UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Henrique Malavazzi

Teorias de Gauge: equações integrais e auto-dualidade

São Carlos

2021

Henrique Malavazzi

Teorias de Gauge: equações integrais e auto-dualidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira

Versão Corrigida
(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos
2021

Malavazzi, Henrique
Teorias de Gauge: equações integrais e auto-dualidade / Henrique Malavazzi; orientador Luiz Agostinho Ferreira - versão corrigida -- São Carlos, 2021.
115 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Gauge. 2. Auto-dual. 3. Magnético. 4. Monopolos. 5. Cargas. I. Ferreira, Luiz Agostinho, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, quero agradecer a FAPESP que financiou e possibilitou o desenvolvimento deste projeto de mestrado, processo: 2018/21601-6.

Agradeço aos meus pais que sempre me incentivaram e me apoiaram ao longo de toda a minha trajetória a foram alicerces para minhas realizações.

Sou imensamente grato ao meu orientador Prof. Dr. Luiz A. Ferreira, por ser um grande professor e também uma grande pessoa, sempre presente e aberto para discussões. Agradeço a todo o aprendizado, confiança e apoio.

Agradeço à minha namorada que sempre esteve ao meu lado, me apoiando e compreendendo a minha dedicação durante o projeto de pesquisa.

Por último, quero agradecer aos meus amigos Raian, Adonai, Cainã, Bruno, Mário Donato e Mário Raia por todas as longas conversas desde ciência a piadas de humor duvidável e também pela amizade e carinho, que facilitaram toda jornada até conclusão deste projeto.

"A theory with mathematical beauty is more likely to be correct than an ugly one that fits some experimental data"

Paul Dirac

RESUMO

MALAVAZZI, H. **Teorias de Gauge:** equações integrais e auto-dualidade. 2021. 113p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Neste trabalho exploramos dois conceitos de extrema importância das teorias de campos buscando uma relação com as teorias de gauge: a auto-dualidade e a integrabilidade. As teorias de gauge descrevem três das quatro interações fundamentais que governam a natureza, explorar sua estrutura pode nos proporcionar maior entendimento acerca dos problemas que estão em aberto no modelo padrão. Baseamos nas referências[1–5] a fim de buscar generalizações de setores auto-duais bem consolidados das teorias de gauge: os Instantons e o monopolo de 't Hooft-Polyakov. De modo que fomos capazes de encontrar uma teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs a qual possui simetria conforme espacial, possibilitando a obtenção de dois ansätze distintos: o ansätz esférico, associado às soluções monopolares (esfericamente simétricas) e o ansätz conforme, associado à soluções de vácuo com simetria toroidal. Com o ansätz esférico da teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs, nós construímos um setor auto-dual para as soluções de 't Hooft-Polyakov. Com o ansätz conforme, verificamos que a simetria toroidal implica em soluções de vácuo definidas em uma 3-esfera, além disso, mostramos duas soluções diferentes entre si, uma abeliana e outra não abeliana, com a solução abeliana carregando uma quantidade invariante associada a helicidade dos campos de gauge, mas com transformações de gauge irregulares. Com intuito de compreender os aspectos globais destes *ansätze*, lançamos mão das equações integrais das teorias de gauge não abelianas[6–8] para calcular suas cargas magnéticas dinâmicas, de modo que foi possível verificar uma condição de quantização para as soluções monopolares obtidas com o ansätz esférico e também concluímos que o ansätz conforme não possibilita soluções do tipo monopolares.

Palavras-chave: Gauge. Auto-dual. Magnético. Monopolos. Cargas.

ABSTRACT

MALAVAZZI, H. **Gauge theories:** integrable equations and self-duality. 2021. 113p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

In this work, we explore two concepts of extreme importance in field theories looking for a relationship with gauge theories: self-duality and integrability. Gauge theories describe three of the four fundamental interactions that govern nature, exploring its structure can provide us a better understanding of the problems that are open in the standard model. We based on the references[1–5] to seek generalizations of well-established self-dual sectors of gauge theories: the 't Hooft-Polyakov monopoles and Instantons. Hence that, we found a generalized Yang-Mills-Higgs theory that has spatial conformal symmetry, enabling the achievement of two distinct solution behaviors: the spherical ansätz, which provides new monopole solutions (spherically symmetrical) and the conformal ansätz with toroidal symmetry. With the spherical ansätz of generalized Yang-Mills-Higgs, we constructed a self-dual sector for the 't Hooft-Polyakov solutions.[9,10] With the conformal ansätz, we verified that the toroidal symmetry implies in vacuum solutions defined in a 3-sphere space, in addition, we show two different solutions, an abelian and a non-abelian one, with the abelian solution carrying an invariant quantity associated with the helicity of the gauge fields, however, carries an irregularity under gauge transformations. To understand the global aspects of such ansätze, we make use of the integral equations of non-abelian gauge theories[6–8] to calculate their dynamic magnetic charges, then, it was possible to verify a quantization condition for the monopole solutions obtained with the spherical ansätz and we also concluded that the conformal ansätz it does not allow solutions of the monopole type.

Keywords: Gauge. Self-dual. Magnetic. Monopoles. Charges.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história humana nos aventuramos em desbravar o Universo em busca de entendimento e compreensão da realidade que nos permeia. Einstein, nos ensinou como a gravitação decorre de uma curvatura, mostrando que a mesma é completamente determinada a partir da geometria do espaço-tempo. Entretanto a geometria espaço-temporal não foi suficiente para descrever todas as interações fundamentais que regem a natureza sendo elas: gravitação, eletromagnetismo, interação forte e fraca.

O eletromagnetismo consolidou-se com Maxwell, que antes da descoberta da relatividade geral, através da fenomenologia nos presenteou com equações que descrevem como tais campos se comportam contribuindo em todo o nosso conhecimento na manipulação da eletricidade e magnetismo. A geometrização da gravidade inspirou a busca de uma teoria similar para eletromagnetismo com o questionamento se este carregaria estruturas intrínsecas ao espaço-tempo, tal ideia foi precursora para a descoberta do que hoje chamamos de teorias de gauge, que são consequentes não de uma geometria do espaço-tempo, mas de um espaço "interno" associado às estruturas conhecidas como álgebras e grupos de Lie. Estas teorias mostraram-se fundamentais para nossa compreensão da natureza, possibilitando uma descrição não só do eletromagnetismo mas também das outras interações que regem as ligações nucleares e decaimentos: sendo as interações forte e fraca. Contribuiu também, para a nossa compreensão da origem do Universo e de toda sua massa visível através da construção do modelo padrão que conhecemos hoje.

A origem das teorias de gauge ocorreu com a tentativa de Hermann Weyl[11] em unificar o eletromagnetismo a gravitação adicionando um fator multiplicativo à métrica do espaço-tempo. No entanto, Einstein logo mostrou que o modelo estava em desacordo com as previsões da época, pois o fator multiplicativo impediria a existência dos espectros atômicos conhecidos da química. Em seguida, veio a tentativa sem sucesso de unificação dos físicos Theodor Kaluza e Oskar Klein[12,13] em que se fazia necessário a extensão do espaço-tempo para uma estrutura de 5 dimensões. Posteriormente em 1929, com sugestão de F. London e E. Schrödinger, Weyl notou que o fator multiplicativo não deveria ocorrer na métrica, mas a nível quântico como um fator de fase acoplando uma função de onda,[14] sendo assim, brilhantemente mostrou que o eletromagnetismo decorria de uma simetria de fase não integrável na mecânica quântica. Com tal resultado, Dirac foi capaz de mostrar uma compatibilidade da mecânica quântica com a existência de partículas as quais não eram previstas nas equações de Maxwell que até hoje não foram encontradas na natureza, os monopolos magnéticos, garantindo uma condição de quantização para a carga elétrica.

A contribuição de Weyl de que o eletromagnetismo pode ser entendido como uma simetria de fase não integrável de um sistema físico, permitiu entender através da linguagem

da teoria dos grupos de Lie, que isso corresponde a ação de um grupo contínuo abeliano e unitário $U(1)$ no sistema físico. Daí foi possível estender tal conceito para grupos de Lie maiores que o $U(1)$ sendo eles não-abelianos, o que possibilitou a construção das teorias de Yang-Mills,[15] uma generalização do eletromagnetismo construída pelos físicos Cheng N. Yang e Robert L. Mills, que permitiram a descrição e compreensão das interações fracas e fortes. O eletromagnetismo junto das teorias de Yang-Mills recebem o nome de teorias de *gauge*.

Deste modo, compreender as estruturas por trás das teorias de gauge pode possibilitar maiores avanços na Física, desde aplicações em matéria condensada até o estudo das teorias de grande unificação (GUT). Portanto, neste trabalho exploraremos algumas estruturas das teorias de gauge não-abelianas com o objetivo de estabelecer possíveis generalizações. Vamos aborda-las através de dois conceitos extremamente relevantes das teorias de campos, a saber: a auto-dualidade e a integrabilidade.

1.1 Teorias de campo com setores auto-duais

Vamos abordar o conceito de auto-dualidade a partir de soluções bem consolidadas no âmbito das teorias de gauge sendo elas: os Instantons[16] e os monopolos magnéticos BPS da teoria de Yang-Mills-Higgs[17,18] que serão apresentadas no capítulo (3). No entanto, nossa motivação consistiu em modificar tais soluções via auto-dualidade, visando possíveis generalizações que pudessem fornecer maior compreensão acerca das interações fundamentais. Para introduzir as modificações temos de antemão entender o que é a auto-dualidade. Este conceito tem um papel fundamental em muitas áreas da Física, permitindo o desenvolvimento de métodos exatos e não-perturbativos para as teorias de campos.

Em teorias de campos, as condições para a auto-dualidade podem ser entendidas como a causa por trás da existência de equações do tipo BPS (Bogomolny-Prasad-Sommerfield), isto é, equações diferenciais de primeira ordem em derivadas cujas soluções são também soluções de equações diferenciais de Euler-Lagrange de segunda ordem, e levam à saturação de uma quota inferior para um funcional que em geral é a energia estática ou uma ação euclidiana. A razão pela qual podemos fazer uma integração a menos para obter soluções, não vem de leis dinâmicas de conservação, mas da invariância de um dado funcional sob variações suaves (homotópicas) dos campos: uma carga topológica Q com uma representação integral dada por

$$Q = \int d^d x \, A_\alpha \, \widetilde{A}_\alpha, \tag{1.1}$$

onde a integração é feita sobre uma variedade (ou espaço-tempo) de dimensão d, e as quantidades A_α e $\widetilde{A}_\alpha$, que são funcionais dos campos e suas primeiras derivadas, mas não de derivadas mais altas, são consideradas duais entre si. O significado do índice α depende

da teoria de campo em questão. Por "topológico" queremos dizer que Q é um invariante topológico, ou seja, invariante sob variações suaves dos campos,

$$\delta Q = 0 \qquad\qquad \text{sem o uso das equações de movimento.} \tag{1.2}$$

Tal invariância implica em identidades da seguinte forma

$$\widetilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \phi_j} - \partial_\mu \left(\widetilde{A}_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \partial_\mu \phi_j} \right) + A_\alpha \frac{\delta \widetilde{A}_\alpha}{\delta \phi_j} - \partial_\mu \left(A_\alpha \frac{\delta \widetilde{A}_\alpha}{\delta \partial_\mu \phi_j} \right) = 0. \tag{1.3}$$

que obviamente são satisfeitas por quaisquer configurações suaves dos campos ϕ_j.

