

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Gabriel Nogueira Audi Monteiro**

**Purificação quântica para incluir ruído ambiental na  
investigação do conceito de complexidade quântica**

**São Carlos**

**2023**



**Gabriel Nogueira Audi Monteiro**

**Purificação quântica para incluir ruído ambiental na  
investigação do conceito de complexidade quântica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano

**Versão corrigida**

**(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)**

**São Carlos**

**2023**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Monteiro, Gabriel Nogueira Audi

Purificação quântica para incluir ruído ambiental na investigação do conceito de complexidade quântica / Gabriel Nogueira Audi Monteiro; orientador Reginaldo de Jesus Napolitano - versão corrigida -- São Carlos, 2023.

192 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Descoerência. 2. Dinâmica efetiva. 3. Purificação quântica. 4. Complexidade quântica. 5. Geometria. I. Napolitano, Reginaldo de Jesus, orient. II. Título.

*“O homem inventou o ideal para negar o real.”*

*Friedrich Nietzsche*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família e amigos por todo o apoio durante a elaboração deste trabalho. Sem eles, nada disso seria sequer possível. Em especial, também agradeço meu orientador, Reginaldo, por absolutamente todos os ensinamentos. Este foi o grande mestre que tive nesta vida e por quem tenho uma admiração imensurável.





*“Nada em uma manga... Nada na outra...”*  
*Leonardo Maia*



## RESUMO

AUDI, G. **Purificação quântica para incluir ruído ambiental na investigação do conceito de complexidade quântica.** 2023. 192p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de um sistema quântico aberto de  $n$  qubits ruidosos e não interagentes, em que cada qubit interage com um campo bosônico externo diferente, com uma interação de defasagem pura. Através da purificação quântica, encontramos uma dinâmica efetiva que substitui a interação dos qubits com os campos bosônicos por uma interação com qubits auxiliares. No caso de um qubit, também mostramos como adequar a dinâmica efetiva obtida para incluir termos de controle, que representam as operações para eliminar o ruído. Essa adaptação foi realizada considerando uma aproximação em que o operador de evolução temporal para a parte do sistema varia lentamente em relação à dinâmica ruidosa. Por fim utilizamos a dinâmica efetiva, que emula os efeitos ruído, para estudar o problema de um ponto de vista geométrico, explorando duas geometrizações distintas no grupo de Lie especial unitário  $SU(2^N)$ . Na primeira geometrização, consideramos a métrica usual da complexidade quântica, que penaliza operações envolvendo 3 ou mais qubits no Hamiltoniano, onde as geodésicas para o problema são dadas por geodésicas de Pauli. Na segunda geometrização, encontramos uma geometria na qual a curva geodésica coincide com a trajetória realizada pelo operador unitário efetivo. Para isso, introduzimos uma função custo dada por uma Lagrangiana que depende explicitamente do tempo.

**Palavras-chave:** Descoerência. Dinâmica efetiva. Purificação quântica. Complexidade quântica. Geometria.



## ABSTRACT

AUDI, G. **Quantum purification to include environmental noise in the investigation of the concept of quantum complexity.** 2023. 192p. Dissertation (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

In this work, we studied the dynamics of an open quantum system composed of  $n$  noisy and non-interacting qubits, where each qubit interacts with a different external bosonic field with a pure dephasing interaction. Through the quantum purification, we found an effective dynamics that replaces the qubits' interaction with the bosonic fields by an interaction with auxiliary qubits. For a single qubit, we also demonstrate how to adapt the obtained effective dynamics to include control terms that represent operations for noise elimination. This adaptation was performed considering an approximation in which the time evolution operator for the part of the system varies slowly compared to the noisy dynamics. Lastly, we used the effective dynamics, which emulates the noise effects, to study the problem from a geometric standpoint, exploring two distinct geometrizations in the special unitary Lie group  $SU(2^N)$ . In the first geometrization, we considered the usual metric of quantum complexity, which penalizes operations involving 3 or more qubits in the Hamiltonian, where the geodesics for the problem are given by Pauli geodesics. In the second geometrization, we found a geometry in which the geodesic curve coincides with the trajectory performed by the effective unitary operator. To achieve this, we introduced a cost function given by a Lagrangian that explicitly depends on time.

**Keywords:** Decoherence. Effective dynamics. Quantum purification. Quantum complexity. Geometry.



## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – A função $\mu(t)$ para algumas temperaturas - Integração Analítica. . . .                                       | 31 |
| Figura 2 – A função $\mu(t)$ para algumas temperaturas - Integração Numérica. . . .                                        | 31 |
| Figura 3 – A função $\mu(t)$ para $T = 0.25K$ - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica. . . . .      | 32 |
| Figura 4 – A função $\mu(t)$ para $T = 1K$ - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica. . . . .         | 32 |
| Figura 5 – A função $\mu(t)$ para $T = 10K$ - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica. . . . .        | 32 |
| Figura 6 – A função $\mu(t)$ para $T = 25K$ - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica. . . . .        | 32 |
| Figura 7 – Gráfico 3D da função $\mu(T, t)$ . . . . .                                                                      | 33 |
| Figura 8 – Pureza para algumas temperaturas - $\text{Tr}_S \{ \rho_S^2(t) \}$ . . . . .                                    | 34 |
| Figura 9 – Entropia para algumas temperaturas. . . . .                                                                     | 34 |
| Figura 10 – Comparação entre a evolução temporal de $\mu(t)$ e $\mu^2(t)$ para $T = 1K$ . .                                | 40 |
| Figura 11 – Comparação entre a evolução temporal de $\mu(t)$ e suas potências até ordem $\mu^5(t)$ para $T = 1K$ . . . . . | 40 |
| Figura 12 – Pureza $\text{Tr}_S \{ \rho_S^2(t) \}$ para dois qubits. . . . .                                               | 41 |
| Figura 13 – Entropia $S(T, t)$ para dois qubits. . . . .                                                                   | 42 |
| Figura 14 – Gráfico da função $\omega_B(t)$ para algumas temperaturas. . . . .                                             | 47 |
| Figura 15 – Gráfico da função $\theta(t)$ para algumas temperaturas. . . . .                                               | 49 |
| Figura 16 – A velocidade $v_{U(\lambda)}$ da curva $U$ no ponto $U(\lambda)$ . . . . .                                     | 74 |
| Figura 17 – Ilustrando os referenciais $S$ e $S'$ . . . . .                                                                | 75 |





## LISTA DE SÍMBOLOS

|                                      |                                                         |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\in$                                | Pertence                                                |
| $\mathbb{R}$                         | Conjunto dos números reais                              |
| $\mathbb{C}$                         | Conjunto dos números complexos                          |
| $i = \sqrt{-1}$                      | Unidade imaginária                                      |
| $\text{Re}$                          | Parte real de um número complexo                        |
| $\text{Im}$                          | Parte imaginária de um número complexo                  |
| $z^*$                                | Conjugado do um número complexo $z$                     |
| $A^\dagger$                          | Hermitiano conjugado do operador $A$                    |
| $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$ | Derivada de uma função $x$ com relação ao parâmetro $t$ |
| $k_B$                                | Constante de Boltzmann                                  |
| $\hbar = \frac{h}{2\pi}$             | Constante de Planck dividida por $2\pi$                 |
| $ a $                                | Módulo do número $a$                                    |
| $\ v\ $                              | Norma do vetor $v$                                      |



## SUMÁRIO

|            |                                                                                         |           |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                                       | <b>21</b> |
| <b>2</b>   | <b>DESCOERÊNCIA DE <math>n</math> QUBITS NÃO INTERAGENTES</b>                           | <b>25</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Descoerência de um qubit por um campo bosônico externo</b>                           | <b>27</b> |
| 2.1.1      | A densidade ôhmica de estados                                                           | 30        |
| <b>2.2</b> | <b>Descoerência de <math>n</math> qubits não interagentes</b>                           | <b>35</b> |
| 2.2.1      | A densidade ôhmica de estados                                                           | 39        |
| <b>3</b>   | <b>PURIFICAÇÃO QUÂNTICA PARA O RUÍDO DE FASE</b>                                        | <b>43</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Uma possível purificação</b>                                                         | <b>45</b> |
| 3.1.1      | Possível purificação para um qubit descoerente                                          | 45        |
| 3.1.2      | Possível purificação para $n$ qubits descoerentes e não interagentes                    | 49        |
| <b>3.2</b> | <b>Purificação pelos operadores de Kraus</b>                                            | <b>52</b> |
| 3.2.1      | Purificação para um qubit descoerente                                                   | 53        |
| 3.2.2      | Purificação para $n$ qubits descoerentes e não interagentes                             | 55        |
| <b>3.3</b> | <b>Conectando as purificações</b>                                                       | <b>56</b> |
| 3.3.1      | Conectando as purificações - Pelos operadores de Kraus                                  | 56        |
| 3.3.2      | Conectando as purificações - Por uma transformação unitária                             | 57        |
| <b>4</b>   | <b>CONTROLE QUÂNTICO EFETIVO DE UM QUBIT</b>                                            | <b>61</b> |
| <b>4.1</b> | <b>A evolução do sistema</b>                                                            | <b>63</b> |
| 4.1.1      | Aproximação dos tempos de correlação                                                    | 64        |
| 4.1.2      | Caso sem controle                                                                       | 65        |
| <b>4.2</b> | <b>Dinâmica efetiva para um qubit incluindo o controle no espaço purificado</b>         | <b>66</b> |
| <b>5</b>   | <b>COMPLEXIDADE QUÂNTICA DE <math>n</math> QUBITS DESCOERENTES NO ESPAÇO PURIFICADO</b> | <b>69</b> |
| <b>5.1</b> | <b>O grupo de Lie especial unitário <math>SU(2^N)</math></b>                            | <b>70</b> |
| 5.1.1      | O grupo de Lie especial unitário $SU(2^N)$ e sua álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2^N)$    | 71        |
| 5.1.2      | A base das matrizes de Pauli generalizadas para a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2^N)$   | 72        |
| 5.1.3      | Fixando um sistema de coordenadas                                                       | 73        |
| 5.1.3.1    | Representação Hamiltoniana                                                              | 76        |
| 5.1.3.2    | Representação de Pauli                                                                  | 77        |
| 5.1.3.3    | Mudança de referencial                                                                  | 77        |
| <b>5.2</b> | <b>Geometria no grupo de Lie <math>SU(2^N)</math></b>                                   | <b>78</b> |
| 5.2.1      | Geodésicas de Pauli                                                                     | 79        |

|            |                                                                                              |            |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2.1.1    | Equações de Euler e Lagrange . . . . .                                                       | 82         |
| 5.2.2      | Uma Lagrangiana que descreve a dinâmica do ruído de fase . . . . .                           | 84         |
| <b>6</b>   | <b>CONCLUSÃO . . . . .</b>                                                                   | <b>87</b>  |
|            | <b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                                                                 | <b>89</b>  |
|            | <b>APÊNDICES . . . . .</b>                                                                   | <b>93</b>  |
|            | <b>APÊNDICE A – DESCOERÊNCIA DE <math>n</math> QUBITS NÃO INTERA-</b>                        |            |
|            | <b>GENTES . . . . .</b>                                                                      | <b>95</b>  |
| <b>A.1</b> | <b>A evolução unitária . . . . .</b>                                                         | <b>95</b>  |
| <b>A.2</b> | <b>Encontrando <math>U_{SB}(t)</math> . . . . .</b>                                          | <b>98</b>  |
| <b>A.3</b> | <b>Os elementos de matriz de <math>\rho_S(t)</math> . . . . .</b>                            | <b>103</b> |
| <b>A.4</b> | <b>Traço parcial . . . . .</b>                                                               | <b>105</b> |
| A.4.1      | Calculando $\chi_{l \neq k, k}(t)$ . . . . .                                                 | 105        |
| A.4.2      | A matriz densidade na base dos estados coerentes . . . . .                                   | 108        |
| <b>A.5</b> | <b>Calculando a integral <math>\mathcal{I}(t)</math> . . . . .</b>                           | <b>113</b> |
| <b>A.6</b> | <b>Os elementos de matriz de <math>\rho_S(t)</math> para <math>n</math> qubits . . . . .</b> | <b>118</b> |
|            | <b>APÊNDICE B – PURIFICAÇÃO QUÂNTICA . . . . .</b>                                           | <b>123</b> |
| <b>B.1</b> | <b>Uma possível purificação para um qubit . . . . .</b>                                      | <b>123</b> |
| <b>B.2</b> | <b>O operador de evolução temporal no espaço purificado . . . . .</b>                        | <b>126</b> |
| <b>B.3</b> | <b>O Hamiltoniano no espaço purificado . . . . .</b>                                         | <b>129</b> |
| <b>B.4</b> | <b>O Hamiltoniano purificado para tempos curtos . . . . .</b>                                | <b>137</b> |
| B.4.1      | A expansão da função $\omega_B(t)$ para tempos curtos . . . . .                              | 137        |
| B.4.2      | Calculando $\mathcal{A}_T$ . . . . .                                                         | 138        |
| <b>B.5</b> | <b>Possível purificação para <math>n</math> qubits não interagentes . . . . .</b>            | <b>141</b> |
| <b>B.6</b> | <b>Os operadores de Kraus para o ruído de fase . . . . .</b>                                 | <b>143</b> |
| <b>B.7</b> | <b>Purificação pelos operadores de Kraus . . . . .</b>                                       | <b>150</b> |
| <b>B.8</b> | <b>Conectando as purificações . . . . .</b>                                                  | <b>153</b> |
|            | <b>APÊNDICE C – CONTROLE QUÂNTICO EFETIVO DE UM QUBIT</b>                                    | <b>155</b> |
| <b>C.1</b> | <b>Representação de interação com os termos de controle . . . . .</b>                        | <b>155</b> |
| <b>C.2</b> | <b>A equação mestra na aproximação de Born . . . . .</b>                                     | <b>157</b> |
| <b>C.3</b> | <b>O comutador da equação mestra . . . . .</b>                                               | <b>158</b> |
| <b>C.4</b> | <b>A aproximação em que o controle não varia apreciavelmente . . . . .</b>                   | <b>161</b> |
| <b>C.5</b> | <b>Calculando <math>\Omega(t)</math> . . . . .</b>                                           | <b>162</b> |
| <b>C.6</b> | <b>Dinâmica efetiva no espaço purificado . . . . .</b>                                       | <b>165</b> |

|            |                                                                                |            |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
|            | <b>APÊNDICE D – COMPLEXIDADE QUÂNTICA NO ESPAÇO PU-<br/>RIFICADO . . . . .</b> | <b>173</b> |
| <b>D.1</b> | <b>Grupos e álgebras de Lie . . . . .</b>                                      | <b>173</b> |
| <b>D.2</b> | <b>Coordenadas no <math>SU(2^N)</math> . . . . .</b>                           | <b>176</b> |
| <b>D.3</b> | <b>Mudando de coordenadas no <math>SU(2^N)</math> . . . . .</b>                | <b>180</b> |
| <b>D.4</b> | <b>Variedades de Finsler . . . . .</b>                                         | <b>184</b> |
| <b>D.5</b> | <b>Geodésicas de Pauli . . . . .</b>                                           | <b>187</b> |
| <b>D.6</b> | <b>Lagrangiana para a dinâmica ruidosa efetiva . . . . .</b>                   | <b>190</b> |



## 1 INTRODUÇÃO

A mecânica quântica é uma teoria física que descreve as propriedades e interações da natureza na escala atômica. (1) A teoria quântica descreve o mundo microscópico com grande precisão (2), porém ela desafia nossa intuição ao introduzir conceitos como a dualidade onda-partícula e o emaranhamento quântico de estados. (3) Além disso, essa teoria é fundamentalmente probabilística, porém ainda assim completa, no sentido de que ela abrange todas as informações possíveis de se conhecer sobre um sistema quântico. Historicamente, a questão da completude da teoria quântica foi levantada e colocada em xeque no famoso paradoxo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) (4), no entanto, foi demonstrado por Bell (5) que essa teoria é, de fato, completa.

Uma das aplicações da mecânica quântica é a computação quântica. (6) Uma computação quântica é um tipo de computação que aproveita dos fenômenos emergentes da mecânica quântica para realizar uma certa tarefa. (2,6-8) Em uma computação clássica, a unidade de informação é o bit, que pode ser entendido como uma variável que pode valer zero ou um. Por outro lado, em uma computação quântica, as unidades de informação são os qubits ou bits quânticos, que podem ser entendidos como sistemas quânticos de dois níveis, representados por vetores de estado, usualmente denotados por  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , que podem existir em estados de superposição e apresentar fenômenos de interferência. (8) Esses sistemas quânticos de dois níveis podem ser obtidos, por exemplo, através dos chamados átomos de dois níveis, nos quais isolamos um elétron, de forma que ele tenha acesso a apenas dois níveis de energia desse átomo. (9)

Para realmente demonstrar a superioridade computacional de uma computação quântica em relação à clássica, devemos recorrer à teoria da complexidade quântica. (10) Essa área de estudo fornece provas matemáticas das vantagens e limitações de uma computação quântica. A complexidade quântica de um algoritmo é definida como o menor número de passos computacionais necessários para realizar a computação, onde esses passos computacionais são dados por portas lógicas quânticas. (11) De forma análoga ao caso clássico, a eficiência de uma computação quântica é medida ao analisarmos como sua complexidade computacional varia em função do número de qubits de entrada. Nesse sentido, uma computação é dita ser eficiente quando sua complexidade cresce apenas de forma polinomial em termos do número de qubits de entrada. (11)

Um dos principais exemplos em que essa superioridade computacional se manifesta é no problema da decomposição de números em fatores primos. No caso clássico, esse problema é muito custoso computacionalmente, porém existe uma solução eficiente na computação quântica, conhecida como o algoritmo de Shor (12), cujas implicações são especialmente relevantes no contexto das criptografias e segurança de dados, e impulsionaram a pesquisa

nas chamadas criptografias pós-quânticas. (13)

Em uma computação quântica ideal, um estado quântico é descrito matematicamente por meio de uma função de onda, que é o objeto de onde extraímos as probabilidades de determinado evento ocorrer. Dado um estado inicial para a função de onda, a evolução temporal desse vetor é determinada pela equação de Schrödinger, onde um operador Hamiltoniano governa as interações e a evolução temporal desse sistema. Analogamente, podemos considerar a evolução temporal da função de onda como sendo realizada por meio de um operador unitário, que ao atuar no vetor de estado inicial produz a função de onda evoluída no tempo, para a dinâmica determinada pelo operador Hamiltoniano em questão. Dessa maneira, uma computação quântica ideal em  $n$  qubits é representada por essa transformação unitária, que pertence ao grupo de Lie especial unitário  $SU(2^n)$ , composto pelas matrizes  $2^n \times 2^n$  com entradas complexas, unitárias e com determinante igual a 1. (11)

Os grupos de Lie possuem as estruturas matemáticas necessárias para o estudo de geometrias em espaços curvos. (14–16) Nielsen e colaboradores, em uma série de resultados (11, 17–19), mostraram uma formulação geométrica para a complexidade quântica, onde o problema de encontrar o menor número de portas lógicas para realizar a computação é essencialmente substituído pelo problema de calcular uma distância entre o operador identidade do grupo e o operador unitário que realiza essa computação, em uma certa geometria Riemanniana no grupo de Lie especial unitário. (19) Essa formulação geométrica para a complexidade permite tratar o problema utilizando as ferramentas poderosas desenvolvidas na geometria e no cálculo das variações. (11, 20)

Porém, em uma computação quântica ideal, as portas lógicas dependem da coerência quântica entre os estados para efetuar a computação. A coerência quântica de um sistema está relacionada à sua capacidade de apresentar fenômenos de interferência de origem quântica, ao proporcionar estados em superposição quântica com fases relativas bem definidas. (21–23) A descoerência é a perda de coerência dos estados quânticos. (24) Esse fenômeno pode ser entendido no contexto dos sistemas quânticos abertos, como sendo o resultado da interação inevitável do sistema quântico com o seu ambiente. (25) Como efeito, temos a perda de informação do sistema para o ambiente, bem como a perda do emaranhamento entre os estados dos qubits. A perda do emaranhamento representa um desafio significativo na implementação de tecnologias quânticas, uma vez que o emaranhamento é fonte de vantagens da computação quântica. Portanto, manter a coerência é essencial para o desempenho dos computadores quânticos e evitar a descoerência quântica tem impulsionado o desenvolvimento de diversas técnicas de proteção e correção de erros contra os efeitos indesejados dessas interações. (2, 26)

Nesse contexto de sistemas quânticos abertos (27), o espaço de Hilbert total, que engloba tanto os estados dos qubits quanto os estados do ambiente, é um espaço de



infinitas dimensões, uma vez que o ambiente é modelado por um campo bosônico externo de osciladores harmônicos quantizados. Essas infinitas dimensões representam uma dificuldade nos tratamentos geométricos do problema. Porém, como estamos interessados apenas no estado do sistema de qubits, que é um dos subsistemas desse espaço total, tomamos o traço parcial nos graus de liberdade do outro subsistema, que é caracterizado pelo banho térmico. O traço parcial nos fornece uma maneira de estudar apenas o subsistema de dimensão finita de nosso interesse, no entanto, ao fazê-lo, obtemos uma evolução não unitária para a dinâmica desse sistema de qubits ruidosos. (27)

Dessa forma, neste trabalho utilizamos a purificação quântica (2) para estudar uma dinâmica efetiva para o problema de  $n$  qubits descoerentes. Com essa dinâmica efetiva, podemos estudar a dinâmica total do sistema em termos de operações unitárias, que atuam em espaços de dimensão finita, o que proporciona tratamentos naturais dessa evolução, uma vez que novamente a evolução do sistema é descrita por um operador do grupo de Lie especial unitário  $SU(2^{2n})$ .

No capítulo 2, começamos estudando a dinâmica ruidosa original, dos qubits interagindo com campos externos. Na seção 2.1, começamos investigando a dinâmica para um qubit e na seção 2.2, generalizamos o problema para  $n$  qubits não interagentes. Os cálculos utilizados nesse capítulo podem ser encontrados no apêndice A. Assim, estudamos essa dinâmica descoerente em detalhes nesse capítulo.

A partir da dinâmica ruidosa obtida no capítulo 2, no capítulo 3 estudamos a dinâmica efetiva ruidosa, onde substituímos as interações dos qubits com os campos externos, por interações dos qubits físicos com qubits auxiliares. Esses qubits auxiliares são apenas entidades matemáticas, cuja interação emula os efeitos do ruído nos qubits físicos. Na seção 3.1, estudamos uma possível purificação para o problema. Na subseção 3.1.1 começamos investigando a dinâmica efetiva para um qubit e na subseção 3.1.2 generalizamos essa purificação para o problema com  $n$  qubits não interagentes. Em seguida, investigamos outra purificação possível na seção 3.2, onde novamente primeiro estudamos o caso de um qubit e depois generalizamos para  $n$  qubits não interagentes. Por fim, na seção 3.3 deste capítulo estudamos duas maneiras distintas de conectar essas purificações. Os cálculos utilizados nesse capítulo podem ser encontrados no apêndice B.

No capítulo 4, iniciamos uma adequação dessa teoria efetiva, para agora incorporar termos de controle, com vistas de proteger o sistema do ruído. Fizemos essa adequação apenas no caso de um qubit, e utilizando uma aproximação em que o operador de evolução do sistema varia de forma lenta em comparação com a dinâmica ruidosa. Esse capítulo portanto fornece os primeiros passos rumo a uma teoria de controle quântico efetiva, onde também pretendemos, no futuro, explorar propriedades geométricas dessa dinâmica para controle quântico ótimo. (11, 17) Os cálculos utilizados nesse capítulo podem ser encontrados no apêndice C.

Por fim, no capítulo 5, estudamos o problema da dinâmica efetiva que emula os efeitos do ruído, de um ponto de vista geométrico. Com inspiração principal na referência (17), estudamos as curvas geodésicas que minimizam um certo funcional, dado pela métrica usual da complexidade quântica, que penaliza operações de 3 ou mais qubits no Hamiltoniano. Também exploramos outra geometrização, para fazer com que a curva geodésica coincida com a curva descrita pelo operador de evolução temporal ruidoso em toda a trajetória. Os cálculos e também algumas definições formais utilizados nesse capítulo podem ser encontrados no apêndice D.

## 2 DESCOERÊNCIA DE $n$ QUBITS NÃO INTERAGENTES

Nesse capítulo estudamos a dinâmica de um sistema de qubits interagindo com campos bosônicos externos. Os qubits não interagem entre si e cada qubit interage com um campo diferente. Durante esse texto, iremos resumir esses dois fatos dizendo simplesmente que os qubits são não interagentes, tendo em vista que eles não interagem entre si e nem por intermédio dos campos, porém, consideramos a possibilidade dos qubits estarem emaranhados antes da interação ruidosa começar. Além disso, iremos nos referir aos qubits como o sistema e aos campos externos como banhos térmicos ou como o ambiente com qual o qubit interage.

Considerando o modelo de spin e bósons (27), modelamos cada campo bosônico com um conjunto infinito de osciladores harmônicos quânticos em equilíbrio térmico em uma certa temperatura, e tomamos uma interação de defasagem pura entre cada qubit e o ambiente com o qual ele interage. Essa interação também é conhecida como o ruído de fase, já que a energia total do sistema é conservada, ao contrário, por exemplo, do caso da emissão espontânea, onde também existe um decaimento para o estado fundamental desses qubits.

Na seção 2.1 consideramos o problema de um qubit interagindo com um campo bosônico e na seção 2.2 generalizamos o problema para  $n$  qubits não interagentes. Dentro da teoria dos sistemas quânticos abertos, utilizamos o formalismo das matrizes densidade e calculamos a evolução temporal da matriz densidade reduzida do sistema  $\rho_S(t)$ , traçando a matriz densidade total, para os qubits e para o banho, parcialmente nos graus de liberdade dos campos.

Dessa forma, na seção 2.1 consideramos o problema de um qubit sujeito ao ruído de fase e tomamos o Hamiltoniano total da equação (2.1). Pela equação (2.2), assumimos que no tempo  $t = 0$ , a matriz densidade total é separável, e tomamos um estado térmico para o banho, enquanto para o sistema, tomamos um estado puro e geral.

No caso da interação da equação (2.1), calculamos a evolução temporal da matriz densidade reduzida para o sistema e pela equação (2.14), vemos que os termos da diagonal principal da matriz densidade do sistema são constantes no tempo, e portanto, as populações são conservadas. Por outro lado, os termos de coerência, fora da diagonal principal da matriz densidade, vão a zero conforme o tempo passa, e mostramos que essa evolução temporal é descrita pela função  $\mu(t)$ . Calculamos essa função analiticamente para o caso

de uma densidade ôhmica de estados, definida na equação (2.15), e obtemos:

$$\mu(t) = \left[ \frac{\left| \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + i\omega_T t \right)! \right|^4}{(1 + \omega_c^2 t^2) \left[ \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} \right)! \right]^4} \right]^{2\eta},$$

onde novamente vale ressaltar que, na densidade ôhmica de estados, inserimos o parâmetro  $\eta$ , que dita a intensidade da interação e a frequência de corte  $\omega_c$ , que por sua vez, dita até quais frequências a interação é relevante. Também estamos usando a notação fatorial para a função  $\Gamma$  fatorial, de forma que,  $z! = \Gamma(z + 1)$  e definimos  $\omega_T \equiv k_B T/\hbar$ , em termos da temperatura  $T$  do ambiente. Assim, pela equação (2.18) e pelas figuras 1 a 7, vemos que os termos de coerência vão a zero conforme o tempo passa, caracterizando assim a descoerência quântica desse sistema. Como um dos resultados dessa interação ruidosa, o estado do sistema deixa de ser puro, e na figura 9 plotamos a pureza, dada por  $\text{Tr}_S \{ \rho_S^2(t) \}$ .

Na seção 2.2 generalizamos o problema para  $n$  qubits não interagentes. Redefinimos o Hamiltoniano total na equação (2.21), para considerarmos  $n$  qubits não interagentes, e conforme explicamos, consideramos uma interação de defasagem pura entre cada qubit e o campo bosônico que ele interage. De forma análoga à seção 2.1, na equação (2.22) assumimos que inicialmente a matriz densidade total é separável e tomamos um estado térmico para cada banho, enquanto para o sistema, tomamos um estado puro e geral. Dessa forma, podemos iniciar os qubits em um estado emaranhado.

Pelo mesmo método da seção 2.1, calculamos a evolução temporal da matriz densidade reduzida para o sistema, e na equação (2.31) obtivemos:

$$\rho_S(t) = \sum_{\vec{l}, \vec{k}} c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^* \exp(-2i \Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t) \exp \left[ \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{S}_j(t) \right] |\vec{l}\rangle \langle \vec{k}|,$$

onde a fase complexa é ditada por  $\Omega_{\vec{l}, \vec{k}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \omega_{j,o}$  e introduzimos a notação  $|\vec{k}\rangle \equiv |k_1\rangle \otimes \cdots \otimes |k_n\rangle$ . Para cada banho adotamos uma densidade ôhmica de estados, de forma que, tomando  $\mu_j(t) = \exp[\mathcal{S}_j(t)]$ , temos:

$$\mu_j(t) = \left[ \frac{\left| \left( \frac{\omega_{j,T}}{\omega_{j,c}} + i\omega_{j,T} t \right)! \right|^4}{(1 + \omega_{j,c}^2 t^2) \left[ \left( \frac{\omega_{j,T}}{\omega_{j,c}} \right)! \right]^4} \right]^{2\eta_j},$$

onde o  $j$ -ésimo banho tem sua intensidade dada por  $\eta_j$ , sua frequência de corte é  $\omega_{j,c}$  e sua temperatura é  $T_j$ , e novamente definimos  $\omega_{T_j} \equiv k_B T_j/\hbar$ .

Portanto, vemos que cada vez que tivermos  $l_j \neq k_j$ , esse termo da matriz densidade ganha um fator multiplicativo de  $\mu_j(t)$  em sua evolução. Assim, por exemplo, se tivermos um estado onde  $l_j \neq k_j$ , para todo  $j$ , teremos a presença do produto completo  $\prod_{j=1}^n \mu_j(t)$

na evolução temporal desse elemento de matriz. Por outro lado, se tivermos  $l_1 \neq k_1$  e  $l_j = k_j$  para  $j \neq 1$ , teremos a evolução ditada apenas pela função  $\mu_1(t)$ .

De forma análoga ao caso de um qubit, vemos que as populações são conservadas, enquanto os termos de coerência vão a zero conforme o tempo passa, caracterizando assim a descoerência quântica. Dessa forma, o estado do sistema deixa de ser puro e o emaranhamento inicial é perdido.

## 2.1 Descoerência de um qubit por um campo bosônico externo

Consideremos um sistema quântico aberto composto por um único qubit interagindo com um campo de bósons em equilíbrio térmico em uma certa temperatura  $T$ . O Hamiltoniano total, é do tipo:

$$H = H_S \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_S \otimes H_B + H_{SB},$$

onde denotamos por  $\mathbb{1}_S$  e  $\mathbb{1}_B$ , os operadores identidade dos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  e  $\mathcal{H}_B$ , do sistema e do banho, respectivamente. Vamos adotar o modelo de spin e bósons, com uma interação de defasagem pura, como na seção 4.2 da referência (27). No termo do Hamiltoniano para o sistema, faremos inicialmente:

$$H_S = \hbar\omega_o \sigma_z,$$

onde  $\sigma_z$  é a matriz de Pauli nessa direção. Dessa forma, começaremos estudando a dinâmica sem incluir os termos de controle no Hamiltoniano para o sistema. Esses termos representam as operações que corrigirão o ruído. Por enquanto, estamos considerando apenas a energia livre desse qubit, onde o estado excitado desse qubit fica com energia  $\hbar\omega_o$  e o fundamental  $-\hbar\omega_o$ . Por outro lado, na parte da energia do banho bosônico, temos:

$$H_B = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda,$$

onde  $a_\lambda^\dagger$  e  $a_\lambda$  são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação de bósons em cada modo de oscilação do campo, de forma que,  $[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'}$ . Por fim, consideraremos uma interação de defasagem pura e faremos:

$$H_{SB} = \hbar\sigma_z \sum_{\lambda=0}^{\infty} (g_\lambda^* a_\lambda + g_\lambda a_\lambda^\dagger),$$

onde as constantes  $g_\lambda \in \mathbb{C}$  acoplam cada modo de oscilação do campo ao qubit. Daqui, podemos ver que energia total do sistema é conservada, já que  $H_S$  e  $H_{SB}$  são proporcionais a  $\sigma_z$ , de forma que,  $[H_S, H] = 0$ . De agora em diante, iremos omitir os operadores identidade, e portanto, o Hamiltoniano total, fica:

$$H = \hbar\omega_o \sigma_z + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda + \hbar\sigma_z \sum_{\lambda=0}^{\infty} (g_\lambda^* a_\lambda + g_\lambda a_\lambda^\dagger). \quad (2.1)$$

Assumiremos que inicialmente, no tempo  $t = 0$ , a matriz densidade total é separável, de forma que:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0). \quad (2.2)$$

Como o campo bosônico está em equilíbrio térmico em certa temperatura  $T$ , para extremizar a entropia, na parte do estado inicial do ambiente temos o estado térmico, dado por:

$$\rho_B(0) = \frac{\exp(-\beta H_B)}{Z}, \quad (2.3)$$

onde  $\beta \equiv 1/(k_B T)$  e  $Z = \text{Tr}_B \left\{ \exp(-\beta H_B) \right\}$  é a função de partição. Por outro lado, para o sistema tomaremos um estado puro e geral, dado por  $\rho_S(0) = |\psi_S(0)\rangle \langle \psi_S(0)|$ , onde  $|\psi_S(0)\rangle$  é uma função de onda geral e conhecida, para um qubit. Vamos rotular os autoestados do operador  $\sigma_z$ , de forma que, o estado excitado é denotado por  $|0\rangle$  e o fundamental  $|1\rangle$ , e assim,  $\sigma_z = |0\rangle \langle 0| - |1\rangle \langle 1|$ . Nessa base, em geral,  $|\psi_S(0)\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ , com  $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ , tais que:

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1. \quad (2.4)$$

Dessa forma, a matriz densidade para o sistema inicialmente, é:

$$\rho_S(0) = \sum_{l, k} c_l c_k^* |l\rangle \langle k|, \quad (2.5)$$

onde as somas em  $l$  e  $k$  vão de 0 a 1.

A evolução temporal desse sistema quântico é ditada pela equação de Liouville-Von Neumann (27),

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = -[\rho(t), H],$$

e no apêndice A.1 mostramos que a evolução temporal total é dada por:

$$\rho(t) = U_S(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t), \quad (2.6)$$

onde começamos passando para a representação de interação dos operadores  $H_B$  e  $H_S$ , com os operadores unitários  $U_B(t) = \exp[(-i/\hbar) H_B t]$  e  $U_S(t) = \exp[(-i/\hbar) H_S t]$ , respectivamente. A evolução da parte da interação é feita pelo operador unitário  $U_{SB}(t)$ , que soluciona a equação:

$$i\hbar \frac{dU_{SB}(t)}{dt} = H_o(t) U_{SB}(t), \quad (2.7)$$

com  $H_o(t) \equiv U_B^\dagger(t) H_{SB} U_B(t)$ . No apêndice A.2, mostramos que  $H_o(t)$  é dado por:

$$H_o(t) = \hbar \sigma_z \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda^* a_\lambda \exp(-i\omega_\lambda t) + g_\lambda a_\lambda^\dagger \exp(i\omega_\lambda t) \right]. \quad (2.8)$$

Dessa forma, ainda no apêndice A.2, adaptamos o cálculo da referência (28) e mostramos que  $U_{SB}(t)$  é dado por:

$$U_{SB}(t) = \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda(t) \right] \exp [i \phi(t)], \quad (2.9)$$

onde definimos os operadores anti-hermitianos  $\mathcal{B}_\lambda(t) = \kappa_\lambda(t) a_\lambda^\dagger - \kappa_\lambda^*(t) a_\lambda$ , com as funções  $\kappa_\lambda(t)$  definidas por  $\kappa_\lambda(t) \equiv 2 g_\lambda [1 - \exp(i\omega_\lambda t)] / \omega_\lambda$ . Além disso, no termo com a fase, estamos omitindo uma identidade total e definimos  $\phi(t) \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} |g_\lambda|^2 [\omega_\lambda t - \sin(\omega_\lambda t)] / \omega_\lambda^2$ .

Pela equação (2.6), traçando parcialmente nos graus de liberdade do banho, obtemos a matriz densidade reduzida para o sistema em todo tempo:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_B \left\{ U_S(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t) \right\}. \quad (2.10)$$

No apêndice A.3, partimos da equação (2.10) e utilizando as condições iniciais das equações (2.2) e (2.5), mostramos que:

$$\rho_S(t) = \sum_{l,k} c_l c_k^* \exp[-i(\Lambda_l - \Lambda_k) \omega_o t] \chi_{l,k}(t) |l\rangle \langle k|, \quad (2.11)$$

onde  $\Lambda_k$  é o autovalor do autoestado  $|k\rangle$ , de forma que,  $\sigma_z |k\rangle = \Lambda_k |k\rangle$ , e definimos:

$$\chi_{l,k}(t) \equiv \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \left( \frac{\Lambda_l - \Lambda_k}{2} \right) \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{B}_s(t) \right] \rho_B(0) \right\}. \quad (2.12)$$

Notemos então que o autovalor  $\Lambda_k$  do autoestado  $|k\rangle$  pode ser determinado pelo índice  $k$ , se escolhermos, por exemplo  $\Lambda_k = (-1)^k$ , pois assim, quando  $k = 0$ , temos o autovalor  $+1$  e quando  $k = 1$ , temos o autovalor  $-1$ , o que está de acordo com as definições que estamos utilizando. Notemos então que também podemos escrever:

$$\Delta_{l,k} = \frac{\Lambda_l - \Lambda_k}{2} = (-1)^l (1 - \delta_{lk}) = \begin{cases} (-1)^l & , \text{ se } l \neq k, \\ 0 & , \text{ se } l = k. \end{cases}$$

Portanto, pela equação (2.12), nos termos diagonais, também conhecidos como termos de população, temos  $l = k$  e  $\Delta_{l,k} = 0$ , de forma que,  $\chi_{l,l}(t) = \text{Tr}_B \{ \rho_B(0) \} = 1$ . Segue então que as populações são conservadas:

$$\langle l | \rho_S(t) | l \rangle = |c_l|^2.$$

Por outro lado, nos termos não diagonais, também conhecidos como termos de coerência, teremos uma contribuição dos operadores  $\mathcal{B}_s(t)$  dentro do traço parcial, já que para esses elementos  $l \neq k$  e  $\Delta_{l,k} = (-1)^l$ . No apêndice A.4, mostramos que para a matriz densidade  $\rho_B(0)$  da equação (2.3), se  $l \neq k$ , temos  $\chi_{l \neq k, k}(t) = \mu(t)$  onde:

$$\mu(t) = \exp \left\{ (-8) \sum_{\lambda=0}^{\infty} |g_\lambda|^2 \left[ \frac{1 - \cos(\omega_\lambda t)}{\omega_\lambda^2} \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1} \right] \right\}.$$

Podemos inserir uma densidade de estados  $J(\omega)$  geral, definida como  $J(\omega) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} |g_\lambda|^2 \delta(\omega - \omega_\lambda)$ . Dessa maneira, temos

$$\mu(t) = \exp[\mathcal{I}(t)],$$

onde definimos:

$$\mathcal{J}(t) = (-8) \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left[ \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} \right].$$

Dessa forma, juntando o cálculo para os elementos diagonais e não diagonais, obtemos:

$$\chi_{l,k}(t) = \exp[(1 - \delta_{lk}) \mathcal{J}(t)].$$

Portanto, pela equação (2.11), vemos que a matriz densidade do sistema é dada por:

$$\rho_S(t) = \sum_{l,k} c_l c_k^* \exp \left[ -2i(-1)^l (1 - \delta_{lk}) \omega_o t \right] \exp \left[ (1 - \delta_{lk}) \mathcal{J}(t) \right] |l\rangle \langle k|. \quad (2.13)$$

Pelas nossas definições dos autoestados do operador  $\sigma_z$ , de forma matricial, temos:

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \exp(-2i\omega_o t) \mu(t) \\ c_1 c_0^* \exp(2i\omega_o t) \mu(t) & |c_1|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

### 2.1.1 A densidade ôhmica de estados

A fim de deixar nosso exemplo mais palpável, adotaremos uma densidade ôhmica de estados. (27) Porém, vale ressaltar que a purificação quântica que faremos no próximo capítulo é válida para qualquer densidade de estados  $J(\omega)$ . Dito isso, consideraremos, portanto:

$$J(\omega) = \eta \omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad (2.15)$$

onde  $\eta$  é uma constante real, positiva e adimensional que dita a intensidade da interação e  $\omega_c$  é uma frequência de corte, também real e positiva, que por sua vez, indica até quais frequências essa interação é relevante. Dessa maneira:

$$\mathcal{J}(t) = (-8\eta) \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} \right]. \quad (2.16)$$

No apêndice A.5, mostramos que essa integral é exatamente dada por:

$$\mathcal{J}(t) = \ln \left\{ \left[ \frac{\left| \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + i\omega_T t \right)! \right|^4}{(1 + \omega_c^2 t^2) \left[ \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} \right)! \right]^4} \right]^{2\eta} \right\},$$

onde  $z! = \Gamma(z + 1)$  (29) e definimos  $\omega_T \equiv 1/(\hbar \beta) = k_B T/\hbar$ . Segue então que, no caso de uma densidade ôhmica de estados:

$$\mu(t) = \left[ \frac{\left| \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + i\omega_T t \right)! \right|^4}{(1 + \omega_c^2 t^2) \left[ \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} \right)! \right]^4} \right]^{2\eta}. \quad (2.17)$$



Na referência (27), esta função é calculada apenas no regime de baixas temperaturas, enquanto neste texto, assim como no artigo (30), a função  $\mu(t)$  foi calculada analiticamente em termos da função  $\Gamma$  fatorial. A função fatorial possui diversas propriedades matemáticas importantes, incluindo a seguinte fórmula para o seu módulo: (29)

$$|\Gamma(a + ib)|^2 = |\Gamma(a)|^2 \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{b^2}{(a+k)^2}}. \quad (2.18)$$

Dessa forma, pela expressão analítica da função  $\mu(t)$ , da equação (2.17), vemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0,$$

pois tomar o limite  $t \rightarrow \infty$  é análogo a tomar o limite  $b \rightarrow \infty$  na parte imaginária do módulo da função  $\Gamma$  na equação (2.18).

Para melhor observar o comportamento da função  $\mu(t)$  com o tempo, fizemos diversos gráficos dessa função para algumas temperaturas. Para isso usamos como referência o artigo (26) e tomamos  $\eta = 1/16$  e  $\omega_c \tau = 2\pi$ , com  $\tau = 10^{-10} s$ . Primeiro, consideramos a forma analítica da função  $\mu(t)$ , dada pela expressão da equação (2.17). Por outro lado, repetimos esse gráfico, porém, dessa vez fizemos a integração numérica da equação (2.16), integrando nas frequências  $\omega$  de 0 até  $10^{12} Hz$ . Dessa forma, obtemos os seguintes gráficos:

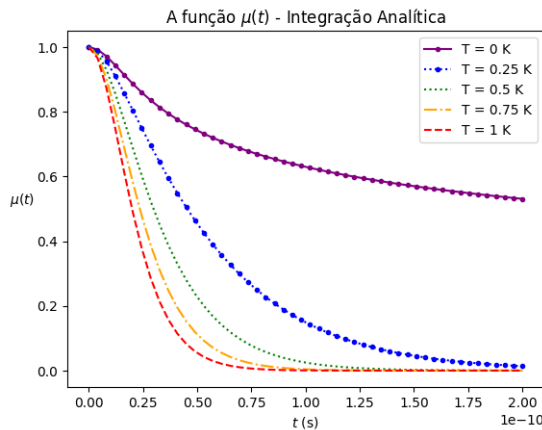


Figura 1 – A função  $\mu(t)$  para algumas temperaturas - Integração Analítica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

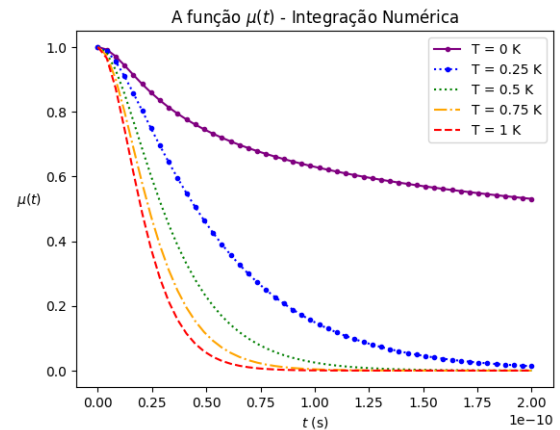


Figura 2 – A função  $\mu(t)$  para algumas temperaturas - Integração Numérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, podemos fazer gráficos comparativos entre a solução analítica da integral da equação (2.16) e sua integração numérica. Dessa maneira, podemos confirmar que nossos cálculos analíticos estão corretos. Fizemos os gráficos das figuras 3 a 6, para comparar ambas soluções para algumas temperaturas, e com eles confirmamos que a solução analítica da integral da equação (2.16), apresentada no apêndice 2.16 está correta, já que os gráficos coincidem em todos pontos:

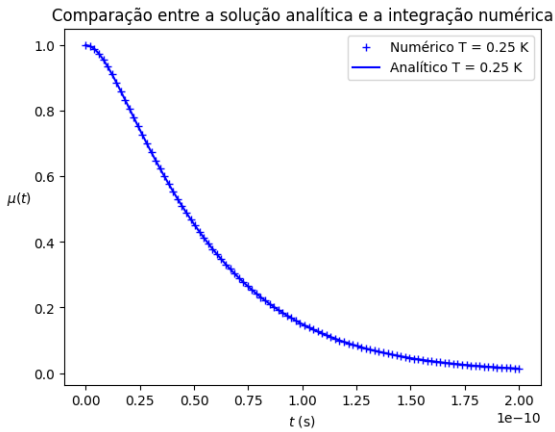


Figura 3 – A função  $\mu(t)$  para  $T = 0.25K$  - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

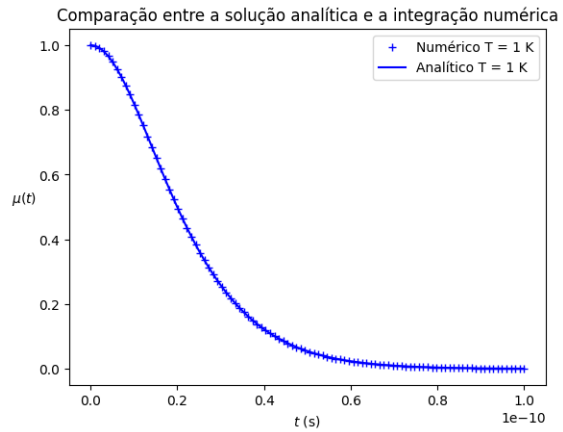


Figura 4 – A função  $\mu(t)$  para  $T = 1K$  - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

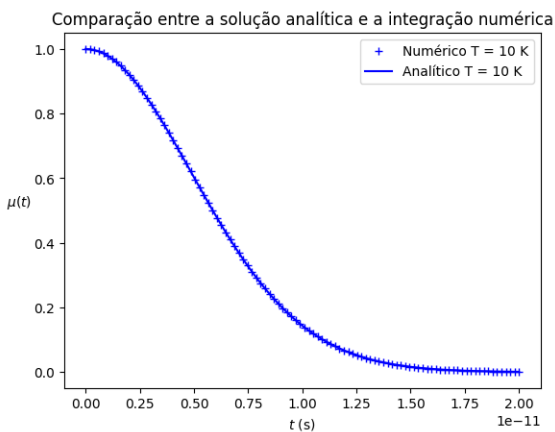


Figura 5 – A função  $\mu(t)$  para  $T = 10K$  - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

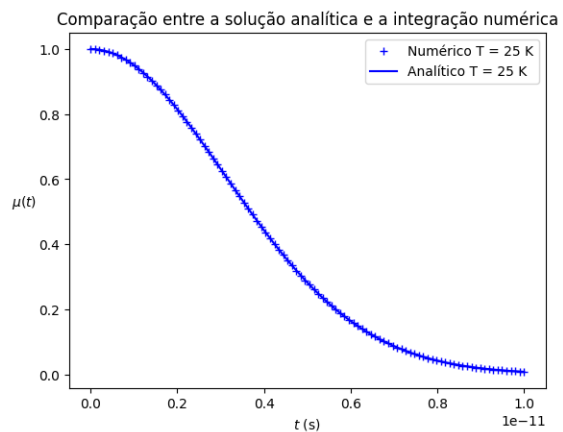
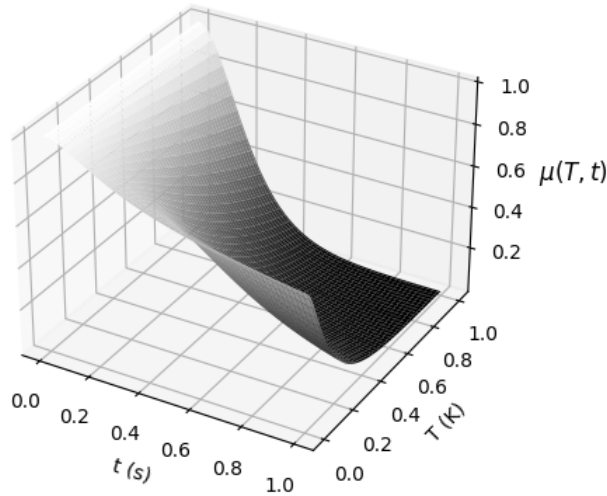


Figura 6 – A função  $\mu(t)$  para  $T = 25K$  - Comparação entre a solução analítica e a integração numérica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas figuras acima, em particular, nas figuras 1 e 2, podemos estudar o comportamento da função  $\mu(t)$  com a temperatura. Por esses gráficos, e pela expressão analítica da equação (2.17), observamos que quanto maior a temperatura, mais rapidamente ocorrerá a descoerência, já que  $\mu(t)$  vai a zero mais rapidamente conforme a temperatura aumenta. Apesar disso, é interessante notar que mesmo em  $T = 0K$ , ainda ocorre a decoerência, devido ao acoplamento do sistema com vácuo quântico, (27) o que pode ser visto diretamente da equação (2.17) e nas figuras 1 e 2. Para visualizar essa dependência com a temperatura, consideramos o parâmetro  $T$  como uma variável e tomamos  $\mu$  como função de  $T$  e  $t$ . Dessa maneira, fizemos gráfico 3D da função  $\mu(T, t)$ , onde deixamos a temperatura variar de  $0K$  até  $T = 1K$  e obtivemos a seguinte superfície:

Gráfico 3D da função  $\mu(T, t)$ Figura 7 – Gráfico 3D da função  $\mu(T, t)$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, a função  $\mu(t)$  vai a zero conforme o tempo passa, e quando seu valor se tornar desprezível, a matriz densidade do sistema será o estado misto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_S(t) = |c_0|^2 |0\rangle \langle 0| + |c_1|^2 |1\rangle \langle 1|, \quad (2.19)$$

onde nenhuma coerência restou, caracterizando assim a descoerência quântica total desse estado. Essa matriz densidade da equação (2.19) representa apenas uma ignorância clássica sobre o estado quântico do sistema. Inicialmente, o estado sistema era puro e dado pela função de onda  $|\psi_S(0)\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ . No fim, ficamos com um estado misto, que não pode ser descrito por uma função de onda. Pictoricamente, é como se alguém tivesse serrado uma moeda ao meio e dado metade para Alice e outra metade para o Bob. Se um deles abrir a mão e olhar qual metade recebeu, saberemos qual é a outra metade. No entanto, antes de abrir a mão, o estado da moeda não era nenhuma superposição quântica de cara e coroa. Em outras palavras, a física que passa a descrever o estado do sistema é dada por probabilidades clássicas.

