

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Leonardo Werneck Trindade de Barros

**Expansão livre e modos coletivos de um condensado de
Bose-Einstein turbulento**

São Carlos

2023

Leonardo Werneck Trindade de Barros

**Expansão livre e modos coletivos de um condensado de
Bose-Einstein turbulento**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências

Área de concentração: Física Básica

Orientadora: Profa. Dra. Mônica Andrioli Caracanhas Santarelli

Coorientador: Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato

Versão corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Barros, Leonardo Werneck Trindade de
Leonardo Werneck Trindade de Barros Expansão livre e modos coletivos de um condensado de Bose-Einstein turbulento / Leonardo Werneck Trindade de Barros; orientadora Monica Andrioli Caracanhas Santarelli; co-orientador Vanderlei Salvador Bagnato - versão corrigida - São Carlos, 2023.
85 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Condensado de Bose-Einstein.. 2. Vórtices. 3. Turbulência. I. Santarelli, Monica Andrioli Caracanhas, orient. II. Bagnato, Vanderlei Salvador, co-orient. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não seria realizado sem a presença de um grande número de pessoas em minha vida, e não conseguirei aqui agradecer a todas elas. Evitando o risco de tentar citar todas e incorrer em injustas omissões, serei breve e agradecerei aos envolvidos diretamente com a minha mudança para São Carlos e com o desenvolvimento da minha pesquisa.

Agradeço à professora Mônica, que me deu um novo rumo no mestrado e foi essencial em todos os aspectos positivos desta dissertação. Agradeço ao professor Vanderlei, que me abriu as portas e me permitiu uma necessária e, espero que bem sucedida, alteração no percurso. Agradeço aos membros do grupo de pesquisa, que muito bem me receberam e frequentemente me aconselharam.

Agradeço ao meu pai, a minha mãe e ao meu irmão. Com eles dividi casa pela maior parte da minha vida, e o que recebi de todos eles é muito mais do que poderei retribuir. Minha vida acadêmica dependeu de ter ganhado deles, repetidas vezes, uma força para progredir que eu não poderia ter tirado de mim mesmo.

Agradeço à minha companheira Juliana, que me carregou em momentos que eu estava extremamente pesado. Ela é uma grande responsável pela minha experiência em São Carlos ter sido engrandecedora.

Os familiares e amigos, não mencionados nominalmente, sabem que me ajudaram em situações cruciais e no próprio dia a dia, e são parte dos motivos que fazem tudo valer a pena.

Por fim, agradeço ao Instituto de Física de São Carlos, por ter me recebido enquanto aluno e ter me dado todas as condições de fazer o meu trabalho acontecer.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“A pesquisa científica é um aspecto, na verdade o momento culminante de um processo de extrema amplitude e complexidade pelo qual o homem realiza sua suprema possibilidade existencial, aquela, que dá conteúdo à sua essência de animal que conquistou a racionalidade: a possibilidade de dominar a natureza, transformá-la, adaptá-la às suas necessidades. Este processo chama-se 'conhecimento'.”

Álvaro Vieira Pinto

RESUMO

BARROS, L. W. T. **Expansão livre e modos coletivos de um condensado de Bose-Einstein turbulento.** 2023. 85p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Neste trabalho, utilizamos e melhoramos um modelo de condensado de Bose-Einstein turbulento desenvolvido através do método variacional. Inicialmente, aplicamos esse modelo para investigar a expansão livre de um condensado com simetria axial composto por 10^5 átomos de rubídio-87 (^{87}Rb) e comparamos a evolução dos raios. Observamos que, enquanto um condensado ordinário se expande alterando o *aspect ratio*, um condensado turbulento se expande de forma anômala, mantendo suas proporções iniciais. Este resultado está em consonância com experimentos realizados em 2009. Em seguida, usamos o modelo para estudar a dinâmica do condensado aprisionado. Calculamos três modos coletivos no regime de pequenas oscilações: o modo *quadrupolo*, o modo *quadrupolo bidimensional* e o modo *breathing*. Observamos que o modo *quadrupolar* apresenta um deslocamento de frequência, passando de $\omega = 0,176 \omega_r$ para uma nuvem ordinária para $0,213 \omega_r$ para uma nuvem turbulenta, uma variação de cerca de 20%. Entendemos que essa variação de frequência se deve ao aumento da rigidez da nuvem, o que torna necessária uma maior injeção de energia para excitar o modo *quadrupolar*. Realizamos três tipos de perturbação no sistema: uma deformação instantânea da armadilha harmônica de aprisionamento em $t = 0$, uma perturbação por um pulso senoidal no eixo axial e a perturbação do comprimento de espalhamento atômico. Observamos que a amplitude do modo *quadrupolar* é favorecida pelas perturbações mais assimétricas, como o pulso senoidal no eixo axial, enquanto a magnitude do modo *breathing* é favorecida pelas perturbações simétricas, como a perturbação do comprimento de espalhamento. Esperamos que nossas predições sirvam como guia para os experimentos futuros em gases quânticos turbulentos.

Palavras-chave: Condensado de Bose-Einstein. Vórtices. Turbulência.

ABSTRACT

BARROS, L. W. T. **Free expansion and collective modes of a turbulent Bose-Einstein condensate.** . . 2023. 85p. Dissertation (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

In this work, we employ and improve a variational method-based model of a turbulent Bose-Einstein condensate. Initially, we use this model to study the free expansion of an axially symmetric condensate consisting of 10^5 ^{87}Rb atoms, comparing the evolution of the radii. We observe that while an ordinary condensate expands by inverting its aspect ratio, a turbulent condensate expands anomalously, conserving its initial proportions. This result is consistent with experiments conducted in 2009. Subsequently, we use the model to study the dynamics of the trapped condensate. We calculate three collective modes in the regime of small oscillations, namely the quadrupole, the two-dimensional quadrupole, and the breathing mode, and we note that the quadrupolar mode has a frequency shift, with this shifting from $\omega = 0.176 : \omega_r$ in the case of an ordinary cloud to $0.213 : \omega_r$ in the case of the turbulent cloud, a variation of approximately 20%. We understand that this frequency shift occurs due to an increase in the stiffness of the cloud, which requires more energy injection for the quadrupolar mode to be excited. We perform three types of perturbation on the system, namely an instant deformation of the harmonic trapping potential at $t = 0$, a perturbation by a sinusoidal pulse on the axial axis, and a perturbation of the atomic scattering length. We observe that the amplitude of the quadrupolar mode is favored by more asymmetric perturbations, such as the sinusoidal pulse on the axial axis, whereas the magnitude of the breathing mode is favored by more symmetric perturbations, such as the perturbation of the scattering length. We hope that our predictions will serve as a guide for future experiments in turbulent quantum gases.

Keywords: Bose-Einstein condensate. Vortices. Turbulence.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Três distribuições de densidade das nuvens expandidas de átomos de rubídio em três temperaturas diferentes. Na primeira delas, $T > T_c$, e percebe-se se uma nuvem atômica comum armadilhada. Na segunda, $T < T_c$, e vemos uma nuvem térmica (rabo gaussiano) mais um perfil condensado. Na terceira imagem, $T \rightarrow T_c$, e houve uma grande diminuição da nuvem térmica, ou seja, quase todos os átomos estão no condensado. 20
- Figura 2 – A imagem (a) mostra uma nuvem ordinária, com um único vórtice. Percebemos como ela contrasta com o perfil de densidade da nuvem turbulenta em (b). 36
- Figura 3 – Evolução temporal do *aspect ratio* de duas nuvens durante o tempo de voo. À esquerda, vemos uma nuvem ordinária invertendo o *aspect ratio* durante sua expansão. À direita, vemos claramente a expansão auto-similar no caso de uma nuvem com vórtices enovelados. 36
- Figura 4 – Gráfico do *aspect ratio*, ou seja, a razão entre os raios, durante expansão das nuvens. Percebemos a inversão da proporção no caso da nuvem sem vórtices, mas a manutenção dela na nuvem com vorticidade. 37
- Figura 5 – Evolução do *aspect ratio*, durante expansão livre, das nuvens com e sem vórtices. Percebemos a semelhança dos nossos resultados com os dados experimentais da Figura 4. 45
- Figura 6 – Evolução das energias parciais. O eixo vertical está em unidades de $\hbar\omega_r$. (a) No caso da nuvem com vórtices, vemos que a energia cinética associada ao campo de velocidade dos vórtices se converte em energia cinética de fluxo mais lentamente que a energia de interação entre os átomos da nuvem. (b) No caso da nuvem sem vórtices, toda a energia de interação é rapidamente convertida em energia de expansão. 46

Figura 7 – Aqui mostramos a influência do termo de pressão quântica no cálculo da expansão livre de cada nuvem, sendo (a) a nuvem sem vórtices e (b) a nuvem turbulenta. Em ambos os casos, a diferença no resultado final é relativamente pequena mas, no caso da nuvem com vórtices, ela se torna próxima de 10% e passa a ser experimentalmente verificável.	47
Figura 8 – Evolução temporal do termo de pressão quântica. Aqui é possível ver que o termo praticamente se anula se anula após 6τ	48
Figura 9 – Oscilação dos raios de uma nuvem sem vórtices após uma deformação instantânea na armadilha de confinamento. Vemos que há uma frequência de oscilação em u_z que também aparece, embora em anti-fase, em u_x e u_y . A esse modo coletivo se dá o nome modo <i>quadrupolar</i> . Ainda há, em u_x e u_y , outras frequências de oscilação, que não são facilmente perceptíveis pelo gráfico e deverão aparecer em uma transformada de Fourier dos sinais.	54
Figura 10 – Transformada de Fourier dos sinais de oscilação dos raios. Percebemos que o sinal de u_z é composto por uma uma frequência majoritátia $\omega = 0,176 \omega_r$, que também aparece em u_x e u_y e corresponde ao modo <i>quadrupolar</i> . As outras frequências que aparecem são a do modo <i>quadrupolar</i> bidimensional, de valor $\omega = 1,443\omega_r$, e a do modo <i>breathing</i> , com $\omega = 2,001 \omega_r$. Percebemos também um pequeno pico em u_x e um em u_y que correspondem aos harmônicos mais altos da frequência quadrupolar, ou seja, $2\omega_q$ e $3\omega_q$	55
Figura 11 – Evolução das energias parciais durante a oscilação dos raios. Podemos perceber a baixa energia de fluxo, consequência de buscarmos o regime de pequenas oscilações, defasada de $\pi/2$ do potencial harmônico. O potencial harmônico e a energia de interação oscilam em anti-fase, com as frequências do modo <i>quadrupolar</i> e do modo <i>breathing</i>	56

Figura 12 – Oscilação dos raios após uma deformação instantânea na armadilha de confinamento, incluindo o termo de vorticidade. Qualitativamente, além das variações nos raios iniciais já vistas no capítulo 3, percebemos uma oscilação maior de u_z . No restante, os gráficos são muito semelhantes aos estudados no caso sem vórtices.	58
Figura 13 – Transformada de Fourier dos sinais de oscilação dos raios. Aqui, incluímos o termo de vorticidade. As frequências de ressonância são: modo <i>quadrupolar</i> , $\omega_q = 0,213\omega_r$, <i>quadrupolar bidimensional</i> , $1,456\omega_r$ e modo <i>breathing</i> , $1,999\omega_r$	59
Figura 14 – Evolução das energias parciais durante a oscilação dos raios. Podemos perceber a baixa energia de fluxo, consequência de buscarmos o regime de pequenas oscilações.	60
Figura 15 – Oscilação dos raios <i>durante</i> uma perturbação senoidal na direção axial, em que o parâmetro de amplitude da perturbação é $A = 1$. Percebemos a presença do modo quadrupolar nos três gráficos, sendo que, em u_x e u_y , aparecem também o modo <i>breathing</i> e um modo, bem mais lento, cuja análise exigiria maior tempo de excitação.	62
Figura 16 – Transformadas de Fourier das oscilações dos raios durante uma perturbação senoidal, com $A = 1$. Percebemos, em u_x , o modo quadrupolar $\omega_q = 0,25\omega_r$, também percebido em u_z e o modo <i>breathing</i> , $\omega_b = 2,001\omega_r$. O modo <i>breathing</i> é o mesmo visto na seção anterior, mas o modo quadrupolar sofreu um considerável deslocamento. Também observamos, em (a), pequenos picos correspondentes ao segundo e ao terceiro harmônico do modo quadrupolar, enquanto em (b) apenas o segundo harmônico é visível.	63
Figura 17 – Oscilação dos raios <i>durante</i> uma perturbação senoidal na direção radial. Aqui, $A = 0,2$. Qualitativamente, o resultado é idêntico ao caso anterior, havendo apenas redução nas amplitudes de oscilação.	63

Figura 18 – Transformadas de Fourier das oscilações dos raios durante uma perturbação senoidal, agora para $A = 0,2$. Novamente, vemos os modos <i>breathing</i> e quadrupolar, sendo que este último sofre um desvio em relação ao seu valor fora da perturbação e passa a ser de $\omega_q = 0,20 \omega_r$.	64
Figura 19 – Evolução das energias parciais durante a perturbação da nuvem. Observamos que as energias oscilam em torno de um valor médio. Há uma importante oscilação dos termos em separado do potencial harmônico e da energia de interação. Aparentemente, a amplitude do modo <i>breathing</i> aumenta, devido a injeção de energia no sistema. A modulação do sinal (modo quadrupolo) permanece com a mesma amplitude.	65
Figura 20 – Oscilação dos raios durante perturbação senoidal, com $A = 0,2$. Percebemos o modo quadrupolar nos dois gráficos, sendo que ele aparece puro em u_z . Em u_x , vemos ainda o modo de <i>breathing</i> e um outro modo mais lento.	66
Figura 21 – A transformada de Fourier nos mostra a ampliação da magnitude do modo quadrupolar na nuvem com vórtices, e a diminuição do modo de <i>breathing</i> . Além disso, em relação à nuvem com vórtices fora da perturbação, percebemos uma mudança de $0,22 \omega_r$ para $0,234 \omega_r$ de sua frequência.	66
Figura 22 – Evolução das energias parciais durante perturbação senoidal no eixo axial.	67
Figura 23 – Oscilação dos raios da nuvem sem vórtices após uma perturbação senoidal no eixo z. Vemos que há uma frequência de oscilação em u_z que também aparece, embora em anti-fase, em u_x e u_y . A esse modo coletivo se dá o nome modo <i>quadrupolar</i> . Ainda há, em u_x e u_y , uma outra frequência de oscilação, essa mais rápida e em fase nas duas dimensões. Concluímos ser o modo <i>breathing</i> , que é a oscilação em fase nas três dimensões, embora a perturbação utilizada não tenha sido capaz de excitar esse modo de oscilação em u_z .	68

Figura 24 – Amplitude da Transformada de Fourier dos raios durante a oscilação, explicitando as frequências de ressonância. Vemos, em u_x , que existe um modo coletivo mais intenso por volta de $\omega = 2,001 \omega_r$, e outro mais fraco por volta de $\omega = 0,176 \omega_r$	68
Figura 25 – Evolução das energias parciais da nuvem sem vórtices que oscila durante e após uma perturbação senoidal em z . A barra tracejada foi colocada no instante em que cessa a perturbação.	69
Figura 26 – Oscilação dos raios da nuvem com vórtices, após uma perturbação senoidal em z com $A = 0,2$. Percebemos o modo quadrupolar em ambos os gráficos, ao passo que o modo <i>breathing</i> apenas se manifesta em u_x	69
Figura 27 – Amplitude da Transformada de Fourier dos raios durante a oscilação, explicitando as frequências de ressonância, no caso da nuvem com vórtices. Vemos o modo quadrupolar presente em ambos os gráficos, com $\omega_q = 0,213\omega_r$, e o modo <i>breathing</i> , apenas percebido em u_x , de $\omega_b = 1,999\omega_r$	70
Figura 28 – Energias parciais durante a oscilação dos raios após uma perturbação senoidal em R_z	71
Figura 29 – Oscilação dos raios após a nuvem (sem vórtices) passar por 3 ciclos completos de uma perturbação senoidal no comprimento de espalhamento. O modo <i>breathing</i> é nítido em u_x e, embora menos intenso, em u_z . Neste, é mais explícito o modo <i>quadrupolar</i>	72
Figura 30 – Transformada de Fourier dos sinais. Vemos o modo <i>breathing</i> se manifestar em u_z com magnitude na mesma ordem de grandeza do modo <i>quadrupolar</i> . As frequências são $\omega_q = 0.176 \omega_r$ e $\omega_b = 2.00 \omega_r$	73
Figura 31 – Evolução das energias parciais da nuvem sem vórtices após passar por uma perturbação senoidal do comprimento de espalhamento.	73
Figura 32 – Na nuvem com vórtices após perturbação do comprimento de espalhamento também percebemos os modos <i>quadrupolar</i> e <i>breathing</i> , sendo o primeiro mais nítido em u_z e o segundo mais nítido em u_x	74

Figura 33 – Transformadas de Fourier das oscilações dos raios após perturbação do comprimento de espalhamento, no caso da nuvem com vórtices. Vemos o aumento da magnitude do modo *quadrupolar* em relação à nuvem sem vórtices, ao passo que o modo de *breathing* sofre uma ligeira redução. As frequências são $\omega_q = 0,213 \omega_r$ e $\omega_b = 1.999 \omega_r$ 74

Figura 34 – Evolução das energias parciais no caso da nuvem com vórtices após perturbação do comprimento de espalhamento. Vemos o quão pouco a energia dos vórtices oscila, em comparação com as perturbações anteriores. 75

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Breve histórico	19
1.2	Estrutura deste trabalho	21
2	CONDENSAÇÃO DE BOSE-EINSTEIN	23
2.1	Gás de Bose Ideal	23
2.1.1	Densidade de estados	25
2.1.2	Gás de Bose em uma caixa	26
2.1.3	Gás de Bose em um potencial harmônico	28
2.2	Gases de Bose fracamente interagentes	29
2.2.1	Equação de Gross-Pitaevskii	30
2.2.2	Aproximação de Thomas-Fermi	31
2.2.3	<i>Healing length</i>	32
2.2.4	Formulação hidrodinâmica	32
2.2.5	Vórtices	34
3	EXPANSÃO ANÔMALA DE UM CONDENSADO COM VÓRTICES	35
3.1	Vórtices enovelados e expansão anômala	35
3.2	Método variacional e vorticidade	37
3.2.1	Lagrangiana do sistema	38
3.2.2	Energia devido à vorticidade	40
3.2.3	Equações de Euler-Lagrange	42
3.2.4	Equações dinâmicas na forma adimensional	43
3.3	Expansão livre	44
3.4	Influência da pressão quântica	47
4	PEQUENAS OSCILAÇÕES	49
4.1	Aproximação linear	49

4.2	Perturbando os sistemas condensados	52
4.3	Deformação do confinamento em $t = 0$ (<i>Quench</i>)	53
4.4	Pulso senoidal	61
4.4.1	Nuvem durante a perturbação	61
4.4.2	Nuvem após a perturbação	67
4.5	Perturbação do Comprimento de Espalhamento	71
4.6	Discussão	75
5	CONCLUSÃO	79
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

Iniciaremos este trabalho com uma breve contextualização histórica sobre a previsão teórica e a geração experimental dos Condensados de Bose-Einstein. Mais detalhes podem ser encontrados nas referências citadas ao longo do texto. Posteriormente, descrevemos a estrutura dos próximos capítulos.

1.1 Breve histórico

Os condensados de Bose-Einstein (ou BECs, do inglês *Bose-Einstein Condensates*) foram previstos teoricamente em 1925. (1) Embora tenham inicialmente aparecido como uma curiosidade matemática, por serem previstos apenas para o zero absoluto em gases de átomos não interagentes, os BECs passaram a ter grande importância prática na década seguinte, quando o fenômeno da superfluidez de Hélio líquido passou a ser interpretado como consequência da condensação de Bose-Einstein dos átomos de Hélio. (2,3)

Após essa interpretação que relaciona a superfluidez ao fenômeno da condensação, houve várias investigações sobre os aspectos fundamentais da teoria dos BECs e suas implicações para a física de baixas temperaturas. Durante os anos 40, uma teoria fenomenológica foi proposta e incorporou a ideia de que a superfluidez do Hélio líquido era resultado da condensação de Bose-Einstein de seus átomos. (4) Em 1947, a teoria da superfluidez foi aprimorada, levando em conta as interações interatômicas. (5) Em 1951, foi proposto um método para calcular a temperatura crítica da condensação de Bose-Einstein de átomos de Hélio. (6) Em 1956, Penrose e Onsager estenderam sua descrição matemática dos BECs para incluir a interação entre os átomos. (7)

A busca pela geração de um BEC experimental foi impulsionada pelo desenvolvimento de técnicas avançadas de resfriamento e confinamento de gases atômicos. Na década de 70, começaram a surgir os primeiros experimentos em gases atômicos diluídos, utilizando técnicas de confinamento óptico e magnético, bem como técnicas de resfriamento. (8–10) Essas técnicas permitiam resfriar e confinar átomos neutros, com o objetivo de estudar

seu comportamento quântico a temperaturas próximas do zero absoluto.

Na década de 80, surgiram novas técnicas de resfriamento e confinamento utilizando laser. Isso permitiu aprisionar e resfriar ainda mais os gases de átomos neutros. (11–13) Essa técnica se mostrou fundamental para a criação experimental de um BEC. Além disso, a técnica de resfriamento por evaporação também se mostrou crucial. Por meio dela, os átomos mais energéticos são removidos progressivamente do gás, sendo este deixado a termalizar periodicamente, permitindo uma progressiva redução de temperatura.

Com a combinação de todas as técnicas mencionadas, finalmente, em 1995, foi gerado um BEC em átomos de rubídio resfriados a temperaturas na faixa de nanokelvin. (14–16) A Figura 1 mostra os perfis de densidade de três nuvens. A primeira delas está a uma temperatura $T > T_c$, onde T_c é a temperatura crítica, e não há condensação. Na segunda, $T < T_c$, e nota-se o chamado perfil bimodal, ou seja, o BEC está envolto por uma nuvem não condensada, a que chamamos nuvem térmica. Na terceira imagem, $T \rightarrow 0$ e vemos um condensado quase puro.