A equação de auto-dualidade corresponde à igualdade

$$A_\alpha = \pm \widetilde{A}_\alpha. \tag{1.4}$$

As condições (1.3) e (1.4) implicam as equações de Euler-Lagrange associadas ao funcional

$$S = \frac{1}{2} \int d^n x \, \left[A_\alpha^2 + \widetilde{A}_\alpha^2 \right] \tag{1.5}$$

que são dadas por

$$A_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \phi_j} - \partial_\mu \left(A_\alpha \frac{\delta A_\alpha}{\delta \partial_\mu \phi_j} \right) + \widetilde{A}_\alpha \frac{\delta \widetilde{A}_\alpha}{\delta \phi_j} - \partial_\mu \left(\widetilde{A}_\alpha \frac{\delta \widetilde{A}_\alpha}{\delta \partial_\mu \phi_j} \right) = 0. \tag{1.6}$$

A dimensão do funcional n não é necessariamente igual a dimensão da integração do invariante (1.1) d, entretanto trabalharemos apenas com os casos em que $n = d$.

Nos casos onde o funcional (1.5) é positivo, e quando as dimensões n e d são iguais, as equações de auto-dualidade (1.4) implicam a saturação de uma quota inferior. De fato, podemos escrever que

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \, \left[A_\alpha \mp \widetilde{A}_\alpha \right]^2 \pm Q \qquad \Rightarrow \qquad S \geq \mid Q \mid \tag{1.7}$$

e a quota é atingida para configurações auto-duais, ou seja, as soluções das equações (1.4).

Vamos explorar o fato que ao se fazer a decomposição da densidade de carga topológica podemos introduzir uma matriz arbitrária inversível como

$$A_\alpha \, \widetilde{A}_\alpha \quad \rightarrow \qquad A_\alpha \, k_{\alpha\beta} \, k^{-1}_{\beta\gamma} \widetilde{A}_\gamma \tag{1.8}$$

levando às equações de auto-dualidade

$$h_{\alpha\beta} A_\beta = \pm \widetilde{A}_\alpha. \tag{1.9}$$

onde h é uma matriz simétrica definida em termos de k

$$h = k \, k^T \tag{1.10}$$

Portanto, as equações de auto-dualidade (1.9) com as identidades (1.3) implicam em equações de Euler-Lagrange para um novo funcional

$$S = \frac{1}{2} \int d^n x \left[h_{\alpha\beta}\, A_\alpha A_\beta + h^{-1}_{\alpha\beta} \widetilde{A}_\alpha \widetilde{A}_\beta \right], \tag{1.11}$$

onde a matriz h contrai com os termos de A e $\widetilde{A}$. Para funcionais positivos definidos temos que impor que a matriz h também será positiva definida.

A decomposição (1.8) pode possibilitar a existência de teorias generalizadas a partir da modificação de setores auto-duais bem consolidados. No capítulo (3) apresentamos dois setores auto-duais bem estabelecidos e uma tentativa de generalização do tipo (1.8) desses setores em busca de novas soluções BPS. O primeiro setor apresentado na seção (3.1) trata-se do setor auto-dual da teoria de Yang-Mills pura. O segundo setor, apresentado na seção (3.2), trata-se da teoria de Yang-Mills-Higgs na representação adjunta, que através da modificação torna-se possível encontrar uma teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs apresentada na seção (3.3).

1.2 Teorias de gauge e Equações integrais

O conceito de integrabilidade e as teorias de gauge carregam dois fatos bastante conhecidos em teorias de campos e pouco explorados que podem possuir implicações profundas em nosso entendimento das interações fundamentais da Natureza e de muitos fenômenos não lineares.

O primeiro aspecto envolvendo o conceito de integrabilidade está associado às cargas relevantes para o estudo de fenômenos não lineares. Tais cargas não estão relacionadas diretamente às simetrias da teoria, mas sim ao que chamamos de *simetrias escondidas* e para as quais o teorema de Noether não se aplica necessariamente. Estas cargas são obtidas como autovalores de operadores clássicos sujeitos a seguinte evolução temporal

$$\mathcal{O}(t) = U(t)\, \mathcal{O}(0)\, U^{-1}(t) \tag{1.12}$$

implicando na conservação de seus autovalores

$$\mathcal{O}(t) \mid \psi\rangle = \lambda \mid \psi\rangle \quad e \quad \frac{d\,\lambda}{d\,t} = 0. \tag{1.13}$$

Tal transformação ganha o nome de iso-espectral. Apesar de utilizarmos uma notação comum em mecânica quântica, estamos interessados aqui em teorias clássicas de campo, e os operadores $\mathcal{O}(t)$, como ficará claro na seção (4.2), são matrizes cujos elementos são funcionais dos campos clássicos.

O segundo aspecto diz respeito às teorias de gauge. Como sabemos, uma das características básicas das teorias de gauge é que suas leis relacionam o fluxo dos campos (elétrico e magnético) em superfícies fechadas com as cargas que estão dentro do volume

circundado por aquelas superfícies. Na verdade, as leis do eletromagnetismo foram primeiramente formuladas através de leis integrais como as leis de Gauss, de Faraday, etc, que relacionam fluxos e cargas. A formulação diferencial foi estabelecida posteriormente pelas famosas equações de Maxwell. As teorias de Yang-Mills foram formuladas em 1954 a la Maxwell, ou seja, em termos de equações diferenciais. Sua formulação integral foi obtida somente em 2012[7,8] via utilização de um teorema de Stokes não abeliano para 2-forma.[6]

As equações integrais de Yang-Mills permitem a construção de cargas dinamicamente conservadas, invariantes por transformações de gauge gerais, portanto, vamos apresentá-las no capítulo (4), com o objetivo de compreender aspectos globais das soluções apresentadas na seção (3.3) que satisfazem uma teoria modificada de Yang-Mills-Higgs.

1.3 Resultados a serem apresentados

Com o estudo da auto-dualidade fomos capazes de construir uma teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs através da auto-dualidade. Tal construção será apresentada na seção (3.3), onde verificamos os efeitos da modificação (1.9), que trata-se da introdução de uma matriz simétrica escrita em termos de campos escalares no setor auto-dual da teoria de Yang-Mills-Higgs usual. Mostramos detalhadamente a construção de duas soluções distintas e suas propriedades para a nova teoria, sendo as soluções esfericamente simétricas geradas por um ansätz esférico apresentadas na subseção (3.3.1) e, as soluções com simetria toroidal geradas por um ansätz conforme apresentadas na subseção(3.3.2).

Por fim, usando as equações integrais das teorias de gauge não abelianas, encontramos as cargas dinâmicas magnéticas investigando propriedades globais de ambas as famílias de soluções da teoria generalizada. Tal obtenção é apresentada no capítulo (5).

2 TEORIAS DE GAUGE

Neste capítulo vamos apresentar o conceito de teorias de gauge abelianas e não abelianas introduzindo parte das notações que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

2.1 Eletromagnetismo

Como queremos estudar as teorias de gauge, vamos introduzir o conceito básico envolto destas teorias partindo do modelo mais simples que é o eletromagnetismo.

Usando a métrica na assinatura $(+,-,-,-)$ podemos escrever os campos elétricos e magnéticos numa forma covariante, usando o conjunto $(e^{\mu})_{\mu=\{0,1,2,3\}}$ uma base que gera o espaço-tempo de Minkowski, então define-se um tensor de rank 2 através de um produto tensorial

$$F = F^{\mu\nu}\, e_{\mu} \otimes e_{\nu} \tag{2.1}$$

é natural, através de conceitos de geometria diferencial,[19] definir a base do espaço-tempo como sendo os operadores

$$e^{\mu} = dx^{\mu}, \qquad\qquad e_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}, \tag{2.2}$$

note que vamos trabalhar com a notação ∂_{μ} para derivadas parciais associadas com uma coordenada x^{μ}. O operador dx^{μ} caracteriza o objeto chamado de forma diferencial, sendo um funcional linear que atua no espaço dos vetores e_{μ} resultando num escalar, ou seja,

$$e^{\mu}\left(e_{\nu}\right) = dx^{\mu}\left(\partial_{\nu}\right) = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{2.3}$$

Objetos definidos como $a_{\mu}\, dx^{\mu}$ são chamados de 1-$f$orma. Portanto ao escrevermos o tensor (2.1) na base e_{μ}, i.e.,

$$F = F_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}, \tag{2.4}$$

este será uma 2-$f$orma, pois está escrito no espaço resultante do produto tensorial de duas 1-forma. Vamos estabelecer que os campos elétricos e magnéticos são obtidos a partir do tensor $F_{\mu\nu}$ através das relações

$$E_i \equiv F_{0i} \qquad\qquad B_k \equiv \frac{1}{2}\, \epsilon_{kij}\, F_{ij}. \tag{2.5}$$

Onde há uma soma sobre o índice i, j. Perceba que não utilizamos a convenção de Einstein na contração dos índices espaciais. Ao longo deste trabalho será comum a utilização de contrações entre índices sem o uso da convenção de Einstein quando os objetos físicos estiverem escritos em seções espaciais do espaço-tempo. Fazemos tal escolha a fim de se ter quantidades escalares positivas e evitar possíveis ambiguidades. Devido a escolha na

assinatura da métrica ser negativa no espaço, dois quadrivetores v^μ e u^ν (do espaço-tempo denotados por índices gregos) quando contraídos resultam em

$$v_\mu u^\mu = v^0 u_0 + v^k v_k, \tag{2.6}$$

se $v_0 = 0$, a quantidade associada a seção espacial (denotada por índices latinos) será negativa

$$v^k v_k = -v_k v_k = -||v||^2. \tag{2.7}$$

de modo que consideraremos

$$v_k v_k = ||v||^2 \tag{2.8}$$

com uma soma em k. As equações diferenciais de Maxwell no formalismo covariante são

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu; \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} &= 0; \end{aligned} \tag{2.9}$$

a primeira linha descreve a dinâmica da teoria e através das relações (2.5), reobtemos as equações da produção dos campos elétrico e magnético devido a presença de fontes

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \qquad \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \partial_t \vec{E} \tag{2.10}$$

onde $j^\nu = (\rho, \vec{j})$. A segunda linha carrega a propriedade geométrica das teorias de gauge chamada de identidade de Bianchi, esta é responsável pela lei de Faraday e também divergência nula do campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \tag{2.11}$$

A divergência nula do campo magnético é interpretada como ausência de monopolos magnéticos.

