

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Fabio Henrique Oliani

**Renormalons e correções de ordem alta da QCD
perturbativa em decaimentos hadrônicos do tau**

São Carlos

2022

Fabio Henrique Oliani

**Renormalons e correções de ordem alta da QCD
perturbativa em decaimentos hadrônicos do tau**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito

Versão corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Oliani, Fabio Henrique
Renormalons e correções de ordem alta da QCD
perturbativa em decaimentos hadrônicos do tau / Fabio
Henrique Oliani; orientador Diogo Rodrigues Boito -
versão corrigida -- São Carlos, 2022.
131 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física
Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São
Carlos, Universidade de São Paulo, 2022.

1. QCD. 2. Tau. 3. Acoplamento forte. 4. Renormalons.
I. Boito, Diogo Rodrigues, orient. II. Título.

A Deus e a minha amada esposa Viviane.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus. Através do sangue de Jesus fui salvo e tenho minha vida guiada por Ele. Eu não teria chegado aqui se não fosse a graça de Deus.

Agradeço a minha esposa Viviane, a quem também dedico esta tese. Eu não teria terminado este trabalho sem você. Te agradeço pelo amor e apoio incondicionais e por sempre me encorajar, em todos os momentos, a ser uma pessoa melhor. O que eu aprendo com você supera qualquer titulação. Sou eternamente grato a e por você e espero passar o resto da minha vida ao seu lado.

Também agradeço aos familiares e amigos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a construção desta tese.

Agradeço também ao meu orientador, Prof. Diogo Boito, por todas as discussões sobre física e vida, todos os comentários, reuniões e suporte que fizeram nascer esta tese. Agradeço também ao Dr. Pere Masjuan pelas discussões que resultaram neste trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer ao IFSC por todo suporte técnico e material oferecido durante estes anos. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e também com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) através do projeto 141722/2018-5.

“Nada é permanente, exceto a mudança.”
Heráclito

RESUMO

OLIANI, F. H. **Renôrmalons e correções de ordem alta da QCD perturbativa em decaimentos hadrônicos do tau.** 2022. 131p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Determinações precisas do acoplamento forte, α_s , a partir dos decaimentos $\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau$ e do processo $e^+e^- \rightarrow (\text{hádrons})$ abaixo da massa do quark c dependem de Regras de Soma a Energia Finita. Nelas, o lado experimental é dado pelos momentos integrados da função espectral e o lado teórico está diretamente ligado com as correções perturbativas obtidas a partir da função de Adler, sendo esta conhecida, no momento, a cinco loops, no limite quiral. Neste trabalho, estudamos dois aspectos do lado teórico das regras de soma, sempre usando, num primeiro momento, o limite large- β_0 como um laboratório. A expansão da função de Adler, neste limite, é conhecida exatamente em todas as ordens e serve como um modelo para a QCD completa. Primeiramente, aplicamos o método dos aproximantes de Padé e suas variantes para extrair informações sobre as correções de ordens mais altas da função de Adler. As estratégias desenvolvidas podem ser entendidas em termos da estrutura analítica da série no plano de Borel. Ao fim obtivemos previsões confiáveis, independentes de modelo, para os coeficientes de ordens mais altas da função de Adler. Estes resultados têm impactado a incerteza final de α_s em determinações recentes, reduzindo-a. Em um segundo momento, estudamos os renôrmalons que aparecem na transformada de Borel dos momentos polinomiais. Estabelecemos uma conexão direta entre os renôrmalons e o comportamento perturbativo dos momentos integrados. Usando variações de esquema e uma transformada de Borel modificada, estudamos o polo do renôrmalon infra-vermelho dominante que está por trás dos momentos cujas séries perturbativas são instáveis, enquanto os momentos com bom comportamento perturbativo se beneficiam de cancelamentos parciais dos renôrmalons. Finalmente, discutimos um truncamento otimizado da série perturbativa baseado em variações de esquema de renormalização.

Palavras-chave: QCD. Tau. Acoplamento forte. Renôrmalons.

ABSTRACT

OLIANI, F. H. **Renormalons and higher-order perturbative QCD corrections in hadronic tau decays.** 2022. 131p. Thesis (Doctor in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Precise determinations of the strong coupling, α_s , from hadronic τ decays and from $e^+e^- \rightarrow$ (hadrons) below the c -quark mass rely on Finite Energy Sum Rules. In these sum rules, the experimental side is given by integrated spectral function moments and the theoretical side is directly connected with the perturbative corrections obtained from the Adler function, which are known, at present, at five loops, in the chiral limit. In this work, we study two aspects of the theoretical side of the sum rules, always using, at first, the large- β_0 limit as a laboratory. The expansion of the Adler function, in this limit, is known exactly to all orders and serves as a model for full QCD. First, we apply the method of Padé approximants and its variants to extract information about the higher-order corrections of the Adler function. The strategies developed here can be understood in terms of the analytical structure of the series in the Borel plane. In the end, we obtained reliable, model-independent predictions for the higher-order coefficients of the Adler function. These results have impacted the final uncertainty of α_s in recent determinations, reducing it. Second, we study the renormalons that appear in the Borel transform of polynomial moments. We establish a direct connection between renormalons and the perturbative behavior of integrated moments. Using scheme variations and a modified Borel transform, we study the pole of the dominant infrared renormalon that governs the moments whose perturbative series are unstable, while the moments with good perturbative behavior benefit from partial cancellations of renormalons. Finally, we discuss an optimized truncation of the perturbative series based on renormalization scheme variations.

Keywords: QCD. Tau. Strong coupling. Renormalons.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama de Feynman que representa o vértice fundamental de interação da QED entre elétron, pósitron e fóton.	29
Figura 2 – Interação entre quarks e glúons.	32
Figura 3 – Interação entre três glúons.	32
Figura 4 – Interação entre quatro glúons.	32
Figura 5 – Dados experimentais para $R_{e^+e^-}$ em função da energia fornecidos pela atualização de 2021 do Particle Data Group (58).	33
Figura 6 – Determinações do acoplamento forte fornecida pela atualização de 2021 do Particle Data Group. (58) A curva preta é obtida através de teoria de perturbação junto com sua incerteza, enquanto os pontos são os resultados experimentais obtidos em diferentes escalas de energia e utilizando diferentes métodos.	35
Figura 7 – Variação do acoplamento $\hat{\alpha}_Q$ em função do parâmetro de esquema C onde a faixa amarela está relacionada com a incerteza de α_s	37
Figura 8 – Diagrama de Feynman que simboliza o teorema óptico aplicado aos decaimentos hadrônicos do lépton τ	39
Figura 9 – Contorno de integração para o cálculo de R_τ utilizando as Regras de Soma à Energia Finita (FESRs).	40
Figura 10 – Série assintótica da função de Stieltjes utilizando $\epsilon = 0, 10$. A linha horizontal amarela é o resultado exato da função de Stieltjes e o ponto quadrado azul é o menor termo da série.	47
Figura 11 – Comportamento assintótico das séries das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ relacionados com as posições dos polos na transformada de Borel das respectivas funções. A linha amarela é referente ao valor da soma de Borel.	50
Figura 12 – Comparação entre o resultado exato (linha preta sólida) e as aproximações por Taylor até segunda ordem (linha azul pontilhada) e pelo aproximante de Padé P_1^1 (linha vermelha traço-ponto) para a função $f(x) = \frac{\sqrt{(1+\frac{1}{2}x)}}{(1+2x)^2}$	56
Figura 13 – Correções do tipo cadeia de bolhas de $q\bar{q}$ dominantes no limite large- β_0 da QCD.	62
Figura 14 – Correções a 1-loop para uma corrente vetorial genérica.	63
Figura 15 – Correção de 2-loops do tipo auto-energia do quark para uma corrente vetorial genérica.	64
Figura 16 – Correção de “verdadeiro” 2-loops para uma corrente vetorial genérica.	65

Figura 17 – Cadeia infinita de correções de bolhas de férmions ao propagador do glúon.	68
Figura 18 – Resultados a partir do uso dos aproximantes $D\log_1^1(u)$ e $D\log_1^1(u, -1)$ em large- β_0 . (a) Expansão perturbativa da função de Adler. (b) $\delta^{(0)}$ em FOPT. (c) $\delta^{(0)}$ em CIPT.	82
Figura 19 – Expansão perturbativa de $\delta^{(0)}$ em FOPT e CIPT obtidas para (a) o resultado exato em large- β_0 , e também a partir de (b) $P_2^2(a_Q)$ (quinta linha da Tabela 1) e (c) $D\log_1^1(u)$ (quinta linha da Tabela 2).	88
Figura 20 – Resultado final para $\delta^{(0)}$ na QCD usando os coeficientes da Tabela 5 e o resultado da Eq. (5.14). As bandas nas expansões perturbativas refletem a incerteza dos coeficientes, enquanto a banda na soma da série é obtida a partir do intervalo de valores a partir dos PAs individuais (últimas colunas das Tabelas 3 e 4). Usamos $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,316$	97
Figura 21 – Função de Adler ordem a ordem em α_s em large- β_0 e sua versão truncada que inclui apenas o renôrmalon dominante UV e os primeiros dois renôrmalons IR. Ambos os resultados estão normalizados a sua respectiva integral de Borel. A banda horizontal fornece a ambiguidade que surge dos polos IR, na prescrição da Ref. (19). Aqui usamos $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.316(10)$. (86)	103
Figura 22 – Série perturbativa para os momentos $w_i(x) = x$ e $w_i(x) = 1 - x^2$ ordem a ordem em α_s na versão truncada do limite large- β_0 (veja o texto para detalhes) com $s_0 = m_\tau^2$ (figuras superiores). Nas figuras inferiores vemos a separação das contribuições das singularidades dominantes para os mesmos momentos em FOPT. Os resultados estão normalizados a suas respectivas integrais de Borel. A banda horizontal representa a ambiguidade que surge dos renôrmalons IR, calculadas como na Referência. (19)	104
Figura 23 – A série perturbativa para quatro momentos emblemáticos ordem a ordem em α_s usando a reconstrução das ordens altas da série perturbativa da QCD a partir dos aproximantes de Padé da Referência (44), no $\overline{\text{MS}}$ e com $s_0 = m_\tau^2$. As bandas sombreadas representam as incertezas associadas com os aproximantes de Padé como discutido na Referência (44). Em (a) e (b) mostramos os momentos com bom comportamento perturbativo, enquanto em (c) e (d) mostramos os resultados para os momentos contendo o termo x , que apresenta o comportamento descontrolado da série perturbativa.	110

- Figura 24 – Série perturbativa de FOPT e CIPT, para $s_0 = m_\tau^2$, no $\overline{\text{MS}}$ e no esquema C ótimo para três momentos com bom comportamento perturbativo (a), (b) e (c), e também para o momento $w_i(x) = 1$, em (d). Em (b) os resultados em cinza mostram uma série com valor alto de C , para propósitos de ilustração. Os coeficientes em $\mathcal{O}(\alpha^5)$ e mais altas, assim como a soma de Borel, foram obtidos a partir da descrição com aproximantes de Padé. (44) Aqui nos abstermos de mostrar a banda de erro em cada uma das séries perturbativas para evitar bagunçar as figuras. 113
- Figura 25 – Diagrama genérico 1-loop usado para o cálculo de $G_1(n_1, n_2)$ 128
- Figura 26 – Diagrama genérico 2-loops usado para o cálculo de $G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$. 129

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes da função de Adler extraídos a partir dos PAs $P_N^M(a_Q)$ aplicados a série em α_s da expansão FOPT de $\delta^{(0)}$ no limite large- β_0 . . .	85
Tabela 2 – Coeficientes da função de Adler extraídos a partir dos aproximantes de Padé DLog, $D\log_M^N(u)$, construídos a $B[\delta^{(0)}](u)$ no limite large- β_0	87
Tabela 3 – Coeficientes da função de Adler na QCD obtidos a partir de PAs construídos para a expansão em α_s de $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$	92
Tabela 4 – Coeficientes da função de Adler na QCD obtidos a partir dos DLog PAs construídos para $B[\delta^{(0)}](u)$	93
Tabela 5 – Valores finais para os coeficientes da função de Adler em QCD obtidos a partir de PAs aplicados a função $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$	95
Tabela 6 – Resíduos dos polos dominantes na transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ para os primeiros seis monômios e para o momento cinemático dos decaimentos hadrônicos do lépton τ . Os números dentro da caixa referem-se aos resíduos de polos duplos, e todos os outros polos são simples.	102

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	QCD NOS DECAIMENTOS DO TAU	27
2.1	A lagrangiana da QCD	28
2.2	O acoplamento forte e as variações de esquema	33
2.3	Decaimentos hadrônicos e o observável R_τ	37
2.4	FOPT e CIPT	41
3	SÉRIES ASSINTÓTICAS, TRANSFORMADAS DE BOREL E APROXIMANTES DE PADÉ	45
3.1	Séries assintóticas	45
3.2	Transformada de Borel	48
3.2.1	Transformada de Borel modificada	51
3.2.2	A discrepância entre CIPT e FOPT	52
3.3	Aproximantes de Padé	54
3.3.1	Aproximante de Padé DLog	57
4	O LIMITE LARGE-β_0 DA QCD	61
4.1	Definição	61
4.1.1	Resultado a 1-loop	62
4.1.2	Correções a 2-loops: ordem α_s	63
4.1.3	Cálculo do limite large- β_0	68
4.2	Renôrmalons em large- β_0	74
5	RESULTADOS COM APROXIMANTES RACIONAIS	79
5.1	Resultados em large- β_0	79
5.1.1	Aproximantes de Padé DLog à função de Adler no limite large- β_0	81
5.1.2	Aproximantes de Padé à função $\delta_{FO}^{(0)}$ no limite large- β_0	84
5.1.3	Conclusões parciais	88
5.2	Resultados na QCD	89
5.2.1	Resultados finais e estimativas de erros	94
6	RENÔRMALONS NOS MOMENTOS DA FUNÇÃO ESPECTRAL	99
6.1	Resultados em large- β_0	100
6.1.1	Conclusões parciais	105
6.2	Resultados na QCD	106
6.3	Truncamento ótimo com variações de esquema	111

7	CONCLUSÕES	115
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICES	125
	APÊNDICE A – INTEGRAIS MESTRAS	127

1 INTRODUÇÃO

A Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*) (1–5) é a teoria que explica a interação forte. Desenvolvida a partir dos anos 70 é uma teoria de calibre não-abeliana, com simetria $SU(3)_C$, onde as partículas elementares fermiônicas são os quarks que interagem entre si via troca de partículas bosônicas, os glúons. Uma das principais características da QCD está no fato dos bósons interagirem entre si, uma consequência direta da simetria da teoria. Quando falamos sobre QCD perturbativa, o acoplamento da teoria, α_s , se torna o ingrediente chave para realizarmos os cálculos de todos os processos. O acoplamento forte é um parâmetro livre da teoria que precisa ser determinado, e como não se trata de um observável física, é necessário determiná-lo de forma indireta. Um dos processos que permite a extração de α_s são os decaimentos hadrônicos do τ (6–9), explorado a partir de meados dos anos 90, e também, mais recentemente, a partir do espalhamento $e^+e^- \rightarrow$ (hádrons) abaixo da massa do quark c . (10, 11) Esses processos são de especial interesse devido ao fato de ambos ocorrerem em energias relativamente baixas, perto do limite de validade da QCD perturbativa. Além disso, a evolução de α_s a partir da escala de massa do τ até a escala de massa do bóson Z representa um dos testes mais não-triviais da Liberdade Assintótica (12) como predito pela função β da QCD. (13–16) A Liberdade Assintótica é um conceito fundamental da QCD que prevê que em altas energias os férmions (quarks) da teoria se comportam como se fossem partículas livres e a teoria de perturbação pode ser aplicada.

A análise em QCD perturbativa de ambos os processos citados acima, decaimentos hadrônicos do tau e aniquilação e^+e^- em hádrons, faz uso das Regras de Soma a Energia Finita (FESRs, do inglês *Finite Energy Sum Rules*), onde, do ponto de vista experimental, têm-se as integrais ponderadas da função espectral hadrônica, que pode ser medida experimentalmente, ainda que de maneira indireta. Explorando as propriedades analíticas dos correladores de corrente dos quarks, pode-se expressar o análogo teórico da integral da função espectral experimental como uma integral em um contorno fechado do plano complexo da variável s — que representa a massa invariante dos hádrons do estado final. Nesta estrutura, a contribuição perturbativa da QCD é obtida a partir da integração complexa da função de Adler no limite quiral, que hoje em dia é conhecida exatamente até cinco loops, ordem α_s^4 . (17, 18) Não se espera que ordens mais altas sejam calculadas, uma vez que o tempo de cálculo entre quatro e cinco loops foi de 17 anos. Ao realizarmos esta integração deve-se adotar um procedimento para definir a escala de renormalização. Os dois procedimentos mais utilizados na literatura são conhecidos como FOPT (do inglês *Fixed-Order Perturbation Theory*) (19), onde a escala é mantida fixa, e CIPT (do inglês *Contour-Improved Perturbation Theory*) (20, 21), onde a escala varia

ao longo do contorno de integração ressonando a evolução do acoplamento. Ambos os procedimentos geram séries diferentes que levam a valores de α_s distintos quando usadas na determinação do acoplamento. Esta diferença permaneceu por muito tempo como a incerteza dominante nas extrações de α_s a partir dos decaimentos do τ (7, 8) e do espalhamento $e^+e^- \rightarrow$ (hádrons) (11) e a eliminação da mesma é inerentemente difícil, pois requer um conhecimento dos termos de ordens mais altas da expansão perturbativa. Apenas muito recentemente, (há poucos meses) essa diferença foi melhor entendida e quantificada (22), levando a uma proposta de um novo esquema para o condensado de glúons que a suprime fortemente. (23, 24)

Quando estamos discutindo expansões perturbativas na QCD, deve-se levar em conta um fato básico, porém muito importante: as séries perturbativas são divergentes e, no melhor dos casos, são expansões assintóticas — como descoberto por Dyson no contexto da QED em 1952. (25) A série é melhor entendida em termos de sua transformada de Borel, que suprime o crescimento fatorial dos coeficientes perturbativos e permite um entendimento do comportamento em ordens altas em termos das singularidades ao longo do eixo real do plano de Borel. Estas singularidades são os renômalons da teoria de perturbação. (26)

Um uso ideal de uma série assintótica desse tipo pode ser alcançado (na maioria das vezes) truncando-a no menor termo. (27) Neste procedimento, o erro que se comete é parametricamente da forma $e^{-p/\alpha}$, onde $p > 0$ é uma constante e α é o parâmetro de expansão. Na QCD, o parâmetro de expansão, α_s , evolui de forma logarítmica, implicando que o erro de truncamento é $\sim (\Lambda_{\text{QCD}}^2/Q^2)^p$, onde Q^2 é o momento Euclideo. Essas correções de potência são uma característica necessária da QCD perturbativa e estão relacionadas com termos de dimensões mais altas da OPE (do inglês *Operator Product Expansion*). No plano de Borel sua manifestação está no aparecimento dos renômalons ao longo do eixo real em pontos específicos relacionados com sua dimensionalidade.

Em análises realistas de α_s as contribuições não-perturbativas devem ser levadas em conta. Estas contribuições incluem tanto os condensados da OPE como as violações de dualidade quark-hádron (DVs, do inglês *Duality Violations*) que são devidas as ressonâncias e não estão codificadas na expansão da OPE. (28–31) A fim de extrair tanto α_s como os parâmetros não-perturbativos a partir dos dados de uma maneira auto-consistente, por exemplo, sem fazer uso de informações externas, recorre-se ao uso de vários pseudo-observáveis. Estes são construídos usando o fato de que qualquer função peso analítica gera uma FESR válida, com um lado experimental que pode ser calculado a partir das funções espectrais empíricas e uma contrapartida teórica que pode ser obtida a partir da integral ao longo do contorno complexo.

O princípio guia por trás da escolha das funções peso que entram numa dada análise tem sido, por um longo tempo, a supressão das contribuições não-perturbativas.

As diferentes análises dos dados dos decaimentos hadrônicos do τ podem ser divididas em duas categorias. Em uma das estratégias suprime-se fortemente o pouco conhecimento sobre os condensados de ordens mais altas da OPE. (7, 11) Neste caso, as violações de dualidade são maiores e precisam ser incluídas na análise. Na outra categoria, apenas os momentos que suprimem as violações de dualidade são usados. (8, 9) O preço a pagar neste caso é a contaminação dos resultados pelos condensados de ordens altas da OPE que são negligenciados para evitar uma grande proliferação do número de parâmetros livres. (32) Além das questões relacionadas com contaminações não-perturbativas, desde o trabalho da Referência (33), é conhecido que funções pesos diferentes levam a séries perturbativas distintas que não são igualmente bem comportadas. Algumas destas funções, que são usadas na literatura (8, 9), apresentam um comportamento perturbativo ruim, sem sinal de estabilização da série nem mesmo em ordens intermediárias, portanto, não são uma boa escolha para análises precisas de α_s .

Neste trabalho iremos atacar os dois problemas mencionados até aqui de duas maneiras distintas. Primeiro, com o intuito de conhecer a série perturbativa em ordens mais altas e baseado no fato de que estrutura da série perturbativa é conhecida, ou seja, é uma série assintótica que diverge fatorialmente e o comportamento é governado pelos renômalons, iremos utilizar aproximantes de Padés (PA, do inglês *Padé Approximants*) (34–40) para reconstruir a função de Adler, função esta que governa os decaimentos hadrônicos do τ e a seção de choque dos espalhamentos $e^+e^- \rightarrow$ (hádrons), e assim prever os coeficientes de ordem mais alta, ainda não calculados perturbativamente. Aqui enfatizamos que uma das principais vantagens do uso dos PAs está no fato de que podemos fazer aproximações independentes de modelo. Em um segundo momento investigaremos o comportamento perturbativo dos diferentes momentos integrados da função espectral em ordens intermediárias e altas estudando as singularidades que aparecem em sua transformada de Borel.

Como é habitual na área, usaremos o limite large- β_0 da QCD como um guia. Neste limite, temos uma série exata em todas as ordens em α_s , que serve como um modelo para a QCD completa. O limite é obtido a partir do limite de grande número de sabores, N_f , mantendo fixo o produto $N_f\alpha_s$. As correções ao propagador do glúon do tipo bolhas de $q\bar{q}$ são de ordem um, numericamente, e devem ser somadas em todas as ordens em teoria de perturbação. Ao final substitui-se o termo N_f pelo primeiro termo da função β da QCD incorporando um conjunto de contribuições não-abelianas e tornando a teoria assintoticamente livre. Como resultado, a série perturbativa é conhecida em todas as ordens e todos os renômalons se apresentam como polos duplos, com exceção da singularidade dominante IR, que se apresenta como um polo simples. Aqui, a transformada de Borel da função de Adler é uma função meromórfica no plano complexo e os teoremas de convergência da teoria dos Padés podem ser aplicados. (34–36, 41) Além disso, iremos explorar diversas estratégias para acelerar a convergência das aproximações.

Começaremos aplicando os aproximantes de Padé DLog (DLog PA, do inglês *DLog Padé Approximants*) (34–36) à transformada de Borel da função de Adler, que podem ser muito efetivos também na aproximação de funções que apresentam cortes. E por fim investigaremos a aplicação de diferentes PAs à expansão perturbativa FOPT das correções da QCD aos decaimentos hadrônicos do lépton τ . Além disso, estudaremos a estrutura de renômalons da transformada de Borel dos momentos integrados polinomiais da função de Adler. Veremos que esta estrutura é menos singular do que a transformada de Borel da função de Adler, onde um número infinito de renômalons se tornam polos simples. Para finalizar, estudaremos os diferentes momentos utilizados na extração de α_s , a fim de explicar as instabilidades (ou o "comportamento descontrolado") identificadas na Referência (33). Mostraremos que o renômalon IR dominante é o principal responsável pelo comportamento instável dos momentos que são sensíveis ao condensado de glúons. Também mostraremos que a ausência deste renômalon dominante em conjunto com o cancelamento parcial das singularidades estão por trás dos bons comportamentos perturbativos de alguns dos momentos utilizados.

Após os estudos em $\text{large-}\beta_0$, iremos nos direcionar para a QCD, onde a estrutura da transformada de Borel da função de Adler é mais complicada, uma vez que os polos se tornam cortes. (26) A partir das variações de esquema de renormalização, encontramos indicações de que em QCD o renômalon dominante UV é suprimido em relação a $\text{large-}\beta_0$ e, como consequência, a alternância de sinal da série é postergada. Portanto, mostraremos que, assim como em $\text{large-}\beta_0$, é vantajoso considerarmos aproximantes de Padé para a expansão FOPT bem como DLog PAs, que, como já dito, é interessante quando temos funções com cortes. Além disso, quando estudarmos os diferentes momentos utilizados nas análises de α_s , mostraremos que muitas dificuldades encontradas na QCD podem ser contornadas ao utilizarmos uma transformação de esquema conveniente, chamada de esquema C (42), junto com o uso da transformada de Borel modificada introduzida na Referência. (43) Neste contexto, a transformada de Borel dos momentos pode ser calculada exatamente em termos da transformada de Borel da função de Adler. Este resultado torna evidente o paralelo com $\text{large-}\beta_0$, uma vez que ambos apresentam uma estrutura analítica idêntica, e explicam a similaridade do comportamento perturbativo entre os dois casos. Por fim, mostraremos como otimizar o truncamento da série dos momentos com bons comportamentos perturbativos explorando as transformações de esquema*.

Este trabalho está organizado como a seguir. No Capítulo 2 apresentamos um resumo sobre a QCD, a evolução de α_s , o esquema C e a física envolvendo os decaimentos hadrônicos do lépton τ . No Capítulo 3 introduzimos a parte matemática essencial para o entendimento deste trabalho, começando pela teoria das séries assintóticas, passando pelas transformadas de Borel comum e modificada e, por fim, estudando os aproximantes

* Os resultados apresentados aqui estão publicados nas Referências. (44, 45)

de Padé em suas diferentes formas. No Capítulo 4 calcularemos a função de Adler no limite $\text{large-}\beta_0$ da QCD e faremos uma breve introdução sobre os renormalons neste limite. No Capítulo 5 apresentaremos os resultados para os coeficientes da série perturbativa da QCD bem como para a soma da série obtidos a partir dos PAs e DLog PAs tanto no limite $\text{large-}\beta_0$ como na QCD completa. No Capítulo 6 estudaremos a série perturbativa da QCD para diferentes momentos integrados da função espectral, veremos como é possível escrever a transformada de Borel modificada das correções perturbativas da QCD com uma estrutura analítica muito similar aos resultados em $\text{large-}\beta_0$ utilizando o esquema C e estudaremos como o truncamento ótimo em conjunto com o esquema C pode acelerar a soma da série. Por fim, no Capítulo 7 apresentaremos as nossas conclusões.

2 QCD NOS DECAIMENTOS DO TAU

O desenvolvimento da Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*) (1–5) originou-se da necessidade de se explicar a grande variedade de partículas existentes no espectro hadrônico. Essa teoria se baseia na existência de partículas elementares chamadas quarks, as quais são férmions de spin-1/2, e se apresentam em seis sabores, tendo carga elétrica fracionada, massas diferentes e carga de cor. Os quarks interagem entre si via troca de bósons de interação, chamados glúons e se apresentam em oito sabores.

Atualmente, a QCD é a teoria que explica a interação forte. Esta apresenta simetria $SU(3)_C$, devido à carga de cor (C), e integra o Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares (SM, do inglês *Standard Model*) (46–49) cujo grupo de simetria é $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. A carga de cor, imposta sobre o modelo de quarks, consegue solucionar o problema da estatística de Fermi-Dirac e de possíveis violações do princípio de Pauli.

Um aspecto importante da teoria ligado à carga de cor dos quarks é que estes, em princípio, poderiam formar estados coloridos. Porém, experimentalmente nunca foram observados esses estados, postulando-se, então, a hipótese do confinamento (50), implicando na não-observação de quarks livres na natureza, logo, apenas observamos quarks em estados ligados hadrônicos singletos de cor, ditos “brancos”, sendo os principais destes estados conhecidos como mésons ($q\bar{q}$) e bárions (qqq), porém não excluindo a possibilidade da existência de outros estados brancos, como tetra e penta quarks, por exemplo.

A QCD é uma teoria não-abeliana e, como consequência direta deste fato, temos que os bósons de Gauge também podem interagir entre si. A teoria apresenta comportamentos bem distintos para diferentes escalas de energia. Ao trabalharmos em altas energias (pequenas distâncias) os quarks se comportam como se fossem partículas livres, essa é a chamada Liberdade Assintótica. (51, 52) Porém, em baixas energias (grandes distâncias), a interação entre dois quarks aumenta de intensidade até ao ponto de ser energeticamente vantajosa a criação de um novo par $q\bar{q}$, sendo esta uma consequência do confinamento.

Ao trabalharmos com altas energias, é possível aplicarmos métodos perturbativos para estudar esta teoria, onde temos a chamada QCD perturbativa (pQCD, do inglês *perturbative QCD*). Aqui, partimos do princípio que o acoplamento forte, α_s , é pequeno nesta escala de energia. Isto ficará mais evidente quando estudarmos, na Seção 2.2, a função β da QCD, que mostra como o acoplamento forte varia com a energia.

Um bom laboratório para estudos de pQCD é fornecido pelos decaimentos hadrônicos do τ . Este lépton da terceira geração é o único capaz de decair em hádrons devido à

sua massa, sendo os principais canais de decaimento em píons e káons, essencialmente. Apesar dos decaimentos do τ ocorrerem em uma escala de energia relativamente baixa, a maior contribuição desses decaimentos vêm de teoria de perturbação, porém, não podemos negligenciar totalmente as contribuições não-perturbativas.

Neste capítulo, iremos introduzir os principais conceitos físicos relacionados com esta tese. Começando na Seção 2.1, estudaremos em algum detalhe a lagrangiana da QCD e como cada termo da lagrangiana está associado com um diagrama de Feynman diferente. Na Seção 2.2, iremos estudar o acoplamento forte, dando enfoque em como o acoplamento varia com a escala de energia e com o esquema de renormalização. Na Seção 2.3, começaremos a estudar os focos deste trabalho que são os decaimentos hadrônicos do lépton τ , a função de Adler, a contribuição da QCD perturbativa fornecida pela função $\delta^{(0)}$ e alguns aspectos de contribuições não-perturbativas. Finalmente, na Seção 2.4 estudaremos as principais prescrições para a escala de renormalização e como essas escolhas impactam na determinação precisa do acoplamento da teoria.

2.1 A lagrangiana da QCD

Em Teoria Quântica de Campos (QFT, do inglês *Quantum Field Theory*) (53,54) a dinâmica dos campos fundamentais é determinada a partir da densidade lagrangiana, nesta tese denominada apenas de lagrangiana, \mathcal{L} . Esta, por sua vez, é uma função dependente dos campos e suas respectivas derivadas no espaço-tempo.

O método mais comumente utilizado para se obter as interações de uma teoria é impor que a lagrangiana de uma partícula livre é invariante perante transformações locais dos campos de acordo com algum grupo de simetria, chamadas transformações de calibre (ou transformações de Gauge). Em QFT a teoria de Gauge mais simples é a Eletrodinâmica Quântica (QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*) (55–57), onde a lagrangiana livre de um férmion pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (2.1)$$

sendo ψ o campo fermiônico, $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ o espinor adjunto e m a massa do férmion. É esperado que quantidades físicas, como a densidade de carga ($\bar{\psi}\psi$), ou a corrente ($\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$), sejam invariantes se adicionarmos uma fase local, $f(x)$, nos campos, chamada de transformação local de Gauge perante o grupo de simetria $U(1)$. Logo, temos

$$\psi(x) \rightarrow e^{-ief(x)}\psi(x) \approx (1 -ief(x))\psi(x), \quad (2.2)$$

onde, na aproximação à direita utilizamos o fato de que a carga elétrica, e , é suficientemente pequena. Impondo essa transformação na Eq. (2.1) chegamos à conclusão que, para a Lagrangiana fermiônica ser invariante perante o grupo $U(1)$, é necessário adicionarmos um campo vetorial $A_\mu(x)$, que se transforma como $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f(x)$ e podemos definir

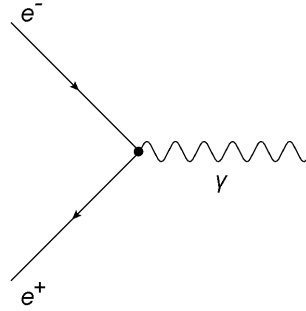


Figura 1 – Diagrama de Feynman que representa o vértice fundamental de interação da QED entre elétron, pósitron e fóton.

Fonte: Elaborada pelo autor.

D_μ como a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (2.3)$$

Se substituirmos a derivada ∂_μ da Eq. (2.1) pela Eq. (2.3), temos que a Lagrangiana se torna invariante de Gauge pelo grupo $U(1)$ e, como consequência, temos um termo de interação entre o campo fermiônico inicial e o campo vetorial A_μ , que gera o conhecido vértice de interação da QED entre um férmion, um anti-férmion e um fóton, representado pelo diagrama de Feynman da Figura 1. Aqui é importante comentarmos que o campo vetorial A_μ representa, matematicamente, o fóton.

Para finalizarmos a dedução da Lagrangiana da QED, precisamos adicionar o termo cinético relacionado com o campo vetorial A_μ , dado por $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, logo ficamos com

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

sendo $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Notemos que, como consequência do desenvolvimento da teoria, a Lagrangiana da QED não é invariante se adicionarmos um termo de massa para os campos A_μ , implicando no fato de que fótons tenham massa nula, o que concorda com resultados experimentais para a massa do fóton, cujo limite hoje é de 1×10^{-18} eV. (58)

A dedução da lagrangiana da QCD segue os mesmos princípios da dedução para a QED, porém com algumas nuances. A primeira sutil diferença está no fato de que, na QED temos apenas elétrons, pósitrons e fótons, enquanto na QCD temos quarks e anti-quarks, que se apresentam em seis sabores, e glúons, que se apresentam oito sabores, como já dito anteriormente. A segunda, e principal, diferença se encontra no fato de que quarks e glúons apresentam carga de cor. Podemos, portanto, escrever o campo de um quark como q_f^a , onde f está relacionado com o sabor do quark e a com a carga de cor, logo, a lagrangiana livre dos quarks é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \sum_a \bar{q}_f^a (i\not{\partial} - m_f) q_f^a, \quad (2.5)$$

onde m_f é a massa do quark de sabor f e $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, conhecida como a notação *slash* de Feynman. Notemos que a soma sobre os diferentes sabores de quarks, f , está suprimida aqui e no restante da dedução. Podemos reescrever a Eq. (2.5) como

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}_f (i\not{\partial} - m_f) \Psi_f, \quad (2.6)$$

onde

$$\Psi_f = \begin{pmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \\ q_f^3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\Psi}_f = (\bar{q}_f^1, \bar{q}_f^2, \bar{q}_f^3). \quad (2.7)$$

Ressaltamos aqui que os termos $a = 1, 2, 3$ estão relacionados com a carga de cor e podem ser interpretados como, *red*, *green* e *blue*, respectivamente. Notemos que a Eq. (2.6) é invariante perante transformações globais do grupo $SU(3)$, ou seja, se adicionarmos uma fase como a seguir

$$\Psi^{f'} = e^{i\alpha_i \lambda_i / 2} \Psi^f, \quad (2.8)$$

onde α_i são oito números reais arbitrários e λ_i são matrizes 3×3 , a Eq. (2.6) não se modifica. Notemos que o grupo $SU(3)$ possui oito geradores, por isso o índice i corre de 1 a 8.

Prosseguindo, a exemplo do que foi realizado com a QED, vamos impor que a Eq. (2.6) é invariante perante transformações locais do grupo $SU(3)$. Essa imposição em conjunto com a inclusão de termos de interação dos glúons permitirá escrevermos a Lagrangiana da QCD como a seguir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_i^\nu - \partial^\nu G_i^\mu) (\partial_\mu G_{\nu,i} - \partial_\nu G_{\mu,i}) + \sum_f \bar{q}_f^a (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f^a \\ & + g_s G_i^\mu \sum_f \bar{q}_f^a \gamma_\mu \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)_{ab} q_f^b \\ & - \frac{g_s}{2} f_{ijk} (\partial^\mu G_i^\nu - \partial^\nu G_i^\mu) G_{\mu,j} G_{\nu,k} - \frac{g_s^2}{4} f_{ijk} f_{ilm} G_j^\mu G_k^\nu G_{\mu,l} G_{\nu,m}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde q_f^a é o campo do quark de cor a e sabor f na representação fundamental, G_i^μ é o campo do glúon, g_s é conhecido como acoplamento forte e λ_i são os geradores do grupo $SU(3)_C$ e obedecem à álgebra não comutativa $[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k$, onde f_{ijk} são as constantes de estrutura do grupo.

A Eq. (2.9) está escrita de forma a separarmos as diferentes contribuições da lagrangiana. A primeira linha contém os termos cinéticos dos campos dos quarks e dos glúons, que dão origem aos propagadores da teoria. A segunda linha contém o termo de interação de cor entre quarks e glúons, essa linha pode ser interpretada de maneira que os glúons, ao interagirem com os quarks e antiquarks, mudam a carga de cor destes. A terceira e última linha é consequência do caráter não-Abeliano da teoria, gerando vértices de interações entre três e quatro glúons.

A quantização da teoria é realizada através dos campos dos quarks e glúons. No formalismo canônico escrevemos o campo do quark em função dos operadores de criação e aniquilação e impomos as relações de comutação usual para esses operadores. Através de uma transformada de Fourier podemos escrever o propagador do quark no espaço dos momentos como a seguir

$$iS^{ab}(p) = i\delta^{ab} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}, \quad (2.10)$$

onde o termo $i0$ é adicionado como uma prescrição para deslocar o polo do propagador e manter a causalidade. A delta de Kronecker adicionada na Eq. (2.10) está relacionada com a cor do quark, e implica no fato de que o quark não muda de cor enquanto se propaga, a mudança de cor está diretamente relacionada com a interação com os glúons.

A dificuldade se apresenta ao quantizarmos os campos de Gauge. O campo de Gauge do glúon possui quatro graus de liberdade, porém, como o glúon não possui massa e apresenta spin-1, este possui apenas duas polarizações físicas. Para contornar este problema, dois ingredientes são necessários para manter a teoria covariante. (4) Primeiro, é preciso adicionar um termo de fixação de Gauge na lagrangiana, depois, é preciso adicionar termos de *Faddeev-Popov*. Estes últimos introduzem novos campos na teoria, chamados de campos fantasmas (ou *ghosts*). Trata-se de campos não-físicos sem massa que se acoplam apenas com glúons e que obedecem à estatística de Fermi-Dirac. Novamente, através de uma transformada de Fourier, podemos escrever o propagador do glúon no espaço dos momentos como

$$iD_{\mu\nu}(k) = i \frac{1}{k^2 + i0} \left[-g_{\mu\nu} + (1 + \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right], \quad (2.11)$$

onde ξ é o parâmetro de Gauge.

As Eqs. (2.10) e (2.11) aparecem nos cálculos como as regras de Feynman para os propagadores do quark e do glúon, respectivamente. Para completar as regras é preciso analisar a parte de interação da lagrangiana. Como dito anteriormente, temos três possíveis vértices. O primeiro vértice representa a interação de cor entre quarks e glúons. Na Figura 2 podemos ver o diagrama de Feynman desta interação, e a regra de Feynman associada a esse diagrama é dada por

$$-ig_s \frac{\lambda_a}{2} \gamma^\mu. \quad (2.12)$$

O segundo vértice, consequência do caráter não-abeliano da teoria, é o de interação entre três glúons, representado pela Figura 3. A regra de Feynman associada a esse diagrama é dada por

$$-g_s f_{abc} \left[g^{\mu\nu} (k - q)^\lambda + g^{\nu\lambda} (q - p)^\mu + g^{\lambda\mu} (p - k)^\nu \right]. \quad (2.13)$$

O terceiro e último vértice, é também consequência do caráter não-abeliano da teoria e diz respeito a interação entre quatro glúons. O diagrama de Feynman correspondente a

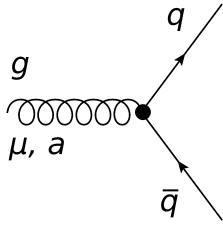


Figura 2 – Interação entre quarks e glúons.

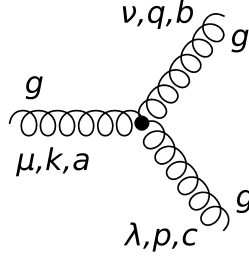


Figura 3 – Interação entre três glúons.

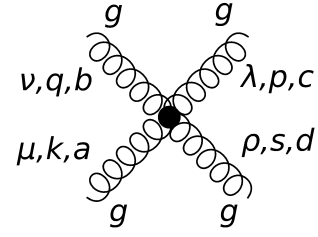


Figura 4 – Interação entre quatro glúons.