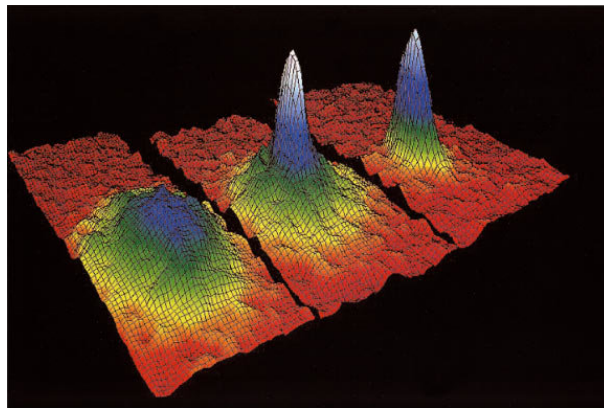


Figura 1 – Três distribuições de densidade das nuvens expandidas de átomos de rubídio em três temperaturas diferentes. Na primeira delas, $T > T_c$, e percebe-se se uma nuvem atômica comum armadilhada. Na segunda, $T < T_c$, e vemos uma nuvem térmica (rabo gaussiano) mais um perfil condensado. Na terceira imagem, $T \rightarrow T_c$, e houve uma grande diminuição da nuvem térmica, ou seja, quase todos os átomos estão no condensado.

Fonte: Adaptada de CORNELL.(17)

Uma das características de um superfluido é que ele não rotaciona como um fluido comum. Nele, o momento angular se manifesta na forma de vórtices quantizados. (18) O estudo de diferentes regimes das configurações dos vórtices em BECs tem sido uma chave para se desvendar a transição para o regime turbulento nesses sistemas, e é a esse tema

que direcionamos nosso trabalho.

1.2 Estrutura deste trabalho

Este trabalho apresenta as seguintes seções: no capítulo 2, introduzimos os conceitos básicos da condensação de Bose-Einstein, começando pelo gás de Bose ideal no *ensemble* gran-canônico, depois estudando os casos do gás de Bose em uma caixa e em um potencial harmônico. A equação de Gross-Pitaevskii é mostrada no contexto dos condensados fracamente interagentes, onde mostramos também uma possível solução analítica através da aproximação de Thomas-Fermi, que será explicada.

No capítulo 3, discutimos a expansão anômala observada em condensados turbulentos. Para explicarmos o fenômeno, modelamos a Lagrangiana do sistema incluindo um termo de vorticidade no *ansatz* que caracteriza a função de onda do BEC turbulento. Através do método variacional, derivamos então as equações que regem a dinâmica desse sistema.

No terceiro capítulo, estudamos os modos coletivos de nosso modelo do condensado turbulento, sempre comparando os resultados obtidos com aqueles de um condensado puro, sem vorticidade. Nosso sistema foi submetido a três tipos diferentes de perturbação, a saber, distorção repentina do potencial harmônico em $t = 0$ (chamamos esse tipo de excitação de *quench*), a perturbação por um pulso senoidal e, por fim, a modulação do comprimento de espalhamento atômico.

2 CONDENSAÇÃO DE BOSE-EINSTEIN

Introduzimos aqui o fenômeno da condensação de Bose-Einstein. Começamos por descrever o gás de Bose ideal, e estudamos seu comportamento em um potencial de tipo caixa e em um potencial harmônico. Explicamos as condições para a ocorrência da condensação, isto é, um estado quântico coerente em que podemos descrever o sistema com uma única função de onda. Posteriormente, estudamos os gases fracamente interagentes, melhor descritos pela Equação de Gross-Pitaevskii. Derivamos a formulação hidrodinâmica dessa equação e descrevemos a formação de vórtices. A discussão feita aqui pode ser encontrada em diversos livros-texto de Física Estatística e Mecânica Quântica. (18–21)

2.1 Gás de Bose Ideal

No *ensemble* gran-canônico, sabemos que a probabilidade de se realizar uma configuração com N partículas em um estado k , de energia E_k , é dada pela expressão:

$$P_N(E_k) = e^{\beta(\mu N - E_k)}, \quad (2.1)$$

sendo $\beta = 1/k_B T$, onde T é a temperatura do sistema e k_B é a constante de Boltzmann. Aqui, μ é o potencial químico, uma função de N e T que representa a energia que deve ser fornecida para adicionar uma partícula ao sistema.

A função de partição gran-canônica consiste de duas somas: uma soma em todos os números de partículas que o sistema pode ter (de 0 a ∞), já que, nesse *ensemble*, não há restrição para o número total de partículas e, para cada número de partículas, soma-se a função (2.1) sobre todos os estados k do sistema. A expressão fica:

$$Z(\beta, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_k e^{\beta(\mu N - E_k)}. \quad (2.2)$$

O valor esperado do número de partículas em um sistema no *ensemble* gran-canônico é:

$$\langle N \rangle = \frac{\sum_{N=0}^{\infty} \sum_k N e^{\beta(\mu N - E_k)}}{\sum_{N=0}^{\infty} \sum_k e^{\beta(\mu N - E_k)}} = Z^{-1} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{N=0}^{\infty} \sum_k e^{\beta(\mu N - E_k)}. \quad (2.3)$$

Como $\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = Z^{-1} \frac{\partial Z}{\partial \mu}$, obtemos:

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial}{\partial \mu} (-k_B T \ln Z). \quad (2.4)$$

Denominamos o termo entre parênteses no lado direito da equação 2.4 de potencial gran-canônico Ω . Pode ser demonstrado que (21):

$$\Omega \equiv -k_B T \ln Z = E - TS - \mu N, \quad (2.5)$$

onde E é a energia e S é a entropia do sistema. Como tratamos do *ensemble* gran-canônico, tanto energia quanto entropia e número de partículas são dados em termos de seus valores esperados, já que flutuam em torno deles, mas omitimos os símbolos $\langle \rangle$ por praticidade.

No caso de um sistema de partículas independentes, valem as expressões $N = \sum_i n_i$ e $E_k = \sum_i \epsilon_i n_i$, onde n_i é o conjunto dos números de ocupação de estados de uma partícula, e ϵ_i é a energia do microestado i . Assim, a função de partição gran-canônica fica:

$$Z = \prod_i \sum_{n_i} e^{\beta(\mu - \epsilon_i)n_i}. \quad (2.6)$$

O que nos interessa aqui são os sistemas de partículas bosônicas em equilíbrio termodinâmico. Nesse caso, o somatório da equação acima deve ser feito de 0 a ∞ . Substituindo a expressão da série geométrica infinita, obtemos:

$$Z = \prod_i \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}. \quad (2.7)$$

A partir das expressões 2.5 e 2.7, podem ser calculados, facilmente, os valores esperados para a energia, a entropia e o número de partículas do sistema. O valor esperado para o número total de partículas é:

$$\langle N \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}. \quad (2.8)$$

A função no interior do somatório é a distribuição de Bose, que representa o número de ocupação médio do estado i de uma partícula:

$$f_{\beta}^{BE}(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}. \quad (2.9)$$

É fácil perceber que essa expressão impõe que o potencial químico deve ser $\mu < \epsilon_0$, onde ϵ_0 é a energia do estado fundamental, ou seja, a menor energia que uma partícula do sistema pode ter. Estamos interessados na situação em que $\mu \rightarrow \epsilon_0$. Nesse caso, o número de ocupação de um estado i é limitado pela expressão $f_{\beta}^{BE}(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \epsilon_0)} - 1}$. Vemos que, para qualquer estado excitado, a expressão de fato representa um limite superior. Entretanto, no caso do estado fundamental, $\epsilon_i = \epsilon_0$, e não há um limite físico para o número de bósons que ocupam esse estado. Dizemos que ocorreu, no estado fundamental, uma Condensação de Bose-Einstein, e o número de partículas do sistema é dado por:

$$N = N_0 + N_T. \quad (2.10)$$

Onde N_0 é o número de átomos no estado fundamental (condensados), e N_T é o total de átomos nos estados excitados, que compõem a chamada *nuvem térmica*.

2.1.1 Densidade de estados

Vamos calcular agora o número de átomos da nuvem térmica. Há mais de um procedimento válido para tal dedução. Vamos, primeiramente, introduzir o conceito de *densidade de estados*. Queremos substituir o somatório da expressão (2.8) por uma integral no espaço de momentos, de forma que N_T seja dado por:

$$N_T = \int_{\epsilon \neq \epsilon_0} d\epsilon g(\epsilon) f_{\beta}^{BE}(\epsilon), \quad (2.11)$$

onde $g(\epsilon)$ é a densidade de estados. Vamos realizar a soma em todos os estados excitados:

$$N_T = \sum_{p_i \neq p_0} \frac{1}{e^{\beta(p_i^2/2m - \mu)} - 1}. \quad (2.12)$$

Podemos substituir o somatório por uma integral, através da transformação:

$$\sum_{p_i \neq p_0} \frac{1}{e^{\beta(p_i^2/2m - \mu)} - 1} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m - \mu)} - 1}. \quad (2.13)$$

Na equação acima substituímos a soma sobre os vários estados quânticos do sistema pela integral no espaço de fase, com cada estado quântico tendo volume infinitesimal h^3 . Essa transformação é válida para o caso em que a energia térmica $k_B T$ é muito maior que a diferença de energia entre os estados de uma partícula, ou seja, $k_B T \gg h^2/2mV^{2/3}$. Agora, vamos usar a relação entre momento e energia, fazendo a generalização para o caso do sistema em um potencial externo dependente da posição (22): $\epsilon = \mathbf{p}^2/2m + U(\mathbf{r})$, e $d\mathbf{p} = 4\pi p^2 dp$ para escrevermos o número de átomos da nuvem térmica como:

$$N_T = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_{\vartheta(\epsilon)} d^3r \sqrt{\epsilon - U(\mathbf{r})} f_\beta^{BE}(\epsilon), \quad (2.14)$$

sendo que $\vartheta(\epsilon)$ é o volume no espaço de fase delimitado pela superfície em que a energia é ϵ . Extraímos então uma expressão geral para a densidade de estados em três dimensões:

$$g(\epsilon) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} \int_{\vartheta(\epsilon)} \sqrt{\epsilon - U(\mathbf{r})} d^3r. \quad (2.15)$$

Apesar de ser possível usar essa expressão geral, apenas substituindo o potencial externo $U(\mathbf{r})$ de acordo o sistema em questão, aqui utilizamos outro método, a fim de melhor compreender o conceito da densidade de estados. Deduzimos $g(\epsilon)$ em dois exemplos específicos, a saber, do gás de Bose ideal em uma caixa e sujeito a um potencial harmônico, através da contagem do número de estados.

2.1.2 Gás de Bose em uma caixa

Considerando o sistema como uma caixa cúbica de lado L , sabemos que o número de estados de uma partícula livre com momento igual ou menor que p é uma esfera de raio p no espaço de momentos. Como existe em média um estado quântico por volume $(2\pi\hbar)^3$ do espaço de fases (18), e como a energia é dada por $\epsilon = p^2/2m$, o número de estados com energia inferior a ϵ é:

$$G(\epsilon) = V \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.16)$$

onde $V = L^3$.

A densidade $g(\epsilon)$ é obtida derivando a função acima em relação à ϵ :

$$g(\epsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \epsilon^{1/2}. \quad (2.17)$$

É claro que podemos obter o mesmo resultado substituindo o potencial tipo caixa na equação (2.15). Podemos escrever agora:

$$N_T = \int_{\epsilon \neq \epsilon_0} d\epsilon \frac{Vm^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \epsilon^{1/2} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(\zeta), \quad (2.18)$$

onde usamos as expressões para a fugacidade $\zeta = e^{\beta\mu}$, o comprimento de onda térmico $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ e a função de Bose:

$$g_\alpha(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} \frac{1}{\zeta^{-1}e^x - 1} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\zeta^l}{l^\alpha}, \quad (2.19)$$

para $\alpha = 3/2$. É importante observar a relação de recorrência $g_\alpha(\zeta) = \zeta \frac{dg_{\alpha+1}(\zeta)}{d\zeta}$.

A condensação de Bose-Einstein ocorre quando $\mu \rightarrow \epsilon_0$. Para o gás homogêneo, $\epsilon_0 = 0$. Nesse caso, começa a haver ocupação macroscópica do estado fundamental do sistema. A temperatura crítica T_c , definida como o valor crítico acima do qual não há ocupação do estado fundamental, ou, equivalentemente, a temperatura que caracteriza uma saturação da ocupação dos estados excitados, é tal que:

$$N_T(T_c, \mu = 0) = N. \quad (2.20)$$

Dessa forma, com o uso da equação (2.18), temos $\frac{N}{V} = \lambda_{T_c}^{-3} g_{3/2}(1)$. Substituindo o termo à esquerda pela densidade de partículas n , e explicitando os termos do comprimento de onda térmico, temos:

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{g_{3/2}(1)} \right)^{2/3}. \quad (2.21)$$

Já para temperaturas inferiores à T_c , o termo do condensado deve ser considerado. Nesse caso, o potencial químico μ converge para zero. É fácil verificar, substituindo (2.21) em (2.18):

$$N_T = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (2.22)$$

Assim, o número de átomos do condensado, a uma temperatura T , é:

$$N_0(T) = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.23)$$

2.1.3 Gás de Bose em um potencial harmônico

Estudaremos agora o caso do condensado sujeito a um potencial do tipo harmônico:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (2.24)$$

Aqui, ω_i é o comprimento de onda do oscilador na dimensão i . Os níveis de energia são dados em função dos n_i inteiros, $i = x, y, z$:

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega_x + (n_y + \frac{1}{2})\hbar\omega_y + (n_z + \frac{1}{2})\hbar\omega_z. \quad (2.25)$$

O número de estados com energia igual ou inferior à ϵ é dado pelo volume delimitado pela superfície $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ no primeiro octante, sendo as integrais realizadas nas variáveis $\epsilon_i = \hbar\omega_i n_i$:

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^3 \bar{\omega}^3} \int_0^\epsilon d\epsilon_x \int_0^{\epsilon - \epsilon_x} d\epsilon_y \int_0^{\epsilon - \epsilon_x - \epsilon_y} d\epsilon_z = \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3 \bar{\omega}^3}, \quad (2.26)$$

onde $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ é a média geométrica das frequências do oscilador. A densidade de estados é obtida de maneira direta, derivando (2.26) em relação à energia:

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \bar{\omega}^3}. \quad (2.27)$$

Novamente, é óbvio que o resultado acima poderia ser obtido simplesmente utilizando o potencial do oscilador harmônico na equação geral (2.15).

Agora, vamos utilizar a expressão obtida para a densidade de estados na expressão (2.11).

$$N_T = \frac{1}{2\hbar^3\bar{\omega}^3} \int_{\epsilon \neq \epsilon_0} d\epsilon \frac{\epsilon^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}. \quad (2.28)$$

Fazemos novamente a substituição por uma função de Bose, agora para $\alpha = 3$:

$$g_3(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx x^2 \frac{1}{\zeta^{-1}e^x - 1}. \quad (2.29)$$

Temos, enfim, o número de átomos na nuvem térmica:

$$N_T = \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 g_3(\zeta). \quad (2.30)$$

Novamente, a condição (2.20) nos dá a temperatura crítica:

$$T_c = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/3}. \quad (2.31)$$

E isso nos permite escrever, em termos dela, a expressão para a fração condensada:

$$N_0(T) = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right], \quad (2.32)$$

que é parecida com a expressão do caso homogêneo, mas agora a potência 3, e não 3/2, no expoente de T/T_c

2.2 Gases de Bose fracamente interagentes

Agora, estudaremos os gases de Bose fracamente interagentes. Trabalhamos aqui nos casos em que o alcance das interações entre os átomos é muito inferior à distância média entre eles. Dessa forma, acrescentaremos à nossa análise apenas interações de dois corpos. Como estamos interessados em gases diluídos e a baixas temperaturas, usamos a aproximação de Born para as interações. Tal aproximação consiste em considerar os

átomos como esferas rígidas que colidem de maneira completamente elástica. O potencial efetivo que representa essa interação será dado por (23):

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.33)$$

com o fator $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ determinando a força da interação, que é apenas dependente da massa atômica m e do comprimento de espalhamento de ondas- s para o átomo do gás.

2.2.1 Equação de Gross-Pitaevskii

Vamos agora escrever a hamiltoniana do sistema. (23) Um gás de bósons fracamente interagente, suficientemente diluído e a baixas temperaturas obedece:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \\ + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Usamos aqui a representação de números de ocupação da segunda quantização. O termo entre colchetes representa a energia de uma partícula, e a segunda integral corresponde à interação entre dois corpos. Aqui, $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ e $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ são, respectivamente, os operadores de campo de criação e aniquilação de uma partícula no ponto \mathbf{r} . Os operadores de campo de criação e aniquilação bosônicos obedecem às seguintes relações de comutação:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t)] = [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = 0, \quad (2.35)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.36)$$

Usaremos agora a aproximação de Bogoliubov, que é uma aproximação de campo médio que serve para caracterizar o sistema de gás fracamente interagente com ocupação macroscópica do estado fundamental. Nessa transformação, substituímos o operador de campo pela expressão:

$$\hat{\Psi} = \psi_0 + \delta\hat{\Psi}, \quad (2.37)$$

onde ψ_0 corresponde ao parâmetro de ordem do condensado (campo clássico) enquanto $\delta\hat{\Psi}$ representa as flutuações quânticas em torno de ψ_0 .

Substituindo, na Hamiltoniana, o operador de campo pela expressão de Bogoliubov, retendo apenas os termos de ordem zero nas flutuações, obtemos a equação satisfeita pelo parâmetro de ordem do condensado:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r},t) + g|\psi(\mathbf{r},t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r},t). \quad (2.38)$$

Essa é a Equação de Gross-Pitaevskii (ou GPE, do inglês *Gross-Pitaevskii Equation*). (24,25) Ela governa o comportamento de um condensado à temperatura zero nos casos em que o comprimento de espalhamento de ondas-s é muito inferior ao espaçamento médio entre os átomos condensados. O último termo entre colchetes representa a interação interatômica. Tal termo aparece com a dependência do módulo quadrado do parâmetro de ordem, e é obtido através da aproximação de campo médio. (18,19,23) É conveniente explicitar a equação de Gross-Pitaevskii independente do tempo. Caso $V_{ext}(\mathbf{r},t) = V_{ext}(\mathbf{r})$, podemos escrever a evolução do parâmetro de ordem como $\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0(\mathbf{r}) e^{i\mu t}$. (18) Segue que:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}). \quad (2.39)$$

2.2.2 Aproximação de Thomas-Fermi

Nos casos de nuvens com muitos átomos a temperaturas baixíssimas, o termo de energia cinética na GPE se torna relativamente pequeno frente à energia da interação atômica. A aproximação de Thomas Fermi consiste em resolver a GPE independente do tempo desconsiderando o termo cinético. Obtemos, para a densidade do sistema:

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V_{ext}(\mathbf{r})}{g}. \quad (2.40)$$

A expressão acima é válida na região $V_{ext}(\mathbf{r}) \leq \mu$ e nula fora dela, o que nos mostra que o potencial químico define o contorno da nuvem. No caso de um potencial harmônico,

inserimos a condição de contorno na equação do potencial (2.24), e obtemos, então, os raios:

$$R_i^2 = \frac{2\mu}{m\omega_i^2}, \quad (2.41)$$

onde $i = x, y, z$.

É do interesse deste trabalho a relação entre potencial químico e o número total de partículas no sistema. Para um potencial harmônico, como o descrito pela equação (2.24), obtemos a expressão (26):

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(\frac{Na_s}{\bar{a}} \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega}. \quad (2.42)$$

2.2.3 *Healing length*

É essencial, para definir uma excitação em qualquer sistema de BEC, compreender o conceito de *healing length* (comprimento de cura, em tradução livre). Na presença de uma perturbação localizada no sistema condensado, a densidade deste tem seus valores alterados de maneira significativa apenas a um raio ξ da perturbação. A essa grandeza ξ se dá o nome *healing length*.

Matematicamente, o *healing length* é dado por:

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mu}} = (8\pi na_s)^{-1/2}. \quad (2.43)$$

Dessa forma, havendo determinada perturbação, podemos dizer que o condensado segue sendo homogêneo a distâncias maiores que ξ , mas tem sua densidade variando espacialmente em um raio ξ do centro da perturbação.

2.2.4 *Formulação hidrodinâmica*

A função de onda do BEC é uma grandeza complexa, caracterizada por um módulo e uma fase:

$$\Psi(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|e^{iS(\mathbf{r})}. \quad (2.44)$$

A fase $S(\mathbf{r})$ é essencial para caracterizar a coerência e o aspecto de superfluido do BEC. (19) Já o módulo, como a GPE é derivada no limite de interações fracas, e para temperaturas muito baixas, podemos ignorar os termos de depleção quântica e térmica do condensado, e valerá, portanto, a expressão:

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.45)$$

O lado esquerdo da equação representa a densidade do sistema, e o lado direito representa a densidade do condensado. Assim, a aproximação que fazemos aqui significa simplesmente que a densidade do sistema é a mesma do condensado.

