psi_0 = \varphi_0[\overline{y}/\overline{x}]$, neste vaso, $\varphi_0 \sim_f \psi_0$ e T respeita f-equivalência, então $T \vdash \psi_0$, ou seja, $T^\theta \vdash \psi$.

■

Proposição 35. *Seja T uma teoria modal de primeira ordem sobre $\mathcal{L}$ que respeita α-equivalência. Então T_κ respeita α-equivalência.*

Demonstração: Sejam φ e ψ fórmulas de $\mathcal{L}_\kappa$ tais que $\varphi \sim_\alpha \psi$ e $T_\kappa \vdash \varphi$.

Existe $\varphi_0 \in For(\mathcal{L})$ e $\varphi = \varphi_0[\overline{c}/\overline{x}]$, em que a sequência $\overline{x}$ pode ser vazia (neste caso $\varphi \in \mathcal{L}$). Então $T \vdash \varphi_0$.

Como $\varphi \sim_\alpha \psi$, existe $\psi_0 \in For(\mathcal{L})$ tal que $\psi = \psi_0[\bar{c}/\bar{x}]$, logo $\psi_0 \sim_\alpha \varphi_0$, como T respeita α-equivalência, então $T \vdash \psi_0$, logo, por definição, $T_\kappa \vdash \psi$.

■

Lema 6.2.3. *Seja T uma teoria modal de primeira ordem sobre $\mathcal{L}$ que respeita α e f equivalências.*

$$T \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad T^\theta \vdash \varphi^\theta$$

Demonstração: Para todas as fórmulas φ de $\mathcal{L}$, $\varphi_0 \in For(\mathcal{L}^\theta)$ e $\varphi_1 \in For(\mathcal{L}_\kappa)$, para toda sequência de constantes de C_κ, temos:

Teorema da lógica clássica (1)

$$T^\theta \vdash \varphi_0 \quad \Leftrightarrow \quad T^\theta_\kappa \vdash \varphi_0[\overline{c}/\overline{x}]$$

Da proposição 29 (2)

$$T_\kappa \vdash \varphi_1 \quad \Leftrightarrow \quad T^\theta_\kappa \vdash \varphi^\theta_1$$

Da proposição 30 (3)

$$T \vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad T_\kappa \vdash \varphi[\overline{c}/\overline{x}]$$

Portanto, supondo $T \vdash \varphi \Rightarrow_3 T_\kappa \vdash \varphi[\overline{c}/\overline{x}] \Rightarrow_2 T^\theta_\kappa \vdash \varphi^\theta[\overline{c}/\overline{x}] \Rightarrow_1 T^\theta \vdash \varphi^\theta$

■

6.3 Lógica $FOS4$

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem modal de primeira ordem com $\Box$ primitivo. Define-se como lógica **FOS4**, sobre tal linguagem, aquela que possui exatamete:

1) Esquemas de axiomas e regras de inferência da lógica clássica de primeira ordem aplicáveis a todas as fórmulas de $\mathcal{L}$[19].

2) Esquemas de axiomas e regras de inferência da lógica proposicional modal **S4** aplicáveis a todas as fórmulas de $\mathcal{L}$.

Observações: a) Em **FOS4**, a substituição de termos deve ser deduzida e não introduzida como regra de inferência. Desta forma, a interpretação do operador $\Box$ é uniforme, i.e., $\Box(\varphi[y/z]) = (\Box\varphi)[y/z]$, ou seja, tal operador comuta com a substituição.

[19] Como em (FAJARDO, 2017), por exemplo.

Ver (KISHIDA, 2011) pp. 33-34.

b) Do fato a), como vimos na propriedade especial 1, tal lógica interpreta uniformente $\Box$; além disso, os (esquemas) axiomas e as regras de inferência de **FOS4** não distinguem fórmulas modalizadas ou de primeira ordem em suas aplicações.

c) De a) e b) segue que é válido em **FOS4** (pois é válido em primeira ordem clássica). Para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$, $\vdash_{FOS4} (x = y) \supset (\varphi[x/z] \supset \varphi[y/z])$.

d) **FOS4** demonstra $(x = y) \equiv \Box(x = y)$; de fato:

Por c) $\vdash_{FOS4} (x = y) \supset (\Box(x = x) \supset \Box(x = y))$.

Por outro lado, pela axiomática de $S4$, $\vdash_{FOS4} \Box(x = y) \supset (x = y)$, levando em conta que $\vdash_{FOS4} \Box(x = x)$, pois $x = x$ é axioma da lógica de primeira ordem.

e) **FOS4** possui a regra de inferência de $S4$:

$$\frac{\Box\psi \supset \varphi}{\Box\psi \supset \Box\varphi}$$

f) Como **FOS4** contém a lógica clássica, também satisfas as regras relativas aos quantificadores, para qualquer $\varphi \in For(\mathcal{L})$:

$$\begin{array}{c} \varphi \vdash_{FOS4} \forall y\psi \\ \hline\hline \varphi \vdash_{FOS4} \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \exists y\varphi \vdash_{FOS4} \psi \\ \hline\hline \varphi \vdash_{FOS4} \psi \end{array}$$

g) Em $FOS4$ temos as seguintes propriedades:

I) Por e) e b): $\vdash_{FOS4} \Box(\bar{t} = \bar{t'}) \equiv (\bar{t} = \bar{t'})$.

II) Por b) e I): $\vdash_{FOS4} \Box(\varphi[\bar{t}/\bar{x}]) \wedge (\bar{x} = \bar{t}) \supset \Box\varphi$.

III) Como em **S4** é válido $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \equiv \Box(\varphi \wedge \psi)$, segue por II):

$\vdash_{FOS4} (\Box\varphi \wedge (\bar{t} = \bar{t'})) \equiv (\Box(\varphi \wedge (t_1 = t'_1)) \wedge \ldots \wedge \Box(\varphi \wedge (t_1 = t'_1)))$

Desta propriedades segue que, em **FOS4**, o predicado de igualdade $=$ comuta com a substituição de termos e com o operador $\wedge$.

h) Como vimos anteriormente, segue do fato b) que **FOS4** também possui as regras de inferência:

$$\frac{\Box\varphi \supset \Box\psi}{\Box\varphi \supset \forall x \Box\psi} \qquad \frac{\Box\varphi}{(\Box\varphi)[t/x]}$$

Suponhamos que a linguagem $\mathcal{L}$ contém todos os símbolos proposicionais, de predicado, relacionais, funcionais, constantes e variáveis individuais para representar os fatos que compõem os "mundos possíveis", e que a relação de identificação entre símbolo e fato representado (denotado) é objetivamente identificável (idealização da linguagem).

Seja então **FOS4** a menor lógica que contém exatamente os teoremas obtidos pela axiomatização apresentada anteriormente, ou seja, a menor lógica que tem como axiomas e regras de inferência aqueles da lógica de primeira ordem clássica e da lógica modal **S4**. Reconstruirei o argumento para a prova da completude de **FOS4** em relação a uma feixe-interpretação, e por isso será denominada semântica topológica, como em (KISHIDA, 2011). Todavia, por motivação filosófica, meu interesse se restringirá a modelos que tenham domínios no máximo enumeráveis, diferente do que é realizado nos trabalhos citados.

6.3.1 Completude e Feixe-Interpretação

Feixes sobre um conjunto X são fibrados com uma estrutura topológica especial, que garante o bom comportamento de certas funções na estrutura - ver apêndice B. Define-se que uma feixe-interpretação para a lógica modal de primeira ordem $\mathcal{L}$ é uma interpretação fibrada na qual a estrutura topológica desejada é verificada (em relação aos operadores $\Box$ e/ou $\Diamond$). Uma interpretação fibrada é apenas o ajuntamento (bundle) de interpretações clássicas de primeira ordem.

Definição 6.3.1. *Dada uma lógica de primeira ordem modal $\mathcal{L}$, que contém os símbolos $\top$ e $\bot$, denomina-se uma* ***interpretação fibrada*** *$\mathcal{M}$ aquela que pode ser descrita como um par $(\pi, [\![-]\!])$ tal que:*

a) Existem $D \subseteq |\mathcal{M}|$ e X conjunto, tal que $D = \sum_{i \in X} D_i$.

b) A aplicação $\pi : D \to X$ é uma sobrejeção.

c) A aplicação $[\![-]\!] : For(\mathcal{L}) \to D^n$, para todo n apropriado, comprimento da sequência $\overline{x}$, satisfaz:

i. $[\![\overline{x} \mid \varphi]\!] \subseteq D^n$, em que as variáveis livres que ocorrem em φ estão entre $\overline{x}$.

ii. $[\![\overline{x} \mid \overline{t}]\!] : D^n \to D$, para toda sequência $\overline{t}$ de termos de $\mathcal{L}$, em que as variáveis livres que ocorrem em $\overline{t}$ estão entre $\overline{x}$.

iii. São válidos:

1) $[\![\overline{x} \mid \neg\varphi]\!] = D^n - [\![\overline{x} \mid \varphi]\!]$

2) $[\![\overline{x} \mid \varphi \wedge \psi]\!] = [\![\overline{x} \mid \varphi]\!] \cap [\![\overline{x} \mid \psi]\!]$

3) $[\![\overline{x}\ |\varphi \vee \psi]\!] = [\![\overline{x}\ |\ \varphi]\!] \cup [\![\overline{x}\ |\ \psi]\!]$

4) $[\![\overline{x}\ |\varphi \supset \psi]\!] = (D^n - [\![\overline{x}\ |\ \varphi]\!]) \cup [\![\overline{x}\ |\ \psi]\!]$

5) $[\![\overline{x}\ |\exists y\varphi]\!] = p_n([\![\overline{x}, y\ |\varphi]\!])$ *para* $p_n : D^{n+1} \to D^n$ *tal que* $p(\overline{a}, b) = \overline{a}$

6) $[\![\overline{x}, y\ |\varphi]\!] = p_n^{-1}([\![\overline{x}\ |\varphi]\!])$

7) $[\![\overline{x}\ |\top]\!] = D^n$ *e* $[\![\overline{x}\ |\bot]\!] = \emptyset$

8) $[\![x, y\ |\ x = y]\!] = \{(a, a) \in D^2\ |\ a \in D\}$

9) $[\![\overline{x}, \overline{y}\ |\varphi[t/z]]\!] =< pr_1, \ldots, pr_n, [\![\overline{y}\ |t]\!] >^{-1} ([\![\overline{x}, z\ |\varphi]\!])$ *para* z *variável não presente entre* $\overline{x}$ *e* $< pr_1, \ldots, pr_n, f >: D^{n+m} \to D^{n+1}$ *aplicação que associa* $(\overline{a}, \overline{b})$ *a* $(\overline{a}, f(\overline{a}, \overline{b}))$

d) Uma fórmula φ *é válida nesta interpretação se* $[\![\overline{x}\ |\varphi]\!] = D^n$*.*

e) Como usual, uma inferência é válida se preserva a validade dos antecedentes no consequente.

Observação: Notemos que para $< pr_1, \ldots, pr_n, f > (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, f(\overline{a}, \overline{b}))$, então $< pr_1, \ldots, pr_n, f >^{-1} (\overline{a}, f(\overline{a}, \overline{b})) = (D^n \times f)^{-1}(\overline{a}, f(\overline{a}, \overline{b}))$.

De fato, o item $iii)$ mostra que por recursão, $[\![-]\!]$ é uma interpretação de primeira ordem nas fibras do fibrado.

Como a lógica **FOS4** contém a lógica clássica de primeira ordem, a definição de interpretação fibrada $\mathcal{M}$ para $\mathcal{L}$ mostra sua correção em relação às fórmulas clássicas.

Mostremos que, com topologias apropriadas, toda teoria **FOS4** é completa em relação a uma feixe-interpretação $\mathcal{M}$.

6.3.1.1 Etapa 1

Consideremos $\mathcal{L}^\theta$ linguagem não-modal de primeira ordem obtida de $\mathcal{L}$ pela adição de um novo predicado $[\varphi]$, para cada $\varphi \in \Box_{min}(\mathcal{L})$.

Como **FOS4** respeita α-equivalência (trivial) e contém a lógica clássica, da proposição 29 segue que **FOS4**$^\theta$ contém a lógica clássica; notemos que tal lógica é uma teoria de primeira ordem clássica - aplicando o teorema da completude para **FOS4**$^\theta$ sobre $\mathcal{L}^\theta$, existe $\mathfrak{M}$ classe de $\mathcal{L}^\theta$-estruturas adequadas para **FOS4**$^\theta$. Pelo Teorema de Lowenhein-Skolem descendente podemos "cortar" $\mathfrak{M}$ no conjunto $\mathcal{M}_0 = \{M \in \mathfrak{M}\ |\ ||M|| \leq \aleph_0\}$.

Justificarei o uso desta limitação cardinal para nossa construção, desviando da apresentação geral em (AWODEY; KISHIDA, 2012).

Para aplicarmos o processo de demonstração da completude, na construção do modelo canônico, precisamos obter uma equivalência entre as constantes da linguagem e os universos dos modelos. Embora procuro enfatizar o uso da semântica para interpretar uma linguagem idealizada, ela ainda deve respeitar o fato de que toda linguagem humanamente manipulável deva ser enumerável - idealmente representar no espaço lógico a descrição dos fatos do mundo (mesmo que no limite). Além disso, mostrei-me interessado em uma lógica que satisfaz o critério de autonomia dos domínios de quantificação e atribuição, de maneira a podermos descrever uma lógica no qual **todos** os entes do modelo possam ser denotados na lógica que descreve a estrutura do modelo, ou seja, constantes e variáveis individuais (termos) assumem uma **interpretação denotacional**. Ou seja, procuro indicar que tal propriedade é filosoficamente interessante em uma visão totalizante da estrutura lógica dos fatos do mundo (na perspectiva de totalidade representada por esta linguagem idealizada e limitada), na medida em que não estamos interessados, ou mesmo motivados, a tratar dos problemas referentes a aspectos conotativos dos termos de uma lógica e dos entes a que possam, por ventura, vir a conotar na linguagem, nem interessados em modelos que possuem objetos sem denotação. Com isso, pretendo me afastar da discussão de problemas relativos à referência.

Formalizemos:

Seja $C_{\aleph_0} = \{c_\delta \mid \delta < \aleph_0\}$ um conjunto de constantes novas acrescentadas em $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^\theta$, obtendo assim $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ e $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$, respectivamente. Como **FOS4** respeita f-equivalência, pois substituição de temos é demonstrável, então segue (proposição 34) que $FOS4 \vdash \varphi$ se e somente se $FOS4_{\aleph_0} \vdash \varphi[\overline{c}/\overline{x}]$, mas **FOS4** respeita α-equivalência, então segue (proposição 35) que $FOS4^\theta \vdash \varphi^\theta$ se e somente se $FOS4 \vdash \varphi$; portanto $FOS4^\theta$ respeita α-equivalência e $\mathbf{FOS4}_{\aleph_0}$ respeita f-equivalência, ou seja, segue (proposição 6.2.2) que $(FOS4_{\aleph_0})^\theta = (FOS4^\theta)_{\aleph_0}$ é a teoria para a classe $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_0)_{\aleph_0}$ de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$-estruturas de primeira ordem. Neste caso, temos:

Para toda $\varphi \in For(\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0})$, $FOS4^\theta_{\aleph_0} \vdash \varphi$ se e somente se, para toda $M \in \mathcal{M}$ e para toda sequência $\overline{a}$ tal que cada $a_i \in |M|$, segue que $M \models_{[\overline{a}/\overline{x}]} \varphi$, observemos que para cada $M \in \mathcal{M}$ e para todo $a \in |M|$, existe $c \in C_{\aleph_0}$ tal que $a = c^M$, interpretação de c em M.

Consideremos $D = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M|$, então $D^0 = \mathcal{M}$ e $D^n = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M|^n$ para cada n natural. Para isso, é preciso assumir que se M_1 e M_2 forem elementos distintos de $\mathcal{M}$, então $|M_1| \cap |M_2| = \emptyset$.

Definamos para toda $\varphi \in For(\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0})$ a interpretação $[\![\overline{x}|\varphi]\!]^\theta_{\aleph_0} = \sum_{M \in \mathcal{M}} [\![\overline{x}|\varphi]\!]^\theta_M \subseteq D^n$; para toda sequência $\overline{t}$ de m termos, $[\![\overline{x}|\ \overline{t}]\!]^\theta_{\aleph_0} = \sum_{M \in \mathcal{M}} [\![\overline{x}|\ \overline{t}]\!]^\theta_M$ é aplicação da forma $D^n \to D^m$. Portanto, $FOS4^\theta_{\aleph_0} \vdash \varphi$ se e somente se $[\![\overline{x}|\varphi]\!]^\theta_{\aleph_0} = D^n$.

Obviamente, pela própria construção, se $\pi : D \to \mathcal{M}$ for aplicação residência sobrejetora, então $(\pi, [\![-]\!]^{\theta}_{\aleph_0})$ é uma interpretação fibrada sobre as interpretações $[\![-]\!]^{\theta}_{M}$ usuais em SET para cada um dos modelos em $\mathcal{M}$.

Do lema 6.2.3, se $[\![-]\!]_{\aleph_0}$ for interpretação para $FOS4_{\aleph_0}$, para $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ (ou t termo) temos:

$$[\![\overline{x}|\varphi]\!]_{\aleph_0} = [\![\overline{x}|\varphi^{\theta}]\!]^{\theta}_{\aleph_0}$$

$$[\![\overline{x}|\overline{t}]\!]_{\aleph_0} = [\![\overline{x}|\overline{t}]\!]^{\theta}_{\aleph_0}$$

Para verificar este fato, basta notarmos que é uma interpretação fibrada também na parte não-clássica de $\mathcal{L}$, o que pode ser feito por indução nas fórmulas de AC($\mathcal{L}$), ou seja, considerando os novos predicados adicionados à $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$.

Para isso, seja $\varphi \in$ FACNP($\mathcal{L}$), então existe $\psi \in \Box_{min}(\mathcal{L})$ tal que $\varphi \in [\psi]$, predicado de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$. Então $[\![\overline{x}|\varphi]\!]_{\aleph_0} = [\![\overline{x}|\varphi^{\theta}]\!]^{\theta}_{\aleph_0} = [\![\overline{x}|\ [\psi]]\!]^{\theta}_{\aleph_0} = \sum\limits_{M \in \mathcal{M}} [\![\overline{x}|\ [\psi]]\!]^{\theta}_{M} \subseteq D^n$ como desejado.

Ou seja, $[\![-]\!]_{\aleph_0}$ é uma interpretação fibrada do tipo $(\pi, [\![-]\!]_{\aleph_0})$ tal que, pelos fatos anteriores, pode ser identificada a uma interpretação $[\![-]\!]$ para **FOS4** na linguagem, pois para $\varphi \in For(\mathcal{L})$ e $\overline{t}$ sequência de termos da linguagem, os resultados anteriores, mais o fato da noção de interpretação por indução sobre as fórmulas de $AC(\mathcal{L})$ e pela tradução θ, temos:

$$[\![\overline{x}|\varphi]\!] = [\![\overline{x}|\varphi]\!]_{\aleph_0} = [\![\overline{x}|\varphi^{\theta}]\!]^{\theta}_{\aleph_0}$$

$$[\![\overline{x}|\overline{t}]\!] = [\![\overline{x}|\overline{t}]\!]_{\aleph_0} = [\![\overline{x}|\overline{t}]\!]^{\theta}_{\aleph_0}$$

Notemos que tal é possível porque aplicamos sobre $\mathbf{FOS4}^{\theta}_{\aleph_0}$ o teorema da completude para lógica clássica de primeira ordem e o teorema de Lowenhein-Skolem descendente.

Proposição 36. *A interpretação* $(\pi, [\![-]\!])$ *é fibrada.*

Demonstração: Segue das construções anteriores e da definição de interpretação fibrada.

■

Precisamos agora das estruturas topológicas em $\mathcal{M}$, D e D^n para verificar se esta definição de interpretação apresentada possui as boas propriedades pretendidas, de maneira a cumprir o critério de uma feixe-interpretação - a ser definida. Tal construção é o principal resultado de (KISHIDA, 2011), também delineado em (AWODEY; KISHIDA, 2012); Awodey e Kishida repetiram o processo de construção de uma base para uma topologia a partir das fórmulas da linguagem, como sugerido por Tarski e McKinsey em (TARSKI; MCKINSEY, 1944) para a lógica modal **S4** - ver capítulo 5.

6.3.1.2 Etapa 2

Definição 6.3.2. *Para todo n natural e para toda $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, cujas variáveis livres estão entre $\bar{x}$, sequência de n variáveis, definamos:*

$$B^n_\varphi = [\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!]_{\aleph_0} = \sum_{M \in \mathcal{M}} [\![\bar{x} \mid (\Box\varphi)^\theta]\!]^\theta_M$$

Por fim, seja $\mathcal{B}^n = \{B^n_\varphi \mid \varphi \in For(\mathcal{L}_{\aleph_0})\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De fato, caso φ seja fechada, então φ é sentença e são satisfeitas por elementos de $\mathcal{M}$.

Caso φ seja aberta com n variáveis livres $\bar{x}$, $\bar{y}$ seja sequência com m variáveis, entre as quais ocorrem $\bar{x}$, portanto $\bar{y}$ contém variáveis que não ocorrem em φ, logo $n \leq m$, então $[\![\bar{y} \mid \Box\varphi]\!]_{\aleph_0} \in B^m_\varphi$ se e somente se $[\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!]_{\aleph_0} \in B^n_\varphi$.

Pela etapa anterior sabemos também que $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]_{\aleph_0}$.

Proposição 37. *Cada $\mathcal{B}^n$ é base para uma topologia em D^n.*

Demonstração: Primeiramente, $\top \in \mathcal{L}_{\aleph_0}$ e para todo n natural, tamanho da sequência $\bar{x}$, $B^n_\top = [\![\bar{x} \mid \Box\top]\!] = [\![\bar{x} \mid \top]\!] = D^n$.

Seja $\bar{x} \in (B^n_\varphi \cap B^n_\psi) \neq \emptyset$, logo $\bar{x} \in [\![\bar{x} \mid \Box\varphi \wedge \Box\psi]\!]$. Como $\vdash_{FOS4} \Box(\varphi \wedge \psi) \equiv \Box\varphi \wedge \Box\psi$, então $\bar{x} \in [\![\bar{x} \mid \Box(\varphi \wedge \psi)]\!] = B^n_{\varphi\wedge\psi}$, portanto em **FOS4**: $B^n_{\varphi\wedge\psi} \subseteq B^n_\varphi \cap B^n_\psi$.

Segue pela definição de base que $\mathcal{B}^n$ é base para uma topologia para D^n, que chamaremos de τ_{D^n}.

∎

Como $D^0 = \mathcal{M}$, consideremos $\tau_\mathcal{M}$ a topologia gerada por $\mathcal{B}^0$.

Se φ for fórmula com uma variável livre, então $[\![\Box\varphi]\!] = B^1_\varphi = [\![x \mid \Box\varphi]\!]$, é conjunto formado pelos elementos dos domínios dos M's que satisfazem $\Box\varphi$, e para esses M's, toda sequência $\bar{x}$ que contém a variável x livre em φ, temos que B^n_φ continua contendo os mesmos modelos M's, independentemente de $\bar{x}$ (e portanto de n). Logo, a topologia em D (*mutatis mutandis* para os outros casos) depende exclusivamente sobre as fórmulas de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ que possuem **somente uma** variável livre.

Consideremos a definição B.1.13, que será usada recorrentemente, assim como o teorema B.1.5.

Definição 6.3.3. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com $\Box$ o único operador modal não-clássico primitivo. Uma **feixe-interpretação** para uma teoria T sobre $\mathcal{L}$ é uma interpretação fibrada $(\pi, \llbracket - \rrbracket)$ que satisfaz:*

1. $\pi : D \twoheadrightarrow X$ é homeomorfismo local para alguma topologia sobre D e X.

2. Para todo f símbolo funcional de $\mathcal{L}$, $\llbracket \bar{x} \mid f\bar{x} \rrbracket$ é contínua (em relação às topologias apropriadas).

3. Para todo n natural, a interpretação $\llbracket \Box \rrbracket : \wp(D^n) \to \wp(D^n)$ satisfaz:

$$\llbracket \bar{x} \mid \Box\varphi \rrbracket = int(\llbracket \bar{x} \mid \varphi \rrbracket)$$

Para int o operador interior das topologias apropriadas.

Proposição 38. *Para todo n natural, τ_{D^n} é o produto n-fibrado da topologia τ_D sobre $\tau_{\mathcal{M}}$ (topologia produto nos fibrados - ver definição B.1.11).*

Demonstração: 1) Para $n = 0$ segue do fato de que $\tau_{D^0} = \tau_{\mathcal{M}}$, por definição.

2) τ_D é o produto 1-fibrado de τ_D sobre $\tau_{\mathcal{M}}$, já que π é a aplicação residência $\pi : D \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ para o fibrado $(\pi, \llbracket - \rrbracket)$.

3) Consideremos um $n \geq 0$ natural fixo. Seja ϑ^n o produto n-fibrado das topologias τ_D sobre $\tau_{\mathcal{M}}$. De 1) e 2) segue que $\vartheta^0 = \tau_{\mathcal{M}}$ e $\vartheta^1 = \tau_D$.

i) Seja $\bar{x}$ sequência de n variáveis e $i \leq n$. Seja pr_i a projeção na iésima coordenada, então $pr_i^{-1}(\llbracket x_i \mid \varphi \rrbracket) = \llbracket \bar{x} \mid \varphi \rrbracket$.

Para todo $B^1_\varphi \in \mathcal{B}^1$, temos que $pr_i^{-1}(B^1_\varphi) = pr_i^{-1}(\llbracket x_i \mid \Box\varphi \rrbracket) = \llbracket \bar{x} \mid \Box\varphi \rrbracket$, ou seja, para todo n natural, $pr_i^{-1}(B^1_\varphi) = B^n_\varphi \in \tau_{D^n}$. Logo, como B^1_φ são os abertos básicos de D, toda pr_i é contínua, considerando as topologias τ.

Mas a topologia n-fibrada é a menor topologia que faz as projeções serem contínuas (de fato, é uma das formas de definir a topologia produto - ver apêndice B), segue então de 1) e 2), mais o fato de π ser aplicação residência, que $\vartheta^n \subseteq \tau_{D^n}$.

ii) Por outro lado, seja $B^n_\varphi \in \mathcal{B}^n$ e fixemos certo $\bar{a} \in \llbracket \bar{x} \mid \Box\varphi \rrbracket$, então $\pi^n(\bar{a}) = M \in \mathcal{M}$. Segue-se daí que:

$M \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma} (\Box\varphi)^\theta$, ou seja, para todo $i \leq n$, $a_i = c_i^M$ para c_i elemento de $C_{\aleph_0}$, ou seja, $M \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma} (x_i = c_i)$, logo $M \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma} (\Box\varphi[\bar{c}/\bar{x}])^\theta$ já que $(\Box\varphi[\bar{c}/\bar{x}])^\theta = (\Box\varphi)^\theta[\bar{c}/\bar{x}]$ em $\mathbf{FOS4}^\theta$.

Então $M \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma} [(\Box\varphi)[\bar{c}/\bar{x}] \wedge (\bar{x} = \bar{c})]^\theta$, pois $(x_i = c_i)^\theta = (x_i = c_i)$. Sendo assim, $\bar{a} \in [\![\bar{x} \mid \Box(\varphi[\bar{c}/\bar{x}] \wedge \bar{x} = \bar{c})]\!]$ (propriedades de **FOS4**).

Porém, para qualquer $i \leq n$, $[\![\bar{x} \mid \Box(\varphi[\bar{c}/\bar{x}] \ \wedge x_i = c_i)]\!] = pr_i^{-1}([\![x_i \mid \Box(\varphi[\bar{c}/\bar{x}] \wedge x_i = c_i)]\!]) = pr_i^{-1}(B^1_{\varphi[\bar{c}/\bar{x}] \ \wedge x_i = c_i})$.

Portanto $[\![\bar{x} \mid \Box(\varphi[\bar{c}/\bar{x}] \wedge \bar{x} = \bar{c})]\!] = \bigcap_{i \leq n} [\![x_i \mid \Box(\varphi[\bar{c}/\bar{x}] \wedge x_i = c_i)]\!] = \bigcap_{i \leq n} pr_i^{-1}(B^1_{\varphi[\bar{c}/\bar{x}] \wedge x_i = c_i})$, um aberto, já que as pr_i são contínuas em ϑ^n.

Neste caso, existe U aberto de ϑ^n tal que $M \in \mathcal{M}$ e $\bar{a} \in U \subseteq B^n_\varphi$, com $\pi^n(\bar{a}) = M$. Como isto é válido para qualquer $\bar{a} \in B^n_\varphi$, então B^n_φ é aberto de ϑ^n e, como consequência, $\tau_{D^n} \subseteq \vartheta^n$.

■

Proposição 39. *Para todo símbolo funcional de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$, sua interpretação em $(\pi, [\![-]\!])$ com as topologias τ_{D^n} é contínua.*

Demonstração: Seja f símbolo funcional de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ de aridade n, comprimento da sequência $\bar{x}$, e t termo com $\bar{y}$ variáveis livres.

Sabemos que $[\![\bar{x}, \bar{y} \mid \varphi[t/z]]\!] =< p_1, \ldots, p_n, [\![\bar{y} \mid t]\!] >^{-1} [\![\bar{x}, z \mid \varphi(\bar{x}, z)]\!]$; além disso, $\Box(\varphi[t/z]) = (\Box\varphi)[t/z]$, temos assim:

Para $B^1_\varphi = [\![y \mid \Box\varphi(y)]\!]$, calculando $[\![\bar{x} \mid f\bar{x}]\!]^{-1}(B^1_\varphi)$, tem-se: $< pr_1, \ldots, pr_n, [\![\bar{x} \mid f\bar{x}]\!] >^{-1} [\![\bar{x}, y \mid \Box\varphi(y)]\!] = [\![\bar{x} \mid \Box\varphi[f\bar{x}/y]]\!] = B^n_{\varphi[f\bar{x}/y]} \in \tau_{D^n}$

Portanto a interpretação de f é contínua.

■

Proposição 40. *A aplicação residência $\pi : D \to \mathcal{M}$, com as topologias τ apropriadas, é um homeomorfismo local.*

Demonstração: 1) π é contínua. De fato, seja B^0_φ um aberto básico de $\mathcal{M}$.

$\pi^{-1}(B^0_\varphi) = \pi^{-1}([\![\Box\varphi]\!])$ para alguma fórmula fechada φ de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$.

Mas $[\![\Box\varphi]\!] = [\![x \mid \Box\varphi]\!] = B^1_\varphi \in \tau_D$.

2) Seja $a \in D$, então $\pi(a) = M$ para um único $M \in \mathcal{M}$. Logo, existe $c \in C_{\aleph_0}$ tal que $a = c^M$.

Como $[\![c]\!] : \mathcal{M} \to D$ tal que $[\![c]\!](M) = a = c^M$, então $a \in [\![x \mid x = c]\!] = [\![x \mid \Box(x = c)]\!] = B^1_{x=c}$.

Logo, para tal $a \in D$, existe $B^1_{x=c}$ aberto (básico) de D que contém a.

Consideremos então a restrição $\pi\restriction_{B^1_{x=c}}: B^1_{x=c} \to \mathcal{M}$. O fato de os universos serem disjuntos nos garante que existe um único N tal que $\pi\restriction_{B^1_{x=c'}}(b) = N$, para algum b, já que $B^1_{x=c} \neq \emptyset$.

Como $a \in B^1_{x=c}$ e $\pi(a) = M$, então $M \models (x = c)[a/x]$, ou seja, $\pi\restriction_{B^1_{x=c}}(a) = M$, enquanto $[\![c]\!](M) = a$, ou seja, $\pi\restriction_{B^1_{x=c}}$ é inversa (local) de $[\![c]\!]$. Mas $\pi\restriction_{B^1_{x=c}}$ é restrição de função contínua, portanto contínua, assim como $[\![c]\!]$, pela proposição anterior.

Portanto, π é um homeomorfismo local.

■

Proposição 41. *Seja int o operador interior para as topologias apropriadas τ. Nesse caso, a interpretação fibrada $(\pi, [\![-]\!])$ satisfaz:*

$$[\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!] = int([\![\bar{x} \mid \varphi]\!])$$

Demonstração: Seja $[\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!] = B^n_\varphi \in \tau_{D^n}$.

Como $\vdash_{FOS4} \Box\varphi \supset \varphi$, então $[\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!] \subset [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$. Suponhamos $B^n_\psi \subset [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$, então $[\![\bar{x} \mid \Box\psi]\!] \subset [\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!]$ - ver seção 6.3, letra c).

Neste caso, como B^n_ψ é um aberto qualquer contido em $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$ e ψ é qualquer, segue que $[\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!]$ é o maior aberto contido em $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$, ou seja, $[\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!] = int([\![\bar{x} \mid \varphi]\!])$.

■

Teorema 6.3.1. *A interpretação fibrada $(\pi, [\![-]\!])$ é uma feixe-interpretação para a lógica **FOS4**.*

Demonstração: Segue dos resultados anteriores e da definição 6.3.3.

■

Teorema 6.3.2 (Teorema da completude)**.** *Seja Γ uma teoria $FOS4$-consistente em $\mathcal{L}$, linguagem modal de primeira ordem com $\Box$ primitivo. Existe X um espaço topológico e uma feixe-interpretação $(\pi, [\![-]\!])$, para $\mathcal{L}$, com $\pi : D \twoheadrightarrow X$ sobrejeção, tal que $X = D^0$, e para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$:*

$$\Gamma \vdash_{FOS4} \varphi \textit{ se e somente se } [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] = D^n$$

Demonstração: Seja $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\aleph_0})$.

Pelo lema 6.2.3 existe $\Gamma_{\aleph_0} \subseteq For(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ uma teoria $FOS4_{\aleph_0}$-consistente tal que $\Gamma_{\aleph_0} \vdash_{FOS4_{\aleph_0}} \varphi$ se e somente se $\Gamma^\theta_{\aleph_0} \vdash \varphi^\theta$.

Segue da completude em primeira ordem que $\Gamma^{\theta}_{\aleph_0} \vdash \varphi^{\theta}$ se e somente se $[\![\bar{x} \mid \varphi^{\theta}]\!]^{\theta}_{\aleph_0} = D^n$.

Na etapa 1 vimos que $[\![\bar{x} \mid \varphi^{\theta}]\!]^{\theta}_{\aleph_0} = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]_{\aleph_0}$, portanto $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!]_{\aleph_0} = D^n$.

Por outro lado, para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$:

$$\Gamma \vdash_{FOS4} \varphi \text{ se e somente se } \Gamma_{\aleph_0} \vdash_{FOS4_{\aleph_0}} \varphi$$

Novamente pela etapa 1, $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!]_{\aleph_0} = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$, portanto:

$$\Gamma \vdash_{FOS4} \varphi \text{ se e somente se } \Gamma_{\aleph_0} \vdash_{FOS4_{\aleph_0}} \varphi \text{ se e somente se } [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] = D^n$$

■

Notemos que da noção de interpretação $[\![-]\!]$ e do teorema anterior, temos que se Γ for uma teoria $FOS4$-consistente, então $\Gamma \vdash_{FOS4} \varphi \supset \psi$ se e somente se $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \subseteq [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$.

Os resultados anteriores nos mostram que π é uma função contínua e um homeomorfismo local. Mas como vimos - apêndice B em teorema B.1.6, a aplicação diagonal Δ (que interpreta a igualdade) e as projeções são todas funções abertas e contínuas, com isso, a interpretação de termos - por usar a operação imagem-inversa das projeções - também são contínuas. Portanto a lógica **FOS4** reflete todas estas "boas" propriedades (locais) que homeomorfismos locais são capazes de nos suprir, não exigindo resultados extremamente fortes como a similitude global entre espaços topológicos (homeomorfismos). Isso se deve à construção do espaço Étale de D sobre X e a estrutura da feixe-interpretação.

6.4 Fibrados e Teoria das Contrapartes

Lema 6.4.1. *Seja L^* linguagem quantificada de primeira ordem clássica.*

Toda L^*-estrutura M, com dois domínios, domínio de quantificação (DQ: $\forall^M$ - domínio dos objetos existentes na interpretação) e domínio de atribuição (DA: $|M|$) é restritível ao domínio de quantificação, i.e., a interpretação sobre M, com dois domínios, e a interpretação sobre M', igual à M, com exceção ao domínio de atribuição, que é tomado igual ao domínio de quantificação (exclui os objetos não "existentes" do modelo), validam as mesmas fórmulas.

Demonstração: Ver (KISHIDA, 2011) - p. 108.

Portanto, se $\mathcal{L}$ for uma linguagem de primeira ordem não-clássica, sua interpretação restrita às fórmulas clássicas é restritível ao domínio de quantificação.

Seja L^* uma linguagem clássica de primeira ordem e M um modelo da semântica clássica. Podemos definir uma noção de interpretação sobre $(M, \models)$ por meio das atribuições em $|M|^{Var(L^*)}$.

Seja $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ e $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ a interpretação dos operadores lógicos clássicos usuais em SET. A interpretação $[\![-]\!]$ deve satisfazer:

Se φ for sentença, então $[\![\varphi]\!]$: $|M|^{Var(L^*)} \rightarrow \mathbf{2}$ tal que:

$$[\![\varphi]\!](\sigma) = 1 \text{ se e somente se } M \models_\sigma \varphi$$

$$[\![\varphi]\!](\sigma) = 0 \text{ se e somente se } M \not\models_\sigma \varphi$$

Neste caso, diz-se que φ é válida na interpretação se e somente se, para toda $\sigma \in |M|^{Var(L^*)}$ for o caso que $[\![\varphi]\!](\sigma) = 1$.

Os critérios semânticos $S1$ a $S7$ da semântica clássica garantem que esta interpretação é completa em relação à lógica clássica.

Da noção de adjunção em SET (topos) - Ver apêndice A. segue que se $f : X \rightarrow Y$ for função, para o functor[20] f^* temos as adjunções $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$ que satisfazem:

$$\begin{tikzcd} \wp(Y) \arrow[d, "f^*"] \\ \wp(X) \arrow[u, bend left, "\exists_f"] \arrow[u, bend right, "\forall_f"'] \end{tikzcd}$$

Observações: 1) $|M|^{Var(L^*)} \cong |M|^{Var(L^*)-\{x\}} \times |M|$ (isomórficos).

2) Sejam os morfismos em SET

$i : |M|^{Var(L^*)-\{x\}} \times \forall^M \rightarrow |M|^{Var(L^*)}$ que satisfaz $(\sigma, a) \mapsto (\sigma, a) \cup \{(x, a)\}$.

$p : |M|^{Var(L^*)-\{x\}} \times \forall^M \rightarrow |M|^{Var(L^*)-\{x\}}$ que satisfaz $(\sigma, a) \mapsto \sigma$.

$r : |M|^{Var(L^*)} \rightarrow |M|^{Var(L^*)-\{x\}}$ que satisfaz $\sigma \mapsto \sigma \upharpoonright (Var(L^*) - \{x\})$.

É válido para tais functores: $\exists_i \dashv i^* \dashv \forall_i$, $\exists_r \dashv r^* \dashv \forall_r$ e $\exists_p \dashv p^* \dashv \forall_p$.

Kishida demonstra em (KISHIDA, 2011) (pp. 112 - 115) que para toda $\sigma \in |M|^{Var(L^*)-\{x\}}$ e todo $A \subseteq |M|^{Var(L^*)-\{x\}} \times \forall^M$, tem-se[21]:

$$\sigma \in \exists_p A \text{ se e somente se } (\sigma, a) \in A \text{ para algum } a \in \forall^M$$

$$\sigma \in \forall_p A \text{ se e somente se } (\sigma, a) \in A \text{ para todo } a \in \forall^M$$

[20] Functor que determina uma bijeção natural entre as categorias de $\wp(Y)$ e $\wp(X)$, em que os morfismos são as inclusões - ver (FREYD, 1972).

[21] De fato, para isso basta usarmos a noção de adjunção em SET.

Assim, fixando a variável x (para a construção de p, i e r), definamos:

$$[\![\forall x]\!] = r^* \circ \forall_p \circ i^* = \forall_{\bar{p}}$$

$$[\![\exists x]\!] = r^* \circ \exists_p \circ i^* = \exists_{\bar{p}}$$

Ou seja, considerando agora $A \subseteq |M|^{Var(L^*)}$, tais interpretações para os quantificadores satisfazem:

$[\![\forall x]\!] : A \mapsto \{\sigma \in |M|^{Var(L^*)} \mid [a/x]\sigma \in A, \text{ para todo } a \in \forall^M\}$

$[\![\exists x]\!] : A \mapsto \{\sigma \in |M|^{Var(L^*)} \mid [a/x]\sigma \in A, \text{ para algum } a \in \forall^M\}$

Definição 6.4.1. *Uma função $f : \wp(|M|^{Var(L^*)})^n \to \wp(|M|^{Var(L^*)})$ é dita **verofuncional** se existir uma função $\hat{f}$ tal que f é definível pela composição $f = \hat{f} \circ -$, para algum entre $\neg$, $\wedge$, $\vee$ ou $\to$, morfismos da forma $\mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$.*

Para a interpretação de termos, desejamos uma aplicação $[\![t]\!] : |M|^{Var(L^*)} \to |M|$, denotada por $[\![t]\!](\sigma) = t^{M,\sigma}$.

Definição 6.4.2. *Definamos recursivamente a interpretação para os termos da linguagem, por meio dos morfismos:*

$[\![x]\!](\sigma) = \sigma(x)$

Das construções anteriores, identificamos que se $\bar{x}$ forem as únicas variáveis livres que aparecem em φ, a satisfação de φ depende exclusivamente do conjunto $|M|^{\{\bar{x}\}}$, ou seja, para c constante de L^*, temos:

$[\![c]\!] = c^M$ *é aplicação do tipo* $[\![c]\!] : |M|^0 \to |M|$ *(constante)*

Assim, se f for símbolo de função n-ária, interpretada em M, então:

$[\![f(\bar{t})]\!](\sigma) = (f(\bar{t}))^{M,\sigma} = f^M([\![t_1]\!]\sigma, \ldots, [\![t_n]\!]\sigma) = f^M \circ [\![\bar{t}]\!]\sigma$

Considerando $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\Rightarrow$ os morfismos lógicos em SET, podemos agora formalizar a noção de satisfação das fórmulas de L^* pela estrutura M, a partir das atribuições às variáveis da linguagem:

1) Se $\bar{t}$ for sequência de variáveis e/ou constantes, então (considerando o tipo adequado para o domínio) temos:

$$[\![\bar{t}]\!] : |M|^{Var(L^*)} \to |M|^n$$

2) Se f é símbolo funcional n-ário, então f^M é de tipo $|M|^n \to |M|$. Para $\bar{t}$ sequência de n termos, temos:

$$[\![f(\bar{t})]\!] = f^M \circ [\![\bar{t}]\!] : |M|^{Var(L^*)} \to |M|^n \to |M|$$

3) Se P é predicado n-ário, então é do tipo $P^M : |M|^n \to \mathbf{2}$. Seja então $\bar{t}$ sequência de n termos:

$$[\![P\bar{t}]\!] = P^M \circ [\![\bar{t}]\!] : |M|^{Var(L^*)} \to |M|^n \to \mathbf{2}$$

4) Se φ for uma sentença, temos o desejado:

$$[\![\varphi]\!] : |M|^{Var(L^*)} \to \mathbf{2}$$

5) Seja $\otimes$ um símbolo n-ário de tipo $[\![\otimes]\!] : \wp(|M|^{Var(L^*)})^n \to \wp(|M|^{Var(L^*)})$, com $\bar{\varphi}$ uma sequência n-ária de fórmulas. Então:

$$[\![\otimes(\bar{\varphi})]\!] = [\![\otimes]\!] \circ [\![\bar{\varphi}]\!]$$

Segue-se disto que:

$$[\![\neg\varphi]\!] = \neg \circ [\![\varphi]\!]$$
$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] = \wedge \circ ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!])$$
$$[\![\varphi \vee \psi]\!] = \vee \circ ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!])$$
$$[\![\varphi \supset \psi]\!] = \Rightarrow \circ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!])$$
$$[\![\forall x\varphi]\!] = \forall_{\bar{p}}([\![\varphi]\!])$$
$$[\![\exists x\psi]\!] = \exists_{\bar{p}}([\![\varphi]\!])$$

Ou seja, podemos determinar, dada uma relação de satisfação da semântica clássica para L^*, uma noção de interpretação e satisfação para as fórmulas a partir das atribuições, elementos de $|M|^{Var(L^*)}$.

Já delineei, no capítulo três, alguns pontos centrais à *teoria das contrapartes* de D. Lewis, indicando os significados de seus postulados. Retomarei agora os predicados Wx para x é um mundo possível, Ixy para x está em um mundo possível y, Cxy para y é contraparte de x e Ax para x é objeto atual, para apresentar a formalização da teoria, levando em conta que @ indica o mundo atual. Seguem os postulados:

$P1)$ $\forall x\ \forall y\ (Ixy \supset Wy)$

$P2)$ $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Ixy \wedge Ixz) \supset y = z)$

$P3)$ $\forall x\ \forall y\ (Cxy \supset \exists z Iyz)$

$P4)$ $\forall x\ \forall y\ (Cxy \supset \exists z Ixz)$

$P5)$ $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Ixy \wedge Izy \wedge Cxz) \supset x = z)$

$P6)$ $\forall x\ \forall y\ (Ixy \supset Cxx)$

$P7)$ $\exists x\ (Wx \wedge \forall y(Iyx \equiv Ay))$

$P8)$ $\exists x \; Ax$

Notemos que o postulado $P2)$ não trivializa os operadores $\Box$ e $\Diamond$, o que é consequência de que $D_w \cap D_u = \emptyset$ sempre que $w \neq u$. De fato, Lewis adota que $\bar{a}$ satisfaz necessariamente (possivelmente) φ em w se, para todo (algum) $u \in W_{C^*(\bar{a})}$, φ for satisfeita em u por $\bar{b}$, em que $\bar{b}$ é contraparte de $\bar{a}$ em u e $W_{C^*(\bar{a})} = \{u \in W \mid \exists \bar{b} \in D_u^n \wedge C(a_1, b_1) \wedge \ldots \wedge C(a_n, b_n)\}$.

Sendo assim, o valor de verdade de $\Box\varphi$ ($\Diamond\varphi$) em w depende do valor de verdade de φ nos mundos u nos quais existem contrapartes dos indivíduos que satisfazem φ em w.

Quando os domínios de quantificação são autônomos, o predicado I da teoria das contrapartes pode ser retirado, já que o domínio dos *possibilia* D é obtido pela união disjunta dos domínios de quantificação. Consideremos então que para $w \neq u$, $D_w \cap D_u = \emptyset$, denotando $\sum_{w \in W} D_w = D$.

Para o restante desta seção, trabalharemos com uma linguagem modal de primeira ordem $\mathcal{L}^-$ que não possui símbolos proposicionais nem símbolos funcionais, incluindo a ausência de constantes individuais. Os resultados assim obtidos também podem ser demonstrados, com construções mais intrincadas, com a adição de símbolos funcionais - ver (KISHIDA, 2011).

De maneira geral, podemos designar que uma interpretação em um modelo $\mathfrak{M}$ para nossa linguagem $\mathcal{L}^-$ é uma função $\sigma : Var(\mathcal{L}^-) \to |\mathfrak{M}|$, função esta que atribui objetos do domínio do modelo como valores para as variáveis da linguagem. Notemos então que ao considerarmos domínios disjuntos, podemos definir para cada $w \in W$ uma atribuição $\sigma_w : Var(\mathcal{L}^-) \to D_w$.

Definamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $D_w^n = D_w \times \ldots \times D_w$ o n-produto disjunto dos domínio D_w para um determinado $w \in W$. Sendo assim, podemos identificar que $(w, \sigma(\bar{x})) \in W \times D_w^n$, para qualquer $\bar{x}$, se e somente se $\sigma(\bar{x}) \in D_w^n$ se e somente se $\sigma = \sigma_w$.

Consideremos agora P_i^n um predicado n-ário da linguagem. Notemos que se υ for uma função que atribui, à $(w, \bar{a})$, a sequência $\bar{a}$ de elementos de D_w, então é uma função do seguinte tipo: $\upsilon : W \times \sum_{w \in W} D_w^n \to \sum_{w \in W} D_w^n$. Notemos que do fato dos mundos serem disjuntos segue que υ é uma bijeção. Desta forma, $\mathfrak{M}(P_i^n) \cap \sum_{w \in W} D_w^n \subseteq \sum_{w \in W} D_w^n$; como os domínios de quantificação são disjuntos e estendemos as atribuições para as variáveis da linguagem a funções para cada ponto $w \in W$, podemos "mergulhar", por meio de υ, o par $(w, \bar{a})$ em $\sum_{w \in W} D_w^n$. Logo, a satisfação de P_i^n no modelo $\mathfrak{M}$ pode ser considerada pela família $\{(w, \sigma_w(\bar{x})) \mid \mathfrak{M} \models_\sigma P_i^n \bar{x}\}$.

