

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Gustavo Moreira Gregorio**

**Módulos excitados não-abelianos em cordas cósmicas**

**São Carlos**

**2023**



**Gustavo Moreira Gregorio**

## **Módulos excitados não-abelianos em cordas cósmicas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientador: Profa. Dra. Betti Hartmann

**Versão original**

**São Carlos  
2023**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Gregorio, Gustavo Moreira

Módulos excitados não-abelianos em cordas cósmicas / Gustavo Moreira Gregorio; orientadora Betti Hartmann -- São Carlos, 2023.

43 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Cordas cósmicas. 2. Cordas de Shifman. 3. Vórtices. 4. Física de altas energias. 5. Teoria de campos. I. Hartmann, Betti, orient. II. Título.

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Gustavo Moreira Gregorio

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Física Teórica e Experimental.

Aprovado (a) em: 14/03/2023

Comissão Julgadora

Dr(a). Betti Hartmann

Instituição: (University College London/Reino Unido)

Dr(a): Alberto Vazquez Saa

Instituição: (UNICAMP/Campinas)

Dr(a). Maurício Richartz

Instituição: (UFABC/Santo André)



*Este trabalho é dedicado a todos aqueles que continuam buscando respostas e se animam quando estas trazem consigo ainda mais perguntas.*





## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer a minha família que sempre acreditou em mim, principalmente aos meus pais que nunca deixaram de me apoiar e meu filho e minha namorada por sempre animarem meus dias. Também aos meus professores por terem me possibilitado chegar até aqui, minha orientadora por ter me guiado por todo esse percurso e aos meus amigos por me apoiarem mesmo quando eu estive ausente.



*“Quando você está com medo, esse é mais um motivo para seguir em frente!”*

*Kazuki Nakashima*



## RESUMO

GREGORIO, G. M. **Módulos excitados não-abelianos em cordas cósmicas**. 2023. 43p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

O objetivo desse projeto é estudar e analisar cordas cósmicas com módulos excitados não-abelianos e as interferências da variação de seus parâmetros nos perfis de resultados obtidos até o momento. Para isso iniciamos com uma introdução ao modelo de cordas cósmicas e vórtices na teoria de campos, explicando a quebra espontânea de simetria e o mecanismo de Higgs, partimos para a solução em forma de vórtice(1) que da origem a corda cósmica, falamos um pouco sobre cordas cósmicas supercondutoras (2) e finalmente chegamos nas cordas de Shifman(3, 4) que é onde fazemos a nossa análise, simulações numéricas e encontramos os resultados. As simulações numéricas nos mostram...

**Palavras-chave:** Cordas cósmicas. Cordas de Shifman. Vórtices. Física de altas energias. Teoria de campos.



## ABSTRACT

GREGORIO, G. M. **Non-abelian excited modules in cosmic strings**. 2023. 43p.  
Dissertation (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

The objective of this project is to study and analyze cosmic strings with non-abelian excited modules and the interference of the variation of their parameters in the profiles of results obtained so far. Thereunto, we start with an introduction to the model of cosmic strings and vortices in field theory, explaining the spontaneous symmetry breaking and the Higgs mechanism, then we go to the solution in the form of a vortex(1) that gives rise to the cosmic string, we talk a little about strings superconducting cosmic strings(2) and finally we arrive at the Shifman strings(3, 4) which is where we do our analysis, numerical simulations and find the results. Numerical simulations show us...

**Keywords:** Cosmic strings. Shifman Strings. Vortices. High energy physics. Field theory





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Potencial $V(\Psi)$ para $\mu^2 > 0$ . . . . .	26
Figura 2 – Potencial $V(\Psi)$ para $\mu^2 < 0$ . . . . .	27
Figura 3 – Potencial do tipo 'mexican hat' . . . . .	29
Figura 4 – Perfil dos campos $P(x)$ , $h(x)$ e $f(x)$ para o caso sem nódulos. $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ , $f(0) = 0.1$ e $q = 0.1$ . . . . .	35
Figura 5 – Perfil dos campos $P(x)$ , $h(x)$ e $f(x)$ para o caso com 1 nódulo. $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 500$ , $\gamma_3 = 1000$ , $f(0) = 0.1$ e $q = 0.1$ . . . . .	35
Figura 6 – Perfil dos campos $P(x)$ , $h(x)$ e $f(x)$ para o caso com 3 nódulos. $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ , $f(0) = 0.1$ e $q = 1$ . . . . .	36
Figura 7 – Perfil do campo $f(x)$ para o caso com 3 nódulos com os valores de $f(0)$ sendo 0.1 e 0.591. $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ $q = 1$ . . . . .	37
Figura 8 – Perfil do campo $h(x)$ para o caso com 3 nódulos com os valores de $f(0)$ sendo 0.1 e 0.591. $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ $q = 1$ . . . . .	37
Figura 9 – Perfil do campo $f(x)$ para o caso com 3 nódulos com diferentes valores de $f(0)$ . $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ $q = 1$ . . . . .	38
Figura 10 – Perfil do campo $h(x)$ para o caso com 3 nódulos com diferentes valores de $f(0)$ . $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ $q = 1$ . . . . .	38
Figura 11 – Perfil do campo $h(x)$ para o caso com 3 nódulos com diferentes valores de $f(0)$ para diferentes valores de $n$ . $\alpha = 0.1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ $q = 1$ . . . . .	39
Figura 12 – Perfil do campo $P(x)$ para diferentes valores de $\alpha$ . $n = 1$ , $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ , $q = 1$ e $f(0) = 0.1$ . . . . .	39
Figura 13 – Energia/ $2\pi n$ para diferentes valores de $\alpha$ . $\gamma_2 = 50$ , $\gamma_3 = 100$ , $q = 1$ e $f(0) = 0.1$ . . . . .	40



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

USP	Universidade de São Paulo
USPSC	Campus USP de São Carlos
ANO	Abrikosov-Nielsen-Olesen
vev	Valor esperado de vácuo



## LISTA DE SÍMBOLOS

$F^{\mu\nu}$	Tensor eletromagnético
$\phi$	campo escalar complejo
$\mathcal{L}$	Lagrangeana
$D^\mu$	Derivada covariante
$\partial$	Derivada parcial