Podemos definir uma densidade de corrente:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) = n\frac{\hbar}{m}\nabla S. \quad (2.46)$$

Do termo à direita, obtemos a velocidade do fluxo do condensado:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m}\nabla S(\mathbf{r}, t). \quad (2.47)$$

Não é exatamente um consenso qual das características dos BECs é a mais essencial para caracterizá-lo como superfluido, mas a velocidade de fluxo do condensado ser irrotacional é uma das mais importantes evidências da superfluidez. (27) Multiplicando a GPE por Ψ^* e subtraindo o complexo conjugado, obtemos:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.48)$$

De 2.44, 2.45 e 2.38, obtemos:

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}S + \left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}_s^2 + V_{ext} + gn - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}}\nabla^2\sqrt{n}\right) = 0. \quad (2.49)$$

As equações (2.48) e (2.49) constituem a chamada formulação hidrodinâmica da GPE. A primeira é a equação de continuidade, e a segunda mostra a evolução temporal da fase do condensado. O termo da equação (2.49) que é dependente de \hbar^2 é chamado *pressão quântica*, e não aparece nas equações de fluidos clássicos. É um termo que se torna maior nos casos em que há grande variação de densidade da nuvem em um curto espaço. Será importante neste trabalho considerarmos situações em que tal termo deve ser desprezado, e as que ele deve ser considerado.

2.2.5 Vórtices

A seção anterior evidencia o caráter de superfluido apresentado pelos condensados de Bose-Einstein na presença de interações. A velocidade do fluxo do condensado, apresentada na seção anterior, é irrotacional. Dessa forma, quando se insere momento angular no sistema condensado, ele não pode rotacionar da mesma forma que um corpo rígido.

A função de onda de um condensado, $\psi_0(\mathbf{r})$, tem valor único em um ponto. Dessa forma, a mudança de fase sobre um caminho fechado deve ser um múltiplo de 2π :

$$\Delta S = \oint \nabla S \cdot d\mathbf{l} = 2\pi s, \quad (2.50)$$

onde s é um número inteiro. A circulação do campo de velocidade sobre um contorno fechado em torno do eixo axial é (28) :

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi s \frac{\hbar}{m}. \quad (2.51)$$

Assim, a solução da GPE em rotação inclui termos de circulação quantizada. Esta se deve à presença de vórtices, ou seja, regiões de densidade igual à zero, com influência na densidade do condensado em um raio igual ao *healing length*.

Os vórtices aparecem como essenciais no estudo de turbulência em sistemas condensados. No próximo capítulo, estudaremos um modelo para descrever a dinâmica de expansão de um condensado turbulento.

3 EXPANSÃO ANÔMALA DE UM CONDENSADO COM VÓRTICES

Neste capítulo introduzimos o experimento que primeiramente registrou o fenômeno da turbulência em superfluido quânticos, os quais foram caracterizados pela presença de vórtices enovelados. (29) Nesse mesmo experimento foi constatada a supressão da inversão do *aspect ratio* que ocorre no caso da expansão de um BEC usual confinado em armadilha harmônica assimétrica. Chamamos a esse fenômeno de expansão anômala ou auto-similar de um BEC com vórtices. Começamos descrevendo brevemente o experimento e, posteriormente, nos focamos em aprimorar um modelo (30,31) cujo campo de velocidades dos vórtices enovelados é introduzido variacionalmente na Lagrangiana do sistema. Todas as soluções que exigiam métodos numéricos foram feitas empregando o software *Mathematica*.

3.1 Vórtices enovelados e expansão anômala

Em 2009, um experimento com geração e oscilação de um condensado de Bose-Einstein de átomos de ^{87}Rb foi capaz de gerar um estado de turbulência quântica, após submeter a amostra condensada a campos magnéticos oscilatórios adicionais ao campo de confinamento harmônico. (29) Nesse experimento o BEC era armadilhado em um potencial harmônico com simetria axial. A armadilha possuía as seguintes frequências de confinamento: $\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 23 \text{ Hz}$ e $\omega_z = 2\pi \times 207 \text{ Hz}$, o que resulta em um condensado elipsoidal bastante alongado com cerca de $2 \cdot 10^5$ átomos.

Foi realizada então uma perturbação oscilatória no sistema, com a adição de um par de bobinas na configuração anti-Helmholtz (bobinas com eixos colineares, mas com correntes opostas) com eixo ligeiramente deslocado da configuração de bobinas do aprisionamento. O controle da frequência, amplitude e tempo de aplicação do campo magnético oscilante permitiu a transferência de momento angular para o superfluido, com a geração de um número crescente de vórtices. Essa amostra superfluida foi caracterizada experimentalmente através de imagens de absorção do perfil de densidade da nuvem em tempo de voo, obtida após o desligamento de todos os campos magnéticos de armadilhamento. A comparação

do perfil de densidade de uma nuvem em que há um único vórtice com o de uma nuvem turbulenta é mostrada na Figura 2.

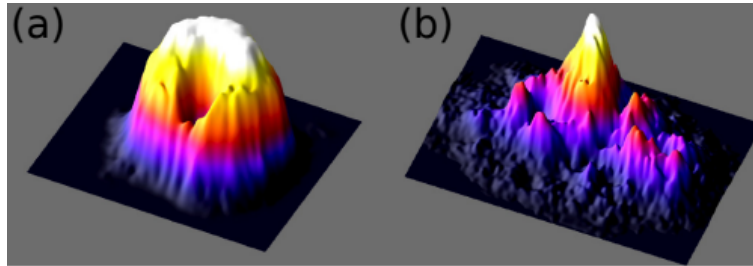


Figura 2 – A imagem (a) mostra uma nuvem ordinária, com um único vórtice. Percebemos como ela contrasta com o perfil de densidade da nuvem turbulenta em (b).

Fonte: CARACANHAS *et al.*(30)

Além da importância de se registrar os vórtices gerados, é de extremo interesse observar possíveis influências dessas estruturas sobre a dinâmica da nuvem superfluida. Por meio de várias realizações experimentais, imagens de absorção para diferentes tempos de expansão livre da nuvem foram obtidas a fim de contrastar a dinâmica de expansão de uma nuvem de BEC pura e de uma submetida a perturbação descrita. Elas são mostradas na Figura 3.

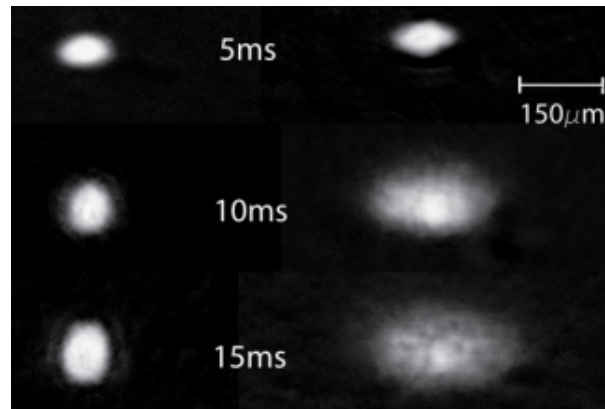


Figura 3 – Evolução temporal do *aspect ratio* de duas nuvens durante o tempo de voo. À esquerda, vemos uma nuvem ordinária invertendo o *aspect ratio* durante sua expansão. À direita, vemos claramente a expansão auto-similar no caso de uma nuvem com vórtices enovelados.

Fonte: Adaptada de HENN *et al.*(29)

A Figura 3 nos mostra um fato até então desconhecido: ao passo que a nuvem comum se expande invertendo suas dimensões, algo característico da expansão de BECs aprisionados em armadilhas assimétricas, a nuvem com vórtices se expande mantendo suas

dimensões, ou seja, de maneira auto-similar. A Figura 4 nos mostra o comparativo do *aspect ratio* durante a expansão.

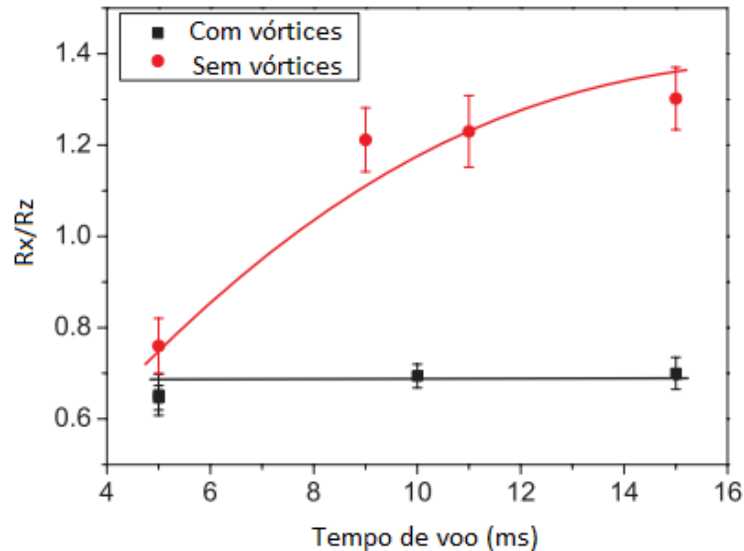


Figura 4 – Gráfico do *aspect ratio*, ou seja, a razão entre os raios, durante expansão das nuvens. Percebemos a inversão da proporção no caso da nuvem sem vórtices, mas a manutenção dela na nuvem com vorticidade.

Fonte: Adaptada de HENN *et al.*(29)

Mais detalhes podem ser vistos no artigo que caracteriza o experimento completo.
(32)

Nas próximas seções, descreveremos um modelo do sistema perturbado alcançado pelo experimento aqui descrito, a fim de verificar a conexão entre a presença dos vórtices e a evolução do *aspect ratio* durante a expansão.

3.2 Método variacional e vorticidade

Reproduzimos, com algumas alterações, a teoria exposta no artigo (31), onde a contribuição dos vórtices é derivada diretamente da lagrangiana. Nossa intenção é realizar uma descrição de um superfluido turbulento, em que a expansão auto-similar mostrada na seção anterior seja mostrada como efeito da adição de vorticidade no sistema. Refizemos todos os cálculos e expandimos a análise, tendo em vista o aproveitamento dessas formulações na continuidade deste projeto.

3.2.1 Lagrangiana do sistema

Utilizamos o método variacional para estudar a dinâmica de um condensado de Bose-Einstein com vorticidade isotrópica. O sistema que simulamos é de uma nuvem condensada de átomos de ^{87}Rb , confinada em uma armadilha de simetria cilíndrica. O potencial de confinamento é um potencial harmônico $V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_r^2(x^2+y^2)+m\omega_z^2z^2}{2}$, onde ω_r é a frequência do oscilador nas dimensões x e y , e ω_z na dimensão z ; m é a massa atômica do Rubídio. A nuvem é formada por 10^5 átomos (N_a) e a proporção entre o número de vórtices (N_v) e N_a é de 10^{-3} . A Tabela 1 mostra os valores numéricos das grandezas que serão utilizadas ao longo deste texto.

A lagrangiana do sistema é dada pela expressão:

$$L = \int d^3r \left[i\frac{\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \varepsilon[\psi] \right]. \quad (3.1)$$

Em que ψ é o parâmetro de ordem, e $\varepsilon[\psi]$ é a densidade de energia.

$$\varepsilon[\psi] = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi|^2 + \frac{g}{2} |\psi|^4. \quad (3.2)$$

O fator $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$, que aparece no termo de interação entre os átomos, é expresso em função do comprimento de espalhamento das ondas- s a_s . Usamos um *ansatz* de Thomas-Fermi multiplicado por um termo de fase que se deve à velocidade dos vórtices aleatórios e por um termo associado a uma fase que dará o grau de liberdade de expansão:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0} e^{iS(\mathbf{r}, t)} \left(\prod_{j=x,y,z} e^{im\beta_j(t)j^2/2\hbar} \right) \left(1 - \sum_{j=x,y,z} \frac{j^2}{R_j(t)^2} \right)^{1/2}. \quad (3.3)$$

A equação acima é válida dentro da região delimitada pela superfície elipsoidal $\mathcal{R}(x, y, z) = 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2}$, sendo 0 fora dela. A primeira exponencial representa o potencial da velocidade dos vórtices aleatoriamente distribuídos, representado pela fase $S(\mathbf{r}, t)$. Os parâmetros $\beta_j(t)$ representam a dependência temporal da fase que originará

o termo de velocidade irrotacional de expansão (ou contração) da nuvem. Os $R_j(t)$ são os raios de Thomas-Fermi da nuvem, e se relacionam ao potencial químico do sistema através da expressão: $R_j(t)^2 = 2\mu(t)/m\omega_j^2$. A densidade central de Thomas-Fermi, n_0 , dá a condição de normalização:

$$n_0 = \frac{15N_a}{(8\pi R_x R_y R_z)}. \quad (3.4)$$

Consideraremos aqui, como boa aproximação, que o movimento dos vórtices é lento o suficiente para que a derivada temporal de S seja desprezível, e usamos, para o campo de velocidade dos vórtices, a expressão:

$$\nabla S = \frac{m}{\hbar}(v_0 + \delta v), \quad (3.5)$$

onde v_0 é o movimento do centro de massa devido à vorticidade da nuvem, e δv é a velocidade local que os vórtices adicionam à nuvem. Faremos aqui a consideração que v_0 e δv são não-correlacionadas, ou seja, o produto entre elas se anula.

Substituímos o *ansatz* na integral da Lagrangiana, e realizamos a integração na região $\mathcal{R}(x, y, z)$. A expressão obtida é:

$$L = -\frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} R_j^2 \dot{\beta}_j - \frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} \beta_j^2 R_j^2 - \frac{6N_a \hbar^2}{7m} \sum_{j=x,y,z} \frac{1}{R_j^2} - \frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} \omega_j^2 R_j^2 - \frac{15\hbar^2 a_s N_a^2}{7m} \frac{1}{R_x R_y R_z} + \frac{1}{2} N_a m (v_0^2 + \delta v^2). \quad (3.6)$$

É importante discriminar os significados físicos dos termos da lagrangiana. O primeiro termo à direita, dependente da derivada temporal dos coeficientes β_j , é o termo que corresponde à derivada temporal da densidade da lagrangiana. A energia cinética da nuvem é representada pelo segundo e pelo terceiro termo, sendo o segundo representante da energia cinética de fluxo e o terceiro representante da pressão quântica, que funciona como um aumento da repulsão entre os átomos devido à energia de ponto zero. O quarto termo representa o potencial harmônico de confinamento a que o condensado é submetido. O quinto termo representa a interação repulsiva entre os átomos da nuvem, e o sexto

termo representa a energia cinética associada ao campo de velocidades dos vórtices, que é proporcional a ∇S .

3.2.2 Energia devido à vorticidade

Trataremos agora de escrever o último termo da lagrangiana, o termo que representa a energia acrescentada pela vorticidade, em função de grandezas conhecidas. Mostraremos que o termo de energia devido à vorticidade pode ser escrito como:

$$E_{vor} = N_a \frac{\pi \hbar^2 N_v \bar{R}_0^3}{2 m V_0} \ln \left(8\pi \frac{N_a a_s}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{1}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (3.7)$$

Na expressão, $\bar{R}_0 = (R_{x0}^2 + R_{y0}^2 + R_{z0}^2)^{\frac{1}{2}}$, N_v é o número de vórtices da nuvem e V_0 é o volume inicial do sistema. Os pressupostos teóricos da escrita do termo nessa forma são discutidos no artigo (30), que tomamos de base para este trabalho. Tentaremos fazer aqui uma versão ampliada dessa discussão.

Um sistema de vórtices orientados de forma aleatória apresenta uma energia por unidade de comprimento da linha de vórtices dada por:

$$\rho = \frac{\pi n \hbar^2}{m} \ln \left(\frac{l}{\xi} \right), \quad (3.8)$$

onde l é a distância entre os vórtices, ξ é o *healing length* que, nesse caso, é identificado com o raio de um vórtice e n é a densidade atômica local. Utilizaremos aqui o conceito de comprimento médio da linha de vórtices por unidade de volume L . (33) A energia total devido aos vórtices é obtida quando se multiplica a expressão acima pelo produto do volume total do sistema com L .

$$E_{vor} = \frac{\pi N_a \hbar^2}{m} L \ln \left(\frac{l}{\xi} \right). \quad (3.9)$$

L é uma função dependente do tempo, a qual pode ser convenientemente representada como função do seu valor inicial L_0 . Além disso, fazemos aqui a consideração de que L tem dependência inversa com o quadrado do raio da nuvem, o que nos resulta na expressão:

$$L = L_0 \frac{R_{x0}^2 + R_{y0}^2 + R_{z0}^2}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (3.10)$$

É fácil perceber que, assim, $L = L_0$ em $t = 0$. A dependência que L apresenta do inverso do quadrado do raio da nuvem foi postulada aqui para que as equações dinâmicas se aproximem das descritas no artigo (30), que teve sucesso razoável em descrever a expansão anômala de condensados com vórtices com base na quantidade e distribuição de vorticidade na nuvem. O modelo que aqui usamos pode ser visto como uma generalização desse anterior, que apenas estudou o caso de vórtices alinhados. Há controvérsias nessa escolha de expressão para L , como brevemente discutido na referência (31), mas elas não serão debatidas neste trabalho.

Agora, vamos considerar o comprimento total da linha de vórtices, L^T , tal que $L^T = VL$, onde V é o volume do sistema. L^T também deve ser normalizado por seu valor inicial L_0^T , e, dessa forma, $L_0 = L_0^T/V_0$. Nosso interesse neste trabalho é estudar a dinâmica da nuvem condensada com um determinado número de vórtices, ou seja, não incluímos mecanismos de geração ou dissipação de vórtices. Assim, consideramos o quociente $L^T/(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2)^{\frac{1}{2}}$ como igual ao número de vórtices da nuvem. Dessa forma, podemos escrever:

$$L_0 = \frac{N_v}{V_0} (R_{x0}^2 + R_{y0}^2 + R_{z0}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Ao mesmo tempo, também podemos estimar L_0 como o inverso do quadrado da separação inicial entre os vórtices. (34) Portanto,

$$L_0 = \frac{1}{l_0^2}. \quad (3.12)$$

Já l_0 , por sua vez, pode ser descrito através da expressão $l_0 = (\hbar/m\nu_0)^{1/2}$, onde ν_0 é a vorticidade média do sistema. Na aproximação de Thomas-Fermi, a vorticidade média pode ser expressa através da relação de Feynman:

$$\nu_0 = \frac{\hbar \pi N_v}{m A_0}. \quad (3.13)$$

Segue que l_0 pode ser aproximado para $l_0 \approx \sqrt{A_0/\pi N_v}$. Podemos igualar as expressões para L_0 , e obtemos:

$$\frac{A_0}{V_0} = \pi(R_{x0}^2 + R_{y0}^2 + R_{z0}^2)^{-1/2}. \quad (3.14)$$

As expressões acima são importantes para reescrevermos o termo que aparece no logaritmo de 3.9. Como o logaritmo em questão varia apenas sutilmente com o tempo, podemos identificá-lo ao seu valor inicial. Segue que:

$$\frac{l_0}{\xi_0} = \sqrt{8a_s \frac{N_a}{N_v} \frac{\pi}{(R_{x0}^2 + R_{y0}^2 + R_{z0}^2)^{1/2}}} = \sqrt{8a_s \frac{N_a A_0}{N_v V_0}}. \quad (3.15)$$

Onde empregamos para o *healing length* a expressão (2.43), substituindo n pelo n_0 de (3.4).

Mostramos, portanto, a validade da expressão (3.7). A lagrangiana então é escrita na forma:

$$\begin{aligned} L = & -\frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} R_j^2 \dot{\beta}_j - \frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} \beta_j^2 R_j^2 - \frac{6N_a \hbar^2}{7m} \sum_{j=x,y,z} \frac{1}{R_j^2} - \frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} \omega_j^2 R_j^2 \\ & - \frac{15\hbar^2 a_s N_a^2}{7m} \frac{1}{R_x R_y R_z} + N_a \frac{\pi \hbar^2 N_v \bar{R}_0^3}{2 m V_0} \ln \left(8\pi \frac{N_a a_s}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{1}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2.3 Equações de Euler-Lagrange

Dado nosso interesse em obter as evoluções temporais dos raios da nuvem, devemos resolver as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad (3.17)$$

Tabela 1 – Tabela com os valores numéricos que serão usados neste trabalho e sua respectiva unidade de medida

Grandeza	Símbolo	Valor
Massa atômica do ^{87}Rb	m	$144,5 \times 10^{-27}$ kg
Frequência do oscilador em x e y	ω_r	$2\pi \times 207$ Hz
Frequência do oscilador em z	ω_z	$2\pi \times 23$ Hz
Número de átomos do condensado	N_a	10^5
Comprimento de espalhamento de ondas-s para o ^{87}Rb	a_s	$95 a_0$
Raio de Bohr	a_0	$5,292 \times 10^{-11}$ m

Fonte: Elaborada pelo autor

sendo que obtemos seis equações substituindo q_j pelos seis parâmetros variacionais, a saber, os três β_j e os três R_j . Das equações para $\beta_j(t)$ encontramos as soluções:

$$\beta_j = \frac{\dot{R}_j}{R_j}, \quad (3.18)$$

e, utilizando o fato de que $\dot{\beta}_j = \frac{\ddot{R}_j}{R_j} - \frac{\dot{R}_j^2}{R_j^2}$, obtemos, através das equações de Euler-Lagrange para os R_j , as equações dinâmicas do nosso sistema:

$$\ddot{R}_i = \frac{12\hbar^2}{m^2 R_i^3} + \frac{15\hbar^2 a_s N_a}{m^2 R_i^2 R_j R_k} + \frac{7\hbar^2 N_v \pi \bar{R}_0^3 \ln\left(\frac{8\pi N_a a_s}{N_v \bar{R}_0}\right)}{V_0 m^2} \frac{R_i}{(R_i^2 + R_j^2 + R_k^2)^2} - \omega_i^2 R_i. \quad (3.19)$$

3.2.4 Equações dinâmicas na forma adimensional

Utilizamos, para o número de vórtices, o valor $N_v = 8\pi N_a a_s / e \bar{R}_0$, que é o valor que maximiza a contribuição do termo de vorticidade. A forma adimensional das equações dinâmicas, usada nos cálculos numéricos, é obtida através das substituições:

$$\begin{aligned} \lambda &= \omega_z / \omega_r, \\ R_i &= l_r u_i, \\ \tau &= \omega_r t, \\ P_r &= (15 N_a a_s) / l_r, \\ P_v &= (42 \pi N_a a_s) / e l_r. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assim, obtemos as equações:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_x &= \frac{12}{u_x^3} + \frac{P_r}{u_x^2 u_y u_z} + \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_x}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - u_x, \\
\ddot{u}_y &= \frac{12}{u_y^3} + \frac{P_r}{u_y^2 u_x u_z} + \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_y}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - u_y, \\
\ddot{u}_z &= \frac{12}{u_z^3} + \frac{P_r}{u_z^2 u_x u_y} + \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_z}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - \lambda^2 u_z.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Os valores iniciais dos raios são obtidos zerando o termo de segunda derivada nas equações (3.21):

$$\begin{aligned}
\frac{12}{u_{x0}^3} + \frac{P_r}{u_{x0}^2 u_{y0} u_{z0}} + \frac{P_v}{u_{y0} u_{z0} (u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)} - u_{x0} &= 0, \\
\frac{12}{u_{y0}^3} + \frac{P_r}{u_{y0}^2 u_{x0} u_{z0}} + \frac{P_v}{u_{x0} u_{z0} (u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)} - u_{y0} &= 0, \\
\frac{12}{u_{z0}^3} + \frac{P_r}{u_{z0}^2 u_{x0} u_{y0}} + \frac{P_v}{u_{x0} u_{y0} (u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)} - \lambda^2 u_{z0} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

As soluções são obtidas em forma adimensional. Posteriormente, deve-se multiplicá-las por l_r .

