

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Naruna Esselin Rodrigues

**Correlação condicional passado-futuro de um
reservatório de defasagem não-markoviano controlado**

São Carlos

2022

Naruna Esselin Rodrigues

Correlação condicional passado-futuro de um reservatório de defasagem não-markoviano controlado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares-Pinto

Versão corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Rodrigues, Naruna Esselin

Correlação condicional passado-futuro de um reservatório de defasagem não-markoviano controlado / Naruna Esselin Rodrigues; orientador Diogo de Oliveira Soares-Pinto - versão corrigida -- São Carlos, 2022.

104 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2022.

1. Sistemas quânticos aberto. 2. Não-Markovianidade quântica. 3. Teoria da informação quântica. I. Soares-Pinto, Diogo de Oliveira, orient. II. Título.

*Aos meus pais por nunca me deixarem caminhar sozinha,
aos amigos de longa data que mesmo longe estavam tão perto
aos amigos que fiz pelo caminho que me auxiliaram em cada passo
ao meu orientador, pela oportunidade e pelo suporte.*

“Memory gives moments immortality, but forgetfulness promotes a healthy mind. It’s good to forget.”

Hannibal Lecter

RESUMO

RODRIGUES, N.E.. **Correlação condicional passado-futuro de um reservatório de defasagem não-markoviano controlado**. 2022. 104p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

A teoria de sistemas quânticos abertos busca descrever como os sistemas quânticos e suas propriedades se comportam devido a inevitável interação com o ambiente que o cerca. A partir dessa interação algumas das características quânticas do sistema são perdidas. Para que isso não ocorra, uma das saídas é relacionar a perda de informação do sistema com a não-Markovianidade. Mesmo que no regime quântico não haja uma definição geral para Markovianidade como existe no regime clássico. Ainda é possível quantificar a Markovianidade, existem diversos quantificadores para isso, porém aqui há um interesse maior pela medida BLP e pela correlação condicional passado-futuro (CPF). A primeira associa a Markovianidade com o comportamento temporal da distância traço. Enquanto, a segunda consiste em um protocolo capaz de correlacionar temporalmente, ao menos, três eventos distintos de um sistema e com isso atribuir probabilidades condicionais aos estágios de aplicação do protocolo para que seja possível definir a correlação CPF, se a dinâmica for Markoviana então a independência CPF não irá desaparecer, ou seja, $C_{pf} \approx 0$. Essa dissertação tem como intuito, estudar a evolução de um sistema quântico constituído por dois q-bits acoplados, em que um deles interage com um banho bosônico. Sendo, esse banho o responsável por provocar o processo de decoerência e conseqüentemente introduzir a não-Markovianidade ao sistema. Posteriormente, essa não-Markovianidade foi medida e verificada utilizando os quantificadores já mencionados, e ambos os quantificadores foram comparados entre si.

Palavras-chave: Sistemas quânticos abertos. Não-Markovianidade quântica. Teoria da informação quântica.

ABSTRACT

RODRIGUES, N.E.. **Past-Future Conditional Correlation of a Non-Markovian controlled dephasing reservoir**. 2022. 104p. Dissertation (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

The theory of open quantum systems seeks to describe how quantum systems and their properties behave due to the inevitable interaction with the environment that surrounds them. From this interaction, some of the quantum characteristics of the system are lost. To prevent this from happening, one of the solutions is to relate the loss of information of the system to non-Markovianity. Even though in the quantum regime there is no general definition for Markovianity as there is in the classical regime. It is still possible to quantify Markovianity, and for that there are several quantifiers, but here there is a special interest in the BLP measure and the past-future conditional correlation (CPF). The first one associates Markovianity with the temporal behavior of the trace distance. While the second, consists of a protocol capable of temporally correlating at least three different events of a system and with that attributing conditional probabilities to the protocol application stages so that it is possible to define the CPF correlation, if the dynamics are Markovian then the CPF independence will not disappear, ie $C_{pf} \approx 0$. This dissertation aims to study the evolution of a quantum system consisting of two coupled q-bits, in which one of them interacts with a bosonic bath. This bath is responsible for provoking the decoherence process and consequently introducing non-Markovianity to the system. Subsequently, this non-Markovianity was measured and verified using the quantifiers already mentioned, and both quantifiers were compared with each other.

Keywords: Open quantum systems. Quantum non-Markovianity. Quantum information.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Exemplifica a esfera de Bloch é alterada quando submetidas aos canais: bit flip ($p = 0, 3$), phase flip ($p = 0, 3$), bit-phase flip ($p = 0, 3$) e depolarizing channel ($p = 0, 5$)</p>	29
<p>Figura 2 – Como a esfera de Bloch é alterada quando submetida ao canal de amplitude damping, para $\beta = 0, 8$.</p>	30
<p>Figura 3 – Esquemática da aplicação do protocolo de medida. Um sistema aberto é sujeito a três medidas projetiva realizadas pelos operadores $\{\Omega_x\}$, $\{\Omega_y\}$ e $\{\Omega_z\}$ que são feitos, respectivamente em um tempo $t_x < t_y < t_z$ cujos resultados aleatórios são $x \rightarrow y \rightarrow z$.</p>	64
<p>Figura 4 – Representação alegórica do sistema composto por dois q-bits que interagem entre si e um deles está acoplado a um banho de defasagem. De tal forma que θ é o ângulo que define o estado do q-bit auxiliar, J é a constante de acoplamento entre os q-bits e T é a temperatura do banho</p>	70
<p>Figura 5 – Em <i>a</i>) é retratado o comportamento da função $q(t)$, descrita pela curva pontilhada em vermelho que foi reescalada por um fator 0, 01. Enquanto que o comportamento da sua integral numérica é fornecido linha cheia em preto. Já em <i>b</i>) há o esboço da função $g(t)$ que é representada pela curva ponto pontilhada em vermelho, a qual também foi reescalada por um fator 0, 01 e a linha cheia retrata a integral de $g(t)$. Em ambos os casos foi considerado $J = 60Hz$, $\theta = \pi/3$ e $\gamma^{-1} = 150ms$</p>	73
<p>Figura 6 – Os gráficos da primeira linha expressam a correlação <i>CPF</i> em função de ambos os tempos de medida t e τ, de tal forma que para todos os gráficos foram mantidos $J = 5Hz$, $\gamma^{-1} = 2s$ e o parâmetro variável é θ. Em <i>a</i>) $\theta = \pi/3$, em <i>b</i>) $\theta = \pi/4$, em <i>c</i>) $\theta = \pi/6$ e em <i>d</i>) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da segunda linha exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.</p>	74
<p>Figura 7 – Os gráficos da primeira linha expressam a correlação <i>CPF</i> em função de ambos os tempos de medida t e τ, de tal forma que para todos os gráficos foram mantidos $J = 5Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável é θ. Em <i>a</i>) $\theta = \pi/3$, em <i>b</i>) $\theta = \pi/4$, em <i>c</i>) $\theta = \pi/6$ e em <i>d</i>) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da segunda linha exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.</p>	75

- Figura 8 – Os gráficos da parte superior expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 30Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável foram os ângulos θ , em *a*) $\theta = \pi/3$, em *b*) $\theta = \pi/4$, em *c*) $\theta = \pi/6$ e em *d*) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da parte inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares. 75
- Figura 9 – Os gráficos da linha superior expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 60Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável são os ângulos θ , que é em *a*) $\theta = \pi/3$, em *b*) $\theta = \pi/4$, em *c*) $\theta = \pi/6$ e em *d*) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da linha inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares. 77
- Figura 10 – Os gráficos da linha superior expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 120Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável são os ângulos θ , que assume em *a*) $\theta = \pi/3$, em *b*) $\theta = \pi/4$, em *c*) $\theta = \pi/6$ e em *d*) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da linha inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares. 77
- Figura 11 – Os gráficos da linha superior expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 215Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável são os ângulos θ , que assume em *a*) $\theta = \pi/3$, em *b*) $\theta = \pi/4$, em *c*) $\theta = \pi/6$ e em *d*) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da linha inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares. 78
- Figura 12 – Os gráficos da primeira coluna expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ , de tal forma que para todos os gráficos foram mantidos $J = 60Hz$, $\gamma^{-1} = 2s$ e o parâmetro variável é θ . Em *a*) $\theta = \pi/3$ em *b*) $\theta = \pi/4$ e em *c*) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da segunda coluna exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares. 78
- Figura 13 – *a*) conjunto convexo, *b*) um conjunto côncavo. 95
- Figura 14 – Em *a*) é retratado o comportamento da função $q(t)$, descrita pela curva ponto pontilhada em vermelho foi reescalada por um fator 0,01. Enquanto, o comportamento da sua integral analítica é fornecido pela linha cheia em preto. Já em *b*) há o esboço da função $q(t)$ representada pela curva ponto pontilhada em vermelho, a qual também foi reescalada por um fator 0,01 e a linha cheia preta retrata a integral numérica de $Q(t)$. Em ambos os casos foi considerado $J = 60Hz$, $\theta = \pi/3$ e $\gamma^{-1} = 150ms$ 103

Figura 15 – O comportamento numérico da função $Q(t)$, é descrito pela curva ponto pontilhada em vermelho. Enquanto, $Q(t)$ analítico é expresso pela linha cheia em preto. As figuras diferem entre si por um certo escalonamento que permite a sobreposição das curvas. Para todos os casos foi considerado $J = 60Hz$, $\theta = \pi/3$ e $\gamma^{-1} = 150ms$ 103

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	UMA BREVE EXPOSIÇÃO DOS CONCEITOS POR TRÁS DA TEORIA QUÂNTICA	21
2.1	Canais Quânticos	23
2.1.1	Representação na esfera de Bloch	27
2.1.2	Exemplos de canais quânticos	28
3	DINÂMICA QUÂNTICA	31
3.1	Sistema quântico isolado	31
3.2	Dinâmica de sistemas quânticos abertos	34
3.3	Derivação Microscópica	35
3.4	Equação Mestra local no tempo	44
3.5	A conexão entre mapas quânticos dinâmicos e equações mestras	48
3.6	Exemplo: canal de atenuação de fase	50
4	AFINAL O QUE É MARKOVIANIDADE?	55
4.1	Uma breve revisão sobre a teoria de probabilidade	55
4.1.1	Variáveis Aleatórias e processos estocásticos	57
4.2	Markovianidade Clássica	59
4.3	Markovianidade Quântica	61
4.3.1	Definição BPL	62
4.3.2	Correlação CPF	63
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	69
5.1	Modelo proposto	69
5.2	Discussão dos resultados	74
6	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	83
	APÊNDICES	89
	APÊNDICE A – UMA BREVE REVISÃO DOS CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR	91

APÊNDICE B – ESTADO TÉRMICO	97
APÊNDICE C – Q-BIT E BANHO COM N SPINS	101
APÊNDICE D – DISCUSSÃO SOBRE A FUNÇÃO Q(T)	103

1 INTRODUÇÃO

A física é uma ciência a qual busca entender os fenômenos naturais, os quais muitas vezes são complexos e por isso precisam ser inicialmente idealizados para que uma formulação matemática possa acompanhá-los. (1) Com isso em mente, em geral, a primeira abordagem para entender fenômenos naturais é reduzi-los a um sistema que esteja inicialmente isolado do ambiente o qual está inserido, de tal forma que, qualquer influência ou efeito que o ambiente possa exercer é negligenciado. Num regime clássico, mesmo que o sistema em questão seja ideal ele consegue descrever sistemas realistas de forma satisfatória. No entanto, o mesmo não acontece no regime quântico, visto que, sistemas quânticos são extraordinariamente frágeis e qualquer interação pode alterá-los significativamente, até mesmo uma simples medida. (2–4)

Com isso, é possível notar que quando o assunto é sistema quântico, a interação entre o sistema e o ambiente não pode ser simplesmente ignorada pois é fundamental para descrever sistemas reais. Sendo assim, a teoria de sistemas quânticos abertos (5–8) busca descrever como esses sistemas e suas propriedades se comportam devido a inevitável interação com o ambiente que o cerca. Consequentemente, a partir dessa interação podem ocorrer perdas de características quânticas do sistema, como coerência e emaranhamento, por causa dos processos de dissipação e decoerência respectivamente (4, 5, 9) que, quase sempre, são inevitáveis. Por outro lado, essa perda de características quânticas do sistema, é um grande entrave para o desenvolvimento de tecnologias mais modernas, uma vez que sistemas quânticos sem as propriedades citadas se tornam praticamente clássicos.

A partir desta adversidade surgiu o seguinte questionamento, como preservar as particularidades de um sistema quântico? Um dos artifícios encontrados foi relacionar a perda de informação do sistema para o ambiente com o conceito de Markovianidade. (10–37) De tal forma que, não-Markovianidade estaria atrelada a informação inicialmente perdida para o ambiente que voltaria para o sistema (38–41), e com isso nenhuma característica quântica seria perdida. Além do mais, a não-Markovianidade é um conceito fundamental para uma descrição realista de sistemas biológicos (42), banhos de spins (43) e sistemas fortemente acoplados. (44, 45) Mas que pode, também, ser relacionado à metrologia quântica (46) e a criptografia quântica. (47)

Em contrapartida, por mais que o conceito de Markovianidade seja sucinto para o estudo de processos estocásticos em sistemas clássicos (5), o mesmo não acontece quando se faz a transição para o regime quântico. Uma vez que há diferenças estruturais notáveis entre esses dois regimes, não há como apenas estender o conceito de Markovianidade clássica para o quântico de forma trivial. (10) Em virtude disso, embora não exista uma definição unívoca para a Markovianidade quântica (5, 6, 8, 14, 48, 49), por outro lado, há alguns quantificadores de não-Markovianidade. (10, 50–52) Entre eles a medida BLP (Breuer-Lane-Piilo) (50, 51), que é uma medida bem consolidada na literatura. Esta relaciona a Markovianidade com o comportamento

temporal da distância traço. Existe também a correlação CPF (correlação condicional passado-futuro)(22–24), que é uma medida relativamente recente. Que consiste em um protocolo capaz de correlacionar temporalmente, ao menos, três eventos distintos de um sistema e com isso atribuir probabilidades condicionais aos estágios de aplicação do protocolo, sendo possível definir a correlação CPF.

Portanto, o objetivo dessa dissertação é comparar duas das medidas de não-Markovianidade, a medida BLP e a correlação CPF, quando aplicadas a um sistema quântico aberto constituído por dois q-bits (sistema de dois níveis), os quais estão acoplados entre si e por um banho bosônico acoplado a um dos q-bits, esse banho é responsável por introduzir o processo de decoerência a este sistema.

Com esse propósito, essa dissertação está organizada da seguinte forma, no Cap.2 estão expostos alguns dos conceitos que permeiam a teoria quântica, incluindo os postulados pela perspectiva do operador densidade. Que permite abranger sistemas quânticos abertos. Ademais, são elencadas as propriedades principais de um operador densidade para ser possível entender como os mesmos são transformados, via evolução temporal ou via atuação de mapas completamente positivos capazes de preservar o traço (Mapas CPTP), que geram os canais quânticos.

Em seguida, no Cap.3 são apresentadas as dinâmicas quânticas, para sistemas quânticos abertos e fechados. Para o caso de sistemas quânticos abertos busca-se uma equação mestra (equação de Lindblad) a qual governa a dinâmica do sistema. Sendo a equação de Lindblad obtida da derivação microscópica e através de mapas dinâmicos utilizando os operadores de Kraus. Ao fim do capítulo há um exemplo de como se obter a equação mestra de um sistema constituído por um q-bit acoplado a um banho de defasagem.

Posteriormente no Cap.4, busca-se entender o conceito de Markovianidade, para isso, são apresentados inicialmente alguns conceitos estatísticos que possibilitam a definição clássica de Markovianidade. Com o propósito de discutir em seguida a Markovianidade no regime quântico e como quantificá-la. Ainda que outras medidas sejam citadas, essa dissertação, tem um interesse especial da correlação CPF, proposta por Budini e na medida BLP idealizada por Breuer, Lane e Pilo.

No Cap.5, por sua vez, está o modelo proposto para a dinâmica quântica de um sistema aberto. Este por sua vez é composto por dois q-bits, os quais estão acoplados entre si e com um deles, acoplado, também, a um banho de defasagem, responsável por introduzir o processo de decoerência nesse sistema. Ao final desse capítulo são aplicadas as medidas de não-Markovianidade aqui destacadas e depois comparadas.

Por fim, no Cap.6 são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido e também algumas direções possíveis para outras pesquisas relacionadas a este assunto. Há também os Apêndices A,B, C e D nos quais estão presentes algumas revisões de assuntos básicos, discussões

e detalhes técnicos que não apareceram no texto principal.

2 UMA BREVE EXPOSIÇÃO DOS CONCEITOS POR TRÁS DA TEORIA QUÂNTICA

Para um sistema quântico todas as características do sistema estão presentes no estado $|\psi(t)\rangle$ que é um elemento do espaço de Hilbert \mathcal{H} , quando esse estado foi preparado de maneira ideal, de tal forma que esse estado $|\psi(t)\rangle$ é completamente conhecido e pode ser denominado como micro-estado. A partir desses micro-estados é possível construir um macro-estado, que não é completamente conhecido, logo não é idealmente preparado. (4, 53, 54) Então, para descrevê-lo é preciso utilizar um “operador médio” capaz de unir os micro-estados $|\psi_i(t)\rangle$ com a sua respectiva probabilidade de ocorrência p_i . Esse é o operador densidade

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.1)$$

em que $\vec{p} = (p_i)$ é o vetor de probabilidade e será $p_i \geq 0$ para todo i e $\sum_i p_i = 1$ se o estado ρ for diagonal, ou seja, estiver escrito em uma base diagonal. O conjunto de operadores densidade em \mathcal{H} é denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que é um conjunto convexo. Essa característica surge devido ao fato que o operador densidade é composto por uma mistura de estados, ou seja, o operador densidade é geometricamente caracterizado pelos pontos do segmento de reta que liga os estados da mistura. (53) Sendo assim o operador densidade é como uma soma convexa de projetores (54), em que os estados puros¹ $|\psi\rangle\langle\psi|$ são os pontos extremais do sistema². (54) Há também os estados mistos que são escritos como uma soma convexa dos estados puros. Portanto, os operadores densidade devem possuir as seguintes características para que possam representar sistemas físicos (4, 9, 53):

1. O operador densidade deve ser linear, $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
2. O operador densidade deve ser hermitiano, $\rho^\dagger = \rho$.
3. O operador densidade deve ser positivo semi-definido para estados mistos e positivo definido para estados puros

$$\rho \geq 0 \longrightarrow \langle\psi_n|\rho|\psi_n\rangle = \sum_i p_i |\langle\psi_n|\psi_i\rangle|^2 \geq 0.$$

4. O operador densidade deve ser normalizado

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \longrightarrow \text{Tr} \rho = \text{Tr} \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) = \sum_i p_i = 1.$$

¹ Quando $p_i=1$.

² Visualmente pontos extremais são os vértices de um quadrado ou triângulo, por exemplo, enquanto em uma esfera de raio unitário os pontos extremais são os pontos do perímetro que envolve a esfera de raio um

Ademais, um operador que admite as propriedades 2 e 3 admite uma decomposição espectral, ou seja,

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.2)$$

Em que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ são os autovalores não negativos de ρ . A partir dessa nova definição, os postulados da teoria quântica (2, 4, 5) podem ser reestruturados como:

Postulado I (Representação): Todo sistema quântico está associado a um espaço de Hilbert \mathcal{H} , chamado como espaço de estados. Sendo o sistema completamente descrito pelo operador densidade $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

As grandezas físicas na mecânica quântica são descritas por um operador hermitiano $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e por ser um operador hermitiano ele é diagonalizável por isso possui uma representação espectral $A = \sum_i \alpha_i \Pi_i$. Sendo que o valor esperado desse observável é dado por

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A]. \quad (2.3)$$

Postulado II (Medição): A medição quântica é descrita por uma coleção $\{M_m\}$ de operadores de medida que atuam no espaço de estado do sistema a ser medido. O índice m indica o resultado que pode ocorrer a partir da medição. Ademais, essa coleção de operadores obedece à relação de completude $\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{I}$. Sendo assim, seja um estado arbitrário ρ , após a realização da medição ele será

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{p_m} \quad (2.4)$$

aqui $p_m = \text{Tr}[M_m^\dagger M_m \rho]$ é a probabilidade de ocorrência do resultado m .

Postulado III (Evolução temporal unitária): A evolução temporal de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária

$$\rho(t) = U \rho U^\dagger. \quad (2.5)$$

Postulado IV (Composição): Caso o espaço de estados de um sistema for \mathcal{H}_1 e o espaço de estados de outro sistema for \mathcal{H}_2 , então o espaço de estados do sistema composto é dado por $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

É importante ressaltar que o terceiro postulado é restrito a descrever a dinâmica de sistemas fechados. O que não é tão eficiente, uma vez que sistemas quânticos reais, em geral, são descritos por dinâmicas não unitárias devido ao seu contato com o ambiente. Sendo assim, é necessário definir uma forma mais geral para se descrever a dinâmica de um sistema quântico, e isso pode ser alcançado utilizando a ideia de canais quânticos.

2.1 Canais Quânticos

O formalismo do operador densidade além de possibilitar a representação de um estado o qual não é completamente conhecido, também permite reescrever os postulados de uma forma que pode ser utilizada na descrição de sistemas quânticos abertos. Em contrapartida, só a reformulação dos postulados não é suficiente para entender a dinâmica quântica de um sistema aberto, porém é um bom primeiro passo. Uma vez que da mesma forma que no Postulado III, busca-se evolução que preserve as propriedades de: hermeticidade ($\rho^\dagger = \rho$); positividade ($\rho \geq 0$) e traço ($\text{Tr}(\rho) = 1$). (2, 4, 5, 55) Sendo assim, canais quânticos são capazes de descrever evoluções quânticas em sua forma mais geral, visto que somente a evolução unitária não é suficiente. Um mapa, para ser capaz de mapear operadores densidade em operadores densidade, precisa obedecer algumas propriedades:

I. Mapa Linear : Seja, $\mathcal{E} : \rho \rightarrow \rho'$ um mapa quântico, diz-se que o mapa é linear quando

$$\mathcal{E}(\alpha\rho_A + \beta\rho_B) = \alpha\mathcal{E}(\rho_A) + \beta\mathcal{E}(\rho_B). \quad (2.6)$$

Em que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\rho_A, \rho_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. O mapa quântico \mathcal{E} precisa ser linear porque a teoria quântica é linear. (2, 4) Essa mesma justificativa pode ser reformulada em termos da convexidade, uma vez que o resultado da aplicação de um mapa não deve depender de como o operador densidade é escrito. (53) Além do mais, para espaços de Hilbert de dimensão finita d o mapa \mathcal{E} pode ser retratado por uma matriz que atua num espaço vetorial $d^2 \times d^2$. O operador densidade ρ que tem dimensão $d \times d$ terá as componentes de sua matriz indicadas por dois índices, já a matriz que retrata o mapa será representado por quatro índices, da seguinte forma

$$\rho'_{m\mu} = \sum_{n\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} \rho_{n\nu}. \quad (2.7)$$

II. Preservar a hermeticidade: A outra condição para que \mathcal{E} seja um mapa quântico é que ele deve ser auto adjunto (2, 4), ou seja, sendo

$$\rho' = (\rho')^\dagger, \text{ ou seja, } \rho'_{m\mu} = (\rho'_{\mu m})^*, \quad (2.8)$$

isso implica que

$$\sum_{n\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} \rho_{n\nu} = \sum_{n\nu} (\mathcal{E}_{\nu n}^{\mu m})^* \rho_{\nu n}^* \rightarrow \sum_{n\nu} [\mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} - (\mathcal{E}_{\nu n}^{\mu m})^*] \rho_{n\nu} = 0, \quad (2.9)$$

dessa forma

$$\mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} = (\mathcal{E}_{\nu n}^{\mu m})^* \quad \forall m, \mu, n, \nu. \quad (2.10)$$

A condição seguinte, impõe que $\text{Tr}(\rho') = 1$, então:

III. Preservar o Traço: Um mapa quântico $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ preserva o traço se (4),

$$\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] = \text{Tr}(\rho) = 1, \quad \forall \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad (2.11)$$

$$\sum_m \rho'_{mm} = \sum_{m,n\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{mm} \rho_{n\nu} = 1 \rightarrow \sum_m \mathcal{E}_{n\nu}^{mm} = \delta_{n\nu}. \quad (2.12)$$

IV. Mapa Positivo: Um mapa linear $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é dito mapa positivo se $\mathcal{E}(\rho)$ é positivo para qualquer matriz positiva ρ , isto é, $\mathcal{E}(\rho) > 0, \forall \rho > 0$.

Para que seja possível visualizar a condição acima é preciso definir uma matriz dinâmica D associada a \mathcal{E} , da seguinte forma $D_{\mu\nu}^{mn} = \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu}$. Que também obedecerá às condições já propostas, sendo assim, $D = D^\dagger$ e $D_{m\nu}^{mn} = \delta_{n\nu}$. A positividade para a matriz dinâmica D pode ser verificada a partir de $\langle x | \rho' | x \rangle \geq 0 \forall |x\rangle \in \mathcal{H}$. (53) Para isso, considera-se um estado puro $\rho = |z\rangle\langle z|$, que pode ser escrito como $\rho_{n\nu} = z_n z_\nu^*$. Sendo assim,

$$\langle x | \rho' | x \rangle = \sum_{m\mu} x_m^* \rho'_{m\mu} x_\mu = \sum_{m\mu} x_m^* \left(\sum_{n\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} z_n z_\nu^* \right) x_\mu = \sum_{m\mu} x_m^* \left(\sum_{n\nu} z_n D_{\mu\nu}^{mn} z_\nu \right) x_\mu > 0, \quad (2.13)$$

que pode ser reescrita como

$$\langle z^* | \langle x | D | x \rangle | z^* \rangle > 0. \quad (2.14)$$

Dessa forma, se \mathcal{E} é um mapa positivo, então D deve satisfazer a restrição $\langle z^* | \langle x | D | x \rangle | z^* \rangle \geq 0 \forall |z\rangle, |x\rangle \in \mathcal{H}$. (53) Essa restrição é denominada de positividade por blocos. Agora, considera-se um estado misto $\rho = \sum_i p_i |z_i\rangle\langle z_i|$, ou seja,

$$\langle x | \rho' | x \rangle = \sum_i p_i \langle x | \mathcal{E}(|z_i\rangle\langle z_i|) | x \rangle = \sum_{m\mu} x_m^* D_{\mu\nu}^{mn} \left(\sum_i p_i (z_i)_n^* (z_i)_\nu \right) x_\mu > 0. \quad (2.15)$$

Como $p_i \geq 0$ então essa condição só será satisfeita se D também for positiva por blocos. Além disso, essa condição é expressa pelo seguinte teorema (9):

Teorema 1 (Jamiołkowski). *Um mapa linear $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é positivo se e somente se a matriz dinâmica é positiva por blocos.*

Contudo, a positividade de um mapa \mathcal{E} não é o bastante para que o mesmo tenha um significado físico. Para tanto é preciso garantir que o mapa seja completamente positivo. (4,9)

V. Mapa completamente positivo: Um mapa linear $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é completamente positivo se a composição $\mathcal{E} \otimes \mathbb{I}_B$ for um mapa positivo para qualquer sistema auxiliar B que está em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_B de dimensão $d_B = \dim \mathcal{H}_B$, ou seja, $(\mathcal{E} \otimes \mathbb{I}_B)\rho_{AB} \geq 0$.

Agora a matriz dinâmica agirá em um estado composto $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Como a matriz dinâmica é hermitiana ela pode ser reescrita utilizando a decomposição espectral (4)

$$D = \sum_i d_i |\chi^i\rangle\langle \chi^i| \quad \text{ou ainda} \quad D_{\mu\nu}^{mn} = \sum_i d_i \chi_{mn}^i \chi_{\mu\nu}^{i*}. \quad (2.16)$$

Considerando um estado $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ em que $\rho_{mm'\mu\mu'} = z_{mm'} z_{\mu\mu'}^*$ e aplicando o mapa $\mathcal{E} \otimes \mathbb{I}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \rho_{mm'\mu\mu'} &= \sum_{nn'\nu\nu'} (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I})_{nn'\nu\nu'}^{mm'\mu\mu'} \rho_{nn'\nu\nu'} = \sum_{nn'\nu\nu'} \mathcal{E}_{nn'}^{m\mu} \mathbb{I}_{n'\nu'}^{m'\mu'} \rho_{nn'\nu\nu'} = \sum_{nn'\nu\nu'} \mathcal{E}_{nn'}^{m\mu} \delta_{m'n'} \delta_{\mu'\nu'} z_{nn'} z_{\nu\nu'}^* \\ &= \sum_{n\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} z_{nm'} z_{\nu\mu'}^* = \sum_{n\nu} \sum_i d_i \chi_{mn}^i z_{nm'} \chi_{\mu\nu}^{i*} z_{\nu\mu'}^* \end{aligned} \quad (2.17)$$

com isso, calcula-se $\langle x | \rho' | x \rangle$, em que $|x\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$\begin{aligned} \langle x | \rho' | x \rangle &= \sum_{mm'\mu\mu'} x_{mm'}^* \rho'_{mm'\mu\mu'} x_{\mu\mu'} = \sum_{mm'\mu\mu'} x_{mm'}^* \left(\sum_{n\nu} \sum_i d_i \chi_{mn}^i z_{nm'} \chi_{\mu\nu}^{i*} z_{\nu\mu'}^* \right) x_{\mu\mu'} \\ &= \sum_i d_i \left(\sum_{mm'n} \chi_{mn}^i z_{nm'} x_{mm'}^* \right) \left(\sum_{\mu\mu'\nu} \chi_{\mu\nu}^{i*} z_{\nu\mu'}^* x_{\mu\mu'} \right), \end{aligned}$$

que acarreta

$$\langle x | \rho' | x \rangle = \sum_i d_i \left| \sum_{mm'n} \chi_{mn}^i z_{nm'} x_{mm'}^* \right|^2 \geq 0 \quad \forall |z\rangle, |x\rangle. \quad (2.18)$$

Portanto, D é uma matriz positiva semi-definida. Caso ρ seja um estado misto $\rho = \sum_j p_j |z^j\rangle\langle z^j|$, de forma análoga

$$\sum_{mm'\mu\mu'} x_{mm'}^* \rho'_{mm'\mu\mu'} x_{\mu\mu'} = \sum_i \sum_j d_i p_j \left| \sum_{mm'n} \chi_{mn}^i z_{nm'}^j x_{mm'}^* \right|^2 \geq 0 \quad (2.19)$$

Com esse resultado, é possível definir o teorema de Choi (4, 53):

Teorema 2 (Teorema de Choi). *Um mapa linear \mathcal{E} será completamente positivo se e somente se a matriz dinâmica correspondente é positiva semi-definida.*

Ou em forma de um canal quântico:

Definição 1 (Operador de Choi). Considera-se dois espaços de Hilbert \mathcal{H}_A de dimensão $d_A = \dim \mathcal{H}_A$, base $|k\rangle_A, k = 1, \dots, d_A$ e \mathcal{H}_B de base $|k\rangle_B, k = 1, \dots, d_B$ em que $d_B = \dim \mathcal{H}_B$. O operador de Choi referente ao mapa $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$ é

$$(\mathcal{E}_A \otimes \mathbb{I}_B)(|\Omega_{AB}\rangle\langle\Omega_{AB}|) = \frac{1}{d_A d_B} \sum_{j,k} \mathcal{E}_A |j_A\rangle\langle k_A| \otimes |j_B\rangle\langle k_B|. \quad (2.20)$$

Em que $|\Omega_{AB}\rangle$ é um estado maximamente emaranhado que atua no espaço \mathcal{H}_{AB} e é definido como

$$|\Omega_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_A d_B}} \sum_k |k_A\rangle\langle k_B|. \quad (2.21)$$

Dessa forma, se o mapa \mathcal{E}_A for completamente positivo, então o operador de Choi é positivo semi-definido $(\mathcal{E}_A \otimes \mathbb{I}_B)(|\Omega_{AB}\rangle\langle\Omega_{AB}|) \geq 0$. (9, 56)

Teorema 3 (Representação de Kraus). *Seja um mapa linear $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, ele será completamente positivo se o mesmo admite a representação de Kraus*

$$\rho \mapsto \rho' = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \quad (2.22)$$

aqui $\rho \in \mathcal{H}$ é o operador densidade que sofre a transformação, enquanto $E_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ são os operadores de Kraus (4,5,9,57), o que faz com que E_k seja representado por matriz quadrada de dimensão idêntica à ρ . Além disso, caso o mapa preserve o traço E_k precisa satisfazer esta propriedade $\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{I}$.