Fonte: OLIANI. (59)

essa interação pode ser visto na Figura 4 e a respectiva regra de Feynman é dada por

$$ig_s^2 \left[f_{abe} f_{cde} (g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}) + f_{ade} f_{bce} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}) + f_{ace} f_{dbe} (g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}) \right]. \quad (2.14)$$

As regras de Feynman são os ingredientes-chave para fazer cálculos utilizando teoria de perturbação para QCD. Aplicando-as conseguimos calcular amplitudes dos diagramas e com isso obter observáveis como, por exemplo, seções de choque de espalhamentos e taxas de decaimentos, através de uma série no acoplamento da teoria, $\alpha_s \equiv g_s^2/(4\pi)$. Um exemplo de cálculo que pode ser feito é a aniquilação $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Nesse espalhamento podemos observar dois comportamentos distintos da QCD, que já foram enunciados anteriormente. Se considerarmos altas energias (ou pequenas distâncias), a interação entre os quarks, em uma primeira aproximação, pode ser negligenciada e os quarks se comportam como se fossem partículas livres. Esse fenômeno é chamado de Liberdade Assintótica (51, 52), e quanto maior a energia, mais os resultados obtidos estarão próximos dos resultados do modelo partônico (modelo baseado apenas na existência de quarks). O outro extremo é o comportamento a baixas energias (ou grandes distâncias). Sabemos que a interação entre quarks aumenta com a distância, de forma que para separar quarks é preciso fornecer energia. Quanto mais tentamos afastar, mais energia é necessária para isso acontecer, até que em um certo momento tem-se energia o suficiente para que um novo par $q\bar{q}$ seja criado, e conforme aumentamos a energia, mais pares podem ser criados. Essa é uma visão heurística do chamado confinamento dos quarks (50), que implica na não observação de quarks livres na natureza. No caso da aniquilação $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ esse comportamento se manifesta nas várias ressonâncias hadrônicas em baixas energias, como podemos ver de maneira bastante clara na Figura 5, onde temos os dados experimentais referentes à grandeza $R_{e^+e^-}$, definida como a razão entre a seção de choque de $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ normalizada pela seção de choque de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ calculada em ordem dominante. Esta é a principal grandeza experimental relacionada com o aniquilamento $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. (58)

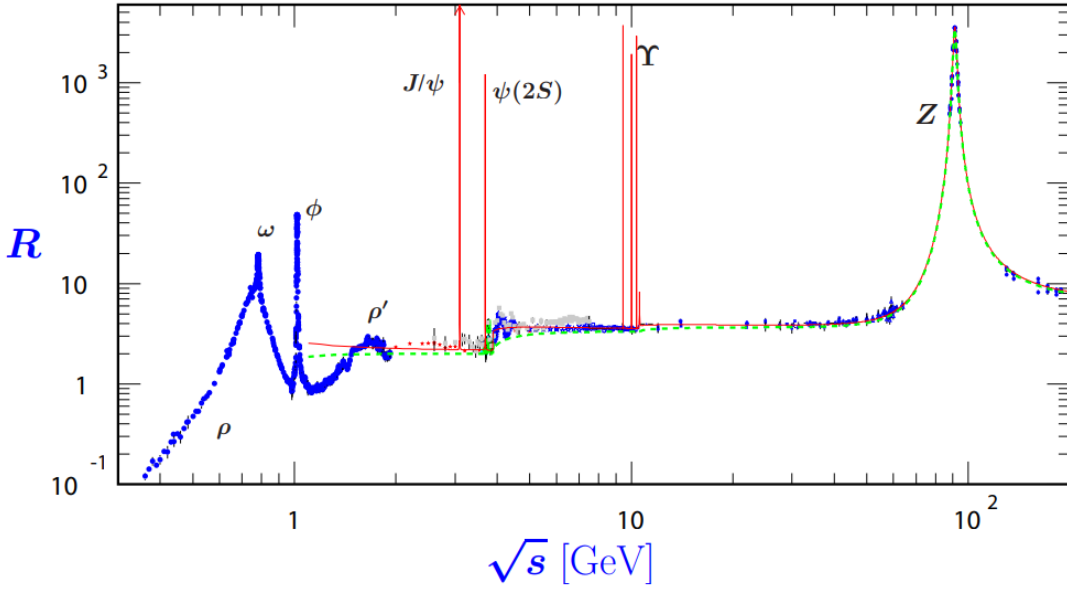


Figura 5 – Dados experimentais para $R_{e^+e^-}$ em função da energia fornecidos pela atualização de 2021 do Particle Data Group (58).

Fonte: ZYLA *et al.* (58)

2.2 O acoplamento forte e as variações de esquema

Como dito na Seção 2.1, no regime de pQCD, as seções de choque e as taxas de decaimento podem ser expressas como séries em α_s . Dado que o acoplamento não é um observável da teoria, para a realização desses cálculos, necessitamos definir um esquema e uma escala de renormalização. Um observável R que depende do momento externo q , do acoplamento α_s e das massas dos quarks m , por sua vez, deve ser independente tanto de escala como de esquema de renormalização. Logo, considerando uma escala arbitrária μ , chegamos na seguinte relação

$$\mu \frac{d}{d\mu} R(q, a_s, m) = \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{da_s}{d\mu} \frac{\partial}{\partial a_s} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} \right] R(q, a_s, m) = 0, \quad (2.15)$$

que é chamada de Equação do Grupo de Renormalização (RGE, do inglês *Renormalization Group Equation*) homogênea, onde $a_s \equiv \alpha_s/\pi$. A partir da Eq. (2.15) podemos definir as funções do grupo de renormalização como séries no acoplamento, logo (60)

$$\beta(a_s) \equiv -\mu \frac{da_s}{d\mu} = \beta_1 a_s^2 + \beta_2 a_s^3 + \dots, \quad \text{função } \beta, \quad (2.16)$$

$$\gamma(a_s) \equiv \frac{-\mu}{m} \frac{dm}{d\mu} = \gamma_1 a_s + \gamma_2 a_s^2 + \dots, \quad \text{dimensão anômala da massa.} \quad (2.17)$$

A dependência do acoplamento com a energia é governada pela função β enquanto a função γ governa a dependência da massa com a energia. Como quarks não podem ser observados diretamente, é impossível fazer uma medida direta, seja da massa, seja do acoplamento da teoria, logo eles se tornam parâmetros a serem determinados indiretamente. Ambas

as Eqs. (2.16) e (2.17) são conhecidas em teoria de perturbação, atualmente, a cinco loops (14, 16, 61), que correspondem aos coeficientes β_5 e γ_5 . É importante ressaltar que os coeficientes β_1 e β_2 são independentes do esquema de renormalização (42) e, na nossa convenção, utilizando $N_C = 3$, são dados por

$$\beta_1 = \frac{11}{2} - \frac{1}{3}N_f, \quad \beta_2 = \frac{51}{4} - \frac{19}{12}N_f, \quad (2.18)$$

onde N_f é o número de sabores ativos da teoria.

A função β possui um papel fundamental no entendimento da liberdade assintótica. Descobriu-se que a intensidade da interação diminui conforme aumentamos a energia, ou seja, o valor de α_s diminui com o aumento da energia. Podemos analisar isso integrando os dois lados da Eq. (2.16), logo

$$\int_{a_s(\mu_1)}^{a_s(\mu_2)} \frac{da_s}{\beta(a_s)} = - \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\mu} = \ln \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right). \quad (2.19)$$

A 1-loop essa integral pode ser realizada analiticamente. Neste caso, truncamos a Eq. (2.16) em seu primeiro termo ($\beta_1 a_s^2$) e realizamos a integral acima. Logo, podemos escrever o acoplamento como função da energia ao quadrado

$$a_s(\mu_2^2) = \frac{a_s(\mu_1^2)}{\left[1 - a_s(\mu_1^2) \frac{\beta_1}{2} \ln \left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \right) \right]}. \quad (2.20)$$

Na nossa definição, o coeficiente β_1 é positivo, portanto, usando $\mu_2 > \mu_1$, a Eq. (2.20) decresce logaritmicamente e tende a zero quando $\mu_2 \rightarrow \infty$, reproduzindo o resultado obtido pela liberdade assintótica. outro lado, o acoplamento diverge em momento baixos, precisamente na escala de momento $\mu \equiv \Lambda_{\text{QCD}}$ que, a um loop, pode ser obtida da Eq. (2.20) e vale (62)

$$\Lambda_{\text{QCD}} = \mu_1 e^{\frac{-1}{a_s(\mu_1^2)\beta_1}}, \quad (2.21)$$

logo, teoria de perturbação não pode ser aplicada no regime de baixas energias. A evolução de α_s pode ser caracterizada através desta escala Λ e este ponto onde o acoplamento diverge é conhecido como polo de Landau. É importante mencionar que ao adicionarmos termos de ordens mais altas na função β e integrarmos, obtemos um resultado com a mesma característica qualitativa do resultado a 1-loop, embora não seja possível encontrar uma forma fechada tão simples. Na Figura 6 podemos ver o resultado completo usando os cinco primeiros coeficientes (linha preta) e a concordância dos dados experimentais com a curva teórica compilados pelo *Particle Data Group* (PDG). (58)

A escala Λ , definida pela Eq. (2.21), que para o esquema $\overline{\text{MS}}$ vale aproximadamente 200 MeV, pode ser escrita de forma generalizada e invariante pelo grupo de renormalização como

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \equiv Q e^{\frac{-1}{\beta_1 a_Q}} (a_Q)^{\frac{\beta_2}{\beta_1^2}} \exp \left(\int_0^{a_Q} \frac{da}{\tilde{\beta}(a)} \right), \quad (2.22)$$

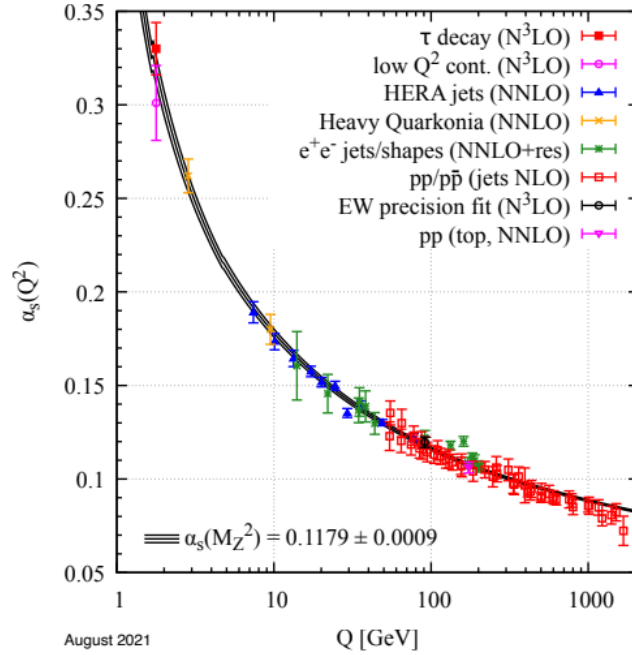


Figura 6 – Determinações do acoplamento forte fornecida pela atualização de 2021 do Particle Data Group. (58) A curva preta é obtida através de teoria de perturbação junto com sua incerteza, enquanto os pontos são os resultados experimentais obtidos em diferentes escalas de energia e utilizando diferentes métodos.

Fonte: ZYLA *et al.* (58)

onde $a_Q \equiv \alpha_s(Q^2)/\pi$, $Q^2 \equiv -s$ e o integrando é dado por

$$\frac{1}{\tilde{\beta}(a)} \equiv \frac{1}{\beta(a)} - \frac{1}{\beta_1 a^2} + \frac{\beta_2}{\beta_1^2 a}. \quad (2.23)$$

Λ define, aproximadamente, em que escala o valor do acoplamento se torna demasiadamente alto para aplicarmos teoria de perturbação.

Sem perda de generalidade podemos fazer uma transformação de esquema de renormalização que relaciona o esquema $\overline{\text{MS}}$, por exemplo, com um novo esquema que denotaremos através de um acento circunflexo nas quantidades. Esse tipo de relação se torna interessante devido ao fato de grandezas observáveis serem independentes do esquema utilizado, logo, podemos otimizar as séries perturbativas quando as estudamos em outro esquema de renormalização, além disso, é possível simplificar os cálculos analíticos dado que a função β pode ser escrita de maneira mais simples após a transformação do esquema. Podemos escrever essa transformação como (63)

$$\hat{\Lambda} = \Lambda_{\overline{\text{MS}}} e^{c_1/\beta_1}, \quad (2.24)$$

onde $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ é definido pela Eq. (2.22) e c_1 é o primeiro coeficiente não trivial da expansão perturbativa do acoplamento $\hat{a} \equiv \hat{\alpha}_s/\pi$ em termos de $a \equiv \alpha^{\overline{\text{MS}}}/\pi$

$$\hat{a} = a + c_1 a^2 + c_2 a^3 + \dots \quad (2.25)$$

Utilizando a Eq. (2.24) é possível escrever uma relação entre os dois esquemas de renormalização através de um parâmetro contínuo definido como $C \equiv \frac{-2c_1}{\beta_1}$. A relação, conhecida como o esquema C , é dada por (42)

$$\frac{1}{\hat{a}_Q} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln \hat{a}_Q = \frac{1}{a_Q} + \frac{\beta_1}{2} C + \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln a_Q - \beta_1 \int_0^{a_Q} \frac{da}{\tilde{\beta}(a)}, \quad (2.26)$$

onde ao resolvermos esta equação iterativamente no viés de teoria de perturbação conseguimos escrever \hat{a}_Q como uma série de potência onde os coeficientes dependem apenas de β_1 , β_2 e da variável C . Notemos aqui que a dependência do esquema de renormalização está inteiramente contida na variável C , já que os dois coeficientes da função β utilizados são independentes de esquema.

Uma das grandes vantagens de se trabalhar no esquema C é que a função β neste esquema é conhecida exatamente e dada por

$$-Q \frac{d\hat{a}_Q}{dQ} = \frac{\beta_1 \hat{a}_Q^2}{\left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \hat{a}_Q\right)}, \quad (2.27)$$

que depende apenas dos coeficientes β_1 e β_2 . Integrando a Eq. (2.27) conseguimos escrever a evolução do acoplamento no esquema C como

$$\frac{1}{\hat{a}_Q} = \frac{1}{\hat{a}_\mu} + \frac{\beta_1}{2} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln \frac{\hat{a}_Q}{\hat{a}_\mu}. \quad (2.28)$$

Usando a definição do acoplamento em função do parâmetro C e da escala $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$, dada por

$$\frac{1}{\hat{a}_Q} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln \hat{a}_Q = \frac{\beta_1}{2} \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^2} + C \right), \quad (2.29)$$

podemos chegar numa expressão para o \hat{a}_Q

$$\frac{1}{\hat{a}_Q} = \frac{\beta_1}{2} \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda} \right) + \frac{\beta_1 C}{2} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln \hat{a}_Q, \quad (2.30)$$

onde este, nesta equação, depende do parâmetro C , da escala Λ e dos coeficientes β_1 e β_2 da função β .

Finalmente, podemos analisar a dependência do acoplamento com o parâmetro C . Essa dependência é dada por

$$-2 \frac{d\hat{a}_Q}{dC} = \frac{\beta_1 \hat{a}_Q^2}{\left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \hat{a}_Q\right)}, \quad (2.31)$$

e pode ser visualizada na Figura 7. Notemos que a dependência do acoplamento com o parâmetro C é a mesma dependência com a escala de renormalização, basta comparar o lado direito das Eqs. (2.27) e (2.31). Isso significa que no esquema C o acoplamento depende de uma combinação dos parâmetros de escala e esquema, tornando, portanto,

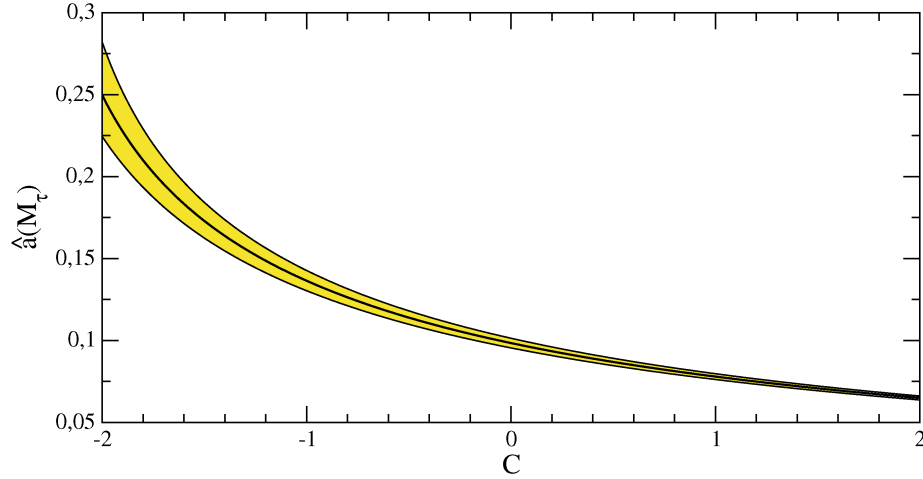


Figura 7 – Variação do acoplamento \hat{a}_Q em função do parâmetro de esquema C onde a faixa amarela está relacionada com a incerteza de α_s .

Fonte: BOITO; JAMIN; MIRAVITLLAS. (42)

as variações de escala e de esquema completamente equivalentes. É importante ressaltar que não existe um valor de C que corresponde ao esquema $\overline{\text{MS}}$, porém, para $C \approx 0$ os resultados são bastante similares, pois, por exemplo, $\hat{\Lambda}(C = 0)$ é igual a $\Lambda^{\overline{\text{MS}}}$. No Capítulo 6 veremos que, devido ao fato da função β ser exata, o uso deste esquema C , em especial a Eq. (2.27), facilitará a obtenção de uma forma fechada para a transformada de Borel dos momentos polinomiais da função espectral.

2.3 Decaimentos hadrônicos e o observável R_τ

Nesta tese iremos dar enfoque aos estudos de QCD nos decaimentos hadrônicos do lépton τ . Descoberto em 1975 no Stanford Positron Electron Asymmetric Rings (SPEAR) (64), este lépton da terceira geração é o mais massivo do SM, com massa de $(1776,86 \pm 0,12)\text{MeV}$ (65) (cerca de 3500 vezes a massa do elétron). Devido a sua massa, este é o único lépton capaz de decair em hádrons, porém, com a limitação de que os hádrons do estado final do decaimento são formados apenas pelos quarks leves (u , d e s). Alguns exemplos dos decaimentos hadrônicos são dados por

$$\tau^- \rightarrow \begin{cases} \pi^- + \nu_\tau \\ \pi^- + \pi^0 + \nu_\tau \\ K^- + \nu_\tau \\ \vdots \end{cases} . \quad (2.32)$$

Além disso, o τ pode decair nos léptons das gerações anteriores, no caso, elétron (e) e múon (μ), esses são os chamados decaimentos leptônicos e são dados por

$$\tau^- \rightarrow \begin{cases} e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \\ \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \end{cases} . \quad (2.33)$$

Todos esses decaimentos envolvem troca de sabor e ocorrem através do bóson fraco W^\pm , logo, através dos decaimentos leptônicos pode-se estudar a universalidade do acoplamento dos léptons com esse bóson, entre outros, e através dos decaimentos hadrônicos temos um bom laboratório para estudos de QCD. É importante ressaltar que na escala de massa do τ podemos aplicar métodos de QCD perturbativa, porém não podemos ignorar completamente efeitos não perturbativos, já que estamos trabalhando em uma escala de energia relativamente baixa. A junção da descrição teórica dos decaimentos hadrônicos do τ com dados experimentais permite uma extração competitiva do acoplamento forte, α_s , que é o principal tema deste trabalho.

A física envolvendo os decaimentos do τ é muito parecida com a física dos espalhamentos $e^+e^- \rightarrow$ (hádrons) em baixas energias (abaixo da massa do quark c), em particular, em ambos os casos a maneira como se calculam as correções de QCD perturbativa é idêntica. Para o primeiro, a principal grandeza experimental envolvendo os decaimentos hadrônicos é dada pela largura de decaimento do τ em hádrons normalizada pela largura de decaimento do τ em elétrons, R_τ . Experimentalmente, é possível separar essa grandeza em três componentes: as componentes vetorial e vetor-axial, relacionadas com as correntes dos quarks ($\bar{u}d$), $R_{\tau,V/A}$, e a componente envolvendo o quark s , intermediada pela corrente dos quarks ($\bar{u}s$), $R_{\tau,S}$. A grandeza R_τ relacionada com as componentes vetorial e vetor-axial ($V + A$) é dada por (66)

$$R_{\tau,V+A} = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau)}{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \nu_e)} = R_{\tau,V} + R_{\tau,A} = 3,479 \pm 0,011. \quad (2.34)$$

Nas extrações do acoplamento forte trabalhamos com as componentes V e A , que não apresentam corrente $\bar{u}s$, logo, podemos ignorar totalmente as massas dos quarks (uma vez que as massas dos quarks u e d são muito pequenas) e trabalhar no chamado limite quiral.

As extrações de α_s para os casos de energias relativamente baixas são baseadas no uso das Regras de Soma à Energia Finita (FESRs, do inglês *Finite Energy Sum Rules*). A principal quantidade que governa os decaimentos do τ em hádrons é o correlator de dois pontos. Este pode ser calculado utilizando o teorema óptico para os decaimentos hadrônicos do τ . Em resumo temos que o teorema óptico relaciona o cálculo de amplitude de um diagrama aberto com a parte imaginária do cálculo da amplitude de um diagrama de loop, conforme podemos ver na Figura 8. O correlator, então, pode ser calculado como

$$\Pi_{V/A}^{\mu\nu}(p) \equiv i \int dx e^{ipx} \langle \Omega | T \{ J_{V/A}^\mu(x) J_{V/A}^\nu(0)^\dagger \} | \Omega \rangle, \quad (2.35)$$

construído a partir das correntes $J_{V/A}^\mu(x) = (\bar{u}\gamma^\mu(\gamma_5))d(x)$. A parte imaginária dos correlatores $\Pi_{V/A}^{\mu\nu}(p)$ é proporcional a função espectral para os hádrons, que é um observável.

Do ponto de vista teórico, a função espectral só pode ser calculada de maneira totalmente rigorosa longe do eixo real positivo, onde é possível aplicar teoria de perturbação. Baseado na dualidade quark-hádron pode-se relacionar o cálculo teórico do correlator

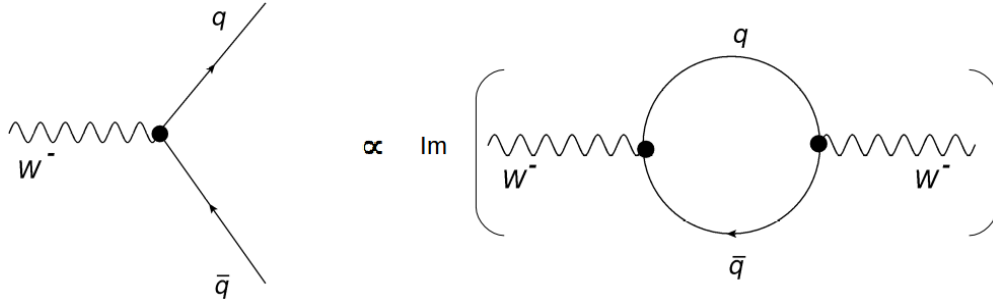


Figura 8 – Diagrama de Feynman que simboliza o teorema óptico aplicado aos decaimentos hadrônicos do lépton τ .

Fonte: OLIANI. (59)

com a função espectral experimental. Um problema que aparece ao se fazer isso se deve ao fato de que é preciso conhecer a função espectral em todas energias até o infinito, o que não é possível devido às limitações experimentais. Uma forma de contornar esse problema é utilizar as FESRs com algumas propriedades do teorema de Cauchy para levar essa integral no eixo real para uma integral no plano complexo da Figura 9 e, assim, poder realizar este cálculo. Integrando a função espectral hadrônica na massa invariante do estado final e utilizando o método descrito acima, conseguimos lidar também com o problema de teoria de perturbação não ser válida em baixas energias e construímos vários observáveis e pseudo-observáveis para os momentos integrados. De maneira bastante geral podemos escrever um observável como

$$R_{\tau,V/A}^{(w_i)}(s_0) = 12\pi S_{EW} |V_{ud}|^2 \int_0^1 dx w_i(x) \left[\text{Im}\Pi_{V/A}^{(1+0)}(xs_0) + \frac{2x}{1+2x} \text{Im}\Pi_{V/A}^{(0)}(xs_0) \right], \quad (2.36)$$

onde S_{EW} são correções eletrofracas, $w_i(x)$ é uma função peso que pode ser qualquer função analítica, V_{ud} é o elemento da matriz CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) e $x = s/s_0$. Definimos $\Pi_{V/A}^{(1)}$ e $\Pi_{V/A}^{(0)}$ como as componentes transversal e longitudinal, respectivamente, dos correlatores de dois pontos da Eq. (2.35) e também definimos $\Pi_{V/A}^{(1+0)} \equiv \Pi_{V/A}^{(1)} + \Pi_{V/A}^{(0)}$. É importante ressaltarmos que no limite quiral, onde negligenciamos as massas dos quarks, as contribuições perturbativas das correntes vetorial e vetor-axial são iguais. Essas componentes da taxa de decaimentos do tau em hádrons, expressas na Eq. (2.34), são obtidas definindo $s_0 = m_\tau^2$ e fazendo a escolha $w_\tau(x) = (1-x)^2(1+2x)$, resultando em $R_{\tau,V/A} \equiv R_{\tau,V/A}^{(w_\tau)}(m_\tau^2)$.

O observável generalizado da Eq. (2.36) pode ser decomposto, teoricamente, como

$$R_{\tau,V/A}^{(w_i)}(s_0) = \frac{N_c}{2} S_{EW} |V_{ud}|^2 \left[\delta_{w_i}^{\text{tree}} + \delta_{w_i}^{(0)}(s_0) + \sum_{D \geq 2} \delta_{w_i,V/A}^{(D)}(s_0) + \delta_{w_i,V/A}^{\text{DV}}(s_0) \right], \quad (2.37)$$

onde $\delta_{w_i}^{\text{tree}}$ é o resultado partônico, $\delta_{w_i}^{(0)}(s_0)$ é a contribuição de QCD perturbativa (foco principal deste trabalho), $\delta_{w_i,V/A}^{(D)}(s_0)$ são as correções da OPE e $\delta_{w_i,V/A}^{\text{DV}}(s_0)$ são as correções de violações da dualidade quark-hádron.

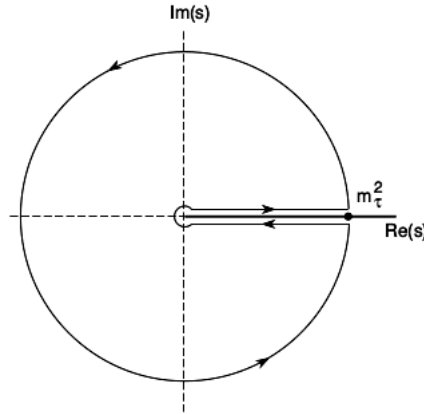


Figura 9 – Contorno de integração para o cálculo de R_τ utilizando as Regras de Soma à Energia Finita (FESRs).

Fonte: PICH. (12)

Para o termo $\Pi^{(1+0)}(s)$ podemos escrever a expansão da OPE como

$$\Pi_{\text{OPE}}^{(1+0)}(s) = \sum_{D=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{C_D(s)}{(-s)^{D/2}}, \quad (2.38)$$

onde a soma é feita sobre todos os operadores de dimensão D que são invariantes de Gauge. Para o caso $D = 0$ obtemos a expansão perturbativa dos correladores da Eq. (2.35), que é a correção dominante de $R_{\tau,V/A}^{(w_i)}(s_0)$. A primeira correção não perturbativa é dada por $D = 4$, que é relativo ao condensado de glúons. Os coeficientes $C_D(s)$ são conhecidos como coeficientes de Wilson e são dependentes de s . A dependência dominante para o coeficiente de dimensão 4 é conhecida, porém, é uma excelente aproximação tratar o coeficiente $C_4(s)$ como constante, pois a dependência na energia é logarítmica e suprimida por α_s . (67) Para os condensados de dimensão mais alta pouco se sabe sobre a dependência em s , mas, baseado na experiência com o condensado de glúons, essa dependência é negligenciada e todos os coeficientes C_D são tratados como coeficientes efetivos constantes. (32)

Para relacionarmos dados experimentais com a descrição teórica da QCD, fazemos uso das FESRs. Nesse caso, os resultados experimentais para os observáveis $R_{\tau,V/A}^{(w_i)}$ são relacionados com integrais de contorno pelo círculo $|s| = s_0$ no plano complexo da variável s . Em geral, trabalhamos com quantidades invariantes pelo grupo de renormalização, assim, não precisamos lidar com convenções relacionadas com a renormalização. Para o caso do τ , vamos definir uma quantidade física chamada função de Adler dada por

$$D(s) \equiv -s \frac{d}{ds} \Pi^{(1+0)}(s), \quad (2.39)$$

onde a derivada elimina a constante que depende do esquema de renormalização. Através de $D(s)$ podemos escrever, utilizando as FESRs e integração por partes, a contribuição perturbativa da QCD, Eq. (2.36), como

$$\delta_{w_i}^{(0)}(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} W_i(x) \widehat{D}_{\text{pert}}(s_0 x), \quad (2.40)$$

onde $W_i(x) = 2 \int_x^1 dz w_i(z)$ é a função peso e $x = s/s_0$. A função de Adler reduzida \widehat{D} é definida de forma a separar o resultado partônico, logo é dada por

$$1 + \widehat{D}(Q^2) = \frac{12\pi^2}{N_C} D(Q^2), \quad (2.41)$$

onde $Q^2 \equiv -s$. Portanto, a função de Adler reduzida pode ser escrita como uma série cujo primeiro termo é da ordem de α_s . Podemos escrever sua expansão perturbativa de modo bastante geral como

$$\widehat{D}_{\text{pert}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu}^n \sum_{k=1}^{n+1} k c_{n,k} \left[\ln \frac{-s}{\mu^2} \right]^{k-1}. \quad (2.42)$$

Como a função de Adler D é invariante pelo grupo de renormalização, a função de Adler reduzida \widehat{D} também é, e como consequência todos os coeficientes $c_{n,k}$ podem ser escritos em função de $c_{n,1}$ e dos coeficientes da função β . Como já dito, a série é conhecida exatamente até ordem α_s^4 (14, 18) e os coeficientes $c_{n,1}$ são dados por

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= 1, & c_{2,1} &= \frac{299}{24} - 9\zeta_3 = 1,640, \\ c_{3,1} &= \frac{58057}{288} - \frac{779}{4}\zeta_3 + \frac{75}{2}\zeta_5 = 6,371, \\ c_{4,1} &= \frac{78631453}{20736} - \frac{1704247}{432}\zeta_3 + \frac{4185}{8}\zeta_3^2 + \frac{34165}{96}\zeta_5 - \frac{1995}{16}\zeta_7 = 49,076, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $\zeta_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i}$. Com uma escolha apropriada de $\mu^2 = -s$, temos que o único termo da segunda somatória da Eq. (2.42) que contribui é o termo $k = 1$. Todos os outros termos são anulados e podemos ressomar os logaritmos da Eq. (2.42) de tal forma que a série, com essa prescrição, é dada por (para $N_f = 3$)

$$\widehat{D}(Q^2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} a_Q^n = a_Q + 1,640a_Q^2 + 6,371a_Q^3 + 49,08a_Q^4 + \dots \quad (2.44)$$

Notemos que essa série é divergente, e assumimos que é uma série assintótica que diverge fatorialmente. Uma importante propriedade geral deste tipo de série é que em ordens intermediárias espera-se que a série se aproxime do valor verdadeiro da função e, em ordens altas, ela divirja. Além disso, a divergência em altas ordens pode acontecer de forma que a série alterne o sinal entre as ordens subsequentes, ou divirja com o mesmo sinal. A forma como a divergência ocorre está diretamente relacionada com a localização dos polos na transformada de Borel desta série, transformada esta que será introduzida no Capítulo 3.

2.4 FOPT e CIPT

A contribuição perturbativa da QCD para os diferentes observáveis $R_{\tau,V/A}^{(w_i)}$ obtidos através das FESRs requer que calculemos a integral da Eq. (2.40). Para realizarmos este

cálculo é necessário adotarmos uma prescrição para a escolha de μ nos logaritmos da Eq. (2.42). Utilizando a Eq. (2.42) podemos escrever a função $\delta_{w_i}^{(0)}$ como

$$\delta_{w_i}^{(0)}(s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} k c_{n,k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} W_i(x) a_\mu^n \left[\ln \frac{-s_0 x}{\mu^2} \right]^{k-1}. \quad (2.45)$$

Ressaltamos aqui que podemos fazer uma escolha para μ pois, como a função de Adler é uma quantidade física, logo, invariante de esquema e escala de renormalização, a função $\delta_{w_i}^{(0)}$ também se torna invariante, e não depende da escala μ . Comumente utilizam-se duas prescrições para μ^2 , chamadas de Contour Improved Perturbation Theory (CIPT) (20, 21) e Fixed Order Perturbation Theory (FOPT). (19)

Na prescrição CIPT é feita a escolha de $\mu^2 = s$ e, nesse caso, a evolução de α_s é ressomada ao longo do contorno de integração. Com essa prescrição, a função β total é incluída no cálculo, logo, mesmo para uma ordem n fixa, termos de ordem mais alta em teoria de perturbação da função β são considerados, e por isso o nome de *contorno melhorado*. Portanto, a contribuição perturbativa para essa escolha é dada por

$$\delta_{\text{CI}, w_i}^{(0)}(s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} J_{\text{CI}, W_i}^{(n)}(s_0), \quad \text{com} \quad J_{\text{CI}, W_i}^{(n)}(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} W_i(x) a^n(-s_0 x). \quad (2.46)$$

Já na segunda prescrição, FOPT, é feita a escolha $\mu^2 = s_0$, ou seja, fixamos a escala de renormalização. Neste caso o acoplamento pode ser retirado da integral, já que o mesmo é definido para uma energia fixa, e esta é realizada somente sobre a função peso e os logaritmos. A expansão perturbativa para FOPT é dada por

$$\delta_{\text{FO}, w_i}^{(0)}(s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{s_0}^n \sum_{k=1}^n k c_{n,k} J_{\text{FO}, W_i}^{k-1}, \quad \text{com} \quad J_{\text{FO}, W_i}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} W_i(x) \ln^n(-x). \quad (2.47)$$

Notemos que para FOPT podemos escrever as correções da QCD como uma série em potências de $\alpha_s(s_0)$ onde os coeficientes dependem da função peso escolhida. Vamos elucidar o cálculo acima para o caso da largura de decaimento do τ . A função peso é determinada pela cinemática dos decaimentos, e no caso é dada por $W_\tau(x) = (1-x)^3(1+x)$. Na literatura, temos que o acoplamento forte é calculado até quarta ordem em teoria de perturbação (5-loops) (17), conseqüentemente, precisamos dos valores da função J_{FO, W_τ}^n até $n = 3$. Este cálculo pode ser feito analiticamente sendo dado por

$$J_{\text{FO}, W_\tau}^{(0)} = 1, \quad J_{\text{FO}, W_\tau}^{(1)} = -\frac{19}{12}, \quad J_{\text{FO}, W_\tau}^{(2)} = \frac{265}{72} - \frac{1}{3}\pi^2 \quad \text{e} \quad J_{\text{FO}, W_\tau}^{(3)} = -\frac{3355}{288} + \frac{19}{12}\pi^2. \quad (2.48)$$

Portanto, na escala de massa do τ , utilizando $N_F = 3$ e no esquema $\overline{\text{MS}}$, podemos escrever a expansão perturbativa numericamente como

$$\delta_{\text{FO}, w_\tau}^{(0)}(m_\tau) = a_\tau + 5, 202a_\tau^2 + 26, 37a_\tau^3 + 127, 1a_\tau^4 + (307, 8 + c_{5,1})a_\tau^5 + \dots, \quad (2.49)$$

onde $a_\tau \equiv a(m_\tau)$.

Essa escolha da prescrição permanece uma das principais fontes de incerteza teórica na extração de α_s nos decaimentos do τ . Cada prescrição leva a uma série assintótica diferente que possui um comportamento perturbativo distinto. Isso se torna mais evidente se truncarmos as séries em $n = 4$. Utilizando $\alpha_s = 0,316$ nas Eqs. (2.46) e (2.47) obtemos o seguinte resultado numérico

$$\begin{aligned} & \alpha_s^1 & \alpha_s^2 & \alpha_s^3 & \alpha_s^4 \\ \delta_{\text{FO},W_\tau}^{(0)} &= 0,1006 + 0,0526 + 0,0268 + 0,0130 = 0,1931, & (2.50) \\ \delta_{\text{CI},W_\tau}^{(0)} &= 0,1361 + 0,0258 + 0,0102 + 0,0071 = 0,1791. \end{aligned}$$

Notemos que a diferença $\delta_{\text{FO},W_\tau}^{(0)} - \delta_{\text{CI},W_\tau}^{(0)} = 0,014$ é da ordem do termo α_s^4 para FOPT e duas vezes maior que o mesmo termo para CIPT. É possível observar também uma tendência da série para CIPT se estabilizar mais rapidamente do que para FOPT, mas não é possível concluir se isso permanece em ordens superiores. Além disso, devido ao fato de se tratarem de séries assintóticas, é esperado que ambas se estabilizem em ordens intermediárias e divergirão para ordens altas.

Durante quase trinta anos, as discussões do problema da discrepância entre os resultados obtidos em CIPT e FOPT partiam da hipótese de que as duas séries assintóticas deveriam aproximar o mesmo valor verdadeiro. Para se atribuir um valor verdadeiro às séries deste tipo, uma abordagem comum na matemática é a utilização da transformada de Borel da série, que será discutida na Seção 3.2. Ficou claro muito recentemente, com os trabalhos de Hoang e Regner (22,68) que, na realidade, as duas séries são intrinsecamente distintas e aproximam valores verdadeiros diferentes. Essa diferença deve ser, em princípio, compensada por correções não-perturbativas, pois, também graças ao trabalho da Referência (22), demonstra-se que CIPT não está associada às correções da OPE na sua forma usual. Em outras palavras, a escolha do esquema para ressomar a série perturbativa deveria vir acompanhada do esquema equivalente na parte não-perturbativa. Como isto nunca foi feito na prática, os resultados em CIPT obtidos até hoje são problemáticos e somente neste ano uma prescrição para suprimir este problema foi proposta. (23,24) Portanto, de forma geral, nas determinações feitas até hoje de α_s neste contexto, devem-se preferir os resultados em FOPT. O problema da discrepância entre estas duas séries será discutido de maneira mais quantitativa na Seção 3.2, no contexto da transformada de Borel.

3 SÉRIES ASSINTÓTICAS, TRANSFORMADAS DE BOREL E APROXIMANTES DE PADÉ

Neste capítulo iremos resumir os conceitos matemáticos fundamentais e necessários para o entendimento dos resultados obtidos nos capítulos posteriores. Na Seção 3.1 iremos introduzir o conceito de séries assintóticas, que é de crucial importância quando estudamos séries perturbativas em QFTs. Na Seção 3.2 mostraremos a relação entre as séries assintóticas e a transformada de Borel, bem como a transformada de Borel modificada, e como os renormalons aparecem neste contexto. E por fim, na Seção 3.3 estudaremos o que são os aproximantes de Padé e como a utilização da derivada do logaritmo da função a ser aproximada em conjunto com os aproximantes de Padé pode acelerar a convergência da aproximação quando comparado com aproximações ordinárias.

3.1 Séries assintóticas

Como já dito anteriormente, presumimos que a série em α_s é, na melhor das hipóteses, uma série assintótica. Uma série assintótica é definida como sendo uma expansão divergente de uma dada função que tem a principal propriedade de prover uma boa aproximação para a função original ao truncarmos esta série em um certo número finito de termos. Em 1952, Dyson desenvolveu o argumento de que as séries perturbativas obtidas em Teoria de Campos tinham raio de convergência zero. (25) Esse argumento, estabelecido primeiramente para QED, estabelece que a série em α_{em} (acoplamento da QED) não pode convergir já que uma continuação analítica para um valor negativo do acoplamento produz uma teoria com vácuo instável, logo, o raio de convergência dessa série é nulo. Esse argumento também é válido para QCD e por isso esperamos que as séries sejam assintóticas.

A característica principal de uma série assintótica é que ela é uma série divergente, porém, pode ser muito útil quando truncada em um número finito de termos. Uma maneira formal de definir uma série assintótica é considerando uma função $f(\epsilon)$, a série será assintótica a esta função se, para um valor de N fixo, a série em potências de ϵ convergir no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Matematicamente, para um valor pequeno de ϵ , temos (27)

$$\left| f(\epsilon) - \sum_{j=0}^N a_j \epsilon^j \right| \sim \mathcal{O}(\epsilon^{N+1}). \quad (3.1)$$

Uma outra forma de encarar a série assintótica é mantermos ϵ fixo e fazermos $N \rightarrow \infty$. Como consequência, a série terá um comportamento assintótico ao valor verdadeiro e depois irá divergir. Portanto, dada uma série assintótica a $f(\epsilon)$, uma informação importante é sabermos quão bem essa série se aproxima do valor verdadeiro da função, ou seja, queremos saber em que ordem devemos truncar a série.

Em geral, existe uma prescrição para encontrarmos qual o valor de N . Essa prescrição, chamada de truncamento ideal (ou *optimal truncation*, em inglês), estabelece que para um dado valor de ϵ , a melhor aproximação possível é alcançada ao truncarmos a série em seu menor termo, logo, descartamos todos os termos posteriores. (27) Normalmente, o valor de N que fornece a melhor aproximação (N^*) é proporcional a $1/\epsilon$. Nessa prescrição, o erro, em geral, é da $\mathcal{O}(e^{-1/\epsilon})$, que, essencialmente, é um termo não perturbativo. É importante ressaltarmos que não existe um teorema que garanta a validade dessa prescrição para todas as séries, mas, em geral, observamos que é válido esperar esse comportamento da série. Essa prescrição será explorada na Seção 6.3.