Os resultados dimensionalizados obtidos para os raios iniciais são:

$$\begin{aligned}
R_{x0} &= 2.71 \mu m, \\
R_{y0} &= 2.71 \mu m, \\
R_{z0} &= 48.00 \mu m.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

3.3 Expansão livre

Estudamos a expansão livre da nuvem zerando os termos em primeira ordem em u_i nas equações (3.21), já que são esses termos os correspondentes ao potencial de confinamento. Abaixo, segue o gráfico com a proporção das dimensões do condensado durante a expansão livre:

Percebemos que, no lugar da típica inversão de proporções de um condensado de Bose-Einstein ordinário, o condensado com vórtices se expande de maneira auto-similar. Como argumentado em trabalho anterior, os vórtices tendem a se alinhar no plano xy , já que tal configuração minimiza a energia do sistema (é mais estável). (30) Assim, o

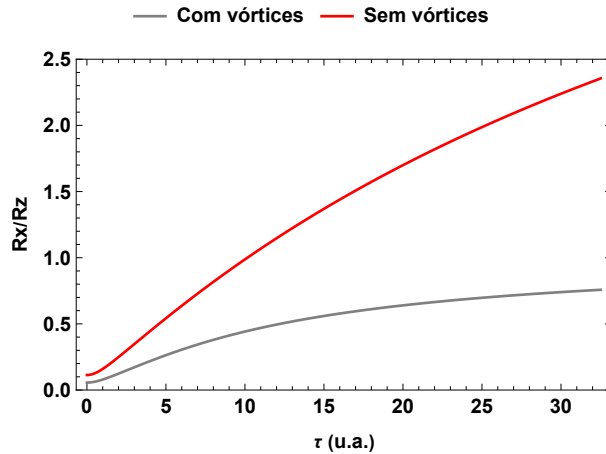


Figura 5 – Evolução do *aspect ratio*, durante expansão livre, das nuvens com e sem vórtices. Percebemos a semelhança dos nossos resultados com os dados experimentais da Figura 4.

Fonte: Elaborada pelo autor.

momento angular tende a se alinhar no plano z , e nele haverá maior pressão estimulando a expansão do que no caso da nuvem sem vórtices.

Podemos observar como há, durante o movimento, a conversão da energia de rotação dos vórtices em energia de expansão da nuvem. A Figura 6(a) mostra a evolução das energias parciais no caso da nuvem com vórtices, ao passo que 6(b) mostra o caso da nuvem sem vórtices. As equações para os termos da energia são mostradas em (3.24):

$$\begin{aligned}
 E_{fluxo} &= \frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} \dot{R}_j^2, \\
 E_{int} &= \frac{15 \hbar^2 a_s N_a^2}{7m} \frac{1}{R_x R_y R_z}, \\
 E_{vor} &= N_a \frac{\pi \hbar^2 N_v}{2} \frac{\bar{R}_0^3}{m V_0} \ln \left(8\pi \frac{N_a a_s}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{1}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Devemos observar que, em uma nuvem com vórtices, temos a redução da energia de interação por conta da diluição efetiva da densidade atômica, causada pelos vazios de densidade das linhas de vórtices. Além disso, temos o aparecimento de uma contribuição energética dos vórtices devido ao campo de velocidade.

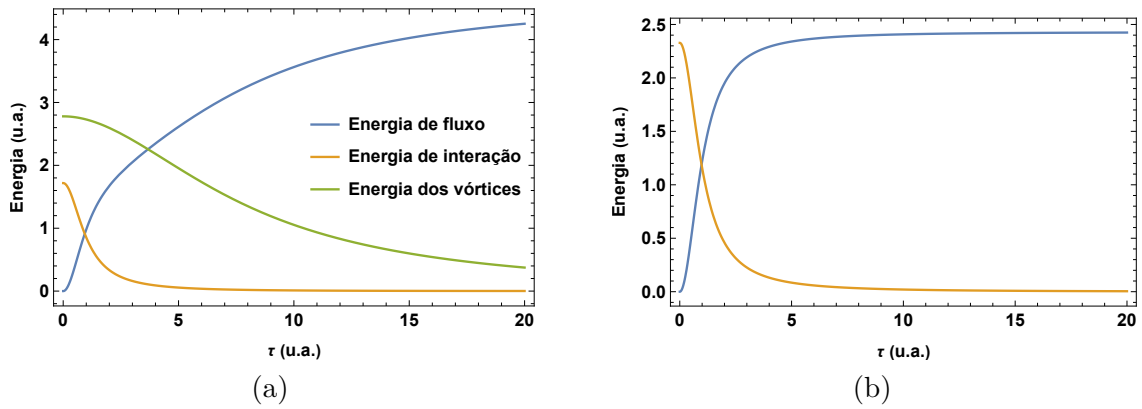


Figura 6 – Evolução das energias parciais. O eixo vertical está em unidades de $\hbar\omega_r$. (a) No caso da nuvem com vórtices, vemos que a energia cinética associada ao campo de velocidade dos vórtices se converte em energia cinética de fluxo mais lentamente que a energia de interação entre os átomos da nuvem. (b) No caso da nuvem sem vórtices, toda a energia de interação é rapidamente convertida em energia de expansão.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Influência da pressão quântica

Neste trabalho, nós incluímos na análise o termo de pressão quântica, desconsiderado em trabalhos anteriores. Mostraremos como esse termo influencia a expansão anômala em nosso modelo de superfluido turbulento. Primeiramente, analisamos, em uma nuvem sem vórtices, a diferença entre o cálculo que considera o termo de pressão quântica e aquele que o ignora.

A Figura 7(a) apresenta a sobreposição das curvas de expansão livre no caso da nuvem sem vórtices. As curvas são praticamente idênticas, com um adiantamento quase imperceptível do tempo de inversão do *aspect ratio* da nuvem quando o termo de pressão quântica é incluso.

Observemos a Figura 7(b). Ao passo que, na nuvem sem vórtices, a pressão quântica responde por menos de 2% do valor final da razão entre os raios, na nuvem com vórtices ele responde por aproximadamente 10% do valor final. É fato que a importância do termo continua sendo quantitativamente pequena, de forma que sua inclusão não altera qualitativamente a análise do problema feita em trabalhos anteriores, ou seja, é mantida a tendência à auto-similaridade na expansão de uma nuvem com vórtices. Entretanto, como a pressão quântica tem caráter repulsivo, é natural de se esperar que ela seja maior

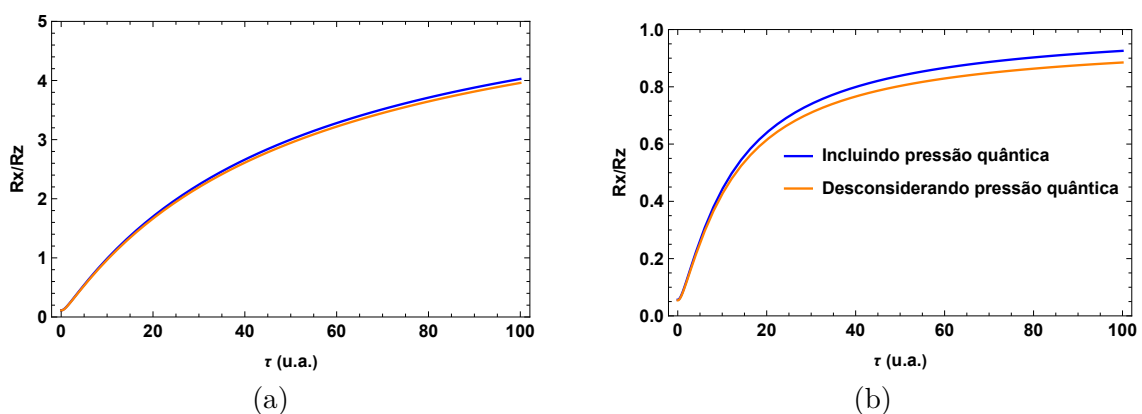


Figura 7 – Aqui mostramos a influência do termo de pressão quântica no cálculo da expansão livre de cada nuvem, sendo (a) a nuvem sem vórtices e (b) a nuvem turbulenta. Em ambos os casos, a diferença no resultado final é relativamente pequena mas, no caso da nuvem com vórtices, ela se torna próxima de 10% e passa a ser experimentalmente verificável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

quando a nuvem ainda está confinada ou apenas no início de sua expansão. A curva da pressão quântica em função do tempo durante a expansão é mostrada na Figura 8.

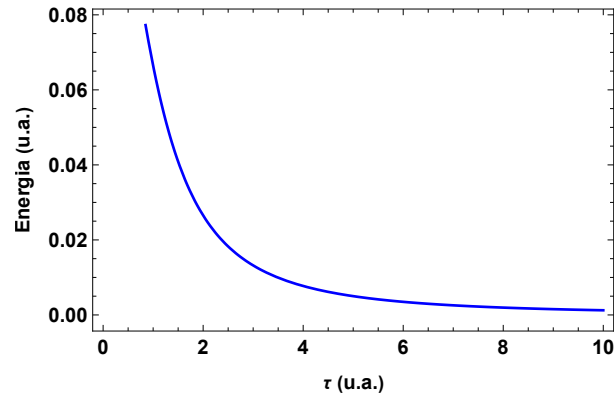


Figura 8 – Evolução temporal do termo de pressão quântica. Aqui é possível ver que o termo praticamente se anula se anula após 6τ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar do termo da pressão quântica não afetar significativamente a expansão livre da nuvem turbulenta, ainda assim a inclusão desse termo é importante para descrever o nosso sistema de vórtices enovelados de forma mais completa. Vale ressaltar que a pressão quântica é dada em termos do gradiente da densidade, que é esperado ser muito mais intenso em uma nuvem repleta de vórtices devido as grandes flutuações de densidade. No caso da expansão da nuvem porém, há uma enorme diluição da densidade atômica, que explica a significativa redução do efeito da pressão quântica, conforme ilustrado na Figura 8. Entretanto, esperamos que o termo de pressão quântica seja ainda mais influente em outras situações, como por exemplo na dinâmica de um condensado armadilhado sujeito à perturbações externas, que será o tema de nosso próximo capítulo.

4 PEQUENAS OSCILAÇÕES

Faremos aqui o estudo do nosso sistema sujeito a perturbações externas. Vale ressaltar que as perturbações que serão estudadas nesse capítulo têm como base aquelas que são comumente empregadas nos experimentos com BECs. A medida experimental da resposta do sistema submetido a pequenas perturbações é de altíssima precisão, possibilitando a comparação futura dos experimentos com as nossas previsões teóricas. (19) Para estudarmos o nosso sistema, devemos resolver as equações dinâmicas (3.19) em sua forma completa, incluindo o termo de confinamento, além de um termo adicional que caracterizará a perturbação por campos externos. Primeiramente, faremos um estudo analítico das nossas equações dinâmicas com o termo de vorticidade, as quais serão linearizadas em torno da solução de equilíbrio a fim de determinarmos as frequências naturais de oscilação do nosso sistema turbulento. Posteriormente, resolveremos numericamente as equações dinâmicas do sistema para três diferentes tipos de perturbações: a perturbação *quench*, que consiste na deformação instantânea da armadilha harmônica de aprisionamento em $t = 0$; além disso, faremos também a perturbação por um pulso senoidal e, por fim, modularemos temporalmente o comprimento de espalhamento atômico.

4.1 Aproximação linear

Para pequenas oscilações, podemos fazer uso da expansão linear:

$$R_i(t) = R_{i0} + \delta_i(t), \quad i = x, y, z. \quad (4.1)$$

Usando a expansão nas equações (3.21), temos:

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta}_x &= \frac{12}{(u_{x0} + \delta_x)^3} + \frac{P_r}{(u_{x0} + \delta_x)^2(u_{y0} + \delta_y)(u_{z0} + \delta_z)} \\
&+ \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0}u_{y0}u_{z0}} \frac{(u_{x0} + \delta_x)}{[(u_{x0} + \delta_x)^2 + (u_{y0} + \delta_y)^2 + (u_{z0} + \delta_z)^2]^2} - (u_{x0} + \delta_x), \\
\ddot{\delta}_y &= \frac{12}{(u_{y0} + \delta_y)^3} + \frac{P_r}{(u_{y0} + \delta_y)^2(u_{x0} + \delta_x)(u_{z0} + \delta_z)} \\
&+ \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0}u_{y0}u_{z0}} \frac{(u_{y0} + \delta_y)}{[(u_{x0} + \delta_x)^2 + (u_{y0} + \delta_y)^2 + (u_{z0} + \delta_z)^2]^2} - (u_{y0} + \delta_y), \\
\ddot{\delta}_z &= \frac{12}{(u_{z0} + \delta_z)^3} + \frac{P_r}{(u_{z0} + \delta_z)^2(u_{x0} + \delta_x)(u_{y0} + \delta_y)} \\
&+ \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0}u_{y0}u_{z0}} \frac{(u_{z0} + \delta_z)}{[(u_{x0} + \delta_x)^2 + (u_{y0} + \delta_y)^2 + (u_{z0} + \delta_z)^2]^2} - \lambda^2(u_{z0} + \delta_z).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Lembramos que $\lambda = \omega_z/\omega_r$, onde ω_z é a frequência do oscilador do potencial harmônico em z e ω_r em x e y. Dessa forma, λ traz para as nossas equações a dependência das dimensões do confinamento. Consideramos então a expansão em séries de Taylor nos δ_i em torno de 0 das expressões à direita das igualdades. Observando que os termos de ordem zero se anularão, tendo em mente os valores para os raios iniciais (3.23), as equações simplificadas para as variações δ_i são:

$$\begin{aligned}
\ddot{\delta}_x &= \left(-\frac{36}{u_{x0}^4} - \frac{2P_r}{u_{x0}^3u_{y0}u_{z0}} + \frac{P_v(1 - 4u_{x0}^2)}{u_{x0}u_{y0}u_{z0}(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)^2} - 1 \right) \delta_x \\
&+ \left(-\frac{P_r}{u_{x0}^2u_{y0}u_{z0}^2} - \frac{P_v}{u_{y0}(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)^2} \right) \delta_y \\
&+ \left(-\frac{P_r}{u_{x0}^2u_{y0}^2u_{z0}} - \frac{P_v}{u_{z0}(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)^2} \right) \delta_z, \\
\ddot{\delta}_z &= \left(-\frac{36}{u_{z0}^4} - \frac{2P_r}{u_{z0}^3u_{y0}u_{x0}} + \frac{P_v(1 - 4u_{z0}^2)}{u_{z0}u_{y0}u_{x0}(u_{z0}^2 + u_{y0}^2 + u_{x0}^2)^2} - \lambda^2 \right) \delta_z \\
&+ \left(-\frac{P_r}{u_{z0}^2u_{y0}u_{x0}^2} - \frac{P_v}{u_{y0}(u_{z0}^2 + u_{y0}^2 + u_{x0}^2)^2} \right) \delta_y \\
&+ \left(-\frac{P_r}{u_{z0}^2u_{y0}^2u_{x0}} - \frac{P_v}{u_{x0}(u_{z0}^2 + u_{y0}^2 + u_{x0}^2)^2} \right) \delta_x.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

A equação de δ_y foi omitida por ser simétrica a de δ_x .

Podemos escrever o sistema em forma matricial. Definimos $\mathbf{\Omega}$ como sendo a matriz dos coeficientes dos δ_i em (4.3) de forma que:

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\delta}, \quad (4.4)$$

$$\text{onde } \ddot{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_x \\ \ddot{\delta}_y \\ \ddot{\delta}_z \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}.$$

Assumindo que as variações δ_i podem ser escritas como $\delta_i(t) = e^{i\omega t} \xi_i(\mathbf{r})$, onde $\xi_i(\mathbf{r})$ não apresenta dependência temporal, podemos usar (4.4) e calculamos numericamente os modos coletivos, que são os autovalores da matriz $\boldsymbol{\Omega}$. As ressonâncias vêm com a solução do polinômio característico $P(\omega)$ associado a essa matriz. Os valores obtidos foram: $\omega = 0,211 \omega_r$, $1,457 \omega_r$ e $1,991 \omega_r$. Comparativamente, quando zeramos o termo de vorticidade ($P_v = 0$), obtemos, para os mesmos modos coletivos, os valores $\omega = 0,176 \omega_r$, $1,443 \omega_r$ e $2,001 \omega_r$. O primeiro e o último valor concordam com os encontrados na literatura (35) para os modos *quadrupolar* e *breathing*, respectivamente, em condensados sem vórtices. Mostraremos que a frequência intermediária se associa ao modo coletivo *quadrupolar bidimensional*, caracterizado pela oscilação em anti-fase de R_x e R_y . Percebemos que a única frequência a se alterar de maneira significativa com a vorticidade foi a do modo quadrupolar, que aumentou em aproximadamente 20% no caso em que a razão entre o número de vórtices pelo número de átomos do condensados é da ordem de 10^{-3} . Tal resultado foi interpretado como indicador de uma maior incompressibilidade da nuvem condensada devido ao campo de velocidade dos vórtices. (35)

Outros modos coletivos também podem ser excitados, mas exigem perturbações que fazem nosso sistema sair do regime de pequenas oscilações, que é o reproduzido em nossa aproximação.

Podemos calcular os autoestados correspondentes a cada autovalor determinado na Equação (4.4), mas aqui optamos por identificá-los através da solução numérica das equações dinâmicas, o que faremos na sequência deste trabalho. Calcularemos a variação temporal dos raios diretamente, através de métodos numéricos, para tipos diferentes de perturbação. Posteriormente, usaremos a transformada de Fourier para obter as frequências de ressonância do sistema.

4.2 Perturbando os sistemas condensados

Podemos gerar uma perturbação no nosso sistema confinado de três maneiras: a primeira delas é simplesmente distorcer o potencial harmônico em $t = 0$ através de uma mudança na corrente que passa pelas bobinas de confinamento. Como o formato da nuvem a tornava estável, sem oscilação, para o potencial anterior, ela oscilará nesse novo confinamento. O segundo método é simplesmente adicionando um termo perturbativo dependente do tempo ao potencial de confinamento. Assim, o termo perturbativo se somará ao potencial de confinamento, e o potencial externo total será dado por:

$$V(\mathbf{r}, t) = V_{arm}(\mathbf{r}) + V_{per}(\mathbf{r}, t), \quad (4.5)$$

em que $V_{arm}(\mathbf{r})$ é o potencial da armadilha e $V_{per}(\mathbf{r}, t)$ é o termo de perturbação.

O terceiro método envolve perturbar a nuvem através da variação do comprimento de espalhamento, tornando-o uma função dependente do tempo. A mudança no comprimento de espalhamento transforma a magnitude da interação entre átomos em uma função temporal:

$$\Phi(t) = 4\pi \frac{a_s(t)}{m}. \quad (4.6)$$

Assim, uma modulação do comprimento de espalhamento atômico influi diretamente nas interações interatômicas. Podemos assumir que as perturbações são feitas de maneira a não se alterar o momento angular do sistema. (36)

Neste trabalho nós já partimos de um sistema inicialmente perturbado de modo a ter gerado uma certa quantidade de vórtices enovelados. Entretanto, para estudarmos os modos coletivos, faremos novas perturbações para retirar o sistema de seu estado inicial. Nesses casos, veremos graficamente, quando houver, a alteração da energia total do sistema devido à perturbação.