Demonstração. Seja uma matriz dinâmica D , associada a um mapa completamente positivo \mathcal{E} (53), que pode ser escrita como

$$D = \sum_k d_k |\chi^k\rangle\langle\chi^k| \quad \text{em que } d_k \geq 0. \quad (2.23)$$

Define-se $|E^k\rangle = \sqrt{d_k} |\chi^k\rangle$, então

$$D = \sum_k |E^k\rangle\langle E^k| \rightarrow D_{\mu\nu}^{mn} = \sum_k E_{mn}^k E_{\mu\nu}^{k*} \quad (2.24)$$

o vetor $|E^k\rangle$ possui dimensão d^2 dessa maneira ele é descrito por dois índices. Sendo assim, é possível verificar que $|E^k\rangle$ é um operador E_k , o qual age em \mathcal{H} , ou seja, $(E_k)_{mn} = E_{mn}^k$, então

$$\rho'_{m\mu} = \sum_{n\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} \rho_{n\nu} = \sum_{n\nu} D_{\mu\nu}^{mn} \rho_{n\nu} = \sum_{n\nu} \sum_k E_{mn}^k E_{\mu\nu}^{k*} \rho_{n\nu} = \sum_{n\nu} \sum_k (E_k)_{mn} \rho_{n\nu} (E_k)_{\nu\mu}^\dagger, \quad (2.25)$$

ou seja,

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger. \quad (2.26)$$

Considera-se que \mathcal{E} preserva o traço, logo

$$\delta_{\nu n} = \sum_m D_{m\nu}^{mn} = \sum_k \sum_m (E_k)_{mn} (E_k)_{m\nu}^* = \sum_k \sum_m (E_k)_{\nu m}^\dagger (E_k)_{mn} = \sum_k (E_k^\dagger E_k)_{\nu n} \quad (2.27)$$

e, portanto $\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{I}$. Em contrapartida, se

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger \quad \text{isso implica que} \quad (\mathcal{E} \otimes \mathbb{I})_\rho = \sum_k (E_k \otimes \mathbb{I})_\rho (E_k^\dagger \otimes \mathbb{I})_\rho. \quad (2.28)$$

□

Isso indica que $\mathcal{E}(\rho)$ é um mapa completamente positivo e com isso pode descrever uma operação física. (4)

Essa representação quando aplicada a um sistema o qual está em contato com o ambiente que o cerca, é capaz de descrever a dinâmica do sistema principal sem considerar explicitamente

as propriedades do ambiente, uma vez que toda essa informação está condensada nos operadores E_k . (4) Essa afirmação pode ser vista da seguinte maneira: Considere ρ_S o operador que descreve o sistema quântico principal e ρ_E o operador densidade que descreve o ambiente, tem-se que a evolução conjunta é dada por

$$\rho_{SE}(t) = U(t)(\rho_S \otimes \rho_E)U^\dagger(t), \quad (2.29)$$

em que $\rho_{SE}(0) = \rho_S \otimes \rho_E$. Buscando encontrar a evolução temporal do sistema principal é preciso eliminar os graus de liberdade do ambiente

$$\rho_S(t) = \mathcal{E}(\rho_{SE}) = \text{Tr}_E[U(t)(\rho_S \otimes \rho_E)U^\dagger(t)]. \quad (2.30)$$

Seja $|e_k\rangle$ uma base ortonormal que compõe o espaço de Hilbert do ambiente e $\rho_E = \sum_k p_k |e_k\rangle\langle e_k|$ com $0 \leq p_k \leq 1$ e $\sum_k p_k = 1$. Reescrevendo a Eq.2.30 temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho_{SE}) &= \text{Tr}_E[U(t)(\rho_S \otimes \rho_E)U^\dagger(t)] = \sum_{k,n} p_k \langle e_n| U(t)(\rho_S \otimes |e_k\rangle\langle e_k|)U^\dagger(t) |e_n\rangle, \\ &= \sum_{k,n} p_k \langle e_n| U(t) |e_k\rangle \rho_S \langle e_k| U^\dagger(t) |e_n\rangle, \\ \mathcal{E}(\rho_{SE}) &= \sum_{k,n} E_{k,n}(t) \rho_S E_{k,n}^\dagger(t) \longrightarrow \rho_S(t) = \sum_{k,n} E_{k,n}(t) \rho_S E_{k,n}^\dagger(t), \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que $E_{k,n}(t) = \sqrt{p_k} \langle e_n| U(t) |e_k\rangle$ são operadores que atuam no espaço de estados do sistema, e são conhecidos como operadores de Kraus. (4) Além disso, esses operadores satisfazem a relação de completudeza

$$\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho_{SE})] = \text{Tr} \left[\sum_{k,n} E_{k,n}(t) \rho_S E_{k,n}^\dagger(t) \right] = \text{Tr} \left[\sum_{k,n} E_{k,n}^\dagger(t) E_{k,n}(t) \rho_S \right] = 1 \quad (2.32)$$

Como a relação acima é sempre verdadeira para qualquer ρ_S , temos que os operadores de Kraus devem obedecer à relação $\sum_{k,n} E_{k,n}^\dagger(t) E_{k,n}(t) = 1$

2.1.1 Representação na esfera de Bloch

O q-bit é o equivalente quântico do bit, sendo esse a unidade indivisível da informação clássica que pode assumir os valores 0 ou 1. O q-bit é responsável por descrever o estado de um sistema quântico de dois níveis. (4) O espaço de Hilbert para esse sistema é bidimensional e tem como base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, de tal forma que

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad \text{em que } a, b \in \mathbb{C} \text{ e } |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2.33)$$

Por outro lado, essa não é a forma mais geral, de se escrever o q-bit, para isso, é preciso migrar para a formulação do operador densidade e escrevê-lo na base das matrizes de Pauli, da seguinte maneira

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z) \quad (2.34)$$

em que

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

dessa forma,

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Com isso é possível perceber que a $\det(\rho) = (1 - (\vec{r})^2)/4$, o que implica que $\det(\rho) \geq 0$ ou $(\vec{r})^2 \leq 1$. Como o $\text{Tr}(\rho) = 1$, é possível fazer uma correspondência entre o operador densidade de um q-bit com os pontos de uma esfera de raio $0 \leq |\vec{r}| \leq 1$. Esta é a esfera de Bloch (4, 9), que possui em sua superfície, os estados puros, dado que os autovalores da matriz densidade devem ser 0 ou 1. Existe uma outra maneira de dizer se o estado é puro ou misto e é através da pureza.

Ao comparar a Eq.2.36 a uma matriz com coeficientes arbitrários

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$r_x = \rho_{12} + \rho_{21}, \quad (2.37)$$

$$r_y = -i(\rho_{21} - \rho_{12}), \quad (2.38)$$

$$r_z = 2\rho_{11} - 1. \quad (2.39)$$

2.1.2 Exemplos de canais quânticos

Em síntese, os canais quânticos são responsáveis por descrever a evolução de um sistema através de um mapa geral o qual possui as propriedades listadas anteriormente. O que faz com que canais quânticos sejam essenciais para descrever a dinâmica de um sistema quântico aberto e são responsáveis também por ser um canal de comunicação (9), o qual é um meio utilizado para encaminhar a informação entre duas partes de um sistema. A seguir, alguns exemplos de canais quânticos são expostos (4):

1. Bit flip: É um canal unital que basicamente troca o estado de um q-bit de $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ com probabilidade $1 - p$ e faz o processo inverso de troca $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ com probabilidade p . Dessa forma, o operador de Kraus que descreve esse sistema é

$$E_0 = \sqrt{p} \mathbb{I} = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \sqrt{1-p} \sigma_x = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho + (1-p)\sigma_x\rho\sigma_x. \quad (2.41)$$

2. Phase Flip: É um canal unital que possui os seguintes operadores de Kraus

$$E_0 = \sqrt{p} \mathbb{I} = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \sqrt{1-p} \sigma_z = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho + (1-p)\sigma_z\rho\sigma_z. \quad (2.43)$$

3. Bit-phase flip: É um canal unital que surge da combinação dos dois canais anteriores e seus operadores de Kraus são

$$E_0 = \sqrt{p} \mathbb{I} = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \sqrt{1-p} \sigma_y = \sqrt{1-p} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho + (1-p)\sigma_y\rho\sigma_y. \quad (2.45)$$

4. Depolarizing channel (Canal de despolarização): É um canal importante para descrever ruídos quânticos, visto que este canal permite mapear um estado ρ a uma outra versão maximamente emaranhada de ρ .

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{pI}{2} + (1-p)\rho \quad (2.46)$$

em que p simboliza a probabilidade do q-bit ser despolarizado, enquanto $1-p$ é a probabilidade de o q-bit não sofrer alteração.

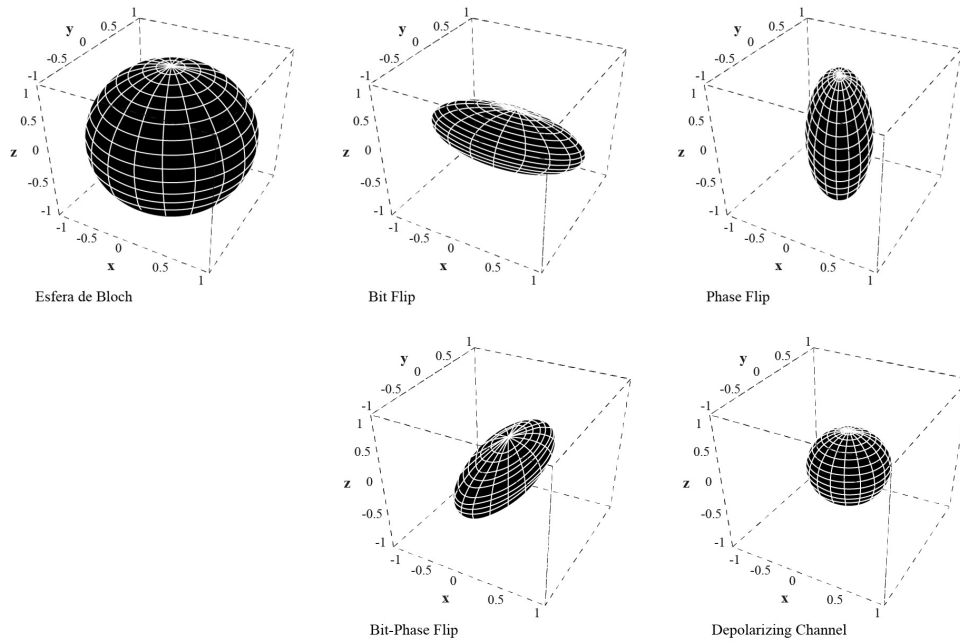


Figura 1 – Exemplifica a esfera de Bloch é alterada quando submetidas aos canais: bit flip ($p = 0,3$), phase flip ($p = 0,3$), bit-phase flip ($p = 0,3$) e depolarizing channel ($p = 0,5$)

5. Phase damping (Atenuação de fase): Também é um canal unital o qual descreve um processo em que não há perda de energia, mas há perda de informação, ou seja, de tal forma que as coerências são afetadas. Seus operadores de Kraus são

$$E_0 = \sqrt{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \sqrt{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \alpha\rho + (1-\alpha)(\sigma_z\rho\sigma_z). \quad (2.48)$$

este por sua vez é exatamente o canal phase flip.

6. Amplitude damping (Atenuação de amplitude): Este canal por sua vez é não unital e é responsável por descrever o efeito de dissipação de energia em um sistema quântico, da seguinte forma, o operador E_1 descreve a troca do estado $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$, sendo equivalente ao processo físico da perda de um quanta de energia para o ambiente. Já o operador E_0 atenua a amplitude do estado $|1\rangle$

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\beta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\beta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{E}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho_{00} + \beta\rho_{11} & \sqrt{1-\beta}\rho_{01} \\ \sqrt{1-\beta}\rho_{10} & (1-\beta)\rho_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

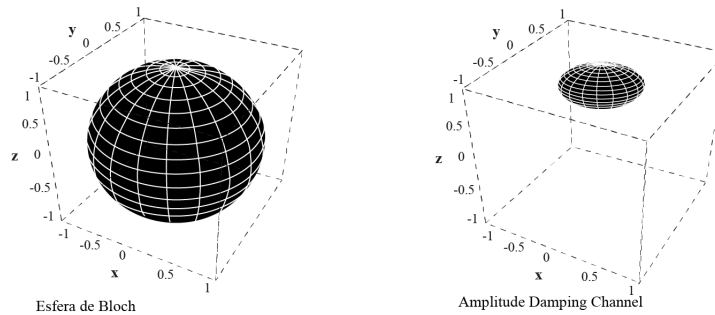


Figura 2 – Como a esfera de Bloch é alterada quando submetida ao canal de amplitude damping, para $\beta = 0,8$.

Fonte: Elaborada pela autora.

3 DINÂMICA QUÂNTICA

Um sistema físico quântico pode ser classificado a partir da interação que mantém com o ambiente que o cerca. Dessa forma, um sistema físico quântico isolado é aquele no qual não há qualquer interação com o ambiente ao seu redor. Há também sistemas quânticos que são abertos e retratam a interação entre o sistema e o ambiente (ou banho). Essa interação pode resultar em uma perda de energia e/ou de informação para o ambiente. Como o objetivo desse trabalho é entender a dinâmica de dois q-bits interagentes em que um deles interage com um banho de defasagem é indispensável compreender como a dinâmica desse sistema ocorre. Para isso, nesse capítulo serão apresentadas a evolução de um sistema isolado para que em seguida seja abordado a dinâmica de sistemas abertos. Posteriormente é encontrada a equação mestra que descreve a dinâmica de sistemas quânticos abertos via derivação microscópica e mapas quânticos dinâmicos. Ao final do capítulo é encontrada a equação mestra para o sistema de um q-bit acoplado a um banho de defasagem.

3.1 Sistema quântico isolado

Um sistema quântico isolado é descrito a partir de um estado quântico. (56–58) Dessa forma, seja o estado $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ em um tempo t e \mathcal{H} o espaço de Hilbert do sistema. (5) A evolução do sistema ocorre da seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (3.1)$$

em que $U(t, t_0)$ é um operador unitário conhecido como operador de evolução temporal. Por ser unitário, a seguinte relação deve ser satisfeita

$$U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = \mathbb{I}. \quad (3.2)$$

Caso o Hamiltoniano do sistema H seja independente do tempo, o operador de evolução temporal é dado por

$$U(t, t_0) = \exp[-iH(t - t_0)/\hbar]. \quad (3.3)$$

Sendo assim, a dinâmica do estado $|\psi(t)\rangle$ é dada pela derivada temporal da Eq.(3.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= \frac{d}{dt} (U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle) = -\frac{i}{\hbar} H U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \\ \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle &= -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por fim, a Eq. (3.4) é a equação de Schrödinger. (2,5,9,57) Daqui em diante é adotado $\hbar = 1$.

Por outro lado, caso a descrição do sistema seja utilizando o formalismo do operador densidade, a equação que descreve a dinâmica é a equação de Liouville-von Neumann. (5,58) Para encontrá-la, considere o operador densidade, construído a partir do estado dado na Eq.(3.1)

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \langle\psi(t_0)| U^\dagger(t, t_0). \quad (3.5)$$

Derivando no tempo, temos

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -iHU(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \langle\psi(t_0)| U^\dagger(t, t_0) + iU(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \langle\psi(t_0)| U^\dagger(t, t_0)H, \quad (3.6)$$

que pode ser simplificada utilizando a definição de comutador, $[A, H] = AH - HA$, dessa forma,

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[\rho(t), H]. \quad (3.7)$$

Esta é a equação de Liouville-von Neumann. (2,57)

Em contrapartida, sendo o Hamiltoniano dependente do tempo, então, o operador evolução temporal não será mais o mesmo. Para encontrá-lo recorreremos à Eq.(3.4) em que

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = -iHU(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \text{ ou seja, } \frac{d}{dt}U(t, t_0) = -iHU(t, t_0). \quad (3.8)$$

Integrando ambos os lados da equação de 0 a t , tem-se que

$$U(t, t_0) = \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 HU(t_1, t_0). \quad (3.9)$$

Onde foi utilizada como condição inicial $U(t_0, t_0) = \mathbb{I}$. A partir da Eq.(3.9) é possível verificar que há uma relação de recorrência, visto que pode se substituir $U(t_1, t_0)$ com $\mathbb{I} - i \int_{t_1}^{t_0} dt_2 H(t_2)U(t_2, t_0)$. Dessa maneira,

$$U(t, t_0) = \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 H(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_2)U(t_2, t_0). \quad (3.10)$$

Em virtude disso, é justificável escrever o operador de evolução temporal como

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Note que, a Eq.(3.11) pode ser simplificada. Para isso, é necessário olhar com atenção para o termo $\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2)$ e tentar reescrevê-lo com um novo operador (5, 9), utilizando-se da função de Heaviside,

$$\theta(t_1 - t_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_1 \geq t_2, \\ 0 & \text{se } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Com isso é possível definir um novo operador

$$\mathcal{T}[H(t_1)H(t_2)] = \frac{1}{2}[\theta(t_1 - t_2)H(t_1)H(t_2) + \theta(t_2 - t_1)H(t_2)H(t_1)], \quad (3.13)$$

de tal forma que,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left[\left(\int_{t_0}^t ds H(s) \right)^2 \right] &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \mathcal{T} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 H(t_1)H(t_2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) H(t_1)H(t_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \theta(t_2 - t_1) H(t_2)H(t_1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H(t_2)H(t_1). \end{aligned}$$

Ao alterar o índice de uma das integrais, encontra-se

$$\mathcal{T} \left[\left(\int_{t_0}^t ds H(s) \right)^2 \right] = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2), \quad (3.14)$$

em que o novo operador é conhecido como operador de ordenamento temporal. (56–58) Essa manipulação de termos permite reescrever a Eq.(3.11) como

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-i \int_{t_0}^t ds H(s) \right)^n \right], \quad (3.15)$$

que pode ser simplificada ao utilizar $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Logo,

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t ds H(s) \right) \right]. \quad (3.16)$$

Esta equação é conhecida como série de Dyson. (2, 6) Em contrapartida, a série de Dyson pode assumir uma forma simplificada quando o Hamiltoniano comuta com ele mesmo em

diferentes instantes de tempo, ou seja, $[H(t), H(t')] = 0$ para $t \neq t'$. Quando isso ocorre, tem-se que

$$U(t, t_0) = \exp \left[-i \int_{t_0}^t ds H(s) \right]. \quad (3.17)$$

Com isso, nota-se que dinâmica quântica de um sistema fechado é retratada pela evolução temporal do operador densidade. Diferentemente do que ocorre no regime clássico em que os observáveis, como posição q e momento p , são dependentes do tempo. Por outro lado, há uma descrição correspondente na teoria quântica conhecida como representação de Heisenberg (5, 9), que permite com que a dependência temporal seja alocada nos observáveis assim como no caso clássico. Sendo assim, o operador que depende agora do tempo é

$$O_H(t) = U^\dagger(t, t_0) O(t) U(t, t_0). \quad (3.18)$$

Em que $O_H(t)$ é o operador na representação de Heisenberg. (5, 56, 57) Para que as representações sejam semelhantes é preciso que $\rho(t_0) = \rho_H(t_0)$ para um tempo inicial t_0 e isso implica que $O_H(t_0) = O(t_0)$. Sendo assim, os operadores na representação de Schrödinger e de Heisenberg estão conectadas por uma transformação canônica, como mostrado na Eq.(3.18). Alternativamente, verifica-se que ambas as representações são equivalentes a partir do valor esperado, o qual é o mesmo para ambas as representações

$$\langle O(t) \rangle = \text{Tr}[O(t) \rho(t)] = \text{Tr}[O_H(t) \rho_H(t)]. \quad (3.19)$$

Com a definição do operador na representação de Heisenberg é possível encontrar a equação de movimento nessa representação (5), ou seja,

$$\frac{d}{dt} O_H(t) = i [H_H(t), O_H(t)] + \frac{\partial}{\partial t} O_H(t) \quad (3.20)$$

em que $H_H(t)$ é o Hamiltoniano na representação de Heisenberg e está relacionado à representação de Schrödinger, da seguinte forma $H_H(t) = U^\dagger(t, t_0) H(t) U(t, t_0)$. Ademais

$$\frac{\partial}{\partial t} O_H(t) = U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial}{\partial t} O(t) U(t, t_0),$$

é importante verificar que se $dO_H(t)/dt = 0$, então O_H é uma constante de movimento. Outro caso interessante é que se $O(t)$ for o Hamiltoniano do sistema e for isolado $\partial H/\partial t = 0$, então a representação de Heisenberg $H_H(t)$ é uma constante de movimento. (5, 56)

3.2 Dinâmica de sistemas quânticos abertos

Dado que sistemas quânticos reais não são isolados é necessário elaborar uma estrutura teórica para possibilitar a inclusão das interações entre o sistema e o ambiente em sua dinâmica. Para isso, considera-se que, em geral, há um sistema de interesse S e o mesmo está imerso, ou seja, acoplado a um ambiente quântico E . A interação entre os dois faz com que apareçam correlações que acarretam alterações as quais não são expressas a partir de dinâmicas unitárias.

Dessa forma, a dinâmica do subsistema S será denominada como a dinâmica do sistema reduzido. (5, 56) Em geral, o Hamiltoniano que descreve sistemas quânticos abertos é retratado como

$$H = H_S \otimes \mathbb{I}_E + \mathbb{I}_S \otimes H_E + H_I, \quad (3.21)$$

em que H_S é o Hamiltoniano do sistema S , enquanto H_E é o Hamiltoniano do ambiente e H_I descreve a interação entre o sistema e o ambiente. Aqui, foi-se utilizado, de forma genérica, o termo ambiente, no entanto, há dois casos específicos que são mais conhecidos e utilizados na literatura. Um deles é o reservatório que é utilizado para ambientes os quais possuem um alto número de graus de liberdade. (5) Enquanto, o outro é conhecido como banho térmico e se refere a ambientes que estão em um estado de equilíbrio térmico.

Até o momento foram abordadas duas representações, a representação de Schrödinger e a de Heisenberg que são casos limites de uma representação mais geral, a *representação de interação*. (5, 8, 56) Nessa representação o Hamiltoniano é o mesmo que o apresentado na Eq.(3.21). Dessa forma, para migrar da representação de Schrödinger para a representação de interação é necessário realizar as seguintes definições

- Operador de evolução temporal na representação de interação: $\tilde{U}(t, t_0) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)$
- Operador na representação de interação: $\tilde{O}(t) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)O(t)U(t, t_0)$
- Operador densidade na representação de interação: $\tilde{\rho}(t) \equiv \tilde{U}(t, t_0)\rho(t_0)\tilde{U}^\dagger(t, t_0)$
- Hamiltoniano na representação de interação: $\tilde{H}(t) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)\tilde{H}(t)U_0(t, t_0)$

A representação de Schrödinger é recuperada quando o termo livre H_0 é igual a zero, sendo assim $\tilde{H}(t) = H_I(t) \leftrightarrow U_0(t, t_0) = I \leftrightarrow U_I(t, t_0) = U(t, t_0)$. Já a representação de Heisenberg, manifesta-se quando $H_I(t) = 0 \leftrightarrow U_0(t, t_0) = U(t, t_0) \leftrightarrow U_I(t, t_0) = I$.

Em síntese o que foi apresentado até agora, é que ao lidar com um sistema quântico aberto, que é composto por um sistema S o qual interage com um ambiente E por um acoplamento H_I . O objetivo então é obter a influência do ambiente e com isso encontrar uma equação de movimento para o sistema S . Entretanto, isso não é tão fácil, inclusive, há muitas décadas, busca-se uma equação para sistemas quânticos que possua origem microscópica, mas acaba sendo inviável escrever uma equação geral dado que inevitavelmente utilizamos conceitos fenomenológicos e, assim, há uma dependência com o modelo. (5, 56) Por isso, foram desenvolvidas algumas abordagens para encontrar a equação de movimento do sistema.

3.3 Derivação Microscópica

Supõe-se um sistema bipartido $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ o qual é composto pelo sistema de interesse S , em um espaço \mathcal{H}_S que está acoplado a um reservatório E , em um espaço \mathcal{H}_E . Sendo assim, o Hamiltoniano que descreve esse sistema é dado pela Eq.(3.21). (5, 8, 59) Uma vez

que o sistema total \mathcal{H} é fechado a evolução temporal desse sistema é dada pela equação de Liouville-von Neumann

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] \equiv \mathcal{L}_t\rho(t). \quad (3.22)$$

em que \mathcal{L} é um mapa CPTP que realiza a seguinte operação $\mathcal{L}_t[\cdot] := -i[H(t), \rho(t)]$. Por outro lado, como a mudança substancial é realizada pelo termo de interação é conveniente ir para a representação de interação (5, 6), que faz com que equação de Liouville-von Neumann seja

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = -i[\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (3.23)$$

cuja integral é

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) - i \int_{t_0}^t dt' [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]. \quad (3.24)$$

Com isso, basta substituir a Eq.(3.23) na Eq.(3.24), que leva à

$$\tilde{\rho}(t) = -i[\tilde{H}_I(t), \rho(0)] - \int_0^t dt' [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]], \quad (3.25)$$

aqui $\tilde{\rho}(0) = \rho(0)$. Como o interesse está na dinâmica do sistema principal, então os graus de liberdade do ambiente podem ser retirados, utilizando-se da operação traço, isso faz com que o operador densidade seja reduzido a $\tilde{\rho}_S(t) = \text{Tr}_E[\tilde{\rho}(t)]$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -i \text{Tr}_E[\tilde{H}_I(t), \rho(0)] - \int_0^t dt' \text{Tr}_E[\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (3.26)$$

Para encontrar a equação mestra para o operador densidade algumas premissas e hipóteses precisam ser realizadas. A primeira premissa consiste em assumir que o estado inicial do sistema-ambiente é um estado produto (8, 57)

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E. \quad (3.27)$$

O que significa que não há qualquer correlação entre o sistema e o ambiente, ou seja, o sistema e o ambiente evoluem livremente sem acoplamento até $t = 0$ e a partir daí surge o acoplamento. Além disso, essa hipótese faz com que seja possível descrever a dinâmica desse subsistema através de um canal quântico (9), o qual é responsável por transformar operadores densidade em operadores densidade. Além do mais, sem perda de generalidade, é possível supor que o Hamiltoniano de interação tenha a seguinte configuração

$$H_I = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \otimes E_{\alpha} \quad (3.28)$$

em que S_{α} atua no estado do sistema e E_{α} no estado do reservatório. Entretanto, S_{α} e E_{α} individualmente não são necessariamente hermitianos, mas o produto tensorial entre eles é, ou seja,

$$S_{\beta} \otimes E_{\beta} = S_{\alpha}^{\dagger} \otimes E_{\alpha}^{\dagger}. \quad (3.29)$$

Em contrapartida, é possível definir redefinir S_α e E_α em novos operadores que são hermitianos (5, 8), da seguinte forma

$$S_\alpha = \left(\frac{S_\alpha^\dagger + S_\alpha}{2} \right) + i \left(\frac{iS_\alpha^\dagger - iS_\alpha}{2} \right) \equiv S_\alpha^{[1]} + iS_\alpha^{[2]}, \quad (3.30)$$

$$E_\alpha = \left(\frac{E_\alpha^\dagger + E_\alpha}{2} \right) + i \left(\frac{iE_\alpha^\dagger - iE_\alpha}{2} \right) \equiv E_\alpha^{[1]} + iE_\alpha^{[2]}. \quad (3.31)$$

Reescrevendo a Eq.(3.28), tem-se que

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} [(S_\alpha^{[1]} + iS_\alpha^{[2]}) \otimes (E_\alpha^{[1]} + iE_\alpha^{[2]}) + (S_\alpha^{[1]} - iS_\alpha^{[2]}) \otimes (E_\alpha^{[1]} - iE_\alpha^{[2]})]$$

$$H_I = \sum_{\alpha=1}^n [S_\alpha^{[1]} \otimes E_\alpha^{[1]} - S_\alpha^{[2]} \otimes E_\alpha^{[2]}] \equiv \sum_{\alpha=1}^{2n} S'_\alpha \otimes E'_\alpha \quad (3.32)$$

em que S'_α e E'_α são individualmente hermitianos e são definidos da seguinte maneira

$$S'_\alpha = \begin{cases} S_\alpha^{[1]} & \text{se } \alpha = 1, \dots, n \\ -S_{\alpha-n}^{[2]} & \text{se } \alpha = n+1, \dots, 2n \end{cases} \quad \text{e} \quad E'_\alpha = \begin{cases} E_\alpha^{[1]} & \text{se } \alpha = 1, \dots, n, \\ E_{\alpha-n}^{[2]} & \text{se } \alpha = n+1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (3.33)$$

A outra premissa é que o estado do reservatório é um estado térmico (5, 7), o qual é definido como

$$\rho_E = \frac{e^{-\beta H_E}}{\text{Tr}_E[e^{-\beta H_E}]}, \quad (3.34)$$

aqui $\beta = 1/k_B T$, em que T é a temperatura do estado térmico e k_B é a constante de Boltzmann. Informações sobre o estado térmico e suas características são apresentados no Apêndice B. Além do mais, uma característica que a definição de estado térmico traz é que se $[\rho_E, H_E] = 0$ isso implica que o valor médio dos operadores do banho sejam independentes do tempo (60), ou seja,

$$\text{Tr}_E[\tilde{E}_\alpha(t)\rho_E] = \text{Tr}_E[e^{iH_E t} E_\alpha e^{-iH_E t} \rho_E] = \text{Tr}_E[E_\alpha e^{-iH_E t} \rho_E e^{iH_E t}] = \text{Tr}_E[E_\alpha \rho_E] = \langle E_\alpha \rangle. \quad (3.35)$$

Agora, retorna-se a Eq.(3.26) onde são aplicadas essas suposições, de tal forma que

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = -i \text{Tr}_E[\tilde{H}_I(t), \rho_S(0) \otimes \rho_E] - \int_0^t dt' \text{Tr}_E[\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \quad (3.36)$$

Uma vez que $[\rho_E, H_E] = 0$, então, assume-se que valor médio dos operadores do banho sejam zero (9), ou seja, $\langle E_\alpha(t) \rangle = \text{Tr}_E[\tilde{E}_\alpha(t)\rho_E] = 0$, o que leva a

$$\text{Tr}_E[\tilde{H}_I(t)\rho(0)] = \text{Tr}_E \left[\sum_{\alpha} \tilde{S}_\alpha(t) \otimes \tilde{E}_\alpha(t) \rho_S(0) \otimes \rho_E \right] = \sum_{\alpha} \tilde{S}_\alpha(t) \rho_S(0) \text{Tr}_E [\tilde{E}_\alpha(t)\rho_E]$$

$$\text{Tr}_E[\tilde{H}_I(t)\rho(0)] = \sum_{\alpha} \tilde{S}_\alpha(t) \rho_S(0) \langle E_\alpha(t) \rangle = 0. \quad (3.37)$$

Isso faz com que a Eq.(3.36) possa ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = & - \int_0^t dt' \text{Tr}_E [\tilde{H}_I(t) \tilde{H}_I(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{H}_I(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{H}_I(t) \\ & + \tilde{\rho}(t') \tilde{H}_I(t') \tilde{H}_I(t) - \tilde{H}_I(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{H}_I(t')], \end{aligned} \quad (3.38)$$

ou,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = \int_0^t dt' \text{Tr}_E \left[\tilde{H}_I(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{H}_I(t) - \tilde{H}_I(t) \tilde{H}_I(t') \tilde{\rho}(t') + h.c. \right]. \quad (3.39)$$

Em que $h.c$ indica o hermitiano conjugado dos termos apresentados. É possível notar que essa equação depende de diferentes tempos, em virtude disso há uma memória associada a evolução do sistema.