Um bom exemplo para entender o comportamento de uma série assintótica é através da função de Stieltjes, definida como (27)

$$S(\epsilon) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \epsilon t} dt, \quad (3.2)$$

onde $\epsilon > 0$. Podemos reescrever a função de Stieltjes como

$$S(\epsilon) = \sum_{j=0}^N (-1)^j j! \epsilon^j + E_N(\epsilon), \quad (3.3)$$

onde utilizamos a identidade da série geométrica válida para um inteiro N arbitrário e a representação integral da função Γ dados, respectivamente, por

$$\sum_{j=0}^N (-1)^j (\epsilon t)^j = \frac{1 - (-\epsilon t)^{N+1}}{1 + \epsilon t}, \quad (3.4)$$

$$\int_0^{\infty} dt e^{-t} t^j = \Gamma(j + 1) = j!,$$

e definimos a função $E_N(\epsilon)$ como

$$E_N(\epsilon) \equiv \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t} (-\epsilon t)^{N+1}}{1 + \epsilon t}. \quad (3.5)$$

Ressaltamos aqui que, até o momento, não foi realizada nenhuma aproximação. Sendo este resultado exato, podemos encarar a função da Eq. (3.5) como uma função erro. Nesse intuito, a somatória na Eq. (3.3) nos fornece uma série que, em ordens intermediárias, apresenta uma boa aproximação para a função exata à esquerda, porém, dado que apresenta um termo fatorial, é esperado que a série irá divergir para altos valores de j . Esse comportamento é característico de séries assintóticas. A luz do comportamento assintótico, sendo a função $E_N(\epsilon)$ a função erro, podemos esperar que esta função se aproxime de zero em ordens intermediárias e divirja conforme aumentamos o valor de N .

Para visualizarmos este comportamento, fixamos o valor de ϵ em 0, 10 e variamos N . O valor mínimo de $E_N(\epsilon)$ ocorre para $N = 9$ dado por $-0,00018$. Isso implica que,

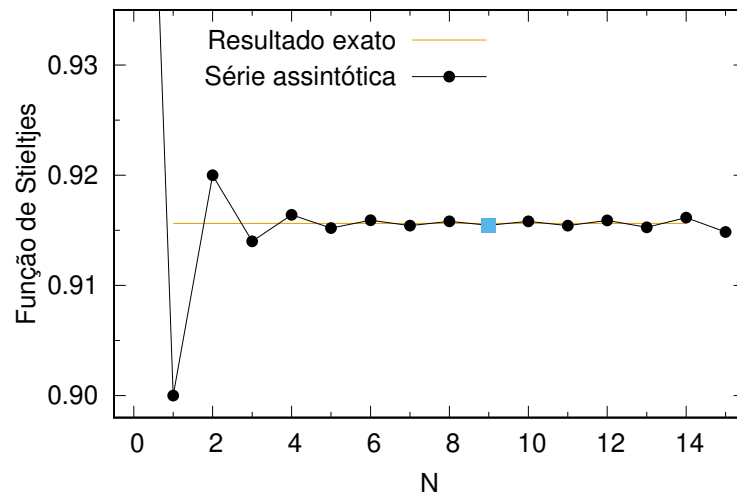


Figura 10 – Série assintótica da função de Stieltjes utilizando $\epsilon = 0,10$. A linha horizontal amarela é o resultado exato da função de Stieltjes e o ponto quadrado azul é o menor termo da série.

Fonte: Elaborada pelo autor.

para a função de Stieltjes, se truncarmos a somatória da Eq. (3.3) para este mesmo valor de N teremos a melhor aproximação possível. Isso pode ser verificado na Figura 10, onde o termo de $N = 9$ está representado pelo quadrado azul e é o menor termo da série, validando também a prescrição do truncamento ótimo. Além disso, na figura vemos uma linha horizontal amarela, que é o valor exato da função de Stieltjes para $\epsilon = 0,10$, que é igual a $S(0,10) = 0,91563$. Notemos que ao truncarmos o somatório em $N = 9$ temos que

$$S(0,10) = 0,91545 + (0,00018), \quad (3.6)$$

onde o primeiro termo é dado pelo somatório e o segundo termo pela função $E_N(\epsilon)$. Vemos aqui que esta é uma ótima aproximação para o valor verdadeiro da série, fornecendo um erro relativo de 0,02%. Para finalizar, na Figura 10 também vemos o comportamento divergente da série da função de Stieltjes para ordens altas de N , reforçando o comportamento assintótico da série. Um outro ponto importante a ser considerado é que esperávamos que, utilizando $\epsilon = 0,10$, a melhor aproximação fosse dada por, aproximadamente, $N^* = 1/0,10 = 10$ e observamos que ela ocorre para $N = 9$, validando o comportamento da série assintótica.

Através da função de Stieltjes podemos, também, verificar que o erro da aproximação, em geral, é da ordem de $\mathcal{O}(e^{-1/\epsilon})$, como já dito anteriormente. Para verificarmos isso, vamos dividir a integral em uma parte convergente e uma divergente. Essa separação é feita baseando-se no raio de convergência do integrando da função de Stieltjes. Podemos escrever

$$S(\epsilon) = S_{\text{con}}(\epsilon) + S_{\text{div}}(\epsilon), \quad (3.7)$$

onde

$$S_{\text{con}}(\epsilon) \equiv \int_0^{1/\epsilon} \frac{e^{-t}}{1+\epsilon t} dt, \quad S_{\text{div}}(\epsilon) \equiv \int_{1/\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+\epsilon t} dt. \quad (3.8)$$

Notemos que para todo $t \geq 1/\epsilon$, o integrando tem um valor máximo de $e^{-t}/2$, como consequência deste fato temos que

$$S_{\text{div}}(\epsilon) \leq \frac{e^{-1/\epsilon}}{2}, \quad (3.9)$$

portanto, podemos concluir que, numa expansão assintótica, a melhor aproximação possível terá um erro da ordem de $\mathcal{O}(e^{-1/\epsilon})$, que é um termo essencialmente não-perturbativo, pois não é possível fazer uma expansão em série de potências para $\epsilon \rightarrow 0$. Ainda assim, o comportamento é o esperado: o erro vai a zero no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

As principais e mais pertinentes propriedades das séries assintóticas foram explanadas nesta seção. A partir da próxima iremos focar em um tipo específico de série e veremos as melhores formas de se trabalhar a mesma.

3.2 Transformada de Borel

Uma forma conveniente de trabalhar com séries assintóticas, em especial séries que divergem fatorialmente, é realizarmos a chamada transformada de Borel (que é, na prática, a transformada inversa de Laplace). Esta transformada é um método de somar séries divergentes, em especial, séries que divergem fatorialmente, como veremos abaixo. Introduzida por Émile Borel em 1899 (69), o método é baseado na representação integral da função fatorial. Portanto, seja uma série

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \alpha^{n+1}, \quad (3.10)$$

onde r_n é proporcional a um termo $n!$. A Eq. (3.10) pode ser encarada como a expansão assintótica de uma grandeza física R . Se multiplicarmos e dividirmos os coeficientes r_n por $n!$ e usarmos a representação integral da função fatorial como $n! = \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du$ para o numerador obtemos o seguinte

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} du e^{-u} u^n \frac{r_n}{n!} \alpha^{n+1}. \quad (3.11)$$

Trocando a ordem da somatória com a integral e realizando a seguinte troca de variável $u\alpha \equiv t$, chegamos a

$$R = \int_0^{\infty} B[R](t) e^{-t/\alpha} dt, \quad (3.12)$$

onde $B[R](t)$ definimos como sendo a transformada de Borel de R e é dada por

$$B[R](t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{t^n}{n!}. \quad (3.13)$$

Ou seja, a divergência fatorial dos coeficientes r_n é suprimida, e este é exatamente o motivo pelo qual esta transformada é útil para este tipo de divergência, pois, como consequência temos uma série mais bem comportada do que a série em α . A integral da Eq. (3.12) é chamada de integral de Borel, que é simplesmente a transformada de Laplace, e é usada para obtermos a “soma” da série no sentido de Borel. (69)

Uma propriedade muito importante da transformada de Borel consiste no fato de que as singularidades da transformada que estão localizadas no eixo real governam o comportamento da série da função original. Outro ponto é que a integral da Eq. (3.12) pode ser realizada sem problemas se não tivermos singularidades no eixo real positivo de $B[R](t)$. Nesse caso específico dizemos que a série é “somável” no sentido de Borel. Porém, quando $B[R](t)$ apresenta singularidades que obstruem o caminho de integração, é preciso contorná-las ao realizarmos este cálculo. Pode-se realizar esse contorno de várias maneiras, o que leva à chamada *ambiguidade da integral de Borel*. (69)

Para visualizarmos essas propriedades, vamos considerar duas funções genéricas, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ cujas transformadas de Borel são conhecidas de forma fechada e dadas, respectivamente, por

$$B[f_1](t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{e} \quad B[f_2](t) = \frac{1}{1+t}. \quad (3.14)$$

Notemos que $B[f_1](t)$ apresenta um polo no eixo real positivo em $t = 1$ e $B[f_2](t)$ no eixo real negativo em $t = -1$. As transformadas de Borel da Eq. (3.14) podem ser escritas como uma série utilizando a identidade da série geométrica e são dadas por

$$\begin{aligned} B[f_1](t) &= \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots, \\ B[f_2](t) &= \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - r + r^2 - r^3 + \dots. \end{aligned} \quad (3.15)$$

É importante ressaltar que a transformada de Borel pode servir como uma função geradora da série original, logo, conhecendo os coeficientes da série de Borel, é possível calcular os coeficientes da série da função original apenas multiplicando os coeficientes por $n!$. Voltando para as funções originais, obtemos as seguintes séries para $f_1(x)$ e $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots, \\ f_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + \dots. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dada a Eq. (3.16) podemos ver dois comportamentos distintos referentes as localidades dos polos na transformada de Borel. O primeiro comportamento, exemplificado pela função $f_1(x)$, consiste no fato de que polos no eixo real positivo do plano de Borel implicam em séries que divergem com o comportamento de sinal não-alternado em ordens altas.

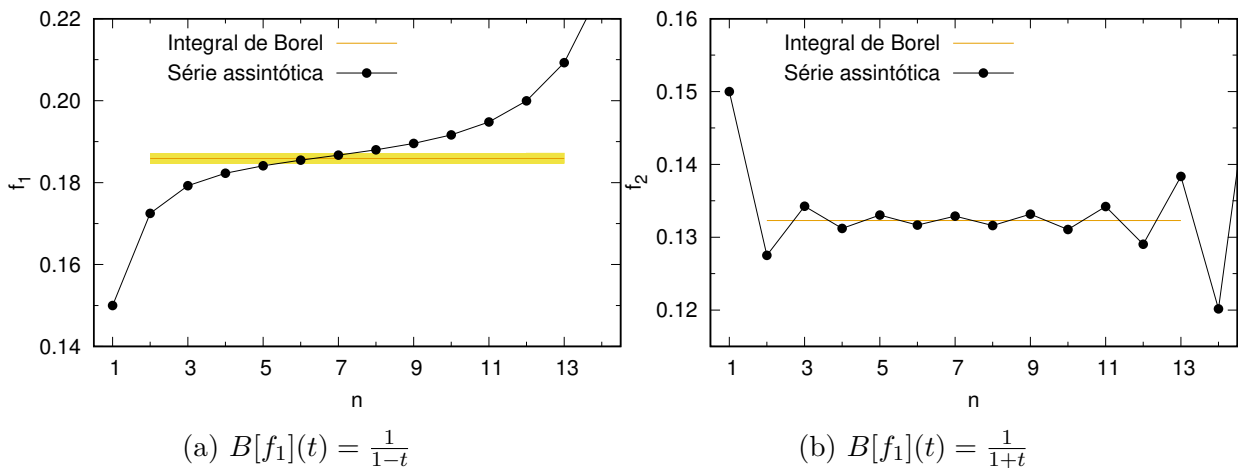


Figura 11 – Comportamento assintótico das séries das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ relacionados com as posições dos polos na transformada de Borel das respectivas funções. A linha amarela é referente ao valor da soma de Borel.

Fonte: OLIANI. (59)

O segundo comportamento, exemplificado pela função $f_2(x)$, é o contrário do primeiro, ou seja, quando a transformada de Borel apresenta polos no eixo real negativo, a série irá divergir com o comportamento de sinal alternado em ordens altas. Essa constatação pode ser visualizada na Figura 11. Nesta, pode-se ver o comportamento assintótico das séries, oscilando em torno do valor da soma de Borel da função, dada pela linha amarela, em ordens intermediárias e, logo após, divergindo em ordens altas, conforme constatado acima.

Um fator final de relevância neste assunto é referente ao fato de que uma transformada de Borel pode possuir mais de um polo no eixo real em diferentes posições. Neste caso, a questão iminente é qual polo irá governar o comportamento divergente da série. Para isso, vamos considerar uma transformada de Borel que possui dois polos, em $t = p_1$ e $t = p_2$, sendo $|p_2| > |p_1|$. Esses polos contribuem para a série assintótica como $(1/p_1^{n+1} + 1/p_2^{n+1})$, onde n é o índice do somatório da série. Ou seja, para ordens altas, sabendo que $|p_2| > |p_1|$, a contribuição de p_2 é suprimida mais rapidamente do que a contribuição de p_1 , fazendo com que o comportamento divergente seja dominado pelo polo mais próximo à origem.

Como já afirmado, em QFTs, as séries perturbativas são, na melhor das hipóteses, assintóticas. Para calcularmos essas séries, fazemos uso dos diagramas de Feynman, que organizam o cálculo teórico ordem por ordem em teoria de perturbação. Um grupo especial chamado de diagramas de loop possui um forte relacionamento com os polos da transformada de Borel.

Ao calcularmos a transformada de Borel de um diagrama de loops, as singularidades que surgem estão diretamente relacionadas com as regiões de alto ou baixo momento desse

diagrama. (26) Nesse caso específico essas singularidades recebem o nome de *renormalons*, e são uma das fontes de divergência das séries perturbativas em teoria de campos. Os diagramas que contribuem com $n!$ em ordem n para a amplitude são os que geram esse tipo de singularidade. Um exemplo são os diagramas que contêm o propagador do glúon sendo corrigido por uma cadeia de loops fermiônicos. A região de altos momentos destes diagramas, também chamada de região ultravioleta (UV, do inglês *ultraviolet*) gera singularidades no eixo real negativo, conhecidos na literatura como renormalons UV. Já a região de baixos momentos, também conhecida como região infravermelha (IR, do inglês *infrared*) gera singularidades no eixo real positivo, conhecidos como renormalons IR. Este último tipo de singularidade está diretamente relacionado com correções não-perturbativas, em especial, a localização p da singularidade está relacionada com correções de potência do tipo $\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right)^p$, que estão diretamente ligadas com os condensados da OPE de Wilson. * (70)

Na Seção 4.2 iremos estudar em mais detalhes como esses renormalons surgem, em especial para o limite large- β_0 da QCD.

3.2.1 Transformada de Borel modificada

Na seção anterior vimos como a transformada de Borel usual é construída a partir da representação integral da função fatorial. Porém, podemos definir variantes para essa transformada. Em alguns esquemas de renormalização, onde a função β da QCD tem um comportamento específico, é útil trabalharmos com a chamada transformada de Borel modificada. (43) Como exemplo prático onde esta transformada é útil podemos citar o esquema C , introduzido na Seção 2.2.

Aqui iremos introduzir o conceito da transformada de Borel modificada que será crucial para obtenção dos resultados na Seção 6.2. Como já dito anteriormente, a função β é definida como

$$\beta(a_s) \equiv -\mu \frac{da_s}{d\mu} = \beta_1 a_s^2 + \beta_2 a_s^3 + \beta_3 a_s^4 + \dots \quad (3.17)$$

Para esquemas que seguem a sistemática do esquema C , ela pode ser escrita em função dos dois primeiros coeficientes da série da Eq. (3.17) que são invariantes de esquema de renormalização. A forma geral para estes casos pode ser escrita como

$$\beta(a_s) = \frac{\beta_1 a_s^2}{1 - \lambda a_s} \quad (3.18)$$

onde $\lambda \equiv \beta_2/\beta_1$. Nos casos em que temos a função β dada por uma expressão equivalente a da Eq. (3.18) é útil definirmos a transformada de Borel modificada.

* Uma revisão detalhada sobre renormalons pode ser encontrada na Referência (26).

Portanto, seja uma função $f(z)$ cuja expansão assintótica é dada por $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, a transformada de Borel modificada é definida como

$$\mathcal{B}[f](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \lambda t)}{\Gamma(n + 1 + \lambda t)} f_n t^n, \quad (3.19)$$

onde $\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$ é a função gama usual. Aqui podemos ressaltar o fato de que se tomarmos $\lambda = 0$, retomamos o limite large- β_0 da QCD além de retomarmos também a transformada de Borel usual, como esperado, uma vez que a Eq. (3.19) é útil para casos em que a função β é escrita da forma da Eq. (3.18), e em large- β_0 temos que β_2 é nulo. Em casos especiais, quando o primeiro termo da série de $f(z)$, proporcional a t^0 , é nulo ou pode ser ignorado, é útil definirmos uma nova função dada por

$$\bar{f}(z) \equiv \int_0^z dz' \frac{f(z')}{z'} \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n}. \quad (3.20)$$

Neste caso específico, a integral de Borel modificada tem a seguinte forma

$$\bar{f}(z) \equiv \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t/z} \frac{(t/z)^{\lambda t}}{\Gamma(1 + \lambda t)} \mathcal{B}[f](t). \quad (3.21)$$

É importante ressaltarmos aqui que as singularidades da transformada de Borel modificada permanecem no mesmo local que as singularidades da transformada usual, logo, podemos classificá-las como renôrmalons também. A diferença diz respeito ao expoente da singularidade. Considere um caso em que a singularidade da transformada de Borel modificada seja dada por

$$\mathcal{B}[f](t) \sim \frac{1}{(1 - t/R)^\gamma}. \quad (3.22)$$

Pode-se mostrar que essa singularidade na transformada de Borel usual é dada por (43)

$$B[f](t) \sim \frac{1}{(1 - t/R)^{\gamma + \lambda R}}, \quad (3.23)$$

ou seja, ocorre um deslocamento de λR no expoente da singularidade. Essa propriedade será crucial para a interpretação dos resultados da Seção 6.2.

No Capítulo 6 iremos mostrar como construir uma transformada de Borel fechada para a função $\delta_{w_i}^{(0)}$, primeiro no limite large- β_0 , que se trata do limite de grande número de sabores da QCD, e depois para a QCD completa, onde utilizaremos o esquema C e a transformada de Borel modificada.

3.2.2 A discrepância entre CIPT e FOPT

Recentemente, Hoang e Regner estudaram em mais detalhes a discrepância existente entre as prescrições FOPT e CIPT. (22,68) Os autores mostraram que existe uma diferença

intrínseca entre suas representações de Borel, o que pode ser entendido como a integral de Borel, ou a soma no sentido de Borel, da série em questão. A representação de Borel da série em FOPT para $\delta_{W_i}^{(0)}$ pode ser escrita diretamente, conforme já discutimos neste capítulo,

$$\delta_{W_i, \text{Borel}}^{(0), \text{FOPT}}(s_0) = \int_0^\infty dt \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} W_i(x) B[\hat{D}](t) e^{-\frac{t}{\alpha_s(-s_0 x)}}, \quad (3.24)$$

onde $B[\hat{D}]$ é a transformada de Borel da função de Adler. Como CIPT não tem propriamente um parâmetro fixo de expansão, para se chegar em uma representação de Borel para a prescrição CIPT, introduz-se o parâmetro de expansão $\alpha_s(s_0)$ na Eq. (2.46) como a seguir

$$\delta_{W_i}^{(0), \text{CIPT}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,1} a_{s_0}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=1} \frac{dx}{x} W_i(x) \left(\frac{a(-s_0 x)}{a_{s_0}} \right)^n, \quad (3.25)$$

isto transfere as complicações para os coeficientes da série e pode-se, então, calcular a transformada de Borel da série em CIPT. Como consequência, a transformada de Borel da função de Adler passa a depender da evolução do acoplamento e o caminho de integração C_x precisa ser deformado para longe do círculo $|x| = 1$. A representação no caso de CIPT pode ser escrita como

$$\delta_{W_i, \text{Borel}}^{(0), \text{CIPT}}(s_0) = \int_0^\infty dt \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} \frac{dx}{x} W_i(x) \left(\frac{\alpha_s(-x s_0)}{\alpha_s(s_0)} \right) B[\hat{D}] \left(\frac{\alpha_s(-x s_0)}{\alpha_s(s_0)} t \right) e^{-\frac{t}{\alpha_s(s_0)}}, \quad (3.26)$$

onde a relação entre t e \bar{t} é dada por $t = \bar{t} \alpha_s(-x s_0) / \alpha_s(s_0)$. O tratamento desta integral é bastante complexo e a discussão detalhada deste tratamento está fora do nosso escopo. Aqui é suficiente mencionar que é possível obter representações analíticas para o resultado para funções peso polinomiais. A análise deste resultado mostra que a associação usual entre os renômalons e as correções não perturbativas da OPE é quebrada em CIPT, o que invalida o uso desta série quando associada à OPE usual (o que sempre se fazia até os trabalhos das Referências (22, 68)).

A diferença existente entre as duas prescrições, calculada pela diferença das duas integrais de Borel das Eqs. (3.24) e (3.26), foi chamada de Separação Assintótica (AS, do inglês *Asymptotic Separation*). Uma maneira de tornar o cálculo desta separação mais compacto é utilizando o esquema C (42), onde a função β da QCD é conhecida de maneira exata e dependente somente dos coeficiente β_1 e β_2 , como discutido na Seção 2.2. O resultado desta separação para uma função peso genérica $W(x) = (-x)^m$, utilizando o esquema C e escrevendo o renômalon infravermelho, também de maneira genérica, como

$$B_{\hat{D}, p, \gamma}^{\text{IR}} = \frac{1}{(p-u)^\gamma}, \quad (3.27)$$

pode ser obtido a partir da seguinte equação abaixo (24)

$$\begin{aligned} \Delta(m \neq p, p, \gamma, s_0) &= \delta_{(-x)^m, \text{Borel}}^{(0), \text{CIPT}}(s_0) - \delta_{(-x)^m, \text{Borel}}^{(0), \text{FOPT}}(s_0) \\ &= \left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{s_0} \right)^m \frac{2^{2m\hat{b}_1}}{\Gamma(\gamma)} \times \\ &\quad \times \left\{ \text{Re} \left[(p - m + i0)^{2m\hat{b}_1 - \gamma} \Gamma(-2m\hat{b}_1 + \gamma, -2(p - m)t_-) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{b}_1 \text{Re} \left[(p - m + i0)^{2m\hat{b}_1 - \gamma + 1} \Gamma(-2m\hat{b}_1 + \gamma - 1, -2(p - m)t_-) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

com $\hat{b}_1 \equiv \beta_2/(4\beta_1^2)$ e $t_- = -\pi/(\beta_1\alpha_s(-s_0 - i0))$. Onde definimos a escala da QCD, Λ_{QCD} , como

$$\Lambda_{\text{QCD}}^2 \equiv Q^2 \left(\frac{\pi}{\beta_1 \hat{\alpha}_s(Q^2)} \right)^{2\hat{b}_1} \exp \left(-\frac{2\pi}{\beta_1 \hat{\alpha}_s(Q^2)} \right) = Q^2 \left(\frac{\hat{\alpha}_Q}{\beta_1} \right)^{-2\hat{b}_1} \exp \left(-\frac{2}{\beta_1 \hat{\alpha}_Q} \right), \quad (3.29)$$

que está escrita em termos de α_s no esquema C .

Com a separação assintótica, atualmente, a diferença observada na Eq. (2.50) não somente foi bem compreendida como também quantificada, Eq. (3.28). Esse conhecimento, em conjunto com as estimativas dos termos de ordens mais altas da série perturbativa, levou a proposta de um novo esquema para o condensado de glúons, que suprime a diferença fortemente, pois a AS é dominada pela contribuição do primeiro polo IR. (23, 24)

3.3 Aproximantes de Padé

Um dos objetivos desta tese é estudar série perturbativa da QCD para os decaimentos hadrônicos do tau utilizando os aproximantes de Padé (PAs, do inglês *Padé Approximants*). Portanto, esta seção será focada em definir o que são os PAs, como construí-los, obter aproximações, previsões e estudar suas variantes, em especial, a derivada do logaritmo de um PA, aqui denominado DLog PA.

A técnica dos aproximantes de Padé foi desenvolvida em torno de 1890 por Henry Padé (34–36) e fornece a melhor aproximação racional a uma dada função. A definição de um PA é dada por

$$P_N^M(z) = \frac{Q_M(z)}{R_N(z)} = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots + a_Mz^M}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \cdots + b_Nz^N}, \quad (3.30)$$

onde $b_0 = R_N(0) \equiv 1$, e os outros coeficientes, $a_0, \dots, a_M, b_1, \dots, b_N$, são determinados a partir da expansão em Taylor da função original em torno de $z = 0$. O PA tem o poder de reproduzir os primeiros $M + N + 1$ coeficientes da expansão e fornece previsões para os coeficientes de ordem mais altas.

A fim de elucidar os procedimentos para obter um PA para uma dada função $f(x)$, vamos considerar a seguinte função racional

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}x}}{(1 + 2x)^2} \approx 1 - \frac{15x}{4} + \frac{351x^2}{32} - \frac{3695x^3}{128} + \dots, \quad (3.31)$$

onde, à direita temos a expansão em Taylor em torno de $f(0)$ até terceira ordem. O método de Padé consiste em expandir o PA até ordem $M + N$ e determinar os coeficientes igualando os termos de ordens iguais com seus correspondentes da série de Taylor da função original, construindo assim um sistema de equações. Por exemplo, considerando o PA com $M = N = 1$ temos o seguinte

$$P_1^1(x) = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1x} \approx a_0 + (a_1 - a_0b_1)x + (a_0b_1^2 - a_1b_1)x^2 + \dots. \quad (3.32)$$

Através das Eqs. (3.31) e (3.32) obtemos o seguinte sistema para obter os coeficientes dos PAs:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 - a_0b_1 = -\frac{15}{4}, \\ a_0b_1^2 - a_1b_1 = \frac{351}{32}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Resolvendo o sistema acima chegamos em $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{33}{40}$ e $b_1 = \frac{117}{40}$, logo o aproximante P_1^1 é escrito como

$$P_1^1(x) = \frac{1 - \frac{33}{40}x}{1 + \frac{117}{40}x}. \quad (3.34)$$

Comparando as séries da função original $f(x)$ e do Aproximantes de Padé $P_1^1(x)$ chegamos em

$$\begin{aligned} f(x) &\approx 1 - 3,75x + 10,97x^2 - 28,87x^3 + 71,59x^4 - 170,9x^5 + \dots, \\ P_1^1(x) &\approx 1 - 3,75x + 10,97x^2 - 32,08x^3 + 93,85x^4 - 274,5x^5 + \dots, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde verificamos a igualdade dos primeiros três coeficientes (vale ressaltar que para este caso $M + N + 1 = 3$) e obtemos previsões (termos em azul) para os termos de ordem mais alta, no caso, os termos de ordens três e quatro apresentam erros relativos de 11% e 31%, respectivamente. Além disso, por se tratar de uma função racional, temos uma previsão para a localização do polo da função. Notemos que a função $f(x)$ apresenta um polo duplo em $x = -0,5$, e o aproximante $P_1^1(x)$ apresentou um polo em $x = -0,34$, apresentando um erro relativo de 32%, o que está ótimo considerando a quantidade de informação inserida para obter essas previsões. Logo, verificamos a potência de um PA, principalmente quando estamos trabalhando com funções racionais.

Consideremos o PA seguinte da sequência $M = N$. Para esse caso, os cinco primeiros termos da função $f(x)$ são utilizados como entrada para definir os coeficientes do Padé $P_2^2(x)$, logo, as previsões começam para o termo x^5 . As previsões são dadas por

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \dots + 71,591x^4 - 170,89x^5 + 397,21x^6 - 905,28x^7 + 2032,3x^8 + \dots, \\ P_2^2(x) &\approx \dots + 71,591x^4 - 170,91x^5 + 397,40x^6 - 906,23x^7 + 2036,1x^8 + \dots, \end{aligned} \quad (3.36)$$

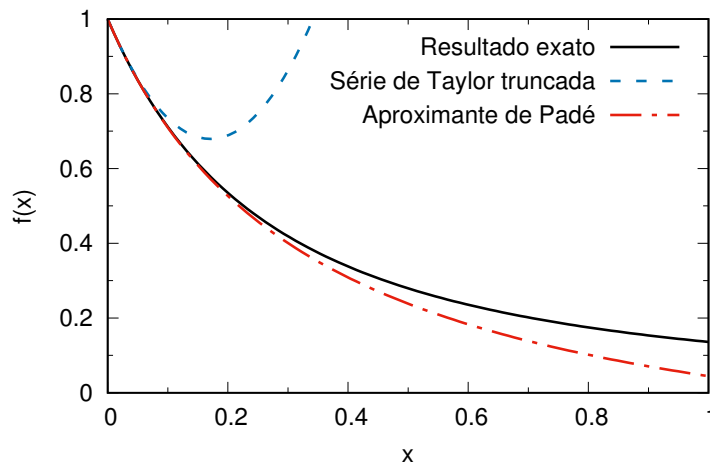


Figura 12 – Comparação entre o resultado exato (linha preta sólida) e as aproximações por Taylor até segunda ordem (linha azul pontilhada) e pelo aproximante de Padé P_1^1 (linha vermelha traço-ponto) para a função $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2}x}}{(1 + 2x)^2}$.

Fonte: OLIANI. (59)

onde o termo em preto é usado como entrada para a construção do Padé e os termos em azul são as previsões que o Padé fornece. Os erros relativos dos coeficientes de ordens 5, 6, 7 e 8 são, respectivamente, 0,013%, 0,046%, 0,104% e 0,189%, apresentando uma melhora incrível com a utilização de apenas mais dois parâmetros como entrada. Além disso, todos os sinais foram previstos corretamente e, este Padé, apresenta dois polos, cujas posições são: $x = -0,517$ e $x = -0,486$, ambos muito próximos da localização do polo duplo real da função original. Logo, podemos observar o poder de previsão dos PAs conforme aumentamos a ordem desses aproximantes.

Para finalizar, na Figura 12 podemos comparar o comportamento da função $f(x)$ (linha preta sólida) exata com a aproximação por Taylor truncada em segunda ordem (linha azul pontilhada) e com o aproximante $P_1^1(x)$ (linha vermelha traço-ponto). Aqui fica visível o poder do aproximante de Padé, que, utilizando a mesma quantidade de informação que a série de Taylor, reproduz o comportamento quantitativo da série de forma bastante fiel até em torno de $x = 0,2$ e, ainda assim, reproduz qualitativamente o comportamento da série para altos valores de x , o que a aproximação por Taylor não é capaz de fazer quando truncamos a série na segunda ordem..

Uma variação importante dos aproximantes de Padé é conhecida na literatura como aproximante de Padé parcial (PPA, do inglês *Partial Padé Approximants*). (34–36) Essa variação é comumente utilizada quando alguma informação sobre a função original é conhecida, em especial a localização dos polos desta função. Esta variante é definida como

$$\mathbb{P}_{N,K}^M(z) = \frac{Q_M(z)}{R_N(z)T_K(z)}, \quad (3.37)$$

onde $T_K(z)$ é um polinômio que possui K raízes relacionadas com a localização dos pólos

da função original e pode ser escrita como

$$T_K(z) = (z + z_1)(z + z_2) \dots (z + z_K), \quad (3.38)$$

ou seja, $T(z)$ é nula para $z = -z_i$, com $i = 1, \dots, k$. Aqui é importante ressaltar que os polos z_i 's são impostos usando algum conhecimento externo ao PAs. Normalmente, impor esse conhecimento dos polos acelera muito a convergência do método, portanto, em alguns casos, pode ser tornar interessante o uso dos PAs.

Definidos, de forma geral, o que são os PAs e os PAs, é importante ressaltar que ao trabalharmos com esses tipos de aproximantes, em alguns casos, existem teoremas que garantem a convergência dos mesmos à função original. Dois teoremas se destacam: teorema de *Montessus de Ballore* e teorema de *Pommerenke*. Ambos garantem, sob algumas condições da função a ser aproximada, em especial para funções meromórficas, que ao aumentarmos a quantidade de parâmetros, o aproximante convergirá para o resultado da função. Em destaque, o segundo teorema nos garante que sequências do tipo P_N^{N+J} , com $J \in \mathbb{Z}$, convergem a uma dada função $f(z)$, meromórfica e analítica em todo o plano z exceto por um número contável de polos isolados. Devido a estes teoremas, as sequências diagonais e quase-diagonais, com $J = 0, \pm 1, \pm 2$, por exemplo, possuem um papel muito importante para o método dos PAs. Uma consequência destes teoremas está relacionada com o aparecimento de um polo e um zero do aproximante muito próximos entre si, gerando o que é conhecido na literatura como *defeitos* ou *dubletos de Froissart*. (34–36) A aplicabilidade dos teoremas citados, bem como exemplos de convergência foram explorados na Referência (59). Nesta tese iremos focar nas aplicabilidades do que foi explanado até o momento e nos chamados DLog PAs, método que acelera a convergência e é útil quando a função a ser aproximação possui cortes.

3.3.1 Aproximante de Padé DLog

Até o momento definimos de forma geral o que são os Padés e suas principais propriedades. É possível notar o poder dos PAs quando estamos trabalhando com funções racionais, em especial, funções que apresentam singularidades do tipo polo, que é o caso quando estamos trabalhando com a transformada de Borel da função de Adler no limite large- β_0 da QCD, por exemplo. Porém, quando tratamos da QCD completa, sabemos que esses pólos são elevados a cortes no plano complexo (que têm pontos de ramificação) e, este fator, “atrapalha” a boa predição fornecida pelo PA, necessitando de uma quantidade maior de informação de entrada. Além disso, as informações sobre os polos, em situações realísticas, pode ser escassa, diminuindo a efetividade da aproximação por PAs ordinários.

Uma forma de contornar este problema é utilizando o que é conhecido como DLog PA. (34–36) Este nome é devido à forma como é construído o aproximante e ficará mais claro a seguir. Para entender esta forma de trabalhar com PAs, consideremos a seguinte

função

$$f(z) = \frac{A(z)}{(\mu - z)^\gamma} + B(z), \quad (3.39)$$

onde $f(z)$ apresenta um corte de μ até ∞ com expoente γ e tanto $A(z)$ como $B(z)$ são analíticas em $z = \mu$.

O método de DLog consiste em utilizarmos a derivada do logaritmo da função que queremos estudar. Ou seja, primeiro aplicamos o logaritmo em $f(z)$ e a seguir aplicamos a derivada neste logaritmo. Portanto, seja a função $F(z)$ definida como

$$F(z) \equiv \frac{d}{dz} \log [f(z)]. \quad (3.40)$$

Substituindo $f(z)$ da Eq. (3.39) na Eq. acima, tomando o logaritmo e derivando é possível obter

$$F(z) = \frac{1}{A(z) + (\mu - z)^\gamma B(z)} \left[A'(z) + \frac{\gamma A(z)}{(\mu - z)} + (\mu - z)^\gamma B'(z) \right], \quad (3.41)$$

onde $A'(z) \equiv \frac{d}{dz} A(z)$ e $B'(z) \equiv \frac{d}{dz} B(z)$. Se olharmos para a função próxima de $z = \mu$, podemos descartar os termos $(\mu - z)^\gamma$, pois estes estão multiplicados por um termo finito, logo a função pode ser escrita como

$$F(z) \approx \frac{1}{A(z)} \left[A'(z) + \frac{\gamma A(z)}{(\mu - z)} \right]. \quad (3.42)$$

Novamente, como estamos olhando para próximo de $z = \mu$, o segundo termo dentro dos colchetes apresenta uma singularidade que vai a infinito neste ponto e faz com que a função seja dominada pelo mesmo, logo é possível simplificar o resultado de forma que $F(z)$ dependa apenas do expoente γ e da posição da singularidade, μ , como podemos ver a seguir

$$F(z) = \frac{d}{dz} \log [f(z)] \sim \frac{\gamma}{\mu - z}, \quad (3.43)$$

onde $F(z)$ se torna uma função meromórfica à qual os teoremas de convergência podem ser aplicados. Portanto, resumindo o método, a ideia principal é aplicarmos PAs, não para a função $f(z)$, mas para a função $F(z)$, e, dada a estrutura desta, podemos realizar, inclusive, predições sobre a posição do polo, $z = \mu$, e o resíduo, $-\gamma$, que corresponde ao expoente da singularidade em $f(z)$.

A aproximação de $F(z)$ por um PA produz um aproximante para $f(z)$ que não é, necessariamente, uma função racional. Para sermos mais específicos, o aproximante DLog PA a $f(z)$ obtido a partir de P_N^M usado para aproximar $F(z)$, que denotamos $\text{Dlog}_N^M(z)$, é dado por

$$\text{Dlog}_N^M(z) = f_{\text{norm}}(0) e^{\int dz P_N^M(z)}, \quad (3.44)$$

onde $P_N^M(z)$ é o PA obtido para $F(z)$. Notemos que para obter a Eq. (3.44) precisamos aplicar o PA para a Eq. (3.40) e então inverter a operação, calculando a integral do PA e após isso, calcular o expoente neperiano desta integral. É importante ressaltarmos aqui que,

devido à derivada na Eq. (3.40), a constante $f_{\text{norm}}(0)$ é perdida e precisa ser reintroduzida de forma a normalizar apropriadamente o $\mathbb{D}\log_N^M(z)$. Na prática, o aproximante não-racional $\mathbb{D}\log_N^M(z)$ pode produzir uma rica estrutura analítica, em particular a presença de cortes no plano complexo — não necessariamente presentes na função $f(z)$ — é esperada.

Para o caso em que um ponto de ramificação é conhecido antecipadamente, pode-se construir o que chamamos de DLog PAs parciais. Estes aproximantes consistem no fato de formar um aproximante de Padé para

$$G(z) = (\mu - z) \frac{d}{dz} \log [f(z)], \quad (3.45)$$

onde μ é a posição conhecida do ponto de ramificação. Para este caso podemos escrever

$$G(z) = \frac{1}{A(z) + (\mu - z)^\gamma B(z)} \left[A'(z)(\mu - z) + \gamma A(z) + (\mu - z)^{\gamma+1} B'(z) \right], \quad (3.46)$$

portanto, próximo de $\mu = z$ temos

$$G(z) \sim \gamma, \quad (3.47)$$

ou seja, quando conhecemos a posição do corte, este é um ótimo método para prever o valor do expoente. O aproximante a $f(z)$ obtido por este procedimento será denotado $\mathbb{D}\log_N^M(z; \mu)$ e é dado por

$$\mathbb{D}\log_N^M(z, \mu) = f(0) e^{\int dz \frac{P_N^M(z)}{(\mu-z)}}. \quad (3.48)$$

Poderia ser levantada a questão de que na Eq. (3.47) não se supôs nada sobre γ . O método foi originalmente desenvolvido para ser usado na presença de pontos de ramificação, mas se γ é um inteiro este método funciona muito bem também.

Em resumo, os aproximantes de Padé $P_N^M(z)$ podem ser vistos como um procedimento econômico e completamente independente de modelo, pois todos os polos são deixados livres e nenhuma informação analítica sobre a estrutura singular da função precisa ser incluída. Eles são, contudo, caros em termos de coeficientes das séries. De maneira a acelerar a convergência, o uso de PPA's $\mathbb{P}_{N,K}^M$ melhora os resultados, mas requer conhecimento sobre as singularidades da função $f(z)$. Tais singularidades podem ser determinadas por PAs ou por informações externas.

Os aproximantes DLog Padés, por sua vez, oferecem a possibilidade de explorar a teoria de Padé para funções com múltiplos polos e cortes ao custo de perder, devido à derivada, o primeiro coeficiente de Taylor. Finalmente, os aproximantes de DLog Padés parciais, obtidos na Eq. (3.48), podem acelerar a convergência das previsões, em especial para casos em que a função apresenta cortes, mas requerem um conhecimento sobre a posição dos pontos singulares. Concluindo, para cada caso de interesse a estratégia a ser utilizada pode ser diferente, dependendo do problema em que se está trabalhando.

Resultados obtidos com sequências de PAs, PPA's Dlog PAs e Dlog PPA's podem ser vistos nas Referências (44, 59), e aqui nesta tese iremos focar em alguns dos métodos acima aplicados à série perturbativa da QCD nos decaimentos hadrônicos do lépton τ , bem como à sua transformada de Borel.

4 O LIMITE LARGE- β_0 DA QCD

Um bom laboratório para estudos de teoria de perturbação em ordens altas é o chamado limite large- β_0 da QCD. Neste limite, a transformada de Borel da função de Adler é conhecida de forma fechada (71, 72) e pode-se comparar o resultado em teoria de perturbação obtido com o resultado verdadeiro. Neste capítulo iremos introduzir, como é também conhecido, o limite de grande número de sabores, estudar algumas propriedades e vantagens deste limite, bem como introduzir o conceito de renormalons em large- β_0 . Também estudaremos como obter a série perturbativa da transformada de Borel da função de Adler neste limite, veremos também algumas propriedades da função de Adler e da função $\delta^{(0)}$ e como os renormalons se comportam neste limite da QCD.