Dessa forma, pelas equações, (2.13) e (2.19), podemos ver que conforme o tempo passa o estado do sistema deixa de ser puro. Consideremos então, a pureza  $\gamma$ , dada por:

$$\gamma = \text{Tr}_S \{ \rho_S^2(t) \}.$$

Esse parâmetro fornece um critério para determinarmos a pureza de uma matriz densidade. Para os estados puros  $\gamma = 1$  e para os estados mistos  $\gamma < 1$ . (2) Consideramos o estado inicial  $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$ . Pela equação (2.13), fizemos um gráfico da evolução temporal da pureza para algumas temperaturas:

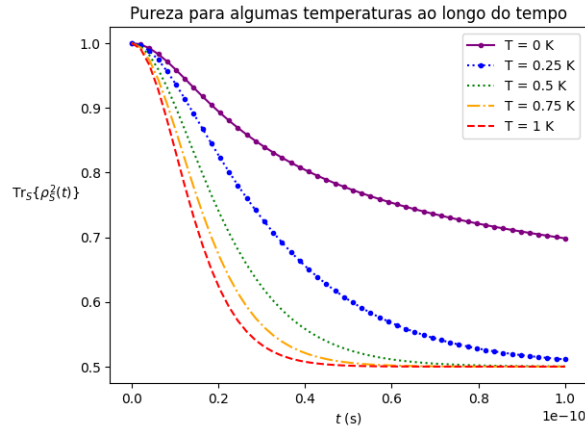


Figura 8 – Pureza para algumas temperaturas -  $\text{Tr}_S \{ \rho_S^2(t) \}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como inicialmente o estado do sistema possui uma função de onda bem definida, a pureza começa valendo 1, e o estado é puro. Porém, conforme a interação se inicia-se a pureza passa a ser menor que 1, e o estado do sistema passa a ser misto. Dessa forma, estamos perdendo informação sobre o estado do sistema. Para investigar esse fato, estudamos a entropia, que representa nosso grau de desconhecimento a respeito do estado do sistema. A entropia de von Neumann é dada por:

$$S(T, t) = - \sum_k \lambda_k \ln(\lambda_k),$$

onde  $\lambda_k$  são os autovalores da matriz densidade  $\rho_S(t)$ . Pela equação (2.13), os autovalores dessa matriz densidade, são  $\lambda_0(t) = [1 + \mu(t)]/2$  e  $\lambda_1(t) = [1 - \mu(t)]/2$ . Usando este mesmo estado inicial  $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$ , fizemos um gráfico da entropia  $S(T, t)$  em função do tempo para algumas temperaturas, e observamos a entropia subir de 0 até  $\ln(2) \approx 0,693$ :

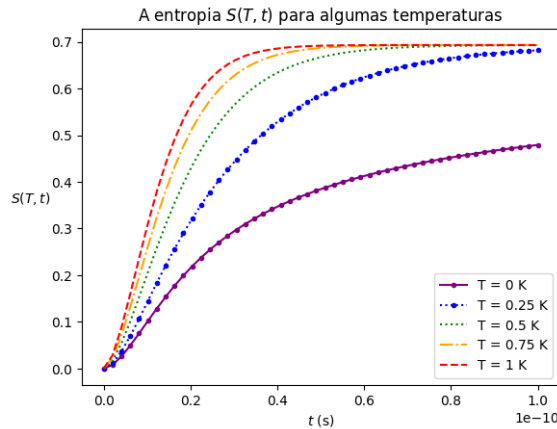


Figura 9 – Entropia para algumas temperaturas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 2.2 Descoerência de $n$ qubits não interagentes

Nessa seção, vamos generalizar o problema para  $n$  qubits ruidosos, onde cada qubit interage com um campo bosônico diferente. O Hamiltoniano total, é do tipo:

$$H = H_B \otimes \mathbb{1}_S + \mathbb{1}_B \otimes H_S + H_{SB}, \quad (2.20)$$

onde denotamos por  $\mathbb{1}_S$  e  $\mathbb{1}_B$ , as matrizes identidade dos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  e  $\mathcal{H}_B$ , do sistema e dos banhos, respectivamente. De forma análoga ao caso de um qubit da seção 2.1, consideremos o modelo de spin e bósons, e tomemos uma interação de defasagem pura entre cada qubit e o campo com o qual ele interage. (27) Cada qubit será rotulado por um índice  $j$  que vai de 1 até o número  $n$  de qubits. De forma análoga, rotularemos os campos bosônicos, de forma que, o  $j$ -ésimo banho interage com o  $j$ -ésimo qubit.

Como os qubits são não interagentes e não estamos incluindo termos de controle, para corrigir o ruído, na parte do Hamiltoniano do sistema, teremos apenas a energia livre de cada qubit, de forma que:

$$H_S = \sum_{j=1}^n \hbar \omega_{j,o} \sigma_{j,z},$$

onde  $\sigma_{j,z}$  é a matriz de Pauli para o  $j$ -ésimo qubit na direção  $z$ . Analogamente, na parte do Hamiltoniano para os banhos térmicos, teremos a energia dos  $n$  campos bosônicos:

$$H_B = \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \omega_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger a_{j,\lambda},$$

onde  $a_{j,\lambda}^\dagger$  e  $a_{j,\lambda}$  agora são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação de bósons em cada modo  $\lambda$  de oscilação do  $j$ -ésimo campo, de forma que,  $[a_{j,\lambda}, a_{j',\lambda'}^\dagger] = \delta_{j,j'} \delta_{\lambda,\lambda'}$ . Por fim, tomando interações de defasagem pura, entre cada qubit e o campo com o qual ele interage, teremos:

$$H_{SB} = \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \sigma_{j,z} \left( g_{j,\lambda}^* a_{j,\lambda} + g_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger \right),$$

onde as constantes  $g_{j,\lambda} \in \mathbb{C}$  acoplam cada modo  $\lambda$  de oscilação do  $j$ -ésimo campo ao  $j$ -ésimo qubit. Assim, o Hamiltoniano total, explicitamente fica:

$$H = \sum_{j=1}^n \hbar \omega_{j,o} \sigma_{j,z} + \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \omega_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger a_{j,\lambda} + \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \sigma_{j,z} \left( g_{j,\lambda}^* a_{j,\lambda} + g_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger \right), \quad (2.21)$$

onde iremos omitir os operadores identidade e os produtos tensoriais.

Novamente, assumiremos que inicialmente, no tempo  $t = 0$ , a matriz densidade total, para os qubits e para os banhos, é separável:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0). \quad (2.22)$$

Como cada  $j$ -ésimo campo bosônico está em equilíbrio térmico em certa temperatura  $T_j$ , para extremizar a entropia, na parte do estado inicial do ambiente temos um estado

térmico para cada banho, dado por:

$$\rho_B(0) = \prod_{j=1}^n \rho_{B_j}(0), \quad (2.23)$$

onde:

$$\rho_{B_j}(0) = \frac{\exp\left(-\beta_j H_{B_j}\right)}{Z_j},$$

com  $H_{B_j}$  definido por  $H_{B_j} \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \omega_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger a_{j,\lambda}$ . Além disso, também introduzimos para cada banho  $\beta_j \equiv \frac{1}{k_B T_j}$  e  $Z_j = \text{Tr}_{B_j} \left\{ \exp\left(-\beta_j H_{B_j}\right) \right\}$ .

Por outro lado, para o sistema tomaremos um estado puro e geral, dado por  $\rho_S(0) = |\psi_S(0)\rangle \langle \psi_S(0)|$ , onde  $|\psi_S(0)\rangle$  é uma função de onda geral e conhecida, para um qubit. Mantendo as definições da seção anterior, iremos rotular os autoestados do operador  $\sigma_z$  de cada qubit, de forma que, o estado excitado é denotado por  $|0\rangle$  e o fundamental  $|1\rangle$ . Nessa base, em geral,

$$|\psi_S(0)\rangle = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \left| \vec{k} \right\rangle, \quad (2.24)$$

com a normalização dessa função de onda dada pela relação  $\sum_{\vec{k}} |c_{\vec{k}}|^2 = 1$ , onde introduzimos as notações simplificadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \cdots \sum_{k_n=0}^1 \\ c_{\vec{k}} \rightarrow c_{k_1, k_2, \dots, k_n} \\ \left| \vec{k} \right\rangle \rightarrow |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes \cdots \otimes |k_n\rangle. \end{array} \right.$$

A evolução temporal desse sistema quântico é ditada pela equação de Liouville-Von Neumann,

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = -[\rho(t), H].$$

Com essas redefinições de  $H_S$  e  $H_B$  podemos fazer uso do formalismo apresentado no apêndice A.1, de forma que, a evolução temporal total é dada por:

$$\rho(t) = U_S(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t), \quad (2.25)$$

onde nas partes de energia livre dos banhos e dos qubits, continuamos com  $U_B(t) = \exp[(-i/\hbar) H_B t]$  e  $U_S(t) = \exp[(-i/\hbar) H_S t]$ . A evolução da parte da interação é feita pelo operador unitário  $U_{SB}(t)$ , que soluciona a equação:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_{SB}(t) = H_o(t) U_{SB}(t), \quad (2.26)$$

com  $H_o(t)$  definido por  $H_o(t) \equiv U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t) H_{SB} U_S(t) U_B(t)$ . Notemos que, como  $[U_S(t), H_{SB}] = 0$ , utilizando e adaptando o apêndice A.2, segue que  $H_o(t)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
H_o(t) &= U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t) H_{SB} U_S(t) U_B(t) \\
&= U_B^\dagger(t) H_{SB} U_B(t) \\
&= \exp \left[ \left( \frac{i}{\hbar} \right) \sum_{k=1}^n H_{B_k} t \right] \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \sigma_{j,z} \left( g_{j,\lambda}^* a_{j,\lambda} + g_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger \right) \right] \exp \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \sum_{k'=1}^n H_{B_{k'}} t \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \hbar \sigma_{j,z} \exp \left[ \left( \frac{i}{\hbar} \right) H_{B_j} t \right] \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{j,\lambda}^* a_{j,\lambda} + g_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger \right] \exp \left[ \left( \frac{i}{\hbar} \right) H_{B_j} t \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \hbar \sigma_{j,z} \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{j,\lambda}^* a_{j,\lambda} \exp(-i\omega_{j,\lambda} t) + g_{j,\lambda} a_{j,\lambda}^\dagger \exp(i\omega_{j,\lambda} t) \right].
\end{aligned}$$

Agora, propondo que  $U_{SB}(t)$  seja do tipo de um produtório do tipo  $U_{SB}(t) = \prod_{j=1}^n U_{SB_j}(t)$ , onde cada  $U_{SB_j}(t)$  atua apenas no  $j$ -ésimo par qubit e banho, pela regra do produto, que para resolver a equação (2.26), basta satisfazer que:

$$i \hbar \frac{d}{dt} U_{SB_k}(t) = H_{k,o}(t) U_{SB_k}(t),$$

para cada  $k = 1, \dots, n$ . Dessa forma, para cada qubit, fazemos  $U_{SB_k}(t)$  como na equação (2.9). Assim,  $U_{SB}(t)$  é dado por:

$$U_{SB}(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\sigma_{j,z}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \exp [i \phi(t)], \quad (2.27)$$

onde  $\mathcal{B}_{j,\lambda}(t) = \kappa_{j,\lambda}(t) a_{j,\lambda}^\dagger - \kappa_{j,\lambda}^*(t) a_{j,\lambda}$  e  $\kappa_{j,\lambda}(t) \equiv 2 g_{j,\lambda} (1 - \exp(i\omega_{j,\lambda} t)) / \omega_{j,\lambda}$ . Na parte com a fase, novamente estamos omitindo um operador identidade total e redefinimos  $\phi(t) \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} (|g_{j,\lambda}|^2 / \omega_{j,\lambda}^2) [\omega_{j,\lambda} t - \sin(\omega_{j,\lambda} t)]$ .

Traçando a matriz densidade total da equação (2.25), parcialmente nos graus de liberdade dos banhos, obtemos a matriz densidade para o sistema em todo tempo:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_B \left\{ U_S(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t) \right\}. \quad (2.28)$$

Com essas redefinições, no apêndice A.6 adaptamos o apêndice A.3 para o caso de  $n$  qubits. Partindo da equação (2.28) e utilizando as condições iniciais das equações (2.22), (2.23) e (2.24), mostramos que:

$$\rho_S(t) = \sum_{\vec{l}, \vec{k}} c_{\vec{l}} c_{\vec{k}} \exp \left( -2 i \Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t \right) \chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t) \left| \vec{l} \right\rangle \left\langle \vec{k} \right|, \quad (2.29)$$

onde a fase complexa é regida pelo termo  $\Omega_{\vec{l}, \vec{k}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \omega_{j,o}$  e definimos também:

$$\chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t) = \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \sum_{j=1}^n (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \rho_B(0) \right\}. \quad (2.30)$$

Nos termos diagonais, notemos que  $\vec{l} = \vec{k}$ , de forma que,  $l_j = k_j$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Portanto, das equações (2.29) e (2.30) segue que:

$$\langle \vec{k} | \rho_S(t) | \vec{k} \rangle = |c_{\vec{k}}|^2,$$

e as populações são conservadas.

Por outro lado, nos termos não diagonais, com  $\vec{l} \neq \vec{k}$ , a evolução é descrita pela respectiva função de descoerência  $\chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t)$ . Notemos que o termo  $(1 - \delta_{l_j k_j})$ , filtra na soma apenas as componentes diferentes dos vetores  $\vec{l}$  e  $\vec{k}$ . Assim, para certo  $j$ , sempre que  $l_j \neq k_j$ , teremos uma contribuição dos operadores  $\mathcal{B}_{j,\lambda}(t)$  dentro do traço parcial. Dessa forma, substituindo a condição inicial da equação (2.23) na equação (2.30) e utilizando os resultados para um qubit do apêndice A.4, obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t) &= \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \sum_{j=1}^n (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \rho_B(0) \right\} \\ &= \prod_{j=1}^n \text{Tr}_{B_j} \left\{ \exp \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \rho_{B_j}(0) \right\} \\ &= \prod_{j=1}^n \exp \left[ (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{I}_j(t) \right] \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{I}_j(t) \right], \end{aligned}$$

com

$$\mathcal{I}_j(t) = (-8) \int_0^{\infty} d\omega J_j(\omega) \left[ \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta_j \hbar \omega) - 1} \right],$$

onde  $J_j(\omega) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} |g_{j,\lambda}|^2 \delta(\omega - \omega_{j,\lambda})$ , é uma densidade geral de estados para cada banho, e definiremos também  $\mu_j(t) \equiv \exp[\mathcal{I}_j(t)]$ . Portanto, a matriz densidade do sistema é dada por:

$$\rho_S(t) = \sum_{\vec{l}, \vec{k}} c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^* \exp(-2i \Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t) \exp \left[ \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{I}_j(t) \right] | \vec{l} \rangle \langle \vec{k} |. \quad (2.31)$$

Portanto, para cada  $j$ , cada vez que tivermos  $l_j \neq k_j$ , esse termo da matriz densidade ganha um fator multiplicativo de  $\mu_j(t)$  em sua evolução. Assim, por exemplo, se tivermos um estado onde  $l_j \neq k_j$ , para todo  $j$ , teremos a presença do produto completo  $\prod_{j=1}^n \mu_j(t)$  na evolução temporal desse elemento de matriz. Por outro lado, se tivermos, por exemplo,  $l_1 \neq k_1$  e  $l_j = k_j$  para  $j \neq 1$ , teremos a evolução deste elemento de matriz ditada apenas pela função  $\mu_1(t)$ .



### 2.2.1 A densidade ôhmica de estados

De forma análoga ao caso de um qubit, deixaremos nosso exemplo mais palpável, adotando uma densidade ôhmica de estados para cada banho. Novamente, vale ressaltar que a purificação quântica que faremos no próximo capítulo é válida para qualquer densidade de estados  $J_j(\omega)$ . (27) Dito isso, consideremos, portanto:

$$J_j(\omega) = \eta_j \omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_{j,c}}\right),$$

onde  $\eta_j$  é uma constante real, positiva e adimensional que dita a intensidade da interação entre o  $j$ -ésimo qubit e seu banho e  $\omega_{j,c}$  é uma frequência de corte, também real e positiva, que por sua vez, indica até quais frequências essa interação é relevante. Dessa maneira:

$$\mathcal{J}_j(t) = (-8\eta_j) \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_{j,c}}\right) \left[\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega}\right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta_j \hbar \omega) - 1}\right].$$

Novamente usando o apêndice A.5, vemos que essa integral é exatamente dada por:

$$\mathcal{J}_j(t) = \ln \left\{ \frac{\left[ \left| \frac{\left(\frac{\omega_{j,T}}{\omega_{j,c}} + i\omega_{j,T}t\right)!}{\left(\frac{\omega_{j,c}}{\omega_{j,c}}\right)!} \right|^4 \right]^{2\eta_j}}{\left(1 + \omega_{j,c}^2 t^2\right) \left[\left(\frac{\omega_{j,T}}{\omega_{j,c}}\right)!\right]^4} \right\},$$

onde  $z! = \Gamma(z + 1)$ , e definimos  $\omega_{j,T} \equiv 1/(\hbar \beta_j) = k_B T_j/\hbar$ . Segue então que, no caso de uma densidade ôhmica de estados:

$$\mu_j(t) = \frac{\left[ \left| \frac{\left(\frac{\omega_{j,T}}{\omega_{j,c}} + i\omega_{j,T}t\right)!}{\left(\frac{\omega_{j,c}}{\omega_{j,c}}\right)!} \right|^4 \right]^{2\eta_j}}{\left(1 + \omega_{j,c}^2 t^2\right) \left[\left(\frac{\omega_{j,T}}{\omega_{j,c}}\right)!\right]^4}. \quad (2.32)$$

Assim, como no caso de um qubit, para qualquer temperatura, conforme o tempo passa:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_j(t) = 0.$$

Para exemplificar, consideremos dois qubits. Para simplificar a análise, façamos  $\mu_1(t) = \mu_2(t) = \mu(t)$ . Notemos que os termos da matriz densidade evoluem com:

$$\begin{cases} \langle 00 | \rho_S(t) | 01 \rangle \propto \mu(t), \\ \langle 00 | \rho_S(t) | 11 \rangle \propto \mu^2(t), \end{cases}$$

onde simplificamos a notação, considerando:

$$|l\rangle \otimes |k\rangle \equiv |lk\rangle.$$

Assim, no primeiro termo,  $\langle 00 | \rho_S(t) | 01 \rangle$ , a descoerência ocorre apenas no segundo qubit, enquanto no segundo termo,  $\langle 00 | \rho_S(t) | 11 \rangle$ , a descoerência ocorre em ambos qubits. Dessa forma, o primeiro termo sobrevive por mais tempo do que o segundo. Para ilustrar a ideia, fizemos um plot comparativo entre  $\mu(t)$  e  $\mu^2(t)$  para  $T = 1K$ . Novamente utilizamos como referência o artigo (26) e tomamos  $\eta = 1/16$  e  $\omega_c \tau = 2\pi$ , com  $\tau = 10^{-10}s$ . Dessa forma, obtemos:

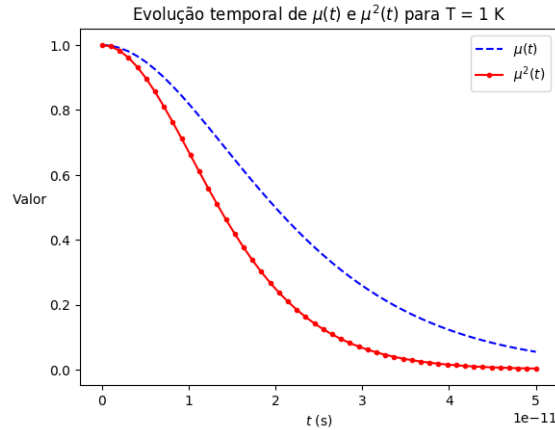


Figura 10 – Comparação entre a evolução temporal de  $\mu(t)$  e  $\mu^2(t)$  para  $T = 1K$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para melhorar apreciar essas diferenças entre as dinâmicas, abriremos um parêntese na discussão de dois qubits e consideremos a comparação até ordem  $\mu^5(t)$ , que iria reger a evolução de alguns elementos de matriz no caso de 5 qubits. Utilizando os mesmos parâmetros, obtemos:

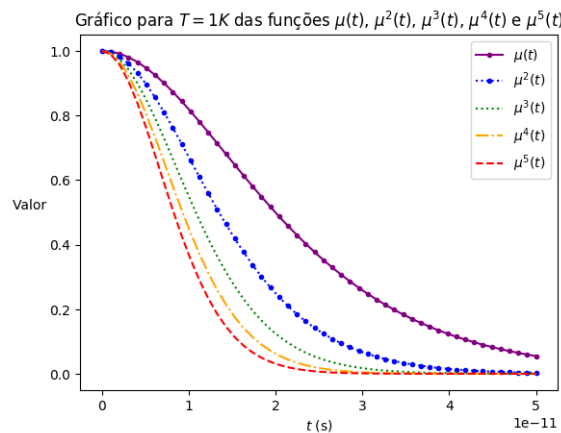


Figura 11 – Comparação entre a evolução temporal de  $\mu(t)$  e suas potências até ordem  $\mu^5(t)$  para  $T = 1K$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com essas figuras, observamos que a evolução temporal descoerentes desses diferentes elementos de matriz não diagonais é relativamente de mesma magnitude. Voltando ao caso de 2 qubits, novamente, partindo de um estado puro, conforme o tempo passa o estado do sistema passa a ser misto. Neste contexto, consideremos a pureza, dada por:

$$\gamma = \text{Tr}_S \{ \rho_S^2(t) \},$$

onde para os estados puros  $\gamma = 1$ , enquanto para os estados mistos  $\gamma < 1$ . (2) Tomamos o estado inicial  $c_{00} = c_{01} = c_{10} = c_{11} = 1/\sqrt{4}$ , e pela equação (2.31), fizemos um gráfico da pureza para um sistema de dois qubits descoerentes para algumas temperaturas:

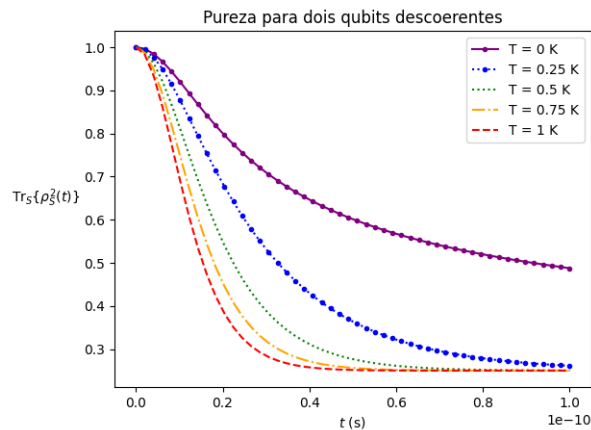


Figura 12 – Pureza  $\text{Tr}_S \{ \rho_S^2(t) \}$  para dois qubits.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Notamos que o estado deixa de ser puro conforme a interação se inicia, pois a pureza deixa de valer 1 e perdemos informação sobre o estado do sistema.

Usando este mesmo estado inicial  $c_{00} = c_{01} = c_{10} = c_{11} = 1/\sqrt{4}$ , fizemos um gráfico da entropia  $S(T, t)$  para dois qubits em função do tempo para algumas temperaturas. Considerando novamente a entropia de von Neumann, dada por:

$$S(T, t) = - \sum_k \lambda_k \ln(\lambda_k),$$

onde  $\lambda_k$  são os autovalores da matriz densidade  $\rho_S(t)$ . Pela equação (2.31), os autovalores dessa matriz densidade, são  $\lambda_0(t) = \lambda_1(t) = [1 - \mu(t)]^2/4$ ,  $\lambda_2(t) = [\mu^2(t) - 2\mu(t) + 1]/2$  e  $\lambda_3(t) = [1\mu^2(t) + 2\mu(t) + 1]/2$ . Dessa forma, a entropia fica:

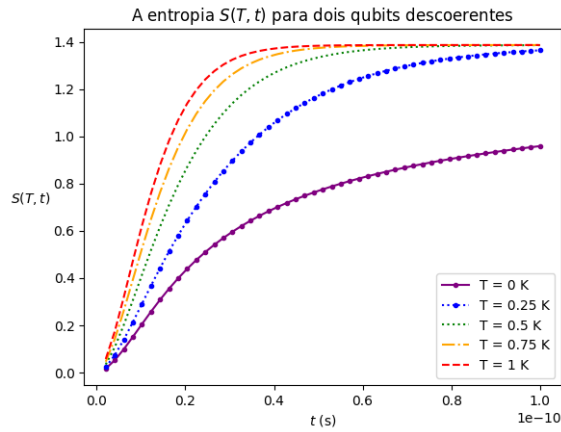


Figura 13 – Entropia  $S(T, t)$  para dois qubits.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa maneira, vemos que a entropia do sistema começa valendo 0, quando o estado do sistema é puro, e cresce quando a interação começa, indo ao valor limite de  $\ln(4) \approx 1.386$ .

Com essas visualizações e discussões, investigamos a dinâmica de  $n$  qubits ruidosos e não interagentes. Dentro do contexto de interesse deste trabalho, no próximo capítulo estudaremos diferentes purificações quânticas para essa dinâmica ruidosa.

### 3 PURIFICAÇÃO QUÂNTICA PARA O RUÍDO DE FASE

No capítulo anterior estudamos a dinâmica de  $n$  qubits ruidosos e não interagentes, onde cada qubit interage com um campo bosônico diferente. Partindo de um estado inicial puro para a matriz densidade do sistema, a interação com o ambiente faz com que o estado se torne misto, como ilustramos na figura 9. Além disso, quando tomamos o traço parcial nos graus de liberdade dos campos, também perdemos a unitariedade dessa evolução. Esse fato poderá ser visto diretamente nesse capítulo, onde calculamos explicitamente os operadores de Kraus para essa dinâmica ruidosa.

Nosso objetivo neste capítulo é encontrar uma dinâmica efetiva para o problema do ruído de fase, por meio da purificação quântica. (2) Por esse método, dada a matriz densidade mista  $\rho_S(t)$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  do sistema, em geral, podemos encontrar uma matriz densidade pura  $\rho_p(t)$ , em um novo espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ , dado pelo produto tensorial entre  $\mathcal{H}_S$  e um espaço de Hilbert auxiliar  $\mathcal{H}_A$ , de mesma dimensão que  $\mathcal{H}_S$ , de forma que, quando tomarmos o traço parcial, no espaço de Hilbert auxiliar, recuperamos o operador densidade misto  $\rho_S(t)$ . Em símbolos, desejamos encontrar uma matriz densidade pura  $\rho_p(t)$ , no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ , tal que, em todo tempo:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_A \{ \rho_p(t) \}. \quad (3.1)$$

Dessa forma, estamos substituindo a matriz densidade total  $\rho(t)$ , no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$ , pela matriz densidade total  $\rho_p(t)$ , em um espaço de Hilbert isomorfo ao  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_S$ , para o dobro de qubits. Em ambos casos, a matriz densidade reduzida para o sistema físico de qubits é obtida tomando o traço parcial no segundo termo do produto tensorial. Na dinâmica física temos qubits interagindo com campos bosônicos com infinitos modos de oscilação, enquanto na dinâmica efetiva, temos qubits físicos interagindo com o mesmo número de qubits auxiliares e não físicos. Portanto, na dinâmica efetiva, substituímos as interações de um qubit com um campo bosônico externo por uma interação com um único qubit auxiliar.

Assim, dado esse operador puro  $\rho_p(t)$ , por um processo inverso, encontramos o Hamiltoniano e o operador unitário que geram essa dinâmica, dado o estado inicial em  $\rho_p(0)$ . Ou analogamente, qual unitário realiza essa evolução que leva  $\rho_p(0)$  em  $\rho_p(t)$ . A purificação não é única (2) e existem diversas matrizes densidade que satisfazem a condição (3.1). Neste capítulo, exploraremos duas purificações possíveis para o problema. A primeira é apresentada na seção 3.1 e segunda na seção 3.2. Por fim, na seção 3.3 deste capítulo estudamos duas maneiras distintas de conectar essas purificações.

Consideramos inicialmente um qubit e a matriz densidade da equação (2.13), da

seção 2.1. Mostramos na seção 3.1 que dado o estado inicial:

$$\rho_p(0) = \rho_S(0) \otimes |+\rangle \langle +|,$$

na representação de interação, o Hamiltoniano efetivo pode ser dado por:

$$H_{pI}(t) = -\hbar\omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_y,$$

com

$$\omega_B(t) = \frac{-\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}}.$$

Pela equação de Schrödinger, temos o operador unitário:

$$U_{pI}(t) = \exp \left[ i\theta(t) \sigma_z \otimes \sigma_y \right],$$

onde:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin[\mu(t)]}{2}.$$

Porém, como a purificação não é única, na seção 3.2, mostramos outra purificação possível partindo desse mesmo estado inicial. Essa dinâmica é descrita pelo Hamiltoniano diagonal:

$$H_D(t) = \hbar\omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_z.$$

Este operador também fornece uma purificação para o problema na representação de interação. Novamente, pela equação de Schrödinger, temos o operador unitário:

$$U_D(t) = \exp \left[ -i\theta(t) \sigma_z \otimes \sigma_z \right].$$

Para generalizar essa purificação para  $n$  qubits, basta considerar  $n$  purificações independentes, cada uma realizada por essa dinâmica efetiva de um qubit que encontramos. Temos então:

$$U_D(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n -i\theta_j(t) \sigma_{3,3}^{(j)} \right],$$

ou analogamente

$$U_{pI}(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n i\theta_j(t) \sigma_{3,2}^{(j)} \right],$$

onde estamos utilizando a notação:

$$\sigma_{l,m}^{(j)} \equiv \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma_l \otimes \sigma_m}_{j\text{-ésimo par}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=n}.$$

Dessa forma, recuperamos a unitariedade da evolução e mostramos que essas dinâmicas efetivas são realizadas por operadores membros do grupo de Lie  $SU(2^{2n})$ , que introduziremos no último capítulo. Notemos então o poder do formalismo aqui introduzido.

No problema original, tínhamos campos bosônicos externos com infinitos modos de oscilação interagindo com cada qubit. Quando tomamos o traço parcial nos graus de liberdade do banho, perdemos a unitariedade das operações. Para recuperar a unitariedade, lançamos mão do processo matemático da purificação quântica e consideramos o espaço de Hilbert purificado  $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ . Então, encontramos um operador densidade  $\rho_p(t)$  nesse novo espaço, tal que, tomando o traço parcial em um dos espaços de Hilbert, recuperamos a dinâmica original, com a imensa vantagem de que, antes do traço,  $\mathcal{H}_p$  tem dimensão finita e igual a

$$\dim(\mathcal{H}_p) = [\dim(\mathcal{H}_S)]^2.$$

Iremos nos referir ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ , como o espaço de Hilbert purificado, para discernir que estamos nos referindo ao espaço de Hilbert em que a dinâmica efetiva é pura. Não é que o espaço em si seja purificado, é apenas uma forma de identificar esse espaço em que ocorre a dinâmica efetiva.

### 3.1 Uma possível purificação

#### 3.1.1 Possível purificação para um qubit descoerente

Nessa subseção abordaremos o problema da purificação de um qubit descoerente. Começaremos explorando uma possível dinâmica efetiva, que simplesmente satisfaça aos vínculos matemáticos da equação (3.1), impostos pela purificação.

O espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_S$  para o sistema de um qubit possui dimensão 2. Para purificar uma matriz densidade nesse espaço, é suficiente considerar um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ , dado pelo produto tensorial entre  $\mathcal{H}_S$  e um espaço de Hilbert auxiliar  $\mathcal{H}_A$ , de mesma dimensão que  $\mathcal{H}_S$ . Portanto, o espaço de Hilbert purificado  $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$  tem dimensão 4, já que a dimensão do espaço resultante de um produto tensorial é o produto das dimensões dos espaços envolvidos nesse produto.

Na base dos autoestados do operador  $\sigma_z$  de cada qubit no espaço purificado, uma função de onda  $|\psi_p(t)\rangle$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$  pode ser escrita, em geral, como  $|\psi_p(t)\rangle = \sum_{l,k} \alpha_{lk}(t) |l\rangle \otimes |k\rangle$ . Assim, em geral, a matriz densidade pura  $\rho_p(t) = |\psi_p(t)\rangle \langle \psi_p(t)|$ , é dada por:

$$\rho_p(t) = \sum_{l,k} \sum_{l',k'} \alpha_{l,\nu}(t) \alpha_{k,k'}^*(t) |l\rangle \langle k| \otimes |l'\rangle \langle k'|,$$

onde cada soma vai de 0 a 1. Notemos então que, tomando o traço parcial no espaço de Hilbert auxiliar, temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \{ \rho_p(t) \} &= \sum_{\lambda} \sum_{l,k} \sum_{l',k'} \alpha_{l,\nu}(t) \alpha_{k,k'}^*(t) |l\rangle \langle k| \otimes \langle \lambda | l' \rangle \langle k' | \lambda \rangle \\ &= \sum_{l,k} \sum_{\lambda} \alpha_{l,\lambda}(t) \alpha_{k,\lambda}^*(t) |l\rangle \langle k|. \end{aligned}$$

Para recuperar a matriz densidade mista  $\rho_S(t)$ , comparando com a equação (2.13), precisamos encontrar certos coeficientes  $\alpha_{l, \lambda}(t)$ , para satisfazer:

$$\sum_{\lambda} \alpha_{l, \lambda}(t) \alpha_{k, \lambda}^*(t) = c_l c_k^* \exp \left[ -2 i (-1)^l (1 - \delta_{lk}) \omega_o t \right] \exp \left[ (1 - \delta_{lk}) \mathcal{J}(t) \right]. \quad (3.2)$$

No apêndice B.1, mostramos que uma possível escolha de coeficientes  $\alpha_{l, \lambda}(t)$  da função de onda, é dada por:

$$|\psi_p(t)\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} c_0 s(t) \exp(-i\omega_o t) \\ c_0 d(t) \exp(-i\omega_o t) \\ c_1 d(t) \exp(i\omega_o t) \\ c_1 s(t) \exp(i\omega_o t) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde definimos as funções  $s(t) \equiv [1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)}]^{1/2}$  e  $d(t) \equiv \mu(t) / [1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)}]^{1/2}$ . Essas funções satisfazem as relações  $s^2(t) + d^2(t) = 2$  e  $s(t) d(t) = \mu(t)$ . Utilizando tais relações, no apêndice B.1, verificamos que essas definições satisfazem os vínculos da equação (3.2), e também mostramos que essa função de onda é normalizada em todo tempo. Portanto, essa é uma possível purificação desse sistema quântico, válida em todo tempo.

Dada a função de onda  $|\psi_p(t)\rangle$ , por um processo inverso, procuramos pelo operador  $U_p(t)$ , que realize a evolução temporal dessa função de onda, de forma que,  $|\psi_p(t)\rangle = U_p(t) |\psi_p(0)\rangle$ . No apêndice B.2, mostramos que, em sua forma matricial, esse operador é dado por:

$$U_p(t) = \left( \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} S(t) + D(t) & S(t) - D(t) & 0 & 0 \\ D(t) - S(t) & S(t) + D(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) \\ 0 & 0 & S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

onde defimos as funções  $S \equiv s(t) \exp(-i\omega_o t)$  e  $D(t) \equiv d(t) \exp(-i\omega_o t)$ . Ainda no apêndice B.2, verificamos que esse operador é unitário, pois  $U_p^\dagger(t) U_p(t) = U_p(t) U_p^\dagger(t) = \mathbb{1}_p$ , e possui determinante especialmente igual a 1, isto é,  $\det[U_p(t)] = 1$ . Dessa forma, mostramos que esse operador é um membro do grupo de Lie especial unitário  $SU(2^2)$ , que será introduzido com mais detalhes no último capítulo.

Dado o operador  $U_p(t)$  da equação (3.4), desejamos determinar o Hamiltoniano  $H_p(t)$ , que satisfaz a equação de Schrödinger para essa dinâmica no espaço purificado, de forma que:

$$H_p(t) = i\hbar \left[ \frac{dU_p(t)}{dt} \right] U_p^\dagger(t).$$



No apêndice B.3, multiplicamos as matrizes  $\frac{dU_p(t)}{dt}$  e  $U_p^\dagger(t)$  explicitamente e obtemos:

$$H_p(t) = \hbar \omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} - \hbar \omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_y,$$

com:

$$\omega_B(t) = \frac{-\dot{\mu}(t)}{2 \sqrt{1 - \mu^2(t)}}. \quad (3.5)$$

Notemos que  $\mu(t)$  é uma função decrescente, então  $\dot{\mu}(t) < 0$ , de forma que, com a definição (3.5), temos  $\omega_B(t) > 0$ . De forma mais explícita, o Hamiltoniano no espaço purificado é dado por:

$$H_p(t) = \hbar \omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} + \frac{\hbar \dot{\mu}(t)}{2 \sqrt{1 - \mu^2(t)}} \sigma_z \otimes \sigma_y. \quad (3.6)$$

Apesar de termos  $\mu(0) = 1$ , esse Hamiltoniano da equação (3.6) não apresenta nenhuma divergência em  $t = 0$ , quando tomamos o limite apropriadamente. No apêndice B.4, mostramos que para tempos curtos:

$$H_p(t) \approx \hbar \omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} - \hbar \left( \frac{\sqrt{2} \mathcal{A}_T}{2} \right) (1 - \mathcal{A}_T t^2) \sigma_z \otimes \sigma_y, \quad (3.7)$$

com  $\mathcal{A}_T = 2 \eta \omega_c^2 + 4 \eta \omega_T^2 \psi^{(1)}[(\omega_c + \omega_T)/\omega_c]$ , onde  $\psi^{(1)}$  é a função trigamma, dada pela segunda derivada do logaritmo da função  $\Gamma(z)$  fatorial, isto é,  $\psi^{(1)}(z) = d^2/dz^2 \ln[\Gamma(z)]$ . (29) Dessa forma, pela equação (3.7), vemos que  $H_p(0) = \hbar \omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} - \hbar \sqrt{2} \mathcal{A}_T/2 \sigma_z \otimes \sigma_y$ , e não existe nenhuma divergência próxima de  $t = 0$ .

Para visualizar essa importante função de nosso trabalho, fizemos um gráfico da função  $\omega_B(t)$  para algumas temperaturas. Para isso, novamente usamos como referência o artigo (26) e tomamos  $\eta = 1/16$  e  $\omega_c \tau = 2\pi$ , com  $\tau = 10^{-10} s$ . Neste gráfico, tomamos a expressão para o limite de tempos curtos da equação (3.7), para os tempos de 0 a  $10^{-12} s$ , depois de  $t = 10^{-12} s$  até  $10^{-10} s$ , usamos a expressão da equação (3.5). Dessa forma, obtemos:

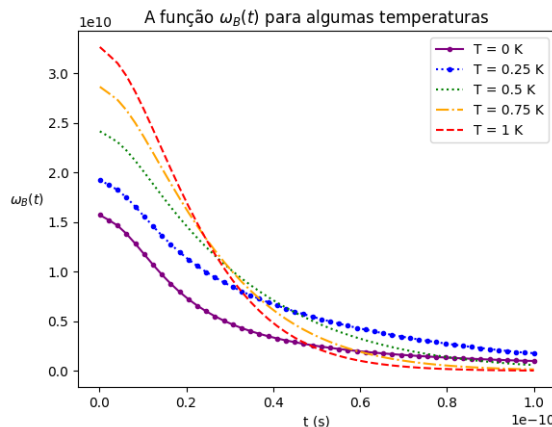


Figura 14 – Gráfico da função  $\omega_B(t)$  para algumas temperaturas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, a função  $\omega_B(t)$  começa tendo um certo valor e conforme o tempo passa ela vai a zero. Esta função governa a dinâmica efetiva livre, que emula os efeitos ruído, no Hamiltoniano purificado. Uma vez que possuímos o Hamiltoniano em todo tempo, podemos resolver a equação de Schrödinger para obter o operador de evolução temporal em sua forma exponencial.

Pela equação (3.6) notamos que o Hamiltoniano purificado comuta com ele mesmo em tempos diferentes, isto é  $[H_p(t), H_p(t')] = 0$ . Sendo assim, o operador  $U_p(t)$  também pode ser escrito, como:

$$U_p(t) = \exp \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \int_0^t dt' H_p(t') \right].$$

Portanto,

$$U_p(t) = \exp \left[ -i\omega_o t \sigma_z \otimes \mathbb{1} + i\theta(t) \sigma_z \otimes \sigma_y \right], \quad (3.8)$$

onde definimos  $\theta(t) \equiv \int_0^t dt' \omega_B(t')$ . Podemos calcular  $\theta(t)$ , notando que:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \frac{\dot{\mu}(t')}{\sqrt{1 - \mu^2(t')}} &= \int_{\mu(0)}^{\mu(t)} \frac{d\mu'}{\sqrt{1 - (\mu')^2}} \\ &= \int_1^{\mu(t)} \frac{d\mu'}{\sqrt{1 - (\mu')^2}} \\ &= \arcsin[\mu(t)] - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de  $\omega_B(t)$ , da equação (3.5), obtemos:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin[\mu(t)]}{2}. \quad (3.9)$$

Pela equação (3.9), notamos que como  $0 < \mu(t) \leq 1$ , então  $0 \leq \theta(t) < \pi/4$ . Por outro lado, a derivada de  $\theta(t)$  é a função  $\omega_B(t) > 0$ , e portanto, concluímos que  $\theta(t)$  cresce monotonicamente e no limite de  $t$  tendendo ao infinito

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \frac{\pi}{4}.$$

Novamente tomamos  $\eta = 1/16$  e  $\omega_c \tau = 2\pi$ , com  $\tau = 10^{-10} s$  (26), e fizemos um gráfico da função  $\theta(t)$ , para algumas temperaturas:

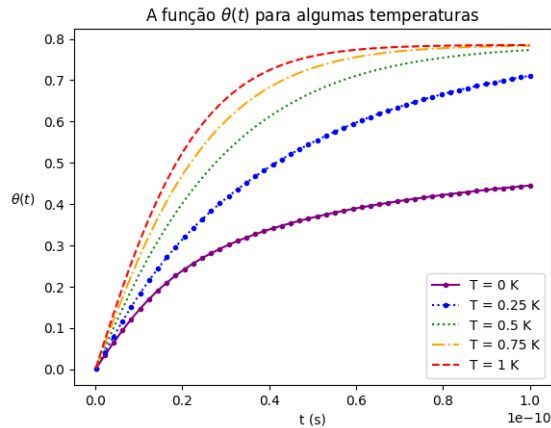


Figura 15 – Gráfico da função  $\theta(t)$  para algumas temperaturas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa função descreve o operador evolução no espaço purificado. Na figura 3.9 observamos o valor dessa função começar em 0, pois o operador começa na identidade. Conforme o tempo passa, vemos seu valor crescer de forma a encontrar seu máximo em  $\pi/4 \approx 0,785$ .

Na próxima subseção, iremos generalizar essa purificação para o caso da seção 2.2 de  $n$  qubits não interagentes.

### 3.1.2 Possível purificação para $n$ qubits descoerentes e não interagentes

Nessa seção, apresentaremos a generalização da purificação da seção anterior para o caso de  $n$  qubits descoerentes e não interagentes. Para isso, aproveitaremos o fato de que os qubits não interagem e utilizaremos a purificação quântica para um qubit apresentada na seção 3.1.1.