A primeira é a aproximação de Born (5, 7, 61, 62), na qual se assume que o acoplamento entre o sistema e o reservatório seja fraco, ou seja, a interação é tão fraca que o operador densidade total do sistema a qual inicialmente é um produto tensorial permanece descorrelacionada durante toda a evolução. Logo, apenas os efeitos de interação de primeira ordem são levados em consideração. Sendo assim, a aproximação de Born faz com que o estado do sistema evolua da seguinte maneira

$$\rho(t) = \rho_S(t) \otimes \rho_E + \mathcal{O}(H_I). \quad (3.40)$$

Logo a Eq.(3.39), levando em conta a aproximação de Born, e também que

$$\tilde{H}_I = \sum_{\alpha} \tilde{S}_{\alpha}(t) \otimes \tilde{E}_{\alpha}(t), \quad (3.41)$$

se torna,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = & \sum_{\alpha, \beta} \int_0^t dt' \left[\left(\tilde{S}_{\beta}(t') \tilde{\rho}_S(t') \tilde{S}_{\alpha}(t) \right) \text{Tr}_E \left[\tilde{E}_{\beta}(t') \rho_E \tilde{E}_{\alpha}(t) \right] \right. \\ & \left. - \left(\tilde{S}_{\alpha}(t) \tilde{S}_{\beta}(t') \tilde{\rho}_S(t') \right) \text{Tr}_E \left[\tilde{E}_{\alpha}(t) \tilde{E}_{\beta}(t') \rho_E \right] + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Empregando a propriedade cíclica do traço e utilizando o fato de H_I ser hermitiano

$$H_I = S_{\alpha} \otimes E_{\alpha} = S_{\alpha}^{\dagger} \otimes E_{\alpha}^{\dagger},$$

é possível substituir e renomear α em α' e obter a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = & \sum_{\alpha, \beta} \int_0^t dt' \left[\left(\tilde{S}_{\beta}(t') \tilde{\rho}_S(t') \tilde{S}_{\alpha}^{\dagger}(t) \right) \text{Tr}_E \left[\tilde{E}_{\beta}(t') \rho_E \tilde{E}_{\alpha}^{\dagger}(t) \right] \right. \\ & \left. - \left(\tilde{S}_{\alpha}^{\dagger}(t) \tilde{S}_{\beta}(t') \tilde{\rho}_S(t') \right) \text{Tr}_E \left[\tilde{E}_{\alpha}^{\dagger}(t) \tilde{E}_{\beta}(t') \rho_E \right] + h.c. \right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

ou ainda, define-se $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}(t, t') = \text{Tr}_E [\tilde{E}_{\alpha}^{\dagger}(t) \tilde{E}_{\beta}(t') \rho_E]$, que de certa forma, é uma função capaz de correlacionar dois pontos do reservatório. (5, 57, 59) Sendo assim,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} \int_0^t dt' \mathcal{R}_{\alpha,\beta}(t,t') \left[\left(\tilde{S}_\beta(t')\tilde{\rho}_S(t')\tilde{S}_\alpha^\dagger(t) \right) - \left(\tilde{S}_\alpha^\dagger(t)\tilde{S}_\beta(t')\tilde{\rho}_S(t') \right) + h.c \right]. \quad (3.44)$$

Além do mais essa função será homogênea no tempo, caso o banho esteja em um estado térmico, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_E[\tilde{E}_\alpha^\dagger(t)\tilde{E}_\beta(t')\rho_E] &= \text{Tr}_E \left[e^{iH_E t} E_\alpha^\dagger e^{-iH_E t} e^{iH_E t'} E_\beta e^{-iH_E t'} \rho_E \right] \\ &= \text{Tr}_E \left[e^{iH_E(t-t')} E_\alpha^\dagger e^{-iH_E(t-t')} E_\beta \rho_E \right] \\ &= \text{Tr}_E \left[\tilde{E}_\alpha^\dagger(t-t') E_\beta \rho_E \right] = \mathcal{R}_{\alpha,\beta}(t-t'). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dessa forma, $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}(t,t') = \mathcal{R}_{\alpha,\beta}(t-t')$ é responsável por correlacionar excitações do reservatório em tempos distintos t e t' . Ademais, utilizando a propriedade cíclica do traço, tem-se que

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} \int_0^t dt' \left\{ \mathcal{R}_{\alpha,\beta}(t-t') \left[\tilde{S}_\beta(t')\tilde{\rho}_S(t')\tilde{S}_\alpha^\dagger(t) - \tilde{S}_\alpha^\dagger(t)\tilde{S}_\beta(t')\tilde{\rho}_S(t') \right] + h.c \right\}. \quad (3.46)$$

Por conveniência substitui-se $t' \rightarrow t - \tau$

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} \int_0^t d\tau \left\{ \mathcal{R}_{\alpha,\beta}(\tau) \left[\tilde{S}_\beta(t-\tau)\tilde{\rho}_S(t-\tau)\tilde{S}_\alpha^\dagger(t) - \tilde{S}_\alpha^\dagger(t)\tilde{S}_\beta(t-\tau)\tilde{\rho}_S(t-\tau) \right] + h.c \right\} \quad (3.47)$$

Em seguida, iremos recorrer à aproximação de Markov (6), que é responsável por fazer com que as funções de correlação de banho decaiam rapidamente, o que implica em um sistema “sem memória”. Para exemplificar essa afirmação é conveniente definir duas escalas de tempo: τ_E que é o tempo no qual a correlação do reservatório decai, enquanto τ_D é o tempo de relaxação característico do sistema. (63) De tal forma que,

$$|\mathcal{R}_{\alpha,\beta}| \sim e^{-\tau/\tau_E}, \quad (3.48)$$

e τ_D é o tempo no qual a matriz densidade do sistema não muda expressivamente,

$$\frac{\Delta\rho_S(t)}{\Delta t} \sim \frac{1}{\tau_D}\rho_S(t). \quad (3.49)$$

Se a escala de tempo do sistema estiver dentro do limite $\tau_E \ll t \ll \tau_D$, a dinâmica de correlação do reservatório pode ser omitida. Sendo assim, se t é da ordem de τ_E , então o estado atual de $\rho_S(t)$ depende apenas do estado presente e não do passado, ou seja, $\rho_S(t-\tau) = \rho_S(t)$. Além disso, em muitas situações físicas este integrando (que descreve a correlação do ambiente) decai rapidamente a zero após um tempo τ_E , de tal forma que essa escala temporal quantifica a memória temporal do reservatório. (5, 9, 57) Em virtude disso, o limite de integração pode ser estendido ao infinito uma vez que a função de correlação do reservatório decai drasticamente depois do tempo τ_E de tal forma que o integrando se anula. Além disso, para que a aproximação

de Markov seja válida é preciso que τ_E seja muito menor que τ_D , isso porque τ_E e τ_D estão relacionados com o inverso da largura espectral das energias do reservatório ($\Delta\omega_E$) e do sistema ($\Delta\omega_D$). Isso significa que o espaçamento entre os níveis de energia do reservatório deve ser muito menor que o espaçamento para o sistema. (63) Isso é normalmente alcançado com um espectro discreto para o sistema e um reservatório de espectro contínuo. (5) Após à aproximação de Born-Markov, a equação mestra será

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = \sum_{\alpha,\beta} \int_0^\infty d\tau \left\{ \mathcal{R}_{\alpha,\beta}(\tau) \left[\tilde{S}_\beta(t-\tau)\tilde{\rho}_S(t)\tilde{S}_\alpha^\dagger(t) - \tilde{S}_\alpha^\dagger(t)\tilde{S}_\beta(t-\tau)\tilde{\rho}_S(t) \right] + h.c. \right\} \quad (3.50)$$

Caso o Hamiltoniano do sistema seja discreto e não-degenerado, ou seja, $H_S = \sum_\epsilon \epsilon \Pi(\epsilon)$, em que $\Pi(\epsilon)$ é um projetor nos autoestados de energia do Hamiltoniano e ϵ são os autovalores desses autoestados, ele pode ser estendido conforme feito no Apêndice B. Dessa forma, $\tilde{S}_\alpha(t)$ pode ser escrito da seguinte maneira

$$\tilde{S}_\alpha(t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} S_\alpha(\omega) \quad \text{em que} \quad S_\alpha(\omega) = \sum_\epsilon \Pi(\epsilon) S_\alpha \Pi(\epsilon + \omega). \quad (3.51)$$

Logo, ao utilizar essa definição para $\tilde{S}_\beta(t-\tau)$ e $\tilde{S}_\alpha^\dagger(t)$, a equação mestra pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = \sum_{\alpha,\beta,\omega,\omega'} \left\{ e^{-i(\omega-\omega')t} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left[S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega') - S_\alpha^\dagger(\omega')S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t) \right] + h.c. \right\}, \quad (3.52)$$

no qual foi definido que

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) = \int_0^\infty d\tau \mathcal{R}_{\alpha,\beta}(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (3.53)$$

A última aproximação é conhecida como aproximação secular ou aproximação de onda girante. Para aplicá-la é preciso definir τ_S que é um tempo característico para a evolução do sistema. Em geral, a escala de tempo é da ordem $\tau_S \approx |\omega' - \omega|$, com $\omega' \neq \omega$. Se $\tau_S \gg \tau_D$ que é o tempo de relaxação do sistema, então é possível descartar os termos das exponenciais que oscilam rapidamente $|\omega' - \omega| \neq 0$, uma vez que essas oscilações se alteram tão rapidamente que possuem média zero. (5, 57) Sendo assim, apenas os termos não oscilantes sobrevivem, ou seja, $\omega = \omega'$. A partir dessa aproximação, a equação mestra se torna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = & \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left[S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega) - S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t) \right] \\ & + \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Gamma_{\alpha\beta}^*(\omega) \left[S_\alpha(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\beta^\dagger(\omega) - \tilde{\rho}_S(t)S_\beta^\dagger(\omega)S_\alpha(\omega) \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Em seguida, define-se

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{\gamma_{\alpha\beta}(\omega)}{2} + i\Upsilon_{\alpha\beta}(\omega), \quad (3.55)$$

em que as funções de correlação do ambiente são decompostas em suas partes reais e imaginárias. Ademais, para um ω fixo, tem-se que

$$\Upsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2i} (\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) - \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega)) \quad \text{e} \quad \gamma_{\alpha\beta} = (\Gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \Gamma_{\beta\alpha}^*(\omega)), \quad (3.56)$$

em que $\gamma_{\alpha\beta}$ é uma matriz positiva, enquanto $\Upsilon_{\alpha\beta}$ é uma matriz hermitiana

$$\Gamma_{\alpha\beta}^*(\omega) = \frac{\gamma_{\alpha\beta}^*(\omega)}{2} - i\Upsilon_{\alpha\beta}^*(\omega) = \frac{\gamma_{\beta\alpha}(\omega)}{2} - i\Upsilon_{\beta\alpha}, \quad (3.57)$$

utilizando a nova definição para $\Gamma_{\alpha\beta}$ é possível reescrever a Eq.(3.54) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= \sum_{\alpha,\beta,\omega} \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}(\omega)}{2} + i\Upsilon_{\alpha\beta}(\omega) \right) [S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega) - S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)] \\ &+ \sum_{\alpha,\beta,\omega} \left(\frac{\gamma_{\beta\alpha}(\omega)}{2} - i\Upsilon_{\beta\alpha}(\omega) \right) [S_\alpha(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\beta^\dagger(\omega) - \tilde{\rho}_S(t)S_\beta^\dagger(\omega)S_\alpha(\omega)]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ademais, alterando os índices da última expressão, visto que $\Upsilon_{\beta\alpha}^* = \Upsilon_{\alpha\beta}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= \sum_{\alpha,\beta,\omega} \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}(\omega)}{2} + i\Upsilon_{\alpha\beta}(\omega) \right) [S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega) - S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)] \\ &+ \sum_{\alpha,\beta,\omega} \left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}(\omega)}{2} - i\Upsilon_{\alpha\beta}(\omega) \right) [S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega) - \tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega)], \end{aligned} \quad (3.59)$$

ou ainda, em termos de comutadores e anticomutadores

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) &= -i \left[\sum_{\alpha,\beta,\omega} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega)S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega), \tilde{\rho}_S(t) \right] + \sum_{\alpha,\beta,\omega} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) [S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega) \\ &- \frac{1}{2} \{S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega), \tilde{\rho}_S(t)\}]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Define-se o hamiltoniano Lambda-Shift H_{LS} (64), como

$$H_{LS} = \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega)S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega), \quad (3.61)$$

que é um operador hermitiano responsável por uma dinâmica unitária, uma vez que causa apenas um pequeno reescalonamento da frequência ω . Para verificar que H_{LS} é hermitiano basta renomear os índices α e β e depois utilizar a relação $\Upsilon_{\beta\alpha}^* = \Upsilon_{\alpha\beta}$, portanto

$$H_{LS}^\dagger = \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Upsilon_{\alpha\beta}^*(\omega)S_\beta^\dagger(\omega)S_\alpha(\omega) = \sum_{\alpha,\beta,\omega} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega)S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega) = H_{LS}. \quad (3.62)$$

Deste modo, a equação mestra na representação de interação é dada por

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -i [H_{LS}, \tilde{\rho}_S(t)] + \sum_{\alpha,\beta,\omega} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left[S_\beta(\omega)\tilde{\rho}_S(t)S_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{S_\alpha^\dagger(\omega)S_\beta(\omega), \tilde{\rho}_S(t)\} \right]. \quad (3.63)$$

Para finalizar a dedução é necessário voltar para a representação de Schrödinger, utilizando da relação $\tilde{\rho}_S(t) = V(t)^\dagger \rho_S(t) V(t)$ em que $V(t) = \exp\{-iH_0 t\}$ onde H_0 é o termo livre $H_0 = H_S + H_E$ enquanto o termo de interação $H_I(t) = \sum_\alpha S_\alpha \otimes E_\alpha$. Isso faz com que na representação de interação V seja escrito como

$$\tilde{V}(t) = e^{i(H_S+H_E)t} V e^{-i(H_S+H_E)t} = \sum_\alpha \tilde{S}_\alpha(t) \otimes \tilde{E}_\alpha(t), \quad (3.64)$$

em que

$$\begin{aligned}\tilde{S}_\alpha(t) &= e^{i(H_S+H_E)t} S_\alpha e^{-i(H_S+H_E)t} = e^{iH_S t} S_\alpha e^{-iH_S t}, \\ \tilde{E}_\alpha(t) &= e^{i(H_S+H_E)t} E_\alpha e^{-i(H_S+H_E)t} = e^{iH_E t} E_\alpha e^{-iH_E t}.\end{aligned}\quad (3.65)$$

Essas equações tomam essa forma porque $[H_S, H_E] = 0$, uma vez que os Hamiltonianos em questão atuam em diferentes espaços de Hilbert. Na eventualidade que o Hamiltoniano do sistema H_S for decomposto de forma discreta e não degenerada como $H_S = \sum_\epsilon \epsilon \Pi(\epsilon)$, pode-se reescrever $\tilde{S}_\alpha(t)$ da seguinte forma

$$\tilde{S}_\alpha(t) = e^{iH_S t} S_\alpha e^{-iH_S t} = e^{i \sum_\epsilon \epsilon \Pi(\epsilon) t} S_\alpha e^{-i \sum_{\epsilon'} \epsilon' \Pi(\epsilon') t}.\quad (3.66)$$

Ademais, caso S_α possua uma forma diagonal é possível utilizar a decomposição espectral (2, 4), de tal forma que

$$\tilde{S}_\alpha(t) = e^{i \sum_\epsilon \epsilon t \Pi(\epsilon)} S_\alpha e^{-i \sum_{\epsilon'} \epsilon' t \Pi(\epsilon')} = \sum_{\epsilon, \epsilon'} e^{-i(\epsilon' - \epsilon)t} \Pi(\epsilon) S_\alpha \Pi(\epsilon').\quad (3.67)$$

Definindo $\omega = \epsilon' - \epsilon$, isso leva à $\Pi(\epsilon') = \sum_\omega \delta_{\epsilon', \epsilon + \omega} \Pi(\epsilon + \omega)$, sendo assim

$$\tilde{S}_\alpha(t) = \sum_{\epsilon, \epsilon'} e^{-i(\epsilon' - \epsilon)t} \Pi(\epsilon) S_\alpha \sum_\omega \delta_{\epsilon', \epsilon + \omega} \Pi(\epsilon + \omega).\quad (3.68)$$

Aplicando a propriedade da delta de Dirac,

$$\tilde{S}_\alpha(t) = \sum_\omega e^{-i\omega t} \sum_\epsilon \Pi(\epsilon) S_\alpha \Pi(\epsilon + \omega),$$

e definindo $S_\alpha(\omega) = \sum_\epsilon \Pi(\epsilon) S_\alpha \Pi(\epsilon + \omega)$, tem-se que

$$\tilde{S}_\alpha(t) \equiv \sum_\omega e^{-i\omega t} S_\alpha(\omega) \quad \text{e} \quad \tilde{S}_\alpha^\dagger(t) = \sum_\omega e^{i\omega t} S_\alpha^\dagger(\omega).\quad (3.69)$$

Com esses resultados é possível calcular $S_\alpha(\omega) = V(t) \tilde{S}_\alpha(\omega) V(t)^\dagger$ na representação de Schrödinger

$$\begin{aligned}e^{-iH_S t} \tilde{S}_\alpha(\omega) e^{iH_S t} &= \sum_{\omega'} e^{i\omega' t} \sum_{\epsilon'} \Pi(\epsilon') S_\alpha(\omega) \Pi(\epsilon' + \omega) \\ &= \sum_{\omega'} e^{i\omega' t} \sum_{\epsilon'} \Pi(\epsilon') \left(\sum_\epsilon \Pi(\epsilon) S_\alpha \Pi(\epsilon + \omega) \right) \Pi(\epsilon' + \omega) \\ &= \sum_{\omega', \epsilon', \epsilon} e^{i\omega' t} \Pi(\epsilon') \Pi(\epsilon) S_\alpha \Pi(\epsilon + \omega) \Pi(\epsilon' + \omega) \\ &= \sum_{\omega', \epsilon', \epsilon} e^{i\omega' t} \delta_{\epsilon', \epsilon} \Pi(\epsilon) S_\alpha \delta_{\epsilon' + \omega', \epsilon + \omega} \Pi(\epsilon + \omega) \\ &= \sum_\epsilon e^{i\omega t} \Pi(\epsilon) S_\alpha^\dagger \Pi(\epsilon + \omega) = e^{i\omega t} S_\alpha(\omega).\end{aligned}\quad (3.70)$$

Já para $\tilde{S}_\alpha^\dagger(\omega) = V(t)\tilde{S}_\alpha^\dagger(\omega)V(t)^\dagger$

$$\begin{aligned}
e^{-iHst}\tilde{S}_\alpha^\dagger(\omega)e^{iHst} &= \sum_{\omega'} e^{-i\omega't} \sum_{\epsilon'} \Pi(\epsilon') S_\alpha^\dagger(\omega) \Pi(\epsilon' + \omega') \\
&= \sum_{\omega'} e^{-i\omega't} \sum_{\epsilon'} \Pi(\epsilon') \left(\sum_{\epsilon} \Pi(\epsilon) S_\alpha^\dagger \Pi(\epsilon + \omega) \right) \Pi(\epsilon' + \omega') \\
&= \sum_{\omega', \epsilon', \epsilon} e^{-i\omega't} \Pi(\epsilon') \Pi(\epsilon) S_\alpha^\dagger \Pi(\epsilon + \omega) \Pi(\epsilon' + \omega') \\
&= \sum_{\omega', \epsilon', \epsilon} e^{-i\omega't} \delta_{\epsilon', \epsilon} \Pi(\epsilon) S_\alpha^\dagger \delta_{\epsilon' + \omega', \epsilon + \omega} \Pi(\epsilon + \omega) \\
&= \sum_{\epsilon} e^{-i\omega t} \Pi(\epsilon) S_\alpha^\dagger \Pi(\epsilon + \omega) = e^{-i\omega t} S_\alpha^\dagger(\omega).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Por último é necessário calcular

$$\begin{aligned}
V(t)H_{LS}V^\dagger(t) &= \sum_{\alpha, \beta, \omega} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega) V(t) S_\alpha^\dagger(\omega) S_\beta(\omega) V^\dagger(t) \\
&= \sum_{\alpha, \beta, \omega} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega) V(t) S_\alpha^\dagger(\omega) V^\dagger(t) V(t) S_\beta(\omega) V^\dagger(t) = \sum_{\alpha, \beta, \omega} \Upsilon_{\alpha\beta}(\omega) S_\alpha^\dagger(\omega) S_\beta(\omega) \\
&= H_{LS},
\end{aligned} \tag{3.72}$$

ou seja, o Hamiltoniano Lambd-Shift é invariante por mudança de representação. A seguir, substitui-se as relações encontradas na equação mestra (3.63) para definir a equação mestra na representação de Schrödinger

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i [H_S + H_{LS}, \rho_S(t)] + \sum_{\alpha, \beta, \omega} \gamma_{\alpha\beta}(\omega) \left[S_\beta(\omega) \rho_S(t) S_\alpha^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \{ S_\alpha^\dagger(\omega) S_\beta(\omega), \rho_S(t) \} \right]. \tag{3.73}$$

Uma observação importante é que o Hamiltoniano do sistema H_S comuta com o Hamiltoniano Lambda-Shift (63), para mostrar isso, considere

$$\begin{aligned}
[H_S, S_\alpha(\omega)] &= \left[\sum_{\epsilon} \epsilon \Pi(\epsilon), \sum_{\epsilon', \epsilon''} \Pi(\epsilon') S_\alpha(\omega) \Pi(\epsilon'') \right] \\
&= \sum_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''} [\epsilon \Pi(\epsilon) \Pi(\epsilon') S_\alpha(\omega) \Pi(\epsilon'') - \epsilon \Pi(\epsilon') S_\alpha(\omega) \Pi(\epsilon'') \Pi(\epsilon)] \\
&= \sum_{\epsilon, \epsilon', \epsilon''} [\epsilon \delta_{\epsilon, \epsilon'} \Pi(\epsilon') S_\alpha(\omega) \Pi(\epsilon'') - \epsilon \Pi(\epsilon') S_\alpha(\omega) \delta_{\epsilon, \epsilon''} \Pi(\epsilon'')] \\
&= \sum_{\epsilon', \epsilon''} (\epsilon' - \epsilon'') \Pi(\epsilon') S_\alpha(\omega) \Pi(\epsilon'') = -\omega S_\alpha(\omega) \\
&= -\omega S_\alpha(\omega),
\end{aligned} \tag{3.74}$$

e,

$$\begin{aligned}
[H_S, S_\alpha^\dagger(\omega) S_\beta(\omega)] &= [H_S, S_\alpha^\dagger(\omega)] S_\beta(\omega) + S_\alpha^\dagger(\omega) [H_S, S_\beta(\omega)] \\
&= \omega S_\alpha^\dagger(\omega) S_\beta(\omega) - \omega S_\alpha^\dagger(\omega) S_\beta(\omega) = 0,
\end{aligned} \tag{3.75}$$

com isso é possível mostrar que

$$[H_S, H_{LS}] = \sum_{\alpha, \beta, \omega} \Upsilon_{\alpha, \beta} [H_S, S_\alpha^\dagger(\omega) S_\beta(\omega)] = 0. \quad (3.76)$$

3.4 Equação Mestra local no tempo

Há uma outra forma, mais geral, para se analisar a evolução temporal de um sistema quântico aberto que é a partir de um mapa dinâmico. Este por sua vez é encarregado por transformar $\rho_S(t_0)$ em $\rho_S(t)$, mapeando assim operadores densidade em operadores densidade $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$. (4, 5, 56) Com esse objetivo, supõe-se que o estado inicial do sistema $\rho_{SE}(t_0)$, o qual é composto pelo sistema de interesse e pelo ambiente que o cerca, foi preparado em um tempo t_0 . Além do mais, tem-se que esse estado inicial é preparado de forma que os estados iniciais tanto do sistema reduzido $\rho_S(t_0)$ quanto o estado inicial do ambiente ρ_E não estão correlacionados, dessa forma, $\rho_{SE}(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_E$. Ademais, a evolução desse sistema é dada pelo mapa $\mathcal{E}(t, t_0)$

$$\rho_S(t) = \mathcal{E}(t, t_0)[\rho_S(t_0)] = \text{Tr}_E [U(t)\rho_S(t_0) \otimes \rho_E U^\dagger(t)]. \quad (3.77)$$

Com o objetivo de encontrar uma equação mestra local no tempo, define-se

$$\mathcal{E}(t, t_0) = \exp[\mathcal{L}_t t]. \quad (3.78)$$

Isso faz com que a evolução temporal do sistema reduzido possua a seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_t \rho_S(t), \quad (3.79)$$

ou ainda,

$$\rho_S(t) = \rho_S(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \mathcal{L}_{t'} \rho_S(t'). \quad (3.80)$$

Para que seja possível encontrar tal equação mestra é primordial descobrir a forma mais geral para \mathcal{L}_t . No entanto existem algumas restrições, entre elas está que a Eq.(3.80) tem que ser linear e preservar traço. (60, 63) Sendo assim, ao tomar o traço da Eq.(3.80), tem-se que

$$\text{Tr}[\rho_S(t)] = \text{Tr}[\rho_S(t_0)] + \int_{t_0}^t dt' \text{Tr}[\mathcal{L}_{t'} \rho_S(t')]. \quad (3.81)$$

A partir dessa equação é possível verificar que o traço de $\rho(t)$ só será preservado para todo instante de tempo se

$$\int_{t_0}^t dt' \text{Tr}[\mathcal{L}_{t'} \rho_S(t')] = 0 \quad \text{isso implica que} \quad \text{Tr}[\mathcal{L}_t \rho_S(t)] = 0. \quad (3.82)$$

A outra restrição é que a Eq. (3.80), precisa ser hermitiana para todo instante de tempo (5, 57), em virtude disso, tem-se que: $[\mathcal{L}_t \rho_S(t)]^\dagger = \mathcal{L}_t \rho_S(t)$.