Os campos de gauge nada mais são que o quadripotencial da teoria, isto é, um quadrivetor do potencial eletromagnético

$$A^\mu = \left(\phi_0, \vec{A}\right), \qquad A_\mu = \left(\phi_0, -\vec{A}\right) \tag{2.12}$$

onde φ_0 é o potencial elétrico e $\vec{A}$ o potencial vetor. Desta forma, o tensor dos campos é construído em termos dos campos de gauge através da expressão

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.13}$$

De maneira geral, o eletromagnetismo é dito uma teoria de gauge, pois as equações dinâmicas (2.9) são invariantes sobre transformações nos potenciais

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \theta\left(x\right), \tag{2.14}$$

mas a caracterização de uma teoria de gauge vai além das transformações acima, compondo uma estrutura mais rica constituída pelos grupos de Lie. Para visualizar o que está por trás do eletromagnetismo iremos seguir os passos de Dirac, impondo uma função de onda de um sistema quântico com uma fase não integrável do tipo

$$\Psi = \mathrm{e}^{i\,\beta(x)}\,\psi, \tag{2.15}$$

sendo ψ uma função de onda ordinária. A motivação surge do fato de que a função de onda de uma partícula livre é invariante sob uma mudança de fase constante, ou seja, é invariante sob ação do grupo unitário $U(1)$. Portanto, impomos uma fase não integrável, em outras palavras, dependente do caminho que liga dois pontos no espaço-tempo, como uma extensão da simetria de fase. Desta forma, estabelecemos que β é uma função com derivadas bem definidas

$$k_\mu = \partial_\mu \beta; \tag{2.16}$$

em cada ponto do espaço-tempo, e sendo

$$[\,\partial_\mu\,,\,\partial_\nu\,]\,\beta \neq 0 \tag{2.17}$$

caracterizando a não integrabilidade da função β. Como bons físicos, podemos questionar se a não integrabilidade de uma função de onda pode ser inconsistente com os princípios básicos da mecânica quântica possibilitando certas ambiguidades para as observáveis físicas. Portanto, comecemos pela densidade de probabilidade, a quantidade

$$\psi\psi^\dagger = |\psi|^2 \tag{2.18}$$

é independente de diferenças de fase, então esta não seria afetada pela não integrabilidade da fase. Em contrapartida, a quantidade

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int d^3x\,\psi^\dagger\,\phi \tag{2.19}$$

cujo módulo quadrado é a probabilidade de concordância entre os estados ψ e ϕ, poderia apresentar problemas na integração, contudo, é necessário impor que a integral é bem definida, logo a diferença de fase do produto $\psi^\dagger\,\phi$ entre quaisquer dois pontos deve ser definida, o que implica que a diferença de fase ao longo de um caminho fechado será nula. Então, a diferença de fase ao longo do caminho fechado de $\psi^\dagger$ deve ser oposta à diferença de fase de ϕ levando a conclusão de que para todas as funções de onda a diferença de fase ao longo de um caminho fechado é a mesma. De modo que tal fase passe a ter uma interpretação dinâmica ao sistema, extrínseca a função de onda.

Sendo a fase a mesma para todas as funções de onda é direta a verificação que a superposição entre duas funções de onda ψ e ϕ sofre a mesma diferença de fase entre dois pontos.

Analisando a função de onda (2.15), temos

$$i\partial_\mu \Psi = \mathrm{e}^{i\,\beta}\,(i\partial_\mu - k_\mu)\,\psi, \tag{2.20}$$

a partir da primeira quantização, sabemos que o quadrimomento $P^\mu = (E, \vec{p})$ torna-se um operador $\hat{P}_\mu = i\,\partial_\mu$, aliado a (2.20) podemos concluir que se a função de onda Ψ satisfaz a equação de Schrödinger

$$i\partial_0 \Psi = -\frac{1}{2m}\,\partial_k^2 \Psi \tag{2.21}$$

então a função de onda ψ vai satisfazer a equação de onda acoplada minimamente, i.e.,

$$i\,(\partial_0 + ik_0)\,\psi = -\frac{1}{2m}\,(\partial_k + i\,k_k)^2\,\psi. \tag{2.22}$$

Perceba então que a equação acima descreve uma partícula livre carregada com carga e acoplada a um campo eletromagnético se

$$k_\mu = e\,A_\mu. \tag{2.23}$$

Somos levados a conclusão de que o eletromagnetismo acopla um sistema físico via um fator de fase não integrável, este um elemento do grupo $U(1)$ dependente do espaço-tempo.

O acoplamento minimal ocorre na forma do operador

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\,e\,A_\mu, \tag{2.24}$$

sendo este uma derivada covariante, de modo que os campos A_μ também ganham o nome de conexão, pois medem a contribuição da mudança de fase ao longo do caminho no espaço físico (espaço-tempo). E, note que sob a mudança

$$\psi \to g(x)\psi \qquad \text{onde} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{ie\,\theta(x)} \tag{2.25}$$

a equação (2.22) é invariante, portanto a derivada covariante deve transformar da seguinte forma

$$(\partial_\mu + i\,e\,A'_\mu)\,g\psi = g\,(D_\mu \psi) \tag{2.26}$$

implicando que os campos A_μ transformem da seguinte forma

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_\mu g\,g^{-1}, \tag{2.27}$$

estas transformações são chamadas de transformações de gauge. Usando g dado na expressão (2.25) e substituindo na (2.27), recuperamos a transformação (2.14).

O eletromagnetismo é uma teoria de gauge agindo como uma simetria local no sistema físico gerada pelo grupo de Lie $U(1)$. A ação que descreve o eletromagnetismo, invariante sobre o grupo de Poincaré e sobre o grupo de gauge $U(1)$ responsável pelas transformações (2.27), é dada por

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j^\mu A_\mu\right), \tag{2.28}$$

cujas equações de Euler-Lagrange são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{2.29}$$

O tensor dos campos (2.13) é também interpretado como um tensor de curvatura pois quantifica a falha das derivadas covariantes em comutar, isto é,

$$[\, D_\mu \,,\, D_\nu \,] = i\, e\, F_{\mu\nu}, \tag{2.30}$$

sendo uma curvatura, esta satisfaz a identidade de Bianchi para o tensor de curvatura $F_{\mu\nu}$, sendo ela

$$\partial_\nu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.31}$$

onde $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ é o dual do tensor dos campos

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{2.32}$$

este obtido através da operação dual de Hodge.[19] Portanto as equações (2.29) e a identidade (2.31) constituem as equações de Maxwell (2.9).

2.2 Teoria de Yang-Mills

O eletromagnetismo é uma teoria de gauge abeliana, pois tem simetria de fase dada pelo grupo de gauge $U(1)$. Essa ideia pode ser generalizada para teorias com simetrias maiores, isto é, grupos de Lie não abelianos. Um grupo de Lie é um conjunto de elementos contínuos com estrutura de grupo[20] que também é uma variedade diferenciável.[19] Portanto, um elemento do grupo de gauge é a imagem do mapeamento

$$g : M \to G, \tag{2.33}$$

onde M é o espaço-tempo e G o grupo de gauge. Este devido a sua estrutura diferenciável possui um espaço tangente, a álgebra de Lie.

Uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, que sendo $(T_a)_{\{a=1,2,3\}}$ elementos do espaço vetorial e a e b elementos do corpo $\mathbb{K}$, possui uma composição bilinear

$$\begin{aligned} (T_1, T_2) &\to [\, T_1 \,,\, T_2 \,]\,; \\ [\, T_1 \,,\, a\, T_2 + b\, T_3 \,] &\to a\, [\, T_1 \,,\, T_2 \,] + b\, [\, T_1 \,,\, T_3 \,]\,; \end{aligned} \tag{2.34}$$

satisfazendo duas condições

- $[\, T_a \,,\, T_a \,] = 0$;
- $[\, T_a \,,\, [\, T_b \,,\, T_c \,]\,] + [\, T_b \,,\, [\, T_c \,,\, T_a \,]\,] + [\, T_c \,,\, [\, T_a \,,\, T_b \,]\,] = 0$ (Identidade de Jacobi);

Chamamos de geradores os elementos $(T_a)_{\{a=1,2,3\}}$ da álgebra $\mathcal{G}$ que constituem uma base e satisfazem a relação

$$[\,T_a\,,\,T_b\,] = i\,f^c_{ab}\,T_c. \tag{2.35}$$

onde f^c_{ab} são as constantes de estrutura da álgebra e no caso do $SU(2)$, as constantes são ϵ_{abc}. A norma dos geradores, em geral, é dada por

$$\mathrm{Tr}\,(T_a T_b) = \kappa\,\delta_{ab}, \tag{2.36}$$

entretanto, ao longo deste trabalho estaremos trabalhando com o traço normalizado,

$$\widehat{\mathrm{Tr}}\,(T_a T_b) = \delta_{ab}. \tag{2.37}$$

O grupo de Lie está associado à sua álgebra de Lie através do mapeamento exponencial, válido em geral a uma vizinhança próxima a identidade, ou seja,

$$g(s) = \mathrm{e}^{s^a\,T_a}, \qquad\qquad g \in G \qquad T_a \in \mathcal{G}; \tag{2.38}$$

De modo que a álgebra é o espaço tangente ao grupo sobre o elemento identidade.

Um campo de gauge não abeliano é escrito sobre os geradores da álgebra de Lie, i.e.,

$$A_\mu = A^a_\mu T_a. \tag{2.39}$$

As componentes na álgebra de Lie podem possuir diferentes significados físicos, desde índices de cores associadas a interação forte a índices de Isospin associado a interação fraca.

Sendo a derivada covariante na representação adjunta dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + i\,e\,[\,A_\mu\,,\ \ ] \tag{2.40}$$

e usando a definição do tensor dos campos como o comutador das derivadas covariante, i.e.,

$$[\,D_\mu\,,\,D_\nu\,] = \,i\,e\,F_{\mu\nu}, \tag{2.41}$$

temos que para os campos não abelianos o tensor dos campos é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,A_\nu\,]\,. \tag{2.42}$$

A não comutatividade dos campos de gauge permitem uma generalização das equações de Maxwell, sendo então dadas por

$$\begin{aligned} D_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu; \\ D_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ é o tensor dual do tensor dos campos resultante de operação de Hodge

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{2.44}$$

A segunda equação (2.43) trata-se da generalização da identidade de Bianchi para campos não abelianos, garantida pela identidade de Jacobi uma vez que o tensor dos campos é definido pela falha na comutação entre as derivadas covariantes (2.41). No eletromagnetismo, os campos de gauge comutam entre si, i.e.,

$$[\, A_\mu \,,\, A_\nu \,] = 0 \tag{2.45}$$

recuperando as equações de Maxwell (2.9) das equações (2.43).

As equações (2.43) recebem o nome de equações de Yang-Mills[20] e os campos que as satisfazem são campos de gauge não abelianos chamados de campos de Yang-Mills. A ação cuja dinâmica é dada pelas equações (2.43) sem a presença de fontes $j^\mu = 0$ é dada pelo funcional

$$S = \int_M d^4x \left[-\frac{1}{4} \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right], \tag{2.46}$$

em termos das componentes da álgebra

$$S = \int_M d^4x \left[-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu\, a} \right], \tag{2.47}$$

onde a repetição dos índices da álgebra a representa uma soma sobre eles (vamos seguir com esta convenção, caso contrário será indicado no texto). Além disso a contração ocorre sem a convenção de índices contravariantes e covariantes. O funcional (2.46) é invariante sobre transformações de gauge do tipo

$$A_\mu \to g A_\mu g^{-1} + \frac{i}{e} \partial_\mu g g^{-1}, \tag{2.48}$$

no entanto, o tensor dos campos não abeliano não é invariante de gauge, pois sobre a transformação (2.48) tem-se que

$$F_{\mu\nu} \to g F_{\mu\nu} g^{-1}, \tag{2.49}$$

então, dizemos que o tensor dos campos é covariante de gauge.