Por meio da teoria das contrapartes, o critério de satisfação e validade para fórmulas modalizadas pode ser reorganizado, em constraste com os critérios das semânticas relacionais do estilo Kripke, de maneira que os valores de verdades de TODAS as fórmulas dependam exclusivamente do fato de que os domínios das atribuições das variáveis coincidam com os domínios de quantificação, ou seja, as atribuições sejam restritas aos objetos "existentes" de determinado mundo possível.

Por exemplo, se Russel for denotado em w por R, então $\Box FR$ é satisfeita em w se existir um objeto (Russell) em w tal que R é sua denotação e Russell pertença à extensão de F, em w (as extensões de predicados são restritas a cada "mundo possível") e se, para todo $w_0 \in W$ distinto de w, que contenha a, contraparte de Russell (em w_0), a esteja na extensão de F, em w_0. De fato, os detalhes desta relação entre as interpretações modais relacionais (Kripke), a teoria das contrapartes (Lewis) e a autonomia dos domínios de quantificação foram bem explorados por Kishida ((KISHIDA, 2011) pp. 178 - 190).

A partir destas considerações, podemos identificar o caminho seguido por ele para traduzir os conceitos da teoria das contrapartes em uma linguagem de primeira ordem sem os predicados propostos por Lewis e, portanto, construir modelos de primeira ordem que satisfaçam, implicitamente, certas noções fundamentais da teoria.

6.4.1 Modelos para Estruturas de Contrapartes

Consideremos $\mathcal{L}^-$ uma linguagem modal de primeira ordem sem variáveis proposicionais e símbolos funcionais (e sem constantes), com os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$, acrescidos à $\mathcal{L}^-$[22] os predicados da teoria das contrapartes que satisfazem os axiomas $P1$) a $P8$).

Definição 6.4.3. *Um **Modelo de Contrapartes** para $\mathcal{L}^-$ é uma estrutura da forma $\mathfrak{M} = (|\mathfrak{M}|, W, I^{\mathfrak{M}}, C^{\mathfrak{M}}, A^{\mathfrak{M}}, \{(P_i^n)^{\mathfrak{M}}\})$, $|\mathfrak{M}|$ é domínio do modelo $\mathfrak{M}$ e W o conjunto de mundos possíveis.*

Definição 6.4.4. *Uma **Relação de Satisfação para a Teoria das Contrapartes** é uma relação da forma $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$, portanto é uma relação do tipo $W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}^-)} \times For(\mathcal{L}^-)$, no qual $\mathfrak{M}$ é um modelo de contrapartes.*

Definição 6.4.5. *Seja $(\mathfrak{M}, \models)$ uma relação de satisfação para a teoria das contrapartes, dizemos:*

*a) φ é **satisfeita** em w, ponto de W em $\mathfrak{M}$, se existe σ_w tal que $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$.*

*b) φ é **válida** em $\mathfrak{M}$ se para todo $w \in W$ e toda σ_w, atribuição de valores para as variáveis de $\mathcal{L}^-$, for o caso $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$.*

[22] Só restringimos as construções à $\mathcal{L}^-$ pois, para interpretarmos de maneira trivial símbolos funcionais (e constantes) em estruturas com dois domínios, para que o resultado seja restritível ao domínio de quantificação, toda interpretação de constantes em $\mathcal{M}$ deve estar no domínio de quantificação D , assim como todo símbolo funcional $f : |\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$ for tal que $f \upharpoonright D : |\mathcal{M}|^n \cap D^n \to |\mathcal{M}|$ satisfaça $im(f \upharpoonright D) \subseteq D$. Com essa garantia, podemos adicionar símbolos funcionais e constantes à linguagem, sendo possível provar todos os resultados a respeito da autonomia do domínio de quantificação.

*c) Uma inferência $\Gamma \vdash \varphi$ é uma **inferência válida** em $(\mathfrak{M}, \models)$ se, para todo $w \in W$ e toda $\psi \in \Gamma$, caso $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \psi$ para todo $\sigma_w \in |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L})}$, então $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$.*

Definição 6.4.6. *Uma relação de satisfação para a teoria das contrapartes sobre $\mathcal{L}^-$ é dita **Contraparte-teorética** se satisfizer:*

a) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models_{\sigma_w} \varphi$

b) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$ e $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \psi$

c) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$ ou $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \psi$

d) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi \supset \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models_{\sigma_w} \varphi$ ou $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \psi$

e) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \forall\, \bar{x}\, \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma_w} \varphi$ para toda $\bar{a} \in D^n_w$

f) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \exists\, \bar{x}\, \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma_w} \varphi$ para alguma $\bar{a} \in D^n_w$

g) Para todo P^n_i símbolo de predicado n-ário de $\mathcal{L}^-$, $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} P^n_i(\bar{x}) \Leftrightarrow (w, \sigma_w(\bar{x})) \in \{(P^n_i)\}_{\mathfrak{M}}$

Se $\bar{x}$ são todas as variáveis livres que ocorrem em φ, temos:

h) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \Box\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma_u} \varphi$ para todo $u \in W_{C^*(\bar{a})}$ e $\bar{a} \in D^n_u$, tal que $\forall i = 1, \ldots, n$, $C(\sigma_w(x_i), a_i)$

i) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \Diamond\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{[\bar{a}/\bar{x}]\sigma_u} \varphi$ para algum $u \in W_{C^*(\bar{a})}$ e $\bar{a} \in D^n_u$, tal que $\forall i = 1, \ldots, n$, $C(\sigma_w(x_i), a_i)$

Definição 6.4.7. *Uma **Semântica Contraparte-teorética** para $\mathcal{L}^-$ é o nome dado à classe de todas as relações de satisfação para a teoria das contrapartes que são contraparte teoréticas.*

Agora, podemos estender a noção de interpretação a partir das atribuições para a linguagem modal de primeira ordem $\mathcal{L}^-$. Consideremos $\mathfrak{M}$ um modelo contraparte-teorético para essa linguagem, podemos identificar uma interpretação do tipo contraparte-teorética, para $\mathfrak{M}$, a uma aplicação $[\![-]\!]$ que sastisfaz:

i) Seja $|\mathfrak{M}| = \sum_{w \in W} |M_w|$ universo do modelo, para domínios disjuntos.

ii) Para toda $x \in Var(\mathcal{L}^-)$:

$$\begin{aligned} [\![x]\!] \colon W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)} &\to |\mathfrak{M}| \\ (w, \sigma_w) &\mapsto \sigma_w(x) \end{aligned}$$

iii) Se P for predicado n-ário, uma aplicação do tipo:

$$[\![P]\!] \colon (W \times |\mathfrak{M}|^n) \to \mathbf{2}$$

Tal que $[\![P\bar{x}]\!] = [\![P]\!] \circ (Id_W \times [\![\bar{x}]\!]) : W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)} \to W \times |\mathfrak{M}|^n \to \mathbf{2}$[23].

iv) Para cada operador n-ário $\otimes$ de $\mathcal{L}^-$, uma aplicação (não funcional) do tipo: $[\![\otimes]\!] : \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})^n \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})$.

Desta forma, se $\bar{x}$ for um conjunto com m variáveis de $\mathcal{L}^-$ que ocorrem livres em alguma das fórmulas φ_1, ... ou φ_n, tem-se:

$$[\![\otimes(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]\!] = [\![\otimes]\!]^{\bar{x}}([\![\varphi_1]\!], \ldots, [\![\varphi_n]\!])$$

Para $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}}$ do tipo $\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})^n \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})$, que depende de $\bar{x}$, como veremos a seguir.

Observação: Pelos tipos de aplicações, então $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\supset$ são interpretados classicamente sobre as "fibras", já que mantemos cada ponto $w \in W$ fixado em cada interpretação de tipo $\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})$.

Definição 6.4.8. *Uma relação de satisfação contraparte-teorética* $(\mathfrak{M}, [\![-]\!])$ ***interpreta uniformemente*** *o operador* $\otimes$ *de* $\mathcal{L}^-$ *se a família* $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}}$ *for constante para qualquer sequência* $\bar{x}$ *finita (de comprimento* m *apropriado), ou seja, se existir uma função* f *tal que* $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}} = f$ *para todo* $\bar{x}$. *Neste caso, denotamos simplesmente* $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}} = [\![\otimes]\!]$.

Notação: Nomearemos o conjunto formado por funções $f_w : \wp(|M_w|^{Var(\mathcal{L}-)}) \to \wp(|M_w|^{Var(\mathcal{L}-)})$, para $w \in W$, por *família de funções do tipo* $f : \wp(W \times |M_w|^{Var(\mathcal{L}-)}) \to \wp(W \times |M_w|^{Var(\mathcal{L}-)})$, isto é, as funções da família só estão definidas quando a primeira coordenada é fixa.

Definição 6.4.9. *Seja* $\mathfrak{M}$ *um modelo de contrapartes e* $\bar{y}$ *uma sequência finita de variáveis de* $\mathcal{L}^-$.

Dizemos que uma família de funções do tipo $f^{\bar{y}} : \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})^n \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})$, *para toda sequência* $\bar{x}$ *de* m *variáveis que contém* $\bar{y}$, *para* m *finito qualquer,* ***preserva determinação local ligando as variáveis*** $\bar{y}$ *se:*

Para cada sequência finita $\bar{x}$, *existe* $f^{\bar{y}}_{\bar{x}} : \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})^n \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}-\bar{y}})$ *tal que, para qualquer aplicação* $B : W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}} \to \mathbf{2}^n$ *e funções* $r_{\bar{x}} : (w, \sigma) \mapsto (w, \sigma \upharpoonright \bar{x})$ *e* $r_{\bar{x}\ \bar{y}} : (w, \sigma) \mapsto (w, \sigma \upharpoonright (\bar{x} - \bar{y}))$, *tem-se para qualquer função da família* f^{y}: $f^{\bar{y}}_{\bar{x}}(B) \circ r_{\bar{x}\ \bar{y}} = f^{\bar{y}}(B \circ r_{\bar{x}}) : W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)} \to \mathbf{2}$, *isto é, o diagrama a seguir comuta.*

$$\begin{tikzcd}
\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})^n \arrow[r, hook, "-\circ r_{\bar{x}}^{-1}"] \arrow[d, "f^{\bar{y}}_{\bar{x}}"] & \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})^n \arrow[d, "f^{\bar{y}}"] \\
\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}-\bar{y}}) \arrow[r, hook, "-\circ r_{\bar{x}\ \bar{y}}^{-1}"] & \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})
\end{tikzcd}$$

[23] Refiro-me aqui ao tipo da aplicação, pois a interpretação de P é restrita aos elementos $w \in W$, ou seja, da forma definida, esta aplicação não é funcional (domínio é restrito às sequências n-árias que pertençam ao domínio de um mesmo w)

Segue da definição anterior que se f pertencer a uma família que preserva determinação local ligando as variáveis $\bar{y}$, então para $x \notin \bar{y}$, esta variável não interfere no valor da função f.

Definição 6.4.10. *Seja n um número natural não nulo fixo, aridade do operador $\otimes$ de $\mathcal{L}^-$.*

Uma família de funções do tipo $f^{\bar{y}} : \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})^n \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})$ ***preserva determinação local para*** *$\otimes$ se a família preservar determinação local ligando as variáveis $\bar{y}$, exatamente as mesmas variáveis ligadas pelo operador $\otimes$.*

Definição 6.4.11. *Uma relação de satisfação contraparte-teorética para $\mathcal{L}^-$* ***preserva determinação local*** *se interpreta todo operador $\otimes$ de $\mathcal{L}^-$ com uma família de operações que preservam determinação local para $\otimes$.*

Isto é, um operador $\otimes$ da linguagem $\mathcal{L}^-$ possui a propriedade de preservação de determinação local se a função que interpreta tal operador preserva determinação local para as variáveis ligadas por tal operador.

Definição 6.4.12. *Sejam $\mathfrak{M}$ um modelo de contrapartes e $\bar{x}$, $\bar{y}$ sequências finitas, de comprimentos n_1 e n_2, respectivamente, de variáveis de $\mathcal{L}^-$.*

Dizemos que $f : \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})^{n_1} \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{y}})^{n_2}$ é uma ***função restritível a domínios de quantificação*** *se for restritível a conjuntos da forma $\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{x}}$ e $\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{y}}$, em que $\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{x}}$, por exemplo, pode ser descrito como:*

$$\sum_{w \in W} D_w^{\bar{x}} := \{(w, \bar{x}) \mapsto \sigma_w(\bar{x})\} \in D_w^{\bar{x}}, \text{ para } D_w^{\bar{x}} = \{\sigma_w : \bar{x} \to D_w^n\}.$$

Em que $D_w \subseteq |M_w|$ domínio de quantificação do modelo M_w.

Do exposto acima, podemos afirmar que se uma função do tipo $\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})^n \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{y}})^m$ for restritível a domínios de quantificação, existe uma função $f_{DQ} : \wp(\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{x}})^n \to \wp(\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{y}})^n$ restritível a domínios de quantificação, para os quais o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccc}
\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})^n & \xrightarrow{f} & \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{y}})^m \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\wp(\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{x}})^n & \xrightarrow{f_{DQ}} & \wp(\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{y}})^m
\end{array}$$

Pois $\sum\limits_{w \in W} D_w^{\bar{x}}$ pode ser visto como uma "subestrutura" de $W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}}$, justificado pela existência da aplicação v mencionada anteriormente - seção 6.4.

Definição 6.4.13. *Uma família $f^{\bar{y}} : \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})^n \to \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})$ é* ***restritível a domínios de quantificação ligando as variáveis*** *$\bar{y}$ se:*

I) A família $f^{\bar{y}}$ preserva determinação local ligando as variáveis $\bar{y}$.

II) Para toda sequência finita $\bar{x}$, o operador $f^{\bar{y}}_{\bar{x}}$, que faz o diagrama a seguir comutar, também é restritível a domínios de quantificação (notemos que para toda sequência $\bar{x}$ finita, $f^{\bar{y}}_{\bar{x}}$ é único, já que $f^{\bar{y}}$ preserva determinação local com $\bar{y}$ ligadas).

$$\begin{tikzcd}
\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})^n \arrow[r, hook, "-\circ r_{\bar{x}}^{-1}"] \arrow[d, "f^{\bar{y}}_{\bar{x}}"] & \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})^n \arrow[d, "f^{\bar{y}}"] \\
\wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}-\bar{y}}) \arrow[r, hook, "-\circ r_{\bar{x}\ \bar{y}}^{-1}"] & \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{Var(\mathcal{L}-)})
\end{tikzcd}$$

Definição 6.4.14. *Uma família de operações $f^{\bar{y}}$ é* ***restritível a domínios de quantificação para um operador sentencial*** *$\otimes$ de $\mathcal{L}^-$ se este operador tiver a mesma aridade das funções da família e se todos os elementos desta família forem restritíveis a domínios de quantificação, ligando exatamente as mesmas variáveis livres $\bar{y}$ ligadas por $\otimes$.*

Definição 6.4.15. *Uma relação de satisfação contraparte-teorética $(\mathfrak{M}, [\![-]\!])$ para $\mathcal{L}^-$ é* ***restritível a domínios de quantificação*** *se interpreta cada operador sentencial $\otimes$ de $\mathcal{L}^-$ por uma família de operações que são restritíveis a domínios de quantificação (para cada $\otimes$).*

Kishida demonstra ao longo do capítulo 4 de (KISHIDA, 2011) que para tal $\mathcal{L}^-$, uma semântica de contrapartes para $\mathcal{L}$ preserva determinação local em relação aos operadores clássicos e modais ($\Box$ e $\Diamond$), e também é restritível a domínios de quantificação, já que seus operadores são todos locais preservadores e restritíveis a domínios de quantificação. Mostra também que para os critérios semânticos de satisfação para $\Box$ e $\Diamond$ utilizados por Lewis, não há uma trivialização do comportamento destes operadores, em oposição ao que ocorre na interpretação de Kripke, quando são utilizados domínios disjuntos; isso é feito por meio do conceito de *contrapartes*.

Assim, o conjunto de indivíduos possíveis $D = \sum_{w \in W} D_w$, que está incluído em $|\mathfrak{M}|$, pode ser considerado o contradomínio para todas as atribuições σ, de maneira que podemos restringir todas as operações sobre D (em particular, para cada $w \in W$, sobre D_w para o caso de operadores não modais), de maneira que para todo operador n-ário $\otimes$ e $\bar{x}$ sequência de n variáveis, existe uma função[24] $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}}_D$ que faz o diagrama comutar:

[24] Notemos que $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}}$ não é funcional no modelo contraparte-teorético, e as projeções laterais do quadrado (não funcionais) é que são responsáveis pela funcionalidade de $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}}_D$.

$$\begin{array}{ccc} \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})^n & \xrightarrow{[\![\otimes]\!]^{\bar{x}}} & \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \wp(\sum D_w^{\bar{x}})^n & \xrightarrow{[\![\otimes]\!]_D^{\bar{x}}} & \wp(\sum D_w^{\bar{x}}) \end{array}$$

Já que existe a inclusão $\wp(\sum D_w^{\bar{x}}) \hookrightarrow \wp(W \times |\mathfrak{M}|^{\bar{x}})$.

A seguir, definirei uma notação para pares de mundos e atribuições de valores a variáveis, notação esta que relaciona mundos que possuem indivíduos que são contrapartes em relação a variáveis apropriadas, i.e. significativas para determinadas fórmulas. Lembremos que os domínios de uma relação de satisfação contraparte-teorética, que usaremos no restante da seção, são disjuntos.

Denotemos por σ_u^w uma σ_u atribuição tal que, relativa a algumas variáveis, as atribuições σ_w e σ_u atribuem a estas variáveis objetos que são contrapartes em w e u, respectivamente. Neste caso, definamos:

$$C^{\bar{x}}(\sigma_w) = \{(u, \sigma_u^w) \in W \times |M_u|^{Var(\mathcal{L}-)} \mid (\forall i)(i = 1, \ldots, n)(C(\sigma_w(x_i), \sigma_u^w(x_i)))\}$$

Portanto, temos $(v, \beta) \in C^{\bar{x}}(\sigma_w) \Leftrightarrow \beta = \sigma_v^w$ tal que, para alguma sequência n-ária $\bar{x}$ de variáveis da linguagem, $C(\sigma_w(x_i), \beta(x_i))$ para todo $i \leq n$.

Em particular, se $n = 0$ ($\bar{x} = \emptyset$) então $C^{\bar{x}}(\sigma_w) = \sigma_w$.

Considerando as interpretações categoriais (em SET) dos conectivos lógicos clássicos, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ e dos quantificadores[25], podemos então resumir a interpretação dos conectivos nesta estrutura, baseada nas atribuições de valores às variáveis da linguagem, em uma relação de satisação contraparte-teoréitca, da seguinte forma:

a) $[\![\neg\varphi]\!] = \neg \circ [\![\varphi]\!]$

b) $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = \wedge \circ ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!])$

c) $[\![\varphi \vee \psi]\!] = \vee \circ ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!])$

d) $[\![\varphi \supset \psi]\!] = \Rightarrow \circ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!])$

e) $[\![\forall x\varphi]\!] = \sum_{w \in W} [\![\forall x]\!]_w [\![\varphi]\!]$

f) $[\![\exists x\varphi]\!] = \sum_{w \in W} [\![\exists x]\!]_w [\![\varphi]\!]$

g) $(w, \sigma_w) \in [\![\Box\varphi]\!]A \Leftrightarrow C^{\bar{x}}(\sigma_w) \subseteq [\![\varphi]\!]$

h) $(w, \sigma_w) \in [\![\Diamond\varphi]\!]A \Leftrightarrow (C^{\bar{x}}(\sigma_w) \cap [\![\varphi]\!]) \neq \emptyset$

[25] Podemos admitir tal construção, pois como os universos são disjuntos, temos uma estrutura fibrada em SET.

Observações: Em (KISHIDA, 2011) (pp. 193 - 197), Kishida demonstra que:

1) Toda interpretação contraparte teorética preserva determinação local em relação a todos os operadores (clássicos e $\Box$ ($\Diamond$)).

2) Obviamente, a interpretação contraparte teorética de operadores clássicos são restritíveis a domínios de quantificação.

3) A partir da relação de contrapartes C, a interpretação de $\Box$ e $\Diamond$ também são restritíveis a domínios de quantificação.

Portanto, a interpretação contraparte-teorética $(\mathcal{M}, [\![-]\!])$ é restritível a domínios de quantificação, i.e., a satisfação das fórmulas depende exclusivamente da satisfação das mesmas entre os objetos ou indivíduos possíveis (existentes) em algum mundo possível.
Considerando $D_w = \{a \in |\mathfrak{M}| \mid Iaw\}$ como o domínio de quantificação para um mundo $w \in W$, Kishida demonstra que a condição de verdade para os quantificadores coincide, via teoria das contrapartes (Lewis) e via semântica relacional (Kripke), que possuem domínios autônomos disjuntos de quantificação; nestes casos, Kripke define como domínio de todos os possíveis o conjunto $D = \bigcup_{w \in W} D_w$. Já o postulado da disjunção dos domínios de quantificação da teoria semântica de Lewis pode ser expresso pelo fato de que se $w \neq u$, então $D_w \cap D_u = \emptyset$, no que podemos descrever o conjunto D da união disjunta dos domínios de quantificação como $D = \sum_{w \in W} D_w$. Em ambos os casos (embora os objetos dos domínios dos *possibilia* dos modelos de Kripke não possuem o mesmo status ontológico do realismo modal de D. Lewis), podemos dizer que a semântica expressa por essa caracterização de uma linguagem de primeira ordem é a de uma *ontologia disjunta*. Percebemos que o operador I da Teoria das contrapartes pode ser expresso pela aplicação residência $\pi : D \to W$, dada por:

$$\begin{aligned} \pi \colon D &\to W \\ a &\mapsto w = \pi(a) \end{aligned}$$

E como $D = \sum_{w \in W} D_w$, temos como consequência a satisfação dos postulados $P1$) e $P2$) da teoria das contrapartes. Note que neste caso, obtemos um fibrado (D, π), com W seu espaço base e D espaço total; como π é funcional, $\pi^{-1}(w) = D_w$.
Consideremos $C \subseteq D \times D$ a relação de contrapartes de $\mathcal{L}^-$; desta maneira, temos a satisfação dos postulados $P3$) e $P4$).

Tomando agora $\gamma : D \to \wp(D)$ uma aplicação tal que, para todo $a \in D$, $\gamma(a) = \{b \in D \mid Cab\}$. Se $\gamma(a) \cap D_{\pi(a)} = \{a\}$ para todo $a \in D$, então temos a satifação dos postulados $P5$) e $P6$).

Esta caracterização "escolhe" um, e somente um elemento "contraparte" de a no "mundo" em que habita; outras possibilidades como propriedade de simetria, transitividade ou o fato de que um objeto possa ter, em outro "mundo", duas contrapartes distintas, são possibilidades abertas, já que não são regulados por princípios da teoria das contrapartes. Por outro lado, se fosse o caso que para determinado a, $\gamma(a)$ contivesse no máximo um elemento de cada D_w, então $\gamma(a)$ poderia ser representada por uma seção (global ou local) do fibrado - ver apêndice B.

Para a verificação dos postulados $P7$) e $P8$), basta garantir que existe um elemento $@ \in W$ tal que $D_@ = A \neq \emptyset$, em que A representa a extensão do predicado unário A da teoria das contrapartes.

Em (KISHIDA, 2011), pp. 200 - 201), o autor demonstra que a construção a seguir para interpretar a teoria das contrapartes é equivalente à construção que esboçamos anteriormente, agora sem os predicados desta teoria. Seja agora $\mathcal{L}^-$ uma linguagem de primeira ordem clássica, sem operadores funcionais, constantes e símbolos proposionais, acrescida dos operadores modais $\Box$ e $\Diamond$.

Definição 6.4.16. *A tupla* $(W, \pi, \gamma, @)$ *é uma* ***estrutura de contrapartes*** *se:*

i) W *for um conjunto.*

ii) $\pi : D \to W$ *for função sobrejetora, para* D *conjunto obtido por uma união disjunta.*

iii) $\gamma : D \to \wp(D)$ *for função.*

iv) $\gamma(a) \cap \pi^{-1}(\pi(a)) = \{a\}$ *para todo* $a \in D$.

v) $@ \in Im(\pi)$, *para* $Im(\pi)$ *a imagem da função* π, *com* $\pi^{-1}(@) \neq \emptyset$.

Definição 6.4.17. *Uma tupla* $\mathfrak{M} = (W, \pi, \gamma, @, \{(P_i^n)^{\mathfrak{M}}\})$ *é dita* ***modelo contraparte teorético*** *para* $\mathcal{L}^-$ *se e somente se:*

a) $(W, \pi, \gamma, @)$ *for uma estrutura de contrapartes.*

b) Para todo P_i^n *predicado n-ário de* $\mathcal{L}^-$, $(P_i^n)^{\mathfrak{M}} \subseteq \sum_{w \in W} D_w^n$.

Como modelos contraparte-teoréticos são restritíveis a domínios de quantificação e preservam determinação local (ver (KISHIDA, 2011) pp. 190 - 196), podemos assumir a seguinte estrutura interpretativa fibrada:

Definição 6.4.18. *A* ***semântica contraparte teorética*** *para* $\mathcal{L}^-$ *é a classe de todas as relações de satisfação da forma* $(\mathfrak{M}, \models)$ *tais que:*

I) $\mathfrak{M} = (W, \pi, \gamma, @)$ *é uma estrutura de contrapartes.*

II) Para cada $w \in W$, existem $\sigma_w : Var(\mathcal{L}^-) \to D_w$ atribuições de valores, em D_w, para as variáveis de $\mathcal{L}^-$.

III) Para as fórmulas de $\mathcal{L}$, for o caso:

S1) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models_{\sigma_w} \varphi$

S2) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$ *e* $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \psi$

S3) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi$ *ou* $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \psi$

S4) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \varphi \supset \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models_{\sigma_w} \varphi$ *ou* $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \psi$

S5) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \exists x\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{[a/x]\sigma_w} \varphi$ *para algum* $a \in D_w$

S6) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \forall x\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{[a/x]\sigma_w} \varphi$ *para todo* $a \in D_w$

S7) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} P_i^n\bar{x} \Leftrightarrow \sigma_w(\bar{x}) \in (P_i^n)^{\mathfrak{M}}$

Sendo $\bar{x}$ todas as variáveis livres que ocorrem em φ.

S8) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \Box\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{\sigma_u[\bar{a}/\bar{x}]} \varphi$ *para todo $u \in W$ tal que $\bar{a} \in D_u^n$, tal que para todo $i \leq n$, $a_i \in \gamma(\sigma_w(x_i))$.*

S9) $\mathfrak{M} \models_{\sigma_w} \Diamond\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_{\sigma_u[\bar{a}/\bar{x}]} \varphi$ *para algum $u \in W$ tal que $\bar{a} \in D_u^n$, tal que para todo $i \leq n$, $a_i \in \gamma(\sigma_w(x_i))$.*

Ou seja, pela definição de estruturas fibradas, esta interpretação contraparte teorética é, de fato, uma interpretação fibrada e satisfaz os critérios S1 a S7 - provenientes das propriedades da lógica clássica de primeira ordem.

6.5 Teorema Awodey-Kishida

Todos os operadores clássicos são interpretados uniformemente nas interpretações que satisfazem S1 - S7. Se um operador $\otimes$ é interpretado uniformemente, então para todo $\bar{x}$ tem-se $[\![\otimes]\!]^{\bar{x}} = [\![\otimes]\!]$. Como, na interpretação contraparte-teorética, todos os operadores da linguagem são interpretados uniformemente, podemos simplicar a notação, não nos preocupando com as variáveis $\bar{x}$, dependendentes da definição dos operadores $\otimes$, pois as variáveis não interferem na interpretação das fórmulas com tais operadores.

Considerando C a relação de contrapartes e a notação $\overrightarrow{C}(a) = \{b \in D \mid Cab\}$, temos que $\bar{a} \in [\![\bar{x}|\Box\varphi]\!]$ se e somente se $\overrightarrow{C^n}(\bar{a}) \subseteq [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$ (em um modelo contraparte-teorético). Portanto $x \neq y$ pode ser satisfeita em um modelo no qual é válida a relação de contrapartes C, porém $\Box(x \neq y)$ pode não ser satisfeita, ou seja, não temos a validação da regra $(x \neq y) \vdash \Box(x \neq y)$ - ver pp. 180 -181 - (KISHIDA, 2011).

Propriedade especial 2: *Comutatividade do operador modal com a aplicação diagonal.* Para que uma semântica valide as regras usuais de igualdade da lógica de primeira ordem, deve ser o caso que $[\![x|\varphi(x,x)]\!] = \Delta^{-1}([\![x,y|\varphi(x,y)]\!])$ para toda fórmula φ, mesmo contendo operadores modais, ou seja, o quadrado deve comutar:

$$\begin{tikzcd}
[\![x,y|\varphi(x,y)]\!] \arrow[r, "{[\![\Box]\!]^2}"] \arrow[d, "\Delta^{-1}"] & [\![x,y|\Box\varphi(x,y)]\!] \arrow[d, "\Delta^{-1}"] \\
[\![x|\varphi(x)]\!] \arrow[r, "{[\![\Box]\!]^1}"] & [\![x|\Box\varphi(x)]\!]
\end{tikzcd}$$

Quando uma semântica para a lógica modal possui as propriedades de comutatividade dos operadores modais em relação às projeções e a aplicação diagonal - propriedades especiais 1 e 2, então tal semântica valida as regras lógicas de primeira ordem e os axiomas referentes ao predicado de igualdade =, ver (KISHIDA, 2011) p. 207.

Kishida aponta algumas *características* que interpretações fibradas com estruturas topológicas (feixe-interpretações) possuem e qual a relação entre tais características com as definições e propriedades das semânticas de Kripke (relacional) e de Lewis (teoria das contrapartes):

C1. Para todo $w \in W$, existe uma apliação sobrejetora $\pi : D \to W$ tal que $\pi^{-1}(\{w\}) = D_w$ e se $w \neq u$, então $D_w \cap D_u = \emptyset$.

C2. Os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ são interpretados por uma noção de identificação menos exigente (devido as contrapartes).

C3. Os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ são interpretados uniformemente, ou seja, possuem a propriedade de comutatividade com as projeções - *propriedade especial 1.*

C4. Os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ possuem a propriedade de comutatividade com a aplicação diagonal - *propriedade especial 2.*

Enquanto a semântica de Kripke possui as propriedades C3 e C4, a teoria das contrapartes de Lewis possui as propriedades C1 e C2. Em (KISHIDA, 2011) o autor estuda estas características nos modelos estilo Kripke no capítulo 3, e as características dos modelos contraparte teoréticos no capítulo 4.

O principal resultado da tese [teorema Awodey-Kishida] mostra que a interpretação feixe-topológica para a lógica modal possui as 4 propriedades anteriores (é uma interpretação fibrada com uma noção generalizada da noção de acessibilidade, obtida pela noção de vizinhança topológica), determinando:

Teorema 6.5.1 (Teorema Awodey-Kishida)**.** *Para toda teoria consistente T, que estende **FOS4**, em linguagem modal de primeira ordem, existe uma feixe-interpretação* $(\pi, [\![-]\!])$ *que valida todos, e somente estes, os teoremas de T.*

Em seguida, Kishida generaliza a noção usual de vizinhanças (topológicas), usando propriedades categoriais, para enfraquecer as propriedades desta noção de vizinhança generalizada (propriedades como monotonicidade, idempotência etc.), apresentando resultados similares ao teorema anterior em relação à adequação destas interpretações feixe-generalizadas com respeito a quatro sistemas modais de primeira ordem mais fracos do que **FOS4**. Tal enfraquecimento não é de meu interesse argumentativo.

6.5.1 Formalização em $SET \downarrow X$ de Interpretações Fibradas

Do fato de que para X conjunto, $SET \downarrow X$ é topos - ver apêndice A, por similaridade podemos organizar uma interpretação $[\![-]\!]$ para **FOS4**, sobre o topos, da seguinte forma:

Definição 6.5.1. *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem quantificada de primeira ordem (clássica ou não). Uma $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$ em $SET \downarrow W$ consiste:*

a) Uma sobrejeção $\pi : D \to W$, em que $D \subseteq |\mathcal{M}|$ e $D^0 = W$.

b) Para todo $w \in W$, $\pi^{-1}(w) = D_w$ e mais: $D_{w_1} \cap D_{w_2} = \emptyset$ para todo $w_1 \neq w_2$, então $D = \sum_{w \in W} D_w$.

c) Para todo símbolo de predicado n-ário P, $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n \subseteq \sum_{w \in W} D_w^n$, i.e., há uma interpretação da extensão de P em todo $w \in W$.

Em particular, $=^{\mathcal{M}} := \Delta(D) = \{(a, a) \mid a \in D\} \subseteq D^2$.

d) Para todo símbolo funcional n-ário f, $f^{\mathcal{M}} : D^n \to D$ é função.

Em particular, para c constante, então $c^{\mathcal{M}} : D^0 \to D$ é tal que $\pi \circ c^{\mathcal{M}} = Id_W$.

Ou seja, $\mathcal{M}$ é uma estrutura fibrada.

Definição 6.5.2. *Seja $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura fibrada. Uma interpretação para $\mathcal{M}$ pode ser descrita por:*

$S1$) $[\![\bar{x} \mid \neg\varphi]\!] = D^n - [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$, com "$D^n-$" interpretado como o complemento em $SET \downarrow W : \neg \circ [\![\bar{x} \mid \varphi]\!]$.

$S2$) $[\![\bar{x} \mid \varphi \wedge \psi]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \cap [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$, com "$\cap$" interpretado como intersecção em $SET \downarrow W : \wedge \circ ([\![\bar{x} \mid \varphi]\!], [\![\bar{x} \mid \psi]\!])$.

Similarmente para os outros operadores.

$S3$) $[\![\bar{x} \mid \varphi \vee \psi]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \cup [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$.

$S4$) $[\![\bar{x} \mid \varphi \supset \psi]\!] = [\![\bar{x} \mid \varphi]\!] \Rightarrow [\![\bar{x} \mid \psi]\!]$.

S5) $[\![\bar{x} \mid \exists y\varphi]\!] = p_n[\![\bar{x}, y \mid \varphi]\!]$.

S6) $[\![\bar{x} \mid \forall y\varphi]\!] = D^n - [\![\bar{x} \mid \exists y\neg\varphi]\!]$.

S7) Seja P um símbolo de predicado n-ário em que as variáveis $\bar{x}$ aparecem livres, e somente elas: $[\![\bar{x} \mid P]\!] = P^{\mathcal{M}}$.

SNL) Se y não ocorre livre em φ: $[\![\bar{x}, y \mid \varphi]\!] = p_n^{-1}([\![\bar{x} \mid \varphi]\!])$.

ST) $[\![\bar{x}, \bar{y} \mid [t/z]\varphi]\!] = (Id_W \times [\![\bar{y} \mid t]\!])^{-1}([\![\bar{x}, z \mid \varphi]\!])$.

SS) $[\![\bar{x}, y \mid [y/z]\varphi]\!] = (Id_W \times \Delta)^{-1}([\![\bar{x}, y, z \mid \varphi]\!])$.

Observações: 1. Todos os operadores clássicos em $SET \downarrow W$ são obtidos pela união disjunta (bundling) da interpretação usual dos operadores em SET.

2. Estas propriedades satisfazem o esperado para uma noção de satisfação clássica usual $\models$.

3. É conhecido que se $\mathcal{L}$ for clássica, então $S1$ a $S7$ garantem ST e SS.

4. Kishida demonstra em (KISHIDA, 2011) que se $\mathcal{L}$ não for clássica, ST e SS precisam ser colocadas na definição, pois algumas interpretações que satisfazem $S1$ a $S7$ podem não validá-las para fórmulas modalizadas, e precisamos desta validação para á lógica **FOS4** - substituição e necessidade da igualdade.

Da definição anterior, se $\mathcal{L}$ for uma linguagem não-clássica de primeira ordem, $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura fibrada com π sobrejeção sobre W conjunto, então para todo $w \in W$ tem-se que $(D_w, (P_i^n)_w^{\mathcal{M}}, (f_i^n)_w^{\mathcal{M}}, (c)_w^{\mathcal{M}}, [\![-]\!]_w)$ é uma interpretação clássica em SET para as fórmulas não modalizadas, i.e., $(D, (P_i^n)^{\mathcal{M}}, (f_i^n)^{\mathcal{M}}, (c)^{\mathcal{M}}, [\![-]\!])$ é um fibrado em $SET \downarrow W$. Este fato segue, pois os operadores categoriais $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, p_n, Δ e a interpretação para símbolos funcionais comutam com a operação de união disjunta $\sum$ - ver proposição 42 a seguir, desde que as interpretações para os símbolos funcionais estejam definidos de D^n em D, tendo bom comportamento em relação ao domínio de quantificação.

Ou seja, do que foi exposto temos que $[\![\varphi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$ se e somente se $[\![\varphi]\!]_w \subseteq [\![\psi]\!]_w$, para todo w, e portanto a correção para a lógica clássica de primeira ordem de $[\![-]\!]_w$ em SET nos garante a correção clássica de $[\![-]\!]$ em $SET \downarrow W$.

Obviamente, como a interpretação é fibrada, a característica C1 é obtida.

Proposição 42. *Seja D um conjunto dado por uma união disjunta, por meio de $\pi : D \to X$ um fibrado. Se $\sum$ for símbolo para a união disjunta, considerando os espaços topológicos apropriados com as topologias produto, construídas sobre a topologia de $D^0 = X$, temos:*

a) $\sum$ e as projeções p_n comutam.

b) $\sum$ e as projeções p_n^{-1} comutam.

c) $\sum$ *e int comutam.*

d) $\sum$ *comuta com* $\cap$*,* $\cup$ *e a operação complementar, todas operações da teoria dos conjuntos aplicadas sobre o fibrado.*

e) int *e* p_n *comutam.*

A demonstração da proposição anterior segue da simples verificação usando a definição de fibrado, propriedades da teoria dos conjuntos, a definição topológica de interior, assim como a definição da topologia produto - ver apêndice B.

Consideremos agora a categoria de todas os feixes sobre W - $TOP(W)$ - que é um topos. Seja $\pi : D \to W$ uma sobrejeção e $(\mathcal{M}, [\![-]\!])$ uma interpretação fibrada, com as topologias apropriadas definidas na demonstração da completude de **FOS4**. Ao interpretarmos $\Box$ como o operador interior, dada a definição de $\Diamond$ e da operação de fecho topológico, então $\Diamond X := \bar{X}$, o fecho topológico de X. Como esperado, $(\mathcal{M}, [\![-]\!])$ será uma feixe-interpretação para a $\mathcal{L}$-estrutura $\mathcal{M}$.

Proposição 43. *A função* $\pi : D \twoheadrightarrow X$ *é um homeomorfismo local se e somente se* π *e* Δ*, aplicação diagonal, forem contínuas e abertas,*

Demonstração: Em (MUNKRES, 2002), pp. 65, temos que o homeomorfismo local (sobrejetor) é uma aplicação contínua e aberta. Supondo, por outro lado, que além de π, Δ também é contínua e aberta, para π uma sobrejeção, basta mostrar que π é homeomorfismo local.

De fato, se π não fosse homeomorfismo local, obteríamos uma contradição com a hipótese assumida sobre Δ - ver teorema B.1.6.

■

No caso da feixe-interpretação $(\mathcal{M}, [\![-]\!])$ para **FOS4**, como π é homeo local segue que π e Δ são abertas.

Proposição 44. *Seja* $f : X \to Y$ *função definida entre espaços topológicos.*

a) f *é contínua se e somente se, para todo* $A \subseteq Y$*,* $f^{-1}(int(A)) \subseteq int(f^{-1}(A))$*.*

b) f *é aberta se e somente se, para todo* $A \subseteq Y$*,* $int(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(int(A))$*.*

Demonstração: Basta utilizarmos a definição de função contínua (imagem inversa de abertos é sempre um aberto) mais o fato de que $int(A)$ é o maior aberto contido em A.

Segue da proposição que, caso f seja aberta e contínua, então f^{-1} e int comutam. Logo, sabemos que π e Δ são aplicações que comutam com int na feixe-interpretação para a lógica **FOS4**. Como as substituições são definidas por funções contínuas (interpretação de termos) e pelas projeções, ambas contínuas e abertas, então substituição e $\Box$ comutam, como desejado. Logo, o fato de que $SET \downarrow X$ é fibrado, portanto a boa propriedade local de homeomorfismo é satisfeita devido as propriedades especiais 1 e 2, mais a lógica subjacente ser **FOS4**, garantem que temos a satisfação de ST e SS.

Destes resultados temos a satisfação das características $C3$ e $C4$ da seção anterior. Portanto, tal interpretação satisfaz:

$S8$) $[\![\bar{x} \mid \Box\varphi]\!] = int([\![\bar{x} \mid \varphi]\!])$.

$S9$) $[\![\bar{x} \mid \Diamond\varphi]\!] = \overline{[\![\bar{x} \mid \varphi]\!]}$.

Para a satisfação de $C2$, falta determinar objetivamente uma relação de contrapartes sobre D.

7 Duas Estruturas Interpretativas

Neste capítulo trataremos de duas estruturas interpretativas para a lógica **FOS4**. Primeiramente, a partir do teorema da completude demonstrado em (AWODEY; KISHIDA, 2012), irei construir o modelo canônico desta lógica, necessário para replicar o estudo de características topológicas locais para ela, assim como realizei, no capítulo 5, para a parte proposicional. Esta nova construção será necessária, pois, como vimos, a completude não foi demonstrada por meio desta técnica.

Em um segundo momento farei a proposta de um experimento intelectual, utilizando ferramentas da teoria das categorias, para mostrar como construir uma estrutura interpretativa para uma versão da lógica **FOS4** que permita a formalização da noção de "essências" que não possuem contrapartes existentes em certos mundos possíveis. Com esta estrutura pretendo dar uma contribuição intelectual ao uso da lógica modal quantificada na estruturação de argumentos metafísicos.

Como discutido rapidamente no capítulo 3, o realismo modal apresentado por David Lewis (LEWIS, 1979a) postula o que podemos chamar de uma *ontologia forte*, na medida em que todos os *possibilia* apresentam o mesmo status ontológico dos entes atuais. Embora há nesta teoria uma primazia de referência ao mundo atual, ele é apenas um indexador, e todos os outros mundos possíveis são tão ontologicamente bem fundados, e neste sentido reais, quanto o nosso. Além disso, há uma interessante ferramenta formal elaborada para, de alguma maneira, resolver certos problemas relacionados à identificação de indivíduos entre-mundos, que é considerar o conceito de *contrapartes* e da disjunção dos domínios de mundos possíveis (world-bound). Vimos no capítulo anterior como Kishida demonstra em (KISHIDA, 2011) que a teoria das contrapartes pode ser interpretada por uma estrutura fibrada, vimos também que **FOS4** é completa em relação a uma feixe-interpretação (fibrada).

Retomando o conceito de heccedidade, é possível interpretarmos este conceito metafísico, em uma linguagem contemporânea, como um "feixe" não completamente traduzível para uma linguagem formal enumerável, mas que é total e identifica singularmente cada indivíduo, ou ente, tanto em um referêncial intramundo, quanto extramundo. Esse feixe é composto por todas as propriedades, relações etc. que caracterizam o indivíduo no mundo possível em que habita, no complexo de sua totalidade; por isso mesmo, é possível que a quantidade de propriedades e fatos relacionais deste feixe possa ser não enumerável, e portanto dizemos que, neste sentido, este feixe é indecomponível em uma linguagem formal enumerável, sendo assim, não podemos representar todos estes fatos usando os símbolos dessa linguagem enumerável (ver capítulo 1).

Imaginemos um mundo possível em que Russell existisse e no qual Kant fora assassinado; neste mundo possível, o “eu” de Russell não seria o mesmo do mundo atual, já que a proposição ‘Russell é um indivíduo do mundo em que o filósofo Kant foi assassinado’ não é fato no mundo atual, mas o é no mundo possível imaginado; portanto, mesmo que pudéssemos listar todos os momentos vivenciados pelo filósofo Bertrand Russell neste mundo imaginado, que não estejam relacionados à figura de Immanuel Kant, e compará-los com estes momentos concretos da vida de Russell no mundo atual, encontrando perfeita analogia entre estes dois grupos, ainda assim tal propriedade que faz parte, mesmo que transversalmente, de nosso Russell do mundo imaginado seria diferente no feixe das totalidades de propriedades e relações que caracterizam Russell no mundo mundo atual - ela seria negativa em tal caso. Com esta estratégia, somos também capazes de identificar as características essenciais de Russell daquelas não-essenciais; no exemplo apresentado, viver em um mundo onde Kant fora assassinado não é essencial a Russell, porém são essenciais as propriedades de Russell que nos ajudam a apontá-lo e identificá-lo em outros mundos possíveis nos quais, porventura, possa existir (referencial). Desta forma, podemos afirmar que a sentença ‘Russell é necessariamente um lógico’ significa que Russell é um lógico *simpliciter* se e somente se a propriedade *ser lógico* for uma propriedade de Russell em todos os mundos possíveis em que existisse (suas contrapartes), ou seja, uma propriedade presente em todos os feixes que caracterizam suas contrapartes em mundos possíveis.

Procuro, portanto, assumir neste trabalho a posição de que o conceito de heccedidade é uma poderosa ferramenta abstrata que visa dar conta das complexidades dos raciocínios envolvendo problemas a respeito do que é essencial e contingente para a caracterização de um indivíduo, tal complexidade pode ser identificada pela miríades de proposições e relações que caracterizam a existência individual de cada ente e, por isso, não pode ser decomponível em uma linguagem formal enumerável. Neste sentido, a noção de heccedidade é um complexo que não pode ser logicamente decomponível, ou representável em sua totalidade, por noções anteriores e menos complexas, fato resultante de nossa limitação linguística e epistêmica. Considerando tal conceito um complexo singularizante de indivíduos de uma ontologia, ele abarca, como complexo, uma totalidade que caracteriza-os ou determina-os individualmente, como indivíduos ou entes, em um e somente um único mundo possível.

A *teoria das contrapartes* de D. Lewis apresenta ferramentas formais distintas das ferramentas clássicas da lógica modal quantificada para tratar sobre a formalização dos conceitos de mundos possíveis e seus domínios. Kishida (KISHIDA, 2011) analisa em detalhes a relação das teorias semânticas de Lewis e de Kripke (relacional), procurando mostrar os pontos de proximidade e como traduzir noções de uma teoria formal para a outra.

Em especial, Kishida apresenta uma formulação em linguagem de primeira ordem, por intermédio de uma interpretação fibrada, que satisfaz os critérios da teoria das contrapartes sem exigir uma estrutura formal de contrapartes, como proposta por Lewis (LEWIS, 1979a).

Primeiramente, reforço que o objetivo é trabalharmos com *domínios de quantificação autônomos*[1], formados por *urelementos* (elementos primordiais) que representam a totalidade dos indivíduos ou entidades existentes em algum mundo possível. Portanto, para cada mundo possível w, o conjunto D_w irá representar a totalidade de todos os objetos e indivíduos que existiram, existem ou existirão neste mundo; obviamente este conjunto é bem fundado, na medida em que seus elementos são apenas objetos ou entes "elementares", logo nenhum D_w pode conter, como elemento, um outro conjunto formado por outros elementos primordiais ou coleções destes etc.; as relações conjuntistas entre os objetos de um mesmo mundo (propriedades, relações, funções etc.) se darão a partir das interpretações das fórmulas de uma linguagem formal que envolvem os indivíduos deste mundo. Sendo assim, um objeto ou indivíduo a, de um mundo possível w, é elemento de D_w.

A ideia central que motiva esta abordagem é a de que toda sentença fechada que envolve um indivíduo a pode ser representada por uma proposição, assim, todas as propriedades e relações da linguagem formal que envolvem o objeto a (que estão incluídas no feixe que simboliza e singulariza a em D_w, sua heccedidade) compõem o mundo w, pois podem ser representadas por proposições que, no caso do objeto a em w, são verdadeiras. Esta seria a *composição* formal do mundo w que bem funda ontologicamente (racionalmente) os entes (concretos ou não) que pertencem a D_w.

Em segundo lugar, se quisermos nos ater às hipóteses filosóficas que tracei no início deste trabalho, basta nos restringirmos a esta linguagem enumerável idealizada, que ainda assim possui verossimilhança com nossa capacidade de utilizar mecanismos linguísticos para descrever os fatos do mundo, de maneira que a linguagem assim obtida seja capaz de refletir, de maneira rigorosa, os limites daquilo que pode ser descrito linguisticamente de maneira formal, mesmo que para isso o processo seja potencialmente infinito, ou seja, uma aproximação assintótica a uma noção vaga de "verdade absoluta" ou total sobre o mundo[2].

[1] Domínios de quantificação e atribuição dos valores as variáveis é o mesmo.