4.1 Definição

O limite large- β_0 é muito útil para os estudos de QCD, pois, neste limite, é possível calcular os coeficientes da série perturbativa em todas as ordens. Além disso, a transformada de Borel da função de Adler é conhecida de forma fechada, bem como a posição e a natureza das singularidades de todos os renormalons são conhecidas exatamente, portanto, é possível calcular também a soma de Borel desta série. Conhecendo-se todas essas propriedades, pode-se utilizar este limite como um modelo para aplicação e exploração de novos métodos antes de aplicá-los na QCD completa. Como se trata de uma teoria que apresenta a propriedade de liberdade assintótica (73), é comum utilizá-la como um laboratório para estudos de teoria de perturbação.

Pode-se obter o limite large- β_0 a partir do limite de grande número de sabores, N_f , porém, mantendo fixo o produto $N_f\alpha_s$. Em termos de diagramas de Feynman, as correções do tipo bolhas de $q\bar{q}$ ao propagador do glúon, que podem ser vistas na Figura 13, são de ordem um numericamente, por exemplo, se $N_f = 3$ e $\alpha_s(m_\tau^2) \sim 0.3$, temos que $N_f\alpha_s \sim 1$, logo essas correções devem ser somadas em todas as ordens de teoria de perturbação. Este propagador do glúon é usado para obter todas as correções dominantes em N_f em qualquer ordem de α_s para um dado observável. Ao final dos cálculos, N_f é substituído pelo primeiro coeficiente da função β^* , incorporando efetivamente um conjunto de contribuições não abelianas e fazendo com que este limite apresente características típicas da QCD, como é o caso da liberdade assintótica.

A partir de agora iremos detalhar o cálculo para obtenção da transformada de Borel da função de Adler em large- β_0 baseado na Referência. (71) Iremos começar calculando

* Na nossa definição, o primeiro coeficiente da função β é dado por β_1 , logo, faria mais sentido chamarmos este limite de large- β_1 , porém, preferimos utilizar o nome comumente conhecido na literatura.

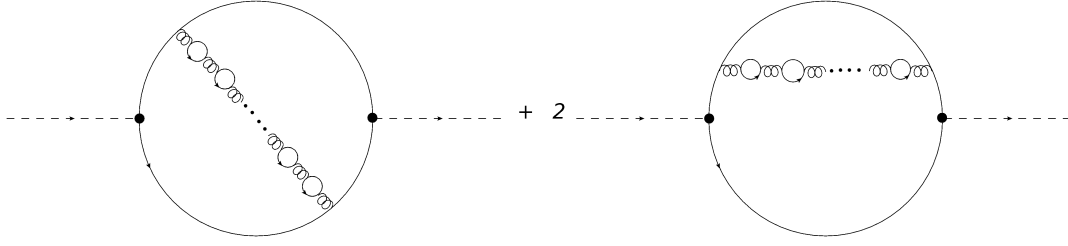


Figura 13 – Correções do tipo cadeia de bolhas de $q\bar{q}$ dominantes no limite large- β_0 da QCD.

Fonte: Elaborada pelo autor.

os resultados em teoria de perturbação a 1 e 2-loops utilizando o conceito de integrais mestras. (74) Esses resultados serão cruciais para o desenvolvimento que faremos nos capítulos subsequentes.

4.1.1 Resultado a 1-loop

Nossos cálculos serão feitos utilizando integrais mestras, que é a forma usual de se fazer cálculos em ordens altas. No caso do resultado a 1-loop, precisamos conhecer a integral $G_1(n_1, n_2)$ com dois propagadores, D_1 e D_2 , sem massa e com potências genéricas n_1 e n_2 . O principal resultado obtido no Apêndice A é o cálculo da integral a 1-loop utilizando os propagadores D_1 e D_2 e regularização dimensional dado pela Eq. (A.2) e que será reproduzido abaixo

$$\int \frac{d^d k}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i\pi^{d/2} (-q^2)^{d/2-n_1-n_2} G(n_1, n_2), \quad (4.1)$$

onde $D_1 = -(k+q)^2$, $D_2 = -k^2$ e

$$G_1(n_1, n_2) = \frac{\Gamma(n_1 + n_2 - d/2)\Gamma(d/2 - n_1)\Gamma(d/2 - n_2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(d - n_1 - n_2)}, \quad (4.2)$$

sendo Γ a função gama usual e o índice 1 relacionado com a correção a 1-loop. Dada a função de Adler definida pela Eq. (2.39), vamos calcular Π em ordem dominante (LO, do inglês *Leading Order*) através das regras de Feynman aplicadas ao diagrama da Figura 14 que representa a correção a 1-loop da QCD para os decaimentos hadrônicos do τ . Considerando uma corrente vetorial externa, temos que

$$i\Pi_1^{\mu\nu}(q) = (-1)\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left\{ [i\gamma^\nu \delta_{ab}] \left[i \frac{(\not{k} + \not{q})}{(k+q)^2} \right] [i\gamma^\mu \delta_{ba}] \left[i \frac{\not{k}}{k^2} \right] \right\}, \quad (4.3)$$

sendo a e b os índices de cor e μ o termo chamado de escala de renormalização. Esse termo é necessário para manter o acoplamento da teoria adimensional quando passamos para d dimensões. Notemos que q^2 é momento externo, k^2 é o momento interno do loop, $d = 4 - 2\epsilon$. Utilizando que $\delta_{ii} = N_c$, número de cores, chegamos em

$$i\Pi_1^{\mu\nu}(q) = -\frac{N_c \mu^{2\epsilon}}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{\text{Tr} \{ \gamma^\nu (\not{k} + \not{q}) \gamma^\mu \not{k} \}}{(k+q)^2 k^2}. \quad (4.4)$$

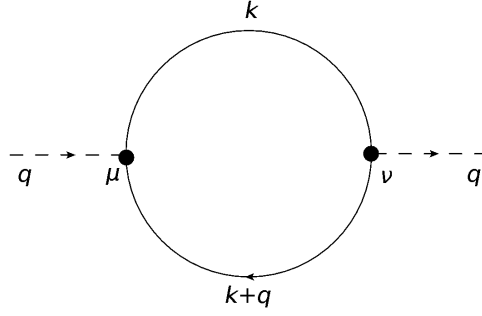


Figura 14 – Correções a 1-loop para uma corrente vetorial genérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a identidade de Ward, propriedades algébricas das matrizes γ e o cálculo de seus traços em d dimensões, utilizando que $(k \cdot q) = (D_2 - D_1 - q^2)/2$, e considerando somente os termos que contribuem para o cálculo de Π_1 , chegamos em

$$\Pi_1 = -2iN_c\mu^{2\epsilon}\frac{(2-d)}{(1-d)}\int d^d k \frac{1}{D_1 D_2}. \quad (4.5)$$

Agora, podemos utilizar a Eq. (4.2) com $n_1 = n_2 = 1$ para termos o resultado da integral de loop, o que nos fornece

$$\Pi_1 = -2iN_c\mu^{2\epsilon}\frac{(2-d)}{(1-d)}i\pi^{d/2-2}G_1(1,1). \quad (4.6)$$

Escrevendo em termos de ϵ , utilizando $s = q^2$, derivando Π_1 com relação a s e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ chegamos ao resultado da primeira correção à função de Adler dada por

$$D^{(1)}(s) = \frac{N_c}{12\pi^2}, \quad (4.7)$$

onde o índice (1) representa 1-loop. Notemos que nesta ordem não existe dependência com a energia, pois este termo é da ordem de α_s^0 . Ressaltamos aqui que este termo é o que foi subtraído na definição da função de Adler reduzida dada pela Eq. (2.41).

4.1.2 Correções a 2-loops: ordem α_s

Continuando com as correções em teoria de perturbação, existem dois diagramas que contribuem nesta ordem. O primeiro diagrama é o de auto-energia do quark, que pode ser visto na Figura 15, e pode ser encarado como um falso 2-loops já que é possível dividir esse cálculo em dois diagramas de 1-loop, como faremos abaixo, além disso, este diagrama contribui duas vezes para o cálculo da correção já que existem duas maneiras desse processo acontecer. O segundo diagrama, este sim envolvendo 2-loops genuínos, pode ser visto na Figura 16, e contribui apenas uma vez para os cálculos.

Aqui nesta seção utilizaremos outro resultado obtido no Apêndice A, que é a integral mestra de 2-loops com cinco propagadores sem massa na topologia, dado pela

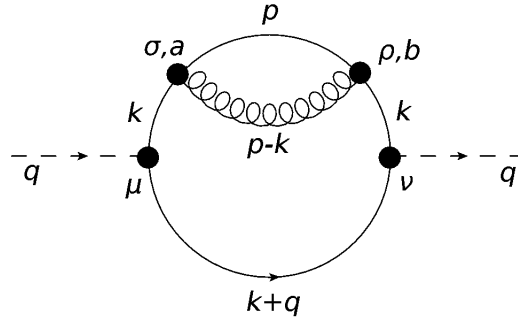


Figura 15 – Correção de 2-loops do tipo auto-energia do quark para uma corrente vetorial genérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Eq. (A.11) e que também será reproduzido abaixo

$$\int \frac{d^d k d^d p}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} = -\pi^d (-q^2)^{d-\sum_i n_i} G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5), \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} D_1 &= -(k+q)^2, & D_2 &= -(p+q)^2, \\ D_3 &= -k^2, & D_4 &= -p^2, \\ D_5 &= -(k-p)^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

e o índice da função G está relacionado com as correções a 2-loops. A Eq. (4.8) é o resultado obtido para a integral de 2-loops utilizando regularização dimensional.

Para iniciar os cálculos, vamos considerar primeiro o diagrama de auto-energia do quark, cujo índice será (b). Para realizarmos este cálculo vamos aplicar as regras de Feynman para o diagrama da Figura 15. Como já informamos anteriormente, esta correção é um “falso” 2-loops já que é possível separar em duas correções consecutivas a 1-loop. Aplicando as regras de Feynman, obtemos

$$i\Pi_{2,b}^{\mu\nu} = \frac{ig_s^2 \mu^{4\epsilon}}{(2\pi)^{2d}} \text{Tr} \{t^a t^b \delta^{ab}\} \int d^d k d^d p \frac{\text{Tr} \{ \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\sigma \not{p} \gamma_\sigma \not{k} \}}{(k+q)^2 k^2 p^2 k^2 (p-k)^2}. \quad (4.10)$$

Notemos pela Eq. (4.10) que é possível separar as integrais em p e k . Como consequência da identidade de Ward podemos escrever o correlator como $\Pi^{\mu\nu} = (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \Pi$. Multiplicando os dois lados da Eq. por $g^{\mu\nu}$ e fazendo as contrações para os índices podemos escrever

$$\Pi_{2,b} = \frac{g_s^2 \mu^{4\epsilon} \text{Tr} \{t^a t^b \delta^{ab}\}}{(2\pi)^{2d} q^2 (1-d)} \int d^d k \frac{1}{(k+q)^2 k^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{k} + \not{q} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\sigma \gamma_\sigma) \left[\int d^d p \frac{p^\rho}{p^2 (p-k)^2} \right] \gamma_\sigma \not{k} \right\}. \quad (4.11)$$

Realizando primeiro a integral em p utilizando o método da regularização dimensional e da rotação de Wick ficamos com um resultado que depende somente de k . Aqui ressaltamos

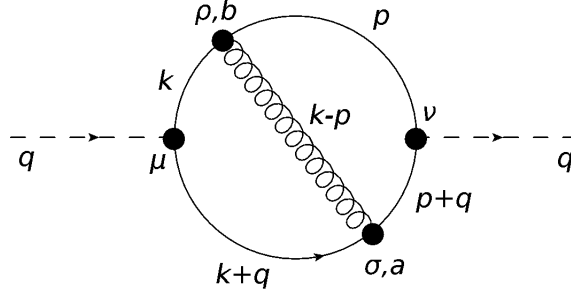


Figura 16 – Correção de “verdadeiro” 2-loops para uma corrente vetorial genérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

que essa integral pode também ser calculada pelo método das integrais mestras a 1-loop e seu resultado poder ser escrito em função de G_1 . O segundo passo é realizar a integral na variável restante que pode ser calculada utilizando a Eq. (4.2). A contribuição proveniente do espaço de cor é dada por

$$\text{Tr} \{t^a t^b \delta^{ab}\} = T_F \delta^{aa} = \frac{(N_C^2 - 1)}{2}, \quad (4.12)$$

onde $N_C = 3$ mas aqui vamos manter como um parâmetro até o resultado final. Finalmente, usando $d = 4 - 2\epsilon$, $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ e $q^2 = s$, e expandindo em torno $\epsilon = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{2,b} = \frac{N_C \alpha_s}{72\pi^3} \left[-\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{25}{6} + 2\gamma_E - 2\log(4\pi) + 2\log(-s/\mu^2) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{25}{3} - 12\gamma_E + 4\log(4\pi) \right) \log(-s/\mu^2) - 2(\log(-s/\mu^2))^2 + (\text{cte}) \right] + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde $\gamma_E \approx 0,5772$ é a constante de Euler-Mascheroni. Notemos aqui que o termo (cte) não foi explicitado, pois este termo não é relevante quando tomamos a derivada para o cálculo da função de Adler. Podemos ver na Eq. (4.13) o fator divergente proporcional a $1/\epsilon$ e $1/\epsilon^2$, que surge ao aplicarmos regularização dimensional.

Agora, vamos calcular a contribuição relacionada com o diagrama de 2-loops verdadeiros, que pode ser visualizado na Figura 16. Seguindo o mesmo procedimento, aplicamos as regras de Feynman ao respectivo diagrama e obtemos o seguinte

$$i\Pi_{2,a}^{\mu\nu} = \frac{i\mu^{4\epsilon} g_s^2}{(2\pi)^{2d}} \text{Tr} \{t^a t^b \delta^{ab}\} \int d^d k d^d p \frac{\text{Tr} \{ \gamma^\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\sigma (\not{k} + \not{q}) \gamma^\mu \not{k} \gamma_\sigma \not{p} \}}{(p+q)^2 (k+q)^2 k^2 p^2 (p-k)^2}. \quad (4.14)$$

Notemos que, dessa vez, é impossível calcular a integral em p ou k nos moldes de 1-loop uma vez que essas integrais não se desacoplam devido ao termo $(p-k)^2$, conseqüentemente, é necessário utilizar novas técnicas para realizar este cálculo. Para isso, vamos utilizar o método das integrais mestras com cinco propagadores sem massa, introduzidos no Apêndice A e replicado aqui pela Eq. (4.8).

É possível escrever os produtos escalares entre os momentos da Eq. (4.14) em função dos D_i 's, com $i = 1, \dots, 5$, como

$$\begin{aligned}(k \cdot q) &= \frac{D_3 - D_1 - q^2}{2}, \\(p \cdot q) &= \frac{D_4 - D_2 - q^2}{2}, \\(k \cdot p) &= \frac{D_5 - D_3 - D_4}{2}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Utilizando a identidade de Ward, calculando o traço da Eq. (4.14) e escrevendo o numerador e denominador da integral em função de D_i 's, temos

$$\Pi_{2,a} = \frac{-4\mu^{2\epsilon}g_s^2(d-2)}{(2\pi)^{2d}q^2(1-d)} \text{Tr} [t^a t^b \delta^{ab}] \int d^d k d^d p \frac{N}{D},\tag{4.16}$$

sendo

$$\begin{aligned}N &= q^2(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) + \left(\frac{d}{2} - 2\right)(D_1 D_4 + D_2 D_3) + q^2 \left(\frac{d}{2} - 4\right) D_5 + D_5^2 + q^4, \\D &= -D_1 D_2 D_3 D_4 D_5.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Notemos que, no numerador, retemos somente os fatores que contribuem para o cálculo de $\Pi_{2,a}$. Definindo $I \equiv \int d^d k d^d p N/D$ vamos explicitar o cálculo desta integral. Substituindo a Eq. (4.17) na Eq. (4.16) e evidenciando as diferentes contribuições, obtemos

$$\begin{aligned}I &= -q^2 \int d^d k d^d p \left(\frac{1}{D_2 D_3 D_4 D_5} + \frac{1}{D_1 D_3 D_4 D_5} + \frac{1}{D_1 D_2 D_4 D_5} + \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_5} \right) - \\&\quad - \left(\frac{d}{2} - 2\right) \int d^d k d^d p \left(\frac{1}{D_2 D_3 D_5} + \frac{1}{D_1 D_4 D_5} \right) - \\&\quad - q^2 \left(\frac{d}{2} - 4\right) \int d^d k d^d p \left(\frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4} \right) - \\&\quad - q^4 \int d^d k d^d p \left(\frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4 D_5} \right) - \\&\quad - \int d^d k d^d p \left(\frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^{-1}} \right).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Utilizando o método das integrais mestras resumido na Eq. (4.8) podemos escrever o resultado da integral I como função de G a 2-loops, logo, temos

$$\begin{aligned}I &= -\pi^d (-q^2)^{d-3} \left\{ [G_2(0, 1, 1, 1, 1) + G_2(1, 0, 1, 1, 1) + G_2(1, 1, 0, 1, 1) + G_2(1, 1, 1, 0, 1)] + \right. \\&\quad + \left(\frac{d}{2} - 2\right) [G_2(0, 1, 1, 0, 1) + G_2(1, 0, 0, 1, 1)] - \\&\quad - \left(\frac{d}{2} - 4\right) G_2(1, 1, 1, 1, 0) + \\&\quad + G_2(1, 1, 1, 1, 1) + \\&\quad \left. + G_2(1, 1, 1, 1, -1) \right\}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Baseado nas propriedades da função G_2 explicitadas no Apêndice A, em alguns casos, em especial nos casos que aparecem na Eq. (4.19), é possível escrever a função G_2 em função de G_1 , como vemos abaixo [†]

$$\begin{aligned}
G_2(0, 1, 1, 1, 1) &= G_2(1, 0, 1, 1, 1) = G_2(1, 1, 0, 1, 1) = G_2(1, 1, 1, 0, 1) = G_1(1, 1)G_1(1, 3 - d/2), \\
G_2(0, 1, 1, 0, 1) &= G_2(1, 0, 0, 1, 1) = G_1(1, 1)G_1(1, 2 - d/2), \\
G_2(1, 1, 1, 1, 0) &= G_1(1, 1)G_1(1, 1), \\
G_2(1, 1, 1, 1, 1) &= \frac{2}{d-4}G_1(1, 1)[G_1(2, 1) - G_1(2, 3 - d/2)], \\
G_2(1, 1, 1, 1, -1) &= -\frac{1}{2}G_1(1, 1)G_1(1, 1).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Substituindo os resultados obtidos na Eq. (4.20) na Eq. (4.16), utilizando, novamente, que $d = 4 - 2\epsilon$, $q^2 = s$, $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ e expandindo o resultado em torno de $\epsilon = 0$, chegamos na seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\Pi_{2,a} &= \frac{N_C \alpha_s}{36\pi^3} \left[\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{17}{3} - 2\gamma_E + 2\log(4\pi) - 2\log(-s/\mu^2) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{34}{3} + 4\gamma_E - 4\log(4\pi) \right) \log(-s/\mu^2) + 2 \left(\log(-s/\mu^2) \right)^2 + (\text{cte}) \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Notemos que, novamente, temos termos proporcionais a $1/\epsilon^2$ e $1/\epsilon$ e, além disso, de novo não explicitamos o termo (cte) pelo mesmo motivo citado anteriormente.

Para chegarmos ao resultado final, é necessário somar as contribuições obtidas nas Eqs. (4.13) e (4.21) da seguinte forma

$$\Pi_2 = \Pi_{2,a} + 2\Pi_{2,b}. \tag{4.22}$$

Logo, realizando a soma, vemos que vários termos são cancelados e ficamos apenas com o seguinte resultado

$$\Pi_2 = \frac{N_C}{24\pi^2} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \left[\frac{1}{\epsilon} - 2\log(-s/\mu^2) + (\text{cte}) \right] + \mathcal{O}(\epsilon), \tag{4.23}$$

onde a divergência da integral foi parametrizada pelo termo ϵ . Notemos que ao somar as Eqs. (4.13) e (4.21) os termos proporcionais a $1/\epsilon^2$ e termos proporcionais a $\log(-s/\mu^2)/\epsilon$ são cancelados exatamente, portanto, nenhum termo divergente na Eq. (4.23) depende de s . Podemos, então, calcular a função de Adler a 2-loops e ela será finita, assim como a parte imaginária do correlator, que vem do logaritmo. Novamente, derivando Π_2 e multiplicando e dividindo o resultado por $N_c = 3$, chegamos em

$$D^{(2)}(s) = \frac{N_c}{12\pi^2} \frac{\alpha_s}{\pi}. \tag{4.24}$$

[†] Mais detalhes sobre a relação entre G_1 e G_2 podem ser vistos no Apêndice A e na Referência. (74)

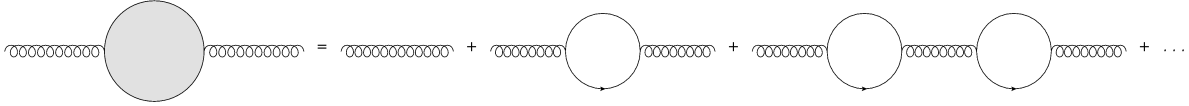


Figura 17 – Cadeia infinita de correções de bolhas de férmions ao propagador do glúon.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, utilizando as Eqs. (4.7) e (4.24) podemos escrever a função de Adler como uma série no acoplamento forte:

$$D(s) = \frac{N_c}{12\pi^2} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right). \quad (4.25)$$

Os dois primeiros termos são resultados muito conhecidos na literatura. Vários dos cálculos utilizados até aqui irão aparecer novamente nos cálculos da determinação do limite large- β_0 , que faremos a seguir, em especial a Eq. (4.18) aparecerá de forma um pouco mais generalizada.

4.1.3 Cálculo do limite large- β_0

A partir de agora iremos calcular os termos de ordens mais altas da função de Adler no limite large- β_0 da QCD. Na prática, o que faremos é substituir o propagador do glúon nos cálculos a 2-loops, que podem ser observados nas Figuras 15 e 16, pela transformada de Borel de uma cadeia infinita de correções de bolhas de férmions que pode ser observada na Figura 17. O cálculo envolvendo diagramas mostrados na Figura 17 são análogos aos cálculos de correções a 2-loops com algumas modificações, em especial na potência do propagador do glúon.

Para começar vamos reescrever o propagador do glúon de forma a incluir a cadeia infinita de correções de bolhas de férmions. Cada vértice contribui com $\alpha_s N_f$ onde, neste limite, considera-se $\alpha_s n_f \sim \mathcal{O}(1)$. Na escala de energia em que estamos trabalhando, $\alpha_s \sim 0,3$, portanto, como $N_f = 3$, o produto das grandezas é de fato da ordem de 1. Com esta contagem de potências precisamos incluir todas as ordens neste limite, já que ordens mais altas não são suprimidas. Pela Figura 17 podemos ver que esse tipo de correção pode ser encarada como uma soma de infinitas bolhas de férmions onde o primeiro termo é o propagador do glúon livre, o segundo termo contém uma bolha de férmions, o terceiro termo contém duas bolhas de férmions, e assim por diante. Usando a identidade de Ward podemos escrever de maneira genérica o n -ésimo termo desta soma como

$$\frac{-i\delta^{ab}}{k^2} \left[g_{\sigma\rho} - \frac{k_\sigma k_\rho}{k^2} \right] \left(-\Pi_1(k^2) \right)^n, \quad (4.26)$$

onde $\Pi_1(k^2)$ é a correção a 1-loop do propagador do glúon. Notemos que, como esperado, para $n = 0$ obtemos o propagador do glúon livre. Para $n = 1$ temos um termo de bolha fermiônica, para $n = 2$, dois termos de bolha fermiônica, e assim por diante. Logo, podemos

escrever o propagador do glúon no limite large- β_0 como

$$\begin{aligned} D_{\sigma\rho}^{ab} &= \frac{-i\delta^{ab}}{k^2} \left[g_{\sigma\rho} - \frac{k_\sigma k_\rho}{k^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\Pi_1(k^2) \right)^n \\ &= \frac{-i\delta^{ab}}{k^2} \left[g_{\sigma\rho} - \frac{k_\sigma k_\rho}{k^2} \right] \frac{1}{1 + \Pi_1(k^2)}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde utilizamos a propriedade da série geométrica para realizar a soma em n . Finalmente, reduzimos nosso problema ao cálculo da correção de 1-loop fermiônico ao propagador do glúon.

Seguindo os mesmos métodos utilizados na Seção 4.1.1 vamos calcular a correção a 1-loop. A única diferença aqui são as constantes que se modificam devido ao vértice glúon-quark-antiquark. Aplicando o método da função G chegamos em

$$\Pi_1(k^2) \approx \beta_{0f}\alpha_s \left[\frac{5}{3} - \log\left(\frac{-k^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) \right], \quad (4.28)$$

onde $\beta_{0f} \equiv N_f T_F / (3\pi)$, denominada de contribuição fermiônica de β_0 . Agora que o termo divergente foi devidamente evidenciado, podemos escrever a correção de bolha fermiônica renormalizada como

$$\Pi_1(k^2) = -\beta_{0f}\alpha_s \left[\log\left(\frac{-k^2}{\mu^2}\right) + C \right] = -\beta_{0f}\alpha_s \log\left(\frac{-k^2 e^C}{\mu^2}\right), \quad (4.29)$$

onde C é uma constante associada ao esquema de renormalização utilizada e que, no $\overline{\text{MS}}$, tem o valor de $5/3$. Notemos, como esperado, que a correção a 1-loop é proporcional a $N_f\alpha_s \sim 1$, ou seja, precisamos considerar todas as correções, pois estas não são suprimidas conforme aumentamos a ordem de n na Eq. (4.27).

O próximo passo é incluir o propagador do glúon no limite large- β_0 dado pela Eq. (4.27) nas equações de Π_2 calculadas na Seção 4.1.2. Inserindo este propagador nas Eqs. (4.10) e (4.14), usando a identidade de Ward, e a regularização dimensional podemos escrever Π_{2,β_0} como

$$\begin{aligned} \Pi_{2,\beta_0} &= \frac{g_s^2 \text{Tr}\{t^a t^b \delta^{ab} \mu^{4\epsilon}\}}{(2\pi)^{2d} q^2 (1-d)} \int d^d k d^d p \left\{ \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\sigma (\not{k} + \not{q}) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\rho \not{p}}{(p+q)^2 (k+q)^2 k^2 p^2} \frac{1}{(k-p)^2} \times \right. \right. \\ &\quad \times \left[g_{\sigma\rho} - \frac{(k-p)_\sigma (k-p)_\rho}{(k-p)^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\Pi_1((k-p)^2) \right]^n \left. \right\} + \\ &\quad + 2 \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{k} + \not{q}) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\rho \not{k}}{(k+q)^2 k^2 p^2 k^2} \frac{1}{(k-p)^2} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left[g_{\sigma\rho} - \frac{(k-p)_\sigma (k-p)_\rho}{(k-p)^2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\Pi_1((k-p)^2) \right]^n \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nosso principal objetivo é calcular a transformada de Borel da função de Adler reduzida, $B[\widehat{D}](t)$, no limite large- β_0 . Utilizando a Eq. (2.39) podemos escrever a função de Adler

reduzida neste limite como

$$\widehat{D} = -\frac{12\pi^2}{N_c} q^2 \frac{d\Pi_{2,\beta_0}}{dq^2}. \quad (4.31)$$

Usando a definição de α_s e substituindo a Eq. (4.29) na Eq. (4.30), podemos escrever

$$\Pi_{2,\beta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(q^2) \alpha_s^{n+1}, \quad (4.32)$$

onde

$$\begin{aligned} r_n(q^2) \equiv & \frac{4\pi\mu^{4\epsilon} \text{Tr}\{t^a t^b \delta^{ab}\}}{(2\pi)^{2d} q^2 (1-d)} \int d^d p d^d k \times \\ & \times \left\{ \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\sigma (\not{K} + \not{q}) \gamma^\mu \not{K} \gamma^\rho \not{p}}{(p+q)^2 (k+q)^2 k^2 p^2 (k-p)^2} \left[g_{\sigma\rho} - \frac{(k-p)_\sigma (k-p)_\rho}{(k-p)^2} \right] \right\} + \right. \\ & \left. + 2 \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{K} + \not{q}) \gamma^\mu \not{K} \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\rho \not{K}}{(k+q)^2 k^2 p^2 k^2 (k-p)^2} \left[g_{\sigma\rho} - \frac{(k-p)_\sigma (k-p)_\rho + \rho}{(k-p)^2} \right] \right\} \right\} \times \\ & \times \log \left(\frac{-(k-p)^2 e^C}{\mu^2} \right)^n \beta_{0f}^n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Notemos que toda a dependência com a energia está contida no termo $r_n(q^2)$, logo, podemos escrever a função de Adler reduzida como uma série em α_s da seguinte forma

$$\widehat{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-12\pi^2}{N_c} q^2 \frac{dr_n(q^2)}{dq^2} \alpha_s^{n+1}. \quad (4.34)$$

Usando a definição da Transformada de Borel dada pela Eq. (3.13) e usando o fato de que a derivada em q^2 não depende de n , podemos escrever a transformada de Borel da função de Adler reduzida no limite large- β_0 como

$$B[\widehat{D}](t) = \frac{-12\pi^2}{N_c} q^2 \frac{d}{dq^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n(q^2)}{n!} t^n \right]. \quad (4.35)$$

Aqui temos apenas um único termo dependente de n na Eq. (4.33), que envolve um logaritmo dos momentos que estão sendo integrados e a parte fermiônica do termo β_0 . Realizando a somatória, chegamos em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log \left(\frac{-(k-p)^2 e^C}{\mu^2} \right)^n \frac{u^n}{n!} = \left(\frac{-(k-p)^2 e^C}{\mu^2} \right)^u, \quad (4.36)$$

onde definimos $u = \beta_{0f} t$. Logo, utilizando as Eqs. (4.33), (4.35) e (4.36) podemos escrever a transformada de Borel desejada em função das integrais das energias internas, como a seguir

$$\begin{aligned} B[\widehat{D}](t) = & \frac{-12\pi^2}{N_c} q^2 \frac{d}{dq^2} \left\{ \frac{4\pi\mu^{4\epsilon} \text{Tr}\{t^a t^b \delta^{ab}\}}{(2\pi)^{2d} q^2 (1-d)} \right\} \left(\frac{e^C}{\mu^2} \right)^u \int d^d p d^d k (-k-p)^2{}^u \times \\ & \times \left\{ \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\sigma (\not{K} + \not{q}) \gamma^\mu \not{K} \gamma^\rho \not{p}}{(p+q)^2 (k+q)^2 k^2 p^2 (k-p)^2} \left[g_{\sigma\rho} - \frac{(k-p)_\sigma (k-p)_\rho}{(k-p)^2} \right] \right\} \right\} \times \\ & \times 2 \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{K} + \not{q}) \gamma^\mu \not{K} \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\rho \not{K}}{(k+q)^2 k^2 p^2 k^2 (k-p)^2} \left[g_{\sigma\rho} - \frac{(k-p)_\sigma (k-p)_\rho}{(k-p)^2} \right] \right\} \}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Finalmente, reduzimos nosso problema ao cálculo das integrais acima. Aqui, é importante ressaltar que os únicos termos que irão contribuir para nosso resultado final são o termos proporcionais a $g_{\sigma\rho}$, já que os outros dois termos se cancelam mutuamente.

Portanto, as integrais que precisamos calcular são dadas por

$$\begin{aligned} I_1(q^2) &\equiv \int d^d p d^d k \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\sigma (\not{k} + \not{q}) \gamma^\mu \not{k} \gamma_\sigma \not{p} \} (-k-p)^2{}^u}{(p+q)^2 (k+q)^2 k^2 p^2 (k-p)^2}, \\ I_2(q^2) &\equiv \int d^d p d^d k \frac{\text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{k} + \not{q}) \gamma^\mu \not{k} \gamma^\sigma \not{p} \gamma_\sigma \not{k} \} (-k-p)^2{}^u}{(k+q)^2 k^4 p^2 (k-p)^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Para prosseguirmos com os cálculos destas integrais, iremos utilizar o mesmo método das integrais mestras e da função G_2 que foi utilizado na Seção 4.1.2. Resumindo, calculando o traço, considerando apenas os termos que irão contribuir com a integral, usando as definições para os D_i 's, $i = 1, \dots, 5$, já utilizadas na seção anterior, bem como as definições para os produtos escalares, chegamos no seguinte resultado

$$\begin{aligned} I_1(q^2) &= (16 - 12d + 2d^2)(-\pi^d)(-q^2)^{d-3+u} 2G_2(0, 1, 1, 0, 1-u) + \\ &+ (8 - 4d)(-\pi^d)(-q^2)^{d-3+u} 4G_2(0, 1, 1, 1, -u) + \\ &+ (8 - 4d)(-\pi^d)(-q^2)^{d-3+u} 4G_2(0, 1, 1, 1, 1-u) + \\ &+ (-q^2)(-32 + 20d - 2d^2) \int d^d p d^d k \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^{-u}} + \\ &+ (-q^2)^2(-8 + 4d) \int d^d p d^d k \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^{1-u}} + \\ &+ (-8 + 4d) \int d^d p d^d k \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4 D_5^{-1-u}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Notemos que a integral acima é praticamente idêntica à integral da Eq. (4.18), onde a única diferença se encontra no expoente de D_5 , o que era esperado, uma vez que somente foram adicionadas bolhas de $q\bar{q}$ ao propagador do glúon e este termo está justamente relacionado esse propagador. Prosseguindo, os resultados para as funções G_2 podem ser obtidos generalizando alguns dos resultados da Eq. (4.20), logo, obtemos

$$\begin{aligned} G_2(0, 1, 1, 0, 1-u) &= G_1(1, 1-u)G_1(1, 2-u-d/2), \\ G_2(0, 1, 1, 1, -u) &= G_1(1, -u)G_1(1, 2-u-d/2), \\ G_2(0, 1, 1, 1, 1-u) &= G_1(1, 1-u)G_1(1, 3-u-d/2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Porém, as integrais da Eq. (4.39) que contém todos os D_i 's não são facilmente escritas em termos da função G_1 , pois agora a potência do propagador do glúon não é um número inteiro. Essas integrais podem ser calculadas utilizando o método dos polinômios de Gegenbauer (75), e, no limite de quatro dimensões, $d \rightarrow 4$, estas podem ser expressas em termos de uma dupla somatória.

A integral $I_2(q^2)$ pode ser convenientemente dividida em três integrais de 1-loop, logo, usando uma mistura do método das integrais mestras a 1-loop com os métodos

tradicionais usando regularização dimensional, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
I_2(q^2) = & 2(d-2)^2(-\pi^d)(-q^2)^{d-3+u} \left\{ - \left[G_1(1, -u)G_1(1, 2-u-d/2) + \right. \right. \\
& + G_1(1, 1-u)G_1(1, 2-u-d/2) - G_1(1, 1-u)G_1(1, 2-u-d/2) \\
& \left. \left. - G_1(1, 1-u)G_1(1, 3-u-d/2) \right] + \left[G_1(1, -u)G_1(1, 2-u-d/2) - \right. \right. \\
& \left. \left. - G_1(1, 1-u)G_1(1, 2-u-d/2) \right] - \frac{\Gamma(2-u-d/2)\Gamma(d/2)\Gamma(-1+d/2+u)}{\Gamma(1-u)\Gamma(-1+d+u)} \times \right. \\
& \left. \times G_1(1, 2-u-d/2) + G_1(1, 3-u-d/2) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

A expressão final é obtida substituindo os resultados das Eqs. (4.39) e (4.41) na Eq. (4.37). Porém, aqui precisamos lembrar que para finalizar o cálculo é necessário fazermos $u \rightarrow -u$, processo chamado de *non-abelianization*. (73) Esta troca, na prática, significa substituir a parte fermiônica do primeiro coeficiente da função β , β_{0f} , pelo coeficiente β_0 completo, inserindo neste limite termos relacionados com a interação colorida. Este processo inverte todos os polos UV e IR e, agora, a teoria possui a característica de liberdade assintótica, tornando-se interessante para os estudos de QCD.

Notemos que, se tomarmos o limite $u \rightarrow 0$, retomamos o resultado de correções a 2-loops obtidos na Seção 4.1.2, como esperado, já que anulamos todas as contribuições vindas das bolhas fermiônicas. Tomando o limite $d \rightarrow 4$, podemos escrever o resultado final como

$$B[\widehat{D}](u) = \frac{2}{3\pi} e^{-uC} \left(\frac{-s}{\mu^2} \right)^{-u} \left[4 \frac{3-4u+2u^2}{u(1-u)^2(2-u)^2} - u(H(u-1) + H(u+1) + 2H(u)) \right], \tag{4.42}$$

onde $H(u)$ é a somatória dupla definida como (71)

$$\begin{aligned}
H(u) = & \frac{2}{\pi} \sin(\pi(u-1)) \frac{\Gamma(2-u)}{\Gamma(u)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{\Gamma(l+u)}{\Gamma(l+2)} \frac{\Gamma(k-1+u)}{\Gamma(k+1)} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{(l-k+u)(l+u)} + \frac{1}{(l+1)(l+u)} + \frac{1}{(l+1)(l-k+2-u)} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Esta soma apresenta um número infinito de polos duplos e simples para $u = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Aqui ressaltamos que o cálculo foi realizado seguindo os passos do artigo original de M. Beneke. (71) Ainda é possível reduzir o resultado acima escrevendo tudo em termos de apenas uma somatória. Utilizando a prescrição $\mu^2 = -s = Q^2$ e uma definição mais apropriada para a constante C , D. J. Broadhurst, conseguiu ir além e escrever o resultado de maneira bastante concisa e impressionante e que se tornou o resultado central para o limite large- β_0 , resultado este dado por (72)

$$B[\widehat{D}](u) = \frac{32}{3\pi} \frac{e^{(C+5/3)u}}{(2-u)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{[k^2 - (1-u)^2]^2}. \tag{4.44}$$

Notemos agora que o esquema $\overline{\text{MS}}$ é obtido para $C = 0$. O resultado da Eq. (4.44) é o resultado clássico da transformada de Borel da função de Adler e serve como uma função geradora da série em α_s da função de Adler neste limite, dada por

$$\widehat{D}(a_Q) = a_Q + 1,556a_Q^2 + 15,71a_Q^3 + 24,83a_Q^4 + 787,8a_Q^5 - 1991a_Q^6 + \dots, \quad (4.45)$$

que é uma série no acoplamento da teoria no esquema $\overline{\text{MS}}$.

Os polos IR e UV que aparecem na Eq. (4.44) são denominados, neste caso, renôrmalons, pois estão diretamente ligados com a divergência da teoria, além de virem de um dos tipos de diagramas que renôrmalons aparecem. Todos os polos são duplos, com a única exceção do polo dominante IR em $u = 2$ que é simples e está relacionado com o condensado de glúons, como veremos na seção a seguir. Notemos que a transformada de Borel da função de Adler é uma função meromórfica, mas é importante notarmos também que ela não é do tipo Stieltjes, que pode ser provado pelo cálculo das condições necessárias determinantes para uma função ser do tipo Stieltjes (34,36) — e pode ser facilmente visto pela alternância de sinal da contribuição dos diferentes renôrmalons.

Prosseguindo com as principais propriedades do limite large- β_0 , podemos calcular a transformada de Borel da função $\delta^{(0)}$ para FOPT, $B[\delta^{(0)}]$. Para realizar este cálculo inserimos as Eqs. (3.12) e (4.44) dentro da Eq. (2.40). A integral de contorno pode ser realizada usando a evolução de α_s a 1-loop e, utilizando o momento cinemático para os decaimentos do τ , obtemos

$$B[\delta^{(0)}](u) = \frac{12}{(1-u)(3-u)(4-u)} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} B[\widehat{D}](u). \quad (4.46)$$

A estrutura analítica desta última transformada de Borel é muito mais simples que a estrutura de $B[\widehat{D}](u)$. Agora, todos os polos UV são polos simples, por causa dos zeros de $\sin(\pi u)$. Pela mesma razão, o polo dominante IR de $B[\widehat{D}](u)$, em $u = 2$, que é simples em large- β_0 , é cancelado em $B[\delta^{(0)}](u)$ — um resultado apontado primeiro pelas Referências (43,76) para a transformada de Borel da função espectral. Também notamos que o polo dominante UV possui um resíduo cerca de dez vezes menor do que sua contraparte da função de Adler. Isto, juntamente com um aumento do resíduo do polo duplo em $u = 3$, posterga a alternância de sinal da série, que começa a acontecer na décima ordem no esquema $\overline{\text{MS}}$.