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>CORDAS CÓSMICAS E VÓRTICES NA TEORIA DE CAMPOS</b> . .	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Quebra de simetria, o mecanismo de Higgs e o modelo de Abelian-Higgs.</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1.1	Quebra espontânea de simetria: . . . . .	25
2.1.2	Mecanismo de Higgs simples . . . . .	27
2.1.3	Modelo padrão: . . . . .	28
2.1.4	A solução em forma de vórtex: . . . . .	29
<b>2.2</b>	<b>Adicionando novos graus de liberdade: cordas supercondutoras</b> . . .	<b>31</b>
<b>2.3</b>	<b>Cordas de Shifman</b> . . . . .	<b>32</b>
2.3.1	Descrição do modelo . . . . .	32
<b>3</b>	<b>RESULTADOS DA PESQUISA: MÓDULOS EXCITADOS EM CORDAS DE SHIFMAN</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Caso com três nódulos</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Um nódulo</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>41</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>43</b>





## 1 INTRODUÇÃO

Estudos recentes na área de cosmologia tem tido como foco cordas cósmicas com campos adicionais, as quais podem ter em seus interiores correntes bosônicas ou fermiônicas(5), esse estudo é de interesse pois apresenta novas formas físicas e matemáticas de representações dos defeitos topológicos conhecidos como cordas cósmicas. Esse objeto até então matemático está presente nas teorias de campos e no estudo topológico e, apesar de ainda não ter sido observado, a sua existência ainda é acreditada. O estudo de cordas cósmicas pode possibilitar a detecção destes objetos raros, além de abrir um leque matemático teórico amplo que pode servir para outros estudos além da área da cosmologia como o estudo de supercondução em vórtices em fluidos em matéria condensada. No capítulo 2.1 explico o que é a quebra espontânea de simetria, o por que ela ocorre e como ela ocorre, além de explicar o mecanismo de Higgs e o modelo de Abelian-Higgs para cordas cósmicas. Em 2.2 é feita a adição de novos graus de liberdade, novos campos para interação assim abrindo a possibilidade de cordas super-condutoras, mostro como é feita a condução dentro desses defeitos topológicos e por que é possível que isso ocorra. Em 2.3 apresento as cordas de Shifman que são com módulos não-abelianos que podem possuir tensão um pouco menor do que suas correspondentes abelianas o que pode levar a resultados distintos, inclusive em suas interações com outros objetos físicos.



## 2 CORDAS CÓSMICAS E VÓRTICES NA TEORIA DE CAMPOS

### 2.1 Quebra de simetria, o mecanismo de Higgs e o modelo de Abelian-Higgs.

#### 2.1.1 Quebra espontânea de simetria:

Quando estamos trabalhando com campos, é importante notar que cada campo tem uma energia associada a ele, também temos associado a cada campo pelo menos um estado de mínima energia, chamado de estado de energia de vácuo. Em alguns casos o campo pode ter mais de um estado de energia de vácuo, nesses casos falamos que o estado de energia de vácuo é degenerado. No caso degenerado nós temos a garantia da possibilidade de termos uma quebra espontânea de simetria.

No caso degenerado ambos os estados possuem a mesma energia então a teoria tem que ser simétrica sobre qualquer transformação que nos leve de um estado ao outro. Apesar disso, é necessário que o sistema escolha um dos estados já que ele deve existir fisicamente e a escolha de preferência por um dos estados acaba por causando uma quebra na simetria inicial. Isso é chamada quebra espontânea de simetria.

A importância da quebra espontânea de simetria pode ser observada quando estudamos a presença de partículas de um certo campo. Consideramos partículas como oscilações do campo em torno de um estado que é conhecido como estado de zero partículas ( $\Psi_0(x)$ ), esse estado é arbitário e pode ser colocado onde for mais conveniente para o estudo, porém o campo possui um estado de energia mínima, como já foi dito, chamado de estado de energia de vácuo ( $\Psi_v(x)$ ). O estado de energia de vácuo é uma propriedade física do sistema, então não pode ser alterado, dessa forma para termos um estado de vácuo sem partículas é necessário que haja a alteração do estado de zero partículas para que ele coincida com o estado de energia de vácuo, uma vez que o campo tem preferência por se manter no estado de menor energia. Com esse deslocamento é possível designar um novo valor, chamado de valor de expectativa de vácuo (vev), que é definido por:

$$\Psi_v(x) = \Psi_0(x) + \langle \Psi \rangle \quad (2.1)$$

Onde  $\langle \Psi \rangle$  é o nosso vev. Esse valor indica a chance de uma partícula surgir na energia de vácuo, ele também indica a diferença entre o estado de zero partículas para o estado de energia de vácuo.

Podemos fazer uso de um "toy model" para a quebra espontânea de simetria, um campo escalar simples  $\Psi$  acoplado a um campo de gauge U(1):

$$\mathcal{L} = |D_\mu \Psi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Psi) \quad (2.2)$$

Onde:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (2.3)$$

E o potencial é da forma:

$$V(\Psi) = \mu^2|\Psi|^2 + \lambda|\Psi|^4 \quad (2.4)$$

Nesse modelo podemos observar que para  $\mu > 0$  o potencial  $V(\Psi)$  tem um único mínimo, em  $x = 0$  como visto na Figura 1.

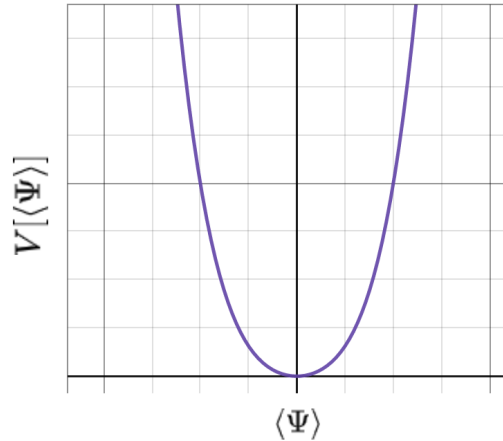


Figura 1 – Potencial  $V(\Psi)$  para  $\mu^2 > 0$

Fonte: Elaborada pelo autor

Porém no caso de  $\mu^2 < 0$  o potencial muda, quebrando a simetria. Nesse novo caso nós temos dois mínimos como na figura 2, localizados em:

$$\langle \Psi \rangle = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

E assim temos  $v$  como sendo o nosso vev. Evoluindo esse campo ao redor de seus mínimos chegamos em:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i\frac{\chi}{v})(v + h) \quad (2.6)$$