O acoplamento da teoria (2.46) a campos de matéria responsáveis pela presença de fontes, sejam eles spinores, campos escalares, etc, ocorre através de uma representação do grupo, logo, deve-se definir a representação do grupo que age na teoria, isto é,

$$R : \mathcal{G} \to V, \tag{2.50}$$

sendo V o espaço vetorial onde residem os campos de matéria. A representação do grupo de Lie define como ocorre a operação da ação do grupo no campo de matéria. Por exemplo: se o campo de matéria está em um espaço vetorial bidimensional e o grupo é $G = SU(2)$, portanto o campo de matéria será um dubleto e a ação do grupo nesse espaço se dá através de uma rotação entre dois estados. Caso o campo esteja em um espaço tridimensional, o campo será representado por um tripleto e a ação do grupo se dá através de uma rotação entre três estados. A física do sistema é completamente dependente da representação adotada.

2.3 Monopolos magnéticos

Os monopolos magnéticos, mesmo ainda não encontrados no Universo, são fundamentais para a compreensão das teorias de gauge, pois o estudo desses objetos possibilita desde um maior arcabouço matemático até profundos entendimentos da própria física das interações fundamentais. Entretanto, as soluções conhecidas dos monopolos magnéticos dependem de certas condições para serem soluções regulares e com energia finita, como por exemplo a presença de campos escalares acoplados com teorias de gauge não abelianas.

Dirac apresentou o eletromagnetismo como uma estrutura não integrável na mecânica quântica,[21] e com isso foi capaz de mostrar que a mecânica quântica é compatível com a existência de monopolos magnéticos, mostrando também uma condição de quantização garantida pela existência de tais partículas.

O argumento apresentado por Dirac parte do princípio que a interação eletromagnética em um sistema físico com uma partícula carregada manifesta-se como uma diferença de fase não integrável, tal que a diferença de fase entre dois pontos próximos é exclusivamente decorrente da interação eletromagnética. Para dois pontos distantes, a diferença de fase depende do caminho que liga tais pontos. Então, uma função de onda da partícula carregada acoplada ao campo magnético, é dada por

$$\Psi = \mathrm{e}^{i\,e\int_C A_k\,dx^k}\,\psi\left(x\right). \tag{2.51}$$

Dirac então, argumenta que a diferença de fase ao longo de um caminho fechado para diferentes funções de onda pode diferir por múltiplos de $2\,\pi$, portanto, esse fator não é interpretado em termos do campo magnético. Se o caminho fechado é infinitesimal, por argumento de continuidade, a diferença de fase também será infinitesimal, de modo que não há diferença de fase entre as funções de onda por um múltiplo de $2\,\pi$. No entanto, se considerarmos que existe uma região $x_{nl} \in \mathbb{R}^3$ tal que a função de onda seja nula

$$\Psi\left(x_{nl}\right) = 0, \tag{2.52}$$

então não há sentido em falar de uma fase da função de onda nesta região. Como a função de onda está no espaço complexo, podemos escrever a equação (2.52) em termos de duas funções reais, i.e.,

$$u(x_{nl}) = 0\ ; \qquad v(x_{nl}) = 0\ ; \qquad \Psi\left(x\right) = u(x) + iv(x), \tag{2.53}$$

consistindo de duas equações. Como x_{nl} é denotado por três variáveis, as equações (2.53) vinculam duas delas mantendo uma livre, consequentemente a região descrita pelos pontos x_{nl} será uma linha em $\mathbb{R}^3$ a qual é chamada de *linha nodal*. Devido a indeterminação da fase da função de onda na linha nodal, a diferença de fase sobre um caminho fechado infinitesimal em torno da linha não precisa ser infinitesimal, de modo que pode ser dada

em termos de um fator de $2\,\pi\,n$ e interpretada em termos do campo magnético, isto é, sendo C um caminho fechado infinitesimal, temos

$$\Psi = \mathrm{e}^{i\,2\,\pi\,n + i\,e\,\int_C A_k\,dx^k}\,\psi\,(x)\,, \tag{2.54}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é uma característica da linha. Portanto, para uma curva Γ longa e fechada que delimita uma superfície $\mathcal{S}$, via teorema de Stokes, tem-se que a diferença de fase ao longo de Γ será dada por

$$\Psi = \mathrm{e}^{i\,2\,\pi\,\sum n + i\,e\,\int_{\mathcal{S}} B_k\,dS^k}\,\psi\,(x)\,, \tag{2.55}$$

onde a soma sobre n denota a contribuição de todas as linhas englobadas por Γ. Ao colapsar Γ a um ponto do espaço, a superfície $\mathcal{S}$ torna-se uma superfície fechada e a diferença de fase ao longo de Γ deve ser nula, implicando então na igualdade

$$-e\int_{\mathcal{S}} B_k\,dS^k = 2\,\pi\,\sum n. \tag{2.56}$$

O lado esquerdo da igualdade (2.56) deve ser o mesmo para todas as funções de onda, portanto o lado direito também deverá. Se a igualdade (2.56) zera, então tem-se duas possibilidades isso: a primeira seria a não existência de linhas nodais implicando que a quantidade $2\,\pi\,\sum n$ é nula e, a segunda possibilidade é que uma linha nodal atravessa a superfície $\mathcal{S}$ duas vezes fornecendo contribuições de sinal oposto. Se a igualdade (2.56) não zera, então há linhas nodais que terminam no interior da superfície $\mathcal{S}$, e desde que a soma sobre as características n das linhas nodais é a mesma para todas as funções de onda e o resultado (2.56) aplica-se para qualquer superfície fechada $\mathcal{S}$, então os pontos finais das linhas nodais são os mesmos para quaisquer funções de onda, levando a conclusão de que estes pontos são singularidades do campo eletromagnético. Da expressão (2.56), se $\mathcal{S}$ é uma superfície infinitesimal em torno de um ponto final da linha nodal, o fluxo do campo magnético será dado por

$$\int_{\mathcal{S}} B_k\,dS^k = \frac{2\,\pi\,n}{e}, \tag{2.57}$$

então, deve existir uma carga magnética pontual μ sobre o ponto final da linha, tal que o campo magnético é dado por

$$B_k = \frac{\mu}{r^2}\hat{r}_k, \tag{2.58}$$

levando então a condição

$$2\,\pi\,e\,\mu = n. \tag{2.59}$$

Esta estabelece uma condição de quantização para a carga elétrica sobre a hipótese de que monopolos magnéticos existem, entretanto, o problema destes monopolos é que campos na forma Coulombiana (2.58) levam a soluções com energia divergente, devido a singularidade em $r \to 0$. Soluções não abelianas de monopolos magnéticos também foram encontradas pelos físicos T. T. Wu e C. N. Yang,[22] sendo da forma

$$B_k = \frac{r_k}{er^2}\,\widehat{r}\cdot T, \tag{2.60}$$

onde $(T_a)_{\{a=1,2,3\}}$ são geradores do grupo $G = SU(2)$ e

$$\widehat{r} \cdot T = r_k T_k. \tag{2.61}$$

Estas soluções, também carregam singularidades em $r \to 0$ o que leva a uma energia divergente.

Portanto, diremos que monopolos magnéticos são soluções que carregam um comportamento Coulombiano de modo que o fluxo do campo magnético no infinito espacial será constante e não nulo, estando associado às cargas magnéticas do campo. Por exemplo, os campos magnéticos de Dirac e Wu-Yang são puramente Coulombianos em todo o espaço, carregando as seguintes cargas magnéticas

$$\mathcal{G}_m = \mu, \qquad \text{(Monopolo de Dirac)} \tag{2.62}$$

$$\mathcal{G}_m = \frac{1}{e}\,\widehat{r} \cdot T. \qquad \text{(Monopolo de Wu-Yang)} \tag{2.63}$$

A teoria Yang-Mills-Higgs a qual será apresentada na seção (3.2) possibilita soluções regulares de monopolos magnéticos abelianos, resultantes do fenômeno de quebra espontânea de simetria via acoplamento do campo de Higgs tripleto com a teoria de Yang-Mills. Soluções exatas de monopolos desta teoria podem ser obtidas no âmbito da auto-dualidade. Na seção (3.3) mostraremos novas soluções regulares de monopolos magnéticos pertencentes a uma teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs.

3 AUTO-DUALIDADE

Neste capítulo vamos apresentar a construção dos setores auto-duais e a tentativa de generalização de duas teorias bem estabelecidas na literatura, sendo a solução de Instanton e as soluções de monopolo da teoria de Yang-Mills-Higgs sob ação do grupo $SU(2)$ na representação adjunta.

3.1 Instanton

A teoria de Yang-Mills generaliza a teoria do eletromagnetismo, já que esta trata de grupos de Lie não abelianos. Os campos são elementos da álgebra de Lie, portanto, são escritos sobre a álgebra, isto é, $A_\mu = A^a_\mu T_a$, sendo T_a os geradores da álgebra de Lie. O funcional da teoria é descrito pela expressão (2.46) e tem sua configuração de campos descrita pelas equações (2.43).

Uma vez que podemos ter grupos de Lie maiores que $U(1)$, temos a possibilidade de lançar mão da homotopia associada à estrutura da teoria e encontrar invariantes, ou seja, estabelecidos os campos de Yang-Mills com simetria $SU(2)$ sobre o espaço Euclidiano de 4 dimensões $\mathbb{R}^4$, existe um mapeamento não trivial do grupo $SU(2)$ sobre uma esfera S^3 denotado pelo grupo de homotopia $\pi_3(SU(2))$,[19,23] garantindo um invariante topológico à teoria.