A série para $\delta^{(0)}$ usando a prescrição FOPT e no limite large- β_0 é dada por

$$\delta_{\text{FO}}^{(0)}(a_Q) = a_Q + 5,119a_Q^2 + 28,78a_Q^3 + 156,7a_Q^4 + 900,8a_Q^5 + 4867a_Q^6 + \dots \quad (4.47)$$

Podemos comparar este resultado com a Eq. (2.49). Agora, a alternância de sinal dos coeficientes é postergada e se instala apenas na 9ª ordem por causa da supressão do polo dominante UV na Eq. (4.46). Em comparação com os resultados da QCD completa, o limite large- β_0 é uma boa aproximação, no caso da função de Adler, apenas até o termo

α_s^2 . Contudo, para $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$, esta aproximação continua boa até o último termo conhecido, α_s^4 . A razão para esta melhor concordância está no fato de que estes coeficientes dependem também dos coeficientes da função β — que são amplamente dominados por β_1 na QCD.

Na próxima seção, iremos focar em estudar mais detalhes sobre os renômalons e suas conexões com física não-perturbativa no limite large- β_0 da QCD.

4.2 Renômalons em large- β_0

Seguindo no contexto de large- β_0 , aqui vamos focar nos estudos dos renômalons, enfatizando suas propriedades, importância e ligação com física não-perturbativa. Considerando a Eq. (4.44) e a Seção 3.2 iremos um pouco mais afundo neste conceito que está diretamente relacionado com a expansão perturbativa da função de Adler e, conseqüentemente, das correções perturbativas da QCD, representadas pela função $\delta^{(0)}$.

Os renômalons (26), como são conhecidos na literatura, são fontes de divergência em QFTs que são devidas as regiões de alto ou baixo momento em um diagrama de loop. Eles aparecem como singularidades na transformada de Borel, como pode ser visto na Eq. (4.44), e são uma consequência do fato de um diagrama simples contribuir com $n!$ em ordem n para a amplitude do processo a ser calculado. Um exemplo, visto na seção anterior, é aquele em que o propagador do glúon é corrigido por uma cadeia de loops fermiônicos, como pode ser observado na Figura 17.

Para estudarmos as diferentes regiões de momentos vamos considerar as correções dadas pelo diagrama da Figura 13. Considerando os decaimentos hadrônicos do τ e utilizando o limite large- β_0 da QCD podemos escrever a função de Adler da seguinte maneira,

$$D(Q^2) = \int \frac{dk_E^2}{k_E^2} f(k_E^2, Q^2) \alpha_s(k_E^2 e^{-5/3}), \quad (4.48)$$

onde $k_E^2 = -k^2$ é o momento Euclidiano, $f(k_E^2, Q^2)$ é a função de distribuição de momentos de loop independente do esquema de renormalização cuja expressão completa, primeiro determinada por M. Neubert, pode ser vista na Ref. (77) e Q^2 é o momento externo. Além disso, supomos o limite quiral, onde as massas dos férmions são nulas, também fizemos o processo de *non-abelianization* e já utilizamos a evolução de α_s a 1-loop. Aqui, ressaltamos também que o termo $e^{-5/3}$ está relacionado com a escolha de C na Eq. (4.29), que para o esquema $\overline{\text{MS}}$ é zero. Notemos que a função $f(k_E^2, Q^2)$ pode ser obtida através da transformada de Borel da função de Adler dada pela Eq. (4.44).

Para analisarmos o comportamento da função de Adler nos limites de alta (UV) e baixa (IR) energia podemos escrever a função $f(k_E^2, Q^2)$ nestes limites. Utilizando os resultados de M. Neubert (77) para $f(k_E^2, Q^2)$ nos limites de alta e baixa energia, iremos seguir os passos da Referência (26) para calcular as contribuições dos renômalons nestes dois limites e poder conectar esses resultados com a forma fechada para a transformada

de Borel da função de Adler, Eq. (4.44). Portanto, temos

$$\begin{aligned} f_{\text{UV}}(k_E^2, Q^2) &= \frac{4}{9\pi} \frac{Q^2}{k_E^2} \left[\log \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) + \frac{5}{6} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{Q^4}{k_E^4} \log \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) \right), \\ f_{\text{IR}}(k_E^2, Q^2) &= \frac{1}{2\pi} \frac{k_E^4}{Q^4} + \mathcal{O} \left(\frac{k_E^6}{Q^6} \log \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Consideremos o primeiro termo (f_{UV}). Nosso intuito é calcular a transformada de Borel da função de Adler, $B[D]$, e analisar o conteúdo de renôrmalons associado a este limite. Para este cálculo, vamos substituir a Eq. (4.49) na Eq. (4.48), com isso, obtemos

$$D_{\text{UV}}(Q^2) = \int \frac{dk_E^2}{k_E^2} \frac{4}{9\pi} \left[\log \left(\frac{k_E^2}{Q^2} \right) + \frac{5}{6} \right] \alpha_s(k_E^2 e^{-5/3}). \quad (4.50)$$

Expandindo o acoplamento forte em série de potências, invertendo a ordem da somatória com a integral e integrando em k_E^2 , chegamos no seguinte resultado

$$D_{\text{UV}}(Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{9\pi} \left(\frac{-\beta_1}{2\pi} \right)^n n! \left(n + 1 + \frac{5}{6} \right) \alpha_s^{n+1}(Q^2). \quad (4.51)$$

Notemos, como esperado, que a expressão da Eq. (4.51) é proporcional a $n!$, fator este que aparece devido à cadeia de bolhas fermiônicas, como explicado anteriormente. Portanto, trata-se de uma série perturbativa que diverge fatorialmente e, como visto na Seção 3.2, uma forma de trabalhar com esse tipo de divergência é utilizando a transformada de Borel. Portanto, com auxílio da Eq. (3.13), é possível escrever

$$B[D_{\text{UV}}](u) = \frac{2}{27\pi} \left[\frac{11 + 5u}{(1 + u)^2} \right], \quad (4.52)$$

onde $u = \beta_1 t / (2\pi)$. Podemos ver que a primeira contribuição que aparece devida a contribuição de altas energias da integral da função de Adler é representada, na transformada de Borel, como um polo duplo em $u = -1$. Esse polo, conhecido na literatura como renôrmalon ultravioleta (UV), para o caso dos decaimentos hadrônicos do τ e também para o espalhamento e^+e^- em hádrons, é o polo mais próximo da origem, responsável pela série divergir alternando sinal, conforme vimos na Seção 3.2. Se considerarmos as próximas contribuições ultravioletas veremos que pólis duplos nas posições $u = -2, -3, -4, \dots$ irão aparecer, portanto, conseguimos estabelecer a relação entre a contribuição de altas energias e os renôrmalons no eixo real negativo de u .

Olhando para o outro extremo, para o caso de baixas energias, vamos seguir o mesmo procedimento usado no caso de altas energias. Substituindo a contribuição infravermelha da Eq. (4.49) na Eq. (4.48), expandindo o acoplamento forte em série de potências, invertendo a ordem da somatória com a integral e, novamente, integrando em k_E^2 , chegamos no seguinte resultado

$$D_{\text{IR}}(Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\beta_1}{4\pi} \right)^n n! \alpha_s^{n+1}(Q^2). \quad (4.53)$$

Novamente, obtemos uma expressão para a função de Adler que é proporcional a $n!$, como esperado, e trata-se de uma série perturbativa que diverge fatorialmente. Realizando a transformada de Borel a fim de eliminar a divergência fatorial, podemos escrever

$$B[D_{\text{IR}}](u) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(2-u)}. \quad (4.54)$$

Notemos que a primeira contribuição devida a região de baixas energias é refletida em um polo simples na posição $u = 2$, ou seja, no eixo real positivo. Essas singularidades, por estarem associadas a baixas energias, são chamadas de renôrmalons infravermelhos (IR). Se considerarmos as contribuições de ordens mais altas, teremos polos duplos nas posições em $u = 3, 4, 5, \dots$. Notemos a ausência do renôrmalon em $u = 1$, que está diretamente relacionada com correções de potência na OPE e discutiremos um pouco abaixo.

Para realizarmos essa discussão, é preciso primeiro estabelecer a conexão existente entre a série perturbativa da função de Adler em baixas energias, as posições dos renôrmalons e os termos da OPE de Wilson. Consideremos, portanto, a contribuição de um renôrmalon IR na posição $u = p$. Podemos, a partir da transformada de Borel, obter a série em α_s da função de Adler relativa a essa contribuição deste renôrmalon, que é dada por

$$D_{\text{IR}}(\alpha_s) = \sum_n n! \left(\frac{\beta_1}{2\pi} \right)^n \left(\frac{\alpha_s}{p} \right)^{n+1}. \quad (4.55)$$

Por se tratar de uma série assintótica, se truncarmos esta série no termo N , conforme discutido no Capítulo 3, teremos um erro associado a este truncamento da ordem de $e^{\frac{-2\pi|p|}{\beta_1\alpha_s}}$. Usando a evolução de α_s temos que o exponencial está diretamente associado ao parâmetro de escala da QCD como a seguir

$$e^{\frac{-2\pi|p|}{\beta_1\alpha_s}} \sim \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^p, \quad (4.56)$$

que são as correções de potências associadas a OPE de Wilson. Para o caso do primeiro renôrmalon IR, $p = 2$, temos uma contribuição da ordem $(\Lambda/Q)^4$, cuja dependência é a mesma observada do condensado de glúons da OPE, como podemos ver abaixo

$$D(Q^2) = C_0(Q^2/\mu^2) + \frac{1}{Q^4} \left[C_{GG}(Q^2/\mu^2) \langle 0 | G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} | 0 \rangle + C_{q\bar{q}}(Q^2/\mu^2) m_q \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \right] + \mathcal{O}(1/Q^6), \quad (4.57)$$

onde C_0 é relativo a contribuição perturbativa, C_{GG} é o coeficiente de Wilson relativo ao condensado de glúons e $C_{q\bar{q}}$ é relativo ao condensado de quarks. Notemos, porém, que estamos trabalhando no limite quiral, ou seja, as massas dos quarks são nulas, logo, não temos contribuição vinda do condensado de quarks e, por isso, não temos um polo em $u = 1$. Além disso, como já discutido no Capítulo 2, para o condensado de glúons, o termo C_{GG} pode ser considerado constante. Ressaltemos também que o renôrmalon na localização $u = 3$ estará associado à contribuição da OPE de ordem $1/Q^6$, e assim por diante.

Aqui, estabelecemos uma relação clara entre física perturbativa e não-perturbativa e vimos como os renormalons, em especial os infravermelhos, estão associados com termos da OPE de Wilson. Com o que foi estabelecido até sobre os renormalons, sua relação com a série perturbativa da função de Adler e suas principais propriedades no limite large- β_0 , no próximo Capítulo iremos apresentar os resultados obtidos aplicando os conhecimentos de PAs e DLog PAs, discutidos no Capítulo 3, a transformada de Borel da função de Adler e da função $\delta^{(0)}$. Além disso, no Capítulo 6, iremos utilizar as informações introduzidas nesta seção para generalizar e encontrar uma forma fechada da transformada de Borel da função $\delta^{(0)}$ para a QCD completa em função dos momentos utilizados na integral da função espectral.

5 RESULTADOS COM APROXIMANTES RACIONAIS

Neste capítulo iremos apresentar os resultados obtidos ao aplicarmos PAs e DLog PAs à função de Adler e à função $\delta^{(0)}$. Em um trabalho anterior ^{*}, realizamos um estudo sistemático sobre o uso de Aproximantes de Padé simples e parciais à transformada de Borel da série perturbativa da função de Adler para os decaimentos hadrônicos do τ , que pode ser visto na Referência. (59) Nesta seção, iremos revisar alguns destes resultados anteriores. Como estes resultados não se mostravam suficientemente precisos e estáveis, passamos a investigar métodos alternativos que pudessem levar a melhores resultados para a previsão da série em ordens altas. Em seguida passaremos a investigar a aplicação destes outros métodos, envolvendo os DLog PAs à transformada de Borel da função de Adler e também o uso de PAs diretamente na série em α_s da função $\delta^{(0)}$. Primeiro, estudaremos os métodos citados no limite large- β_0 da QCD e, logo em seguida, aplicaremos os mesmos na QCD completa. Os resultados apresentados nesta seção foram publicados na Referência. (44)

5.1 Resultados em large- β_0

Para entendermos os resultados que aparecerão aqui, primeiro vamos resumir os resultados obtidos na Referência. (59) No trabalho referido estudamos sistematicamente a aplicação de Aproximantes da Padé para o caso dos decaimentos hadrônicos do lépton τ , primeiro no limite large- β_0 e depois na QCD completa. A ideia sempre foi obter o melhor resultado possível utilizando apenas o que teremos disponível na QCD completa, que no caso são os quatro primeiros coeficientes da função de Adler, conhecidos exatamente. (17)

Estudamos sequências de PAs, em especial as sequências diagonais, P_N^N , e as sequências próximas às diagonais, P_{N+1}^N e P_N^{N+1} , em consonância com a teoria dos Padés. Observamos, para esses casos, que a aplicação dos Aproximantes de Padé para a transformada de Borel da função de Adler no esquema $\overline{\text{MS}}$ e no limite large- β_0 apresenta aparente convergência. Com seis ou sete coeficientes é possível reproduzir muito bem todos os principais aspectos da série original: os coeficientes de ordens mais altas, a soma de Borel, e até mesmo a posição dos renômalons dominantes. Há, entretanto, um ponto de atenção, pode acontecer que o próximo Padé em uma determinada sequência não melhore os resultados. A existência destas exceções à convergência é bem conhecida na teoria dos Padés e é possível mostrar, para alguns exemplos específicos, através de análises e investigações sobre a estrutura analítica do aproximante obtido, o porquê disso acontecer. Contudo, uma convergência aparente foi sempre observada uma vez que um grande número de parâmetros foi adicionado. Resultados utilizando apenas quatro coeficientes da série

^{*} Este trabalho foi apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre pelo autor desta tese, ver Referência. (59)

para construir os Padés — que é o que temos disponível na QCD completa — estão longe de serem espetaculares. Na ausência de mais coeficientes fez-se necessário explorar estratégias para melhorar a aproximação a função original.

Uma dessas estratégias consiste no uso de variações de esquema de renormalização. Estudarmos como essas variações de esquema utilizando o esquema C podem impactar na precisão dos resultados com os aproximantes. No caso de $\text{large-}\beta_0$ mostramos que ao usar esquemas menos perturbativos, $C < 0$ nas nossas convenções, é possível construir aproximantes melhores com o mesmo número de parâmetros. Esta melhora é devida ao fato de que a transformada de Borel nesses esquemas se torna grandemente dominada pelo polo UV mais próximo da origem: pode-se observar a alternância de sinal já em ordens baixas e os Padés conseguem reproduzir facilmente as principais características da estrutura analítica da série. A escolha específica $C = -5/3$ tem uma vantagem adicional de remover o termo $e^{(C+5/3)u}$ da transformada de Borel da função de Adler definida na Eq. (4.44), o que a torna uma função estritamente racional. Como um subproduto, podemos obter uma estratégia para revelar os efeitos do polo dominante UV. Construindo a série para $C < 0$ a alternância de sinal dos coeficientes se apresentam muito mais cedo, já a partir do segundo coeficiente, pois o polo UV tem seu resíduo aumentado exponencialmente.

Outra estratégia explorada na Referência (59) foi o uso do que é conhecido na literatura como os Aproximantes de Padé Parciais, onde pode-se utilizar algum conhecimento sobre a estrutura analítica da função estudada. Vimos que o uso desse tipo de aproximante, onde é possível explorar as posições dos renôrmalons como informação disponível da função, fornece uma melhora significativa. Contudo, é importante usar esta informação com cuidado, pois ao impor a existência de um polo com a multiplicidade errada, por exemplo, força-se o Padé a “gastar” os coeficientes da série para reproduzir a estrutura analítica correta do dado polo. Se a informação do polo dominante UV é usada corretamente, isto é, impondo a existência de um polo duplo em $u = -1$, isto leva a uma melhora significativa dos resultados. Finalmente, foi observado que ao impor a estrutura dos primeiros dois renôrmalons dominantes obtemos uma reprodução quase perfeita da função de Adler, o que está de acordo com resultados da literatura. (19,33)

Os métodos discutidos acima, e que foram explorados na Referência (59), não se mostraram suficientes para produzir resultados confiáveis com apenas quatro termos da série perturbativa e/ou eram demasiadamente dependentes de modelo (pois requeriam a inclusão de hipóteses sobre a estrutura das singularidades no plano complexo). Portanto, tornou-se necessário o estudo de métodos adicionais, que apresentamos pela primeira vez neste trabalho. Os dois métodos que serão apresentados abaixo tratam do uso de aproximantes de Padé DLog (DLog PAs) e aproximantes de Padé DLog parciais (DLog PPAs) à transformada de Borel da função de Adler e o uso de PAs e DLog PAs diretamente à série em α_s da função $\delta^{(0)}$ e à transformada de Borel da mesma.

5.1.1 Aproximantes de Padé DLog à função de Adler no limite large- β_0

Conforme visto acima e em mais detalhes na Referência (59), informações sobre as posições dos polos produzem uma grande melhora na aceleração da convergência dos PAs, porém, este tipo de conhecimento pode ser escasso, em situações realistas. Além disso, conhecer a multiplicidade dos polos também é importante e esta informação muitas vezes não está disponível. Adicionalmente, algumas funções apresentam singularidades do tipo ponto de ramificação, o que pode tornar suas aproximações por Padés menos efetivas. Nestas situações, podemos seguir outras estratégias, em particular, os aproximantes de Padé DLog das Eqs. (3.43) e (3.44) e suas extensões nas Eqs. (3.45), (3.47) e (3.48) podem produzir um resultado superior. Aqui exploramos esta estratégia utilizando os resultados em large- β_0 como laboratório para o método.

A filosofia original do aproximante de Padé DLog mais simples implica em aplicarmos um PA não para a função $f(z)$, que pode ser vista na Eq. (3.39), mas para a função $F(z)$ dada pela Eq. (3.40). Presumindo que a função original possui uma singularidade em $z = \mu$ (um polo ou um corte) (ver Eq. (3.39)) o uso do método dos DLogs nas proximidades de $z = \mu$ provê um meio de extrair, a partir dos coeficientes da série, a multiplicidade γ da singularidade em μ , como mostrado na Eq. (3.43). Aqui, se γ é um inteiro ou não, torna-se irrelevante, o que faz dos DLog PAs particularmente interessantes para aproximar funções com singularidades do tipo corte. Ressaltamos aqui que, após deconvolucionarmos o procedimento, temos como resultado os aproximantes $\text{Dlog}_N^M(z)$ para a função $f(z)$, de onde é possível extrair os coeficientes da série que estamos estudando.

O aproximante DLog mais simples que pode ser construído para a transformada de Borel da função de Adler, $\text{Dlog}_0^1(u)$, requer $c_{2,1}$ e $c_{3,1}$ como entrada e lê-se

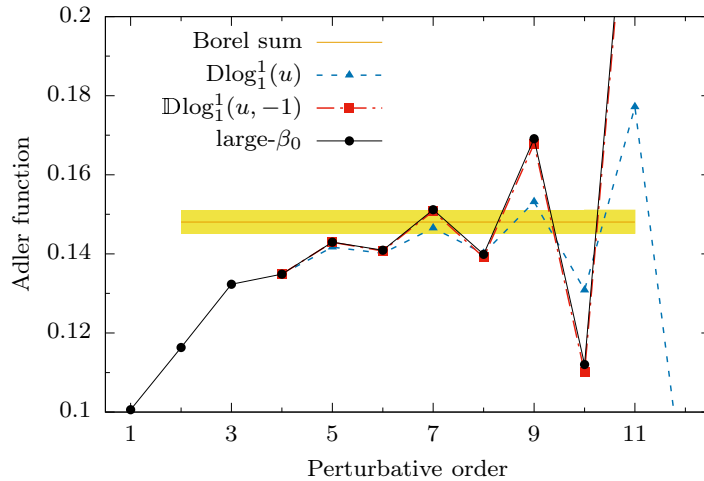
$$\text{Dlog}_0^1(u) = f(0)e^{0,69u+1,31u^2}. \quad (5.1)$$

Após reexpandir, o $\text{Dlog}_0^1(u)$ prediz $c_{4,1}$ e os coeficientes de ordens mais altas, e o faz com bastante precisão, levando-se em conta a pouca quantidade de informação que está sendo usada. Contudo, não é observada alternância de sinal. Indo até $\text{Dlog}_0^2(u)$, dado por

$$\text{Dlog}_0^2(u) = f(0)e^{0,69u+1,31u^2-0,60u^3}, \quad (5.2)$$

a previsão melhora bastante e não apenas a alternância de sinal é agora reproduzida, mas também o erro relativo de $c_{5,1}$ fica em torno de 40% (melhor ainda para o próximo coeficiente, $c_{6,1}$, que é de apenas 10%). Aqui ressaltamos que apesar da melhora nas previsões, PAs com $N = 0$ tem pouca chance de apresentarem resultados espetaculares dado o fato de que estes não conseguem gerar polos ou cortes. Continuando, com o mesmo número de parâmetros, o $\text{Dlog}_1^1(u)$, dado por

$$\text{Dlog}_1^1(u) = f(0)\frac{2,63e^{4,52u}}{(1,46+u)^{5,59}}, \quad (5.3)$$



(a) Função de Adler

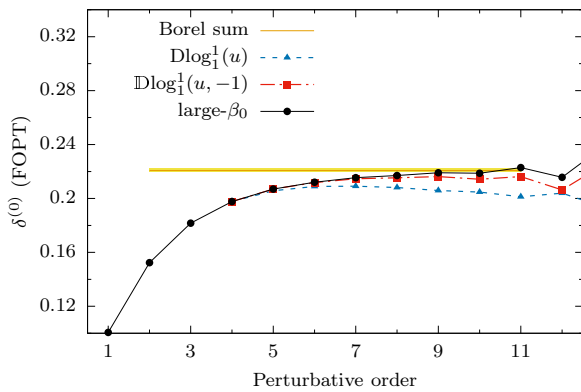
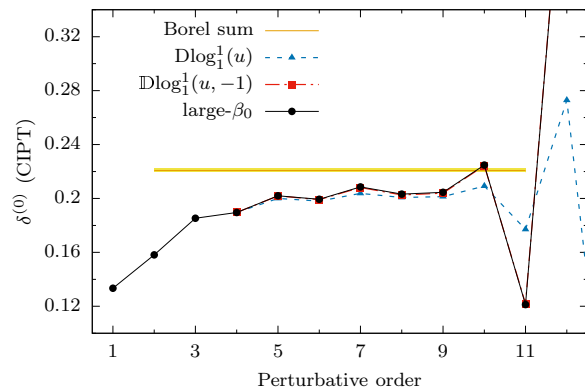
(b) $\delta^{(0)}$, FOPT(c) $\delta^{(0)}$, CIPT

Figura 18 – Resultados a partir do uso dos aproximantes $D\log_1^1(u)$ e $D\log_1^1(u, -1)$ em large- β_0 . (a) Expansão perturbativa da função de Adler. (b) $\delta^{(0)}$ em FOPT. (c) $\delta^{(0)}$ em CIPT.

Fonte: BOITO; MASJUAN; OLIANI. (44)

produz um resultado ainda melhor, fornecendo um erro relativo de apenas 16% para o $c_{5,1}$, com a alternância de sinal correta e uma boa predição para $c_{6,1}$ também, como pode ser visto na Figura 18. Usando este cenário mais simples, com um mínimo de informação, o $D\log_1^1(u)$ é o aproximante que melhor prediz o coeficiente $c_{5,1}$ entre os aproximantes mostrados neste trabalho.

Informações sobre as singularidades conhecidas podem ser usadas diretamente com os Padés $D\log$ parciais, $D\log_N^M(z, \mu)$, da Eq. (3.48). A singularidade mais perto da origem da transformada de Borel da função de Adler é o polo UV localizado em $u = -1$. Então, consideramos um PA para a Eq. (3.45) usando $\mu \equiv 1$ e construímos o respectivo aproximante $D\log$ para $f(u)$. Mesmo com o mais simples aproximante, $D\log_0^1(u, -1)$, a alternância de sinal dos coeficientes da série foi recuperada, uma clara indicação de melhora

na reconstrução da série. O aproximante construído é dado por

$$\mathbb{D}\log_0^1(u, -1) = f(0) \frac{e^{3,32u}}{(1+u)^{2,6}}, \quad (5.4)$$

que apresenta um ponto de ramificação em $u = -1$, mas com uma boa predição da multiplicidade do primeiro renôrmalon UV (que é um polo duplo em large- β_0).

Para a próxima ordem, duas escolhas podem ser consideradas, o termo referente à diagonal $\mathbb{D}\log_1^1(u, -1)$ e o $\mathbb{D}\log_0^2(u, -1)$. Como é claro a partir da definição da Eq. (3.45), $F(z)$ é, em boa aproximação, uma função racional. Então, o aproximante diagonal $\mathbb{D}\log_1^1(u, -1)$ é a escolha ideal. Neste caso, o aproximante é dado por

$$\mathbb{D}\log_1^1(u, -1) = \frac{881379, 40}{(4, 02 - u)^{10,67}(1+u)^{1,96}}, \quad (5.5)$$

que, após a expansão, prediz os coeficientes da série para a transformada de Borel com uma precisão sem precedentes até o coeficiente $c_{10,1}$, com erros relativos nos valores de meros 0, 8%, 6%, 2%, 3%, 2%, 1%, 1% para os coeficientes $c_{4,1}$ até $c_{10,1}$, nesta ordem. O excelente resultado para este aproximante também pode ser visto na Figura 18. Um ponto-chave neste sucesso extraordinário é a excelente reprodução com pouquíssima informação da multiplicidade do primeiro polo UV, que em large- β_0 é conhecida exatamente e dada por $\gamma = 2$. Podemos ver isto no fato de $\gamma = 1,96$ para $\mu = -1$ na Eq. (5.5), enquanto o outro corte se comporta como um corte efetivo a fim de simular todos os renôrmalons IR da transformada de Borel. O resultado é tão bom que, ao incluir o coeficiente $c_{4,1}$ para construir o $\mathbb{D}\log_2^1(u, -1)$ temos apenas uma melhora marginal (previsão de $c_{5,1}$ com 5% de erro relativo, por exemplo).

Está claro que os DLog PAs são capazes de ir muito além do que os PAs ordinários na reprodução das principais características analíticas da transformada de Borel da função de Adler em large- β_0 . O sucesso destes aproximantes pode ser melhor entendido examinando a função $\frac{d}{dz} \log[f(z)]$. Substituindo a Eq. (4.44) em $f(z)$ da Eq. (3.43), podemos escrever

$$F(u) = \frac{d}{du} \log(B[\hat{D}](u)) = C + \frac{5}{3} + \frac{1}{2-u} + \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4(-1)^k k(1-u)}{[k^2 - (1-u)^2]^3}}{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{[k^2 - (1-u)^2]^2}}. \quad (5.6)$$

Se considerarmos somente o primeiro termo das somatórias acima é possível escrever $F(u)$ em função dos primeiros renôrmalons dominantes, como a seguir

$$F(u) = C + \frac{5}{3} + \frac{1}{2-u} + \frac{2}{3-u} - \frac{2}{1+u} + \dots \quad (5.7)$$

Isto mostra que nos DLog PAs a função que está sendo aproximada é estritamente uma função racional, com polos simples. A função exponencial presente na transformada de Borel desaparece e os aproximantes não precisam reproduzi-la. Em certo sentido, a estratégia dos Dlogs retoma uma situação similar ao esquema com $C = -5/3$, que cancela a exponencial

da transformada de Borel, mas com o benefício adicional que $F(z)$ tem apenas polos simples. Seu sucesso é, portanto, não tão surpreendente. Podemos esperar também que seqüências de PAs que fujam significativamente da diagonal terão uma convergência mais lenta para $F(u)$ e, conseqüentemente, levarão a uma pior aproximação de $B[\hat{D}](u)$.

Finalmente, a inclusão de informação sobre a posição de mais de um polo pode ser feita no contexto dos DLog PAs usando um aproximante de Padé parcial para $F(z)$ com quantos polos fixos forem desejados. Por exemplo, utilizando no denominador um PPA dado por $T_7(u) = (2-u)(3-u)^2(1+u)^2(2+u)^2$, e usando $c_{2,1}$, $c_{3,1}$ e $c_{4,1}$ como entrada, a previsão dos coeficientes da série é dada com uma precisão melhor do que 0,1%.

Concluindo, os DLog PAs mostraram-se ser uma maneira efetiva de acelerar a convergência da aproximação e obter informações sobre as ordens mais altas. Em certo sentido, eles são melhores que o método de mudança de esquema, pois eles não dependem de um valor específico de C . Na próxima seção iremos utilizar as técnicas descritas aqui para a função $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ em large- β_0 , antes de aplicar este método na QCD completa.

5.1.2 Aproximantes de Padé à função $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ no limite large- β_0

Aprendemos a partir da aplicação dos Padés a transformada de Borel da função de Adler que uma das dificuldades é o desvencilhamento dos renôrmalons dominantes. O sucesso do uso de variações de esquema, estudado na Referência (59), deve-se, parcialmente, a este fato, uma vez que o método permite uma otimização do polo dominante UV em relação ao polo dominante IR em $u = 2$. A transformada de Borel de $\delta^{(0)}$, Eq. (4.46), por outro lado, não apresenta um polo em $u = 2$. O renôrmalon dominante UV é, portanto, mais isolado dos renôrmalons IR. Pode ser esperado que o uso de aproximantes de Padé diretamente a esta transformada de Borel deve render resultados melhores e mais estáveis do que no caso da função de Adler. Nesta seção vamos explorar esta rota. Como as propriedades gerais dos aproximantes de Padé já foram estabelecidas, vamos nos concentrar aqui no problema prático de prever os coeficientes desconhecidos, dado que apenas os quatro primeiros são conhecidos exatamente — no intuito de simular o caso real da QCD.

Notemos que é possível reconstruir a série da função de Adler a partir da função $\delta^{(0)}$, logo, um aproximante racional construído para a função $\delta^{(0)}$ contém informação o suficiente para uma reconstrução completa da função de Adler. Os coeficientes $c_{n,1}$ podem ser obtidos facilmente a partir da expansão FOPT de $\delta^{(0)}$ como

$$\begin{aligned} \delta_{\text{FO}}^{(0)}(a_Q) = & c_{1,1}a_Q + (3,563c_{1,1} + c_{2,1})a_Q^2 + (1,978c_{1,1} + 7,125c_{2,1} + c_{3,1})a_Q^3 + \\ & + (-45,31c_{1,1} + 5,934c_{2,1} + 10,69c_{3,1} + c_{4,1})a_Q^4 + \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

Adicionalmente, em large- β_0 , a Eq. (4.46) pode ser usada para extrair a transformada de Borel da função de Adler a partir de $\delta^{(0)}$.

Tabela 1 – Coeficientes da função de Adler extraídos a partir dos PAs $P_N^M(a_Q)$ aplicados a série em α_s da expansão FOPT de $\delta^{(0)}$ no limite large- β_0 .

	$c_{4,1}$	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$
Large- β_0	24, 83	787, 8	-1991	$9, 857 \times 10^4$	$-1, 078 \times 10^6$	$2, 775 \times 10^7$
$P_1^2(a_Q)$	29, 95	723, 7	-703, 4	$7, 405 \times 10^4$	$-5, 871 \times 10^5$	$1, 649 \times 10^7$
$P_2^1(a_Q)$	28, 66	728, 2	-874, 3	$7, 554 \times 10^4$	$-6, 224 \times 10^5$	$1, 703 \times 10^7$
$P_1^3(a_Q)$	entrada	740, 0	-1363	$7, 956 \times 10^4$	$-7, 211 \times 10^5$	$1, 851 \times 10^7$
$P_2^2(a_Q)$	entrada	749, 3	-1444	$8, 169 \times 10^4$	$-7, 514 \times 10^5$	$1, 917 \times 10^7$
$P_3^1(a_Q)$	entrada	743, 6	-1393	$8, 035 \times 10^4$	$-7, 321 \times 10^5$	$1, 875 \times 10^7$

Fonte: BOITO; MASJUAN; OLIANI. (44)

Começamos aqui a aplicar os aproximantes de Padé diretamente a série em α_s/π , dada pela Eq. (4.47). Como observamos, a série FOPT em large- β_0 é bastante bem comportada e, em ordens intermediárias, sua natureza assintótica ainda não pode ser vista. Este fato pode ser mapeado em uma estrutura analítica simples no plano de Borel. É, portanto, provável que a aproximação da série por aproximantes de Padé em a_Q levará a uma melhor descrição que no caso da função de Adler. Na Tabela 1 mostramos os coeficientes da função de Adler que são obtidos a partir da aplicação de aproximantes de Padé diretamente na expansão FOPT de $\delta^{(0)}$. Para simular a situação real da QCD, nas primeiras duas linhas tentamos prever $c_{4,1}$, enquanto nas últimas três linhas usamos $c_{4,1}$ como entrada. A observação mais importante é que os resultados para os coeficientes que não são usados como entrada são muito bons e estáveis. A alternância de sinais da série é corretamente predita por todos os PAs e temos uma boa consistência entre os resultados usando três e quatro coeficientes como entrada. Os resultados são, portanto, bastante notáveis.

Vamos examinar um dos PAs em mais detalhe. Para P_1^2 , que usa apenas os primeiros três coeficientes como entrada, encontramos

$$P_1^2(a_Q) = \frac{0, 1779a_Q - 0, 0895a_Q^2}{0, 1779 - a_Q}. \quad (5.9)$$

O primeiro ponto importante pode ser observado no fato de que a série obtida a partir de tal Padé é convergente (uma vez que $a_\tau \approx 1$), logo, não ocorre a reprodução do crescimento fatorial dos coeficientes. O polo que aparece em torno de $a_Q \approx 0, 18$ é, contudo, bastante estável — não parece ser de natureza transitória e está presente em todos os aproximantes para $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$. Pode-se notar que o polo está na região IR e corresponde a escala de $\sim 650\text{MeV}$, portanto, pode existir uma relação com física IR, mas nos abstermos de mais especulações sobre a natureza desse polo. Uma estimativa para a soma da série pode ser obtida simplesmente utilizando $a_\tau = 0, 316/\pi$ na Eq. (5.9), dando $P_1^2(a_\tau) = 0, 2198$. Este resultado está também em ótima concordância com o valor obtido a partir da integral

de Borel do resultado exato de large- β_0 , dado por $0,2208 \pm 0,0039$. Um resultado ainda melhor pode ser obtido a partir dos PAs que usam quatro coeficientes como entrada, como pode ser visto nas últimas três linhas da Tabela 1.

Passamos agora a estudar os PAs aplicados a transformada de Borel de $\delta^{(0)}$. Os resultados são melhores quando comparados com PA a $B[\hat{D}]$, embora a melhora esteja longe de ser espetacular. Para $c_{5,1}$, cujo valor exato é dado por 787,8, encontramos para P_2^1 o valor de 263,9, para P_3^0 o valor de 603,6 e para P_1^2 o valor de 1024, que podem ser comparados com 52,33 para P_2^1 , 560,9 para P_3^0 e 1770,1 para P_1^2 , quando aplicados à $B[\hat{D}]$. Ao compararmos as estimativas obtidas a partir dos PAs com o valor exato fica claro que devemos recorrer a outros métodos discutidos nas Seções anteriores para acelerar a convergência da aproximação. Novamente, os DLog Padés são uma ótima maneira de acelerar a convergência das aproximações sem fazer uso de informações externas que não estarão disponíveis quando aplicarmos o método na QCD completa. O sucesso deles pode ser entendido a partir de um estudo da função $F(u) = \frac{d}{du} \log(B[\delta^{(0)}](u))$, como no caso da função de Adler. Retendo apenas o primeiro termo na soma da Eq. (4.44), obtemos

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{d}{du} \log(B[\delta^{(0)}](u)) \\ &= C + \frac{5}{3} + \pi \cot(\pi u) - \frac{2}{1+u} + \frac{3}{3-u} + \frac{1}{4-u} + \frac{1}{1-u} + \frac{2}{2-u} - \frac{1}{u} + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

A estrutura analítica dominante de $F(u)$ é, agora, ainda mais simples do que para a função de Adler. Os polos em $u = 0$, $u = 1$ e $u = 2$ são exatamente cancelados pela presença de $\pi \cot(\pi u)$, deixando apenas o polo dominante UV em $u = -1$, um polo IR em $u = 3$ e um polo IR subdominante em $u = 4$. É esperado, portanto, que o DLog Padé deva funcionar ainda melhor neste caso.

Os resultados para os DLog Padés aplicados a $B[\delta^{(0)}]$ podem ser vistos na Tabela 2. Estes resultados também representam uma melhora quando comparados àquele da Seção 5.1.1. As previsões para $c_{5,1}$ tem um erro relativo muito menor, um fator de 2 a 5 vezes menor do que aqueles a partir dos Padés aplicados a transformada de Borel da função de Adler. A alternância de sinal é bem reproduzida pelos Padés com quatro coeficientes usados como entrada e suas integrais de Borel proveem uma excelente estimativa para o valor verdadeiro da série (encontramos, por exemplo, 0,2199 a partir do $D\text{Log}_1^1(u)$). Contudo, deve-se notar que os resultados a partir dos DLog Padés aplicados a $B[\delta^{(0)}]$ são piores do que aqueles da Tabela 1. Por exemplo, o coeficiente $c_{4,1}$ está errado por um fator em torno de dois, enquanto na Tabela 1 este erro é de apenas uma pequena porcentagem. Mesmo assim, a descrição da transformada de Borel de $\delta^{(0)}$ por Dlog PAs tem a vantagem de que o crescimento fatorial dos coeficientes é reproduzido e uma série assintótica é obtida, em concordância com o resultado exato.

Novamente, checamos que os resultados discutidos nesta seção podem ser obtidos

Tabela 2 – Coeficientes da função de Adler extraídos a partir dos aproximantes de Padé DLog, $\text{Dlog}_M^N(u)$, construídos a $B[\delta^{(0)}](u)$ no limite large- β_0 .

	$c_{4,1}$	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$
Large- β_0	24.83	787.8	-1991	9.857×10^4	-1.078×10^6	2.775×10^7
$\text{Dlog}_0^1(u)$	41.84	756.1	848.6	7.453×10^4	-3.284×10^5	1.498×10^7
$\text{Dlog}_1^0(u)$	44.43	776.1	1294	7.778×10^4	-2.502×10^5	1.538×10^7
$\text{Dlog}_0^2(u)$	Entrada	650.2	-1824	6.319×10^4	-7.470×10^5	1.545×10^7
$\text{Dlog}_1^1(u)$	Entrada	818.7	-2738	1.189×10^5	-1.663×10^6	4.495×10^7
$\text{Dlog}_2^0(u)$	Entrada	594.9	-1974	5.560×10^4	-6.796×10^5	1.432×10^7

Fonte: BOITO; MASJUAN; OLIANI. (44)

com uma maior precisão usando as informações sobre os renômalons. Por exemplo, impondo a existência do polo dominante UV em $u = -1$ através do uso de $\text{Dlog}_1^1(u, -1)$ temos uma reprodução quase exata da série. Preferimos, contudo, permanecer o máximo possível independente de modelo e escolhemos focar aqui nos resultados obtidos a partir dos métodos mais independentes (PAs e DLog Padés). Usando $\delta^{(0)}$ e sua transformada de Borel, estes métodos levam a resultados tão bons quanto aqueles obtidos a partir da função de Adler impondo informações sobre os renômalons.

Fechamos esta seção apresentando as figuras das séries perturbativas obtidas a partir dos resultados discutidos aqui. Na Figura 19(b) mostramos as expansões FOPT e CIPT da função $\delta^{(0)}$ obtidas a partir do aproximante $P_2^2(a_Q)$, para o qual mostramos os coeficientes até $c_{9,1}$ na quinta linha da Tabela 2. A principal observação é que, até nona ordem, o resultado é estritamente similar aos resultados exatos (veja, por exemplo, o resultado apresentado na Figura 19(a)). Contudo, a série FOPT assim obtida é convergente, e após a oitava ordem o resultado estabiliza-se em torno da soma da série, o que não acontece com o resultado exato. Isto não impede que a descrição seja excelente em ordens intermediárias, já que o valor verdadeiro da série convergente é muito similar ao valor central da integral de Borel dos resultados exatos. Para CIPT, observações semelhantes se mantêm e, até a nona ordem, o resultado é quase indistinguível dos exatos. Em particular, o fato que FOPT é a melhor aproximação em large- β_0 é bem reproduzido. Na Figura 19(c), mostramos os resultados para $\text{Dlog}_1^1(u)$, para o qual os coeficientes podem ser vistos na quinta linha da Tabela 2. Novamente, visualmente, os resultados são quase idênticos aos resultados exatos. Agora, ambas as séries são divergentes, como é o caso das séries exatas, e esta característica pode ser vista após a nona ordem, contudo, a divergência aqui é mais pronunciada do que no caso de large- β_0 . Em ambos os casos, os aproximantes proveem uma boa estimativa para os primeiros coeficientes desconhecidos, e fornecem um excelente relato da série, embora nenhuma informação sobre os renômalons tenha sido usada, em contraste com alguns dos resultados das Figuras 18(b) e 18(c).