No caso de  $n$  qubits, o espaço de Hilbert para o sistema  $\mathcal{H}_S$  tem dimensão  $2^n$ , e portanto, para purificar essa matriz densidade, é suficiente considerar o espaço de Hilbert purificado  $\mathcal{H}_p$ , para  $2n$  qubits, cuja dimensão é  $2^{2n}$ . É conveniente tomar uma ordem para organizar esse espaço, para que cada qubit seja purificado ao considerarmos uma interação com o qubit “vizinho”. Dessa forma, faremos:

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{S_1} \otimes \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{S_2} \otimes \mathcal{H}_{A_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{S_n} \otimes \mathcal{H}_{A_n},$$

onde  $\mathcal{H}_{S_j}$  é o espaço de Hilbert do  $j$ -ésimo qubit e  $\mathcal{H}_{A_j}$  é o espaço de Hilbert do  $j$ -ésimo qubit auxiliar. Definiremos a seguinte notação, para os autoestados do operador  $\sigma_z$  de cada qubit no espaço purificado:

$$|\vec{l}\rangle \otimes |\vec{k}\rangle \equiv |l_1\rangle \otimes |k_1\rangle \otimes |l_2\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes \dots \otimes |l_n\rangle \otimes |k_n\rangle.$$

De forma análoga ao caso de um qubit, notemos inicialmente que uma função de onda  $|\psi_p(t)\rangle$  no espaço de Hilbert purificado  $\mathcal{H}_p$ , pode ser escrita, em geral, como  $|\psi_p(t)\rangle = \sum_{\vec{l}, \vec{k}} \alpha_{\vec{l}, \vec{k}}(t) |\vec{l}\rangle \otimes |\vec{k}\rangle$ . Assim, a matriz densidade pura  $\rho_p(t) = |\psi_p(t)\rangle \langle \psi_p(t)|$ , em geral, é dada por:

$$\rho_p(t) = \sum_{\vec{l}, \vec{k}} \sum_{\vec{l}', \vec{k}'} \alpha_{\vec{l}, \vec{l}'}(t) \alpha_{\vec{k}, \vec{k}'}^*(t) |\vec{l}\rangle \langle \vec{k}| \otimes |\vec{l}'\rangle \langle \vec{k}'|.$$

Estamos mantendo a notação da seção anterior e identificando os autoestados dos espaços auxiliares com índices com linha  $|\vec{l}'\rangle$  e  $\langle \vec{k}'|$ . Notemos então, que tomando o traço parcial no espaço de Hilbert auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A \{ \rho_p(t) \} &= \sum_{\vec{\lambda}} \sum_{\vec{l}, \vec{k}} \sum_{\vec{l}', \vec{k}'} \alpha_{\vec{l}, \vec{l}'}(t) \alpha_{\vec{k}, \vec{k}'}^*(t) |\vec{l}\rangle \langle \vec{k}| \otimes \langle \vec{\lambda} | \vec{l}' \rangle \langle \vec{k}' | \vec{\lambda} \rangle \\ &= \sum_{\vec{l}, \vec{k}} \sum_{\vec{\lambda}} \alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t) \alpha_{\vec{k}, \vec{\lambda}}^*(t) |\vec{l}\rangle \langle \vec{k}|. \end{aligned}$$

Portanto, para garantirmos que o traço parcial no espaço de Hilbert auxiliar recupera a matriz densidade mista  $\rho_S(t)$  para  $n$  qubits descoerentes e não interagentes, da equação (2.31), precisamos determinar coeficientes  $\alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t)$ , para satisfazer:

$$\sum_{\vec{\lambda}} \alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t) \alpha_{\vec{k}, \vec{\lambda}}^*(t) = c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^* \exp(-2i\Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t) \exp\left[ \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{J}_j(t) \right]. \quad (3.10)$$

Como cada qubit interage apenas com o seu banho, podemos pensar que estamos fazendo  $n$  purificações de um qubit independentes. No apêndice B.5 usamos o Ansatz de que os coeficientes da função de onda purificada  $\alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t)$ , podem ser fatorados, da seguinte maneira:

$$\alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t) = \frac{c_{\vec{l}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n \xi_{l_j, \lambda_j}(t).$$

Dessa forma, tomamos as funções  $\xi_{l_j, \lambda_j}(t)$  para purificar o  $j$ -ésimo qubit, utilizando a purificação de um qubit da equação (3.3). Explicitamente:

$$\xi_{l_j, \lambda_j}(t) = \begin{cases} s_j(t) \exp(-i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = \lambda_j = 0; \\ d_j(t) \exp(-i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = 0, \text{ e } \lambda_j = 1; \\ d_j(t) \exp(i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = 1, \text{ e } \lambda_j = 0; \\ s_j(t) \exp(i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = \lambda_j = 1, \end{cases}$$

onde  $s_j(t) \equiv [1 + \sqrt{1 - \mu_j^2(t)}]^{1/2}$  e  $d_j(t) = \mu_j(t) / [1 + \sqrt{1 - \mu_j^2(t)}]^{1/2}$ . Novamente, para cada valor de  $j$ , vale que  $s_j^2(t) + d_j^2(t) = 2$  e  $s_j(t) d_j(t) = \mu_j(t)$ . Utilizando essas relações, no

apêndice B.5, mostramos que essa escolha de coeficientes é uma possível purificação para  $n$  qubits não interagentes, e obtemos:

$$|\psi_p(t)\rangle = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n \xi_{k_j, k'_j}(t) |\vec{k}\rangle \otimes |\vec{k}'\rangle. \quad (3.11)$$

Agora, vamos encontrar o operador unitário  $U_p(t)$ , tal que,  $|\psi_p(t)\rangle = U_p(t) |\psi_p(0)\rangle$ . No tempo  $t = 0$ , para qualquer par  $(k_j, k'_j)$ , inicialmente vale que,  $\xi_{k_j, k'_j}(0) = 1$ , já que,  $s_j(0) = d_j(0) = 1$ . Assim,  $\alpha_{\vec{k}, \vec{k}'}(0) = c_{\vec{k}}/\sqrt{2^n}$ , e a função de onda em  $t = 0$ , fica:

$$|\psi_p(0)\rangle = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} |\vec{k}\rangle \otimes |\vec{k}'\rangle.$$

Vamos propor que  $U_p(t)$  seja dado por um produtório de operadores  $U_p(t) = \prod_{j=1}^n U_{p_j}(t)$ , onde  $U_{p_j}(t)$  atua apenas no  $j$ -ésimo par qubit e qubit auxiliar. Estamos omitindo os operadores identidade e usando a notação:

$$U_{p_j}(t) \rightarrow \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{U_{p_j}}_{j\text{-ésimo par}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=n}.$$

Agora, basta que cada  $U_{p_j}(t)$  atue no par  $|k_j\rangle \otimes |k'_j\rangle$ , de forma que:

$$U_{p_j}(t) |k_j\rangle \otimes |k'_j\rangle = \xi_{k_j, k'_j}(t) |k_j\rangle \otimes |k'_j\rangle, \quad (3.12)$$

pois, dessa maneira, teremos:

$$\begin{aligned} U_p(t) |\psi_p(0)\rangle &= \prod_{j=1}^n U_{p_j}(t) \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} |\vec{k}, \vec{k}'\rangle \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n U_{p_j}(t) |\vec{k}, \vec{k}'\rangle \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n U_{p_j}(t) \bigotimes_{l=1}^n |k_l, k'_l\rangle \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n \xi_{k_j, k'_j}(t) \bigotimes_{l=1}^n |k_l, k'_l\rangle \\ &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n \xi_{k_j, k'_j}(t) |\vec{k}, \vec{k}'\rangle \\ &= |\psi_p(t)\rangle. \end{aligned}$$

E, para um qubit, sabemos que o operador que satisfaz a equação (3.12) é dado por:

$$U_j(t) = \exp[-i \omega_{j,o} t \sigma_z \otimes \mathbb{1} + i \theta_j(t) \sigma_z \otimes \sigma_y],$$

onde:

$$\theta_j(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin[\mu_j(t)]}{2}. \quad (3.13)$$

Como as interações da dinâmica efetiva são sempre em pares, vamos compactar a notação, definindo os operadores  $\sigma_{l,m}^{(j)}$ , que atuam em todo espaço, como:

$$\sigma_{l,m}^{(j)} \equiv \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma_l \otimes \sigma_m}_{j\text{-ésimo par}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=n}.$$

Ou seja, no  $j$ -ésimo par de operadores, temos  $\sigma_l \otimes \sigma_m$ , enquanto os outros termos recebem operadores identidade. Dessa forma, podemos escrever, simplesmente:

$$\sigma_{3,0}^{(j)} = \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma_z \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j\text{-ésimo par}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=n},$$

e também:

$$\sigma_{3,2}^{(j)} = \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma_z \otimes \sigma_y}_{j\text{-ésimo par}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=n}.$$

Portanto, utilizando essa notação, teremos:

$$U_p(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n -i \omega_{j,o} t \sigma_{3,0}^{(j)} + i \theta_j(t) \sigma_{3,2}^{(j)} \right]. \quad (3.14)$$

### 3.2 Purificação pelos operadores de Kraus

Sabemos pela teoria dos sistemas quânticos abertos que, para qualquer tipo de ruído, se a matriz densidade total for separável no tempo inicial, a matriz densidade reduzida para o sistema pode ser escrita em termos de uma evolução dada pelos operadores de Kraus. (2, 31) Dessa forma, a matriz densidade reduzida  $\rho_S(t)$  para um sistema de  $n$  qubits, é dada por:

$$\rho_S(t) = \sum_m K_m(t) \rho_S(0) K_m^\dagger(t),$$

onde  $K_m(t)$  são os operadores de Kraus. Esses operadores descrevem a dinâmica desse sistema quântico aberto e para todo tempo  $t$ , satisfazem:

$$\sum_m K_m^\dagger(t) K_m(t) = \mathbb{1}. \quad (3.15)$$

No instante  $t = 0$ , o estado do sistema é puro e dado por  $\rho_S(0) = |\psi_S(0)\rangle \langle \psi_S(0)|$ , onde  $|\psi_S(0)\rangle$  é uma função de onda geral  $|\psi_S(0)\rangle = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle$ , com  $\sum_{\vec{k}} |c_{\vec{k}}|^2 = 1$ . No espaço purificado, teremos uma matriz densidade  $\rho_p(t) = |\psi_p(t)\rangle \langle \psi_p(t)|$ , e vamos propor que:

$$|\psi_p(t)\rangle = \sum_m \left[ K_m(t) |\psi_S(0)\rangle \right] \otimes |m\rangle.$$

Assim, tomando o traço parcial no espaço de Hilbert auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A\{\rho_p(t)\} &= \sum_{\lambda} \sum_m \sum_{m'} [K_m(t) |\psi_S(0)\rangle] [\langle\psi_S(0)| K_{m'}^\dagger(t)] \otimes \langle\lambda|m\rangle \langle m'|\lambda\rangle \\ &= \sum_{\lambda} K_{\lambda}(t) |\psi_S(0)\rangle \langle\psi_S(0)| K_{\lambda}^\dagger(t) \\ &= \rho_S(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos sempre recuperar o operador  $\rho_S(t)$ , se considerarmos um espaço auxiliar grande o suficiente, levando em conta todos os operadores de Kraus necessários para descrever essa dinâmica. Por outro lado, a normalização da função de onda no espaço purificado também pode ser checada, notando pela equação (3.15), que:

$$\begin{aligned} \langle\psi_p(t)|\psi_p(t)\rangle &= \sum_{m'} \sum_m \langle\psi_S(0)| K_{m'}^\dagger(t) K_m(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes \langle m'|m\rangle \\ &= \langle\psi_S(0)|\psi_S(0)\rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vamos explorar essa purificação para o caso do ruído de fase, e para esse caso, calcularemos o operador unitário que realiza essa evolução temporal. Abordaremos primeiro o caso de um qubit, que poderá ser facilmente generalizado, com base em nossa experiência na generalização da purificação da subseção 3.1.2.

### 3.2.1 Purificação para um qubit descoerente

Na representação de interação, na equação (A.15), tínhamos:

$$\rho_{IS}(t) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \mu(t) \\ c_1 c_0^* \mu(t) & |c_1|^2 \end{pmatrix}.$$

No apêndice B.6 mostramos que, para a dinâmica dessa matriz densidade, vale que:

$$\rho_{IS}(t) = \rho_S(0) \left[ \frac{1 + \mu(t)}{2} \right] + \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z \left[ \frac{1 - \mu(t)}{2} \right].$$

Deste resultado, vemos que podemos tomar os operadores de Kraus simplesmente, como:

$$\left\{ \begin{aligned} K_0(t) &= \mathbb{1} \sqrt{\frac{1 + \mu(t)}{2}} \end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} K_1(t) &= -i \sigma_z \sqrt{\frac{1 - \mu(t)}{2}}, \end{aligned} \right. \quad (3.17)$$

e ainda no apêndice B.6, checamos que esses são os operadores de Kraus para o problema, já que satisfazem:

$$\sum_{m=0}^1 K_m(t) \rho_S(0) K_m^\dagger(t) = \rho_{IS}(t).$$

Também é direto checar, que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^1 K_m^\dagger(t) K_m(t) &= K_0^\dagger(t) K_0(t) + K_1^\dagger(t) K_1(t) \\ &= \left[ \frac{1 + \mu(t)}{2} \right] \mathbb{1} + \left[ \frac{1 - \mu(t)}{2} \right] \mathbb{1} \\ &= \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Como um bônus, também temos as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} K_0^\dagger(t) K_1(t) + K_1^\dagger(t) K_0(t) = 0, & (3.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_0(t) K_1^\dagger(t) + K_1(t) K_0^\dagger(t) = 0. & (3.20) \end{cases}$$

Quando essas relações são válidas, podemos determinar com facilidade o operador unitário no espaço purificado. Investigaremos, então outra purificação dada em termos dos operadores de Kraus, conforme discutimos no início da seção. Vamos propor outra purificação para o ruído de fase, fazendo:

$$|\psi_D(t)\rangle = K_0(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle + K_1(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes |-\rangle,$$

onde em termos dos autoestados do operador  $\sigma_z$ , definimos  $|+\rangle \equiv (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  e  $|-\rangle \equiv (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ . Assim, notemos que o operador  $\sigma_z$  “flipa” esses estados, de forma que,  $\sigma_z |+\rangle = |-\rangle$  e também  $\sigma_z |-\rangle = |+\rangle$ . Assim, iremos propor que:

$$|\psi_D(t)\rangle = K_0(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle + K_1(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes \sigma_z |+\rangle.$$

Portanto, se iniciarmos no estado  $|\psi_D(0)\rangle = |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle$ , temos  $|\psi_D(t)\rangle = U_D(t) |\psi_S(0)\rangle$ , com:

$$U_D(t) = K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes \sigma_z.$$

No apêndice B.7, mostramos que essa é uma purificação possível, já que ela satisfaz o vínculo  $\text{Tr}_A\{\rho_D(t)\} = \rho_{IS}(t)$ . Usando as equações (3.19) e (3.20), mostramos que essa evolução é, de fato, unitária, já que  $U_D(t) U_D^\dagger(t) = U_D^\dagger(t) U_D(t) = \mathbb{1}$ . Dessa forma, explicitamente obtemos:

$$U_D(t) = \sqrt{\frac{1 + \mu(t)}{2}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - i \sqrt{\frac{1 - \mu(t)}{2}} \sigma_z \otimes \sigma_z. \tag{3.21}$$

Agora, assim como fizemos na seção anterior, encontramos o Hamiltoniano  $H_D(t)$  que satisfaz a equação de Schrödinger:

$$H_D(t) = i\hbar \frac{dU_D(t)}{dt} U_D^\dagger(t),$$



multiplicando os operadores  $dU_D(t)/dt$  e o operador  $U_D^\dagger(t)$ . Dessa foram, ainda no apêndice B.7, obtemos:

$$H_D(t) = -\hbar \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \sigma_z \otimes \sigma_z. \quad (3.22)$$

Esse Hamiltoniano tem a mesma dependência temporal que o Hamiltoniano da seção 3.1.1, porém a dinâmica efetiva ocorre em outra componente da base desse Hamiltoniano. Naquele contexto, na equação (3.5), tínhamos definido:

$$\omega_B(t) = \frac{-\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}},$$

e na equação (3.7) e no apêndice B.4, mostramos que essa função não possui nenhuma divergência próxima de  $t = 0$ , pois para tempos curtos:

$$\omega_B(t) \approx \frac{\sqrt{2} \mathcal{A}_T}{2} (1 - \mathcal{A}_T t^2),$$

com  $\mathcal{A}_T = 2\eta\omega_c^2 + 4\eta\omega_T^2\psi^{(1)}[(\omega_c + \omega_T)/\omega_c]$ , onde  $\psi^{(1)}$  é a função trigamma, dada pela segunda derivada do logaritmo da função  $\Gamma(z)$  fatorial, isto é,  $\psi^{(1)}(z) = d^2/dz^2 \ln[\Gamma(z)]$ . (29) Na figura 14 fizemos o gráfico dessa função para algumas temperaturas tomando o limite de forma cuidadosa. Utilizando essa definição de  $\omega_B(t)$  discutida acima e apresentada na seção anterior, na equação (3.5), temos uma purificação descrita pelo seguinte Hamiltoniano diagonal na representação de interação:

$$H_D(t) = \hbar \omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_z. \quad (3.23)$$

### 3.2.2 Purificação para $n$ qubits descoerentes e não interagentes

Para fazer a generalização para o caso de  $n$  qubits descoerentes e não interagentes, da seção 2.2, basta que novamente utilizemos a mesma lógica da equação (3.14) da subseção (3.1.2). Assim, agora que sabemos fazer a purificação de um qubit, realizamos  $n$  purificações independentes e ordenamos os espaços de Hilbert, de forma que, cada qubit é purificado pelo próximo qubit desse espaço de Hilbert. Naquele contexto, definimos a notação:

$$\sigma_{l,m}^{(j)} \equiv \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma_l \otimes \sigma_m}_{j\text{-ésimo par}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=n}.$$

No  $j$ -ésimo par de operadores, temos  $\sigma_l \otimes \sigma_m$ , enquanto os outros termos recebem operadores identidade. Dessa forma:

$$\sigma_{3,3}^{(j)} = \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=1} \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma_z \otimes \sigma_z}_{j\text{-ésimo par}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes \mathbb{1}_{2 \times 2}}_{j=n}.$$

Portanto, utilizando essa notação:

$$U_D(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n -i \theta_j(t) \sigma_{3,3}^{(j)} \right]. \quad (3.24)$$

### 3.3 Conectando as purificações

Iremos apresentar duas conexões entre as duas purificações que apresentamos nesse capítulo. Na primeira conexão, iremos obter a dinâmica efetiva da purificação da seção 3.1.1, através de uma purificação análoga à da seção 3.2, obtida a partir dos operadores de Kraus para essa dinâmica. Na segunda conexão que estabeleceremos, iremos mostrar como converter uma purificação na outra, através de uma transformação unitária no qubit auxiliar, aproveitando da propriedade cíclica do traço parcial.

#### 3.3.1 Conectando as purificações - Pelos operadores de Kraus

Na representação de interação, na seção 3.1.1, tínhamos a seguinte dinâmica efetiva para o caso da purificação de um qubit descoerente:

$$H_{pI}(t) = -\hbar \omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_y. \quad (3.25)$$

Por outro lado, na seção 3.2.1, encontramos outra possível dinâmica efetiva para o problema, dada pela equação (3.23), que reescreveremos aqui:

$$H_D(t) = \hbar \omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_z.$$

Além disso, vale ressaltar que, em ambas purificações, tínhamos o mesmo estado inicial para a função de onda total, dada por:

$$|\psi_p(0)\rangle = |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle.$$

O Hamiltoniano  $H_D(t)$  foi determinado tendo em vista que o operador  $\sigma_z$  leva o estado  $|+\rangle$  para no estado  $|-\rangle$ . Porém, notemos que o operador  $\sigma_y$  também flipa esse estado, pois  $\sigma_y |0\rangle = i |1\rangle$ , e também  $\sigma_y |1\rangle = -i |0\rangle$ , de forma que:

$$\begin{cases} \sigma_y |+\rangle = -i |-\rangle, \\ \langle + | \sigma_y = i \langle -|. \end{cases}$$

Agora, podemos entender essa purificação, como:

$$U_{pI}(t) = K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes (-\sigma_y), \quad (3.26)$$

pois atuando esse operador na função de onda inicial, temos:

$$\begin{aligned} |\psi_p(t)\rangle &= U_p(t) |\psi_D(0)\rangle \\ &= [K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes (-\sigma_y)] [|\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle] \\ &= K_0(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle + K_1(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes (-\sigma_y |+\rangle). \end{aligned}$$

Dessa forma, a menos de uma fase, o operador  $\sigma_y$  irá mapear o estado  $|+\rangle$  no estado  $|-\rangle$ , no segundo membro da soma. De forma análoga à outra purificação com os operadores de Kraus, no apêndice B.8, mostramos que:

$$\begin{aligned} \rho_p(t) &= K_0(t)\rho_S(0)K_0^\dagger(t) \otimes |+\rangle\langle +| - iK_0(t)\rho_S(0)K_1^\dagger(t) \otimes |+\rangle\langle -| \\ &\quad + iK_1(t)\rho_S(0)K_0^\dagger(t) \otimes |-\rangle\langle +| + K_1(t)\rho_S(0)K_1^\dagger(t) \otimes |-\rangle\langle -|. \end{aligned}$$

Novamente, fica fácil tomar o traço parcial utilizando a base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A\{\rho_D(t)\} &= K_0(t)|\psi_S(0)\rangle\langle\psi_S(0)|K_0^\dagger(t) + K_1(t)|\psi_S(0)\rangle\langle\psi_S(0)|K_1^\dagger(t) \\ &= \rho_{IS}(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que essa é uma purificação válida. No apêndice B.8 também mostramos que essa dinâmica do operador unitário (3.26) corresponde a dinâmica do Hamiltoniano da equação (3.25) e conectamos o formalismo geral com a purificação específica que encontramos no capítulo anterior.

### 3.3.2 Conectando as purificações - Por uma transformação unitária

Existem diversas purificações possíveis para uma certa dinâmica, na verdade, infinitas. Uma maneira direta de notar este fato é a partir das transformações unitárias, aliadas à propriedade cíclica do traço parcial. (2)

Como de costume nesse texto, consideremos inicialmente o caso de um qubit interagindo com um qubit auxiliar. Dada uma possível purificação, descrita por uma certa matriz densidade total  $\rho_p(t)$  pura, temos uma evolução temporal efetiva descrita por um operador unitário  $U_p(t)$ , de forma que,  $\rho_p(t) = U_p(t)\rho_p(0)U_p^\dagger(t)$ . O vínculo imposto pela purificação é a exigência de que:

$$\text{Tr}_A\{\rho_p(t)\} = \rho_S(t),$$

onde  $\rho_S(t)$  é a matriz que foi purificada. Seja então,  $U(t)$  um outro operador unitário, que atua apenas no qubit auxiliar, e que pode depender do tempo. De forma precisa, essa operação é dada por  $\mathbb{1} \otimes U(t)$ , mas iremos omitir a identidade. Notemos que pela propriedade cíclica do traço parcial, que é tomado no qubit auxiliar, segue que:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \text{Tr}_A\{\rho_p(t)\} \\ &= \text{Tr}_A\{U^\dagger(t)U(t)\rho_p(t)\} \\ &= \text{Tr}_A\{U(t)\rho_p(t)U^\dagger(t)\} \\ &= \text{Tr}_A\{U(t)U_p(t)\rho_p(0)U_p^\dagger(t)U^\dagger(t)\} \\ &= \text{Tr}_A\{\tilde{U}_p(t)\rho_p(0)\tilde{U}_p^\dagger(t)\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, dada a purificação descrita pelo operador  $U_p(t)$ , obtemos outra purificação válida  $\tilde{U}_p(t)$  para essa matriz densidade  $\rho_S(t)$ . Nessa dedução que apresentamos, partimos do mesmo estado inicial para a matriz densidade total, porém partir de outro estado inicial também não é um problema, tendo em vista que neste caso, podemos repetir o processo e por uma transformação unitária adequamos o estado inicial. Contudo, em ambas purificações que fizemos, utilizamos o mesmo estado inicial para a matriz densidade pura, por conveniências vistas de formas e contextos diferentes. Tomamos  $\rho_p(0) = \rho_S(0) \otimes |+\rangle \langle +|$  e na seção 3.1.1 encontramos uma dinâmica efetiva dada por:

$$U_{pI}(t) = \exp \left[ i \theta(t) \sigma_z \otimes \sigma_y \right],$$

enquanto na seção 3.2.1, encontramos uma dinâmica efetiva dada por:

$$U_D(t) = \exp \left[ -i \theta(t) \sigma_z \otimes \sigma_z \right].$$

Vamos mostrar como conectar essas purificações por meio de uma transformação unitária no qubit auxiliar. Iremos checar que o unitário que realiza essa transformação

$$U U_{pI}(t) U^\dagger = U_D(t),$$

é dado por:

$$U = \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{4} \right) \mathbb{1} \otimes \sigma_x \right], \quad (3.27)$$

o que também está de acordo com a referência (32), onde tais transformações são estudadas. Notemos inicialmente que, realizando a exponenciação:

$$\exp \left[ i \left( \frac{\pi}{4} \right) \mathbb{1} \otimes \sigma_x \right] = \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \mathbb{1} \otimes \sigma_x.$$

Assim, notemos inicialmente que:

$$\begin{aligned} U \sigma_y U^\dagger &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 (\mathbb{1} + i \sigma_x) \sigma_y (\mathbb{1} - i \sigma_x) \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) (\sigma_y + i \sigma_x \sigma_y) (\mathbb{1} - i \sigma_x) \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) (\sigma_y + i \sigma_x \sigma_y - i \sigma_y \sigma_x + \sigma_x \sigma_y \sigma_x) \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) [\sigma_y + i (i \sigma_z) - i (-i \sigma_z) + (i \sigma_z) \sigma_x] \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) [\sigma_y - \sigma_z - \sigma_z - \sigma_y] \\ &= -\sigma_z. \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
U U_{p_I}(t) U^\dagger &= U \exp [i \theta(t) \sigma_z \otimes \sigma_y] U^\dagger \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [i \theta(t)]^k \sigma_z^k \otimes U \sigma_y^k U^\dagger \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [i \theta(t)]^k \sigma_z^k \otimes U (\sigma_y \sigma_y \dots \sigma_y) U^\dagger \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [i \theta(t)]^k \sigma_z^k \otimes U [\sigma_y (U^\dagger U) \sigma_y (U^\dagger U) \dots (U^\dagger U) \sigma_y] U^\dagger \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [i \theta(t)]^k \sigma_z^k \otimes [U \sigma_y U^\dagger]^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [i \theta(t)]^k \sigma_z^k \otimes [-\sigma_z]^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [-i \theta(t)]^k \sigma_z^k \otimes \sigma_z^k \\
&= \exp [-i \theta(t) \sigma_z \otimes \sigma_z].
\end{aligned}$$

Portanto, o operador da equação (3.27) faz essa conexão entre as purificações para 1 qubit que encontramos nesse capítulo. Para estender esse resultado para  $n$  qubits não interagentes, podemos tratar cada dinâmica de forma independente, e basta tomar uma operação como da equação (3.27) para cada qubit auxiliar. Neste caso, teremos:

$$\exp \left[ \sum_{j=1}^n -i \theta_j(t) \sigma_{3,3}^{(j)} \right] = U_j(t) \exp \left[ \sum_{j=1}^n i \theta_j(t) \sigma_{3,2}^{(j)} \right] U_j^\dagger(t),$$

com

$$U_j(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n i \left( \frac{\pi}{4} \right) \sigma_{0,1}^{(j)} \right],$$

pois  $U_j$  atua apenas no  $j$ -ésimo par qubit e qubit auxiliar e para cada qubit usamos o resultado chegado acima.

Dessa forma, neste capítulo discutimos diferentes purificações que geram diferentes dinâmicas efetivas e conectamos essas purificações de duas maneiras distintas. Porém, essa dinâmica efetiva foi estudada apenas no contexto em que nenhuma operação foi aplicada para proteger o sistema do ruído. Assim, no próximo capítulo, consideraremos Hamiltonianos mais gerais para o sistema e investigaremos como adaptar a teoria da dinâmica efetiva para estudar uma teoria efetiva para o controle quântico, que agora inclua a possibilidade de aplicarmos termos no Hamiltoniano com o objetivo de eliminar os efeitos do ruído. No entanto, neste trabalho este estudo será realizado apenas no caso de um qubit.



## 4 CONTROLE QUÂNTICO EFETIVO DE UM QUBIT

Nesse capítulo, mostramos como podemos adequar a teoria da dinâmica efetiva do capítulo 3 para incorporar uma descrição efetiva de uma dinâmica que agora inclua termos de controle no Hamiltoniano. Esses termos são aplicações apenas nos qubits físicos e representam operações quânticas para eliminar o ruído. Neste trabalho, não determinaremos essas aplicações em si, apenas investigaremos uma maneira de incorporar esses termos de controle na dinâmica efetiva que estamos desenvolvendo. Entretanto, essa adaptação será feita apenas para o caso de um qubit descoerente e também no contexto de duas aproximações que explicaremos no decorrer do capítulo.

Na seção 4.1, começamos descrevendo a dinâmica original do sistema com o banho. Nessa evolução original do qubit com o banho, consideramos Hamiltonianos mais gerais para o sistema, para agora incluir termos de controle:

$$H_S(t) = \alpha_x(t) \sigma_x + \alpha_y(t) \sigma_y + \alpha_z(t) \sigma_z + \hbar \omega_o \sigma_z,$$

e novamente consideramos uma interação de defasagem pura entre o qubit e o banho térmico. Utilizamos o formalismo das equações mestras na aproximação de Born, onde consideramos interações de até no máximo segunda ordem na equação mestra, estando, em princípio, no regime de acoplamento fraco. (27) Além disso, utilizamos outra aproximação, que considera que o operador de evolução temporal para parte do sistema varia lentamente em relação à dinâmica ruidosa. Nessas aproximações, mostramos que a dinâmica do ruído de fase com os termos de controle é regida pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right) [H_S(t), \rho_S(t)] + \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z].$$

De forma mais precisa, definimos  $U_S(t)$  como o operador unitário que resolve a equação:

$$i\hbar \frac{dU_S(t)}{dt} = H_S(t) U_S(t),$$

e consideramos a aproximação em que o operador de evolução temporal para a parte do sistema varia lentamente em relação à dinâmica ruidosa, de forma que, dentro das integrais temporais, faremos:

$$U_S(t') \approx U_S(t).$$

Um fato interessante, que foi estudado na subseção 4.1.2, é que quando não incluímos os termos de controle, a dinâmica da equação mestra em segunda ordem recupera a dinâmica exata estudada no capítulo 2, apesar da aproximação de Born. De fato, para essa correspondência, a aproximação de Born é a única aproximação relevante, pois nesse caso  $H_S$  é constante no tempo e possui apenas componente na direção do operador com

$\sigma_z$ . Assim, de forma análoga ao que foi estudado na seção 2.1, devido à comutação de  $U_S(t)$  com  $H_{SB}$ , temos que  $S(t) = U_S(t) \sigma_z U_S^\dagger(t) = \sigma_z$ . Ao fazer essa mudança, podemos ver que a aproximação de Born é única aproximação relevante para este caso.

Por outro lado, para a dinâmica efetiva, a partir da purificação do capítulo anterior, na seção 4.2 encontramos um novo Hamiltoniano efetivo, que incorpora os termos de controle. Este Hamiltoniano é tal que sua equação mestra exata, ao tomarmos o traço no qubit auxiliar, é equivalente à equação mestra em segunda ordem da dinâmica original com os campos externos. Por equação mestra exata, queremos dizer que, na dinâmica efetiva, estamos considerando todas as ordens de interação na equação mestra. Mostramos que na aproximação em que  $U_S(t') \approx U_S(t)$ , esse Hamiltoniano efetivo é, simplesmente, dado por:

$$H_p(t) = H_S(t) \otimes \mathbb{1} + H_D(t),$$

onde  $H_S(t)$  é o Hamiltoniano de controle e  $H_D(t)$  é o Hamiltoniano diagonal da purificação da seção 3.2.1 e dado pela equação (3.23). Consideramos a dinâmica reduzida da equação mestra com todas as ordens de interação, dada por:

$$\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} = -\omega_B(t) \int_0^t dt' \omega_B(t') [S(t), [S(t'), \rho_{IPS}(t')]],$$

e na aproximação em que a evolução temporal do sistema é lenta, também mostramos que:

$$\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} = -2\omega_B(t) \int_0^t dt' \omega_B(t') [\rho_{IPS}(t') - S(t) \rho_{IPS}(t') S(t)].$$

Assim de forma iterativa, consideramos todas as ordens de interação, e traçando parcialmente no espaço de Hilbert auxiliar, definimos  $\rho_{IPS}(t)$ , e na representação de interação, mostramos que:

$$\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} = \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} \right] [\rho_{IPS}(t) - S(t) \rho_{IPS}(t) S(t)],$$

e voltando da representação de interação

$$\frac{d\rho_{PSt}}{dt} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right) [H_S(t), \rho_{PSt}(t)] + \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} [\rho_{PSt}(t) - \sigma_z \rho_{PSt}(t) \sigma_z].$$

Portanto, mostramos que essa é uma possível dinâmica efetiva para o problema, pois matriz densidade efetiva reduzida obedece a mesma equação diferencial que a matriz densidade reduzida para o sistema na dinâmica original, em termos do Hamiltoniano de controle e da função de descoerência  $\mu(t)$ . Portanto, mostramos que em todo tempo:

$$\rho_{PS}(t) = \rho_S(t).$$



#### 4.1 A evolução do sistema

Consideremos um Hamiltoniano análogo ao da equação (2.1)

$$H(t) = H_S(t) \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_S \otimes H_B + H_{SB},$$

onde agora redefinimos a parte do Hamiltoniano  $H_S(t)$ , para incluir termos de controle que eliminarão o ruído:

$$H_S(t) = \alpha_x(t) \sigma_x + \alpha_y(t) \sigma_y + \alpha_z(t) \sigma_z + \hbar \omega_o \sigma_z.$$

Novamente, tomando o modelo de spin e bósons, consideramos o ruído de fase, assim como na seção 2.1, fazemos:

$$H_B = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$$

e na parte da interação, também continuamos com:

$$H_{SB} = \hbar \sigma_z \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left( g_{\lambda}^* a_{\lambda} + g_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} \right).$$

Omitindo os operadores identidade e os produtos tensoriais, o Hamiltoniano total  $H(t)$ , explicitamente fica:

$$H(t) = \alpha_x(t) \sigma_x + \alpha_y(t) \sigma_y + \alpha_z(t) \sigma_z + \hbar \omega_o \sigma_z + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar \omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} + \hbar \sigma_z \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left( g_{\lambda}^* a_{\lambda} + g_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} \right). \quad (4.1)$$

Definiremos também  $B = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{\lambda}^* a_{\lambda}$ , para escrever

$$H(t) = H_S(t) + H_B + \hbar \sigma_z (B + B^{\dagger}).$$

No apêndice C.1, mostramos como adaptar o apêndice A.1 para o caso do Hamiltoniano da equação (4.1), onde agora temos os termos de controle. A partir da matriz densidade total  $\rho(t)$ , na representação de interação, definimos:

$$\rho_I(t) = U_S^{\dagger}(t) U_B^{\dagger}(t) \rho(t) U_B(t) U_S(t),$$

onde na parte da representação de interação para o Hamiltoniano  $H_B$ , continuamos com  $U_B(t) = \exp [(-i/\hbar) H_B t]$ , enquanto para a parte do sistema, definimos  $U_S(t)$  como o operador unitário que resolve a equação:

$$i\hbar \frac{dU_S(t)}{dt} = H_S(t) U_S(t). \quad (4.2)$$

No caso sem os termos de controle da seção 2.1, o Hamiltoniano  $H_S$  para o sistema era independente do tempo e a equação (4.2) podia ser resolvida de forma trivial. Aqui, não resolveremos explicitamente essa equação, apenas teremos em vista que cada porta lógica

quântica pode ser protegida com certos coeficientes de controle  $\alpha_x(t)$ ,  $\alpha_y(t)$  e  $\alpha_z(t)$ . Dessa maneira, no apêndice C.1, mostramos que, na representação de interação:

$$i\hbar \frac{d\rho_I(t)}{dt} = -[\rho_I(t), H_I(t)], \quad (4.3)$$

com

$$H_I(t) = \hbar S(t) [B(t) + B^\dagger(t)],$$

onde também definimos  $B(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda^* a_\lambda \exp(-i\omega_\lambda t)$  e

$$S(t) = U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t). \quad (4.4)$$

No caso sem incluir os termos de controle, tínhamos  $[\sigma_z, U_S(t)] = 0$ , que implica em  $S(t) = \sigma_z$ . Aqui, esta comutação não é válida e na representação de interação precisamos considerar o operador  $S(t)$ , como definido na equação (4.4).

No apêndice C.2, partimos da equação (4.3) e assim como na referência (27) e (33), de forma iterativa, integramos a equação (4.3) e isolamos  $\rho_I(t)$ . Daí, substituímos essa expressão para a matriz densidade no próprio comutador da equação (4.3). Dessa forma, tomando o traço parcial no banho, mostramos que na aproximação de Born, isto é, em segunda ordem na interação, temos a seguinte equação mestra:

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_B \left\{ \left[ H_I(t), \int_0^t dt' [H_I(t'), \rho_{IS}(t) \otimes \rho_B(0)] \right] \right\}, \quad (4.5)$$

onde definimos  $\rho_{IS}(t) \equiv \text{Tr}_B \{ \rho_I(t) \}$ . No apêndice C.3, calculamos o comutador que aparece na equação mestra (4.5), e obtemos:

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = -\int_0^t dt' P_S(t, t') [f_B(t, t') + g_B^*(t, t')] - \int_0^t dt' P_S^\dagger(t, t') [f_B^*(t, t') + g_B(t, t')], \quad (4.6)$$

onde definimos  $P_S(t, t') \equiv S(t) S^\dagger(t') \rho_{IS}(t) - S^\dagger(t') \rho_{IS}(t) S(t)$ , e também:

$$\begin{cases} f_B(t, t') \equiv \text{Tr}_B \{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \}, \\ g_B(t, t') \equiv \text{Tr}_B \{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \}. \end{cases}$$

#### 4.1.1 Aproximação dos tempos de correlação

Consideremos uma situação em que a dinâmica do controle é muito mais lenta do que a dinâmica do reservatório. Assim, consideraremos que dentro do intervalo de tempo em que a integral tem alguma correlação com tempos  $t' < t$ , o controle não mude apreciavelmente e, então, dentro do integrando, fazemos:

$$U_S(t') \approx U_S(t). \quad (4.7)$$

Dessa forma, no apêndice C.4, mostramos que na aproximação da equação (4.7):

$$P_S(t, t') \approx U_S^\dagger(t) [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z] U_S(t),$$

e também:

$$P_S^\dagger(t, t') \approx U_S^\dagger(t) \left[ \rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z \right] U_S(t).$$

Voltando da representação de interação, no apêndice C.4 mostramos com todos os passos que, na aproximação (4.7), a equação (4.6), fica:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \left[ H_S(t), \rho_S(t) \right] - \left[ \rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z \right] \Omega(t), \quad (4.8)$$

onde definimos  $\Omega(t) \equiv \int_0^t dt' \left[ f_B(t, t') + f_B^*(t, t') + g_B(t, t') + g_B^*(t, t') \right]$ , e no apêndice C.5, calculamos a função  $\Omega(t)$  a partir das definições e obtemos:

$$\Omega(t) = -\frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)}.$$

Portanto, a equação mestra em segunda ordem, dentro da aproximação (4.7), fica:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \left[ H_S(t), \rho_S(t) \right] + \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} \left[ \rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z \right]. \quad (4.9)$$

#### 4.1.2 Caso sem controle

Se fizermos  $\alpha_x(t) = \alpha_y(t) = \alpha_z(t) = 0$ , teremos:  $H_S(t) = \hbar\omega_o\sigma_z$ . Dessa forma, notemos que pela equação mestra (4.9), temos a seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{00}(t) & \dot{\rho}_{01}(t) \\ \dot{\rho}_{10}(t) & \dot{\rho}_{11}(t) \end{pmatrix} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \hbar\omega_o \begin{pmatrix} 0 & 2\rho_{01}(t) \\ -2\rho_{10}(t) & 0 \end{pmatrix} + \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} \begin{pmatrix} 0 & 2\rho_{01}(t) \\ 2\rho_{10}(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde usamos que:

$$\sigma_z \rho_S(t) - \rho_S(t) \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 2\rho_{01}(t) \\ -2\rho_{10}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 2\rho_{01}(t) \\ 2\rho_{10}(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, nos termos diagonais, as populações são conservadas, já que  $\dot{\rho}_{00}(t) = \dot{\rho}_{11}(t) = 0$ . Segue então que, em todo tempo:

$$\begin{cases} \rho_{00}(t) = |c_0|^2, \\ \rho_{11}(t) = |c_1|^2. \end{cases}$$

Por outro lado, nos termos de coerência, temos:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{01}(t) = \left[ -2i\omega_o + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \right] \rho_{01}(t), \\ \dot{\rho}_{10}(t) = \left[ 2i\omega_o + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \right] \rho_{10}(t). \end{cases}$$

As equações ficam desacopladas e fica fácil resolver essa equação mestra analiticamente. Por exemplo, para o termo  $\rho_{01}(t)$ , integrando temos:

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0) \exp \left[ \int_0^t -2i\omega_o dt' + \int_0^t \frac{\dot{\mu}(t')}{\mu(t')} dt' \right].$$

Dessa forma, segue que:

$$\begin{cases} \rho_{01}(t) = c_0 c_1^* \exp(-2i\omega_o t) \mu(t), \\ \rho_{10}(t) = c_1 c_0^* \exp(2i\omega_o t) \mu(t). \end{cases}$$

Juntando tudo, obtemos a matriz:

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \exp(-2i\omega_o t) \mu(t) \\ c_1 c_0^* \exp(2i\omega_o t) \mu(t) & |c_1|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Essa é a mesma matriz densidade da equação (2.14), que obtemos no caso exato do capítulo anterior. Portanto, a dinâmica regida pela equação mestra em segunda ordem recupera a dinâmica exata do problema, no caso sem os termos de controle.

## 4.2 Dinâmica efetiva para um qubit incluindo o controle no espaço purificado

Nessa seção iremos adequar a dinâmica efetiva que construímos no capítulo 3. Já apresentamos diversas purificações para essa matriz densidade da equação (4.11), e aqui vamos considerar a purificação com o Hamiltoniano diagonal. O estado inicial total da dinâmica efetiva livre era:

$$|\psi_p(0)\rangle = |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle,$$

com  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ , e pela equação (3.23), mostramos que uma purificação sem incluir os termos de controle, pode ser dada pelo Hamiltoniano:

$$H_D(t) = \hbar \omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_z,$$

onde pela equação (3.5):

$$\omega_B(t) = \frac{-\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}}.$$

Agora, adaptaremos o formalismo para incluir os termos de controle no Hamiltoniano purificado, no limite em que o controle não varia rapidamente. Deixamos os cálculos no apêndice C.6, onde mostramos que, para recuperar a equação mestra da equação (4.9), basta fazer:

$$H_p(t) = H_S(t) \otimes \mathbb{1} + H_D(t),$$

onde  $H_S(t)$  é o Hamiltoniano de controle:

$$H_S(t) = \alpha_x(t) \sigma_x + \alpha_y(t) \sigma_y + \alpha_z(t) \sigma_z + \hbar \omega_o \sigma_z,$$

e considerar todas as ordens de interação na equação mestra efetiva.

Apresentaremos um breve resumo dessa demonstração. No apêndice C.6, começamos passando para a representação de interação, definindo:

$$\rho_{I_p}(t) = U_S^\dagger(t) |\psi_p(t)\rangle \langle \psi_p(t)| U_S(t),$$

e, nessa representação, obtemos:

$$\frac{d\rho_{I_p}(t)}{dt} = -i \omega_B(t) \left\{ [S(t) \otimes \sigma_z] \rho_{I_p}(t) - \rho_{I_p}(t) [S(t) \otimes \sigma_z] \right\}.$$

Definimos, também:

$$\rho_{I_{PS}}(t) \equiv \text{Tr}_A \left\{ \rho_{I_p}(t) \right\}.$$

Agora, nosso objetivo é provar que, de fato  $\rho_{I_{PS}}(t) = \rho_{IS}(t)$ , dentro da aproximação  $U_S(t') \approx U_S(t)$ . No apêndice C.6, mostramos que:

$$\frac{d\rho_{I_{PS}}(t)}{dt} = -2 \omega_B(t) \int_0^t dt' \omega_B(t') \left[ \rho_{I_{PS}}(t') - S(t) \rho_{I_{PS}}(t') S(t) \right].$$

Assim, definimos:

$$\mathcal{D}_{S(t)}(A) \equiv A - S(t) A S(t),$$

para escrever:

$$\frac{d\rho_{I_{PS}}(t)}{dt} = -2 \omega_B(t) \int_0^t dt' \omega_B(t') \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{I_{PS}}(t')), \quad (4.12)$$

e integrando a equação (4.12) de 0 até um tempo  $t_1$ :

$$\rho_{I_{PS}}(t_1) = \rho_{I_{PS}}(0) - 2 \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \int_0^{t_2} dt_3 \omega_B(t_3) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{I_{PS}}(t_3)). \quad (4.13)$$

De forma iterativa, no apêndice C.6, substituímos a equação (4.13), na equação (4.12) e mostramos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{I_{PS}}(t)}{dt} &= -\omega_B(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right]^{2k+1} \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{I_{PS}}(0)) \\ &= -\omega_B(t) \sin \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right] \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{I_{PS}}(0)) \\ &= -\omega_B(t) \sqrt{1 - \mu^2(t)} \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{I_{PS}}(0)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por outro lado, novamente de forma iterativa, no apêndice C.6, substituímos a equação (4.13) dentro de sua própria integral. Ao atuar com o operador  $\mathcal{D}_{S(t)}$  em  $\rho_{I_{PS}}(t)$ ,

também mostramos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right]^{2k} \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&= \cos \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right] \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&= \mu(t) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Portanto, pelas equações (4.14) e (4.15), segue que na aproximação da equação (4.7), em que os termos de controle variam de forma lenta em comparação com a dinâmica ruidosa, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} &= -\omega_B(t) \sqrt{1-\mu^2(t)} \left[ \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \right] \\
&= -\omega_B(t) \sqrt{1-\mu^2(t)} \left[ \frac{\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t))}{\mu(t)} \right] \\
&= - \left[ \frac{-\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \sqrt{1-\mu^2(t)} \left[ \frac{\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t))}{\mu(t)} \right] \\
&= \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} \right] \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t)) \\
&= \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} \right] \left[ \rho_{IPS}(t) - S(t) \rho_{IPS}(t) S(t) \right].
\end{aligned}$$

Voltando da representação de interação, fazemos  $\rho_{IPS}(t) = U_S^\dagger(t) \rho_S^{(e)}(t) U_S(t)$ , e assim como no apêndice, C.4, obtemos:

$$\frac{d\rho_S^{(e)}(t)}{dt} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right) [H_S(t), \rho_S^{(e)}(t)] + \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} [\rho_S^{(e)}(t) - \sigma_z \rho_S^{(e)}(t) \sigma_z].$$

Portanto, mostramos que essa é uma possível dinâmica efetiva para o problema, pois matriz densidade efetiva reduzida  $\rho_S^{(e)}(t)$ , obedece a mesma equação diferencial que a matriz densidade reduzida para o sistema na dinâmica original, dada em termos do Hamiltoniano de controle e da função de descoerência  $\mu(t)$  e sua derivada. Portanto, comparando com a equação mestra original da equação (4.9), mostramos que em todo tempo:

$$\rho_S^e(t) = \rho_S(t).$$

Como já discutimos, neste trabalho não resolveremos o problema de encontrar um Hamiltoniano de controle para a dinâmica efetiva, mas a adaptação aqui desenvolvida é de extrema relevância em contextos de nosso interesse envolvendo controle quântico. Com isso, estudaremos agora algumas possíveis geometrizações para as dinâmicas efetivas livres, que apenas emulam os efeitos do ruído, ainda sem incluir os termos de controle que investigamos nesse capítulo.

## 5 COMPLEXIDADE QUÂNTICA DE $n$ QUBITS DESCOERENTES NO ESPAÇO PURIFICADO

Neste capítulo, utilizaremos a dinâmica efetiva desenvolvida nos capítulos anteriores para estudar o problema do ruído de fase de um ponto de vista geométrico. Na dinâmica original do problema, os espaços de Hilbert associados aos banhos térmicos possuíam dimensão infinita. No entanto, através da purificação quântica, obtemos uma dinâmica efetiva em um espaço de Hilbert de dimensão finita, o que facilita o tratamento geométrico do problema. Nessa dinâmica efetiva, as operações que evoluem a função de onda são elementos do grupo de Lie especial unitário  $SU(2^N)$ , com  $N = 2n$  e  $n$  é o número de qubits físicos envolvidos.

Os grupos de Lie são variedades diferenciáveis suaves equipadas com uma operação de grupo e mapa de inversão também suaves. (14,34) As variedades, por sua vez, fornecem as estruturas matemáticas necessárias para o estudo de geometrias em espaços curvos. (15) Dessa forma, a variedade de nosso interesse é o grupo de Lie  $SU(2^N)$ , onde exploramos duas geometrizações distintas.

Primeiramente, consideramos a métrica Riemanniana da referência (11), que penaliza as interações entre 3 ou mais qubits no Hamiltoniano. Em métricas desse tipo, é formulada a geometrização usual da complexidade quântica. (11,17,19) Essa métrica pertence a uma classe de métricas mais geral, conhecidas como as métricas de Finsler Pauli-simétricas, para as quais as geodésicas para o operador efetivo são as chamadas geodésicas de Pauli. (17) As métricas de Finsler são uma generalização das métricas Riemannianas. Enquanto as métricas Riemannianas dependem apenas da posição na variedade, as métricas de Finsler também podem depender da velocidade da curva em cada ponto. (35)

Em seguida, estudamos uma geometrização que faz com que a trajetória que o ruído executa coincida com a curva geodésica em todo o tempo. Para isso, consideramos uma geometria que depende do tempo, o que não é usual, porém esse tipo de geometria encontra diversas aplicações. Consideramos uma função custo dada por uma Lagrangiana que depende explicitamente do tempo. (36) A ação é definida como a integral dessa Lagrangiana ao longo da trajetória. Utilizando o formalismo das equações de Euler e Lagrange, encontramos uma Lagrangiana, tal que, a trajetória que minimiza a ação é, em todo tempo, a trajetória que o operador unitário que realiza a dinâmica efetiva do ruído executa.

Em ambas geometrias, estamos minimizando uma certa ação induzida por uma Lagrangiana, com a diferença de que em uma delas essa Lagrangiana depende explicitamente do tempo. Na seção 5.1, nosso objetivo é estabelecer as coordenadas que serão utilizadas

nessas Lagrangianas, fixando um sistema de coordenadas, com sua origem na identidade do grupo. Assim, começamos apresentando uma breve introdução ao grupo de Lie especial unitário  $SU(2^N)$  e a sua álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2^N)$ . Na subseção 5.1.2, introduzimos a base das matrizes de Pauli generalizadas para essa álgebra de Lie. Em seguida, na subseção 5.1.3, discutimos duas maneiras de descrever uma curva nesse grupo, e assim como nas referências (17,19), introduzimos as coordenadas de Pauli e fixamos um sistema de coordenadas na identidade do grupo.

Na seção 5.2, utilizamos essas coordenadas e apresentamos duas geometrizações possíveis para o problema. Primeiro, conforme discutimos, na subseção 5.2.1 apresentamos o formalismo usual da geometrização da complexidade quântica, onde o problema de encontrar o menor número de portas lógicas para realizar uma computação quântica é substituído pelo problema de calcular a distância entre o operador identidade do grupo e o operador unitário no tempo final da computação, como mostrado na formulação geométrica para complexidade quântica. Dessa forma, no contexto da complexidade quântica, estamos interessados em estudar como o número de passos computacionais depende no número  $n$  de qubits de entrada, e neste caso os passos computacionais são codificados em termos de um comprimento. (11)

Em seguida, na seção 5.2.2, encontramos uma geometria natural para o problema do ruído de fase, no sentido de que nessa geometria, a trajetória que o operador de evolução efetivo executa é, em todo tempo, a curva geodésica. É como se estivéssemos projetando um determinado relevo, por exemplo, para que o fluxo de água siga uma trajetória específica.

## 5.1 O grupo de Lie especial unitário $SU(2^N)$

No apêndice D.1, apresentamos algumas definições precisas da teoria das variedades, dos grupos e álgebras de Lie. (16) Os grupos de Lie são grupos (37) no sentido algébrico (38) que também possuem uma estrutura topológica de variedade suave (39), com operação de grupo e mapa de inversão suaves. (14, 16, 34) As variedades são espaços onde podemos estudar geometrias não euclidianas em qualquer número de dimensões, ao dotarmos a variedade de uma estrutura adicional, a métrica, que provê e descreve a curvatura do espaço. (15, 35) Nesses espaços, cada região pode ser mapeada em uma região do  $\mathbb{R}^d$ , para um certo  $d \in \mathbb{N}$ , ao estabelecermos uma carta ou um sistema de coordenadas local para os pontos dessa região. (40) Assim, uma vez que estabelecemos um sistema de coordenadas para uma região da variedade, cada ponto dessa região é descrito por  $d$  números reais ordenados.

Nesse contexto, uma curva é uma função suave que mapeia um parâmetro real em elementos da variedade. Na descrição das curvas, introduzimos um dos principais conceitos dentro da teoria das variedades: os vetores tangente. Deixamos sua definição precisa no apêndice D.1, no entanto, nosso objetivo no texto principal é focar em sua ideia



intuitiva. Dessa forma, iremos pensar e nos referir a esses vetores tangentes como os vetores velocidade de uma curva em um ponto. Se  $M$  é uma variedade suave, o conjunto de todos os vetores tangentes em um ponto  $p \in M$  forma o espaço vetorial tangente nesse ponto, denotado por  $T_pM$ . O fibrado tangente  $TM$  é a união disjunta dos espaços tangentes de todos os pontos da variedade  $M$ , e portanto ele contém todos os vetores tangentes de todos os espaços tangentes. Essas definições podem ser encontradas de forma formal no apêndice D.1. (39)

Uma ideia intuitiva é de que, se estivéssemos nessa variedade, enxergaríamos essas  $d$  direções e seria possível definir diferentes sistemas de coordenadas locais para cada ponto e uma certa vizinhança dele. Dessa forma, um cartógrafo que vive nessa variedade mapearia certas regiões do espaço em cartas multidimensionais e construiria um atlas, onde todas as regiões são mapeadas por alguma carta, que está em alguma página do atlas desse cartógrafo. Dessa forma, podemos descrever a trajetória e a velocidade de um objeto na variedade por meio desses mapas e cartas.