As teorias de gauge, portanto, são geradas por dois conjuntos de equações, as equações dinâmicas (2.43), que equacionam o próprio tensor dos campos $F_{\mu\nu}$ à fontes de matéria j_ν; e as equações as quais podemos chamar de equações geométricas que condicionam o dual do tensor dos campos, estas são oriundas da geometria dos campos de gauge e constituem a identidade de Bianchi. Portanto, sob certas condições, identidades como a identidade de Bianchi garantem quantidades invariantes para às teorias de gauge podendo carregar informações sobre novas partículas (monopolos magnéticos, Instantons, etc.). A teoria de Yang-Mills em 4 dimensões carrega um invariante garantido pela identidade de Bianchi chamado de número de Potryagin[16] ou até mesmo de número de Chern,[19] associado ao mapeamento do grupo $SU(2)$, que é isomorfo a uma esfera tridimensional S^3 (3-esfera) na borda do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$ que consiste também de uma 3-esfera. O invariante, portanto, matematicamente, mede o número de maneiras de se mapear uma S^3 em outra S^3, fisicamente é associada a carga de uma partícula chamada Instanton,[16] dada pela representação integral

$$Q = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \, \widetilde{F}^{\mu\nu}) = \int_{S^3} dS^\mu j^{CS}_\mu, \tag{3.1}$$

onde j_μ^{CS} é a corrente de Chern-Simons dada por[20]

$$j_\mu^{CS} = \frac{1}{4}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(A^\nu\,F^{\alpha\beta} - \frac{2\,i\,e}{3}A_\nu\,A_\alpha\,A_\beta\right) \tag{3.2}$$

Fixada as condições de contorno para os campos, verificamos que a identidade de Bianchi garante que $\delta Q = 0$ sobre transformações suaves nos campos. Usando que

$$\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \mathrm{Tr}(\widetilde{F}^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}) \tag{3.3}$$

podemos encontrar a relação da ação com a carga Q,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \mathrm{Tr}(\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}) = \\ &= -\frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\,\mathrm{Tr}\left((F_{\mu\nu} \pm \widetilde{F}_{\mu\nu})^2\right) \pm \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde

$$\mathrm{Tr}\left((F_{\mu\nu} \pm \widetilde{F}_{\mu\nu})^2\right) = \mathrm{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \pm 2\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}) + \mathrm{Tr}(\widetilde{F}^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}). \tag{3.5}$$

Assim sendo, podemos construir o setor auto-dual da teoria usando (1.4), onde a ação de Yang-Mills pode ser escrita na mesma forma que a expressão (1.5) usando as seguintes associações

$$\mathcal{A}^a_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}, \qquad\qquad \widetilde{\mathcal{A}}^a_{\mu\nu} = \widetilde{F}^a_{\mu\nu}. \tag{3.6}$$

Portanto, o setor auto-dual da teoria deve estar na forma

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \lambda F_{\mu\nu}, \tag{3.7}$$

pois quando substituída na identidade de Bianchi sob a condição de que λ seja uma constante, reobtemos as equações dinâmicas dos campos de Yang-Mills, sendo elas, a primeira linha das equações (2.43). Ou seja, resolver as equações diferenciais de primeira ordem para A_μ definidas pela igualdade (3.7), obteremos soluções que automaticamente satisfazem a dinâmica da teoria sem a necessidade de resolver diretamente equações de segunda ordem, as equações de Euler-Lagrange. Entretanto, as equações (3.7) não estão completamente determinadas, é necessário encontrar os autovalores λ, autovalores resultantes da operação dual de Hodge, que são diferentes de acordo com o espaço físico em que a teoria reside.

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ temos que $\epsilon_{0123} = 1$, portanto, aplicando a operação dual de Hodge duas vezes no tensor dos campos tem-se

$$\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\sigma\gamma}F^{\sigma\gamma} = F^{\alpha\beta} \tag{3.8}$$

e, usando na igualdade (3.7), obtemos que $\lambda^2 = 1$, consequentemente

$$F_{\mu\nu} = \pm\widetilde{F}_{\mu\nu}, \tag{3.9}$$

que em termos dos campos A_μ são equações diferenciais de primeira ordem, definindo o setor auto-dual da teoria.

No espaço-tempo de Minkoswki, temos que $\epsilon_{0123} = -1$, portanto, as equações que definem o setor auto-dual são

$$F_{\mu\nu} = \pm i\, \widetilde{F}_{\mu\nu}, \tag{3.10}$$

cujas soluções de Instantons são complexas, estas não nos interessa.

3.1.1 Aplicando a modificação

Note que a auto-dualidade que define a solução de Instanton em $\mathbb{R}^4$ é dada por uma relação entre o tensor dos campos e seu dual (3.1). Além disso, o quadrado da operação dual de Hodge no espaço Euclidiano estabelece mais uma relação entre o tensor e seu dual, que consiste na dupla aplicação da operação dual no tensor recuperar o próprio tensor, portanto se fizermos a decomposição da carga (3.1) introduzindo matrizes k como feito na expressão (1.8) e definirmos uma matriz simétrica $h = k\, k^T$, teremos um novo setor auto-dual dado por

$$F^a_{\mu\nu}\, h_{ab} = \widetilde{F}^b_{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

entretanto, o quadrado da operação dual implicará que a matriz h, na condição de que esta é positiva definida, seja trivial, i.e.,

$$h_{ab} = \delta_{ab} \tag{3.12}$$

levando a conclusão de que o setor auto-dual de Yang-Mills no espaço Euclidiano de 4 dimensões não pode ser modificado na forma (3.11).

3.2 Yang-Mills-Higgs

Os monopolos de Dirac e Wu-Yang apresentados na seção (2.3) são singulares, consequentemente, carregam energia infinita e, além disso, a carga magnética desses monopolos não são quantidades topológicas. Já os monopolos de 't Hooft-Polyakov, são construídos ao acoplar os campos de gauge a um campo de Higgs na representação adjunta, carregam energia finita e tem sua quantização caracterizada por uma quantidade topológica resultante de uma quebra espontânea de simetria. A quantidade topológica tem uma representação integral, de modo que permite a existência de um setor auto-dual na teoria e, na seção seguinte (3.3) introduziremos uma modificação no setor auto-dual da teoria, como feito em (1.8), a fim de generalizar a teoria e, consequentemente obter novas soluções de monopolos magnéticos.

A teoria de Yang-Mills-Higgs é descrita pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{YMH} = -\frac{1}{4}\widehat{\mathrm{Tr}}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + (D^\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) - V(|\Phi|). \tag{3.13}$$

uma teoria de gauge acoplada com um multipleto escalar Φ sendo este o campo de Higgs que, sob acoplamento minimal tem-se

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + i\, e\, R(A_\mu))\, \Phi, \tag{3.14}$$

onde as transformações nos campos de Higgs ocorrem sob a representação do grupo G na forma

$$\begin{aligned} \Phi &\to R(g)\Phi, \\ D_\mu \Phi &\to R(g) D_\mu \Phi. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Este sistema é conhecido na literatura devido ao processo de geração de massa para os bósons de gauge via quebra espontânea de simetria,[20] caracterizando o que é chamado de mecanismo de Higgs, para isso o campo de Higgs é sujeito a um potencial de interação na forma

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - a^2)^2, \tag{3.16}$$

onde este é invariante por uma transformação de gauge, i.e.,

$$V(R(g)\Phi) = V(\Phi) \tag{3.17}$$

pois o potencial depende de um fator $|\Phi|^2$ e tem-se que

$$|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi, \tag{3.18}$$

então sob uma transformação de gauge

$$|\Phi|^2 \to |R(g)\Phi| = \Phi^\dagger R^\dagger(g) R(g) \Phi = \Phi^\dagger \Phi \tag{3.19}$$

sendo

$$R^\dagger(g) R(g) = R(g^\dagger) R(g) = R(g^\dagger g) = R(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \tag{3.20}$$

para uma representação unitária. As constantes a e λ são o valor esperado do vácuo do Higgs e a constante de acoplamento, respectivamente. Portanto, podemos definir o vácuo do campo de Higgs como uma variedade tal que

$$M_0 \equiv \{\Phi,\ V(\Phi) = 0\} \tag{3.21}$$

e com a restrição de que o campo é covariantemente constante nesta região, ou seja,

$$D_\mu \Phi = 0. \tag{3.22}$$

A grande contribuição desse modelo consiste na estrutura de vácuo que este possui, a quebra de simetria ocorre uma vez que o vácuo não é invariante sob a ação do grupo de simetria G mas sim a um subgrupo do mesmo, isto é, seja $H_\Phi \subset G$, onde

$$H_\Phi \equiv \{h \in G | R(h)\Phi = \Phi\}. \tag{3.23}$$

O subgrupo H_Φ é chamado de grupo de estabilidade do campo de Higgs. Para um elemento infinitesimal do subgrupo H_Φ gerado por T_h, isto é, $h = 1 + i\,\varepsilon\,T_h$, temos que

$$R(h)\Phi = \Phi \qquad \Rightarrow \qquad R(\mathbb{I} + i\,\varepsilon T_h) = \Phi \tag{3.24}$$

segue então que

$$R(\mathbb{I})\Phi + \varepsilon R(T_h)\Phi = \Phi \qquad \Rightarrow \qquad R(T_h)\Phi = 0, \tag{3.25}$$

os geradores da simetria restante aniquilam o vácuo de Higgs, sendo assim, a partir da condição (3.22) e sendo

$$F_{\mu\nu} = i\,e\,[\,D_\mu\,,\,D_\nu\,]\,, \tag{3.26}$$

tem-se que

$$F_{\mu\nu}\Phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F^a_{\mu\nu}R(T_a)\Phi = 0, \tag{3.27}$$

tal que as únicas componentes do tensor dos campos que não anulam no vácuo, ou seja, que atravessam o vácuo do Higgs, são as componentes que estão na direção dos geradores do subgrupo de simetria. A variedade do vácuo de Higgs M_0 pode ser representada de forma mais elegante, via uma relação direta com a representação da teoria e a quebra do grupo de simetria inicial G nos subgrupos H_Φ , para isso, vamos definir o conceito de órbita do grupo G agindo na variedade M_0 como sendo

$$O_\Phi \equiv \{R(g)\Phi \,|\, g \in G\} \tag{3.28}$$

ou seja, sendo Φ um elemento do vácuo de Higgs, todo elemento resultante da transformação do campo pela ação do grupo G constitui a órbita, entretanto, devido ao subgrupo invariante $H_\Phi \in G$, o mapeamento de G para a órbita não é bijetor, pois há "elementos redundantes", ou seja, uma vez que existem elementos do tipo gh, com $g \in G$ e $h \in H_\Phi$, ocorre que

$$R(gh)\Phi = R(g)R(h)\Phi = R(g)\Phi, \tag{3.29}$$

portanto, para "filtrar" as redundâncias definimos o espaço *coset*

$$G/H_\Phi \equiv \{gh \,|\, g \in G,\ \forall h \in H_\Phi\}, \tag{3.30}$$

sendo este a própria estrutura da órbita

$$O_\Phi = G/H_\Phi. \tag{3.31}$$

Se o grupo age transitivamente, então conseguimos obter todos os elementos da variedade de vácuo sob ação do grupo G em um único ponto,

$$\Phi' = R(g)\Phi \tag{3.32}$$

e se cada ponto de M_0 possui mais de um subgrupo de simetria diferente, então devido a transitividade do grupo G, temos

$$\Phi' = R(g)\Phi \qquad \rightarrow \qquad R(h_2)\Phi = R(g)R(h_1)R(g^{-1})\Phi \tag{3.33}$$

levando a seguinte relação

$$R(h_2) = R(g)R(h_1)R(g^{-1}) = R(g\, h_1\, g^{-1}), \tag{3.34}$$

portanto, cada elemento de $H_{\Phi\,1}$ é mapeado em um elemento de $H_{\Phi\,2}$ via conjugação do grupo G, garantindo um isomorfismo entre os subgrupos de simetria, de modo que se M_0 possui mais de um subgrupo de simetria $H_{\Phi\,i}, i \in \{1, ..., n\}$ e G age transitivamente em M_0, então os subgrupos de simetria são isomorfos entre si, tal que

$$H_{\Phi\,i} \cong H_{\Phi}. \tag{3.35}$$

Desta forma, a variedade M_0 é simplesmente a órbita (3.31)

$$M_0 = G/H_{\Phi}. \tag{3.36}$$

No caso em que G não age transitivamente em M_0, a variedade será a união disjunta de todas as órbitas

$$M_0 = \bigcup_{i\in\{1,...,n\}} O_{\Phi\,i} = \bigcup_{i\in\{1,...,n\}} G/H_{\Phi\,i}, \tag{3.37}$$

note que, a união é disjunta, uma vez que neste caso não é possível transitar de uma órbita a outra via uma conjugação.