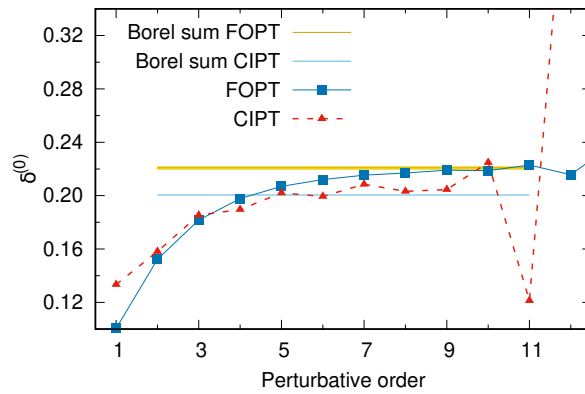
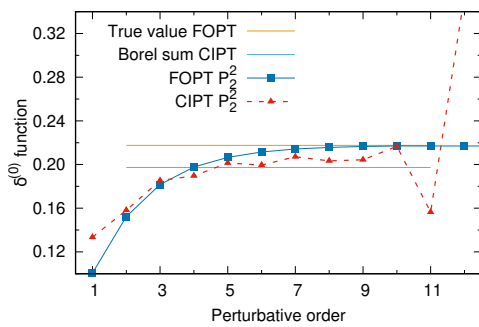
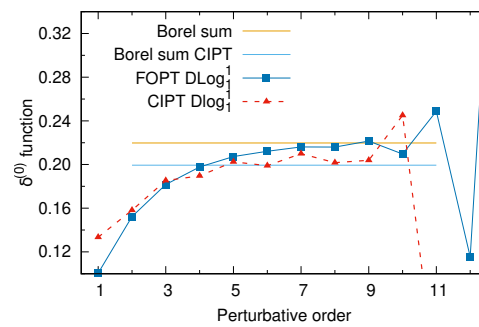
(a) $\delta^{(0)}$ em large- β_0 .(b) $\delta^{(0)}$ a partir de $P_2^2(a_Q)$.(c) $\delta^{(0)}$ a partir de $D\log_1^1(u)$.

Figura 19 – Expansão perturbativa de $\delta^{(0)}$ em FOPT e CIPT obtidas para (a) o resultado exato em large- β_0 , e também a partir de (b) $P_2^2(a_Q)$ (quinta linha da Tabela 1) e (c) $D\log_1^1(u)$ (quinta linha da Tabela 2).

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.1.3 Conclusões parciais

Nesta seção investigamos o uso dos DLog Padés e dos PAs aplicados a função $\delta^{(0)}$ no limite large- β_0 . Sobre o primeiro método, vimos que é uma alternativa interessante tendo em mente aplicações a QCD, já que eles não requerem que a função a ser aproximada seja meromórfica. Sua aplicação em large- β_0 foi muito bem sucedida e podemos concluir com segurança que, dada a limitada quantidade de informação disponível, estes aproximantes são a melhor maneira de acelerar a convergência do procedimento. Destacamos o uso dos DLog parciais, onde apenas a existência do primeiro polo UV foi usada como entrada. Os resultados de tais DLog parciais são impressionantes e levam a uma reprodução quase exata da função de Adler no limite large- β_0 com um método quase independente de modelo. Somos capazes de explicar seu sucesso em termos da estrutura analítica da transformada de Borel da função de Adler.

Olhando para os aproximantes construídos à função $\delta^{(0)}$, primeiro mostramos que PAs construídos à série FOPT em α_s/π levam a uma reconstrução muito boa da série em ordens intermediárias, o que não foi observado no caso da função de Adler. (59) No

caso de $\delta^{(0)}$, já que a série FOPT é bastante comportada e regular até, pelo menos, a 10ª ordem (com termos que são consistentemente menores do que seus antecessores), a aproximação obtida a partir destes Padés é muito razoável. Mostramos então que bons resultados podem também ser obtidos a partir dos aproximantes de Padé construídos para $B[\delta^{(0)}]$. Eles são completamente independentes de modelo e têm a vantagem de que o crescimento fatorial dos coeficientes é automaticamente implementado. Ambos os métodos levam a boas previsões para o valor verdadeiro da série, tanto para FOPT como para CIPT. De novo, o sucesso do método pode ser explicado pela estrutura analítica simples da transformada de Borel de $\delta^{(0)}$ já que a mesma não tem o polo em $u = 2$ e todos os outros polos se tornam simples (com exceção dos polos em $u = 3$ e 4).

O estudo sistemático realizado no limite $\text{large-}\beta_0$ levou a estratégias para determinações excelentes dos coeficientes de ordens mais altas e da soma de Borel da função de Adler e da série $\delta^{(0)}$. Conseguimos encontrar métodos para revelar polos dominantes e subdominantes, assim como reorganizar a informação disponível para otimizar a aproximação por PAs e sua variantes. Com estas estratégias em mãos, podemos agora realizar uma análise similar na QCD completa e apresentar nossos resultados finais.

5.2 Resultados na QCD

Nesta seção vamos aplicar as técnicas desenvolvidas e testadas em $\text{large-}\beta_0$ para o caso da QCD real. Vamos começar lembrando o que sabemos neste caso. Em teoria de perturbação, a expansão da função de Adler é conhecida a cinco loops, conseqüentemente, os coeficientes da série foram calculados até a ordem α_s^4 . (17) Dado que os coeficientes de ordens superiores não são conhecidos, gostaríamos de obter predições para os mesmos. Quando comparamos o limite $\text{large-}\beta_0$ com a QCD completa, podemos observar que os primeiros quatro coeficientes da função de Adler em QCD, que podem ser vistos na Eq. (2.44), apresentam um desvio significativo dos resultados em $\text{large-}\beta_0$, apesar dos coeficientes da expansão FOPT da função $\delta^{(0)}$, Eq. (2.49), serem próximos da série correspondente em $\text{large-}\beta_0$. As diferenças entre a QCD completa e o limite $\text{large-}\beta_0$ também aparecem na transformada de Borel. Em QCD, sabemos que a transformada de Borel não é uma função meromórfica. Apesar das singularidades devidas aos renormalons permanecerem na mesma posição, as dimensões anômalas dos operadores e os coeficientes de ordens mais altas da função β agora mudam a natureza dos polos para cortes, que agora também apresentam singularidades confluentes. (19, 26) A experiência mostrou que os aproximantes de Padé podem ser usados para aproximar funções com cortes de maneira confiável, mas nestes casos não podemos explorar os teoremas de convergência.

Vamos começar com os aproximantes mais simples: PAs construídos diretamente a expansão em α_s/π da função de Adler. Em $\text{large-}\beta_0$ verificamos que esta não é a melhor estratégia, porém, vamos verificar a aplicação deste método na QCD. Dado que agora

temos apenas os quatro primeiros coeficientes, vamos começar construindo PAs capazes de prever o último termo conhecida da série, $c_{4,1}$, dado por 49,08. A partir dos aproximantes $P_1^2(a_Q)$ e $P_2^1(a_Q)$ obtemos o coeficiente a cinco loops, $c_{4,1}$, com um erro relativo de 51% e 67%, respectivamente. O coeficiente $c_{5,1}$ é predito com valores bastante baixos, 96,2 e 50,5. Nossa experiência a partir de $\text{large-}\beta_0$ já havia sinalizado que esta estratégia não era a melhor. Se agora construirmos aproximantes que usem o termo $c_{4,1}$ como entrada, extraímos o coeficiente $c_{5,1}$ que diferem da previsão obtida anteriormente por um fator 9, indicando que o procedimento é muito instável.

Vamos estudar agora a aplicação do método à transformada de Borel da função de Adler, que provou ser mais estável em $\text{large-}\beta_0$. Novamente, primeiro tentamos obter a predição de $c_{4,1}$, usando $P_1^1(u)$ e $P_2^0(u)$. O valor de $c_{4,1}$ obtido apresenta um erro relativo de cerca de 26%, o que é uma melhora quando comparado com o método anterior, e leva a uma predição de $c_{5,1} \sim 280$. Contudo, quando construímos aproximantes que incluem o valor verdadeiro de $c_{4,1}$ como entrada, ou seja, os aproximantes P_1^2 , P_2^1 e P_3^0 , não houve sinal de estabilidade. A predição de $c_{5,1}$ e dos coeficientes de ordens mais altas mudam substancialmente, sinalizando, a partir da nossa experiência em $\text{large-}\beta_0$, que esses aproximantes não são os melhores. Que quatro coeficientes não são o suficiente para o aproximante de Padé realizar uma predição estável das ordens mais altas não foi uma surpresa, já que isso também foi observado em $\text{large-}\beta_0$, mesmo a estrutura analítica da transformada de Borel sendo mais simples neste limite. Portanto, devemos novamente recorrer a métodos para acelerar a convergência das aproximações.

Vamos começar investigando outros esquemas de renormalização. Variações de esquema na QCD completa também podem ser realizadas usando um único parâmetro C , através da generalização da Referência (42) (a qual referimos para maiores detalhes e que foi discutida brevemente na Seção 2.2). Baseado nas lições em $\text{large-}\beta_0$, vamos reescrever a série da função de Adler em esquemas com C negativo, resultando em um acoplamento com valores mais altos. Como exemplo, vamos usar o valor de $C = -5/3$, valor este que eliminava a função exponencial em $\text{large-}\beta_0$. Os primeiros quatro coeficientes da função de Adler agora são dados por

$$\hat{D}^{(C=-5/3)}(\hat{a}_Q) = \hat{a}_Q - 2,110\hat{a}_Q^2 + 2,779\hat{a}_Q^3 + 19,87\hat{a}_Q^4 + \dots \quad (5.11)$$

Pode-se observar diferenças marcantes nos coeficientes quando comparamos o resultado acima com a série perturbativa da função de Adler no limite $\text{large-}\beta_0$, dada por

$$\hat{D}_{L\beta}^{(C=-5/3)}(\hat{a}_Q) = \hat{a}_Q - 2,194\hat{a}_Q^2 + 18,10\hat{a}_Q^3 - 139,0\hat{a}_Q^4 + 1610\hat{a}_Q^5 - \dots \quad (5.12)$$

Em contraste com o caso $\text{large-}\beta_0$, a série em QCD com $C = -5/3$, não apresenta uma alternância de sinal sistemática. Isto é um indicativo de que a singularidade UV é menos dominante do que em $\text{large-}\beta_0$ e o padrão de sinais indica uma interação mais complicada entre os polos. Possivelmente, o polo IR fornece uma contribuição maior para a série em

QCD em comparação ao caso $\text{large-}\beta_0$. Isto está de acordo com os resultados obtidos a partir de modelos das Referências. (19, 33) Nestes modelos, o polo IR fornece uma contribuição maior em ordens intermediárias e a alternância de sinal sistemática se instala apenas na décima primeira ordem. Uma vez que não podemos suprimir inequivocamente a contribuição dos polos IR, a estratégia de usar variações de esquema para otimizar o uso de aproximantes de Padé não se torna a melhor em QCD (embora corrobore, em parte, os resultados das Referências (19, 33)).

Recorremos então ao uso de DLog PAs para obter aproximantes para $B[\hat{D}](u)$. Existe um bom motivo para o uso desses aproximantes na QCD completa, uma vez que eles também são projetados para funções que apresentam cortes. Após aplicação do método verificamos que o uso dos DLog Padés para prever o termo conhecido $c_{4,1}$ leva a valores com erros relativos de 54% [$D\log_0^1(u)$] e 21% [$D\log_1^0(u)$] o que novamente sinaliza que o procedimento não é o melhor. O uso de um coeficiente adicional como entrada não muda este quadro de forma significativa, uma vez que isto leva a resultados instáveis para os coeficientes de ordens mais altas, o que é compreensível novamente devido à presença de singularidades confluentes.

Baseado na nossa experiência a partir do limite $\text{large-}\beta_0$, é possível ser levado a concluir que a construção de aproximantes independentes de modelo a transformada de Borel da função de Adler não são robustos o suficiente em QCD com apenas os primeiros quatro coeficientes disponíveis. Em $\text{large-}\beta_0$ o conhecimento sobre os renormalons pode ser utilizado para otimizar as previsões. Contudo, aqui, encontramos algumas dificuldades adicionais. Primeiro, o conhecimento disponível é mais escasso. Apenas os primeiros poucos renormalons (o dominante UV e os dois dominantes IR) tiveram sua estrutura de cortes investigadas em detalhes. (19, 78) Em segundo, o fato de que os renormalons agora se tornam singularidades confluentes torna muito mais difícil o uso do conhecimento disponível para obtermos aproximações otimizadas. E, finalmente, seria desejável permanecer o mais independente de modelo possível. Vamos, portanto, nos direcionar para a estratégia independente de modelo que obteve mais sucesso no limite $\text{large-}\beta_0$: o uso da série FOPT para $\delta^{(0)}$.

Em $\text{large-}\beta_0$, os aproximantes construídos para $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ e $B[\delta^{(0)}]$ forneceram os melhores resultados. A série perturbativa para $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ em $\text{large-}\beta_0$ e em QCD têm coeficientes bastante semelhantes. Isto significa que a regularidade da série é preservada em QCD, o que sugere que ela pode ser bem aproximada por aproximantes de Padé construídos diretamente para a série em α_s/π . Além disso, apesar da Eq. (4.46) ser estritamente válida apenas em $\text{large-}\beta_0$, porque ela depende da evolução do acoplamento a 1-loop, modificações deste resultado seriam unicamente devidas às ordens mais altas na evolução de α_s . Portanto, podemos esperar que a supressão da singularidade dominante IR em $u = 2$, assim como uma supressão de todos os outros renormalons exceto aqueles em $u = 3$ e $u = 4$, permanecerão

Tabela 3 – Coeficientes da função de Adler na QCD obtidos a partir de PAs construídos para a expansão em α_s de $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$.

	$c_{4,1}$	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$	Soma de Padé
P_1^2	55.62	276.2	3865	1.952×10^4	4.288×10^5	1.289×10^6	0.2080
P_2^1	55.53	276.5	3855	1.959×10^4	4.272×10^5	1.307×10^6	0.2079
P_1^3	Entrada	304.7	3171	2.442×10^4	3.149×10^5	2.633×10^6	0.2053
P_3^1	Entrada	301.3	3189	2.391×10^4	3.193×10^5	2.521×10^6	0.2051

Fonte: BOITO; MASJUAN; OLIANI. (44)

na QCD completa e tornam esta transformada de Borel mais receptiva a aproximação por funções racionais.

Vamos iniciar este estudo com os aproximantes de Padé aplicados a expansão em α_s/π de $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$. Assim como antes, começamos com uma predição do termo conhecido $c_{4,1}$ usando $P_2^1(a_Q)$ e $P_1^2(a_Q)$. Os resultados para os seis primeiros coeficientes de ordens mais altas podem ser vistos na Tabela 3. O erro relativo a partir do valor central de $c_{4,1}$ é agora de, aproximadamente, 13%. Isto é bastante notável quando colocado em perspectiva, uma vez que antes do valor verdadeiro de $c_{4,1}$ ser calculado, as previsões para este coeficiente usando outros métodos e informações adicionais (levando em consideração termos conhecidos de ordens $\alpha_s^4 N_f^3$ e $\alpha_s^4 N_f^2$) produziu $c_{4,1} = 27 \pm 16$ (79–81), um valor central que está distante cerca de 45% do valor verdadeiro. Isto dá uma ideia do quão poderoso o método dos PAs pode ser.

Inspecionando os aproximantes de Padé das primeiras duas linhas da Tabela 3, eles revelam um polo em torno de $a_Q = 0,1973$, de natureza similar aquele encontrado em large- β_0 . Adicionalmente, P_2^1 tem um polo longe da origem, em $a_Q = 7,25$. Isto torna as expansões em torno de $a_Q = 0$ semelhantes e suas previsões acabam sendo quase degeneradas. Assim, um teste poderoso para a estabilidade vem com o uso de $c_{4,1}$ como parâmetro de entrada para obter $c_{5,1}$ e termos de ordens mais altas. Pode-se construir também, por exemplo, o aproximante P_2^2 . Contudo, este aproximante tem um defeito, no sentido discutido na Seção 3.3 e na Ref. (59), um polo e um zero que se cancelam quase exatamente, reduzindo, efetivamente, a ordem do aproximante. Embora seus resultados não sejam completamente inconsistentes (por exemplo, $c_{5,1}$ acaba por ser 242) mostramos que é prudente evitar aproximantes deste tipo, logo descartamos P_2^2 . Vamos focar nos resultados obtidos para P_1^3 e P_3^1 que também são mostrados na Tabela 3. Agora, as previsões de $c_{5,1}$ são 304,7 e 301,3, respectivamente. Podemos notar uma impressionante estabilidade dos resultados para $c_{5,1}$ e $c_{6,1}$; mesmo $c_{7,1}$ e $c_{8,1}$ são notavelmente semelhantes em todos os quatro aproximantes considerados. O uso de PAs para somar a série assintótica também leva a resultados consistentes em todos os casos, como podemos ver na última coluna da

Tabela 4 – Coeficientes da função de Adler na QCD obtidos a partir dos DLog PAs construídos para $B[\delta^{(0)}](u)$.

	$c_{4,1}$	$c_{5,1}$	$c_{6,1}$	$c_{7,1}$	$c_{8,1}$	$c_{9,1}$	Soma de Borel
DLog ₀ ¹	51.90	272.6	3530	1.939×10^4	3.816×10^5	1.439×10^6	0.2050
DLog ₁ ⁰	52.08	273.7	3548	1.953×10^4	3.840×10^5	1.456×10^6	0.2052
DLog ₀ ²	Entrada	254.1	3243	1.725×10^4	3.447×10^5	1.187×10^6	0.2012
DLog ₂ ⁰	Entrada	256.4	3271	1.769×10^4	3.493×10^5	1.258×10^6	0.2019

Fonte: BOITO; MASJUAN; OLIANI. (44)

Tabela 3. Nossa experiência a partir de large- β_0 indica que esta estabilidade em conjunto com a boa predição de $c_{4,1}$ corroboram fortemente a robustez dos resultados. Checamos que o uso de aproximantes de Padé DLog também fez muito sucesso. Estamos, portanto, em posição de concluir que usando PAs a $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ na QCD é, no mínimo, tão estável quanto em large- β_0 . Deveríamos então investigar os aproximantes construídos a sua transformada de Borel.

Assim como na seção anterior para o limite large- β_0 , a qualidade da previsão de $c_{4,1}$ bem como a estabilidade nos permite a conclusão de que os aproximantes de Padé DLog são os melhores aproximantes para $B[\delta^{(0)}](u)$ também na QCD completa. Coeficientes de ordens mais altas obtidos a partir de DLog PAs construídos para $B[\delta^{(0)}](u)$ na QCD são mostrados na Tabela 4. Agora, a predição do último coeficiente conhecido, $c_{4,1}$ tem um erro relativo de apenas cerca de $\sim 6\%$, aproximadamente metade do que foi obtido com os Padés a série em α_s . A estabilidade dos resultados quando usado o valor exato de $c_{4,1}$ como parâmetro de entrada é também bastante notável. Os resultados para $c_{5,1}$ e $c_{6,1}$ são bastante estáveis não apenas entre os DLog PAs da Tabela 4 mas também quando comparados com os resultados da Tabela 3. O aproximante, Dlog₁¹, não mostrado na Tabela 4, leva a valores ligeiramente mais baixos para os coeficientes (por exemplo, $c_{5,1} = 237$), mas mesmo esta aparente instabilidade pode ser novamente entendida em termos de um cancelamento parcial entre um pólo e um zero presentes no P_1^1 utilizado para esta construção. Portanto, assim como anteriormente, descartamos este tipo de aproximante. É também interessante observar que todos os DLog PAs da Tabela 4 predizem que a alternância de sinal da série começa na décima primeira ordem. Isto está de acordo com a especulação feita, baseada nas variações de esquema, de que a singularidade UV na QCD é menos proeminente, o que posterga a alternância de sinal com respeito a large- β_0 , que se instala a partir de $c_{6,1}$. Finalmente, a soma de Borel da série obtida a partir destes DLog PAs é também muito consistente (última coluna da Tabela 4).

O quadro que emerge dos resultados desta seção é que o uso de $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$ e sua transformada de Borel leva aos melhores aproximantes independentes de modelo em QCD — assim como no limite large- β_0 . A qualidade das predições do último coeficiente conhecido,

$c_{4,1}$, bem como a estabilidade dos resultados entre diferentes aproximantes sinaliza que conseguimos obter uma descrição robusta de $\delta^{(0)}$ e da função de Adler em ordens altas. Na próxima seção mostraremos nossos resultados finais e realizaremos as estimativas de erros.

5.2.1 Resultados finais e estimativas de erros

Ao produzir nossos resultados finais, vamos tentar ser o mais conservadores possível. Extraímos nossas estimativas finais para os coeficientes de ordens mais altas a partir dos oito aproximantes das Tabelas 3 e 4, incluindo, assim, aqueles que tinham apenas três coeficientes como parâmetros de entrada. Ao fazê-lo, utilizamos os Padés que pertencem a diferentes sequências e podemos obter uma estimativa de erro mais confiável para os nossos coeficientes finais. Como uma das características mais marcantes desses resultados é sua estabilidade, não tentaremos favorecer um aproximante sobre outro, mesmo que se possa tentar investigar sua estrutura analítica em detalhes com esse objetivo em mente. Nossa estimativa final dos coeficientes e do valor verdadeiro de $\delta^{(0)}$ é obtida como uma média dos oito resultados das Tabelas 3 e 4. A essas médias, adicionamos um erro igual à máxima diferença encontrada entre os coeficientes obtidos a partir de dois aproximantes diferentes. Este erro, certamente, não deve ser interpretado num sentido estatístico; ele fornece um intervalo onde espera-se encontrar o valor do coeficiente.

Este procedimento, aplicado ao coeficiente a 6-loops, $c_{5,1}$, fornece o seguinte resultado,

$$c_{5,1} = 277 \pm 51, \quad (5.13)$$

o que é mais que o suficiente para cobrir todos os resultados obtidos de nossas melhores aproximações. Portanto, em um sentido, nossa estimativa de erro poderia até ser considerada como muito conservativa — mesmo que muito menor do que outras estimativas da literatura, porém, com base no que sabemos sobre os coeficientes da série, parece extremamente improvável que o coeficiente a 6-loops não esteja dentro desses limites. Por exemplo, na Referência (19), a estimativa $c_{5,1} = 283 \pm 142$ é utilizada, enquanto na Referência (79) encontra-se $c_{5,1} = 145 \pm 100$ (usando apenas informações parciais sobre o coeficiente de 5-loops). O valor obtido a partir do princípio de Convergência Aparente mais Rápida (FAC, do inglês *Fastest Apparent Convergence*) na Referência (17) é $c_{5,1} = 275$, notavelmente, próximo ao nosso valor central final, dado pela Eq. (5.13). Recentemente, outras duas estimativas foram obtidas para o coeficiente a 6-loops. A primeira foi obtida a partir do estudo de mapeamento conforme em conjunto com o esquema C , fornecendo $c_{5,1} = 287 \pm 40$. (82) A segunda foi extraída a partir de uma atualização dos valores de entrada do modelo de renormalons da Referência (19), cujo valor do coeficiente é dado por $c_{5,1} = 245$. (83) Novamente, os valores da literatura estão muito próximos da estimativa obtida neste trabalho.

Os resultados para os coeficientes $c_{6,1}$ e de ordem mais alta estão mostrados na

Tabela 5 – Valores finais para os coeficientes da função de Adler em QCD obtidos a partir de PAs aplicados a função $\delta_{\text{FO}}^{(0)}$.

$c_{5,1}$ 277 ± 51	$c_{6,1}$ 3460 ± 690	$c_{7,1}$ $(2.02 \pm 0.72) \times 10^4$	$c_{8,1}$ $(3.7 \pm 1.1) \times 10^5$
$c_{9,1}$ $(1.6 \pm 1.4) \times 10^6$	$c_{10,1}$ $(6.6 \pm 3.2) \times 10^7$	$c_{11,1}$ $(-5 \pm 57) \times 10^7$	$c_{12,1}$ $(2.1 \pm 1.5) \times 10^{10}$

Fonte: BOITO; MASJUAN; OLIANI. (44)

Tabela 5. Os valores finais para os coeficientes da função de Adler foram extraídos com erros razoáveis até o termo $c_{10,1}$. Deve-se observar que devido à supressão de α_s em ordens mais altas, um erro que parece grande no coeficiente não se traduz em uma incerteza muito grande para a soma da série. A situação muda apenas para $c_{11,1}$. Seis dos PAs das Tabelas 3 e 4 predizem que a alternância de sinal começa neste coeficiente. Contudo, dois dos aproximantes não predizem isso, o que leva a um erro enorme. Portanto, encontramos algumas indicações de que a alternância de sinal dos coeficientes da função de Adler começa na décima primeira ordem (em concordância com a Referência (19)). Isto concorda com a nossa expectativa de que a singularidade UV na QCD deveria ser menos dominante que em large- β_0 . Esta instabilidade sinaliza que nossos resultados deixam de ser totalmente confiáveis na décima primeira ordem.

Aplicamos o mesmo procedimento descrito acima para obter uma estimativa para o valor verdadeiro de $\delta^{(0)}$ usando os resultados da última coluna das Tabelas 3 e 4. Usando $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,316 \pm 0,010$ (58), isto leva a

$$\delta^{(0)} = 0,2050 \pm (0,0067)_{\text{PAs}} \pm (0,0130)_{\alpha_s}, \quad (5.14)$$

onde o primeiro erro é estimado a partir do intervalo dos PAs e o segundo erro é devido à incerteza em α_s .

Este resultado pode ser comparado com o modelo de Borel da Referência (19) que fornece (com $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,316 \pm 0,010$)

$$\delta_{\text{BM}}^{(0)} = 0,2047 \pm (0,0029)_{\text{BM}} \pm (0,0130)_{\alpha_s} \quad (\text{a partir da Ref. (19)}), \quad (5.15)$$

e com a estimativa baseada no melhor esquema C

$$\delta_C^{(0)} = 0,2047 \pm (0,0034)_C \pm (0,0133)_{\alpha_s} \quad (\text{a partir da Ref. (42)}). \quad (5.16)$$

Na Eq. (5.16) a primeira incerteza é devida ao truncamento da série assintótica, enquanto na Eq. (5.15) esta incerteza surge das variações do valor de entrada do coeficiente $c_{5,1}$, dentro de suas suposições. Em todos os casos a segunda incerteza deriva de α_s . A impressionante semelhança destes três resultados é bastante extraordinária, uma vez que eles são obtidos

a partir de métodos independentes. No nosso caso, os coeficientes conhecidos da série são as únicas entradas usadas para construir os PAs e prever o comportamento da série em ordens altas. No caso da Referência (19), a função de Adler é modelada usando o conhecimento disponível sobre os renômalons dominantes, enquanto o resultado a partir do esquema C é baseado na escolha do esquema de renormalização que usa de forma otimizada as informações disponíveis no espírito de uma série assintótica. Este último também pode ser considerado como independente de modelo, uma vez que nenhuma suposição sobre ordens superiores ou a estrutura de renômalons da função de Adler é feita. Mais recentemente, duas outras análises apareceram em que o valor de $\delta^{(0)}$ é obtido. Na Referência (84), usando o Princípio da Máxima Conformalidade (PMC, do inglês *Principle of Maximum Conformality*) o resultado

$$\delta_{\text{PMC}}^{(0)} = 0,2035 \pm (0,0030)_{\text{PMC}} \pm (0,0123)_{\alpha_s} \quad (\text{a partir da Referência (84)}) \quad (5.17)$$

é obtido, onde o primeiro erro é novamente devido a ordens mais altas e o segundo vem de α_s . Este resultado também está em bastante concordância com o nosso. Na Ref. (85), através do uso de variações de esquema C , junto com o Mapeamento Conforme (CM, do inglês *Conformal Mapping*) otimizado que depende da localização dos renômalons dominantes, forneceu o valor

$$\delta_{\text{CM}}^{(0)} = 0,2018 \pm (0,0211)_{\text{CM}} \pm (0,0123)_{\alpha_s} \quad (\text{a partir da Referência (85)}), \quad (5.18)$$

onde a primeira incerteza vem do truncamento da série assintótica e a segunda vem do acoplamento forte. Este resultado é também muito compatível com os outros mencionados nesta seção.

Com os coeficientes da Tabela 5, finalmente estamos em posição de mostrar, na Figura 20, a expansão perturbativa de $\delta^{(0)}$ e compará-la com o valor verdadeiro da série obtido a partir da Eq. (5.14). As bandas nas expansões perturbativas da Figura 20 representam as incertezas vindas a partir dos coeficientes da série, dado na Tabela 5, enquanto a banda da soma de Borel da série representa a primeira incerteza da Eq. (5.14). Incluímos também uma estimativa da soma de Borel da série em CIPT. Este resultado é obtido do resultado em FOPT e da separação assintótica definida na Eq. (3.28). Aqui incluímos nesta estimativa somente a contribuição do renômalon em $u = 2$, que é responsável por mais de 98% da separação assintótica. (22) Para a descrição do polo em $u = 2$ utilizamos a normalização obtida na Referência. (24)

As incertezas que podemos obter a partir dos melhores aproximantes de Padé nos permitem concluir que a série em FOPT é o procedimento de configuração de escala de renormalização favorecido no caso da QCD completa. A série CIPT, mesmo que pareça mais estável em torno da quarta ordem, não aproxima muito bem o valor central da soma da série. A recomendação de que FOPT é o melhor procedimento em QCD foi defendido na Referência (19) no contexto de modelo de renômalons. Aqui, isto é reobtido

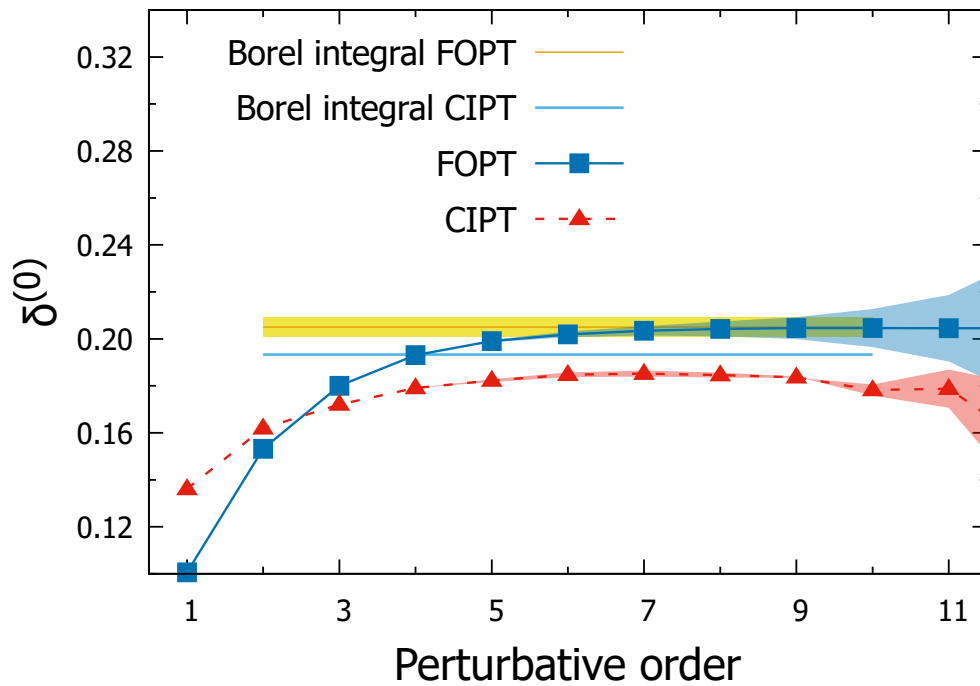


Figura 20 – Resultado final para $\delta^{(0)}$ na QCD usando os coeficientes da Tabela 5 e o resultado da Eq. (5.14). As bandas nas expansões perturbativas refletem a incerteza dos coeficientes, enquanto a banda na soma da série é obtida a partir do intervalo de valores a partir dos PAs individuais (últimas colunas das Tabelas 3 e 4). Usamos $\alpha_s(m_\tau^2) = 0,316$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de uma maneira totalmente independente de modelo, mesmo com os novos resultados das Referências. (22,68)

6 RENÔRMALONS NOS MOMENTOS DA FUNÇÃO ESPECTRAL

Como já dito anteriormente, na extração de α_s a partir dos decaimentos hadrônicos do τ e do espalhamento $e^+e^- \rightarrow$ (hádrons) abaixo da massa do quark c (7–9, 32, 67), que ocorrem em energias relativamente baixas, são utilizados vários momentos integrados da função espectral. A partir destes momentos pode-se construir pseudo-observáveis dados por, no caso concreto dos decaimentos do tau,

$$R_{\tau, V/A}^{(w_i)}(s_0) = 12\pi S_{EW} |V_{ud}|^2 \int_0^1 dx w_i(x) \left[\text{Im}\Pi_{V/A}^{(1+0)}(xs_0) + \frac{2x}{1+2x} \text{Im}\Pi_{V/A}^{(0)}(xs_0) \right], \quad (6.1)$$

onde $w_i(x)$ é a função peso. Com o intuito de cumprir o requerimento de uma FESR, de que a função peso seja analítica, costuma-se utilizar polinômios, que podem ser escritos em termos da expansão em monômios como a seguir

$$w_i(x) = \sum_{k=0} b_k^{(w_i)} x^k. \quad (6.2)$$

Do lado experimental, essas funções peso enfatizam diferentes regiões da função espectral, podendo destacar porções de baixa ou alta energia, por exemplo. Já do ponto de vista teórico, a escolha da função peso está diretamente relacionada com física não-perturbativa. Por exemplo, um tipo de função peso que possui grande importância nesses processos é a chamada pinçada, que é nula em $x = 1$, e tem $b_0^{(w_i)} = 1$, essa característica suprime as contribuições vindas das violações de dualidade, enfatizando a contribuição perturbativa, o que pode ser benéfico para a extração do acoplamento. Um bom exemplo deste tipo de função peso é obtido a partir momento cinemático dos decaimentos hadrônicos do τ , dada por

$$w_\tau(x) = (1-x)^2(1+2x) = 1 - 3x^2 + 2x^3. \quad (6.3)$$

Outra classe importante de funções peso são as que contém termos lineares em x , uma vez que esse termo linear está diretamente relacionado com as correções da OPE de dimensão $D = 4$, dadas pelo condensado de glúons e que será de grande importância para este trabalho (uma revisão sobre os diferentes tipos de momentos integrados pode ser encontrada na Referência (33)).

Com a finalidade de aprofundar os conhecimentos sobre os renôrmalons e a conexão entre estes e o comportamento perturbativo dos momentos integrados mais utilizados na literatura, tanto em large- β_0 como na QCD completa, iremos discutir em detalhes as duas classes de funções mencionadas acima, em especial, iremos analisar o conteúdo de renôrmalons da transformada de Borel da função $\delta_{w_i}^{(0)}$ em comparação com os renôrmalons da função de Adler. Os resultados apresentados aqui estão publicados na Referência. (45)

6.1 Resultados em large- β_0

Como é usual na área e já foi feito anteriormente no Capítulo 5, iremos iniciar os estudos dos renormalons da função $\delta_{w_i}^{(0)}$ no limite large- β_0 da QCD (26), limite este deduzido no Capítulo 4 deste trabalho.

Em large- β_0 a transformada de Borel da função de Adler é conhecida em todas as ordens em teoria de perturbação e pode ser escrita de forma compacta (26, 71, 72) dada pela Eq. (4.44), deduzida nos capítulos anteriores. Este resultado nos mostra explicitamente as singularidades devidas aos renormalons. Essas singularidades, tanto UV como IR, são compostas por um polo duplo e um polo simples, com exceção do polo IR dominante em $u = 2$, que é simples. Os polos IR são particularmente importantes na discussão a seguir, em particular, sua conexão com os condensados da OPE. Como já mencionado anteriormente, cada polo IR que aparece em uma dada posição $u = p$ na transformada de Borel da função de Adler pode ser mapeado nas contribuições de dimensão $D = 2p$ da OPE. (26) Isso explica, por exemplo, a ausência de um polo em $u = 1$, já que não existe um condensado de dimensão $D = 2$ na OPE que seja invariante de Gauge. Esta conexão não-trivial entre física perturbativa e não perturbativa também pode ser observada na transformada de Borel da função $\delta_{w_i}^{(0)}$.

Portanto, utilizando a representação integral de Borel da função de Adler, Eq. (3.12), e a Eq. (2.40) podemos escrever a transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ de uma forma fechada, logo

$$\delta_{w_i}^{(0)}(s_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi W_i(e^{i\phi}) \int_0^{\infty} dt e^{-t/\alpha_s(-s_0 e^{i\phi})} B[\widehat{D}](t), \quad (6.4)$$

onde fizemos a troca de variável $x = e^{i\phi}$. A evolução de α_s em função do parâmetro Λ , no limite large- β_0 , é dada por

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{\beta_1}{2\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right). \quad (6.5)$$

Portanto, a exponencial da Eq. (6.4) pode ser escrita como

$$e^{-t/\alpha_s(-s_0 x)} = e^{-t/\alpha_s(s_0)} e^{-iu(\phi-\pi)}. \quad (6.6)$$

Invertendo a ordem de integração e usando a Eq. (3.12) pode-se escrever a transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ como

$$B[\delta_{w_i}^{(0)}](u) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi W_i(e^{i\phi}) e^{-iu(\phi-\pi)} \right] B[\widehat{D}](u). \quad (6.7)$$

A integral da Eq. (6.7) pode ser calculada analiticamente para funções pesos polinomiais.

Para um monômio geral $w_i(x) = x^n$ encontramos

$$\begin{aligned} B[\delta_{x^n}^{(0)}](u) &= \frac{2}{1+n-u} \frac{\text{sen}(\pi u)}{\pi u} B[\widehat{D}](u), \\ &= \frac{2}{1+n-u} \frac{\text{sen}(\pi u)}{\pi u} \frac{32}{3\pi} \frac{e^{(C+5/3)u}}{(2-u)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{[k^2 - (1-u)^2]^2}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde na segunda igualdade deixamos explícita a expressão para $B[\widehat{D}](u)$. Notemos que a Eq. (6.8) é uma generalização da Eq. (4.46), obtida para o momento cinemático do τ . Pode-se ver imediatamente que os zeros do termo $\text{sen}(\pi u)$ reduz um infinito número de polos UV e IR em $B[\widehat{D}](u)$ para polos simples. Neste sentido, pode-se dizer que $B[\delta_{w_i}^{(0)}](u)$ é significativamente menos singular que a transformada de Borel da função de Adler, um fato que foi explorado na Referência. (44)

O termo que multiplica $B[\widehat{D}]$ na Eq. (6.8) é também altamente não trivial. Este cancela o zero do $\text{sen}(\pi u)$ em $u = n + 1$, o que significa que o polo nesta posição de $B[\widehat{D}](u)$ permanece duplo (ou simples, no caso de $u = 2$). Isto claramente não é uma coincidência e está relacionado com contribuições não-perturbativas em $R_{\tau,V/A}$.

Para expor essa conexão consideremos a contribuição de $D \geq 4$ na expansão da OPE, Eq. (2.38), para $R_{\tau,V/A}$ que pode ser escrita como

$$\delta_{w_i,V/A}^{(D)}(s_0) = \frac{6\pi i}{(-s_0)^{D/2}} \oint dx \frac{w_i(x)}{x^{D/2}} C_D(x s_0). \quad (6.9)$$

Para um monômio $w_i(x) = x^n$ — e considerando que a dependência em s dos coeficientes C_D pode ser negligenciada, como já discutido anteriormente — isto se reduz a

$$\delta_{w_i,V/A}^{(D)}(s_0) = \frac{6\pi i}{(-s_0)^{D/2}} C_D \oint dx \frac{1}{x^{-n+D/2}}. \quad (6.10)$$

Para valores positivos de n , a integral na última equação somente não é nula para $-n + D/2 = 1$. Portanto, para $w_i(x) = x^n$, a única contribuição vem do condensado com $D = 2(n + 1)$ que, por sua vez, está relacionado com o polo na transformada de Borel da função de Adler em $u = n + 1$. Torna-se claro que o termo que multiplica $B[\widehat{D}]$ da Eq. (6.8) não é acidental já que o único polo em $B[\widehat{D}](u)$ que não é cancelado pelo termo $\text{sen}(\pi u)$ é justamente o polo em $u = n + 1$. Para os monômios x^n com $n \geq 0$ pode-se distinguir três casos:

- Se $n = 0$, todos os polos se tornam simples, já que não há contribuição da OPE. Em particular, o polo em $u = 2$ que era simples é exatamente cancelado e a função é regular em $u = 2$.
- Se $n = 1$, a contribuição dominante da OPE é dada para $D = 4$. O polo em $u = 2$ relacionado com esta contribuição da OPE não é cancelado e todos os outros polos IR e UV se tornam simples. Esta é uma situação distinta porque é o único caso onde $B[\delta_{x^n}^{(0)}](u)$ é singular em $u = 2$.

Tabela 6 – Resíduos dos polos dominantes na transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ para os primeiros seis monômios e para o momento cinemático dos decaimentos hadrônicos do lépton τ . Os números dentro da caixa referem-se aos resíduos de polos duplos, e todos os outros polos são simples.