O próximo passo consiste em associar o superoperador \mathcal{L}_t à um mapa quântico a partir dos operadores (52, 65), da seguinte forma

$$\mathcal{L}_t \rho_S(t) = \sum_i A_i(t) \rho_S(t) B_i(t)^\dagger. \quad (3.83)$$

Para que seja possível prosseguir, algumas considerações precisam feitas. Considera-se um espaço de Hilbert com dimensão finita, ou seja, $\dim[\mathcal{H}_S] = d$, o que faz com que o espaço do operador de Liouville tenha dimensão d^2 . Esse espaço tem como alicerce uma base completa, a qual é formada por operadores ortonormais $F_i, i = 1, 2, \dots, d^2$, de tal forma que $\langle F_i, F_j \rangle \equiv \text{Tr}_S F_i^\dagger F_j = \delta_{i,j}$. (9, 63, 64) Por conveniência, um dos operadores da base será escrito como sendo $F_0 = (\mathbb{I}_S/\sqrt{d})$, de tal forma que os outros operadores que compõe essa base possuam traço nulo $\text{Tr}_S[F_i] = 0$ para $i = 1, 2, \dots, d^2 - 1$. Dessa forma, os operadores dados na Eq.(3.83) podem ser escritos como

$$A_i(t) = \sum_{j=0}^{d^2-1} a_{ij}(t) F_j \quad \text{e} \quad B_i(t) = \sum_{k=0}^{d^2-1} b_{ik}(t) F_k, \quad (3.84)$$

com isso é possível reescrever a equação da seguinte forma

$$\mathcal{L}_t \rho_S(t) = \sum_{j,k=0}^{d^2-1} \left[\sum_i a_{ij}(t) b_{ik}^*(t) \right] F_j \rho_S(t) F_k^\dagger \equiv \sum_{j,k=0}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t) F_j \rho_S(t) F_k^\dagger. \quad (3.85)$$

Aqui $\gamma_{jk}(t)$ são os coeficientes da matriz de decoerência. (52, 60) Por outro lado, a equação hermitiana é dado por

$$(\mathcal{L}_t \rho_S(t))^\dagger = \sum_{j,k=0}^{d^2-1} \gamma_{jk}^*(t) F_k \rho_S(t) F_j^\dagger = \sum_{j,k=0}^{d^2-1} \gamma_{kj}^*(t) F_j \rho_S(t) F_k^\dagger, \quad (3.86)$$

como salientado anteriormente, a hermiticidade tem que ser preservada o que faz com que $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}^*$, implicando que a matriz de decoerência é hermitiana. (7, 60, 63) A seguir, retorna-se à Eq.(3.85) separando os primeiros termos do somatório em j e 0 , ou seja,

$$\mathcal{L}_t \rho_S(t) = \gamma_{00}(t) F_0 \rho_S(t) F_0^\dagger + \sum_{k=1}^{d^2-1} \gamma_{0k}(t) F_0 \rho_S(t) F_k^\dagger + \sum_{j=1}^{d^2-1} \gamma_{j0}(t) F_j \rho_S(t) F_0^\dagger + \sum_{j,k=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t) F_j \rho_S(t) F_k^\dagger,$$

substituindo $F_0 = (\mathbb{I}_S/\sqrt{d})$, tem-se que,

$$\mathcal{L}_t \rho_S(t) = \frac{\gamma_{00}(t)}{d} \rho_S(t) + \sum_{k=1}^{d^2-1} \frac{\gamma_{0k}(t)}{\sqrt{d}} \rho_S(t) F_k^\dagger + \sum_{j=1}^{d^2-1} \frac{\gamma_{j0}(t)}{\sqrt{d}} F_j \rho_S(t) + \sum_{j,k=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t) F_j \rho_S(t) F_k^\dagger. \quad (3.87)$$

Define-se

$$G(t) = \frac{\gamma_{00}}{2d} + \sum_{j=1}^{d^2-1} \frac{\gamma_{j0}(t)F_j}{\sqrt{d}}, \quad (3.88)$$

por outro lado, como a hermiticidade é preservada, então

$$G(t)^\dagger = \frac{\gamma_{00}}{2d} + \sum_{j=1}^{d^2-1} \frac{\gamma_{0k}(t)F_j^\dagger}{\sqrt{d}}. \quad (3.89)$$

De tal forma que, substituindo essas definições na Eq.(3.87), tem-se

$$\mathcal{L}_t \rho_S(t) = G(t)\rho_S(t) + \rho_S(t)G(t)^\dagger + \sum_{j,k=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)F_j\rho_S(t)F_k^\dagger. \quad (3.90)$$

Como citado anteriormente $\text{Tr}[\mathcal{L}_t \rho(t)] = 0$, então, ao tomar o traço na equação anterior e utilizando a propriedade cíclica do traço para isolar $\rho(t)$, tem-se que

$$\text{Tr}[\mathcal{L}_t \rho_S(t)] = \text{Tr} \left[\left(G(t) + G(t)^\dagger + \sum_{jk=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)F_k^\dagger F_j \right) \rho_S(t) \right] = 0, \quad (3.91)$$

isso implica que,

$$G(t) + G(t)^\dagger = -j \sum_{jk=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)F_k^\dagger F_j. \quad (3.92)$$

Com isso, define-se

$$H(t) = \frac{i}{2}[G(t) - G(t)^\dagger], \quad (3.93)$$

o qual é um operador hermitiano. Com isso reescrever-se

$$G(t) = -iH(t) - \frac{1}{2} \sum_{jk=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)F_k^\dagger F_j \quad \text{e} \quad G(t)^\dagger = iH(t) - \frac{1}{2} \sum_{jk=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)F_k^\dagger F_j. \quad (3.94)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \rho(t) &= -iH(t)\rho_S(t) - \frac{1}{2} \sum_{jk=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)F_k^\dagger F_j \rho_S(t) + i\rho(t)_S H(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{jk=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)\rho_S(t)F_k^\dagger F_j + \sum_{j,k=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t)F_j\rho_S(t)F_k^\dagger, \end{aligned} \quad (3.95)$$

utilizando o conceito de comutadores ($[A, B] = AB - BA$) e anti-comutadores ($\{A, B\} = AB + BA$), pode-se escrever equação mestra como

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i[H(t), \rho_S(t)] + \sum_{j,k=1}^{d^2-1} \gamma_{jk}(t) \left(F_j \rho_S(t) F_k^\dagger - \frac{1}{2} \{F_k^\dagger F_j, \rho_S(t)\} \right). \quad (3.96)$$

Uma vez que a matriz de decoerência é hermitiana ela pode ser diagonalizada em uma base adequada, sendo possível realizar a decomposição espectral. (4, 5, 63, 64) Portanto,

$$\gamma_{jk}(t) = \sum_i u_{ji}(t)\gamma_i(t)u_{ki}^*(t), \quad (3.97)$$

em que $u_{jk}(t)$ são coeficientes de uma matriz unitária. Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= -i[H(t), \rho_S(t)] + \sum_{i,j,k=1}^{d^2-1} u_{ji}(t)\gamma_i(t)u_{ki}^*(t) \left(F_j\rho_S(t)F_k^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ F_k^\dagger F_j, \rho_S(t) \right\} \right) \\ &= -i[H(t), \rho_S(t)] + \sum_{i=1}^{d^2-1} \gamma_i(t) \left[\left(\sum_{j=1}^{d^2-1} u_{ji}(t)F_j \right) \rho_S(t) \left(\sum_{k=1}^{d^2-1} u_{ki}^*(t)F_k^\dagger \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{d^2-1} u_{ki}^*(t)F_k^\dagger \right) \left(\sum_{j=1}^{d^2-1} u_{ji}(t)F_j \right), \rho_S(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Com o objetivo de se encontrar, por fim, a equação mestra em sua forma mais geral, define-se $L_i(t) = \sum_{j=1}^{d^2-1} u_{ji}(t)F_j$, como $L_i(t)$ depende do conjunto $\{G_j\}$, o qual é um conjunto de operadores ortonormais sem traço, dessa maneira, $\text{Tr}[L_i(t)^\dagger L_j(t)] = \delta_{ij}$ e $\text{Tr}[L_i(t)] = 0$, e então

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H(t), \rho_S(t)] + \sum_{i=1}^{d^2-1} \gamma_i(t) \left(L_i(t)\rho_S(t)L_i(t)^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ L_i(t)^\dagger L_i(t), \rho_S(t) \right\} \right). \quad (3.99)$$

Algumas informações sobre Eq.(3.99) são importantes de serem ressaltadas, a primeira delas é que a evolução temporal do operador densidade apresenta dois termos: o primeiro indica uma evolução unitária, a qual é governada pelo operador hermitiano $H(t)$. (5, 57) Já o segundo estabelece uma dinâmica não unitária, a qual depende dos operadores lineares e ortonormais $L_i(t)$, conhecidos por operadores de Lindblad, e das taxas de decoerência $\gamma_i(t)$ (taxa de decaimento) (52, 57, 63), a qual evidência a dissipação e a decoerência presente no sistema.

Ainda sobre a Eq.(3.99), há um teorema, o qual é baseado na teoria da positividade da dinâmica quântica de semigrupos e será responsável por caracterizar a divisibilidade da dinâmica descrita por essa equação mestra local no tempo. (25, 59, 66)

Teorema 4. *A equação (3.99) é responsável por gerar uma dinâmica:*

1. *CP-divisível se, e somente se, $\gamma_i(t)$, para todo i e $t \geq 0$*
2. *P-divisível se, e somente se:*

$$\sum_i \gamma_i(t) |\langle m | L_i(t) | n \rangle|^2 \geq 0 \quad (3.100)$$

para qualquer $n \neq m$, $t \geq 0$ e qualquer base ortonormal $\{|n\rangle\}$ do espaço de Hilbert.

Observe que a divisibilidade CP e a divisibilidade P são conceitos equivalentes quando a evolução consiste em um único canal, ou seja, há apenas uma taxa de decaimento $\gamma(t)$. Observe também que a condição de divisibilidade por si só não garante que a evolução será totalmente positiva. A condição de divisibilidade do CP é comumente conhecida como Teorema de Lindblad. (25, 59, 67)

3.5 A conexão entre mapas quânticos dinâmicos e equações mestras

Até o momento, foram retratadas duas maneiras de se descrever a dinâmica de um sistema quântico aberto. Entre elas está a dinâmica via equação mestra local no tempo, que possui a seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}_t\rho(t). \quad (3.101)$$

A qual permite descrever a evolução de estados iniciais distintos para um mesmo estado final, sendo útil para descrever equações mestras de dinâmicas não-Markovianas. A outra maneira é através de um mapa linear o qual relaciona $\rho(t_0)$ à $\rho(t)$ da seguinte maneira

$$\rho(t) = \mathcal{E}(t, t_0)[\rho(t_0)]. \quad (3.102)$$

O objetivo aqui é relacionar essas duas representações, para que seja possível determinar uma a partir da outra. (52, 68) Para isso, a equação mestra pode ser escrita a partir da definição de derivada, ou seja,

$$\frac{\rho(t + \epsilon, t_0) - \rho(t)}{\epsilon} = \mathcal{L}_t\rho(t), \quad (3.103)$$

então,

$$\mathcal{E}_{(t+\epsilon, t)}[\rho(t)] = \rho(t + \epsilon, t) = \rho(t) + \epsilon\mathcal{L}_t\rho(t), \quad (3.104)$$

e o mapa dinâmico fica definido como $\mathcal{E}_{(t+\epsilon, t)} = \mathbb{I} + \epsilon\mathcal{L}_t$. Por outro lado, diferenciando no tempo

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{(t, t_0)}[\rho(t_0)] = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{(t, t_0)}\mathcal{E}_{(t, t_0)}^{-1}[\rho(t_0)] \equiv \mathcal{L}_t\rho(t).$$

Assim,

$$\mathcal{L}_t = \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{(t, t_0)}\mathcal{E}_{(t, t_0)}^{-1}. \quad (3.105)$$

Essa é a relação mais direta entre ambas as representações dadas nas Eqs.(3.101) e (3.102). Entretanto, essa conexão não é tão útil visto que $\mathcal{E}_{(t, t_0)}^{-1}$ pode não existir. (52, 68) Em virtude disso, é necessário encontrar uma relação equivalente (68), levando isso em conta, destaca-se que

1. Mapas quânticos são superoperadores lineares e podem ser escritos como matrizes, visto que estamos num espaço de dimensão finita. Para isso é necessário considerar uma base ortonormal $\{F_i\}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, em que

$$\text{Tr} [F_i^\dagger F_j] = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 0, \dots, d^2 - 1, \quad (3.106)$$

aqui d indica a dimensão de \mathcal{H} . Utilizando que $F_0 = (\mathbb{I}/\sqrt{d})$, é possível estabelecer que o operador densidade terá a seguinte forma

$$\rho(t) = \sum_{k=0}^{d^2-1} \text{Tr} [F_k\rho(t)] F_k = \frac{1}{d} \text{Tr}[\rho(t)]\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{d^2-1} \text{Tr} [F_k\rho(t)] F_k \equiv \frac{1}{d} \left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{d^2-1} x_k(t) F_k \right), \quad (3.107)$$

em que os elementos $x_k(t) = d \operatorname{Tr} [F_k \rho(t)]$ formam o vetor $\vec{x}(t)$. Uma vez que $\rho(t) = \mathcal{E}(t, t_0)[\rho(t_0)]$, então,

$$\rho(t) = \mathcal{E}(t, t_0) \left[\frac{1}{d} \left(\mathbb{I} + \sum_{k=1}^{d^2-1} x_k(t) F_k \right) \right] = \frac{1}{d} \left(\mathcal{E}(t, t_0)[\mathbb{I}] + \sum_{k=1}^{d^2-1} x_k(t) \{ \mathcal{E}(t, t_0)[F_k] \} \right). \quad (3.108)$$

Logo, em termos dos elementos do vetor $\vec{x}(t)$

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \operatorname{Tr} \left[F_j \left(\mathcal{E}(t, t_0)[\mathbb{I}] + \sum_{k=1}^{d^2-1} x_k(t) \{ \mathcal{E}(t, t_0)[F_k] \} \right) \right] \\ &= \operatorname{Tr} [F_j \mathcal{E}(t, t_0)[\mathbb{I}]] + \sum_{k=1}^{d^2-1} \operatorname{Tr} [F_j \mathcal{E}(t, t_0)[F_k]] x_k(t) \\ &\equiv w_j(t, t_0) + \sum_{k=1}^{d^2-1} B_{jk}(t, t_0) x_k(t). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Então, $\vec{x}(t) = \vec{w}(t, t_0) + B(t, t_0)\vec{x}(t)$, em que o mapa dinâmico $\mathcal{E}(t, t_0)$ está incluído em $B(t, t_0)$ e $\vec{w}(t, t_0)$ da seguinte maneira

$$w_j(t, t_0) = \operatorname{Tr} [F_j \mathcal{E}(t, t_0)[\mathbb{I}]] \quad \text{e} \quad B_{jk}(t, t_0) = \operatorname{Tr} [F_j \mathcal{E}(t, t_0)[F_k]]. \quad (3.110)$$

2. De uma forma muito similar ao que foi feito anteriormente com mapas quânticos, é possível encontrar uma representação matricial para as equações mestras. (9, 68) De tal forma que

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}(t) + D(t)\vec{x}(t), \quad (3.111)$$

em que $u(t)$ é o *vetor de deslocamento* e $D(t)$ é a *matriz de amortecimento* (52, 68),

$$u_j(t) = \operatorname{Tr} [F_j \mathcal{L}_t[\mathbb{I}]] \quad \text{e} \quad D_{jk}(t) = \operatorname{Tr} [F_j \mathcal{L}_t[F_k]].$$

Com o fim dessas observações o objetivo agora é unir ambas as representações utilizando a sua forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{w}(t, t_0) + B(t, t_0)\vec{x}(t) \rightarrow \text{mapas quânticos,} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{u}(t) + D(t)\vec{x}(t) \rightarrow \text{equação mestra.} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Derivando no tempo a primeira equação encontra-se

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{w}}(t, t_0) + \dot{B}(t, t_0)\vec{x}(t_0). \quad (3.113)$$

Substituindo a segunda Eq.(3.112) na Eq.(3.113), tem-se

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}(t) + D(t)[\vec{w}(t, t_0) + B(t, t_0)\vec{x}(t_0)]. \quad (3.114)$$

Como as equações são lineares e essa equação deve ser verdadeira para qualquer $\vec{x}(t_0)$, então

$$\dot{\vec{w}}(t, t_0)\vec{x}(t) = \vec{u}(t) + D(t)\vec{w}(t, t_0) \quad \text{e} \quad \dot{B}(t, t_0) = D(t)B(t, t_0). \quad (3.115)$$

Ambas as equações acima são encarregadas de criar a ponte entre a formulação via equação mestra local no tempo e os mapas dinâmicos. Em síntese, no caso de se trabalhar com a representação de um mapa dinâmico, teríamos $\vec{w}(t, t_0)$ e $B(t, t_0)$ e com isso seria possível encontrar $\vec{u}(t)$ e $D(t)$. Por outro lado, se tivermos em posse de uma equação mestra local no tempo teríamos a situação inversa. (68) Há casos também em que $D(t)$ pode nem existir, visto que nem todo mapa dinâmico corresponde à uma equação mestra local no tempo.

3.6 Exemplo: canal de atenuação de fase

O exemplo a seguir tem como objetivo descrever a dinâmica de um q-bit (um sistema de dois níveis) o qual é submetido à um processo de atenuação de fase. Esse processo não afeta as populações, portanto, a energia do sistema é conservada, porém, as coerências são afetadas. (5,57) Sendo assim, a dinâmica em questão é dada pelo seguinte Hamiltoniano

$$H = \frac{\omega_0 \sigma_z}{2} + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k g_k \sigma_z (b_k + b_k^\dagger), \quad (3.116)$$

o primeiro termo descreve a energia do q-bit e depende de ω_0 (frequência do sistema) e de σ_z (matriz de Pauli) (56), enquanto o segundo caracteriza a energia do banho que depende de b_k^\dagger e b_k (operadores de aniquilação e criação do banho). Já o último termo descreve a interação sistema-banho com g_k sendo a constante de acoplamento entre o q-bit e o banho. Com o intuito de se obter a equação mestra que descreve o sistema é necessário seguir o procedimento citado anteriormente. Para isso, é preciso escrever o Hamiltoniano de interação como $H_I = \sum_\alpha S_\alpha \otimes E_\alpha$, ou seja,

$$H_I = S \otimes E \text{ em que } S = \sigma_z, E_1 = b_k \text{ e } E_2 = b_k^\dagger. \quad (3.117)$$

Em seguida, migramos para a representação de interação, no qual, $S = \sum_\omega e^{-i\omega t} S(\omega)$. Resultando num Hamiltoniano de interação da forma

$$\tilde{H}_I = \sigma_z \otimes \sum_k g_k \left(b_k e^{-i\omega_k t} + b_k^\dagger e^{i\omega_k t} \right) = \tilde{S}(t) \otimes \tilde{E}(t). \quad (3.118)$$

Em seguida, calculamos a função de correlação do reservatório

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tau) &= \text{Tr}_E[\tilde{E}(\tau)E\rho_E] = \text{Tr}_E \left[\sum_{k,k'} g_k^* \left(b_k^\dagger e^{i\omega_k \tau} + b_k e^{-i\omega_k \tau} \right) g'_k (b'_k + b'_k{}') \rho_E \right] \\ &= \sum_{k,k'} g_k^* g'_k \left\{ e^{i\omega_k \tau} \text{Tr}_E \left[b_k^\dagger b'_k \rho_E \right] + e^{i\omega_k \tau} \text{Tr}_E \left[b_k^\dagger b'_k{}' \rho_E \right] + e^{-i\omega_k \tau} \text{Tr}_E \left[b_k b'_k \rho_E \right] \right\} \\ &\quad + \sum_{k,k'} g_k^* g'_k e^{-i\omega_k \tau} \text{Tr}_E \left[b_k b'_k{}' \rho_E \right]. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Utilizando as relações para a média dos operadores de bóson, reescreve-se $\mathcal{R}(\tau)$ como

$$\mathcal{R}(\tau) = \sum_{k,k'} g_k^* g'_k \left\{ e^{i\omega_k \tau} \langle b_k^\dagger b'_k \rangle + e^{i\omega_k \tau} \langle b_k^\dagger b'_k{}' \rangle + e^{-i\omega_k \tau} \langle b_k b'_k \rangle + e^{-i\omega_k \tau} \langle b_k b'_k{}' \rangle \right\}. \quad (3.120)$$

Utilizando as relações encontradas no Apêndice B, tem-se que

$$\langle b_k b_{k'} \rangle = \langle b_k^\dagger b_{k'}^\dagger \rangle = 0, \quad (3.121)$$

$$\langle b_k b_{k'}^\dagger \rangle = \delta_{kk'} [1 + N(\omega_k)], \quad (3.122)$$

$$\langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle = \delta_{kk'} N(\omega_k), \quad (3.123)$$

em que

$$N(\omega_k) = \frac{1}{(e^{\beta\omega_k} - 1)}. \quad (3.124)$$

Logo a Eq.(3.120) se torna,

$$\mathcal{R}(\tau) = \sum_k |g_k|^2 (e^{i\omega_k \tau} N(\omega_k) + e^{-i\omega_k \tau} (1 + N(\omega_k))). \quad (3.125)$$

Para se utilizar da aproximação de Born-Markov é necessário que a frequência do reservatório seja contínua, para isso

$$\sum_k f(\omega_k) \rightarrow \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{|g(\omega)|^2} f(\omega).$$

Logo,

$$\mathcal{R}(\tau) = \int_0^\infty d\omega J(\omega') (e^{i\omega' \tau} N(\omega') + e^{-i\omega' \tau} (1 + N(\omega'))). \quad (3.126)$$

Posteriormente calculamos as taxas de decaimento

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\omega\tau} \int_0^\infty d\omega' J(\omega') (e^{i\omega'\tau} N(\omega') + e^{-i\omega'\tau} (1 + N(\omega'))) \\ &= \int_0^\infty d\omega' J(\omega') \int_{-\infty}^\infty d\tau (e^{i(\omega+\omega')\tau} N(\omega') + e^{-i(\omega'-\omega)\tau} (1 + N(\omega'))). \end{aligned} \quad (3.127)$$

Recorrendo a definição da delta de Dirac

$$\delta(\omega' - \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\tau(\omega' - \omega)} d\tau, \quad (3.128)$$

tem-se que

$$\gamma(\omega) = 2\pi \int_0^\infty d\omega' J(\omega') N(\omega') \delta(\omega' + \omega) + 2\pi \int_0^\infty d\omega' J(\omega') (1 + N(\omega')) \delta(\omega' - \omega). \quad (3.129)$$

Essa equação, pode ser dividida em duas em virtude da delta de Dirac, caso ω seja maior que zero, então $\delta(\omega' + \omega) = 0$, visto que $-\omega'$ está fora do limite de integração, então

$$\gamma(\omega > 0) = 2\pi J(\omega) (1 + N(\omega)). \quad (3.130)$$

Por outro lado, caso ω seja menor que zero, então $\delta(\omega' - \omega) = 0$

$$\gamma(\omega < 0) = 2\pi J(\omega) (1 + N(\omega)). \quad (3.131)$$

Ademais, como $S(0) = \sigma_z$, então $S(\omega) = 0$, isso faz com que a taxa de decaimento relevante é $\gamma(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \gamma(\omega)$, ou seja,

$$\lim_{\omega^+ \rightarrow 0} \gamma(\omega) = 2\pi J(0)(1 + N(0)) \quad \text{e} \quad \lim_{\omega^- \rightarrow 0} \gamma(\omega) = 2\pi J(0)N(0). \quad (3.132)$$

Com isso é possível verificar que $\gamma(0)$ possui limites laterais diferentes, em contrapartida caso seja no limite de altas temperaturas então $1 + N(\omega) \approx N(\omega)$. (63) Mas isso pode ser resolvido se assumir que $\lim_{\omega \rightarrow 0} J(|\omega|) = 0$. Ademais, $J(\omega)$ deve se aproximar de zero linearmente em ω pois $N(\omega) \rightarrow \infty$ enquanto $1/|\omega|$ diminui. (6) Essa hipótese restringe a classe das densidades espectrais que podem ser utilizadas. Então a taxa de decaimento é descrita por

$$\gamma(0) = 2\pi \lim_{\omega \rightarrow 0} J(|\omega|)N(|\omega|). \quad (3.133)$$

Logo a equação mestra é

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i \left[\frac{\omega_0 \sigma_z}{2}, \rho_S(t) \right] + \gamma [\sigma_z \rho_S(t) \sigma_z - \rho_S(t)]. \quad (3.134)$$

Essa equação, pode ser resolvida de forma mais prática ao utilizar a representação de interação, de tal forma que o operador densidade passa a ser $\rho_S(t) = e^{-iH_S t} \tilde{\rho}_S(t) e^{iH_S t}$. Sendo assim, a equação mestra se torna

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = \gamma [\sigma_z \tilde{\rho}_S(t) \sigma_z - \tilde{\rho}_S(t)], \quad (3.135)$$

Com isso, existem quatro equações diferenciais, as quais podem ser agrupadas duas a duas. De tal forma que um desses agrupamentos descreve a dinâmica dos termos da diagonal principal enquanto o outro descreve os termos fora da diagonal da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = 0 \Rightarrow \tilde{\rho}_S(t) = \rho_S(0) \quad \text{para as populações}, \quad (3.136)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = -2\tilde{\rho}_S(t) \Rightarrow \tilde{\rho}_S(t) = \rho_S(0) \exp(-2\gamma t) \quad \text{para as coerências}, \quad (3.137)$$

ou ainda

$$\tilde{\rho}_S(t) = \begin{bmatrix} \rho_{11}(0) & e^{-2\gamma t} \rho_{12}(0) \\ e^{-2\gamma t} \rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.138)$$

Ademais, é possível verificar que no limite de tempos longos ($t \rightarrow \infty$), os termos das coerências tendem a zero devido as exponenciais, enquanto as populações continuam as mesmas, ou seja, com o passar do tempo as coerências vão desaparecendo. O que faz com que nesse processo haja perda de informação, enquanto a energia permanece a mesma. (4) Para verificar tal afirmação, utiliza-se os mapas de Kraus Eq.(2.22) correspondentes

$$E_0 = \sqrt{\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \sqrt{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.139)$$

Logo, o operador densidade é escrito como

$$\rho_S(t) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger = \begin{bmatrix} \rho_{11}(0) & (2\alpha - 1)\rho_{12}(0) \\ (2\alpha - 1)\rho_{21}(0) & \rho_{22}(0) \end{bmatrix}, \quad (3.140)$$

em que α pode ser parametrizado como $2\alpha - 1 = e^{-2\gamma t}$.

4 AFINAL O QUE É MARKOVIANIDADE?

A compreensão de fenômenos naturais pode ser feita a partir do estudo da dinâmica de sistemas físicos. Em geral, este processo de modelagem matemática não possui restrições desde que sejam consistentes com as teorias físicas relevantes e consoantes com observações experimentais. (29) Por outro lado, a falta de restrições leva à uma modelagem genérica e complicada, sendo assim, uma forma de simplificar esse problema é através de aproximações, como a condição de Markov. (10, 69) De uma maneira informal um processo Markoviano é aquele em que a evolução de um sistema em qualquer tempo futuro, depende apenas do seu estado presente, conseqüentemente toda a história da dinâmica do sistema é irrelevante. (29) Essa é a ideia por trás de um processo Markoviano e ela é imprescindível para a descrição de inúmeros processos físicos reais entre eles o movimento browniano. (70, 71) Embora, no regime clássico o conceito de Markovianidade seja bem estabelecido, o mesmo não ocorre no regime quântico. Dessa forma, o objetivo deste capítulo é inicialmente definir a condição de Markov no regime clássico e para isso é necessário retornar à conceitos fundamentais da teoria de probabilidade como variáveis aleatórias e processos estocásticos. (72–75) Para que, posteriormente, sejam apresentados algumas das definições de Markovianidade no regime quântico e suas medições. Sendo as definições de Markovianidade quântica imprescindível para entender o fluxo de informação que ocorre do sistema para o ambiente em processos de decoerência.

4.1 Uma breve revisão sobre a teoria de probabilidade

Em 1850, em uma carta à Lewis Campbell, James Clerk Maxwell escreveu: “... the true logic for this world is the calculus of Probabilities...” (76, p. 197). Com essa afirmação ele exprime que a lógica só lida com a certeza ou com a impossibilidade, como num verdadeiro ou falso. Em contrapartida, o cotidiano é repleto de incertezas e de informações imprecisas, desde jogos de “azar” até o comportamento climático. Por mais que essas incertezas sejam demasiadamente mutáveis, há um comportamento recorrente que pode ser quantificado pelo cálculo da probabilidade. (1)

De uma maneira elementar, pois só é útil para os casos em que os eventos são equiprováveis e quando o espaço amostral e os eventos são contáveis, a probabilidade de ocorrência de um possível evento $P(A)$ é dada pela razão entre o número de casos N_A favoráveis ao evento A e entre o número de casos possíveis do experimento N (1),

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (4.1)$$

É importante ressaltar que o experimento exige a repetição, ou seja, o sistema a ser observado deve

ser preparado sempre da mesma forma. (1) Essa definição de probabilidade é muito simplificada e limitada. Sendo assim, uma forma de generalizar essa ideia elementar é através do espaço de probabilidade (5), o qual é matematicamente descrito por um conjunto de três objetos (Ω, \mathcal{A}, P) . O espaço de probabilidade é composto por um espaço amostral de eventos elementares, Ω , onde está presente o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento, também há uma σ -álgebra de eventos, que é um subconjunto \mathcal{A} de Ω , e por último a probabilidade de se medir a σ -álgebra (um evento) que nada mais é que uma função $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. (9) Dessa forma, uma função de probabilidade em Ω deve obedecer as seguintes propriedades (5, 72):

- (a) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall$ evento $A \subset \Omega$.
- (b) $P(\Omega) = 1$, a probabilidade é normalizada.
- (c) Seja $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ um conjunto contável com eventos disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), tem-se que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Esses axiomas são particularmente conhecidos como os Axiomas de Kolmogorov e a partir deles é possível fazer algumas considerações como (5, 9):

1. O espaço amostral e o conjunto vazio pertencem ao sistema de eventos, ou seja, $\Omega \in \mathcal{A}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$. O subconjunto vazio \emptyset é um evento impossível ($P[\emptyset] = 0$).
2. Se $A_1 \in \mathcal{A}$ e $A_2 \in \mathcal{A}$, então a união de $A_1 \cup A_2$ (que é o conjunto de todos os pontos pertencentes a A_1 ou A_2 ou ambos), a intersecção $A_1 \cap A_2$ (que é o conjunto de todos os pontos pertencentes a ambos os conjuntos e a diferença A_1/A_2 também pertence ao sistema \mathcal{A} .
3. Se houver uma coleção contável de eventos $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, então temos que a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Dessa forma, é possível encontrar uma equação de probabilidade a partir de operações lógicas entre eventos como,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2). \quad (4.2)$$

A probabilidade não é algo absoluto uma vez que ela depende, de certa forma, do conhecimento prévio sobre algo. (5, 74) Logo, a *probabilidade condicional* $P(A_1|A_2)$ de um evento A_1 desde que haja alguma informação parcial a respeito do resultado de um outro evento A_2 ($P(A_2) > 0$), é dada por

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}. \quad (4.3)$$

Em contrapartida, se os eventos são estatisticamente independentes (5), ou seja, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ isso implica que $P(A_1|A_2) = P(A_1)$. Essa característica pode ser generalizada para muitos eventos (5, 73, 74), como segue: $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_i) \dots P(A_{ik})$.

O teorema de Bayes (5, 23, 24) pode ser encontrado ao estender a probabilidade condicional utilizando a ideia de independência estatística, tem-se que,

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)} \quad (4.4)$$

4.1.1 Variáveis Aleatórias e processos estocásticos

Os elementos ω que compõem o espaço amostral Ω são objetos um tanto quanto abstratos por isso surge a necessidade de um objeto capaz de associar números aos elementos do espaço amostral. (5) Esse objeto em questão é conhecido como variável aleatória, a qual pode ser discreta (caso os resultados estejam em um conjunto finito) ou contínua (quando engloba o intervalo dos números reais). Portanto, uma variável aleatória X é definida como um mapa $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, o qual associa para cada evento elementar $\omega \in \Omega$ um número real $X(\omega) = x_i$. (5, 75) De tal maneira que a distribuição de probabilidade de X , possui a seguinte forma,

$$p(x_i) = P(X^{-1}(x_i)), \quad (4.5)$$

como a distribuição de probabilidade está diretamente associada ao conceito de probabilidade, os axiomas de Kolmogorov continuam sendo válidos, sendo assim, $p(x_i) \geq 0$ e $\sum_i p(x_i) = 1$, que são respectivamente as condições de positividade e normalização, o que garante que $p(x)$ seja uma distribuição de probabilidade. Caso x seja um número discreto, então $\mathbf{p} = (p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n))$ é o vetor probabilidade.