Nosso interesse nessa teoria está na estrutura de vácuo do Higgs quando este se encontra na *representação adjunta*, e uma vez na representação adjunta, a quebra de simetria do grupo não abeliano mantém uma simetria $U(1)$ no vácuo, garantindo a existência de uma teoria "eletromagnética" no vácuo e, a existência de uma carga topológica associada a uma carga magnética abeliana. A representação adjunta é então definida como a ação do grupo G sobre os campos na forma

$$R(g)\Phi = g\Phi g^{-1} = \mathrm{ad}(g)\Phi, \tag{3.38}$$

sendo g uma transformação contínua infinitesimal definida pelo parâmetro ε, segue

$$g = 1 + i\, e\, \varepsilon T_a, \tag{3.39}$$

então

$$g\Phi g^{-1} = \Phi + i\, e\, \varepsilon\, [\, T_a\, ,\, \Phi\,] \tag{3.40}$$

e

$$\mathrm{ad}(g) = (\mathrm{ad}(1) + i\, e\, \varepsilon\, \mathrm{ad}(T_a)), \tag{3.41}$$

substituindo na (3.38) tem-se que,

$$\mathrm{ad}(T_a)\Phi = [\, T_a \,,\, \Phi \,] \,. \tag{3.42}$$

Note que a ação dos geradores sobre Φ passa a ser um comutador, assim podemos escrever Φ na álgebra de Lie do grupo G,

$$\Phi = \Phi^a T_a \tag{3.43}$$

de modo que

$$|\Phi|^2 = \widehat{\mathrm{Tr}}(\Phi\Phi) = \Phi^a \Phi^b \widehat{\mathrm{Tr}}(T_a T_b) \tag{3.44}$$

e

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) \to \frac{1}{2}\, \widehat{\mathrm{Tr}}(D_\mu \Phi D^\mu \Phi). \tag{3.45}$$

Assim a densidade de Lagrangeana na representação adjunta será

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\widehat{\mathrm{Tr}}(F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{Tr}}(D_\mu \Phi\, D^\mu \Phi) - \frac{\lambda}{4}\left(\widehat{\mathrm{Tr}}(\Phi^2) - a^2\right)^2, \tag{3.46}$$

portanto, sendo a ação calculada como

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}, \tag{3.47}$$

as equações de Euler-Lagrange desta teoria são

$$\begin{aligned} D_\mu F^{\mu\nu} &= -i\, e\, [\, \Phi \,,\, D^\nu \Phi \,] \,, \\ D_\mu D^\mu \Phi &= -\lambda \Phi \left(\Phi^2 - a^2\right), \end{aligned} \tag{3.48}$$

e sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor dos campos de gauge, este satisfaz a identidade de Bianchi. A densidade de energia desse modelo é dada por

$$\Theta_{00} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{Tr}}\,(F_{i0}F_{i0}) + \frac{1}{4}\widehat{\mathrm{Tr}}\,(F_{ij}F_{ij}) + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{Tr}}\,(D_0\Phi\, D_0\Phi + D_k\Phi\, D_k\Phi) + V\,(\Phi) \tag{3.49}$$

tal que a energia será

$$\mathrm{H} = \int d^3x\, \Theta_{00}. \tag{3.50}$$

Note que a operação de traço garante que a densidade de Lagrangeana de Yang-Mills-Higgs (3.46) é invariante sobre transformações de gauge (2.48), portanto tem simetria de gauge, esta é uma simetria interna associada aos índices internos dos campos. Além disso, a contração dos índices espaço-temporais garante a invariância sobre transformações de Poincaré. Estes dois conjuntos de simetria constituem as simetrias contínuas da teoria, há também o conjunto das simetrias discretas[24] as quais não estaremos interessados.

As soluções com energia finita possuem os campos atingindo as configurações de vácuo no infinito, ou seja,

$$F_{\mu\nu} \to 0, \qquad D_\mu \Phi \to 0, \qquad V(\Phi) \to 0, \qquad \text{quando} \qquad |x| \to \infty. \tag{3.51}$$

Consequentemente no infinito espacial, o campo de Higgs atua como o mapeamento

$$\Phi : S^2 \to M_0, \tag{3.52}$$

onde S^2 caracteriza a borda do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$. O grau deste mapeamento que traz a informação do número de maneiras que podemos cobrir a variedade de vácuo M_0 com esferas bidimensionais S^2 é um invariante na teoria, que devido a sua estrutura matemática atribui-se o termo "invariante topológico" associado ao grupo de homotopia $\pi_2(M_0)$. Como veremos, este invariante é fundamental para a modificação que queremos introduzir na teoria e, esta em específico, possibilita a existência dos monopolos magnéticos, o que nos faz olhar apenas para as teorias onde $\pi_2(M_0)$ é não trivial, ou seja, o mapeamento tem um grau diferente de zero. Quando $\pi_2(M_0) \neq 0$ implica que existe um defeito topológico pontual na variedade M_0, uma vez que ser trivial nos diz que a esfera é contratível na variedade do vácuo, portanto, ser não trivial leva a um "buraco". Deste modo, queremos as soluções "defeituosas" uma vez que estas são mais interessantes, então, de forma simplificada, o mapeamento mais simples que garante um invariante não trivial será quando

$$M_0 = S^2, \tag{3.53}$$

neste caso, temos que o grupo de gauge é o $G = SU(2)$ na representação adjunta, de modo que o Higgs nesta representação é um tripleto e, a variedade de vácuo M_0 será o lugar geométrico definido pela equação

$$\widehat{\mathrm{Tr}}(\Phi^2) = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = a^2, \tag{3.54}$$

possuindo três graus de liberdade com valores reais condicionados a um vínculo, definindo uma esfera bidimensional S^2 implicando na (3.53).

As soluções associadas aos defeitos topológicos do tipo

$$\pi_2(M_0) \neq 0, \tag{3.55}$$

são soluções de monopolo magnético da teoria.

3.2.1 Setor auto-dual

O setor auto-dual da teoria trata-se de um setor estático, e como nosso interesse consiste nas soluções de monopolos magnéticos, isto é, apenas com campos magnéticos e sem a presença de campos elétricos, podemos impor

$$A_0 = 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_0 \Phi = \partial_0 A_k = 0, \tag{3.56}$$

de modo que a energia do sistema físico reduz a

$$\mathrm{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} \widehat{\mathrm{Tr}} \left(D_k \Phi D_k \Phi \right)) + V\left(\Phi\right) \right], \tag{3.57}$$

e devido à representação adjunta, isto é, ao fato do Higgs poder ser escrito na álgebra, podemos definir as quantidades

$$\mathcal{A}_a \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^a_{ij} \qquad\qquad \tilde{\mathcal{A}}_a = \left(D_k\Phi\right)^a, \tag{3.58}$$

tal que reescreveremos a energia na forma

$$\mathrm{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{A}^2 + \tilde{\mathcal{A}}^2\right) + V\left(\Phi\right)\right]. \tag{3.59}$$

Como a teoria tem um invariante topológico devido ao mapeamento homotópico do vácuo, este tem uma representação integral a qual vamos mostrar a partir do funcional de energia. A expressão (3.59) difere do funcional (1.11) devido a presença de um potencial, entretanto, o potencial nesta teoria carrega a estrutura necessária para a existência do invariante topológico da teoria. Tomamos então, o limite de Prasad-Sommerfield,[18] este consiste na constante de acoplamento λ ir a zero, permitindo a obtenção do setor auto-dual ou também chamado de equações de Bogolmonyi-Prasad-Sommerfield,[17] tal que

$$\lim_{\lambda\to 0} V\left(\Phi\right) = 0. \tag{3.60}$$

Neste momento a energia passa a ter apenas termos cinéticos, assim é possível manipular o funcional a fim de obter

$$\mathrm{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{A} \pm \tilde{\mathcal{A}}\right)^2 \mp \int d^3x\, \mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}}\right], \tag{3.61}$$

onde

$$\int d^3x\, \mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\int d^3x\, \epsilon_{kij}\widehat{\mathrm{Tr}}\left(F_{ij}\, D_k\Phi\right). \tag{3.62}$$

Note que ao definirmos a equação

$$\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\, F_{ij} = \pm D_k\Phi \tag{3.63}$$

temos que a energia H será

$$\mathrm{H} = \mp Q, \tag{3.64}$$

onde Q é definida como sendo

$$Q \equiv \frac{1}{2}\int d^3x\, \epsilon_{kij}\widehat{\mathrm{Tr}}\left(F_{ij}\, D_k\Phi\right), \tag{3.65}$$

portanto, a escolha do sinal da equação (3.63) implica no sinal da quantidade Q, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\, F_{ij} &= D_k\Phi \Rightarrow Q = \frac{1}{2}\int d^3x\, \epsilon_{kij}\widehat{\mathrm{Tr}}\left(F^2_{ij}\right) > 0\ ; \\ \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\, F_{ij} &= -D_k\Phi \Rightarrow Q = -\frac{1}{2}\int d^3x\, \epsilon_{kij}\widehat{\mathrm{Tr}}\left(F^2_{ij}\right) < 0 \end{aligned} \tag{3.66}$$

como consequência, a expressão (3.64) pode ser rescrita como

$$\mathrm{H} = |Q|, \tag{3.67}$$

Portanto, a condição (3.63) estabelece a igualdade (3.67). Ao recuperar o potencial na expressão (3.59) do limite $\lambda \to 0$, isto é, trabalhar com um potencial não nulo e levando em conta que $V \geq 0$, temos que $|Q|$ será o limitante inferior da energia, isto é

$$\mathrm{H} \geq |Q|. \tag{3.68}$$

onde este configura o valor mínimo não nulo da energia. Portanto a equação (3.63) junto com a identidade de Bianchi dada por

$$\epsilon_{kij} D_k F_{ij} = 0, \tag{3.69}$$

implicam as equações de Euler-Lagrange da teoria de Yang-Mills-Higgs (3.48), cujas soluções possuem energia dada por (3.68).