Fazendo assim aparecerem dois novos campos,  $\chi$  e o  $h$ . A nossa Lagrangiana fica assim:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h\partial^\mu h + \partial_\mu\chi\partial^\mu\chi) + \mu^2h^2 - evA_\mu\partial^\mu\chi + O(h, \chi) \quad (2.7)$$

Onde  $O(h, \chi)$  são os termos de interação entre  $h$  e  $\chi$  O nome do campo  $h$  já é dado tendo em vista que ele será o nosso campo de Higgs. Dessa forma, podemos procurar na lagrangiana por termos do tipo de massa das partículas relacionadas aos campos e assim encontramos:

O segundo termo nos dá  $M_A = ev$

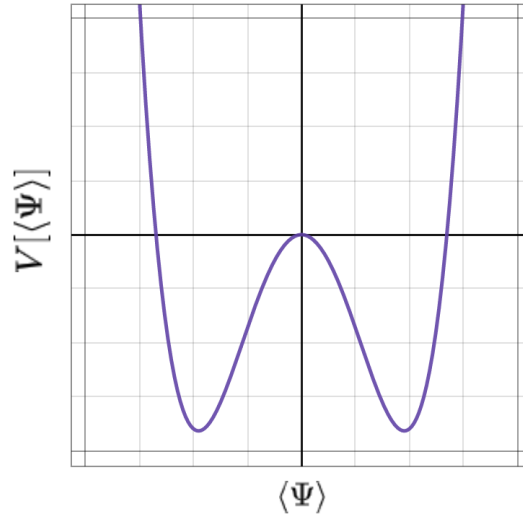


Figura 2 – Potencial  $V(\Psi)$  para  $\mu^2 < 0$

Fonte: Elaborada pelo autor

O quarto termo nos da  $M_h = \sqrt{-2\mu^2}$

E a massa  $M_\chi = 0$

$\chi$  é chamado de bóson de Goldstone.

Para remover o termo  $-evA_\mu\partial^\mu\chi + O(h, \chi)$  podemos fazer uma transformação de gauge:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\chi$$

Ao fazer isso, o campo de bóson de gauge “come” a partícula de Goldstone, fazendo com que sobre apenas partículas físicas em nossa nova lagrangiana, que fica assim:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2v^2A'^\mu A'_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - V(h) \quad (2.8)$$

Contendo apenas partículas físicas.

### 2.1.2 Mecanismo de Higgs simples

O mecanismo de Higgs, também conhecido como mecanismo de Higgs-Kibble é um processo teórico que explica como partículas elementares ganham massa e é também um bom exemplo de aplicação da quebra espontânea de simetria. Assumindo um campo  $\Phi(x)$  interagindo com o campo  $\Psi(x)$  onde temos o potencial quebrando a simetria de reflexão de  $\Psi(x)$  da forma como citada anteriormente, no ponto de reflexão da simetria o  $\Psi(x)$  adquire um valor não nulo de vev, portanto isso implica que o estado de vácuo de  $\Psi(x)$  terá várias partículas ( $\langle\Psi\rangle \neq 0$ ). Devido a isso a partícula  $\Phi$  irá ser "desacelerada" pelas

colisões com as partículas presentes em  $\Psi$ , agindo como tendo massa, exatamente como o esperado. Outra forma de ver isso é com a possibilidade de você alterar a função de modo que o estado de zero partículas se alinhe com o estado de vácuo ( $\Psi \rightarrow \Psi - \langle \Psi \rangle$ ), assim a forma como os campos interagem também é afetado pela mudança do potencial, novamente dando a ele uma massa.

No caso do mecanismo de Higgs, ele propõe a existencia do campo de Higgs que permeia todo o espaço e quando uma partícula interage com ele ela adquire massa. Quanto mais forte for a interação da partícula com o campo, mais massa ela adquire, isso ocorre fortemente com partículas como os bósons W e Z e menos com partículas como o photon, que por isso não tem massa. Segundo o mecanismo de Higgs, a massa da partícula é dada por:

$$M = g * v \quad (2.9)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento dos campos e  $v$  é o vev do campo de Higgs, como demonstramos anteriormente.

Com o potencial descrito, se o  $\mu^2 > 0$ , temos apenas um mínimo, quando o potencial é também 0, portanto a simetria é mantida e a massa da partícula descrita pelo nosso modelo também é zero.

### 2.1.3 Modelo padrão:

Podemos fazer a generalização do grupo  $U(1)$  para um grupo de gauge  $SU(n)$ , onde o campo escalar é uma representação fundamental de  $n$  dimensões do  $SU(n)$ . Os campos de gauge  $A_\mu^a$  estão uma representação conjunta de  $n^2 - 1$  dimensões. Nossa lagrangeana fica ligeiramente diferente da do "toy model", assim como nosso potencial pois segundo a natureza de  $\Phi$  agora precisam ser escritos em função de  $\Phi$  e  $\Phi^\dagger$

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi^\dagger)(D^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (2.10)$$

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.11)$$

Nesse caso,  $\mathcal{L}$  é invariante sobre:

$$\Phi_i \rightarrow (1 - i\epsilon^a \tau^a)_{ij} \Phi_j \quad (2.12)$$

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - ig\tau^a A_\mu^a) \Phi \quad (2.13)$$

Com  $i, j = 1, \dots, n; a = 1, \dots, n^2 - 1$ ;  $\epsilon^a$  são parametros pequenos;  $g$  é a constante de acoplamento;  $\tau^a$  são os geradores do grupo [ $\tau^a = \sigma^a/2$  para o  $SU(2)$ ]

Considerando o grupo de gauge  $SU(2) \times U(1)$  do modelo padrão podemos introduzir um dubleto complexo de Higgs  $SU(2)$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

onde temos que para  $\mu^2 < 0$  em  $V(\Phi)$ , ocorre a quebra espontânea de simetria. Novamente, precisamos que tenha o caso de  $\mu^2 < 0$  pois caso contrário não teremos a quebra espontânea de simetria pois para caso de  $\mu > 0$  temos apenas um ponto de mínimo, não degenerado.