Em contrapartida, caso as propriedades estatísticas de uma variável aleatória se modificam por exemplo, com o passar do tempo, tem-se um processo estocástico. (5, 9) Matematicamente falando, um processo estocástico pode ser visto como um mapa $X : \omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$, o qual associa cada elemento $\omega \in \Omega$ e cada $t \in T$ a um número real $X(t, \omega)$, então

$$p(x_i, t) = P(X(t)^{-1}([x_i])). \quad (4.6)$$

Ademais, é possível generalizar a ideia de um processo estocástico para um processo estocástico multivariado, a diferença é que $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))$ em que cada componente $X_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, d$ representa um processo estocástico com valor real. Portanto, um processo estocástico multivariado é descrito como um mapa $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^d$. (5, 72) Sendo assim, o que caracteriza um processo estocástico é como as variáveis aleatórias $X(t)$ em diferentes tempos t estão correlacionadas. (9, 73)

A distribuição de probabilidade conjunta de ordem m para um processo estocástico multivariado $X(t)$ é dada por

$$p(x_m, t_m; x_{m-1}, t_{m-1}; \dots; x_1, t_1).$$

A partir dessa equação, tem-se que a probabilidade de um processo $X(t)$ assumir os valores x_1 em um tempo t_1 , x_2 em t_2 e assim sucessivamente até x_m num tempo t_m . Para o caso em que ω é fixo $t \rightarrow X(\omega, t)$, $t \in T$ (5), denota uma trajetória ou um caminho de um processo estocástico

Como o mapa que descreve um processo estocástico é abrangente isso faz com que o conceito de processo estocástico também seja. Contudo, por mais amplo que seja esse conceito, o mesmo ainda precisa representar uma variável aleatória para um tempo fixo t . Portanto, a distribuição de probabilidade conjunta também deve satisfazer as condições de consistência de Kolmogorov (5, 72, 75):

1. $\sum_{x_i} p(x_i, t) = 1 \rightarrow$ (A probabilidade de um evento certo é normalizado) ;
2. $p(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) \geq 0 \rightarrow$ (A distribuição de probabilidade deve ser não negativa);
3. $p(x_m, t_m; \dots; x_j, t_j; \dots; x_1, t_1) = p(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) \rightarrow$ (Um evento certo sempre pode ser omitido do conjunto de argumentos);
4. $p(x_{\pi(m)}, t_{\pi(m)}; \dots; x_{\pi(1)}, t_{\pi(1)}) = p(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) \rightarrow$ (A distribuição de probabilidade conjunta é invariante sob todas as permutações de π em seus argumentos).

O teorema de Kolmogorov, exprime que para qualquer família de probabilidades conjuntas existe um processo estocástico $X(t)$ em algum espaço de probabilidade. (5) Ou seja, a hierarquia completa de probabilidades conjuntas ($m = 1, 2, \dots$) determina totalmente um processo estocástico e, inversamente, qualquer hierarquia que satisfaz as condições de consistência determinam exclusivamente algum processo estocástico. (9) Dessa forma, a partir da distribuição de probabilidade, a probabilidade condicional pode ser reescrita como

$$p(x_m, t_m; \dots; x_{l+1}, t_{l+1} | x_l, t_l; \dots; x_1, t_1) = \frac{p(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1)}{p(x_l, t_l; \dots; x_1, t_1)}, \quad (4.7)$$

em que $l < m$. De uma forma mais geral, para um processo estocástico que se inicia em t_0 , a distribuição de probabilidade $p(x, t | x_0, t_0)$ é bem definida e é conhecida como matriz de transição, sendo descrita como

$$T(x, t | x_0, t_0) \equiv p(x, t | x_0, t_0). \quad (4.8)$$

De modo geral, a matriz de transição é responsável por realizar a transição entre o estado x_0 no tempo t_0 para um outro estado x em um tempo posterior t . Ou ainda, T é um mapa linear que conecta a probabilidade de uma variável aleatória X em diferentes tempos t_0 e t . Caso o propagador obedeça às seguintes condições:

1. $\sum_x T(x, t | x_0, t_0) = 1 \rightarrow$ a probabilidade para que o processo possua qualquer valor em um tempo fixo seja igual a 1;
2. $T(x, t | x_0, t_0) \geq 0 \rightarrow$ os elementos que compõem a matriz são maiores ou iguais a zero.

Ao satisfazê-las o propagador recebe o nome de matriz estocástica. (72, 73, 75)

A distribuição de probabilidade $p(x, t)$ está conectada à sua densidade inicial em um tempo t_0 da seguinte forma

$$p(x, t) = \sum_{x_0} T(x, t|x_0, t_0)p(x_0, t_0). \quad (4.9)$$

A título de curiosidade, um processo estocástico será estacionário se todas as densidades de probabilidade conjuntas forem invariantes sob translações temporais, ou seja (5),

$$p_m(x_m, t_m + \tau; \dots; x_1, t_1 + \tau) = p_m(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1). \quad (4.10)$$

o que implica que a distribuição de probabilidade p é independente do tempo, ou seja, $p(x, t) = p(x)$ e então o propagador $T(x, t|x_0, t_0)$ depende apenas na diferença $t - t_0$ de seu argumento para um processo estacionário. Por outro lado, se um processo for homogêneo o propagador temporal só depende da diferença temporal em seu argumento. Deste modo, um processo estacionário é homogêneo no tempo, mas processos homogêneos podem não ser estacionários. (5, 75)

4.2 Markovianidade Clássica

Mas o que seria, então, um processo Markoviano? Em poucas palavras um processo Markoviano é um processo estocástico $X(t)$ de memória curta, uma vez que toda a história passada é negligenciada (esquecida). Matematicamente falando, a condição de Markov impõe uma relação para as distribuições de probabilidade de forma que a probabilidade conjunta de todos os eventos é reescrita em termos de apenas de duas funções de distribuição. (5, 10, 72–75, 77)

Definição 2 (Condição de Markov). Seja um processo estocástico $X(t)$ com $t \in T$, ele será um processo de Markov se para $m = 0, 1, 2, \dots$ e um conjunto temporalmente ordenado $t_m > t_{m-1} > \dots > t_1$, a distribuição de probabilidade do evento $X(t)$, quando condicionado a m eventos anteriores, $X(t_0) = x_0, \dots, X(t_m) = x_m$ depender somente do último evento $X(t_m) = x_m$, de tal forma que

$$p(x_m, t_m|x_{m-1}, t_{m-1}, \dots; x_0, t_0) = p(x_m, t_m|x_{m-1}, t_{m-1}), \forall \{t_m \geq t_{m-1} \geq \dots \geq t_0\}. \quad (4.11)$$

Sendo assim, a condição de Markov tem como consequência a simplificação de toda a hierarquia das probabilidades conjuntas em apenas uma distribuição de probabilidade inicial e de uma matriz estocástica adequada. (5) Por outro lado, a equação de Chapman-Kolmogorov pode ser encontrada ao considerar $t_0 < t_1 < t_2$ e um processo Markoviano $p(x_2, t_2|x_1, t_1; x_0, t_0) = p(x_2, t_2|x_1, t_1)$. A partir da definição de probabilidade condicional (5, 10), tem-se

$$p(x_2, t_2|x_1, t_1; x_0, t_0) = \frac{p(x_2, t_2; x_1, t_1; x_0, t_0)}{p(x_1, t_1; x_0, t_0)}, \quad (4.12)$$

aqui,

$$\begin{aligned} p(x_2, t_2; x_1, t_1; x_0, t_0) &= p(x_2, t_2|x_1, t_1; x_0, t_0)p(x_1, t_1; x_0, t_0) \\ &= p(x_2, t_2|x_1, t_1)p(x_1, t_1|x_0, t_0)p(x_0, t_0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Realizando a soma sobre x_1 e dividindo ambos os lados por $p(x_0, t_0)$, encontra-se a equação de Chapman-Kolmogorov (5, 10, 77)

$$p(x_2, t_2|x_1, t_1) = \sum_{x_1} p(x_2, t_2|x_1, t_1)p(x_1, t_1|x_0, t_0), \quad (4.14)$$

que pode ser vista como um mapa linear o qual é responsável pela evolução das probabilidades. (9)

Além do mais, a definição de Markovianidade dado pela Eq.(4.11) pode ser reformulada em termos da matriz estocástica $T(x, t|x_0, t_0)$. Para isso, considera-se o seguinte teorema

Teorema 5. *Considere um processo de Markov $\{X(t), t \in T\}$. Dado dois instantes de tempo t_0 e t , então*

$$T(x, t|x_0, t_0) = p(x, t|x_0, t_0). \quad (4.15)$$

A partir da equação de Chapman-Kolmogorov e do Teorema 5, obtém-se o seguinte corolário

Corolário 5.1. *Dado um processo de Markov $\{X(t), t \in T\}$, então para qualquer $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, a matriz de transição possui as seguintes características*

$$\sum_{x_1} T(x_1, t_1|x_0, t_0) = 1; \quad (4.16)$$

$$T(x_1, t_1|x_0, t_0) \geq 0; \quad (4.17)$$

$$T(x_2, t_2|x_0, t_0) = \sum_{x_1} T(x_2, t_2|x_1, t_1)T(x_1, t_1|x_0, t_0). \quad (4.18)$$

Deste modo, para um processo de Markov as matrizes de transição remetem a densidades de probabilidade condicional de dois pontos e satisfaz a propriedade da Eq.(4.18), que por sua vez expressa que a evolução de t_0 para t_2 possa ser escrita como a composição da evolução t_0 para um estado intermediário t_1 e finalmente de t_1 para t_2 . Em compensação, para $t_1 \geq 0$ o propagador $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ não é, necessariamente, bem definido porém se toda a matriz $p(x_1, t_1|x_0, t_0)$ for invertível para todo t_1 então $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ pode ser escrito em termos de quantidades bem definidas. Uma vez que, se a evolução entre t_1 e t_2 existir deve haver uma composição da evolução contrária ao ponto inicial t_0 e depois prosseguir com a evolução de t_0 a t_2 , então

$$\begin{aligned} T(x_2, t_2|x_1, t_1) &= \sum_{x_0} T(x_2, t_2|x_0, t_0)T(x_0, t_0|x_1, t_1) \\ &= \sum_{x_0} p(x_2, t_2|x_0, t_0) [p(x_1, t_1|x_0, t_0)]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Se tanto as condições expostas na Eq.(4.16) e Eq.(4.18) forem satisfeitas isso não implica que a condição da Eq.(4.17) também será, isso faz com que $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ não seja automaticamente visto como uma probabilidade condicional, podendo assim manifestar características

não-Markovianas de um certo processo. (5, 9) Dessa maneira, um processo estocástico em que as matrizes $p(x_2, t_2|x_1, t_1)$ são estocásticas e satisfazem a equação de Chapman-Kolmogorov é conhecido como um processo divisível. Essa característica pode ser vista pela monotonicidade da norma-1. (5, 9, 10)

Teorema 6. *Seja $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ a matriz de transição de algum processo estocástico. Então, certo processo é divisível se, e somente se a norma-1 não aumentar quando $T(x_2, t_2|x_1, t_1)$ é aplicado à para qualquer vetor de probabilidade $v(x)$, $x \in \mathcal{X}$ para todo t_1 e t_2*

$$\left\| \sum_{x_1} T(x_2, t_2|x_1, t_1)v(x_1) \right\|_1 \leq \|v(x_2)\|_1, \quad t_1 \leq t_2. \quad (4.20)$$

É importante salientar que a definição de Markovianidade e de divisibilidade não são equivalentes uma vez que há processos divisíveis que são não-Markovianos. (5, 9) Por outro lado, há uma circunstância em que ambos os conceitos são equivalentes, isso ocorre quando uma família de matrizes estocásticas, se divisíveis podem ser escritas em termos das probabilidades condicionais de um processo de Markov. De tal forma que para distinguir ambos os conceitos, é essencial conhecer toda a hierarquia de probabilidades. (5, 50).

4.3 Markovianidade Quântica

É natural esperar que a definição de Markovianidade quântica surja a partir da analogia com a definição clássica. (10, 78) No entanto, algumas barreiras surgem devido ao alicerce matemático em que se encontra a mecânica quântica. (10, 18) Um desses entraves é que o análogo quântico para variáveis aleatórias clássicas remete aos operadores, que são responsáveis por representar os observáveis físicos do sistema. Isso faz com que a construção de uma probabilidade condicional quântica seja restrita a um conjunto muito específico de operadores. (10) Como não há um análogo para o conceito de probabilidade condicional, busca-se outras abordagens. Para que seja possível caracterizar o conceito de Markovianidade/não-Markovianidade e quantificá-lo. (10, 29)

Historicamente, uma das primeiras interpretações para o conceito de não-Markovianidade quântica surgiu devido as aproximações utilizadas ao se derivar a equação de Lindblad a partir de um modelo microscópico. (29, 62) De tal forma que, a dinâmica do sistema seria Markoviana caso os coeficientes fossem independentes do tempo. Sendo assim, por muito tempo a ausência de memória estava correlacionada aos coeficientes da equação de Lindblad. (10) Essa interpretação, no entanto, não é capaz de distinguir equações mestras não-Markovianas de Markovianas se os coeficientes dependem do tempo. (10, 11)

Além disso, há duas maneiras para se distinguir Markovianidade e não-Markovianidade baseada na teoria de informação quântica. (4) A primeira delas associa a não-Markovianidade ao aumento da distinguibilidade entre os estados do sistema. (10, 29) Portanto, pode ser quantificado

utilizando, por exemplo, a distância traço. Essa abordagem é representada na definição feita por Breuer, Laine and Piilo (BLP). (10, 25–27, 29, 48, 50, 51, 78) A outra abordagem parte da analogia clássica de que processos de Markov são divisíveis, ou seja, a evolução do sistema quântico será Markoviana se o mapa puder ser dividido em uma sequência de mapas completamente positivos. Essa abordagem é retratada pela definição proposta por Rivas, Huelga e Plenio (RHP). (18, 29)

As definições que terão mais ênfase nessa dissertação são as definições feita por Breuer, Laine and Piilo (BLP) e a definição CPF que foi proposta por Budini. (23, 24) Há ainda outras definições de não-Markovianidade que não foram citadas e podem ser encontradas em nas Refs.(10, 29).

4.3.1 Definição BPL

A definição proposta por Breuer, Laine and Piilo (BLP), parte da ideia de que processos sem memória preservam a distinguibilidade dos estados, de tal forma que a informação decresce monotonicamente. (10, 29) Dessa maneira, a definição de não-Markovianidade pode ser relacionada a distância traço, que mede a indistinguibilidade entre dois estados. No regime clássico a definição de distância traço, também conhecida como distância de Kolmogorov parte da norma de duas distribuições de probabilidade (5, 21)

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_i \|p(x_i) - q(x_i)\|. \quad (4.21)$$

Em que, \mathbf{p} e \mathbf{q} são vetores de probabilidade. Em contrapartida, como a dinâmica de um sistema quântico é descrita por um mapa CPTP, \mathcal{E}_{t,t_0} , utilizando a ideia de distinguibilidade de estados, a dinâmica será Markoviana se a distância traço entre dois estados decresce monotonicamente com o tempo, ou seja, os estados passam a ser indistinguíveis ente si. Matematicamente falando, para qualquer superoperador \mathcal{E}_{t,t_0} , que atua em um operador hermitiano X , tem-se que a medida de $\|[\mathcal{E}_{t,t_0} \otimes \mathbb{I}_B](X)\|$, decai monotonicamente com o tempo, visto que $\|[\mathcal{E}_{t,t_0} \otimes \mathbb{I}_B](X)\| \leq \|X\|$, isso faz com que $\|[\mathcal{E}_{t,t_0}(X)]\|_1$ também decresça para qualquer operador hermitiano X . Além disso, se $X = (\rho_1 - \rho_2)/2$ (9), tem-se que

$$\|\mathcal{E}_{t_2,t_0}(X)\| \leq \|\mathcal{E}_{t_1,t_0}(X)\| \quad \text{para } t_2 \geq t_1, \quad (4.22)$$

isso implica que,

$$\|\rho_1(t_2) - \rho_2(t_2)\|_1 \leq \|\rho_1(t_1) - \rho_2(t_1)\| \quad \text{para } t_2 \geq t_1. \quad (4.23)$$

É interessante mencionar que a distância traço também é monotonicamente decrescente para canais quânticos (em particular para mapas divisíveis CP) . Portanto, um mapa dinâmico quântico \mathcal{E}_{t,t_0} é P-divisível (9, 10, 29, 51), apenas se a norma do traço estiver diminuindo monotonicamente com o tempo, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \|\mathcal{E}_{t,t_0}(X)\|_1 \leq 0. \quad (4.24)$$

Se $X = \rho_1 - \rho_2$, que também é hermitiano, tem-se que para mapas dinâmicos invertíveis a P-divisibilidade é equivalente à

$$\frac{d}{dt} \|\mathcal{E}_{t,t_0}(\rho_1 - \rho_2)\|_1 \leq 0. \quad (4.25)$$

Com isso é possível concluir que os mapas invertíveis P-divisíveis levam a uma evolução Markoviana segundo a definição BPL. (10) Em síntese, a evolução de um sistema será não-Markoviana se a distância traço $D_1(\rho_1(t), \rho_2(t))$ aumentar, ou seja

$$\frac{d}{dt} D(\rho_1(t), \rho_2(t)) > 0 \text{ em que } D(\rho_1(t), \rho_2(t)) = \frac{1}{2} \|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_1. \quad (4.26)$$

4.3.2 Correlação CPF

A outra medida de não-Markovianidade foi elaborada por Adrián A. Budini e remete a formulação de Markovianidade clássica em termos das probabilidades condicionais. (23, 24) Tal medida está dada em termos da correlação condicional passado-futuro (CPF). Essa por sua vez consiste em um protocolo que possui pelo menos três eventos aleatórios, os quais tem como resultados $x \rightarrow y \rightarrow z$ e são temporalmente ordenados $t_x < t_y < t_z$. A descrição de um processo de Markov para essa sequência de eventos dada pela seguinte distribuição de probabilidade conjunta

$$P(z, y, x) = P(z|y)P(x|y)P(x), \quad (4.27)$$

em que $P(a|b)$ indica a probabilidade condicional de um evento a dado que um evento b ocorreu e $P(x)$ é a probabilidade de ocorrência do evento x . Ao utilizar o teorema de Bayes dada pela Eq.(4.4) é possível escrever a probabilidade condicional $P(z, x|y)$ de um evento futuro (z) e de um evento passado (x) quando condicionados a um estado presente y

$$P(z, x|y) = P(z|y, x)P(x|y). \quad (4.28)$$

Para um processo Markoviano clássico, os eventos passado e futuro se tornam estatisticamente independentes quando condicionados a um estado fixo intermediário. Essa propriedade se torna aparente matematicamente pela correlação condicional passado-futuro, que é definido como

$$C_{pf} = \langle O_z O_x \rangle_y - \langle O_z \rangle_y \langle O_x \rangle_y, \quad (4.29)$$

$$C_{pf} = \sum_{x,z} [P(z, x|y) - P(z|y)P(x|y)] O_z O_x, \quad (4.30)$$

aqui os parâmetros O_z e O_x indicam uma propriedade associada a cada estado do sistema. Para o caso em que a correlação CPF é nula, tem-se um processo Markoviano, visto que $P(z|y, x) = P(z|y)$ o que implica que $P(z, x|y) = P(z|y)P(x|y)$. Enquanto isso, caso $CPF \neq 0$, há a quebra da independência CPF e com isso aparecem efeitos de não-Markovianidade. Aqui a correlação condicional passado-futuro foi apresentada para um número mínimo de eventos mas o número de observações pode ser amplificado até a n -ésima ordem. (23, 24)

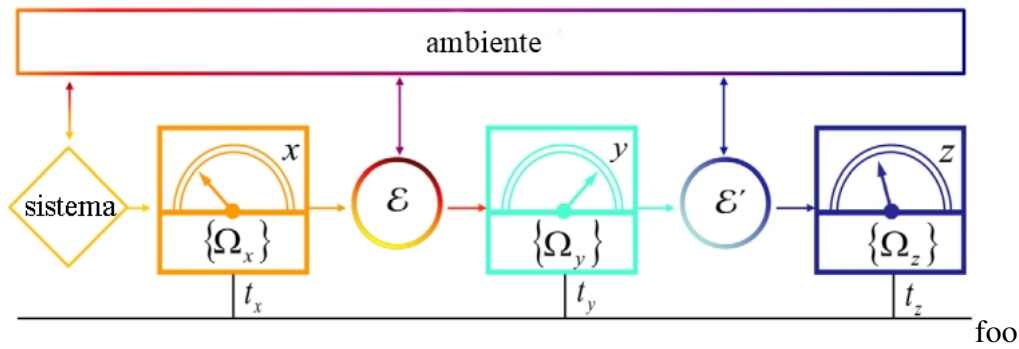


Figura 3 – Esquematização da aplicação do protocolo de medida. Um sistema aberto é sujeito a três medidas projetivas realizadas pelos operadores $\{\Omega_x\}$, $\{\Omega_y\}$ e $\{\Omega_z\}$ que são feitos, respectivamente em um tempo $t_x < t_y < t_z$ cujos resultados aleatórios são $x \rightarrow y \rightarrow z$.

Fonte: BUDINI.¹

No caso de um sistema quântico, esse protocolo necessita de algumas alterações como ilustrado na Fig.3. A primeira delas é que no regime quântico as medidas são capazes de alterar o sistema e para que isso não ocorra os resultados das medidas são obtidos a partir da aplicação de três medidas projetivas. (4) Ou seja, antes os resultados dos eventos eram $x \rightarrow y \rightarrow z$, agora x corresponde à Ω_x , $y \leftrightarrow \Omega_y$ e $z \leftrightarrow \Omega_z$. Como Ω_x , Ω_y e Ω_z são os operadores associados às medidas projetivas eles satisfazem à relação de completudeza $\sum_x \Omega_x^\dagger \Omega_x = \sum_y \Omega_y^\dagger \Omega_y = \sum_z \Omega_z^\dagger \Omega_z = \mathbb{I}$. Em que \mathbb{I} é a matriz identidade do espaço em que esses operadores atuam.

Em síntese, essa medida funciona da seguinte maneira, dado um sistema de interesse que está acoplado com o ambiente que o cerca, essa medida consiste na aplicação de pelo menos três medidas projetivas conforme o sistema evolui para que ao final do protocolo seja possível calcular a correlação condicional passado-futuro. A qual depende $P(z, x|y) = P(z|y, x)P(x|y)$, em que $P(x|y)$ é a probabilidade quântica retroativa e por isso pode ser escrita em termos dos operadores de medida e o “estado quântico passado” $\Xi \equiv (\rho_0, E_y)$. Em que ρ_0 é o estado inicial e E_y é o operador $\Omega_y \Omega_y$. Portanto

$$P(z, x|y) = \text{Tr} [\Omega_z^\dagger \Omega_z \rho_y] \frac{\text{Tr} [E_y \Omega_x \rho_0 \Omega_x^\dagger]}{\sum_{x'} \text{Tr} [E_y \Omega_{x'} \rho_0 \Omega_{x'}^\dagger]}. \quad (4.31)$$

Aqui, o primeiro termo corresponde à $P(z|y, x)$ enquanto o segundo corresponde à $P(x|y)$. Ademais, ρ_y indica o estado do sistema após a medida y , o qual depende apenas do resultado da medida y . Essa expressão é útil para caracterizar a Markovianidade em um sistema onde são realizadas apenas medidas quânticas.

¹ BUDINI, A. A. Quantum non-markovian processes break conditional past-future independence. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 121, p. 240401, Dec 2018.

Caso o sistema evolua durante as medidas consecutivas, então a probabilidade condicional $P(z, x|y)$ será

$$P(z, x|y) = \text{Tr} (\Omega_z^\dagger \Omega_z \mathcal{E}' [\rho_y]) \frac{\text{Tr} (E_y \mathcal{E} [\Omega_x \rho_0 \Omega_x^\dagger])}{\sum_{x'} \text{Tr} (E_y \mathcal{E} [\Omega_{x'} \rho_0 \Omega_{x'}^\dagger])} \quad (4.32)$$

em que $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t_y, t_x)$ e $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(t_z, t_y)$.

Para exemplificar esse protocolo, considera-se o exemplo de um q-bit submetido a um banho de defasagem, que é composto por múltiplos spins. (23, 24) O hamiltoniano de interação entre o q-bit e o banho é dado por

$$H_T = \sigma_z \otimes \sum_{k=1}^N g_k \sigma_z^{(k)} \quad (4.33)$$

aqui σ_z é a matriz de Pauli que tem como autovetores $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, enquanto $\sigma_z^{(k)}$ é a matriz de Pauli associado ao spin k (com autovetores $\{|\uparrow_k\rangle, |\downarrow_k\rangle\}$) e g_k é a constante de acoplamento entre cada spin do ambiente com o q-bit principal. O estado inicial é bipartido e separável, ou seja, $\rho_0^{SE} = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$, em que

$$|\Psi_0\rangle = (a |0\rangle + b |1\rangle) \otimes \sum_{k=1}^N (\alpha_k |\uparrow_k\rangle + \beta_k |\downarrow_k\rangle) \quad (4.34)$$

aqui os estados iniciais do banho são um conjunto de spins individuais com coeficiente $\{\alpha_k\}$ e $\{\beta_k\}$. Antes de aplicarmos o protocolo é essencial entender a dinâmica desse sistema, aqui apenas os pontos principais serão enunciados, porém informações complementares se encontram no Apêndice C. Logo, o estado do sistema em um tempo t é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle = \exp \left[-i \left(\sigma_z \otimes \sum_{k=1}^N g_k \sigma_z^{(k)} \right) t \right] |\Psi(t_0)\rangle \quad (4.35)$$

de tal forma que

$$|\Psi(t)\rangle = a |0\rangle \otimes |\mathcal{B}(t)\rangle + b |1\rangle \otimes |\mathcal{B}(-t)\rangle, \quad (4.36)$$

em que

$$|\mathcal{B}(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k e^{ig_k t} |\uparrow_k\rangle + \beta_k e^{-ig_k t} |\downarrow_k\rangle). \quad (4.37)$$

Com isso, é possível notar que com o passar do tempo o sistema e o ambiente passam a estar correlacionados pela função $|\mathcal{B}(t)\rangle$, o qual é um estado normalizado ($\langle\mathcal{B}(t)|\mathcal{B}(t)\rangle = 1$).

Em posse dessa informação é, enfim, possível aplicar o protocolo. Para isso, é necessário a realização de ao menos três medidas projetivas em diferentes tempos. Considera-se que o

estado inicial do sistema é $|0\rangle$, ou seja, $a = 1$ e $b = 0$. Sendo assim, a primeira medida x a ser realizada, ocorre no estado inicial do sistema

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi_0^x\rangle = \frac{\Pi_{\hat{x}=x} |\Psi_0\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_0 | \Pi_{\hat{x}=x} | \Psi_0 \rangle}} = \frac{|0\rangle + x |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \sum_{k=1}^N [\alpha_k^* |\uparrow_k\rangle + \beta_k^* |\downarrow_k\rangle]. \quad (4.38)$$

Após a primeira medida x , que assume os valores $x = \pm 1$ com probabilidade $P(x) = \langle \Psi_0 | \Pi_{\hat{x}=x} | \Psi_0 \rangle = 1/2$, o estado devido à interação com o meio evolui durante um tempo $t \equiv t_y - t_x$, conforme a dinâmica retratada pela Eq.(4.36), dessa maneira

$$|\Psi_t^x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |\mathcal{B}(t)\rangle + x |1\rangle \otimes |\mathcal{B}(-t)\rangle. \quad (4.39)$$

Após um tempo que o sistema evoluiu é feito a segunda medição y na direção \hat{x} e pode assumir, também, os valores de ± 1 . Além disso, a probabilidade condicional $P(y|x)$ da medida y dado o resultado anterior de x é

$$P(y|x) = \langle \Psi_t^x | \Pi_{\hat{x}=y} | \Psi_t^x \rangle = \frac{1}{2} (1 + yx \text{Re}[\langle \mathcal{B}(-t) | \mathcal{B}(t) \rangle]). \quad (4.40)$$

Já a probabilidade conjunta $P(y, x) = P(y|x)P(x) = (1 + yx \text{Re}[\langle \mathcal{B}(t) | \mathcal{B}(-t) \rangle])/4$. Portanto, o estado logo após a medida y será

$$|\Psi_t^x\rangle \rightarrow |\Psi_t^{x,y}\rangle = \frac{\Pi_{\hat{x}=y} |\Psi_t^x\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_t^x | \Pi_{\hat{x}=y} | \Psi_t^x \rangle}} = \frac{|0\rangle + y |1\rangle}{2} \otimes |\mathcal{B}_{yx}(t)\rangle, \quad (4.41)$$

no qual

$$|\mathcal{B}_{yx}(t)\rangle \equiv \frac{|\mathcal{B}(-t)\rangle + yx |\mathcal{B}(t)\rangle}{\sqrt{\mathcal{N}_t^{yx}}}, \quad (4.42)$$

aqui $\mathcal{N}_t^{yx} = \langle \mathcal{B}(t) | \mathcal{B}(t) \rangle + \langle \mathcal{B}(-t) | \mathcal{B}(-t) \rangle + yx \langle \mathcal{B}(t) | \mathcal{B}(-t) \rangle + yx \langle \mathcal{B}(-t) | \mathcal{B}(t) \rangle$. Logo após a medida o estado continua com a sua evolução por um período $\tau \equiv t_z - t_y$, logo

$$|\Psi_t^{yx}\rangle \rightarrow |\Psi_{t+\tau}^{yx}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |\mathcal{B}_{yx}(t - \tau)\rangle + y |1\rangle \otimes |\mathcal{B}_{yx}(t + \tau)\rangle). \quad (4.43)$$

De forma análoga à Eq.(4.3.2), a probabilidade condicional $P(z|y, x)$ após a última medida z é

$$P(z|y, x) = \langle \Psi_{t+\tau}^{yx} | \Pi_{\hat{x}=z} | \Psi_{t+\tau}^{yx} \rangle = \frac{1}{2} (1 + zy \text{Re}[\langle \mathcal{B}_{yx}(t - \tau) | \mathcal{B}_{yx}(t + \tau) \rangle]). \quad (4.44)$$

Já na representação do operador densidade a dinâmica entre a primeira medida x e antes da segunda medida y , ou seja, no intervalo de tempo de 0 a t , o estado do sistema é dado por $\rho_t^x = \text{Tr}_E[|\Psi_t^x\rangle\langle\Psi_t^x|]$ que é

$$\rho_t^x = \frac{1}{2} [|0\rangle\langle 0| + x c_t |0\rangle\langle 1| + x |1\rangle\langle 0| c_t^* + |1\rangle\langle 1|] \quad (4.45)$$

em que $c_t = \langle \mathcal{B}(t) | \mathcal{B}(-t) \rangle$

$$\rho_t^x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x c_t \\ x c_t^* & 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

que é de certa forma coerente com a interação de defasagem uma vez que só as coerências foram afetadas. Depois da segunda medida y e antes da terceira medida z , no intervalo de tempo entre t e $t + \tau$, o operador densidade do sistema é dado por $\rho_{t+\tau}^{yx} = \text{Tr}_E [|\Psi_{t+\tau}^{yx}\rangle\langle\Psi_{t+\tau}^{yx}|]$

$$\rho_{t+\tau}^{yx} = \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| + \frac{y}{2} |0\rangle\langle 1| c_{t,\tau}^{yx} + \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| + \frac{y}{2} |0\rangle\langle 1| c_{t,\tau}^{yx}. \quad (4.47)$$

Os termos fora da diagonal principal podem ser escritos como

$$c_{t,\tau}^{yx} \equiv \langle \mathcal{B}(t + \tau) | \mathcal{B}(t - \tau) \rangle = \frac{c_\tau + yx(c_{t+\tau} + c_{t-\tau}^*)/2}{1 + yx(c_t + c_t^*)/2}. \quad (4.48)$$

Logo, em forma de matriz temos que

$$\rho_{t,\tau}^{yx} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & y c_{t,\tau}^{xy} \\ y c_{t,\tau}^{*yx} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Aqui, c_t nos dá o comportamento da coerência, mas conforme são feitas medidas temos $c_{t,\tau}^{yx}$ que depende explicitamente dos resultados das medidas. A partir de $|\Psi_t^x\rangle$ e $|\Psi_{t+\tau}^{yx}\rangle$ é possível perceber que os estados estão descorrelacionados em virtude disso, não se faz necessário a aplicação da aproximação de Born-Markov, a qual considera que o banho não é alterado significativamente pelo sistema. (6) Essa propriedade não-Markoviana pode ser vista como a ação de medição que leva a uma mudança da dinâmica do sistema entre medições consecutivas, visto que $c_{t,\tau}^{yx} \neq c_t$. (23, 24) Por outro lado, caso o sistema esteja sujeito a um canal de “amplitude damping”, em que há efeitos de dissipação e coerência foi detectado efeitos de não-Markovianidade próximo a validade da aproximação de Born-Markov. (6)

Em síntese, a dinâmica do sistema parte de um estado inicial separável até que é realizada uma medida projetiva, com isso, o sistema durante toda a dinâmica $(0, t + \tau)$ ainda é descrito por um estado separável. No entanto, é possível notar pela Eq.(4.43) que o estado do banho $|\mathcal{B}_{yx}(t)\rangle$ é emaranhado desde a segunda medida y . Além disso, conforme a evolução do sistema foi acontecendo, calculamos as probabilidades $P(x|y)$ e $P(z|y, x)$ para que fosse possível determinar a probabilidade condicional $P(z, x|y) = P(z|y, x)P(x|y)$

$$P(z, x|y) = \frac{1}{4} \left[1 + yx f(t) + zy f(\tau) + zx \frac{f(t + \tau) + f(t - \tau)}{2} \right] \quad (4.50)$$

em que $f(t) \equiv \text{Re}[c_t]$, com isso tivemos que

$$P(z|y) = \sum_{x=\pm 1} P(z, x|y) = \frac{1}{2} [1 + zy f(\tau)] \quad (4.51)$$

$$P(x|y) = \sum_{z=\pm 1} P(z, x|y) = \frac{1}{2} [1 + zy f(t)] \quad (4.52)$$

Sendo assim, as médias condicionais são $\langle O_z \rangle_y = yf(\tau)$ e $\langle O_x \rangle_y = yf(t)$ e temos também que $\langle O_z O_x \rangle_y = [f(t + \tau) + f(t - \tau)]/2$ (23, 24). Então, a correlação CPF pode ser escrita como $[C_{pf} \rightarrow C_{pf}(t, \tau)]$, ou seja

$$C_{pf}(t, \tau) = \frac{f(t + \tau) + f(t - \tau)}{2} - f(t)f(\tau). \quad (4.53)$$

Logo, a dinâmica do sistema será Markoviana se $C_{pf} \simeq 0$, caso contrário, apresentará efeitos de memória.