A quantidade Q é a representação integral do invariante topológico da teoria, então, podemos verificar que sobre transformações homotópicas esta quantidade é invariante, isto é, aplicando variações suaves nos campos Φ e A_k na expressão (3.65) temos que

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int d^3x \, \epsilon_{kij} \widehat{\mathrm{Tr}} \left(\delta F_{ij} \, D_k \Phi + F_{ij} \delta D_k \Phi \right), \tag{3.70}$$

sendo

$$\begin{aligned} \epsilon_{kij} \delta F_{ij} &= 2\epsilon_{kij} \left(\partial_i \delta A_j + i\, e \, [\, A_i \, , \, \delta A_j \,] \right) \\ \delta D_k \Phi &= \partial_k \delta \Phi + i\, e \, \left([\, \delta A_k \, , \, \Phi \,] + [\, A_k \, , \, \delta \Phi \,] \right), \end{aligned} \tag{3.71}$$

então

$$\begin{aligned} \delta Q &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \, \widehat{\mathrm{Tr}} \Big(\big(2 \left(\partial_i D_k \Phi + i\, e \, [\, A_i \, , \, D_k \Phi \,] \right) - i\, e \, [\, F_{ik} \, , \, \Phi \,] \big) \delta A_j \Big) - \\ &- \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \, \widehat{\mathrm{Tr}} \Big((\partial_k F_{ij} + ie \, [\, A_k \, , \, F_{ij} \,])) \delta \Phi \Big) + \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \widehat{\mathrm{Tr}} \Big(\partial_i (\delta A_j \, D_k \Phi) + \partial_k (F_{ij} \, \delta \Phi) \Big), \end{aligned} \tag{3.72}$$

Através das condições de contorno que fixam os campos na borda, os termos na superfície se anulam restando apenas os seguintes termos

$$\begin{aligned} \delta Q &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \, \widehat{\mathrm{Tr}} \Big((2 D_i D_k \Phi - ie \, [\, F_{ik} \, , \, \Phi \,]) \delta A_j \Big) - \\ &- \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3x \, \widehat{\mathrm{Tr}} \Big(D_k F_{ij} \, \delta \Phi \Big). \end{aligned} \tag{3.73}$$

A invariância $\delta Q = 0$, portanto é verificada sobre uma identidade e uma igualdade. O fato de se ter

$$[\, D_i \, , \, D_j \,] = i\, e \, F_{ij} \tag{3.74}$$

garante que a expressão

$$\epsilon_{ijk}(2D_iD_k\Phi - ie\,[\,F_{ik}\,,\,\Phi\,]) = 0 \tag{3.75}$$

não passa de uma simples igualdade. E a identidade associada à (3.73) é a identidade de Bianchi dada por (3.69) garantindo então a invariância de Q sob transformações suaves nos campos. É possível verificar que a quantidade Q pode ser expressa como o *winding number* do mapeamento (3.53).[25] Podemos manipular a expressão (3.65) de maneira a mostrar que a carga depende apenas das configurações dos campos no vácuo de Higgs calculada sobre a borda de $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\epsilon_{kij}\widehat{\mathrm{Tr}}\,(F_{ij}\,D_k\Phi) = \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\epsilon_{kij}\partial_k\widehat{\mathrm{Tr}}\,(F_{ij}\Phi) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\int_{S^2_\infty} dS_k\,\widehat{\mathrm{Tr}}\,(F_{ij}\Phi)\,. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Note que a carga topológica pode ser vista como o fluxo do campo abeliano

$$\mathcal{F}_{ij} \equiv \frac{1}{|\Phi|}\widehat{\mathrm{Tr}}\,(F_{ij}\Phi) \tag{3.77}$$

através da borda do espaço $\mathbb{R}^3$, portanto, esta é associada a uma carga magnética, através da relação

$$Q_m \equiv \frac{1}{|\Phi|}\,Q, \tag{3.78}$$

com $|\Phi| = a$. Devido ao mecanismo de quebra espontânea de simetria, os campos que carregam a carga (3.78) são os que sobrevivem ao vácuo de Higgs, isto é, os que estão associados às simetrias restantes da teoria.

Assim temos que as equações definidas em (3.63) que levam ao mínimo global da energia ao serem substituídas na igualdade (3.75) resultam em

$$\epsilon_{ijk}2D_iD_k\Phi = \pm\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}D_iF_{mn} = \pm 2D_iF_{ij} \tag{3.79}$$

e em

$$i\,e\,\epsilon_{ijk}\,[\,F_{ik}\,,\,\Phi\,] = \mp 2\,i\,e\,\,[\,D_j\Phi\,,\,\Phi\,] \tag{3.80}$$

levando a seguinte equação

$$\pm\,2(D_iF_{ij} + i\,e\,\,[\,D_j\Phi\,,\,\Phi\,]) = 0. \tag{3.81}$$

Substituindo (3.63) na identidade de Bianchi, tem-se que

$$D_kD_k\Phi = 0. \tag{3.82}$$

As equações (3.81) e (3.82) são equações dinâmicas da teoria (3.48) no setor estático sob o limite de Prasad-Sommerfield ($\lambda \to 0$). Portanto encontramos usando que (1.7) que o setor auto-dual da teoria de Yang-Mills-Higgs na representação adjunta é definido pelas equações (3.63), sendo equações de primeira ordem nos campos físicos A_k e Φ com soluções que satisfazem Euler-Lagrange e com energia igual ao invariante topológico $|Q|$.

3.2.2 Monopolo BPS

As soluções que satisfazem (3.63), são soluções com carga (3.65), caracterizando soluções de monopolos magnéticos, já que a carga está associada ao grau do mapeamento $\pi_2(S^2)$. Deste modo, a solução deve ser esférica e, então ao consideramos a simetria esférica do problema supondo uma partícula fixa na origem do sistema de coordenadas e constante ao longo do tempo (estática), podemos construir um ansätz esférico para resolver as equações (3.63). Com o auxílio de uma ferramenta poderosa advinda dos grupos de Lie que é o método de Lie apresentada no apêndice (C), que consiste em usar as simetrias do problema de modo que a equação diferencial parcial torne-se uma equação diferencial ordinária, mostramos a construção do ansätz esférico no apêndice (C.1), obtida por 't Hooft e Polyakov[9,10] como uma solução invariante sob a combinação da ação das rotações espaciais com a ação do grupo de simetria interno (grupo de gauge)

$$\epsilon_{ajk} r_j \partial_k + T_a \tag{3.83}$$

onde $\epsilon_{ajk} r_j \partial_k$ são os geradores do grupo de rotação no espaço e T_a os geradores do grupo $SU(2)$. Ou seja, estamos compensando as rotações na estrutura interna ocasionadas pelo grupo de gauge $SU(2)$ com as rotações espaciais, uma vez que as álgebras destes grupos são iguais, pode-se ser feito uma associação um para um dos geradores destas álgebras.

Portanto, o ansätz esfericamente invariante para o campo de Higgs e para os campos de gauge será

$$\begin{aligned} \Phi^a &= \frac{r^a}{er^2} H(\xi) \\ A_i^a &= -\epsilon_{aij} \frac{r^j}{er^2}(1 - K(\xi)), \end{aligned} \tag{3.84}$$

onde $\xi = aer$. Desta forma, levando em conta a definição (2.5), temos

$$(D_k \Phi)^a = \frac{\delta_k^a r^2 - r^a r_k}{er^4}(H(\xi)K(\xi)) + \frac{r^a r_k}{er^4}(\xi H'(\xi) - H(\xi)) \tag{3.85}$$

$$B_k^a = -\frac{\delta_k^a r^2 - r^a r_k}{er^4}(\xi K'(\xi)) + \frac{r^a r_k}{er^4}(1 - K^2(\xi)), \tag{3.86}$$

que, ao serem substituídas nas equações auto-duais (3.63) nos dá

$$\frac{\delta_{ak} r^2 - r_a r_k}{er^4}(\xi K'(\xi) \mp H(\xi)K(\xi)) + \frac{r_a r_k}{er^4}\Big((K^2 - 1) \mp (\xi H'(\xi) - H(\xi))\Big) = 0, \tag{3.87}$$

usando a linearidade das equações acima, obtemos

$$\xi H' = H \pm (K^2 - 1) \tag{3.88}$$

$$\xi K' = \pm HK, \tag{3.89}$$

sendo estas, as equações auto-duais resultantes da simetria esférica do problema. As equações (3.89) possuem dois graus de liberdade H e K, sendo equações diferenciais

ordinárias dependentes da variável ξ, enquanto que o setor sem restrição de simetria (3.63) possui nove graus de liberdade, sendo três associados aos índices espaciais e, para cada direção espacial existem três graus de liberdade na estrutura interna, sendo estes da álgebra de Lie. Desta forma, as condições de contorno para os campos A_k^a e Φ^a são traduzidas para os campos $H(\xi)$ e $K(\xi)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{H(\xi)}{\xi} &\rightarrow 0 \;\text{ e }\; K(\xi) \rightarrow 1 \;\;, \;\; \text{quando } \;\xi \rightarrow 0 \\ \frac{H(\xi)}{\xi} &\rightarrow 1 \;\text{ e }\; K(\xi) \rightarrow 0 \;\;, \;\; \text{quando } \;\xi \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{3.90}$$

note que as condições para $\xi \rightarrow 0$ garantem uma solução regular na origem, portanto este monopolo magnético apresenta uma solução regular. O comportamento monopolar do ansätz (3.84) pode ser visto ao substituir as condições (3.90) na expressão do campo magnético (3.86), de modo que o comportamento assintótico do campo será da forma Coulombiana, i.e.,

$$B_k \sim \frac{\widehat{r}_k}{e\, r^2}\, \widehat{r}_a T_a, \qquad\qquad r \rightarrow \infty \tag{3.91}$$

onde

$$\widehat{r}_k = \frac{r_k}{r}, \tag{3.92}$$

deste modo, o campo possui um fluxo constante no infinito espacial, além de assumir um comportamento abeliano uma vez que este está em apenas uma direção na álgebra de Lie, sendo a direção dada pelo gerador

$$\widehat{r}_a T_a = \widehat{r} \cdot T. \tag{3.93}$$

A energia desta solução pode ser obtida substituindo o ansätz (3.84) na expressão (3.67)

$$\begin{aligned} \mathrm{H_{BPS}} &= \frac{4\pi a}{e}\left| \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}[2\xi H(\xi)K(\xi)K'(\xi) + (\xi H'(\xi) - H(\xi))(1-K(\xi)^2)]\right| = \\ &= \frac{4\pi a}{e}\left| \int_0^\infty d\xi \frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{H(\xi)}{\xi}\right)(1-K(\xi)^2)\right]\right| = \\ &= \frac{4\pi a}{e}\left|\left(\frac{H(\xi)}{\xi}\right)(1-K(\xi)^2)\Big|_0^\infty\right|. \end{aligned} \tag{3.94}$$

As condições de contorno (3.90) em $\xi = 0$ são condições que implicam na analiticidade para as funções $K(\xi)$ e $H(\xi)/\xi$ e, regularizam os campos B_i e Φ na origem. Deste modo, a expressão (3.94) depende apenas das condições no infinito espacial, i.e.,

$$\mathrm{H_{BPS}} = \frac{4\pi a}{e}\left|(1-K_\infty^2)\left(\frac{H(\xi)}{\xi}\right)_\infty\right| \tag{3.95}$$

Portanto usando as condições no infinito espacial dadas na (3.90), tem-se

$$\mathrm{H_{BPS}} = \frac{4\pi a}{e}. \tag{3.96}$$

As equações auto-duais (3.89), representam o limite BPS da teoria e, com as condições (3.90), possuem soluções analíticas dadas por

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \mp(\xi\coth\xi - 1)\,, \\ K(\xi) &= \mp\frac{\xi}{\sinh\xi}; \end{aligned} \tag{3.97}$$

configurando a solução de monopolo magnético de menor energia dada por (3.96). A escolha do sinal negativo nas equações (3.89) leva a soluções (3.97) com o sinal positivo e a escolha do sinal positivo nas equações (3.89) leva a soluções (3.97) com o sinal negativo. Note que as condições de contorno (3.90) estão associadas às soluções (3.97) com o sinal positivo.