[2] De fato, esta é uma tentativa de aplicar à metafísica o processo de racionalidade dialética esperado no corpo de discussão - e práxis - da ética/política. Na esfera prática, por exemplo, a teoria (teorização) política restringe-se à contemplação (*theoria*), e esta mira somente uma totalidade futura, um *vir a ser* utópico, portanto toda reflexão política (metafísica) deve focar-se na depuração das estruturas sociais (postulados metafísicos), mirando o horizonte de eventos que circunda a singularidade da utopia desejada, mas nunca alcançando-a, já que este percurso é, por si mesmo, assintótico - já que o destino é o *não-lugar*, o indeterminado, que se caracteriza unicamente por tal propriedade de *não-determinação* (ver tanto a definição do método de investigação metafísica em (BERGSON, 1963) - capítulo 1, quanto a defesa de Popper da ideia de *verossimilitude*, no qual o progresso da ciência se dá por uma sucessão

Por mecanismos racionais, todavia, podemos vislumbrar a estrutura formal total deste processo - do sistema formal construído sobre a linguagem - identificando as propriedades desta estrutura, na tentativa de relacionar estas propriedades com as possíveis propriedades entre os próprios fatos do mundo, na medida em que estes são identificados com o resultado de nossa capacidade de descrevê-los e comunicá-los a outros. Neste trabalho defendo uma tentativa de apontar um modelo lógico no qual restrinjamos os formatos de raciocínios (metafísicos) aos limites destas possibilidades, de maneira a garantir que as inferências metafísicas aí contidas possam ter algum tipo de embasamento objetivo nos moldes das ciências naturais. Não que esta limitação seja imposta *a priori* à reflexão filosófica, mas deve ser admitida por aquele que pretende expor seu raciocínio filosófico em um formato lógico-rigoroso, em uma tentavia inspirado nos procedimentos descritos por Husserl em (HUSSERL, 2002) e que, ao mesmo tempo, reconheça os limites da razão na descrição pura da "realidade", reconhecendo a importância dos aspectos empíricos, tanto concernentes à própria possibilidade de verificação epistêmica do mundo-em-si, como quanto da possibilidade própria da estrutura da linguagem e da representação mental humana compartilhados entre os indivíduos, desde representações imagéticas a conceitos abstratos[3]; sobre este aspecto, em particular, é importante ressaltarmos que a palavra grega *eidos* pode ser interpretada com relação a termos relacionados à *visão* e *imagem*, indicando uma sabedoria primitiva que correlaciona nossa capacidade mental de representação e as *formas* do mundo, no sentido platônico [ver p. 707 - (JAEGER, 2018)]. É aqui que o conceito de heccedidade nos auxilia a organizar esta aparente contradição: identificar, em uma linguagem enumerável (formalizada), as propriedades essenciais de um ente que possui, possivelmente, uma quantidade não-enumerável delas - a resolução para isso é parcial, não somos capazes de identificá-las **todas**; o que é individualizante no ente é impossível de ser cercado pela linguagem humana (aqui nem entramos na questão epistemológica), este, o homem, só é capaz de *intuir* a unidade do ente. A heccedidade (como noção primeira, pois como vimos não pode ser descrita como um conceito formalizado) dá estrutura a este feixe (não-enumerável) intuído como unidade.

de teorias que se aproximam da verdade, sem nunca alcançá-la, embora seja possível, acredito, não entendermos este processo como contínuo - ver (WILLIAMSON, 2014)).
Em certa medida, a destruição das bases éticas nas quais se assentam o debate político se dá quando um grupo arvora-se a missão de entregar ao mundo a concretude de "alguma" utopia. Tais missões, me parece, tendem rapidamente ao fracasso e nos casos em que se esparramam por todas as esferas da vida de uma sociedade - por meio da alienação dos princípios políticos e ideológicos, empurram para a destruição qualquer tecido de convivência minimamente civilizada.

[3] Neste sentido, voltando a Husserl, após a suspensão do juízo e a operação da *redução eidética*, não acredito que a possamos considerar uma operação exclusivamente racional, pois embora ela procure eliminar a subjetividade da intenção frente ao objeto posto, acredito que a razão por sí é incapaz de comunicar, entre os indivíduos, qualquer certeza que não se funde, de alguma forma, em algum elemento exterior - e esse é capturado por alguma noção fortemente intuitiva do mundo compartilhado entre os indivíduos (empírico).

7.1 Estrutura Formal: Modelo Topo-$FOS4$ Canônico

Retomarei os resultados e nomenclatura do capítulo anterior para organizar o modelo canônico para a lógica **FOS4**, de maneira que possamos estudar propriedades topológicas deste modelo, assim como fizemos com o modelo topo $S4$-canônico[4].

Consideremos $\mathcal{L}$ linguagem de primeira ordem não-clássica, com $\Box$ único operador modal (primitivo), e $\theta : For(\mathcal{L}) \to For(\mathcal{L}^\theta)$ uma sobrejeção que traduz $\mathcal{L}$ para uma linguagem clássica $\mathcal{L}^\theta$, acrescentando uma família enumerável $\{[\varphi] \mid \varphi$ é $\Box_{min}(\mathcal{L})$ em $FACNP(\mathcal{L})\}$ de predicados n-ários, um para cada uma das classes de equivalência de $FACNP(\mathcal{L})$ - como vimos, isso garante, por indução na complexidade das fórmulas, a tradução de todas as fórmulas de $\mathcal{L}$ para a linguagem clássica $\mathcal{L}^\theta$.

Do lema 6.2.1 segue a existência de uma bijeção F entre a classe das relações de satisfação clássica para $\mathcal{L}^\theta$ e a classe das relações de satisfação clássica (no sentido estendido) para $\mathcal{L}$. Desta forma, sabemos que se $(\mathcal{M}', \models')$ é uma relação de satisfação clássica, então $F((\mathcal{M}', \models')) = (\mathcal{M}, \models)$ é uma relação de satisfação clássica, no sentido estendido, de maneira que $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$, $(\mathcal{M}, \models)$ é unicamente determinada e ambas as relações coincidem no que interpretam a parte clássica de $\mathcal{L}$, fórmulas em comum entre ela e sua tradução.

Consideremos então $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ e $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ as respectivas linguagens acrescidas do conjunto $\mathfrak{C} = \{c_\delta \mid \delta < \aleph_0\}$ de novas constantes para a linguagem $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^\theta$, respectivamente; como vimos, $\theta(\mathcal{L}_{\aleph_0}) = \mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$.

Pela completude, vimos que a interpretação $[\![-]\!]$ para **FOS4** é dada pela interpretação fibrada $[\![-]\!]^\theta = \sum\limits_M [\![-]\!]^\theta_M$. Nosso intuito é construirmos uma interpretação canônica para **FOS4** ao tomarmos a estrutura fibrada sobre os modelos canônicos dos conjuntos (classicamente) consistentes e maximais de fórmulas de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$.

7.1.1 Modelos Canônicos de Primeira Ordem para $\mathcal{L}^\theta$

Usualmente demonstra-se a completude da lógica de primeira ordem exibindo um modelo para cada teoria[5] consistente. Isto se faz expandindo a linguagem, construindo um modelo canônico que satisfaz esta teoria (conservativa) na linguagem estendida, mostrando que todas as fórmulas da linguagem original são válidas nesta estrutura e, portanto,

[4] Esta proposta reorganiza, a partir do teorema de Awodey-Kishida e dando certa concretude às premissas filosóficas desejadas, a estrutura interpretativa latente nos procedimentos de demonstração descritos no capítulo anterior.

[5] Neste parágrafo, teoria está sendo usado em um sentido distinto do que aquele usado no capítulo anterior (demonstração teorema Awodey-Kishida). Nesta seção, **teoria** de primeira ordem refere-se a um sistema formal construído sobre uma linguagem de primeira ordem, com a adição de alguns axiomas.

continuam sendo válida na subestrutura, ou seja, toda fórmula da linguagem original, válida nesta estrutura canônica, é teorema da teoria inicial.

Utilizarei estes modelos canônicos de primeira ordem para, a partir deles, exibir uma estrutura canônica para a lógica **FOS4**, na linguagem modal $\mathcal{L}$. Para isso, delimitarei os passos de construção de modelos canônicos para todo Γ, conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}^\theta$, classicamente consistente.

7.1.1.1 Completude em Primeira Ordem

Da completude da lógica de primeira ordem, temos os seguintes resultados para a linguagem $\mathcal{L}^\theta$.

Teorema 7.1.1. *Γ é um conjunto consistente de fórmulas de $\mathcal{L}^\theta$ se e somente se existe M, $\mathcal{L}^\theta$-estrutura, tal que $M \models \Gamma$ e $(M, \models)$ é uma relação de satisfação clássica.*

A demonstração pode ser encontrada em (SHOENFIELD, 1967) ou (FAJARDO, 2017), seguirei a notação e construções deste último de perto.

De fato, para a demonstração deste resultado, recorremos à linguagem estendida $\mathcal{L}^\theta_\kappa$ - para $\kappa = \aleph_0$ em nosso caso, utilizada para a construção do modelo canônico. Sabemos assim que existe Δ conjunto consistente (classicamente) e maximal de fórmulas de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

A partir de agora, delinearei a construção de um modelo canônico para Δ, conjunto consistente e maximal de sentenças da linguagem traduzida. Note que, do fato da lógica subjacente ser a lógica de primeira ordem clássica, uma relação de satisfação clássica possui as boas propriedades que Kishida discute em (KISHIDA, 2011) e esboçamos no capítulo 6: determinação local, α-equivalência, f-equivalência e restrição ao domínio de quantificação, por isso podemos admitir o domínio de atribuição de valores a variáveis como sendo o domínio de quantificação do modelo (propriedade de restrição das atribuições ao domínio de quantificação).

1. Considerando a linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}^\theta$ e Γ um conjunto de fórmulas dessa linguagem, então é válido o teorema da dedução para φ sentença:

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash \varphi \supset \psi$$

Mais ainda, podemos supor que Γ é um conjunto de sentenças, pois se Γ' for o conjunto de todos os fechos universais das fórmulas de Γ, mostra-se que para toda fórmula φ da linguagem, $\Gamma \vdash \varphi$ se e somente se $\Gamma' \vdash \varphi$.

Mostra-se também (ver (FAJARDO, 2017)) que se Γ for um conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}^{\theta}$ e φ uma das sentenças desta linguagem, então ou $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ou $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente (somente um deles). No caso de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ser consistente, então $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.

2. a) Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração das sentenças de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$ e Γ um conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}^{\theta}$. Constrói-se Δ consistente maximal, que contém Γ, da seguinte forma:

$$\Delta_0 = \Gamma$$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se consistente} \\ \Delta_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$$

Desta forma, Δ é um conjunto de sentenças (na linguagem estendida) consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Delta$[6].

b) Demostra-se que se $\varphi(x)$ for uma fórmula com uma variável livre, Γ for conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}^{\theta}$ e c uma constante da linguagem que não ocorre nem em φ, nem em Γ, então $\Gamma \cup \{\exists x\varphi \supset \varphi[c/x]\}$ é consistente. Notemos que $\exists x\varphi \supset \varphi[c/x]$ é sentença e, portanto, aparece na construção de algum Δ consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Por construção, para toda constante c de $\mathcal{L}^{\theta}$, $\exists x(c = x)$ é sentença de $\mathcal{L}^{\theta}$ e de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$, portanto da nova linguagem. Se Γ for conjunto consistente de fórmulas, então $\Gamma \cup \{\exists x(c = x) \supset (c = x)[c_i/x]\}$ é consistente, para c_i nova constante de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$.

Segue do item a) que para toda constante c de $\mathcal{L}^{\theta}$, existe c_i uma nova constante de $\mathfrak{C}$ tal que, para uma determinada interpretação (a do modelo canônico a ser construído), tem-se verificada a igualdade $c = c_i$, pois $c = c_i \in \Delta$, para algum Δ conjunto consistente maximal de sentenças de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$[7].

3. Seja $\Phi = \{\Delta \subset Sent(\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}) \mid \Delta \text{ é consistente maximal } \}$[8].

a) Definamos sobre $\mathfrak{C}$, coleção de constantes novas de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$, a relação de equivalência[9] $c_{\delta_1} \sim_{\Delta} c_{\delta_2}$ se e somente se $c_{\delta_1} = c_{\delta_2} \in \Delta$, para $\Delta \in \Phi$.

Consideremos, para todo $\Delta \in \Phi$, o conjunto enumerável $D_{\Delta} = \dfrac{\mathfrak{C}}{\sim_{\Delta}}$, logo, se $[c_{\gamma}]$ e $[c_{\delta}]$ forem elementos de D_{Δ}, então $[c_{\gamma}] = [c_{\delta}] \Leftrightarrow c_{\gamma} \sim_{\Delta} c_{\delta} \Leftrightarrow c_{\gamma} = c_{\delta} \in \Delta$[10].

6 Enumerações distintas para a linguagem geram, obviamente, consistentes maximais distintos que contêm Γ.

7 Tomaremos os mundos possíveis como maximais, pois existem críticas sobre estados de coisas incompletos, como apresentado na subseção 2.5.1.

8 Para todo Γ consistente, podem existir diferentes Δ maximais que contêm Γ, pois são construídos com diferentes enumerações das fórmulas da linguagem.

9 É relação de equivalência, pois $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$ é linguagem clássica e a lógica subjacente a cada Δ é a lógica clássica.

10 D_{Δ} é a coleção dos objetos "existentes" na perspectiva de Δ.

b) Para cada $\Delta \in \Phi$, a construção do modelo canônico M_Δ é feita da seguinte forma:

Consideremos D_Δ o domínio do modelo (como construído em a)) - assumindo a propriedade de restrição ao domínio de quantificação (lógica de primeira ordem, que é tranferido para **FOS4**, como mostrado por Kishida; tal domínio será utilizado tanto para a atribuição de valores a variáveis, quanto para o escopo de atuação dos quantificadores da linguagem).

I. **Termos**

A) *Constantes:*

i. Se $c \in \mathfrak{C}$ (nova constante de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$) $\Rightarrow c^{M_\Delta} = [c]$;

ii. Se c for constante de $\mathcal{L}^\theta$, como vimos em 2. b), existe $c_j \in \mathfrak{C}$ tal que $c = c_j \in \Delta$ $\Rightarrow c^{M_\Delta} = [c_j]$[11].

B) *Símbolos funcionais:*

É teorema da lógica de primeira ordem $\forall x \exists y(y = x)$, portanto considerando $\varphi = \exists y(y = x)$ e a regra $MP + \forall x\varphi \supset \varphi[t/x]$, para $t = f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ termo apropriado e $(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ sequência de constantes, segue da construção de Δ que existe c constante tal que $\exists y(y = f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})) \supset (c = f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})) \in \Delta$; da maximalidade de Δ e da regra *MP*, segue que $c = f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in \Delta$[12].

Portanto, $f^{M_\Delta}([c_{i_1}], \ldots, [c_{i_n}]) = [c_i]$ se e somente se $c_i = f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in \Delta$[13].

C) *Interpretação de termos:*

Seja $\sigma \in D_\Delta^{Var(\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0})}$ uma atribuição de valores para as variáveis da linguagem. Definimos a interpretação de termos σ^*, para tal σ, por indução na complexidade do termo:

i. Para toda variável x: $\sigma^*(x) = \sigma(x)$;

ii. Para toda constante c: $\sigma^*(c) = c^{M_\Delta}$;

iii. Se f for símbolo funcional n-ário e $\bar{t}$ sequência de n termos: $\sigma^*(f(\bar{t}))$ =

[11] Notemos que a interpretação está bem definida, pois se $c = c_i$ e $c = c_j$ forem elementos de Δ, tem-se $c_i = c_j \in \Delta$, então $[c_i] = [c_j]$.

[12] Novamente, como f é funcional, se $c_j = f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ e $c_i = f(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$, então $c_i = c_j \in \Delta$ e $[c_i] = [c_j]$.

[13] Do fato de $\sim_\Delta$ ser uma relação de equivalência, mais o fato de Δ ser maximal, segue que esta definição independe da escolha dos representantes das classes de equivalência.

$f^{M_\Delta}(\sigma^*(\bar{t}))$.

Tal interpretação está bem definida pelo fato de que se t for termo de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$, sem variáveis livres, então $\sigma^*(t) = [c_j]$ se e somente se $t = c_j \in \Delta$.

II. **Predicados**

Seja R um símbolo de predicado n-ário da linguagem estendida $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$[14]. No modelo canônico temos $([c_{i_1}], \ldots, [c_{i_n}]) \in R^{M_\Delta}$ se e somente se $R(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in \Delta$.

Como usual na demonstração do teorema da completude, usando o modelo M_Δ, segue que para toda fórmula φ da linguagem estendida[15]:

$$M_\Delta \models \varphi \Leftrightarrow \Delta \vdash \varphi$$ [16]

4. É consequência do teorema da completude que para todo Γ conjunto consistente de fórmulas de $\mathcal{L}^{\theta}$, e para determinada fórmula φ, tem-se:

$$\text{Se } \Gamma \models \varphi \text{ então } \Gamma \vdash \varphi$$

Logo, se $\Gamma \models \varphi$, para Γ consistente[17], para todo $\Delta \in \Phi$ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$, tem-se $M_\Delta \models \varphi$ se e somente se $\forall \bar{x}\varphi \in \Delta$. Portanto:

$$\models \varphi \ (\varphi \text{ é válida}) \Leftrightarrow \forall \Delta : \Delta \in \Phi,\ M_\Delta \models \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi$$

7.1.1.2 Relações de Satisfação sobre Modelos Canônicos

Para a construção de uma interpretação fibrada para $\mathcal{L}$, precisamos da classe das relações de satisfação classica para a linguagem $\mathcal{L}^{\theta}$ (construídas via extensão $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$). Pretendo construir este fibrado com os modelos canônicos para os conjuntos consistentes e maximais de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$ - e a este fibrado denominarei de **modelo topo-$FOS4$ canônico enumerável**, mas para isso, estes modelos precisam ter domínios no máximo enumeráveis e disjuntos dois a dois.

Isto pode ser feito, devido ao seguinte fato:

Para todas as relações de satisfação clássica $(M_{\Delta_1}, \models^1)$ e $(M_{\Delta_2}, \models^2)$ tais que $D_{\Delta_1} \cap D_{\Delta_2} \neq \emptyset$, é possível construir um conjunto $D^*_{\Delta_2}$ equinumérico e disjunto de D_{Δ_2}, tal que $(M_{\Delta_2}, \models^2)$ é isomórfico a $(M_{\Delta_{2*}}, \models^{2*})$ e $|M_{\Delta_{2*}}| = D^*_{\Delta_2}$.

[14] R pode ser um predicado do reduto clássico de $\mathcal{L}$, assim como um símbolo de predicado introduzido pelas classes de equivalência das $FACNP(\mathcal{L})$.

[15] Para $\models$ uma relação de satisfação clássica sobre M_Δ.

[16] E se φ for sentença, então $\varphi \in \Delta$.

[17] O caso em que Γ não é consistente é trivial.

Justificativa: Para todo $\Delta \in \Phi$, $D_\Delta = \frac{\mathfrak{C}}{\sim_\Delta}$ é o domínio do modelo canônico M_Δ, e $(M_\Delta, \models)$ é a relação de satisfação clássica construída sobre tal $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$-estrutura. Como seu domínio é formado por classes de equivalência, é possível que para alguns consistentes maximais distintos, alguma classe de equivalência se repita em alguns domínios de diferentes estruturas construídas sobre tais elementos distintos de Φ.

Para resolver tal problema, basta indexarmos cada elemento $[c_i]$ de D_Δ por Δ, atualizando a definição nas construções anteriores da relação de satisfação sobre M_Δ pelos objetos $[c_i]_\Delta$[18]; denominemos estes novos domínios de D^*_Δ[19]. Então, há a relação de satisfação $(M^*_\Delta, \models^*)$ isomórfica a $(M_\Delta, \models)$.

Com esta definição, mesmo se consistentes $\Delta_1 \neq \Delta_2$ fossem tais que, para alguma constante c_i, fosse o caso que as classes de equivalência de $[c_i]$ em D_{Δ_1} e D_{Δ_2} fossem iguais, então os novos objetos $[c_i]_{\Delta_1}$ e $[c_i]_{\Delta_2}$ passam a ser distintos no maquinário formal, pois representam pares ordenados distintos.

Adotemos por $\mathcal{M}^\theta = \{(M^*_\Delta, \models^*) \mid \Delta \in \Phi\}$ a coleção de todas as relações de satisfação clássica construídas sobre os modelos canônicos para todo Δ consistente e maximal de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$, de domínios no máximo enumerável e disjuntos dois a dois, modelos estes cuja construção foi delineada anteriormente e cuja disjunção dos domínios das relações de satisfação já foi justificada. Dada esta assunção, passaremos a simplificar a notação e nos referirmos a estas relações de satisfação em $\mathcal{M}^\theta$ apenas por $(M_\Delta, \models)$.

Seja $\mathfrak{D} = \sum_{\Delta \in \Phi} D^*_\Delta$ a união de todos os domínios disjuntos das relações de satisfação clássica isomórficas às relações de satisfação obtidas a partir da construção dos modelos canônicos[20].

Observação: Para todo $\Delta \in \Phi$, seja $\kappa_\Delta = |D_\Delta| = |D^*_\Delta|$; assumindo a hipótese do contínuo (GCH), sabemos que $|\Phi| \leq \aleph_1$, embora todo $\kappa_\Delta \leq \aleph_0$, como discutimos anteriormente.

---

18 Formalmente, construímos cada novo domínio como pares ordenados em que a primeira coordenada é a classe de equivalência do quociente original e a segunda coordenada o Δ para o qual a relação de equivalência $\sim_\Delta$ construiu o espaço quociente. Neste caso, $[c_i]_\Delta$ seria uma abreviação para um elemento da forma $([c_i], \Delta)$, elemento de D^*_Δ, coleção destes pares ordenados. De fato, estes conjuntos são todos disjuntos dois a dois, pois se $D^*_{\Delta_1} \cap D^*_{\Delta_2} \neq \emptyset$, então existe elemento $([c_i], \Delta)$ comum aos dois conjuntos. Mas neste caso, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ e, portanto, $D_{\Delta_1} = D_{\Delta_2}$. Logo as classes de equivalências geradas por Δ_1 e Δ_2 são iguais e TODAS as primeiras coordenadas de TODOS os pares ordenados também são iguais, ou seja, $D^*_{\Delta_1} = D^*_{\Delta_2}$.

19 O isomorfismo é óbvio, pois estamos apenas renomeando uniformemente os elementos do domínio. Mais ainda, se existirem dois modelos canônicos M_{Δ_1} e M_{Δ_2} tais que $D_{\Delta_1} = D_{\Delta_2}$, i.e., os conjuntos quocientados $\frac{\mathfrak{C}}{\sim_{\Delta_1}}$ e $\frac{\mathfrak{C}}{\sim_{\Delta_2}}$ forem iguais, então $\Delta_1 = \Delta_2$ - pois os Δ's são maximais.

20 Embora as fórmulas de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ sejam enumeráveis, não é possível utilizar uma enumeração destas fórmulas para, com elas, apresentar um procedimento recursivo para a construção dos conjuntos D^*_Δ, isto segue da impossibilidade de exibirmos uma enumeração para Φ.

Seja $\kappa_\Phi = \sum_{\Delta\in\Phi} \kappa_\Delta$ um cardinal[21].

Portanto $\kappa_\Phi \leq \sum_{\Delta\in\Phi} \aleph_0 < \sum_{i<\aleph_2} \aleph_0 = \aleph_2{\cdot}\aleph_0 = \aleph_2$, um cardinal que limita κ_Φ, mostrando que nossa construção do dommínio universal $\mathfrak{D}$, como conjunto, está bem determinada[22].

7.1.2 Construção do Modelo Canônico para $FOS4$

Seja $\mathcal{M}^\theta$ a classe das relações de satisfação clássica, construídas sobre todos modelos canônicos que são $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$-estruturas, cujos domínios são no máximo enumeráveis e disjuntos dois a dois[23]; segue do lema 6.2.1 que se $(M_\Delta, \models) \in \mathcal{M}^\theta$ e $F((M_\Delta, \models)) = (M^*, \models^*)$, então $|M^*| = |M_\Delta|$, $||M^*|| \leq \aleph_0$ e $|M^*|^{Var(\mathcal{L}^\theta)} = |M_\Delta|^{Var(\mathcal{L})}$, logo, para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$:

$$M^* \models^*_\sigma \varphi \;\Leftrightarrow\; M_\Delta \models_\sigma \varphi^\theta$$

Do lema anteriormente citado concluímos que para esta $(M^*, \models^*)$ relação de satisfação clássica, no sentido estendido, e $(M', \models')$ uma relação de satisfação clássica em $\mathcal{M}^\theta$ tal que, para toda $\varphi \in \mathcal{L}$ for o caso que:

$$M^* \models^* \varphi \;\Leftrightarrow\; M' \models' \varphi^\theta$$

Então $F((M', \models')) = (M^*, \models^*)$ se e somente se $(M_\Delta, \models) = (M', \models')$ para algum Δ em Φ. Notemos que para cada $(M_\Delta, \models)$ existe uma única interpretação $[\![-]\!]^\theta_{M_\Delta}$ tal que, para $\psi \in For(\mathcal{L}^\theta)$, $M_\Delta \models \psi$ se e somente se $[\![\psi]\!]^\theta_{M_\Delta} = D^n_\Delta$.

A partir da bijeção F, construímos uma relação biunívoca entre $\mathcal{M}^\theta$ e a classe $\mathcal{M} = \{F((M_\Delta, \models)) = (M^*_\Delta, \models^*) \mid (M_\Delta, \models) \in \mathcal{M}^\theta\}$, subconjunto da classe de todas as relações de satisfação clássica, no sentido estendido, para $\mathcal{L}$, classe esta que caracteriza a lógica **FOS4**, dado o teorema da completude. Podemos assim estender a noção de interpretação fibrada $[\![-]\!]^\theta$, para fórmulas de $\mathcal{L}^\theta$, para uma interpretação $[\![-]\!]$ para as fórmulas de $\mathcal{L}$, da seguinte maneira[24]:

Se $\varphi \in For(\mathcal{L})$, então $[\![\varphi]\!] = [\![\varphi^\theta]\!]^\theta = [\![\varphi^\theta]\!]^\theta_{\aleph_0} = \sum_{M_\Delta\in\mathcal{M}^\theta} [\![\varphi^\theta]\!]^\theta_{M_\Delta}$.

[21] Aqui, $\sum$ é o símbolo usual para representar o somatório indexado.

[22] É importante ressaltarmos que a limitação do cardinal da linguagem $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ por $\aleph_0$ possibilita lidarmos com um "conjunto universal" para nosso modelo para **FOS4** que tem cardinalidade limitada por $\aleph_2$; notamos que quanto maior o cardinal da linguagem, mais rapidamente se torna complexa as operações conjuntistas para a construção deste domínio.

[23] Logo, esta será uma subclasse da classe de todas as relações de satisfação clássica. Esta assunção garante a estabilidade das relações de satisfação clássica, no sentido estendido, em relação à bijeção F e às estruturas de feixe-interpretação do teorema da completude, capítulo 6, para a lógica **FOS4**. A obtenção destes conjuntos disjuntos D_Δ, para todo $\Delta \in \Phi$, para a construção da interpretação fibrada, é necessária devido ao processo de heinkinização preguiçosa para as teorias de primeira ordem T^θ_κ.

[24] É preciso utilizar o teorema de Lowenhein-Skolem.

Sabemos que para φ fórmula com n variáveis livres, ela é $FOS4$-válida se e somente se $[\![\varphi]\!] = \mathfrak{D}^n$.

Logo, assumindo as topologias apropriadas, como discutido no capítulo anterior e na definição 6.3.3, sabemos que $(\pi, [\![-]\!])$ é uma feixe-interpretação para $\mathcal{L}$.

Para o modelo topo-$S4$ canônico da lógica modal proposicional, consideramos os "mundos possíveis" como a coleção de todos os $S4$-consistentes maximais, representando a totalidade dos "fatos" que compõem estes mundos. Todas as fórmulas proposicionais, na extensão de primeira ordem $\mathcal{L}$, são sentenças da linguagem.

Como podemos construir a estrutura canonica para uma semântica de **FOS4** e fazer o estudo de suas propriedades topológicas, assim como fizemos com o modelo topo-$S4$ canônico (capítulo 5)?

Consideremos $\Phi = \{\Gamma \mid \Gamma$ é conjunto de sentenças consistente maximal de $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}\}$ e $\Xi = \{\Delta \mid \Delta$ é conjunto de sentenças $FOS4$-consistente maximal de $\mathcal{L}_{\aleph_0}\}$.

Proposição 45. *Se para toda $\varphi \in For(\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0})$ for o caso que $M_{\Gamma_1} \models \varphi$ se e somente se $M_{\Gamma_2} \models \varphi$, então $\Gamma_1 = \Gamma_2$, para $(M_{\Gamma_1}, \models)$ e $(M_{\Gamma_2}, \models)$ em $\mathcal{M}^{\theta}$.*

Demonstração: Como os Γ's são conjuntos de sentenças consistentes maximais, sabemos que $\Gamma \vdash \varphi(\bar{x})$ se e somente se $\Gamma \vdash \forall \bar{x} \varphi$. Do teorema da completude (primeira ordem) temos que $M_\Gamma \models \varphi(\bar{x})$ se e somente se $\Gamma \vdash \varphi(\bar{x})$.

Por hipótese, para toda $\varphi \in For(\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0})$, $M_{\Gamma_1} \models \varphi$ se e somente se $M_{\Gamma_2} \models \varphi$. Portanto $\Gamma_1 \vdash \varphi$ se e somente se $\Gamma_2 \vdash \varphi$ (*).

Suponhamos que $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, então existe φ sentença tal que $\varphi \in \Gamma_1$ e $\varphi \notin \Gamma_2$, neste caso, $\Gamma_1 \vdash \varphi$ e $\Gamma_2 \vdash \neg\varphi$, segue da definição de modelo canônico que $M_{\Gamma_1} \models \varphi$ e $M_{\Gamma_2} \models \neg\varphi$; por outro lado, usando (*) segue que $M_{\Gamma_2} \models \varphi$ e $M_{\Gamma_2} \models \varphi$ (contradição, já que Γ_2 é consistente e M_{Γ_2} canônico).

Portanto $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

■

Observação. Notemos que em relação à tradução θ, temos os seguintes casos:

1) Se p for varivável proposicional de $\mathcal{L}$, então $p^{\theta} = p$. Se $R\bar{t}$ for fórmula atômica, para R predicado do reduto clássico, então $(R\bar{t})^{\theta} = R^{\theta}\bar{t}$;

2) Se $\varphi = \psi[\bar{t}/\bar{x}]$ para $\psi(\bar{x}) \in \Box_{min}(\mathcal{L})$, então $\varphi^\theta = [\psi](\bar{t})$, para $[\psi]$ um dos símbolos de predicados n-ários acrescentados à linguagem, em que n é o número de variáveis livres de ψ (portanto tamanho da sequência $\bar{t}$), denotando uma das classes de equivalência das fórmulas $\Box$-minimais, relativas às fórmulas de $FACNP(\mathcal{L})$.

Se φ for fechada, então temos duas possibilidades: $[\psi]$ é um predicado 0-ário, portanto sentença de $\mathcal{L}^\theta$, ou $[\psi]$ é um símbolo de predicado n-ário (tamanho da sequência $\bar{x}$), mas todos os termos $\bar{t}$ são livres de variáveis; em qualquer um dos casos, φ^θ é sentença de $\mathcal{L}^\theta$.

Se φ for aberta, existe alguma variável livre em algum termo de $\bar{t}$, logo φ^θ continua sendo aberta.

3) Se φ for uma fórmula de $\mathcal{L}$, então $(\exists\bar{x}\varphi)^\theta = \exists\bar{x}\varphi^\theta$.

Portanto, a tradução θ preserva as sentenças de $\mathcal{L}$ em sentenças de $\mathcal{L}^\theta$.

Por outro lado, todas as fórmulas de $\mathcal{L}$ são construídas, por indução na complexidade, a partir das fórmulas de $AC(\mathcal{L})$. Como θ é sobrejetora, todas as fórmulas de $\mathcal{L}^\theta$ podem ser construídas por indução sobre as fórmulas $\theta(AC(\mathcal{L}))$.

Estas observações nos permitem concluir que $\theta(Sent(A)) = Sent(\theta(A))$, para A conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$. por outro lado, se A for conjunto de sentenças de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$, então $\theta^{-1}(A)$ também é conjunto de sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$.

Lema 7.1.1. *Para todo conjunto Γ em Φ, tem-se que $\theta^{-1}(\Gamma)$ é um conjunto $FOS4$-consistente maximal de sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$.*

Demonstração: Seja Γ um conjunto consistente e maximal de sentenças de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ e φ^θ sentença, então $\Gamma \vdash \varphi^\theta$ se e somente se $\varphi^\theta \in \Gamma$.

Mas $\Gamma \subset Sent(\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0})$, portanto deve existir $\Delta_\Gamma \subset Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ tal que $\theta^{-1}(\Gamma) = \Delta_\Gamma$[25]. Da completude de **FOS4** temos que $\Gamma \vdash \varphi^\theta \Leftrightarrow \Delta_\Gamma \vdash_{FOS4} \varphi$ (ver 6.2.3), portanto $\theta^{-1}(\Gamma)$ é $FOS4$-consistente (pela consistência de Γ).

Suponhamos agora que $\theta^{-1}(\Gamma)$ não seja maximal. Existe φ sentença de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ tal que $\varphi \notin \theta^{-1}(\Gamma)$ e $\neg\varphi \notin \theta^{-1}(\Gamma)$.

Da completude de **FOS4** e da bijeção F, sabemos que se Γ é consistente (classicamente) e maximal, existe $(M_\Gamma, \models) \in \mathcal{M}^\theta$ relação de satisfação clássica baseada no modelo canônico para Γ tal que $F((M_\Gamma, \models)) = (M^*_\Gamma, \models^*) \in \mathcal{M}$; Como $M_\Gamma \models \Gamma$, então $M^*_\Gamma \models^* \theta^{-1}(\Gamma)$. Mas $(M^*_\Gamma, \models^*)$ é relação de satisfação clássica (sentido estendido), logo $M^*_\Gamma \models^* \varphi$ ou $M^*_\Gamma \models^* \neg\varphi$ - ou seja, $\theta^{-1}(\Gamma) \cup \{\varphi\}$ ou $\theta^{-1}(\Gamma) \cup \{\neg\varphi\}$ é $FOS4$-consistente, e somente um deles. Suponhamos, sem perda de generalidade, que seja a primeira união.

[25] Notemos que, do fato de θ não ser injetora, pode ser o caso que exista Δ^*_Γ não maximal tal que $\Delta^*_\Gamma \subsetneq \Delta_\Gamma$ e $\theta(\Delta^*_\Gamma) = \Gamma$.

Pelo teorema da completude e da bijeção F segue que $M_\Gamma \models \varphi^\theta$ e, portanto, $\Gamma \vdash \varphi^\theta$ $\Rightarrow$ (maximalidade) $\varphi^\theta \in \Gamma$, logo $\varphi \in \theta^{-1}(\Gamma)$ (contradição!). Portanto $\theta^{-1}(\Gamma)$ deve ser maximal.

■

Podemos estender estes resultados, de maneira dual, da seguinte forma:

Lema 7.1.2. *Para todo conjunto $\Delta \in \Xi$, o conjunto $\theta(\Delta)$ de sentenças da linguagem clássica de primeira ordem $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ é consistente e maximal.*

Demonstração: Segue da completude de **FOS4** e do lema 6.2.1 que se Δ for $FOS4$-consistente, então $\theta(\Delta)$ é (classicamente) consistente, e se $\Delta \vdash_{FOS4} \varphi$ então $\theta(\Delta) \vdash \varphi^\theta$.

Seja Δ um conjunto $FOS4$-consistente e maximal de sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ e φ uma sentença da linguagem. Então $\Delta \vdash_{FOS4} \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Delta$.

Suponhamos que $\theta(\Delta)$ não seja maximal, existe sentença $\varphi^\theta \in \mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ tal que $\varphi^\theta \notin \theta(\Delta)$ e $\neg\varphi^\theta \notin \theta(\Delta)$. Por outro lado, um e somente um dos conjuntos $\theta(\Delta) \cup \{\varphi^\theta\}$ e $\theta(\Delta) \cup \{\neg\varphi^\theta\}$ é consistente.

Tomemos, sem perda de generalidade, o conjunto $\theta(\Delta) \cup \{\varphi^\theta\}$ como consistente. Portanto, existe um modelo canônico M' para uma relação $(M', \models') \in \mathcal{M}^\theta$ tal que $M' \models' \theta(\Delta)$ e $M' \models' \varphi^\theta$.

Do teorema da completude para **FOS4** e da bijeção F, temos $F((M', \models')) = (M, \models) \in \mathcal{M}$, tal que $M \models \Delta$ e $M \models \varphi$, logo $\Delta \vdash_{FOS4} \varphi \Rightarrow \varphi \in \Delta$, já que Δ é $FOS4$-maximal. Portanto $\varphi^\theta \in \theta(\Delta)$ (contradição!). Logo $\theta(\Delta)$ é maximal.

■

Concluímos que para todo Δ conjunto $FOS4$-consistente e maximal de sentenças de $\mathcal{L}$, $\theta(\Delta)$ é um conjunto consistente maximal de sentenças de $\mathcal{L}^\theta$. Notemos que a função θ é uma sobrejeção, embora não seja injetora. Precisamos aprimorar nossas construções para demonstrar que há uma bijeção entre os conjuntos Φ e Ξ.

Lema 7.1.3. *Existe uma bijeção entre $\{\Delta \mid \Delta \text{ é } FOS4 - consistente\ maximal\}$ e $\{\theta(\Delta) \mid \Delta \text{ é } FOS4 - consistente\ maximal\}$.*

Demonstração: Definamos $\Theta : \wp(For(\mathcal{L}_{\aleph_0})) \to \wp(For(\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}))$ função, tal que $\Theta(X) = \theta(X)$.

Do lema 6.2.3, se Δ for conjunto $FOS4$-consistente - não necessariamente maximal - então $\Delta \vdash_{FOS4} \varphi$ se e somente se $\theta(\Delta) \vdash \varphi^\theta$[26] (**).

[26] Notemos que φ pode não ser única, i.e., pode existir $\psi \neq \varphi$ tal que $\psi^\theta = \varphi^\theta$.

Consideremos então $\Xi = \{\Delta \mid \Delta \text{ é } FOS4 - \text{consistente maximal}\}$.

Como $\Xi \subset \wp(For(\mathcal{L}_{\aleph_0}))$, então $\Theta(\Xi) \subset \wp(For(\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}))$ tal que $\Theta(\Xi) = \{\theta(\Delta) \mid \Delta$ é $FOS4-$consistente maximal$\}$, conjunto imagem dos consistentes e maximais de sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ por Θ. Segue do lema anterior que $\Theta(\Xi)$ é uma coleção de conjuntos consistente maximais de sentenças.

A restrição $\Theta\restriction_{\Xi}: \Xi \to \Theta(\Xi)$ é, obviamente, sobrejetora. Mostremos que é injetora, portanto uma bijeção.

Suponhamos que $\Theta\restriction_{\Xi}$ não seja injetora; então existem $\Delta_1 \neq \Delta_2$ tais que $\Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_1) = \Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_2)$.

Como $\Delta_1 \neq \Delta_2$ são coleções de sentenças $FOS4$-consistentes e maximais, deve existir sentença $\varphi \in For(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ tal que $\varphi \in \Delta_1$ e $\neg\varphi \in \Delta_2$, logo $\varphi \notin \Delta_2$.

Portanto $\Delta_1 \vdash_{FOS4} \varphi$ e $\Delta_2 \vdash_{FOS4} \neg\varphi$. Por (**) temos $\theta(\Delta_1) \vdash \varphi^{\theta}$ e $\theta(\Delta_2) \vdash \neg\varphi^{\theta}$, ou seja, $\Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_1) \vdash \varphi^{\theta}$ e $\Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_2) \nvdash \varphi^{\theta}$. (lema anterior)

Mas φ^{θ} é sentença. Como $\theta(\Delta_1)$ e $\theta(\Delta_2)$ são consistentes e maximais, segue que $\varphi^{\theta} \in \Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_1)$ e $\varphi^{\theta} \notin \Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_2)$, ou seja, $\Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_1) \neq \Theta\restriction_{\Xi}(\Delta_2)$ (contradição).

Portanto $\Theta\restriction_{\Xi}$ é injetora - de fato, bijetora.

■

Teorema 7.1.2. *Há uma bijeção entre as coleções $\Xi = \{\Delta \mid \Delta$ é $FOS4$-consistente maximal $\}$ e $\Phi = \{\Gamma \mid \Gamma$ é (classicamente) consistente maximal $\}$, construídos sobre as sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ e $\mathcal{L}^{\theta}_{\aleph_0}$, respectivamente.*

Demonstração: Do lema 7.1.3 vimos que existe $\Theta\restriction_{\Xi}: \Xi \to \Theta(\Xi)$ bijeção; do lema 7.1.2 temos $\Theta(\Xi) = \{\theta(\Delta) \mid \Delta \text{ é } FOS4\text{-consistente maximal } \} \subset \Phi$.

Para demonstrar o teorema, basta verificarmos o outro lado da inclusão, nos levando a concluir que $\Theta\restriction_{\Xi}$ é, de fato, a bijeção procurada.

Seja então $\Gamma \in \Phi$, do lema 7.1.1 temos que $\theta^{-1}(\Gamma) \in \Xi$, ou seja, $\Theta\restriction_{\Xi}(\theta^{-1}(\Gamma)) \in \Theta(\Xi)$. Mas $\Theta\restriction_{\Xi}(\theta^{-1}(\Gamma)) = \theta(\theta^{-1}(\Gamma)) = \Gamma$; disto seque que $\Phi = \Theta(\Xi)$.

■

Proposição 46. *Se para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$ for o caso que $M_{\Delta_1} \models \varphi$ se e somente se $M_{\Delta_2} \models \varphi$, então $\Delta_1 = \Delta_2$, para $(M_{\Delta_1}, \models)$ e $(M_{\Delta_2}, \models)$ em $\mathcal{M}$.*

Demonstração: Como os Δ's são conjunto de sentenças $FOS4$-consistentes maximais, sabemos que $\Delta \vdash_{FOS4} \varphi$ se e somente se $\theta(\Delta) \vdash \varphi^{\theta}$. Do teorema anterior temos que existe um único $\Gamma \in \Phi$ tal que $\theta(\Delta) = \Gamma$; segue da bijeção F que $F((M_{\Gamma}, \models)) = (M_{\Delta}, \models)$ é relação de satisfação em $\mathcal{M}$, e temos $M_{\Delta} \models \varphi$ se e somente se $M_{\Gamma} \models \varphi^{\theta}$.

Por hipótese, para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$, $M_{\Delta_1} \models \varphi$ se e somente se $M_{\Delta_2} \models \varphi$. Portanto $\Delta_1 \vdash_{FOS4} \varphi$ se e somente se $\Delta_2 \vdash_{FOS4} \varphi$ (*).

Da completude para **FOS4** segue que $\Gamma_1 \vdash \varphi^\theta$ se e somente se $\Gamma_2 \vdash \varphi^\theta$. Em primeira ordem, da consistência maximal dos Γ's segue que $\Gamma_1 = \Gamma_2$, logo $\theta^{-1}(\Gamma_1) = \theta^{-1}(\Gamma_2)$, i.e., $\Delta_1 = \Delta_2$, já que $\theta^{-1}(\Gamma_i) = \Delta_i$.

$\blacksquare$

Estes resultados mostram que para todos os Γ classicamente consistentes e maximais de sentenças de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$, M_Γ, o modelo canônico para este conjunto, e $(M_\Gamma, \models)$, relação de satisfação clássica construída sobre tal modelo, existe um e somente um único Δ $FOS4$-consistente maximal e somente uma relação de satisfação clássica no sentido estendido $(M_\Delta, \models) = F((M_\Gamma, \models))$, cujo domínio do modelo-base é $|M_\Delta| = |M_\Gamma|$[27], determinando portanto uma relação biunívoca entre as coleções de conjuntos de sentenças $FOS4$-consistentes e maximas de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ e os conjuntos de sentenças consistentes maximais de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$.

Portanto, semanticamente sabemos que existe F bijeção entre as relações de satisfação em $\mathcal{M}^\theta$ e as relações de satisfação clássica, no sentido estendido, em $\mathcal{M}$; sintaticamente existe a bijeção entre a coleção Φ de consistentes e maximais clássicos de sentenças de $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$ e Ξ, coleção dos conjuntos de sentenças $FOS4$-consistentes maximais.

A interpretação fibrada sobre a coleção $\mathcal{M}^\theta$ reflete a estrutura interpretativa das fórmulas de $\mathcal{L}$ em relação a todas as relações de satisfação clássica de $\mathcal{M}$, no sentido estendido, quando $\Box$ é interpretado como o operador interior - definição 6.3.3.

Mais ainda, podemos assumir $W = \{w_\Gamma \mid w_\Gamma = \Gamma \mid \Gamma \in \Phi\} = \mathfrak{D}^0$, ou seja, cada ponto $w \in W$ pode ser considerado - na estrutura fibrada - como a coleção de todas as sentenças satisfeitas pelo modelo canônico de Γ, e há uma bijeção entre W e o conjunto de todas as coleções de sentenças satisfeitas por um conjunto Δ $FOS4$-consistente e maximal de sentenças de $\mathcal{L}$, já que se $\Delta \in \Xi$, então $\Delta = \theta^{-1}(\Gamma)$ para um único $\Gamma \in \Phi$. Isto justifica denominarmos W como o conjunto de todos os "mundos possíveis" de nosso modelo topo-$FOS4$ canônico enumerável, pois cada um deles representa a coleção de todos os "fatos" (sentenças da linguagem) que compõem este mundo.

Sejam $\mathcal{M}^\theta$ a classe de relações de satisfação clássica construídas sobre os modelos canônicos para todo consistente e maximal em Φ, de domínios no máximo enumeráveis e disjuntos dois a dois, como construída anteriormente, e $W = \{w_\Gamma \mid w_\Gamma = \Gamma \mid \Gamma \in \Phi\}$.

[27] Considerando as construções em que nos novos modelos os universos são pares ordenados em que a segunda coordenada é um conjunto consistente e maximal.

Existe $\pi : \mathfrak{D} \to W$ sobrejeção tal que $\pi(a) = w_\Gamma$ se e somente se $a \in D_\Gamma$, para $\mathfrak{D} = \sum_{\Gamma \in \Phi} D_\Gamma$. Lembrando que $a \in \mathfrak{D}$ se e somente se $a = [c_i]_\Gamma$ para uma constante $c_i \in \mathfrak{C}$ e um único $\Gamma \in \Phi$.

Sabemos que para φ^θ sentença, $M_\Gamma \models \varphi^\theta$ se e somente se $\varphi^\theta \in \Gamma$.

Definimos a interpretação para a fórmula $\varphi(\bar{x}) \in For(\mathcal{L})$ por $[\![\bar{x} \mid \varphi]\!] = \sum_{M \in \mathcal{M}^\theta} [\![\bar{x} \mid \varphi^\theta]\!]^\theta_M$.

Segue da proposição 6.3.1 que $(\pi, [\![-]\!])$ é uma interpretação fibrada. Em consonância com a definição 6.3.3 e teorema 6.3.1 é uma feixe-interpretação.

Definição 7.1.1. *Denominaremos de* ***modelo topo-****FOS*4 ***canônico enumerável*** *a sequência* $\mathfrak{M} = (W, \mathfrak{D}, \pi, \{\{c^{M_\Gamma}\}_{\Gamma \in \Phi}\}, \{\{f^{M_\Gamma}\}_{\Gamma \in \Phi}\}, \{\{R^{M_\Gamma}\}_{\Gamma \in \Phi}\})$.

Segue da definição anterior e do teorema da completude para **FOS4** que para toda $\varphi \in For(\mathcal{L})$: $\vdash_{FOS4} \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!] = \mathfrak{D}^n$.

Temos que $\mathfrak{D}$ é a coleção de todos os *possibilia* - objetos possíveis em algum mundo possível de W. Logo, a "estrutura" topológica da lógica **FOS4** depende tanto dos Δ $FOS4$-consistentes maximais (portanto de W - dado o teorema 7.1.2), quanto da estrutura topológica de $\mathfrak{D}$, já que este é *espaço total* do fibrado do modelo canônico para **FOS4**, sendo W seu *espaço base* - ver Apêndice B.

7.1.3 Estrutura Topológica de $FOS4$

O modelo canônico para **FOS4** depende da sobrejeção $\pi : \mathfrak{D} \to W$, em que $(\mathfrak{D}, \pi)$ é fibrado e $W = \mathfrak{D}^0$; considerando as topologias $\tau_{\mathfrak{D}^n}$ (teorema de completude), π é contínua, assim como a interpretação de termos (constantes e símbolos funcionais). A interpretação dos símbolos relacionais e de fórmulas abertas depende da estrutura em $\mathfrak{D}$, enquanto a interpretação das sentenças da linguagem depende da coleção de conjuntos de sentenças $FOS4$-consistente maximais, ou seja, dos resultados da seção anterior, de W. Por esta razão começaremos a estudar a estrutura topológica de (W, τ) para uma topologia τ apropriada.

7.1.3.1 Estrutura Topológica em W

Do teorema da completude para **FOS4** sabemos que existe uma topologia apropriada para W, de modo a interpretarmos adequadamente as fórmulas modalizadas (por $\Box$) por meio da operação topológica de interior, i.e., o espaço base do fibrado relaciona-se univocamente com a coleção $\mathcal{M}^\theta$, pois baseamos a construção do modelo canônico por W, formado pelos conjuntos maximais e consistentes de sentenças da linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}^\theta_{\aleph_0}$.