Mas “afinal o que é Markovianidade?”. No contexto clássico o conceito de Markovianidade é bem definido uma vez que está relacionado, essencialmente, a probabilidade condicional, mas seu conceito pode ser atrelado à divisibilidade das matrizes de transição. Por outro lado, no regime quântico não há, ainda, uma caracterização completa e unívoca para a Markovianidade. De tal forma que não há como responder de forma absoluta a pergunta que deu início a esse capítulo. Por outro lado, uma maneira encontrada para se chegar a essa resposta é quantificando o problema, ou seja, realizando a seguinte pergunta: “O quanto um dado processo apresenta efeitos de memória?” (10) e com isso a algumas formas de se quantificar a Markovianidade quântica, entre elas, a medida BLP e a correlação CPF, descritas nesse capítulo. Outras formas de se medir ou testemunhar a Markovianidade são descritas na Refs.(10, 11, 18, 29). Como também não há uma única maneira de se medir efeitos de memória, todas as abordagens possuem vantagens e desvantagens. Sendo assim, o contexto é quem dita quais medidas serão adequadas ou não. (10)

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em síntese, vimos que algumas características físicas do sistema podem ser perdidas em virtude dos processos de dissipação e decoerência que são conceitos fundamentais para descrever sistemas quânticos reais e podem surgir como uma consequência da interação inevitável que existe entre o sistema e o ambiente ao seu redor. (20, 21, 79) Por outro lado, seria desejável que essas propriedades físicas fossem preservadas e isso pode acontecer se a informação já perdida do sistema para o ambiente retorne ao mesmo. Sendo assim, uma forma para se caracterizar/quantificar a informação que retorna ao sistema é através da não-Markovianidade, que por sua vez, está atrelada a definição de Markovianidade. (20, 21, 79)

Embora o conceito de Markovianidade, no regime clássico, esteja ligada probabilidade condicional que por sua vez pode ser atrelada a divisibilidade de mapas de transição em processos estocásticos. (5, 10) No regime quântico ainda não há uma definição geral de Markovianidade uma vez que o arcabouço teórico da teoria quântica e da teoria clássico são distintos. Mas existem alguns quantificadores que exprimem bem essa propriedade. Entre elas: a medida de Breuer-Laine-Piilo (BLP) (50, 51), na qual a Markovianidade está associada ao decrescimento monótono da distância traço em função do tempo, e a correlação condicional passado-futuro (CPF)(23, 24), que consiste em um protocolo com no mínimo três medidas projetivas e com isso consegue correlacionar pelo menos três estados em diferentes instantes de tempo através da probabilidade condicional. Se a dinâmica for Markoviana então a independência CPF não irá desaparecer, ou seja, $C_{pf} \simeq 0$.

Este capítulo tem como objetivo apresentar o resultado principal desta dissertação, que envolve um sistema de um q-bit acoplado a um banho efetivo que pode apresentar indícios de não-Markovianidade (20, 21) e comparar o resultado das duas medidas citadas anteriormente.

5.1 Modelo proposto

O sistema em questão está representado na Fig.4 e é composto por dois q-bits que interagem entre si e um deles está acoplado a um banho de defasagem. (20, 21) Este modelo representa o experimento envolvendo uma amostra de carbono e hidrogênio em uma configuração NMR conforme discutido detalhadamente na Ref. (21). O Hamiltoniano responsável por descrever o modelo proposto é dado por

$$H = -\frac{\omega_1 \sigma_z^{(1)}}{2} - \frac{\omega_2 \sigma_z^{(2)}}{2} + \frac{\pi J}{2} \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sigma_z^{(1)} \otimes \sum_k g_k (b_k + b_k^\dagger), \quad (5.1)$$

onde ω_1 indica a frequência do q-bit principal enquanto ω_2 designa a frequência do segundo q-bit e ω_k é a frequência do banho bosônico, J é a constante de acoplamento entre dois q-bits, g_k

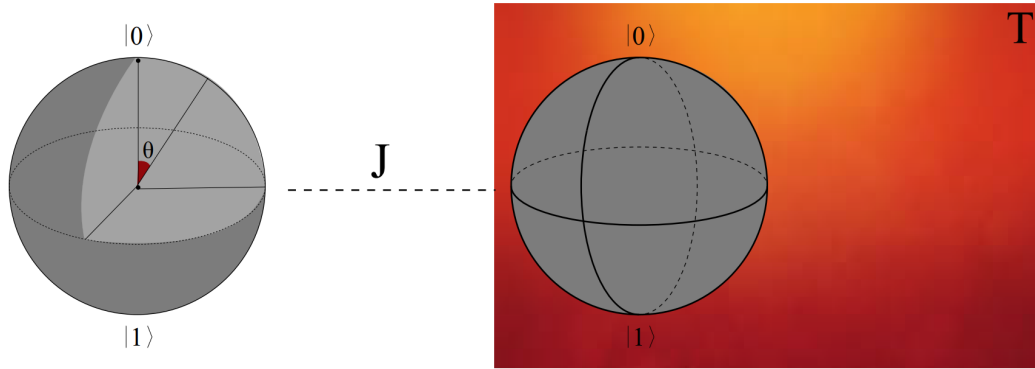


Figura 4 – Representação alegórica do sistema composto por dois q-bits que interagem entre si e um deles está acoplado a um banho de defasagem. De tal forma que θ é o ângulo que define o estado do q-bit auxiliar, J é a constante de acoplamento entre os q-bits e T é a temperatura do banho

Fonte: Elaborada pela autora.

é a constante de acoplamento do banho com um dos q-bits e consideramos $\hbar = 1$. Para facilitar a resolução do problema é conveniente reescrever o Hamiltoniano da seguinte forma

$$H = H_S + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sigma_z^{(1)} \otimes \sum_k g_k (b_k + b_k^\dagger), \quad (5.2)$$

em que,

$$H_S = -\frac{\omega_1}{2} \sigma_z^{(1)} \otimes \mathbb{I} - \frac{\omega_2}{2} \mathbb{I} \otimes \sigma_z^{(2)} + \frac{\pi J}{2} \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}. \quad (5.3)$$

Essa reestruturação possibilita que a dinâmica do sistema seja separada em duas partes: a primeira envolvendo a dinâmica de apenas um q-bit acoplado ao banho de defasagem cuja solução é encontrada de maneira similar ao que foi feito anteriormente para um canal de atenuação de fase na Sec.3.6. Sendo assim, a dinâmica de defasagem é governada pela seguinte equação de movimento

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = -i \left[\frac{\omega_0 \sigma_z}{2}, \rho_S(t) \right] + \gamma [\sigma_z \rho_S(t) \sigma_z - \rho_S(t)]. \quad (5.4)$$

Por outro lado, a segunda parte que depende apenas do termo H_S retrata apenas a dinâmica de dois q-bits interagentes que é governado pelo operador de evolução temporal

$$U(t) = \exp[-iH_S t] = \exp[i(\omega_1 + \omega_2 - \pi J)t/2] |00\rangle\langle 00| + \exp[i(\omega_1 - \omega_2 + \pi J)t/2] |01\rangle\langle 01| \\ + \exp[i(-\omega_1 + \omega_2 + \pi J)t/2] |10\rangle\langle 10| + \exp[-i(\omega_1 + \omega_2 + \pi J)t/2] |11\rangle\langle 11|. \quad (5.5)$$

Com o objetivo de simplificar a expressão do operador de evolução temporal é feito o uso da mesma ideia que é utilizada para migrar para a representação de interação (5), em que de certa forma os termos livres (ω_1 e ω_2) são negligenciados. Assim, permanecem na expressão apenas os termos de interação entre os subsistemas, e o operador U fica

$$\tilde{U}(t) = e^{-i\pi Jt/2} |00\rangle\langle 00| + e^{i\pi Jt/2} |01\rangle\langle 01| + e^{i\pi Jt/2} |10\rangle\langle 10| + e^{-i\pi Jt/2} |11\rangle\langle 11|. \quad (5.6)$$

Em seguida, considera-se que os q-bits estejam inicialmente nos seguintes estados

$$\rho_1 = \rho_{00} |0\rangle\langle 0| + \rho_{11} |1\rangle\langle 1| + \rho_{01} |0\rangle\langle 1| + \rho_{10} |1\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\rho_2 = \cos^2 \theta |0\rangle\langle 0| + \cos \theta \sin \theta |0\rangle\langle 1| + \sin \theta \cos \theta |1\rangle\langle 0| + \sin^2 \theta |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

e portanto, a dinâmica do sistema é dada por $\tilde{U}(t)\rho_1 \otimes \rho_2\tilde{U}(t)^\dagger$. No entanto, há o interesse em saber comportamento do operador densidade reduzido para o q-bit 1, dessa maneira podemos calcular

$$\rho_1(t) = \text{Tr}_2[\tilde{U}(t)\rho_1 \otimes \rho_2\tilde{U}(t)^\dagger], \quad (5.9)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \rho_1(t) = & [\rho_{00} |0\rangle\langle 0| + (e^{i\pi Jt} \sin^2 \theta + e^{-i\pi Jt} \cos^2 \theta)\rho_{01} |0\rangle\langle 1|] \\ & + [\rho_{11} |1\rangle\langle 1| + (e^{i\pi Jt} \cos^2 \theta + e^{-i\pi Jt} \sin^2 \theta)\rho_{10} |1\rangle\langle 0|], \end{aligned} \quad (5.10)$$

no formato matricial

$$\rho_1(t) = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01}\eta_\theta(t) \\ \rho_{10}\eta_\theta^*(t) & \rho_{11} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

em que, $\eta_\theta(t) = (e^{-i\pi Jt} \cos^2 \theta + e^{i\pi Jt} \sin^2 \theta)$.

Até este ponto temos duas equações em formatos diferentes. Enquanto a primeira descreve a equação de movimento de um operador densidade de um q-bit acoplado ao banho de defasagem, a segunda descreve a evolução temporal do operador densidade de dois q-bits. Porém, é possível notar que este último possui uma certa similaridade com o banho de defasagem, visto que os termos de populacionais permanecem constantes enquanto as coerências são funções do tempo. Dessa forma, assume-se que $\rho_1(t)$ possui uma equação de movimento que pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\rho_1 = -iq(t) [\sigma_z, \rho_1] + g(t) \{ \sigma_z \rho_1 \sigma_z - \rho_1 \}, \quad (5.12)$$

em que $q(t)$ e $g(t)$ são funções que devem ser determinadas. Com esse propósito, retorna-se a Eq.(5.10) e, para que esta possa ser comparada com a Eq.(5.12), é preciso reformulá-la em termos das componentes da esfera de Bloch. (4, 5) Logo, $\rho_1(t)$ é reescrito como $\rho_1(t) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r}(t) \cdot \vec{\sigma})$, em que, $\rho_{00} = (1 + r_z(t))/2$, $\rho_{01} = (r_x(t) - ir_y(t))/2$, $\rho_{10} = (r_x(t) + ir_y(t))/2$ e $\rho_{11} = (1 - r_z(t))/2$. Portanto,

$$\rho_1(t) = \frac{1}{2} [\mathbb{I} + r_z(t)\sigma_z + r_x(t)\sigma_x + r_y(t)\sigma_y], \quad (5.13)$$

em que, $r_x(t) = r_x \cos(\pi Jt) - r_y \cos(2\theta) \sin(\pi Jt)$, $r_y(t) = r_x [\cos(2\theta) \sin(\pi Jt) + r_y \cos(\pi Jt)]$ e $r_z(t) = r_z$. Realizada essas alterações, o próximo passo consiste em diferenciar no tempo $\rho_1(t)$ que será

$$\frac{d}{dt}\rho_1(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_x \dot{r}_x(t)}{2} + \frac{\sigma_y \dot{r}_y(t)}{2} \right]. \quad (5.14)$$

Aqui, $\dot{r}_x(t) = -\pi J r_x \sin(\pi J t) - \pi J r_y \cos(\pi J t) \cos(2\theta)$ e $\dot{r}_y(t) = \pi J r_x \cos(\pi J t) \cos(2\theta) - \pi J r_y \sin(\pi J t)$, enquanto a derivada temporal de $r_z(t)$ é nula, pois os termos que compõem as populações são constantes no tempo. Finalmente, compara-se as Eqs.(5.14) e (5.12), encontra-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{r}_x(t) &= 2[q(t)r_y(t) - g(t)r_x(t)], \\ \dot{r}_y(t) &= 2[r_x(t)q(t) + r_y(t)g(t)]. \end{cases} \quad (5.15)$$

A partir da resolução desse sistema obtém-se

$$q(t) = \frac{2\pi J \cos(2\theta)}{3 + 2 \cos(4\theta) \sin^2(\pi J t) + \cos(2\pi J t)}, \quad (5.16)$$

$$g(t) = \frac{\pi J \sin^2(2\theta) \sin(2\pi J t)}{3 + 2 \cos(4\theta) \sin^2(\pi J t) + \cos(2\pi J t)}. \quad (5.17)$$

Em síntese, o modelo proposto era constituído por um sistema de dois q-bits interagentes no qual um deles está em contato com um banho de defasagem. Com isso, para melhor tratar o problema da dinâmica do sistema foi subdividida. De tal forma que a dinâmica de um q-bit em contato com o banho de defasagem tem como equação mestra a Eq.(5.4), enquanto a dinâmica de dois q-bit interagentes é dada pela Eq.(5.12). Mesmo que o sistema tenha sido subdividido e resolvido em partes, a equação mestra para o modelo é dada pela combinação de ambos os resultados Eq(5.4) e Eq.(5.13) (21), de tal forma que

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -iq(t) [\sigma_z, \rho_S(t)] + (g(t) + \gamma) [\sigma_z \rho_S(t) \sigma_z - \rho_S(t)]. \quad (5.18)$$

A solução para a Eq.(5.18) pode ser encontrada utilizando a forma de um canal de atenuação de fase como feito na Sec.3.6, de tal forma que as populações permanecem as mesmas enquanto as coerências são descritas pela função c_t , ou seja, o operador densidade do sistema possui a seguinte forma,

$$\rho_S(t) = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01}c_t \\ \rho_{10}c_t^* & \rho_{11} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

em que as coerências c_t são descritas por

$$c_t = \exp \left[-2\gamma t + 2 \int_0^t [iq(t') - g(t')] dt' \right]. \quad (5.20)$$

Dessa forma, a forma analítica dessas equações são

$$Q(t) = \int_0^t q(t') dt' = \frac{1}{2} \arctan [\cos(2\theta) \tan(J\pi t)], \quad (5.21)$$

$$G(t) = \int_0^t g(t') dt' = \frac{1}{4} \{ \ln(2) - \ln[2 + (-1 + \cos(4\theta) \sin(J\pi t)^2)] \}. \quad (5.22)$$

A Eq.(5.21) possui algumas particularidades que foram discutidas do Apêndice D, mas em

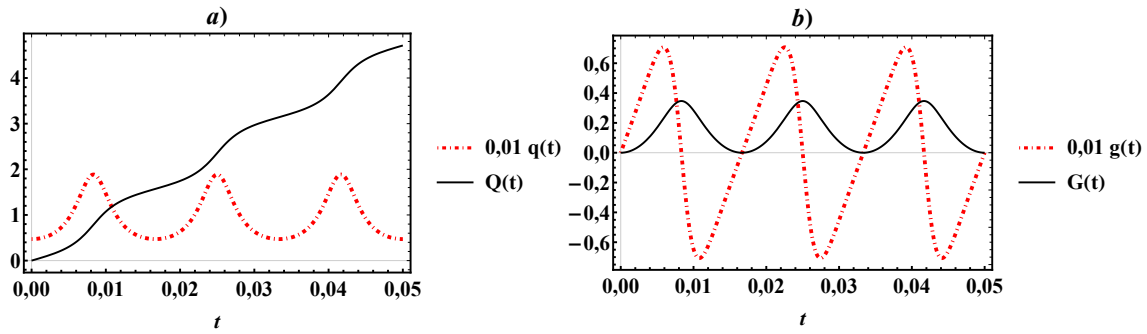


Figura 5 – Em *a*) é retratado o comportamento da função $q(t)$, descrita pela curva ponto pontilhada em vermelho que foi reescalada por um fator 0,01. Enquanto que o comportamento da sua integral numérica é fornecido linha cheia em preto. Já em *b*) há o esboço da função $g(t)$ que é representada pela curva ponto pontilhada em vermelho, a qual também foi reescalada por um fator 0,01 e a linha cheia retrata a integral de $g(t)$. Em ambos os casos foi considerado $J = 60Hz$, $\theta = \pi/3$ e $\gamma^{-1} = 150ms$

Fonte: Elaborada pela autora.

síntese é que este resultado analítico leva à um gráfico muito parecido com a função tangente, apresentando assim descontinuidades. Por isso, na Fig.5-a), $Q(t)$ foi descrita numericamente. Enquanto isso, $g(t)$ precisa obedecer a seguinte condição: $\cos(4\theta) + 2 \cos(2J\pi t) \sin(2\theta)^2 \geq -3$, para que $g(t)$ não seja uma função indeterminada. Sendo assim, para que J e θ sejam arbitrários o tempo da dinâmica deve ser suficientemente curto. Além disso, a partir da Fig.5-b) é possível perceber que $G(t)$ é uma função periódica sem descontinuidades que foi calculada analiticamente. Dessa maneira, c_t fica dado por

$$c_t = \exp[-2t\gamma + 2iQ(t) - 2G(t)]. \quad (5.23)$$

Com esta expressão em mãos é possível calcular as medidas de não-Markovianidade anteriormente abordadas no Cap.4. Uma dessas medidas é a correlação condicional passado-futuro (CPF) proposta por Budini e é abordada na Sec.4.3.2. De uma forma geral, esse protocolo consiste na aplicação de três medidas projetivas ao longo da dinâmica de um sistema. A primeira medida x do protocolo é realizada no estado inicial do sistema e tem como resultado $x = \pm 1$. Em seguida, o sistema evolui por um tempo t , à vista disso o operador densidade até este momento do protocolo é dado por

$$\rho_t^x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & xc_t \\ xc_t^* & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

A seguir uma segunda medida y é efetuada em que $y = \pm 1$. Por fim, o sistema segue sua evolução por um tempo $t + \tau$, de tal forma que o operador densidade até esse ponto do protocolo é dado por

$$\rho_{t,\tau}^{yx} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & yc_{t,\tau}^{xy} \\ yc_{t,\tau}^{yx*} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

em que,

$$c_{t,\tau}^{xy} = \frac{c_\tau + yx(c_{t+\tau} + c_{t-\tau}^*)/2}{1 + yx(c_t + c_t^*)/2}. \quad (5.26)$$

Por fim, será feita a última medição z que tem como resultado ± 1 . Ao fim do processo é possível calcular a correlação CPF, em termos da função de decoerência c_t ,

$$C_{pf}(t, \tau) = \frac{f(t + \tau) + f(t - \tau)}{2} - f(t)f(\tau), \quad (5.27)$$

em que $f(t) = \text{Re}[c_t]$. A dinâmica será Markoviana se $C_{pf}(t, \tau) \simeq 0$ e não-Markoviana caso contrário. Já a segunda medida de não-Markovianidade dada pela definição BLP, também pode ser calculada utilizando a função de decoerência c_t . Logo, essa variação no tempo da distância traço é definida como

$$\sigma(t) = \partial_t \|\rho_{S,1}(t) - \rho_{S,2}(t)\|_1 \quad \text{em que } \|A\|_1 = \text{Tr} \left[\sqrt{A^\dagger A} \right]. \quad (5.28)$$

Para que seja possível determinar a distância traço para o modelo proposto, considera-se dois estados iniciais puros: $\rho_1 = |0\rangle\langle 0|$ e $\rho_2 = |1\rangle\langle 1|$, em que $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$. Sendo assim, $\sigma(t)$ se torna

$$\sigma_\gamma(t) = \frac{d\|c_t\|}{dt} = e^{-2\gamma t} \frac{\gamma [\cos(4\theta) + 3] + \sin^2(2\theta) [\gamma \cos(2\pi Jt) + \pi J \sin(2\pi Jt)]}{\sqrt{2 \cos(4\theta) \sin^2(\pi Jt) + \cos(2\pi Jt) + 3}}, \quad (5.29)$$

que será capaz de evidenciar a não-Markovianidade na medida BLP se a função $\sigma_\gamma(t)$ apresentar valores maiores ou iguais a zero.

5.2 Discussão dos resultados

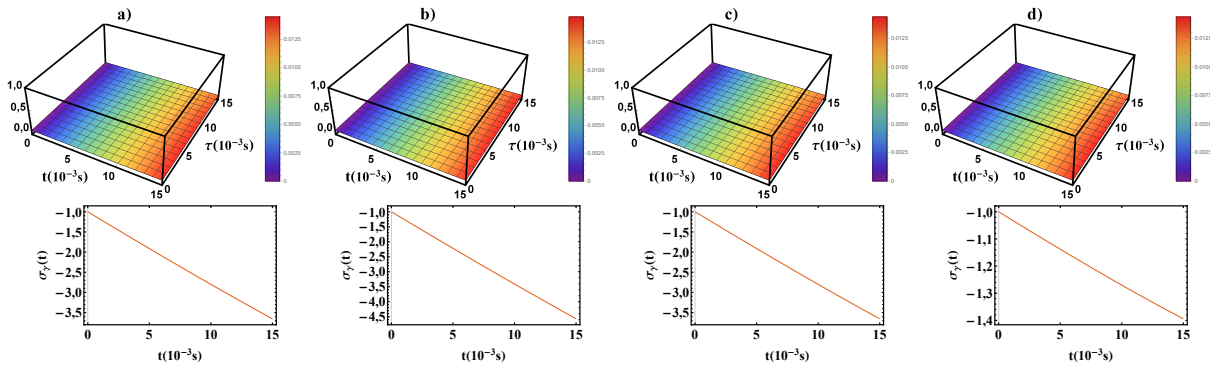


Figura 6 – Os gráficos da primeira linha expressam a correlação CPF em função de ambos os tempos de medida t e τ , de tal forma que para todos os gráficos foram mantidos $J = 5\text{Hz}$, $\gamma^{-1} = 2\text{s}$ e o parâmetro variável é θ . Em $a)$ $\theta = \pi/3$, em $b)$ $\theta = \pi/4$, em $c)$ $\theta = \pi/6$ e em $d)$ $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da segunda linha exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.

Fonte: Elaborada pela autora.

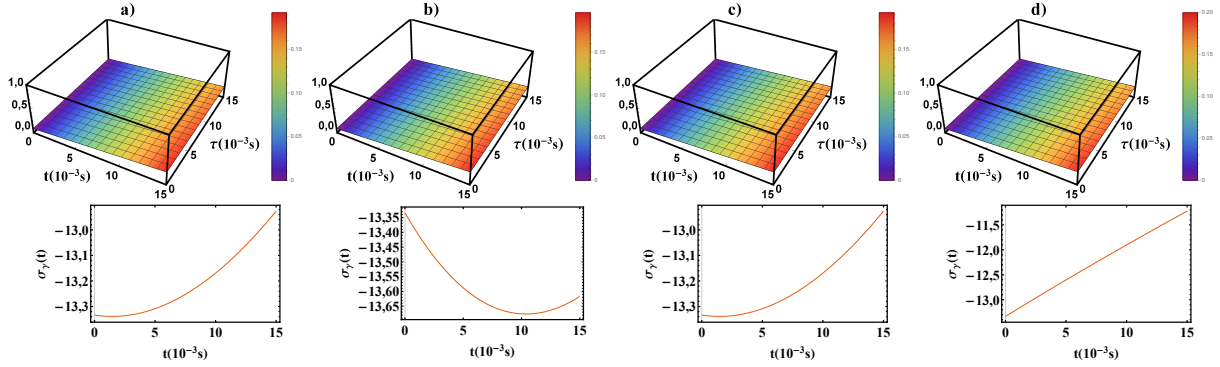


Figura 7 – Os gráficos da primeira linha expressam a correlação CPF em função de ambos os tempos de medida t e τ , de tal forma que para todos os gráficos foram mantidos $J = 5Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável é θ . Em a) $\theta = \pi/3$, em b) $\theta = \pi/4$, em c) $\theta = \pi/6$ e em d) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da segunda linha exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.

Fonte: Elaborada pela autora.

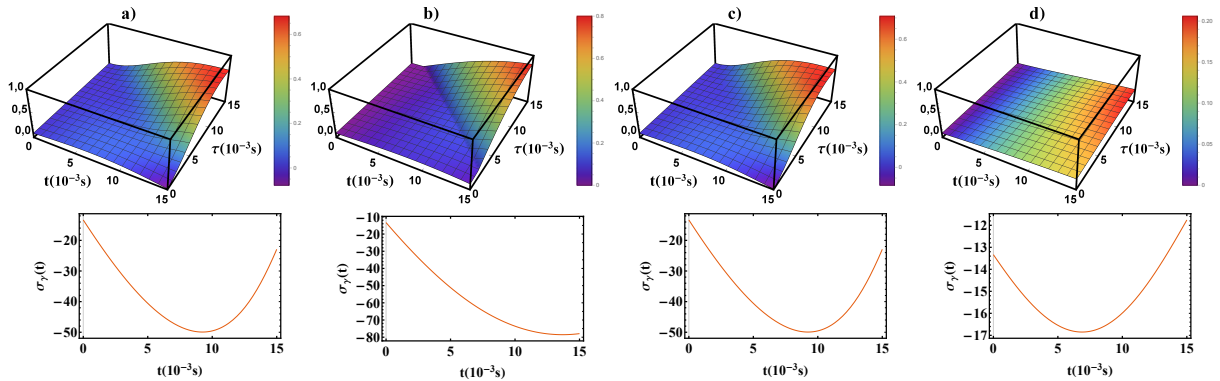


Figura 8 – Os gráficos da parte superior expressam a correlação CPF em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 30Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável foram os ângulos θ , em a) $\theta = \pi/3$, em b) $\theta = \pi/4$, em c) $\theta = \pi/6$ e em d) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da parte inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.

Fonte: Elaborada pela autora.

Os parâmetros presentes na Fig.6 são $J = 5Hz$ e $\gamma^{-1} = 2s$, e a partir deles são retratados na primeira linha o comportamento da correlação passado-futuro ($C_{pf}(t, \tau)$) enquanto que na segunda é retratado o comportamento da medida BLP ($\sigma_\gamma(t)$). Ambas as medidas testemunham uma dinâmica Markoviana, uma vez que $C_{pf}(t, \tau) \simeq 0$ e $\sigma_\gamma(t)$ é menor que zero para tal intervalo de tempo proposto exceto em $t = 0$. Isto significa que, ambas as medidas exprimem uma dinâmica Markoviana para os parâmetros indicados. Com isso é possível notar que para um

processo de defasagem muito fraco e uma constante de acoplamento J fraca, há a uma dinâmica Markoviana associada. Já a Fig.7 destoa da Fig.6, unicamente pelo valor de γ^{-1} que passa a ser $150ms$. Essa alteração permite verificar que, os quantificadores apresentados não estão mais em concordância. Uma vez que a correlação CPF assinala uma dinâmica não-Markoviana, enquanto a medida BLP continua sendo Markoviana. Com isso, é possível inferir que a correlação CPF é mais suscetível à mudança na taxa de defasagem γ do que a medida BLP.