De fato, esse exemplo é clássico e muitas definições matemáticas formais têm nomes inspirados nos problemas de cartografia, onde esses problemas surgem de forma natural. Inclusive, a própria palavra ‘geometria’ tem origem no grego, sendo composta pela junção da palavra *geo*, que se traduz para ‘terra’, e a palavra *metron*, cuja tradução é ‘medir’, de forma que podemos compreender a origem dessa palavra como tendo o significado de ‘a medição da terra’. Porém, essa seção ainda não envolve a geometria em si, que será estudada na seção 5.2. Essa sutileza de que a métrica é uma estrutura adicional à estrutura das variedades é absolutamente análoga ao caso da álgebra linear, onde podemos considerar um espaço vetorial sem a necessidade de definirmos um produto interno. Dessa forma, o produto interno é uma estrutura adicional ao espaço vetorial que introduz os conceitos geométricos de comprimentos e ângulos.

O principal objetivo dessa seção é introduzir a variedade de interesse nesse trabalho: o grupo de Lie especial unitário  $SU(2^N)$ , bem como definir dois tipos de cartas para ele. Uma vez que estabelecermos as coordenadas que iremos utilizar para descrever curvas e vetores velocidade nesse espaço, consideraremos diferentes métricas para este grupo de Lie.

### 5.1.1 O grupo de Lie especial unitário $SU(2^N)$ e sua álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2^N)$

No contexto deste trabalho, os elementos desse grupo de Lie representam as operações quânticas unitárias em  $N$  qubits. Dessa forma, ao fixarmos uma base para o espaço de Hilbert de  $N$  qubits, cuja dimensão é  $2^N$ , as operações quânticas são um subgrupo das matrizes inversíveis de dimensão  $2^N \times 2^N$  que atuam em um vetor desse espaço vetorial e produzem outro vetor desse mesmo espaço. Dessa maneira, introduziremos o grupo de Lie  $SU(2^N)$  no contexto dos grupos de matrizes.

O grupo de Lie especial unitário  $SU(2^N)$  é uma variedade suave formada pelo

conjunto das matrizes  $2^N \times 2^N$  com entradas complexas, cujo determinante é especialmente igual a 1 e  $U \in \text{SU}(2^N)$  é uma matriz unitária, de forma que,  $U^\dagger = U^{-1}$ . A operação desse grupo é o produto de matrizes. (16)

Sua álgebra de Lie, denotada por  $\mathfrak{su}(2^N)$ , é o espaço vetorial tangente na identidade  $T_{\mathbb{1}}\text{SU}(2^N)$ , onde  $\mathbb{1} \in \text{SU}(2^N)$  é a identidade do grupo. Esta álgebra de Lie é formada pelo conjunto das matrizes  $2^N \times 2^N$  com entradas complexas, cujo traço é igual a 0 e  $A \in \mathfrak{su}(2^N)$  é uma matriz anti-hermitiana, de forma que,  $A^\dagger = -A$ . O colchete de Lie dessa álgebra é o comutador de matrizes. (16) Em física, é tradicional considerar  $A = -iH$ , onde  $H$  é um operador hermitiano, de forma que,  $H^\dagger = H$ . (17) Nós manteremos essa tradição.

O mapa exponencial leva elementos da álgebra de Lie em elementos do grupo de Lie, e nesse contexto de grupos de matriz, é dado por:

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{su}(2^N) &\rightarrow \text{SU}(2^N) \\ -iH &\mapsto \exp(-iH) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iH)^k}{k!}, \end{aligned}$$

onde  $H^0 \equiv \mathbb{1}$ . Este mapa é sobrejetivo, de forma que, qualquer elemento  $U \in \text{SU}(2^N)$  pode ser escrito em termos de certo elemento  $-iH \in \mathfrak{su}(2^N)$ , como:

$$U = \exp(-iH).$$

Porém, ele não é injetivo, já que um elemento do grupo é atingido pela exponencial de vários elementos da álgebra. Entretanto, se restringirmos seu domínio a uma sub-álgebra, podemos construir uma bijeção. Seguiremos de perto a referência (17) e definiremos as chamadas coordenadas  $U$ -adaptadas e as coordenadas de Pauli para o grupo Lie  $\text{SU}(2^N)$ . Primeiro, estabeleceremos uma base para essa álgebra de Lie e utilizaremos as coordenadas dentro da função exponencial para descrever pontos e curvas no grupo.

### 5.1.2 A base das matrizes de Pauli generalizadas para a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2^N)$

Definiremos as matrizes de Pauli generalizadas e estabeleceremos a notação. (41) Começamos fixando índices numéricos para as matrizes de Pauli e para a matriz identidade  $2 \times 2$ , de forma que:

$$\begin{cases} \sigma_0 \equiv \mathbb{1}, \\ \sigma_1 \equiv \sigma_x, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_2 \equiv \sigma_y, \\ \sigma_3 \equiv \sigma_z. \end{cases}$$

Agora, definimos as matrizes de Pauli generalizadas  $\sigma_k$ , como:

$$\sigma_k \equiv \sigma_{m_1} \otimes \sigma_{m_2} \otimes \cdots \otimes \sigma_{m_N},$$

onde  $m_j = 0, 1, 2$  ou  $3$  para cada  $j = 1, \dots, N$ . Para contar em um só índice, fixaremos a notação utilizando uma base quaternária, de forma que, estabelecemos uma conexão entre

a lista de números  $(m_1, m_2, \dots, m_N)$  e o novo índice  $k$ , por meio da relação:

$$\begin{aligned} k &= 4^0 m_1 + 4^1 m_2 + \dots + 4^{N-1} m_N \\ &= \sum_{j=1}^N m_j 4^{j-1}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Usualmente, utilizamos a base decimal e utilizamos as potências de 10 no lugar das de 4, e neste caso, deixamos os coeficientes  $m_j$  irem de 0 a 9. Esta base quaternária também é análoga à base binária, onde expressamos um número com potências de 2, e deixamos os coeficientes  $m_j$  irem de 0 a 1. Por outro lado, notemos também que, se fizermos  $N = 1$  na equação (5.1), recuperamos a notação das matrizes de Pauli de um qubit, dessa forma, estamos utilizando o mesmo símbolo “ $\sigma_k$ ” para as matrizes generalizadas para qualquer número  $N$ .

Agora que estabelecemos a notação, usamos o fato de que o conjunto das matrizes de Pauli generalizadas:

$$\left\{ -i\sigma_k, \text{ com } k = 1, 2, \dots, 4^N - 1 \right\},$$

forma uma base para a álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2^N)$ . (17, 41) Notemos que não incluímos o elemento  $\sigma_0 = \mathbb{1}$  na base, já que os operadores dessa álgebra possuem o traço nulo. Do ponto de vista físico, sabemos que a mecânica quântica é invariante por uma fase global, de forma que, o termo com a identidade não precisa ser considerado. Assim, qualquer elemento  $-iH \in \mathfrak{su}(2^N)$  da álgebra de Lie, pode ser escrito como:

$$-iH = -i q \cdot \sigma,$$

onde  $q \in \mathbb{R}^{4^N-1}$  e compactamos a notação, definindo:

$$q \cdot \sigma \equiv \sum_{k=1}^{4^N-1} q^k \sigma_k.$$

### 5.1.3 Fixando um sistema de coordenadas

Nessa subseção, iremos mostrar duas maneiras de descrever os vetores tangentes no grupo de Lie  $SU(2^N)$ . Para determinar completamente um vetor tangente, precisamos especificar o ponto da variedade em que o espaço tangente que contém esse vetor é definido, bem como as componentes desse vetor em uma determinada base desse espaço tangente. Em outras palavras, para identificar um vetor  $v \in TM$ , precisamos determinar o ponto  $p \in M$ , tal que,  $v \in T_p M$ , e também as coordenadas desse vetor em uma base para o espaço tangente  $T_p M$ , definido no ponto  $p$ . Dessa forma, em nosso contexto do grupo de Lie especial unitário, dada uma curva

$$\begin{aligned} U &: \mathbb{R} \rightarrow SU(2^N) \\ &\lambda \mapsto U(\lambda), \end{aligned}$$

em cada ponto  $U(\lambda)$ , desejamos descrever o vetor velocidade  $v_{U(\lambda)}$  associado a essa curva nesse ponto, conforme definido no apêndice D.1. A figura 16 ilustra a ideia.

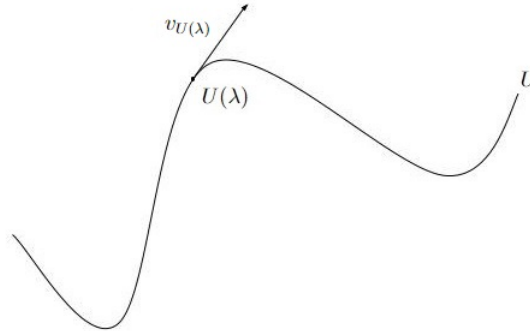


Figura 16 – A velocidade  $v_{U(\lambda)}$  da curva  $U$  no ponto  $U(\lambda)$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na teoria das variedades, uma carta  $x$ , pode ser entendida como um mapa que funciona como um sistema de coordenadas local para os pontos de seu domínio, como foi introduzido intuitivamente no início dessa seção. (40) Uma carta  $x$  cujo domínio  $\mathcal{U} \subset \text{SU}(2^N)$  contenha um certo ponto  $U \in \text{SU}(2^N)$ , induz a base:

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_U, \text{ com } k = 1, 2, \dots, 4^N - 1 \right\},$$

para o espaço tangente no ponto  $U = x^{-1}(q)$ . Aqui, introduzimos a notação:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)_{x^{-1}(q)} \equiv \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial q^k}(q),$$

onde  $f : \text{SU}(2^N) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave arbitrária e  $q \in x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^{4^N-1}$ . (35, 39) Essa é uma notação padrão no contexto das variedades, porém ela pode causar confusões desnecessárias, portanto, iremos evitá-la nesse texto, sem perdermos de vista as sutilezas matemáticas da teoria. É só uma questão de notação. No apêndice D.2, definimos com detalhes as coordenadas  $U$ -adaptadas e as coordenadas de Pauli, (17, 19) e introduzimos uma notação alternativa, e mais compacta, para a base induzida por essas duas coordenadas específicas.

Em suma, as coordenadas  $U$ -adaptadas são um tipo de sistema de coordenadas local, em que a origem do sistema de coordenadas é definida no ponto  $U$ . (17) Quando mudamos de ponto, adaptamos as coordenadas para possuírem a origem no novo ponto. Dessa forma, denotaremos por  $S'$  o referencial no qual tomamos coordenadas  $U(\lambda)$ -adaptadas para cada ponto  $U(\lambda)$  de uma curva  $U$ . Assim, o referencial  $S'$  tem sua origem no ponto  $U(\lambda)$  para todo ponto da curva, e portanto, diremos se tratar de um referencial que se move com a

curva. Nos espaços tangentes de cada ponto  $U(\lambda)$ , denotaremos a base induzida por esse tipo de sistema de coordenada como a base dos “vetores com linha”:

$$\{\vec{e}'_{k,U(\lambda)}, \text{ com } k = 1, 2, \dots, 4^N - 1\}.$$

Por outro lado, as coordenadas de Pauli, são um tipo de sistema de coordenada que possui sua origem na identidade do grupo. Podemos entender essas coordenadas como sendo coordenadas  $\mathbb{1}$ -adaptadas. Se um ponto  $U$  estiver no domínio dessa carta, essas coordenadas induzem uma base para o espaço tangente no ponto  $U$ . Portanto, se todo ponto  $U(\lambda)$  de uma curva  $U$  estiver no domínio desse sistema de coordenadas, podemos estabelecer um referencial, denotado por  $S$ , no qual tomamos coordenadas de Pauli para todo ponto  $U(\lambda)$  da curva. Esse referencial tem sua origem fixa na identidade  $\mathbb{1} \in \text{SU}(2^N)$  do grupo, portanto, diremos se tratar de um referencial fixo. Nos espaços tangentes, para cada ponto  $U(\lambda)$ , temos a base dos “vetores sem linha”:

$$\{\vec{e}_{k,U(\lambda)}, \text{ com } k = 1, 2, \dots, 4^N - 1\}.$$

Assim, nessa notação para essas bases para os tangentes, estabelecida em detalhes no apêndice D.2, o primeiro índice denotado por  $k$  distingue os elementos da base e o segundo índice, denotado por  $U$ , indica que essa é uma base para o espaço tangente no ponto  $U$ . Dessa forma, identificamos essa nova notação em termos do símbolo mais usual para as derivadas de funções na variedade. Na figura 17, ilustramos a ideia desses referenciais de forma intuitiva, mas essa imagem não deve ser interpretada de forma literal, já que essa curva terá um contorno diferente dependendo da carta, ela apenas ilustra as ideias de um referencial fixo e outro que se move, que discutimos acima.

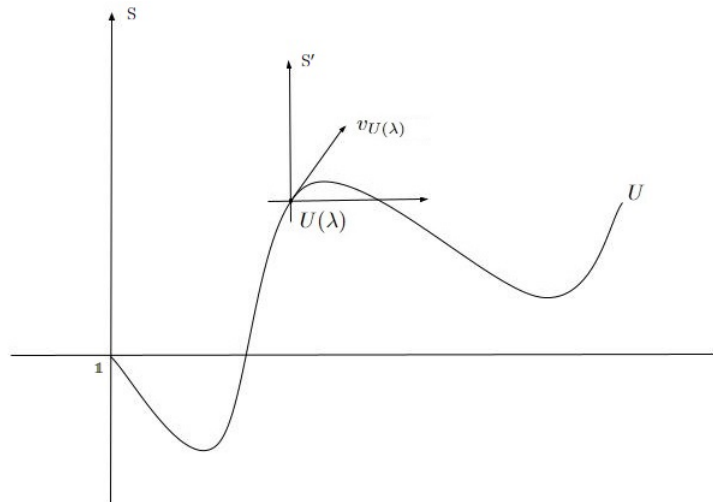


Figura 17 – Ilustrando os referenciais  $S$  e  $S'$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, em termos desses dois referenciais, teremos duas descrições para as curvas nessa variedade. A representação Hamiltoniana e a representação de Pauli. Aqui, estamos apenas dando uma roupagem formal, do ponto de vista das variedades, para algo que é natural na física e que discutimos algumas vezes durante este texto. Podemos descrever curvas em termos de um Hamiltoniano, que obedece à equação de Schrödinger. Também podemos descrever essa mesma curva, ao resolver a equação de Schrödinger e obter o operador de evolução temporal.

### 5.1.3.1 Representação Hamiltoniana

Seja  $U(\lambda)$  uma curva no grupo de Lie  $SU(2^N)$ . No referencial  $S'$ , temos a representação Hamiltoniana dos vetores tangentes dessa curva. Para estabelecer essa relação, notemos que em primeira ordem em  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} U(\lambda + \varepsilon) &= U(\lambda) + \varepsilon \frac{dU(\lambda)}{d\lambda} \\ &= \left[ \mathbb{1} + \varepsilon \frac{dU(\lambda)}{d\lambda} U^\dagger(\lambda) \right] U(\lambda) \\ &= \exp \left[ -i\varepsilon \left( i \frac{dU(\lambda)}{d\lambda} U^\dagger(\lambda) \right) \right] U(\lambda). \end{aligned}$$

Portanto, podemos descrever uma curva, como:

$$U(\lambda + \varepsilon) = \exp[-i\varepsilon H(\lambda)] U(\lambda),$$

onde  $H(\lambda)$  é um operador que satisfaz a equação de Schrödinger em todo tempo:

$$H(\lambda) = i \frac{dU(\lambda)}{d\lambda} U^\dagger(\lambda).$$

No apêndice D.2, mostramos que, no referencial  $S'$ , a velocidade em cada ponto  $U(\lambda)$  dessa curva, é dada por:

$$v_{U(\lambda)} = \sum_{k=1}^{4^N-1} h^k(\lambda) \vec{e}'_{k,U(\lambda)},$$

onde  $h^k(\lambda)$  são as componentes do Hamiltoniano  $H(\lambda)$ , na base das matrizes de Pauli generalizadas:

$$H(\lambda) = h(\lambda) \cdot \sigma.$$

Essa é a representação Hamiltoniana desse vetor velocidade. A posição da curva é dada na origem do sistema de coordenadas local e as coordenadas para o vetor tangente são dadas pelas componentes do Hamiltoniano, na base das matrizes de Pauli generalizadas.

### 5.1.3.2 Representação de Pauli

Na representação de Pauli, descreveremos uma curva como:

$$U(\lambda) = \exp[-i q(\lambda) \cdot \sigma].$$

Em primeira ordem em  $\varepsilon$ , temos:

$$\begin{aligned} U(\lambda + \varepsilon) &= \exp[-i q(\lambda + \varepsilon) \cdot \sigma] \\ &= \exp \left\{ -i \left[ q(\lambda) + \varepsilon \dot{q}(\lambda) \right] \cdot \sigma \right\}. \end{aligned}$$

No apêndice D.3, mostramos que, no referencial S, a velocidade em cada ponto  $U(\lambda)$  dessa curva, é dada por:

$$v_{U(\lambda)} = \sum_{k=1}^{4^N-1} \dot{q}^k(\lambda) \vec{e}_{k,U(\lambda)}.$$

Essa é a representação de Pauli desse vetor velocidade. A posição da curva é descrita pelas coordenadas  $q(\lambda)$ , enquanto a velocidade é descrita por  $\dot{q}(\lambda)$ , e também é conveniente definir

$$p(\lambda) \equiv \dot{q}(\lambda).$$

Como o referencial S é fixo,  $q(\lambda)$  e  $\dot{q}(\lambda)$  são os parâmetros que desejamos utilizar nas equações de Euler e Lagrange. Discutiremos então as mudanças de base entre esses sistemas coordenadas.

### 5.1.3.3 Mudança de referencial

A mudança da representação Hamiltoniana para a representação de Pauli pode ser realizada, em geral, pela série de Dyson, e fizemos uma possível demonstração no apêndice D.3. Assim, dado que conhecemos  $H(\lambda)$ , teremos:

$$U(\lambda) = T \exp \left( -i \int_0^\lambda H(\lambda') d\lambda' \right),$$

onde  $T$  é o operador de ordenamento temporal.

Por outro lado, no final do apêndice D.3, mostramos que a mudança da representação de Pauli, para a representação Hamiltoniana é feita por meio da fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff. (16) Definimos:

$$\begin{cases} Q(\lambda) \equiv q(\lambda) \cdot \sigma \\ P(\lambda) \equiv p(\lambda) \cdot \sigma \\ H(\lambda) \equiv h(\lambda) \cdot \sigma, \end{cases}$$

e assim como em (17, 19) mostramos que se um vetor velocidade tem coordenadas de Pauli  $(q(\lambda), p(\lambda))$ , então em primeira ordem em  $\varepsilon$ :

$$\exp\left[-i\left(Q(\lambda) + \varepsilon P(\lambda)\right)\right] = \exp[-i\varepsilon H(\lambda)] \exp[-iQ(\lambda)],$$

com

$$H(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(k+1)!} \text{ad}_{Q(\lambda)}^k P(\lambda), \quad (5.2)$$

onde inserimos a notação para os comutadores  $\text{ad}_{Q(\lambda)} P(\lambda) \equiv [Q(\lambda), P(\lambda)]$ . Aqui, a atuação de  $\text{ad}_{Q(\lambda)}$  no operador  $P(\lambda)$  produz o comutador entre  $Q(\lambda)$  e  $P(\lambda)$ . Ao considerarmos essa atuação um número  $k$  de vezes, teremos:

$$\text{ad}_{Q(\lambda)}^k P(\lambda) \equiv [Q(\lambda), \dots [Q(\lambda), [Q(\lambda), P(\lambda)]] \dots].$$

Dessa forma, apresentamos o ferramental necessário para os estudos geométricos de nosso interesse neste trabalho, e estamos prontos para considerar métricas nessa variedade.

## 5.2 Geometria no grupo de Lie $SU(2^N)$

Este trabalho explorará diferentes tipos de métricas para estudar os contextos de nosso interesse, que serão introduzido mais adiante neste texto. Consideraremos desde métricas Riemannianas (11, 15, 17, 19), bem como métricas de Finsler (17, 35, 42) e até mesmo métricas de Lagrange (36) que podem introduzir geometrizações que dependem explicitamente do tempo. Em certos tipos de métricas Riemannianas e de Finsler, exploramos as geodésicas de Pauli na subseção 5.2.1, como introduzido em (17) por Nielsen.

As métricas Riemannianas introduzem um produto interno nos espaços vetoriais tangentes da variedade, que varia de forma suave de um ponto para outro. (15) Essas são as métricas mais clássicas com as quais geralmente lidamos em geometria, e portanto construiremos uma intuição das outras métricas a partir dela.

As métricas de Finsler são uma importante generalização das métricas Riemannianas, e discutiremos melhor suas conexões no decorrer desta seção. No apêndice D.4, apresentamos uma definição precisa para as variedades de Finsler. Em resumo, uma variedade de Finsler, é uma variedade dotada de uma métrica que introduz uma norma em cada espaço tangente da variedade, e essa norma varia de forma suave quando mudamos de espaço tangente. (17, 35, 42) Se a velocidade da curva  $U$  no ponto  $U(\lambda)$  é o vetor  $v_{U(\lambda)}$ , a norma  $\|v_{U(\lambda)}\|_{F,U(\lambda)} \in \mathbb{R}$  desse vetor induzida pela função de Finsler  $F$  no ponto  $U(\lambda)$ , será:

$$\|v_{U(\lambda)}\|_{F,U(\lambda)} \equiv F(U(\lambda), v_{U(\lambda)}).$$



O comprimento  $l_F(U)$  de uma curva  $U : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{SU}(2^N)$ , induzido por uma estrutura de Finsler  $F$ , é:

$$\begin{aligned} l_F(U) &\equiv \int_I F(U(\lambda), v_{U(\lambda)}) d\lambda \\ &= \int_I \|v_{U(\lambda)}\|_{F,U(\lambda)} d\lambda. \end{aligned}$$

Dessa forma, a distância  $d(U_1, U_2)$  entre dois pontos  $U_1, U_2 \in \text{SU}(2^N)$  é definida como o menor comprimento  $l_F(\gamma)$  dentre todas as curvas  $\gamma$  que conectam os dois pontos.

Em termos das coordenadas  $(q, p)$  para a posição e velocidade, essa função de Finsler, aqui entendida como uma função custo, obedece a seguinte expressão:

$$F^2(q, p) = \sum_{j,k} g_{jk}(q, p) p^j p^k,$$

onde agora, assim como em (17, 35, 42), definimos

$$g_{jk}(q, p) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\partial F^2(q, p)}{\partial p^j \partial p^k}.$$

Portanto, enquanto nas métricas Riemannianas  $g_{jk}$  depende apenas da posição na variedade, nas métricas de Finsler,  $g_{jk}$  também pode depender da velocidade da curva.

No apêndice D.4, definimos duas classes de métricas de Finsler para o grupo de Lie  $\text{SU}(2^N)$ , as métricas de Finsler invariantes pela direita e as métricas Pauli-simétricas. (17) No contexto dos grupos de Lie, estamos particularmente interessados em métricas ditas invariantes pela direita. Nessas métricas, podemos definir uma norma nos espaços tangentes de todo o grupo, ao estabelecermos uma norma no espaço tangente na identidade do grupo. (11, 15, 17) No apêndice D.4 introduzimos primeiramente as métricas de Finsler invariantes pela direita e pela definição mostramos que nessas métricas:

$$\left\| \sum_{k=1}^{4^N-1} a^k \vec{e}'_{k,\mathbb{1}} \right\|_{F,\mathbb{1}} = \left\| \sum_{k=1}^{4^N-1} a^k \vec{e}'_{k,U} \right\|_{F,U}, \quad (5.3)$$

para todo ponto  $U \in \text{SU}(2^N)$ . Em palavras, se um vetor tangente na identidade tem certas coordenadas  $a$  na base induzida pelas coordenadas de Pauli e um outro vetor tangente em um ponto  $U$  tem as mesmas coordenadas  $a$  em uma base  $U$ -adaptada, então a norma desses vetores é a mesma. Ainda no apêndice D.4, por fim definimos as métricas de Finsler Pauli-simétricas. Essas são métricas invariantes pela direita, com a propriedade adicional de que  $F$  depende apenas do módulo dos coeficientes  $h^k$  das coordenadas  $U$ -adaptadas e não de seu sinal. (17)

### 5.2.1 Geodésicas de Pauli

Neste trabalho, estaremos especialmente interessados em métricas como das referências (17–19), onde em termos das coordenadas  $U$ -adaptadas, localmente são dadas

por:

$$\left\| \sum_{k=1}^{4^N-1} h^k \vec{e}'_{k,U} \right\|_{F,U} = \left[ \sum_{k=1}^{4^N-1} |h^k|^2 w_k \right]^{1/2}, \quad (5.4)$$

onde  $w_k \in \mathbb{R}$  coloca pesos ou penalidades dependendo da quantidade de termos diferentes da identidade estão presentes no produto tensorial da matriz de Pauli generalizada  $\sigma_k$ . Dessa forma, assim como na teoria de complexidade quântica, tomaremos, uma métrica que coloca pesos nas operações de 3 ou mais qubits no Hamiltoniano.

Notemos que a métrica da equação (5.4) é invariante pela direita, pois sua dependência nas coordenadas  $h^k$ , induzidas pelas cartas  $U$ -adaptadas, é a mesma em qualquer ponto  $U \in \text{SU}(2^N)$ . (17) Além disso, vemos explicitamente que essa métrica é Pauli-simétrica, pois ela depende apenas dos módulos dos coeficientes  $h^k$ . (17)

Novamente, vale ressaltar que para o cálculo da geodésica é conveniente fixar o sistema de coordenadas. Dessa forma, notemos que a conversão entre a forma funcional dessa  $F$  para as coordenadas de Pauli não é, em geral, trivial. Essa mudança de base é regida pela equação (5.2), de forma que, as coordenadas  $h(\lambda)$  dependem tanto de  $q(\lambda)$  quanto de  $p(\lambda)$ . (18) Porém, se em todo ponto dessa curva nós garantirmos que  $[Q(\lambda), P(\lambda)] = 0$ , então  $h(\lambda) = p(\lambda)$ , e o problema é radicalmente simplificado. No caso da dinâmica efetiva livre, isto é, sem incluir os termos de controle, notemos pela equação (3.14), que os operadores dentro da exponencial do operador  $U_p(t)$  comutam em tempos diferentes. Iremos explorar esse fato e resolveremos as equações de Euler e Lagrange para a classe das métricas de Finsler Pauli-simétricas, como por exemplo, a métrica usual da complexidade quântica da equação (5.4). Para isso, apresentaremos o chamado subgrupo estabilizador e utilizaremos uma isometria dessas métricas para obter as equações das geodésicas. Essas são as chamadas geodésicas de Pauli. (17)

Conforme apresentado no apêndice D.4, no contexto do grupo de Lie  $\text{SU}(2^N)$ , uma isometria de uma métrica é uma função suave que leva elementos do grupo de Lie em outros elementos do mesmo grupo, porém, após aplicar essa função, o comprimento de todas as curvas permanece o mesmo. No apêndice D.5, consideramos as métricas de Finsler Pauli-simétricas e estudamos uma isometria para esse tipo de métrica. Nesse apêndice, estudamos uma função conhecida como a ação adjunta do grupo de Pauli:

$$\begin{aligned} \varphi_k : \text{SU}(2^N) &\rightarrow \text{SU}(2^N) \\ V &\mapsto \varphi_k(V) \equiv \sigma_k V \sigma_k^\dagger. \end{aligned}$$

Aqui, as matrizes de Pauli são multiplicadas por fatores escalares, reais ou imaginários, para obtermos uma estrutura de grupo, além da inclusão da matriz identidade  $\sigma_0$ . Para revisão deste grupo e desta notação, o leitor interessado pode estudar o capítulo 10 do livro do Nielsen e Chuang. (2) No apêndice D.5 mostramos as condições discutidas na referência (17) para demonstrar que este mapa é uma isometria para as métricas de Finsler

Pauli-simétricas. Dessa forma, a aplicação dessa função mantém o comprimento de todas as curvas inalterado.

Agora, estamos interessados em estudar um subgrupo  $S$  de todo o grupo de Pauli, tal que, ao considerarmos a atuação adjunta desses elementos de  $S$ , o ponto final não é alterado. O grupo  $S$  é o grupo estabilizador desse ponto. (2, 17) O ponto inicial é a identidade, que também não será alterado. Além disso, também sabemos que a atuação adjunta é uma isometria. Sendo assim, como os pontos iniciais e finais não se alteram e essa função não muda os comprimentos, então a geodésica não é alterada por essa atuação. Os elementos de  $S$  são os elementos do grupo de Pauli independentes, que comutam e que formam um subgrupo das matrizes de Pauli.

Supondo que o ponto final de uma curva  $U$ , é dado por:

$$U(1) = \exp(-iH_f),$$

e que podemos escrever  $H_f$  em termos dos elementos de  $S$ , ou seja,

$$H_f = \sum_j h_f^j \sigma_j,$$

com  $\sigma_j \in S$ , então podemos construir um subgrupo  $S$  que estabiliza o operador no ponto final, por comutar com ele. Por meio dessa isometria, no apêndice D.5 mostramos que, se  $U_g(\lambda)$  é uma curva geodésica e  $\sigma_k \notin S$ , então:

$$x^k(U_g(\lambda)) = 0.$$

Dessa forma, essa isometria dada pela atuação adjunta do grupo estabilizador não muda a geodésica, porém suas simetrias possibilitam estudar e determinar as geodésicas em si.

Notemos então que, qualquer curva candidata a curva geodésica deve possuir coordenadas de Pauli  $q^k(\lambda)$  não nulas apenas nas direções onde  $\sigma_k \in S$ . Nessas curvas, vale que:

$$[q(\lambda) \cdot \sigma, p(\lambda) \cdot \sigma] = 0,$$

de forma que:

$$\exp[-i(q(\lambda) + \epsilon p(\lambda)) \cdot \sigma] = \exp[-i\epsilon p(\lambda) \cdot \sigma] \exp[-iq(\lambda) \cdot \sigma].$$

Ou seja, nessas curvas,

$$h(\lambda) = p(\lambda).$$

Assim, as mudanças de coordenadas são triviais e temos as mesmas coordenadas para os dois referenciais, com e sem linha, discutidos na seção 5.1, e teremos:

$$\sum_{k=1}^{4^N-1} p^k(\lambda) \vec{e}_{k,U(\lambda)} = \sum_{k=1}^{4^N-1} p^k(\lambda) \vec{e}'_{k,U(\lambda)}.$$

Dessa maneira, pela equação (5.3), temos pela invariância pela direita que, se dois vetores em pontos diferentes possuem as mesmas componentes em coordenadas  $U$ -adaptadas, então a norma desses vetores é a mesma. Mas como os termos na exponencial comutam, as exponenciais se separam, de forma que as mudanças de sistemas de coordenadas são triviais. Em outras palavras, podemos tirar a linha dos vetores da equação (5.3), e obtemos:

$$\left\| \sum_{k=1}^{4^N-1} p^k(\lambda) \vec{e}_{k,\mathbb{1}} \right\|_{F,\mathbb{1}} = \left\| \sum_{k=1}^{4^N-1} p^k(\lambda) \vec{e}_{k,U(\lambda)} \right\|_{F,U(\lambda)}. \quad (5.5)$$

Dessa forma, definimos a métrica na representação Hamiltoniana e obtemos uma maneira de calcular a norma dos vetores na representação de Pauli, no referencial  $S$ . Assim, pela equação (5.5):

$$F(0, p) = F(q, p).$$

Portanto:

$$\frac{\partial F^2(q, p)}{\partial q^k} = 0. \quad (5.6)$$

### 5.2.1.1 Equações de Euler e Lagrange

A função  $F$  escrita em coordenadas, mapeia um conjunto aberto no  $\mathbb{R}^{2 \dim(M)}$  em um conjunto aberto em  $\mathbb{R}$ , sendo assim, podemos fazer uso das ferramentas do cálculo variacional para encontrar as geodésicas.

Para as métricas de Finsler Pauli-simétricas, se o Hamiltoniano final  $H_f$  puder ser escrito em termo das matrizes no conjunto  $S$  a geodésica será, (17) simplesmente:

$$U_g(\lambda) = \exp(-iH_f\lambda).$$

Essas são as chamadas geodésicas de Pauli. Consideremos portanto as equações de Euler e Lagrange na  $k$ -ésima direção,

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\partial F^2(q(\lambda), p(\lambda))}{\partial p^k} \right] + \frac{\partial F^2(q(\lambda), p(\lambda))}{\partial q^k} = 0,$$

com  $\sigma_k \in S$ . Aqui, assim como em (17) estamos substituindo a minimização de  $F$  pela de  $F^2$ , tendo em vista que essas soluções são equivalentes para cálculos de comprimento.

Notemos então que da equação (5.6), segue que:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\partial F^2}{\partial p^k} (q(\lambda), p(\lambda)) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{4^N-1} \frac{dq^j(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial F^2(q(\lambda), p(\lambda))}{\partial q^j \partial p^k} + \frac{dp^j(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial F^2(q(\lambda), p(\lambda))}{\partial p^j \partial p^k} \\
&= \sum_{j=1}^{4^N-1} \frac{dp^j(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial F^2(q(\lambda), p(\lambda))}{\partial p^j \partial p^k} \\
&= \sum_{j=1}^{4^N-1} \frac{dp^j(\lambda)}{d\lambda} g_{jk}(q(\lambda), p(\lambda)).
\end{aligned}$$

Usando a matriz inversa da matriz Hessiana  $g_{jk}(q(\lambda), p(\lambda))$ , segue que:

$$\frac{dp^k(\lambda)}{d\lambda} = 0,$$

de forma que:

$$\begin{cases} p^k(\lambda) = c^k, \\ q^k(\lambda) = c^k \lambda, \end{cases}$$

para certas constantes  $c^k \in \mathbb{R}$ . Segue então das condições de contorno que a geodésica é a curva:

$$U_g(\lambda) = \exp(-iH_f\lambda).$$

Portanto, podemos fazer a aplicação desse formalismo para o problema da evolução temporal ruidosa no espaço purificado. Na equação (3.24), tínhamos:

$$U_D(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n -i \theta_j(t) \sigma_{3,3}^{(j)} \right].$$

Em um tempo final  $t_f$ , teremos o ponto final de nossa curva:

$$U_D(t_f) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n -i \theta_j(t_f) \sigma_{3,3}^{(j)} \right].$$

Temos então que, para as métricas de Finsler Pauli-simétrica, a geodésica que liga a identidade ao operador de evolução temporal  $U_D(t_f)$  é uma geodésica de Pauli, dada por:

$$U_g(\lambda) = \exp \left[ -i \lambda \sum_{j=1}^n \theta_j(t_f) \sigma_{3,3}^{(j)} \right],$$

onde  $\lambda$  vai de 0 até 1. Tomando o limite de  $t_f$  indo à infinito, temos  $\theta_j(t_f) = \pi/4$ . Para a métrica usual da complexidade quântica, da equação (5.4), que penaliza interações de 3

ou mais corpos, teremos uma ação dada por:

$$\begin{aligned} l(U) &= \int_0^1 d\lambda \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left( \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{n}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Assim, calculamos a distância, em termos do número  $n$  de qubits de entrada, entre a identidade e o operador que emula os efeitos do ruído de fase, na métrica usual da complexidade quântica. Neste caso, vemos que o comprimento depende da raiz quadrada de  $n$ . Além disso, é direto notar que essa dependência é a mesma para as duas purificações discutidas neste trabalho. Dessa forma, com a dinâmica efetiva, podemos fazer aplicações geométricas de forma natural.

### 5.2.2 Uma Lagrangiana que descreve a dinâmica do ruído de fase

Nessa subseção, estamos interessados no problema de encontrar uma geometria na qual a curva geodésica coincida com a curva realizada pelo operador de evolução da dinâmica purificada. Encontraremos um funcional, dado por uma Lagrangiana que depende explicitamente do tempo, e que ao ter sua ação minimizada, produz como geodésica a trajetória que a dinâmica efetiva do ruído executa. Esse tipo de funcional induz uma geometria que varia com o tempo, o que é não usual do ponto de vista geométrico, porém, por outro lado, estes funcionais são comuns na física, quando lidamos com Lagrangianas e as minimizações de suas ações. (36) A formulação de Lagrangianas explicitamente dependentes do tempo pode ser entendida como uma função custo que recebe como parâmetros um vetor tangente, de coordenadas  $q$  e  $\dot{q}$ , mas que também pode depender de um parâmetro real, que aqui interpretamos como o tempo  $t$ . Assim, essas Lagrangianas são, em geral, funções de  $q$ ,  $\dot{q}$  e  $t$ , que levam esses parâmetros em um número real. (36, 43)

Na referência (36), é fornecido o tratamento formal para introduzir uma geometrização para tratar desses casos, em que a função custo a ser considerada depende explicitamente do tempo. (44) Aqui, não abordaremos essas formulações teóricas a fundo, apenas utilizaremos o formalismo usual das equações de Euler e Lagrange para determinar as geodésicas para esta geometria. Portanto, do ponto de vista deste trabalho, estamos apenas minimizando uma Lagrangiana para, de certa forma, obter as equações de movimento dessa dinâmica. Porém discutiremos brevemente a geometria induzida por essa função custo.

Começaremos investigando o caso de um qubit, como de costume, e depois generalizaremos para os  $n$  qubits não intereagentes. No apêndice D.6, iniciamos nossa investigação propondo uma métrica de Finsler que depende apenas da velocidade  $\dot{q}$ , de forma que, ao considerar apenas a direção ruidosa em um caso unidimensional, que na prática será a

única direção de movimento. Tomamos como Ansatz:

$$F^2(\dot{q}) = g(\dot{q}) \dot{q}^2.$$

A partir desta métrica, analisando as equações de Euler e Lagrange, encontramos uma Lagrangiana que, ao ser minimizada, proporciona a trajetória da dinâmica ruidosa efetiva. No apêndice D.6, mostramos que uma possível geometrização é dada por:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, t) = \frac{[\dot{q}^1(t)]^2}{\omega_B(t)} + \sum_{k=2}^{15} [\dot{q}^k(t)]^2, \quad (5.8)$$

para  $\omega_B(t) \neq 0$ , onde mudamos a ordem dos índices para escrever a direção ruidosa na primeira direção, e voltamos a considerar todas as direções de movimento na álgebra.

Em geral, uma Lagrangiana dependente do tempo induz uma métrica local (36), definida por:

$$g_{jk}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k}.$$

Dessa forma, a métrica induzida pela Lagrangiana da equação (5.8), é:

$$g_{jk}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k; \\ 1/\omega_B(t), & \text{se } j = k = 1; \\ 1, & \text{se } j = k, \text{ para } j > 1, \end{cases}$$

para  $\omega_B(t) \neq 0$ , o que ocorre apenas no ponto final da curva, quando a função  $\theta(t)$  atingir o valor máximo de  $\pi/4$ , como mostrado na figura 15. Por cálculo direto, podemos ver que ao minimizar esta Lagrangiana com as equações de Euler e Lagrange, obtemos a trajetória desejada. Notemos que a ação proporcionada pela curva geodésica  $q(t) = \theta(t)$ , será:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t \mathcal{L}(\dot{q}, t') dt' \\ &= \int_0^t \frac{\dot{\theta}^2(t')}{\omega_B(t')} dt' \\ &= \int_0^t \omega_B(t') dt' \\ &= \theta(t) - \theta(0) \\ &= \theta(t), \end{aligned}$$

pois  $\dot{\theta}(t) = \omega_B(t)$  e  $\theta(0) = 0$ .

Dessa forma, se agora considerarmos  $n$  qubits não interagentes, basta tomar para cada direção ruidosa uma métrica utilizando a função  $\omega_{B_j}(t)$  apropriada, de forma que:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \frac{[\dot{q}^j(t)]^2}{\omega_{B_j}(t)} + \sum_{k=n}^{4^{2n}-1} [\dot{q}^k(t)]^2, \quad (5.9)$$

para  $\omega_{B_j}(t) \neq 0$ , onde mudamos a ordem dos índices para escrever as direções ruidosas nas primeiras  $n$  direções. Essa Lagrangiana dependente do tempo da equação (5.9), induz uma métrica local (36), dada por:

$$g_{jk}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k; \\ 1/\omega_{B_j}(t), & \text{se } j = k, \text{ para } j \leq n; \\ 1, & \text{se } j = k, \text{ para } j > n. \end{cases}$$

Assim, utilizando os cálculos para ação no caso de um qubit, e tomando o limite de  $t$  indo a infinito, teremos uma ação:

$$S = n \left( \frac{\pi}{4} \right),$$

que depende linearmente do número de qubits de entrada  $n$ . Portanto, apesar dinâmica original possuir infinitas dimensões de movimento, na dinâmica efetiva, os comprimentos são finitos e limitados por funções bem comportadas. Além disso, ao minimizar a ação induzida pela Lagrangiana da equação (5.9), obtemos como geodésica a trajetória que o operador de evolução temporal efetivo, que emula o ruído, executa. De certa forma, é como se tivéssemos colocado a informação sobre o ruído na geometria.



## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de  $n$  qubits descoerentes e não interagentes, em que cada qubit interage com um campo bosônico diferente, com uma interação de defasagem pura, também conhecida como o ruído de fase. A dinâmica da matriz reduzida para o sistema é não unitária e descoerente. Por outro lado, a dinâmica da matriz densidade total, que inclui os qubits e os banhos térmicos, é unitária, porém os campos bosônicos são representados em espaços de Hilbert de dimensão infinita.

Através da purificação quântica, desenvolvemos uma dinâmica efetiva para o problema do ruído de fase, substituindo a interação de cada qubit físico com seu respectivo campo bosônico por uma interação entre cada qubit físico e um qubit auxiliar não físico, que emula os efeitos da interação com o banho térmico. Essa formulação nos permite descrever a dinâmica do subsistema de  $n$  qubits ruidosos em termos de uma matriz densidade total pura, onde os operadores que realizam essa evolução pertencem ao grupo de Lie especial unitário  $SU(2^{2n})$ .

Além disso, no caso de um qubit e dentro de uma certa aproximação, mostramos como adequar a dinâmica efetiva para incluir termos de controle no Hamiltoniano do sistema, que uma vez determinados, eliminarão o ruído para as operações do algoritmo em questão. Essa aproximação considera que o operador de evolução temporal para parte do sistema varia lentamente em relação à dinâmica ruidosa. Nessa aproximação, mostramos a equivalência entre as equações mestras da dinâmica dos campos e a dinâmica efetiva. Fica como perspectiva para futuros trabalhos de nosso grupo de pesquisa, determinar as operações de controle quântico para proteger o sistema do ruído, utilizando a equação mestra efetiva no espaço purificado, onde também podemos fazer uso de ferramentas geométricas para determinar o controle quântico ótimo.

Por fim, estudamos o problema do ruído de fase de forma geométrica. Consideramos a evolução temporal efetiva livre, isto é, sem considerar os termos de controle, e investigamos dois tipos de geometria no grupo de Lie  $SU(2^{2n})$ .

Na primeira, consideramos a métrica Riemanniana usual da complexidade quântica, que penaliza interações de 3 ou mais qubits no Hamiltoniano. No contexto da computação ideal, o comprimento da curva geodésica nessa métrica nos fornece uma medida de complexidade quântica. Nessa geometria, as curvas geodésicas para o operador unitário efetivo que obtivemos pertencem a um conjunto de geodésicas conhecidas como geodésicas de Pauli. Calculamos o comprimento dessas curvas em função do número  $n$  de qubits físicos de entrada e observamos uma dependência com a raiz quadrada de  $n$ .

Depois, encontramos uma geometria natural para o problema do ruído de fase, no

sentido de que nessa geometria, a trajetória que o operador de evolução efetivo executa é, em todo tempo, a curva geodésica. É como se estivéssemos projetando um determinado relevo, por exemplo, para que o fluxo de água siga uma trajetória específica. Para isso, consideramos uma função custo nesse espaço, descrita por uma Lagrangiana que depende explicitamente do tempo, resultando em uma geometrização dependente do tempo, que é algo não usual, porém esse tipo de geometria encontra diversas aplicações na física e na matemática. (36) Por meio das equações de Euler e Lagrange, mostramos que a trajetória que minimiza a ação induzida por essa Lagrangiana, é a trajetória que o operador que realiza a dinâmica efetiva ruidosa descreve. Também calculamos o comprimento dessas curvas geodésicas em função do número  $n$  de qubits físicos de entrada e agora observamos uma dependência linear  $n$ . Portanto, apesar dinâmica original possuir infinitas dimensões de movimento, na dinâmica efetiva, os comprimentos são finitos e limitados por funções bem comportadas. Dessa forma, embutimos a dinâmica ruidosa na geometria desse espaço, e ao minimizar essa ação, obtemos a trajetória que o operador efetivo ruidoso realiza.

## REFERÊNCIAS

- 1 FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman lectures on physics: the definitive edition**. San Francisco: Pearson, 2009. v. 3. ISBN 9788131721698.
- 2 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum computation and quantum information: 10th anniversary edition**. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. ISBN 9781107002173.
- 3 MERMIN, N. D. Is the moon there when nobody looks? reality and the quantum theory. **Physics Today**, v. 38, n. 4, p. 38–47, Apr. 1985. ISSN 0031-9228.
- 4 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical Review**, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935.
- 5 BELL, J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, American Physical Society, v. 1, p. 195–200, Nov 1964.
- 6 DEUTSCH, D. Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical and physical sciences**, The Royal Society, v. 400, n. 1818, p. 97–117, July 1985.
- 7 DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical and physical sciences**, The Royal Society, v. 439, n. 1907, p. 553–558, Dec 1992.
- 8 HUGHES, C. *et al.* **Quantum computing for the quantum curious**. Cham: Springer International Publishing, 2021. ISBN 978-3-030-61601-4.
- 9 FRASCA, M. A modern review of the two-level approximation. **Annals of Physics**, v. 306, n. 2, p. 193–208, 2003. ISSN 0003-4916.
- 10 MACCHIAVELLO, C.; PALMA, G. M.; ZEILINGER, A. **Quantum computation and quantum information theory**. Torino: World Scientific, 2001. ISBN 9810241178,9789810241179,9789812811912.
- 11 NIELSEN, M. A. *et al.* Quantum computation as geometry. **Science**, v. 311, n. 5764, p. 1133–1135, 2006.
- 12 SHOR, P. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. *In*: ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE, 35., 1994. Santa Fé. **Proceedings** [...]. Santa Fe: IEEE Computer Society Press, 1994. p. 124–134.
- 13 DANIEL, J. B.; TANJA, L. Post-quantum cryptography. **Nature**, v. 549, n. 7671, p. 188–194, Sept. 2017.
- 14 LEE, J. M. **Manifolds and differential geometry**. Providence: Rhode Island: American Mathematical Society, 2009. (Graduate studies in mathematics v. 107).
- 15 LEE, J. M. **Introduction to Riemannian manifolds**. 2nd ed. Berlin: Springer Nature, 2018. (Graduate texts in mathematics v. 176).

- 16 HALL, B. C. **Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction**. 2nd ed. New York: Springer, 2004. (Graduate texts in mathematics v. 222). ISBN 9780387401225.
- 17 NIELSEN, M. A. A geometric approach to quantum circuit lower bounds. **Quantum Information & Computation**, v. 6, n. 3, p. 213–262, May 2006. ISSN 1533-7146.
- 18 DOWLING, M. R.; NIELSEN, M. A. The geometry of quantum computation. **Quantum Information & Computation**, v. 8, n. 10, p. 861–899, Nov. 2008. ISSN 1533-7146.
- 19 BRANDT, H. E. Riemannian geometry of quantum computation. **Nonlinear Analysis: theory, methods & applications**, v. 71, n. 12, p. e474–e486, 2009. ISSN 0362-546X.
- 20 BROWN, A. R.; SUSSKIND, L. Complexity geometry of a single qubit. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 100, n. 4, p. 046020, Aug. 2019.
- 21 BAUMGRATZ, T.; CRAMER, M.; PLENIO, M. B. Quantifying coherence. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 113, n. 14, p. 140401, Sept. 2014.
- 22 STRELTSOV, A.; ADESSO, G.; PLENIO, M. B. Colloquium: Quantum coherence as a resource. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 89, n. 4, p. 041003, Oct. 2017.
- 23 HORODECKI, R. *et al.* Quantum entanglement. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society, v. 81, n. 2, p. 865–942, June 2009.
- 24 ZUREK, W. H. Decoherence and the transition from quantum to classical. **Physics Today**, v. 44, n. 10, p. 36–44, 10 1991. ISSN 0031-9228.
- 25 PAZ, J. P.; ZUREK, W. H. Environment-induced decoherence and the transition from quantum to classical. *In*: KAISER, R.; WESTBROOK, C.; DAVID, F. (ed.). **Coherent atomic matter waves**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. p. 533–614. ISBN 978-3-540-45338-3.
- 26 FANCHINI, F. F.; HORNOS, J. E. M.; NAPOLITANO, R. d. J. Continuously decoupling single-qubit operations from a perturbing thermal bath of scalar bosons. **Physical Review A**, v. 75, n. 2, p. 022329, Feb. 2007.
- 27 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. **The theory of open quantum systems**. Oxford: Oxford University Press, 2007. ISBN 9780199213900.
- 28 REINA, J. H.; QUIROGA, L.; JOHNSON, N. F. Decoherence of quantum registers. **Physical Review A**, v. 65, n. 3, p. 032326, Mar. 2002.
- 29 ARFKEN, G. B.; WEBER, H.-J.; HARRIS, F. E. **Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide**. 7th ed. Amesterdã: Elsevier, 2012. ISBN 9780123846549,0123846544.
- 30 BRASIL, C. A.; CASTRO, L. A. de; NAPOLITANO, R. d. J. Protecting a quantum state from environmental noise by an incompatible finite-time measurement. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 84, n. 2, p. 022112, Aug. 2011.