Segue do teorema 7.1.2 que existe uma bijeção entre as coleções de conjuntos de sentenças classicamente consistentes e maximais (Φ) e a de conjuntos de sentenças $FOS4$-consistentes e maximais (Ξ); a proposição 45 evidencia uma bijeção natural entre Φ e $\mathcal{M}^{\theta}$[28], enquanto pela proposição 46 existe uma bijeção natural entre $\mathcal{M}$ e Ξ; por fim, há a bijeção F entre as relações de satisfação clássica de $\mathcal{M}^{\theta}$ em $\mathcal{M}$ que, por construção, têm domínios dois a dois disjuntos, e tal bijeção pode ser transferida para os modelos canônicos dos cojuntos em Φ e Ξ.

Seja $W' = \{w_\Delta \mid w_\Delta = \Delta \in \Xi\}$.

Para aproveitarmos o estudo topológico do modelo topo $S4$-canônico que realizamos no capítulo 5, utilizarei o fato da existência de todas estas bijeções apontadas para identificarmos as relações de satisfação construídas sobre os modelos canônicos em $\mathcal{M}^{\theta}$ com os elementos em W - para simplificarmos a notação, tomaremos cada w_Γ em W como o representante do modelo canônico M_Γ para uma única relação de satisfação clássica $(M_\Gamma, \models)$ em $\mathcal{M}^{\theta}$. Similarmente, tomaremos cada w_Δ em W' como o representante do único modelo canônico M_Δ, para Δ conjunto de sentenças $FOS4$-consitente e maximal. Mais ainda, notemos que por nossa construção - ver teorema 45 - cada M_Δ é unicamente determinado por uma relação de satisfação clássica em $\mathcal{M}^{\theta}$.

Por isso, em similitude ao que foi realizado no capítulo 6 - omitindo as bijeções naturais acima identificadas, para simplificação da notação - podemos assumir:

a) $B^0_\varphi = [\![\Box\varphi]\!] = \{w_\Delta \in W' \mid M_\Delta \models \varphi\}$, para toda $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$[29];

b) $\mathfrak{B}^0 = \{B^0_\varphi \mid \varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})\}$;

Segue da proposição 37 que $\tau' = \{(\bigcup_{\varphi \in A} B^0_\varphi)_{A \subset Con_{FOS4}(Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0}))}\}$ é topologia para o espaço (W', τ'), já que $\mathbf{S4} \subset \mathbf{FOS4}$ - considerando $A \subset Con_{FOS4}(Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0}))$ uma coleção $FOS4$-consistente de sentenças.

De fato, isto é possível, pois para as fórmulas em $Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, vale em **FOS4** α-equivalência e f-equivalência, já que em **FOS4** herdamos boas propriedades da lógica clássica de primeira ordem, como discutido por Kishida em (KISHIDA, 2011). Porém, notemos que não são validas as formas prenex em **FOS4**, já que para estabelecermos essas relações, $\Box$ transforma-se em um novo símbolo de predicado (lógica clássica) para as fórmulas $\Box$-minimais.

[28] A bijeção é natural, dado que o outro lado da implicação é imediato, pois se $\Gamma_1 = \Gamma_2$, então $M_{\Gamma_1} \models \varphi$ se e somente se $M_{\Gamma_2} \models \varphi$, já que $(M_{\Gamma_1}, \models) = (M_{\Gamma_2}, \models)$.

[29] Notemos que para toda φ sentença de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$, $M_\Delta \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Delta$, para $\Delta \in \Xi$.

Para toda sentença da linguagem, pela construção recursiva, sabemos que φ pode ser decomposta por subfórmulas que formam nós cumulativos, construindo uma árvore que se inicia com fórmulas atômicas e termina em φ. Digamos que uma subfórmula é **imediata** de φ se estiver no nó imediatamente inferior à ponta da árvore de composição de φ.

Definição 7.1.2. *Uma sentença φ em $Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ será nomeada **sentença elementar** se for $FOS4$-equivlente a uma fórmula da forma:*

$\exists x\varphi$, para φ fórmula com no máximo uma variável livre (no caso x[30]) e não for o caso que todas as subfórmulas imediatas de φ sejam sentenças.

Seja $Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ a coleção de sentenças elementares da linguagem modal quantificada.

Observação 1. Se φ for uma $\mathcal{L}$-sentença, sabemos que ela é da forma:

a. $\exists x\psi$, em que ψ ou é uma sentença ou fórmula com no máximo x como variável livre (aqui, x é arbitrária).

b. $\neg\psi$, em que ψ é sentença.

c. $\psi_1 \wedge \psi_2$, em que $\psi_1,\ \psi_2$ são sentenças.

d. $\Box\psi$, em que ψ é sentença.

Portanto, por indução na complexidade das fórmulas, toda sentença de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ pode ser escrita, por recursão, com os símbolos $\neg$, $\wedge$, $\Box$, a partir das sentenças elementares.

Definição 7.1.3. *Consideremos $\sim_E$ relação sobre $Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ tal que $\varphi \sim_E \psi \Leftrightarrow \vdash_{FOS4} \varphi \equiv \psi$. Obviamente, $\sim_E$ é relação de equivalência.*

Da definição anterior, existe o conjunto:

$$\frac{Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})}{\sim_E} = \{[\varphi] \mid \varphi \in Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})\}$$

Definição 7.1.4. *Definamos $L^{\Box}_{\aleph_0} = \{\frac{Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})}{\sim_E}, \neg, \wedge, \Box\}$, linguagem enumerável - do tipo modal proposicional.*

Observação 2. Para toda $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, temos:

i. Se $\varphi \in Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ então $[\varphi] \in L^{\Box}_{\aleph_0}$.

ii. Se φ é equivalente a fórmula da forma $\neg\psi$, para ψ sentença elementar, então $\varphi \notin [\varphi]$, denotemos $[\varphi]^c =_{df} \neg[\varphi]$.

[30] Embora não sendo necessário, vimos pelas propriedades de **FOS4** que é possível renomear todas as variáveis da fórmula para que seja a variável x a última variável a ser ligada.

iii. Se φ é equivalente a fórmula da forma $\psi_1 \wedge \psi_2$, para ψ_j sentença elementar, logo $\varphi \in [\psi_1] \cap [\psi_2]$, denotemos $[\psi_1] \cap [\psi_2] =_{df} [\psi_1] \wedge [\psi_2]$.

iv. Se φ é equivalente a fórmula da forma $\Box\psi$, para ψ sentença elementar, logo $\varphi \in int([\psi])$, denotemos $int([\psi]) =_{df} \Box[\psi]$ ($FOS4$-completude).

v. Da observação 1., temos que toda sentença de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ pode ser escrita, recursivamente, a partir dos símbolos de $L^{\Box}_{\aleph_0}$.

Definição 7.1.5. *Seja $T : Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0}) \to For(L^{\Box}_{\aleph_0})$ dada por:*

1) Se $\varphi \in Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, então $T(\varphi) = [\varphi]$;

2) Se $\varphi \in Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, então $T(\neg\varphi) = \neg[\varphi]$;

3) Se φ_1 e φ_2 forem fórmulas em $Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, então $T(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = [\varphi_1] \wedge [\varphi_2]$;

4) Se $\varphi \in Sent_E(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, então $T(\Box\varphi) = \Box T(\varphi) = \Box[\varphi]$;

5) Pela observação 2., segue por indução sobre a complexidade das sentenças que:

a. Se $\varphi = \neg\psi$ e ψ for sentença, então $T(\varphi) = \neg T(\psi)$;

b. Se $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ e ψ_j forem sentenças, então $T(\varphi) = T(\psi_1) \wedge T(\psi_2)$;

c. Se $\varphi = \Box\psi$ e ψ for sentença, então $T(\varphi) = \Box T(\psi)$.

A aplicação T é una função sobrejetora que relaciona as sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ com as fórmulas da nova linguagem criada.

Obviamente, dada as definições dos conectivos nas duas linguagens, temos $T(\varphi \supset \psi) = T(\varphi) \supset T(\psi)$.

Proposição 47. *Para todo Δ conjunto $FOS4$-consistente e maximal de sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$, existe um único conjunto $T(\Delta)$ de fórmulas de $L^{\Box}_{\aleph_0}$, $S4$-consistente e maximal, tal que:*

$$\varphi \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad T(\varphi) \in T(\Delta)$$

Demonstração: De fato:

1) Para toda sentença φ $FOS4$-teorema, $\varphi \in \Delta$, para todo $\Delta \in \Phi$, da consistência maximal segue que $\Box\varphi \in \Delta$, ou seja, $T(\varphi) \in T(\Delta)$ para todo Δ, assim como $T(\Box\varphi)$.

2) Se $T(\varphi) \supset T(\psi) \in T(\Delta)$ e $T(\varphi) \in T(\Delta)$, então $\varphi \supset \psi \in \Delta$, assim como $\varphi \in \Delta$, ou seja, $\psi \in \Delta$, logo $T(\psi) \in T(\Delta)$.

3) Para toda sentença φ $FOS4$-teorema, $\varphi \in \Delta$, i.e., $T(\varphi) \in T(\Delta)$ para todo Δ, ou seja, para quaisquer sentenças φ e ψ, tem-se:

i. $\Box T(\varphi) \supset \Box\Box T(\varphi) \in T(\Delta)$;

ii. $\Box T(\varphi) \supset T(\varphi) \in T(\Delta)$;

iii. $\Box(T(\varphi) \supset T(\psi)) \supset (\Box T(\varphi) \supset \Box T(\psi)) \in T(\Delta)$;

Se $T(\varphi) \in T(\Delta)$, para todo Δ, então $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ é elemento de todo Δ. Mais, se ψ for tal que $\vdash_{FOS4} \varphi \equiv \psi$, então $T(\psi)$ também é elemento de $T(\Delta)$.

Portanto, a lógica caracterizada pela coleção dos conjuntos $T(\Delta)$, para todo $\Delta \in \Phi$, é a lógica **S4** - considerando 1, 2 e 3.

$T(\Delta)$ é um conjunto maximal. De fato:

Suponhamos que não seja o caso, então um dos casos podem ocorrer:

i. Existe φ sentença tal que $T(\varphi)$ e $T(\neg\varphi)$ não são elementos de $T(\Delta)$ para algum Δ. Neste caso, tem-se que φ e $\neg\varphi$ não são elementos de Δ;

ii. Existe $\psi_1 \wedge \psi_2 \in \Delta$ sentença tal que $T(\psi_1 \wedge \psi_2) \in T(\Delta)$, para algum Δ, e $T(\psi_i) \notin T(\Delta)$ para algum $i = \{1, 2\}$, logo $\psi_i \notin \Delta$.

Obviamente, por i. ou ii., temos uma contradição, já que Δ são todos maximais.

Por fim, não existe $T(\Delta)$ caracterizado por dois Δ's distintos. De fato, suponhamos que exista Δ_1 distinto de Δ_2 tais que $T(\Delta_1) = T(\Delta_2)$.

Se este for o caso, para qualquer φ sentença de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ tem-se $T(\varphi) \in T(\Delta_1)$ se e somente se $T(\varphi) \in T(\Delta_2)$, neste caso, para toda sentença ψ, se $\vdash_{FOS4} \varphi \equiv \psi$ tem-se $\psi \in \Delta_1$ se e somente se $\psi \in \Delta_2$, ou seja, $\Delta_1 = \Delta_2$ - o que contradiz a hipótese.

■

Essa equivalência entre os conjuntos $FOS4$-consistentes e maximais de sentenças de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ e os conjuntos $S4$-consistentes e maximais de fórmulas de $L^{\Box}_{\aleph_0}$, linguagem de estrutura proposicional, nos permite estender para (W', τ') os resultados topológicos obtidos para o modelo topo-$S4$ canônico[31].

Proposição 48. *Se em w_1 e w_2, elementos de W', todas as fórmulas modalizadas da forma $\Box\varphi$, com $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, forem coincidentes, então $w_1 = w_2$.*

Ver proposição 15. Neste caso, aplicamos para toda $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, já que cada w_i corresponde a uma única configuração consistente e maximal de elementos de $Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$.

Teorema 7.1.3. *O espaço (W', τ') tem base enumerável.*

[31] Basta usar, para toda φ sentença de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$, a coleção de fórmulas $T(\varphi)$ nos $T(\Delta)$ $S4$-consistentes maximais.

Ver teorema 5.3.1.

Teorema 7.1.4. *O espaço* (W', τ') *é* T_0*.*

Ver teorema 5.3.2.

Teorema 7.1.5. *O espaço* (W', τ') *é* T_1*.*

Ver teorema 5.3.3.

Teorema 7.1.6. *O espaço* (W', τ') *é um espaço separável.*

Ver teorema 5.3.4.

Teorema 7.1.7. *O espaço* (W', τ') *é denso-em-si-mesmo.*

Ver teorema 5.3.5.

Teorema 7.1.8. *O espaço* (W', τ') *é Hausdorff.*

Ver teorema 5.3.6.

Teorema 7.1.9. *O espaço* (W', τ') *é compacto.*

Ver teorema 5.3.7.

Teorema 7.1.10. *O espaço* (W', τ') *é normal.*

Ver teorema 5.3.8.

Teorema 7.1.11. *O espaço* (W', τ') *é regular.*

Ver teorema 5.3.9.

Teorema 7.1.12. *O espaço* (W', τ') *é metrizável.*

Ver teorema 5.3.10.

Teorema 7.1.13. *O espaço* (W', τ') *é não enumerável.*

Ver teorema 5.3.11.

Teorema 7.1.14. *O espaço* (W', τ') *é localmente compacto.*

Ver teorema 5.3.12.

Teorema 7.1.15. *Todas as vizinhanças abertas de* (W', τ') *são conjuntos não enumeráveis.*

Ver teorema 5.3.13.

Teorema 7.1.16. *O espaço (W', τ') é desconexo.*

Ver teorema 5.3.14.

Teorema 7.1.17. *O espaço (W', τ') é totalmente limitado.*

Ver proposição 23.

Mostremos que esta estrutura topológica pode ser transferida para uma estrutura topológica baseada sobre W, elemento do modelo topo-$FOS4$ canônico enumerável.

Consideremos a função

$$H : W \to W'$$
$$w_\Gamma \mapsto w_\Delta \ , \ \Delta = \theta^{-1}(\Gamma)$$

Lema 7.1.4. *A função H é uma bijeção.*

Demonstração: Segue do teorema 7.1.2 e das proposições 45 e 46.

■

Definição 7.1.6. *Seja $\breve{\mathfrak{B}} = \{\breve{B}_\varphi \ | \breve{B}_\varphi = H^{-1}(B^0_\varphi)$ para toda $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})\}$ uma família de subconjuntos de W.*

Teorema 7.1.18. *A família $\breve{\mathfrak{B}}$ é base para uma topologia τ sobre W .*

Demonstração: Seja $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, temos que B^0_φ é um dos elementos básicos da topologia τ'.

Portanto, $\breve{B}_\varphi = H^{-1}(B^0_\varphi) = H^{-1}([\![\Box\varphi]\!]) = H^{-1}(\{w_\Delta \mid \Box\varphi \in w_\Delta\}) = \{w_\Gamma \in W \mid (\Box\varphi)^\theta \in w_\Gamma\}$ - pois $\Box\varphi$ e $(\Box\varphi)^\theta$ são sentenças.

De fato, $\breve{\mathfrak{B}}$ é base para uma topologia, pois:

I) Seja $\top \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$, então $[\![\Box\top]\!] = [\![\top]\!] = W'$, ou seja:

$$\breve{B}_\top = H^{-1}(W') = W$$

Logo, para todo $w \in W$ temos $w \in \breve{B}_\top$.

II) Sejam φ e ψ sentenças conjuntamente satisfatíveis de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$ não $FOS4$-equivalentes, logo $\breve{B}_\varphi \neq \breve{B}_\psi$ e existe $w_\Gamma \in \breve{B}_\varphi \cap \breve{B}_\psi$.

Temos então que $(\Box\varphi)^\theta \in w_\Gamma$ e $(\Box\psi)^\theta \in w_\Gamma$, logo podemos concluir, da maximalidade de w_Γ, que $(\Box\varphi)^\theta \wedge (\Box\psi)^\theta \in w_\Gamma$, Porém, da definição da tradução θ temos $(\Box\varphi)^\theta \wedge (\Box\psi)^\theta = (\Box\varphi \wedge \Box\psi)^\theta$.

Mais ainda, temos $\vdash_{FOS4} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \equiv \Box(\varphi \wedge \psi)$ e da completude temos que $\vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi)^\theta \equiv (\Box(\varphi \wedge \psi))^\theta$, logo, a maximalidade de w_Γ nos permite concluir novamente que $(\Box(\varphi \wedge \psi))^\theta \in w_\Gamma$, i.e. $w_\Gamma \in \breve{B}_{\varphi\wedge\psi}$ e $\breve{B}_{\varphi\wedge\psi} \subset \breve{B}_\varphi \cap \breve{B}_\psi$.

Da definição de base, $\breve{\mathfrak{B}}$ é base para a topologia $\tau = \{(\bigcup_{\varphi\in A} \breve{B}_\varphi)_{A\subset Con_{FOS4}(Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0}))}\}$.

Portanto, temos que (W, τ) é um espaço topológico.

■

Teorema 7.1.19. *A bijeção $H : (W, \tau) \to (W', \tau')$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: Por construção, para toda $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$ temos que $H^{-1}(B^0_\varphi)$ é um aberto básico de (W, τ), segue do teorema B.1.5 (apêndice B) que H é contínua.

Seja então

$$H^{-1} : W' \to W$$
$$w_\Delta \mapsto w_\Gamma \ , \ \Gamma = \theta(\Delta)$$

A função inversa H^{-1} está bem definida, já que H é uma bijeção (teorema 7.1.2).

Notemos que para toda $\varphi \in Sent(\mathcal{L}_{\aleph_0})$: $(H^{-1})^{-1}(\breve{B}_\varphi) = (H^{-1})^{-1}(\{w_\Gamma \in W \mid M_\Gamma \models (\Box\varphi)^\theta\}) = \{w_\Delta \in W' \mid M_\Delta \models \Box\varphi$ para $\Delta = \theta^{-1}(\Gamma)$ e $(\Box\varphi)^\theta \in \Gamma\} = [\![\Box\varphi]\!] = B^0_\varphi$, ou seja, H^{-1} é contínua.

■

Deste teorema segue que todas as propriedades topológicas de (W', τ') anteriormente listadas são também propriedades de (W, τ), espaço base do fibrado que define o modelo topo $FOS4$-canônico.

7.1.3.2 Estrutura Topológica em $\mathfrak{D}$

Consideremos agora a estrutura em $\mathfrak{D}$ com a topologia $\tau_{\mathfrak{D}}$. Primeiramente, vimos que (W, τ) é espaço T_1, portanto todo $w_\Gamma \in W$ é fechado. Como π é contínua, segue que $\pi^{-1}(W - \{w_\Gamma\})$ é um aberto de $\mathfrak{D}$, logo $\mathfrak{D} - \pi^{-1}(W - \{w_\Gamma\}) = D_\Gamma$ é fechado. Ou seja, o conjunto de todos os objetos "existentes" na configuração consistente e maximal w_Γ é um conjunto topologicamente fechado. Além disso, (W, τ) é um espaço denso-em-si-mesmo, ou seja, para nenhum $w \in W$ o conjunto $\{w\}$ é aberto; como π é aplicação aberta e contínua, D_Γ não pode ser aberto em $\mathfrak{D}$, para nenhum $\Gamma \in \Phi$.

Por outro lado, sabemos que $\tau_{\mathfrak{D}}$ é gerada por $\mathfrak{B}^1 = \{B^1_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{L}_{\aleph_0}\}$, para $\varphi(x)$ fórmula com uma variável livre, em que $B^1_\varphi = [\![x \mid \Box\varphi]\!] = \sum_{M\in\mathcal{M}^\theta} [\![x \mid (\Box\varphi)^\theta]\!]^\theta_M$.

Seja $\varphi := (x = c)$ fórmula para alguma constante de $\mathcal{L}_{\aleph_0}$; para cada $\Gamma \in \Phi$ existe um único $a \in \mathfrak{D}$ tal que $a = c^{M_\Gamma}$ e $a = [c_i]_\Gamma$ para alguma $c_i \in \mathfrak{C}$. Sabemos que $[c_i]_\Gamma = \{c_j \in \mathfrak{C} \mid c_j^{M_\Gamma} = [c_i]_\Gamma\}$.

Sabemos também que $\vdash_{FOS4} \Box(x = c) \equiv (x = c)$. Então $B^1_{x=c} = [\![x \mid \Box(x = c)]\!] = [\![x \mid (x = c)]\!] = \sum_{M \in \mathcal{M}^\theta} [\![x \mid (x = c)^\theta]\!]^\theta_M$. Mas $(x = c)^\theta = (x = c)$, logo $B^1_{x=c} = \sum_{M_\Gamma \in \mathcal{M}^\theta} [\![c]\!]^\theta_{M_\Gamma}$; notemos que para todo $\Gamma \in \Phi$, $[\![c]\!]^\theta_{M_\Gamma} = [c_{i_\Gamma}]_\Gamma$, para alguma $c_{i_\Gamma} \in \mathfrak{C}$.

Mas $\pi \restriction_{B^1_{x=c}}: B^1_{x=c} \to \mathcal{M}^\theta$ é homeomorfismo local (proposição 40), então sua inversa $(\pi \restriction_{B^1_{x=c}})^{-1}$ é contínua. Se $b \in B^1_{x=c}$ então $b = [c_{i_{\Gamma'}}]_{\Gamma'}$ para alguma $c_{i_{\Gamma'}} \in \mathfrak{C}$ e algum $\Gamma' \in \Phi$, tal que $\pi \restriction_{B^1_{x=c}} ([c_{i_{\Gamma'}}]_{\Gamma'}) = M_{\Gamma'}$, logo $\pi((\pi \restriction_{B^1_{x=c}})^{-1}(M_{\Gamma'})) = \pi([c_{i_{\Gamma'}}]_{\Gamma'}) = M_{\Gamma'}$, i.e. $(\pi \restriction_{B^1_{x=c}})^{-1} : \mathcal{M}^\theta \to B^1_{x=c}$ é seção (global) do fibrado.

De fato, tais homeomorfismos locais calculados em todos as c_i, novas constantes da linguagem estendida, definem implicitamente um conjunto $\gamma_\Gamma([c_i]_\Gamma) = (\pi \restriction_{B^1_{x=c}})^{-1}(\mathcal{M}^\theta) = B^1_{x=c_i}$, para todo $[c_i]_\Gamma \in \mathfrak{D}$. Ao tomarmos a coleção de todos estes γ, definimos uma aplicação $\bar{\gamma} : \mathfrak{D} \to \wp(\mathfrak{D})$ que, por sua vez, define implicitamente a relação de contrapartes C para esta estrutura canônica[32], já que para cada $[c_i]_\Gamma$, $\bar{\gamma}([c_i]_\Gamma) = B^1_{x=c_i} \subset \mathfrak{D}$.

Porém, dada a coleção de todas as relações de satisfação clássica construídas sobre todos os modelos canônicos para teorias de primeira ordem (consistentes e maximais) da linguagem estendida, não é possível estabelecermos um critério (formal) para, *a priori*, identificar estas relações de contraparte. Na verdade, elas só puderam ser obtidas *a posteriori* e, como podemos identificar mais facilmente a partir da definição 6.2.2 relacionada à demonstração da completude e ao processo de henkinização-preguiçosa, seriam $FOS4$-válidas somente as fórmulas cuja satisfação dependesse somente de termos "estáveis" no modelo fibrado, ou seja, ou as classes de equivalência de $c \in \mathfrak{C}$, $[c]_\Gamma$, contivessem as mesmas constantes para todo $\Gamma \in \Phi$, ou seriam as fórmulas satisfeitas por todas as permutações dos elementos do domínio da estrutura.

Portanto, se desejássemos analisar questões sobre propriedades essenciais utilizando as noções formais de contrapartes no modelo topo $FOS4$-canônico, a relação de contrapartes C deve então ser identificada *a posteriori*, forçando assim a satisfação das condições $S8$) e $S9$) - seção 6.5 - para a interpretação das fórmulas modalizadas em função desta relação contraparte-teorética. Na construção da relação a partir dos γ's identificados pelas seções, pode ser o caso que $[c_i]_{\Gamma'}$ seja contraparte de $[c_i]_\Gamma$ em $w_{\Gamma'}$ (proveniente da seção de $\gamma_\Gamma([c_i]_\Gamma)$), ou seja, pertença a $\gamma_\Gamma([c_i]_\Gamma) \cap D_{\Gamma'}$, mas $[c_i]_\Gamma \notin \gamma_{\Gamma'}([c_j]_{\Gamma'}) \cap D_\Gamma$, para $c_j \neq c_i$ tal que $[c_j]_{\Gamma'} = [c_i]_{\Gamma'}$. Procurarei resolver tal problema na próxima construção.

Da proposição 40 temos que $\pi \restriction_{B^1_{x=c}}$ é contínua, portanto $(\pi \restriction_{B^1_{x=c}})^{-1}(\mathcal{M}^\theta) =$

[32] Basta definirmos $Cxy := \{(x, y) \mid x \in D_\Gamma \wedge y \in \gamma_\Gamma(x)\}$.

$B^1_{x=c} = [\![x \mid \Box(x = c)]\!]$ é um aberto de $\mathfrak{D}$, desta forma, se olharmos cada fechado D_Γ como subespaço topológico, temos que para todo $\Gamma \in \Phi$ tal que $c^{M_\Gamma} = [c_{i_\Gamma}]_\Gamma$, $B^1_{x=c} \cap D_\Gamma = [c_{i_\Gamma}]_\Gamma$, ou seja, $\{[c_{i_\Gamma}]_\Gamma\}$ é um aberto do subespaço $(D_\Gamma \subset \mathfrak{D})$.

Do exposto podemos estabelecer três pontos principais sobre a topologia do espaço $\mathfrak{D}$ do modelo topo $FOS4$-canônico enumerável:

i) Todo domínio D_Γ é fechado, portanto é um subconjunto dos *possibilia* que "contém" sua própria fronteira; em certa medida, como os domínios são disjuntos, podemos afirmar que a coleção de indivíduos existentes em um mundo possível são como totalidades fechadas em si;

ii) Cada objeto $[c_i]_\Gamma$ é um aberto no subespaço D_Γ em que existe; isto significa que, nestes domínios, cada objeto ou "ente" é relativamente "desconectado" dos demais, aparecendo relações topológicas entre eles na medida em que analisamos, em cada caso, as fórmulas que satisfazem outros objetos com mesmo "nome" ao longo dos $w \in W$, pois isto depende das interpretações dos operadores modais $\Box$ e $\Diamond$ - interpretação transversal das fórmulas modalizadas[33];

iii) $\mathfrak{D}$ não é um espaço compacto, pois $\{B^1_{x=c_1}\}_{c_i \in \mathfrak{C}}$ é uma cobertura de abertos que não admite subcobertura finita;

iv) $\mathfrak{D}$ não é um espaço conexo. De fato, podemos demonstrar tal fato utilizando o resultado do teorema 5.3.14.

Como (W, τ) é desconexo, existem U e V abertos e disjuntos tais que $U \cup V = W$. Como π é contínua, é o caso que $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ são abertos de $\mathfrak{D}$. Também é o caso que $\mathfrak{D} = \pi^{-1}(W) = \pi^{-1}(U \cup V) = \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V)$. Suponhamos que $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ não sejam disjuntos, então existe $a \in \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$, logo existe um único Γ (por construção) tal que $\pi(a) = w_\Gamma$ e $a \in D_\Gamma$, logo $w_\Gamma \in U \cap V$ - o que contradiz o fato de U e V ser uma desconexão para W.

[33] Porém, como D_Γ não é um aberto, $\{[c_i]_\Gamma\}$ não é uma aberto de $\mathfrak{D}$ - cada elemento de $\mathfrak{D}$ está "ligado" às suas contrapartes

7.1.4 As Fórmulas de Barcan em $FOS4$

A *recíproca da fórmula de Barcan* **RB** é teorema de $FOS4$. De fato:

$$\begin{aligned}
\text{[Ax. Lógica clássica]} &\vdash_{FOS4} \forall x\varphi \supset \varphi && (1)\\
\text{[Necessitação]} &\vdash_{FOS4} \Box(\forall x\varphi \supset \varphi) && (2)\\
\text{[Ax. } K)] &\vdash_{FOS4} \Box(\forall x\varphi \supset \varphi) \supset (\Box\forall x\varphi \supset \Box\varphi) && (3)\\
[MP\ (3) + (2)] &\vdash_{FOS4} \Box\forall x\varphi \supset \Box\varphi && (4)\\
\text{[Teo. 1° ordem]} &\vdash_{FOS4} \Box\forall x\varphi \supset \forall x\Box\varphi && (5)
\end{aligned}$$

No capítulo 2, como vimos, a teoremicidade de **RB** só é implausível quando os domínios não são disjuntos, o que não ocorre em nosso modelo topo $FOS4$-canônico.

Por outro lado, a *fórmula de Barcan* **FB** não é $FOS4$ teorema.

De fato, **FB** $\forall x\Box\varphi \supset \Box\forall x\varphi$ é equivalente a $\Diamond\exists x\psi \supset \exists x\Diamond\psi$, assumindo $\neg\varphi = \psi$. Se **FB** fosse válida, então para qualquer ψ: $[\![\bar{x} \mid \Diamond\exists y\psi \supset \exists y\Diamond\psi]\!] = W \Leftrightarrow [\![\bar{x} \mid \Diamond\exists y\psi]\!] \subseteq [\![\bar{x} \mid \exists y\Diamond\psi]\!]$ (**)

Como $[\![\bar{x} \mid \exists y\alpha]\!] = p_n([\![\bar{x}, y \mid \alpha]\!])$ é projeção do tipo $\mathfrak{D}^n \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^n$, sabemos que p_n é aplicação aberta (ver observação do teorema B.1.6), porém não é aplicação fechada, já que $\mathfrak{D}$ não é compacto, embora W o seja. Logo, $p_n(\overline{A})$ não é, necessariamente fechado, qualquer que seja A.

Notemos que $[\![\bar{x} \mid \Diamond\exists y\psi]\!] = \overline{p_n([\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!])}$, enquanto $[\![\bar{x} \mid \exists y\Diamond\psi]\!] = p_n(\overline{[\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!]})$.

Como $[\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!] \subseteq \overline{[\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!]}$, segue que $\overline{p_n([\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!])} \subseteq \overline{p_n(\overline{[\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!]})}$, mas o fato de p_n não ser aplicação fechada não nos permite concluir que $\overline{p_n(\overline{[\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!]})} = p_n(\overline{[\![\bar{x}, y \mid \ \psi]\!]})$, para toda ψ, logo não podemos concluir que a desigualdade (**) seja válida. Desta forma, **FB** não é válida no modelo canônico para **FOS4**.

Ver discussão na seção 2.5 acerca da teoremicidade de **FB** em um sistema (modal) formal e suas implicações filosóficas.

7.2 Estrutura Informal: Um Experimento Intelectual

Assumo aqui certas hipóteses para mostrar como, a partir delas, podemos obter uma estrutura interpretativa (em um contexto conjuntista) para a lógica **FOS4**, não demandando que **todos** os objetos possuam contrapartes em **todos** os mundos possíveis[34], como na demonstração da completude para **FOS4** em relação à feixe-interpretação - teorema Awodey-Kishida, ou como na construção do modelo topo $FOS4$-canônico. Com isso pretendo mostrar que podemos estipular uma noção "alargada" de *necessidade*, ainda dentro da lógica **FOS4** e de seus pressupostos.

Seja $\mathcal{D}$ a coleção dos existentes em todos os "mundos possíveis", mundos esses que formam a totalidade do *mundo*, como cosmos, daquilo que pode ser representado por meio de uma linguagem idealizada $\mathcal{L}$, na medida em que, embora finitária e com uma quantidade enumerável de símbolos (e fórmulas bem formadas), consiga descrever os fatos do mundo enquanto coleção de "palavras" de uma linguagem formal. Seja π a aplicação residência desses indivíduos em W, obtemos um fibrado $(\mathcal{D}, \pi)$, supondo o conceito de heccedidade, que caracteriza unicamente cada indivíduo.

Desta forma, por um **experimento intelectual**, podemos construir uma interpretação para uma linguagem modal $\mathcal{L}$ - utilizando $\Box$ para representar uma noção de "necessidade" - a partir da capturação idealizada dos fatos do mundo, nos limites linguísticos e epistêmicos impostos ao homem.

Do teorema de Awodey-Kishida, a partir das hipóteses levantadas e das propriedades geométricas-primitivas locais da lógica **FOS4**, que conectam o **espaço físico**, **espaço de representação** e **espaço lógico**, a partir da argumentação que procurei apresentar neste trabalho, toda $FOS4$-teoria consistente é completa em relação a uma feixe interpretação.

Suponhamos então que exista tal teoria que caracteriza as leis metafísicas. Pelo teorema 6.5.1, todos os objetos em $\mathcal{D}$ deveriam possuir contrapartes em todos os mundos possíveis. Seria possível estabelecer uma situação em que tal não ocorresse? A ideia é construirmos um novo fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$ para isso.

Tal *experimento intelecutal* é animado por três forças principais: 1. A fundamentação teórica articulada pelo filósofo romeno Lucian Blaga (seção 1.2.2) sobre a utilização do método científico-experimental aplicado à investigação filosófica. 2. As hipóteses filologicista [H 1.2] e Husserliana [H 1.3]. Por fim, 3. As hipóteses semântica [H 1.7] e cética-moderada [H 2.1] - ver capítulo 1. Esse experimento intelectual que procuro defender servirá para a construção de uma semântica para **FOS4** que nos possibilita apresentar tal noção alargada de necessidade, cuja construção está assentada sobre outros pressupostos, a saber:

[34] Pelo menos, não uma contraparte "existente" em todos os mundos possíveis.

1. Consideremos que cada w representa uma coleção de sentenças da parte clássica de $\mathcal{L}$ - linguagem modal de primeira ordem - classicamente consistentes e maximais. Vamos assumir que cada indivíduo possui, no máximo, uma contraparte em cada mundo possível. Desta forma, se $a \in D_{w_1}$, então para todo w_2 existe, no máximo, um $a' \in D_{w_2}$ tal que a' é contraparte de a.

2. Seja $\mathcal{C}$ a relação de contrapartes entre os indivíduos nos mundos possíveis w - considerando 1.; tal relação será *simétrica*, *reflexiva* e *transitiva*. Assim, a relação de contrapartes sobre $\mathcal{D} = \sum_{w \in W} D_w$ é uma relação de equivalência; ela é uma relação assumida *a priori*, pois reflete uma *identificação* entre os domínios disjuntos de cada um dos mundos possíveis, relação essa que não podemos **averiguar** empiricamente - é um fato imanente à totalidade dos fatos do mundo e, portanto, escapa da esfera do que pode ser conhecido ao homem[35]; desta forma, em relação à nossa capacidade epistêmica, é um fato transcendente ao *mundo*, já que só pode ser completamente compreendido (abarcado) em sua totalidade exterior. Seja W a coleção de todos os w's - mundos possíveis[36].

3. O conceito de *heccedidade* - ver capítulo 3 - de um objeto (ou ente) a nos permitirá dizer que, para todo indivíduo a, somente a é idêntico a ele mesmo. Por isso, é possível justificarmos que todo indivíduo existe em um e somente um único mundo possível; a heccedidade de cada indivíduo compreende o feixe de suas ”propriedades” especificantes: tais “propriedades” referem-se à tudo aquilo à qual o ente se relaciona, um fato do *mundo*, no mundo possível em que existe, assim como em relação a todos os outros mundos possíveis em que tal ente não “existe” (portanto, em certo sentido, fatos negativos sobre este indivíduo). Desta forma, essa coleção é não-enumerável, e portanto não pode ser representada ou descrita como uma fórmula da nossa linguagem $\mathcal{L}$.

4. A relação de contrapartes $\mathcal{C}$ assumida não é total, ou seja, pode existir um $a \in D_w$ tal que exista $w' \neq w$, e não exista $b \in D_{w'}$ tal que $\mathcal{C}ab$.

5. Seja $\bar{\gamma} : \mathcal{D} \to \wp(\mathcal{D})$ função que associa a ao conjunto $\{x \in \mathcal{D} \mid \mathcal{C}ax\} = \sum_{w \in W_a} \{x \in D_w \mid \mathcal{C}_{ax}\}$[37].

Para todo $a \in \mathcal{D}$, o conjunto $\bar{\gamma}(a)$ induz uma sessão (local ou global) no fibrado $(\mathcal{D}, \pi)$. De fato, $\bar{\gamma}(a) \subset \mathcal{D}$ e $\pi(\bar{\gamma}(a)) = W_a \subset W$; definimos então $s_a : W_a \to \mathcal{D}$ tal que $s_a(w) = b \in D_w$ e $\mathcal{C}ab$ - vemos que s_a é sessão local se $W_a \neq W$.

[35] Em sua totalidade, que é transcendente ao *mundo*, pois só é compreendida, como tal, “de fora”, portanto sendo somente apercebida pelo homem por sua aderência (do homem) aos fatos do mundo, por ambos serem manifestações imanentes dessa totalidade.

[36] Sem a explicitação das fórmulas modais de $\mathcal{L}$, tal W ainda não pode ser objetivamente construído.

[37] O conjunto W_a denotará a coleção dos elemento w tais que existe uma contraparte de a em w.

Observações:

i. Assumimos uma noção *a priori* de contrapartes como parte desse experimento intelectual. Isso é possível - a identificação unívoca de cada indivíduo nesta configuração - pela assunção da noção de heccedidade, conceito metafísico individualizante e que não pode ser abarcado por uma linguagem enumerável e finitária. Tal assunção está alicerçada em nossa argumentação de que o homem - na sua experiência finita - não é capaz de abarcar tal completude necessária para caracterizar as propriedades individualizantes de cada ente por meio do discurso (logos). Tal incompletude - relativa à identificação de todas as propriedades de cada indivíduo - está no cerne do aspecto limitante da experiência humana, no mundo, frente à totalidade do ser, portanto da esfera daquilo que escapa ao humano, o "indizível" - ver seção 1.2.3.

ii. Mesmo nesta linguagem idealizada - já que permite uma quantidade enumerável de fórmulas para representar os fatos do mundo, que extrapola o limite espaço-temporal da existência humana em descrevê-la - usamos as constantes da linguagem, em quantidade enumerável, para ressaltar a relação dos indivíduos existentes entre-mundos (relação de contrapartes)[38]. Com isso, desejo que uma mesma constante **denote** os indivíduos que são contrapartes em **certos** mundos possíveis, pois é coerente supor que nem todas as contrapartes de certos indivíduos existam em todas as configurações possíveis e, além disso, quando se relacionarem por esta propriedade *a priori*, as constantes da linguagem devem denotar estes mesmos indivíduos nos mundos em que estes existirem. Portanto, as constantes da linguagem devem desempenhar o papel dos nomes que identificam indivíduos distintos (portanto com diferentes heccedidades), mas que se relacionam por essa identificação mais fraca, a contraparte, uma noção metafísica. Logo, não estamos aqui preocupados em lidar com problemas relacionados ao sentido ou referência na linguagem, pois estamos pressupondo a idealização da mesma[39]. As constantes então **denotam** contrapartes.

Suposição: Parece plausível supor que existam **nomes** que não **denotam** nenhum individuo em certo w, ou seja, existe certo indivíduo a, denotado em um w por c, constante, que não possui contraparte em um certo $w' \neq w$ - possível pelo pressuposto 4.

Definição 7.2.1. *Para todo $a \in \mathcal{D}$, existe uma única **essência** $\mathfrak{a}$ tal que, se tal essência é **exemplificada** em $w \in W$, por a, então $a \in D_w$ e, para toda contraparte b de a em um mundo possível w', então $\mathfrak{a}$ é a essência de b que exemplifica-a em w'.*

Portanto, a relação de contrapartes (tomada *a priori*) nos possibilita fundamentar a noção de *essência*[40], já que contrapartes compartilham, seguindo a definição colocada, a

[38] Logo, na linguagem, só podemos falar sobre uma quantidade enumerável de "nomes".

[39] O intuito não é construir um aparato em linguagem formal para "calcular" os teoremas lógicos, mas mostrar que esta lógica possui certa "estrutura", sem olhar para os tijolos que compõem tal estrutura.

[40] Essência é uma noção metafísica por excelência, obviamente. Porém, propomos aqui utilizar a relação

mesma *essência* - ver obeservação ii - e esta relação de similitude pode ser descrita em $\mathcal{L}$. O que escapa da capacidade "linguística" e da experiência humana em diferenciar os indivíduos é abarcado pelo conceito de heccedidade, que diferencia cada ente para além da linguagem.

Se $a \in \mathcal{D}$ e $\bar{\gamma}(a) \subsetneq \mathcal{D}$, então a *essência* $\mathfrak{a}$ de a não é *exemplificada* em um determinado w. Além disso, se $b \in \bar{\gamma}(a)$, a essência de b é $\mathfrak{a}$, pois $\mathcal{C}ab$, i.e., a *essência* dos indivíduos tornam-os indistinguíveis ao homem (em relação as propriedades necessárias representáveis na linguagem), preso à sua experiência e linguagem - mesmo no limite - entre todas as configurações maximais (mundos possíveis) que abarcam diferentes indivíduos, esses individualizados pela noção metafísica de heccedidade.

Assim, se a essência de dois indivíduos distintos a e b é a mesma e se $a \in D_{w_1}$, então $b \in D_{w_2}$ e $w_1 \neq w_2$, ou seja, a e b possuem heccedidades distintas e cada um deles possui um feixe total de propriedades distintas que os caracteriza, e esses feixes não são possíveis de serem representados em sua totalidade na linguagem $\mathcal{L}$, embora coincidam em todas propriedades necessárias que possam ser representadas nela - e por isso afirmamos que os indivíduos possuem a mesma *essência*. Portanto, embora possamos investigar analiticamente se dois indivíduos possuem a mesma *essência* (satisfazem as mesmas fórmulas necessárias da linguagem $\mathcal{L}$), não é analítico o conceito de heccedidade, ou seja, o que individualiza cada indivíduo não pode ser representado na linguagem $\mathcal{L}$.

Dada a *suposição*, podemos estender cada D_w a um conjunto $D^*_w = D_w \cup \{*_w\}$[41] e, por consequência, $\mathcal{D}^* = \sum_w D^*_w$.

Definamos $K_a : W \to \mathcal{D}^*$ função, para todo $a \in \mathcal{D}$, por:

$$K_a(w) = \begin{cases} s_a(w) & \text{se} \qquad\qquad\qquad w \in W_a \\ *_w & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Neste caso, K_a é uma sessão global sobre o fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$, em que π^* é a extensão natural de π sobre $\mathcal{D}^*$.

Procurarei agora investigar se podemos considerar válido o teorema da completude de **FOS4** para esta estrutura que estamos construindo, já que temos domínios disjuntos e a estrutura de seções (globais) na união disjunta e as fórmulas clássicas se comportam bem na estrutura fibrada.

Se w for uma coleção de sentenças $FOS4$-consistente e maximal de $\mathcal{L}$ - um "mundo possível" - e $a \in D_w$, então podemos afirmar que a tem **aporte existencial** e que é

de contrapartes (formalizável na linguagem) para fundamentar sistematicamente um conceito de **essência**, que visa organizar, internamente a esta proposta de experimento intelectual, o que é nuclear para determinar o ente *como ente*, não *qua* objeto, i.e., considerando o ente na sua singularidade (heccedidade).

41 Formalmente, $\{*_w\}$ pode ser visto como o conjunto unitário do par ordenado $< \{\emptyset\}, w >$.

nomeado por alguma constante c da linguagem; para que isso seja o fato, os domínios D_w devem ser, todos, enumeráveis[42]. Vamos supor também que cada indivíduo de D_w é nomeado por uma única constante da linguagem; tal suposição pode ser sustentada pela desejo de idealidade da linguagem $\mathcal{L}$ pretendida[43].

Considerando o pressuposto 4, a extensão $\mathcal{D}^*$ nos permite concretizar tal hipótese levantada (o que não era possível no modelo topo $FOS4$-canônico) e manter a interpretação fibrada - que era necessário para a completude de **FOS4** frente a feixe-interpretação. Com isso, podemos utilizar as ferramentas categoriais mais a $FOS4$-completude para descrever uma interpretação para as fórmulas de $\mathcal{L}$, linguagem que emana do experimento intelectual, por meio dos símbolos destacados para representar os fatos do mundo, em uma linguagem finitária e enumerável - portanto não à totalidade em si dos fatos, mas a totalidade (idealizada) do que pode ser abarcado pelo homem no que tange sua experiência e comunicação formal.

Verifiquemos a coerência do empreendimento avaliando se tal construção lógica sobre $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$ pode ser, de fato, realizada.

7.2.1 Interpretação Categorial sobre $\mathcal{D}^*$

Nesta seção explorarei a representação de interpretações no fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$, por meio dos morfismos lógicos do topos $Top(W)$. Para isso, utilizarei as ferramentas exploradas no apêndice B.

Fixemos uma enumeração para as variáveis de $\mathcal{L}$. Sabemos (pelo teorema da completude) que existe uma feixe-interpretação sobre $\mathcal{D}^*$[44].

Para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}$, existe um número $m \in \mathbb{N}$ apropriado para φ, em que a sequência $(x_1, \ldots, x_m)$ - a partir a enumeração fixada - contém *todas* as variáveis livres que ocorrem em φ. Restrinjamos a linguagem aos símbolos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\Box$ e $\exists$. Com tais procedimentos, podemos interpretar em um topos (implicitamente) a teoria das contrapartes, já que temos a estrutura fibrada.

---

[42] Fica implícito dessa hipótese que estamos assumindo que cada sentença da linguagem $\mathcal{L}$, existencial, possua já na linguagem suas "testemunhas" e o aporte existencial nas lógicas em que vale a propriedade de autonomia do domínio de quantificação.

[43] Ou seja, embora seja finitária e enumerável, tal idealidade reflete o pressuposto de trajetória assintótica do conhecimento humano sobre a totalidade de fatos do mundo (cosmos) - esta é a verdade que transcende a experiência humana por meio de processos racionais, a partir dos fatos imanentes ao mundo, aos quais o homem tem acesso somente pela experiência. As inferências só podem ocorrer por meio de abstrações, no espaço de representação, lugar em que nossas *ideias* são re-presentadas.

[44] A interpretação para a $FOS4$-teoria que representaria (idealmente) a totalidade dos fatos do mundo que podem ser representados na linguagem $\mathcal{L}$, envolvendo essências que não são exemplificadas em todos os mundos possíveis (experimento intelectual): a $FOS4$-teoria caracterizada pelo feixe construído.

7.2.1.1 Tentativa Ingênua

Fórmulas Clássicas

Considerando o fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$, podemos definir a interpretação fibrada (domínios disjuntos) da aplicação diagonal $\Delta_{\mathcal{D}^*}$, cuja característica é o morfismo $\delta_{\mathcal{D}^*}$, usado para interpretação do predicado de igualdade $=$.

Além disso, para cada $w \in W$ existe o monomorfismo $Pr_2 \circ e_{D^*_w}(\in_{D^*_w}) \rightarrowtail \Omega_w^{D^*_w}$, por agora, podemos considerar $\Omega_w = \{< 0, w >, < 1, w >\}$ (pois estamos interessados apenas na interpretação de fórmulas clássicas), cujo morfismo característica é $\exists_{D^*_w}$. Se Ω for o classificador de subobjetos do topos $Top(W)$, então a interpretação das fórmulas clássicas no topos, em relação ao operador existencial, utilizando o operador obtido pela união disjunta das características $\exists_{D^*_w}$, coincide com a aplicação do operador $\exists_{\mathcal{D}^*}$ definido no topos $Top(W)$ - já que φ é clássica. Isto nos estimula a verificar:

Interpretação de Termos

a) Seja c uma constante, temos:

$$[\![c]\!] : \mathbf{1} \to \mathcal{D}^* \text{ e } [\![c]\!] = \sum_w [\![c]\!]_w$$

em que $[\![c]\!]_w : \mathbf{1} \to D^*_w$ é um morfismo em SET.

b) Seja f símbolo funcional n-ário, temos:

$$[\![f]\!] : (\mathcal{D}^*)^n \to \mathcal{D}^* \text{ e } [\![f]\!] = \sum_w [\![f]\!]_w$$

c) Para todo termo t, e para todo m apropriado à t, temos:

i) Se $t = x_i$ $(i \leq m)$: $\rho^m(t) = \sum_w pr_i(\bar{x}) : (\mathcal{D}^*)^m \to \mathcal{D}^*$, em que $\bar{x}$ é uma sequência de variáveis da linguagem.

ii) Se $t = c$: $\rho^m(t) = [\![c]\!] \circ !_{(\mathcal{D}^*)^m} : (\mathcal{D}^*)^m \to \mathcal{D}^*$.

iii) Se $t = f(\tau)$: $\rho^m(t) = [\![f]\!] \circ \rho^m(\tau)$, para $\rho^m(\tau) =< \rho^m(\tau_1), \ldots, \rho^m(\tau_n) >$. Nesse ponto, temos uma questão: $[\![f]\!]$ é funcional? Essa resposta depende do que ocorre com $\rho^m(\tau)$.