4.3 Deformação do confinamento em $t = 0$ (*Quench*)

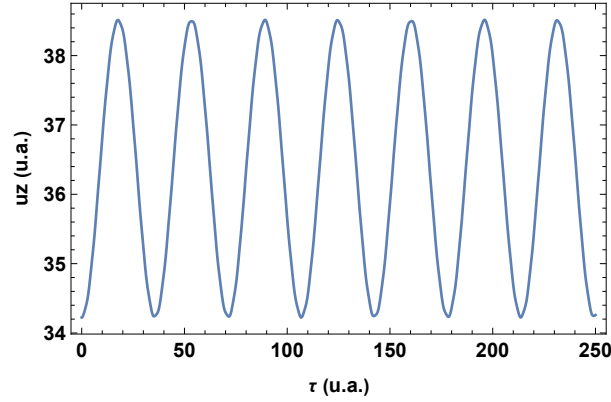
A primeira perturbação que faremos será deformar a armadilha de confinamento, calcular os raios da nuvem "deformada", e restaurar os valores originais da armadilha em $t = 0$. Dessa maneira, com a restauração dos valores do potencial harmônico aqui tratado, a nuvem oscilará. Matematicamente, temos, em $t = 0$:

$$\begin{aligned} D_x u_{x0} &= \frac{12}{u_{x0}^3} + \frac{P_r}{u_{x0}^2 u_{y0} u_{z0}} + \frac{P_v}{u_{y0} u_{z0} (u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)} \\ D_y u_{y0} &= \frac{12}{u_{y0}^3} + \frac{P_r}{u_{y0}^2 u_{x0} u_{z0}} + \frac{P_v}{u_{x0} u_{z0} (u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)} \\ D_z \lambda^2 u_{z0} &= \frac{12}{u_{z0}^3} + \frac{P_r}{u_{z0}^2 u_{x0} u_{y0}} + \frac{P_v}{u_{x0} u_{y0} (u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

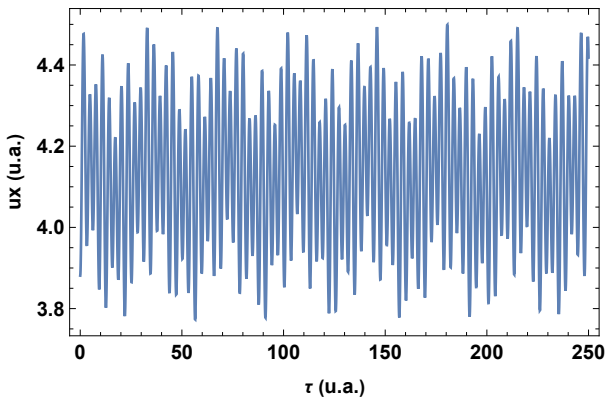
onde D_x, D_y e D_z são os fatores de deformação da armadilha. Escolhemos valores que nos mantenham em um regime de pequenas oscilações ou próximo dele, ou seja, que nenhum dos raios sofra uma grande variação percentual. Também é de nosso interesse excitar os três modos coletivos calculados na seção anterior, o que sugere uma armadilha inicial assimétrica nos três eixos perpendiculares. Posteriormente, substituímos os valores dos raios iniciais nas equações (3.21), para evoluir as equações dinâmicas.

Nuvem sem vórtices

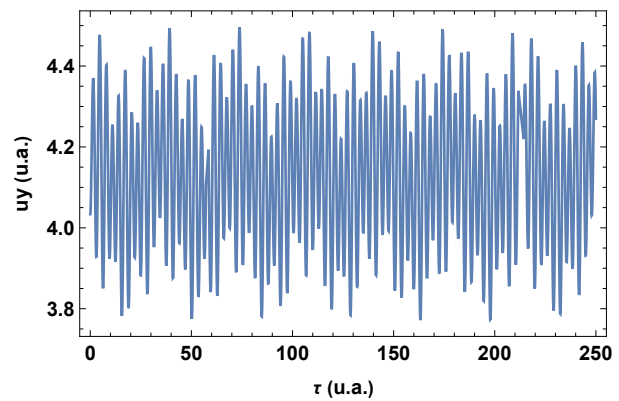
Primeiramente, fazemos $P_v = 0$ na equação (4.7) para estudarmos o comportamento da nuvem sem vórtices. Utilizando valores para uma deformação relativamente pequena, optamos por $D_x = 1,3, D_y = 1,2$ e $D_z = 1,3$. É importante ter em mente que, sem a deformação, os raios iniciais teriam os seguintes valores adimensionais $u_x = u_y = 4,12$ e $u_z = 36,3$. Quando fazemos a distorção descrita, os valores iniciais passam a ser $u_x = 3,88$, $u_y = 4,03$ e $u_z = 34,22$. A evolução da nuvem após $t = 0$, calculada numericamente, é mostrada na Figura 9. Observamos uma oscilação de u_z com aparentemente apenas uma frequência, ao passo que u_x e u_y parecem oscilar com uma composição dessa mesma frequência e outras frequências adicionais. Podemos notar que essa frequência comum aos três raios corresponde a uma oscilação em fase de u_x e u_y e em anti-fase com u_z . A esse modo coletivo se dá o nome de modo *quadrupolar*.



(a)



(b)



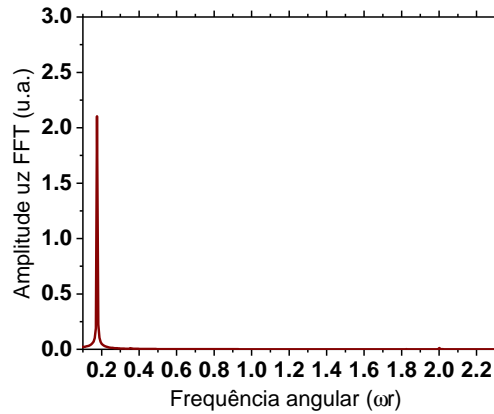
(c)

Figura 9 – Oscilação dos raios de uma nuvem sem vórtices após uma deformação instantânea na armadilha de confinamento. Vemos que há uma frequência de oscilação em u_z que também aparece, embora em anti-fase, em u_x e u_y . A esse modo coletivo se dá o nome modo *quadrupolar*. Ainda há, em u_x e u_y , outras frequências de oscilação, que não são facilmente perceptíveis pelo gráfico e deverão aparecer em uma transformada de Fourier dos sinais.

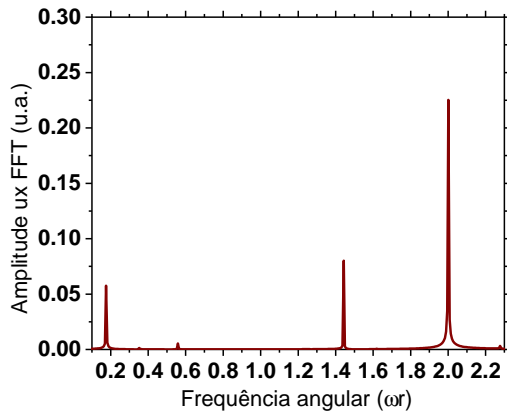
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para compreendermos as frequências de oscilação de maneira mais detalhada, fazemos as transformadas de Fourier dos sinais. O resultado é mostrado na Figura 10. A frequência do modo quadrupolar é $\omega_q = 0,176\omega_r$, valor em concordância com o encontrado na literatura. Os outros dois modos coletivos são $\omega = 1,443\omega_r$ e $\omega = 2,001\omega_r$, que estão de acordo, com altíssima precisão, com os calculados na seção anterior. Sabemos, com base na literatura, que a frequência mais alta corresponde ao modo de *breathing*. Já $\omega = 1,443\omega_r$ corresponde à oscilação em anti-fase de u_x e u_y (modo *quadrupolar bidimensional*).

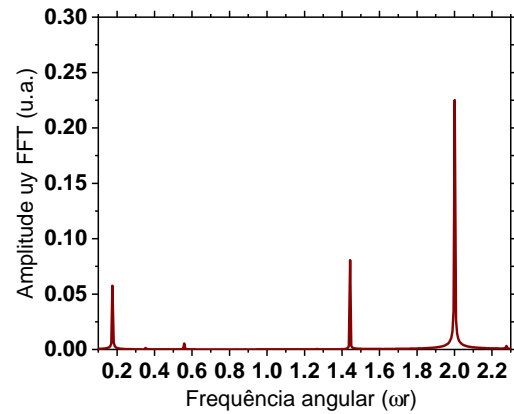
Na Figura 11 temos a evolução das energias parciais durante a oscilação, com as energias de fluxo e de interação dadas pelas expressões mostradas no capítulo anterior (3.24), mas agora incluindo os termos de pressão quântica E_{pq} e de potencial harmônico



(a)



(b)



(c)

Figura 10 – Transformada de Fourier dos sinais de oscilação dos raios. Percebemos que o sinal de u_z é composto por uma frequência majoritária $\omega = 0,176 \omega_r$, que também aparece em u_x e u_y e corresponde ao modo *quadrupolar*. As outras frequências que aparecem são a do modo *quadrupolar* bidimensional, de valor $\omega = 1,443 \omega_r$, e a do modo *breathing*, com $\omega = 2,001 \omega_r$. Percebemos também um pequeno pico em u_x e um em u_y que correspondem aos harmônicos mais altos da frequência quadrupolar, ou seja, $2\omega_q$ e $3\omega_q$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

E_{oh} , mostrados em (4.8).

$$E_{pq} = \frac{6N_a}{7m} \hbar^2 \sum_{j=x,y,z} \frac{1}{R_j^2},$$

$$E_{oh} = \frac{N_a m}{14} \sum_{j=x,y,z} \omega_j^2 R_j^2. \quad (4.8)$$

É importante ressaltar que a energia cinética do sistema é a soma da energia de fluxo com a pressão quântica.

É possível ver que o potencial harmônico e a energia de interação oscilam em anti-fase com as frequências dos modos *quadrupolar* e *breathing*. É compreensível que, sendo baixa a energia de fluxo, a energia de interação e o potencial de confinamento se convertam principalmente um no outro.

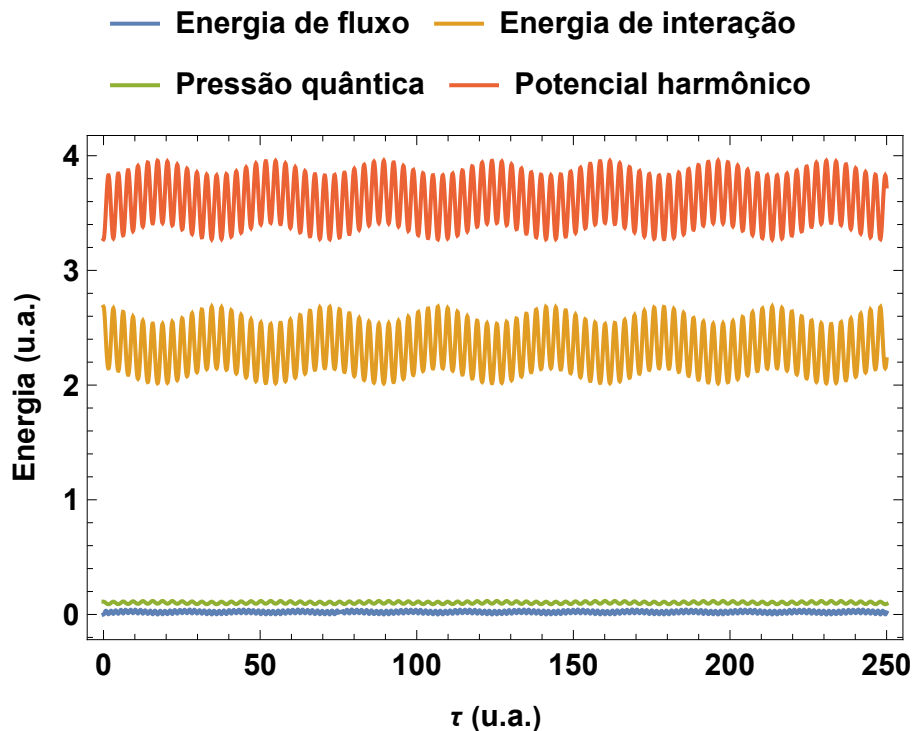


Figura 11 – Evolução das energias parciais durante a oscilação dos raios. Podemos perceber a baixa energia de fluxo, consequência de buscarmos o regime de pequenas oscilações, defasada de $\pi/2$ do potencial harmônico. O potencial harmônico e a energia de interação oscilam em anti-fase, com as frequências do modo *quadrupolar* e do modo *breathing*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nuvem com vórtices

Agora, incluímos P_v novamente nas equações, com o mesmo valor numérico utilizado na seção 4.1, e refazemos o procedimento para estudarmos a influência dos vórtices. Os gráficos das oscilações são mostrados na Figura 12. Observamos, novamente, que a oscilação de u_z parece exibir uma frequência única, e as oscilações de u_x e u_y como combinações de frequências.

Fazendo a Transformada de Fourier dos três sinais, obtemos os gráficos expostos na Figura 13. Uma primeira diferença que podemos notar com relação ao caso sem vórtices, é que, aqui, o modo *quadrupolar* sofreu um deslocamento de aproximadamente 20%, sendo $\omega_q = 0,213 \omega_r$. Tal comportamento foi previsto em nossa aproximação para pequenas oscilações da seção anterior. Além disso, no eixo axial foi possível perceber uma amplitude quase duas vezes maior na Transformada de Fourier dos sinais. Os modos *quadrupolar bidimensional* e *breathing* praticamente não se alteraram, passando para $1,456\omega_r$ e $1,999\omega_r$, respectivamente.

Na Figura 14 vemos a evolução das energias parciais durante a oscilação, agora incluindo o termo de energia dos vórtices:

$$E_{vor} = N_a \frac{\pi \hbar^2 N_v \bar{R}_0^3}{2 m V_0} \ln \left(8\pi \frac{N_a a_s}{N_v \bar{R}_0} \right) \frac{1}{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (4.9)$$

Percebemos, pelo número de vales, que a energia dos vórtices oscila com a frequência do *quadrupolo*, o que mostra uma tendência da vorticidade de reforçar a manifestação desse modo coletivo.

A perturbação do tipo *quench* realizada nessa seção é muito simples, pois trata-se de um pequeno desvio na condição estacionária das equações. A informação da perturbação está completamente contida nos valores iniciais de u_x , u_y e u_z , ou seja, não há influência nas derivadas de ordem maior que zero, que permanecem nulas. Na próxima seção, estudaremos as perturbações oscilatórias, cuja informação estará contida, em nossa modelagem, também nas derivadas temporais dos raios.

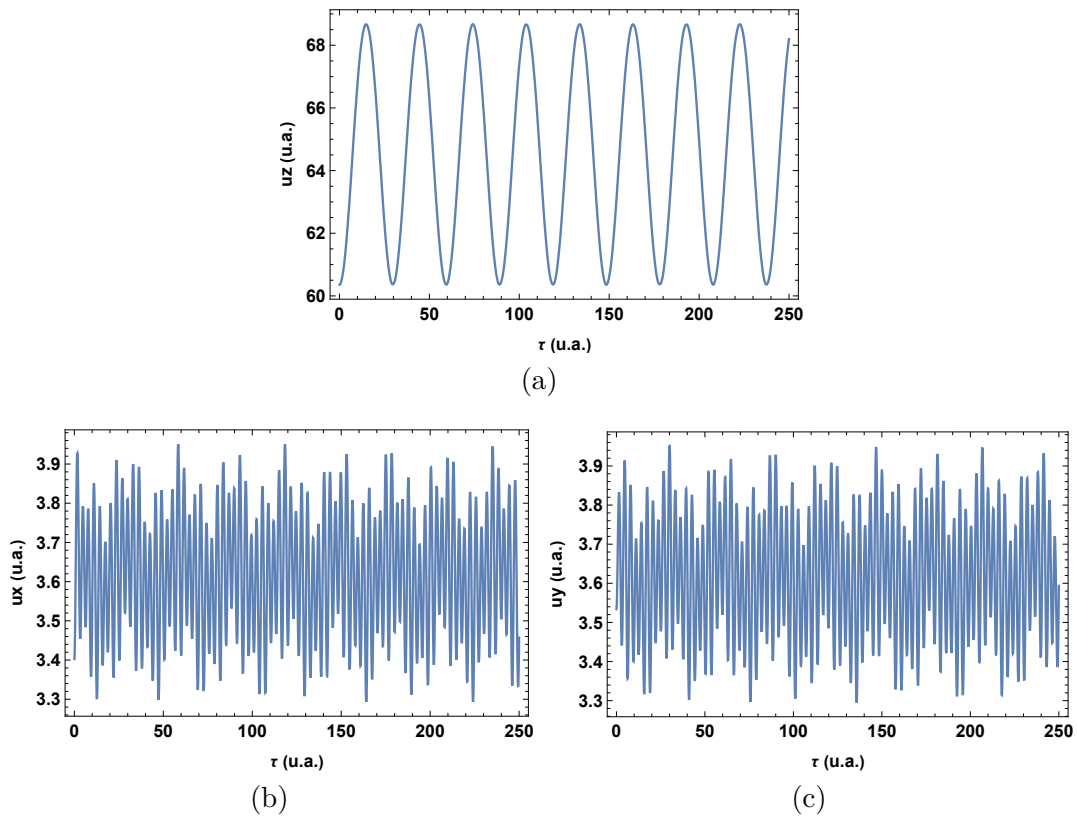
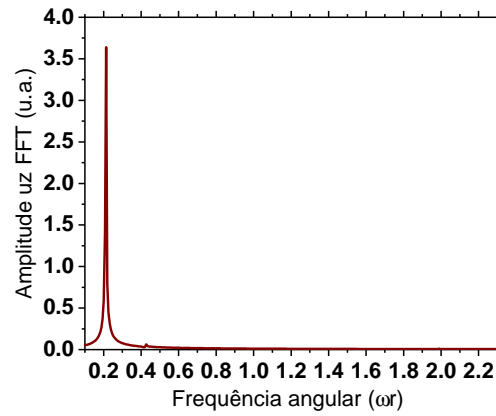
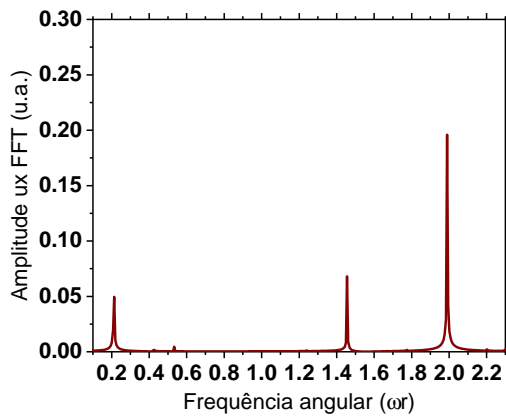


Figura 12 – Oscilação dos raios após uma deformação instantânea na armadilha de confinamento, incluindo o termo de vorticidade. Qualitativamente, além das variações nos raios iniciais já vistas no capítulo 3, percebemos uma oscilação maior de u_z . No restante, os gráficos são muito semelhantes aos estudados no caso sem vórtices.

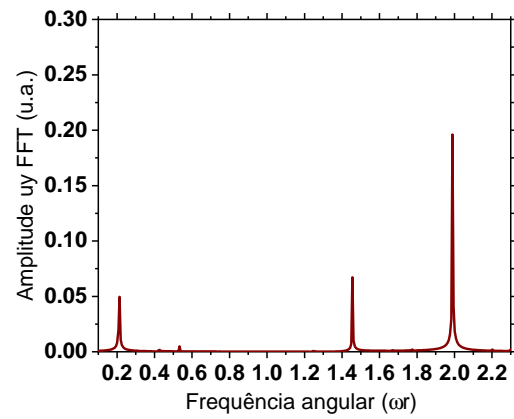
Fonte: Elaborada pelo autor.



(a)



(b)



(c)

Figura 13 – Transformada de Fourier dos sinais de oscilação dos raios. Aqui, incluímos o termo de vorticidade. As frequências de ressonância são: modo *quadrupolar*, $\omega_q = 0,213 \omega_r$, *quadrupolar bidimensional*, $1,456 \omega_r$ e modo *breathing*, $1,999 \omega_r$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

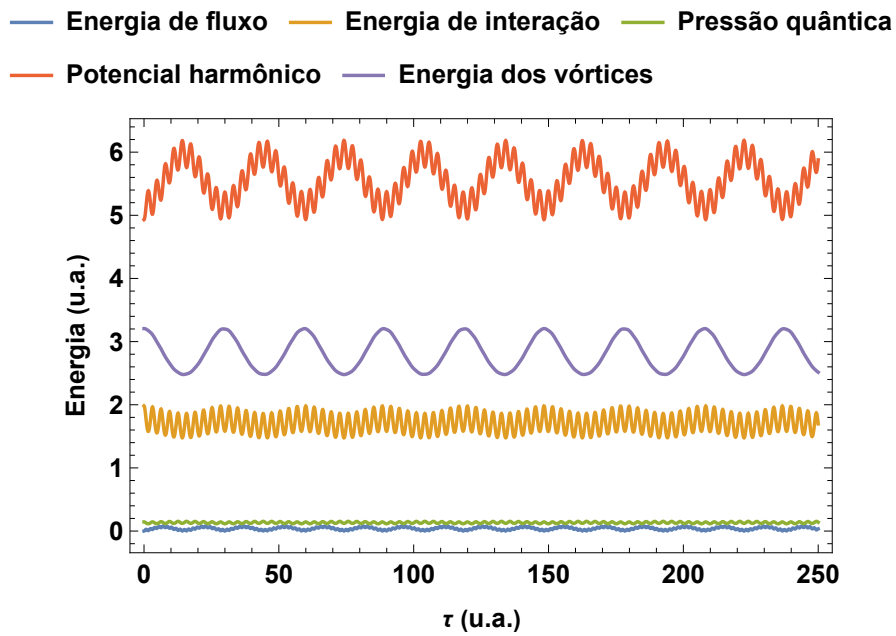


Figura 14 – Evolução das energias parciais durante a oscilação dos raios. Podemos perceber a baixa energia de fluxo, consequência de buscarmos o regime de pequenas oscilações.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4 Pulso senoidal

Agora, estudaremos a evolução temporal dos raios para uma perturbação senoidal no eixo axial. Retornamos às equações (3.21), mas agora incluindo o termo de potencial. A perturbação é expressa como:

$$V_{per}(\tau) = A \Theta(t_{exc} - \tau)(1 - \cos(\Omega\tau))u_z. \quad (4.10)$$

Aqui, A é uma constante para controlar a amplitude, Ω é a frequência da perturbação, t_{exc} é o tempo de excitação do sistema e a função Θ é tal que:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{para } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

A equação perturbada é obtida adicionando-se 4.10 ao termo de potencial nas equações dinâmicas. Ou seja, usamos as equações dinâmicas na forma:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_x &= \frac{12}{u_x^3} + \frac{P_r}{u_x^2 u_y u_z} + \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_x}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - u_x, \\ \ddot{u}_y &= \frac{12}{u_y^3} + \frac{P_r}{u_y^2 u_x u_z} + \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_y}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - u_y, \\ \ddot{u}_z &= \frac{12}{u_z^3} + \frac{P_r}{u_z^2 u_x u_y} + \frac{P_v(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_z}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - \lambda^2 u_z \\ &\quad + \lambda^2 A \Theta(t_{exc} - \tau)(1 - \cos(\Omega\tau))u_z. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.4.1 Nuvem durante a perturbação

Primeiramente, é importante estudar como a nuvem se comporta durante o período da perturbação senoidal. Para isso, simularemos tempos de excitação muito maiores que os usuais em experimentos reais. É importante observar que um grande intervalo de excitação torna esse teste uma idealização, já que, em sistemas experimentais reais, a amostra não teria tempo de vida suficiente para observarmos os efeitos dessa perturbação. Isso se associa ao fato de não conseguirmos fazer as imagens da nuvem *in situ*, ou seja, durante a perturbação, por falta de resolução óptica suficiente. As imagens são realizadas sempre em tempo de expansão (TOF), com o desligamento de todos os potenciais de armadilhamento. Entretanto, tal teste servirá para compreender melhor as particularidades do nosso sistema

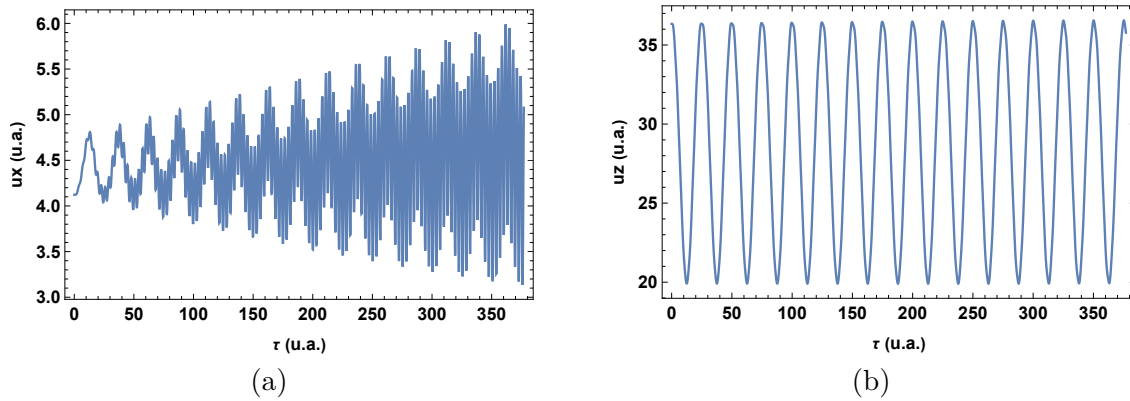


Figura 15 – Oscilação dos raios *durante* uma perturbação senoidal na direção axial, em que o parâmetro de amplitude da perturbação é $A = 1$. Percebemos a presença do modo quadrupolar nos três gráficos, sendo que, em u_x e u_y , aparecem também o modo *breathing* e um modo, bem mais lento, cuja análise exigiria maior tempo de excitação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

com vórtices. Posteriormente retornaremos ao estudo de sistemas experimentalmente realizáveis.