$w(z)$	$u = -2$	$u = -1$	$u = 1$	$u = 2$	$u = 3$	$u = 4$	$u = 5$
1	$8,411 \times 10^{-4}$	$2,672 \times 10^{-2}$	0	0	-21,00	-18,53	-29,43
z	$6,309 \times 10^{-4}$	$1,781 \times 10^{-2}$	0	17,85	-41,99	-27,79	-39,24
z^2	$5,047 \times 10^{-4}$	$1,336 \times 10^{-2}$	0	0	6,999	-55,58	-58,86
z^3	$4,206 \times 10^{-4}$	$1,069 \times 10^{-2}$	0	0	41,99	-32,42	-117,7
z^4	$3,605 \times 10^{-4}$	$8,907 \times 10^{-3}$	0	0	21,00	55,58	-104,0
z^5	$3,154 \times 10^{-4}$	$7,634 \times 10^{-3}$	0	0	14,00	27,79	117,7
w_τ	$1,682 \times 10^{-4}$	$8,016 \times 10^{-3}$	0	0	41,99	83,37	-88,28

Fonte: BOITO; OLIANI. (45)

- Finalmente, se $n \geq 2$, todos os polos IR para $u > 2$ se tornam simples, com exceção do polo em $u = n + 1$, que permanece duplo e agora é o único polo duplo em $B[\delta_{x^n}^{(0)}](u)$ — todos os outros são reduzidos a polos simples pelo termo $\text{sen}(\pi u)$. Neste caso, o polo em $u = 2$ que corresponde a contribuição do condensado de glúons é novamente cancelado exatamente e a função é analítica em $u = 2$.

Na Tabela 6 mostramos os resíduos dos polos dominantes para os primeiros seis monômios, que são os blocos construtores para os momentos utilizados na literatura, utilizando como prescrição para a escala de renormalização $\mu^2 = s_0$. Os resíduos dos polos que mantêm a estrutura de polos simples e duplos são mostrados como números em caixas. Estes resultados podem ser usados para entender algumas características de casos específicos. Por exemplo, para o momento cinemático, Eq. (6.3), um cancelamento parcial do renormalon dominante UV é evidente: o resíduo é reduzido por um fator de, aproximadamente, 3,3, como pode ser observado na última linha da Tabela 6, onde apresentamos os resíduos para este momento. Espera-se, portanto, que a série perturbativa associada a este momento seja mais bem comportada, postergando para ordens mais altas a natureza assintótica da mesma.

Estamos agora em posição de reanalisar alguns dos resultados da Referência (33) sob a ótica desses novos resultados. Uma das principais observações da Referência (33) é que as séries perturbativas para os momentos das funções peso que contêm o monômio x tendem a apresentar um mau comportamento, no sentido de que a série nunca se estabiliza ao redor do valor verdadeiro da função. Ela exhibe o que chamamos de “comportamento descontrolado”. Isto está diretamente conectado com o fato de que as transformadas de Borel destes momentos são as únicas que possuem uma singularidade em $u = 2$.

Com o intuito de estabelecer uma correspondência entre os renormalons dominantes

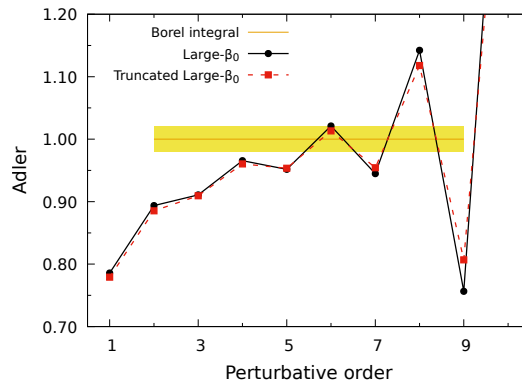


Figura 21 – Função de Adler ordem a ordem em α_s em large- β_0 e sua versão truncada que inclui apenas o renômalon dominante UV e os primeiros dois renômalons IR. Ambos os resultados estão normalizados a sua respectiva integral de Borel. A banda horizontal fornece a ambiguidade que surge dos polos IR, na prescrição da Ref. (19). Aqui usamos $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.316(10)$. (86)

Fonte: BOITO; OLIANI. (45)

e o comportamento das séries perturbativas, iremos fazer uso de um modelo ainda mais simples. Como a série é dominada pelos renômalons mais próximos da origem, podemos construir uma aproximação para este resultado em large- β_0 usando apenas o polo dominante UV e os primeiros dois polos IR, que correspondem ao truncamento da soma na Eq. (4.44) no primeiro termo, chegamos então a seguinte expressão para este modelo, usando $C = 0$ ($\overline{\text{MS}}$)

$$B[\widehat{D}]_T(u) = \frac{2e^{5u/3}}{3\pi} \left[\frac{3u - 11}{(3 - u)^2} + \frac{32}{9(2 - u)} + \frac{5u + 11}{9(1 + u)^2} \right], \quad (6.11)$$

onde o índice T indica que estamos trabalhando com o modelo truncado. Sabemos, a partir dos trabalhos das Referências (19, 33, 44), que modelos minimalísticos deste tipo são suficientes para capturar as principais características do resultado completo em large- β_0 . Na Figura 21 confirmamos essa expectativa onde mostramos os resultados para a função de Adler em large- β_0 e sua versão truncada, normalizada ao valor da integral de Borel para cada caso, o que remove um efeito geral de normalização que é irrelevante aqui. Nesta Figura vemos que os resultados são essencialmente idênticos. Notemos que a simplicidade deste modelo apenas permite o estudo dos momentos que são relacionados aos condensados de dimensão $D = 4$ e $D = 6$.

Começamos considerando o momento $w_i(x) = x$. A expansão perturbativa de $\delta_x^{(0)}$ no modelo truncado para FOPT e CIPT é mostrada na Figura 22(a). A série FOPT mostra o “comportamento descontrolado” identificado na Referência. (33) Ela, primeiro, ultrapassa o valor verdadeiro e após isso cruza de volta e avança em direção ao regime assintótico sem apresentar nenhuma região estável. A série CIPT tem um comportamento melhor mas também ultrapassa o valor verdadeiro e então avança em direção ao comportamento assintótico com coeficientes que alternam sinais em ordens muito mais baixas do que em

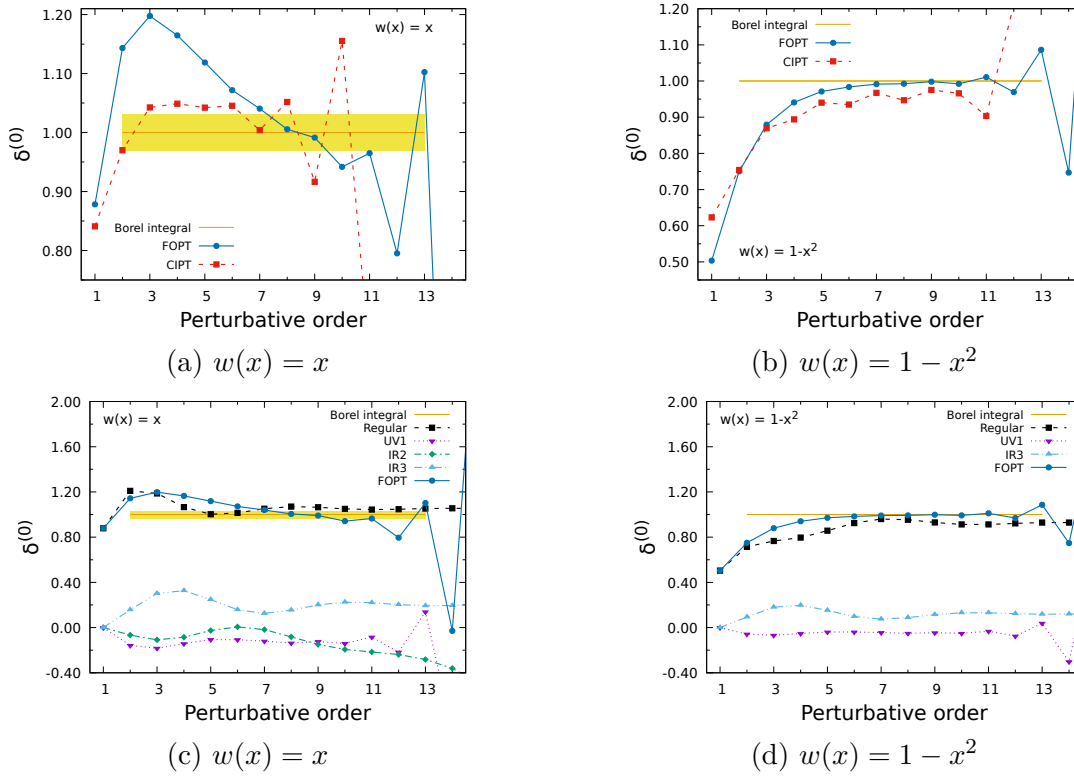


Figura 22 – Série perturbativa para os momentos $w_i(x) = x$ e $w_i(x) = 1 - x^2$ ordem a ordem em α_s na versão truncada do limite large- β_0 (veja o texto para detalhes) com $s_0 = m_\tau^2$ (figuras superiores). Nas figuras inferiores vemos a separação das contribuições das singularidades dominantes para os mesmos momentos em FOPT. Os resultados estão normalizados a suas respectivas integrais de Borel. A banda horizontal representa a ambiguidade que surge dos renormalons IR, calculadas como na Referência. (19)

Fonte: BOITO; OLIANI. (45)

FOPT. Para entender este padrão podemos usar a transformada de Borel de $\delta_x^{(0)}$ que é bastante simples no modelo truncado,

$$B[\delta_x^{(0)}]_T(u) = \frac{4e^{5u/3}\text{sen}(\pi u)}{27\pi^2} \left[\frac{8}{u} + \frac{8(5u-4)}{3(2-u)^2} - \frac{(13u+19)}{3(1+u)^2} - \frac{(17u-57)}{(3-u)^2} \right]. \quad (6.12)$$

O resultado apresenta um polo UV em $u = -1$, bem como polos IR em $u = 2$ e $u = 3$. Todos os polos são simples devido aos zeros de $\text{sen}(\pi u)$ no pré-fator. Notemos também que a transformada de Borel têm uma parte regular que deriva do primeiro termo dentro dos colchetes. Na Figura 22(c) mostramos as diferentes contribuições para a série perturbativa FOPT. A série é dominada pela contribuição regular que inicialmente ultrapassa o valor verdadeiro. Em altas ordens, os primeiros polos IR e UV ditam a tendência e a série nunca estabiliza em torno do valor verdadeiro. A contribuição IR é negativa e é responsável pelo “comportamento descontrolado” com uma sobreposição da alternância de sinal imposta pelo polo UV.

Voltemos agora aos momentos pinçados que não contêm um termo x . Na Fi-

gura 22(b), mostramos os resultados para $w_i(x) = 1 - x^2$. A transformada de Borel de $\delta_{1-x^2}^{(0)}$ é regular em $u = 2$ e o polo dominante UV é parcialmente cancelado, como podemos inferir dos resultados da Tabela 6. Isto se traduz em uma série mais suave. Agora a série FOPT se aproxima do valor verdadeiro e permanece estável em torno dele por várias ordens antes de entrar no regime assintótico, quando o polo dominante UV assume. O resultado para CIPT, por outro lado, é menos preciso, se aproxima da soma de Borel da série apenas quando o comportamento assintótico já foi estabelecido.

Finalmente vamos comentar os resultados para $w_i(x) = 1$. Este momento está entre estes dois casos extremos que discutimos acima. Ele também se beneficia do fato de ser regular em $u = 2$ mas o cancelamento parcial das singularidades que acontece com os momentos pinçados não está presente. Neste caso FOPT é capaz de se aproximar do resultado, apesar de ultrapassá-lo nos primeiros quatro coeficientes ou mais. Omitimos as figuras neste caso por uma questão de brevidade (o resultado, no contexto dos modelos de Borel, pode ser encontrado na Referência (33)). Pode-se, finalmente, notar que, em geral, a série perturbativa para $\delta_{w_i}^{(0)}$ é melhor comportada do que a série da função de Adler. A alternância de sinal na função de Adler têm início já em $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ ou $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$ e a série perturbativa nunca se estabiliza em torno da soma de Borel. Isto não impede, contudo, que momentos pinçados sem o termo linear x apresentem um comportamento perturbativo muito bom, como pode ser visto na Figura 22(b).

6.1.1 Conclusões parciais

A partir do estudo dos momentos da função espectral em large- β_0 e sua versão truncada podemos chegar a algumas conclusões. Em primeiro lugar, a transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ para funções peso polinomiais é menos singular que a transformada de Borel da função de Adler. O termo que multiplica $B[\widehat{D}]$ na expressão de $B[\delta_{w_i}^{(0)}](u)$ cancela um número infinito de polos. Precisamente por esta razão, as expansões perturbativas de $\delta_{w_i}^{(0)}$ são, em geral, mais suaves do que a expansão perturbativa da função de Adler.

Também temos que o padrão dos polos remanescentes na transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ pode ser entendido em termos das contribuições dos condensados da OPE. A transformada de Borel tem um pólo em $u = 2$ se, e somente se, a função peso apresentar um termo proporcional a x . O comportamento da série perturbativa associada com estes momentos é qualitativamente diferente e o valor verdadeiro da série não é bem aproximado por nenhuma das séries, seja FOPT, seja CIPT, como já discutido na Referência (33). A transformada de Borel dos momentos $w_i(x) = x^n$, com $n > 1$ apresenta apenas um polo duplo em $u = n + 1$ relacionado com o condensado da OPE com dimensão $D = 2(n + 1)$, no sentido da Eq. (6.10).

Finalmente, momentos pinçados que não contém um termo proporcional a x são particularmente estáveis. Suas transformadas de Borel são regulares em $u = 2$ e há um

cancelamento parcial do renormalon dominante UV, que se traduz em séries mais suaves. Essas séries são bem descritas por FOPT enquanto CIPT avança para o comportamento assintótico já em $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ ou $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$.

A seguir iremos discutir o caso da QCD. Com o uso do esquema C e da transformada de Borel modificada, já introduzidas anteriormente, é possível mostrar que os resultados em QCD são muito similares aos obtidos no limite large- β_0 .

6.2 Resultados na QCD

Dois ingredientes essenciais entram na discussão da seção anterior. Primeiro, temos o conhecimento total sobre a estrutura dos renormalons da função de Adler. Em particular, sabemos quais polos existem e se eles são duplos ou simples, exatamente. Segundo, ao derivarmos a Eq. (6.8) fizemos uso da evolução de α_s a 1-loop, já que trabalhávamos no limite large- β_0 . Por outro lado, para a QCD precisamos nos contentar com um conhecimento parcial da estrutura de renormalons da função de Adler. As posições das singularidades não são modificadas, porém, os polos se transformam em pontos de ramificação e temos cortes no plano complexo. A evolução do acoplamento é muito mais complicada quando termos além de 1-loop são incluídos na função β . Com o intuito de obter uma expressão analítica para a transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$, é útil deixarmos de lado o esquema $\overline{\text{MS}}$ e trabalharmos com o esquema C , que possui uma função β particularmente simples, Eq. (2.27).

Como já dito, para esses casos, podemos fazer uso da transformada de Borel modificada. Utilizando a Eq. (3.19), vamos escrever a transformada de Borel modificada da função de Adler, na nossa notação, como

$$\mathcal{B}[\widehat{D}](t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \lambda t)}{\Gamma(n + 1 + \lambda t)} n \frac{\hat{c}_{n,1}}{\pi^n} t^n, \quad (6.13)$$

onde $\lambda = \beta_2/(\beta_1\pi)$ e $\hat{c}_{n,1}$ são os coeficientes da função de Adler no esquema C . Com essa definição, utilizando a Eq. (3.21), podemos escrever a soma de Borel da série como

$$\widehat{D}(\hat{\alpha}_s(Q^2)) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t/\hat{\alpha}_s(Q^2)} \frac{[t/\hat{\alpha}_s(Q^2)]^{\lambda t}}{\Gamma(1 + \lambda t)} \mathcal{B}[\widehat{D}](t). \quad (6.14)$$

A expansão assintótica do resultado acima é obtida utilizando as Eqs. (6.13) e (6.14) e, utilizando que

$$\int_0^{\infty} dt e^{-t/\hat{\alpha}_s} \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_s}\right)^{\lambda t} \frac{t^{n-1}}{\Gamma(1 + n\lambda t)} = \frac{\hat{\alpha}_s^n}{n}, \quad (6.15)$$

obtemos $\widehat{D} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_{n,1} \hat{\alpha}_Q^n$ (43), como esperado. Como já dito na Seção 3.2 a transformada de Borel modificada possui renormalons na mesma posição que a transformada de Borel usual, porém, o expoente é deslocado. Para demonstrar isso, vamos considerar uma transformada

de Borel que possui apenas um polo na posição p , como a seguir

$$B[\widehat{D}](u) = \frac{1}{(p-u)^\gamma}. \quad (6.16)$$

Com a expansão em série de potências em u desta transformada de Borel podemos escrever a correspondente transformada de Borel modificada em termos da função hipergeométrica como

$$\mathcal{B}[\widehat{D}](u) = \frac{1}{p^\gamma} \frac{1}{1+\lambda t} {}_2F_1(2, \gamma, 2+\lambda t; \frac{u}{p}), \quad (6.17)$$

usando que $t = (2\pi u)/\beta_1$. (43) Aqui é importante comentar que esta transformada de Borel modificada não possui um polo em $t = -1/\lambda$, uma vez que a função hipergeométrica possui um zero neste ponto. Podemos investigar a singularidade em $u = p$ seguindo a Referência (43), onde fazemos o uso das fórmulas de continuação analítica da função hipergeométrica, em especial a fórmula a seguir

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) = & A_1 {}_2F_1(a, b, a+b-c+1; 1-z) + \\ & + A_2 \frac{1}{(1-z)^{a+b-c}} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z), \end{aligned} \quad (6.18)$$

com

$$A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad e \quad A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (6.19)$$

Aplicando as fórmulas das Eqs. (6.18) e (6.19) na Eq. (6.17), obtemos um primeiro termo proporcional a A_1 e regular em $u = p$. O segundo termo é dado por

$$\mathcal{B}[\widehat{D}](u) = \frac{1}{p^\gamma} \frac{\Gamma(\gamma-\lambda t)\Gamma(1+\lambda t)}{(1-\frac{u}{p})^{\gamma-\lambda t}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma)} {}_2F_1(\lambda t, 2-\gamma, 1-\gamma+\lambda t; 1-\frac{u}{p}) + \dots, \quad (6.20)$$

onde única singularidade se encontra na posição $u = p$. Ao expandirmos a expressão em torno de $u \sim p$ e utilizarmos que ${}_2F_1(a, b, c; 0) = 1$, o resultado é simplificado para

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[\widehat{D}](u) \sim & \frac{\Gamma(1+\frac{2\pi u}{\beta_1}\lambda)\Gamma(\gamma-\frac{2\pi p}{\beta_1}\lambda)}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{p^\gamma(p-u)^{\gamma-\frac{2\pi p}{\beta_1}\lambda}} \times \\ & \times \left[1 - \frac{\frac{2\pi p}{\beta_1}\lambda}{1+\frac{2\pi p}{\beta_1}\lambda} \left(1-\frac{u}{p}\right) \log\left(1-\frac{u}{p}\right) \right], \end{aligned} \quad (6.21)$$

com o expoente da singularidade deslocado por

$$\frac{2\pi p}{\beta_1}\lambda = +2p(\beta_2/\beta_1^2), \quad (6.22)$$

e, como anteriormente, $u = \frac{\beta_1 t}{2\pi}$. Notemos que a Eq. (6.21) apresenta as correções ao resultado dominante proporcionais a $(1-u/p)\log(1-u/p)$.

Vamos agora calcular a transformada de Borel modificada de $\delta_{w_i}^{(0)}$ no esquema C . O cálculo é muito similar com o que foi feito em large- β_0 . Usando as Eqs. (6.14) e (2.40) obtemos

$$\delta_{w_i}^{(0)}(s_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi W_i(e^{i\phi}) \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-t/\hat{\alpha}_s(-s_0 e^{i\phi})} \frac{[t/\hat{\alpha}_s(-s_0 e^{i\phi})]^{\lambda t}}{\Gamma(1+\lambda t)} \mathcal{B}[\widehat{D}](t). \quad (6.23)$$

Com o uso da Eq. (2.30) pode-se escrever

$$e^{-t/\hat{\alpha}_s(-s_0 e^{i\phi})} = e^{-t/\hat{\alpha}_s(s_0)} e^{-iu(\phi-\pi)} \left(\frac{\hat{\alpha}_s(-s_0 e^{i\phi})}{\hat{\alpha}_s(s_0)} \right)^{\lambda t}, \quad (6.24)$$

e invertendo a ordem de integração na Eq. (6.23) pode-se obter, para funções peso monomiais $w_i(x) = x^n$, o seguinte resultado (45)

$$\mathcal{B}[\delta_{x^n}^{(0)}](u) = \frac{2}{1+n-u} \frac{\text{sen}(\pi u)}{\pi u} \mathcal{B}[\widehat{D}](u). \quad (6.25)$$

Este resultado novo na literatura demonstra que a relação da Eq. (6.8) é, de fato, muito mais geral, já que qualquer esquema pode ser trazido para o esquema C , sem perda de generalidade. O pré-fator é o mesmo em QCD e em large- β_0 , e também a ênfase do renôrmalon associado com a contribuição de dimensão $D = 2(n+1)$ na OPE*.

Para avançarmos ainda mais vamos examinar a estrutura explícita das singularidades IR. Na notação da Ref. (19), as singularidades da transformada de Borel usual são escritas como

$$B[\widehat{D}_p^{\text{IR}}](u) \equiv \frac{d_p^{\text{IR}}}{(p-u)^{1-\tilde{\gamma}}} [1 + \tilde{b}_1^{(p)}(p-u) + \tilde{b}_2^{(p)}(p-u)^2 + \dots], \quad (6.26)$$

onde as constantes $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{b}_i^{(p)}$ dependem da dimensão anômala do operador associado na OPE, bem como dos coeficientes da função β . A expressão explícita para o expoente $\tilde{\gamma}$ é

$$\tilde{\gamma} = 2p \frac{\beta_2}{\beta_1^2} - \frac{\gamma_{O_d}^{(1)}}{\beta_1}, \quad (6.27)$$

onde a dimensão anômala associada com o operador O_d é definida como

$$-\mu \frac{d}{d\mu} O_d(\mu) = (\gamma_{O_d}^{(1)} a_\mu + \gamma_{O_d}^{(2)} a_\mu^2 + \dots) O_d(\mu). \quad (6.28)$$

Para a transformada de Borel modificada temos então

$$\mathcal{B}[\widehat{D}_p^{\text{IR}}](u) \sim \frac{1}{(p-u)^{1+\tilde{\gamma}-\frac{2\pi u}{\beta_1}\lambda}} = \frac{1}{(p-u)^{1-\gamma_{O_d}^{(1)}/\beta_1}}, \quad (6.29)$$

onde o primeiro fator do lado direito da Eq. (6.27) é exatamente cancelado pelo deslocamento na singularidade da Eq. (6.21). Para a discussão da transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ é crucial inspecionar o renôrmalon dominante IR. Este renôrmalon está relacionado com o condensado de glúons que pode ser expresso em termos da combinação invariante por escala $\langle aG^2 \rangle$, que tem, portanto, $\gamma_{O_{G^2}} = 0$ (87). Usando a Eq. (6.29) com $p = 2$, a singularidade dominante da função de Adler no esquema C reduz-se simplesmente a

$$\mathcal{B}[\widehat{D}_2^{\text{IR}}] \sim \frac{d_2^{\text{IR}}}{(2-u)} [1 + b_1^{(2)}(2-u) \log(2-u)]. \quad (6.30)$$

* Uma relação aproximada entre a transformada de Borel da função de Adler e a transformada de Borel de $\delta_{w_\tau}^{(0)}$ pode ser encontrada na Referência (82). O resultado da Eq. (6.25) é totalmente geral.

Aqui também apresentamos o termo subdominante onde as constantes d_2^{IR} e $b_1^{(2)}$ encapsulam todos os termos constantes e deixamos evidente somente as variáveis de interesse. Notemos que a singularidade dominante da Eq. (6.30) é um polo simples, exatamente como no limite large- β_0 . Isto é notável porque, com a Eq. (6.25) pode-se traduzir, diretamente, muitas das nossas conclusões em large- β_0 para QCD, em particular, $\mathcal{B}[\delta_{w_i}^{(0)}](u)$ possui um polo em $u = 2$ se, e somente se, a função peso apresentar um termo proporcional a x , conclusão esta que continua válida mesmo considerando o termo subdominante. A conclusão que $\mathcal{B}[\delta_{w_i}^{(0)}](u)$ é menos singular também permanece válida, e também é verdade que a singularidade associada com contribuições na OPE a qual o momento está relacionado não é alterada pelo pré-fator da Eq. (6.25).

De acordo com a discussão acima, e com os resultados das Eqs. (6.25) e (6.30), aprendemos que os mesmos mecanismos de supressão, ênfase, e cancelamento dos renormalons identificados em large- β_0 são válidos também para QCD. As semelhanças entre os dois casos foram identificadas na Referência (33) mas a conexão explícita com os renormalons de $\mathcal{B}[\delta_{x_i}^{(0)}]$ não foi investigada naquele trabalho e aparece pela primeira vez aqui. Apesar de em QCD termos apenas informações parciais sobre os renormalons, em particular não sabemos qual o valor do seu numerador, podemos especular que a razão por trás do bom ou mau comportamento perturbativo dos diferentes momentos tem origem na mesma interação entre os renormalons de $\mathcal{B}[\delta_{w_i}^{(0)}]$.

Aqui estudamos a série perturbativa da QCD para diferentes momentos usando a reconstrução independente de modelo dos coeficientes de ordens mais altas obtidos no Capítulo 5 (44), onde o método matemático dos aproximantes de Padé foi usado para descrever a série, em especial, os valores usados para os coeficientes da série perturbativa da função de Adler podem ser vistos na Tabela 5. Na Figura 23 mostramos os resultados para quatro momentos emblemáticos, em FOPT e CIPT, com $s_0 = m_\tau^2$ e no $\overline{\text{MS}}$; as bandas sombreadas representam a incerteza que deriva do método dos aproximantes de Padé, como discutido na Referência. (44) Nas Figuras 23(a) e 23(b) são mostrados os resultados para dois momentos que apresentam um bom comportamento perturbativo: w_τ e $w_i(x) = 1 - x^2$, respectivamente. A banda amarela horizontal representa uma estimativa para a integral de Borel dos momentos em FOPT utilizando a descrição dos aproximantes de Padé. A linha azul claro horizontal representa a integral de Borel em CIPT. Esta linha foi calculada através da separação assintótica discutida na Seção 3.2 dada pela Eq. (3.28) utilizando o esquema C , levando-se em conta somente a contribuição do primeiro renormalon IR, em $u = 2$, com a normalização deste renormalon obtida na Referência (24), portanto se trata de uma aproximação ao resultado de CIPT (curva vermelha) mostrado nas Figuras 23(a) e 23(b). Além disso, ressaltamos aqui que não mostramos essa linha nas Figuras 23(c) e 23(d) pois a AS é mal definida para momentos com termo linear em x , cujas expansões nunca se estabilizam. Novamente, a série FOPT se aproxima do valor verdadeiro, como predito pelos aproximantes de Padé, e é bastante estável em torno dele até, pelo menos, a

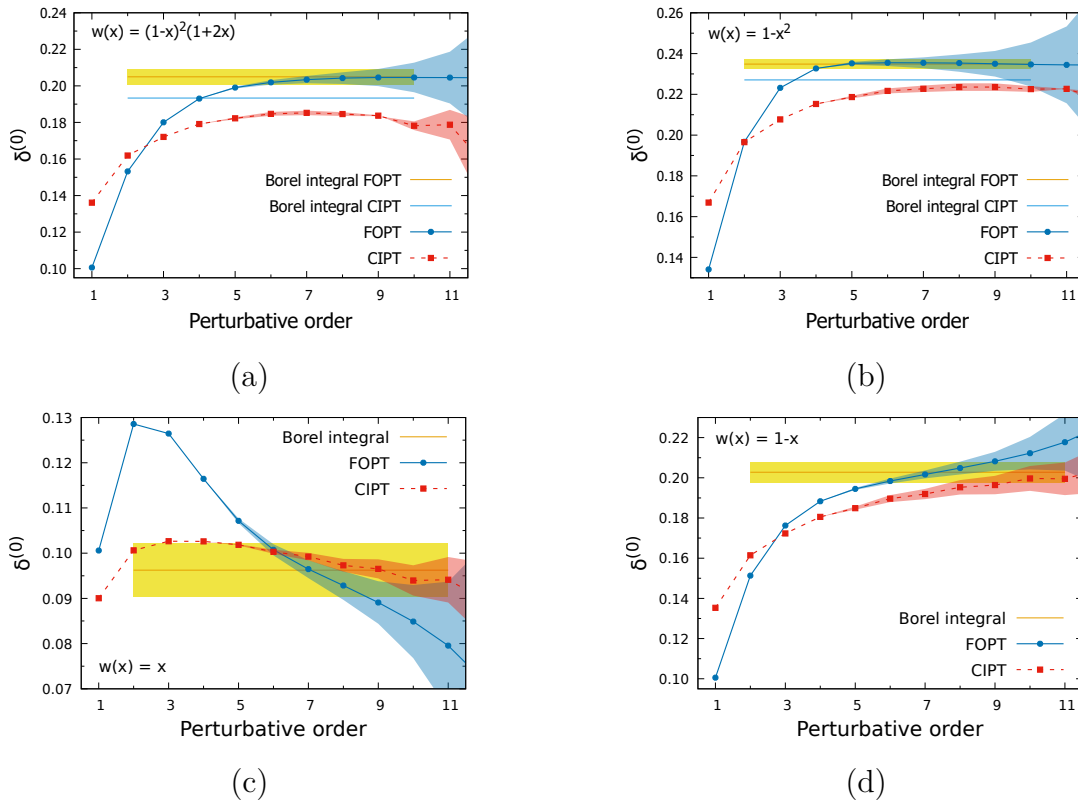


Figura 23 – A série perturbativa para quatro momentos emblemáticos ordem a ordem em α_s usando a reconstrução das ordens altas da série perturbativa da QCD a partir dos aproximantes de Padé da Referência (44), no $\overline{\text{MS}}$ e com $s_0 = m_\tau^2$. As bandas sombreadas representam as incertezas associadas com os aproximantes de Padé como discutido na Referência (44). Em (a) e (b) mostramos os momentos com bom comportamento perturbativo, enquanto em (c) e (d) mostramos os resultados para os momentos contendo o termo x , que apresenta o comportamento descontrolado da série perturbativa.

Fonte: Elaborada pelo autor.

oitava ordem.

Na Figura 23(c) mostramos os resultados para os monômios $w_i(x) = x$ que intensificam o comportamento descontrolado que deriva da singularidade dominante IR, como no caso de large- β_0 exemplificado na Figura 22(a). Aqui CIPT apresenta uma concordância relativamente boa com o valor verdadeiro, mas este não é o caso para outros momentos que contêm o termo linear, como, por exemplo, o momento $w_i(x) = 1 - x$, mostrado na Figura 23(d). Este momento herda o comportamento descontrolado e ambos, FOPT e CIPT, são bastante instáveis, nunca se estabilizando em torno do valor verdadeiro.

Finalmente, pode-se corroborar nossa conclusão de que o mau comportamento perturbativo dos momentos que contêm o termo linear está relacionada com a singularidade dominante IR considerando o “modelo alternativo” da Referência. (33) Neste caso, um modelo para a função de Adler é construído sem a singularidade dominante IR. No esquema C e usando a transformada de Borel modificada, isto significa que, para este modelo, a

transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ é regular em $u = 2$, já que no pré-fator da Eq. (6.25) o polo é cancelado pelo zero em $\sin(\pi u)$. Como mostrado na Referência (33), o comportamento descontrolado não está presente neste caso, que mostra, mais uma vez, que ele provém da singularidade dominante IR em $\mathcal{B}[\delta_{w_i}^{(0)}]$.

Concluindo, com o uso do esquema C e da transformada de Borel modificada, a relação entre a transformada de Borel da função de Adler e a transformada de Borel de $\delta_{w_i}^{(0)}$ é, formalmente, a mesma em QCD e no limite large- β_0 . As singularidades relacionadas com as contribuições da OPE são igualmente enfatizadas ou suprimidas e, em geral, $\delta_{w_i}^{(0)}$ é significativamente menos singular que a função de Adler. No caso do renômalon dominante IR, a situação é muito similar, pois é um polo simples com pequenas correções logarítmicas. Logo, as consequências fenomenológicas são as mesmas: momentos com um termo linear em x apresentam um comportamento perturbativo instável. Finalmente, os momentos com bom comportamento perturbativo em large- β_0 também são bem comportados em QCD, pelo menos se FOPT é usado. Os resultados a partir da reconstrução independente de modelo da série utilizando os aproximantes de Padé são qualitativamente similares ao “modelo de Borel” das Referências (19,33) o qual atesta a robustez das nossas conclusões.

6.3 Truncamento ótimo com variações de esquema

Vamos concluir este trabalho com uma discussão sobre o truncamento ótimo de séries assintóticas associadas com momentos que apresentam bom comportamento perturbativo. Nas Referências (42,88) é sugerido que, no espírito de uma série assintótica, o truncamento ótimo da expansão perturbativa da função de Adler e do momento integrado é alcançado através da escolha do esquema (ou escala) em que o último coeficiente conhecido da série se torna nulo. Neste caso, por construção, o menor termo da série, que é zero, é precisamente o último termo conhecido, o que o torna o ponto ideal para o truncamento ótimo da série assintótica. Através deste procedimento, espera-se fazer o máximo uso das informações disponíveis da QCD perturbativa. Aqui vamos mostrar que este tipo de otimização funciona muito bem em FOPT para todos os momentos com bom comportamento perturbativo, na reconstrução da série fornecida pelos aproximantes de Padé da Referência. (44)

Vamos trabalhar no esquema C e fazer variações no parâmetro contínuo C de esquema. Contudo, como discutido na Seção 2.2, neste esquema, transformações de escala e esquema são, essencialmente, equivalentes, e o mesmo resultado pode ser alcançado por variações na escala de renormalização.

Vamos ilustrar o procedimento com um exemplo de um caso concreto. A expansão

FOPT para $w_i(x) = 1 - x^2$ e $s_0 = m_\tau^2$ no esquema C é dada por

$$\begin{aligned} \delta_{1-x^2}^{(0)} = & 1,333\hat{a}_Q + (6,186 + 3C)\hat{a}_Q^2 + (27,77 + 33,17C + 6,750C^2)\hat{a}_Q^3 \\ & + (119,4 + 246,4C + 124,0C^2 + 15,19C^3)\hat{a}_Q^4 \\ & + (90,73 + 1512C + 1329C^2 + 398,9C^3 + 34,17C^4 + 1,333c_{5,1})\hat{a}_Q^5 + \dots, \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde mostramos as contribuições dos quatro coeficientes conhecidos exatamente (até, e incluindo, α_s^4) e a primeira contribuição desconhecida, proporcional a $c_{5,1}$. Na ordem α_s^5 , os termos sem $c_{5,1}$ dependem apenas dos coeficientes da função β e dos coeficientes $c_{n,1}$ com $n \leq 4$, que são conhecidos exatamente. É costume adicionarmos o quinto termo em análises realísticas de α_s através de uma estimativa de $c_{5,1}$, onde neste trabalho utilizaremos o valor obtido na Eq. (5.13) e reproduzido aqui novamente dado por $c_{5,1} = 277 \pm 51$ (44) — mas veremos que os resultados não dependem fortemente do valor de $c_{5,1}$.

O truncamento otimizado é obtido ao encontrarmos o valor (ou valores) de C para o qual o coeficiente de \hat{a}_Q^5 se anula. No caso de $w_i(x) = 1 - x^2$, para FOPT e com o nosso valor central de $c_{5,1}$ pode-se encontrar dois valores: $C_1 = -1,463$ e $C_2 = -0,4763$. O primeiro valor nos leva a uma série ainda mais instável, logo descartamos esse valor, pois para valores tão negativos de C o acoplamento entra no regime não-perturbativo [$\hat{a}_s(C_1, m_\tau^2) = 0,531$] como mostrado na Figura 7, enquanto o último ainda está no regime perturbativo [$\hat{a}_s(C_2, m_\tau^2) = 0,355$] e gera o resultado otimizado. Na Figura 24(a) comparamos a série otimizada para $\delta_{1-x^2}^{(0)}$ (linha pontilhada verde) com o resultado usual em $\overline{\text{MS}}$ (linha sólida azul) usando os coeficientes de ordem mais alta e a soma de Borel da descrição da Referência. (44) Pode-se ver que a série otimizada FOPT se aproxima do valor verdadeiro mais rápido do que o resultado em $\overline{\text{MS}}$, já em $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$, e permanece bastante estável ao redor do valor. Esta otimização está relacionada com o valor mais alto de \hat{a}_s que leva a uma série que “converge” mais rápido que em $\overline{\text{MS}}$. Com a série otimizada, uma estimativa do valor verdadeiro é obtida truncando a série em $\mathcal{O}(\hat{a}_s^5)$, e é dada por

$$\delta_{1-x^2}^{(0)}(\hat{a}_\tau, C = -0,4763) = 0,2358 \pm 0,0017, \quad (6.32)$$

onde a incerteza é devida a variação de $c_{5,1}$ dentro de um sigma. Fica claro, a partir da Figura 24(a), que isso leva a uma excelente concordância com o resultado verdadeiro — como predito a partir dos resultados do Capítulo 5 (44) — que é dado por $0,2364 \pm 0,0020$. Deve-se ressaltar também que o procedimento é bastante independente do valor de $c_{5,1}$ que é usado. A incerteza devida ao valor de α_s , por exemplo, seria uma ordem de magnitude maior que a incerteza mostrada na Eq. (6.32). Uma tentativa de aplicar o mesmo procedimento na série CIPT não leva a nenhuma melhoria significativa com respeito ao (já ruim) resultado obtido em $\overline{\text{MS}}$, como mostrado nas linhas vermelha e roxa da Figura 24.

A otimização também pode ser aplicada ao momento cinemático, w_τ . O resultado é, novamente, muito bom e a aceleração da série é ainda mais óbvia, como mostrado na

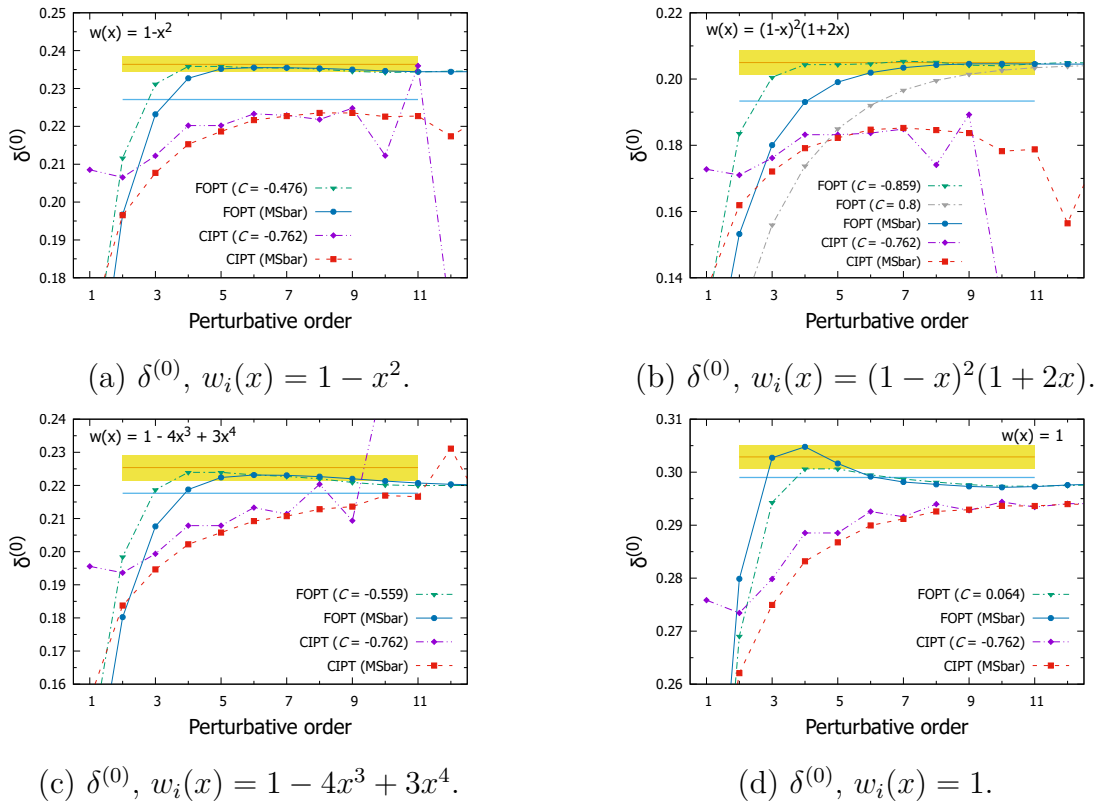


Figura 24 – Série perturbativa de FOPT e CIPT, para $s_0 = m_\tau^2$, no $\overline{\text{MS}}$ e no esquema C ótimo para três momentos com bom comportamento perturbativo (a), (b) e (c), e também para o momento $w_i(x) = 1$, em (d). Em (b) os resultados em cinza mostram uma série com valor alto de C , para propósitos de ilustração. Os coeficientes em $\mathcal{O}(\alpha^5)$ e mais altas, assim como a soma de Borel, foram obtidos a partir da descrição com aproximantes de Padé. (44) Aqui nos abtemos de mostrar a banda de erro em cada uma das séries perturbativas para evitar bagunçar as figuras.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24(b). Para ilustração, mostramos também, em cinza, a série em um esquema com alto valor de C , a saber $C = 0,8$, para o qual $\hat{\alpha}_s(C = 0,8, m_\tau^2) = 0,2554$. Pode-se ver que em um esquema cujo acoplamento tem um valor muito pequeno a convergência é suave, mas muito devagar para propósitos práticos, onde apenas os primeiros termos estão disponíveis. Resultados similares podem ser obtidos para outros momentos que têm um bom comportamento perturbativo. Como exemplo, na Figura 24(c) mostramos o resultado da otimização de um dos momentos pinçados introduzido na Referência. (8)

É interessante também analisarmos um caso limite, dado pelo momento $w_i(x) = 1$. Este não é um momento com um mau comportamento perturbativo (pois não contém um termo linear em x), mas também não está entre as séries perturbativas mais estáveis, já que ele não se beneficia do cancelamento parcial dos renômalons. O resultado neste caso é mostrado na Figura 24(d). Aqui a série em $\overline{\text{MS}}$ ultrapassa o valor verdadeiro na $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$. Neste caso, o valor de C que otimiza o truncamento é positivo e o esquema ótimo tem um valor menor de $\hat{\alpha}_s$ do que em $\overline{\text{MS}}$. A otimização é alcançada evitando a superação do

valor verdadeiro, que é proeminente na série em \overline{MS} . O resultado final é mais estável do que em \overline{MS} e pode-se esperar uma incerteza menor a partir do truncamento da série, mas a aceleração não é muito significativa.