Interpretação de Variáveis Proposicionais

Para toda p e todo w: $[\![p]\!]_w : \mathbf{1} \to \Omega_w$. Então para todo m natural, há a composta $[\![p]\!]^m = \sum_w [\![p]\!]^m_w : (\mathcal{D}^*)^m \to \mathbf{1} \to \Omega$.

Símbolos de Predicado

Seja P um símbolo de predicado n-ário, $Ext_w(P)$ denota a extensão de P em cada D_w^n, então $i_w(P) : Ext_w(P) \hookrightarrow D_w^n$ tem característica $[\![P]\!]_w$. Existe e_w a inclusão natural de D_w^n em $(D_w^*)^n$, então $e_w \circ i_w(P) : Ext_w(P) \to (\mathcal{D}_w^*)^n$ é monomorfismo - utilizaremos a mesma notação $[\![P]\!]_w$ para sua característica.

Denotando $[\![P]\!] = \sum_w [\![P]\!]_w$ temos $[\![P]\!]^m = [\![P]\!] \circ < \rho^m(\tau_1), \ldots, \rho^m(\tau_n) >$: $(\mathcal{D}^*)^m \to \Omega$.

Interpretação da Negação

Seja φ fórmula clássica e m apropriado:

$$[\![\neg\varphi]\!]^m = \neg \circ [\![\varphi]\!]^m$$

Interpretação da Conjunção

Sejam φ e ψ fórmulas clássicas e m apropriado:

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^m = \wedge \circ < [\![\varphi]\!]^m, [\![\psi]\!]^m >$$

Interpretação do Quantificador Existencial

Sabemos que no topos $Top(W)$ existe o morfismo fibrado $\boldsymbol{T}_i^{m+1}$: $\mathcal{D}^* \times (\mathcal{D}^*)^m \to (\mathcal{D}^*)^m$, fibrado dos morfismos $(T_i^{m+1})_w : D_w^* \times (D_w^*)^m \to (D_w^*)^m$; podemos fazer a composição $[\![\varphi]\!]^m \circ \boldsymbol{T}_i^{m+1} : \mathcal{D}^* \times (\mathcal{D}^*)^m \to \Omega$, cuja adjunta exponencial é $\|\varphi\|_i^m$: $(\mathcal{D}^*)^m \to \Omega^{\mathcal{D}^*}$, que é o fibrado das adjuntas $(|\varphi|_i^m)_w$ de $(T_i^{m+1})_w$.

Assim, podemos definir a interpretação para a sentença $\exists x_i \varphi$, para φ clássica e $i \leq m$:

$$[\![\exists x_i \varphi]\!]^m = \exists_{\mathcal{D}^*} \circ \|\varphi\|_i^m$$

Fórmulas Não-Clássicas

Para a interpretação das fórmulas não-clássicas, precisamos observar dois pontos:

Problema 1: Como interpretar o símbolo $\Box$ em relação aos indivíduos denotados pela linguagem, de maneira que asseguremos sua "existência" entre mundos e a relação de contraparte seja garantida, já que a satisfação dessa fórmula se dá transversalmente ao feixe (aporte existencial)?

Problema 2: Seja $\bar{a}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{D}^*$ que contém pelo menos um elemento da forma $*_w$ - não "existentes" em w. Não parece ser plausível supor que $f(\bar{a}) \in D_w$ - já que um dos termos da sequência $\bar{a}$ é não-existente em w. Portanto, a interpretação dos símbolos funcionais, feita desta forma sobre $\mathcal{D}^*$, não é funcional.

Para contornarmos esses dois pontos, formulemos mais alguns passos.

7.2.1.2 Tentativa Não-Ingênua

As sessões K_a, estendidas a partir da noção de $\mathcal{C}$ (via $\bar{\gamma}$), determinam uma relação $\mathcal{C}_K$, sobre $\mathcal{D}^*$, extensão da relação de contrapartes[45]. Definamos:

$$
\begin{aligned}
\gamma \colon \mathcal{D} &\to \wp(\mathcal{D}^*) \\
a &\mapsto \{x \in \mathcal{D}^* \mid \mathcal{C}_K ax\} = \sum_w K_a(w)
\end{aligned}
$$

Temos:

I) Se $a \in D_w$ então $\gamma(a) \cap D^*_w = \{a\}$.

II) Se $b \in \gamma(a)$ e $b \neq *_u$ e $a \in D_w$ para algum w, temos:

i)Existe um único w' tal que $b \in D^*_{w'}$;

ii) Se b e c forem elementos de D^*_w e $c \in \gamma(a)$, então $b = c$;

iii) $a \in \gamma(b)$.

III) Se a não tem contraparte em w', então $\gamma(a) \cap D^*_{w'} = *_{w'}$.

IV) Para todo $a \in \mathcal{D}^*$ tal que $a \neq *_w$, para $w \in W$, existe um único $w' \in W$ e uma única constante c tal que $[\![c]\!]_{w'} = a$.

V) Como $\gamma(a) \subset \mathcal{D}^*$, seja γ_a a inclusão $\gamma(a) \hookrightarrow \mathcal{D}^*$, temos $t_a := \pi^* \circ \gamma_a : \gamma(a) \to W$ função, para todo $a \in \mathcal{D}$ (vale por I).

Definamos:

$$
\begin{aligned}
S_a \colon W &\to \mathcal{D}^* \\
w &\mapsto t_a^{-1}(w)
\end{aligned}
$$

[45] Ou seja, nos casos em que não há $b \in D_{w'}$, contraparte de a em w', definamos a relação $\mathcal{C}_K a *_{w'}$.

A função S_a calculada em w, definida pela imagem inversa $t_a^{-1}(w)$, é seção global do fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$, para qualquer $a \in \mathcal{D}$.

Propriedade: Se $b \in \mathcal{D} \cap \gamma(a)$, então $S_a = S_b$, como desejado, salvaguardando as propriedades essenciais, que desejamos, dos objetos em $\mathcal{D}^*$ que possuem *aporte existencial.*

Como vimos, $\mathcal{D}^*$ é a união disjunta dos elementos D^*_w. Agora, nesta nova extensão do domínio, indivíduos da forma $*_w$ podem ser denotados por mais de uma constante na linguagem (ideal) $\mathcal{L}$. Aquelas constantes que denotam essências não-existentes em w denotam, nesse "mundo possível", o objeto $*_w$.

Sabemos que a interpretação das constantes nos fibrados induz uma topologia em $\mathcal{D}^*$, por meio dos abertos básicos $B^1_{x=c}$. Assim, para todo $a \in \mathcal{D}$, o conjunto $im(S_a)$ é um aberto básico de $\mathcal{D}^*$. De fato, a interpretação $[\![c]\!]$ no fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$ deverá ser a imagem de cada uma das seções globais S_a, para algum $a \in \mathcal{D}$, para o qual c é nome em algum $w \in W$. Para que isso ocorra, para todo w deve existir uma essência $\mathfrak{a}$ **não** exemplificada em w e, portanto, deve existir uma constante c' tal que $[\![c']\!]_w = *_w$.

Assim, para que a estrutura interpretativa fibrada para **FOS4** seja preservada, para funcionar nesta extensão $\mathcal{D}^*$, não pode existir um "mundo possível" em que todas as essências se exemplificam, pois os $*_w$ representam essências não exemplificadas. Chamemos esse fato de *incompletude metafísica.*

Observação A: Seja $c \in \mathcal{L}$. Definamos a função s_c por:

$$\begin{aligned} s_c \colon W &\to \mathcal{D}^* \\ w &\mapsto [\![c]\!]_w \end{aligned}$$

I) Notemos que se $c_1 \neq c_2$, então para todo $w \in W$ segue que $(s_{c_1} \cap s_{c_2}) \cap D_w = \emptyset$, quando c_1 e c_2 denotam, em w, essências exemplificadas, ou se uma constante denota uma essência exemplificada e a outra não. Caso contrário, as duas não denotam essências exemplificadas, $[\![c_1]\!]_w = [\![c_2]\!]_w = *_w$ e $(s_{c_1} \cap s_{c_2}) \cap D_w = \{*_w\}$.

II) Se $A \subset \mathcal{D}$ então $A = \sum\limits_{w \in U} (\bigcup\limits_{c \in G_w} s_c \cap D_w)$ para $U \subset W$ e $G_w \subset const(\mathcal{L})$, para cada $w \in U$. Similarmente para o caso $A \subset \mathcal{D}^n$. Note que G_w contém somente constantes que denotam existentes em w.

Definição 7.2.2. *Uma essência $\mathfrak{a}$ é **necessária** se for exemplificada em todo $w \in W$. Diremos que uma essência $\mathfrak{a}$ é **contingente** se não for necessária.*

Observação B: Seja $\mathfrak{a}$ uma essência necessária, então se a for uma exemplificação de $\mathfrak{a}$ em w e c constante tal que $[\![c]\!]_w = a$, temos $im(s_c) \subset \mathcal{D}$.

Das observações A e B segue que existem *essências contingentes*. Caso contrário, contraria-se a incompletude metafísica, levando em conta o fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$ e a $FOS4$-completude desejada em relação ao fibrado obtido por esse "experimento intelectual", que de fato mostra-se coerente, tendo em vista a construção das seções, necessárias para interpretação dos termos na feixe-interpretação.

Pretendo mostrar como utilizar o fibrado sobre W, construído na feixe-interpretação $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$, para termos uma semântica para $\mathcal{L}$ e obter uma noção mais "alargada" de necessidade, baseada no pressuposto que as essências não são, necessáriamente, exemplificadas em todos os mundos possíveis.

Interpretação de Símbolos Funcionais

Assumiremos uma hipótese a respeito da "existência" de $f(\bar{a})$ em determinado w (para f símbolo funcional).

Definição 7.2.3. *Diremos que $f(\bar{a})$ é existente em w (elemento de D_w) se e somente se $\bar{a} \in A \subset D_w^n$ - diremos neste caso que a sequência $\bar{a}$ é **apropriada** à f.*

*Portanto, para cada símbolo funcional f e para cada $w \in W$, temos o maior conjunto D_w^f tal que $f(\bar{a}) \in D_w^f \Leftrightarrow \bar{a} \in (D_w^f)^n$. Então D_w^f é o **domínio apropriado** à f em w.*

Definamos $\mathcal{D}^f = \sum_w D_w^f$ o domínio apropriado à f. Notems que $\mathcal{D}^f \subset \mathcal{D}$.

Se i_w for a inclusão de todos os D_w^f em D_w^*, e i a união disjunta dessas inclusões, temos o quadrado comutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{D}^f)^n \arrow[r, "f_\exists"] \arrow[d, "i^n"] & \mathcal{D}^f \arrow[d, "i"] \\
(\mathcal{D}^*)^n \arrow[r, "f"] & \mathcal{D}^*
\end{tikzcd}$$

Então, vale a igualdade $f \circ i^n = i \circ f_\exists$. Denotemos a interpretação do símbolo funcional f no domínio apropriado à f, $f_\exists$, em cada fibra relativa à w por $[\![f_\exists]\!]_w$. Desta forma, podemos definir $[\![f]\!]_\exists = \sum_w [\![f_\exists]\!]_w : \mathcal{D}^f \to \mathcal{D}$.

Para a interpretação das constantes, consideremos para cada $c \in \mathcal{L}$ o conjunto $U_c = \{w \in W \mid [\![c]\!]_w \in D_w\}$, e definamos $[\![c]\!]_\exists : \mathbf{1} \to \sum_{w \in U_c} D_w$.

Estamos prontos para restringir a intepretação de termos em $\mathcal{D}^*$, eliminando os elementos não-existentes $*_w$.

Definição 7.2.4. *Para toda fórmula n-ária $\varphi(\bar{x})$ de $\mathcal{L}$, definamos o **domínio** de φ, $\mathcal{D}^\varphi$, da seguinte forma:*

1. Seja $U_\varphi = (\bigcap_{c_\varphi} U_c)$, em que c_φ é a coleção de constantes que ocorrem em φ. Note que $U_\varphi \subset W$ é o maior conjunto em que $[\![c]\!]_\exists$ está definida, para toda constante de φ.

2. Seja I_φ a coleção de todos os símbolos funcionais que ocorrem em φ.

Definimos $\mathcal{D}^\varphi = \sum\limits_{w \in U_\varphi} \bigcap\limits_{f \in I_\varphi} D_w^f$.

Consideremos $Ext^*(\varphi)$ a extensão de φ, fórmula n-ária, sobre $(\mathcal{D}^*)^n$.

Definição 7.2.5. *Chamaremos de **extensão existencial** de φ ao conjunto $\mathcal{D}_\varphi = (\mathcal{D}^\varphi)^n \cap Ext^*(\varphi)$. Notemos que se $\varphi = P\bar{x}$, então $\mathcal{D}_\varphi = Ext^*(P)$, o mesmo ocorrendo caso φ não contenha símbolos funcionais (ou constantes - caso particular).*

Definição 7.2.6. *Uma fórmula (aberta) φ será dita **existencialmente insatisfatível** se $\mathcal{D}_\varphi = \emptyset$.*

Interpretação de Termos

a) Se $t = x_i$, $\rho_\exists^m(t) = \sum_w pr_i(\bar{x}) : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$;

b) Se $t = c$, considerando que $(\mathcal{D}^c)^m = \sum_{w \in U_c} (D_w)^m$, então $\rho_\exists^m(t) = [\![c]\!]_\exists \circ !_{\mathcal{D}^c} : (\mathcal{D}^c)^m \to \mathcal{D}$;

c) Se $t = f(\tau)$, consideremos $\rho_\exists^m(\tau) =< \rho_\exists^m(\tau_1), \ldots, \rho_\exists^m(\tau_n) >$ - se essa sequência for apropriada à f, então $\rho_\exists^m(\tau) \in (\mathcal{D}^f)^n$. Nesse caso, definimos $\rho_\exists^m(t) = [\![f]\!]_\exists \circ \rho_\exists^m(\tau) : (\mathcal{D}^f)^m \to \mathcal{D}$.

Símbolos de Predicado

Seja P símbolo de predicado n-ário. Como $Ext(P)$ é subconjunto de $\mathcal{D}^n$ e existe uma inclusão natural de $Ext(P)$ em $(\mathcal{D}^*)^n$, temos o diagrama a seguir (em $Top(W)$), em que os dois quadrados são PB's e os retângulos são todos comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
Ext^*(P) \arrow[rrr, hook] \arrow[ddd] & & & (\mathcal{D}^*)^n \arrow[ddd, "\llbracket P \rrbracket"] \\
& Ext(P) \arrow[ul, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{D}^n \arrow[ur] \arrow[d, "\llbracket P \rrbracket_\exists"] & \\
& 1 \arrow[r, "\top"] \arrow[dl, equal] & \Omega \arrow[dr, equal] & \\
1 \arrow[rrr, "\top"] & & & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Assim, podemos formular no topos $Top(W)$ o morfismo característica $\llbracket P \rrbracket_\exists^m$ da inclusão da extensão de P a todo conjunto $\mathcal{D}^m$, para qualquer m apropriado à P. Para isso, basta considerarmos $\llbracket P \rrbracket_\exists^m = \llbracket P \rrbracket_\exists \circ \rho_\exists^m(\tau)$. O mesmo pode ser feito para a extensão de uma fórmula aberta φ, sem símbolos funcionais ou constantes.

Similarmente, construimos a interpretação do símbolo $=$, desta vez utilizando os monomorfismos $\Delta_{\mathcal{D}^*}$ e $\Delta_{\mathcal{D}}$ (com as respectivas inclusões).

Interpretação da Negação

Temos $\llbracket \neg\varphi \rrbracket_\exists^m = \neg \circ \llbracket \varphi \rrbracket_\exists^m$.

Interpretação da Conjunção

Notemos que $\mathcal{D}_{\varphi\wedge\psi} = \mathcal{D}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi$. Desta forma $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_\exists^m = \wedge \circ < \llbracket \varphi \rrbracket_\exists^m, \llbracket \psi \rrbracket_\exists^m >$.

Interpretação do Quantificador Existencial

Se $\varphi = \exists x_i \psi$ for fórmula, então $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_\psi$, e a interpretação $\llbracket \exists x_i \varphi \rrbracket_\exists^m$ é a usual, como explicitado anteriormente, porém agora construída sobre $\mathcal{D}$ utilizando $\llbracket \varphi \rrbracket_\exists^m$ no momento apropriado. Dessa forma, tem-se o diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{D}^*)^m \arrow[rrr, "\|\varphi\|_i^m"] \arrow[dddrrr, bend right, "\llbracket \exists x_i \varphi \rrbracket^m"'] & & & \Omega^{\mathcal{D}^*} \arrow[ddd, "\exists_{\mathcal{D}^*}"] \\
& \mathcal{D}^m \arrow[ul, hook] \arrow[r, "(\|\varphi\|_\exists)_i^m"] \arrow[dr, "\llbracket \exists x_i \varphi \rrbracket_\exists^m"] & \Omega^{\mathcal{D}} \arrow[ur, "F"] \arrow[d, "\exists_{\mathcal{D}}"] & \\
& & \Omega \arrow[dr, equal] & \\
& & & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Em que F é um functor de $Top(W)$ em $Top(W)$ que satisfaz:

$$\begin{aligned} F\colon \Omega^{\mathcal{D}} &\to \Omega^{\mathcal{D}^*} \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

Tal que $F(f)$ deve satisfazer:

Para todo $\bar{a} \in \mathcal{D}^m$ tem-se $f(\bar{a}) = F(f)(\bar{a})$, i.e., $F(f)$ é uma extensão de f em $\mathcal{D}^*$.

Assim, $\exists_{\mathcal{D}} = \exists_{\mathcal{D}^*} \circ F$, independentemente da extensão $F(f)$, i.e., a validade da fórmula existencial - em relação aos objetos existentes - independe do que ocorre em sequências com elementos "não-existentes" da forma $*_w$.

Para toda constante c da linguagem, c pode denotar, em um mundo w, no máximo uma contraparte de uma essência exemplificada nesse mundo possível. Um **indivíduo** é uma exemplificação de uma essência e será, a cada mundo, denotado por uma única constante, que é seu **nome**.

Com estas definições, para qualquer fórmula clássica φ n-ária, com ou sem símbolos funcionais (usando $\rho_\exists^m$ para interpretação de termos), temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Ext^*(\varphi) \arrow[rrr, hook] \arrow[ddd] & & & (\mathcal{D}^*)^n \arrow[ddd, "{[\![\varphi]\!]}"] \\
& \mathcal{D}_\varphi \arrow[ul, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{D}^n \arrow[ur] \arrow[d, "{[\![\varphi]\!]_\exists}"] & \\
& 1 \arrow[r, "\top"] \arrow[dl, equal] & \Omega \arrow[dr, equal] & \\
1 \arrow[rrr, "\top"] & & & \Omega
\end{tikzcd}$$

Definimos assim $[\![\varphi]\!]_\exists^m = [\![\varphi]\!]_\exists \circ \rho_\exists^m(\tau)$.

Definição 7.2.7. *Para φ - fórmula clássica n-ária - com m apropriado, diremos que φ é* ***necessária em relação aos existentes*** *se e somente se $[\![\varphi]\!]_\exists^m = \top_{\mathcal{D}^m}$.*

Portanto, se φ for necessária em relação aos existentes ela é satisfeita por todos os elementos existentes em todas as configurações maximais w.

Podemos agora analisar a interpretação das fórmulas não-clássicas.

Fórmulas Não-Clássicas

Para analisar a satisfatibilidade e/ou validade das fórmulas modalizadas, a investigação ocorre não mais nas fibras (verticais) da feixe-interpretação, mas nos cortes transversais (horizontais) da estrutura. É aqui que a noção de contraparte desempenha um papel fundamental de identificar horizontalmente, entre os indivíduos distintos nas fibras, a relação de semelhança (essencial) entre eles.

De fato, essa garantia de identificação transversal das constantes - em relação à sua contraparte - é garantida pela construção da função interpretativa para elas, utilizando a relação de contraparte - assumida *a priori*. Mais do que isso, elas denotam unicamente os indivíduos dos domínios - em especial, as essências exemplificadas, assim como denotam os "lugares vazios" de essências não exemplificadas em certo mundo w, que estão "fora" da extensão existencial de uma fórmula φ, pois nesta extensão não ocorre indivíduo denotado por uma constante c, da fórmula, que denota em w uma essência não-exemplificada, lembrando que tal construção é dada pela imagem de seções (locais ou globais) no fibrado.

Observação: A estrutura topológica é dada no fibrado estendido $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$ e as topologias apropriadas, relacionadas à $\mathcal{D}$, são obtidas como topologia de subespaço.

Para a análise semântica das fórmulas clássicas na estrutura fibrada, vimos que a união disjunta das interpretações clássicas dessas fórmulas, nas fibras, resulta na interpretação pretendida em todo o fibrado. Como $Top(W)$ é um topos, mais a $FOS4$-completude, sabemos que são preservadas as propriedades (locais) topológicas da feixe-interpretação no subespaço. Note que em $TOP(W)$, os morfismos são homeomorfismos locais - ver apêndice B.

Em $Top(W)$, o classificador de subobjetos Ω tem a forma $(\hat{W}, \hat{p})$, para $\hat{W} = \sum_w \Omega_w$, em que $\Omega_w = \{< [U]_w, w > \ \mid U \in \Theta_w\}$, para Θ_w coleção de vizinhanças de w em W. Notemos que para a interpretação fibrada das fórmulas clássicas, como a interpretação é vertical, foi suficiente considerarmos os elementos minimais e maximais de Ω_w, a saber, $< 0, w >$ e $< 1, w >$, representando, obviamente, $< [\emptyset], w >$ e $< [W], w >$.

Dessa forma, o morfismo $\top_{\mathcal{D}^n} = \sum_w \top_{D^n_w}$, como esperado, para todo $n \geq 0$. Para $n = 0$ temos $\top_W$, completando o triângulo comutativo, logo elemento de Ω.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\top_W"] \arrow[dr, "Id_W"'] & & \hat{W} \arrow[dl, "\hat{p}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Notemos que $\top_W : \mathbf{1} \to \Omega$ é morfismo tal que $\top_W(w) =< 1, w >$ para todo w.

Interpretação do Operador $\Box$

Consideremos a notação $\wp(\mathcal{D}^n)$ para o conjunto $\sum_w \wp(D^n_w)$, para todo $n \geq 1$ - e similarmente para a extensão $\mathcal{D}^*$. Então, existe o morfismo ***int*** que satisfaz o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\wp(\mathcal{D}^n) \arrow[rr, "int"] \arrow[dr, "j"'] & & \wp(\mathcal{D}^n) \arrow[dl, "j"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

Em que para todo $X \subseteq D^n_w$ temos $j(X) = w$ e $\boldsymbol{int}(X)$ é o maior aberto contido em X, de fato, o interior de X.

Portanto, se φ for fórmula de $\mathcal{L}$, existe $\mathcal{D}_{\Box\varphi} = \boldsymbol{int}(\mathcal{D}_\varphi)$ ($FOS4$-completude), com isso temos novamente os PB's:

$$\begin{tikzcd}
Ext^*(\Box\varphi) \arrow[rrr, hook] \arrow[ddd] & & & (\mathcal{D}^*)^n \arrow[ddd, "\llbracket\Box\varphi\rrbracket"] \\
& \mathcal{D}_{\Box\varphi} \arrow[r, hook] \arrow[ul, hook] \arrow[d] & \mathcal{D}^n \arrow[ur, hook] \arrow[d, "\llbracket\Box\varphi\rrbracket_\exists"] & \\
& 1 \arrow[r, "\top"] \arrow[dl, equal] & \Omega \arrow[dr, equal] & \\
1 \arrow[rrr, "\top"] & & & \Omega
\end{tikzcd}$$

Temos então $\llbracket\Box\varphi\rrbracket^m_\exists = \llbracket\Box\varphi\rrbracket_\exists \circ \rho^m_\exists(\tau)$, para $\rho^m_\exists(\tau) \in (\mathcal{D}^\varphi)^n$, em que $Ext^*(\Box\varphi)$ é a extensão de $\Box\varphi$ em $(\mathcal{D}^*)^n$.

Podemos verificar que para φ fórmula n-ária qualquer - com m apropriado, φ é **necessária em relação aos existentes** se e somente se $\llbracket\varphi\rrbracket^m_\exists = \top_{\mathcal{D}^m}$, i.e., φ é satisfeita por todos os elementos existentes em todas as configurações maximais w, como desejamos.

De fato, são válidas as construções, pois estamos no topos $TOP(W)$:

Para todo fórmula n-ária da linguagem modal $\mathcal{L}$, exitem os monomorfismos $Ext^*(\varphi) \overset{j}{\hookrightarrow} (\mathcal{D}^*)^n$, $\mathcal{D}_\varphi \overset{j_\varphi}{\hookrightarrow} \mathcal{D}^n$ e as inclusões naturais $\mathcal{D}_\varphi \overset{i_\varphi}{\hookrightarrow} Ext^*(\varphi)$ e $\mathcal{D}^n \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathcal{D}^*)^n$. Além das funções:

$$\begin{aligned} f\colon W &\to \hat{W} \\ w &\mapsto \Omega_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\colon \mathcal{D}^n &\to \hat{W} \\ \bar{a} &\mapsto \Omega_{\pi^n(\bar{a})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^*\colon (\mathcal{D}^*)^n &\to \hat{W} \\ \bar{a} &\mapsto \Omega_{(\pi^*)^n(\bar{a})} \end{aligned}$$

Tais que $Id_W = \hat{p} \circ f$, $\pi^n = \hat{p} \circ g$, $(\pi^*)^n = \hat{p} \circ g^*$ e $g = g^* \circ i$, de maneira que temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Ext^*(\varphi) \arrow[rrrr, hook, "j"] \arrow[dddr, bend right, "(\pi^*\restriction_{Ext^*(\varphi)})^n"'] & & & & (\mathcal{D}^*)^n \arrow[dddl, bend left, "g^*"] \\
& \mathcal{D}_\varphi \arrow[ul, "i_\varphi"] \arrow[rr, hook, "j_\varphi"] \arrow[dr, "(\pi\restriction_{\mathcal{D}_\varphi})^n"] \arrow[dd, "(\pi\restriction_{\mathcal{D}_\varphi})^n"] & & \mathcal{D}^n \arrow[ur, "i"'] \arrow[dl, "\pi^n"] \arrow[dd, "g"] & \\
& & W & & \\
& W \arrow[ur, "Id_W"] \arrow[rr, "f"] & & \hat{W} \arrow[ul, "\hat{p}"'] &
\end{tikzcd}$$

Jutificando o diagrama no topos $Top(W)$:

$$\begin{tikzcd}
Ext^*(\varphi) \arrow[rrr, hook, "j"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & & (\mathcal{D}^*)^n \arrow[ddl, bend left, "\llbracket\varphi\rrbracket"] \\
& \mathcal{D}_\varphi \arrow[ul] \arrow[r, hook, "j_\varphi"] \arrow[d, "!"] & \mathcal{D}^n \arrow[ur] \arrow[d, "\llbracket\varphi\rrbracket_\exists"] & \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Assim, levando em consideração a $FOS4$-completude no fibrado $(\mathcal{D}^*, \pi^*)$, criado com as hipoteses e pressupostos levantados neste experimento intelectual, temos que para toda fórmula n-ária da linguagem $\mathcal{L}$ e para toda sequência m-ária $\bar{a}$ de "indivíduos existentes", para $m \geq n$ (e considerando a enumeração fixada das variáveis de $\mathcal{L}$), temos que φ é necessária em relação aos existentes se e somente se $\llbracket\varphi\rrbracket^m_\exists = \top_{\mathcal{D}^m}$.

Obviamente, se φ for necessária em relação aos existentes, então $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}^n$; como $\mathcal{D}_\varphi = (\mathcal{D}^\varphi)^n \cap Ext^*(\varphi)$ e $(\mathcal{D}^\varphi)^n \subseteq \mathcal{D}^n$, então $\mathcal{D}^\varphi = \mathcal{D}$.

Mas $Ext^*(\varphi)$ pode não estar contido em $\mathcal{D}^n$, ou seja, é possível que nem toda fórmula necessária em relação aos existentes seja $FOS4$-válida, embora toda fórmula $FOS4$-válida seja, obviamente, necessária em relação aos existentes.

Questão 1: *A necessidade em relação aos existentes é mais fraca do que a necessidade representada pelas fórmulas $FOS4$-válidas?*

Definição 7.2.8. *Diremos que $\varphi \in For(\mathcal{L})$ é **exemplificamente necessária** se e somente se $[\![\varphi]\!]^m_\exists = \top_{(\mathcal{D}^\varphi)^m}$.*

De acordo com a definição anterior, φ, fórmula n-ária, é exemplificamente necessária se for satisfeita por toda sequência $\bar{a}$ formada por elementos de seu domínio, ou seja, as constantes (e símbolos funcionais) de φ nomeiam indivíduos que, se forem exemplificados por essências em um mundo w, tais indivíduos satisfazem φ em quaisquer posições que apareçam em $\bar{a}$, logo são "essencialmente conectados" à φ.

Como $\mathcal{D}^\varphi \subseteq \mathcal{D}$, se φ for necessária em relação aos existentes, então φ é exemplificamente necessária, pois $\mathcal{D}^\varphi = \mathcal{D}$.

Questão 2: *A noção modal representada pela exemplificação necessária é mais fraca do que a necessidade em relação aos existentes?*

Notemos que se φ for exemplificadamente necessária, então tal fórmula é intrinsicamente ligada às essencias que são exemplificadas pelos indivíduos denotados pelas constantes em φ. Porém, tal fórmula não precisa ser essencialmente ligada a todas as essencias exemplificadas por todos os indivíduos existentes (necessidade em relação aos existentes). Ou seja, a questão 2 parece ser o caso.

Vale como ponto de pesquisa futura continuar a investigar as questões 1 e 2.

Todavia, gostaria de apontar como utilizar esse experimento intelectual para, a partir desta estrutura fibrada e das considerações realizadas até aqui, sobre a estrutura topológica do modelo canônico para a lógica **FOS4**, estabelecermos noções possivelmente mais fracas de necessidade, além de mostrar quais pressupostos são necessários para utilizarmos tal lógica (sistema axiomático) em uma interpretação que permita o trato de indivíduos que não são "existentes" em todos os mundos possíveis, assim como fundamentar a noção de essência a partir da relação de contrapartes, ou seja, imaginamos que "réplicas" de um mesmo indivíduo possam habitar mundos possíveis distintos, e o que é "essencial" a esses entes, esparramados pelo cosmos (todos com distintas heccedidades), caracteriza na linguagem formal $\mathcal{L}$, finita e enumerável, a ***essência*** de tais indivíduos.

Tal construção, animada pelo experimento intelectual e a noção de heccedidade - dada *a priori*[46], um pressuposto formal - satisfaz os critérios C1 a C4, indicados por Kishida em (KISHIDA, 2011) - ver seção 6.5. A noção de heccedidade é fundamento para estabelecermos a natureza das "essências" dos indivíduos do modelo, essa capturada pela linguagem formal.

[46] "O problema dos direitos sem sujeito surgiu especialmente a propósito da chamada herança jacente. Segundo o direito sucessório romano, os direitos que formavam o patrimônio do *de cujus* somente passavam ao herdeiro testamentário depois de uma declaração de vontade desse sentido por parte deste. A herança jacente (*hereditas jacens*), isto é, os direitos patrimoniais naquele intervalo entre a morte do *de cujus* e a declaração de aceitação do herdeiro, eram geralmente considerados como direitos *sine domino*, quer dizer, direitos sem sujeito. (...) Quer o indivíduo esteja já determinado, quer seja preciso ainda determina-lo, isto não faz qualquer diferença para a questão decisiva: saber se se trata ou não de deveres em face de uma pessoa individualmente determinada, de deveres de uma pessoa determinada e do poder jurídico a exercer por uma determinada pessoa. Esta pessoa será, em qualquer caso, determinada pela ordem jurídica. O fato de o elemento pessoal da conduta que forma o conteúdo do dever ou do direito apenas vir a ser determinado quando o elemento material já está determinado é irrelevante para a questão de saber se estes direitos e deveres têm um 'sujeito´". (KELSEN, 2019), nota 21 - capítulo 7.
A citação de Kelsen sobre a questão dos direitos sem sujeito pode nos ajudar a fazer uma analogia com a relação de contrapartes assumida *a priori*; embora ela não precisa estar "definida" de antemão, conhecida anteriormente ao ato de avaliação, essa "ação" de "conhecê-la", para nossos propósitos, é irrelevante. O que é relevante è a noção filosófica que representa e como, metafisicamente, ela é capaz de nos ajudar a compreender as noções de necessidade/contingência - ao racionalizarmos formalmente essa noção de necessidade, por exemplo, na linguagem formal com o símbolo $\Box$, mais o fato de que a relação de contrapartes relaciona esses "sujeitos", entidades elementares do discurso metafísico, seres que povoam os domínios de "mundos possíveis", por meio de uma noção pré-determinada de consistência para a identificação da relação de tais indivíduos entre mundos.

8 Conclusão

Em *Ser e Tempo* (HEIDEGGER, 2018) - ver pp. 273-274 - Heidegger denuncia o "escândalo da filosofia", a espera da prova do nexo entre as coisas "*dentro*" e "*fora*" do ser cognoscente[1], com isso procura derrubar e relação entre ser 'verdadeiro' com ser 'descoberto': a verdade (aletheia) desvela o ser (neste sentido, a verdade não é ´descoberta' ou 'justificada'), portanto traz à tona as esferas de relações entre a noção de verdade e a condição do dasein como ser no mundo – de fato, ressalta o que de particular possui o *dasein*, esta sua *abertura* para o mundo, assim como capacidade e intencionalidade para o voltar-se para dentro.

Em Aristóteles, segundo Heidegger, ver p. 282, a verdade é utilizada como sinônimo daquilo 'que se mostra a si mesmo'. Tal afirmação parece conter uma contradição com o uso "lógico" do termo verdade – relacionado à teoria da correspondência entre os fatos do mundo e os juízos que possuímos sobre eles - ver capítulo 1; talvez essa tensão possa ser dissipada se compreendermos que a palavra verdade assume diferentes usos pragmáticos de acordo com o contexto em que é empregada. A leitura de Heidegger reforça a posição defendida neste trabalho de que há uma noção de "verdade metafísica" ou "verdade absoluta", que nada mais é do que o próprio mundo, e neste sentido ela é transcendente, pois toda busca humana por sua confirmação está fadada ao fracasso, já que ele próprio é manifestação dos fatos que compõem este mundo. Por outro lado, a palavra 'verdade' também aparece em Aristóteles, quando este deseja indicar a correspondência de um determinado fato do mundo com um juízo de valor positivo sobre ele[2].

Portanto, é essencial que em toda investigação filosófica pratiquemos a moderação (sôphrosýne), aquela virtude moral grega arcaica (JAEGER, 2018), pois ela é fonte do entendimento de que facetas do real estão espalhadas em todas as sinceras abordagens e visões que estabelecemos sobre o mundo, pois só representam as perspectivas que temos, como sujeitos no mundo, de alguns dos fatos dos quais fazemos parte, reforçando o entendimento que, embora possamos adotar certa abordagem filosófica como método de pesquisa ou pensamento (tradição analítica, focada na análise da linguagem e/ou lógica, por exemplo), não podemos deixar de nos articular, tanto quanto possível, com toda tradição.

[1] A partir da perspectiva heideggeriana o "escândalo da filosofia" seria, portanto, a prova da realidade do mundo exterior.

[2] Em *O Ente e a Essência*, Aquino advoga pela teoria da correspondência para a verdade; ele julga que o que há no intelecto tem origem nos sentidos, pois "o real" (as coisas do mundo exterior) é o responsável pelas afecções dos sentidos, que após processo interno de abstração, possibilita que o intelecto identifique a "essência" do ente. Não falo aqui sobre o nexo entre "o real" e esta operação do intelecto. Notemos que o *esquecimento do ser*, como desenhado por Heidegger, se deve ao abandono da perspectiva do *ser* como desvelamento, fixando-se somente no uso no contexto lógico.

Assim, seja no sentido de 'verdade' utilizada como conceito lógico (correspondênncia), ou como conceito metafísico, ao compreendermos "verdade" como desvelamento do ser, aponta-se a *linguagem como a morada do ser* (Heidegger).

Se por um longo período[3] a filosofia tomou o *ser* no sentido de permanência, Heidegger só expressa o entendimento em um momento de virada, onde "ser" passa a ser entendido no seu sentido de devir. Como bem delimitado por Hegel (HEGEL, 2016), que compreendia o ser como a categoria mais universal e abstrata de pensamento (como substrato de tudo), em uma perspectiva linguística, a categoria *ser* é o receptáculo universal de qualquer predicação – portanto da oposição do ser, tomado como tese, e o nada, tomado como antítese, surgiria a síntese: o devir. Logo, o ente seria simplesmente o ser que possui determinações, já que ao abstrairmos todas as determinações dos entes, o que restaria em comum seria o ser puro, o nada (identidade dos opostos)[4].

Assim, nestes contornos, a ontologia procura desenlaçar essa relação contínua e permanente entre ente e ser, o fluxo do devir, pois só identificamos o ente, já que *ser* é unidade indizível, não só o mundo em sua totalidade, mas também substrato para a própria permanência do cosmos, ou seja, se os fatos do mundo são imanentes a ele e se for possível entendermos o mundo ao abstrairmos sua intelecção como uma totalidade (pois o mundo é a coleção de todos os fatos a ele imanentes, incluindo os fatos relacionados a esse que opera a abstração), i.e., uma compreensão do mundo em sua transcendência, ainda assim esta totalidade de fora é suportada por algo que a mantém, ou seja, não conseguimos nos desvencilhar das garras desta categoria do pensamento: o ser.

Para uma das principais perguntas colocadas por Heidegger em (HEIDEGGER, 2018), acredito que podemos sustentar duas respostas, que dependem da perspectiva analisada: É possível fundamentar ontologicamente a ontologia ou esta fundamentação precisa de um fundamento ôntico?

Conforme procurei delinear neste trabalho, se os sentidos podem nos enganar, também a razão cega pode operar mesmo efeito, basta constatarmos as crenças (falsas) dogmáticas e afirmadas ao longo da história. Portanto, a resposta para a pergunta de Heidegger, a meu ver, é dupla:

1. Sim, dada a natureza do conceito de ser, ao procurarmos fundamentar a ontologia com as ferramentas metafísicas, tais fundamentos não podem vir da "experiência", simplesmente porque enquanto a experiência pertence a este mundo fenomênico, e o ser é este substrato para a própria totalidade do mundo, o *ser* (não mais como categoria racional) está fora deste reino – está para além dele, de uma maneira incompreensível

[3] Parmênides e Platão, por exemplo, embora temos em Heráclito um contra-exemplo para divergir de uma visão muito simplificada desta situação.

[4] Neste sentido, vamos em direção à ideia do espaço metafísico ("indizível") como substrato que sustenta os espaços físico, lógico e de representação.

para o homem. Portanto, a fundamentação (racional) da ontologia só pode ser operada ontologicamente; porém, como estamos presos à experiência do mundo, por "dentro" dele, tal fundamentação é impossível de ser operada.

Com isso, teríamos a segunda possibilidade.

2. Não, pois se *ser* for visto como mera categoria do pensamento, ao procuramos por recortes do contexto racional em que podemos operar raciocínios metafísicos, então admitindo esta posição cética moderada (ver capítulo 1), precisamos de algum fundamento ôntico, pois sempre há pressupostos para essas operações (espaço lógico). Defendo assim que para o discurso metafísico, em especial ontológico, estamos limitados a falar sobre aquilo que pode ser representado pela condição epistemológica-cognitiva humana (conformidade com o espaço de representação) e, portanto, a triangulação com o espaço físico (noções geométricas intuitivas) pode completar esta base de sustentação; depende dos fenômenos (concretude), pelo menos na medida em que são imediatamente intuídos (por isso noções locais de representação espacial). O próprio Heidegger defende que relações espaciais podem ser utilizadas como parâmetros para articular o que o entendimento humano pode compreender e interpretar - (HEIDEGGER, 2018) p. 368.

Por isso, somos incapazes de dar fundamento ontológico para o conceito, ou o que é inteligível na noção de ser (como algo que é uma coisa em si), já que para isso precisaríamos ser capazes de compreender a partir do meta-ontológico (resposta 1). Porém, para aquilo que podemos conceitualmente utilizar como uma categoria de pensamento para refletirmos sobre a estrutura do mundo, a noção de ser precisa de uma fundamentação ôntica que possibilite algum tipo de sustentação objetiva para todo argumento que envolva tal uso.

Um filósofo que aborde essas questões por uma posição moderadamente cética sobre a viabilidade de uma completa suspensão do juízo, que identifique certos limites da linguagem em nosso processo figurativo, figuração essa baseada no processo de representação mental de conceitos, e admita esta similitude deste espaço em que esses conceitos são representados e seu espaço interno de intuição do espaço físico, espaço em que se dá a apreensão de todos os fenômenos que envolvem entes (pretensamente) exteriores, muito provavelmente dependerá da admissão de certos fundamentos intuitivos/sensíveis, que alimentam os processos racionais, embora não esteja claro como se dá tal conexão e se será, algum dia, possível descrevê-la.

É por isso que a tensão entre o pensamento, interior ao sujeito cognoscente (portanto pensamento = racionalidade articulada), e o mundo exterior (pelo menos da admissão do ser cognoscente de que há algo para além dessa racionalidade articulada que ele consegue distinguir como "seus" pensamentos), nos mostra que deve existir algum elemento que propicie o comum acordo, em relação a temas elementares sobre esse mundo exterior, entre os sujeitos pensantes que se comunicam entre si, compartilhando tais experiências. Ou seja, da análise da interação entre a percepção (racional) do espaço físico (concreto) e sua representação imagética, emerge padrões de captura imediata de formas de representação interna (intuição) de noções espaciais elementares, como se operassem na categoria de um "arquétipo" (jungiano) universal, i.e., uma categoria universal do inconsciente coletivo, em que aspectos da racionalidade e da experiência são compartilhados por todos – o que torna possível a vida em sociedade. Mais ainda, como vimos, há forte correlação entre estruturas elementares de codificação de propriedades espaciais elementares (topológicas) e dos espaços de inferências (espaço lógico), como visto pela similitude entre os operadores de consequência e de fecho (topológico) - ver capítulo 4.

A filosofia, portanto, deve procurar entender (mas possivelmente nunca responder de maneira definitiva) essa região borrada entre os limites do que é puramente lógico (racional) e puramente empírico, já que todo fenômeno só é compreendido, não como fenômeno, mas como pensamento, embora seja um pensamento excitado pelo "mundo exterior", conexão essa indizível – e que imputo indiretamente a essas noções espaciais elementares (intuitivas). Porém, isso não significa que a "intuição" não deva ser utilizada com cautela, já que não é base de prova para nada; toda intuição deve servir como guia para a razão, mas algumas "ideias intuitivas", como sobre o infinito, por exemplo, mostram o quão falha uma ideia intuitiva qualquer pode ser, assim como a razão cega, ambas podendo nos levar a conclusões incorretas.

Como a certeza apodídica também é impossível, pois vimos que diferentes contextos racionais dependem de diferentes princípios que regulariam tais contextos, não há uma coleção única de princípios lógicos e determinados para todos os contextos inferenciais humanos. Disto resulta a defesa deste trabalho de que algumas intuições elementares sobre o entendimento do espaço, combinadas com uma "proximidade local" (de propriedades espaciais elementares - topológicas) entre os três espaços já citados, físico, de representação e lógico (espaço dedutivo), possam ser utilizadas como fiadoras da razão na escolha do contexto lógico (sistema lógico) que regularia as inferências (leis lógicas) para raciocínios metafísicos, escolha essa baseada em todas as hipóteses que levantamos no primeiro capítulo.

Desta forma, acredito que podemos utilizar essa tensão entre dois polos, racional e empírico[5], assumindo certas intuições espaciais elementares responsáveis por manter a atração entre eles, para construir uma base filosófica que dê conta de fundamentar a assunção de um sistema lógico para discussões metafísicas, por meio da idealização de um substrato imediatamente recebido da experiência pelo sujeito cognoscente, informação essa que pode ser comunicada, compartilhada e coletivamente acordada racionalmente sobre seu sentido (significado).

[5] Nesse sentido, esse polo não é oposto (contrário), pois o empírico não é irracional, mas arracional - portanto é polo contraditório, embora não oposto

Lógica $FOS4$ e Semântica Topológica

Vimos em que medida, pelo menos localmente, certas propriedades das lógicas[6] **S4** e **FOS4** (coleção de "mundos possíveis") têm semelhanças topológicas locais com os espaços euclidianos. A particularidade enumerável da linguagem, porém, reforça a distinção desse **espaço lógico** com o **espaço físico** (ou interpretação do mundo apercebido). De fato, como vimos no capítulo 5, essa "falha" estaria na propriedade de conexidade local dos modelos topo-canônicos, resultante da não continuidade destas estruturas.

Dedekind defendia que o espaço matemático é distinto do espaço intuído da percepção, pois enquanto este é intuído, o outro era de fato conhecido: o conceito de espaço matemático seria mais geral, não tendo conexão direta com a *continuidade*, i.e., a continuidade não seria uma propriedade (axiomática) intrínseca aos espaços euclidianos. Para ele, a intuição é necessária para que possa se iniciar o ato do processo cognitivo, não para justificá-lo, sequer assegurar o conhecimento matemático (geométrico ou aritmético) - (DEDEKIND, 2008) ver p. 30. Neste sentido, a continuidade residiria de fato na apreensão do mundo.

Esta pretensa desconexão entre tais propriedades topológicas (geométricas primitivas) locais do espaço físico e espaço lógico deveria ser esperada, considerando nossa limitação linguística. De fato, se nossa linguagem formal, mesmo que idealizada, fosse não-enumerável, talvez incluiríamos no "espaço lógico" a continuidade, pois poderíamos demonstrar que o modelo topo $S4$-canônico é localmente conexo.

Se a linguagem for não-enumerável, digamos de cardinalidade igual à do contínuo, sabemos pelo teorema da completude que existe d[7], métrica, para um espaço métrico denso-em-si-mesmo $F_{\bar{C}}$, para o qual a lógica **S4** construída sobre esta linguagem é completa. Como todos os outros resultados para o modelo topo $S4$-canônico permaneceriam válidos, poderíamos demonstrar[8]:

Teorema 8.0.1. *O espaço $F_{\bar{C}}$ é localmente conexo.*

Demonstração: Lembremos que $\overline{B}_d(w_0, \epsilon) = \{\ w \in W \mid d(w_0, w) \leq \epsilon\}$.

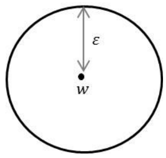
[6] A partir das propriedades dos seus modelo canônicos.

[7] Tal métrica precisaria ser adequadamente definida. Para usarmos a mesma definição do capítulo 5, em especial o cálculo da altura das fórmulas, deveríamos levar em consideração uma indexação das variáveis proposicionais por $\mathbb{R}_+^*$. Porém, não conseguiríamos demonstrar, nesta estrutura, a compacidade do modelo utilizando o mesmo método do referido capítulo, já que o resultado da proposição 20 não é válido, pois embora pudéssemos estender a noção de número binomial, para todo $n > m$ reais positivos, por $\binom{n}{m} = \dfrac{\int_0^\infty x^n e^{-x}dx}{\int_0^\infty x^m e^{-x}dx \cdot \int_0^\infty x^{n-m}e^{-x}dx}$, este valor não representa mais o desejado, já que enquanto para todo n natural não nulo o conjunto $For_n(\Box\mathcal{L})$ é finito - ver definição do capítulo 5, no caso de $n \in \mathbb{R}_+^*$, nesta nova construção da linguagem não-enumerável, $For_n(\Box\mathcal{L})$ teria a cardinalidade do contínuo.

[8] Considerando que neste espaço métrico a métrica tem imagem densa em $\mathbb{R}_+^*$.

Afirmação I: Para toda bola aberta $B = B_d(w, \epsilon)$ de $F_{\bar{C}}$, $int(\overline{B}) \neq \emptyset$.

Justificativa. Suponhamos que $int(\overline{B}) = \emptyset$. Então $\overline{B} = FR(\overline{B})$.



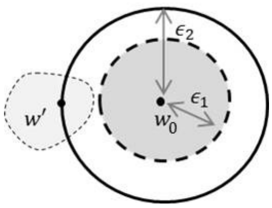
O conjunto B é vizinhança de w e, do fato de F_C ser localmente compacto, existe V vizinhança de w tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subseteq B$. A hipótese nos permite concluir que $V = int(V) \subseteq int(\overline{B}) = \emptyset$, ou seja, $V = \emptyset$, o que contradiz o fato de que pelo menos $w \in V$.

Da afirmação I podemos concluir que em $F_{\bar{C}}$, considerando a métrica induzida d, para todo $w \in W$ e $\epsilon > 0$, existe $w' \in W$ tal que $d(w, w') = \delta \leq \epsilon$, para algum $\delta > 0$ real[9].

Afirmação II: Não existe aberto básico $B = B_d(w_0, \epsilon_1)$ em que $\overline{B_d}(w_0, \epsilon_1) = \overline{B_d}(w_0, \epsilon_2)$, com $\epsilon_2 > \epsilon_1$, tais que não exista $w \in W$ e $\epsilon_1 < d(w_0, w) < \epsilon_2$[10].