O mínimo de  $V(\Phi)$  ocorre em

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Com isso é necessário que, no sistema físico, seja feita a escolha de um valor de  $v$ , com a escolha desse mínimo ocorre a quebra da simetria  $SU(2) \times U(1)$

Uma forma simples de visualizar essa simetria é através de um potencial conhecido como "mexican hat" (figura 3) onde ocorre a quebra espontânea de simetria, já que o sistema físico precisa escolher um mínimo para estar, porém tem uma simetria rotacional ao redor do eixo  $z$ , da forma como a que propusemos aqui.

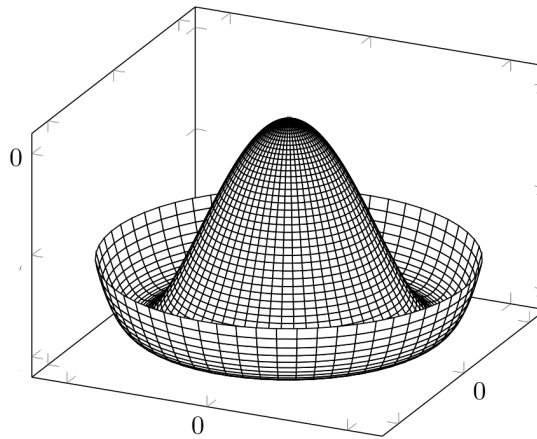


Figura 3 – Potencial do tipo 'mexican hat'

Fonte: Elaborada pelo autor

#### 2.1.4 A solução em forma de vórtex:

Novamente começando pelo caso mais simples, usaremos um campo escalar complexo,  $\phi(x)$  descrito pela densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.16)$$

com o potencial:

$$V = \frac{1}{2} \lambda (|\phi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2)^2 \quad (2.17)$$

para chegarmos em uma corda global. Isso porque a lagrangiana tem uma simetria global  $U(1)$ , sob a transformação  $\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha}$  com  $\alpha$  constante.

Uma vez escolhida uma solução estável, como  $\phi = (\eta/\sqrt{2})\exp(i\alpha_0)$ , a simetria é quebrada pois o estado não é mais invariante pela transformação de simetria  $U(1)$ . A massa da partícula escalar desse caso é dada por  $m_s^2 = \lambda\eta^2$ . Também aparece, como citado anteriormente, o bóson de Nambu-Goldstone, que é uma partícula sem massa associada a simetria global que foi quebrada.

É possível usar um Ansatz (1) de simetria cilíndrica para encontrar outra solução estática com uma densidade de energia não zero:

$$\phi = \frac{\eta}{\sqrt{2}}f(m_s\rho)e^{in\varphi} \quad (2.18)$$

Assim as equações do campo se reduzem a uma única equação diferencial ordinária não-linear:

$$f'' + \frac{1}{\epsilon}f' - \frac{n^2}{\epsilon^2}f - \frac{1}{2}(f^2 - 1)f = 0 \quad (2.19)$$

Onde temos o nosso  $\epsilon$  como sendo definido como  $\epsilon \equiv m_s\rho$ . Quando  $\rho \rightarrow 0$  é necessário que a função  $f \rightarrow 0$  também, por continuidade. Enquanto que no infinito  $f \rightarrow 1$  para que  $\phi$  retome seu valor de  $\frac{\eta}{\sqrt{2}}$ . Ao resolver as equações, é possível ver que  $\eta$  é bem localizado ao redor da origem, porém para o caso de  $\eta$  grande temos uma cauda do tipo  $\eta^{-2}$  que vem da parte angular do gradiente, por causa disso a energia por unidade de comprimento desse caso é infinita. Podemos então partir para outro modelo, no caso a corda de gauge, ou corda local. Nesse caso a simetria interna é do tipo local, por isso o nome. Para isso, faremos a introdução de um novo campo de vetores,  $A_\mu$ , assim como foi feito no nosso "toy model" em 2.1.1. A solução é exatamente a mesma mas agora para um campo complexo, dando origem a um potencial como o visto em 2.1.3 no caso de  $SU(2) \times U(1)$ .

Podemos retomar a equação 2.2 só mudando o nome de  $\Psi$  para  $\phi$  para indicar que o nosso campo  $\phi$  é complexo.

$$\mathcal{L} = |D_\mu\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi) \quad (2.20)$$

Então temos a invariância pelas transformações:

$$\phi \rightarrow \phi e^{i\chi(x)} \quad (2.21)$$

e

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\chi(x) \quad (2.22)$$

Com isso temos as equações de campo:

$$[D^2 + \lambda(|\phi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2)]\phi = 0 \quad (2.23)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + ie(\phi^* D^\mu\phi - D^\mu\phi^*\phi) = 0 \quad (2.24)$$



Ainda temos a partícula de Higgs com a massa  $m_s = \sqrt{\lambda}\eta$  mas o bóson de Nambu-Goldstone é incorporado no campo de vetor, que ganha uma massa de  $m_v = e\eta$ . Nesse caso ocorre um balanceamento com o campo de gauge de forma que o campo fora do núcleo da corda seja puramente de gauge, então toda a energia da corda está em seu núcleo e a energia por unidade de comprimento é da forma  $\mu \sim \eta^2$ . Esse tipo de solução em forma de corda é conhecida como corda de Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) ou corda de Abelian-Higgs.

## 2.2 Adicionando novos graus de liberdade: cordas supercondutoras

Para estudar um das possibilidades de adição de novos graus de liberdade, uma opção é o estudo de cordas supercondutoras no caso de correntes bosônicas. Para isso iremos começar com um modelo parecido com o já demonstrado anteriormente: Modelo Abeliano  $U(1) \times U(1)$  :

$$\mathcal{L} = |D_\mu \Phi|^2 + |D_\mu \chi|^2 - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\phi, \chi) \quad (2.25)$$

Com:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieB_\mu)\phi \quad (2.26)$$

$$D_\mu \chi = (\partial_\mu + iqA_\mu)\chi \quad (2.27)$$

E o potencial dado por:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\lambda_1(|\phi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda_2|\chi|^4 + \lambda_3(|\phi|^2 - \frac{1}{2}v^2)|\chi|^2 \quad (2.28)$$

E  $F_{\mu\nu}$  e  $G_{\mu\nu}$  são associados a  $A_\mu$  e  $B_\mu$  respectivamente. Agora, escolheremos os parâmetros de forma que haja a quebra de simetria em B, porém não em A, para isso temos que ter que o mínimo do potencial é dado em  $|\phi| = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$  e em  $|\chi| = 0$ .