- 
- 31 MAZIERO, J. A representação de Kraus para a dinâmica de sistemas quânticos abertos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 2, p. e2307, June 2016.
- 32 BOOZER, A. D. Time-optimal synthesis of  $su(2)$  transformations for a spin-1/2 system. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 85, n. 1, p. 012317, Jan. 2012.
- 33 BRASIL, C. A.; FANCHINI, F. F.; NAPOLITANO, R. d. J. A simple derivation of the Lindblad equation. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 35, n. 1, p. 1303–01 – 1303–09, Mar. 2013. ISSN 1806-1117.
- 34 GADEA, P. M.; MASQUÉ, J. M.; MYKYTYUK, I. V. **Analysis and algebra on differentiable manifolds**. Netherlands: Springer, 2013.
- 35 BAO, D.; CHERN, S.-S.; SHEN, Z. **An introduction to Riemann-Finsler geometry**. New York, USA: Springer, 2000.
- 36 MIRON, R.; ANASTASIEI, M. **The geometry of Lagrange spaces: theory and applications**. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1994. 250–275 p.
- 37 TINKHAM, M. **Group theory and quantum mechanics**. Mineola: Dover Publications, 2003. (Dover Books on Chemistry).
- 38 ARTIN, M. **Algebra**. 2nd ed. Upper Saddle River: Pearson, 2010.
- 39 LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. New York: Springer, 2003. (Graduate texts in mathematics v. 218).
- 40 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The large scale structure of space-time**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge monographs on mathematical physics).
- 41 RIGETTI, C.; MOSSERI, R.; DEVORET, M. Geometric approach to digital quantum information. **Quantum Information Processing**, Springer Science and Business Media LLC, v. 3, n. 6, p. 351–380, Dec. 2004.
- 42 RUND, H. **The differential geometry of Finsler spaces**. Berlin: Springer, 1959. ISBN 978-3-64-251612-2, 978-3-64-251610-8.
- 43 ANASTASIEI, M. The geometry of time-dependent Lagrangians. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 20, n. 4, p. 67–81, 1994. ISSN 0895-7177.
- 44 FRIGIOIU, C.; KIRKOVITS, M. A new geometrization of time dependent Lagrangians. **Proceedings of the Romanian Academy - Series A: mathematics, physics, technical sciences, information science**, 01 2002.



## APÊNDICES





## APÊNDICE A – DESCOERÊNCIA DE $n$ QUBITS NÃO INTERAGENTES

### A.1 A evolução unitária

Nesse apêndice iremos passar para representação de interação dos Hamiltonianos  $H_B$  e  $H_S$ . Começemos pela equação de Liouville-Von Neumann, para o Hamiltoniano total:

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = -[\rho(t), H]. \quad (\text{A.1})$$

Começaremos passando para a representação de interação do Hamiltoniano com a energia livre do banho. Definiremos  $U_B(t)$  como o operador unitário que satisfaz a equação de Schrödinger para o Hamiltoniano  $H_B$ :

$$i\hbar \frac{dU_B(t)}{dt} = H_B U_B(t), \quad (\text{A.2})$$

e tomando o hermitiano conjugado:

$$i\hbar \frac{dU_B^\dagger(t)}{dt} = -U_B^\dagger(t) H_B. \quad (\text{A.3})$$

Definiremos também:

$$\rho_{I_B}(t) \equiv U_B^\dagger(t) \rho(t) U_B(t),$$

de forma que, derivando em ambos lados, teremos:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\rho_{I_B}(t)}{dt} &= i\hbar \frac{d}{dt} [U_B^\dagger(t) \rho(t) U_B(t)] \\ &= -U_B^\dagger(t) H_B \rho(t) U_B(t) - U_B^\dagger(t) [\rho(t), H] U_B(t) + U_B^\dagger(t) \rho(t) H_B U_B(t) \\ &= U_B^\dagger(t) [\rho(t), H_B] U_B(t) - U_B^\dagger(t) [\rho(t), H] U_B(t) \\ &= -U_B^\dagger(t) [\rho(t), (H_S + H_{SB})] U_B(t) \\ &= -U_B^\dagger(t) \rho(t) [U_B(t) U_B^\dagger(t)] (H_S + H_{SB}) U_B(t) \\ &\quad + U_B^\dagger(t) (H_S + H_{SB}) [U_B(t) U_B^\dagger(t)] \rho(t) U_B(t) \\ &= -[\rho_{I_B}(t), H_{I_B}(t)], \end{aligned}$$

onde usamos (A.1), (A.2) e (A.3), e definimos:

$$\begin{aligned} H_{I_B}(t) &\equiv U_B^\dagger(t) (H_S + H_{SB}) U_B(t) \\ &= H_S + U_B^\dagger(t) H_{SB} U_B(t) \\ &= H_S + H_o(t), \end{aligned}$$

já que  $U_B(t)$  atua apenas nos operadores da parte do campo e também definimos  $H_o(t) = U_B^\dagger(t) H_{SB} U_B(t)$ .

Agora, passaremos para a representação de interação para a parte do sistema, definindo  $U_S(t)$  para satisfazer:

$$i\hbar \frac{dU_S(t)}{dt} = H_S U_S(t). \quad (\text{A.4})$$

De forma análoga, seja:

$$\rho_I(t) = U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) U_S(t),$$

de forma que:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho_I(t) &= i\hbar \frac{d}{dt} [U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) U_S(t)] \\ &= -U_S^\dagger(t) H_S \rho_{I_B}(t) U_S(t) - U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_{I_B}(t)] U_S(t) \\ &\quad + U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) H_S U_S(t) \\ &= U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_S] U_S(t) - U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_{I_B}(t)] U_S(t) \\ &= -U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_o(t)] U_S(t) \\ &= -U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) [U_S(t) U_S^\dagger(t)] H_o(t) U_S(t) \\ &\quad + U_S^\dagger(t) H_o(t) [U_S(t) U_S^\dagger(t)] \rho_{I_B}(t) U_S(t) \\ &= -[\rho_I(t), H_I(t)], \end{aligned}$$

onde definimos:

$$H_I(t) \equiv U_S^\dagger(t) H_o(t) U_S(t). \quad (\text{A.5})$$

Agora, como tanto  $H_B$  quanto  $H_S$  não dependem do tempo, pelas equações (A.2) e (A.4) teremos, simplesmente:

$$\left\{ \begin{aligned} U_B(t) &= \exp \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right) H_B t \right] \end{aligned} \right. \quad (\text{A.6})$$

$$\left\{ \begin{aligned} U_S(t) &= \exp \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right) H_S t \right]. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.7})$$

Dessa forma, segue que:

$$\begin{aligned}
H_I(t) &\equiv U_S^\dagger(t) H_o(t) U_S(t) \\
&= U_S^\dagger(t) U_B^\dagger(t) H_{SB} U_B(t) U_S(t) \\
&= U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t) H_{SB} U_S(t) U_B(t) \\
&= U_B^\dagger(t) H_{SB} U_B(t) \\
&= H_o(t),
\end{aligned} \tag{A.8}$$

já que, na parte do sistema, tanto  $H_S$ , quanto  $H_{SB}$  são proporcionais à  $\sigma_z$ , de forma que,  $[H_S, H_{SB}] = 0$ . Portanto, obtemos:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_I(t) = -[\rho_I(t), H_o(t)]. \tag{A.9}$$

Mudaremos novamente de representação, definindo outro operador unitário  $U_{SB}(t)$ , que atua tanto no banho quanto no sistema e obedece a nova equação de Schrödinger, de forma que:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_{SB}(t) = H_o(t) U_{SB}(t). \tag{A.10}$$

Analogamente, vamos definir:

$$\rho_{SB}(t) = U_{SB}^\dagger(t) \rho_I(t) U_{SB}(t), \tag{A.11}$$

e derivando (A.11) no tempo, obtemos:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{SB}(t) &= i\hbar \frac{d}{dt} [U_{SB}^\dagger(t) \rho_I(t) U_{SB}(t)] \\
&= -U_{SB}^\dagger(t) H_o(t) \rho_I(t) U_{SB}(t) - U_{SB}^\dagger(t) [\rho_I(t), H_o(t)] U_{SB}(t) \\
&\quad + U_{SB}^\dagger(t) \rho_I(t) H_o(t) U_{SB}(t) \\
&= U_{SB}^\dagger(t) [\rho_I(t), H_o(t)] U_{SB}(t) - U_{SB}^\dagger(t) [\rho_I(t), H_o(t)] U_{SB}(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dessa forma, colocamos toda a dependência temporal nos operadores unitários e  $\rho_{SB}(t)$  não depende do tempo. Como em  $t = 0$ , temos

$$U_B(0) = U_S(0) = U_{SB}(0) = \mathbb{1}_S \otimes \mathbb{1}_B,$$

então

$$\rho_{SB}(0) = \rho(0)$$

, então para todo tempo, vale que:

$$\rho_{SB}(t) = \rho(0).$$

Portanto, voltando da representação de interação, a matriz densidade total, fica:

$$\rho(t) = U_S(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t).$$

## A.2 Encontrando $U_{SB}(t)$

Vamos encontrar o operador  $U_{SB}(t)$ , que satisfaz a equação (2.7), mas antes vamos explicitar  $H_o(t)$ . Para isso, notemos primeiramente uma pequena proposição.

Proposição: Dados  $t, \gamma \in \mathbb{R}$ , sejam  $\hat{A}$  e  $\hat{O}$  dois operadores, cujo comutador, é:

$$[\hat{A}, \hat{O}] = \gamma \hat{O}, \quad (\text{A.12})$$

mostre que:

$$\exp(t\hat{A}) \hat{O} \exp(-t\hat{A}) = \hat{O} \exp(\gamma t).$$

Prova: Vamos calcular  $\hat{B}(t)$ , definido por:

$$\hat{B}(t) = \exp(t\hat{A}) \hat{O} \exp(-t\hat{A}).$$

Derivando em  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{B}(t) &= \frac{d}{dt} [\exp(t\hat{A}) \hat{O} \exp(-t\hat{A})] \\ &= \exp(t\hat{A}) \hat{A} \hat{O} \exp(-t\hat{A}) - \exp(t\hat{A}) \hat{O} \hat{A} \exp(-t\hat{A}) \\ &= \exp(t\hat{A}) [\hat{A}, \hat{O}] \exp(-t\hat{A}) \\ &= \gamma \exp(t\hat{A}) \hat{O} \exp(-t\hat{A}) \\ &= \gamma \hat{B}(t). \end{aligned}$$

Assim:

$$\hat{B}(t) = \hat{B}(0) \exp(\gamma t),$$

mas:

$$\hat{B}(0) = \hat{O}.$$

Portanto, se a comutação da equação (A.12) é válida, então:

$$\exp(t\hat{A}) \hat{O} \exp(-t\hat{A}) = \hat{O} \exp(\gamma t).$$

Agora, notemos que para certo  $\lambda'$ , temos:

$$\begin{aligned}
[H_B, a_{\lambda'}] &= \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar\omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}, a_{\lambda'} \right] \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar\omega_{\lambda} [a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}, a_{\lambda'}] \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \hbar\omega_{\lambda} (-\delta_{\lambda\lambda'} a_{\lambda}) \\
&= -\hbar\omega_{\lambda'} a_{\lambda'}.
\end{aligned}$$

Assim, usando a proposição demonstrada acima, podemos escrever  $H_o(t)$  explicitamente, como:

$$\begin{aligned}
H_o(t) &\equiv U_o^{\dagger}(t) H_{SB} U_o(t) \\
&= \hbar \sigma_z \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{\lambda}^* a_{\lambda} \exp(-i\omega_{\lambda}t) + g_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} \exp(i\omega_{\lambda}t) \right].
\end{aligned}$$

Dessa maneira, tentemos encontrar um operador  $U_{SB}(t)$ , tal que:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_{SB}(t) = \hbar \sigma_z \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_{\lambda}^* a_{\lambda} \exp(-i\omega_{\lambda}t) + g_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} \exp(i\omega_{\lambda}t) \right] U_{SB}(t). \quad (\text{A.13})$$

Vamos mostrar uma dedução alternativa para a referência (27), adaptando a dedução da referência (28) para esse problema. Omitiremos os limites do somatório, tendo em vista que eles vão de 0 a  $\infty$ , e definiremos os operadores  $A(t)$  e  $B(t)$ , que atuam no banho ambiental e no sistema, como:

$$A(t) = \exp \left[ \sum_{s'} \sigma_z g_{s'}^* f_{s'}(t) a_{s'} \right],$$

e

$$B(t) = \exp \left[ - \sum_{s'} \sigma_z g_{s'} f_{s'}^*(t) a_{s'}^{\dagger} \right].$$

Derivando esses operadores no tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \sum_s \left[ \frac{df_s(t)}{dt} \right] \sigma_z g_s^* a_s A(t),$$

e

$$\frac{d}{dt} B(t) = - \sum_s \left[ \frac{df_s^*(t)}{dt} \right] \sigma_z g_s a_s^{\dagger} B(t).$$

Dessa forma, vemos pela regra do produto, que:

$$\frac{d}{dt} [B(t) A(t)] = - \sum_s \left[ \frac{df_s^*(t)}{dt} \right] \sigma_z g_s a_s^{\dagger} B(t) A(t) + B(t) \sum_s \left[ \frac{df_s(t)}{dt} \right] \sigma_z g_s^* a_s A(t).$$

Agora,  $[B(t), \sigma_z] = 0$ , porém:

$$\begin{aligned} [a_s, B(t)] &= \left[ a_s, \exp \left[ - \sum_{s'} \sigma_z g_{s'} f_{s'}^*(t) a_{s'}^\dagger \right] \right] \\ &= [a_s, a_s^\dagger] \frac{d}{da_s^\dagger} \exp \left[ - \sum_{s'} \sigma_z g_{s'} f_{s'}^*(t) a_{s'}^\dagger \right] \\ &= - \sigma_z g_s f_s^*(t) B(t), \end{aligned}$$

já que  $[a_s, a_{s'}^\dagger] = \delta_{ss'}$ . Dessa maneira, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [B(t) A(t)] &= - \sum_s \left[ \frac{df_s^*(t)}{dt} \right] \sigma_z g_s a_s^\dagger B(t) A(t) + \sum_s \left[ \frac{df_s(t)}{dt} \right] \sigma_z g_s^* a_s B(t) A(t) \\ &\quad + \sum_s \left[ \frac{df_s(t)}{dt} \right] f_s^*(t) \sigma_z \sigma_z g_s^* g_s B(t) A(t). \end{aligned}$$

Agora, comparando com a equação (A.13), escolhemos:

$$\frac{df_s(t)}{dt} = -i \exp(-i\omega_s t),$$

pois assim, temos que:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= (-i) \int_0^t \exp(-i\omega_s t') dt' \\ &= (-i) \left[ \frac{\exp(-i\omega_s t')}{(-i\omega_s)} \right] \Big|_0^t \\ &= \frac{\exp(-i\omega_s t) - 1}{\omega_s}. \end{aligned}$$

Portanto, vale que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [B(t) A(t)] &= -i \sum_s \exp(i\omega_s t) \sigma_z g_s a_s^\dagger B(t) A(t) - i \sum_s \exp(-i\omega_s t) \sigma_z g_s^* a_s B(t) A(t) \\ &\quad - i \sum_s \exp(-i\omega_s t) \left[ \frac{\exp(i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] \sigma_z \sigma_z g_s^* g_s B(t) A(t). \end{aligned}$$

Vamos propor que  $U_{SB}(t)$  seja da forma:

$$U_{SB}(t) = C(t) B(t) A(t),$$

pois assim:

$$\frac{d}{dt} [C(t) B(t) A(t)] = \left[ \frac{d}{dt} C(t) \right] B(t) A(t) + C(t) \frac{d}{dt} [B(t) A(t)],$$

e vamos impor que o termo com a derivada de  $C(t)$  cancele o termo indesejado na derivada de  $[B(t) A(t)]$ . Ou seja:

$$\frac{d}{dt}C(t) = i C(t) \left\{ \sum_s \exp(-i\omega_s t) \left[ \frac{\exp(i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] \sigma_z \sigma_z g_s^* g_s \right\},$$

e portanto:

$$C(t) = \exp \left\{ \sum_s |g_s|^2 \left[ \frac{i\omega_s t + \exp(-i\omega_s t) - 1}{\omega_s^2} \right] \right\},$$

já que  $\sigma_z^2 = \mathbb{1}_S$ . Dessa maneira, o operador  $U_{SB}(t)$  explicitamente fica:

$$U_{SB}(t) = \exp \left\{ - \sum_s \sigma_z g_s \left[ \frac{\exp(i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] a_s^\dagger \right\} \exp \left\{ \sum_s \sigma_z g_s^* \left[ \frac{\exp(-i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] a_s \right\} \\ \exp \left\{ \sum_s |g_s|^2 \left[ \frac{i\omega_s t + \exp(-i\omega_s t) - 1}{\omega_s^2} \right] \right\}.$$

Vamos definir:

$$\kappa_s(t) \equiv 2 g_s \left[ \frac{1 - \exp(i\omega_s t)}{\omega_s} \right],$$

de forma que:

$$U_{SB}(t) = \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \kappa_s(t) a_s^\dagger \right] \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \kappa_s^*(t) a_s \right] \\ \exp \left\{ \sum_s |g_s|^2 \left[ \frac{i\omega_s t + \exp(-i\omega_s t) - 1}{\omega_s^2} \right] \right\}.$$

Agora, sabemos que para dois operadores  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$ , se  $[\hat{P}, [\hat{P}, \hat{Q}]] = [\hat{Q}, [\hat{P}, \hat{Q}]] = 0$ , então:

$$\exp(\hat{P} + \hat{Q}) = \exp(\hat{P}) \exp(\hat{Q}) \exp\left(-\frac{[\hat{P}, \hat{Q}]}{2}\right).$$

E, como  $[a_s, a_{s'}^\dagger] = \delta_{ss'}$ , notemos que:

$$\left[ - \sum_s \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \kappa_s(t) a_s^\dagger, \sum_{s'} \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \kappa_{s'}^*(t) a_{s'} \right] = \sum_s \frac{|\kappa_s(t)|^2}{4},$$

e por outro lado:

$$\begin{aligned}
\frac{|\kappa_s(t)|^2}{4} &= g_s \left[ \frac{\exp(i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] g_s^* \left[ \frac{\exp(-i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] \\
&= |g_s|^2 \left[ \frac{\exp(i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] \left[ \frac{\exp(-i\omega_s t) - 1}{\omega_s} \right] \\
&= |g_s|^2 \left[ \frac{1 - \exp(i\omega_s t) - \exp(-i\omega_s t) + 1}{\omega_s^2} \right] \\
&= |g_s|^2 \left[ \frac{2 - \exp(i\omega_s t) - \exp(-i\omega_s t)}{\omega_s^2} \right].
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
U_{SB}(t) &= \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \kappa_s(t) a_s^\dagger - \kappa_s^*(t) a_s \right] \\
&\quad \exp \left\{ \sum_s \left( \frac{|g_s|^2}{\omega_s^2} \right) \left[ i\omega_s t + \exp(-i\omega_s t) - 1 + 1 - \frac{\exp(i\omega_s t)}{2} - \frac{\exp(-i\omega_s t)}{2} \right] \right\} \\
&= \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \kappa_s(t) a_s^\dagger - \kappa_s^*(t) a_s \right] \\
&\quad \exp \left\{ \sum_s \left( \frac{|g_s|^2}{\omega_s^2} \right) \left[ i\omega_s t - \frac{\exp(i\omega_s t)}{2} + \frac{\exp(-i\omega_s t)}{2} \right] \right\} \\
&= \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \kappa_s(t) a_s^\dagger - \kappa_s^*(t) a_s \right] \exp \left\{ \sum_s \left( \frac{|g_s|^2}{\omega_s^2} \right) [i\omega_s t - i \sin(\omega_s t)] \right\}.
\end{aligned}$$

Vamos compactar mais a notação, definindo:

$$\mathcal{B}_s(t) = \kappa_s(t) a_s^\dagger - \kappa_s^*(t) a_s,$$

e também:

$$\phi(t) \equiv \sum_s \left( \frac{|g_s|^2}{\omega_s^2} \right) [\omega_s t - \sin(\omega_s t)].$$

Assim:

$$U_{SB}(t) = \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \mathcal{B}_s(t) \right] \exp [i \phi(t)]. \quad (\text{A.14})$$



### A.3 Os elementos de matriz de $\rho_S(t)$

Pela equação (2.10), temos:

$$\begin{aligned}
\rho_S(t) &= \text{Tr}_B \left\{ U_S(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t) \right\} \\
&= U_S(t) \text{Tr}_B \left\{ U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) \right\} U_S^\dagger(t) \\
&= U_S(t) \text{Tr}_B \left\{ U_B^\dagger(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) \right\} U_S^\dagger(t) \\
&= U_S(t) \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) \right\} U_S^\dagger(t),
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade cíclica do traço e a unitariedade de  $U_B(t)$ . Vamos definir, também:

$$\rho_{IS}(t) \equiv U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t),$$

para escrever:

$$\rho_{IS}(t) = \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) \right\}.$$

Assim, pela equação (2.2):

$$\rho_{IS}(t) = \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) \left[ \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) \right] U_{SB}^\dagger(t) \right\}. \quad (\text{A.15})$$

Tínhamos:

$$U_{SB}(t) = \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right] \exp [i \phi(t)]. \quad (\text{A.16})$$

Notemos primeiramente que  $\mathcal{B}_{\lambda}(t)$  é anti-hermitiano, pois:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\lambda}^\dagger(t) &= \left[ \kappa_{\lambda}(t) a_{\lambda}^\dagger - \kappa_{\lambda}^*(t) a_{\lambda} \right]^\dagger \\
&= \kappa_{\lambda}^*(t) a_{\lambda} - \kappa_{\lambda}(t) a_{\lambda}^\dagger \\
&= - \left[ \kappa_{\lambda}(t) a_{\lambda}^\dagger - \kappa_{\lambda}^*(t) a_{\lambda} \right] \\
&= - \mathcal{B}_{\lambda}(t).
\end{aligned}$$

Dessa forma:

$$U_{SB}^\dagger(t) = \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right] \exp [ - i \phi(t) ]. \quad (\text{A.17})$$

Agora, seja  $\Lambda_k$  o autovalor do autoestado  $|k\rangle$ , definido como:

$$\sigma_z |k\rangle = \Lambda_k |k\rangle.$$

Substituindo as equações (A.16) e (A.17) na equação (A.15), vamos calcular o elemento de matriz:

$$\begin{aligned}
\langle l | \rho_{IS}(t) | k \rangle &= \langle l | \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) \left[ \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) \right] U_{SB}^\dagger(t) \right\} | k \rangle \\
&= \text{Tr}_B \left\{ \langle l | U_{SB}(t) \left[ \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) \right] U_{SB}^\dagger(t) | k \rangle \right\} \\
&= \text{Tr}_B \left\{ \langle l | \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \mathcal{B}_s(t) \right] \left[ \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) \right] \right. \\
&\quad \left. \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_s \mathcal{B}_s(t) \right] | k \rangle \right\} \\
&= \langle l | \rho_S(0) | k \rangle \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \left( \frac{\Lambda_l}{2} \right) \sum_s \mathcal{B}_s(t) \right] \rho_B(0) \right. \\
&\quad \left. \exp \left[ - \left( \frac{\Lambda_k}{2} \right) \sum_s \mathcal{B}_s(t) \right] \right\} \\
&= \langle l | \rho_S(0) | k \rangle \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \left( \frac{\Lambda_l - \Lambda_k}{2} \right) \sum_s \mathcal{B}_s(t) \right] \rho_B(0) \right\} \\
&= \langle l | \rho_S(0) | k \rangle \chi_{l,k}(t), \tag{A.18}
\end{aligned}$$

onde definimos:

$$\chi_{l,k}(t) \equiv \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \left( \frac{\Lambda_l - \Lambda_k}{2} \right) \sum_s \mathcal{B}_s(t) \right] \rho_B(0) \right\}.$$

O estado inicial é dado por:

$$\langle l | \rho_S(0) | k \rangle = c_l c_k^*.$$

Por outro lado, voltando da representação de interação, temos:

$$\begin{aligned}
\langle l | \rho_{IS}(t) | k \rangle &= \langle l | U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t) | k \rangle \\
&= \langle l | \exp \left[ \left( \frac{i}{\hbar} \right) \hbar \omega_o \sigma_z t \right] \rho_S(t) \exp \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \hbar \omega_o \sigma_z t \right] | k \rangle \\
&= \exp \left( i \omega_o \Lambda_l t \right) \langle l | \rho_S(t) | k \rangle \exp \left( - i \omega_o \Lambda_k t \right) \\
&= \exp \left[ i \omega_o \left( \Lambda_l - \Lambda_k \right) t \right] \langle l | \rho_S(t) | k \rangle.
\end{aligned}$$

Substituindo tudo na equação (A.18), obtemos:

$$\rho_S(t) = \sum_{l,k} c_l c_k^* \exp[-i (\Lambda_l - \Lambda_k) \omega_o t] \chi(t)_{l,k} | l \rangle \langle k|. \tag{A.19}$$

## A.4 Traço parcial

### A.4.1 Calculando $\chi_{l \neq k, k}(t)$

Na representação da matriz densidade para o banho na base de estados coerentes, deduzida no apêndice A.4.2 e dada pela equação (A.30), temos:

$$\rho_B(0) = \prod_{\lambda} \left[ \frac{1}{\pi \langle n(T, \omega_{\lambda}) \rangle} \right] \int d^2 \zeta_{\lambda} \exp \left[ -\frac{|\zeta_{\lambda}|^2}{\langle n(T, \omega_{\lambda}) \rangle} \right] |\zeta_{\lambda}\rangle \langle \zeta_{\lambda}|,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_{l \neq k, k}(t) &= \prod_s \text{Tr}_{B_s} \left\{ \frac{\exp \left[ (-1)^l \mathcal{B}_s(t) \right]}{\pi \langle n(T, \omega_s) \rangle} \int d^2 \zeta_s \exp \left[ -\frac{|\zeta_s|^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} \right] |\zeta_s\rangle \langle \zeta_s| \right\} \\ &= \prod_s \sum_{m_s} \langle m_s | \frac{\exp \left[ (-1)^l \mathcal{B}_s(t) \right]}{\pi \langle n(T, \omega_s) \rangle} \int d^2 \zeta_s \exp \left[ -\frac{|\zeta_s|^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} \right] |\zeta_s\rangle \langle \zeta_s | m_s \rangle \\ &= \prod_s \int d^2 \zeta_s \sum_{m_s} \langle \zeta_s | m_s \rangle \langle m_s | \frac{\exp \left[ (-1)^l \mathcal{B}_s(t) \right]}{\pi \langle n(T, \omega_s) \rangle} \exp \left[ -\frac{|\zeta_s|^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} \right] |\zeta_s\rangle \\ &= \prod_s \left[ \frac{1}{\pi \langle n(T, \omega_s) \rangle} \right] \int d^2 \zeta_s \exp \left[ -\frac{|\zeta_s|^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} \right] \langle \zeta_s | \exp \left[ (-1)^l \mathcal{B}_s(t) \right] |\zeta_s\rangle. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Vamos definir:

$$k_{s, l}(t) \equiv (-1)^l \kappa_s(t),$$

de forma que:

$$\exp \left[ (-1)^l \mathcal{B}_s(t) \right] = \exp \left[ k_{s, l}(t) a_s^{\dagger} - k_{s, l}^*(t) a_s \right].$$

Assim, notemos que:

$$\begin{aligned} \langle \zeta_s | \exp \left[ (-1)^l \mathcal{B}_s(t) \right] |\zeta_s\rangle &= \langle \zeta_s | \exp \left[ k_{s, l}(t) a_s^{\dagger} - k_{s, l}^*(t) a_s \right] |\zeta_s\rangle \\ &= \langle \zeta_s | \exp \left[ -\frac{|k_{s, l}(t)|^2}{2} \right] \exp \left[ k_{s, l}(t) a_s^{\dagger} \right] \exp \left[ -k_{s, l}^*(t) a_s \right] |\zeta_s\rangle \\ &= \exp \left[ -\frac{|k_{s, l}(t)|^2}{2} \right] \exp \left[ k_{s, l}(t) \zeta_s^* \right] \exp \left[ -k_{s, l}^*(t) \zeta_s \right], \end{aligned}$$

onde usamos a relação:

$$\exp \left[ k_{s, l}(t) a_s^{\dagger} - k_{s, l}^*(t) a_s \right] = \exp \left[ -\frac{|k_{s, l}(t)|^2}{2} \right] \exp \left[ k_{s, l}(t) a_s^{\dagger} \right] \exp \left[ -k_{s, l}^*(t) a_s \right].$$

Pela equação (A.20), temos:

$$\chi_{l \neq k, k}(t) = \prod_s \left[ \frac{1}{\pi \langle n(T, \omega_s) \rangle} \right] \exp \left[ -\frac{|k_{s, l}(t)|^2}{2} \right] \mathcal{I}_{s, l}(t),$$

onde definimos a integral:

$$\mathcal{I}_{s,l}(t) \equiv \int d^2\zeta_s \exp \left[ -\frac{|\zeta_s|^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} + k_{s,l}(t) \zeta_s^* - k_{s,l}^*(t) \zeta_s \right].$$

Vamos integrar em coordenadas cartesianas, fazendo a parametrização

$$\zeta_s = x_s + iy_s \implies d^2\zeta_s = dx_s dy_s.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,l}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \exp \left[ \frac{-x_s^2 - y_s^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} + k_{s,l}(t) (x_s - iy_s) - k_{s,l}^*(t) (x_s + iy_s) \right] \\ &= \mathcal{I}_{x_s,l}(t) \mathcal{I}_{y_s,l}(t), \end{aligned}$$

onde:

$$\left\{ \mathcal{I}_{x_s,l}(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \exp \left\{ \frac{-x_s^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} + x_s [k_{s,l}(t) - k_{s,l}^*(t)] \right\} \right\}, \quad (\text{A.21})$$

$$\left\{ \mathcal{I}_{y_s,l}(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dy_s \exp \left\{ \frac{-y_s^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} - iy_s [k_{s,l}(t) + k_{s,l}^*(t)] \right\} \right\}. \quad (\text{A.22})$$

Começando por (A.21):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{x_s,l}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \exp \left\{ \frac{-x_s^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} + x_s [k_{s,l}(t) - k_{s,l}^*(t)] \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \exp \left[ -p_s x_s^2 + q_{s,l}(t) x_s \right], \end{aligned}$$

onde definimos:

$$p_s \equiv \frac{1}{\langle n(T, \omega_s) \rangle}$$

e

$$q_{s,l}(t) \equiv k_{s,l}(t) - k_{s,l}^*(t).$$

Completando quadrados:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{x_s,l}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \exp \left[ -p_s x_s^2 + q_{s,l}(t) x_s \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \exp \left\{ - \left[ \sqrt{p_s} x_s - \frac{q_{s,l}(t)}{2\sqrt{p_s}} \right]^2 \right\} \exp \left[ \frac{q_{s,l}^2(t)}{4p_s} \right]. \end{aligned}$$

Definindo

$$u = \sqrt{p_s} x_s - \frac{q_{s,l}(t)}{2\sqrt{p_s}} \implies du = \sqrt{p_s} dx_s,$$

a integral fica:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{x_s,l}(t) &= \exp\left[\frac{q_{s,l}^2(t)}{4p_s}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{p_s}} \exp(-u^2) \\ &= \exp\left[\frac{q_{s,l}^2(t)}{4p_s}\right] \sqrt{\frac{\pi}{p_s}}.\end{aligned}$$

Analogamente, para a integral da equação (A.22), definiremos:

$$\tilde{q}_{s,l}(t) \equiv -i [k_{s,l}(t) + k_{s,l}^*(t)],$$

de forma que:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{y_s,l}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy_s \exp\left\{\frac{-y_s^2}{\langle n(T, \omega_s) \rangle} - iy_s [k_{s,l}(t) + k_{s,l}^*(t)]\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy_s \exp[-p_s y_s^2 + \tilde{q}_{s,l}(t) y_s] \\ &= \exp\left[\frac{\tilde{q}_{s,l}^2(t)}{4p_s}\right] \sqrt{\frac{\pi}{p_s}}.\end{aligned}$$

Agora, notemos que:

$$\begin{aligned}q_{s,l}^2(t) &= q_{s,l}(t) q_{s,l}(t) \\ &= [k_{s,l}(t) - k_{s,l}^*(t)] [k_{s,l}(t) - k_{s,l}^*(t)] \\ &= k_{s,l}^2(t) - 2 |k_{s,l}(t)|^2 + [k_{s,l}^*(t)]^2,\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{s,l}^2(t) &= \tilde{q}_{s,l}(t) \tilde{q}_{s,l}(t) \\ &= (-i)^2 [k_{s,l}(t) + k_{s,l}^*(t)] [k_{s,l}(t) + k_{s,l}^*(t)] \\ &= -k_{s,l}^2(t) - 2 |k_{s,l}(t)|^2 - [k_{s,l}^*(t)]^2,\end{aligned}$$

de forma que:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{s,l}(t) &= \mathcal{J}_{x_s,l}(t) \mathcal{J}_{y_s,l}(t) \\ &= \left(\frac{\pi}{p_s}\right) \exp\left[\frac{q_{s,l}^2(t)}{4p_s}\right] \exp\left[\frac{\tilde{q}_{s,l}^2(t)}{4p_s}\right] \\ &= \pi \langle n(T, \omega_s) \rangle \exp\left[-|k_{s,l}(t)|^2 \langle n(T, \omega_s) \rangle\right]\end{aligned}$$

Portanto, pela equação (A.20):

$$\begin{aligned}
\chi_{l \neq k, k}(t) &= \prod_s \left[ \frac{1}{\pi \langle n(T, \omega_s) \rangle} \right] \exp \left[ -\frac{|k_{s, l}(t)|^2}{2} \right] \mathcal{J}_s(t) \\
&= \prod_s \exp \left[ -\frac{|k_{s, l}(t)|^2}{2} \right] \exp \left[ -|k_{s, l}(t)|^2 \langle n(T, \omega_s) \rangle \right] \\
&= \prod_s \exp \left\{ -|k_{s, l}(t)|^2 \left[ \frac{1}{2} + \langle n(T, \omega_s) \rangle \right] \right\} \\
&= \exp \left\{ (-1) \sum_s |k_{s, l}(t)|^2 \left[ \frac{1}{2} + \langle n(T, \omega_s) \rangle \right] \right\}
\end{aligned}$$

Da definição de  $k_{s, l}(t)$ :

$$\begin{aligned}
|k_{s, l}(t)|^2 &= (-1)^l \kappa_s(t) (-1)^l \kappa_s^*(t) \\
&= (-1)^{2l} \kappa_s(t) \kappa_s^*(t) \\
&= 2 g_s \left[ \frac{1 - \exp(i\omega_s t)}{\omega_s} \right] 2 g_s^* \left[ \frac{1 - \exp(-i\omega_s t)}{\omega_s} \right] \\
&= \left( 4 \frac{|g_s|^2}{\omega_s^2} \right) [1 - \exp(-i\omega_s t) - \exp(i\omega_s t) + 1] \\
&= \left( 8 \frac{|g_s|^2}{\omega_s^2} \right) [1 - \cos(\omega_s t)].
\end{aligned}$$

E portanto:

$$\chi_{l \neq k, k}(t) = \exp \left\{ (-8) \sum_s |g_s|^2 \left[ \frac{1 - \cos(\omega_s t)}{\omega_s^2} \right] \left[ \frac{1}{2} + \langle n(T, \omega_s) \rangle \right] \right\}. \quad (\text{A.23})$$

#### A.4.2 A matriz densidade na base dos estados coerentes

Vamos escrever a matriz densidade  $\rho_B(0)$  na base dos estados coerentes. Se o campo está em equilíbrio térmico em certa temperatura  $T$ , temos:

$$\rho_B(0) = \frac{\exp(-\beta H_B)}{Z},$$

onde:

$$Z = \text{Tr}_B \left\{ \exp(-\beta H_B) \right\}.$$

Comecemos notando que,  $[(a_\lambda^\dagger a_\lambda), (a_{\lambda'}^\dagger a_{\lambda'})] = 0$  e podemos escrever:

$$\begin{aligned}\rho_B(0) &= \frac{\exp(-\beta H_B)}{Z} \\ &= \frac{\exp\left(-\beta \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right)}{Z} \\ &= \frac{1}{Z} \prod_\lambda \exp\left(-\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \\ &= \frac{1}{Z} \prod_\lambda \rho_\lambda,\end{aligned}$$

onde definimos:

$$\rho_\lambda \equiv \exp\left(-\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right).$$

Vamos considerar a base de estados coerentes  $\{|\alpha_\lambda\rangle\}$ . Para cada modo  $\lambda$ ,  $|\alpha_\lambda\rangle$  é autoestado do operador  $a_\lambda$ , com autovalor  $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}$ . Ou seja:

$$a_\lambda |\alpha_\lambda\rangle = \alpha_\lambda |\alpha_\lambda\rangle.$$

Decorre então que, para cada modo:

$$|\alpha_\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{A.24})$$

com uma relação de completeza em cada modo, dada por:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_\lambda |\alpha_\lambda\rangle \langle\alpha_\lambda| = \mathbb{1}_{B_\lambda}.$$

Assim, notemos que:

$$\begin{aligned}\rho_\lambda &= \exp\left(-\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \mathbb{1}_{B_\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_\lambda |\alpha_\lambda\rangle \langle\alpha_\lambda| \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) |\alpha_\lambda\rangle \langle\alpha_\lambda| \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right).\end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) |\alpha_\lambda\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m| \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) |\alpha_\lambda\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \hbar\omega_\lambda m\right) \langle m|\alpha_\lambda\rangle,\end{aligned}$$

e pela equação (A.24):

$$\begin{aligned}\langle m|\alpha_\lambda\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_\lambda^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{2}\right) \frac{\alpha_\lambda^m}{\sqrt{m!}}.\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) |\alpha_\lambda\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda m\right) \exp\left(-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{2}\right) \frac{\alpha_\lambda^m}{\sqrt{m!}} \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \frac{[\exp(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda)\alpha_\lambda]^m}{\sqrt{m!}}.\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

Agora, seja:

$$\zeta_\lambda \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda\right)\alpha_\lambda.\quad (\text{A.26})$$

Combinando as equações (A.24) e (A.26), temos:

$$\begin{aligned}|\zeta_\lambda\rangle &= \exp\left(-\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta_\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\exp(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda)\alpha_\lambda]^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\langle m|\zeta_\lambda\rangle &= \exp\left(-\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\exp(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda)\alpha_\lambda]^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2}\right) \frac{[\exp(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda)\alpha_\lambda]^m}{\sqrt{m!}},\end{aligned}$$

de forma que:

$$\langle m|\zeta_\lambda\rangle \exp\left(\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2}\right) = \frac{[\exp(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda)\alpha_\lambda]^m}{\sqrt{m!}}.$$

Substituindo na equação (A.25), obtemos:

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) |\alpha_\lambda\rangle &= \exp\left(-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \frac{[\exp(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda)\alpha_\lambda]^m}{\sqrt{m!}} \\ &= \exp\left(-\frac{|\alpha_\lambda|^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m|\zeta_\lambda\rangle \exp\left(\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2}\right) \\ &= \exp\left[-\frac{|\zeta_\lambda \exp(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda)|^2}{2}\right] \exp\left(\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2}\right) |\zeta_\lambda\rangle \\ &= \exp\left\{\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2} [1 - \exp(\beta\hbar\omega_\lambda)]\right\} |\zeta_\lambda\rangle\end{aligned}$$



Tomando o hermitiano conjugado:

$$\langle \alpha_\lambda | \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) = \exp\left\{\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2} [1 - \exp(\beta\hbar\omega_\lambda)]\right\} \langle \zeta_\lambda |.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \rho_\lambda &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) |\alpha_\lambda\rangle \langle \alpha_\lambda| \exp\left(-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_\lambda \exp\left\{\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2} [1 - \exp(\beta\hbar\omega_\lambda)]\right\} \exp\left\{\frac{|\zeta_\lambda|^2}{2} [1 - \exp(\beta\hbar\omega_\lambda)]\right\} |\zeta_\lambda\rangle \langle \zeta_\lambda| \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha_\lambda \exp\left\{|\zeta_\lambda|^2 [1 - \exp(\beta\hbar\omega_\lambda)]\right\} |\zeta_\lambda\rangle \langle \zeta_\lambda|. \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} \int d^2\alpha_\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\text{Re}\{\alpha_\lambda\} \int_{-\infty}^{+\infty} d\text{Im}\{\alpha_\lambda\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda\right) d\text{Re}\{\zeta_\lambda\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_\lambda\right) d\text{Im}\{\zeta_\lambda\} \\ &= \exp(\beta\hbar\omega_\lambda) \int d^2\zeta_\lambda. \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\rho_\lambda = \frac{1}{\pi} \exp(\beta\hbar\omega_\lambda) \int d^2\zeta_\lambda \exp\left\{-|\zeta_\lambda|^2 [\exp(\beta\hbar\omega_\lambda) - 1]\right\} |\zeta_\lambda\rangle \langle \zeta_\lambda| \quad (\text{A.27})$$

Por outro lado, a função de partição, fica:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr}_B \left\{ \exp\left(-\beta \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \right\} \\ &= \prod_\lambda \text{Tr}_{B_\lambda} \left\{ \exp\left(-\beta\hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) \right\} \\ &= \prod_\lambda \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} \langle n_\lambda | \exp\left(-\beta\hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda\right) | n_\lambda \rangle \\ &= \prod_\lambda \sum_{n_\lambda=0}^{\infty} \exp(-\beta\hbar\omega_\lambda n_\lambda) \\ &= \prod_\lambda \frac{1}{1 - \exp(-\beta\hbar\omega_\lambda)}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

e o valor esperado do operador número, é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle n(T, \omega_\lambda) \rangle &= \text{Tr}_B \left\{ a_\lambda^\dagger a_\lambda \rho_B(0) \right\} \\
&= \frac{\text{Tr}_B \left\{ \left[ \prod_k \exp(-\beta \hbar a_k^\dagger a_k) \right] a_\lambda^\dagger a_\lambda \right\}}{Z} \\
&= \frac{\left[ \prod_{k \neq \lambda} \sum_{n_k} \exp(-\beta \hbar \omega_k n_k) \right]}{\left[ \prod_{j \neq \lambda} \sum_{n_j} \exp(-\beta \hbar \omega_j n_j) \right]} \cdot \frac{\left[ \sum_{n_\lambda} n_\lambda \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda n_\lambda) \right]}{\left[ \sum_{n_\lambda} \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda n_\lambda) \right]} \\
&= \frac{-\frac{d}{d(\beta \hbar \omega_\lambda)} \left[ \sum_{n_\lambda} \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda n_\lambda) \right]}{\left[ \sum_{n_\lambda} \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda n_\lambda) \right]} \\
&= \frac{-\frac{d}{d(\beta \hbar \omega_\lambda)} \left[ \frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)} \right]}{\left[ \frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)} \right]} \\
&= \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)}{[1 - \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)]^2} [1 - \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)] \\
&= \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)} \\
&= \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1}. \tag{A.29}
\end{aligned}$$

Dessa maneira, usando as equações (A.27) e (A.28), obtemos:

$$\begin{aligned}
\rho_B(0) &= \prod_\lambda [1 - \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)] \rho_\lambda \\
&= \prod_\lambda [1 - \exp(-\beta \hbar \omega_\lambda)] \left( \frac{1}{\pi} \right) \exp(\beta \hbar \omega_\lambda) \\
&\quad \int d^2 \zeta_\lambda \exp \left\{ -|\zeta_\lambda|^2 [\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1] \right\} |\zeta_\lambda\rangle \langle \zeta_\lambda| \\
&= \prod_\lambda [\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1] \left( \frac{1}{\pi} \right) \int d^2 \zeta_\lambda \exp \left\{ -|\zeta_\lambda|^2 [\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1] \right\} |\zeta_\lambda\rangle \langle \zeta_\lambda|.
\end{aligned}$$

Por fim, usamos a equação (A.29), para escrever:

$$\rho_B(0) = \prod_\lambda \left[ \frac{1}{\pi \langle n(T, \omega_\lambda) \rangle} \right] \int d^2 \zeta_\lambda \exp \left[ -\frac{|\zeta_\lambda|^2}{\langle n(T, \omega_\lambda) \rangle} \right] |\zeta_\lambda\rangle \langle \zeta_\lambda|. \tag{A.30}$$

### A.5 Calculando a integral $\mathcal{I}(t)$

Vamos calcular a integral  $\mathcal{I}(t)$  para o caso de uma densidade ôhmica de estados. Portanto, consideremos:

$$\mathcal{I}(t) = (-8\eta) \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega}\right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}\right].$$

Primeiro notemos que:

$$\left[\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega}\right] = \int_0^t dt' \sin(\omega t'). \quad (\text{A.31})$$

Assim, a primeira integral, fica:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega \left[\frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega}\right] \exp\left(\frac{-\omega}{\omega_c}\right) &= \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \exp\left(\frac{-\omega}{\omega_c}\right) \sin(\omega t') \\ &= \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \exp\left(\frac{-\omega}{\omega_c}\right) \left[\frac{\exp(i\omega t') - \exp(-i\omega t')}{2i}\right] \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^t dt' \left(\frac{1}{\frac{-1}{\omega_c} + it'}\right) \exp\left[\frac{-\omega}{\omega_c} + i\omega t'\right] \Big|_0^\infty \\ &\quad - \frac{1}{2i} \int_0^t dt' \left(\frac{1}{\frac{-1}{\omega_c} - it'}\right) \exp\left[\frac{-\omega}{\omega_c} - i\omega t'\right] \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^t dt' \omega_c \left(\frac{1}{1 - i\omega_c t'} - \frac{1}{1 + i\omega_c t'}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^t dt' \omega_c \left(\frac{1 + i\omega_c t' - 1 + i\omega_c t'}{1 + \omega_c^2 t'^2}\right) \\ &= \int_0^t dt' \frac{\omega_c^2 t'}{1 + \omega_c^2 t'^2}, \end{aligned}$$

Agora, seja  $x = \omega_c t'$ , de forma que,  $dx = \omega_c dt'$ . Assim, notemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \frac{\omega_c^2 t'}{1 + \omega_c^2 t'^2} &= \int_0^{\omega_c t} \frac{x dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{\ln(1 + x^2)}{2} \Big|_0^{\omega_c t} \\ &= \frac{\ln(1 + \omega_c^2 t^2)}{2}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{I}(t) = (-4\eta) \left[\frac{\ln(1 + \omega_c^2 t^2)}{2} + \Xi\right], \quad (\text{A.32})$$

onde definimos a integral:

$$\Xi = 2 \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} \right] \left[ \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right) - 1} \right],$$

e também:

$$\omega_T \equiv \frac{1}{\hbar \beta} = \frac{k_B T}{\hbar}.$$

Agora, vamos calcular  $\Xi$ . Novamente, usando (A.31), vale que:

$$\Xi = 2 \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \sin(\omega t') \left[ \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right) - 1} \right].$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right) - 1} &= \frac{\exp\left(-\frac{\omega}{\omega_T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_T}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_T}\right) \exp\left(-n \frac{\omega}{\omega_T}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-(n+1) \frac{\omega}{\omega_T}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n \frac{\omega}{\omega_T}\right), \end{aligned}$$

de forma que

$$\Xi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \sin(\omega t') \exp\left(-n \frac{\omega}{\omega_T}\right).$$

Como agora não há denominador singular no integrando, podemos escrever também

$$\Xi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt' \operatorname{Im} \left[ \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \exp(i\omega t') \exp\left(-n \frac{\omega}{\omega_T}\right) \right].$$

Integrando nas frequências:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \exp(i\omega t') \exp\left(-n \frac{\omega}{\omega_T}\right) &= \int_0^\infty d\omega \exp \left[ \omega \left( it' - \frac{1}{\omega_c} - \frac{n}{\omega_T} \right) \right] \\ &= \frac{\exp \left[ \omega \left( it' - \frac{1}{\omega_c} - \frac{n}{\omega_T} \right) \right]}{it' - \frac{1}{\omega_c} - \frac{n}{\omega_T}} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{-1}{it' - \frac{1}{\omega_c} - \frac{n}{\omega_T}} \\ &= \frac{\omega_T}{-i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n}, \end{aligned}$$

e obtemos:

$$\Xi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt' \operatorname{Im} \left[ \frac{\omega_T}{-i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n} \right].$$

Racionalizando:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_T}{(-i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n)} &= \frac{\omega_T}{(-i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n)} \frac{(i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n)}{(i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n)} \\ &= \frac{\omega_T (i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n)}{(\omega_T t')^2 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{\omega_T}{-i\omega_T t' + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n} \right] = \frac{\omega_T^2 t'}{(\omega_T t')^2 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2}.$$

Para integrar em  $t'$ , basta fazer a substituição:

$$u = (\omega_T t')^2 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2 \rightarrow du = 2\omega_T^2 t' dt',$$

pois assim:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t dt' \frac{\omega_T^2 t'}{(\omega_T t')^2 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2} &= \int_{\left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2}^{(\omega_T t)^2 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2} \frac{du}{u} \\ &= \ln \left[ (\omega_T t)^2 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2 \right] - \ln \left[ \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Donde:

$$\Xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ln \left[ (\omega_T t)^2 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2 \right] - \ln \left[ \left(\frac{\omega_T}{\omega_c} + n\right)^2 \right] \right\}.$$

Agora, notemos que:

$$\begin{aligned}
\ln \left[ (\omega_T t)^2 + \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + n \right)^2 \right] - \ln \left[ \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + n \right)^2 \right] &= \ln \left[ \left| i\omega_T t + \frac{\omega_T}{\omega_c} + n \right|^2 \right] \\
&\quad - \ln \left[ \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + n \right)^2 \right] \\
&= \ln \left[ n^2 \left| 1 + \frac{i\omega_T t + \frac{\omega_T}{\omega_c}}{n} \right|^2 \right] \\
&\quad - \ln \left[ n^2 \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + 1 \right)^2 \right] \\
&= \ln \left[ \left| 1 + \frac{i\omega_T t + \frac{\omega_T}{\omega_c}}{n} \right|^2 \right] + \ln(n^2) \\
&\quad - \ln \left[ \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + 1 \right)^2 \right] - \ln(n^2) \\
&= \ln \left[ \left| 1 + \frac{i\omega_T t + \frac{\omega_T}{\omega_c}}{n} \right|^2 \right] - 2 \ln \left( 1 + \frac{\omega_T}{\omega_c} \right).
\end{aligned}$$