Justificativa. Suponhamos que $U = B_d(w_0, \epsilon_1)$ seja uma vizinhança de w_0, que exista $\epsilon_2 > \epsilon_1$ tal que $\overline{U} = \overline{B_d}(w_0, \epsilon_2)$ e para todo $\epsilon_2 - \epsilon_1 < \delta < \epsilon_2$, não exista $w \in W$ tal que $d(w_0, w) = \delta$. Nesse caso teríamos abertos básicos "desconectados" com suas fronteiras.

Seja $w' \in FR(\overline{U})$, para toda vizinhança V de w', como w' é ponto de acumulação de U, segue que $V - \{w'\} \cap U \neq \emptyset$.



Tomemos $V = B_d(w', \epsilon_2 - \epsilon_1)$. Por um lado, da afirmação I temos que V é não-unitária, por outro, devido a construção, segue que $V \cap U = \emptyset$, o que contraria o fato de w' ser ponto de acumulação de U.

Afirmação III: Não existe $B = B_d(w_0, \epsilon)$ aberto básico com fronteira vazia.

Justificativa. Suponhamos que exista $B = B_d(w_0, \epsilon)$ tal que $FR(B) = \emptyset$. Então, $\overline{B} = B$ (*). Sabemos que B possui um número não enumerável de elementos e $int(\overline{B}) \neq \emptyset$

9 Esse fato é válido para o modelo canônico F_C da linguagem enumerável.

10 De fato, para que a existência de tal δ seja garantida, independentemente dos valores de ϵ's, é necessário o fato da linguagem ser não-enumerável. Notemos que para isto bastaria que o conjunto imagem da métrica fosse *denso*. Utilizando a estratégia do capítulo 5, se $i \in \mathbb{R}_+^*$ então $\frac{1}{i+1} \in]0, 1[$ e a imagem (da métrica) seria, de fato, o próprio intervalo aberto.

(afirmação I); do fato de que $\overline{B} = B \cup B'$ e da igualdade (*) segue que todos os pontos de acumulação de B são seus elementos.

Construamos uma sequência de Cauchy (a_n) de pontos em B.

Das afirmações I e II sabemos que se B for aberto básico, então $\overline{B_d}(w_0, \epsilon) = \{w \in W \mid d(w_0, w) \leq \epsilon\}$ e, para todo $0 < \delta \leq \epsilon$, existe w tal que $d(w_0, w) = \delta$.

Seja $a_0 = w_0$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, definamos $a_n = w_n$ da seguinte forma:

O elemento w_n é escolhido do seguinte conjunto - com $\epsilon > 0$ arbitrário:

$$C_n = \{w \in W \mid d(w_0, w) = \epsilon(1 - \frac{1}{n+1})\} \bigcap \{w \in W \mid d(w_{n-1}, w) = \epsilon(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\}$$

De fato, para todo n natural, C_n é não vazio.

Para $n = 1$ temos: $\{w \in W \mid d(w_0, w) = \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{w \in W \mid d(w_0, w) = \frac{\epsilon}{2}\} \neq \emptyset$, de acordo com as afirmações anteriores. Assim, existe $w_1 \in W$ tal que $a_1 = w_1$.

Notemos que para $k \in \mathbb{N}$, C_k é conjunto de pontos que satisfazem $d(w_0, w_{k-1}) + d(w_{k-1}, w_k) = \epsilon(1 - \frac{1}{k}) + \epsilon(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \epsilon(1 - \frac{1}{k+1}) = d(w_0, w_k)$, das afirmações anteriores segue que $C_k \neq \emptyset$.

A sequência (a_n) é, de fato, uma sequência de Cauchy (ver definição B.1.30), pois:

$d(w_1, w_2) = \frac{\epsilon}{6}$

$d(w_2, w_3) = \frac{\epsilon}{12}$

$d(w_3, w_4) = \frac{\epsilon}{20}$

$\vdots$

$d(w_{n-1}, w_n) = \frac{\epsilon}{n(n+1)}$, que tende a zero quanto maior o valor de n.

Além disso, seus pontos, em relação à w_0, se comportam da seguinte maneira:

$d(w_0, w_1) = \frac{\epsilon}{2}$

$d(w_0, w_2) = \frac{2}{3}\epsilon$

$d(w_0, w_3) = \frac{3}{4}\epsilon$

$\vdots$

$d(w_0, w_n) = \frac{n}{n+1}\epsilon$

A sequência está bem formada e cada um de seus elementos pertence a B (segue das afirmações I, II e da definição de bolas abertas em espaços métricos). Seu limite $\overline{w}$

satisfaz $d(w_0, \overline{w}) = \epsilon$ e é dado por:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \overline{w}$$

Mas $F_{\bar{C}}$ é espaço métrico completo, ver teorema B.1.16, logo $\overline{w} \in \overline{B}$, ou seja, $\overline{w}$ é um ponto acumulação de B que não está em B (contradição).

Portanto, para todo $w_0 \in W$ e para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $FR(B_d(w_0, \epsilon))$ é sempre não-vazio.

As afirmações I, II e III nos garantem que em certos aspectos (tratados na análise topológica do modelo topo $S4$-canônico) as bolas abertas do espaço métrico $F_{\bar{C}}$, induzido pela base $\mathfrak{B}$, comportam-se localmente "como" bolas abertas do espaço euclidiano com a métrica usual.

Para demonstrar o resultado, iremos utilizar o teorema B.1.11, mostrando que $F_{\bar{C}}$ é localmente conexo por caminhos. Para isso, dado um ponto w_0 em W e uma vizinhança U de w_0, construiremos um caminho entre w_0 e w_1, pontos distintos de U (ver definições B.1.25 e B.1.27).

Seja w_0 um ponto de W e U uma de suas vizinhanças. Como F_C é metrizável, existe uma bola aberta $B = B_d(w', \epsilon_1)$ que contém w_0 e está contida em U. Do teorema 5.3.13 sabemos que tal bola aberta possui um número não-enumerável de elementos. Seja então $w_1 \in B$ um ponto distinto de w_0, logo $d(w_0, w_1) = \gamma < 2\epsilon_1$.

Das afirmações I, II e III sabemos que se $t \in [0, 1]$, então o conjunto dado por $\overline{B_d}(w_0, \gamma t) \cap \overline{B_d}(w_1, \gamma(1-t)) = A_t$ é não-vazio[11]. Além disso, para cada elemento em $w \in \overline{B_d}(w_0, \gamma t)$ ou $\overline{B_d}(w_1, \gamma(1-t))$, tem-se $d(w, w') < \epsilon_1$, i.e., w pertence a B.

Construamos um conjunto $D \subseteq B$ da seguinte forma:

Seja $D_0 = \{w_0\}$

Para todo t no intervalo $(0, 1)$, façamos a seguinte construção:

$$A_t = \overline{B_d}(w_0, \gamma t) \cap \overline{B_d}(w_1, \gamma(1-t))$$

Como A_t é não vazio, escolhemos $w_t \in A_t$ em cada passo, fazendo:

$$D_t = (\bigcup_{0 \leq t' < t} D_{t'}) \cup \{w_t\}$$

[11] Novamente, este resultado só é possível pela quantidade não-enumerável de fórmulas bem formadas na linguagem.

Por fim, seja $D = (\bigcup_{0 \leq t < 1} D_t) \cup \{w_1\}$.

Agora, seja $f : [0,1] \to W$ definida da seguinte forma: $f(t) = w_t \in D$, em que w_t foi acrescentado à coleção D no passo t de construção.

1) Por construção temos que $Im(f) = D \subseteq B$.

2) f é monotônica.

Sejam $t_1 \leq t_2$ elementos de $[0,1]$. Então $d(w_0, f(t_1)) \leq d(w_0, f(t_2))$, por construção. Nesse sentido, iremos afirmar que $f(t_1) \preceq f(t_2)$.

3) A construção nos garante que $f(0) = w_0$ e $f(1) = w_1$.

4) f é contínua em todo ponto $t \in [0,1]$.

De fato, pela definição de continuidade, se ϵ for maior ou igual a 2γ, já que $d(f(t_1), f(t_2)) \leq \gamma$ para todo par de pontos $f(t_1)$ e $f(t_2)$ de D, teríamos a continuidade. Então, sejam os casos a seguir para $0 < \epsilon < 2\gamma$.

a) f é contínua no ponto 0.

Para cada ϵ, existe $\delta = \frac{\epsilon}{\gamma}$ tal que se $d(0,t) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(0), f(t)) < \epsilon$.

De fato, se $t \in [0,1]$ e $d(0,t) < \frac{\epsilon}{\gamma}$, então $t < \frac{\epsilon}{\gamma}$, mas $d(f(0), f(1)) = d(w_0, w_t) = \gamma \cdot t < \gamma \cdot \frac{\epsilon}{\gamma} = \epsilon$.

b) f é contínua no ponto 1.

Para cada ϵ, existe $\delta = 2 - \frac{\epsilon}{\gamma}$ tal que se $d(t,1) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(t), f(1)) < \epsilon$.

De fato, se $t \in [0,1]$ e $d(t,1) = 1 - t < 2 - \frac{\epsilon}{\gamma}$, então $t > 1 - \frac{\epsilon}{\gamma} \;\Rightarrow\; \gamma(1-t) < \epsilon$, mas $\gamma(1-t) = d(w_1, w_t) = d(f(t), f(1)) < \epsilon$.

c) f é contínua em $t \in (0,1)$.

Como f é monotônica, dado $t^* \in (0,1)$, sabemos que $d(w_0, w_{t^*}) \leq d(w_0, w_1)$.

Caso i) Suponhamos que $t \leq t^*$; dado ϵ nas condições indicadas, existe $\delta = \frac{\epsilon}{\gamma}$ tal que se $d(t, t^*) < \frac{\epsilon}{\gamma} \;\Rightarrow\; t^* - t < \frac{\epsilon}{\gamma} \;\Rightarrow\; \gamma(t^* - t) < \epsilon$.

Mas $\gamma(t^* - t) = d(w_0, w_{t^*}) - d(w_0, w_t)$ e, para w_t e w_{t^*} elementos de D nessas condições, $d(w_0, w_t) + d(w_t, w_{t^*}) = d(w_0, w_{t^*})$ (por construção), logo $d(w_t, w_{t^*}) < \epsilon$.

Caso ii) Suponhamos que $t^* \leq t$, dado ϵ nas condições indicadas, existe $\delta = 2 - \frac{\epsilon}{\gamma}$ tal que se $d(t, t^*) < \delta$ então $d(f(t), f(t^*)) < \epsilon$. O argumento é obtido combinando as construções do caso i) anterior e do caso b).

Logo, de a), b) e c) segue que f é contínua.

Das afirmações anteriores temos que f é um caminho entre w_0 e w_1, pontos pertencentes a uma vizinhança de w_0, o que era necessário para provar que $F_{\bar{C}}$ é localmente conexo por caminhos.

■

Quando a linguagem é não-enumerável seria possível fazer aparecer o contínuo no modelo canônico, a partir do qual teríamos, como vimos, a conexidade local do espaço lógico proveniente da estrutura canônica (teorema da completude). Assim, se supuséssemos uma "linguagem" (mesmo que finitária) em que os fatos do mundo são sua própria denotação, **S4** compartilharia com os espaços físico e de representação outras propriedades geométricas-elementares locais (ganhamos a conexidade a partir da "continuidade")[12].

Na linguagem enumerável, portanto, tal similaridade local (e não homeomorfismo) entre espaço físico (euclidiano), lógico e de representação reforça a tese de que a necessidade metafísica, se interpretada por $\Box$ na lógica **S4**, não coincide com a necessidade física. Defendo neste trabalho que a partir das premissas assumidas, um filósofo nesta posição cética-moderada pode defender que se há leis que norteiam o espaço argumentativo sobre questões metafísicas (contexto racional), então ele poderia optar por apontar as leis de **S4** como reguladoras de argumentos sobre problemas relativos à noção de *ser*, necessidade/contingência, ou mesmo existência e essência (assumindo **FOS4** por lógica sustentadora), supondo que este assuma tal posição defensora de certos elementos empíricos que balizam a razão no fluxo de seus processos inferenciais. De fato, esta "triangulação" (fraca) entre **espaço físico**, **espaço lógico** e **espaço de representação** seria fundamento para tal defesa. Com ela, nos aproximamos da tese de Tomás de Aquino, para quem a verdade ontológica é distinta da verdade humana, ver capítulo 3, já que para ele apenas construímos representações que nos auxiliam a aproximar e adequar nosso intelecto às coisas.

Ao passarmos para a lógica modal quantificada, além de podermos utilizar ferramentas mais refinadas para falarmos "sobre as coisas" do mundo, conseguimos obter a própria estrutura canônica para **FOS4** para reforçar este argumento, pois é uma estrutura

[12] O fato de perdermos a demonstração da compacidade para esta estrutura - demonstração construída no capítulo 5 - implicaria duas possibilidades: 1. há uma outra forma de demonstração da sua compacidade ou 2. a métrica precisaria ser definida de forma diferente, para satisfazer as características desejadas em consequência do teorema da completude para **S4**. Investigar qual seria esta "forma" de exibição desta métrica para esta nova estrutura topológica, com a mudança da linguagem, é de interesse técnico para investigação posterior.
Há também uma outra possibilidade, avaliar uma nova forma de incluir o contínuo no modelo, sem perdermos a demonstração da compacidade, como delineado no capítulo 5. Para isso, poderíamos utilizar uma linguagem enumerável, agora indexada por $\mathbb{Q}_+$, porém infinitária. Embora seja de interesse filosófico, sobretude técnico, ambos os casos i) linguagem não-enumerável e finitária ou ii) linguagem enumerável e infinitária, não satisfazem os critérios levantados para esse trabalho nas hipóteses levantadads no capítulo 1, nos quais se baseia a argumentação construída neste trabalho.

categorial “completa” (topos)[13], sendo que as categorias teriam por objetivo fundamentar toda a matemática em sua completa generalidade, pois como Badiou afirma: “Matemática **é** ontologia” - (BADIOU, 2014), p. 48 - grifo nosso.

Como defendido por (LAUTMAN, 2011), as categorias existem para evitar toda “redução infinita”, pois com elas podemos descrever a estrutura de qualquer coisa; como a estrutura da experiência não pode dissociar-se da experiência em si, e se a “estrutura matemática” utilizada coincide com o sistema que possibilita a mensuração do experimento, então “A natureza do real somente pode ser conhecida ao ascendermos às ideias cujas conexões podem ser encapsuladas pela ciência” - (LAUTMAN, 2011), ver cap. 6, tradução livre. Aqui *ciência* deve ser entendida como corpo de ferramentas para interpretarmos e mensurarmos a experiência.

Vale ressaltar a relação entre essa representação imagética e os pressupostos assumidos neste trabalho de distinguir fenômeno, uma emanação do mundo (portanto um fato imanente ao mundo), do mundo em si (ou de sua estrutura), que só pode ser abarcado “fora” dele, já que se encontra “ali” em sua totalidade; o mundo não pode ser dissociado do juízo que fazemos sobre ele, pois a experiência que temos do mundo, assim como todo juízo de valor sobre ele, também é um fato deste mundo que pretendemos avaliar. O máximo que podemos fazer é procurar vislumbrá-lo (o mundo como totalidade) ao “abstrairmos” sua estrutura racionalmente, a partir das facetas que experienciamos de sua própria imanência, sendo nós mesmos partes de tais manifestações.

Desta forma, tal *triangulação* entre os espaços[14] (físico - lógico - representação), que emerge do experimento intelectual realizado neste trabalho, apoiada na defesa de Blaga da matemática como *par metodológico* de toda experiência, acrescentando a isso a perspectiva de que a matemática tem papel fundamental na inquirição metafísica - na perspectiva analítica, já que ela é suporte, associada à lógica, para a formalização das ferramentas utilizadas - nos mostra uma conformidade do experimento com a experiência humana do mundo vivido, para além do empírico, do fenômeno. Assim, a inteligibilidade (racional) entre o representado, o lógico e o experienciado seria prova da própria inteligibilidade do *cosmos*.

Acredito que com isso, segundo a hipótese Husserliana [H 1.3], emprestamos à investigação filosófica certo rigor, em similitude ao que ocorre nas experiências das ciências naturais, salvaguardando assim o aspecto científíco desse empreendimento. De fato, não mais científico do que aquelas, já que, conforme afirma Lautman:

> "No desejo de suprimir as conexões entre pensamentos e realidade, na negação em dar à ciência o valor espiritual da experiência, o risco é ter somente as

[13] Ou seja, podemos utilizar as ferramentas internas para interpretar os conectivos lógicos - portanto estrutura vista como semântica.

[14] Estes sustentados em um substrato primevo, *a priori*, o espaço metafísico - ver capítulo 1.

sobras de uma ciência."(ver (LAUTMAN, 2011), p. 30. Tradução livre).

Ou seja, resgato o termo “experiência”[15] de uma interpretação desvirtuada (ver capítulo 1), no qual somente uma ciência com critérios “objetivamente mensuráveis” poderia nos informar sobre *algo* do mundo, bem como revisto de determinado rigor a esse empreendimento intelectual, mostrando que sobre o campo em que as “ciências duras” não podem chegar, ou temos a inquirição metafísica[16] para nos apoiar, ou temos o “indizível”, restando-nos deixar que o mundo se “mostre” a nós.

[15] Ver nota 28, subseção 1.2.2, do presente trabalho.
[16] Ou seja, o campo contemplativo (teorético).

Em uma Perspectiva Analítica

Acredito que o conteúdo de noções modais possa ser apreendido pela análise filosófica, que é enriquecida pelo uso de experimentos intelectuais, modelos que guiam a razão na investigação do que é "possível" - em um sentido impreciso da palavra. Embora as intuições sejam necessárias para a operação da razão, não podemos investigar os limites do possível simplesmente observando o que pode ser imediatamente percebido (sentidos); a sensibilidade e a intuição guiam a razão, mas os limites do imaginável extrapolam o meramente apercebido pela experiência humana - tal extrapolação se deve à capacidade de abstração da razão. É inteligível a forma como podemos indicar o *modo* com o qual falamos sobre as coisas do mundo, seu sentido depende da maneira com que embasamos seu uso. Portanto, nesse trabalho, rejeito as posições *cética modal* ou *expressivista*.

Devido nossas limitações epistêmicas (ver hipótese H 1.4), só podemos operar inteligivelmente nos limites de nossa linguagem e do que pode ser construído - diretamente ou indiretamente, por meio do processo de abstração - a partir de dados de nossa intuição sensível (ver hipóteses H 2.3 e H 2.4). Dependemos dos dados dessa intuição para formação de conceitos e juízos, e mesmo a representação desses está limitada por aquilo que pode ser exprimido por nossa linguagem. Portanto, adoto uma posição pragmática em relação ao uso de noções modais: noções mais básicas (em certo sentido mais imediatas) podem *explicar* o sentido do que seja metafisicamente necessário (possível), mas não podemos reduzir essas noções a outra(s) noções modais, mais elementares; isto evita o risco de entrarmos em uma cadeia de conceitos sem raiz. Por essa perspectiva, a noção de mundos possíveis (contrafatuais) - sejam eles objetos concretos ou não - pode ser usada como método heurístico para a análise de situações "possíveis". O mundo atual passa assim a ter certa prioridade frente a outros mundos possíveis, na medida em que é o referencial (indexical) a partir do qual os fatos de outros estados de coisas serão imaginados ou abstraídos: o homem se torna referencia para o que é intuível e cognoscível. Essa posição pode parecer, à primeira vista, soberba, mas na realidade ela pretende reconhecer os limites impostos àquilo que pode ser ao homem conhecido.

Por serem ferramentas heurísticas, consideremos "mundos possíveis" como substitutos de nosso mundo (ou parte dele); são utilizados para explorarmos as noções de possibilidade e necessidade para configurações de estados de coisas "representáveis" ao homem. Consideremos esses mundos como representações não-linguísticas - representações das coleções de fatos que os compõem. A linguagem lógica servirá como método de representação formal (linguística) dos fatos (ou proposições) que compõem esses mundos. Logo, a noção de verdade (necessidade e/ou possibilidade) reside na relação entre esses "mundos" - como re-presentação de entidades existentes, concretas ou meramente inteligíveis - e as sentenças da nossa linguagem que denotam esses fatos.

Então, para além dos dados sensíveis intuídos, como embasar racionalmente (conceitualmente) discussões metafísicas?

O ser, na sua mais completa generalidade, relaciona-se àquilo que *é* algo - a noção aristotélica do ser se "corporifica" no ente tomista. Como defende Aquino, as essências são aquilo que individualizam cada ente particular - em linguagem platônica, o que singulariza o particular em relação à sua forma, ou *eidos*; as essências tomistas são princípios individualizantes das formas (universais).

O princípio individualizante de Duns Escoto - heccedidade - é uma determinação a partir do interior do indivíduo, mas que não é igual ao princípio de identidade. Ele é aquilo que faz o objeto a ser a, não o princípio que determina que $a = a$. Tal definição é coerente com o quadro de propriedades essenciais aristotélicas, como delineado por Viviane Figueiredo em (FIGUEIREDO, 2012), ver capítulo 3.

De acordo com Ockham, necessitamos do conhecimento intuitivo (para ele sensível ou intelectual - operação da razão sobre os dados recebidos pela sensibilidade) para obtermos conhecimento da realidade: portanto, tal conhecimento reside na esfera do contingente (ver (COSTA-LEITE, 2012)). Seria por meio do processo de abstração (razão + análise da repetição (sensível) de muitos singulares) que obteríamos conhecimentos universais e necessários. Portanto, os universais seriam apenas formas de intuição lógica na série de relações que formamos a partir da abstração de conteúdos intuitivos aos quais somos expostos. Vemos a forte similaridade com uma tese kantiana (ver (HANNA, 2005)), para quem o necessário está em função daquilo que podemos abstrair a partir do que é (sensivelmente) intuído e daquilo que podemos formular na dimensão lógica (linguagem).

Podemos então argumentar que as noções modais (metafísicas), ao invés de serem reduzidas[17], como mera organização definicional, à noções "essenciais", possam ser analisadas à partir do recurso explicativo que a noção de *essência* possui - sem nos preocuparmos com uma definição fundacional desse conceito (um tanto nebuloso). As "essências" de objetos e indivíduos, se existirem, são ferramentas para a investigação das modalidades metafísicas. Não nos comprometendo com a redução das noções modais à noção de "essência", não precisamos nos comprometer com a justificação dessa última: podemos compreender portanto *essência*, se for o caso, como ferramenta heurística. Todavia, parece-me mais objetivo considerar a ideia de uma "heccedidade" cumprindo tal função, uma característica que aponta para a univocidade de um ente, em contraposição com o conceito de essência - que carrega uma história muito mais intrincada de desenvolvimento intelectual[18]. Pela

[17] Ver subseção 1.3.2, capítulo 1, e a natureza "irredutível" dos juízos metafísicos em Kant.

[18] Em certo sentido, a essência de a poderia ser apreendida pela homem; portanto na linguagem idealizada $\mathcal{L}$, finitária e enumerável, usada para denotar os fatos do *mundo*, isto poderia ser formalmente exibido, como possibilidade lógica: verdades necessárias de todos os indivíduos que fosses contrapartes entre si - ver capítulo 7, essências exemplificadas. Já a heccedidade, esta residiria para além do formal, na complexidade do ente em si.

finitude experienciada pelo homem, todavia, essa caraterística do indivíduo pode "escapar" do nosso conhecimento, o que não implica que ela não nos seja inteligível; é tão inteligível que podemos discutir a respeito de sua natureza; porém, essa natureza - em geral, devido à complexidade dos indivíduos - transcende à capacidade humana de abarcá-la completamente. Portanto, tal característica "individualizante" é essencial ao objeto - caso contrário, ele deixaria de ser o que é, já que o que é, o é em função dessa característica. Sobre ela podemos dizer: 1) é de fato uma propriedade ou característica interna à "essência" das coisas; 2) caso as coisas não possuíssem essências, mas se caracterizassem apenas como um feixe das propriedades que possuem, então o conjunto de todas as coisas que lhe são essenciais poderia ser expresso pelo método descritivo usado por Kripke, por exemplo, por meio do operador λ, de forma que essa "heceddidade" nada mais seria do que uma abreviação para $\lambda x(Fx \wedge Gx \wedge \ldots)$ - em uma linguagem não-enumerável e infinitária.

Em vista disso, me posiciono contra um *monismo modal* e um *pluralismo modal*. Um único tipo de modalidade é incapaz de ser fundamento para todos os outros, assim como nenhum grupo de modalidade é capaz de fundamentar "todos" os outros - cada um opera em seu espaço de especificidade. A necessidade de certos tipos de sentenças não é abarcada pelo fato alético do que é metafisicamente possível ou necessário, pois isso diz respeito ao que é possível de ser conhecido (intuído/abstraído) pelo homem. Como Guilherme de Ockham aponta, somente esse conhecimento, intuição sensível e intelectual, atesta a existência ou não de uma realidade, portanto o conhecimento dos não-complexos (fatos brutos ou atômicos do mundo) é que assegura a possibilidade humana para o conhecimento (do mundo).

Segundo Hintikka, não podemos reduzir a noção existencial a um predicado livre de quantificadores (existencial), e mesmo as descrições definidas de Russell são incapazes disso. Existem então certos pressupostos existenciais implícitos ao formalizarmos a "chamada" para determinado objeto em um sistema formal. O que ocorreria, então, se formalizássemos tais pressupostos por meio de um "predicado" para a existência? Para isso ser feito, como mostrou Hintikka, necessitamos do quantificador existencial e do predicado de igualdade. Como na lógica **FOS4** possuímos estas ferramentas, parece-me que tal lógica já pressupõe implicitamente a noção existencial - propriedade de *aporte existencial*, ver capítulo 6 - uma noção alargada que não se restringe à existência como mera concretude, mas à noção de existência a partir da inteligibilidade - ver seção sobre Meinongianismo, capítulo 3.

A partir destas observações, pretendo sustentar que ao discutirmos questões metafísicas, partindo das premissas detalhadas no capítulo 1, podemos adotar uma noção de existência "alargada", orientada pelo critério de inteligibilidade. Mais do que isso, defendo que em base destas premissas, a lógica **FOS4** pode representar o escopo das "leis metafísicas" que sustentam nossa argumentação para responder a estas questões metafísicas. Esse corpo de leis é mais alargado do que as leis lógicas clássicas, o que mostra-se ao percebermos, por exemplo, que a categoria $STONE$ é subcategoria de TOP, sendo formada por todos os espaços topológicos Hausdorff, compactos e totalmente desconexos e, como sabemos pelo teorema da dualidade de Stone, equivale à representação das propriedades elementares das álgebras booleanas - o que seria mais um argumento contra a axiomática para **S5** para sistemas metafísicos, se pensarmos na defesa de que o conjunto de leis lógicas (clássicas) fosse distinto das "verdades" metafísicas.

Porém, essa é uma defesa temporária. Se pudermos ampliar nosso entendimento sobre as propriedades locais do espaço físico apreendido e das teorias que sustentam sua representação racional, e identificarmos que nem mesmo localmente o espaço físico "é" euclidiano, essa posição precisaria (e deveria) ser revisada, pois neste caso, seria necessário procurarmos uma lógica que se assemelhasse às propriedades (locais e topológicas) desta nova "estrutura representacional" do espaço físico; e considerando, por exemplo, a hipótese H 1.3, tal característica de revisionabilidade torna-se uma qualidade para a forma de argumentação que proponho aqui.

Vale destacar que no centro de minha argumentação sobre a estrutura interpretativa para a lógica modal quantificada, em especial, ao ser interpretada no sentido alético, temos implicitamente a teoria das contrapartes de David Lewis. Embora não seja necessário assumirmos seu *realismo modal*, vimos como a noção de contrapartes articula - ver (KISHIDA, 2011) - mesmo que de maneira camuflada, as estruturas interpretativas para **FOS4** (estrutura fibrada), o que reforça o argumento apresentado por (WILLIAMSON, 2014) de que

> "Podemos assumir o realismo modal de (David) Lewis como um caso de estudo para o reaparecimento da metafísica especulativa na filosofia analítica contemporânea."(p. 8 - tradução livre)

No artigo, Williamson pergunta como a filosofia analítica, que nasceu tão fortemente contrária à metafísica, pode se desenvolver tão repentinamente em direção ao pólo oposto. Procurei analisar neste trabalho como é possível mediarmos algumas posições que, aparentemente, possam parecer opostas, mostrando como que pensando de uma forma "matematizável", podemos estudar um sistema lógico (por meio de seus modelos canônicos) e encontrarmos uma sustentação filosófica para certas teses metafísicas - pela triangulação entre o *espaço físico*, *espaço de representação* e *espaço lógico*. O resultado desta triangulação, a lógica **FOS4**, gesta em seu âmago certos aspectos formais do realismo modal - a teoria das contrapartes.

Ao me apoiar nas características dos modelos canônicos, acredito que atuo de acordo com "(A) metodologia de construção-de-modelos, que se mostrou tão bem sucedida nas ciências naturais", pois ela agora "pode ser aplicada na filosofia também, promovendo novos “insights” para problemas antigos.", ver (WILLIAMSON, 2014), p. 32 - tradução livre.

> "Assim, simplesmente usando os métodos da filosofia analítica de maneira crítica, pelos padrões contemporâneos, ganha-se certa sofisticação tanto em semântica, quanto em pragmática, independentemente da investigação filosófica em questão. Este é o legado robusto que a filosofia analítica da linguagem trouxe para toda a filosofia."(WILLIAMSON, 2014), p. 32 - tradução livre.

Considerações Finais

> "A Metafísica, como disposição natural da razão, é real, mas é também, tomada em si mesma apenas (...), [dialética] e enganadora. Querer, pois, tirar desta os princípios e seguir, no uso dos mesmos, uma aparência certamente natural, mas apesar de tudo falsa, eis o que nunca pode criar ciência, mas unicamente uma vã arte [dialética], onde uma escola poderá prevalecer sobre outra, mas nenhuma delas obterá alguma vez uma aprovação legítima e [duradoura]". ((KANT, 2008)), p. 163.

Porém, para Kant

> "(...) nada de mais absurdo se pode encontrar do que querer, numa metafísica, uma filosofia de razão pura fundar os seus juízos na verosimilhança e na hipótese. Tudo o que deve ser conhecido *a priori* é, por isso mesmo, dado como apoditicamente certo e deve, por conseguinte, ser assim também demonstrado."((KANT, 2008)), p. 168.

Dado que o pluralismo modal (evidenciado pelos contextos racionais em que certos *princípios lógicos* são válidos, enquanto outros não) faz desaparecer tal "certeza apodítica", se for possível uma metafísica, como ciência, ela terá de sê-lo em *outro caráter*, distinto daquele à qual Kant se refere no Prolegómenos.

Neste sentido, pretendi realizar uma "costura" da tradição, reconhecendo em que medida uma abordagem científica à metafísica, como corpo especulativo a ser redefinido, pode ser feita seguindo os modelos e ferramentas da tradição analítica, abordando tal especulação por meio da análise da linguagem, no sentido de formalização em sistemas lógicos.

Justificado, portanto, a partir da argumentação aqui apresentada, de que a necessidade lógica é "subconjunto" (próprio) da necessidade metafísica, firma-se a defesa de Wittgenstein de que a "lógica clássica", seus teoremas ou tautologias (sentido proposicional) não fala nada *novo* sobre o mundo. Em nossa linguagem de fibrados, constituem o que é verdadeiro nos "ramos". Já a necessidade metafísica está **além**, e pode ser investigada, sondada, a partir da relação entre *intuição* e *razão*. Usando **FOS4** para simular a noção de necessidade metafísica, ela de fato expressa não as verdades nos ramos, mas depende do que ocorre em uma "região local" (vizinhança)[19].

[19] De fato, embora o conceito de morfismo-topologia, de Ω em Ω, em um topos, não é equivalente à noção de topologia aqui utilizada (topologia geral), elas estão intrinsecamente entrelaçadas e, conforme bem colocado por ((BADIOU, 2014)), p. 282, Lawvere sugere que a interpretação natural para este operador deve afirmar que "é localmente o caso que".

De acordo com o quadro delineado por (FIGUEIREDO, 2012), conforme listamos no capítulo 3, a abordagem aqui adotada para embasar a interpretação das modalidades seria essencialista, embora, conforme acabamos de discutir, utilizo a noção de heccedidade para cumprir este papel primevo, a partir do qual podemos avaliar a necessidade e/ou possibilidade alética relativas aos indivíduos (modalidade *de re*). E se pensarmos nos limites da atuação das modalidades na corporificação de uma teoria metafísica, ver a posição de (FINE, 2005) como esboçamos no final da seção 3.1, elas poderiam ser embasadas na noção essencial de heccedidade, que escapa de uma definição formal, nascendo desta limitação espaço-intuitiva-racional que orienta a completude da lógica **FOS4**.

Vale lembrar que enquanto (WILLIAMSON, 2013) defende **S5** em segunda ordem como sistema lógico para modelar a formalização de argumentos metafísicos, aqui apresento um argumento em prol da justificação das leis lógicas demonstradas por **FOS4** como representantes da *forma* (gestalt) das "verdades metafisicamente necessárias"[20]. Mas ambas as lógicas possuem: i) necessidade da igualdade; ii) existência de uma relação entre sentenças negativas e fatos negativos (podemos dizer que 'é fato de um mundo w que p não é o caso'); iii) proposições têm status ontológico e iv) todos os componentes de uma proposição devem existir. Porém, mesmo em segunda ordem, **S5** teria a desvantagem que mencionamos de se relacionar às estruturas de espaços topológicos na categoria $STONE$ e, portanto, à "forma" dos teoremas da lógica clássica[21].

Vimos que a lógica **FOS4** cobre aspectos do realismo modal de D. Lewis, de fato a parte menos "contenciosa", princípios da teoria das contrapartes, e faz isso sem se comprometer com os problemas relacionados às *propriedades naturais* ou o *princípio de recombinação* - conforme vimos no capítulo 3. Precisamos apenas da noção de completude (clássica) em cada configuração maximal de **todos** os cenários logicamente possíveis para que possamos, posteriormente, tomarmos o fibrado destas configurações. Como experimento intelectual, como ferramenta de investigação, todos esses "mundos possíveis" têm o mesmo *status* ontológico que o mundo atual. Porém, o atual é privilegiado, pois determina: 1) a representação (critério de inteligibilidade) do que é "possível" e 2) a lógica interna de consistência (lógica clássica) para tal inteligibilidade. Porém, no sistema ele não tem primazia - de fato, ele só é especial, ou primevo, no sentido *ôntico*, mas não tem primazia *ontológica*.

A noção de mundo possível utilizada, como ferramenta de investigação intelectual, não é mera recombinação dos fatos do mundo atual, e sim um "modelo", na linguagem

[20] Devo reforçar que a linguagem idealizada que utilizamos impossibilita que pensemos na lógica **FOS4** com um sistema de "cálculo" destas verdades, ela apenas modela "a forma" lógica em que tais verdades *podem* ser inteligíveis ao homem, a partir desta posição cética-moderada defendida.

[21] Isto é, se desejarmos entender a forma com o qual os *princípios lógicos* da metafísica se manifestam na linguagem, embora idealizada, de maneira a distinguirmos as noções de necessidade lógica, metafísica e física. Como a linguagem é idealizada, não obtemos com isso um sistema para o "cálculo" dos *teoremas da metafísica*.

idealizada, de uma coleção consistente de fatos do *mundo* entendido em sua totalidade - *cosmos*. Esse cosmos é composto por uma infinidade de mundos possíveis que representam configurações maximais inteligíveis ao homem. Portanto, utilizamos o *poder expressivo* do termo para representar uma combinação de algo que podemos ter uma “vaga” representação (figuração mental). Desta forma, um mundo possível apenas substitui, em nosso espaço de representação, o complexo de tais “possiblidades” de fato - dado a consistência interna. E somente neste ponto, na inteligibilidade do que seria consistente - a partir das noções sensíveis elementares da intuição espacial, que nos dão *graus de confiabilidade* para o processo racional - é que o mundo atual teria status privilegiado.

Restaria agora, portanto, esclarecidos os limites para os quais uma “metafísica científica” fosse possível, e a “forma” com o qual poderíamos inferir suas teses, em uma linguagem formal finitária e enumerável, idealizada, por meio de um construto coletivo e inter-geracional, não como uma construção sistemática individual, total e dogmática, explorarmos a infinidade de possibilidades especulativas sobre essa *ciência mais geral*, entendendo que assim como as ciências naturais, ela teria, de alguma forma, fundamentos na experiência, movendo-se *pela* experiência (experimentos intelectuais), sempre aberta a questionar e revisar seus próprios fundamentos, aperfeiçoando-se junto do alargamento de nosso conhecimento científico sobre o espaço que nos cerca, de paradigma em paradigma, em direção a um quadro cada vez mais coerente deste substrato ao qual nos referimos como “mundo exterior”, mas também desta consciência que o apreende enquanto apreende a si mesma.

Referências

ACKERMANN, W.; HILBERT, W. *Principles of Mathematical Logic*. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1968.

AIELLO, M.; VAN-BENTHEM, J.; BEZHANISHVILI, G. Reasoning about space: The modal way. *Journal of Logic Computer*, n. 3, p. 889–930, 2003.

ANTISERI, D.; REALE, G. *História da Filosofia*. São Paulo: Editora Paulus, 2003. v. 1.

ANTISERI, D.; REALE, G. *História da Filosofia*. São Paulo: Editora Paulus, 2003. v. 4.

ANTISERI, D.; REALE, G. *História da Filosofia*. São Paulo: Editora Paulus, 2003. v. 2.

ARISTÓTELES. *Categorias*. São Paulo: Edipro, 2011.

ARISTÓTELES. *Metafísica*. São Paulo: Edipro, 2012.

ARISTÓTELES. *Organon*. São Paulo: Edipro, 2016.

AWODEY, S.; KISHIDA, K. Topological completeness of first-order modal logic. 2012.

BADIOU, A. *Mathematics of the Transcendental*. New York: Bloomsbury Academic, 2014.

BARBOSA, F. V. Política linguística e ensino de português como segunda língua. In: ______. *Libras em Estudo: Política Educacional*. São Paulo: Feneis, 2013.

BELL, J. L.; SLOMSON, S. B. *Models and Ultraproducts*. 2. ed. London: North-Holland Publishing Co., 1971.

BELNAP, N. Notes on the science of logic. 2009.

BENSUSAN, H.; COSTA-LEITE, A.; DE-SOUZA, E. G. Logics and their galaxies. 2015.

BENTHEM, J. V.; BEZHANISHVILI, G. Handbook of spatial logics. In: ______. Amsterdam: Springer Netherlands, 2007. cap. Modal Logics of Space.

BENVENISTE, E. Categorias de pensamento e categorias de língua. 1966.

BERGSON, H. Defining metaphysics. In: ______. *Classics in Logic*. São Paulo: Philosophical Library, 1963.

BLACKBURN, P. R.; VENEMA, M. Y. *Modal Logic*. London: Cambridge Press, 2002.

BLAGA, L. *O Experimento e o Espírito Matemático*. São Paulo: Editora É Realizações, 2014.

BOBZIEN, S. Lógica. In: ______. *Os Estóicos*. São Paulo: Editora Odysseus, 2006.

BORGHINI, A. *A Critical Introduction to the Metaphysics of Modality*. London: Bloomsbury Academic, 2016.

BRENTANO, F. *Brentano*. London: The Cambridge Companion, 2004.

BURGESS, J. P. Which modal models are the right ones (for logical necessity)? *Theoria*, v. 18, 2003.

BUTTON, T.; WALSH, S. *Philosophy and Model Theory*. London: Oxford University Press, 2018.

CARNAP, R. Der raum: ein beitrag zur wissenchaftslehre. In: _____. *Kant Studien*. [S.l.: s.n.], 1922.

CARNAP, R. *Der Logische Aufbau der Welt*. Berlin: Werltkreis Verlag, 1928.

CARNAP, R. *Logical Syntax of Language*. New York: Routledge, 2000.

CARNAP, R. *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*. Toronto: Clarke Press, 2013.

CHATEAUBRIAND, O. Lógica, ontologia e epistemologia. In: _____. *Logical Forms: Truth and Description*. [S.l.]: CLE - UNICAMP, 2001.

CHAUÍ, M. *A Nervura do Real. Imanência e Liberdade em Espinosa*. São Paulo: Companhia Das Letras, 1999. v. 1.

CHAUÍ, M. Necessidade e contingência na modernidade. In: _____. São Paulo: Editora Bacarolla, 2009. cap. Da Metafísica Contingente à Ontologia do Necessário: Espinosa.

CHELLAS, B. *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

COPELAND, B. J. The genesis of possible worlds semantics. *Journal of Philosophical Logic*, n. 31, 2002.

COSTA-LEITE, A. Lógicas da justificação e quase-verdade. *Principia*, v. 18.

COSTA-LEITE, A. Fronteiras contingentes e conhecimento limitado. *Revista Brasileira de Filosofia*, n. 238, 2012.

COSTA, M. W. A. *Lógica e Metafísica da Modalidade*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — UFPR, Curitiba, 2013.

CRESSWELL, M. J.; HUGHES, G. *A New Introduction to Modal Logic*. London: Routledge, 1996.

DA-COSTA, N. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. London: Routledge, 1996.

DEDEKIND, R. *La Création des Nombres*. Paris: Librairie Philosophique J. VRIN, 2008.

DESCARTES, R. *Meditações Metafísicas*. São Paulo: Edipro, 2001.

DUMMETT, M. Truth and other enigmas. In: _____. Cambridge: Harvard University Press, 1978. cap. Can Analytical Philosophy be Sistematic and Ought it to Be?

DUMMETT, M. *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge: Harvard University Press, 1993.

ESPINOSA. *Ética*. São Paulo: Editora Autêntica, 2009.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FAJARDO, R. A. dos S. *Lógica Matemática*. São Paulo: EDUSP, 2017.

FEITOSA, H. A. Tópicos de lógicas não clássicas. In: _____. Florianópolis: Editora UFSC, 2015. cap. Models for the Logic of Tarski Consequence Operator.

FEITOSA, H. A. et al. Sobre a compacidade lógica e topológica. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 2, p. 118–126, 2013.

FEYERABEND, P. *Adieu la Raison*. Paris: Éditions du Seuil, 1989.

FIGUEIREDO, V. V. *Caracterização Definicional e Modal da Noção de Essência, Segundo o Artigo "Essência e Modalidade"de Kit Fine*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — UFRJ, Rio de Janeiro, 2012.

FINE, K. Essence and modality. *Philosophical Perspectives 8: Logic and Language*, 1994.

FINE, K. *Modality and Tense*. London: Oxford: Clarendon, 2005.

FITTING, M.; MENDELSOHN, R. L. *First-Order Modal Logic*. New York: Springer, 1998.

FORSTER, T. Intensionality. In: _____. San Diego: Association For symbolic Logic, 2005. cap. The Modal Aether.

FREGE, G. *Lógica e a Filosofia da Linguagem*. São Paulo: EDUSP, 2009.

FREGE, G. *Os Fundamentos da Aritmética: Uma Investigação Lógico-Matemática sobre o Conceito de Número*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

FREYD, P. Aspects of topoi. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Sidney, v. 7, 1972.

FRIEDMAN, M. Synthese. In: _____. [S.l.]: Association For symbolic Logic, 2012. cap. Kant on Geometry and Spatial Intuition.

FRIEDMAN, M. From intuition to tolerance: The development of carnap's philosophy of mathematics. *Kant's Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, London, v. 2, 2015.

FURTADO, F. R. *Será S5 o Sistema de Lógica Modal Correto para a Modalidade Metafísica?* Dissertação (Dissertação de Mestrado) — UFMG, Belo Horizonte, 2014.

GILSON, E. *A Filosofia na Idade Média*. São Paulo: Martins Fontes, 2013.

GÖDEL, K. Ergebnisseeines mathematischen kolloquiums. In: _____. [S.l.: s.n.], 1933. v. 4, cap. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, p. 39–40.

GÖDEL, K. O teorema de gödel e a hipótese do contínuo. In: _____. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2009. cap. Acerca de Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Relacionados.

GOETHE, J. W. *Fausto*. Martin Claret: São Paulo, 2018.

GOLDBLATT, R. *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. 2. ed. New York: Dover Publications, 2006.

GORSKY, S. B. *A Semântica Algébrica para as Lógicas Modais e seu Interesse Filosófico*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Unicamp, Campinas, 2008.

GRIER, M. Kant's Critique of Metaphysics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

HAACK, S. *Filosofia das Lógicas*. São Paulo: Editora Unesp, 1998.

HADOT, P. *Exercícios Espirituais e Filosofia Antiga*. São Paulo: Editora É Realizações, 2014.

HAKLI, R.; NERI, S. Does the deduction theorem fail for modal logic? 2010.

HANNA, R. *Kant e os Fundamentos da Filosofia Analítica*. São Paulo: Editora Unisinos, 2005.

HEGEL, G. W. F. *Ciência da Lógica: 1. A Doutrina do Ser*. São Paulo: Editora Vozes, 2016.

HEIDEGGER, M. *Ser e Tempo*. 10. ed. São Paulo: Editora Vozes, 2018.

HINTIKKA, J. *Models for Modalities*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Companny, 1969.

HUME, D. *Tratado da Natureza Humana*. São Paulo: Editora Unesp, 2000.

HUSSERL, E. *The Idea of Phenomenology*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

HUSSERL, E. The new yearbook for phenomenological and phenomenological philosophy ii. In: ______. [S.l.: s.n.], 2002. cap. Philosophy as Rigorous Science.

JAEGER, W. *Paideia*. São Paulo: Martins Fontes, 2018.

JECH, T. *Introduction to Set Theory*. 3. ed. New York: CRC Press, 2017.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. São Paulo: Martin Claret, 2002.

KANT, I. *Prolegómenos a Toda a Metafísica Futura*. Lisboa: Edições 70, 2008.

KELLEY, J. L. *General Topology*. New York: Springer, 1991.

KELSEN, H. *Teoria Pura do Direito*. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2019.

KISHIDA, K. *Generalized Topological Semantics for First-Order Modal Logic*. Tese (Tese de doutorado) — University of Pittsburg, Pittsburg, 2011.

KNEALE, W.; KNEALE, M. *O Desenvolvimento da Lógica*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1962.

KONYNDYK, K. *Introductory Modal Logic*. Indiana: University of Notre Dame Press, 2008.

KREMER, P. Strong completeness os s4 for any dense-in-itself metric space. *Rev. Symbolic Logic*, n. 6, p. 545–570, 2013.

KREMER, P. Quantified s4 in the lebesgue measure algebra with a constant countable domain. 2014.

KRIPKE, S. A completeness theorem in modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 24, p. 1–14, 1959.

KRIPKE, S. Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, p. 83–94, 1963.

KUHN, T. *A Estrutura das Revoluções Científicas*. São Paulo: Editora Perspectiva, 2013.

KUNZMANN, P.; BURKARD, F. P.; WIEDMANN, F. *Atlas de la Philosophie*. Paris: La Pochothèque, 2016.

LANDIN, R. L. Questões disputadas de metafísica e de crítica do conhecimento. In: _____. São Paulo: Discurso Editorial, 2009. cap. Idealismo ou Realismo na Filosofia Primeira de Descartes no IV. Paralogismo da CRP [A].

LANDIN, R. L. Questões disputadas de metafísica e de crítica do conhecimento. In: _____. São Paulo: Discurso Editorial, 2009. cap. La Notion de Vérité dans L'Ethique de Spinosa.

LANDIN, R. L. Questões disputadas de metafísica e de crítica do conhecimento. In: _____. São Paulo: Discurso Editorial, 2009. cap. Ideé et Representation.

LANDO, T. First-order s4 and its measure-theoretic semantics. 2014.

LAUTMAN, A. *Mathematics, Ideas and the Physical Real*. [S.l.]: Continuum, 2011.

LEIBNIZ, G. W. *Discurso de Metafísica*. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

LEIBNIZ, G. W. *Monadologia*. Lisboa: Colibri, 2016.

LEWIS, D. The possible and the actual. In: _____. [S.l.]: Cornell University Press, 1979. cap. On the Plurality of Worlds.

LEWIS, D. The possible and the actual. In: _____. [S.l.]: Cornell University Press, 1979. cap. Counterpart Theory and Quantified Modal Logic.

LONG, A. A. *Primórdios da Filosofia Grega*. São Paulo: Editora Ideias e Letras, 2008.

LOWE, E. J. *The Possibility of Metaphysics: Substance, Identity and Time*. London: Oxford University Press, 2001.

LYCAN, W. G. *Modality and Meaning*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

MACLANE, S.; MOERDIJK, L. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. New York: Springer, 1992.

MARTIN, N. M.; POLLARD, S. *Closure Spaces and Logic*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

MCKINSEY, J. C. A solution of the decision problem for the lewis systems s2 and s4, with an application to topology. *The Journal of Symbolic Logic*, n. 6, p. 117–134, 1941.

MITCHELL, J. C.; MOGGI, E. Annals of pure and applied logic. In: _____. [S.l.: s.n.], 1996. cap. Kripke-Style Models for Typed Lambda Calculus.

MONTAGUE, R. Theoria. In: _____. [S.l.: s.n.], 1970. cap. Univesal Grammar, p. 373–398.