Nesse caso uma possível solução é aquela onde o campo  $\chi$  desaparece, deixando apenas  $\phi$  e  $B_\mu$  fazendo uma solução do tipo corda de ANO, porém não é o tipo de solução que estamos interessados no momento. Procuramos uma solução onde  $\chi \neq 0$  no núcleo da corda (2), para tal acoplamento existe um raio crítico abaixo do qual existe um condensado de  $\chi$ .

Esse raio crítico é dado por:

$$r = \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \quad (2.29)$$

Onde  $m_\chi^2$  pode ser facilmente identificado no terceiro termo de 2.28 como sendo  $\frac{1}{2}\lambda_3(\mu^2 - \nu^2)$  e  $m_\phi^2 = \lambda_1\eta^2$ . Dada a existência do condensado, temos então uma família de soluções do tipo  $\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}X(\rho)e^{i\theta}$ . Essa fase constitui um novo grau de liberdade interno da corda, sendo

esse o boson de Nambu-Goldstone da simetria eletromagnetica U(1) que foi quebrada no interior da corda.

Supomos agora que essa fase varia linearmente com o tempo e posição, da forma  $\theta = kz - \omega t$ . Assim temos uma corrente eletromagnética:

$$J^\mu = iq\chi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi - 2q^2 A^\mu |\chi|^2 = qX^2(\omega - qA^0, 0, 0, k - qA^3) \quad (2.30)$$

Agora, podemos calcular o valor da variação da corrente no tempo para  $A_0 = 0$ , assim obtendo:

$$\frac{\partial J^3}{\partial t} = q^2 X^2 E^3 \quad (2.31)$$

se essa fase varia linearmente, então a corda carrega uma corrente magnetica tal qual dada em 2.35

comparando a derivada parcial no tempo em  $A_0 = 0$ , e tendo uma corrente pequena o suficiente, chegamos na equação de London, caracteristica de um super condutor.

## 2.3 Cordas de Shifman

Nesse ponto desejamos estudar um caso mais generalizado das cordas de ANO e procurar por uma solução estável com um módulo não abeliano. O estudo foi baseado no modelo usado em (3, 4).

### 2.3.1 Descrição do modelo

O modelo é inicialmente descrito por uma lagrangiana de uma corda ANO simples com a adição de um novo campo de triplet  $\chi^i$  com uma interação invariante do tipo SO(3):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}|D^\mu\phi|^2 + \partial_\mu\chi^i\partial^\mu\chi^i - V(\phi, \chi^i) \quad (2.32)$$

Com o potencial  $V(\phi)$  dado por:

$$V(\phi, \chi^i) = \frac{\lambda_1}{4}(|\phi|^2 - \eta_1^2)^2 + \frac{\lambda_2}{4}\chi^i\chi^i(\chi^i\chi^i - 2\eta_2^2) + \frac{\lambda_3}{2}|\chi|^2\chi^i\chi^i \quad (2.33)$$

Onde  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e  $\eta_i^2$ ,  $i = 1, 2$  são constantes positivas. Com as escolhas corretas de parâmetros, o primeiro termo do lado direito da equação 2.33 garante a quebra de simetria do photon em U(1), dando ao campo escalar complexo  $\phi$  um valor de vev não-zero.

$$|\phi| = \eta_1 \quad (2.34)$$

Como visto anteriormente, temos então agora:

$$m_A^2 = 2e^2\nu^2, \quad (2.35)$$

$$m_\phi^2 = 2\lambda_1\nu^2 \quad (2.36)$$

e

$$m_\chi^2 = (\lambda_3 - \eta_2^2 \lambda_2)/2 \quad (2.37)$$

A partir disso podemos procurar por uma solução que nos interesse. No caso, queremos uma solução que seja estática e tenha simetria cilíndrica, portanto usaremos as coordenadas cilíndricas. O Ansatz em  $A_t \equiv 0$  é dado por:

$$A_\mu dx^\mu = \frac{1}{e}(n - P(r))d\theta, \phi = \eta_1 h(r)e^{in\theta}, \chi^i = \eta_1 f(r) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Onde  $n$  é o *winding number* da solução. Para facilitar a manipulação, introduzimos a coordenada adimensional  $x = \sqrt{\lambda_1} \eta_1 r$ , assim o modelo passa a depender apenas das seguintes constantes adimensionais:

$$\alpha = \frac{e}{\sqrt{\lambda_1}}, q = \frac{\eta_2}{\eta_1}, \gamma_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, i = 2, 3 \quad (2.39)$$

O que é ótimo pois agora temos menos parâmetros para nos preocupar já que, por exemplo, a função não se importa mais com os valores independentes de  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , apenas da relação entre eles. Portanto temos as equações de campo para  $P(x)$ ,  $h(x)$  e  $f(x)$ :

$$P'' = \alpha^2 P h^2 + \frac{P'}{x}, \quad (2.40)$$

$$h'' = h(\gamma_3 f^2 + h^2 - 1) - \frac{h'}{x} + \frac{P^2 h}{x^2}, \quad (2.41)$$

$$f'' = f(\gamma_2(f^2 - q^2) + \gamma_3 h^2) - \frac{f'}{x}, \quad (2.42)$$

Temos também as condições de contorno necessárias que são:

$$f(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, f'(0) = 0, h(x \rightarrow \infty) \rightarrow 1, h(0) = 0, P(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, P(0) = n \quad (2.43)$$

A partir disso podemos usar métodos numéricos para encontrar as funções  $f(x)$ ,  $h(x)$  e  $P(x)$  que satisfazem nossas equações de campo.



### 3 RESULTADOS DA PESQUISA: MÓDULOS EXCITADOS EM CORDAS DE SHIFMAN

Em (4) foi estudado e mostrado a possibilidade de haver nódulos na função  $f(x)$  no caso de excitações no campo não abeliano. Para esse estudo foram escolhidos casos com nenhum nódulo como na figura 4, um nódulo (figura 5), e três nódulos (figura 6).