Nuvem sem vórtices

Começando pelo caso sem vórtices, adotando novamente $P_v = 0$, agora na equação (4.12). Escolhendo $A = 1$, $\Omega = 2$ e $t_{exc} = 120 \times 2\pi/\Omega$, obtemos os gráficos mostrados na Figura 15. Parece haver uma única frequência de oscilação em u_z que também aparece, só que em anti-fase e em composição com outras, em u_x e u_y . A frequência externa acaba se confundindo com o *breathing*. Na Figura 15(a), vemos que a energia externa está causando o aumento da amplitude da oscilação do modo *breathing*, enquanto a amplitude do modo quadrupolar é mantida constante. Como nesta seção manteremos a simetria axial do problema, apenas os gráficos de u_x e u_z serão expostos, já que os resultados de u_y são idênticos aos de u_x .

As transformadas de Fourier são mostradas na Figura 16. O modo *breathing*, que aparece nitidamente em 16(a), e como um pequeno pico em 16(b) mantém sua frequência idêntica aos casos anteriormente analisados ($\omega_q = 2,001 \omega_r$). Já o modo quadrupolar sofre um desvio considerável, e passa de $0,176 \omega_r$ para $0,25 \omega_r$. É possível perceber alguns outros pequenos picos, sendo que em ambos os casos observamos o segundo harmônico do modo quadrupolar, e em 16(a) também está visível o terceiro harmônico.

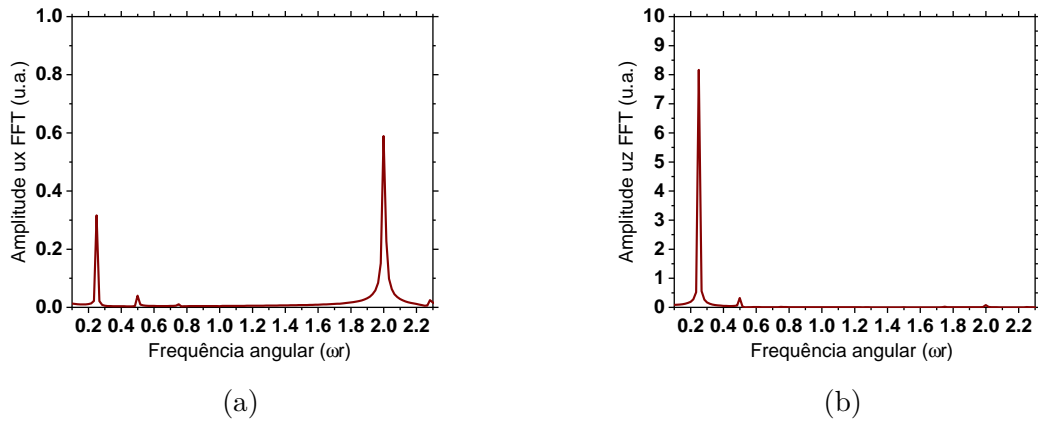


Figura 16 – Transformadas de Fourier das oscilações dos raios durante uma perturbação senoidal, com $A = 1$. Percebemos, em u_x , o modo quadrupolar $\omega_q = 0,25 \omega_r$, também percebido em u_z e o modo breathing, $\omega_b = 2,001 \omega_r$. O modo breathing é o mesmo visto na seção anterior, mas o modo quadrupolar sofreu um considerável deslocamento. Também observamos, em (a), pequenos picos correspondentes ao segundo e ao terceiro harmônico do modo quadrupolar, enquanto em (b) apenas o segundo harmônico é visível.

Fonte: Elaborada pelo autor.

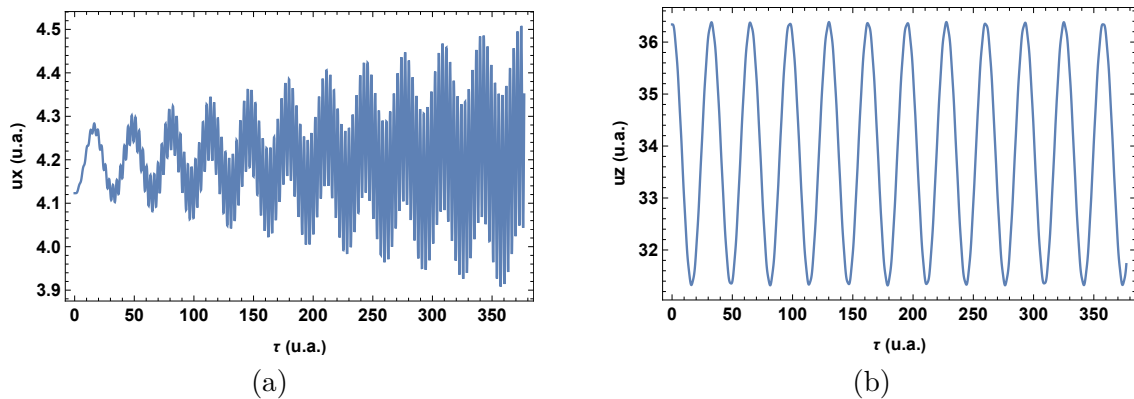


Figura 17 – Oscilação dos raios *durante* uma perturbação senoidal na direção radial. Aqui, $A = 0,2$. Qualitativamente, o resultado é idêntico ao caso anterior, havendo apenas redução nas amplitudes de oscilação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, faremos a mesma análise alterando o parâmetro de intensidade da perturbação para $A = 0,2$. A oscilação dos raios é mostrada na Figura 17, e percebemos um resultado qualitativamente idêntico ao anterior, com a diferença de que há menor amplitude nas oscilações.

As transformadas de Fourier, na Figura 18, nos mostram que, nesse caso, o deslocamento do modo quadrupolar em relação ao caso sem perturbação é menor: agora

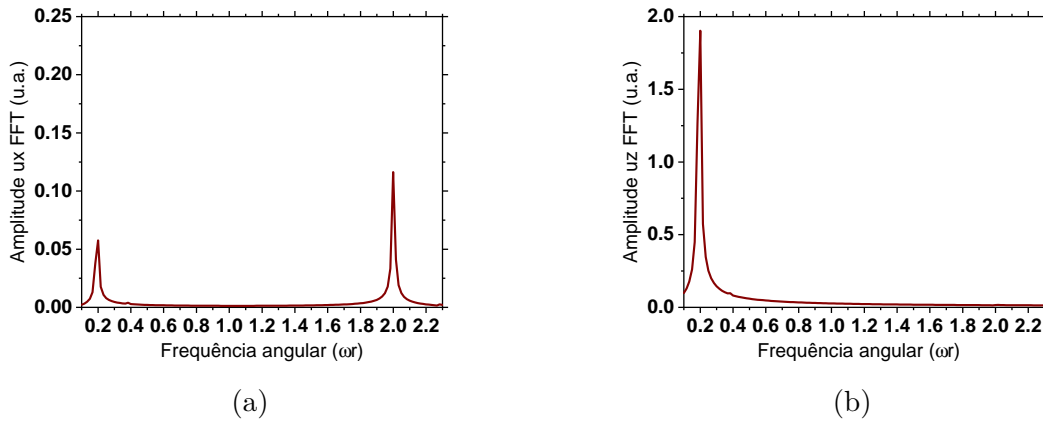


Figura 18 – Transformadas de Fourier das oscilações dos raios durante uma perturbação senoidal, agora para $A = 0, 2$. Novamente, vemos os modos *breathing* e quadrupolar, sendo que este último sofre um desvio em relação ao seu valor fora da perturbação e passa a ser de $\omega_q = 0, 20 \omega_r$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$\omega_q = 0, 20 \omega_r$. Nossos resultados indicam uma relação crescente entre a amplitude da perturbação senoidal e a frequência do modo quadrupolar. Por fim, vimos o desaparecimento dos picos adicionais (segundo e terceiro harmônico) observados no caso anterior ($A = 1$).

A Figura 19 nos mostra a evolução das energias parciais da nuvem durante a perturbação. Observamos que as energias oscilam em torno de um valor médio. Há uma importante oscilação dos termos em separado do potencial harmônico e da energia de interação. Aparentemente, a amplitude do modo *breathing* aumenta, devido a injeção de energia no sistema. A modulação do sinal (modo quadrupolo) permanece com a mesma amplitude.

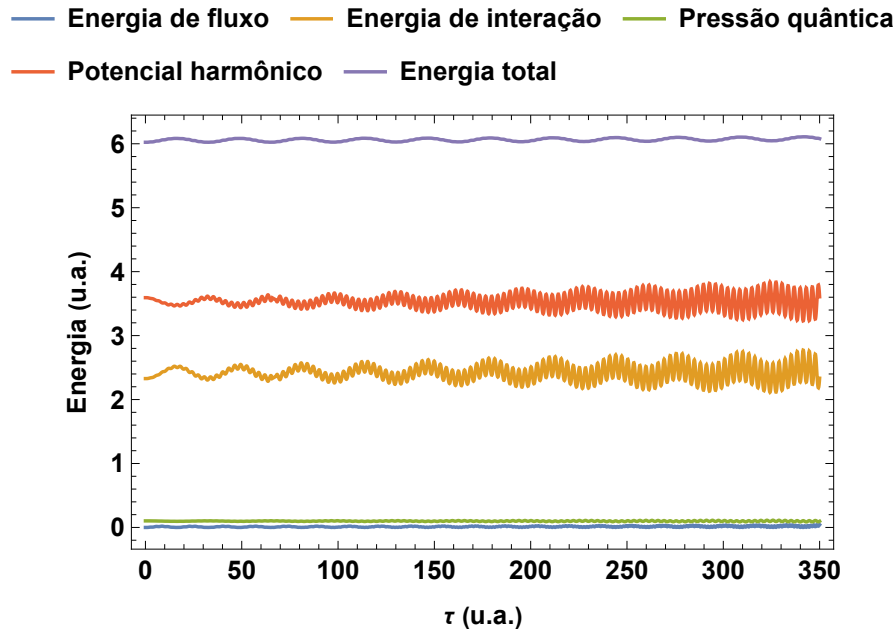


Figura 19 – Evolução das energias parciais durante a perturbação da nuvem. Observamos que as energias oscilam em torno de um valor médio. Há uma importante oscilação dos termos em separado do potencial harmônico e da energia de interação. Aparentemente, a amplitude do modo *breathing* aumenta, devido a injeção de energia no sistema. A modulação do sinal (modo quadrupolo) permanece com a mesma amplitude.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nuvem com vórtices

Retornamos às equações (4.12), agora para analisarmos a dinâmica da nuvem com vórtices durante a perturbação senoidal. Retornamos com o termo P_v , mostrado na Tabela (1), e calculamos as evoluções temporais dos raios. A evolução dos raios é mostrada na Figura 20. Em u_x , há ainda o modo de *breathing* e, novamente, um modo mais lento que provavelmente está relacionado com o *input* de energia da perturbação externa.

A Figura 21 contém as transformadas de Fourier dos sinais da figura anterior. Ela nos mostra que a magnitude do modo quadrupolar em u_z é muito maior que no caso sem vórtices. Observamos novamente a presença do modo quadrupolar, além de um pequeno pico do modo *breathing*. A frequência do modo quadrupolar sofre um desvio em relação ao caso da nuvem com vórtices após a perturbação. Aqui, ela é de $\omega_q = 0,234 \omega_r$. Não houve desvio em relação aos outros modos.

É importante observar que, em termos das frequências de ressonância, a perturbação traz para a nuvem um resultado qualitativamente parecido com o que faz a vorticidade e,

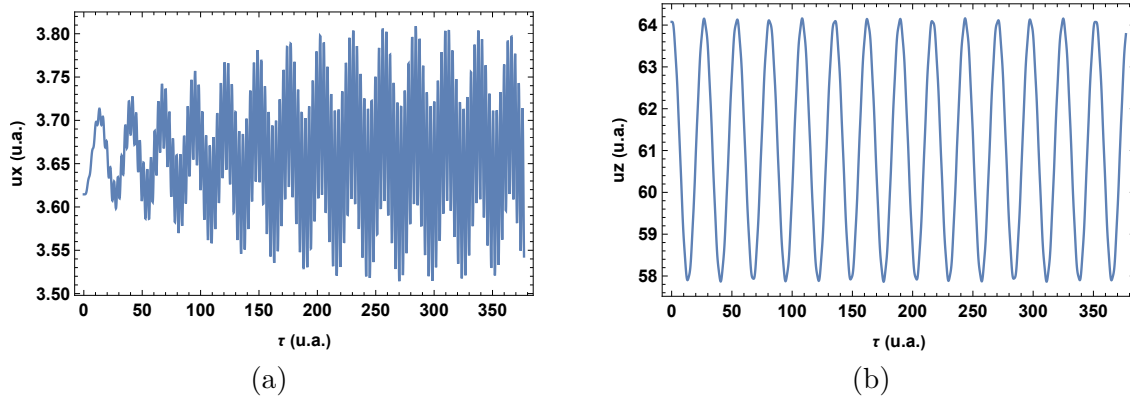


Figura 20 – Oscilação dos raios durante perturbação senoidal, com $A = 0,2$. Percebemos o modo quadrupolar nos dois gráficos, sendo que ele aparece puro em u_z . Em u_x , vemos ainda o modo de breathing e um outro modo mais lento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

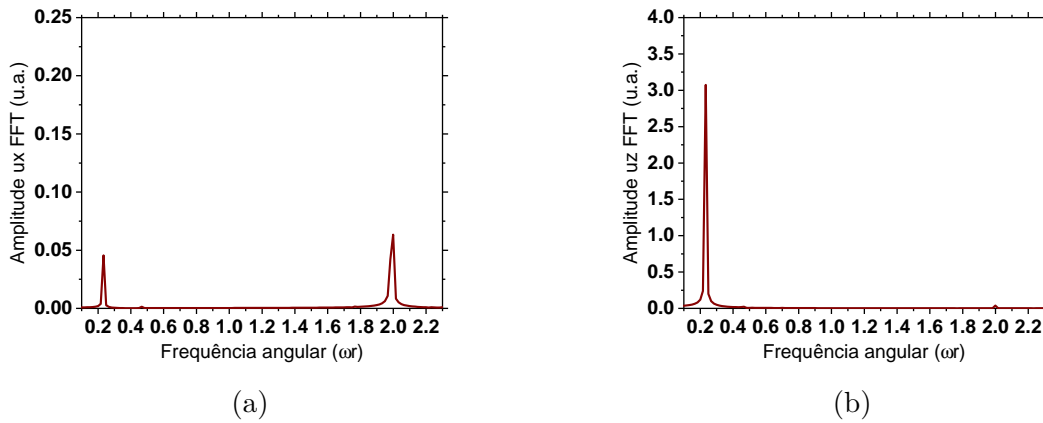


Figura 21 – A transformada de Fourier nos mostra a ampliação da magnitude do modo quadrupolar na nuvem com vórtices, e a diminuição do modo de *breathing*. Além disso, em relação à nuvem com vórtices fora da perturbação, percebemos uma mudança de $0,22 \omega_r$ para $0,234 \omega_r$ de sua frequência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

no caso da nuvem com vórtices, a perturbação acentua esse efeito. A Figura 22 mostra a evolução das energias parciais durante a perturbação. Vemos que, no caso da nuvem com vórtices, a transferência de energia da perturbação externa para o modo breathing reduziu drasticamente. Isso pode ser notado pelo contraste dos gráficos da evolução das larguras radiais (Figuras 17 e 20), assim como das amplitudes breathing da oscilação das energias potencial e interação, conforme as Figuras 19 e 22.

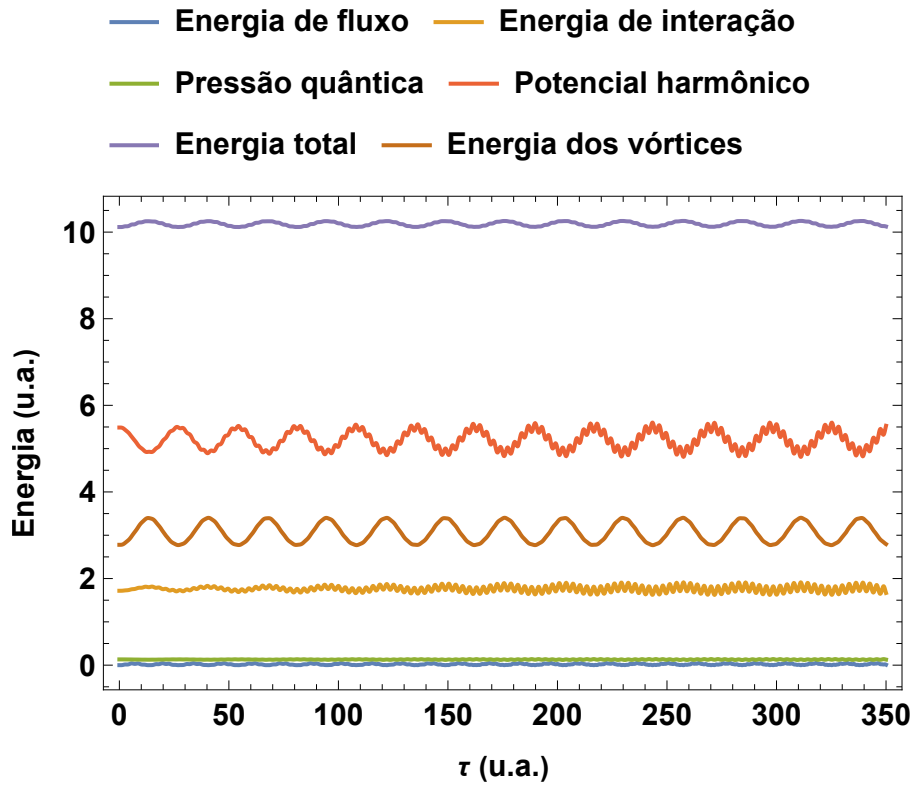


Figura 22 – Evolução das energias parciais durante perturbação senoidal no eixo axial.
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4.2 Nuvem após a perturbação

Retornamos agora à simulação de sistemas experimentais. Para tal, faremos a perturbação oscilar por 12 ciclos completos, ou seja, $t_{exc} = 12 \times 2\pi/\Omega$, e mantemos $\Omega = 2$. Ajustamos o fator $A = 0,2$ nas equações (4.12), e estudamos o comportamento do sistema a partir de t_{exc} .

Nuvem sem vórtices

Na Figura 23 podemos ver claramente a presença de uma frequência de oscilação de u_z , ao passo que u_x e u_y oscilam em uma combinação de duas frequências, uma mais rápida e outra mais lenta. Aplicamos a transformada de Fourier, e o resultado obtido explicita os modos coletivos observados. Vemos o modo quadrupolar, com $\omega_q = 0,176 \omega_r$, tanto em u_x quanto em u_z . Em u_x vemos também o modo *breathing*, com $\omega_b = 2,001 \omega_r$. Os gráficos das transformadas de Fourier são apresentados na Figura 24, e as evoluções das energias parciais aparecem na Figura 25.