MUNKRES, J. R. *Topology*. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

PACUIT, E. Neighborhood semantics for modal logic. 2014.

PASEAU, A. Proofs of the compactness theorem. *History and Philosophy of Logic*, n. 31, 2010.

PLANTINGA, A. Actualism and possible worlds. *Theoria I*, n. 3, 1976.

PLANTINGA, A. *The Nature of Necessity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1979.

POINCARÉ, H. *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré*. New York: Modern Library Science, 2001.

QUINE, W. V. O. De um ponto de vista lógico. In: _____. São Paulo: Editora Unesp, 2011. cap. Dois Dogmas do empirismo.

QUINE, W. V. O. De um ponto de vista lógico. In: _____. São Paulo: Editora Unesp, 2011. cap. Referência e Modalidade.

RICOEUR, P. *Ser, Essência e substância em Platão e Aristóteles*. São Paulo: Martins Fontes, 2014.

RUSSELL, B. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Georde Allen and Unwin, 1919.

SALMON, N.; CHANDLER, H. S. The logic of what might have been. *Philosophical Review*, p. 3–34, 1989.

SCHMITZ, F. *O Círculo de Viena*. São Paulo: Contraponto, 2019.

SCOTT, D. Philosophical problems in logic. *Advice im Modal Logic*, p. 143–173, 1970.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical Logic*. New York: Addison-Wesley Publications Co., 1967.

SMULLYAN, R. M. *Lógica de Primeira Ordem*. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

SOUJA-JUNIOR, A. D. de. *O Ceticismo Modal Amplo*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade de Brasília, São Paulo, 2021.

TARSKI, A. Logic, semantics, metamathematics. In: _____. London: Oxford at The Clarendon Press, 1956. cap. Sentencial Calculus and Topology.

TARSKI, A. Logic, semantics, metamathematics. In: _____. London: Oxford at The Clarendon Press, 1956. cap. The Concept of Truth in Formalized Languages.

TARSKI, A. *Introduction to Logic and to the Metodology of Deductive Sciences*. New York: Dover Publications, 1996.

TARSKI, A. A concepção semântica da verdade. In: _____. São Paulo: Editora UNESP, 2006. cap. A Concepção Semântica da Verdade e os Fundamentos da Semântica.

TARSKI, A.; MCKINSEY, J. C. The algebra of topology. 1944.

TARSKI, A.; MCKINSEY, J. C. Some theorems about the sentential calculi of lewis and heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, n. 13, p. 1–15, 1948.

TRAJAN, T. *Carnap e a Natureza da Lógica*. Tese (Tese de doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

VETTER, B. Recent work: Modality without possible worlds. *Analysis*, n. 71, p. 742–754, 2011.

VOEGELIN, E. *História das Ideias Políticas*. São Paulo: Editora Realizações, 2014. v. 4.

VOEGELIN, E. *História das Ideias Políticas*. São Paulo: Editora Realizações, 2014. v. 5.

WILLIAMSON, T. *Modal logic as Metaphysics*. London: Oxford University Press, 2013.

WILLIAMSON, T. How did we get here from there? the transformation of analytic philosophy. *Belgrade Philosophical Annual*, XXVII, 2014.

WILLIAMSON, T.; FARA, M. Counterparts and actuality. *Mind*, n. 114, 2005.

WITTGENSTEIN, L. *Tratactus Logico-Philosophicus*. São Paulo: EDUSP, 2017.

Apêndices

APÊNDICE A – Categorias e Lógica

Farei uma breve revisão de elementos categoriais de resultados utilizados ao longo da argumentação desse trabalho. Em especial, o objetivo é utilizar a estrutura de topos da categorias dos *feixes* para construir uma interpretação para a lógica $FOS4$. Para isso, será necessário revisar algumas definições.

Seja $(P, \preceq)$ uma ordem parcial.

Definição A.0.1. *Se para todo $\{x, y\} \subseteq P$ for o caso:*

a) $\{x, y\}$ possui supremo (notação: $x \sqcup y$);

b) $\{x, y\}$ possui ínfimo (notação: $(x \sqcap y)$.

*Então $(P, \preceq)$ é dito **reticulado**.*

Um **zero** para o reticulado $(P, \preceq)$ é um elemento 0 de P tal que $0 \preceq x$, para todo $x \in P$.

Uma **unidade** para para o reticulado $(P, \preceq)$ é um elemento 1 de P tal que $x \preceq 1$, para todo $x \in P$.

Se o reticulado $(P, \preceq)$ possuir zero e unidade ele é dito **limitado**.

Definição A.0.2. *Se $(P, \preceq)$ for um reticulado limitado, então y é dito um **complemento** de x se $x \sqcup y = 1$ e $x \sqcap y = 0$ (notação: $y =_{df} \sim x$). Um reticulado limitado é dito **complementado** se para todo $x \in P$, existir o complemento de x.*

Definição A.0.3. *Um reticulado é **distributivo** se satisfizer:*

$$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$$

Observação: Em um reticulado distributivo também é válido $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$.

Definição A.0.4. *Uma **álgebra de Boole** é um reticulado distributivo complementado.*

Em um reticulado distributivo, quando um elemento possui complemento ele é único.

Teorema A.0.1 (*Teorema de Stone*)**.** *Toda álgebra de Boole é isomórfica a uma álgebra de subconjuntos de algum conjunto (universo) U.*

Ver (BELL; SLOMSON, 1971). Note que se U for conjunto, então a estrutura $(\wp(U), \cap, \cup, -^c)$ é uma *álgebra de Boole*.

Definição A.0.5. *Seja $(L, \preceq)$ um reticulado com elemento 0. Para $a \in L$, o elemento b de L é dito* ***pseudo-complemento*** *de a se e somente se b for o maior elemento de L disjunto de a, i.e., para todo $x \in L$, $x \sqcap a = 0 \Leftrightarrow x \preceq b$.*

Se todo elemento de $(L, \preceq)$ tiver pseudo-complemento, então o reticulado é dito ***pseudo-complementado****.*

Seja (A, Θ) espaço topológico, para Θ sua topologia. Então $(\Theta, \subseteq)$ é o reticulado (em relação à inclusão) dos abertos de A. Para todo U aberto, seu pseudo-complemento é $(U^c)^\circ$ o interior do complemento de U (note que U^c não precisa ser, necessariamente, elemento de Θ, por isto pseudo-complementos em um reticulado podem ser mais "fracos" do que os complementos).

Definição A.0.6. *Um reticulado $(L, \preceq)$ é dito* ***relativamente pseudo- complementado*** *se para todos os elementos a e b de L, existir o pseudo-complemento de a em relação a b, i.e., existe c tal que $a \sqcap c \preceq b$. O pseudo-complemento de a relativo a b é denotado por $a \Rightarrow b$.*

Sabe-se que todo reticulado relativamente pseudo-complementado possui unidade 1; nele é válido que $(a \Rightarrow a) = 1$ para todo objeto a.

Definição A.0.7. *Uma* ***álgebra de Heyting*** *é um reticulado pseudo-complementado que também é relativamente pseudo-complementado.*

Em uma álgebra de Heyting, definimos o *pseudo-complemento de a relativo a* 0 como $-a =_{df} a \Rightarrow 0$.

Proposição 49. *Toda álgebra de Boole é uma álgebra de Heyting.*

Se x, y e z forem elementos de uma AH, então $z \preceq -x \sqcup y$ se e somente se $z \sqcap x \preceq y$, ou seja, z é o pseudo-complemento de x em relação a y, logo $(x \Rightarrow y) = z$, dado por $-x \sqcup y$, definido como o exponencial y^x na álgebra de Heyting.

Proposição 50. *Todo reticulado de uma álgebra de Heyting é distributivo.*

Proposição 51. *Em uma álgebra de Heyting, para todo elemento x tem-se $x \preceq --x$.*

Tal resultado, como vimos no capítulo 5, espelha a estrutura da lógica intuicionista, no qual $p \supset \neg\neg p$ é teorema, embora $\neg\neg p \supset p$ não o é.

Proposição 52. *Em uma álgebra de Heyting, se x possuir complemento, então ele é $-x$, i.e., quando um elemento de uma álgebra de Heyting possui complemento, ele coincide com seu pseudo-complemento.*

Proposição 53. *Uma álgebra de Heyting é Booleana se e somente se, for válido para todo elemento x:*

i) $- - x = x$

ii) $x \sqcup -x = 1$

A.1 Preliminares Categoriais

Definição A.1.1. *Uma **categoria** $\mathfrak{C}$ é uma coleção de objetos e de morfismos, com operação de composição, que satisfazem:*

1) Se a e b forem $\mathfrak{C}$-objetos tais que existe $f : a \to b$ um $\mathfrak{c}$-morfismo, então dizemos que $dom(f) = a$ e $cod(f) = b$.

2) Para todo objeto a de $\mathfrak{C}$, existe o morfismo $Id_a : a \to a$.

3) Quando $f : a \to b$ e $g : b \to c$ são morfismos, a composição de morfismos $a \xrightarrow{\quad f \quad} b \xrightarrow{\quad g \quad} c$ satisfaz: $dom(g \circ f) = a$ e $cod(g \circ f) = c$.

4) Para $f : a \to b$, $Id_b \circ f = f = f \circ Id_a$.

5) A composição de morfismos é associativa.

Intuitivamente, os objetos de uma categoria podem ser vistos como “coleções” ou “conjuntos”, enquanto os morfismos como “funções” entre estas coleções. É uma maneira de lidar, de forma generalizada, com as noções usuais de conjuntos e funções no contexto conjuntista. Desta forma, SET é a categoria cujos objetos são conjuntos e os morfismos são as funções entre estes conjuntos; usualmente quando uma categoria tem como objetos coleções que são, neste contexto conjuntista, de fato conjuntos, ela é dita uma *categoria pequena*. Similarmente, TOP é a categoria de todos os espaços topológicos (categoria pequena) cujos morfismos são as funções contínuas entre eles.

Seja $\mathfrak{C}$ uma categoria.

Definição A.1.2. *Seja $f : c \to d$ um morfismo de $\mathfrak{C}$.*

*O morfismo f é **epi** (*epimorfismo*), ou cancelável à direita, se para todos os morfismos g e h tais que $g, h : d \rightrightarrows e$ for o caso que $gf = hf$, então $g = h$ (notação: $f : c \twoheadrightarrow d$).*

*O morfismo f é **mono** (*monomorfismo*), ou cancelável à esquerda, se para todos os morfismos g e h tais que $g, h : b \rightrightarrows c$ for o caso que $fg = fh$, então $g = h$ (notação:*

$f : c \rightarrowtail d$).

*O morfismo f é **iso** (*isomorfismo*) se existir $g : d \to c$ tal que $f \circ g = Id_d$ e $g \circ f = Id_c$, neste caso g é morfismo inverso de f. (notação: $f : c \tilde{\to} d$)*

Em SET um epimorfismo é uma função sobrejetora, enquanto um monomorfismo é uma função injetora. Como sabemos, em SET epi + mono = iso, o mesmo não ocorre em todas as categorias, por exemplo na categoria TOP dos espaços topológicos (categoria pequena).

Definição A.1.3. *Dois monomorfismos $f : a \rightarrowtail c$ e $g : b \rightarrowtail c$ são **equivalentes** se existir $h : a \tilde{\to} b$ isomorfismo tal que $gh = f$.*

Denotamos por $Sub(d)$ a classe de equivalência dos monomorfismos em d (construída em ambiente conjuntista).

Em SET, para um objeto D, $Sub(D)$ corresponde intuitivamente à coleção de subconjuntos de D (a menos de isomorfismos).

Assumiremos, implicitamente, trabalhar em um universo no qual a coleção de todos os objetos e morfismos (localmente) formem conjuntos, ou seja, localmente, pelo menos, será uma categoria pequena. Desta forma admitiremos a teoria categorial como uma ferramenta matemática, portanto não desejando adotá-la como um mecanismo fundacional.

Seja $\mathfrak{C}$ uma categoria, então $\mathfrak{C}^{op}$ é a categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathfrak{C}$, enquanto seus morfismos têm a direção oposta. Se $\mathfrak{C}$ for uma categoria e d um de seus objetos, então $\mathfrak{C} \downarrow d$ é a **categoria slice**, cujos objetos são os morfismos de $\mathfrak{C}$ em que d é o *codomínio*, como $f : a \to d$ e $g : b \to d$, e seus morfismos são da forma $h : a \to b$ para os quais o diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "g"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

Um **functor** é um morfismo entre duas categorias $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$ que preserva as operações de composição de morfismos nas duas categorias. Sejam F e G functores de uma categoia $\mathfrak{C}$ a uma categoria $\mathfrak{D}$, uma **transformação natural** α de F e G é uma operação que associa a cada objeto c de $\mathfrak{C}$ um morfismo $\alpha_c : Fc \to Gc$ em $\mathfrak{D}$ tal que, para toda $f : c' \to c$, tem-se o seguinte diagrama comutativo (em $\mathfrak{D}$).

$$\begin{tikzcd} Fc' \arrow[r, "\alpha_{c'}"] \arrow[d, "F(f)"] & Gc' \arrow[d, "G(f)"] \\ Fc \arrow[r, "\alpha_c"] & Gc \end{tikzcd}$$

Os morfismos α_c são ditos **componentes** de α em $\mathfrak{D}$. Se para todo $c \in \mathfrak{C}$ for o caso que α_c for um isomorfismo em $\mathfrak{D}$, então α é dito **isomorfismo natural**.

Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias, pode-se construir a categoria $\mathfrak{D}^{\mathfrak{C}}$ cujos objetos são functores de $\mathfrak{C}$ em $\mathfrak{D}$ e os morfismos são transformações naturais; tal categoria $\mathfrak{D}^{\mathfrak{C}}$ é dita **categoria functorial**; os functores de $\mathfrak{C}$ em $\mathfrak{D}$ são denominados **covariantes**. O functor $F : \mathfrak{C}^{op} \to \mathfrak{D}$ é dito **contravariante** em relação à categoria $\mathfrak{D}^{\mathfrak{C}}$.

A.1.1 Construções Gerais

Seja $\mathfrak{C}$ uma categoria.

Definição A.1.4. *Uma categoria possui **produtos finitos** (como em SET - tal produto será denotado por $A \times B$ no caso de produto binário, para A e B objetos de $\mathfrak{C}$), se existirem Pr_A e Pr_B projeções tais que para $f : X \to A$ e $g : X \to B$, existir um único morfismo $h : X \to A \times B$ tais que o diagrama comuta.*

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, two heads, "Pr_A"] \arrow[r, two heads, "Pr_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

*Então $< f, g >$ representa o **morfismo produto** obtido pelo produto de A e B com respeito às projeções Pr_A e Pr_B.*

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "<f,g>"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "Pr_A"] \arrow[r, "Pr_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Definição A.1.5. *Em uma categoria, um quadrado comutativo é dito um **pullback** se para todo X objeto de $\mathfrak{C}$, $\beta : X \to B$, $\gamma : X \to C$ tais que $f\beta = g\gamma$, existir uma única $h : X \to P$ tal que $ph = \beta$ e $qh = \gamma$.*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
 & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & C \arrow[d, "g"] \\
 & B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}
$$

Caso o pullback exista, dizemos que p é o pullback de g ao longo de f. Além do mais, pullbacks preservam monomorfismos.

Notemos que é possível caracterizar, por meio de um pullback, o produto $B \times_A C$, denominado **produto fibrado**, da seguinte forma em SET:

$B \times_A C = \{(b, c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$.

Definição A.1.6. *Sejam f e g morfismos paralelos da forma $A \to B$. Um* ***equalizador*** *para f e g (se existir) é um morfismo $e : E \to A$ satisfazendo $fe = ge$ tal que, para todo $u : X \to A$ em que $fu = gu$, existe um único $h : X \to E$ tal que $eh = u$.*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "e"] & & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \\
& X \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[ur, "u"'] & &
\end{tikzcd}$$

Em SET, $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ e $e : E \to A$ é a função **inclusão**, denotada por $e : E \hookrightarrow A$. Observemos que toda inclusão é um monomorfismo.

Definição A.1.7. *Um objeto $\mathbf{1}$ de $\mathfrak{C}$ (se existir) que satisfaz: para todo $A \in \mathfrak{C}$ existir um único $h : A \to \mathbf{1}$, é dito* ***objeto terminal****. Este único morfismo h será denotado por $!_A : A \to \mathbf{1}$.*

Os **pushouts** e **coequalizadores** em uma categoria, se existirem, têm a mesma construção categorial simétrica do produto e coproduto quando comparadas com as construções de pullbacks e equalizadores[1]. Similarmente, se em uma categoria $\mathfrak{C}$ existir um objeto $\mathbf{0}$ tal que, para todo A, $\mathfrak{C}$-objeto, existir um único morfismo $\mathbf{0} \to A$, então tal objeto é denominado **objeto inicial**; tal morfismo único será denotado por $!_A$, a notação em relação aos morfismo de objetos terminais não causará confusão ao analisarmos os contextos em que tais morfismos aparecem.

Definição A.1.8. *O* ***coproduto finito****, se existir, é a construção dual do produto em uma categoria. Dados dois objetos A e B de $\mathfrak{C}$, o coproduto $A + B$ (ou união disjunta em SET) destes objetos existe em $\mathfrak{C}$ caso existam os monomorfismos i_A e i_B tais que, para todo X objeto da categoria, existe uma única h tal que o diagrama comuta para os morfismos f e g.*

[1] Tal simetria se dá pela simetria nas contruções de **limites** e **colimites** em uma categoria [ver (GOLDBLATT, 2006) e (MACLANE; MOERDIJK, 1992)].

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "i_A"] & A+B \arrow[u, dashed, "h"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, hook', "i_B"]
\end{tikzcd}$$

*Então $[f,g]$ representa o **morfismo coproduto** obtido pelo coproduto de A e B com respeito às inclusões i_A e i_B.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, hook', "i_C"] \arrow[dl, "g"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Os morfismos $f : a \to b$ e $g : c \to b$ são **disjuntos** se o pullback de f e g na categoria (se existir) for o objeto $\mathbf{0}$ (a categoria deve possuir elemento inicial). Desta forma, temos o pullback a seguir.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

Sejam $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorias, F e G functores entre elas em direções opostas. Se, para todos os objetos C de $\mathfrak{C}$ e D de $\mathfrak{D}$, existir uma bijeção natural entre morfismos f e h, no sentido de que f determina h univocamente, e vice-versa, então F é dita adjunta à esquerda de G (notação $F \dashv G$), ou G adjunta à direita de F.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "F"] & \mathfrak{D} & & C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"] & FC \arrow[d, "h"] \\
\mathfrak{C} & \mathfrak{D} \arrow[l, "G"] & & GD & D \arrow[l, "G"]
\end{tikzcd}$$

Caso F seja uma adjunta à esquerda de G, existem transformações naturais $\eta : Id_{\mathfrak{C}} \to GF$ e $\xi : FG \to Id_{\mathfrak{D}}$ únicas (**unidade** e **counidade** associadas às adjuntas, respectivamente), tais que os diagramas comutam.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "f"] & FX \arrow[d, dashed, "Ff"] \arrow[dr, "h"] & & Y \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"] & GFY \arrow[d, dashed, "Gh"] & FY \arrow[d, dashed, "h"] \\
GA & FGA \arrow[r, "\xi"] & A & & GB & B
\end{tikzcd}$$

Tais transformações são únicas, a menos de isomorfismo, isto é, comutam:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "F\eta"'] \arrow[dr, "Id_{\mathfrak{C}}"] & \\ FGF \arrow[r, "\xi F"'] & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "Id_{\mathfrak{D}}"'] & GFG \arrow[d, "G\xi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Definição A.1.9. *Seja $\mathfrak{C}$ uma categoria com produtos finitos.*

Para todo objeto A, fixo, quando o functor $A \times (-) : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ possuir adjunta à direita, ela é denotada por $(-)^A : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$; neste caso, A é dito ***objeto exponenciável*** *da categoria, enquanto o valor B^A, para todo B um $\mathfrak{C}-$objeto, é o* ***exponencial*** *de A e B.*

Nesta situação, temos as adjuntas:

$$\frac{C \longrightarrow B^A}{A \times C \longrightarrow B}$$

De fato, B^A é functor contravariante e a adjunta $A \times (-)$ possui counidade $e : A \times B^A \to B$, ou seja, para toda $h : A \times C \to B$ existe um único morfismo $f : C \to B^A$ tal que $e \circ (Id_A \times f) = h$; este morfismo e é dito **morfismo avaliação** da exponencial B^A, sendo denotado por $ev : A \times B^A \to B$.

Seja I um conjunto e $SET \downarrow I$ a slice categoria.

Para todo $SET \downarrow I-$objeto h, existe uma família $\{H_i \mid i \in I\}$ tal que $H_i = h^{-1}(i) = \{x \in X \mid h(x) = i\}$, para f morfismo da categoria slice que faz o diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & X' \arrow[dl, "h'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Portanto, todo morfismo $f : X \to X'$ de $SET \downarrow I$ determina uma família $I-$indexada de funções $f_i : H_i \to H'_i$, para todo $i \in I$.

Toda família $\{H_i \mid i \in I\}$ é um functor $H : I \to SET$ e $\{f_i \mid i \in I\}$ é uma transformação natural $F : H \to H'$ entre os functores H e H' de $I \to SET$, denotada também pela categoria SET^I. Logo, $L : SET \downarrow I \to SET^I$ é um functor do tipo $h \mapsto \{H_i \mid i \in I\}$. Similarmente, para todo $H : I \to SET$ functor, existe $h : X \to I$ objeto de $SET \downarrow I$ tal que $X = \sum_{i \in I} H_i$, para $h(x) = i$ se e somente se $x \in H_i$, para $\sum_{i \in I}$ símbolo da união disjunta dos elementos da família $\{H_i\}_{i \in I}$. Isto é, temos um functor $M : SET^I \to SET \downarrow I$ tal que LM e ML são naturalmente isomórficos aos functores identidades; mostra-se assim que SET^I é uma categoria **equivalente** a $SET \downarrow I$[2].

Definição A.1.10. *Em uma categoria $\mathfrak{C}$ com objeto terminal e limites finitos, um* ***classificador de subobjetos*** *é um par formado por um $\mathfrak{C}-$objeto Ω e um monomorfismo $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ tal que, para todo monomorfismo $m : S \rightarrowtail X$, existe um único morfismo ϕ tal que o quadrado é um pullback.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "!_S"] & X \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Utilizaremos às vezes, por abuso de linguagem, o símbolo Ω para representar o par $\mathfrak{C}-$objeto e o morfistmo $\top$ (Verdadeiro).

Tal propriedade é conhecida como $\Omega-$axioma e o morfismo ϕ é o morfismo característica χ_m, que em SET é a função característica de S subconjunto de X (m a função inclusão). $Sub(X)$ denota a coleção de todos os subobjetos de X (visto como conjunto, é uma construção conjuntista externa à estrutura categorial); tal coleção (conjunto) é uma ordem parcial em relação à ordem de inclusão. O objeto Ω é um objeto específico de $\mathfrak{C}$, que intuitivamente representa os "valores de verdade" da categoria, o que pode ser melhor compreendido ao analisarmos o pullback equivalente em SET para a função caractetística.

Quando uma categoria possui classificador de subobjetos, ele é único. Tal objeto Ω possui estrutura interna de uma álgebra de Heyting. Em geral, dado um objeto D de uma categoria, a estrutura interna $(Sub(D), \subseteq)$ é um reticulado que pode ser visto (estrutura distinta da estrutura categorial da qual D é objeto) como uma categoria na qual, para a e b elementos de $Sub(D)$, temos que $a \rightarrowtail D$ e $b \rightarrowtail D$; se existir o triângulo comutativo

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, tail] \arrow[dr, tail] & & D \\ & b \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

então $a \preceq b$ quando existir o monomorfismo $f : a \rightarrowtail b$.

[2] Não isomórficas, pois ML não é propriamente o functor identidade.

Topos

Definição A.1.11. *Um **topos** (topos elementar[3]) ε é o nome dado a uma categoria $\mathfrak{C}$ que satisfaz:*

A) Possui pullback e pushout para diagramas da forma $X \to B \leftarrow Y$ e $X \leftarrow B \to Y$, respectivamente.

B) Possui objetos terminal e inicial.

C) Possui classificador de subobjetos Ω.

D) Possui exponenciação.

Logo, SET é um topos, por exemplo.

Observações: 1) O fato de um topos possuir exponenciação nos garante que para todo B objeto de ε, existem PB objeto potência de B e $e_B : B \times PB \to \Omega$ tais que, para todo $f : B \times A \to \Omega$, existe um único $g : A \to PB$ tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "g"] & B \times A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "Id_B \times g"] & \Omega \arrow[d, equal] \\ PB & B \times PB \arrow[r, "e_B"] & \Omega \end{tikzcd}$$

2) Em um topos, como existem produtos e coprodutos finitos, existem equalizadores e coequalizadores. Todos os morfismos $B \times A \to \Omega$ são isomórficos a morfismos $A \to PB$. Sabemos também que $Sub(A)$ é (no sentido conjunstista) isomórfico à coleção de morfismos entre A e Ω (para categorias pequenas).

3) Se A for objeto do topos ε, então A é **isomórfico** a $\mathbf{1} \times A$, i.e., todo subobjeto de A pode ser descrito de três formas[4]:

i) $m : S \rightarrowtail A$, que representa a classe dos monomorfismos em A, o que caracteriza $S = \{a \in A \mid \phi\}$, ou seja, a extensão (em A) de um predicado ϕ.

ii) $\phi : A \to \Omega$, que representa a coleção de predicados de A, para $\phi = \chi_S$ relativa aos subobjetos de A que são satisfeitos pelo predicado.

[3] Esta é uma caracterização interna da estrutura do topos, podendo ser expressa puramente em uma linguagem formal de primeira ordem, sem a exigência de ambientes conjuntistas, o que justifica o nome de **topos elementar**. É uma teoria com "força" para ser fundamento para a matemática, ao invés da teoria dos conjuntos. Neste caso, ela deve ser abordada no sentido puramente formal, como teoria elementar de primeira ordem, somente utilizando sua estrutura interna para construir as noções de conjunto, elemento, subconjunto, funções etc.

[4] Considerando m, ϕ e s arbitrários.

iii) $s : \mathbf{1} \to PA$, que representa a coleção de elementos globais de PA, neste caso temos que $s = \ulcorner \phi \urcorner$ é o "nome" de ϕ. Se $s = \ulcorner \phi \urcorner$ e $b : X \to B$, então os diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
X \times \mathbf{1} \arrow[r, "b \times Id_1"] \arrow[d, equal] & B \times \mathbf{1} \arrow[r, "Id_B \times s"] \arrow[d, equal] & B \times PB \arrow[d, "e_B"] \\
X \arrow[r, "b"] & B \arrow[r, "\phi"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Portanto $e_B(b \times s) = \top_{X\times 1}$ se e somente se $\phi b = \top_X$, no qual b é elemento do subobjeto de B (X) nomeado por s, desta forma temos que e_B é o predicado de pertinência para B.

Definição A.1.12. *Seja A um $\varepsilon-$objeto. O* ***morfismo diagonal*** *$\Delta_A : A \to A \times A$ é aquele que, quando composto com a projeção $Pr_A : A \times A \to A$ retorna a identidade de A. Tal morfismo é mono. Desta forma, Δ_A é o morfismo que satisfaz:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\Delta_A"] \arrow[d, "!_A"] & A \times A \arrow[d, "\chi_{\Delta_A}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

O morfismo χ_{Δ_A} é (extensão) o predicado de igualdade para A.

Proposição 54. *Em ε topos, todo monomorfismo é equalizador. Se f for mono e epi, então f é iso.*

Do fato de que todo topos possui objeto potência e exponenciação, sabemos que nele $PB \cong \Omega^B$

Proposição 55. *Em todo topos, um morfismo f tem uma imagem m_f mono, fatorando-se como $f = m_f e_f$, em que e_f é epi.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e_f"'] & & B \\
& f(A) \arrow[ur, tail, "m_f"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema A.1.1. *Seja A um um objeto de um topos ε. Se $Sub(A)$ for conjunto, então $Sub(A)$ é uma álgebra de Heyting (reticulado com relação à inclusão).*

É importante destacarmos dois importantes resultados da estrutura categorial de um topos (pequeno), um referente à estrutura interna e outra à externa.

Para todo objeto A de um topos, o objeto PA tem estrutura interna de álgebra de Heyting; em particular, é álgebra de Heyting $\Omega = P\mathbf{1}$. De modo geral, em todo topos, para todo objeto A, $PA \cong \Omega^A$.

No nível externo, quando o topos é localmente pequeno, para todo objeto A, temos que $Sub(A)$, com a ordem parcial de inclusão, tem estrutura de uma álgebra de Heyting.

A.1.2 Topos e Lógica

Os resultados desta subseção pode ser encontrados em (GOLDBLATT, 2006).

Em um topos ε e objetos A e D, se tivermos o pullback:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_a"] & D \arrow[d, "h"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Como $\top$ é mono, então f é mono e A subobjeto de D, logo $sub(D) \cong \varepsilon(D, \Omega)$, ou seja, exibimos a equivalência entre a abordagem externa à teoria de topos ($sub(D)$) e a abordagem interna ($\varepsilon(D, \Omega)$).

Definição A.1.13. *Para todo ε-objeto A, existe o morfismo $\top_A$ que é a composta $\top_A = \top \circ !_A$, que completa o triângulo comutativo.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!_a"] \arrow[dr, "\top_A"] & \mathbf{1} \arrow[d, tail, "\top"] \\ & \Omega \end{tikzcd}$$

O pullback para a característica do morfismo $\top$ é o morfismo Id_Ω, já que temos:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] \arrow[d, "!_1 = Id_1"] & \Omega \arrow[d, "\chi_\top"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Pois $\top \circ Id_1 = \chi_\top \circ \top \Rightarrow \top = \chi_\top \circ \top \Rightarrow \chi_\top = Id_\Omega$.

Definição A.1.14. *Um objeto é dito **não-zero** se não for isómórfico ao objeto $\mathbf{0}$.*

*Um objeto A é dito **não-vazio** se existir pelo menos um morfismo $f : \mathbf{1} \to A$, ou seja, é um objeto que possui pelo menos um elemento.*

Definição A.1.15. *Um topos ε é não-degenerado se $\mathbf{0} \not\cong \mathbf{1}$.*

Princípio da extensionalidade: Se $f, g : A \rightrightarrows B$ for um par de morfismos distintos, existe um elemento $x : \mathbf{1} \to A$ tal que $f \circ x \neq g \circ x$.

Definição A.1.16. *Um* topos *não degenerado que satisfaz o princípio de extensionalidade é dito **bem apontado**.*

Teorema A.1.2. *Se ε for topos bem apontado, então todo objeto não-zero é não-vazio.*

Definição A.1.17. *Em um topos ε, o morfismo **falso** $\perp : \mathbf{1} \to \Omega$ é a característica de $!_1$, único morfismo que faz o diagrama comutar.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r, tail, "!_1"] \arrow[d, tail, "!_0"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "\chi_! = \perp"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Se um topos é não-degenerado (ver (GOLDBLATT, 2006)), então $\top \neq \perp$.

Definição A.1.18. *Um topos é **bivalente** se $\top$ e $\perp$ forem os únicos elementos de Ω.*

Teorema A.1.3. *Se o topos ε for bem apontado, então ε é **bivalente**.*

Definição A.1.19. *Em um topos ε, se o morfismo coproduto $[\top, \perp]$ for iso, então ε é **clássico**. Além disso, se ε for não-degenerado, então $\top$ e $\perp$ são morfismos disjuntos.*

Se ε for topos com classificador $\mathbf{1} \to \Omega$, as funções lógicas clássicas podem ser definidas da seguinte forma:

Negação: É o morfismo $\neg : \Omega \to \Omega$ característica de $\perp$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\perp"] \arrow[d, "!_1"'] & \Omega \arrow[d, "\neg = \chi_\perp"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Conjunção: É o morfismo $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ característica de $< \top, \top >$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "<\top,\top>"] \arrow[d, "!_1"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge = \chi_{<\top,\top>}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Seja o morfismo $\top_\Omega : \Omega \to \Omega$ ($\top_\Omega = \top \circ !_\Omega$). Podemos tomar os morfismos produto $<\top_\Omega, Id_\Omega>: \Omega \to \Omega \times \Omega$ e $<Id_\Omega, \top_\Omega>: \Omega \to \Omega \times \Omega$, obtendo a construção coproduto:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, tail] \arrow[dr, "<\top_\Omega, Id_\Omega>"'] & \Omega + \Omega \arrow[d, dotted, "f"] & \Omega \arrow[l, tail] \arrow[dl, "<Id_\Omega, \top_\Omega>"] \\
& \Omega \times \Omega &
\end{tikzcd}$$

Desta construção segue que $f = [<\top_\Omega, Id_\Omega>, <Id_\Omega, \top_\Omega>]$ é o coproduto de $<\top_\Omega, Id_\Omega>$ e $<Id_\Omega, \top_\Omega>$.

No topos temos a fatoração de f por um epimorfismo $e_{[-,-]}$ e um monomorfismo $m_{[-,-]}$:

$$\begin{tikzcd}
\Omega + \Omega \arrow[rr, "{[-,-]}"] \arrow[dr, two heads, "{e_{[-,-]}}"'] & & \Omega \times \Omega \\
& f(\Omega + \Omega) \arrow[ur, tail, "{m_{[-,-]}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Disjunção: É o morfismo $\vee = \Omega \times \Omega \to \Omega$ característica do morfismo $m_{[<\top_\Omega, Id_\Omega>, <Id_\Omega, \top_\Omega>]} : f(\Omega + \Omega) \to \Omega \times \Omega$.

$$\begin{tikzcd}
f(\Omega + \Omega) \arrow[r, tail, "{m_{[-,-]}}"] \arrow[d, "!"] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "{\vee = \chi_{[-,-]}}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Sabe-se que alguns topoi, como SET, são Booleanos, e que um topos ε é booleano se e somente se a álgebra de Heyting interna a Ω for booleana.

Sejam $\wedge, Pr_1 : \Omega \times \Omega \rightrightarrows \Omega$ morfismos paralelos de um topos ε, com e o equalizador destes morfismos, para $e : \Theta \rightarrowtail \Omega \times \Omega$.

Como a estrutura interna de $Sub(\Omega)$ é uma álgebra de Heyting, podemos considerar em $Sub(\Omega)$ a relação de ordem $\Theta = \{(x, y) \mid x \sqcap y = x\}$, de maneira que e é uma inclusão de Θ em $\Omega \times \Omega$.

Implicação material: É o morfismo $\Rightarrow: \Omega \times \Omega \to \Omega$ característica de e.

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d, "!_\Theta"] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\Rightarrow = \chi_e"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Observação: A notação é sugestiva, já que $\Rightarrow$ representa o pseudo-complemento relativo da estrutura álgebra de Heyting interna à Ω.

SET é uma categoria **bivalorada**, pois Ω tem somente 2 “elementos” ou seções globais, que podemos considerar como sendo os “valores de verdade” desta categoria. Se I for conjunto e $|I| > 2$, então $SET \downarrow I$ é topos booleano, porém não bivalorado.

Seja $S(x, y)$ uma relação binária, então $S \subset X \times Y$. Consideremos as fórmulas abertas $\phi = \forall x S(x, y)$ e $\varphi = \exists x S(x, y)$ e o subconjunto T de Y que satisfaz, $y \in T$ se e somente se $(x, y) \in S$ para algum $x \in X$.

Consideremos $\wp(Y)$ e $\wp(X \times Y)$ as álgebras de Boole (reticulados com a ordem parcial de inclusão) formadas, respectivamente, por todos os $A \subseteq Y$ e $B \subseteq X \times Y$. Então $\wp(Y)$ e $\wp(X \times Y)$ podem ser vistos como categorias, nos quais os objetos são os subconjuntos de Y e $X \times Y$, respectivamente, e os morfismos as relações de inclusão nos reticulados.

Teorema A.1.4. *Seja $p^* : \wp(Y) \to \wp(X \times Y)$ functor, tal que $p^*(T) = Pr_Y^{-1}(T)$. Existem functores $\forall_x$ e $\exists_x$, do tipo $\wp(X \times Y) \to \wp(Y)$, tais que $\forall_x$ e $\exists_x$ são adjuntas à direita e à esquerda de p^*, respectivamente.*

Notemos que a projeção sobre Y satisfaz:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, "Pr_Y"] & S \arrow[d, "Pr_Y(S)"] \\ Y & T \end{tikzcd}$$

Tais functores satisfazem os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\exists_x"] \arrow[d, hook] & \exists_x S \arrow[d, hook] \\ P^*(T) & T \arrow[l, "p^*"] \end{tikzcd}$$

$S \subset p^*(T)$ se e somente se $\exists_x S \subset T$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, hook] & p^*(T) \arrow[d, hook] \\ \forall_x S & S \arrow[l, "\forall_x"] \end{tikzcd}$$

$p^*(T) \subset S$ se e somente se $T \subset \forall_x S$

Portanto, as fórmulas abertas ϕ e φ (em uma linguagem de primeira ordem) podem ser interpretadas em um topos pelos functores adjuntos de p^*.

Teorema A.1.5. *Seja ε um topos. Então $(Sub(D), \subseteq)$ é um reticulado no qual:*

i) Se $f : A \rightarrowtail D$, $g : B \rightarrowtail D$ e existe o pullback:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B \arrow[d, tail, "g"] \\ A \arrow[r, tail, "f"] & D \end{tikzcd}$$

Então existe $\alpha : C \rightarrowtail D$ tal que $\alpha = f \cap g$. Em SET sabemos que $C = A \cap B$ e temos:

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, tail, "f \cap g"] & B \arrow[d, tail, "g"] \\ A \arrow[r, tail, "f"] & D \end{tikzcd}$$

ii) Se $f : A \rightarrowtail D$ e $g : B \rightarrowtail D$ forem tais que existe o coproduto de A e B, então $[f, g]$ é mono-epi[5]*, e pode ser fatorizado por um epimorfismo $[f, g]^*$ e por um monomorfismo $f \cup g$.*

$$\begin{tikzcd} A + B \arrow[rr, "{[f,g]}"] \arrow[dr, two heads, "{[f,g]^*}"'] & & D \\ & A \cup B \arrow[ur, tail, "f \cup g"'] & \end{tikzcd}$$

Na estrutura de um topos ε, vimos que $(Sub(D), \subseteq)$ é um reticulado limitado, assim sendo, $f \cap g$ é $f \sqcap g$ e $f \cup g$ é $f \sqcup g$. Tal reticulado é limitado e distributivo. Como

[5] Em uma categoria, mono-epi não implica iso.

há um isomorfismo (externo) entre $Sub(D)$ e $\varepsilon(D, \Omega)$, então $f \cup g = \sqcup \circ < f, g >$ e $f \cap g = \sqcap \circ < f, g >$ são morfismos bem definidos no topos ε.

Teorema A.1.6. *Em qualquer topos ε são equivalentes:*

i) ε é booleano.

ii) $Sub(\Omega)$ é AB.

iii) $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ tem um complemento em $Sub(\Omega)$ único, que é $\bot : \mathbf{1} \to \Omega$.

iv) $\bot : \mathbf{1} \to \Omega$ é complemento de $\top$ em $Sub(\Omega)$.

v) $\top \cup \bot \cong Id_\Omega$ em $Sub(\Omega)$.

vi) ε é clássico, i.e., $[\top, \bot] : \mathbf{1} + \mathbf{1} \to \Omega$ é iso.

Portanto, estrutura de topos são capazes de fornecer uma interpretação para lógicas (semântica). Em especial[6], temos:

Teorema A.1.7. *Se o topos ε for booleano, então $\varepsilon \models \alpha \vee \neg\alpha$ para toda α sentença. Disto segue que são equivalentes em um topos booleano:*

a) $\varepsilon \models \alpha$ se e somente se α for teorema da lógica clássica;

b) Para todo sentença α, $\varepsilon \models \alpha \vee \neg\alpha$;

c) $Sub(\mathbf{1})$ é álgebra de Boole (Não vale a volta);

d) $\neg \circ \neg = Id_\Omega$.

A afirmação *c)* do teorema anterior é a versão externa da estrutura interna de um topos que satisfaz o princípio do terceiro excluído. O próximo teorema apresenta a versão interna deste princípio:

Teorema A.1.8. *$Sub(\Omega)$ é álgebra de Boole se e somente se o diagrama comuta.*

$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "<Id_\Omega, \neg>"] \arrow[d, "!_\Omega"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\vee"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

[6] Em um topos ε, um "valor de verdade" é um morfismo $\mathbf{1} \to \Omega$, portanto $\varepsilon(\mathbf{1}, \Omega)$ pode ser vista como coleção dos valores de verdade do topos.
Utilizando as construções lógicas anteriores, por indução sobre valores de verdade V atribuídos a variáveis proposicionais p_i - pensando na lógica proposicional, de maneira que $V(p_i)$ é um morfismo de $\varepsilon(\mathbf{1}, \Omega)$, então existe um morfismo $V(\alpha) : \mathbf{1} \to \Omega$ do topos para toda fórmula α da linguagem proposicional (clássica).
Defini-se $\varepsilon \models \alpha$ se e somente se $V(\alpha) = \top$ para todo valor de verdade $V(\alpha)$. Obviamente, tal construção pode ser estendida para a lógica de primeira ordem, por exemplo.

De maneira mais geral, podemos apontar:

Correção em topos: $\varepsilon \models \alpha$ se e somente se $\varepsilon(\mathbf{1}, \Omega) \models \alpha$ se e somente se $Sub(\mathbf{1}) \models \alpha$[7].

Teorema da correção em topoi: Se α for teorema da lógica intuicionista, então $\varepsilon \models \alpha$.

Ver (GOLDBLATT, 2006).

[7] Em especial, como discutirei adiante, o topos $Top(I) \models \alpha$ se e somente se o reticulado relativo ao seu subobjeto classificador $(\Theta, \subseteq)$, satisfazer $(\Theta, \subseteq) \models \alpha$; como este último é uma AH, então validade em $Top(I)$ é equivalente a validade em uma álgebra de Heyting.

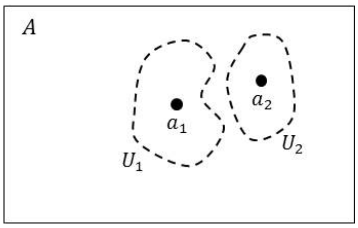
APÊNDICE B – Resultados em Topologia e Feixes

B.1 Propriedades Topológicas Elementares

Nesta seção apresentarei rapidamente algumas propriedades e definições gerais de espaços topológicos. São essas características mais básicas de tais estruturas espaciais-geométricas que apontamos como *noções geométricas primitivas*, pois dizem respeito a características intuitivas, imediatas e elementares da "estrutura geométrica" investigada em qualquer tipo de espaço, não importa o quão simples seja tal estrutura.

B.1.1 Axiomas de Separação

Definição B.1.1. *Um espaço topológico A é* Hausdorff *se, para cada par de elementos distintos a_1 e a_2, existirem vizinhanças disjuntas U_1 de a_1 e U_2 de a_2.*



Devemos notar que os espaços topológicos Hausdorff são também chamados de T_2, um dos vários axiomas de separação que explicitam como os pontos desse espaço, em função de sua topologia, estão distribuídos. Por exemplo, em um espaço que satisfaz o axioma T_1 (espaço T_1), quaisquer dois pontos a e b podem ser separados, de maneira que a está em um aberto e não no outro que contém b; esses espaços são ditos *espaços de Fréchet*[1]. Existem ainda alguns outros axiomas de separação, os mais importantes são aqueles que regulam a noção de regularidade e normalidade (ver demonstrações em (MUNKRES, 2002)).

Definição B.1.2. *Um espaço topológico é T_0 se e somente se, para quaisquer elementos distintos x e y, existe um aberto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$ ou $x \notin U$ e $y \in U$.*

Definição B.1.3. *Um espaço topólógico é T_1 se e somente se todo conjunto unitário for fechado.*

[1] Ver importância dos espaços de Fréchet para a lógica abstrata sobre a perspectiva da teoria de espaços de fecho dedutivo em (MARTIN; POLLARD, 1996).

Proposição 56. *Todo espaço topológico T_2 é T_1, que por sua vez é T_0.*

Definição B.1.4. *Um espaço topológico T_1 é dito* regular *se para todo ponto x e todo fechado F, tal que $x \notin F$, existirem abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $F \subseteq V$.*

Definição B.1.5. *Um espaço topológico T_1 é dito* normal *se para quaisquer fechados disjuntos F_1 e F_2, existirem abertos disjuntos U_1 e U_2 tais que $F_1 \subseteq U_1$ e $F_2 \subseteq U_2$.*

Proposição 57. *Todo espaço topológico normal é regular*

Como vimos, espaços topológicos são estruturas que abstraem certas propriedades elementares encontradas em espaços métricos, mimetizando a noção de bolas abertas através do conceito de vizinhança (ver capítulo 4). Logo, todo espaço métrico é um espaço topológico, mas nem todo espaço topológico é métrico. Os espaços topológicos que são métricos são chamados de *espaços metrizáveis*, i.e., sua topologia é tal que é possível encontrar uma métrica entre os elementos do espaço de maneira que os abertos básicos coincidam com as bolas abertas geradas pela métrica.

Teorema B.1.1. *[*Teorema de metrização de Urysohn*] Todo espaço regular com base enumerável é metrizável.*

B.1.2 Propriedades

Definição B.1.6. *Um espaço topológico A é* conexo *se não existirem U e V abertos disjuntos tais que $A = U \cup V$.*

Se tal par existir, ele é chamado de separação para o espaço desconexo A.

Definição B.1.7. *Um espaço topológico A é* totalmente desconexo *se, para quaisquer a e b elementos de A, existir uma separação U e V para A tal que $a \in U$ e $b \in V$.*

Teorema B.1.2. *Um espaço topológico A é conexo se e somente se os únicos conjuntos abertos e fechados forem $\emptyset$ e A.*

Definição B.1.8. *Um subconjunto X de um espaço topológico A é* denso *se todo ponto de A pertencer ou ao próprio X ou a X' - ver definição 4.2.6.*

Um subconjunto X de um espaço topológico A é denso-em-si-mesmo *se não possuir pontos isolados, i.e., todas as vizinhanças U_{x_0}, de todos os seus pontos x_0, intersectam X em um ponto distinto de x_0.*

Teorema B.1.3. *Se A for um espaço topológico e $D \subset A$ for denso, então $\overline{D} = A$.*

Exemplo: O conjunto dos racionais é subconjunto denso dos reais, considerando a topologia usual. Todo intervalo aberto de raio $\varepsilon > 0$, centrado em qualquer número real, contém números racionais.

Densidade é uma interessante característica geométrica primitiva. O exemplo da reta é uma boa ilustração da situação dos subconjuntos densos. Um subconjunto D de um espaço topológico é denso quando não é possível separá-lo do espaço utilizando os abertos desse espaço, i.e., não existe uma coleção de abertos de A que não contenha nenhum elemento de D.

Definição B.1.9. *Um espaço topológico é* separável *se possuir subconjunto denso enumerável.*

Definição B.1.10. *Sejam A e B espaços topológios.*

A função $f : A \longrightarrow B$ é contínua se, para cada subconjunto aberto V de B, $f^{-1}(V)$ for aberto de A.

Note que a continuidade da função depende das topologias em A e B.

Dada f uma função de A em B, o mínimo para que a continuidade dessa função seja definida é que nesses conjuntos exista uma estrutura topológica.

Definição B.1.11. *Sejam A e B espaços topológicos.*

A topologia produto *para o conjunto $A \times B$ tem por base a família:*

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau_A, V \in \tau_B\}$$

Alternativamente, podemos definir a topologia produto como a menor topologia que faz as projeções serem funções contínuas.

Teorema B.1.4. *Sejam (A_1, τ_1) e (A_2, τ_2) espaços topológicos e π_1, π_2 funções projeções:*

$$\pi_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i, \text{ tal que } \pi_i(a_1, a_2) = a_i$$

Então $\mathcal{S}$ é subbase para a topologia produto $A_1 \times A_2$, sendo

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \in \tau_1\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \in \tau_2\}$$

Proposição 58. *Sejam (A_1, τ_1) e (A_2, τ_2) espaços topológicos, o espaço topológico $A \times B$ com a topologia produto e π_1, π_2 suas funções projeções. Ambas as funções são contínuas.*

Teorema B.1.5. *Seja $f : (A, \tau_A) \longrightarrow (B, \tau_B)$ uma função.*
Se a imagem inversa de todo aberto básico de B for um aberto básico de A, então f é contínua.

Definição B.1.12. *Sejam A e B espaços topológicos.*

Um homeomorfismo *de A em B é uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ contínua, bijetora e com inversa contínua.*

Os espaços A e B são ditos homeomórficos *se existir um homeomorfismo f entre eles. Propriedades preservadas por homeomofismos são chamadas de* propriedades topológicas.

Definição B.1.13. *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é dita um* homeomorfismo local *se para cada $x \in X$, existir U aberto contendo x tal que $f \restriction_U : U \to f(U)$ é um homeomorfismo.*

Lema B.1.1. *Todo homeomorfismo é um homeomorfismo local.*

Porém, nem todo homeomorfismo local é um homeomorfismo, logo um homeomorfismo local é uma noção mais inespecífica do que homeomorfismos. Se $f : X \to Y$ for um homeomorfismo local, diz-se que X é um espaço étale sobre Y; é por meio de homeomorfismos locais que se constrõem fibrados com boas propriedades (topológicas) serão estes espaços os necessários para construir semânticas para a lógica modal de primeira ordem **FOS4**.