Vamos simplificar a notação, definindo:

$$a \equiv \frac{\omega_T}{\omega_c},$$

e também:

$$z \equiv \frac{\omega_T}{\omega_c} + i\omega_T t = a + i\omega_T t.$$

Juntando tudo:

$$\begin{aligned}
\Xi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \ln \left[ \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^2 \right] - 2 \ln \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \right\} \\
&= \ln \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^2 \right] - 2 \ln \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \right].
\end{aligned}$$

Também podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\ln \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^2 \right] &= \ln \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) \left( 1 + \frac{z^*}{n} \right) \right] \\
&= \ln \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) \exp \left[ - \left( \frac{a + i\omega_T t'}{n} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \left( 1 + \frac{z^*}{n} \right) \exp \left[ - \left( \frac{a - i\omega_T t'}{n} \right) \right] \exp \left( 2 \frac{a}{n} \right) \right\} \\
&= \ln \left\{ \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) \exp \left( - \frac{z}{m} \right) \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z^*}{n} \right) \exp \left( - \frac{z^*}{n} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \left[ \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left( 2 \frac{a}{k} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
2 \ln \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \right] &= \ln \left\{ \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{m} \right) \exp \left( - \frac{a}{m} \right) \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \exp \left( - \frac{a}{n} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \left[ \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left( 2 \frac{a}{k} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Xi &= \ln \left\{ \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) \exp \left( - \frac{z}{m} \right) \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z^*}{n} \right) \exp \left( - \frac{z^*}{n} \right) \right] \left[ \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left( 2 \frac{a}{k} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \ln \left\{ \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{m} \right) \exp \left( - \frac{a}{m} \right) \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \exp \left( - \frac{a}{n} \right) \right] \left[ \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left( 2 \frac{a}{k} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\Xi &= \ln \left\{ \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) \exp \left( - \frac{z}{m} \right) \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z^*}{n} \right) \exp \left( - \frac{z^*}{n} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \ln \left\{ \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{m} \right) \exp \left( - \frac{a}{m} \right) \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right) \exp \left( - \frac{a}{n} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Pela definição de Weierstrass da função  $\Gamma$ , temos:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) \exp \left( - \frac{z}{m} \right),$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler - Mascheroni. Dessa maneira:

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = \exp(\gamma z) \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) \exp \left( - \frac{z}{m} \right),$$

ou seja,

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \exp(\gamma z) \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) \exp \left( - \frac{z}{m} \right),$$

e portanto:

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) \exp\left(-\frac{z}{m}\right) = \frac{\exp(-\gamma z)}{z!}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \Xi &= \ln \left[ \left( \frac{\exp(-\gamma z)}{z!} \right) \left( \frac{\exp(-\gamma z^*)}{z^*!} \right) \right] - \ln \left[ \left( \frac{\exp(-\gamma a)}{a!} \right) \left( \frac{\exp(-\gamma a)}{a!} \right) \right] \\ &= \ln \left[ \left( \frac{\exp(-2\gamma a)}{|z!|} \right) \right] - \ln \left[ \left( \frac{\exp(-2\gamma a)}{(a!)^2} \right) \right] \\ &= \ln \left[ \left( \frac{1}{|z!|^2} \right) \right] - \ln \left[ \left( \frac{1}{(a!)^2} \right) \right] \\ &= \ln \left[ \frac{(a!)^2}{|z!|^2} \right] \\ &= 2 \ln \left( \frac{a!}{|z!|} \right) \\ &= 2 \ln \left[ \frac{\left( \frac{\omega_T}{\omega_c} \right)!}{\left| \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + i\omega_T t \right)! \right|} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, pela equação (A.32), segue que:

$$\mathcal{J}(t) = \ln \left\{ \frac{\left| \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} + i\omega_T t \right)! \right|^4}{(1 + \omega_c^2 t^2) \left[ \left( \frac{\omega_T}{\omega_c} \right)! \right]^4} \right\}^{2\eta}.$$

## A.6 Os elementos de matriz de $\rho_S(t)$ para $n$ qubits

Vamos adaptar o apêndice A.3 para o caso de  $n$  qubits. Notemos então que pela equação (2.28), temos:

$$\begin{aligned} \rho_S(t) &= \text{Tr}_B \left\{ U_S(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) U_S^\dagger(t) \right\} \\ &= U_S(t) \text{Tr}_B \left\{ U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) U_B^\dagger(t) \right\} U_S^\dagger(t) \\ &= U_S(t) \text{Tr}_B \left\{ U_B^\dagger(t) U_B(t) U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) \right\} U_S^\dagger(t) \\ &= U_S(t) \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) \right\} U_S^\dagger(t), \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade cíclica do traço e a unitariedade de  $U_B(t)$ . Vamos definir, também:

$$\rho_{IS}(t) \equiv U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t),$$



para escrever:

$$\rho_{IS}(t) = \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) \rho(0) U_{SB}^\dagger(t) \right\}.$$

Assim, pela equação (2.22):

$$\rho_{IS}(t) = \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) \left[ \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) \right] U_{SB}^\dagger(t) \right\}. \quad (\text{A.33})$$

Tínhamos:

$$U_{SB}(t) = \exp \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\sigma_{j,z}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \exp [i \phi(t)], \quad (\text{A.34})$$

e  $\mathcal{B}_{j,\lambda}(t)$  é anti-hermitiano, pois:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j,\lambda}^\dagger(t) &= \left[ \kappa_{j,\lambda}(t) a_{j,\lambda}^\dagger - \kappa_{j,\lambda}^*(t) a_{j,\lambda} \right]^\dagger \\ &= \kappa_{j,\lambda}^*(t) a_{j,\lambda} - \kappa_{j,\lambda}(t) a_{j,\lambda}^\dagger \\ &= - \left[ \kappa_{j,\lambda}(t) a_{j,\lambda}^\dagger - \kappa_{j,\lambda}^*(t) a_{j,\lambda} \right] \\ &= - \mathcal{B}_{j,\lambda}(t). \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$U_{SB}^\dagger(t) = \exp \left[ - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\sigma_{j,z}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \exp [-i \phi(t)]. \quad (\text{A.35})$$

Agora, seja  $\Lambda_{k_j}$  o autovalor do operador  $\sigma_{j,z}$ , de forma que:

$$\sigma_{j,z} |k_1 k_2 \dots k_j \dots k_{n-1} k_n\rangle = \Lambda_{k_j} |k_1 k_2 \dots k_j \dots k_{n-1} k_n\rangle,$$

e assim, vemos que uma opção é escolher:

$$\Lambda_{k_j} = (-1)^{k_j} = \begin{cases} +1, & \text{se } k_j = 0, \\ -1, & \text{se } k_j = 1. \end{cases}$$

Vamos calcular um elemento de matriz geral substituindo as equações (A.34) e

(A.35) na equação (A.33):

$$\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \rho_{IS}(t) | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{l} | \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) [\rho_S(0) \otimes \rho_B(0)] U_{SB}^\dagger(t) \right\} | \vec{k} \rangle \\
&= \text{Tr}_B \left\{ \langle \vec{l} | U_{SB}(t) [\rho_S(0) \otimes \rho_B(0)] U_{SB}^\dagger(t) | \vec{k} \rangle \right\} \\
&= \text{Tr}_B \left\{ \langle \vec{l} | \exp \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\sigma_{j,z}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] [\rho_S(0) \otimes \rho_B(0)] \right. \\
&\quad \left. \exp \left[ - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\sigma_{j,z}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] | \vec{k} \rangle \right\} \\
&= \langle \vec{l} | \rho_S(0) | \vec{k} \rangle \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Lambda_{l_j}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \rho_B(0) \right. \\
&\quad \left. \exp \left[ - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Lambda_{k_j}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \right\} \\
&= \langle \vec{l} | \rho_S(0) | \vec{k} \rangle \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Lambda_{l_j} - \Lambda_{k_j}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \rho_B(0) \right\} \\
&= \langle \vec{l} | \rho_S(0) | \vec{k} \rangle \chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t), \tag{A.36}
\end{aligned}$$

onde definimos:

$$\chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t) \equiv \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\Lambda_{l_j} - \Lambda_{k_j}}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \rho_B(0) \right\}.$$

O estado inicial é dado pela equação (2.24), de forma que:

$$\langle \vec{l} | \rho_S(0) | \vec{k} \rangle = c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^*.$$

Por outro lado, voltando da representação de interação, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{l} | \rho_{IS}(t) | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{l} | U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t) | \vec{k} \rangle \\
&= \langle \vec{l} | \exp \left[ \left( \frac{i}{\hbar} \right) \sum_{j=1}^n \hbar \omega_{j,o} \sigma_{j,z} t \right] \rho_S(t) \exp \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right) \sum_{j=1}^n \hbar \omega_{j,o} \sigma_{j,z} t \right] | \vec{k} \rangle \\
&= \exp \left( i \sum_{j=1}^n \omega_{j,o} \Lambda_{l_j} t \right) \langle \vec{l} | \rho_S(0) | \vec{k} \rangle \exp \left( -i \sum_{j=1}^n \omega_{j,o} \Lambda_{k_j} t \right) \\
&= \exp \left[ i \sum_{j=1}^n \omega_{j,o} (\Lambda_{l_j} - \Lambda_{k_j}) t \right] \langle \vec{l} | \rho_S(0) | \vec{k} \rangle \\
&= \exp \left( 2 i \Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t \right) \langle \vec{l} | \rho_S(0) | \vec{k} \rangle,
\end{aligned}$$

onde definimos:

$$\Omega_{\vec{l}, \vec{k}} \equiv \sum_{j=1}^n \omega_{j,o} \left( \frac{\Lambda_{l_j} - \Lambda_{k_j}}{2} \right).$$

Em analogia ao caso de um qubit, notemos que também podemos escrever:

$$\frac{\Lambda_{l_j} - \Lambda_{k_j}}{2} = (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) = \begin{cases} (-1)^{l_j} & , \text{ se } l_j \neq k_j, \\ 0 & , \text{ se } l_j = k_j. \end{cases}$$

Substituindo tudo na equação (A.36), obtemos:

$$\rho_S(t) = \sum_{\vec{l}, \vec{k}} c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^* \exp(-2 i \Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t) \chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t) \left| \vec{l} \right\rangle \left\langle \vec{k} \right|, \quad (\text{A.37})$$

com

$$\Omega_{\vec{l}, \vec{k}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \omega_{j,o}$$

e

$$\chi_{\vec{l}, \vec{k}}(t) = \text{Tr}_B \left\{ \exp \left[ \sum_{j=1}^n (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j,\lambda}(t) \right] \rho_B(0) \right\}.$$



## APÊNDICE B – PURIFICAÇÃO QUÂNTICA

### B.1 Uma possível purificação para um qubit

Nosso objetivo nesse apêndice é encontrar coeficientes  $\alpha_{l,k}(t)$ , que satisfaçam ao vínculo:

$$\sum_{\lambda} \alpha_{l,\lambda}(t) \alpha_{k,\lambda}^*(t) = c_l c_k^* \exp \left[ -2 i (-1)^l (1 - \delta_{lk}) \omega_o t \right] \exp \left[ (1 - \delta_{lk}) \mathcal{I}(t) \right]. \quad (\text{B.1})$$

Como nosso espaço ainda não é tão grande, vamos explicitar os termos desse somatório. Notemos que:

- Se  $l = k = 0$ :

$$i = 0 \rightarrow |\alpha_{00}(t)|^2 |0\rangle \langle 0|$$

$$i = 1 \rightarrow |\alpha_{01}(t)|^2 |0\rangle \langle 0|$$

- Se  $l = 0$  e  $k = 1$ :

$$\lambda = 0 \rightarrow \alpha_{00}(t) \alpha_{10}^*(t) |0\rangle \langle 1|$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \alpha_{01}(t) \alpha_{11}^*(t) |0\rangle \langle 1|$$

- Se  $l = k = 1$ :

$$\lambda = 0 \rightarrow |\alpha_{10}(t)|^2 |1\rangle \langle 1|$$

$$\lambda = 1 \rightarrow |\alpha_{11}(t)|^2 |1\rangle \langle 1|$$

- Se  $l = 1$  e  $k = 0$ :

$$\lambda = 0 \rightarrow \alpha_{10}(t) \alpha_{00}^*(t) |1\rangle \langle 0|$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \alpha_{11}(t) \alpha_{01}^*(t) |1\rangle \langle 0|.$$

Assim, para igualar essas matrizes, vemos que basta satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} |\alpha_{00}(t)|^2 + |\alpha_{01}(t)|^2 = |c_0|^2 \\ |\alpha_{10}(t)|^2 + |\alpha_{11}(t)|^2 = |c_1|^2 \\ \alpha_{10} \alpha_{00}^* + \alpha_{11} \alpha_{01}^* = c_1 c_0^* \mu(t) \exp(2i\omega_o t) \\ \alpha_{00} \alpha_{10}^* + \alpha_{01} \alpha_{11}^* = c_0 c_1^* \mu(t) \exp(-2i\omega_o t). \end{cases}$$

Vamos começar definindo as funções  $s, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , como:

$$\begin{cases} s(t) \equiv \left[ 1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ d(t) \equiv \frac{\mu(t)}{\left[ 1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)} \right]^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

de forma que:

$$s(t) d(t) = \mu(t). \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado, notemos que:

$$\begin{aligned}
s^2(t) + d^2(t) &= \left[ 1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)} \right] + \left[ \frac{\mu^2(t)}{1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)}} \right] \\
&= \frac{\left[ 1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)} \right]^2 + \mu^2(t)}{1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)}} \\
&= \frac{1 + 2\sqrt{1 - \mu^2(t)} + 1 - \mu^2(t) + \mu^2(t)}{1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)}} \\
&= \frac{2 + 2\sqrt{1 - \mu^2(t)}}{1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)}} \\
&= 2.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Vamos propor o Ansatz:

$$\alpha_{00}(t) = \left( \frac{c_0}{\sqrt{2}} \right) s(t) \exp(-i\omega_o t) \tag{B.4}$$

$$\alpha_{01}(t) = \left( \frac{c_0}{\sqrt{2}} \right) d(t) \exp(-i\omega_o t) \tag{B.5}$$

$$\alpha_{10}(t) = \left( \frac{c_1}{\sqrt{2}} \right) d(t) \exp(i\omega_o t) \tag{B.6}$$

$$\alpha_{11}(t) = \left( \frac{c_1}{\sqrt{2}} \right) s(t) \exp(i\omega_o t), \tag{B.7}$$

e verificaremos que essas definições satisfazem os vínculos da equação (B.1). Começando pelos termos diagonais, se  $l = k = 0$ :

$$\begin{aligned}
|\alpha_{00}(t)|^2 + |\alpha_{01}(t)|^2 &= \left( \frac{|c_0|^2}{2} \right) s^2(t) + \left( \frac{|c_0|^2}{2} \right) d^2(t) \\
&= \left( \frac{|c_0|^2}{2} \right) [s^2(t) + d^2(t)] \\
&= |c_0|^2,
\end{aligned} \tag{B.8}$$

onde usamos a equação (B.3). Analogamente, se  $l = k = 1$ :

$$\begin{aligned}
 |\alpha_{10}(t)|^2 + |\alpha_{11}(t)|^2 &= \left(\frac{|c_1|^2}{2}\right) s^2(t) + \left(\frac{|c_1|^2}{2}\right) d^2(t) \\
 &= \left(\frac{|c_1|^2}{2}\right) [s^2(t) + d^2(t)] \\
 &= |c_1|^2.
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Nos termos não diagonais, para  $l = 0$  e  $k = 1$ , temos:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{00}(t) \alpha_{10}^*(t) + \alpha_{01}(t) \alpha_{11}^*(t) &= \left(\frac{1}{2}\right) [c_0 s(t) \exp(-i\omega_o t)] [c_1^* d(t) \exp(-i\omega_o t)] \\
 &+ \left(\frac{1}{2}\right) [c_0 d(t) \exp(-i\omega_o t)] [c_1^* s(t) \exp(-i\omega_o t)] \\
 &= c_0 c_1^* \exp(-2i\omega_o t) [s(t) d(t)] \\
 &= c_0 c_1^* \exp(-2i\omega_o t) \mu(t),
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

onde usamos a equação (B.2). Se  $l = 1$  e  $k = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{10}(t) \alpha_{00}^*(t) + \alpha_{11}(t) \alpha_{01}^*(t) &= \left(\frac{1}{2}\right) [c_1 d(t) \exp(i\omega_o t)] [c_0^* s(t) \exp(i\omega_o t)] \\
 &+ \left(\frac{1}{2}\right) [c_1 s(t) \exp(i\omega_o t)] [c_0^* d(t) \exp(i\omega_o t)] \\
 &= c_1 c_0^* \exp(2i\omega_o t) [s(t) d(t)] \\
 &= c_1 c_0^* \exp(2i\omega_o t) \mu(t).
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Por fim, notemos que pelas equações (B.8) e (B.9),

$$\begin{aligned}
 \sum_{l,k} |\alpha_{lk}(t)|^2 &= |c_0|^2 + |c_1|^2 \\
 &= 1,
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

e a normalização da função de onda no espaço purificado fica garantida, já que também vale a equação (2.4) no espaço original.

Portanto, essa é uma possível purificação desse sistema quântico, válida em todo tempo. Para essa purificação, a função de onda no espaço purificado, fica:

$$|\psi_p(t)\rangle = \sum_{l,k} \alpha_{lk}(t) |l\rangle \otimes |k\rangle,$$

com os coeficientes  $\alpha_{lk}(t)$  dados pelas equações (B.4) até (B.7).

## B.2 O operador de evolução temporal no espaço purificado

No espaço purificado, temos a seguinte função de onda:

$$|\psi_p(t)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} c_0 S(t) \\ c_0 D(t) \\ c_1 D^*(t) \\ c_1 S^*(t) \end{pmatrix}.$$

Em  $t = 0$ ,

$$\mu(0) = 1 \implies S(0) = D(0) = 1,$$

de forma que:

$$|\psi_p(0)\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Procuramos pelo operador  $U_p(t)$  do grupo de Lie  $SU(2^2)$ , tal que:

$$|\psi_p(t)\rangle = U_p(t) |\psi_p(0)\rangle.$$

Podemos transformar esse problema de matrizes  $4 \times 4$  em dois problemas de matrizes  $2 \times 2$ . Partiremos de um ansatz e começaremos definindo as matrizes:

$$U_{p_0}(t) \equiv \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} S(t) + D(t) & S(t) - D(t) \\ D(t) - S(t) & S(t) + D(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

e também:

$$U_{p_1}(t) \equiv \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) \\ S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} U_{p_0}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} S(t) + D(t) & S(t) - D(t) \\ D(t) - S(t) & S(t) + D(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} S(t) + D(t) + S(t) - D(t) \\ D(t) - S(t) + S(t) + D(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S(t) \\ D(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



e também:

$$\begin{aligned}
 U_{p_0}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) \\ S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} S^*(t) + D^*(t) + D^*(t) - S^*(t) \\ S^*(t) - D^*(t) + S^*(t) + D^*(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} D^*(t) \\ S^*(t) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 2^2 \det[U_{p_0}(t)] &= \begin{vmatrix} S(t) + D(t) & S(t) - D(t) \\ D(t) - S(t) & S(t) + D(t) \end{vmatrix} \\
 &= [S(t) + D(t)] [S(t) + D(t)] - [S(t) - D(t)] [D(t) - S(t)] \\
 &= [S(t) + D(t)]^2 + [S(t) - D(t)]^2 \\
 &= 2 [S^2(t) + D^2(t)] \\
 &= 2 \exp(-2i\omega_o t) [s^2(t) + d^2(t)] \\
 &= 4 \exp(-2i\omega_o t),
 \end{aligned}$$

e portanto:

$$\det[U_{p_0}(t)] = \exp(-2i\omega_o t).$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
 2^2 \det[U_{p_1}(t)] &= \begin{vmatrix} S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) \\ S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) \end{vmatrix} \\
 &= [S^*(t) + D^*(t)] [S^*(t) + D^*(t)] - [D^*(t) - S^*(t)] [S^*(t) - D^*(t)] \\
 &= [S^*(t) + D^*(t)]^2 + [S^*(t) - D^*(t)]^2 \\
 &= 2 \{ [S^*(t)]^2 + [D^*(t)]^2 \} \\
 &= 2 \exp(2i\omega_o t) [s^2(t) + d^2(t)] \\
 &= 4 \exp(2i\omega_o t),
 \end{aligned}$$

e portanto:

$$\det[U_{p_1}(t)] = \exp(2i\omega_o t).$$

Dessa forma, vamos propor o seguinte operador bloco diagonal no espaço purificado:

$$U_p(t) = \begin{pmatrix} [U_{p_0}(t)] & [0]_{2 \times 2} \\ [0]_{2 \times 2} & [U_{p_1}(t)] \end{pmatrix}.$$

Ou seja:

$$U_p(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} S(t) + D(t) & S(t) - D(t) & 0 & 0 \\ D(t) - S(t) & S(t) + D(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) \\ 0 & 0 & S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) \end{pmatrix}.$$

Notemos que, como  $U_p(t)$  é bloco diagonal,

$$\begin{aligned} \det[U_p(t)] &= \det[U_{p_0}(t)] \times \det[U_{p_1}(t)] \\ &= \exp(-2i\omega_o t) \exp(2i\omega_o t) \\ &= 1, \end{aligned}$$

e verificamos que esse operador tem determinante especialmente igual a 1. Agora, precisamos mostrar que esse operador é, de fato, unitário. Faremos isso de maneira explícita, multiplicando as matrizes  $U_p(t)$  e  $U_p^\dagger(t)$ . Notemos então, que:

$$\begin{aligned} U_p(t) U_p^\dagger(t) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} S(t) + D(t) & S(t) - D(t) & 0 & 0 \\ D(t) - S(t) & S(t) + D(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) \\ 0 & 0 & S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) \end{pmatrix} \times \dots \\ &\dots \times \begin{pmatrix} S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) & 0 & 0 \\ S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(t) + D(t) & S(t) - D(t) \\ 0 & 0 & D(t) - S(t) & S(t) + D(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De forma geral, os termos diagonais são sempre do tipo:

$$\begin{aligned}
4 \left[ U_p(t) U_p^\dagger(t) \right]_{j,k=j} &= [S(t) + D(t)] [S^*(t) + D^*(t)] + [S(t) - D(t)] [S^*(t) - D^*(t)] \\
&= |S(t)|^2 + S(t) D^*(t) + S^*(t) D(t) + |D(t)|^2 \\
&\quad + |S(t)|^2 - S(t) D^*(t) - S^*(t) D(t) + |D(t)|^2 \\
&= 2 \left[ |S(t)|^2 + |D(t)|^2 \right] \\
&= 2 \left[ s^2(t) + d^2(t) \right] \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Portanto, na diagonal da matriz  $U_p(t) U_p^\dagger(t)$  temos sempre o número 1. Por outro lado, os termos não diagonais em módulo são sempre do tipo:

$$\begin{aligned}
4 \left| \left[ U_p(t) U_p^\dagger(t) \right]_{j,k \neq j} \right| &= [S(t) + D(t)] [D^*(t) - S^*(t)] + [S(t) - D(t)] [S^*(t) + D^*(t)] \\
&= S(t) D^*(t) - |S(t)|^2 + |D(t)|^2 - S^*(t) D(t) \\
&\quad + |S(t)|^2 + S(t) D^*(t) - S^*(t) D(t) - |D(t)|^2 \\
&= 2 [S(t) D^*(t) - S^*(t) D(t)] \\
&= 2 [s(t) d(t) - s(t) d(t)] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de forma, que:

$$U_p(t) U_p^\dagger(t) = U_p^\dagger(t) U_p(t) = \mathbb{1}_S \otimes \mathbb{1}_S.$$

Além disso, no tempo  $t = 0$ :

$$S(0) = D(0) = 1,$$

e de fato:

$$U_p(0) = \mathbb{1}_S \otimes \mathbb{1}_S.$$

### B.3 O Hamiltoniano no espaço purificado

Vamos calcular o Hamiltoniano que descreve a dinâmica no espaço purificado. Desejamos encontrar um Hamiltoniano  $H_p(t)$  hermitiano e de traço nulo, que satisfaz a equação de Schrödinger no espaço purificado. Ou seja,  $H_p(t)$  deve obedecer:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_p(t)\rangle = H_p(t) |\psi_p(t)\rangle.$$

Mas

$$|\psi_p(t)\rangle = U_p(t) |\psi_p(0)\rangle,$$

de forma que:

$$i\hbar \left[ \frac{dU_p(t)}{dt} \right] |\psi_p(0)\rangle = H_p(t) U_p(t) |\psi_p(0)\rangle.$$

Como a expressão é válida para qualquer estado  $|\psi_p(0)\rangle$  inicial, temos que:

$$i\hbar \left[ \frac{dU_p(t)}{dt} \right] = H_p(t) U_p(t),$$

e o Hamiltoniano fica:

$$H_p(t) = i\hbar \left[ \frac{dU_p(t)}{dt} \right] U_p^\dagger(t). \quad (\text{B.15})$$

Vamos determinar  $H_p(t)$  multiplicando as matrizes explicitamente. Como ambas matrizes são bloco diagonais, dividiremos o problema em blocos. Notemos primeiramente que pela equação (B.13), temos:

$$\left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \dot{S}(t) + \dot{D}(t) & \dot{S}(t) - \dot{D}(t) \\ \dot{D}(t) - \dot{S}(t) & \dot{S}(t) + \dot{D}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^*(t) + D^*(t) & D^*(t) - S^*(t) \\ S^*(t) - D^*(t) & S^*(t) + D^*(t) \end{pmatrix}$$

Comecemos pelos termos diagonais. Notemos que para o elemento da primeira linha e primeira coluna:

$$\begin{aligned} 4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{11} &= [\dot{S}(t) + \dot{D}(t)] [S^*(t) + D^*(t)] + [\dot{S}(t) - \dot{D}(t)] [S^*(t) - D^*(t)] \\ &= \dot{S}(t) S^*(t) + \dot{S}(t) D^*(t) + \dot{D}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t) \\ &\quad + \dot{S}(t) S^*(t) - \dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t) \\ &= 2 [\dot{S}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t)] \\ &= 4 \omega_S(t), \end{aligned}$$

onde definimos:

$$\omega_S(t) \equiv \left( \frac{1}{2} \right) [\dot{S}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t)]. \quad (\text{B.16})$$

Para o elemento 22:

$$\begin{aligned} 4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{22} &= [\dot{D}(t) - \dot{S}(t)] [D^*(t) - S^*(t)] + [\dot{S}(t) + \dot{D}(t)] [S^*(t) + D^*(t)] \\ &= 4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{11} \\ &= 2 [\dot{S}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t)] \\ &= 4 \omega_S(t). \end{aligned}$$

Para o elemento 12:

$$\begin{aligned}
4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{12} &= [\dot{S}(t) + \dot{D}(t)] [D^*(t) - S^*(t)] + [\dot{S}(t) - \dot{D}(t)] [S^*(t) + D^*(t)] \\
&= \dot{S}(t) D^*(t) - \dot{S}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t) \\
&\quad + \dot{S}(t) S^*(t) + \dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t) - \dot{D}(t) D^*(t) \\
&= 2 [\dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t)] \\
&= 4 \omega_B(t),
\end{aligned}$$

onde definimos a função:

$$\omega_B(t) \equiv \left( \frac{1}{2} \right) [\dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t)]. \quad (\text{B.17})$$

Para o elemento 21:

$$\begin{aligned}
4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{21} &= [\dot{D}(t) - \dot{S}(t)] [S^*(t) + D^*(t)] + [\dot{S}(t) + \dot{D}(t)] [S^*(t) - D^*(t)] \\
&= -4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{12} \\
&= -2 [\dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t)] \\
&= -4 \omega_B(t),
\end{aligned}$$

temos:

$$\left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) = \begin{pmatrix} \omega_S(t) & \omega_B(t) \\ -\omega_B(t) & \omega_S(t) \end{pmatrix}.$$

Para o outro bloco, pela equação (B.14), temos:

$$\left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \dot{S}^*(t) + \dot{D}^*(t) & \dot{D}^*(t) - \dot{S}^*(t) \\ \dot{S}^*(t) - \dot{D}^*(t) & \dot{S}^*(t) + \dot{D}^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(t) + D(t) & S(t) - D(t) \\ D(t) - S(t) & S(t) + D(t) \end{pmatrix}$$

O elemento 11, fica:

$$\begin{aligned}
4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) \right\}_{11} &= [\dot{S}^*(t) + \dot{D}^*(t)] [S(t) + D(t)] + [\dot{D}^*(t) - \dot{S}^*(t)] [D(t) - S(t)] \\
&= 4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{11}^* \\
&= 2 [\dot{S}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t)]^* \\
&= 4 \omega_S^*(t)
\end{aligned}$$

Para o elemento 22:

$$\begin{aligned}
4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) \right\}_{22} &= [\dot{S}^*(t) - \dot{D}^*(t)] [S(t) - D(t)] + [\dot{S}^*(t) + \dot{D}^*(t)] [S(t) + D(t)] \\
&= 4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) \right\}_{11} \\
&= 2 [\dot{S}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t)]^* \\
&= 4 \omega_S^*(t).
\end{aligned}$$

Para o elemento 12:

$$\begin{aligned}
4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) \right\}_{12} &= [\dot{S}^*(t) + \dot{D}^*(t)] [S(t) - D(t)] + [\dot{D}^*(t) - \dot{S}^*(t)] [S(t) + D(t)] \\
&= 4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_0}(t)}{dt} \right] U_{p_0}^\dagger(t) \right\}_{21}^* \\
&= 2 [\dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t)] \\
&= -4 \omega_B^*(t).
\end{aligned}$$

E para o elemento 21:

$$\begin{aligned}
4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) \right\}_{21} &= [\dot{S}^*(t) - \dot{D}^*(t)] [S(t) + D(t)] + [\dot{S}^*(t) + \dot{D}^*(t)] [D(t) - S(t)] \\
&= -4 \left\{ \left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) \right\}_{12} \\
&= -2 [\dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t)] \\
&= 4 \omega_B^*(t).
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos:

$$\left[ \frac{dU_{p_1}(t)}{dt} \right] U_{p_1}^\dagger(t) = \begin{pmatrix} \omega_S^*(t) & -\omega_B^*(t) \\ \omega_B^*(t) & \omega_S^*(t) \end{pmatrix}.$$

Juntando tudo, obtemos:

$$\left[ \frac{dU_p(t)}{dt} \right] U_p^\dagger(t) = \begin{pmatrix} \omega_S(t) & \omega_B(t) & 0 & 0 \\ -\omega_B(t) & \omega_S(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_S^*(t) & -\omega_B^*(t) \\ 0 & 0 & \omega_B^*(t) & \omega_S^*(t) \end{pmatrix}.$$

Portanto, pela equação (B.15):

$$H_p(t) = i\hbar \begin{pmatrix} \omega_S(t) & \omega_B(t) & 0 & 0 \\ -\omega_B(t) & \omega_S(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_S^*(t) & -\omega_B^*(t) \\ 0 & 0 & \omega_B^*(t) & \omega_S^*(t) \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que esse Hamiltoniano é um operador hermitiano e de traço nulo. Notemos então que, tomando o hermitiano conjugado, temos:

$$H_p^\dagger(t) = i\hbar \begin{pmatrix} -\omega_S^*(t) & \omega_B^*(t) & 0 & 0 \\ -\omega_B^*(t) & -\omega_S^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_S(t) & -\omega_B(t) \\ 0 & 0 & \omega_B(t) & -\omega_S(t) \end{pmatrix}.$$

Portando, para garantir a hermiticidade do Hamiltoniano purificado, precisamos garantir que as seguintes relações sejam verdadeiras:

$$\begin{cases} \omega_S(t) = -\omega_S^*(t) & \text{(B.18)} \\ \omega_B(t) = \omega_B^*(t). & \text{(B.19)} \end{cases}$$

Ou seja,  $\omega_S(t)$  é imaginário puro, enquanto  $\omega_B(t)$  deve ser real. Começemos pela segunda relação. Tínhamos:

$$\begin{cases} S(t) = s(t) \exp(-i\omega_o t) \\ D(t) = d(t) \exp(-i\omega_o t). \end{cases}$$

Derivando no tempo, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \left[ \dot{s}(t) - (i\omega_o) s(t) \right] \exp(-i\omega_o t) \\ \dot{D}(t) = \left[ \dot{d}(t) - (i\omega_o) d(t) \right] \exp(-i\omega_o t), \end{cases}$$

de forma, que:

$$\begin{aligned}
\omega_B(t) &= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{S}(t) D^*(t) - \dot{D}(t) S^*(t) \right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{s}(t) - (i\omega_o) s(t) \right] \exp(-i\omega_o t) \left[ d(t) \exp(i\omega_o t) \right] \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{d}(t) - (i\omega_o) d(t) \right] \exp(-i\omega_o t) \left[ s(t) \exp(i\omega_o t) \right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{s}(t) d(t) - (i\omega_o) s(t) d(t) - \dot{d}(t) s(t) + (i\omega_o) d(t) s(t) \right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{s}(t) d(t) - \dot{d}(t) s(t) \right],
\end{aligned}$$

e verificamos a relação (B.19):

$$\omega_B(t) = \omega_B^*(t).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\omega_S(t) &= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{S}(t) S^*(t) + \dot{D}(t) D^*(t) \right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{s}(t) - (i\omega_o) s(t) \right] \exp(-i\omega_o t) \left[ s(t) \exp(i\omega_o t) \right] \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{d}(t) - (i\omega_o) d(t) \right] \exp(-i\omega_o t) \left[ d(t) \exp(i\omega_o t) \right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \dot{s}(t) s(t) + \dot{d}(t) d(t) - (i\omega_o) \left[ s^2(t) + d^2(t) \right] \right\} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{s}(t) s(t) + \dot{d}(t) d(t) - 2(i\omega_o) \right].
\end{aligned}$$

Portanto, para  $\omega_S(t)$  ser imaginário puro, basta verificar que:

$$\dot{s}(t) s(t) + \dot{d}(t) d(t) = 0.$$

Mas, para todo tempo, vale que:

$$s^2(t) + d^2(t) = 2 \dots$$

Derivando ambos lados no tempo:

$$2 s(t) \dot{s}(t) + 2 d(t) \dot{d}(t) = 0 \implies \dot{s}(t) s(t) + \dot{d}(t) d(t) = 0,$$

e, de fato:

$$\omega_S(t) = -\omega_S^*(t).$$



Assim, verificamos que o Hamiltoniano purificado é, de fato, hermitiano. Além disso, obtemos:

$$\begin{cases} \omega_S(t) = -i\omega_o, \\ \omega_B(t) = \left(\frac{1}{2}\right) [\dot{s}(t) d(t) - \dot{d}(t) s(t)]. \end{cases}$$

Explicitamente:

$$H_p(t) = i\hbar \begin{pmatrix} -i\omega_o & \omega_B(t) & 0 & 0 \\ -\omega_B(t) & -i\omega_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega_o & -\omega_B(t) \\ 0 & 0 & \omega_B(t) & i\omega_o \end{pmatrix},$$

ou também:

$$H_p(t) = \begin{pmatrix} \hbar\omega_o & i\hbar\omega_B(t) & 0 & 0 \\ -i\hbar\omega_B(t) & \hbar\omega_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar\omega_o & -i\hbar\omega_B(t) \\ 0 & 0 & i\hbar\omega_B(t) & -\hbar\omega_o \end{pmatrix}.$$

Notemos ainda que, somando os termos diagonais, fica fácil ver que:

$$\text{Tr} \left\{ H_p(t) \right\} = 0.$$

Dessa forma, mostramos que o Hamiltoniano  $H_p(t)$  é um operador hermitiano e de traço nulo. Portanto, podemos escrever  $H_p(t)$  na base formada pelas matrizes de Pauli generalizadas. Começemos notando que, podemos escrever:

$$H_p(t) = \sigma_z \otimes \begin{pmatrix} \hbar\omega_o & i\hbar\omega_B(t) \\ -i\hbar\omega_B(t) & \hbar\omega_o \end{pmatrix},$$

e também:

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega_o & i\hbar\omega_B(t) \\ -i\hbar\omega_B(t) & \hbar\omega_o \end{pmatrix} = \hbar\omega_o \mathbb{1} - \hbar\omega_B(t) \sigma_y.$$

Dessa maneira, podemos escrever esse operador na base das matrizes de Pauli, como:

$$H_p(t) = \hbar \sigma_z \otimes [\omega_o \mathbb{1} - \omega_B(t) \sigma_y],$$

ou seja:

$$H_p(t) = \hbar \omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} - \hbar \omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_y. \quad (\text{B.20})$$

Por fim, vamos escrever a função  $\omega_B(t)$  em termos da função  $\mu(t)$ . Tínhamos definido:

$$\omega_B(t) = \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{s}(t) d(t) - \dot{d}(t) s(t) \right],$$

mas:

$$d(t) = \frac{\mu(t)}{s(t)} \implies \dot{d}(t) = \frac{\dot{\mu}(t) s(t) - \mu(t) \dot{s}(t)}{s^2(t)}.$$

Dessa maneira:

$$\begin{aligned} \omega_B(t) &= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ \dot{s}(t) d(t) - \dot{d}(t) s(t) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \dot{s}(t) \left[ \frac{\mu(t)}{s(t)} \right] - \left[ \frac{\dot{\mu}(t) s(t) - \mu(t) \dot{s}(t)}{s^2(t)} \right] s(t) \right\} \\ &= \frac{\dot{s}(t) \mu(t)}{s(t)} - \frac{\dot{\mu}(t)}{2} \\ &= \dot{s}(t) d(t) - \frac{\dot{\mu}(t)}{2}, \end{aligned}$$

e como:

$$s(t) = \left[ 1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

então:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \left(\frac{1}{2}\right) \left[ 1 + \sqrt{1 - \mu^2(t)} \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \left[ 1 - \mu^2(t) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ -2\mu(t) \right] \dot{\mu}(t) \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right) \left[ \frac{d(t) \dot{\mu}(t)}{\sqrt{1 - \mu^2(t)}} \right], \end{aligned}$$

de forma, que:

$$\begin{aligned}
\omega_B(t) &= \dot{s}(t) d(t) - \frac{\dot{\mu}(t)}{2} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right) \left[ \frac{d(t) \dot{\mu}(t)}{\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] d(t) - \frac{\dot{\mu}(t)}{2} \\
&= -\left(\frac{\dot{\mu}(t)}{2}\right) \left[ \frac{d^2(t)}{\sqrt{1-\mu^2(t)}} + 1 \right] \\
&= -\left(\frac{\dot{\mu}(t)}{2}\right) \left\{ \frac{\mu^2(t)}{[1 + \sqrt{1-\mu^2(t)}] \sqrt{1-\mu^2(t)}} + 1 \right\} \\
&= -\left(\frac{\dot{\mu}(t)}{2}\right) \left\{ \frac{\mu^2(t) + \sqrt{1-\mu^2(t)} + 1 - \mu^2(t)}{[1 + \sqrt{1-\mu^2(t)}] \sqrt{1-\mu^2(t)}} \right\} \\
&= -\left(\frac{\dot{\mu}(t)}{2}\right) \left\{ \frac{1 + \sqrt{1-\mu^2(t)}}{[1 + \sqrt{1-\mu^2(t)}] \sqrt{1-\mu^2(t)}} \right\} \\
&= -\left(\frac{\dot{\mu}(t)}{2}\right) \left[ \frac{1 + \sqrt{1-\mu^2(t)}}{1 + \sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \\
&= \frac{-\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, pela equação (B.20), obtemos:

$$H_p(t) = \hbar\omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} + \frac{\hbar\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}} \sigma_z \otimes \sigma_y. \quad (\text{B.21})$$

## B.4 O Hamiltoniano purificado para tempos curtos

### B.4.1 A expansão da função $\omega_B(t)$ para tempos curtos

Notemos que, para tempos curtos:

$$\mu(t) \approx \exp(-\mathcal{A}_T t^2),$$

e também:

$$\dot{\mu}(t) \approx (-2\mathcal{A}_T t) \exp(-\mathcal{A}_T t^2),$$

onde definimos:

$$\mathcal{A}_T \equiv 4\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right].$$

No apêndice B.4.2, mostramos que:

$$\mathcal{A}_T = 2 \eta \omega_c^2 + 4 \eta \omega_T^2 \psi^{(1)} \left( \frac{\omega_c + \omega_T}{\omega_c} \right),$$

onde  $\psi^{(1)}$  é a função trigamma, dada pela segunda derivada do logaritmo da função  $\Gamma(z)$ :

$$\psi^{(1)}(z) = \frac{d^2}{dz^2} \ln[\Gamma(z)],$$

e cuja representação em termos de uma série, é:

$$\psi^{(1)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Assim, para tempos curtos:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}(t)}{\sqrt{1-\mu^2(t)}} &\approx \frac{(-2 \mathcal{A}_T t) \exp(-\mathcal{A}_T t^2)}{\sqrt{1-\exp(-2 \mathcal{A}_T t^2)}} \\ &\approx \frac{(-2 \mathcal{A}_T t) (1 - \mathcal{A}_T t^2)}{\sqrt{1 - (1 - 2 \mathcal{A}_T t^2)}} \\ &= \frac{(-2 \mathcal{A}_T t) (1 - \mathcal{A}_T t^2)}{t\sqrt{2 \mathcal{A}_T}} \\ &= -\sqrt{2 \mathcal{A}_T} (1 - \mathcal{A}_T t^2), \end{aligned}$$

de onde segue que:

$$H_p(t) \approx \hbar \omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} - \hbar \left( \frac{\sqrt{2 \mathcal{A}_T}}{2} \right) (1 - \mathcal{A}_T t^2) \sigma_z \otimes \sigma_y, \quad (\text{B.22})$$

de forma, que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} H_p(t) = \hbar \omega_o \sigma_z \otimes \mathbb{1} - \hbar \left( \frac{\sqrt{2 \mathcal{A}_T}}{2} \right) \sigma_z \otimes \sigma_y,$$

e, de fato, não existe nenhuma divergência próximo de  $t = 0$ .

#### B.4.2 Calculando $\mathcal{A}_T$

Vamos calcular a integral  $\mathcal{A}_T$ , definida como:

$$\mathcal{A}_T \equiv 4\eta \int_0^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right].$$

Vamos começar definindo

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_o = 2\eta \int_0^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega, \end{array} \right. \quad (\text{B.23})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_1 = 4\eta \int_0^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \left[ \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right]. \end{array} \right. \quad (\text{B.24})$$

Pimeiramente, consideremos o primeiro termo da soma. Vamos definir a integral:

$$\mathcal{I}_v \equiv \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega,$$

e assim:

$$\mathcal{A}_o = 2\eta \mathcal{I}_v.$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= \omega & dv &= \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega \\ du &= d\omega & v &= -\omega_c \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{aligned}$$

Dessa maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_v &= \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \\ &= \omega (-\omega_c) \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Big|_0^\infty - (-\omega_c) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega \\ &= -\omega_c^2 \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Big|_0^\infty \\ &= \omega_c^2. \end{aligned}$$

Dessa maneira:

$$\mathcal{A}_o = 2 \eta \omega_c^2.$$

Agora, vamos focar nossa atenção no segundo termo, dado por:

$$\mathcal{A}_1 = 4\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \left[ \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right].$$

Vamos definir,

$$\omega_T \equiv \frac{1}{\hbar\beta} = \frac{k_B T}{\hbar},$$

para escrever:

$$\mathcal{A}_1 = 4\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \left[ \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right) - 1} \right].$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{\omega_T}\right) - 1} &= \frac{\exp\left(-\frac{\omega}{\omega_T}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_T}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_T}\right) \exp\left(-n \frac{\omega}{\omega_T}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-(n+1) \frac{\omega}{\omega_T}\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= 4\eta \int_0^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-(n+1) \frac{\omega}{\omega_T}\right] \\ &= 4\eta \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \omega \exp\left[-(n+1) \frac{\omega}{\omega_T}\right] \\ &= 4\eta \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\omega \exp\left[-\frac{\omega}{\omega_c} - (n+1) \frac{\omega}{\omega_T}\right] \omega \\ &= 4\eta \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\omega \exp\left[-\frac{\omega \omega_T}{\omega_c \omega_T} - (n+1) \frac{\omega \omega_c}{\omega_T \omega_c}\right] \omega \\ &= 4\eta \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\omega \exp\left\{-\frac{\omega [(n+1) \omega_c + \omega_T]}{\omega_c \omega_T}\right\} \omega \\ &= 4\eta \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\tilde{\omega}_n}\right) \omega, \end{aligned}$$

onde definimos:

$$\tilde{\omega}_n \equiv \frac{\omega_c \omega_T}{(n+1) \omega_c + \omega_T}.$$

Usando o resultado de  $\mathcal{I}_v$ , temos:

$$\int_0^{\infty} d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\tilde{\omega}_n}\right) \omega = \tilde{\omega}_n^2.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= 4\eta \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\omega_c \omega_T}{(n+1) \omega_c + \omega_T} \right]^2 \\ &= 4\eta \omega_T^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1 + \frac{\omega_T}{\omega_c}} \right)^2 \\ &= 4\eta \omega_T^2 \psi^{(1)}\left(1 + \frac{\omega_T}{\omega_c}\right) \\ &= 4\eta \omega_T^2 \psi^{(1)}\left(\frac{\omega_c + \omega_T}{\omega_c}\right), \end{aligned}$$

onde  $\psi^{(1)}$  é a função trigamma, dada pela segunda derivada do logaritmo da função  $\Gamma(z)$ . Ou seja:

$$\psi^{(1)}(z) = \frac{d^2}{dz^2} \ln[\Gamma(z)].$$

Sua representação em termos de uma série, é justamente:

$$\psi^{(1)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Assim, juntanto tudo, obtemos:

$$\mathcal{A}_T = 2 \eta \omega_c^2 + 4 \eta \omega_T^2 \psi^{(1)} \left( \frac{\omega_c + \omega_T}{\omega_c} \right).$$

## B.5 Possível purificação para $n$ qubits não interagentes

Precisamos encontrar os coeficientes  $\alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t)$ , que satisfazem aos vínculos:

$$\sum_{\vec{\lambda}} \alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t) \alpha_{\vec{k}, \vec{\lambda}}^*(t) = c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^* \exp(-2i \Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t) \exp \left[ \sum_{j=1}^n (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{J}_j(t) \right]. \quad (\text{B.25})$$

Como cada qubit interage com o seu banho, vamos propor um Ansatz de que os coeficientes  $\alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t)$  podem ser fatorados, da seguinte maneira:

$$\alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t) = \frac{c_{\vec{l}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n \xi_{l_j, \lambda_j}(t).$$

Daí, escolhemos  $\xi_{l_j, \lambda_j}(t)$  como fizemos para um qubit:

$$\xi_{l_j, \lambda_j}(t) = \begin{cases} s_j(t) \exp(-i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = \lambda_j = 0; \\ d_j(t) \exp(-i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = 0, \text{ e } \lambda_j = 1; \\ d_j(t) \exp(i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = 1, \text{ e } \lambda_j = 0; \\ s_j(t) \exp(i\omega_{j,o}t), & \text{se } l_j = \lambda_j = 1, \end{cases}$$

onde:

$$\begin{cases} s_j(t) \equiv [1 + \sqrt{1 - \mu_j^2(t)}]^{1/2} \\ d_j(t) \equiv \frac{\mu_j(t)}{[1 + \sqrt{1 - \mu_j^2(t)}]^{1/2}}. \end{cases}$$

Novamente, notemos que para cada qubit, ou seja, para cada valor de  $j$ , vale que:

$$\begin{cases} s_j^2(t) + d_j^2(t) = 2, \\ s_j(t) d_j(t) = \mu_j(t). \end{cases}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{\lambda}} \alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t) \alpha_{\vec{k}, \vec{\lambda}}^*(t) &= \frac{c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^*}{2^n} \sum_{\vec{\lambda}} \prod_{j=1}^n \xi_{l_j, \lambda_j}(t) \xi_{k_j, \lambda_j}^*(t) \\ &= \frac{c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^*}{2^n} \prod_{j=1}^n \sum_{\lambda_j=0}^1 \xi_{l_j, \lambda_j}(t) \xi_{k_j, \lambda_j}^*(t). \end{aligned}$$

Assim, notemos que, para cada  $j$ :

- Se  $l_j = k_j$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_j=0}^1 \xi_{l_j, \lambda_j}(t) \xi_{k_j, \lambda_j}^*(t) &= s_j(t) \exp(-i\omega_{j,o}t) s_j(t) \exp(i\omega_{j,o}t) \\ &\quad + d_j(t) \exp(-i\omega_{j,o}t) d_j(t) \exp(i\omega_{j,o}t) \\ &= s_j^2(t) + d_j^2(t) \\ &= 2. \end{aligned}$$

- Se  $l_j = 0$  e  $k_j = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_j=0}^1 \xi_{0, \lambda_j}(t) \xi_{1, \lambda_j}^*(t) &= s_j(t) d_j(t) \exp(-2i\omega_{j,o}t) + s_j(t) d_j(t) \exp(-2i\omega_{j,o}t) \\ &= 2 s_j(t) d_j(t) \exp(-2i\omega_{j,o}t) \\ &= 2 \mu_j(t) \exp(-2i\omega_{j,o}t). \end{aligned}$$

- Se  $l_j = 1$  e  $k_j = 0$ :

$$\sum_{\lambda_j=0}^1 \xi_{1, \lambda_j}(t) \xi_{0, \lambda_j}^*(t) = 2 \mu_j(t) \exp(2i\omega_{j,o}t).$$

Portanto, em geral, podemos escrever:

$$\sum_{\lambda_j=0}^1 \xi_{l_j, \lambda_j}(t) \xi_{k_j, \lambda_j}^*(t) = 2 \exp\left[(1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{J}_j(t)\right] \exp\left[-2i(-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \omega_{j,o} t\right]. \quad (\text{B.26})$$

Dessa maneira:



$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{\lambda}} \alpha_{\vec{l}, \vec{\lambda}}(t) \alpha_{\vec{k}, \vec{\lambda}}^*(t) &= \frac{c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^*}{2^n} \prod_{j=1}^n \sum_{\lambda_j=0}^1 \xi_{l_j, \lambda_j}(t) \xi_{k_j, \lambda_j}^*(t) \\
&= \frac{c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^*}{2^n} \prod_{j=1}^n 2 \exp\left[(1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{J}_j(t)\right] \exp\left[-2i(-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \omega_{j,o} t\right] \\
&= c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^* \exp\left[\sum_{j=1}^n (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{J}_j(t)\right] \exp\left[-2i \sum_{j=1}^n (-1)^{l_j} (1 - \delta_{l_j k_j}) \omega_{j,o} t\right] \\
&= c_{\vec{l}} c_{\vec{k}}^* \exp\left(-2i \Omega_{\vec{l}, \vec{k}} t\right) \exp\left[\sum_{j=1}^n (1 - \delta_{l_j k_j}) \mathcal{J}_j(t)\right]. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Também podemos verificar a normalização da função de onda no espaço purificado, notando:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_p(t) | \psi_p(t) \rangle &= \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\vec{l}, \vec{l}'} \alpha_{\vec{k}, \vec{k}'}^*(t) \alpha_{\vec{l}, \vec{l}'}(t) \langle \vec{k}, \vec{k}' | \vec{l}, \vec{l}' \rangle \\
&= \sum_{\vec{l}, \vec{l}'} |\alpha_{\vec{l}, \vec{l}'}(t)|^2 \\
&= \sum_{\vec{l}} |c_{\vec{l}}|^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tudo funciona, e obtemos:

$$|\psi_p(t)\rangle = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{c_{\vec{k}}}{\sqrt{2^n}} \prod_{j=1}^n \xi_{k_j, k'_j}(t) |\vec{k}, \vec{k}'\rangle.$$

## B.6 Os operadores de Kraus para o ruído de fase

Na representação de interação, na equação (A.15), tínhamos:

$$\rho_{IS}(t) = \text{Tr}_B \left\{ U_{SB}(t) [\rho_S(0) \otimes \rho_B(0)] U_{SB}^\dagger(t) \right\},$$

onde:

$$U_{SB}(t) = \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda(t) \right] \exp [i \phi(t)],$$

com

$$\mathcal{B}_\lambda(t) = \kappa_\lambda(t) a_\lambda^\dagger - \kappa_\lambda^*(t) a_\lambda,$$

onde também definimos:

$$\kappa_\lambda(t) \equiv 2 g_\lambda \left[ \frac{1 - \exp(i\omega_\lambda t)}{\omega_\lambda} \right],$$

e

$$\phi(t) \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left( \frac{|g_{\lambda}|^2}{\omega_{\lambda}^2} \right) [\omega_{\lambda} t - \sin(\omega_{\lambda} t)].$$

Vamos calcular os operadores de Kraus para a dinâmica do Hamiltoniano da equação (2.1). Para isso, comecemos notando que:

$$\begin{aligned} \exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right]^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right]^{2m} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right]^{2m+1} \\ &= \mathbb{1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right]^{2m} \\ &\quad + \sigma_z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right]^{2m+1}. \end{aligned}$$

Então, definiremos:

$$B_0(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right]^{2m} \quad (\text{B.27})$$

e

$$B_1(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right]^{2m+1}, \quad (\text{B.28})$$

pois assim:

$$\exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}(t) \right] = \mathbb{1} \otimes B_0(t) + \sigma_z \otimes B_1(t),$$

onde voltamos a escrever a identidade e a notação com o produto tensorial. Agora, notemos que:

$$\mathcal{B}_{\lambda}^{\dagger}(t) = -\mathcal{B}_{\lambda}(t).$$

Dessa forma, podemos afirmar que:

$$\exp \left[ \left( \frac{\sigma_z}{2} \right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_{\lambda}^{\dagger}(t) \right] = \mathbb{1} \otimes B_0^{\dagger}(t) + \sigma_z \otimes B_1^{\dagger}(t).$$

Mas

$$\begin{aligned}
B_0^\dagger(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda^\dagger(t) \right]^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m}}{(2m)!} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda(t) \right]^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda(t) \right]^{2m} \\
&= B_0(t).
\end{aligned}$$

E, por outro lado:

$$\begin{aligned}
B_1^\dagger(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda^\dagger(t) \right]^{2m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{(2m+1)!} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda(t) \right]^{2m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda(t) \right]^{2m+1}.
\end{aligned}$$

De forma que:

$$\exp \left[ \left(\frac{\sigma_z}{2}\right) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathcal{B}_\lambda^\dagger(t) \right] = \mathbb{1} \otimes B_0(t) + \sigma_z \otimes B_1^\dagger(t).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\rho_{IS}(t) &= \text{Tr}_B \left\{ \left[ \mathbb{1} \otimes B_0(t) + \sigma_z \otimes B_1(t) \right] \left[ \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) \right] \left[ \mathbb{1} \otimes B_0(t) + \sigma_z \otimes B_1^\dagger(t) \right] \right\} \\
&= \rho_S(0) \text{Tr}_B \left\{ B_0(t) \rho_B(0) B_0(t) \right\} \\
&\quad + \rho_S(0) \sigma_z \text{Tr}_B \left\{ B_0(t) \rho_B(0) B_1^\dagger(t) \right\} \\
&\quad + \sigma_z \rho_S(0) \text{Tr}_B \left\{ B_1(t) \rho_B(0) B_0(t) \right\} \\
&\quad + \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z \text{Tr}_B \left\{ B_1(t) \rho_B(0) B_1^\dagger(t) \right\}.
\end{aligned}$$

Vamos definir a matriz:

$$M(t) \equiv \begin{pmatrix} \text{Tr}_B \left\{ B_0(t) B_0(t) \rho_B(0) \right\} & \text{Tr}_B \left\{ B_0(t) B_1(t) \rho_B(0) \right\} \\ \text{Tr}_B \left\{ B_1^\dagger(t) B_0(t) \rho_B(0) \right\} & \text{Tr}_B \left\{ B_1^\dagger(t) B_1(t) \rho_B(0) \right\} \end{pmatrix},$$

para escrever:

$$\rho_{IS}(t) = \rho_S(0) M_{00}(t) + \rho_S(0) \sigma_z M_{10}(t) + \sigma_z \rho_S(0) M_{01}(t) + \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z M_{11}(t).$$

Agora, vamos fazer os produtos de matrizes para os operadores do sistema. Temos:

$$\rho_S(0) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \rho_S(0) \sigma_z &= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & -|c_1|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por outro lado:

$$\begin{aligned} \sigma_z \rho_S(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & -|c_1|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e por fim:

$$\begin{aligned} \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & -|c_1|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\rho_{IS}(t) &= \rho_S(0) M_{00}(t) + \rho_S(0) \sigma_z M_{10}(t) + \sigma_z \rho_S(0) M_{01}(t) + \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z M_{11}(t) \\
&= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} M_{00}(t) + \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & -|c_1|^2 \end{pmatrix} M_{10}(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & -|c_1|^2 \end{pmatrix} M_{01}(t) + \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} M_{11}(t).
\end{aligned}$$

Mas, pela equação (2.14), notemos que na representação de interação, temos:

$$\rho_{IS}(t) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \mu(t) \\ c_1 c_0^* \mu(t) & |c_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, segue que, deve ser válido:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{00}(t) + M_{10}(t) + M_{01}(t) + M_{11}(t) = 1 \\ M_{00}(t) - M_{10}(t) + M_{01}(t) - M_{11}(t) = \mu(t) \\ M_{00}(t) + M_{10}(t) - M_{01}(t) - M_{11}(t) = \mu(t) \\ M_{00}(t) - M_{10}(t) - M_{01}(t) + M_{11}(t) = 1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(B.29)} \\ \text{(B.30)} \\ \text{(B.31)} \\ \text{(B.32)} \end{array}$$

Somando e subtraindo as equações (B.30) e (B.31), temos:

$$M_{00}(t) - M_{11}(t) = \mu(t) \quad \text{(B.33)}$$

e

$$-M_{10}(t) + M_{01}(t) = 0. \quad \text{(B.34)}$$

Agora, somando e subtraindo as equações (B.29) e (B.32), temos:

$$M_{00}(t) + M_{11}(t) = 1 \quad \text{(B.35)}$$

e

$$M_{10}(t) + M_{01}(t) = 0. \quad \text{(B.36)}$$

Dessa forma, pelas equações (B.34) e (B.36):

$$M_{10}(t) = M_{01}(t) = 0.$$

Somando e subtraindo as equações (B.33) e (B.35):

$$M_{00}(t) = \frac{1 + \mu(t)}{2}$$

e

$$M_{11}(t) = \frac{1 - \mu(t)}{2}.$$

Portanto:

$$M(t) = \begin{pmatrix} \frac{1 + \mu(t)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \mu(t)}{2} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma:

$$\rho_{IS}(t) = \rho_S(0) \left[ \frac{1 + \mu(t)}{2} \right] + \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z \left[ \frac{1 - \mu(t)}{2} \right].$$

Deste resultado, vemos que podemos tomar os operadores de Kraus simplesmente, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0(t) = \mathbb{1} \sqrt{\frac{1 + \mu(t)}{2}} \end{array} \right. \quad (\text{B.37})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1(t) = -i \sigma_z \sqrt{\frac{1 - \mu(t)}{2}}. \end{array} \right. \quad (\text{B.38})$$

Agora, é fácil checar, que:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^1 K_m(t) \rho_S(0) K_m^\dagger(t) &= K_0(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) + K_1(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \\
&= \left[ \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \right] \rho_S(0) \left[ \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \right] \\
&\quad + \left[ -i\sigma_z \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \right] \rho_S(0) \left[ i\sigma_z \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \right] \\
&= \rho_S(0) \left[ \frac{1+\mu(t)}{2} \right] + \sigma_z \rho_S(0) \sigma_z \left[ \frac{1-\mu(t)}{2} \right] \\
&= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} \left[ \frac{1+\mu(t)}{2} \right] \\
&\quad + \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} \left[ \frac{1-\mu(t)}{2} \right] \\
&= \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \left( \frac{\mu(t)}{2} \right) \left[ \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & 0 \\ 0 & |c_1|^2 \end{pmatrix} + \mu(t) \begin{pmatrix} 0 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \mu(t) \\ c_1 c_0^* \mu(t) & |c_1|^2 \end{pmatrix} \\
&= \rho_{IS}(t),
\end{aligned}$$

onde usamos,

$$\rho_S(0) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma_z \rho_S(0) \sigma_z = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & -c_0 c_1^* \\ -c_1 c_0^* & |c_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Também é direto checar, que:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^1 K_m^\dagger(t) K_m(t) &= K_0^\dagger(t) K_0(t) + K_1^\dagger(t) K_1(t) \\
&= \left[ \frac{1 + \mu(t)}{2} \right] \mathbb{1} + \left[ \frac{1 - \mu(t)}{2} \right] \mathbb{1} \\
&= \mathbb{1}.
\end{aligned} \tag{B.39}$$

Como um bônus, também temos as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
K_0^\dagger(t) K_1(t) + K_1^\dagger(t) K_0(t) &= (-i) \left[ \sqrt{\frac{1 + \mu(t)}{2}} \right] \left[ \sqrt{\frac{1 - \mu(t)}{2}} \right] \sigma_z \\
&\quad + i \left[ \sqrt{\frac{1 - \mu(t)}{2}} \right] \left[ \sqrt{\frac{1 + \mu(t)}{2}} \right] \sigma_z \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B.40}$$

e

$$\begin{aligned}
K_0(t) K_1^\dagger(t) + K_1(t) K_0^\dagger(t) &= i \left[ \sqrt{\frac{1 + \mu(t)}{2}} \right] \left[ \sqrt{\frac{1 - \mu(t)}{2}} \right] \sigma_z \\
&\quad - i \left[ \sqrt{\frac{1 - \mu(t)}{2}} \right] \left[ \sqrt{\frac{1 + \mu(t)}{2}} \right] \sigma_z \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.41}$$

## B.7 Purificação pelos operadores de Kraus

Vamos propor outra purificação para o ruído de fase, fazendo:

$$|\psi_D(t)\rangle = K_0(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle + K_1(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes |-\rangle,$$

onde

$$\begin{cases} |+\rangle \equiv \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ |-\rangle \equiv \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right). \end{cases}$$

Assim, notemos que:

$$\begin{cases} \sigma_z |+\rangle = |-\rangle \\ \sigma_z |-\rangle = |+\rangle. \end{cases}$$



Dessa forma,

$$|\psi_D(t)\rangle = K_0(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle + K_1(t) |\psi_S(0)\rangle \otimes \sigma_z |+\rangle.$$

Portanto, se iniciarmos no estado:

$$|\psi_D(0)\rangle = |\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle,$$

temos:

$$|\psi_D(t)\rangle = U_D(t) |\psi_S(0)\rangle,$$

com:

$$U_D(t) = K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes \sigma_z.$$

Vamos mostrar que essa operação é, de fato, unitária. Notemos que:

$$\begin{aligned} U_D(t) U_D^\dagger(t) &= [K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes \sigma_z] [K_0^\dagger(t) \otimes \mathbb{1} + K_1^\dagger(t) \otimes \sigma_z] \\ &= [K_0(t)K_0^\dagger(t) + K_1(t)K_1^\dagger(t)] \otimes \mathbb{1} + [K_0(t)K_1^\dagger(t) + K_1(t)K_0^\dagger(t)] \otimes \sigma_z \\ &= \mathbb{1}, \end{aligned}$$

onde usamos as equações (B.39) e (B.40). E, analogamente:

$$\begin{aligned} U_D^\dagger(t) U_D(t) &= [K_0^\dagger(t) \otimes \mathbb{1} + K_1^\dagger(t) \otimes \sigma_z] [K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes \sigma_z] \\ &= [K_0^\dagger(t)K_0(t) + K_1^\dagger(t)K_1(t)] \otimes \mathbb{1} + [K_0^\dagger(t)K_1(t) + K_1^\dagger(t)K_0(t)] \otimes \sigma_z \\ &= \mathbb{1}, \end{aligned}$$

usando as equações (B.39) e (B.41). E concluímos que a evolução é unitária. Explicitamente, obtemos:

$$U_D(t) = \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - i \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \sigma_z \otimes \sigma_z. \quad (\text{B.42})$$

Notemos que essa também é uma purificação possível, já que:

$$\begin{aligned} |\psi_D(t)\rangle &= U_D(t) |\psi_D(0)\rangle \\ &= [K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes \sigma_z] [|\psi_S(0)\rangle \otimes |+\rangle], \end{aligned}$$

de forma que:

$$\begin{aligned}
\rho_D(t) &= U_D(t) |\psi_D(0)\rangle \langle\psi_D(0)| U_D^\dagger(t) \\
&= [K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes \sigma_z] [\rho_S(0) \otimes |+\rangle \langle+|] [K_0^\dagger(t) \otimes \mathbb{1} + K_1^\dagger(t) \otimes \sigma_z] \\
&= K_0(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle+| \\
&\quad + K_0(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle+| \sigma_z \\
&\quad + K_1(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes \sigma_z |a\rangle \langle a| \\
&\quad + K_1(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes \sigma_z |+\rangle \langle+| \sigma_z \\
&= K_0(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle+| + K_0(t) |\psi_S(0)\rangle \langle\psi_S(0)| K_1^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle-| \\
&\quad + K_1(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |-\rangle \langle+| + K_1(t) |\psi_S(0)\rangle \langle\psi_S(0)| K_1^\dagger(t) \otimes |-\rangle \langle-|.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando a base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , fica fácil tomar o traço parcial no segundo espaço e checar que:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_A\{\rho_D(t)\} &= K_0(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) + K_1(t) |\psi_S(0)\rangle \langle\psi_S(0)| K_1^\dagger(t) \\
&= \rho_{IS}(t).
\end{aligned}$$

Agora, assim como fizemos anteriormente, vamos encontrar o Hamiltoniano  $H_D(t)$  que satisfaz a equação de Schrödinger:

$$H_D(t) = i\hbar \frac{dU_D(t)}{dt} U_D^\dagger(t).$$

Vamos multiplicar os operadores. Primeiro, notemos que, pelas equações (3.16) e (3.17):

$$\begin{aligned}
\frac{dU_D(t)}{dt} &= \frac{dK_0(t)}{dt} \otimes \mathbb{1} + \frac{dK_1(t)}{dt} \otimes \sigma_z \\
&= \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \right] \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - i \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \right] \sigma_z \otimes \sigma_z \\
&= \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{2[1+\mu(t)]}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{2[1-\mu(t)]}} \sigma_z \otimes \sigma_z.
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{dU_D(t)}{dt} U_D^\dagger(t) &= \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{2[1+\mu(t)]}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \left[ \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \sigma_z \otimes \sigma_z \right] \\
&+ \frac{i \dot{\mu}(t)}{2\sqrt{2[1-\mu(t)]}} \sigma_z \otimes \sigma_z \left[ \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \sigma_z \otimes \sigma_z \right] \\
&= \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{1+\mu(t)}} \sigma_z \otimes \sigma_z \\
&+ i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{1-\mu(t)}} \sigma_z \otimes \sigma_z - \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \\
&= i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \left[ \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{1+\mu(t)}} + \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{1-\mu(t)}} \right] \sigma_z \otimes \sigma_z \\
&= i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \left[ \frac{1-\mu(t) + 1+\mu(t)}{\sqrt{(1+\mu(t))(1-\mu(t))}} \right] \sigma_z \otimes \sigma_z \\
&= i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \sigma_z \otimes \sigma_z.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$H_D(t) = -\hbar \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \sigma_z \otimes \sigma_z. \quad (\text{B.43})$$

Esse Hamiltoniano tem a mesma dependência temporal que o Hamiltoniano do capítulo anterior, porém em outra componente da base. Naquele contexto, definimos:

$$\omega_B(t) = \frac{-\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}}.$$

Dessa forma:

$$H_D(t) = \hbar \omega_B(t) \sigma_z \otimes \sigma_z. \quad (\text{B.44})$$

## B.8 Conectando as purificações

Vamos determinar o Hamiltoniano  $H_p(t)$ , da seção 3.1.1 do ponto de vista da purificação a partir de Kraus.

Agora, notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{dU_p(t)}{dt} U_p^\dagger(t) &= \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{2}[1+\mu(t)]} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \left[ \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i\sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \sigma_z \otimes (-\sigma_y) \right] \\
&+ \frac{i\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{2}[1-\mu(t)]} \sigma_z \otimes (-\sigma_y) \left[ \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{2}} \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i\sqrt{\frac{1-\mu(t)}{2}} \sigma_z \otimes (-\sigma_y) \right] \\
&= \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{1+\mu(t)}} \sigma_z \otimes (-\sigma_y) \\
&+ i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{1-\mu(t)}} \sigma_z \otimes (-\sigma_y) - \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \\
&= i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \left[ \sqrt{\frac{1-\mu(t)}{1+\mu(t)}} + \sqrt{\frac{1+\mu(t)}{1-\mu(t)}} \right] \sigma_z \otimes (-\sigma_y) \\
&= i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{4} \right] \left[ \frac{1-\mu(t)+1+\mu(t)}{\sqrt{(1+\mu(t))(1-\mu(t))}} \right] \sigma_z \otimes (-\sigma_y) \\
&= i \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \sigma_z \otimes (-\sigma_y).
\end{aligned}$$

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned}
\rho_p(t) &= U_p(t) |\psi_D(0)\rangle \langle \psi_p(0)| U_p^\dagger(t) \\
&= [K_0(t) \otimes \mathbb{1} + K_1(t) \otimes (-\sigma_y)] [\rho_S(0) \otimes \mathbb{1} + K_1^\dagger(t) \otimes (-\sigma_y)] \\
&= K_0(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle +| \\
&+ K_0(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle +| (-\sigma_y) \\
&+ K_1(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes (-\sigma_y) |+\rangle \langle +| \\
&+ K_1(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes (-\sigma_y) |+\rangle \langle +| (-\sigma_y) \\
&= K_0(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle +| - iK_0(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle -| \\
&+ iK_1(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |-\rangle \langle +| + K_1(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes (-i) |-\rangle \langle -| i \\
&= K_0(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle +| - iK_0(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes |+\rangle \langle -| \\
&+ iK_1(t) \rho_S(0) K_0^\dagger(t) \otimes |-\rangle \langle +| + K_1(t) \rho_S(0) K_1^\dagger(t) \otimes |-\rangle \langle -|.
\end{aligned}$$

## APÊNDICE C – CONTROLE QUÂNTICO EFETIVO DE UM QUBIT

### C.1 Representação de interação com os termos de controle

A equação de Liouville-Von Neumann, é:

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = -[\rho(t), H(t)].$$

Definiremos  $U_B(t)$  como o operador que satisfaz a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{dU_B(t)}{dt} = H_B U_B(t),$$

e

$$i\hbar \frac{dU_B^\dagger(t)}{dt} = -U_B^\dagger(t) H_B.$$

Definiremos também:

$$\rho_{I_B}(t) = U_B^\dagger(t) \rho(t) U_B(t)$$

de forma que:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{I_B}(t) &= i\hbar \frac{d}{dt} [U_B^\dagger(t) \rho(t) U_B(t)] \\ &= -U_B^\dagger(t) H_B \rho(t) U_B(t) - U_B^\dagger(t) [\rho(t), H(t)] U_B(t) + U_B^\dagger(t) \rho(t) H_B U_B(t) \\ &= U_B^\dagger(t) [\rho(t), H_B] U_B(t) - U_B^\dagger(t) [\rho(t), H(t)] U_B(t) \\ &= -U_B^\dagger(t) [\rho(t), (H_S(t) + H_{SB})] U_B(t) \\ &= -U_B^\dagger(t) \rho(t) [U_B(t) U_B^\dagger(t)] (H_S(t) + H_{SB}) U_B(t) \\ &\quad + U_B^\dagger(t) (H_S(t) + H_{SB}) [U_B(t) U_B^\dagger(t)] \rho(t) U_B(t) \\ &= -[\rho_{I_B}(t), H_{I_B}(t)], \end{aligned}$$

onde definimos:

$$H_{I_B}(t) \equiv U_B^\dagger(t) (H_S(t) + H_{SB}) U_B(t).$$

Na parte da energia livre do banho, continuamos com:

$$U_B(t) = \exp \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right) H_B t \right],$$

de forma que:

$$H_{I_B}(t) = H_S(t) + \sigma_z [B(t) + B^\dagger(t)],$$

onde:

$$\begin{aligned} B(t) &\equiv U_B^\dagger(t) B U_B(t) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda^* a_\lambda \exp(-i\omega_\lambda t). \end{aligned}$$

Dessa forma, definiremos:

$$H_o(t) = \sigma_z [B(t) + B^\dagger(t)].$$

Agora, na parte do sistema, redefinimos  $U_S(t)$  para satisfazer:

$$i\hbar \frac{dU_S(t)}{dt} = H_S(t) U_S(t),$$

com

$$U_S^\dagger(t) U_S(t) = U_S(t) U_S^\dagger(t) = \mathbb{1}_S \otimes \mathbb{1}_B.$$

Seja, portanto:

$$\rho_I(t) = U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) U_S(t)$$

de forma que:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho_I(t) &= i\hbar \frac{d}{dt} [U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) U_S(t)] \\ &= -U_S^\dagger(t) H_S(t) \rho_{I_B}(t) U_S(t) - U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_{I_B}(t)] U_S(t) \\ &\quad + U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) H_S(t) U_S(t) \\ &= U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_S(t)] U_S(t) - U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_{I_B}(t)] U_S(t) \\ &= -U_S^\dagger(t) [\rho_{I_B}(t), H_o(t)] U_S(t) \\ &= -U_S^\dagger(t) \rho_{I_B}(t) [U_S(t) U_S^\dagger(t)] H_o(t) U_S(t) \\ &\quad + U_S^\dagger(t) H_o(t) [U_S(t) U_S^\dagger(t)] \rho_{I_B}(t) U_S(t) \\ &= -[\rho_I(t), H_I(t)], \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} H_I(t) &\equiv U_S^\dagger(t) H_o(t) U_S(t) \\ &= S(t) [B(t) + B^\dagger(t)], \end{aligned}$$

com:

$$S(t) \equiv U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t).$$

## C.2 A equação mestra na aproximação de Born

Primeiro faremos a seguinte substituição:

$$H_I(t) \rightarrow \alpha H_I(t),$$

onde  $\alpha \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , é um parâmetro para contar potências em  $H_I(t)$ . Dessa forma, consideraremos termos de até ordem quadrática em  $\alpha$ , e no fim faremos  $\alpha = 1$  para retornarmos ao Hamiltoniano original. Portanto, pela equação (4.3), consideremos:

$$i\hbar \frac{d\rho_I(t)}{dt} = -\alpha [\rho_I(t), H_I(t)]. \quad (\text{C.1})$$

Integrando (C.1) de 0 à  $t$ :

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - \frac{\alpha}{i\hbar} \int_0^t [\rho_I(t'), H_I(t')] dt'. \quad (\text{C.2})$$

Assim como em (33), substituímos (C.2) em (C.1),

$$i\hbar \frac{d\rho_I(t)}{dt} = -\alpha [\rho_I(0), H_I(t)] + \frac{\alpha^2}{i\hbar} \left[ \int_0^t [\rho_I(t'), H_I(t')] dt', H_I(t) \right],$$

ou também:

$$\frac{d\rho_I(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{i\hbar} [\rho_I(0), H_I(t)] - \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \left[ \int_0^t [\rho_I(t'), H_I(t')] dt', H_I(t) \right]. \quad (\text{C.3})$$

Aqui vamos parar a implementação e fazer nossa grande aproximação. Iremos considerar apenas termos de no máximo segunda ordem em  $\alpha$ . Essa é a aproximação de Born e está relacionada com o fato do acoplamento entre o banho e o sistema é fraco. Assim, tomamos o traço parcial nos graus de liberdade do banho na equação (C.3), obtemos:

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{i\hbar} \text{Tr}_B \{ [\rho_I(0), H_I(t)] \} - \frac{\alpha^2}{\hbar^2} \text{Tr}_B \left\{ \left[ \int_0^t [\rho_I(t'), H_I(t')] dt', H_I(t) \right] \right\}. \quad (\text{C.4})$$

No tempo  $t = 0$ , vamos considerar  $\rho_I(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0)$ . Assim o primeiro termo na equação (C.4) é nulo, já que  $H_I(t)$  irá criar ou aniquilar um bóson. Portanto, invertendo a ordem dos dois comutadores:

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \text{Tr}_B \left\{ \left[ H_I(t), \int_0^t [H_I(t'), \rho_I(t')] dt' \right] \right\}. \quad (\text{C.5})$$

Agora, integramos (C.5), de  $t'$  até  $t$ .

$$\rho_{IS}(t) - \rho_{IS}(t') = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \int_{t'}^t d\tau \text{Tr}_B \left\{ \left[ H_I(\tau), \int_0^\tau [H_I(t''), \rho_I(t'')] dt'' \right] \right\} \quad (\text{C.6})$$

Notamos que a diferença  $\rho_{IS}(t) - \rho_{IS}(t')$  é de ordem  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ . Substituindo em (C.5):

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \text{Tr}_B \left\{ \left[ H_I(t), \int_0^t [H_I(t'), \rho_I(t')] dt' \right] \right\} + \mathcal{O}(\alpha^4) \quad (\text{C.7})$$

Novamente, negligenciamos termos de ordem maior que segunda potência em  $\alpha$ , e obtemos uma equação local no tempo para  $\rho_I(t)$ . Nessa aproximação também podemos escrever  $\rho_I(t) = \rho_{IS}(t) \otimes \rho_B(0)$ , já que correções que misturam os dois são de ordem maior que  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , pois pressupõe uma primeira interação. Agora, fazemos  $\alpha = 1$ .

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_B \left\{ \left[ H_I(t), \int_0^t dt' [H_I(t'), \rho_{IS}(t) \otimes \rho_B(0)] \right] \right\}. \quad (\text{C.8})$$

A equação (C.8) é conhecida como equação mestra de Born.

### C.3 O comutador da equação mestra

Vamos calcular o comutador da equação mestra (4.5) e depois integraremos esse comutador no tempo. Começemos notando que

$$\begin{aligned} [H_I(t), [H_I(t'), \rho_I(t)]] &= [\hbar S(t) (B(t) + B^\dagger(t)), [\hbar S(t') (B(t') + B^\dagger(t')), \rho_I(t)]] \\ &= \hbar^2 [S(t) B(t), [S(t') (B(t') + B^\dagger(t')), \rho_I(t)]] \\ &\quad + \hbar^2 [S(t) B^\dagger(t), [S(t') (B(t') + B^\dagger(t')), \rho_I(t)]] \end{aligned}$$

O primeiro termo dessa soma, será:

$$\begin{aligned} &[S(t) B(t), [S(t') (B(t') + B^\dagger(t')), \rho_I(t)]] = \\ &= [S(t) B(t), \{S(t') (B(t') + B^\dagger(t')) \rho_I(t) - \rho_I(t) S(t') (B(t') + B^\dagger(t'))\}] \\ &= S(t) B(t) \{S(t') (B(t') + B^\dagger(t')) \rho_I(t) - \rho_I(t) S(t') (B(t') + B^\dagger(t'))\} \\ &\quad - \{S(t') (B(t') + B^\dagger(t')) \rho_I(t) - \rho_I(t) S(t') (B(t') + B^\dagger(t'))\} S(t) B(t) \\ &= S(t) B(t) S(t') B(t') \rho_I(t) + S(t) B(t) S(t') B^\dagger(t') \rho_I(t) \\ &\quad - S(t) B(t) \rho_I(t) S(t') B(t') - S(t) B(t) \rho_I(t) S(t') B^\dagger(t') \\ &\quad - S(t') B(t') \rho_I(t) S(t) B(t) - S(t') B^\dagger(t') \rho_I(t) S(t) B(t) \\ &\quad + \rho_I(t) S(t') B(t') S(t) B(t) + \rho_I(t) S(t') B^\dagger(t') S(t) B(t) \\ &= S(t) S(t') \rho_{IS}(t) B(t) B(t') \rho_B(0) + S(t) S(t') \rho_{IS}(t) B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \\ &\quad - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') B(t) \rho_B(0) B(t') - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') B(t) \rho_B(0) B^\dagger(t') \\ &\quad - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) B(t') \rho_B(0) B(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) B(t) \\ &\quad + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \rho_B(0) B(t') B(t) + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \rho_B(0) B^\dagger(t') B(t). \end{aligned}$$



O segundo termo da soma será:

$$\begin{aligned}
& \left[ S(t) B^\dagger(t), \left[ S(t') (B(t') + B^\dagger(t')), \rho_I(t) \right] \right] = \\
& = S(t) S(t') \rho_{IS}(t) B^\dagger(t) B(t') \rho_B(0) + S(t) S(t') \rho_{IS}(t) B^\dagger(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \\
& - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') B^\dagger(t) \rho_B(0) B(t') - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') B^\dagger(t) \rho_B(0) B^\dagger(t') \\
& - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) B(t') \rho_B(0) B^\dagger(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) B^\dagger(t) \\
& + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \rho_B(0) B(t') B^\dagger(t) + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \rho_B(0) B^\dagger(t') B^\dagger(t).
\end{aligned}$$

Da definição de  $B$ , vemos que, para quaisquer  $t, t'$ :

$$\text{Tr}_B \left\{ B(t) B(t') \rho_B(0) \right\} = \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \right\} = 0.$$

Assim, quando tomarmos o traço sobre o ambiente, os termos da primeira coluna do primeiro termo e da segunda coluna do segundo termo se anulam. Portanto, utilizando a propriedade cíclica do traço, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_B \left\{ \left[ S(t) B(t), \left[ S(t') (B(t') + B^\dagger(t')), \rho_I(t) \right] \right] \right\} = \\
& = S(t) S(t') \rho_{IS}(t) \text{Tr}_B \left\{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \right\} \\
& - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \text{Tr}_B \left\{ B(t) \rho_B(0) B^\dagger(t') \right\} \\
& - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t') \rho_B(0) B(t) \right\} \\
& + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \text{Tr}_B \left\{ \rho_B(0) B^\dagger(t') B(t) \right\} \\
& = S(t) S(t') \rho_{IS}(t) \text{Tr}_B \left\{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \right\} \\
& - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \right\} \\
& - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \text{Tr}_B \left\{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \right\} \\
& + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \right\} \\
& = \left[ S(t) S(t') \rho_{IS}(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \right] \text{Tr}_B \left\{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \right\} \\
& + \left[ \rho_{IS}(t) S(t') S(t) - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \right] \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \right\}.
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_B \left\{ \left[ S(t) B^\dagger(t), \left[ S(t') (B(t') + B^\dagger(t')), \rho_I(t) \right] \right] \right\} = \\
& = S(t) S(t') \rho_{IS}(t) \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t) B(t') \rho_B(0) \right\} \\
& - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t) \rho_B(0) B(t') \right\} \\
& - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \text{Tr}_B \left\{ B(t') \rho_B(0) B^\dagger(t) \right\} \\
& + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \text{Tr}_B \left\{ \rho_B(0) B(t') B^\dagger(t) \right\} \\
& = S(t) S(t') \rho_{IS}(t) \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t) B(t') \rho_B(0) \right\} \\
& - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \text{Tr}_B \left\{ B(t') B^\dagger(t) \rho_B(0) \right\} \\
& - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t) B(t') \rho_B(0) \right\} \\
& + \rho_{IS}(t) S(t') S(t) \text{Tr}_B \left\{ B(t') B^\dagger(t) \rho_B(0) \right\} \\
& = \left[ S(t) S(t') \rho_{IS}(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \right] \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t) B(t') \rho_B(0) \right\} \\
& + \left[ \rho_{IS}(t) S(t') S(t) - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \right] \text{Tr}_B \left\{ B(t') B^\dagger(t) \rho_B(0) \right\}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, a equação mestra (4.5), fica:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} &= - \int_0^t dt' \left[ S(t) S(t') \rho_{IS}(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \right] \text{Tr}_B \left\{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \right\} \\
& - \int_0^t dt' \left[ \rho_{IS}(t) S(t') S(t) - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \right] \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \right\} \\
& - \int_0^t dt' \left[ S(t) S(t') \rho_{IS}(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \right] \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t) B(t') \rho_B(0) \right\} \\
& - \int_0^t dt' \left[ \rho_{IS}(t) S(t') S(t) - S(t) \rho_{IS}(t) S(t') \right] \text{Tr}_B \left\{ B(t') B^\dagger(t) \rho_B(0) \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto, definiremos:

$$P_S(t, t') \equiv S(t) S(t') \rho_{IS}(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t),$$

de forma que:

$$P_S^\dagger(t, t') \equiv \rho_{IS}(t) S(t') S(t) - S(t) \rho_{IS}(t) S(t').$$

Definiremos também:

$$f_B(t, t') \equiv \text{Tr}_B \left\{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \right\}$$

$$g_B(t, t') \equiv \text{Tr}_B \left\{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \right\}$$

para escrever:

$$\frac{d\rho_{IS}(t)}{dt} = - \int_0^t dt' P_S(t, t') \left[ f_B(t, t') + g_B^*(t, t') \right] - \int_0^t dt' P_S^\dagger(t, t') \left[ f_B^*(t, t') + g_B(t, t') \right]. \quad (\text{C.9})$$

#### C.4 A aproximação em que o controle não varia apreciavelmente

Consideremos uma situação em que a dinâmica do controle é muito mais lenta do que a dinâmica do reservatório. Assim, consideraremos que dentro do intervalo de tempo em que a integral tem alguma correlação com tempos  $t' < t$ , o controle não mude apreciavelmente e, então, dentro do integrando, fazemos:

$$U_S(t') \approx U_S(t).$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} P_S(t, t') &= S(t) S(t') \rho_{IS}(t) - S(t') \rho_{IS}(t) S(t) \\ &= U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t) U_S^\dagger(t') \sigma_z U_S(t') U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t) \\ &\quad - U_S^\dagger(t') \sigma_z U_S(t') U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t) U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t) \\ &\approx U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t) U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t) U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t) \\ &\quad - U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t) U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t) U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t) \\ &= U_S^\dagger(t) \sigma_z \sigma_z \rho_S(t) U_S(t) - U_S^\dagger(t) \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z U_S(t) \\ &= U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t) - U_S^\dagger(t) \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z U_S(t) \\ &= U_S^\dagger(t) [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z] U_S(t). \end{aligned}$$

Portanto, também temos:

$$P_S^\dagger(t, t') \approx U_S^\dagger(t) [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z] U_S(t).$$

Por outro lado, no lado esquerdo da equação (4.6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{IS}(t) &= \frac{d}{dt} [U_S^\dagger(t) \rho_S(t) U_S(t)] \\ &= \left( \frac{i}{\hbar} \right) U_S^\dagger(t) H_S(t) \rho_S(t) U_S(t) + U_S^\dagger(t) \left[ \frac{d\rho_S(t)}{dt} \right] U_S(t) \\ &\quad - \left( \frac{i}{\hbar} \right) U_S^\dagger(t) \rho_S(t) H_S(t) U_S(t) \\ &= \left( \frac{i}{\hbar} \right) U_S^\dagger(t) [H_S(t), \rho_S(t)] U_S(t) + U_S^\dagger(t) \left[ \frac{d\rho_S(t)}{dt} \right] U_S(t) \\ &= U_S^\dagger(t) \left\{ \left( \frac{i}{\hbar} \right) [H_S(t), \rho_S(t)] + \frac{d\rho_S(t)}{dt} \right\} U_S(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, nessa aproximação, a equação (4.6), fica:

$$U_S^\dagger(t) \left\{ \left( \frac{i}{\hbar} \right) [H_S(t), \rho_S(t)] + \frac{d\rho_S(t)}{dt} \right\} U_S(t) = -U_S^\dagger(t) [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z] U_S(t) \Omega(t),$$

onde definimos:

$$\Omega(t) \equiv \int_0^t dt' [f_B(t, t') + f_B^*(t, t') + g_B(t, t') + g_B^*(t, t')].$$

Portanto, voltando da representação de interação, obtemos:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right) [H_S(t), \rho_S(t)] - [\rho_S(t) - \sigma_z \rho_S(t) \sigma_z] \Omega(t). \quad (\text{C.10})$$

### C.5 Calculando $\Omega(t)$

Vamos calcular:

$$\Omega(t) = \int_0^t dt' [f_B(t, t') + f_B^*(t, t') + g_B(t, t') + g_B^*(t, t')].$$

Começemos pela função  $g_B(t, t')$ :

$$\begin{aligned} g_B(t, t') &= \text{Tr}_B \{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \} \\ &= \sum_{\lambda', \lambda} g_{\lambda'} g_\lambda^* \exp[-i(\omega_{\lambda'} t - \omega_{\lambda'} t')] \text{Tr}_B \{ a_{\lambda'}^\dagger a_\lambda \rho_B(0) \} \\ &= \sum_{\lambda', \lambda} g_{\lambda'} g_\lambda^* \exp[-i(\omega_{\lambda'} t - \omega_{\lambda'} t')] \delta_{\lambda \lambda'} \text{Tr}_B \{ a_\lambda^\dagger a_\lambda \rho_B(0) \} \\ &= \sum_{\lambda} \frac{|g_\lambda|^2 \exp[-i\omega_\lambda(t - t')]}{\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1}, \end{aligned}$$

onde, pela equação (A.29), usamos que:

$$\text{Tr}_B \{ a_\lambda^\dagger a_\lambda \rho_B(0) \} = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1}.$$

Agora, pelas regras de comutação, fica fácil calcular  $f_B(t, t')$ , notando que

$$\begin{aligned} f_B(t, t') &= \text{Tr}_B \{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \} \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'} g_\lambda g_{\lambda'}^* \exp[-i(\omega_\lambda t - \omega_{\lambda'} t')] \text{Tr}_B \{ a_\lambda a_{\lambda'}^\dagger \rho_B(0) \} \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'} g_\lambda g_{\lambda'}^* \exp[-i(\omega_\lambda t - \omega_{\lambda'} t')] \delta_{\lambda \lambda'} [1 + \text{Tr}_B \{ a_\lambda^\dagger a_\lambda \rho_B(0) \}] \\ &= \sum_{\lambda} |g_\lambda|^2 \exp[-i\omega_\lambda(t - t')] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_\lambda) - 1} \right]. \end{aligned}$$

Vamos definir também:

$$F(t) = \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_B \{ B(t) B^\dagger(t') \rho_B(0) \} \quad (\text{C.11})$$

$$G(t) = \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_B \{ B^\dagger(t') B(t) \rho_B(0) \} \quad (\text{C.12})$$

Que implicam:

$$F^*(t) = \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_B \{ B(t') B^\dagger(t) \rho_B(0) \} \quad (\text{C.13})$$

$$G^*(t) = \int_0^t dt' \operatorname{Tr}_B \{ B^\dagger(t) B(t') \rho_B(0) \}. \quad (\text{C.14})$$

Portanto:

$$\Omega(t) = F(t) + F^*(t) + G(t) + G^*(t).$$

Inserindo uma densidade de estados geral  $J(\omega)$ :

$$\begin{cases} F(t) = \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega J(\omega) \exp[-i\omega(t-t')] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\ G(t) = \int_0^t dt' \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\exp[-i\omega(t-t')]}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}. \end{cases}$$

Assim, integrando no tempo, definimos  $\tau = t - t'$ , de forma que:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \exp[-i\omega(t-t')] &= \int_0^t d\tau \exp(-i\omega\tau) \\ &= \left[ \frac{\exp(-i\omega\tau)}{(-i\omega)} \right] \Big|_0^t \\ &= \left( \frac{i}{\omega} \right) [\exp(-i\omega t) - 1] \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{cases} F(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left( \frac{i}{\omega} \right) [\exp(-i\omega t) - 1] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\ G(t) = \int_0^\infty d\omega J(\omega) \left( \frac{i}{\omega} \right) \left[ \frac{\exp(-i\omega t) - 1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right]. \end{cases}$$

Tomando uma densidade Ôhmica de estados, assim como na equação (2.15):

$$\begin{cases} F(t) = i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) [\exp(-i\omega t) - 1] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\ G(t) = i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{\exp(-i\omega t) - 1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right]. \end{cases}$$

Agora, vamos calcular  $\Omega(t)$ :

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= F(t) + F^*(t) + G(t) + G^*(t) \\
&= i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \exp(-i\omega t) - 1 \right] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&\quad - i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \exp(i\omega t) - 1 \right] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&\quad + i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{\exp(-i\omega t) - 1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&\quad - i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{\exp(i\omega t) - 1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&= i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \exp(-i\omega t) - \exp(i\omega t) \right] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&\quad + i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(i\omega t)}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&= i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) (2i) \left[ \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(i\omega t)}{2i} \right] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&\quad + i\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) (2i) \left[ \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(i\omega t)}{2i} \right] \left[ \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&= 2\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i} \right] \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&\quad + 2\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)}{2i} \right] \left[ \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&= 2\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \sin(\omega t) \left[ 1 + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&\quad + 2\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \sin(\omega t) \left[ \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\
&= 4\eta \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \sin(\omega t) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right].
\end{aligned}$$

Por outro lado, no caso exato e sem os termos de t́nhamos:

$$\mu(t) = \exp[\mathcal{I}(t)],$$

com

$$\mathcal{J}(t) = (-8\eta) \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right].$$

Portanto, notemos que:

$$\ln[\mu(t)] = \mathcal{J}(t).$$

Derivando ambos lados no tempo:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} &= \frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ (-8\eta) \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega} \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \right\} \\ &= (-8\eta) \int_0^\infty d\omega \exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right) \sin(\omega t) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \right] \\ &= -2 \Omega(t), \end{aligned}$$

e assim:

$$\Omega(t) = -\frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)}.$$

## C.6 Dinâmica efetiva no espaço purificado

Vamos passar para representação de interação, fazendo:

$$|\psi_{p_I}(t)\rangle = U_S^\dagger(t) |\psi_p(t)\rangle,$$

onde:

$$i\hbar \frac{dU_S(t)}{dt} = H_S(t) U_S(t).$$

Assim:  $\text{appuricontroleffdin}$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\psi_{p_I}(t)\rangle}{dt} &= -U_S^\dagger(t) H_S(t) |\psi_p(t)\rangle + U_S^\dagger(t) H_p(t) |\psi_p(t)\rangle \\ &= U_S^\dagger(t) H_D(t) |\psi_p(t)\rangle \\ &= U_S^\dagger(t) H_D(t) U_S(t) U_S^\dagger(t) |\psi_p(t)\rangle \\ &= H_{D_I}(t) |\psi_{p_I}(t)\rangle, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} H_{D_I}(t) &= U_S^\dagger(t) H_D(t) U_S(t) \\ &= \hbar \omega_B(t) U_S^\dagger(t) \sigma_z U_S(t) \otimes \sigma_z \\ &= \hbar \omega_B(t) S(t) \otimes \sigma_z. \end{aligned}$$

Dessa forma, definindo:

$$\begin{aligned}\rho_{I_p}(t) &= |\psi_{p_I}(t)\rangle \langle \psi_{p_I}(t)| \\ &= U_S^\dagger(t) |\psi_p(t)\rangle \langle \psi_p(t)| U_S(t),\end{aligned}$$

temos:

$$i\hbar \frac{d\rho_{I_p}(t)}{dt} = \hbar \omega_B(t) [S(t) \otimes \sigma_z, \rho_{I_p}(t)],$$

ou também:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{I_p}(t)}{dt} &= -i \omega_B(t) [S(t) \otimes \sigma_z, \rho_{I_p}(t)] \\ &= -i \omega_B(t) [S(t) \otimes \sigma_z \rho_{I_p}(t) - \rho_{I_p}(t) S(t) \otimes \sigma_z].\end{aligned}$$

Dessa forma, vamos definir:

$$\rho_{I_{PS}}(t) \equiv \text{Tr}_A \{ \rho_{I_p}(t) \}.$$

Agora, nosso objetivo é provar que, de fato:

$$\rho_{I_{PS}}(t) = \rho_{IS}(t).$$

Portanto, notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\rho_{I_p}(t) \mathbb{1} \otimes \sigma_z] &= -i \omega_B(t) [S(t) \otimes \sigma_z \rho_{I_p}(t) - \rho_{I_p}(t) S(t) \otimes \sigma_z] \mathbb{1} \otimes \sigma_z \\ &= -i \omega_B(t) [S(t) \otimes \sigma_z \rho_{I_p}(t) \mathbb{1} \otimes \sigma_z - \rho_{I_p}(t) S(t) \otimes \mathbb{1}],\end{aligned}$$

de forma que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \text{Tr}_A \{ [\rho_{I_p}(t) \mathbb{1} \otimes \sigma_z] \} &= -i \omega_B(t) \text{Tr}_A \{ [S(t) \otimes \sigma_z \rho_{I_p}(t) \mathbb{1} \otimes \sigma_z - \rho_{I_p}(t) S(t) \otimes \mathbb{1}] \} \\ &= -i \omega_B(t) [S(t) \text{Tr}_A \{ \sigma_z \rho_{I_p}(t) \sigma_z \} - \rho_{I_{PS}}(t) S(t)] \\ &= -i \omega_B(t) [S(t) \text{Tr}_A \{ \rho_{I_p}(t) \sigma_z^2 \} - \rho_{I_{PS}}(t) S(t)] \\ &= -i \omega_B(t) [S(t) \rho_{I_{PS}}(t) - \rho_{I_{PS}}(t) S(t)] \\ &= -i \omega_B(t) [S(t), \rho_{I_{PS}}(t)].\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\text{Tr}_A \{ [\rho_{I_p}(t) \mathbb{1} \otimes \sigma_z] \} &= \text{Tr}_A \{ [\rho_{I_p}(0) \mathbb{1} \otimes \sigma_z] \} - i \int_0^t dt' \omega_B(t') [S(t'), \rho_{I_{PS}}(t')] \\ &= -i \int_0^t dt' \omega_B(t') [S(t'), \rho_{I_{PS}}(t')].\end{aligned}$$



Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{I_{PS}}(t)}{dt} &= -i \omega_B(t) \left[ S(t) \operatorname{Tr}_A \{ \sigma_z \rho_{I_p}(t) \} - \operatorname{Tr}_A \{ \rho_{I_p}(t) \sigma_z \} S(t) \right] \\
&= -i \omega_B(t) \left[ S(t), \operatorname{Tr}_A \{ \rho_{I_p}(t) \sigma_z \} \right] \\
&= -i \omega_B(t) \left[ S(t), (-i) \int_0^t dt' \omega_B(t') \left[ S(t'), \rho_{I_{PS}}(t') \right] \right] \\
&= -\omega_B(t) \int_0^t dt' \omega_B(t') \left[ S(t), \left[ S(t'), \rho_{I_{PS}}(t') \right] \right],
\end{aligned}$$

mas:

$$\begin{aligned}
\left[ S(t), \left[ S(t'), \rho_{I_{PS}}(t') \right] \right] &= S(t) \left[ S(t'), \rho_{I_{PS}}(t') \right] - \left[ S(t'), \rho_{I_{PS}}(t') \right] S(t) \\
&= S(t) \left[ S(t') \rho_{I_{PS}}(t') - \rho_{I_{PS}}(t') S(t') \right] \\
&\quad - \left[ S(t') \rho_{I_{PS}}(t') - \rho_{I_{PS}}(t') S(t') \right] S(t) \\
&\approx \left[ \rho_{I_{PS}}(t') - S(t) \rho_{I_{PS}}(t') S(t) \right] \\
&\quad - \left[ S(t) \rho_{I_{PS}}(t') S(t) - \rho_{I_{PS}}(t') \right] \\
&= 2 \left[ \rho_{I_{PS}}(t') - S(t) \rho_{I_{PS}}(t') S(t) \right],
\end{aligned}$$

onde novamente consideramos a aproximação  $U_S(t') \approx U_S(t)$ , e o fato de que:  $S^2(t) = \mathbb{1}$ . Assim, segue que:

$$\frac{d\rho_{I_{PS}}(t)}{dt} = -2 \omega_B(t) \int_0^t dt' \omega_B(t') \left[ \rho_{I_{PS}}(t') - S(t) \rho_{I_{PS}}(t') S(t) \right].$$

Definiremos:

$$\mathcal{D}_{S(t)}(A) \equiv A - S(t) A S(t),$$

para escrever:

$$\frac{d\rho_{I_{PS}}(t)}{dt} = -2 \omega_B(t) \int_0^t dt' \omega_B(t') \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{I_{PS}}(t')).$$