No caso de CIPT, também é possível encontrar, para cada momento, um valor de C relacionado com o truncamento ótimo, mas também é possível ver que o resultado está longe de ser ideal. Em todos os casos da Figura 24 vemos que a integral de Borel de CIPT (linha azul claro horizontal) está razoavelmente acima do valor esperado pelo método do truncamento ótimo. Porém, é importante ressaltar que este valor é uma estimativa considerando apenas o primeiro renormalon IR, portanto, era um pouco esperado que o resultado não seria impressionante. Ainda assim, é razoável concluir que, embora a integral CIPT calculada seja uma estimativa, a série FOPT aproxima melhor a soma de Borel do que série CIPT.

Finalmente, momentos com mau comportamento perturbativo não melhoram de maneira significativa quando aplicamos a otimização descrita aqui. Uma expansão perturbativa mais estável para estes momentos pode ser alcançada com o método de mapeamento conforme, fazendo uso da informação sobre a localização dos renormalons. (85, 89–91) Mesmo com esta técnica, em alguns casos, a série se aproxima do valor verdadeiro apenas em ordens altas.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, investigamos os decaimentos hadrônicos do lépton τ em duas frentes diferentes. Primeiro usamos o limite large- β_0 da QCD, onde a série em α_s é conhecida em todas as ordens em teoria de perturbação, como um laboratório para estudarmos aproximações por Padé e suas variantes. Partindo do princípio de que em QCD temos apenas os quatro primeiros coeficientes da série em α_s , desenvolvemos estratégias com o objetivo de acelerar a convergência dos aproximantes. O sucesso destas estratégias pode ser entendido em termos da estrutura analítica da série da transformada de Borel. Os métodos de aceleração independentes de modelo simplificam essa estrutura suprimindo o resíduo de alguns polos ou reduzindo sua multiplicidade.

Uma supressão similar dos polos é encontrada também na transformada de Borel da função $\delta^{(0)}$ em FOPT, que automaticamente leva a uma série mais regular, logo, mais receptiva à aproximação por PAs. Exploramos este fato para mostrar que, em large- β_0 , os PAs construídos para a expansão em α_s de $\delta^{(0)}$ e os DLog PAs estruturados para a transformada de Borel $B[\delta^{(0)}]$ são as melhores estratégias independentes de modelo para extrair os coeficientes de ordens mais altas da função de Adler.

Aplicamos, então, o mesmo procedimento para a QCD completa. A excelente predição do coeficiente $c_{4,1}$, que é conhecido desde 2008 (17), bem como a impressionante estabilidade dos resultados nos dá a confiança de que o método também funciona em QCD. A partir dos PAs à expansão FOPT de $\delta^{(0)}$ e dos DLog PAs à $B[\delta^{(0)}]$ extraímos os primeiros resultados finais deste trabalho, apresentados na Tabela 5 e na Eq. (5.14). Estes resultados nos permitem reconstruir de forma muito confiável a expansão perturbativa de $\delta^{(0)}$ até a décima ordem. Finalmente, a Figura 20 mostra que nossa reconstrução independente de modelo dos coeficientes de ordens mais altas da série favorece FOPT como o melhor procedimento para fixar a escala de renormalização no entorno da massa do τ .

Devemos comentar que nossos resultados finais são similares a reconstrução da série dependente de modelo apresentada na Referência (19) e também discutida na Referência. (33) Isso dá suporte para o modelo de renormalons usado nestes trabalhos, mesmo que o uso de PAs mostre que deve-se ter cuidado ao interpretar os parâmetros de tais modelos. No caso dos modelos de renormalons, a estrutura analítica é completamente fixada, a única liberdade é deixada para os resíduos. Portanto, deve-se esperar que estes são “resíduos efetivos”, no espírito de aproximações do tipo Padé.

Em um segundo momento discutimos em detalhes o comportamento perturbativo dos momentos integrados da função espectral e sua conexão com os renormalons de suas respectivas transformadas de Borel, denotadas $B[\delta_{w_i}^{(0)}]$. O entendimento da expansão pertur-

bativa de tais momentos é importante para orientar a escolha dos momentos empregados em determinações realistas de α_s a partir das FESRs em baixas energias. Momentos com expansões perturbativas comportadas são mais confiáveis e levam a incertezas menores a partir do truncamento da teoria de perturbação.

Como feito anteriormente, começamos nossas análises em $\text{large-}\beta_0$, onde pode-se estabelecer facilmente uma relação entre os renômalons da função de Adler e os renômalons dos momentos integrados no esquema $\overline{\text{MS}}$. Um número infinito das singularidades da função de Adler é cancelada e $B[\delta_{w_i}^{(0)}]$ é significativamente menos singular. Em particular, para os momentos polinomiais, o polo dominante IR é cancelado exatamente a menos que a função peso apresente um termo proporcional a x . Funções peso com este termo são, portanto, as únicas que têm um polo em $u = 2$ e apresentam um comportamento perturbativo instável que decorre da contribuição deste polo IR à série perturbativa. Para os momentos pinçados, que foram identificados como tendo um bom comportamento perturbativo na Referência (33), encontramos cancelamentos adicionais dos renômalons, que estão relacionados com um melhor comportamento em ordens altas, postergando o regime assintótico da série.

Usando o esquema C e a transformada de Borel modificada, fomos capazes de mostrar, na Eq. (6.25), que a relação entre a transformada de Borel dos momentos e a transformada de Borel da função de Adler é a mesma em QCD e em $\text{large-}\beta_0$. Na Eq. (6.30), também mostramos que a singularidade dominante IR neste contexto é, também, um polo simples. Estes são um dos principais resultados deste trabalho, uma vez que eles nos permitem concluir que os mesmos mecanismos de acréscimo, supressão e cancelamento parcial dos renômalons responsáveis pelos momentos perturbativos em $\text{large-}\beta_0$ operam em QCD também. O comportamento similar dos momentos integrados da função espectral nos dois casos, portanto, não é uma surpresa e, novamente, momentos pinçados que não apresentam um termo linear são os melhores (como apontado pela Referência. (33)). As instabilidades relacionadas com o polo dominante IR também estão presentes na QCD.

Finalmente, mostramos que é possível usar esquema (ou escala) de renormalização para acelerar a convergência dos momentos que apresentam bom comportamento perturbativo. Isto havia sido sugerido pela Referência (42) para a razão R_τ mas não havia sido investigado sistematicamente antes.

Concluindo, a simplicidade e a flexibilidade do método dos Aproximantes de Padé desenvolvidos neste tese sugere que ele pode ser usado para explorar contribuições não-perturbativas no contexto de determinações de α_s , bem como predizer termos de ordens mais altas de outras séries perturbativas, como, por exemplo, na aplicação do nosso método às correções de QCD nos decaimentos $H \rightarrow b\bar{b}$. (92) Além disso, fomos capazes de entender as instabilidades e estabilidades das expansões perturbativas dos momentos integrados da função espectral em termos de seus renômalons. Além das implicações para a escolha dos

momentos em análises precisas de α_s , nossos resultados podem ser usados no contexto de modelos de Borel para a função de Adler, pois mostramos que as variações de esquema em conjunto com a transformada de Borel modificada podem ser usadas para simplificar a estrutura da singularidade dominante IR, relacionada com o condensado de glúons, e que se torna um polo simples. De fato, os resultados no limite-large- β_0 e na QCD são, portanto, muito mais semelhantes do que se pensava anteriormente.

Finalmente, ressaltamos que os nossos resultados têm gerado impactos concretos nas determinações de α_s com base nos decaimentos do tau em hádrons. Nos últimos trabalhos (23, 24, 93) a incerteza da estimativa do termo $c_{5,1}$ tem sido bastante reduzida, em parte devido ao nosso estudo, o que contribui para a redução da incerteza de α_s determinada pela média mundial feita pelo Particle Data Group. (94)

REFERÊNCIAS

- 1 GELL-MANN, M. Quarks. **Acta Physica Austriaca Supplement**, v. 9, p. 733–761, 1972.
- 2 FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the color octet Gluon picture. **Physics Letters B**, v. 47, n. 4, p. 365–368, 1973.
- 3 GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. **Quantum chromodynamics**. Berlin: Springer, 2002.
- 4 PICH, A. **Aspects of quantum chromodynamics**. 1999. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0001118.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2021.
- 5 ECKER, G. **Quantum chromodynamics**. 2006. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0604165.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2019.
- 6 BRAATEN, E.; NARISON, S.; PICH, A. QCD analysis of the tau hadronic width. **Nuclear Physics B**, v. 373, n. 3, p. 581–612, 1992.
- 7 BOITO, D. *et al.* Strong coupling from the revised ALEPH data for hadronic τ decays. **Physical Review D**, v. 91, n. 3, p. 034003, 2015.
- 8 PICH, A.; RODRÍGUEZ-SÁNCHEZ, A. Determination of the QCD coupling from ALEPH τ decay data. **Physical Review D**, v. 94, n. 3, p. 034027, 2016.
- 9 DAVIER, M. *et al.* Update of the ALEPH non-strange spectral functions from hadronic τ decays. **European Physical Journal C**, v. 74, n. 3, p. 2803, 2014.
- 10 KESHAVARZI, A.; NOMURA, D.; TEUBNER, T. Muon $g - 2$ and $\alpha(M_Z^2)$: a new data-based analysis. **Physical Review D**, v. 97, n. 11, p. 114025, 2018.
- 11 BOITO, D. *et al.* Strong coupling from $e^+e^- \rightarrow$ hadrons below charm. **Physical Review D**, v. 98, n. 7, p. 074030, 2018.
- 12 PICH, A. Precision tau physics. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 75, p. 41–85, 2014. DOI: 10.1016/j.pnpnp.2013.11.002.
- 13 RITBERGEN, T. van; VERMASEREN, J. A. M.; LARIN, S. A. The Four loop beta function in quantum chromodynamics. **Physics Letters B**, v. 400, p. 379–384, 1997.
- 14 BAIKOV, P. A.; CHETYRKIN, K. G.; KUHN, J. H. Five-Loop Running of the QCD coupling constant. **Physical Review Letters**, v. 118, n. 8, p. 082002, 2017.
- 15 HERZOG, F. *et al.* On Higgs decays to hadrons and the R-ratio at N⁴LO. **Journal of High Energy Physics**, v. 08, p. 113, 2017. DOI: 10.1007/JHEP08(2017)113.
- 16 LUTHE, T. *et al.* The five-loop Beta function for a general gauge group and anomalous dimensions beyond Feynman gauge. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, p. 166, 2017. DOI:10.1007/JHEP10(2017)166.
- 17 BAIKOV, P. A.; CHETYRKIN, K. G.; KUHN, J. H. Order α_s^4 QCD Corrections to Z and τ Decays. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 1, p. 012002, 2008.

- 18 HERZOG, F. *et al.* The five-loop beta function of Yang-Mills theory with fermions. **Journal of High Energy Physics**, v. 02, p. 090, 2017. DOI:10.1007/JHEP02(2017)090.
- 19 BENEKE, M.; JAMIN, M. α_s and the tau hadronic width: fixed-order, contour-improved and higher-order perturbation theory. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 044, 2008. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/09/044.
- 20 PIVOVAROV, A. A. Renormalization group analysis of the tau lepton decay within QCD. **Zeitschrift für Physik C**, v. 53, p. 461–464, 1992. DOI: 10.1007/BF01625906.
- 21 DIBERDER, F. L.; PICH, A. Testing QCD with tau decays. **Physics Letters B**, v. 289, p. 165–175, 1992. DOI: 10.1016/0370-2693(92)91380-R.
- 22 HOANG, A. H.; REGNER, C. Borel representation of τ hadronic spectral function moments in contour-improved perturbation theory. **Physical Review D**, v. 105, n. 9, p. 096023, 2022.
- 23 BENITEZ-RATHGEB, M. A. *et al.* Reconciling the contour-improved and fixed-order approaches for τ hadronic spectral moments. part I. renormalon-free gluon condensate scheme. **Journal of High Energy Physics**, v. 07, p. 016, 2022. DOI:10.1007/JHEP07(2022)016.
- 24 BENITEZ-RATHGEB, M. A. *et al.* Reconciling the contour-improved and fixed-order approaches for τ hadronic spectral moments. part II. renormalon norm and application in α_s determinations. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 223, 2022. DOI: 10.1007/JHEP09(2022)223.
- 25 DYSON, F. J. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. **Physical Review**, v. 85, n. 4, p. 631–632, 1952.
- 26 BENEKE, M. Renormalons. **Physics Reports**, v. 317, n. 1-2, p. 1–142, 1999.
- 27 BOYD, J. P. The devil’s invention: asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series. **Acta Applicandae Mathematica**, v. 56, n. 1, p. 1–98, Mar. 1999.
- 28 SHIFMAN, M. A. **Quark hadron duality**. 2001. Disponível em: <http://jhep.sissa.it/archive/prhep/preproceeding/hf8/013>. Acesso em: 19 dez. 2018.
- 29 CATÀ, O.; GOLTERMAN, M.; PERIS, S. Duality violations and spectral sum rules. **Journal of High Energy Physics**, v. 08, p. 076, 2005.
- 30 PERIS, S. *et al.* The case for duality violations in the analysis of hadronic τ decays. **Modern Physics Letters A**, v. 31, n. 30, p. 1630031, 2016.
- 31 BOITO, D. *et al.* Hyperasymptotics and quark-hadron duality violations in QCD. **Physical Review D**, v. 97, n. 5, p. 054007, 2018.
- 32 BOITO, D. *et al.* Strong coupling from hadronic τ decays: a critical appraisal. **Physical Review D**, v. 95, n. 3, p. 034024, 2017.
- 33 BENEKE, M.; BOITO, D.; JAMIN, M. Perturbative expansion of tau hadronic spectral function moments and α_s extractions. **Journal of High Energy Physics**, v. 01, p. 125, 2013. DOI: 10.1007/JHEP01(2013)125.

- 34 BAKER, G. A.; GRAVES-MORRIS, P. **Padé approximants**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- 35 BAKER, G. A. **Essentials of Padé approximants**. New York: Academic Press, 1975.
- 36 BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A. **Advanced mathematical methods for scientists and engineers**. New York: McGraw-Hill, 1978.
- 37 MASJUAN, P.; PERIS, S. A rational approach to resonance saturation in large- $N(c)$ QCD. **Journal of High Energy Physics**, v. 05, p. 040, 2007. DOI: 10.1088/1126-6708/2007/05/040.
- 38 MASJUAN, P.; PERIS, S. A rational approximation to $\langle VV-AA \rangle$ and its $O(p^6)$ low-energy constant. **Physics Letters B**, v. 663, p. 61–65, 2008. DOI: 10.1016/j.physletb.2008.03.040.
- 39 MASJUAN, P.; PERIS, S. Padé theory applied to the vacuum polarization of a heavy quark. **Physics Letters B**, v. 686, p. 307–312, 2010. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.02.069.
- 40 ELLIS, J. R. *et al.* Padé approximants, Borel transforms and renormalons: the Bjorken sum rule as a case study. **Physics Letters B**, v. 366, n. 1-4, p. 268–275, 1996.
- 41 POMMERENKE, C. Padé approximants and convergence in capacity. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 41, n. 3, p. 775–780, 1973.
- 42 BOITO, D.; JAMIN, M.; MIRAVITLLAS, R. Scheme variations of the QCD coupling and hadronic τ decays. **Physical Review Letters**, v. 117, n. 15, p. 152001, 2016.
- 43 BROWN, L. S.; YAFFE, L. G.; ZHAI, C.-X. Large order perturbation theory for the electromagnetic current current correlation function. **Physical Review D**, v. 46, n. 10, p. 4712–4735, 1992.
- 44 BOITO, D.; MASJUAN, P.; OLIANI, F. Higher-order QCD corrections to hadronic τ decays from Padé approximants. **Journal of High Energy Physics**, v. 08, p. 075, 2018. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2019.11.016.
- 45 BOITO, D.; OLIANI, F. Renormalons in integrated spectral function moments and α_s extractions. **Physical Review D**, v. 101, n. 7, p. 074003, 2020.
- 46 GLASHOW, S. Partial symmetries of weak interactions. **Nuclear Physics**, v. 22, n. 4, p. 579–588, 1961.
- 47 WEINBERG, S. A model of Leptons. **Physical Review Letters**, v. 19, n. 21, p. 1264–1266, 1967.
- 48 GLASHOW, S.; ILIOPOULOS, J.; MAIANI, L. Weak interactions with Lepton-Hadron symmetry. **Physical Review D**, v. 2, n. 7, p. 1285–1292, 1970.
- 49 PICH, A. **The Standard model of electroweak interactions**. 2008. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0705.4264.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2019.
- 50 WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Physical Review D**, v. 2, n. 7, p. 45–59, 1974.

- 51 GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of nonabelian Gauge theories. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1343–1346, 1973.
- 52 POLITZER, H. Reliable perturbative results for strong interactions? **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1346–1349, 1973.
- 53 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An introduction to quantum field theory**. Reading: Addison-Wesley, 1995.
- 54 MANDL, F.; SHAW, G. **Quantum field theory**. Chichester: Wiley, 1985.
- 55 TOMONAGA, S. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. **Progress Theoretical Physics**, v. 1, n. 2, p. 27–42, 1946.
- 56 SCHWINGER, J. S. Quantum electrodynamics. I. a covariant formulation. **Physical Review**, v. 74, p. 1439, 1948.
- 57 FEYNMAN, R. P. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction. **Physical Review**, v. 80, n. 3, p. 440–457, 1950.
- 58 ZYLA, P. A. *et al.* Review of particle physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2020, n. 8, p. 083C01, 2020.
- 59 OLIANI, F. H. **Aproximantes de Padé e a série perturbativa da QCD nos decaimentos $\tau \rightarrow (\text{hádrons}) + \nu_\tau$** . 2018. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- 60 JAMIN, M.; MIRAVITLLAS, R. Scalar correlator, Higgs decay into quarks, and scheme variations of the QCD coupling. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, p. 059, 2016. DOI: 10.1007/JHEP10(2016)059.
- 61 BAIKOV, P.; CHETYRKIN, K.; KUHN, J. Quark mass and field anomalous dimensions to $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, p. 076, 2014. DOI: 10.1007/JHEP10(2014)076.
- 62 AOKI, Y. *et al.* FLAG Review 2021. **European Physical Journal C**, v. 82, n. 10, p. 869, 2022.
- 63 CELMASTER, W.; GONSALVES, R. J. The renormalization prescription dependence of the QCD coupling constant. **Physical Review D**, v. 20, n. 6, p. 1420, 1979.
- 64 PERL, M. L. *et al.* Evidence for anomalous Lepton production in $e^+ - e^-$ annihilation. **Physical Review Letters**, v. 35, n. 22, p. 1489–1492, 1975.
- 65 TANABASHI, M. *et al.* Review of particle physics. **Physical Review D**, v. 98, n. 3, p. 030001, 2018.
- 66 DAVIER, M. *et al.* The determination of α_s from tau decays revisited. **European Physical Journal C**, v. 56, p. 305–322, 2008. DOI: 1140/epjc/s10052-008-0666-7.
- 67 BOITO, D. *et al.* A new determination of α_s from hadronic τ decays. **Physical Review D**, v. 84, n. 11, p. 113006, 2011.

- 68 HOANG, A. H.; REGNER, C. On the difference between FOPT and CIPT for hadronic tau decays. **European Physical Journal Special Topics**, v. 230, n. 12-13, p. 2625–2639, 2021. DOI: 10.1140/epjs/s11734-021-00257-z.
- 69 BOREL, E. Mémoire sur les séries divergentes. **Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure**, v. 3, n. 16, p. 9–131, 1899. DOI: 10.24033/asens.463.
- 70 SHIFMAN, M. A.; VAINSHTEIN, A. I.; ZAKHAROV, V. I. QCD and resonance physics. theoretical foundations. **Nuclear Physics B**, v. 147, n. 5, p. 385–447, 1979.
- 71 BENEKE, M. Large order perturbation theory for a physical quantity. **Nuclear Physics B**, v. 405, n. 2-3, p. 424–450, 1993.
- 72 BROADHURST, D. J. Large N expansion of QED: asymptotic photon propagator and contributions to the muon anomaly, for any number of loops. **Zeitschrift für Physik C**, v. 58, p. 339–346, 1993. DOI: 10.1007/BF01560355.
- 73 BENEKE, M.; BRAUN, V. M. Naive nonabelianization and resummation of fermion bubble chains. **Physics Letters B**, v. 348, n. 3-4, p. 513–520, 1995.
- 74 GROZIN, A. **Lectures on QED and QCD**. 2005. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0508242.pdf>. Acesso: em 17 set. 2019.
- 75 CHETYRKIN, K. G.; KATAEV, A. L.; TKACHOV, F. V. New approach to evaluation of multiloop Feynman integrals: the Gegenbauer polynomial x space technique. **Nuclear Physics B**, v. 174, n. 2-3, p. 345–377, 1980.
- 76 BROWN, L. S.; YAFFE, L. G. Asymptotic behavior of perturbation theory for the electromagnetic current current correlation function in QCD. **Physical Review D**, v. 45, n. 2, p. 398–402, 1992.
- 77 NEUBERT, M. Scale setting in QCD and the momentum flow in Feynman diagrams. **Physical Review D**, v. 51, n. 10, p. 5924–5941, 1995.
- 78 BOITO, D.; HORNING, D.; JAMIN, M. Anomalous dimensions of four-quark operators and renormalon structure of mesonic two-point correlators. **Journal of High Energy Physics**, v. 12, p. 090, 2015. DOI: 10.1007/JHEP12(2015)090.
- 79 BAIKOV, P. A.; CHETYRKIN, K. G.; KUHN, J. H. Towards order $\alpha(s)^{**4}$ accuracy in tau decays. **Physical Review D**, v. 67, n. 7, p. 074026, 2003.
- 80 KATAEV, A. L.; STARSHENKO, V. V. Estimates of the higher order QCD corrections to $R(s)$, $R(\tau)$ and deep inelastic scattering sum rules. **Modern Physics Letters A**, v. 10, p. 235–250, 1995.
- 81 KATAEV, A. L.; STARSHENKO, V. V. Estimates of the higher order QCD corrections: theory and applications. **Nuclear Physics Proceedings Supplements**, v. 39, n. 2-3, p. 312–317, 1995.
- 82 CAPRINI, I. Higher-order perturbative coefficients in QCD from series acceleration by conformal mappings. **Physical Review D**, v. 100, n. 5, p. 056019, 2019.
- 83 JAMIN, M. Higher-order behaviour of two-point current correlators. **European Physics Journal Special Topics**, v. 230, n. 12-13, p. 2609–2624, 2021.

- 84 WU, X.-G. *et al.* Novel demonstration of the renormalization group invariance of the fixed-order predictions using the principle of maximum conformality and the C -scheme coupling. **Physical Review D**, v. 97, n. 9, p. 094030, 2018.
- 85 CAPRINI, I. Renormalization-scheme variation of a QCD perturbation expansion with tamed large-order behavior. **Physical Review D**, v. 98, n. 5, p. 056016, 2018.
- 86 PATRIGNANI, C. *et al.* Review of Particle Physics. **Chinese Physics C**, v. 40, n. 10, p. 100001, 2016.
- 87 PICH, A.; PRADES, J. Strange quark mass determination from Cabibbo suppressed tau decays. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, p. 004, 1999. DOI: 10.1088/1126-6708/1999/10/004.
- 88 BOITO, D.; JAMIN, M.; MIRAVITLLAS, R. Scheme variations of the QCD coupling and tau decays. **Nuclear and Particle Physics Proceedings**, v. 287-288, p. 77–80, 2017. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2017.03.048.
- 89 CAPRINI, I.; FISCHER, J. Expansion functions in perturbative QCD and the determination of $\alpha_s(M_\tau^2)$. **Physical Review D**, v. 84, n. 5, p. 054019, 2011.
- 90 ABBAS, G. *et al.* Expansions of τ hadronic spectral function moments in a nonpower QCD perturbation theory with tamed large order behavior. **Physical Review D**, v. 88, n. 3, p. 034026, 2013.
- 91 CAPRINI, I. *et al.* **Perturbative expansions in QCD improved by conformal mappings of the Borel plane**. 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1711.04445.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2021.
- 92 BOITO, D.; LONDON, C. Y.; MASJUAN, P. Higher-order QCD corrections to $H \rightarrow b\bar{b}$ from rational approximants. **Journal of High Energy Physics**, v. 01, p. 054, 2022. DOI: 10.1007/JHEP01(2022)054.
- 93 BOITO, D. *et al.* Strong coupling from an improved τ vector isovector spectral function. **Physical Review D**, v. 103, n. 3, p. 034028, 2021.
- 94 GROUP, P. D. *et al.* Review of particle physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2022, n. 8, 2022.

APÊNDICES

APÊNDICE A – INTEGRAIS MESTRAS

Neste apêndice iremos resumir os principais resultados para as funções G_1 e G_2 relacionadas com as integrais de 1 e 2-loops, respectivamente. Estas integrais são calculadas baseadas em diagramas genéricos de 1 e 2-loops e, em certos limites, facilitam o cálculo das correções em QFTs. Os cálculos deste apêndice são baseados na Referência. (74)

Começando pela integral a 1-loop que é o resultado central. O diagrama genérico de um propagador sem massa associado a este tipo de correção pode ser visto na Figura 25, onde n_1 e n_2 estão associados com a potência dos momentos

$$D_1 = -(k+p)^2 \quad \text{e} \quad D_2 = -k^2. \quad (\text{A.1})$$

Notemos, como primeira propriedade, que o diagrama é simétrico perante troca dos índices $1 \leftrightarrow 2$. Nosso objetivo, portanto, é calcular a função $G_1(n_1, n_2)$ que é resultado da seguinte integral

$$\int \frac{d^d k}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i\pi^{d/2} (-p^2)^{d/2-n_1-n_2} G_1(n_1, n_2). \quad (\text{A.2})$$

Vamos, portanto, calcular a integral à direita da Eq. (A.2) utilizando o conhecido método de regularização dimensional. Logo, dada a seguinte parametrização de Feynman

$$\frac{1}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}} = \frac{\Gamma(m_1 + m_2)}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)} \int_0^1 dx \frac{x^{m_1-1} (1-x)^{m_2-1}}{[a_1 x + a_2 (1-x)]^{m_1+m_2}}, \quad (\text{A.3})$$

vamos utilizá-la na integral a 1-loop substituindo $a_1 = -(k+p)^2$, $a_2 = -k^2$, $m_1 = n_1$ e $m_2 = n_2$, portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} &= \int \frac{d^d k}{[-(k+p)^2]^{n_1} [-k^2]^{n_2}} \\ &= \frac{\Gamma(n_1 + n_2)}{(-1)^{n_1+n_2} \Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int d^d k \int_0^1 dx \frac{x^{n_1-1} (1-x)^{n_2-1}}{[(k+p)x + k^2(1-x)]^{n_1+n_2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Expandindo o denominador da integral, invertendo a ordens das integrais em x e k , e reescrevendo o denominador, conseguimos chegar no seguinte

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} &= \frac{\Gamma(n_1 + n_2)}{(-1)^{n_1+n_2} \Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int_0^1 dx x^{n_1-1} (1-x)^{n_2-1} \times \\ &\quad \times \int d^d k \frac{1}{[(k+px)^2 + p^2 x(1-x)]^{n_1+n_2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Agora, para prosseguir com os cálculos, vamos definir $l = k + px$ e $\Delta = p^2 x(1-x)$, logo, focando na integral em k , podemos reescrevê-la utilizando essas novas definições e utilizando $n = n_1 + n_2$ temos

$$\int d^d k \frac{1}{(l^2 - \Delta)^n} = (-1)^n i\pi^{d/2} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2}, \quad (\text{A.6})$$

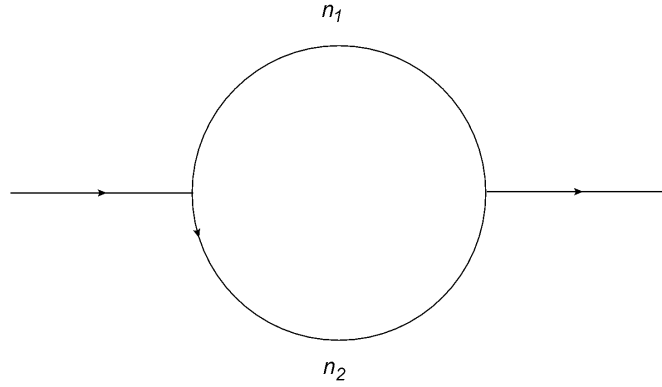


Figura 25 – Diagrama genérico 1-loop usado para o cálculo de $G_1(n_1, n_2)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

onde utilizamos a Eq. (A.44) da Referência. (53) Utilizando o resultado acima na Eq. (A.5) chegamos a

$$\int \frac{d^d k}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma(n_1 + n_2 - d/2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} (-p^2)^{d/2 - n_1 - n_2} \int_0^1 dx \frac{x^{n_1-1} (1-x)^{n_2-1}}{[x(1-x)]^{n_1+n_2-d/2}}. \quad (\text{A.7})$$

Calculando a integral remanescente em x , finalmente chegamos que

$$\int \frac{d^d k}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = i\pi^{d/2} (-p^2)^{d/2 - n_1 - n_2} G_1(n_1, n_2), \quad (\text{A.8})$$

com

$$G_1(n_1, n_2) = \frac{\Gamma(n_1 + n_2 - d/2)\Gamma(d/2 - n_1)\Gamma(d/2 - n_2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)\Gamma(d - n_1 - n_2)}, \quad (\text{A.9})$$

que é o resultado central deste apêndice.

Para o caso das integrais a 2-loops, vamos seguir o mesmo procedimento utilizado nas integrais a 1-loop. O diagrama genérico que representa a integral de 2-loops com propagadores sem massa pode ser visto na Figura 26, onde os índices n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 estão associados com a potência dos momentos dos propagadores, dados por

$$\begin{aligned} D_1 &= -(k+q)^2, & D_2 &= -(p+q)^2, \\ D_3 &= -k^2, & D_4 &= -p^2, \\ D_5 &= -(k-p)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

respectivamente. Nosso principal objetivo é calcular a função G_2 , definida através de

$$\int d^d p d^d k \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} = -\pi^d (-q^2)^{d - n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5} G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5). \quad (\text{A.11})$$

Até o momento não existe uma solução geral para a função G_2 , porém, em vários casos, é possível escrevê-la como um produto entre funções G_1 . Um dos casos em que isso acontece é quando temos algum $n_i = 0$, onde é possível reduzir a integral a 2-loops em

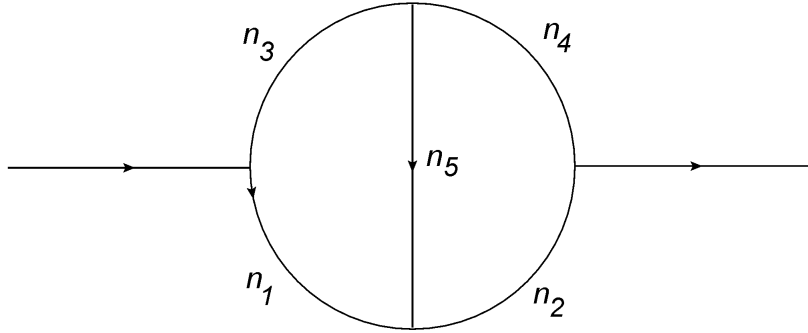


Figura 26 – Diagrama genérico 2-loops usado para o cálculo de $G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

duas integrais 1-loop, gerando o produto mencionado. Aqui vamos elucidar vários casos usados nesta tese deste tipo de comportamento.

Vamos começar para o caso em que um dos n_i 's, $i = 1, \dots, 4$ é nulo. Consideremos o caso $n_1 = 0$, dado por

$$\int d^d p d^d k \frac{1}{D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} = \int d^d p d^d k \frac{1}{[-(p+q)^2]^{n_2} (-k^2)^{n_3} (-p^2)^{n_4} [-(k-p)^2]^{n_5}}. \quad (\text{A.12})$$

Notemos que podemos, primeiro, resolver a integral em k separada da integral em p utilizando a Eq. (A.9), e logo em seguida resolver a integral em p , utilizando a mesma Eq. Logo, expandindo temos

$$\begin{aligned} \int d^d p d^d k \frac{1}{D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} &= \int d^d p \frac{1}{[-(p+q)^2]^{n_2} (-p^2)^{n_4}} \int d^d k \frac{1}{(-k^2)^{n_3} [-(k-p)^2]^{n_5}}, \\ &= i\pi^{d/2} G_1(n_3, n_5) \int d^d p \frac{(-p^2)^{d/2-n_3-n_5}}{[-(p+q)^2]^{n_2} (-p^2)^{n_4}}, \\ &= i\pi^{d/2} G_1(n_3, n_5) \int d^d p \frac{1}{[-(p+q)^2]^{n_2} (-p^2)^{n_3+n_4+n_5-d/2}}, \\ &= -\pi^d (-q^2)^{d-n_2-n_3-n_4-n_5} G_1(n_3, n_5) G_1(n_2, n_3+n_4+n_5-d/2). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, para este caso, podemos escrever

$$G_2(0, n_2, n_3, n_4, n_5) = G_1(n_3, n_5) G_1(n_2, n_3+n_4+n_5-d/2), \quad (\text{A.14})$$

como esperado, um produto entre duas funções G_1 . Seguindo os mesmos procedimentos, para $n_2 = 0$, $n_3 = 0$ e $n_4 = 0$, chegamos em

$$\begin{aligned} G_2(n_1, 0, n_3, n_4, n_5) &= G_1(n_4, n_5) G_1(n_1, n_3+n_4+n_5-d/2), \\ G_2(n_1, n_2, 0, n_4, n_5) &= G_1(n_1, n_5) G_1(n_4, n_1+n_2+n_5-d/2), \\ G_2(n_1, n_2, n_3, 0, n_5) &= G_1(n_2, n_5) G_1(n_3, n_1+n_2+n_5-d/2). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Continuando, vamos considerar um caso mais simples, que é o caso $n_5 = 0$. Para esse caso as integrais em k e p se apartam totalmente, já que o termo que conecta estas

integrais é justamente o termo de índice 5. Logo, temos

$$\begin{aligned}
\int d^d p d^d k \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4}} &= \int d^d p d^d k \frac{1}{[-(k+q)^2]^{n_1} [-(p+q)^2]^{n_2} (-k^2)^{n_3} (-p^2)^{n_4}}, \\
&= \int d^d p \frac{1}{[-(p+q)^2]^{n_2} (-p^2)^{n_4}} \int d^d k \frac{1}{[-(k+q)^2]^{n_1} (-k^2)^{n_3}}, \\
&= -\pi^d (-q^2)^{d-n_1-n_2-n_3-n_4} G_1(n_1, n_3) G_1(n_2, n_4).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Portanto

$$G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, 0) = G_1(n_1, n_3) G_1(n_2, n_4). \tag{A.17}$$

Para finalizar este apêndice, vamos considerar o caso onde dois índices n_i 's são iguais a zero. É possível dividir este caso em dois subcasos onde o primeiro considera que dois índices adjacentes serão iguais a zero. Quando isso acontece, a integral não tem escala e o resultado é zero. Abaixo temos todos os casos onde índices adjacentes são nulos, resultando em integrais nulas:

$$\begin{aligned}
G_2(0, 0, n_3, n_4, n_5) &= 0, & G_2(0, n_2, 0, n_4, n_5) &= 0, & G_2(0, n_2, n_3, n_4, 0) &= 0, \\
G_2(n_1, 0, n_3, 0, n_5) &= 0, & G_2(n_1, 0, n_3, n_4, 0) &= 0, & G_2(n_1, n_2, 0, 0, n_5) &= 0, \\
G_2(n_1, n_2, 0, n_4, 0) &= 0 & \text{e} & & G_2(n_1, n_2, n_3, 0, 0) &= 0.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

O segundo subcaso é justamente o oposto do primeiro, quando dois índices não adjacentes são nulos. Podemos diferenciar dois momentos, o primeiro é quando $n_2 = n_3 = 0$ e o segundo é quando $n_1 = n_4 = 0$. Nestas duas ocasiões é possível, novamente, escrever a função G_2 como um produto de duas funções G_1 . O cálculo é análogo para ambas e vamos aqui demonstrar para um caso. Consideremos $n_2 = n_3 = 0$, logo, temos

$$\begin{aligned}
\int d^d p d^d k \frac{1}{D_1^{n_1} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} &= \int d^d k \frac{1}{[-(k+q)^2]^{n_1}} \int d^d p \frac{1}{(-p^2)^{n_4} [-(p-k)^2]^{n_5}}, \\
&= i\pi^{d/2} G_1(n_4, n_5) \int d^d k \frac{(-k^2)^{d/2-n_4-n_5}}{[-(k+q)^2]^{n_1}}, \\
&= i\pi^{d/2} G_1(n_4, n_5) \int d^d k \frac{1}{[-(k+q)^2]^{n_1} (-k^2)^{n_4+n_5-d/2}}, \\
&= -\pi^d (-q^2)^{d/2-n_1-n_4-n_5} G_1(n_4, n_5) G_1(n_1, n_4+n_5-d/2).
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Portanto, obtemos

$$G_2(n_1, 0, 0, n_4, n_5) = G_1(n_4, n_5) G_1(n_1, n_4+n_5-d/2). \tag{A.20}$$

De maneira similar, podemos fazer o cálculo para $n_1 = n_4 = 0$, onde chegamos no seguinte resultado

$$G_2(0, n_2, n_3, 0, n_5) = G_1(n_3, n_5) G_1(n_2, n_3+n_5-d/2). \tag{A.21}$$

Um último caso que podemos considerar é quando nenhum índice é nulo. Uma maneira de contornar esse problema é fazer uso de integração por parte, utilizando o fato

de que a integral de uma derivada total é igual a zero. Vamos considerar como exemplo a seguinte derivada

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{(p-k)}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} \right] = \left[d - n_2 - n_4 - 2n_5 + \frac{n_2}{D_2}(D_1 - D_5) + \frac{n_4}{D_4}(D_3 - D_5) \right] \times \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}}. \quad (\text{A.22})$$

Considerando o fato de que a integral de uma derivada total é nula temos que

$$\int d^d k d^d p \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{(p-k)}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} \right] = 0. \quad (\text{A.23})$$

Substituindo o resultado da Eq. (A.22) na Eq. (A.23) ficamos com

$$\int d^d k d^d p \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{d - n_2 - n_4 - 2n_5}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} + \frac{n_2(D_1/D_2)}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} + \frac{n_4(D_3/D_4)}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} - \frac{D_5(n_2/D_2 + n_4/D_4)}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} \right] = 0. \quad (\text{A.24})$$

Com o auxílio da Eq. (A.11) podemos escrever

$$G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = \frac{n_2 2^+(5^- - 1^-) + n_4 4^+(5^- - 3^-)}{d - n_2 - n_4 - 2n_5} G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5), \quad (\text{A.25})$$

onde a notação 1^\pm aumenta/diminui em uma unidade o índice n_1 , $1^\pm G_2(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = G_2(n_1 \pm 1, n_2, n_3, n_4, n_5)$. Logo, quando todos os n_i 's são iguais a 1, podemos escrever $G_2(1, 1, 1, 1, 1)$ como uma combinação linear de G_2 com um índice igual a zero, como a seguir

$$G_2(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{1}{d-4} \left[G_2(1, 2, 1, 1, 0) - G_2(0, 2, 1, 1, 1) + G_2(1, 1, 1, 2, 0) - G_2(1, 1, 0, 2, 1) \right]. \quad (\text{A.26})$$

As funções G_2 ao lado direito da Eq. são conhecidas e já foram calculadas anteriormente de maneira generalizada neste Apêndice, logo, podemos escrever de maneira resumida que

$$G_2(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{2}{d-4} [G_1(1, 1)G_1(2, 1) - G_1(1, 1)G_1(2, 3 - d/2)], \quad (\text{A.27})$$

onde G_1 é função obtida a partir da integral a 1-loop.

Os resultados obtidos nesta seção são alguns dos principais utilizados nesta tese, em especial na Seção 4.1 onde cálculos de 2-loops são necessários para a dedução do limite large- β_0 da QCD.