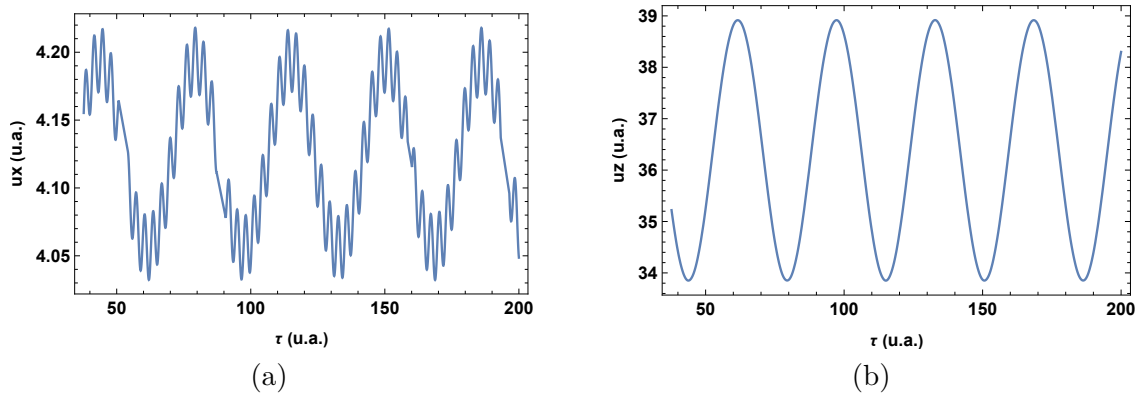


Figura 23 – Oscilação dos raios da nuvem sem vórtices após uma perturbação senoidal no eixo z . Vemos que há uma frequência de oscilação em u_z que também aparece, embora em anti-fase, em u_x e u_y . A esse modo coletivo se dá o nome modo *quadrupolar*. Ainda há, em u_x e u_y , uma outra frequência de oscilação, essa mais rápida e em fase nas duas dimensões. Concluímos ser o modo *breathing*, que é a oscilação em fase nas três dimensões, embora a perturbação utilizada não tenha sido capaz de excitar esse modo de oscilação em u_z .

Fonte: Elaborada pelo autor.

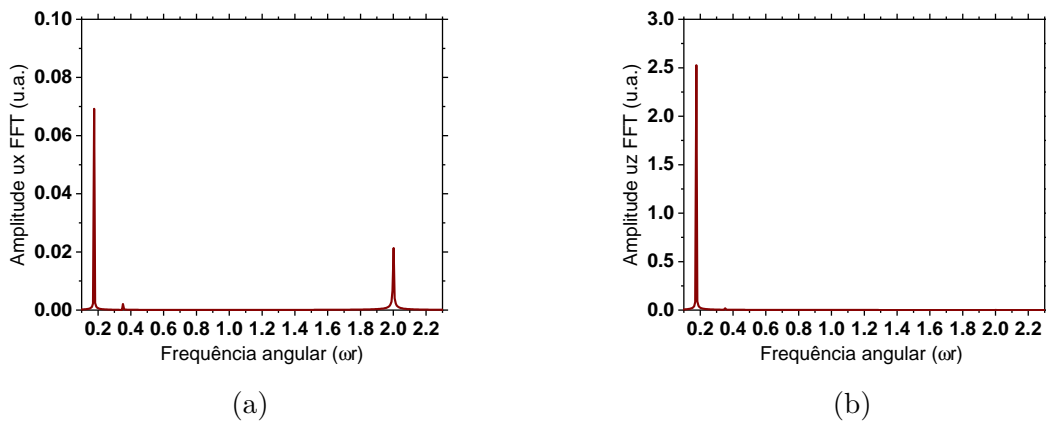


Figura 24 – Amplitude da Transformada de Fourier dos raios durante a oscilação, explicitando as frequências de ressonância. Vemos, em u_x , que existe um modo coletivo mais intenso por volta de $\omega = 2,001 \omega_r$, e outro mais fraco por volta de $\omega = 0,176 \omega_r$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

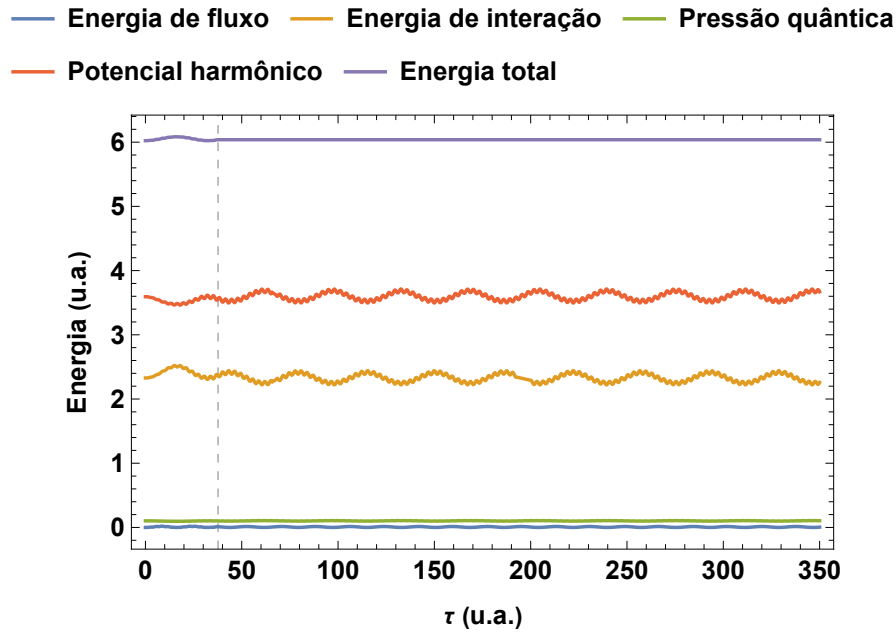


Figura 25 – Evolução das energias parciais da nuvem sem vórtices que oscila durante e após uma perturbação senoidal em z . A barra tracejada foi colocada no instante em que cessa a perturbação.

Fonte: Elaborada pelo autor.

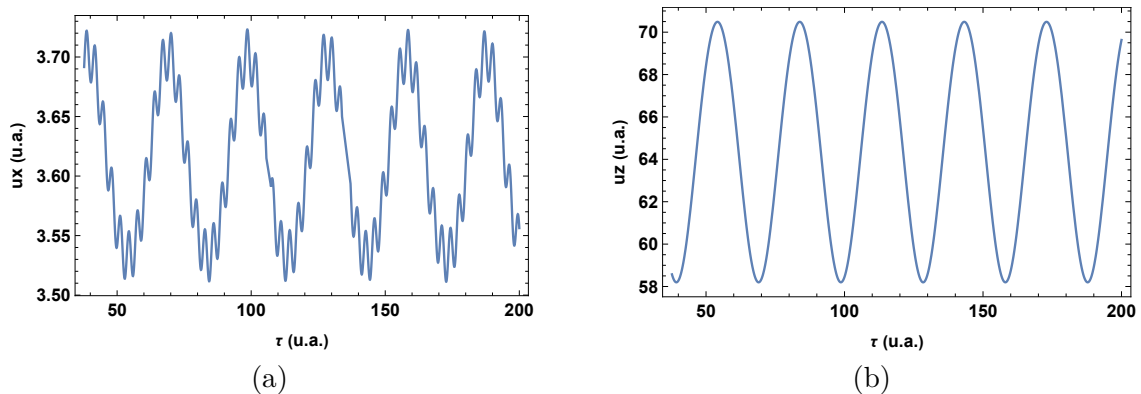


Figura 26 – Oscilação dos raios da nuvem com vórtices, após uma perturbação senoidal em z com $A = 0, 2$. Percebemos o modo quadrupolar em ambos os gráficos, ao passo que o modo *breathing* apenas se manifesta em u_x .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nuvem com vórtices

A dinâmica dos raios da nuvem com vórtices, e sua transformada de Fourier, são mostradas nas Figuras 26 e (27).

As frequências de oscilação que vemos aqui correspondem aos valores calculados na seção anterior. É possível ver o modo quadrupolar nas três dimensões, com frequência $\omega_q = 0, 213\omega_r$. Esse é o modo da oscilação em anti-fase de u_z com $u_\rho = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$, o que

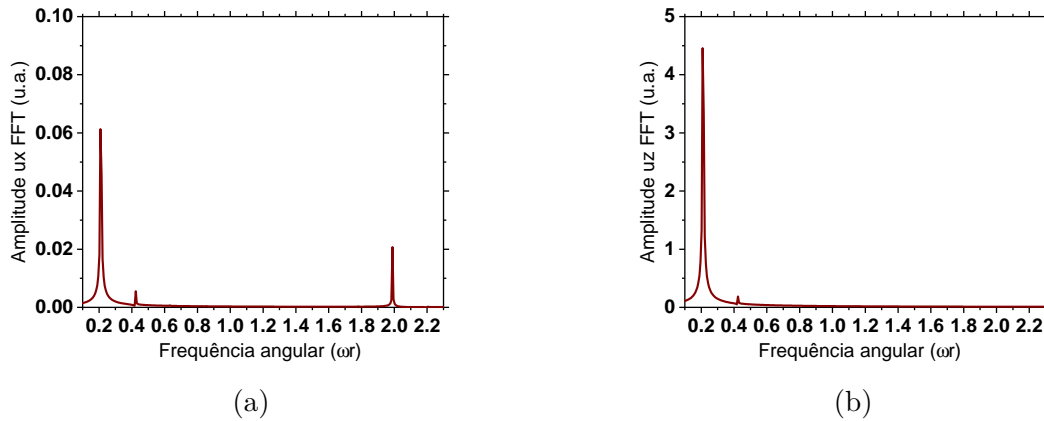


Figura 27 – Amplitude da Transformada de Fourier dos raios durante a oscilação, explicitando as frequências de ressonância, no caso da nuvem com vórtices. Vemos o modo quadrupolar presente em ambos os gráficos, com $\omega_q = 0,213\omega_r$, e o modo *breathing*, apenas percebido em u_x , de $\omega_b = 1,999\omega_r$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

é possível ver comparando as oscilações de u_z com as de u_x e u_y na Figura 23. A outra frequência observada, mais rápida, mas vista apenas em u_x e u_y , é do modo de *breathing*, $\omega_b = 1,999\omega_r$. Quando esse modo é excitado em todas as dimensões, é possível perceber que ele se trata da oscilação em fase dos três raios. Para a perturbação aqui modelada, ele não pôde ser facilmente visto em u_z .

A Figura 28 nos mostra a dinâmica das energias parciais do condensado durante e após o desligamento da excitação senoidal.

Quando comparamos as figuras 24 e 27 com as figuras 10 e 13, percebemos que, no caso da perturbação senoidal no eixo axial, há uma supressão do modo *breathing*. Isso é facilmente observado pela redução da magnitude relativa desse modo, ou seja, seu tamanho em relação ao modo *quadrupolar*. Muito provavelmente, isso se deve ao fato de a perturbação senoidal ser direcional (no eixo axial), dificultando que o modo *breathing* mais visível no eixo radial, seja excitado.

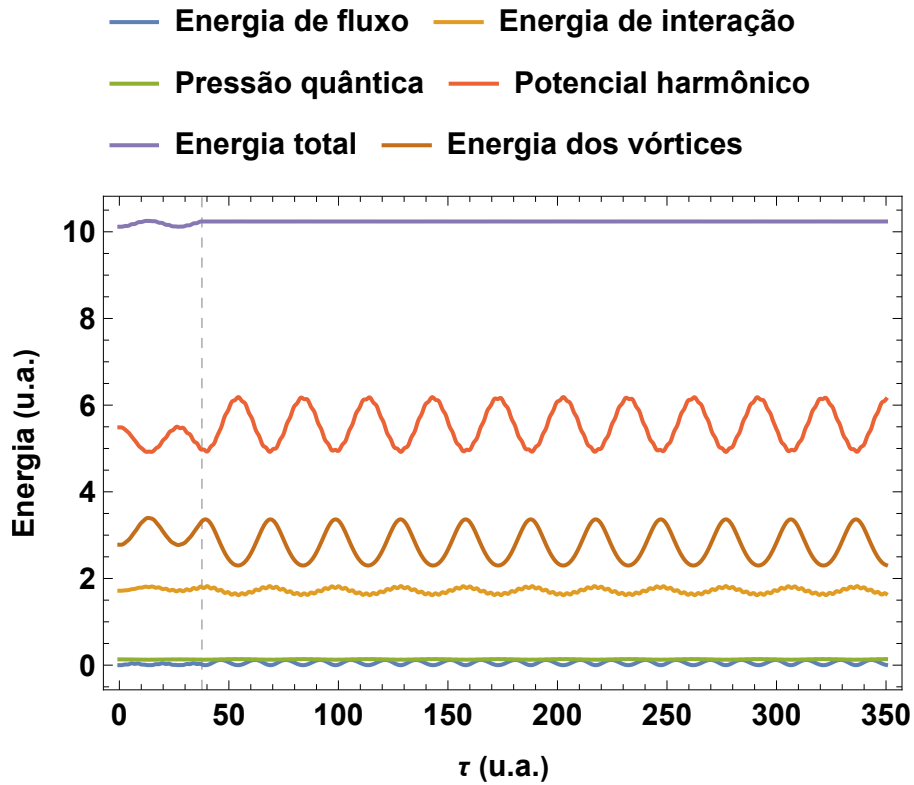


Figura 28 – Energias parciais durante a oscilação dos raios após uma perturbação senoidal em R_z .

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5 Perturbação do Comprimento de Espalhamento

Agora, faremos uma perturbação de outra natureza. Enquanto a primeira perturbação que tratamos envolvia alterar a armadilha de confinamento, e a segunda envolvia fazer incidir um pulso direcional na amostra, agora oscilaremos o comprimento de espalhamento. Faremos com que ele obedeça a função:

$$a_s(\tau) = a_{s0} \left(1 - \Theta(t_{exc} - \tau) \frac{\text{sen}(\Omega\tau)}{4} \right) \quad (4.13)$$

Ajustamos o tempo de perturbação para $t_{exc} = 3 \times \frac{2\pi}{\Omega}$ e escolhemos $\Omega = 2.0$. As equações que governam o sistema agora aparecem na forma:

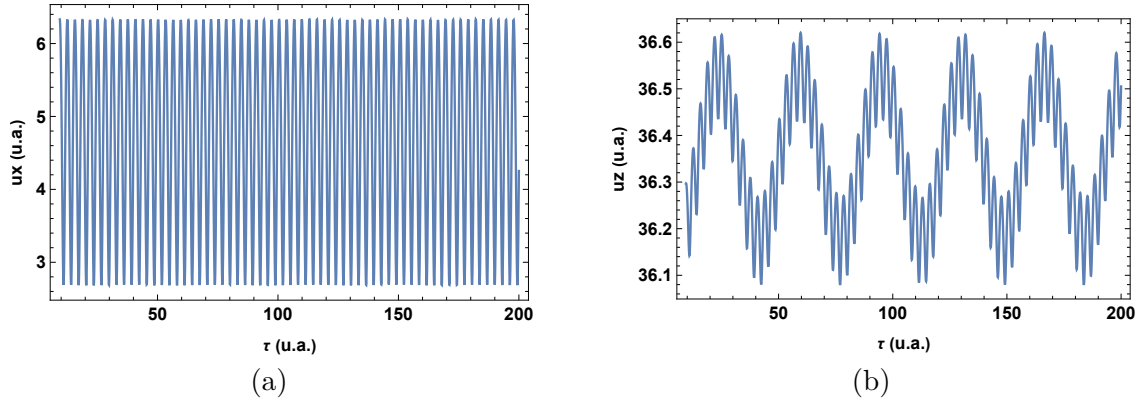


Figura 29 – Oscilação dos raios após a nuvem (sem vórtices) passar por 3 ciclos completos de uma perturbação senoidal no comprimento de espalhamento. O modo *breathing* é nítido em u_x e, embora menos intenso, em u_z . Neste, é mais explícito o modo *quadrupolar*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned}
 \ddot{u}_x &= \frac{12}{u_x^3} + \frac{P_r(\tau)}{u_x^2 u_y u_z} + \frac{P_v(\tau)(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_x}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - u_x \\
 \ddot{u}_y &= \frac{12}{u_y^3} + \frac{P_r(\tau)}{u_y^2 u_x u_z} + \frac{P_v(\tau)(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_y}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - u_y \\
 \ddot{u}_z &= \frac{12}{u_z^3} + \frac{P_r(\tau)}{u_z^2 u_x u_y} + \frac{P_v(\tau)(u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2)}{u_{x0} u_{y0} u_{z0}} \frac{u_z}{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^2} - \lambda^2 u_z,
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde explicitamos as dependências temporais dos termos de interação e vorticidade.

Nuvem sem vórtices

Fazendo $P_v(\tau) = 0$ em (4.14) e resolvendo numericamente as equações para os raios, obtemos os gráficos da Figura 29.

Faço notar que, sendo a perturbação isotrópica, ela não altera a simetria axial do sistema. Assim sendo, os gráficos de u_x e u_y serão sempre idênticos. Observamos que u_x oscila com a frequência já conhecida do modo *breathing*, $\omega_b = 2.00 \omega_r$. A novidade agora é a maior evidência de tal modo também nas oscilações de u_z , que, além disso, são moduladas pelo também já conhecido modo *quadrupolar*, $\omega_q = 0.176 \omega_r$. Esses valores para as frequências são explicitados pelas transformadas de Fourier da Figura 30.

A evolução das energias parciais, na Figura 31, deixa clara a injeção de energia que a perturbação do comprimento de espalhamento faz no sistema. Percebemos também como a excitação, além de fazer a energia de interação oscilar com maior amplitude, faz

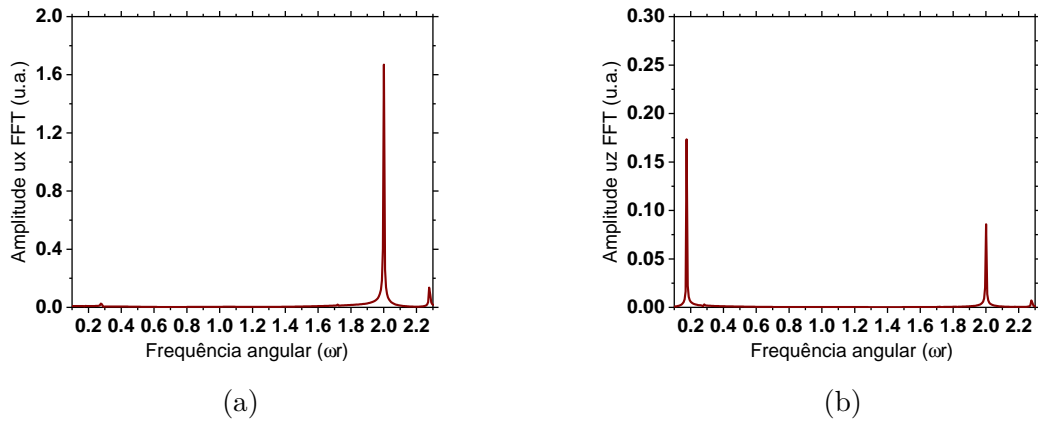


Figura 30 – Transformada de Fourier dos sinais. Vemos o modo *breathing* se manifestar em u_z com magnitude na mesma ordem de grandeza do modo *quadrupolar*. As frequências são $\omega_q = 0.176 \omega_r$ e $\omega_b = 2.00 \omega_r$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

com que se manifeste a energia de fluxo e a pressão quântica.

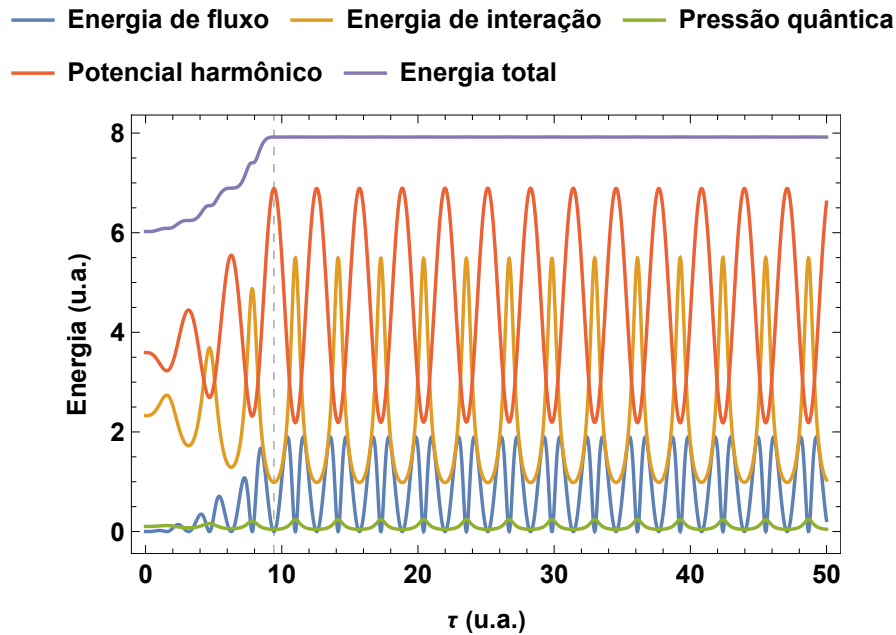


Figura 31 – Evolução das energias parciais da nuvem sem vórtices após passar por uma perturbação senoidal do comprimento de espalhamento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nuvem com vórtices

Agora, estudaremos o sistema com a mesma variação do comprimento de espalhamento, mas para o caso da nuvem com vórtices. Restauramos o termo $P_v(\tau)$ nas equações (4.14), e calculamos numericamente a evolução dos raios:

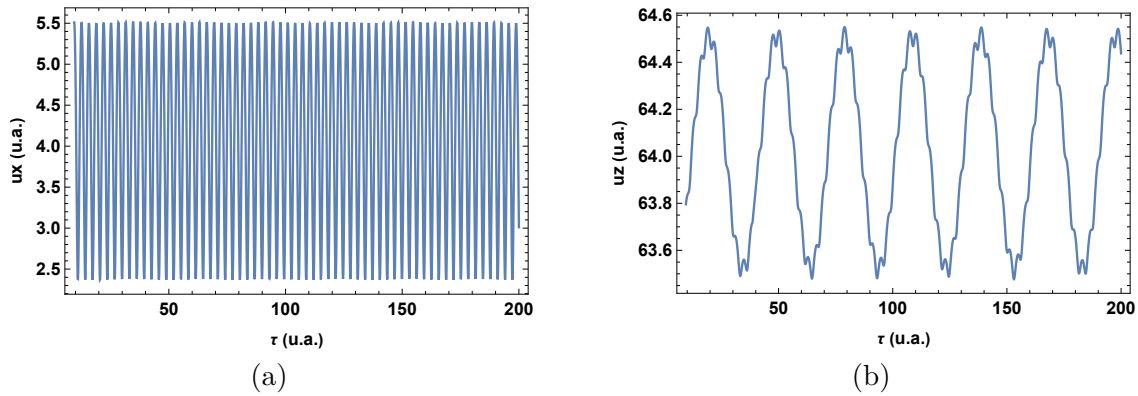


Figura 32 – Na nuvem com vórtices após perturbação do comprimento de espalhamento também percebemos os modos *quadrupolar* e *breathing*, sendo o primeiro mais nítido em u_z e o segundo mais nítido em u_x .