A Fig. 8 retrata na primeira linha a correlação CPF ($C_{pf}(t, \tau)$), enquanto que a segunda linha expressa a medida BLP ($\sigma_\gamma(t)$). Por outro lado, em cada coluna há um par de resultados que possuem as mesmas especificações, ou seja, por mais que sejam utilizados para todos os gráficos os valores $J = 30Hz$ e $\gamma^{-1} = 150ms$ os valores de θ são alterados, de forma que em: a) $\theta = \pi/3$, b) $\theta = \pi/4$, c) $\theta = \pi/6$ e d) $\theta = \pi/18$. Ainda a partir desses gráficos é possível observar que a variação de θ não acarreta muitas mudanças para os três primeiros ângulos, no entanto, no que diz respeito ao protocolo CPF quanto menor o θ , mais próximos de zero são os valores da correlação CPF. Para esses parâmetros, a medida CPF que está exposta na primeira linha retrata uma dinâmica não-Markoviana independente de θ uma vez que, em geral $C_{pf}(t, \tau) \neq 0$. Em contrapartida, a medida BLP, expressa na segunda linha, exprime para todos os ângulos uma dinâmica Markoviana, já que $\sigma_\gamma(t)$ apresenta apenas valores negativos.

A Fig.9, por sua vez, também exprime na primeira linha a correlação CPF e na segunda linha a medida BLP. Em comparação com a Fig.8, a constante de acoplamento entre os q-bits J agora é de $60Hz$. E com isso, é possível notar, novamente, que existe uma grande similaridade entre as funções da primeira linha, quando $\theta = \pi/3, \pi/4, \pi/6$, as quais sinalizam uma dinâmica não-Markoviana. Uma dinâmica não-Markoviana também é retratada para $\theta = \pi/18$ para correlação CPF, no entanto, a medida BLP para esse ângulo sinaliza uma dinâmica Markoviana, uma vez que a função não chega a atravessar o eixo temporal. Por outro lado, a medida BLP, também aponta uma dinâmica não-Markoviana para os três primeiros ângulos. Além do mais, é possível perceber que para $\theta = \pi/4$ a medida BLP apresenta uma descontinuidade que será perceptível também nas Figs. 9, 10 e 11. Isso é porque a função $g(t)$ apresenta descontinuidade para esse parâmetro em específico.

Tanto a Fig.10 quanto a Fig.11 destoam das Figs.8 e 9 devido ao valor da constante de acoplamento J , que assumem respectivamente os valores $120 Hz$ e $215 Hz$. A partir delas é possível perceber que com o crescimento da constante de acoplamento, há também um aumento do número de oscilações para ambas as medidas, exceto para a correlação CPF, quando $\theta = \pi/18$. Além disso, para ambas as figuras, quando $\theta = \pi/18$ há momentos em que a correlação CPF exibe faixas em cinza que estão ligadas a descontinuidades, provavelmente causadas por perda de resolução numérica. Ademais, as Figs.10 e 11 indicam que a dinâmica do modelo proposto é não-Markoviana para às duas medidas para os parâmetros indicados. Em geral, é possível notar que para a maioria dos parâmetros ambas as medidas são consoantes, ou seja, ambas apresentam similaridade ao dizer se a dinâmica é Markoviana ou não, exceto para quando $J = 30 Hz$, Fig.8,

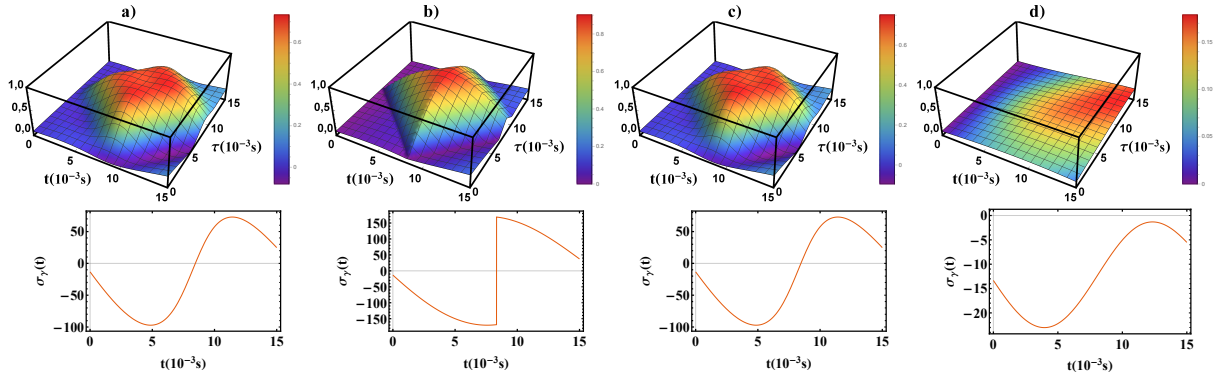


Figura 9 – Os gráficos da linha superior expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 60Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável são os ângulos θ , que é em a) $\theta = \pi/3$, em b) $\theta = \pi/4$, em c) $\theta = \pi/6$ e em d) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da linha inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.

Fonte: Elaborada pela autora.

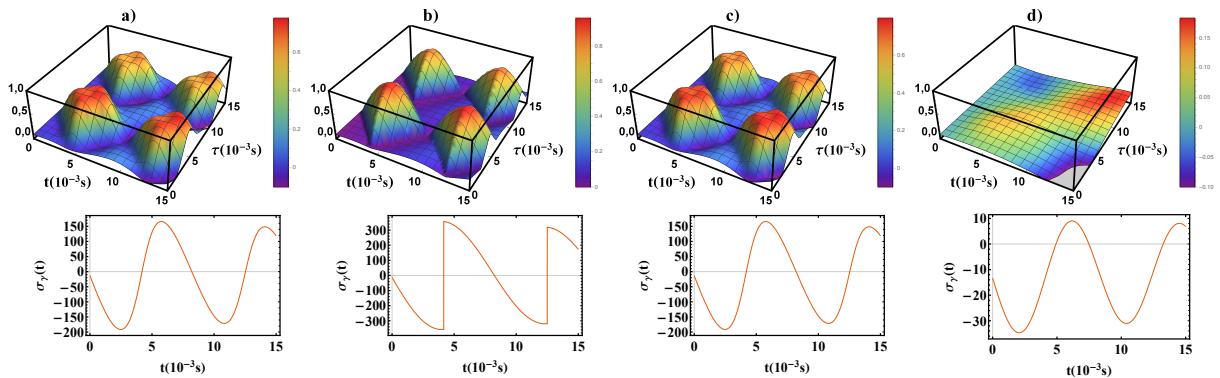


Figura 10 – Os gráficos da linha superior expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 120Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável são os ângulos θ , que assume em a) $\theta = \pi/3$, em b) $\theta = \pi/4$, em c) $\theta = \pi/6$ e em d) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da linha inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.

Fonte: Elaborada pela autora.

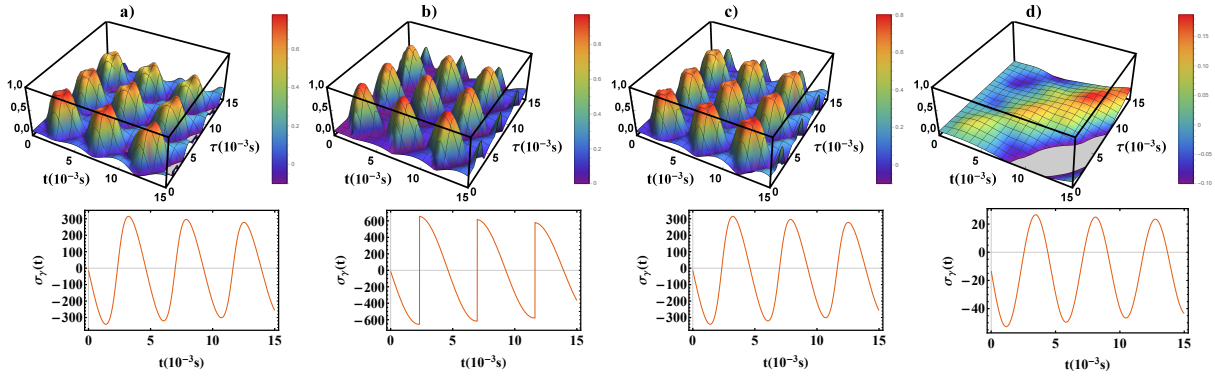


Figura 11 – Os gráficos da linha superior expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ . Todos os gráficos foram mantidos $J = 215Hz$, $\gamma^{-1} = 150ms$ e o parâmetro variável são os ângulos θ , que assume em *a*) $\theta = \pi/3$, em *b*) $\theta = \pi/4$, em *c*) $\theta = \pi/6$ e em *d*) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da linha inferior exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.

Fonte: Elaborada pela autora.

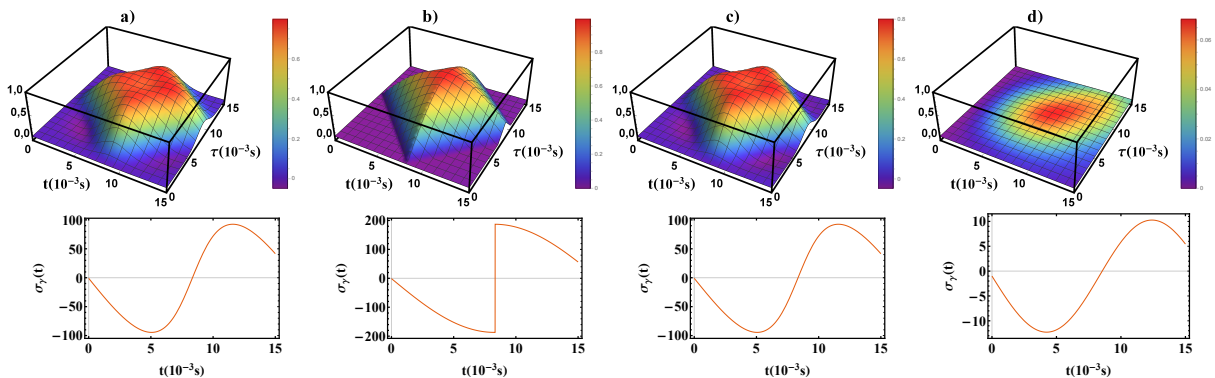


Figura 12 – Os gráficos da primeira coluna expressam a correlação *CPF* em função de ambos os tempos de medida t e τ , de tal forma que para todos os gráficos foram mantidos $J = 60Hz$, $\gamma^{-1} = 2s$ e o parâmetro variável é θ . Em *a*) $\theta = \pi/3$ em *b*) $\theta = \pi/4$ e em *c*) $\theta = \pi/18$. Já os gráficos da segunda coluna exprimem o comportamento da medida BLP e possuem as mesmas configurações que os seus respectivos pares.

Fonte: Elaborada pela autora.

e quando $J = 60 Hz$ e $\theta = \pi/18$, na última coluna da Fig.9.

Uma outra observação importante está na Fig. 12 que expressa, na primeira linha, a correlação CPF, na segunda linha a derivada temporal da distância traço ($\sigma_\gamma(t)$) todas elas com valores $J = 60Hz$ e $\gamma^{-1} = 2s$ e em cada coluna são alterados somente os ângulos. Através da análise dessa figura é possível notar que para um γ próximo de zero surgem mais zonas em roxo,

que indicam que a correlação CPF é nula, ou seja, há uma oscilação menor quando comparado a Fig.9 que possui uma taxa de defasagem significativamente maior. Por outro lado, por mais que esses gráficos destoam minimamente dos apresentados nas Fig.8, 9, 10, 11 ainda apresentam uma dinâmica de não-Markoviana para o sistema de dois q-bits que interagem entre si e com um deles também acoplado a um banho de defasagem.

6 CONCLUSÃO

Em suma, essa dissertação teve como intuito, estudar a evolução de um sistema quântico constituído por dois q-bits acoplados, em que um deles interage com um banho bosônico. Sendo, esse banho o responsável por provocar o processo de decoerência e conseqüentemente introduzir a não-Markovianidade para o sistema, uma vez que a dinâmica de apenas dois q-bits isolados é descrita por uma evolução unitária. Posteriormente, essa não-Markovianidade foi medida e verificada utilizando duas medidas principais (que também foram comparadas entre si): a correlação CPF, que é uma medida relativamente nova. A qual é um protocolo de aplicação de exige, ao menos, três medidas projetivas sucessivas, durante a evolução do sistema para que seja possível encontrar a probabilidade condicional entre os eventos do protocolo, se a dinâmica for Markoviana então a independência CPF não irá desaparecer, ou seja, $C_{pf} \approx 0$. E a medida BLP, que é uma medida bem estabelecida na literatura e associa a Markovianidade ao decrescimento monótono da distância traço com o passar do tempo. O modelo proposto aqui, foi de dois q-bits acoplados entre si e com um deles em contato com um banho de defasagem. Os parâmetros aos quais se tem acesso são: a constante de acoplamento entre os q-bits representada por J . A taxa de decoerência γ oriunda do banho bosônico responsável pela atenuação de fase, que para esse caso em específico é constante no tempo. O outro parâmetro acessível é o ângulo θ que é responsável por determinar o estado do q-bit auxiliar. O acesso a esses parâmetros permite controlar se o sistema está em um regime Markoviano ou não. Conforme discutido na Sec. 5.2, um regime Markoviano assinalado pelos quantificadores escolhidos para o sistema proposto seria aquele em que a taxa de defasagem γ é diminuta e a constante de acoplamento J também. Para exemplificar o regime Markoviano foram escolhidos os parâmetros $\gamma^{-1} = 2s$ e $J = 5Hz$. O valor de θ não se mostrou muito relevante para esse caso. Em contrapartida, para um determinado conjunto de parâmetros $J = 30Hz$ e $\gamma^{-1} = 150ms$ há uma discordância entre os dois quantificadores de não-Markovianidade. Enquanto a correlação CPF indicou que para todos os ângulos propostos há uma dinâmica não-Markoviana, a medida BLP apontou uma dinâmica Markoviana. Por outro lado, se o tempo da dinâmica fosse maior que o apresentado, em algum momento a medida BLP apresentaria uma dinâmica não-Markoviana. Ainda comparando ambas as medidas é possível perceber que a correlação CPF é mais suscetível a alterar o regime da dinâmica a partir de γ do que a medida BLP, isso foi refletido quando consideramos $J = 5Hz$ enquanto os valores de γ^{-1} foram de $2s$ para $150ms$. Uma vez que a correlação CPF assinalou uma dinâmica não-Markoviana ao passo que a medida BLP expressou uma dinâmica Markoviana.

Conforme J aumenta e γ é fixo ($\gamma^{-1} = 150ms$), é possível perceber que cada vez mais ambos quantificadores coincidem ao sinalizar o aparecimento de não-Markovianidade. A exceção aparece quando $J = 60Hz$ e $\theta = \pi/18$, sendo o caso em que a medida BLP sugere uma dinâmica Markoviana enquanto a correlação CPF indica uma dinâmica não-Markoviana. Por outro lado,

também é possível perceber que com o aumento de J , para ângulos muito pequenos, como $\theta = \pi/18$, os gráficos da correlação CPF passam a exibir um comportamento muito diferente dos demais, podendo apresentar descontinuidades. Esse comportamento é, muito provavelmente oriundo da perda de resolução numérica, visto a integral de $q(t)$ por ser analiticamente uma função descontínua (independente dos parâmetros J e θ), não foi utilizada para gerar os gráficos. A medida BLP, por sua vez, mostrou que há um momento de descontinuidade para $J \geq 35$ quando $\theta = \pi/4$ e isso é devido a descontinuidade da função $g(t)$ para esse parâmetro em específico.

Portanto, a partir dos resultados apresentados é possível observar que por mais que a medida CPF seja consoante com a medida BLP, em alguns casos, isso pode não ocorrer. Tal situação acontece quando quantificadores de Markovianidade são comparados, pois cada um tem o seu limite de aplicabilidade, uma vez que não há uma definição unívoca para a Markovianidade quântica. (10, 29) Com os resultados aqui mostrados não há como definir com absoluta clareza esses limites, mas é evidente que eles existem. Por isso, há como expandir ainda mais os resultados utilizando modelos diferentes como, por exemplo, o de dois q-bits que estão acoplados entre si e a diferentes banhos. Ademais, implementar esses quantificadores em dinâmicas que criam correlações em forma de emaranhamento entre o sistema e o ambiente pode ser algo interessante de ser considerado nesse contexto. (80, 81)

REFERÊNCIAS

- 1 FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman lectures on physics**. Boston: Addison-Wesley, 1964. v. 1. 1552 p.
- 2 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern quantum mechanics**. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 568 p.
- 3 GRIFFITHS, D. J. **Introduction to quantum mechanics**. 2nd ed. Boston: Addison-Wesley, 2004. 480 p.
- 4 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information: 10th anniversary edition**. 10th ed. New York: Cambridge University Press, 2011.
- 5 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. Oxford: Oxford University Press, 2007. 636 p.
- 6 RIVAS, A.; HUELGA, S. F. **Open quantum systems: an introduction**. Berlin: Springer, 2007.
- 7 CARMICHAEL, H. **An open systems approach to quantum optics**. Berlin: Springer, 1993.
- 8 ALICKI, R.; LENDI, K. **Quantum dynamical semigroups and applications**. Berlin: Springer, 2007. Notas de aula em física.
- 9 COSTA-FILHO, J. I. **Quantum non-Markovianity induced by classical stochastic noise**. 2017. 184 p. Tese (Mestrado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- 10 RIVAS, A.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Quantum non-markovianity: characterization, quantification and detection. **Reports on Progress in Physics**, v. 77, n. 9, p. 094001, 2014.
- 11 BREUER, H.-P. *et al.* Colloquium: non-markovian dynamics in open quantum systems. **Reviews of Modern Physics**, v. 88, n. 2, p. 021002, 2016.
- 12 RIVAS, A.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Entanglement and non-markovianity of quantum evolutions. **Reviews of Modern Physics**, v. 105, n. 5, p. 050403, 2010.
- 13 BYLICKA, B.; CHRUŚCIŃSKI, D.; MANISCALCO, S. Non-markovianity and reservoir memory of quantum channels: a quantum information theory perspective. **Scientific Reports**, v. 4, p. 5720, 2014. DOI:10.1038/srep05720.
- 14 ADDIS, C. *et al.* Comparative study of non-markovianity measures in exactly solvable one-and two-qubit models. **Physical Review A**, v. 90, n. 5, p. 052103, 2014.
- 15 LEGGIO, B. *et al.* Distributed correlations and information flows within a hybrid multipartite quantum-classical system. **Physical Review A**, v. 92, n. 3, p. 032311, 2015.
- 16 WOLF, M. M. *et al.* Assessing non-markovian quantum dynamics. **Physical Review Letters**, v. 101, n. 15, p. 150402, 2008.
- 17 PILO, J. *et al.* Non-markovian quantum jumps. **Physical Review Letters**, v. 100, n. 18, p. 180402, 2008.

- 18 VEGA, I.; ALONSO, D. Dynamics of non-markovian open quantum systems. **Reviews of Modern Physics**, v. 89, n. 1, p. 015001, 2017.
- 19 POLLOCK, F. A. *et al.* Complete framework for efficient characterisation of non-markovian processes. **Physical Review A**, v. 97, n. 1, p. 012127, 2018.
- 20 BRITO, F.; WERLANG, T. A knob for markovianity. **New Journal of Physics**, v. 17, n. 7, p. 072001, 2015.
- 21 SOUZA, A. *et al.* **Experimental Demonstration of non-Markovian Dynamics via a Temporal Bell-like Inequality**. 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1308.5761>. Acesso em: 11 fev. 2022.
- 22 SILVA, T. L. *et al.* Detection of quantum non-markovianity close to the born-markov approximation. **Physical Review A**, v. 101, n. 4, p. 042120, 2020.
- 23 BUDINI, A. A. Quantum non-markovian processes break conditional past-future independence. **Physical Review A**, v. 121, n. 24, p. 240401, 2018.
- 24 BUDINI, A. A. Conditional past-future correlation induced by non-markovian dephasing reservoirs. **Physical Review A**, v. 99, n. 5, p. 052125, 2019.
- 25 WISSMANN, S.; BREUER, H.-P.; VACCHINI, B. Generalized trace-distance measure connecting quantum and classical non-markovianity. **Physical Review A**, v. 92, n. 4, p. 042108, 2015.
- 26 CHRUSCIŃSKI, D.; KOSSAKOWSKI, A.; RIVAS, A. Measures of non-markovianity: divisibility versus backflow of information. **Physical Review A**, v. 83, n. 5, p. 052128, 2011.
- 27 CHRUSCIŃSKI, D.; WUDARSKI, F. A. Non-markovian random unitary qubit dynamics. **Physical Review A**, v. 377, n. 21, p. 1425–1429, 2013.
- 28 CHRUSCIŃSKI, D.; MANISCALCO, S. Degree of non-markovianity of quantum evolution. **Physical Review Letters**, v. 112, n. 12, p. 120404, 2014.
- 29 LI, L.; HALL, M. J.; WISEMAN, H. M. Concepts of quantum non-markovianity: a hierarchy. **Physics Reports**, v. 759, p. 1–51, 2018.
- 30 LORENZO, S.; PLASTINA, F.; PATERNOSTRO, M. Geometrical characterization of non-markovianity. **Physical Review A**, v. 88, n. 2, p. 020102, 2013.
- 31 BREUER, H.-P. Foundations and measures of quantum non-markovianity. **Journal of Physics B**, v. 45, n. 15, p. 154001, 2012.
- 32 PINEDA, C. *et al.* Measuring and using non-markovianity. **Physical Review A**, v. 93, n. 2, p. 022117, 2016.
- 33 LU, X.-M.; WANG, X.; SUN, C. Quantum fisher information flow and non-markovian processes of open systems. **Physical Review A**, v. 82, n. 4, p. 042103, 2010.
- 34 ZENG, H.-S. *et al.* Equivalence of the measures of non-markovianity for open two-level systems. **Physical Review A**, v. 84, n. 3, p. 032118, 2011.

-
- 35 ZENG, H.-S. *et al.* Non-markovian dynamics for an open two-level system without rotating wave approximation: indivisibility versus backflow of information. **The European Physical Journal D**, v. 66, n. 10, p. 255, 2012.
- 36 ADDIS, C. *et al.* Two-qubit non-markovianity induced by a common environment. **Physical Review A**, v. 87, n. 5, p. 052109, 2013.
- 37 ADDIS, C. *et al.* What we talk about when we talk about non-markovianity. **Physical Review A**, v. 90, n. 5, p. 052103, 2014.
- 38 VIOLA, L.; LLOYD, S. Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems. **Physical Review A**, v. 58, n. 4, p. 2733, 1998.
- 39 JOOS, E. *et al.* **Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory**. Berlin: Springer Science, 2013.
- 40 ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. **Reviews of Modern Physics**, v. 75, n. 3, p. 715, 2003.
- 41 GUARNIERI, G.; UCHIYAMA, C.; VACCHINI, B. Energy backflow and non-markovian dynamics. **Physical Review A**, v. 93, n. 1, p. 012118, 2016.
- 42 CHIN, A. *et al.* The role of non-equilibrium vibrational structures in electronic coherence and recoherence in pigment-protein complexes. **Nature Physics**, v. 9, n. 2, p. 113–118, 2013.
- 43 KROVI, H. *et al.* Non-markovian dynamics of a qubit coupled to an ising spin bath. **Physical Review A**, v. 76, n. 5, p. 052117, 2007.
- 44 XIONG, H.-N. *et al.* Exact non-markovian cavity dynamics strongly coupled to a reservoir. **Physical Review A**, v. 82, n. 1, p. 012105, 2010.
- 45 BATALHÃO, T. B. *et al.* Nonperturbative approach to system-reservoir dynamics in the strong-coupling regime and non-markovian dynamics. **Physical Review A**, v. 90, n. 3, p. 032105, 2014.
- 46 CHIN, A. W.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Quantum metrology in non-markovian environments. **Physical Review Letters**, v. 109, n. 23, p. 233601, 2012.
- 47 VASILE, R. *et al.* Continuous-variable quantum key distribution in non-markovian channels. **Physical Review A**, v. 83, n. 4, p. 042321, 2011.
- 48 HAIKKA, P.; CRESSER, J. D.; MANISCALCO, S. Comparing different non-markovianity measures in a driven qubit system. **Physical Review A**, v. 83, n. 1, p. 012112, 2011.
- 49 CERVATI, N. A.; KARPAT, G.; FANCHINI, F. F. Inequivalence of correlation-based measures of non-markovianity. **Physical Review A**, v. 94, n. 3, p. 032105, 2016.
- 50 BREUER, H.-P.; LAINE, E.-M.; PIILO, J. Measure for the degree of non-markovian behavior of quantum processes in open systems. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 21, p. 210401, 2009.
- 51 LAINE, E.-M.; PIILO, J.; BREUER, H.-P. Measure for the non-markovianity of quantum processes. **Physical Review A**, v. 81, n. 6, p. 062115, 2010.

- 52 HALL, M. J. *et al.* Canonical form of master equations and characterization of non-markovianity. **Physical Review A**, v. 89, n. 4, p. 042120, 2014.
- 53 AMARAL, B. L. **Emaranhamento em sistemas de dois qubits**. 2010. 83 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.
- 54 AMORIM, R. G. de. **Introdução à análise convexa conjuntos e funções convexas**. 2013. 79 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiania, 2013.
- 55 WILDE, M. M. **Quantum information theory**. New York: Cambridge University Press, 2013.
- 56 COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**. New York: Wiley, 1977.
- 57 BALLENTINE, L. E. **Quantum mechanics: a modern development**. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2014.
- 58 DIRAC, P. A. M. **The principles of quantum mechanics**. Oxford: Oxford University Press, 1981.
- 59 FRIGERIO, A.; GORINI, V. N-level systems in contact with a singular reservoir. **Journal of Mathematical Physics**, v. 17, n. 5, p. 2123–2127, 1976.
- 60 KRYSZEWSKI, S.; CZECHOWSKA-KRYSZK, J. **Master equation-tutorial approach**. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0801.1757>. Acesso em: 30 dez.2021.
- 61 DAVIES, E. B. Markovian master equations. **Communications in Mathematical Physics**, v. 39, n. 2, p. 91–110, 1974.
- 62 DAVIES, E. B. Markovian master equations 2. **Mathematische Annalen**, v. 219, n. 2, p. 147–158, 1976.
- 63 ALBASH, T. *et al.* Quantum adiabatic markovian master equations. **New Journal of Physics**, v. 14, n. 12, p. 123016, 2012.
- 64 LIDAR, D. A.; BIHARY, Z.; WHALEY, K. B. From completely positive m to the quantum markovian semigroup master equation. **Chemical Physics**, v. 268, n. 1-3, p. 35–53, 2001.
- 65 HALL, M. J. W. Complete positivity for time-dependent qubit master equations. **Journal of Physics A**, v. 41, n. 20, p. 205302, 2008.
- 66 KOSSAKOWSKI, A. On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems. **Reports on Mathematical Physics**, v. 3, n. 4, p. 247–274, 1972.
- 67 LINDBLAD, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. **Communications in Mathematical Physics**, v. 48, n. 2, p. 119–130, 1976.
- 68 ANDERSSON, E.; CRESSER, J. D.; HALL, M. J. W. Finding the kraus decomposition from a master equation and vice versa. **Journal of Modern Optics**, v. 54, n. 12, p. 1695–1716, 2007.
- 69 ANAND, N.; BRUN, T. A. **Quantifying non-Markovianity: a quantum resource-theoretic approach**. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1903.03880>. Acesso em: 24 jan.2022.

-
- 70 SILVA, J.; LIMA, J. Quatro abordagens para o movimento browniano. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 25–35, 2007. DOI:10.1590/S1806-11172007000100007.
- 71 SALINAS; R.A., S. Einstein e a teoria do movimento browniano. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 2, p. 263–269, 2005. DOI: 10.1590/S1806-11172005000200013.
- 72 KLEBANER, C. **Introduction to stochastic calculus with applications**. 3rd ed. London: Imperial College Press, 2012. 438 p.
- 73 PAUL, W. **Stochastic processes: From physics to finance**. 2nd ed. Berlin: Springer, 2013. 280 p.
- 74 GIKHMAN, I. **Introduction to the theory of random processes**. Mineola: Dover Publications, 1996. 544 p.
- 75 SENETA, E. Markov chains as models in statistical mechanics. **Statistical Science**, v. 31, n. 3, p. 399–414, 2016.
- 76 MAXWELL, J. C. **The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell**. Cambridge: Cambridge University Press, 1846–1862. 800 p.
- 77 NORRIS, J. R. **Markov chains**. New York: Cambridge University Press, 1998.
- 78 TIAN, L.; LLOYD, S. Resonant cancellation of off-resonant effects in a multilevel qubit. **Physical Review A**, v. 62, n. 5, p. 050301, 2000.
- 79 OLIVEIRA, T. W. **Termalização e correlações quânticas nos contextos de sistemas quânticos abertos e cadeias de spins**. 2013. 224 p. Tese (Doutorado em Física) — Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos, 2013.
- 80 ROSZAK, K.; KORBICZ, J. K. Entanglement and objectivity in pure dephasing models. **Physical Review A**, v. 100, p. 062127, 2019.
- 81 ROSZAK, K.; CYWIŃSKI, L. Characterization and measurement of qubit-environment-entanglement generation during pure dephasing. **Physical Review A**, v. 92, p. 032310, 2015.
- 82 BOLDRINI, L. **Álgebra linear**. 3rd ed. São Paulo: Harbra, 1984. 424 p.
- 83 COELHO, U. F.; LOURENÇO, L. M. **Um curso de álgebra linear**. 2nd. ed. São Paulo: Edusp, 2018. 272 p.
- 84 PROTTER, M. H.; MORREY CHARLES B., J. **Intermediate calculus**. 2nd ed. New York: Springer, 1985. 267 p.
- 85 DEFFNER, S.; CAMPBELL, S. **Quantum thermodynamics: an introduction to the thermodynamics of quantum information**. San Rafael: IOP Concise Physics, 2019. 229 p.
- 86 JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. **Physical Review**, v. 106, p. 620–630, 1957.
- 87 SILVA, M. A. **Análise complexa e aplicações**. 2018. 220 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2018.