Agora, notemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{S(t)}^2(A) &= \mathcal{D}_{S(t)}(\mathcal{D}_{S(t)}(A)) \\
&= \mathcal{D}_{S(t)}(A - S(t) A S(t)) \\
&= A - S(t) A S(t) - S(t) \left[ A - S(t) A S(t) \right] S(t) \\
&= A - S(t) A S(t) - S(t) A S(t) + A \\
&= 2 \left[ A - S(t) A S(t) \right] \\
&= 2 \mathcal{D}_{S(t)}(A),
\end{aligned}$$

e também:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{S(t)}^3(A) &= \mathcal{D}_{S(t)}(\mathcal{D}_{S(t)}^2(A)) \\
&= \mathcal{D}_{S(t)}(2 \mathcal{D}_{S(t)}(A)) \\
&= 2 \mathcal{D}_{S(t)}^2(A) \\
&= 2^2 \mathcal{D}_{S(t)}(A).
\end{aligned}$$

Donde segue que:

$$\mathcal{D}_{S(t)}^n(A) = 2^{n-1} \mathcal{D}_{S(t)}(A).$$

Agora,

$$\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} = -2 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_1)),$$

implica

$$\rho_{IPS}(t_1) = \rho_{IPS}(0) - 2 \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \int_0^{t_2} dt_3 \omega_B(t_3) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_3)).$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} &= -2 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_1)) \\
&= -2 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&\quad - 2 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \mathcal{D}_{S(t)} \left[ -2 \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \int_0^{t_2} dt_3 \omega_B(t_3) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_3)) \right] \\
&= -2 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&\quad + (-2)^2 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \int_0^{t_2} dt_3 \omega_B(t_3) \mathcal{D}_{S(t)}^2(\rho_{IPS}(t_3)) \\
&= -2 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&\quad + (-1)^2 2^3 \omega_B(t) \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \int_0^{t_2} dt_3 \omega_B(t_3) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_3)) \\
&= -\omega_B(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \left[ \int_0^t dt' \omega_B(t') \right]^{2k+1} \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&= -\omega_B(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right]^{2k+1} \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&= -\omega_B(t) \sin \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right] \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)),
\end{aligned}$$

onde usamos que:

$$\int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \cdots \int_0^{t_{2k}} dt_{2k+1} \omega_B(t_{2k+1}) = \frac{1}{(2k+1)!} \left[ \int_0^t dt' \omega_B(t') \right]^{2k+1}.$$

Por outro lado, temos que:

$$\int_0^t dt' \omega_B(t') = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin[\mu(t)]}{2},$$

de forma que:

$$\begin{aligned} \sin \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right] &= \sin \left[ 2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin[\mu(t)]}{2} \right) \right] \\ &= \sin \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin[\mu(t)] \right] \\ &= \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \arcsin[\mu(t)] \right) - \sin \left( \arcsin[\mu(t)] \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left( \arcsin[\mu(t)] \right) \\ &= \sqrt{1 - \mu^2(t)}, \end{aligned}$$

pois:

$$\arcsin[\mu(t)] = y(t) \implies \sin[y(t)] = \mu(t),$$

e

$$\cos^2[y(t)] + \sin^2[y(t)] = 1 \implies \cos^2[y(t)] = 1 - \sin^2[y(t)].$$

Como também sabemos que:

$$0 \leq \mu(t) \leq 1,$$

então:

$$\cos \left( \arcsin[\mu(t)] \right) \geq 0.$$

Ou seja:

$$\cos \left( \arcsin[\mu(t)] \right) = \sqrt{1 - \mu^2(t)}.$$

Assim:

$$\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} = -\omega_B(t) \sqrt{1 - \mu^2(t)} \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)). \quad (\text{C.15})$$

Agora, notemos que, por outro lado:

$$\begin{aligned}
\rho_{IPS}(t) &= \rho_{IPS}(0) - 2 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_2)) \\
&= \rho_{IPS}(0) - 2 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&\quad + (-2)^2 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \cdots \int_0^{t_3} dt_4 \omega_B(t_4) \mathcal{D}_{S(t)}^2(\rho_{IPS}(t_4)) \\
&= \rho_{IPS}(0) - 2 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&\quad + 2^3 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \cdots \int_0^{t_3} dt_4 \omega_B(t_4) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_4)).
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t)) &= \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) - 2 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \mathcal{D}_{S(t)}^2(\rho_{IPS}(0)) \\
&\quad + 2^3 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \cdots \int_0^{t_3} dt_4 \omega_B(t_4) \mathcal{D}_{S(t)}^2(\rho_{IPS}(t_4)) \\
&= \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) - 2^2 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&\quad + 2^4 \int_0^t dt_1 \omega_B(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 \omega_B(t_2) \cdots \int_0^{t_3} dt_4 \omega_B(t_4) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t_4)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \left[ \int_0^t dt' \omega_B(t') \right]^{2k} \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \\
&= \cos \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right] \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)).
\end{aligned}$$

Agora:

$$\begin{aligned}
\cos \left[ 2 \int_0^t dt' \omega_B(t') \right] &= \cos \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin[\mu(t)] \right] \\
&= \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos [\arcsin[\mu(t)]] + \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \sin [\arcsin[\mu(t)]] \\
&= \sin [\arcsin[\mu(t)]] \\
&= \mu(t).
\end{aligned}$$

Assim:

$$\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t)) = \mu(t) \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)),$$

ou seja:

$$\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) = \frac{\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t))}{\mu(t)}. \quad (\text{C.16})$$

Portanto, pelas equações (C.15) e (C.16):

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_{IPS}(t)}{dt} &= -\omega_B(t) \sqrt{1-\mu^2(t)} \left[ \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(0)) \right] \\
&= -\omega_B(t) \sqrt{1-\mu^2(t)} \left[ \frac{\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t))}{\mu(t)} \right] \\
&= - \left[ \frac{-\dot{\mu}(t)}{2\sqrt{1-\mu^2(t)}} \right] \sqrt{1-\mu^2(t)} \left[ \frac{\mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t))}{\mu(t)} \right] \\
&= \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} \right] \mathcal{D}_{S(t)}(\rho_{IPS}(t)) \\
&= \left[ \frac{\dot{\mu}(t)}{2\mu(t)} \right] \left[ \rho_{IPS}(t) - S(t) \rho_{IPS}(t) S(t) \right].
\end{aligned}$$



## APÊNDICE D – COMPLEXIDADE QUÂNTICA NO ESPAÇO PURIFICADO

### D.1 Grupos e álgebras de Lie

Vamos estabelecer a notação e apresentar algumas definições precisas. Seja  $M$  uma variedade diferenciável suave de dimensão  $\dim(M)$ . Denotaremos por  $C^\infty(M)$  o espaço vetorial das funções suaves  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Def. (Operador de derivada direcional em um ponto):** Seja

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow M \\ \lambda &\mapsto \gamma(\lambda)\end{aligned}$$

uma curva suave, que passa por um ponto  $u \in M$ , de forma que  $\gamma(0) = u$ . O operador de derivada direcional no ponto  $u$ , sobre a curva  $\gamma$  é a transformação linear:

$$\begin{aligned}v_{\gamma,u} : C^\infty(M) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ f &\mapsto v_{\gamma,u}(f) \equiv \frac{d}{d\lambda}(f \circ \gamma)(0).\end{aligned}$$

**Def. (Espaço vetorial tangente em um ponto):** O espaço vetorial tangente  $T_u M$  em um ponto  $u \in M$ , é o conjunto

$$T_u M \equiv \{v_{\gamma,u} \mid \gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ é uma curva suave que passa por } u \in M\},$$

equipado com as operações:

$$\begin{cases} (v_{\gamma,p} + v_{\delta,p})(f) = v_{\gamma,p}(f) + v_{\delta,p}(f) & \in T_u M \\ (\lambda \times v_{\gamma,p})(f) = \lambda v_{\gamma,p}(f) & \in T_u M, \end{cases}$$

onde  $\gamma$  e  $\delta$  são curvas suaves que passam por  $u \in M$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$

Utilizando uma carta  $x : U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^{\dim(M)}$ , tal que  $u \in U$ , pode-se mostrar que o conjunto:

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_u, \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \right)_u, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^{\dim(M)}} \right)_u \right\},$$

forma uma base para  $T_u M$ , onde introduzimos a notação:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)_{x^{-1}(q)} \equiv \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial q^k}(q),$$

onde  $f \in C^\infty(M)$  e  $q \in x(U) \subset \mathbb{R}^{\dim(M)}$ .

**Def. (Empurrão:)** Seja

$$\phi : M \rightarrow N$$

uma função suave entre as variedades suaves  $M$  e  $N$ . O mapa empurrão (*push-forward*, no inglês)  $\phi_{u*}$  induzido pela função  $\phi$  em um ponto  $u \in M$  é o mapa linear

$$\begin{aligned} \phi_{u*} : T_u M &\xrightarrow{\sim} T_{\phi(u)} N \\ v &\mapsto \phi_{u*}(v), \end{aligned}$$

definido por:

$$\phi_{u*}(v)(g) \equiv v(g \circ \phi),$$

onde  $g \in C^\infty(N)$  é uma função arbitrária. Note que:

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

**Def. (Fibrado tangente:)** O fibrado tangente é o conjunto formado pela união disjunta de todos espaços tangentes em  $M$ :

$$TM = \bigcup_{u \in M} T_u M.$$

Pode-se construir um atlas  $A_{TM}$  para  $TM$  dado um atlas  $A_M$  para  $M$ . Utilizando uma carta  $x : U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^{\dim(M)}$ , na variedade  $M$ , é possível construir uma carta no fibrado tangente:

$$\xi_x : TU \subset TM \rightarrow \xi_x(TU) \subset \mathbb{R}^{2\dim(M)},$$

de forma que, uma variedade suave  $M$  induz uma estrutura de variedade suave em seu fibrado tangente  $TM$ . Cada elemento de  $TM$  tem a forma  $(u, v_{\gamma,u})$ , onde  $\gamma(0) = u \in M$  e  $v_{u,\gamma} \in T_u M$ . A projeção natural  $\pi : TM \rightarrow M$ , dada por  $\pi(u, v_{\gamma,u}) = u$  é um mapa suave e sobrejetivo entre variedades suaves. O fibrado tangente cortado  $TM \setminus 0$  é o fibrado tangente onde excluimos o vetor nulo de todos espaços tangentes.

**Def. (Campos vetoriais:)** Um campo vetorial  $v$  é uma função suave,  $M \xrightarrow{v} TM$ , tal que,  $\pi \circ v = id_M$ .

**Def. (Grupo de Lie:)** Um grupo de Lie  $G$  é uma variedade diferenciável suave que também é um grupo no sentido algébrico, com a propriedade de que os mapas de multiplicação  $m : G \times G \rightarrow G$  e inversão  $i : G \rightarrow G$  são suaves.



**Def. (Campos vetoriais invariantes pela esquerda:)** Um campo vetorial  $G \xrightarrow{v} TG$  é dito invariante pela esquerda, se

$$v_{gu} = \ell_{u*}(v_g), \quad \forall u, g \in G,$$

onde  $\ell_u(g) = ug$  é translação a esquerda de  $g \in G$  por  $u \in G$  e  $\ell_{u*}(v_g) \in T_{ug}G$  é o mapa empurrão induzido por essa função.

**Def. (Álgebra de Lie abstrata):** Uma álgebra de Lie abstrata  $(L, +, \times, \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket)$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, equipado com uma multiplicação

$$\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket : L \times L \rightarrow L,$$

que satisfaz as seguintes propriedades para todos  $x, y, z \in L$  e  $a, b \in \mathbb{K}$ :

- Bilinearidade:

$$\llbracket ax + by, z \rrbracket = a \llbracket x, z \rrbracket + b \llbracket y, z \rrbracket,$$

$$\llbracket z, ax + by \rrbracket = a \llbracket z, x \rrbracket + b \llbracket z, y \rrbracket.$$

- Anti-simetria:

$$\llbracket x, x \rrbracket = 0.$$

- Identidade de Jacobi:

$$\llbracket x, \llbracket y, z \rrbracket \rrbracket + \llbracket z, \llbracket x, y \rrbracket \rrbracket + \llbracket y, \llbracket z, x \rrbracket \rrbracket = 0.$$

**Def. (Álgebra de Lie de um grupo de Lie:)** A álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de um grupo de Lie  $G$  é o espaço vetorial dos campos vetoriais invariantes a esquerda, munido da operação

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}, \\ (v, w) &\mapsto \llbracket v, w \rrbracket, \end{aligned}$$

definida por:

$$\llbracket v, w \rrbracket(f) \equiv v(w(f)) - w(v(f)),$$

onde  $f \in C^\infty(G)$ . Pode-se checar que essa definição, de fato, satisfaz as propriedades de uma álgebra de Lie abstrata.

Também é sabido que pode-se construir uma bijeção  $\varphi$  entre o espaço vetorial tangente na identidade  $T_eG$  e os elementos da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , assim definida. Podemos checar que:

$$\begin{aligned} \varphi : T_eG &\rightarrow \mathfrak{g}, \\ A &\mapsto \varphi(A), \end{aligned}$$

definido em um ponto  $u \in G$ , como:

$$\varphi(A)_u \equiv \ell_{u*}(A),$$

é uma bijeção.

Além disso, o comutador entre os campos vetoriais induz um comutador no espaço tangente na identidade, de forma que:

$$[A, B] \equiv \varphi^{-1}(\llbracket \varphi(A), \varphi(B) \rrbracket).$$

Assim, é possível mostrar que essas definições fazem de  $\varphi$  um isomorfismo entre álgebras de Lie. Dessa forma, também usaremos o termo álgebra de Lie para nos referir ao espaço tangente na identidade  $T_e G$ .

## D.2 Coordenadas no $SU(2^N)$

Vamos introduzir as coordenadas  $U$ -adaptadas e as coordenadas de Pauli para o grupo de Lie  $SU(2^N)$ .

- Coordenadas  $U$ -adaptadas:

Fixando uma origem  $U \in SU(2^N)$ , definimos:

$$\begin{aligned} \phi_U : \mathcal{V}_U \subset \mathbb{R}^{4^N-1} &\rightarrow \mathcal{U}_U \subset SU(2^N) \\ r &\mapsto V = \exp(-ir \cdot \sigma) U, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{V}_U$  é um domínio que faz de  $\phi_U$  uma função bijetiva. A carta  $x_U$  será  $x_U = \phi_U^{-1}$ , de forma que:

$$\begin{aligned} x_U : \mathcal{U}_U \subset SU(2^N) &\rightarrow \mathcal{V}_U \subset \mathbb{R}^{4^N-1} \\ V = \exp(-ir \cdot \sigma) U &\mapsto x_U(V) = r, \end{aligned}$$

dessa forma, explicitamente definimos:

$$x_U^k(V) = \frac{i \operatorname{Tr} \left\{ \ln(VU^\dagger) \sigma_k \right\}}{2^N}. \quad (\text{D.1})$$

Para cada ponto  $U$ , usaremos a seguinte notação para o  $k$ -ésimo elemento da base induzida pela carta  $x_U$  nesse ponto  $U$ :

$$\vec{e}'_{k,U} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_U^k} \right)_U. \quad (\text{D.2})$$

- Coordenadas de Pauli:

As coordenadas de Pauli são coordenadas  $\mathbb{1}$ -adaptadas para o grupo de Lie  $SU(2^N)$  e denotamos essa carta por  $x_{\mathbb{1}} \equiv x$ . Assim:

$$\begin{aligned} x : \quad \mathcal{U} \subset SU(2^N) &\rightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{4^N-1} \\ V = \exp(-iq \cdot \sigma) &\mapsto x(V) = q, \end{aligned}$$

com:

$$x^k(V) = \frac{i \operatorname{Tr} \left\{ \ln(V) \sigma_k \right\}}{2^N}. \quad (\text{D.3})$$

Se um ponto  $U$  estiver no domínio da carta  $x$ , podemos induzir uma base para o espaço tangente no ponto  $U$ . Assim, se  $U \in \mathcal{U}$ , usaremos a seguinte notação para o  $k$ -ésimo elemento da base induzida pelas coordenadas de Pauli  $x$  nesse ponto  $U$ :

$$\vec{e}_{k,U} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_U.$$

## Referenciais

Consideremos curvas

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R} &\rightarrow SU(2^N) \\ \lambda &\mapsto U(\lambda). \end{aligned}$$

Um referencial é constituído por uma coleção de cartas, de forma que, para todo ponto de uma curva  $U(\lambda)$ , uma carta é escolhida. Vamos definir dois referenciais com base nas coordenadas que definimos acima

- Referencial  $S'$ :

Denotaremos por  $S'$  o referencial no qual tomamos coordenadas  $U(\lambda)$ -adaptadas para cada ponto  $U(\lambda)$  de uma curva  $U$ .

Notemos pela definição (D.1), que para cada  $\lambda$ ,  $U(\lambda)$  é a origem da carta  $x_{U(\lambda)}$ , pois:

$$x_{U(\lambda)}^k(U(\lambda)) = 0.$$

Dessa forma, o referencial  $S'$  tem sua origem no ponto  $U(\lambda)$  para todo ponto da curva  $U$ . Portanto, diremos se tratar de um referencial que se move com a curva.

Nos espaços tangentes, para cada ponto  $U(\lambda)$ , temos a base dos vetores com linha

$$\{\vec{e}'_{k,U(\lambda)}, \text{ com } k = 1, 2, \dots, 4^N - 1\}.$$

- Referencial S:

Se todo ponto  $U(\lambda)$  de uma curva  $U$  estiver no domínio da carta  $x$ , denotaremos por S o referencial no qual tomamos coordenadas de Pauli para todo ponto  $U(\lambda)$ .

Esse referencial tem sua origem fixa na identidade  $\mathbb{1} \in \text{SU}(2^N)$  do grupo, portanto, diremos se tratar de um referencial fixo.

Nos espaços tangentes, para cada ponto  $U(\lambda)$ , temos a base dos vetores sem linha

$$\{\vec{e}_{k,U(\lambda)}, \text{ com } k = 1, 2, \dots, 4^N - 1\}.$$

Mostraremos como utilizar esses sistemas de coordenadas para descrever os vetores tangentes nesse grupo de Lie. Mostramos isso diretamente por meio de duas pequenas proposições:

### Representação Hamiltoniana

**Proposição:** Fixe  $\lambda$ , de forma que  $x_{U(\lambda)}$  tenha  $U(\lambda) \in \text{SU}(2^N)$  como origem. Mostre que, se:

$$U(\lambda + \epsilon) = \exp[-i\epsilon h(\lambda) \cdot \sigma] U(\lambda),$$

então:

$$v_{U,U(\lambda)} = \sum_{k=1}^{4^N-1} h^k(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial x_{U(\lambda)}^k} \right)_{U(\lambda)}.$$

**Prova:** Notemos que:

$$U(\lambda + \epsilon) = \exp[-i\epsilon h(\lambda) \cdot \sigma] U(\lambda),$$

de forma que:

$$\begin{aligned} x_{U(\lambda)}^k(U(\lambda + \epsilon)) &= \frac{i \text{Tr} \left\{ \ln [U(\lambda + \epsilon) U^\dagger(\lambda)] \sigma_k \right\}}{2^n} \\ &= \frac{i \text{Tr} \left\{ \ln [\exp(-i\epsilon h(\lambda) \cdot \sigma) U(\lambda) U^\dagger(\lambda)] \sigma_k \right\}}{2^n} \\ &= \frac{i \text{Tr} \left\{ [-i\epsilon h(\lambda) \cdot \sigma] \sigma_k \right\}}{2^n} \\ &= \epsilon h^k(\lambda). \end{aligned}$$

Assim:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_{U(\lambda)}^k(U(\lambda + \epsilon)) = 0, \quad (\text{D.4})$$

e

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} x_{U(\lambda)}^k(U(\lambda + \epsilon)) \right|_{\epsilon=0} = h^k(\lambda).$$

Portanto, segue que o vetor  $v_{U,U(\lambda)}$ , tangente a curva  $U$ , no ponto  $U(\lambda)$  é dado por:

$$v_{U,U(\lambda)} = \sum_{k=1}^{4^N-1} h^k(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial x_{U(\lambda)}^k} \right)_{U(\lambda)}.$$

■

## Representação de Pauli

**Proposição:** Seja

$$U(\lambda + \epsilon) = \exp[-i(q(\lambda) + \epsilon p(\lambda)) \cdot \sigma].$$

Mostre que:

$$v_{U,U(\lambda)} = \sum_{k=1}^{4^N-1} p^k(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{U(\lambda)}.$$

**Prova:** Temos:

$$U(\lambda + \epsilon) = \exp[-i(q(\lambda) + \epsilon p(\lambda)) \cdot \sigma].$$

Em particular, se  $\epsilon = 0$ :

$$U(\lambda) = \exp[-i q(\lambda) \cdot \sigma].$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} x^k(U(\lambda + \epsilon)) &= \frac{i \operatorname{Tr} \left\{ \ln(U(\lambda + \epsilon)) \sigma_k \right\}}{2^n} \\ &= \frac{i \operatorname{Tr} \left\{ \ln \left[ \exp[-i(q(\lambda) + \epsilon p(\lambda)) \cdot \sigma] \right] \sigma_k \right\}}{2^n} \\ &= \frac{i \operatorname{Tr} \left\{ [-i(q(\lambda) + \epsilon p(\lambda)) \cdot \sigma] \sigma_k \right\}}{2^n} \\ &= \sum_{j=1}^{4^N-1} \left( \frac{q^j(\lambda) + \epsilon p^j(\lambda)}{2^n} \right) \operatorname{Tr} \{ \sigma_j \sigma_k \} \\ &= \sum_{j=1}^{4^N-1} \left( \frac{q^j(\lambda) + \epsilon p^j(\lambda)}{2^n} \right) 2^n \delta_{jk} \\ &= q^k(\lambda) + \epsilon p^k(\lambda), \end{aligned}$$

de forma que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x^k(U(\lambda + \epsilon)) = q^k(\lambda),$$

e

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} x^k(U(\lambda + \epsilon)) \right|_{\epsilon=0} = p^k(\lambda).$$

Novamente, segue que o vetor  $v_{U,U(\lambda)}$ , tangente a curva  $U$ , no ponto

$$x^{-1}(q(\lambda)) = U(\lambda),$$

é dado por:

$$v_{U,U(\lambda)} = \sum_{k=1}^{4^N-1} p^k(\lambda) \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{U(\lambda)}.$$

■

### D.3 Mudando de coordenadas no $SU(2^N)$

Começaremos mostrando uma demonstração para a série de Dyson. Dessa forma, dado que conhecemos o Hamiltoniano, podemos resolver a equação de Schrödinger para o unitário que rescreve essa curva. Depois, mostraremos que a volta da representação de representação de Pauli para a Hamiltoniana é dada por meio da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. (16, 17, 19)

#### A série de Dyson

Agora, vamos prover uma forma de voltar das coordenadas  $U$ -adaptadas para as coordenadas de Pauli. Isto é atingido por meio da chamada série de Dyson. Seja, portanto:

$$H(\lambda) = i \frac{dU(\lambda)}{d\lambda} U^\dagger(\lambda).$$

Essa curva é dada por:

$$U(\lambda + \epsilon) = \exp[-i\epsilon H(\lambda)] U(\lambda).$$

e

$$\frac{dU(\lambda)}{d\lambda} = -i H(\lambda) U(\lambda).$$

Também podemos fazer:

$$U(0) = \mathbb{1}.$$

Assim:

$$U(\lambda) = \mathbb{1} - i \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) U(\lambda_1).$$

Porém, isso implica que:

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= \mathbb{1} - i \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \left[ \mathbb{1} - i \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) U(\lambda_2) \right] \\ &= \mathbb{1} - i \int_0^\lambda H(\lambda_1) d\lambda_1 + (-i)^2 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) U(\lambda_2) \end{aligned}$$

Iterando mais uma vez:

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= \mathbb{1} - i \int_0^\lambda H(\lambda_1) d\lambda_1 \\ &\quad + (-i)^2 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \left[ \mathbb{1} - i \int_0^{\lambda_2} d\lambda_3 H(\lambda_3) U(\lambda_3) \right] \\ &= \mathbb{1} - i \int_0^\lambda H(\lambda_1) d\lambda_1 + (-i)^2 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \int_0^{\lambda_2} d\lambda_3 H(\lambda_3) U(\lambda_3) \end{aligned}$$

Iterando novamente:

$$\begin{aligned} U(\lambda) &= \mathbb{1} - i \int_0^\lambda H(\lambda_1) d\lambda_1 + (-i)^2 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \int_0^{\lambda_2} d\lambda_3 H(\lambda_3) \left[ \mathbb{1} - i \int_0^{\lambda_3} d\lambda_4 H(\lambda_4) U(\lambda_4) \right] \\ &= \mathbb{1} - i \int_0^\lambda H(\lambda_1) d\lambda_1 + (-i)^2 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \int_0^{\lambda_2} d\lambda_3 H(\lambda_3) \\ &\quad + (-i)^4 \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \int_0^{\lambda_2} d\lambda_3 H(\lambda_3) \int_0^{\lambda_3} d\lambda_4 H(\lambda_4) U(\lambda_4). \end{aligned}$$

Assim, concluimos que:

$$U(\lambda) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k \int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \dots \int_0^{\lambda_{k-1}} d\lambda_k H(\lambda_k).$$

Por um argumento análogo ao caso da seção anterior, se inserirmos um operador de ordenamento temporal  $T$  por permutações dessas variáveis, temos que:

$$\int_0^\lambda d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \dots \int_0^{\lambda_{k-1}} d\lambda_k H(\lambda_{k-1}) = \left( \frac{1}{k!} \right) T \left[ \int_0^t d\lambda' H(\lambda') \right]^k.$$

Portanto:

$$U(\lambda) = T \exp \left( -i \int_0^\lambda H(\lambda') d\lambda' \right).$$

Agora, forneceremos a volta da representação de Pauli para representação Hamiltoniana, por meio da seguinte proposição:

**Proposição:** Mostre que, em primeira ordem em  $\epsilon$ :

$$\exp[-i(Q(\lambda) + \epsilon P(\lambda))] = \exp[-i\epsilon H(\lambda)] \exp[-iQ(\lambda)],$$

com

$$H(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(k+1)!} \text{ad}_{Q(\lambda)}^k P(\lambda).$$

**Prova:** Notemos que:

$$\exp[-i\epsilon H(\lambda)] = \exp[-i(Q(\lambda) + \epsilon P(\lambda))] \exp[iQ(\lambda)].$$

Consideremos uma função:

$$f(\alpha) = \exp[-i\epsilon H(\lambda)\alpha] = \exp[-i(Q(\lambda) + \epsilon P(\lambda))\alpha] \exp[iQ(\lambda)\alpha],$$

de forma que:

$$f(1) = \exp[-i\epsilon H(\lambda)].$$

Portanto, expandiremos  $f$  em uma série de Taylor. Notemos que derivando em relação ao parâmetro  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\alpha}(\alpha) &= [-i(Q(\lambda) + \epsilon P(\lambda))] \exp[-i(Q(\lambda) + \epsilon P(\lambda))\alpha] \exp[iQ(\lambda)\alpha] \\ &\quad + \exp[-i(Q(\lambda) + \epsilon P(\lambda))\alpha] \exp[iQ(\lambda)\alpha] (iQ(\lambda)) \\ &= [-i(Q(\lambda) + \epsilon P(\lambda))] f(\alpha) + f(\alpha)(iQ(\lambda)) \\ &= -i[Q(\lambda), f(\alpha)] - i\epsilon P(\lambda) f(\alpha). \end{aligned}$$

E, assim:

$$\frac{df}{d\alpha}(0) = -i\epsilon P(\lambda),$$

pois:

$$f(0) = \mathbb{1}.$$

Derivando novamente, temos:

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2}(\alpha) = -i \left[ Q(\lambda), \frac{df}{d\alpha}(\alpha) \right] - i\epsilon P(\lambda) \frac{df}{d\alpha}(\alpha),$$

então, em primeira ordem em  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{d\alpha^2}(0) &= -i \left[ Q(\lambda), \frac{df}{d\alpha}(0) \right] - i\epsilon P(\lambda) \frac{df}{d\alpha}(0) \\ &= -i[Q(\lambda), (-i\epsilon P(\lambda))] - i\epsilon P(\lambda)(-i\epsilon P(\lambda)) \\ &= -\epsilon [Q(\lambda), P(\lambda)]. \end{aligned}$$



Iterando a derivada mais uma vez:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 f}{d\alpha^3}(0) &= -i \left[ Q(\lambda), \frac{d^2 f}{d\alpha^2}(0) \right] - i\epsilon P(\lambda) \frac{d^2 f}{d\alpha^2}(0) \\ &= (-i)(-\epsilon) [Q(\lambda), [Q(\lambda), P(\lambda)]] - i\epsilon P(\lambda) (-\epsilon [Q(\lambda), P(\lambda)]) \\ &= i\epsilon [Q(\lambda), [Q(\lambda), P(\lambda)]]. \end{aligned}$$

Iterando novamente:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f}{d\alpha^4}(0) &= -i \left[ Q(\lambda), \frac{d^3 f}{d\alpha^3}(0) \right] - i\epsilon P(\lambda) \frac{d^3 f}{d\alpha^3}(0) \\ &= (-i)(i\epsilon) [Q(\lambda), [Q(\lambda), [Q(\lambda), P(\lambda)]]] - i\epsilon P(\lambda) (i\epsilon [Q(\lambda), [Q(\lambda), P(\lambda)]]) \\ &= \epsilon [Q(\lambda), [Q(\lambda), [Q(\lambda), P(\lambda)]]]. \end{aligned}$$

Vamos introduzir o mapa

$$\text{ad}_{Q(\lambda)}(P(\lambda)) = [Q(\lambda), P(\lambda)],$$

dessa forma, notemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{d\alpha}(0) = -i\epsilon P(\lambda) \\ \frac{d^2 f}{d\alpha^2}(0) = -\epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}(P(\lambda)) \\ \frac{d^3 f}{d\alpha^3}(0) = i\epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^2(P(\lambda)) \\ \frac{d^4 f}{d\alpha^4}(0) = \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^3(P(\lambda)) \\ \vdots \\ \frac{d^k f}{d\alpha^k}(0) = (-i)^k \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^{k-1}(P(\lambda)) \\ \vdots \end{array} \right.$$

Portanto:

$$f(\alpha) = \mathbb{1} - \alpha i\epsilon P(\lambda) - \frac{\alpha^2}{2} \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}(P(\lambda)) + \dots + \frac{\alpha^k}{k!} (-i)^k \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^{k-1}(P(\lambda)) + \dots,$$

e

$$f(1) = \mathbb{1} - i\epsilon P(\lambda) - \frac{\epsilon}{2} \text{ad}_{Q(\lambda)}(P(\lambda)) + \dots + \frac{(-i)^k}{k!} \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^{k-1}(P(\lambda)) + \dots$$

Logo:

$$\exp[-i\epsilon H(\lambda)] = \mathbb{1} - i\epsilon P(\lambda) - \frac{\epsilon}{2} \text{ad}_{Q(\lambda)}(P(\lambda)) + \dots + \frac{(-i)^k}{k!} \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^{k-1}(P(\lambda)) + \dots$$

e em primeira ordem em  $\epsilon$ :

$$\mathbb{1} - i\epsilon H(\lambda) = \mathbb{1} - i\epsilon P(\lambda) - \frac{\epsilon}{2} \text{ad}_{Q(\lambda)}(P(\lambda)) + \dots + \frac{(-i)^k}{k!} \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^{k-1}(P(\lambda)) + \dots,$$

de forma que:

$$-i\epsilon H(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \epsilon \text{ad}_{Q(\lambda)}^{k-1}(P(\lambda)),$$

donde segue que:

$$H(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(k+1)!} \text{ad}_{Q(\lambda)}^k(P(\lambda)).$$

■

#### D.4 Variedades de Finsler

Estamos interessados em estudar funções

$$F : TM \rightarrow [0, \infty),$$

no fibrado tangente de uma variedade suave, de forma que:

$$\begin{array}{ccc} x(U) \times \mathbb{R}^{\dim(M)} \subset \mathbb{R}^{2\dim(M)} & \xrightarrow{\xi_x^{-1}} & TU \subset TM & \xrightarrow{F} & [0, \infty) \subset \mathbb{R} \\ (q, p) & \mapsto & v = \sum_{k=1}^{\dim(M)} p^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{x^{-1}(q)} & \mapsto & F(v). \end{array}$$

Quando uma carta ou sistema de coordenadas local  $\xi_x$  para o fibrado tangente for subtendido, omitiremos a carta para não sobrecarregar a notação. Isso é comumente feito na literatura. (17, 35) Dessa forma, escreveremos simplesmente  $F(q, p)$  ao invés de  $(F \circ \xi_x^{-1})(q, p)$ .

**Def. (Estrutura de Finsler:)** Uma estrutura de Finsler em  $M$ , (35, 42), é uma função

$$F : TM \rightarrow [0, \infty),$$

definida globalmente, com as propriedades:

- Regularidade:  $F$  é suave em todo o fibrado tangente cortado  $TM \setminus 0$ .

- Homogeneidade positiva:

$$F(q, \lambda p) = \lambda F(q, p),$$

para todo  $\lambda > 0$ .

- Convexidade forte: A matriz Hessiana  $\dim(M) \times \dim(M)$ , cujos elementos de matriz são dados por

$$g_{jk}(q, p) = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\partial^2 F^2}{\partial p^j \partial p^k}(q, p),$$

é positiva definida em todo ponto de  $TM \setminus 0$ .

Com essas definições e o teorema de Euler para funções homogêneas, pode-se demonstrar que valem as propriedades:

- Positividade:

$$F(q, p) \geq 0 \text{ e } F(q, p) = 0 \implies p = 0;$$

- Desigualdade triangular:

$$F(q, p_1 + p_2) \leq F(q, p_1) + F(q, p_2);$$

- A matriz Hessiana satisfaz:

$$\sum_{j=1}^{\dim(M)} \sum_{k=1}^{\dim(M)} g_{jk}(q, p) p^j p^k = F^2(q, p),$$

de forma que, se  $g_{jk}(q, p)$  não depender explicitamente de  $p$ , temos o caso da geometria Riemanniana.

**Def. (Comprimento de uma curva:)** O comprimento  $l_F(\gamma)$  de uma curva  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  induzido por uma estrutura de Finsler  $F$  é definido por

$$l_F(\gamma) \equiv \int_I F(\gamma(\lambda), v_{\gamma, \gamma(\lambda)}) d\lambda.$$

**Def. (Distância:)** A distância  $d(u_1, u_2)$  entre dois pontos  $u_1, u_2 \in M$  é definido como o menor comprimento  $l_F(\gamma)$  dentre todas as curvas  $\gamma$  que conectam os dois pontos.

**Def. (Geodésica:)** A geodésica é a curva de menor comprimento que conecta dois pontos  $u_1, u_2 \in M$ .

**Def. (Isometria:)** Seja  $F$  uma estrutura de Finsler. Um difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  é dito ser uma isometria, se

$$l_F(\gamma) = l_F(\phi \circ \gamma),$$

para todas as curvas  $\gamma$ . Localmente, podemos ver que essa condição é dada por:

$$F(u, v) = F(\phi(u), \phi_{u*}(v)).$$

Notemos novamente que:

$$\begin{aligned} \phi_{u*} : T_u M &\xrightarrow{\sim} T_{\phi(u)} M \\ v &\mapsto \phi_{u*}(v), \end{aligned}$$

onde  $\phi_{u*}(v)$  foi definido no apêndice D.1. Nosso objetivo é justamente construir o caminho entre essas definições e os conceitos que estamos acostumados a lidar na física.

**Def. (Estrutura de Finsler invariante pela direita:)** Seja  $G$  um grupo de Lie dotado de uma estrutura de Finsler  $F : TG \rightarrow [0, \infty)$ . Dizemos que  $F$  é invariante pela direita, se:

$$F(e, y) = F(r_u(e), r_{u*}(y)),$$

onde  $e \in G$  é a identidade do grupo  $G$  e  $y \in T_e G$ . Além disso,  $r_u(g) = gu$  é translação a direita de  $g \in G$  por  $u \in G$  e  $r_{u*}(v) \in T_{gu} G$  é o mapa empurrão induzido por essa função.

Notemos então a seguinte proposição para conectar as definições matemáticas com as descrições que estamos habituados na física.

**Proposição:** Seja:

$$\gamma(\epsilon) = \exp[-i\epsilon a \cdot \sigma],$$

de forma que:

$$v_{\gamma, \epsilon} = \sum_{k=1}^{4^N-1} a^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_e.$$

Mostre que:

$$r_{U*}(v_{\gamma, \epsilon}) = \sum_{k=1}^{4^N-1} a^k \left( \frac{\partial}{\partial x_U^k} \right)_U.$$

**Prova:** Notemos que, se  $f \in C^\infty(SU(2^n))$ :

$$\begin{aligned} r_{U*}(y_{\gamma, \epsilon})(f) &= y_{\gamma, \epsilon}(f \circ r_U) \\ &= \frac{d}{d\epsilon} [(f \circ r_U) \circ \gamma](0) \\ &= \frac{d}{d\epsilon} [f \circ (r_U \circ \gamma)](0) \\ &= v_{\mu, U}(f), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\mu(\epsilon) &= [r_U \circ \gamma(\epsilon)] \\ &= \gamma(\epsilon)U \\ &= \exp[-i\epsilon r \cdot \sigma] \exp[-i q \cdot \sigma].\end{aligned}$$

Segue então que:

$$v_{\mu,U} = \sum_{k=1}^{4^N-1} a^k \left( \frac{\partial}{\partial x_U^k} \right)_U.$$

■

Dessa forma, a condição de invariância pela direita é dada por:

$$F(e, v_{\gamma,e}) = F(V, v_{\mu,V}),$$

onde:

$$v_{\gamma,e} = \sum_{k=1}^{4^N-1} r^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)_e,$$

e também:

$$v_{\mu,V} \equiv r_{V*}(v_{\gamma,e}) = \sum_{k=1}^{4^N-1} r^k \left( \frac{\partial}{\partial x_V^k} \right)_V.$$

**Def. (Métrica de Finsler Pauli-simétrica:)** Uma métrica de Finsler  $F$  é dita ser Pauli-simétrica, se essa métrica for invariante pela direita, com a propriedade de que, localmente  $F$  não depende do sinal das coordenadas  $h^k$ , induzidas por uma carta  $U$ -adaptada, mas apenas dos valores absolutos  $|h^k|$  dessas coordenadas. (17)

## D.5 Geodésicas de Pauli

**Proposição:** Seja  $V \in \text{SU}(2^n)$  e  $v \in \mathfrak{su}(2^n)$ , de forma que:

$$V = \exp(v).$$

Mostre que, se:

$$\begin{aligned}\varphi_k : \text{SU}(2^n) &\rightarrow \text{SU}(2^n) \\ V &\mapsto \varphi_k(V) \equiv \sigma_k V \sigma_k^\dagger,\end{aligned}$$

então:

$$\varphi_{k*}(v) = \sigma_k v \sigma_k^\dagger,$$

e  $\varphi_{k*}$  é diagonal com entradas iguais a  $\pm 1$ .

**Prova:** Notemos que  $\varphi_k$  é um homomorfismo de grupos, pois se  $V_1, V_2 \in \text{SU}(2^n)$ :

$$\begin{aligned}\varphi_k(V_1 V_2) &= \sigma_k V_1 V_2 \sigma_k^\dagger \\ &= \sigma_k V_1 \sigma_k^\dagger \sigma_k V_2 \sigma_k^\dagger \\ &= \varphi_k(V_1) \varphi_k(V_2),\end{aligned}$$

onde usamos que  $\sigma_k^\dagger \sigma_k = \mathbb{1}$ . Agora, da teoria dos grupos de Lie, como na seção 3.5 da referência (16), sabemos que se  $\varphi_k$  é um homomorfismo entre grupos de Lie, então vale que:

$$\varphi_k(\exp(v)) = \exp(\varphi_{k*}(v)).$$

Assim:

$$\begin{aligned}\varphi_k(\exp(v)) &= \sigma_k \exp(v) \sigma_k^\dagger \\ &= \sigma_k \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{j!} \right) \sigma_k^\dagger \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\sigma_k v \sigma_k^\dagger)^j}{j!} \\ &= \exp(\sigma_k v \sigma_k^\dagger),\end{aligned}$$

onde novamente usamos que  $\sigma_k^\dagger \sigma_k = \mathbb{1}$ . Segue então que:

$$\varphi_{k*}(v) = \sigma_k v \sigma_k^\dagger,$$

o que prova a primeira parte. Agora, notemos que, se  $[\sigma_j, \sigma_k] = 0$ , então:

$$\begin{aligned}\varphi_{k*}(\sigma_j) &= \sigma_k \sigma_j \sigma_k^\dagger \\ &= \sigma_j,\end{aligned}$$

e por outro lado, se  $\{\sigma_l, \sigma_k\} = 0$ , temos

$$\begin{aligned}\varphi_{k*}(\sigma_l) &= \sigma_k \sigma_l \sigma_k^\dagger \\ &= -\sigma_l,\end{aligned}$$

o que prova a segunda parte. ■

Se  $F$  for absolutamente homogênea, dizemos se tratar de uma métrica de Finsler Pauli-simétrica. Para essas métricas se  $\phi_{k*}$  é diagonal na base das matrizes de Pauli

generalizadas com entradas  $\pm 1$ . Mostramos então as condições da referência (17) para que  $\phi$  seja uma isometria para essas métricas.

**Proposição:** Seja  $S$  um conjunto de matrizes de Pauli generalizadas, independentes, que comutam e que formam um subgrupo das matrizes de Pauli. Se  $H_f$  puder ser escrito em termos dos elementos de  $S$ , para certo  $h_f \in \mathcal{V}$ :

$$H_f = \sum_j h_f^j \sigma_j,$$

com  $\sigma_j \in S$ .

Se  $U_g(\lambda)$  é uma curva geodésica, mostre que, se  $\sigma_k \notin S$ , então  $x^k(U_g(\lambda)) = 0$ .

**Prova:** Notemos que:

$$x^k(U_g(\lambda)) = \frac{i}{2^n} \text{Tr} \left\{ \ln(U_g(\lambda)) \sigma_k \right\}.$$

Seja  $\sigma_j \in S$  uma matriz de Pauli generalizada hermitiana que anti-comuta com  $\sigma_k \notin S$ :

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} \equiv \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 0.$$

Em particular, como  $\sigma_j \in S$ :

$$U_g(\lambda) = \sigma_j U_g(\lambda) \sigma_j^\dagger,$$

já que essa operação é uma isometria. Dessa forma:

$$x^k(U_g(\lambda)) = x^k(\sigma_j U_g(\lambda) \sigma_j^\dagger),$$

ou também:

$$\text{Tr} \left\{ \ln(U_g(\lambda)) \sigma_k \right\} = \text{Tr} \left\{ \ln(\sigma_j U_g(\lambda) \sigma_j^\dagger) \sigma_k \right\}. \quad (\text{D.5})$$

Agora, notemos que:

$$\begin{aligned} \ln(U_g(\lambda)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} (U_g(\lambda) - \mathbb{1})^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} (-1)^{m-l} U_g^l(\lambda), \end{aligned}$$

e tomando o traço:

$$\text{Tr} \left\{ \ln(U_g(\lambda)) \sigma_k \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} (-1)^{m-l} \text{Tr} \left\{ U_g^l(\lambda) \sigma_k \right\}.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\ln \left( \sigma_j U_g(\lambda) \sigma_j^\dagger \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left( \sigma_j U_g(\lambda) \sigma_j^\dagger - \mathbb{1} \right)^m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} (-1)^{m-l} \left[ \sigma_j U_g(\lambda) \sigma_j^\dagger \right]^l \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} (-1)^{m-l} \sigma_j U_g^l(\lambda) \sigma_j^\dagger,
\end{aligned}$$

e tomando o traço:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left\{ \ln \left( \sigma_j U_g(\lambda) \sigma_j^\dagger \right) \sigma_k \right\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} (-1)^{m-l} \text{Tr} \left\{ \sigma_j U_g^l(\lambda) \sigma_j^\dagger \sigma_k \right\} \\
&= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} (-1)^{m-l} \text{Tr} \left\{ \sigma_j U_g^l(\lambda) \sigma_k \sigma_j^\dagger \right\} \\
&= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l! (m-l)!} (-1)^{m-l} \text{Tr} \left\{ U_g^l(\lambda) \sigma_k \right\} \\
&= - \text{Tr} \left\{ \ln \left( U_g(\lambda) \right) \sigma_k \right\}. \tag{D.6}
\end{aligned}$$

Portanto, das equações (D.5) e (D.6):

$$\text{Tr} \left\{ \ln \left( U_g(\lambda) \right) \sigma_k \right\} = 0,$$

e segue que:

$$x^k \left( U_g(\lambda) \right) = 0. \quad \blacksquare$$

## D.6 Lagrangiana para a dinâmica ruidosa efetiva

Vamos começar nossa investigação considerando um caso unidimensional, considerando apenas a direção ruidosa e propondo uma métrica de Finsler que depende apenas de  $\dot{q}$ . Vamos supor que:

$$F^2 = g(\dot{q}) \dot{q}^2.$$

Então:

$$\frac{\partial F^2}{\partial q} = 0,$$

e

$$\frac{\partial F^2}{\partial \dot{q}} = 2 g(\dot{q}) \dot{q} + \frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}} \dot{q}^2.$$



Vamos começar notando que:

$$\frac{d}{dt}[2g(\dot{q})\ddot{q}] = 2g(\dot{q})\ddot{\ddot{q}} + 2\left[\frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}}\ddot{q}\right]\dot{q},$$

e por outro lado:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}}\dot{q}^2\right] = \frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}}[2\dot{q}\ddot{q}] + \left[\frac{d^2g(\dot{q})}{d\dot{q}^2}\dot{q}\right]\dot{q}^2.$$

Juntanto tudo, pelas equações de Euler e Lagrange:

$$\begin{aligned} 0 &= 2g(\dot{q})\ddot{\ddot{q}} + 2\frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}}\dot{q}\ddot{\ddot{q}} + 2\frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}}\dot{q}\ddot{q} + \frac{d^2g(\dot{q})}{d\dot{q}^2}\ddot{q}\dot{q}^2 \\ &= 2g(\dot{q})\ddot{\ddot{q}} + 4\frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}}\dot{q}\ddot{\ddot{q}} + \frac{d^2g(\dot{q})}{d\dot{q}^2}\dot{q}^2\ddot{\ddot{q}} \\ &= 2g(\dot{q}) + 4\frac{dg(\dot{q})}{d\dot{q}}\dot{q} + \frac{d^2g(\dot{q})}{d\dot{q}^2}\dot{q}^2. \end{aligned}$$

A solução geral dessa equação diferencial, é dada por:

$$g(\dot{q}) = \frac{C_1}{\dot{q}} + \frac{C_2}{\dot{q}^2}.$$

Agora, voltamos no início e propomos uma Lagrangiana unidimensional que depende explicitamente do tempo, como:

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{C_1}{\dot{\theta}(t)} + \frac{C_2}{\dot{\theta}^2(t)}\right]\dot{q}^2.$$

Pois assim:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0,$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 2\left[-\frac{C_1}{\dot{\theta}(t)} + \frac{C_2}{\dot{\theta}^2(t)}\right]\dot{q}.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] &= 2\left[\frac{-C_1}{\dot{\theta}(t)} + \frac{C_2}{\dot{\theta}^2(t)}\right]\ddot{q} + 2\left[\frac{C_1\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}^2(t)} - \frac{2C_2\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}^3(t)}\right]\dot{q} \\ &= 2\left[-\frac{C_1}{\dot{\theta}(t)}\ddot{q} + \frac{C_1\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}^2(t)}\dot{q}\right] + 2\left[\frac{C_2}{\dot{\theta}^2(t)}\ddot{q} - \frac{2C_2\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}^3(t)}\dot{q}\right] \end{aligned}$$

Faremos a derivação para a nossa possível purificação, porém isso é indiferente, já que se considerarmos a purificação diagonal, teremos a mesma trajetória, porém em outra

direção. Portanto, desejamos:

$$\begin{cases} q(t) = -\theta(t) \\ \dot{q}(t) = -\dot{\theta}(t) \\ \ddot{q}(t) = -\ddot{\theta}(t), \end{cases}$$

de forma que, no primeiro termo do lado direito:

$$\begin{aligned} 2 \left[ -\frac{C_1}{\dot{\theta}(t)} \ddot{q} + \frac{C_1 \ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}^2(t)} \dot{q} \right] &= 2C_1 \left[ \frac{\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(t)} - \frac{\ddot{\theta}(t)\dot{\theta}(t)}{\dot{\theta}^2(t)} \right] \\ &= 2C_1 \left[ \frac{\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(t)} - \frac{\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(t)} \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

enquanto no segundo termo:

$$\begin{aligned} 2 \left[ \frac{C_2}{\dot{\theta}^2(t)} \ddot{q} - \frac{2C_2}{\dot{\theta}^3(t)} \ddot{\theta}(t) \dot{q} \right] &= 2 \left[ -\frac{C_2}{\dot{\theta}^2(t)} \ddot{\theta}(t) + \frac{2C_2}{\dot{\theta}^3(t)} \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) \right] \\ &= 2 \left[ -\frac{C_2}{\dot{\theta}^2(t)} \ddot{\theta}(t) + \frac{2C_2}{\dot{\theta}^2(t)} \ddot{\theta}(t) \right] \\ &= 2 \frac{\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}^2(t)} [2C_2 - C_2]. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

de forma que:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\dot{q}^2(t)}{\dot{\theta}(t)}.$$

Agora, podemos checar que essa Lagrangiana cumpre o papel que desejamos. Notemos então que, nesse caso unidimensional:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0,$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{2\dot{q}}{\dot{\theta}(t)}.$$

Assim:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] = \frac{2 [\ddot{q}(t) \dot{\theta}(t) - \dot{q}(t) \ddot{\theta}(t)]}{\dot{\theta}^2(t)} = 0.$$

Dessa maneira, se o ponto final da curva for dada por  $q(t_f) = -\theta(t_f)$ , para satisfazer a equação de Euler e Lagrange, teremos  $q(t) = -\theta(t)$ . Por outro lado, se o ponto final da curva for dada por  $q(t_f) = \theta(t_f)$ , para satisfazer a equação de Euler e Lagrange, teremos  $q(t) = \theta(t)$ . Assim, essa Lagrangiana proporciona a geodésica desejada e ela pode ser usada para ambas purificações que desenvolvemos em detalhes neste trabalho, tendo em vista que teremos apenas uma dinâmica em outra direção.