Fonte: Elaborada pelo autor.

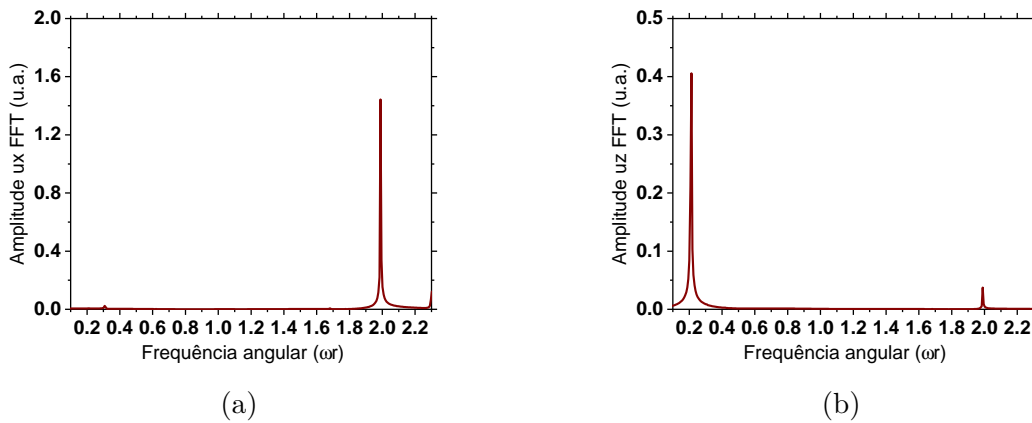


Figura 33 – Transformadas de Fourier das oscilações dos raios após perturbação do comprimento de espalhamento, no caso da nuvem com vórtices. Vemos o aumento da magnitude do modo *quadrupolar* em relação à nuvem sem vórtices, ao passo que o modo de *breathing* sofre uma ligeira redução. As frequências são $\omega_q = 0,213\omega_r$ e $\omega_b = 1.999\omega_r$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As transformadas de Fourier são mostradas na Figura 33. Elas evidenciam o já previsto deslocamento de frequência do modo *quadrupolar*, que passa a ser de $\omega_q = 0,213\omega_r$. É possível observar também uma ampliação na magnitude desse modo, e uma ligeira redução no modo *breathing* em u_z .

Abaixo, por fim, vemos a evolução das energias parciais no caso da nuvem com vórtices. É notável que a energia dos vórtices apresenta oscilações de pequeníssimas amplitudes, quando comparamos aos casos das perturbações anteriores, vistos nas Figuras 14 e 28.

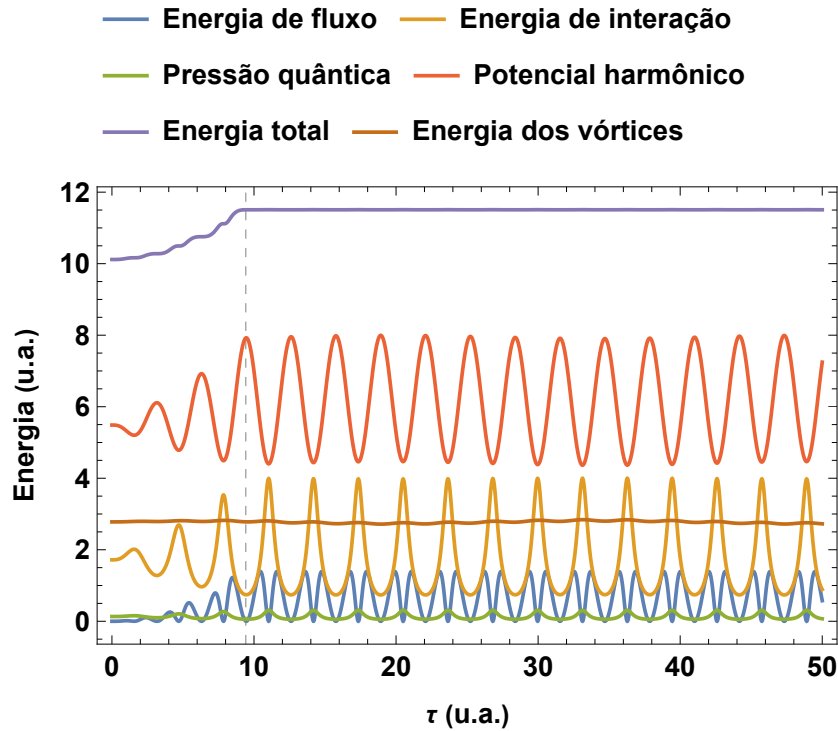


Figura 34 – Evolução das energias parciais no caso da nuvem com vórtices após perturbação do comprimento de espalhamento. Vemos o quão pouco a energia dos vórtices oscila, em comparação com as perturbações anteriores.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6 Discussão

O comportamento da nuvem diante das diferentes perturbações realizadas e a comparação entre os casos da nuvem sem e com vórtices nos fornecem importantes elementos para compreendermos o que de fato afeta a dinâmica de oscilações da nuvem condensada.

Primeiramente, devemos tratar das simetrias do sistema. É sabido que um sistema condensado confinado em potencial harmônico apenas oscilará com uma combinação de suas frequências de ressonância. Nossa aproximação para pequenas oscilações, vista na seção 4.1, nos mostra que, no caso da nuvem sem vórtices, as frequências de ressonância são $0,176 \omega_r$, $1,443 \omega_r$ e $2,001 \omega_r$, sendo possível identificar tais frequências, respectivamente, com os modos *quadrupolar*, *quadrupolar bidimensional* e *breathing*.

Na seção 4.3, percebemos que mesmo uma pequena assimetria entre u_x e u_y nas condições iniciais foi capaz de excitar, de maneira significativa, o modo *quadrupolar bidi-*

mensional. Já no que concerne ao modo *breathing*, sendo um tipo de oscilação isotrópica, apenas foi percebido de maneira relativamente significativa em u_z quando utilizamos o recurso da oscilação do comprimento de espalhamento, que é uma perturbação completamente simétrica. Assim, podemos interpretar que, ao passo que as assimetrias estimulam os modos *quadrupolares*, as perturbações isotrópicas favorecem o modo *breathing*.

Agora olharemos para as nuvens com vórtices. Em todos os casos, foi possível perceber que as frequências de oscilação, identificadas como modos *quadrupolar*, *quadrupolar bidimensional* e *breathing* foram, respectivamente, $0,213 \omega_r$, $1,456 \omega_r$ e $1,999 \omega_r$. Assim, observamos um aumento da frequência dos modos *quadrupolares*, sendo mais significativo o aumento da frequência do quadrupolo tridimensional, de aproximadamente 20%.

O efeito de variar a frequência do modo quadrupolar também foi percebido na nuvem *durante* uma perturbação senoidal no eixo axial, tanto para a nuvem sem vórtices quanto para a nuvem turbulenta. É como se tanto os vórtices quanto a perturbação senoidal aumentassem a rigidez da nuvem, o que exigiria maior energia para que ela vibrasse com os eixos axial e radial em anti-fase. Não houve variação da frequência do modo *breathing* nesses casos. Ou seja, o mecanismo que tornou a nuvem mais rígida a ponto de afetar a frequência da oscilação quadrupolar não causa alterações no modo *breathing*.

Houve também o aumento da *magnitude* do modo *quadrupolar*, o que é razoável pensando que, sendo maior a força de confinamento a que estão sujeitos os átomos condensados, maior será a amplitude de suas oscilações diante de uma perturbação externa, e a maior assimetria da nuvem causada pela presença de vórtices torna maior essa força de confinamento. Entretanto, não houve alteração significativa da magnitude dos outros modos.

Importante observar também que, comparando a perturbação de tipo *quench* com a perturbação senoidal no eixo axial, percebemos que na segunda há uma supressão do modo *breathing*. Acreditamos que isso se deve ao fato de a perturbação senoidal ser no eixo axial, ao passo que o modo *breathing* se manifesta de maneira mais evidente quando há perturbação na direção radial. Dessa forma, entendemos que, em sistemas experimentais, a perturbação *quench* é a mais eficaz para a observação do modo *breathing*.

Para explicarmos a diferença de comportamento dos modos coletivos para uma nuvem com vórtices enovelados, é essencial pensarmos no efeito da densidade da nuvem sobre sua rigidez. O modo *breathing*, por se tratar de um tipo de oscilação isotrópica, causa uma significativa redução da densidade nuvem quando está em sua máxima amplitude. Dessa forma, o aumento de rigidez causado pela vorticidade é "compensado" pela redução da densidade, o que faz com que a quantidade de energia necessária para excitar tal modo não se altere significativamente. Já o modo quadrupolar, por se tratar de uma oscilação em anti-fase, não tem variação de densidade tão acentuada, de forma que o aumento da rigidez da nuvem devido à vorticidade não é balanceada por nenhum outro efeito.

É também essencial pensarmos na minimização de energia. A configuração mais estável do sistema, aquela que reduz a sua energia, é a que apresenta um alinhamento efetivo das linhas de vórtice na direção radial. Isso ocorre porque uma orientação nessa direção faz com que a linha de vórtices seja menor, o que faz a energia dessa configuração de vórtice também ser menor, já que a energia do vórtice depende do comprimento da linha. (35) O alinhamento radial das linhas de vórtice produz um campo de velocidades (perpendicular a direção das linhas) que tende a afetar preferencialmente a direção axial. Esse campo se apresenta como um termo centrífugo que aumenta o raio da nuvem na direção axial, conforme já havia sido observado nos nosso modelo inicial da expansão anômala.

5 CONCLUSÃO

Motivados pelas observações experimentais pioneiras da turbulência quântica em gases atômicos ultrafrios, (29) nossos recentes estudos visaram ampliar nosso entendimento sobre a dinâmica de BECs turbulentos.

No que diz respeito à livre expansão de nuvens condensadas, utilizamos um modelo que explica a expansão anômala, auto-similar, de BECs turbulentos. Nosso modelo, extraído de (31) e aprimorado em alguns detalhes, reproduziu com sucesso os resultados experimentais anteriormente obtidos.(32) Argumentamos que isso se dá basicamente por dois motivos: em uma nuvem com vórtices, há uma redução da energia de interação por conta de redução de densidade da nuvem, já que há vazios de densidade nas linhas de vórtices, e o outro motivo é que há a contribuição energética dos vórtices devido ao campo de velocidade.

Mostramos também a importância de acrescentar, ao modelo anteriormente mencionado, o termo correspondente à pressão quântica, já que ele é maior para nuvens com maior gradiente de densidade, como é o caso da nuvem turbulenta que modelamos. Ademais, esse termo tende a zero muito rapidamente em uma nuvem que se expande livremente, mas permanece relevante em uma nuvem que permanece confinada, como nos casos que estudamos no capítulo 4.

Nossa aproximação para pequenas oscilações, vista na seção 4.1, nos mostra um modo coletivo novo, que é a oscilação em anti-fase do condensado nos eixos perpendiculares ao eixo axial. Esse modo, que chamamos aqui de *quadrupolo bidimensional*, mostra valores muito próximos no caso da nuvem ordinária e no da nuvem turbulenta, a saber: $\omega = 1,443\omega_r$ na primeira e $\omega = 1,456\omega_r$ na segunda.

Na seção 4.3, nós mostramos que uma pequena alteração no potencial harmônico, causando uma pequena assimetria inicial entre u_x e u_y foi capaz de excitar o *quadrupolo bidimensional*. Além disso, o modo *quadrupolar* em três dimensões também foi sempre facilmente excitado. O modo *breathing*, por sua vez, em muitos casos foi imperceptível

ou quase imperceptível em u_z . Sobre esse modo, nós vimos que, por ser um modo de oscilação isotrópico, ele foi favorecido pela perturbação no comprimento de espalhamento atômico, que é uma perturbação completamente simétrica. Concluímos que as assimetrias favorecem, em termos de magnitude, os modos *quadrupolares*, enquanto as perturbações isotrópicas favorecem o modo *breathing*.

A comparação completa dos modos coletivos entre o sistema sem vórtices e a nuvem turbulenta nos fornece os seguintes resultados: na nuvem ordinária, os modos *quadrupolar*, *quadrupolar bidimensional* e de *breathing* apresentam as frequências $0,176$, $1,443\omega_r$ e $2,001\omega_r$, respectivamente. Na nuvem turbulenta, esses mesmos modos apresentam os valores $0,213$, $1,456\omega_r$ e $1,999\omega_r$. Percebemos que o único deslocamento significativo de frequência ocorreu no modo *quadrupolar*. Nele, a variação foi de aproximadamente 20%. Explicamos tal comportamento pelos princípios: a tendência da linha de vórtices se alinhar no eixo radial, já que, orientada nessa direção, a linha de vórtices será menor, o que minimiza a energia do sistema e o torna mais estável. Assim, o momento angular é alinhado preferencialmente no eixo axial, e a assimetria da nuvem é acentuada (e a assimetria favorece o modo quadrupolar), e isso, além de explicar o aumento da magnitude desse modo na nuvem turbulenta, aumenta a rigidez da nuvem nessa direção, o que exige maior energia para que o modo quadrupolar seja excitado e aumenta, dessa forma, a frequência de oscilação.

Sobre as perturbações externas aplicadas em nosso sistema, mostramos como a magnitude das oscilações *quadrupolares* é favorecida pelas assimetrias do sistema, e que o modo *quadrupolar* é mais evidente após perturbações senoidais, ao passo que o modo *breathing* se manifesta mais fortemente em perturbação do tipo *quench*. Em contrapartida, percebemos como o modo *breathing* é ainda mais favorecido na modulação do comprimento de espalhamento, que é um tipo de perturbação completamente simétrico. Essa conexão entre as simetrias da perturbação e o favorecimento dos modos coletivos é um aspecto importante a ser considerado para as excitações a serem implementadas nos experimentos.

O modo quadrupolo, cuja instabilidade tem sido associada à transição para o regime turbulento em nuvens condensadas, (37, 38) pode ser manipulado tanto em frequência

quanto em magnitude, assim como ilustrado pelos nossos resultados. Ao longo dos nossos estudos, acreditamos ter fornecido fortes evidências da conexão do sistema com vórtices com o modo coletivo de quadrupolo, com os vários resultados mostrando a amplificação do modo *quadrupolar* com a vorticidade no sistema.

Por fim, entendemos que, dada a complexidade do tema da turbulência em BECs, nosso trabalho é apenas uma pequena peça que deve ser agregada ao muito mais diverso histórico de pesquisa. Entendemos que cálculos numéricos podem ser feitos para melhor elucidar os resultados que aqui apresentamos, assim como experimentos precisam ser realizados a fim de submeter nosso modelo e nossas conclusões ao seu crivo.

REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, p. 3–14, 1925.
- 2 LONDON, F. The λ -phenomenon of liquid helium and the bose-Einstein degeneracy. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 141, n. 3571, p. 643–644, 1938.
- 3 HARUTINIAN, J. A. S. **Study of excitations in a Bose-Einstein condensate**. 2015. 189 p. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- 4 LANDAU, L. Theory of the superfluidity of helium ii. **Physical Review**, APS, v. 60, n. 4, p. 356, 1941.
- 5 BOGOLIUBOV, N. On the theory of superfluidity. **Journal of Physics**, v. 11, n. 1, p. 23, 1947.
- 6 PENROSE, O. Cxxxvi. on the quantum mechanics of helium ii. **Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 42, n. 335, p. 1373–1377, 1951.
- 7 PENROSE, O.; ONSAGER, L. Bose-Einstein condensation and liquid helium. **Physical Review**, APS, v. 104, n. 3, p. 576, 1956.
- 8 DEKKER, N. Laser cooling and trapping of neutral atoms. **Physics Reports**, Elsevier, v. 146, n. 6, p. 249–351, 1988.
- 9 PHILLIPS, W. Nobel lecture: laser cooling and trapping of neutral atoms. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 70, n. 3, p. 721, 1998.
- 10 WINELAND, D. Nobel lecture: superposition, entanglement, and raising schrödinger's cat. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 85, n. 3, p. 1103, 2013.
- 11 CHU, S. *et al.* Three-dimensional cooling of atoms by radiation pressure. **Physical Review Letters**, APS, v. 55, n. 1, p. 48, 1985.
- 12 COHEN-TANNOUDJI, C. Atom cooling and trapping. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 61, n. 2, p. 289, 1989.
- 13 PHILLIPS, W. Cooling and trapping of atoms by laser radiation. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 238, n. 4830, p. 1515–1522, 1987.
- 14 ANDERSON, M. H. *et al.* Observation of bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995.
- 15 DAVIS, K. B. *et al.* Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. **Physical Review Letters**, APS, v. 75, n. 22, p. 3969, 1995.
- 16 BRADLEY, C. C. *et al.* Formation of a bose-Einstein condensate by sympathetic cooling. **Physical Review Letters**, APS, v. 75, n. 9, p. 1687, 1995.

- 17 CORNELL, E. A. Nobel lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 74, n. 3, p. 875, 2002.
- 18 PETHICK, C. J.; SMITH, H. **Bose-Einstein condensation in dilute gases**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- 19 PITAEVSKII, L.; STRINGARI, S. **Bose-Einstein condensation and superfluidity**. Oxford: Oxford University Press, 2016. v. 164.
- 20 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum mechanics**: Fermions, bosons, photons, correlations, and entanglement. New York: John Wiley & Sons, 2019. v. 3.
- 21 AMIT, D. J.; VERBIN, Y. **Statistical physics**: an introductory course. Singapura: World Scientific, 1999.
- 22 BAGNATO, V.; PRITCHARD, D. E.; KLEPPNER, D. Bose-Einstein condensation in an external potential. **Physical Review A**, APS, v. 35, n. 10, p. 4354, 1987.
- 23 PROUKAKIS, N. P.; JACKSON, B. Finite-temperature models of bose-einstein condensation. **Journal of Physics B**, IOP Publishing, v. 41, n. 20, p. 203002, 2008.
- 24 GROSS, E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 20, n. 3, p. 454–477, 1961.
- 25 PITAEVSKII, L. P. Vortex lines in an imperfect bose gas. **Soviet Physics JETP**, v. 13, n. 2, p. 451–454, 1961.
- 26 BAYM, G.; PETHICK, C. J. Ground-state properties of magnetically trapped bose-condensed rubidium gas. **Physical Review Letters**, APS, v. 76, n. 1, p. 6, 1996.
- 27 LEGGETT, A. J. **Quantum liquids**: Bose condensation and cooper pairing in condensed-matter systems. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- 28 FETTER, A. L. Rotating trapped bose-Einstein condensates. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 81, n. 2, p. 647, 2009.
- 29 HENN, E. A. L. *et al.* Emergence of turbulence in an oscillating bose-Einstein condensate. **Physical Review Letters**, APS, v. 103, n. 4, p. 045301, 2009.
- 30 CARACANHAS, M. *et al.* Self-similar expansion of the density profile in a turbulent bose-Einstein condensate. **Journal of Low Temperature Physics**, Springer, v. 166, n. 1, p. 49–58, 2012.
- 31 CARACANHAS, M. A. *et al.* Self-similar expansion of a turbulent bose-Einstein condensate: a generalized hydrodynamic model. **Journal of Low Temperature Physics**, Springer, v. 170, p. 133–142, 2013.
- 32 HENN, E. *et al.* Bose-Einstein condensation in ^87Rb : characterization of the brazilian experiment. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 38, p. 279–286, 2008.
- 33 DONNELLY, R. J. **Quantized vortices in helium II**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. v. 2.

- 34 SCHWARZ, K. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid he 4: Line-line and line-boundary interactions. **Physical Review B**, APS, v. 31, n. 9, p. 5782, 1985.
- 35 CARACANHAS, M. A. **Vortices and impurities in atomic superfluids: self-similar expansion and tkachenko polaron**. 2014. 121 p. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.
- 36 YUKALOV, V.; NOVIKOV, A.; BAGNATO, V. S. Strongly nonequilibrium bose-condensed atomic systems. **Journal of Low Temperature Physics**, Springer, v. 180, p. 53–67, 2015.
- 37 PARKER, N. G.; ADAMS, C. S. Emergence and decay of turbulence in stirred atomic bose-Einstein condensates. **Physical Review Letters**, APS, v. 95, n. 14, p. 145301, 2005.
- 38 WRIGHT, T. *et al.* Dynamical thermalization and vortex formation in stirred two-dimensional bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, APS, v. 78, n. 6, p. 063601, 2008.