- 88 ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. 3rd ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 271 p.
- 89 ARFKEN, G. B.; J., H.; HARRIS, F. E. **Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide**. 7th ed. New York: Academic Press, 2012. 1205 p.
- 90 GUALBERTO, M. M. **Teorema dos resíduos e aplicações**. 2018. 93 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)) — Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, Universidade Estadual da Paraíba, Patos, 2018.
- 91 BROWN, J.; R. V., C. **Complex variables and applications**. 9th ed. Singapore: McGraw-Hill Higher Education, 2013. 480 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A – UMA BREVE REVISÃO DOS CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR

A teoria quântica tem como seu alicerce a álgebra linear, mais especificamente em um espaço vetorial munido de produto interno e com uma norma gerada por ele que é conhecido como espaço de Hilbert \mathcal{H} . Em virtude disso, o objetivo desse apêndice é de guiar o leitor pelos conceitos da álgebra linear (82, 83), algumas ideias serão apresentadas:

Um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{C} consiste em um conjunto em que seus elementos são chamados de vetores $|v\rangle$ e é munido de uma operação binária

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad \text{ou seja} \quad (|u\rangle, |v\rangle) \mapsto |u\rangle + |v\rangle, \quad (\text{A.1})$$

e de uma multiplicação por escalar

$$\cdot : \mathbb{C} \times V \rightarrow V \quad \text{ou seja} \quad (\lambda, |u\rangle) \mapsto \lambda |u\rangle. \quad (\text{A.2})$$

De modo que as seguintes propriedades são válidas para quaisquer $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in V$ e $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$

1. $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ (Associatividade da soma);
2. $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$ (Comutatividade da soma);
3. $|u\rangle + \vec{0} = |u\rangle$ (Elemento Neutro para a soma);
4. $|u\rangle + (-|u\rangle) = \vec{0}$ (Inverso Aditivo);
5. $\lambda(\nu |u\rangle) = (\lambda\nu) |u\rangle$ (Associatividade do produto);
6. $(\lambda + \nu)(|u\rangle + |v\rangle) = \lambda |u\rangle + \lambda |v\rangle + \nu |u\rangle + \nu |v\rangle$ (Distributividade);
7. $1 |u\rangle = |u\rangle$ (Elemento Neutro para o produto).

Definição 3. Seja um conjunto de vetores $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$, caso $|v_n\rangle$ possa ser escrito como combinação linear dos demais então ele é linearmente dependente (*LD*), visto que existem coeficientes c_j com $j \neq i$ de tal forma que

$$|v_i\rangle = c_1 |v_1\rangle + \dots + c_n |v_n\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Caso contrário se os coeficientes forem iguais a zero os vetores são linearmente independentes (*LI*). Por outro lado, uma base para um estado vetorial V é um conjunto linearmente independente, de tal forma que $B = |v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$ o que faz com que todo vetor de V possa ser escrito como uma combinação linear de um certo conjunto de vetores $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$. Ademais, a dimensão de V o número de vetores que compõem a base. (4, 53, 82, 83)

Definição 4. Sejam U e V espaços vetoriais nos quais $|u_1\rangle, |u_2\rangle \in U$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, define-se uma transformação linear T que atua como $T : U \rightarrow V$, a qual possui as seguintes propriedades:

1. $(\lambda |u_1\rangle) = \lambda T(|u_1\rangle)$;
2. $T(|u_1\rangle + |u_2\rangle) = T(|u_1\rangle) + T(|u_2\rangle)$.

Além disso, considera-se $F = |f_1\rangle, \dots, |f_n\rangle$ como uma base de U e $B = |e_1\rangle, \dots, |e_m\rangle$ como uma base de V . Pode-se escrever um vetor $|v\rangle \in V$ como $|v\rangle = \sum_{i=1}^m v_i |e_i\rangle$, em sua forma matricial

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}_B^T. \quad (\text{A.4})$$

Então,

$$T \left(\sum_{i=1}^m v_i |e_i\rangle \right) = \sum_{i=1}^m v_i T(|e_i\rangle) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_i T_{ji} |f_j\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Em que os elementos da matriz T_{ji} obedecem a seguinte igualdade $T(|e_i\rangle) = \sum_{j=1}^n T_{ji} |f_j\rangle$. Portanto, a transformação linear pode ser simbolizada por uma matriz $[T(|v\rangle)]_F = T_B^F [v]_B$.

Um caso particular de transformações lineares são os funcionais lineares $\langle \chi |$ o qual é uma transformação $\langle \chi | : V \rightarrow \mathbb{C}$. Sendo o espaço de todos os funcionais lineares de V denominado espaço Dual de V^* . Há também, as transformações lineares que ocorrem quando as transformações envolvem o mesmo espaço de entrada de saída $T : V \rightarrow V$. (4,53,82,83)

Definição 5. Caso um vetor $|\psi\rangle$ difira de zero ele pode ser um autovetor de um operador $O \in T(V)$ com autovalor o se:

$$O |\psi\rangle = o |\psi\rangle. \quad (\text{A.6})$$

Definição 6. Seja um espaço vetorial V , define-se o produto interno como uma aplicação $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, $(|u\rangle, |v\rangle) \rightarrow \langle u|v\rangle$, que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

1. $\langle \lambda u + \mu v | w \rangle = \lambda \langle u | w \rangle + \mu \langle v | w \rangle$;
2. $\langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$;
3. $\langle u | u \rangle \geq 0$, só é 0 se $|u\rangle = 0$.

Dessa forma, o produto interno nos permite introduzir a ideia de ângulo entre os elementos que compõem o espaço vetorial. Dados dois vetores $|u\rangle$ e $|v\rangle$ eles serão ortogonais se $\langle u | v \rangle = 0$. Ou seja, diz-se que um conjunto $E = |v_1\rangle, \dots, |v_k\rangle$ é ortogonal se seus elementos são dois a

dois ortogonais. Por outro lado, se um conjunto $E = |v_1\rangle, \dots, |v_k\rangle$ for ortonormal é porque além de ortogonal também é normalizado, ou seja, $\langle v_k | v_k \rangle = 1$. Ademais, um espaço vetorial munido de um produto interno possui uma outra aplicação, a norma, a qual é uma função tal que $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, em que, $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$, ademais, as propriedades da mesma são:

1. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, em que $\lambda \in \mathbb{C}$;
2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdade triangular);
3. $\|u\| = 0 \Rightarrow |u\rangle = 0$.

Corolário 6.1. *Dados $|u\rangle, |v\rangle \in V$, então a Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz é válida*

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\|. \quad (\text{A.7})$$

Além disso, a definição de norma abre a possibilidade de definir uma certa distância natural em V , isto é uma métrica, que é uma função $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$. Dessa forma, pode-se definir um espaço métrico, que nada mais é que um conjunto das distâncias, entre qualquer um dos elementos que compõem o espaço, e possuem as seguintes propriedades:

1. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$ (Fidelidade),
2. $d(y, x) = d(x, y)$ (Simetria),
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Distância triangular).

Seja um operador $O : V \rightarrow V$ é possível definir o operador hermitiano conjugado de O como sendo $O^\dagger : V \rightarrow V$ tal que

$$(|v\rangle, O |u\rangle) = (O^\dagger |v\rangle, |u\rangle) \quad (\text{A.8})$$

Para que o operador possa representar um observável físico ele precisa ser hermitiano, ou seja, $O = O^\dagger$. O fato de um operador ser hermitiano implica que os autovalores são todos reais e os autovetores com autovalores distintos são ortogonais. Além disso, um operador é denominado de positivo definido se $\langle v | O |v\rangle > 0$ para qualquer $|v\rangle \neq 0$ que pertença à V e positivo semi-definido se $\langle v | O |v\rangle \geq 0$ para qualquer $|v\rangle \neq 0$ que pertença à V . (4, 53)

Teorema 7 (Teorema Espectral). *Seja $O : V \rightarrow V$ um operador hermitiano, então há uma base ortonormal para V a qual é formada pelos autovetores de O . Ademais, é possível que uma matriz hermitiana M seja decomposta por operadores de projeção $\{\Pi_i\}$ ($\sum_i^m \Pi_i = \mathbb{I}$) e que possui auto valores reais λ_i , então*

$$M = \sum_i \lambda_i \Pi_i, \quad (\text{A.9})$$

se as projeções tiverem rank-1, de tal forma que $\{|v_i\rangle\}$ é uma base ortonormal, logo

$$M = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|. \quad (\text{A.10})$$

A partir desse teorema, tem-se que qualquer função pode ser escrita como

$$f(M) = \sum_i^m f(\lambda_i) \Pi_i. \quad (\text{A.11})$$

Uma outra função recorrente é a função traço, a qual é definida como a soma dos elementos da diagonal principal

$$\text{Tr}(A) \equiv \sum_i A_{ii}. \quad (\text{A.12})$$

Essa função tem como características: ser cíclica, ou seja, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$; ser linear $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$, $\text{Tr}(zA) = z \text{Tr}(A)$.

No caso em que os sistemas quânticos são compostos por mais de dois elementos que pertencem a espaços de Hilbert diferentes o seu estudo é feito utilizando a ideia do produto tensorial, que permite a junção de espaços vetoriais. Ou seja, ao considerar dois espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , os quais possuem, respectivamente, dimensão n_A e n_B é possível construir outro espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, que também é um espaço de Hilbert, de dimensão $n_A n_B$. (4, 53) Em particular, se $|i_A\rangle$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_A e $|j_B\rangle$ de \mathcal{H}_B então, $|i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$ é uma base para $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Sendo assim, um vetor $|w\rangle$ que pertence à $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ será decomponível se $|w\rangle = |w_A\rangle \otimes |w_B\rangle$ ou em uma anotação análoga se $|w\rangle = |w_A w_B\rangle$. Por definição o produto tensorial satisfaz as propriedades abaixo:

1. Para um escalar arbitrário $\alpha \in \mathbb{C}$ e elementos $|u_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|u_B\rangle \in \mathcal{H}_B$,

$$\alpha(|u_A\rangle \otimes |u_B\rangle) = (\alpha |u_A\rangle) \otimes |u_B\rangle = |u_A\rangle \otimes (\alpha |u_B\rangle). \quad (\text{A.13})$$

2. Para elementos arbitrários $|u_A\rangle, |v_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|u_B\rangle \in \mathcal{H}_B$,

$$(|u_A\rangle + |v_A\rangle) \otimes |u_B\rangle = |u_A\rangle \otimes |u_B\rangle + |v_A\rangle \otimes |u_B\rangle. \quad (\text{A.14})$$

3. Para elementos arbitrários $|u_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|u_B\rangle, |v_B\rangle \in \mathcal{H}_B$,

$$|u_A\rangle \otimes (|u_B\rangle + |v_B\rangle) = |u_A\rangle \otimes |u_B\rangle + |u_A\rangle \otimes |v_B\rangle. \quad (\text{A.15})$$

O próximo passo consiste em estender o conceito de produto interno, ou seja, o produto interno em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ para vetores decomponíveis

$$\langle v_A v_B | u_A u_B \rangle = \langle v_A | u_A \rangle + \langle v_B | u_B \rangle, \quad (\text{A.16})$$

de tal forma que

$$(\langle v_A v_B | + \langle w_A w_B |) |u_A u_B\rangle = \langle v_A v_B |u_A u_B\rangle + \langle w_A w_B |u_A u_B\rangle, \quad (\text{A.17})$$

$$\langle v_A v_B | + (|w_A w_B\rangle + |u_A u_B\rangle) = \langle v_A v_B |u_A u_B\rangle + \langle v_A v_B |w_A w_B\rangle. \quad (\text{A.18})$$

Já a ação de operadores é mapeada por operadores $M(\mathcal{H}_A)$ e $M(\mathcal{H}_B)$ que também é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{C} , com isso, define-se a ação de $M(\mathcal{H}_A) \otimes M(\mathcal{H}_B)$ em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, os quais atuam em vetores decomponíveis como

$$M(\mathcal{H}_A) \otimes M(\mathcal{H}_B)(|u_A\rangle \otimes |u_B\rangle) = M_A |u_A\rangle \otimes M_B |u_B\rangle. \quad (\text{A.19})$$

Definição 7. O traço parcial em relação à \mathcal{H}_A de uma matriz $M_A \otimes M_B$ em $M(\mathcal{H}_A) \otimes M(\mathcal{H}_B)$ é dada por

$$\text{Tr}_A[M_{AB}] = \text{Tr}(M_A)M_B. \quad (\text{A.20})$$

O último elemento que será apresentado é devido ao fato de que sistemas físicos nem sempre podem ser representados por estados puros e com isso houve a necessidade de se implementar o operador densidade que seria capaz de descrever essa “mistura” de estados. (53) Com isso em mente, surge uma restrição denominada de convexidade. (53)

Definição 8. Um conjunto C em um espaço vetorial V no qual há dois vetores $|u\rangle, |v\rangle \in C$ será chamado de convexo se $\lambda |v\rangle + (1 - \lambda) |u\rangle$, com $\lambda \in [0, 1]$ também pertencer à C .

Visualmente um conjunto é convexo é descrito pela Fig.A

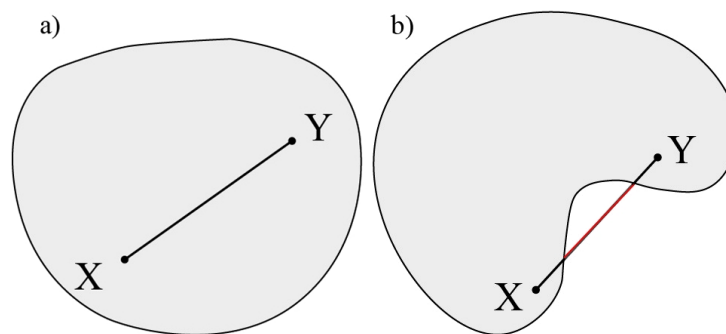


Figura 13 – a) conjunto convexo, b) um conjunto côncavo.

Fonte: Elaborada pela autora.

Um vetor $|v\rangle \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear dos vetores $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$ com os coeficiente $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ de tal forma que $|v\rangle = c_1 |v_1\rangle + \dots + c_n |v_n\rangle$. Caso a $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, então $|v\rangle$ é uma combinação afim dos vetores $|v_i\rangle$. Por outro lado, se $c_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, então $|v\rangle$ é uma combinação positiva dos vetores $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$.

Definição 9 (Combinação Convexa). Seja $|v_i\rangle \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, p$, tais que $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$, o ponto $\sum_{i=1}^p \alpha_i |v_i\rangle$ é uma combinação convexa dos pontos $|v_i\rangle \in \mathbb{R}^n$ com parâmetros $\alpha_i, i = 1, \dots, p$.

Ou seja, uma combinação é convexa quando ela é uma combinação afim e positiva simultaneamente.

APÊNDICE B – ESTADO TÉRMICO

O estado de equilíbrio estacionário pode ser encontrado utilizando duas relações, as quais levam o nome de von Neumann (4), ou seja

$$S = -\text{Tr}[\rho \ln(\rho)] = -\sum_k \lambda_k \ln(\lambda_k),$$

em que λ_k são os autovalores da matriz densidade. Com ambas as relações é possível encontrar o estado de equilíbrio estacionário, em que $d\rho(t)/dt = 0$, o que implica que $[\rho, H] = 0$, com isso, é possível escrever tanto ρ quando H em uma base diagonalizável comum. (4, 9) Ademais, como o sistema está em equilíbrio térmico, espera-se que a energia do sistema seja constante. Por outro lado, a entropia de von Neumann tem que ser maximizada, com esse objetivo utilizaremos os multiplicadores de Lagrange (84), utilizando as restrições, já mencionadas, para a energia e considerando que o traço da matriz densidade tem que ser um

$$\mathcal{L}(\lambda_j, \alpha_i) = -\sum_k \lambda_k \ln(\lambda_k) + \alpha_0 \left(\sum_k \epsilon_k \lambda_k - \langle E \rangle \right) + \alpha_1 \left(\sum_k \lambda_k - 1 \right), \quad (\text{B.1})$$

aqui \mathcal{L} é a função de Lagrange, enquanto ϵ_k os autovalores de energia e α_k são os multiplicadores de Lagrange. Em seguida, realiza-se $d\mathcal{L}/d\lambda_k = 0$, daí temos as seguintes relações

$$\lambda_k = \alpha_1 e^{\alpha_0 \epsilon_k}. \quad (\text{B.2})$$

Reescrevendo a entropia de von Neumann em termos dessa relação, tem-se

$$S = -\sum_k \lambda_k \ln(\lambda_k) = -\alpha_0 \alpha_1 \sum_k \epsilon_k e^{\alpha_0 \epsilon_k} - \alpha_1 \sum_k e^{\alpha_0 \epsilon_k} \ln(\alpha_1), \quad (\text{B.3})$$

em seguida compara-se esse resultado com a entropia de equilíbrio de Gibbs $S = \ln(Z) + \beta \langle E \rangle$, com isso obtemos que

$$\alpha_0 = -\beta \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sum_k e^{-\beta \epsilon_k}}. \quad (\text{B.4})$$

Sendo assim, o operador densidade de um estado térmico é dado por (5, 9, 85, 86),

$$\rho_E = \frac{e^{-\beta \epsilon_k}}{\sum_k e^{-\beta \epsilon_k}}. \quad (\text{B.5})$$

No caso em que o banho é do tipo bosônico (5, 9), ou seja, é um banho o qual possui um número infinito de bósons, em que cada modo possui frequência ω_k o Hamiltoniano do reservatório é escrito como $H_E = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k$ em que b_k^\dagger e b_k são respectivamente os operadores de criação e aniquilação. Ademais, os autovetores e autovalores de H_E , são definidos como

$$H_E |\{n_k\}\rangle = \epsilon_{\{n_k\}} |\{n_k\}\rangle, \quad (\text{B.6})$$

em que $\{n_k\}$ é o conjunto do número de ocupações, $|\{n_k\}\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$ e $\epsilon_{\{n_k\}} = \sum_k \omega_k n_k$. Sendo assim, o estado térmico pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\rho_E = \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}} |\{n_k\}\rangle \langle \{n_k\}| \quad \text{em que} \quad Z = \text{Tr}_E[e^{-\beta H_E}] = \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}}, \quad (\text{B.7})$$

em que Z é a função de partição. Dessa forma, o valor médio de um operador qualquer é dado por

$$\langle O \rangle = \text{Tr}_E[O \rho_E] = \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}} \text{Tr}_E[\langle \{n_k\} | O | \{n_k\} \rangle] = \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}} \langle \{n_k\} | O | \{n_k\} \rangle. \quad (\text{B.8})$$

Caso O seja igual à $b_k^\dagger b_{k'}^\dagger$ ou $b_k b_{k'}$, temos que

$$\langle \{n_k\} | b_k^\dagger b_{k'}^\dagger | \{n_k\} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \{n_k\} | b_k b_{k'} | \{n_k\} \rangle = 0. \quad (\text{B.9})$$

Isso faz com que $\langle b_k^\dagger b_{k'}^\dagger \rangle$ e também $\langle b_k b_{k'} \rangle = 0$. Por outro lado, caso $O = b_k^\dagger b_{k'}$, então

$$\langle \{n_k\} | b_k^\dagger b_{k'} | \{n_k\} \rangle \delta_{k,k'}, \quad (\text{B.10})$$

o que leva a

$$\langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle = \delta_{k,k'} \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} n_k e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}}. \quad (\text{B.11})$$

Ademais, é possível reescrever n_k como

$$n_k e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}} = - \frac{\partial(e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}})}{\partial(\beta \omega_k)},$$

sendo assim,

$$\langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle = -\delta_{k,k'} \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} \frac{\partial(e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}})}{\partial(\beta \omega_k)} = -\delta_{k,k'} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\beta \omega_k)}. \quad (\text{B.12})$$

O que faz com que o próximo passo seja calcular a função de partição, então

$$Z = \sum_{\{n_k\}} e^{-\beta \epsilon_{\{n_k\}}} = \prod_j \left(\sum_{n_j} e^{-\beta \omega_j n_j} \right) = \prod_j \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_j}}, \quad (\text{B.13})$$

cuja derivada é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial(\beta \omega_k)} &= \frac{\partial}{\partial(\beta \omega_k)} \prod_j \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_j}} = \frac{\partial}{\partial(\beta \omega_k)} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_k}} \right) \prod_{j \neq k} \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_j}} \\ &= - \frac{\partial Z}{\partial(\beta \omega_k)} = - \frac{Z}{(e^{\beta \omega_k} - 1)}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Logo,

$$\langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle = \delta_{k,k'} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial(\beta \omega_k)} = \delta_{k,k'} \frac{1}{Z} \frac{Z}{(e^{\beta \omega_k} - 1)} \equiv \delta_{k,k'} N(\omega_k), \quad (\text{B.15})$$

em que

$$N(\omega_k) = \frac{1}{(e^{\beta\omega_k} - 1)}. \quad (\text{B.16})$$

Em contrapartida $\langle b_k b_{k'}^\dagger \rangle$, utilizando a relação de comutação $[b_k^\dagger, b_{k'}] = 1$, tem-se que

$$\langle b_k b_{k'}^\dagger \rangle = \delta_{k,k'} \frac{1}{Z} \sum_{\{n_k\}} (1 + n_k) e^{-\beta\epsilon_{\{n_k\}}} = \delta_{kk'} (1 + N(\omega_k)). \quad (\text{B.17})$$

Em síntese

$$\langle b_k b_{k'} \rangle = \langle b_k^\dagger b_{k'}^\dagger \rangle = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$\langle b_k b_{k'}^\dagger \rangle = \delta_{kk'} [1 + N(\omega_k)], \quad (\text{B.19})$$

$$\langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle = \delta_{kk'} N(\omega_k). \quad (\text{B.20})$$

APÊNDICE C – Q-BIT E BANHO COM N SPINS

A evolução temporal de um q-bit que interage com um banho de N spins é governado pelo seguinte hamiltoniano de interação

$$H_T = \sigma_z \otimes \sum_{k=1}^N g_k \sigma_z^{(k)} \quad (\text{C.1})$$

aqui σ_z é a matriz de Pauli na direção z (com autovetores $\{|0\rangle, |1\rangle\}$), enquanto $\sigma_z^{(k)}$ é a matriz de Pauli z associado ao spin k (com autovetores $\{|\uparrow_k\rangle, |\downarrow_k\rangle\}$) e g_k é a constante de acoplamento entre cada spin do ambiente com o q-bit. (22–24) O estado inicial é bipartido e separável, ou seja, $\rho_0^{SE} = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|$, em que

$$|\Psi_0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \sum_{k=1}^N (\alpha_k |\uparrow_k\rangle + \beta_k |\downarrow_k\rangle), \quad (\text{C.2})$$

aqui o estado inicial do banho é dado por um conjunto de spins individuais de coeficiente $\{\alpha_k\}$ e $\{\beta_k\}$. O estado do sistema em um tempo t é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle = \exp \left[-i \left(\sigma_z \otimes \sum_{k=1}^N g_k \sigma_z^{(k)} \right) t \right] |\Psi(t_0)\rangle. \quad (\text{C.3})$$

Esta equação pode ser modificada ao considerar que a exponencial de um somatório é um produto e ao expandir a exponencial em série de Taylor, então

$$|\Psi(t)\rangle = \prod_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-i \sigma_z \otimes g_k \sigma_z^{(k)} \right)^n}{n!} |\Psi(t_0)\rangle. \quad (\text{C.4})$$

Ao expandir apenas o somatório do operador de evolução temporal, tem-se

$$\hat{U}(t, t_0) = \prod_{k=1}^N \left(1 - i \sigma_z \otimes g_k \sigma_z^{(k)} t + \frac{i^2 \sigma_z^2 \otimes g_k^2 \sigma_z^{2(k)} t^2}{2} + \dots \right). \quad (\text{C.5})$$

Reescrevendo o estado do sistema em termos do operador evolução temporal e o estado inicial, temos

$$|\Psi(t)\rangle = \prod_{k=1}^N \left(1 - i \sigma_z \otimes g_k \sigma_z^{(k)} t + \frac{i^2 \sigma_z^2 \otimes g_k^2 \sigma_z^{2(k)} t^2}{2} + \dots \right) \left[(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \sum_{k=1}^N (\alpha_k |\uparrow_k\rangle + \beta_k |\downarrow_k\rangle) \right]. \quad (\text{C.6})$$

Em seguida, aplicam-se os operadores em seus respectivos autoespaços, de tal maneira que

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \prod_{k=1}^N \left[a |0\rangle \otimes \left\{ \alpha_k \left(1 + ig_k t + \frac{i^2 t^2 g_k^2}{2} + \dots \right) |\uparrow_k\rangle \right\} \right. \\
& \left. + \left\{ \beta_k \left(1 - ig_k t + \frac{i^2 t^2 g_k^2}{2} + \dots \right) |\downarrow_k\rangle \right\} \right] \\
& + \prod_{k=1}^N \left[b |1\rangle \otimes \left\{ \alpha_k \left(1 + ig_k t + \frac{i^2 t^2 g_k^2}{2} + \dots \right) |\uparrow_k\rangle \right\} \right. \\
& \left. + \left\{ \beta_k \left(1 - ig_k t + \frac{i^2 t^2 g_k^2}{2} + \dots \right) |\downarrow_k\rangle \right\} \right]. \tag{C.7}
\end{aligned}$$

É possível notar que o termo em parênteses remete à forma exponencial da série de Taylor, dessa forma

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \prod_{k=1}^N a |0\rangle \otimes (\alpha_k e^{ig_k t} |\uparrow_k\rangle) + (\beta_k e^{-ig_k t} |\downarrow_k\rangle) \\
& + \prod_{k=1}^N b |1\rangle \otimes (\alpha_k e^{-ig_k t} |\uparrow_k\rangle) + (\beta_k e^{ig_k t} |\downarrow_k\rangle), \tag{C.8}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$|\Psi_t\rangle = a |0\rangle \otimes |\mathcal{B}(t)\rangle + b |1\rangle \otimes |\mathcal{B}(-t)\rangle, \tag{C.9}$$

em que

$$|\mathcal{B}(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k e^{ig_k t} |\uparrow_k\rangle + \beta_k e^{-ig_k t} |\downarrow_k\rangle). \tag{C.10}$$

APÊNDICE D – DISCUSSÃO SOBRE A FUNÇÃO Q(T)

Como mencionado no Cap.5, o cálculo da função de coerência depende da integral das funções $q(t)$ e $g(t)$. Em especial, esse apêndice, pretende realizar uma discussão no que diz respeito a integral da função $q(t)$, dado que a solução analítica dessa função dispõe de um caráter descontínuo, tal como a função tangente.

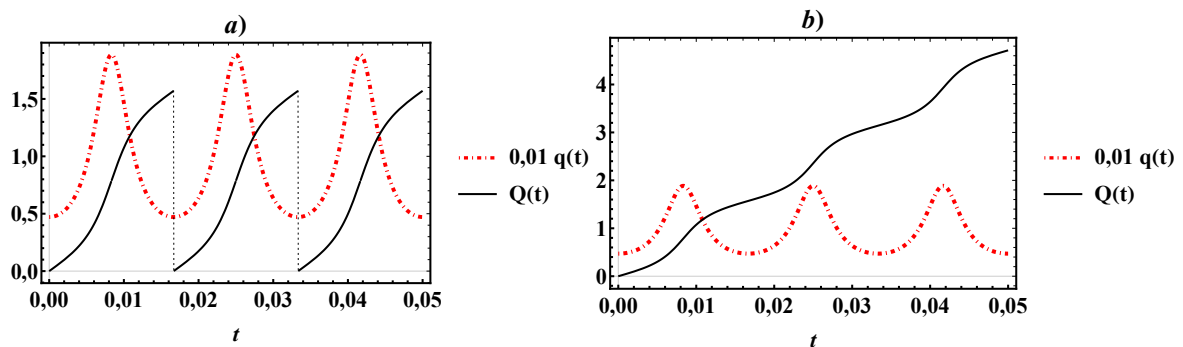


Figura 14 – Em *a)* é retratado o comportamento da função $q(t)$, descrita pela curva ponto pontilhada em vermelho foi reescalada por um fator 0,01. Enquanto, o comportamento da sua integral analítica é fornecido pela linha cheia em preto. Já em *b)* há o esboço da função $q(t)$ representada pela curva ponto pontilhada em vermelho, a qual também foi reescalada por um fator 0,01 e a linha cheia preta retrata a integral numérica de $Q(t)$. Em ambos os casos foi considerado $J = 60Hz$, $\theta = \pi/3$ e $\gamma^{-1} = 150ms$.

Fonte: Elaborada pela autora.

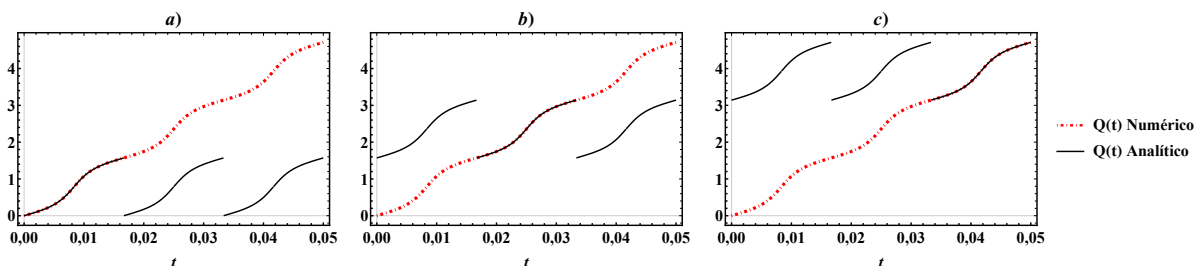


Figura 15 – O comportamento numérico da função $Q(t)$, é descrito pela curva ponto pontilhada em vermelho. Enquanto, $Q(t)$ analítico é expresso pela linha cheia em preto. As figuras diferem entre si por um certo escalonamento que permite a sobreposição das curvas. Para todos os casos foi considerado $J = 60Hz$, $\theta = \pi/3$ e $\gamma^{-1} = 150ms$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Tal solução é exposta na Fig14-a), em que a curva vermelha ponto pontilhada é a função

$Q(t)$ numérico, a linha cheia preta indica a função analítica de $Q(t)$. Se a integral pode ser vista como a área embaixo da curva, por que dada uma função contínua $q(t)$ teria como a sua integral $Q(t)$ uma função descontínua? Para responder esta pergunta, considera-se a integral de uma função trigonométrica definida

$$\int_0^{2\pi} p(\operatorname{sen}(\alpha), \operatorname{cos}(\alpha)) d\alpha, \quad (\text{D.1})$$

em que p é uma função racional. Para a resolução dessa integral é necessário converter a integral trigonométrica real em uma integral complexa ao longo de um círculo unitário $|z| = 1$ centrado na origem. Para isso, define-se $z = e^{i\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ para que seja possível reformular as funções trigonométricas em termos de z e como agora se trata de uma integral complexa ela pode ser avaliada pelo Teorema dos Resíduos. (87–91)

Teorema 8 (Teorema dos Resíduos). *Se f é analítica¹ em uma região simplesmente conexa R , exceto em um número finito de singularidades² isoladas, z_0, z_1, \dots, z_n , então*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=0}^n \operatorname{Res}(f, z_j), \quad (\text{D.2})$$

em que C é um contorno fechado de R , envolvendo z_0, z_1, \dots, z_n uma vez no sentido positivo.

Como a caminho de integração para este caso é um círculo, o resultado da integral analítica é dada em ciclos. Por isso, $Q(t)$ possui um caráter descontínuo em determinados pontos, porque indicaria o final de um caminho de integração no plano complexo. Por outro lado, a Fig14-b) mostra que a integral numérica $Q(t)$ é contínua e suave. Porém, essa função nada mais é que a soma de todos os ciclos da função analítica como retratado na Fig.15.

¹ Uma função é analítica se a mesma for valorada (possui um único valor para cada $z \in R$) e diferenciável em todos os pontos de R .

² Há diferentes classificações para as singularidades no plano complexo, tais como: a isolada, a removível, a essencial e os pólos.