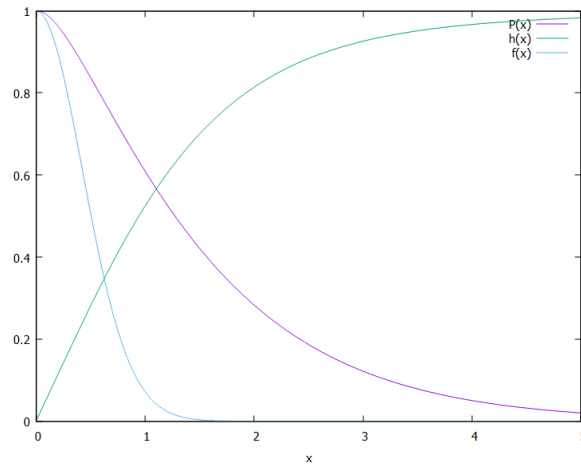


Figura 4 – Perfil dos campos  $P(x)$ ,  $h(x)$  e  $f(x)$  para o caso sem nódulos.  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 50$ ,  $\gamma_3 = 100$ ,  $f(0) = 0.1$  e  $q = 0.1$

Fonte: Elaborada pelo autor

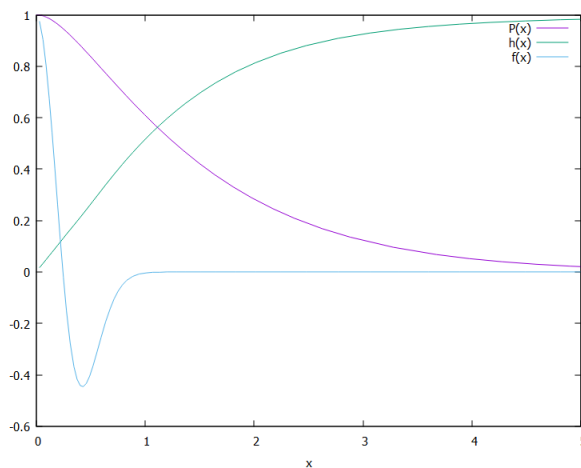


Figura 5 – Perfil dos campos  $P(x)$ ,  $h(x)$  e  $f(x)$  para o caso com 1 nódulo.  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 500$ ,  $\gamma_3 = 1000$ ,  $f(0) = 0.1$  e  $q = 0.1$

Fonte: Elaborada pelo autor

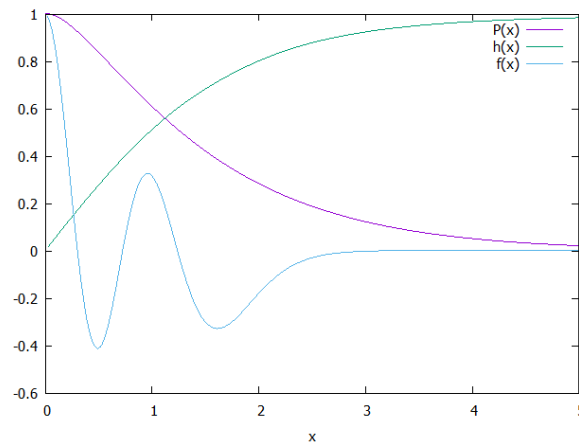


Figura 6 – Perfil dos campos  $P(x)$ ,  $h(x)$  e  $f(x)$  para o caso com 3 nódulos.  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 50$ ,  $\gamma_3 = 100$ ,  $f(0) = 0.1$  e  $q = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.1 Caso com três nódulos

Como nossa condição de contorno em zero nos diz que  $f'(0) = 0$ , então podemos usar que nosso valor de  $f(0)$  é uma constante arbitrária, dado isso estudamos como que a variação desse parâmetro influi.

Foi fixado o valor dos outros parâmetros e foram encontradas as soluções correspondentes para cada valor de  $f(0)$ . Devido ao método numérico utilizado a variação de  $f(0)$  teve de ser feita em pequenos passos. Aqui mostrarei os resultados para o menor e maior valor de  $f(0)$  o qual encontrei soluções.

No caso iremos começar com o caso de  $n = 1$ , sendo  $n$  o *winding number* da corda. Podemos observar que a variação do valor de  $f(0)$  influencia a "largura" do campo  $f(x)$  (figura 7) e do campo  $h(x)$  (figura 8) da corda. A variação no campo  $P(x)$  foi muito pequena de forma que iremos desconsiderá-la.

Ao adicionar mais pontos nas curvas, podemos ver que a variação não é constante com  $f(0)$ , tendo uma "aceleração" no "crescimento" da largura de acordo com que o valor de  $f(0)$  cresce (Figura 9).

Também é possível ver que no campo  $h(x)$  temos uma mudança da "forma" que ele possui. O "engrossamento" da região com valores baixos de  $h(x)$  indica um crescimento do núcleo da corda. (figura 10). Isso também é observado para diferentes valores de  $n$  (figura 11).

Outro parâmetro que interessa ao ser variado é o  $\alpha$  que é a constante de acoplamento. Nesse caso foi observado que com o crescimento de seu valor as funções  $f(x)$  e  $h(x)$  sofreram alterações mínimas, assim podendo ser desconsideradas. Dessa vez, porém, o perfil da

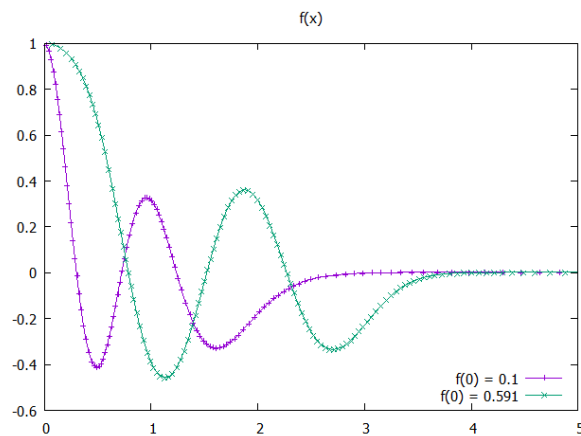


Figura 7 – Perfil do campo  $f(x)$  para o caso com 3 nódulos com os valores de  $f(0)$  sendo 0.1 e 0.591.  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 50$ ,  $\gamma_3 = 100$   $q = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor

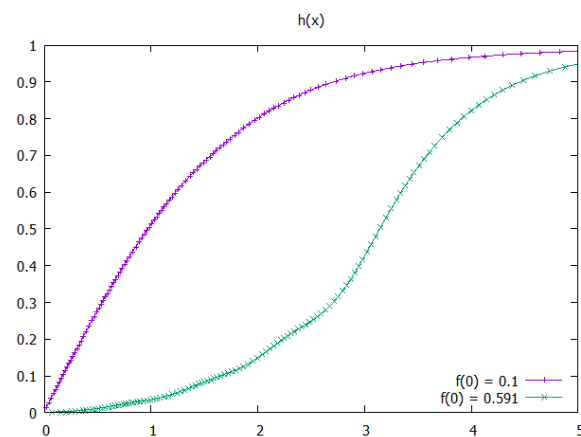


Figura 8 – Perfil do campo  $h(x)$  para o caso com 3 nódulos com os valores de  $f(0)$  sendo 0.1 e 0.591.  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 50$ ,  $\gamma_3 = 100$   $q = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor

função do campo  $P(x)$  muda, ficando mais "estrito" quanto maior o valor de  $\alpha$  (figura 12).