Definição B.1.14. *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é dita* aberta *(fechada) se a imagem, por f, de todo aberto (fechado) de X for um aberto (fechado) de Y.*

Teorema B.1.6. *Se $f : X \to Y$ for uma aplicação entre espaços topológicos, são equivalentes:*

i) f é um homeomorfismo local;

ii) f é contínua e aberta e, para todo $x \in X$, existe U vizinhança de x tal que $f \restriction_U : U \to f(U)$ é uma bijeção;

iii) f é contínua e aberta e aplicação diagonal $\Delta : X \to X^2$ é aberta.

Observação: No caso de $f : X \to Y$ ser um homeomorfismo local, todas as projeções são contínuas e abertas (considerando a topologia produto); de fato, como as projeções são abertas, a operação imagem-inversa é uma aplicação contínua.

Intuitivamente, dois espaços topológicos são homeomórficos se existem transformações contínuas e suaves que transformam um deles no outro, e vice-versa. Se dois espaços topológicos concretos são homeomórficos, um deles é obtido ao contrair, esticar, torcer ou recortar e colar convenientemente o outro - em nenhum desses casos é permitido o colapsamento de partes do objeto em um único ponto. A noção de homeomorfismo é de fundamental importância na teoria dos espaços topológicos, pois oferece um critério para identificar quando espaços topológicos são indistintos em relação a suas propriedades "geométricas-primitivas", por exemplo, uma circunferência e um quadrado, uma "xicara" e uma "rosquinha" (superfície de tais objetos), são topologicamente indistinguíveis[2], pois compartilham o mesmo tipo de "estrutura espacial" básica.

Definição B.1.15. *Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um espaço A é chamada de* cobertura *para A se a união de seus elementos contiver A.*

Se os elementos de $\mathcal{C}$ forem abertos, a cobertura é dita aberta.

Definição B.1.16. *Um espaço A é* compacto *se toda cobertura aberta de A admitir uma subcoleção finita que recobre A.*

O subconjunto $X \subseteq A$ é compacto se admitir subcobertura aberta finita.

Definição B.1.17. *Seja A um conjunto e $\{B_i\}_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de A. A família $\{B_i\}_{i\in I}$ tem a* propriedade de intersecção finita *(PIF) se, para todo $J \subset_{Fin} I$ subconjunto finito de I, for o caso que $\bigcap_{i\in J} B_i \neq \emptyset$.*

Proposição 59. *Um espaço topológico A é compacto se e somente se toda família de subconjuntos fechados de A, com a PIF, tiver intersecção não-vazia.*

Proposição 60. *Um espaço topológico compacto e Hausdorff é normal.*

Como é de se esperar, compacidade é uma propriedade topológica. Além disso, como o nome sugere, o teorema da compacidade está diretamente relacionado à noção de compacidade para sistemas lógicos. Pode-se demonstrar que dado o espaço de todos os modelos de um sistema compacto (lógica proposicional ou de predicados de primeira ordem), é possível induzir uma topologia em tais espaços, de maneira que o espaço topológico seja compacto (no sentido topológico) e tal compacidade implica a compacidade lógica do sistema[3] - ver, por exemplo, (PASEAU, 2010).

[2] Dois seres unidimensionais (com mesmo aparato sensorial e cognitivo), um vivendo sobre a superfície de uma xícara e outro sobre a superfície de uma rosquinha (ideais), tomariam seus espaços de existência como "idênticos".

[3] Um sistema lógico S é compacto quando, para qualquer Γ subconjunto de fórmulas da linguagem, Γ é satisfatível se e somente se todo subconjunto finito de Γ for satisfatível.

Agora, retomarei conceitos e resultados de topologia que nos serão úteis para investigarmos as propriedades geométricas primitivas dos modelos canônicos construídos no capítulo 5 para sistemas modais a partir da semântica topológica. Todos os resultados que forem enunciados e não demonstrados podem ter sua demonstração encontrada em (MUNKRES, 2002).

Definição B.1.18. *Seja T um espaço topológico e $\mathcal{A} \subseteq \wp(T)$ uma coleção de subconjuntos de T.*

A coleção $\mathcal{A}$ é dita localmente finita *em T se, para qualquer $x \in T$, existir uma vizinhança U de x que intersecta somente um número finito de elementos de $\mathcal{A}$.*

Nesse caso, se T possuir base enumerável, então essa base $\mathfrak{B}$ pode ser escrita como uma união enumerável de coleções finitas que são localmente finitas.

Definição B.1.19. *Seja $\mathcal{A} \subseteq \wp(T)$ uma coleção de subconjuntos de um espaço topológico T.*

A coleção $\mathcal{B} \subseteq \wp(T)$ é um refinamento *de $\mathcal{A}$ se, para todo $B \in \mathcal{B}$, existir um elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$.*

Definição B.1.20. *Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de T, espaço topológico, é dita* enumeravelmente localmente finita *se puder ser escrita como a união enumerável de coleções $\mathcal{B}_n$, cada uma delas localmente finitas.*

Lema B.1.2. *Seja T um espaço topológico metrizável. Se $\mathcal{A}$ for um cobertura aberta de T, existe uma cobertura aberta $\mathcal{B}$ de T que refina $\mathcal{A}$ e é enumeravelmente localmente finita.*

Teorema B.1.7. [Teorema de metrização de Nagata-Smirnov] *T é metrizável se e somente se for regular e possuir uma base enumeravelmente localmente finita.*

Definição B.1.21. *Um espaço topológico T é* paracompacto *se qualquer uma de suas coberturas abertas possuir um refinamento localmente finito que cobre T.*

Teorema B.1.8. *Todo espaço metrizável é paracompacto.*

Definição B.1.22. *O espaço T é* localmente metrizável *se, para todo ponto $x \in T$, existir U uma vizinhança de x metrizável na topologia de subespaço (considerando U como subespaço de T).*

Teorema B.1.9. [Teorema de metrização de Smirnov] *T é metrizável se e somente se for um espaço Hausdorff paracompacto que é localmente metrizável.*

Definição B.1.23. *O espaço T é* localmente compacto em *x se existir algum subespaço de T compacto que contém uma vizinhança de x.*

Se T for localmente compacto em cada um de seus pontos, então T é dito localmente compacto*.*

Observação: Compacidade não implica em compacidade local.

Teorema B.1.10. *Seja T um espaço Hausdorff. T é localmente compacto se e somente se, para todo $x \in T$ e toda vizinhança U de x, existir uma vizinhança V de x tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subseteq U$.*

Definição B.1.24. *T é* localmente conexo em *x se para toda vizinhança U de x, existir V vizinhança conexa de x tal que $V \subseteq U$.*

Se T for localmente conexo em todos os seus pontos, então T é dito localmente conexo*.*

Proposição 61. *T é localmente conexo se e somente se, para todo $x \in T$, x possui uma base de vizinhanças conexas.*

Definição B.1.25. *Um* caminnho *entre os pontos t_1 e t_2 de um espaço topológico T é uma função contínua de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em T, tal que $f(a) = t_1$ e $f(b) = t_2$.*

Definição B.1.26. *O espaço T é* conexo por caminhos *se, para todos os pontos t_1 e t_2 de T, existir γ um caminho entre eles.*

Definição B.1.27. *O espaço T é* localmente conexo por caminhos *se, para todos os pontos $x \in T$ e toda vizinhança U de x, existir V vizinhança de x tal que $V \subseteq U$ e V é conexo por caminhos.*

Teorema B.1.11. *Se T for localmente conexo por caminhos então T é localmente conexo.*

Teorema B.1.12. *Seja T um espaço topológico Hausdorff e compacto, então T é não enumerável se T não possuir pontos isolados, i.e., nenhum subconjunto unitário for aberto.*

Definição B.1.28. *Um espaço T é* completamente regular *se todos os pontos unitários forem fechados em T e se, para x_0 um ponto não contido em A, subconjunto fechado de T, existir uma função contínua $f : T \to [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 1$ e $f(A) = \{0\}$.*

Teorema B.1.13. *Um espaço topológico normal é completamente regular.*

Teorema B.1.14. *Um espaço T é completamente regular se e somente se é homeomórfico a um subespaço de $[0, 1]^J$, para algum J.*

Definição B.1.29. *Uma função $d : A \times A \to \mathbb{R}$ é denominada de métrica para um conjunto A quando satisfaz:*

i) $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ *para todo* x, y *em* A.

ii) $d(x, y) = 0$ *se e somente se* $x = y$.

iii) Para todos x, y *e* z *em* A, *tem-se* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Teorema B.1.15. *Seja T um espaço topológico metrizável com topologia gerada por uma base $\mathcal{B}$. Então, existe uma métrica d tal que a topologia induzida por ela coincide com a topologia do espaço, i.e., para todo aberto U de T e para todo $x \in U$, existe um número real δ tal que $B_d(x, \delta) \subset U$.*

Definição B.1.30. *Seja (T, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de T é uma* sequência de Cauchy *se para dado $\epsilon > 0$, existir N inteiro tal que:*

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ para quaisquer } n \text{ e } m \text{ maiores do que } N$$

Definição B.1.31. *Um espaço métrico (T, d) é* completo *se toda sequência de Cauchy convergir para um ponto em T.*

Definição B.1.32. *Se (x_n) for uma sequência convergente de pontos em $A \subseteq T$, em que (T, d) é um espaço métrico completo, então tal sequência converge para um ponto $a \in \overline{A}$.*

Definição B.1.33. *Um espaço métrico (T, d) é* totalmente limitado *se para todo $\epsilon > 0$, existir uma cobertura finita de T por ϵ-bolas abertas*[4].

Teorema B.1.16. *Um espaço métrico (T, d) é compacto se e somente se for completo e totalmente limitado.*

Definição B.1.34. *Um espaço topológico T é localmente m-*euclidiano *(para $m \in \mathbb{N}$) se para todo $x \in T$ existir uma vizinhança V de x homeomórfica a U, subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.*

Variedades topológicas herdam as principais propriedades geométricas primitivas do espaço físico que vivenciamos, essas guiam nossos mecanismos racionais ao abstrairmos noções espaciais em espaços mais gerais (Frege - ver cap. 1). Essas propriedades são a compacidade local, conexidade local, ser localmente contrátil e localmente metrizável, por exemplo.

[4] Bola aberta de raio menor ou igual a ϵ.

Definição B.1.35. *Um espaço topológico Hausdorff T com base enumerável e localmente m-euclidiano é dito uma m-*variedade*.*

Teorema B.1.17. *Um espaço métrico localmente compacto, Hausdorff e com base enumerável é uma m-variedade, para algum m. Se for um espaço métrico globalmente compacto, então é mergulhável em um espaço euclidiano de $2m+1$ dimensões.*

Teorema B.1.18. *Se $p : X \to Y$ for aplicação quociente e X um espaço localmente conexo, então Y é localmente conexo.*

B.2 Fibrados e Feixes

Nesta seção tratarei sobre os conceitos de fibrados e feixes, além de analisarmos construções lógicas que podem ser realizadas no topos de todas os feixes.

B.2.1 Fibrados

Sejam $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ uma família disjunta de conjuntos, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, e $A = \sum_{i \in I} A_i = \cup_{i \in I} A_i$, notação para união disjunta. A família $\mathcal{A}$ determina uma função $f : A \to I$ tal que $f(a) = i$ se e somente se $a \in A_i$ elemento de $\mathcal{A}$. Como A é uma união disjunta, a função f está bem definida e para todo i elemento de I, $f^{-1}(\{i\}) = A_i$.

Definição B.2.1. *Sejam $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ uma família disjunta de conjuntos, $A = \sum_{i \in I} A_i$ e uma função*

$$\begin{aligned} f\colon A &\to I \\ a &\mapsto f(a) = i \end{aligned}$$

tal que $a \in A_i$.

*O par (A, f) é chamado de **fibrado**. O conjunto A é dito **espaço total**, e para cada $i \in I$, A_i é dito uma **fibra** do fibrado (A, f) sobre I, um germe a é um elemento de um dos conjuntos A_i da família $\mathcal{A}$ e f a **aplicação residência**[5].*

Seja $Bn(I)$ a categoria formada pelos objetos que são fibrados sobre I. Desta forma, $Bn(I) = SET \downarrow I$ e, pelo Teorema Fundamental dos topoi, sabemos que $Bn(I)$ é um *topos*,

[5] Estamos adotando aqui uma noção de fibrado mais geral do que o que usualmente é adotado (ver, por exemplo, (MACLANE; MOERDIJK, 1992)), de acordo com a terminologia adotada em (GOLDBLATT, 2006). Da mesma forma, adotaremos a noção de *feixe* como apresentado por Goldblatt]; todavia, estas definições são equivalentes (estrutura interna) categorialmente, pois nossa definição de feixe determina uma categoria equivalente à categoria dos espaços Étale em (MACLANE; MOERDIJK, 1992), pp. 296 - 298.

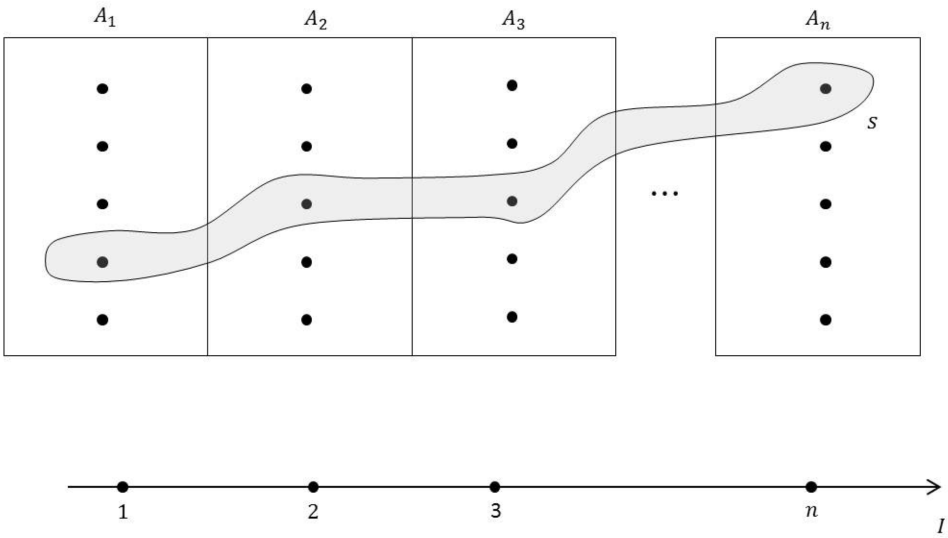
cujos objetos são fibrados sobre I da forma (A, f), com $f : A \to I$, e os seus morfismos aplicações $k : (A, f) \to (B, g)$ que fazem o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Definição B.2.2. *Seja $s : I \to A$ uma função e (A, f) fibrado sobre I. Se s for tal que para todo $i \in I$, $s(i) \in A_i$ implicar $f(s(i)) = i$, então o seguinte diagrama comuta e s é dita **seção global do fibrado** (A, f).*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "Id_I"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Notemos que s é uma seção global porque "escolhe" um germe $s(i)$ de A_i, para todo $i \in I$.



Dizemos que $s : I' \to A$ é uma *seção local* se $I' \subset I$ e $f(s(i)) = i$, para todo $i \in I'$.

Dada uma seção global s de (A, f), o morfismo $s^{-1} : s(A) \to I$ é um morfismo de $Bn(I)$, portanto toda seção global do fibrado (A, f) sobre I pode ser vista como um fibrado (sobre I) em que cada uma de suas fibras é um germe das fibras de (A, f).

Como $Bn(I)$ é um topos, podemos esboçar construções categoriais básicas sobre $Bn(I)$, como pullbacks, produtos e classificador de subobjetos.

Definição B.2.3. *O **objeto terminal** em $Bn(I)$ é $\mathbf{1_I} = (I, Id_I)$, pois para todo $(A, f) \in Bn(I)$, se k for morfismo de (A, f) em $\mathbf{1_I}$, temos o diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & I \arrow[dl, "Id_I"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Ou seja, tal morfismo k é o próprio f, i.e., único.

*Similarmente, $\mathbf{0_I} = (0, \Phi)$ é **objeto inicial**, para $\Phi : \emptyset \to I$, pois para todo objeto (A, f) de $Bn(I)$, existe um único morfismo $h : \mathbf{0} \to A$ ("função" vazia de codomínio A) que faz o diagrama comutar.*

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\Phi"] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Em $Bn(I)$, um objeto não-zero não é isomórfico a $(\emptyset, \Phi)$, ou seja, se a é não-zero, então $a = (B, f)$ para algum $B \neq \emptyset$ tal que $f : B \to I$; neste caso, se B for não-vazio, existe algum morfismo $e : \mathbf{1_I} \to (B, f)$.

Definição B.2.4. *Os **pullbacks** em $Bn(I)$ são fibrados de pullbacks em SET.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & (B, g) \arrow[d, "r"] \\ (A, f) \arrow[r, "k"] & (C, h) \end{tikzcd}$$

O quadrado é um pullback em $Bn(I)$ se P for seu limite e comutar, i.e., se em SET tivermos os seguintes triângulos comutativos:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "p"] & & B \arrow[dl, "g"] \arrow[dd, "r"] \\ & I & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "k"] & & C \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd}$$

Como $j = g \circ q$, $j = f \circ p$, $g = h \circ r$ e $f = h \circ k$ então $j = h \circ r \circ q = h \circ k \circ p$ e tal diagrama é comutativo (em SET) para i em I e fibras A_i, B_i, C_i e P_i, estes limites nas fibras.

Definição B.2.5. *Um **subobjeto** do objeto $(A, f) \in Bn(I)$ é um objeto (B, g) tal que existe o monomorfismo $k : (B, b) \rightarrowtail (A, f)$ que faz o diagrama comutar.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, tail, "k"] \arrow[dr, "g"] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Consideremos $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ e $Pr_I : X \times I \to I$ projeção sobre I, qualquer que seja X.

Definição B.2.6. *O* ***classificador de subobjetos*** *de $Bn(I)$ é o fibrado $\Omega = (\mathbf{2} \times I, Pr_I)$, formado pelas fibras $\Omega_i = \{< 0, i >, < 1, i >\} = \mathbf{2} \times \{i\}$ (munidas das respectivas projeções). Notemos que para $i \neq j$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$.*

Definição B.2.7. *O morfismo $\top_I$ em $Bn(I)$ é um morfismo da forma:*

$$\begin{aligned} \top_I \colon \mathbf{1_I} &\to \Omega \\ i &\mapsto < 1, i > \end{aligned}$$

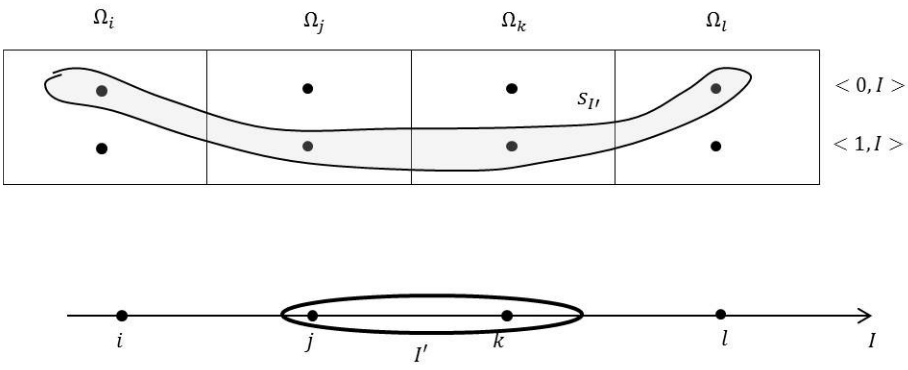
Notemos que $\top_I$ é um fibrado de "cópias" do morfismo $\top$ em cada Ω_i.

Observação: Toda seção global de um fibrado (A, f) é um elemento do fibrado, pois se e é um elemento de a, sabemos que e é um morfismo $\mathbf{1} \to a$. Como $\Omega \in Bn(I)$, um elemento de Ω é um morfismo $\mathbf{1_I} \to \Omega$, logo $\top_I$ é elemento de Ω. Se e for elemento de Ω, então $Id_I = Pr_I \circ e$.

Definição B.2.8. *Sejam (A, f) um fibrado sobre I, $\Omega = (\mathbf{2} \times I, Pr_I)$ e $I' \subseteq I$. Definamos $s_{I'} : I \to \mathbf{2} \times I$ da seguinte forma:*

$$s_{I'}(i) = \begin{cases} < 1, i > & se \quad i \in I' \\ < 0, i > & se \quad i \notin I' \end{cases}$$

Então $s_{I'}$ é uma seção do fibrado Ω, podendo ser interpretada como a função caractetística para I'.



Sejam $A = \sum_{i \in I} A_i$ e $B = \sum_{i \in I} B_i$, definamos $A \times_I B = \sum_{i \in I} A_i \times B_i$.

Definição B.2.9. *Sejam (A, f) e (B, g) objetos de $Bn(I)$, topos. O* ***produto*** *de (A, f) e (B, g) é o objeto $(A \times_I B, h)$ que completa o pullback*

$$\begin{tikzcd}
A \times_I B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, dashed, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & I
\end{tikzcd}$$

de maneira que $h : A \times_I B \to I$ é única.

Notemos que p e q são as respectivas projeções $A \leftarrow A \times_I B \to B$ em A e B, tais que $h = f \circ p = g \circ q$.

Na construção do produto, $\forall i \in I$ temos $A_i \times B_i = \{< x, y > \mid f(x) = g(y) = i\}$, portanto o fibrado $(A \times_I B, h)$ é o *produto fibrado* das fibras de (A, f) e (B, g).

Definição B.2.10. *Sejam (A, f) e (B, g) objetos de $Bn(I)$ para os quais há $k : (A, f) \to X$ e $l : (B, g) \to X$ morfismos no topos. Podemos definir o* ***coproduto*** *destes objetos pelo seguinte procedimento:*

Sejam $(\hat{A}, \hat{f})$ e $(\hat{B}, \hat{g})$ objetos de $Bn(I)$, tais que $\hat{A} = \{< a, 0 > \mid a \in A\}$ e $\hat{B} = \{< b, 1 > \mid b \in B\}$, e as funções $\hat{f}(< a, 0 >) = f(a)$ e $\hat{g} = (< b, 1 >) = g(b)$. Neste caso, tais objetos são disjuntos, logo existem extensões apropriadas de k e l, morfismos entre os novos objetos para os quais podemos construir o objeto coproduto $(\hat{A}, \hat{f}) + (\hat{B}, \hat{g})$:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
(A, f) \arrow[ur, "k"] \arrow[r, hook, "\hat{\imath}_A"] & (\hat{A}, \hat{f}) + (\hat{B}, \hat{g}) \arrow[u, dashed, "{[\hat{k}, \hat{l}]}"] & (B, g) \arrow[ul, "l"'] \arrow[l, hook', "\hat{\imath}_B"]
\end{tikzcd}$$

Para $\hat{\imath}_Z = i_{\hat{Z}} \circ i_Z$.

Assim como o produto dos objetos de $Bn(I)$ é o fibrado dos produtos das fibras destes objetos do topos, a *exponenciação* $(B, g)^{(A,f)}$ em $Bn(I)$ é o fibrado das exponenciações das fibras de (A, f) e (B, g).

Consideremos os conjuntos $D_i = \{k \mid k : A_i \to B\}$, para todo $i \in I$ espaço base dos fibrados (A, f) e (B, g), formados pelos morfismos k que fazem o diagrama comutar, isto é, $f \restriction_{A_i} = g \circ k$.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f\restriction_{A_i}"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Então, para toda $k \in D_i$, temos que $k(A_i) = B_i$ é uma fibra de (B, g).

Seja $E_i = \{i\} \times D_i$, para todo $i \in I$; se $i \neq j$, então $E_i \cap E_j = \emptyset$; consideremos então $E = \sum_{i \in I} E_i$ a união disjunta dos conjuntos E_i.

Definamos a seguinte função:

$$\begin{aligned} p\colon E &\to I \\ e &\mapsto i \end{aligned}$$

Função esta que satisfaz $p(e) = i$ se e somente se $e =< i, k >$ tal que $k \in D_i$.

Definição B.2.11. *O fibrado (E, p), objeto de $Bn(I)$, é o **exponencial** de $(B, g)^{(A,f)}$, no qual o **morfismo avaliação** $ev : (A, f) \times_I (E, p) \to (B, g)$ é tal que o diagrama a seguir é um pullback e o morfismo $h = f \circ q = p \circ r$ é único, para q e r projeções apropriadas.*

$$\begin{tikzcd} E \times_I A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"] \arrow[dr, dashed, "h"] & A \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "p"] & I \end{tikzcd}$$

Então $ev(< x, < i, k >>) = k(x) \in B_i$.

Consideremos as funções lógicas em $Bn(I)$.

O morfismo **falso** $\perp_I$ é o fibrado dos morfismos $\perp$ nas fibras Ω_i, ou seja, é o morfismo caracteristica do morfismo $!_{\mathbf{1}} : \mathbf{0_I} \to \mathbf{1_I}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0_I} \arrow[r, "!_1"] \arrow[d, "!_1"] & \mathbf{1_I} \arrow[d, "\chi_! = \perp_I"] \\ \mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\top_I"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Note que $\perp_I(i) =< 0, i >$ para todo $i \in I$.

O morfismo **negação** $\neg$ é a característica de $\perp_I$, ou seja, é o fibrado da característica de $\perp$ nas fibras Ω_i.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\perp_I"] \arrow[d, "!_{1_I}"] & \Omega \arrow[d, "\chi_\perp = \neg"] \\ \mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\top_I"] & \Omega \end{tikzcd}$$

O morfismo **conjunção** $\wedge$ é a característica de $< \top_I, \top_I >$, novamente o fibrado de $< \top, \top >$ nas fibras $\Omega_i \times \Omega_i$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1_I} \arrow[dl, "\top_I"'] \arrow[d, dashed, "<\top_I,\top_I>"] \arrow[dr, "\top_I"] & \\
\Omega & \Omega \times_I \Omega \arrow[l, two heads, "Pr_1"] \arrow[r, two heads, "Pr_2"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1_I} \arrow[r, "<\top_I,\top_I>"] \arrow[d, "!_1"] & \Omega \times_I \Omega \arrow[d, "\chi_{<-,->}=\wedge"] \\
\mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\top_I"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

O morfismo **disjunção** $\vee$ é a característica do monomorfismo imagem do coproduto $[< \top_\Omega, Id_\Omega >, < Id_\Omega, \top_\Omega >]$, novamente o fibrado de $m_{[<\top_{\Omega_i}, Id_{\Omega_i}>, <Id_{\Omega_i}, \top_{\Omega_i}>]}$ nas fibras $f(\Omega_i \times \Omega_i)$.

$$\begin{tikzcd}
& \Omega \arrow[dl, "\top_\Omega"'] \arrow[d, dashed, "<\top_\Omega,Id_\Omega>"] \arrow[dr, "\top_\Omega"] & \\
\Omega & \Omega \times_I \Omega \arrow[l, two heads, "Pr_1"] \arrow[r, two heads, "Pr_2"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \Omega \arrow[dl, "\top_\Omega"'] \arrow[d, dashed, "<Id_\Omega,\top_\Omega>"] \arrow[dr, "\top_\Omega"] & \\
\Omega & \Omega \times_I \Omega \arrow[l, two heads, "Pr_1"] \arrow[r, two heads, "Pr_2"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, hook, "i_\Omega"] \arrow[dr, "<\top_\Omega,Id_\Omega>"] & \Omega + \Omega \arrow[d, dashed, "{[-,-]}"] & \Omega \arrow[l, hook', "i_\Omega"] \arrow[dl, "<Id_\Omega,\top_\Omega>"] \\
& \Omega \times_I \Omega &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f(\Omega + \Omega) \arrow[r, tail, "m_{[-,-]}"] \arrow[d, "!_{\Omega+\Omega}"] & \Omega \times_I \Omega \arrow[d, "\chi_{[-,-]}=\vee"] \\
\mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\top_I"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

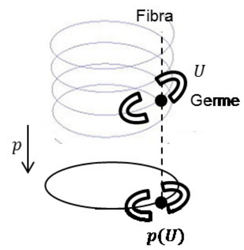
O morfismo **implicação material** $\Rightarrow$ é a característica do morfismo equalizador e de $\wedge$, $\boldsymbol{Pr_1} : \Omega \times \Omega \rightrightarrows \Omega$, morfismo e que é fibrado do equalizador destes morfismos nas fibras Ω_i.

$$
\begin{tikzcd}
\Theta \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\chi_e \Longrightarrow"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, tail, "\top_I"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

B.2.2 Feixes

Seja I um espaço topológico. De maneira geral, ver (MACLANE; MOERDIJK, 1992), um **feixe** sobre I é um fibrado da forma (A, f) no qual alguma "boa" propriedade local é caracterizada por meio da noção de vizinhança (aberta) em I, espaço base. Sabe-se que a categoria de todos os feixes sobre I é um topos (homeomorfismo local), como em (GOLDBLATT, 2006).

Sejam A e I espaços topológicos com θ_A e θ_I as coleções de abertos de A e I, respectivamente, e $p : A \to I$ uma função contínua que também é homeomorfismo local, logo, para todo $V \in \theta_I$, $p^{-1}(V) \in \theta_A$ (continuidade) e para todo $x \in A$, existe $U \in \theta_A$ vizinhança de x tal que $p \downharpoonleft U : U \to p(U)$ é homeomorfismo (homeo local), como no caso da hélice, contida em $\mathbb{R}^3$, sobre S^1, contida em $\mathbb{R}^2$.



Neste caso p é a aplicação residência do fibrado (A, p).

Definição B.2.12. *Sejam A e I espaços topológicos e $p : A \to I$ uma função contínua que é homeomorfismo local, então denominaremos o fibrado (A, p) simplesmente como **feixe** sobre I*[6].

Quando A é um espaço conexo por caminhos, então (A, p) é dito um espaço de recobrimento, ou cobertura, de I. Além disso, para toda vizinhança U em I, a imagem inversa de p em U é formada por componentes conexas S_i, para os quais $p \upharpoonright S_i : S_i \to U$ é um homeomorfismo para todo i. A hélice, no exemplo anterior, é um espaço de recobrimento para S^1.

[6] Em (MACLANE; MOERDIJK, 1992), por exemplo, isto é caracterizado como um *Espaço Étale*.

Definição B.2.13. *A categoria de todos* feixes *sobre I será denotada por $Top(I)$, categoria esta chamada de* ***topos espacial***[7]*; note que esta é subcategoria do topo $Bn(I)$,* topos elementar - *ver (GOLDBLATT, 2006).*

Dos fatos expostos nesta seção, podemos concluir que todas as construções realizadas em $Bn(I)$ podem ser feitas em $Top(I)$, já que quando a composição está bem definida, continuidade e homeomorfismo local são preservados.

Definição B.2.14. *O* ***objeto terminal*** *em $Top(I)$ é denotado por $\mathbf{1_I} = (I, Id_I)$; o* ***objeto inicial*** *é $\mathbf{0_I} = (\emptyset, \Phi)$.*

Definição B.2.15. *Os* ***pullbacks*** *em $Top(I)$ são definidos da mesma maneira que em $Bn(I)$.*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "p"'] & & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "r"] \\
& I & \\
A \arrow[rr, "k"'] \arrow[ur, "f"] & & C \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que j, g, h e f são funções contínuas e homeomorfismos locais, portanto as composições são também contínuas e homeomorfismos locais.

De fato, em $TOP(I)$, todo morfismo é contínuo e um homeomorfismo local.

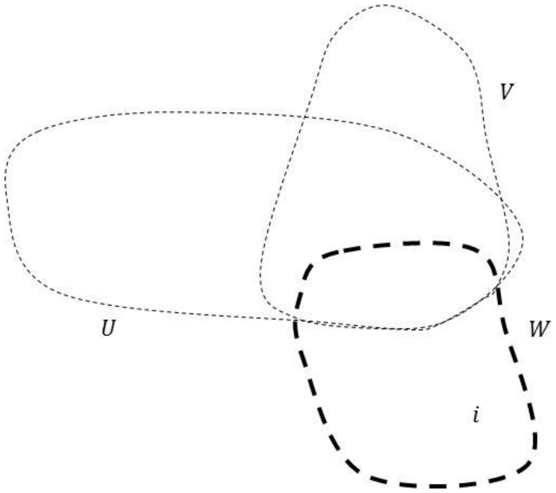
Seja θ_i a coleção de vizinhanças de i em I, ou seja, para todo $U \in \theta_i$, $i \in U$ e, além disto, $\theta_i \subseteq \theta_I$.

A estrutura topológica sobre I fornece uma maneira de classificar os pontos "próximos" de i, elemento qualquer de I, ou seja, a noção de vizinhança aberta dos espaços topológicos fornece uma medida de proximidade entre as fibras do fibrado (indexadas por I).

Consideremos $\sim_i$ uma relação definida sobre θ_I, para cada $i \in I$, por: $U \sim_i V$ se e somente se $\exists W \in \theta_i$ tal que $U \cap W = V \cap W$. De fato, tal relação é de equivalência e indica que U e V são "localmente próximos" em W, uma vizinhança de i; notemos que U e V não precisam ser vizinhanças (abertas) de i.

Logo, para U e V abertos de I tais que $U \sim_i V$, a sentença "$U = V$" é verdadeira em regiões localmente próximas de i.

[7] Tal nome é propício, já que aplicações como estas entre espaços topológicos induzem functores entre categorias (de feixes no sentido generalizado) que satisfazem certas propriedades especiais, denominados *functores geométricos*.



Consideremos $[U]_i := \{V \in \theta_I \mid U \sim_i V\}$ o germe de U em i e definamos $\Omega_i = \{< [U]_i, i > \mid U \in \theta_I\}$ como as fibras do feixe $\Omega = (\hat{I}, \hat{p})$, para $\hat{I} = \sum_{i \in I} \Omega_i$ e $\hat{p} : \hat{I} \to I$ tal que $\hat{p}(< [U]_i, i >) = i$, no qual a topologia em $\hat{I}$ é gerada por $[U, V] = \{< [U]_i, i > \mid \forall i \in I, V \in \theta_I$ e $U \subseteq V\}$, já que $\mathcal{B} = \bigcup_{U \in \theta_I} [U, V]$ é base para topologia em $\hat{I}$ - ver (GOLDBLATT, 2006). Para tal base, $\hat{p}$ é contínua e um homeomorfismo local e, de fato, toda fibra Ω_i é um subespaço discreto de $\hat{I}$.

A família $\mathcal{B}$ de fato é base.

1) Seja $< [U]_i, i >\in \hat{I}$, então U é aberto e $U \subseteq I$, portanto $< [U]_i, i >\in [U, I]$, pois I é aberto.

2) Suponhamos $[U_1, V_1] \cap [U_2, V_2] \neq \emptyset$, então seja $< [U]_i, i >\in [U_1, V_1] \cap [U_2, V_2]$, temos que $[U]_i = [U_1]_i = [U_2]_i$ e $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$ se e somente se $U \sim_i U_1 \sim_i U_2$ se e somente se existe T vizinhança de i tal que $U_1 \cap T = U_2 \cap T = U \cap T = Z$, para Z aberto e $Z \subseteq U$, $Z \subseteq U_1$ e $Z \subseteq U_2$.

Como $T \in \Theta_i$ e $T \cap U = T \cap Z = Z$, então $Z \sim_i U$ segue que $[Z]_i = [U]_i$. Consideremos $V_Z = V_1 \cup V_2$ aberto. Então $< [U]_i, i >=< [Z]_i, i >\in [Z, V_Z]$. Mostremos que $[Z, V_Z] \subseteq [U_1, V_1] \cap [U_2, V_2]$.

De fato, seja $< [Z]_j, j >\in [Z, V_Z]$ e J uma vizinnhança qualquer de j. Então $J \cap Z \subseteq J \cap U_1$ e $J \cap Z \subseteq J \cap U_2$; se $J \cap Z = \emptyset$, o resultado é imediato (pois $[Z]_j = \emptyset$). Suponhamos então $J \cap Z \neq \emptyset$, existe J_U vizinhança de j tal que $J_U \cap Z \subseteq J \cap Z$ tal que $J_U \cap U_1 = J_U \cap U_2 = J_U \cap Z$, ou seja, $Z \sim_j U_1 \sim_j U_2$, portanto $[Z]_j = [U_1]_j = [U_2]_j$. Como $V_1 \subseteq V_Z$ e $V_2 \subseteq V_Z$, segue que $< [Z]_j, j >\in [U_1, V_1] \cap [U_2, V_2]$.

Definição B.2.16. *O objeto Ω definido anteriormente é o* ***classificador de subobjetos*** *do topos $Top(I)$.*

Para cada germe $[U]_i$ temos as seguinte propriedades:

1) $[U]_i = [I]_i \Leftrightarrow i \in U$

De fato: $V \in [I]_i$ se e somente se $\exists W \in \theta_i$ tal que $W \cap V = W \cap I = W$ se e somente se $W \subset V$. Portanto $[U]_i = [I]_i$ se e somente se $i \in V$ para todo $V \in [U]_i$ se e somente se $i \in U$, já que $W \cap U = W \cap V$ para toda vizinhança W de i.

2) $[I]_i = \theta_i$

De fato: $V \in [I]_i$ se e somente se $\exists W \in \theta_i$ tal que $V \cap W = W \cap I = W$ se e somente se $W \subset V$ se e somente se V aberto for vizinhança de i.

3) $[U]_i = [\emptyset]_i \Leftrightarrow i$ é *separado* de U

De fato: sabemos que $[\emptyset]_i$ é trivialmente vazio.

$\Rightarrow$) Se $[U]_i = [\emptyset]_i$ então não existe V aberto tal que exista $W \in \theta_i$ e $U \cap W = V \cap W$, logo para todo aberto V, não existe W vizinhança de i tal que $U \cap W = V \cap W$. Como $I \in \theta_i$, existe $V \in \theta_i$ tal que $U \cap V = \emptyset$, ou seja, existe uma vizinhança de i disjunta de U.

$\Leftarrow$) Suponhamos que i não seja separado de U, então existe $V \in \theta_i$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$ e $U \cap V = W \in \theta_i$, portanto $W \cap U = W \cap V$, logo $[U]_i \neq \emptyset$.

Observação: Com esta construção, sabemos que a coleção de vizinhanças de I é um reticulado distributivo $(\theta_I, \cap, \cup)$ e que para todo $i \in I$, θ_i é um filtro primo deste reticulado, desta forma, cada fibra Ω_i é isomórfica ao quociente $\frac{\theta_I}{\theta_i}$.

Os germes dos abertos em i formam a coleção $\frac{\theta_I}{\sim_i} = \{[U]_i \mid U \in \theta_I\}$, que é reticulado pseudo-complementado. O pseudo complemento de $[U]_i$ é $[(U^c)^\circ]_i$ e valem:

1) $\mathbf{0} = [\emptyset]_i$ e $\mathbf{1} = [I]_i$;

2) $[U]_i \sqcap [V]_i = [U \cap V]_i$;

3) $[U]_i \sqcup [V]_i = [U \cup V]_i$;

4) O pseudo-complemento de $[U]_i$ em relação à $[V]_i$ é $[(U^c \cup V)^\circ]_i$ é denotado por $[U]_i \Rightarrow [V]_i$;

Portanto, de fato $\frac{\theta_I}{\sim_i}$ é uma álgebra de Heyting.

Consideremos agora $s : I \to \hat{I}$ uma seção global contínua do fibrado $\Omega = (\hat{I}, \hat{p})$.

Definição B.2.17. *Seja $s_U : U \to \hat{I}$ uma seção local contínua, para U aberto de I. Podemos estender s_U naturalmente para uma seção global s, fazendo:*

$$\begin{aligned} s\colon I &\to \hat{I} \\ i &\mapsto < [U]_i, i > \end{aligned}$$

Desta forma estendida, s é seção global contínua ($s : \mathbf{1_I} \to \Omega$). Como U é fixo para essa extensão s, segue da propriedade 1) acima que $s(i) =< [U]_i, i >=< [I]_i, i >$ se e somente se $i \in U$.

Se i for separado de U, então $s(i) =< [U]_i, i >=< [\emptyset]_i, i >=< \emptyset, i >$, pela propriedade 3.

Notamos ainda que se $t : \mathbf{1_I} \to \Omega$ for seção contínua e $U = \{i \mid t(i) =< [I]_i, i >\}$, então $U = t^{-1}([I, I])$, ou seja, U é aberto e t é exatamente a extensão de s_U.

Definição B.2.18. *Em $Top(I)$, o morfismo **verdadeiro** $\top_I : \mathbf{1_I} \to \Omega$ é uma seção contínua $\top_I : I \to \hat{I}$ tal que $\top_I(i) =< [I]_i, i >$ para todo $i \in I$.*

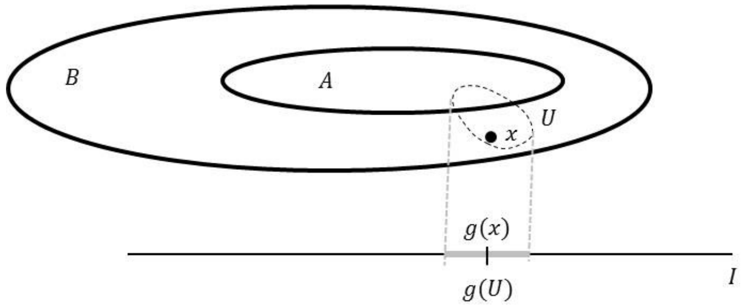
Suponhamos que $k : (A, f) \hookrightarrow (B, g)$ seja um monomorfismo de $Top(I)$ e que $A \subseteq B$ abertos. Temos o pullback da característica de k:

$$\begin{tikzcd} (A,f) \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "!_{(A,f)}"] & (B,g) \arrow[d, "\chi_k"] \\ \mathbf{1_I} \arrow[r, "\top_I"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Temos as seguintes situações:

A) Se $x \in A$, como $f = g \circ k$, então não há o que verificarmos, pois $(\top_I \circ !_{(A,f)})(x) = (\chi_k \circ k)(x) =< [I]_{f(x)}, f(x) >$.

B) Suponhamos então que $x \notin A$. Existe U vizinhança de x em B tal que $g \restriction U$ é



um homeomorfismo local; a função χ_k retorna a coleção de germes de $g(A \cap U)$ em $g(x)$:

$$\begin{aligned} \chi_k \colon B &\to \hat{I} \\ x &\mapsto < [g(A \cap U]_{g(x)}, g(x) > \end{aligned}$$

Tal coleção fornece uma medida (pelo homeomorfismo local $g \upharpoonright U$) dos pontos de A "próximos" de x, logo $[U]_{g(x)}$ é um sistema de vizinhanças que nos ajuda a medir a proximidade à A dos pontos $x \in B$.

Observação: Em cada fibra $\Omega_{g(x)}$ temos a seguinte ordem parcial:

Definamos em $\{< [U]_{g(x)}, g(x) > \mid U \in \theta_I\}$ a relação $[U]_{g(x)} \sqsubseteq [V]_{g(x)}$ se e somente se existe $W \in \theta_{g(x)}$ tal que $U \cap W \subseteq V \cap W$, isto é, "$U \subseteq V$" é uma sentença localmente verdadeira em torno de $g(x)$.

Em $Top(I)$, todos os morfismos são contínuos e homeomorfismos locais; como U é aberto em B, $g(U)$ é aberto de I. Mas k é uma inclusão, segue então que $f(A) = g(k(A)) = g(A)$ é aberto, pois $f(A)$ é aberto (f contínua, homeomorfismo local e $f^{-1}(I) = A$); portanto $g(A \cap U) = g(A) \cap g(U)$ é aberto de I, jsutificando o fato de tomarmos o germe $[g(A \cap U)]_{g(x)}$. Assim, se $x \in A$, então $g(x) \in g(A \cap U)$:

i) Para toda U vizinhança de x (em B), temos $[g(A \cap U)]_{g(x)} = [I]_{g(x)}$.

ii) Se x for separado de A, então $[g(A \cap U)]_{g(x)} = [\emptyset]_{g(x)} = \emptyset$.

iii) Se $x \in \partial A$ (fronteira de A), toda vizinhança U de x intercepta A, então temos a inclusão $[\emptyset]_{g(x)} \sqsubseteq [g(A \cap U)]_{g(x)} \sqsubseteq [I]_{g(x)}$.

Definição B.2.19. *Se (A, f) e (B, g) forem objetos de $Top(I)$, então f e g são funções contínuas e homeomorfismos locais. O **produto** destes objetos é o par $(A \times_I B, h)$ que completa o pullback.*

$$\begin{tikzcd} A \times_I B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, dashed, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & I \end{tikzcd}$$

Em que $p : A \times_I B \to A$ e $q : A \times_I B \to B$ são as projeções e h é o único morfismo tal que $h = f \circ p = g \circ q$.

Em $Top(I)$ temos que o produto dos seus objetos também é o produto fibrado das fibras destes objetos (A, f) e (B, g). O fato de f, g, p e q serem contínuas (considerando a topologia produto em $A \times_I B$) e homeomorfismos locais garante que h também é contínua e homeomorfismo local, portanto morfismo de $Top(I)$.

Assim como o produto em $Top(I)$ segue a construção dos produtos em $Bn(I)$, a exponenciação $(B,g)^{(A,f)}$ no topos espacial também é o fibrado das exponenciações $B_i^{A_i}$ das fibras de (A,f) e (B,g). Todas estas construções são possíveis pois continuidade e homeomorfismo local são preservados pela composição (quando a mesma está bem definida).

Seja $D_i = \{k \mid k : A_i \to B$ para k contínua e homeomorfismo local, $\forall i \in I\}$, coleção formada pelos funções k que fazem o diagrama comutar para os objetos (A,f) e (B,g) de $Top(I)$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f\restriction_{A_i}"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Portanto, para toda $k \in D_i$, temos que $k(A_i) = B_i$ é uma fibra de (B,g).

Definamos $E_i = \{i\} \times D_i$ para todo $i \in I$. Quando $i \neq j$ temos que $E_i \cap E_j = \emptyset$; portanto sejam $E = \sum_{i \in I} E_i$ e $p : E \to I$ tal que $p(< i, k >) = i$, como E é união disjunta, temos que $k \in D_i$.

Definição B.2.20. *O par (E,p) é um fibrado e, de fato, pertence a $Top(I)$, pois p é contínua e homeomorfismo local (segue do fato de que cada $k \in D_i$ é contínua e homeomorfismo local e E é união disjunta, portanto em p se preserva a propriedade de ser homeomorfismo local). Tal fibrado é o exponencial de $(B,g)^{(A,f)}$.*

Temos então o ***morfismo avaliação*** *$ev : (A,f) \times_I (E,p) \to (B,g)$ tal que o diagrama a seguir é um pullback.*

$$\begin{tikzcd} E \times_I A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"] \arrow[dr, dashed, "h"] & A \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "p"] & I \end{tikzcd}$$

Então $ev(< x, < i, k >>) = k(x) \in B_i$.

Considerando essas ferramentas que possuímos no topos $TOP(I)$, podemos utilizar a estrutura categorial para interpretar os conectivos lógicos (clássicos). Em especial, conforme vimos, temos a continuidade e homeomorfismo local das projeções e aplicação diagonal, requisitos para podermos interpretarmos a igualdade e os quantificadores nessa estrutura, *topos geométrico*. Conforme delineado no capítulo 7, a noção topológica de vizinhança (interior) será o suficiente, nessas circunstâncias, para interpretar o operador $\Box$, e portanto para interpretarmos a lógica modal quantificada (primeira ordem).

Consideremos as funções lógicas em $Top(I)$.

O morfismo **falso** é o fibrado de $\bot_i$ em cada fibra Ω_i.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] & \mathbf{1_I} \arrow[d, "\chi_! = \top_I"] \\ \mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\top_I"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \bot_I : \mathbf{1_I} \to \Omega \\ i \mapsto < [\emptyset]_i, i > \end{aligned}$$

O morfismo **negação** é a característica de $\bot_I$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\bot_I"] \arrow[d, "!"'] & \Omega \arrow[d, "\chi_\bot = \neg"] \\ \mathbf{1_I} \arrow[r, tail, "\top_I"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \neg : \Omega \to \Omega \\ < [U]_i, i > \mapsto < [(U^c)^\circ]_i, i > \end{aligned}$$

O morfismo **conjunção** satisfaz:

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega \\ (< [U]_i, i >, < [V]_i, i >) \mapsto < [(U \cap V)]_i, i > \end{aligned}$$

O morfismo **disjunção** satisfaz:

$$\begin{aligned} \vee : \Omega \times \Omega \to \Omega \\ (< [U]_i, i >, < [V]_i, i >) \mapsto < [(U \cup V)]_i, i > \end{aligned}$$

O morfismo **implicação** (material) satisfaz (pseudo-complemento relativo):

$$\begin{gathered}\Rightarrow: \Omega \times \Omega \to \Omega \\ (< [U]_i, i >, < [V]_i, i >) \mapsto < [(U^c \cup V)^\circ]_i, i >\end{gathered}$$

Índice