### 3.2 Um nódulo

No caso de apenas um nódulo o foco do estudo foi na energia por unidade de comprimento da corda. Foram inicialmente encontrados os resultados sem o campo  $\chi$  para avaliar como a presença do campo influi nos resultados. No caso sem o campo e com o campo foram variados os valores de  $\alpha$  para poder observar, principalmente no limite BPS, o valor da energia da corda.

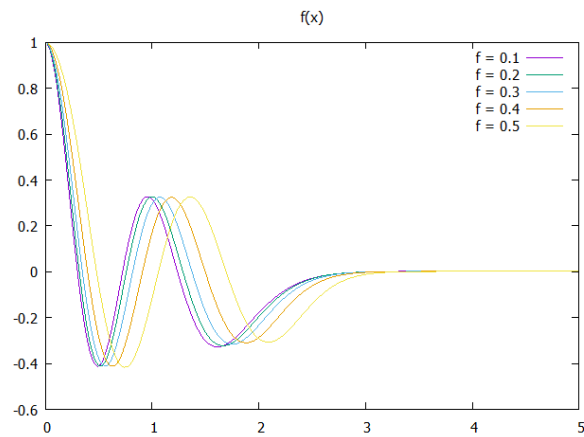


Figura 9 – Perfil do campo  $f(x)$  para o caso com 3 nódulos com diferentes valores de  $f(0)$ .  
 $\alpha = 0.1, \gamma_2 = 50, \gamma_3 = 100, q = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor

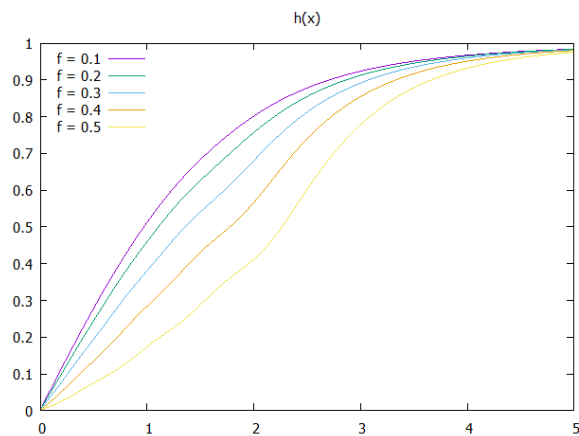


Figura 10 – Perfil do campo  $h(x)$  para o caso com 3 nódulos com diferentes valores de  $f(0)$ .  $\alpha = 0.1, \gamma_2 = 50, \gamma_3 = 100, q = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor



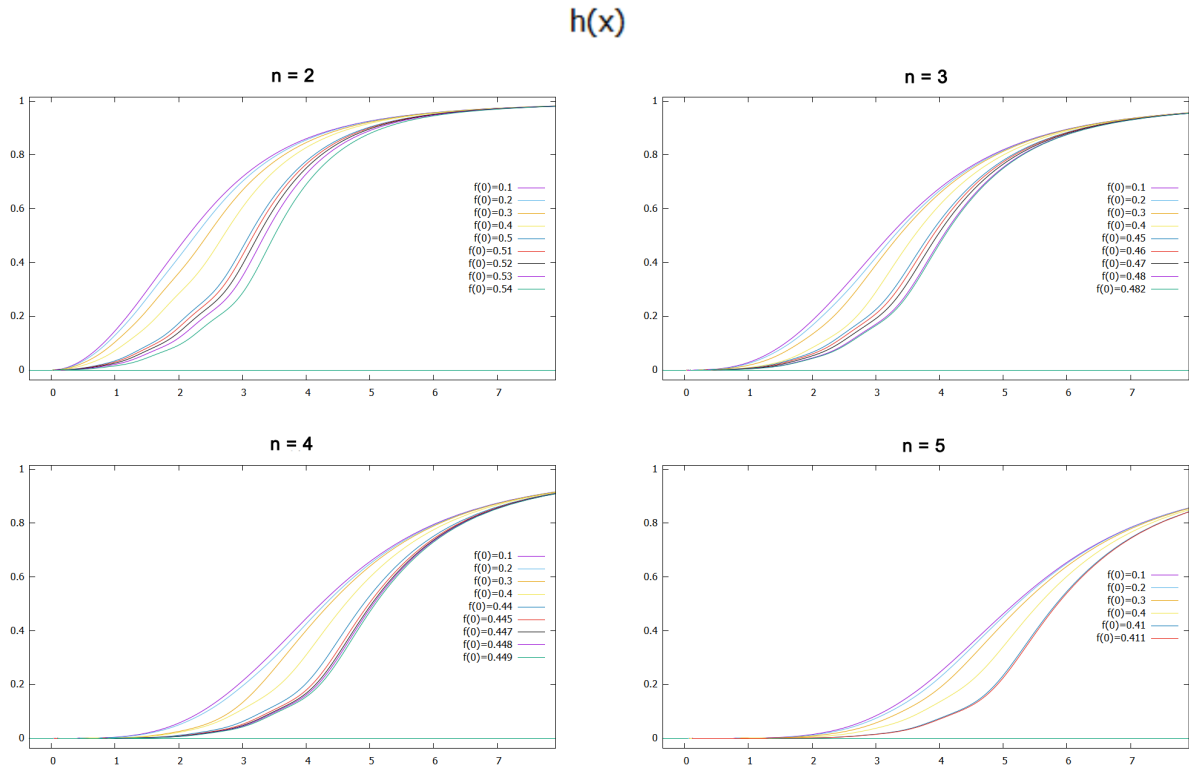


Figura 11 – Perfil do campo  $h(x)$  para o caso com 3 nódulos com diferentes valores de  $f(0)$  para diferentes valores de  $n$ .  $\alpha = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 50$ ,  $\gamma_3 = 100$   $q = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor

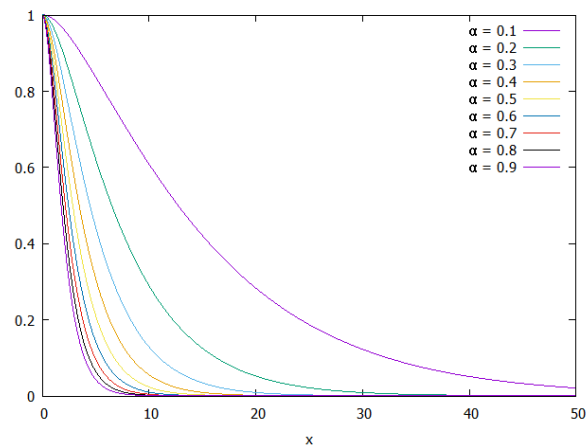


Figura 12 – Perfil do campo  $P(x)$  para diferentes valores de  $\alpha$ .  $n = 1$ ,  $\gamma_2 = 50$ ,  $\gamma_3 = 100$ ,  $q = 1$  e  $f(0) = 0.1$

Fonte: Elaborada pelo autor

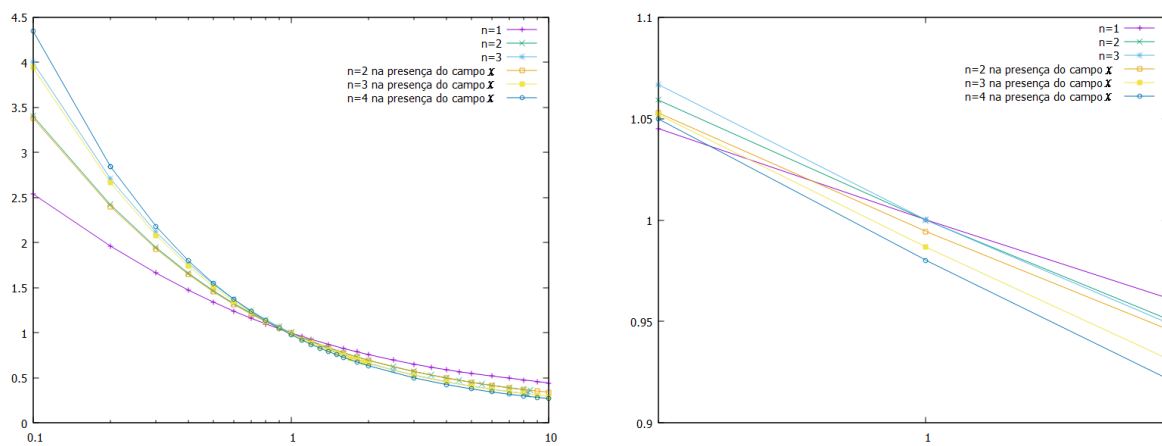


Figura 13 – Energia/ $2\pi n$  para diferentes valores de  $\alpha$ .  $\gamma_2 = 50$ ,  $\gamma_3 = 100$ ,  $q = 1$  e  $f(0) = 0.1$

Fonte: Elaborada pelo autor

## 4 CONCLUSÃO

Estudamos a existência, um modelo que propõe a possibilidade e algumas consequências da presença de módulos excitados não-abelianos em cordas cósmicas, vimos o modelo mais simples de quebra espontânea de simetria, como funciona o mecanismo de Higgs e então partimos para o modelo padrão do mecanismo e a sua solução em forma de vórtex. Foi então visto como é possível fazer a adição de novos graus de liberdade chegando em cordas supercondutoras e em seguida nas cordas de shifman quando o novo campo adicionado possui um módulo excitado não-abeliano.

Encontramos soluções para os casos em que esse novo campo possui um ou três nódulos. No caso de três nódulos vimos a influência da variação do valor do campo  $f(x)$  no centro da corda ( $f(0)$ ), tendo um "engrossamento" dos campos  $h(x)$  e  $f(x)$ , sendo influenciados também pela variação do *winding number*. Também vimos como que a variação do  $\alpha$  influi, mostrando que nos campos  $h(x)$  e  $f(x)$  a variação é mínima enquanto que no campo  $P(x)$  a influência é grande. Isso mostra que a constante de acoplamento do campo eletromagnético influencia pouco nos outros campos, apesar da grande influencia que tem no próprio campo (como era esperado.)

No caso com um único nódulo foi estudada a variação da tensão na corda, que está diretamente relacionada a energia por unidade de comprimento dela. Observamos que com a adição do novo campo temos uma redução, apesar de pequena, na energia total da corda incluindo no ponto BPS.

Acredito que seria interessante ver como que essas alterações de espessura dos campos nas cordas influencia na forma como elas interagem com outros objetos ou até com elas mesmas, dessa forma podendo abrir novas possibilidades de "marcas" para procurarmos por esse objeto físico tão peculiar em nosso universo.



**REFERÊNCIAS**

- 1 HINDMARSH, M. B.; KIBBLE, T. W. B. Cosmic strings. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 58, n. 5, p. 477–562, May 1995. DOI: 10.1088/0034-4885/58/5/001.
- 2 HILL, C. T.; HODGES, H. M.; TURNER, M. S. Bosonic superconducting cosmic strings. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 37, p. 263–282, Jan. 1988. DOI: 10.1103/PhysRevD.37.263.
- 3 SHIFMAN, M.; TALLARITA, G.; YUNG, A. More on the abrikosov strings with non-abelian moduli. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 29, n. 10, p. 1450062, Apr. 2014. DOI: 10.1142/s0217751x14500626.
- 4 MONIN, S.; SHIFMAN, M. Degeneracy between abelian and non-abelian strings. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 29, n. 18, p. 1450105, July 2014. DOI: 10.1142/s0217751x1450105x.
- 5 HARTMANN, B.; MICHEL, F.; PETER, P. Excited cosmic strings with superconducting currents. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 96, n. 12, Dec. 2017. DOI: 10.1103/physrevd.96.123531.