3.2.3 Monopolo de 't Hooft-Polyakov

Como a solução BPS é a solução de menor energia desta teoria, ao recuperar o potencial do Higgs do limite BPS voltamos com o funcional (3.57) e, substituindo o ansätz nas equações de Euler-Lagrange (3.48) obtemos as equações diferenciais ordinárias não lineares

$$\begin{aligned} \xi^2 K'' &= KH^2 + K(K^2-1) \\ \xi^2 H'' &= 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2}H(H^2-\xi^2). \end{aligned} \tag{3.98}$$

As soluções que satisfazem as equações acima são soluções de monopolos magnéticos, chamados de monopolos de 't Hooft-Polyakov. Diferentemente das equações BPS (3.97), as equações (3.98) não possuem soluções analíticas, então, sob a definição do parâmetro β

$$\beta^2 \equiv 2\,\frac{\lambda}{e^2}, \tag{3.99}$$

plotamos algumas das soluções das equações (3.98) para os valores $\beta = \{0.46, 0.61, 0.76, 0.91\}$, veja figura 1.

A energia das soluções dos monopolos magnéticos de 't Hooft-Polyakov ($\lambda > 0$), são as que não saturam a desigualdade (3.68), ou seja,

$$H_{\rm tHP} > \frac{4\,\pi\,a}{e}. \tag{3.100}$$

De maneira geral podemos ver que ao substituir o ansätz (3.84) no funcional (3.68), a energia das soluções de monopolos magnéticos da teoria será dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{H} &= \frac{4\pi a}{e}\int\frac{d\xi}{\xi^2}\left(2(\xi K')^2 + (K^2-1)^2 + 2\,(HK)^2 + (\xi H' - H)^2 + \frac{\lambda}{4}\left(H^2-\xi^2\right)\right) \\ &= \frac{4\pi a}{e}\,F(\lambda) \end{aligned} \tag{3.101}$$

onde devido a (3.67) e a (3.100), a função $F(\lambda)$ satisfaz a desigualdade

$$F(\lambda) \geq 1, \tag{3.102}$$

tendo valor mínimo igual a 1 quando a solução é a de BPS obtida a partir do limite $\lambda \to 0$.

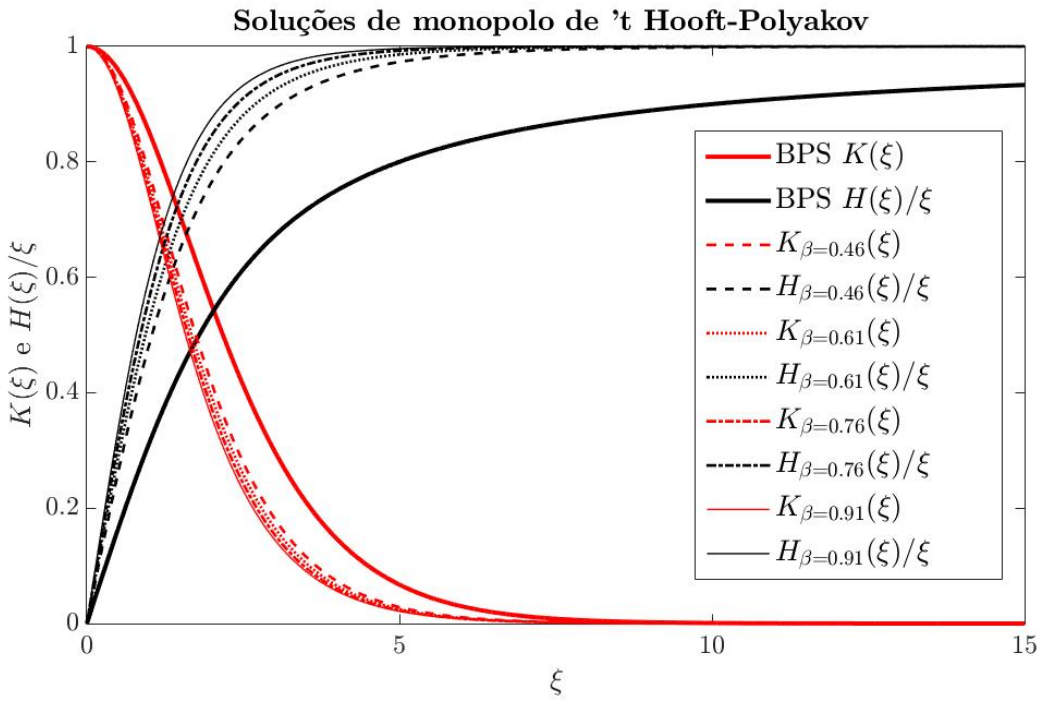


Figura 1 – Soluções numéricas das funções K_{tHP} e H_{tHP} que satisfazem as equações dinâmicas (3.98) usando $\beta^2 = \frac{2\lambda}{e^2}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Yang-Mills-Higgs modificada

Apresentamos a teoria de Yang-Mills-Higgs com a finalidade, antes mencionada, de modificar o seu setor auto-dual e encontrar generalizações para as soluções que o satisfazem, sendo elas, as soluções de monopolo magnético. A ideia é aplicar a modificação decompondo o invariante (3.65) da teoria de Yang-Mills-Higgs na forma (1.8) de modo que a decomposição não altere a representação integral do invariante topológico. Usando então os funcionais (3.58) e introduzindo a matriz k, temos que

$$\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^a_{ij}k_{ab}T_b; \qquad \tilde{\mathcal{A}}' = k^{-1}_{ba}(D_k\Phi)^a T_b. \tag{3.103}$$

É de grande importância notar que k é uma matriz que reside no produto das álgebras de Lie do problema, ou seja,

$$k = k_{ab}T_a \otimes T_b \tag{3.104}$$

sendo T_a os geradores da álgebra. Sobre a mudança (3.103), mantemos a carga topológica pois

$$Q' = \int d^3x\, \mathcal{A}'\tilde{\mathcal{A}}' = \frac{1}{2}\int d^3x\, \epsilon_{kij}\widehat{\mathrm{Tr}}\left(F^a_{ij}k_{ab}T_b\, k^{-1}_{dc}(D_k\Phi)^c T_d\right) \tag{3.105}$$

e sendo

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Tr}}\left(F^a_{ij}k_{ab}T_b\, k^{-1}_{dc}(D_k\Phi)^c T_d\right) &= F^a_{ij}k_{ab}k^{-1}_{bc}(D_k\Phi)^c = \\ &= F^a_{ij}(D_k\Phi)^a = \\ &= \widehat{\mathrm{Tr}}\left(F_{ij}\, D_k\Phi\right),\end{aligned} \tag{3.106}$$

o integrando será invariante

$$Q' = \int d^3x\, \mathcal{A}'\tilde{\mathcal{A}}' = \frac{1}{2}\int d^3x\, \epsilon_{kij}\widehat{\mathrm{Tr}}\left(F_{ij}\, D_k\Phi\right) = \int d^3x\, \mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}} = Q, \tag{3.107}$$

no entanto, tem-se um novo setor auto-dual sob a mudança (3.103), sendo

$$\mathcal{A}' = \pm\tilde{\mathcal{A}}' \tag{3.108}$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^a_{ij}k_{ab} = \pm k^{-1}_{bc}(D_k\Phi)^c. \tag{3.109}$$

Então, definindo uma matriz h simétrica como na expressão (1.10), construímos o setor auto-dual modificado

$$\frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^a_{ij}h_{ab} = \pm(D_k\Phi)^b, \tag{3.110}$$

de modo que, analogamente ao funcional (1.11), o funcional de energia associado ao setor auto-dual (3.110) será

$$\mathrm{H} = \int d^3x\, \left[\frac{1}{4}h_{ab}F^a_{ij}F^b_{ij} + \frac{1}{2}h^{-1}_{ab}(D_k\Phi)^a(D_k\Phi)^b\right], \tag{3.111}$$

lembrando que o tensor dos campos satisfaz a identidade de Bianchi. Note que o setor auto-dual é estático, portanto o funcional a ser trabalhado é a energia do sistema (3.111) de modo que está é igual a carga topológica, i.e.,

$$\mathrm{H} = |Q|. \tag{3.112}$$

Além disso, como a energia é uma quantidade positiva, quando não nula, a matriz h deve ser positiva definida.

De maneira geral, podemos ter a ação

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}\, h_{ab}\, F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu\, b} + \frac{1}{2}\, h^{-1}_{ab}\, \left(D_\mu \Phi\right)^a \left(D^\mu \Phi\right)^b \right], \tag{3.113}$$

que descreve uma nova teoria de Yang-Mills-Higgs, pois esta, diferentemente da teoria usual (3.46), possui um acoplamento com um campo h. Ainda não é claro e certo qual a interpretação física da matriz h, mas perceba que podemos associa-la a uma permeabilidade/permissividade que depende da posição do espaço.

A matriz traz grandes implicações para a teoria de gauge em questão, a primeira é a simplificação na obtenção dos campos via auto-dualidade. Sabemos que a auto-dualidade já providencia soluções das equações Euler-Lagrange de uma teoria física via equações diferenciais de primeira ordem e, a introdução da matriz h, torna as equações auto-duais em simples equações algébricas. Podemos ver que ao definir as matrizes:

$$\tau_{ab} = \frac{1}{2}\, F^a_{ij} F^b_{ij} = B^a_k B^b_k; \qquad \omega_{ab} = (D_k\Phi)^a (D_k\Phi)^b; \qquad \sigma_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} (D_k\Phi)^a F^b_{ij}; \tag{3.114}$$

podemos reescrever o setor auto-dual em termos de equações matriciais; contraindo as equações (3.110) com $\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F^d_{jk}$

$$\frac{1}{2}\, F^d_{ij} F^a_{ij} h_{ab} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^d_{ij} (D_k\Phi)^b, \tag{3.115}$$

podemos substituir pelas matrizes (3.114) reescrevendo na forma

$$\tau_{da} h_{ab} = \pm \sigma_{db}. \tag{3.116}$$

Impondo que τ é inversível, temos que a matriz h é dada por

$$h_{ab} = \pm \tau^{-1}_{ad} \sigma_{db}. \tag{3.117}$$

Se τ não for inversível a matriz h será indeterminada.

A matriz σ carrega uma quantidade fundamental do sistema, a densidade de carga topológica, expressada em termos dos auto-valores de σ, isto é,

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3x\, \epsilon_{ijk} (D_k\Phi)^a F^a_{ij} = \int d^3x\, \widehat{\mathrm{Tr}}\left(\sigma\right). \tag{3.118}$$

Através da equação (3.117), podemos ver que conhecendo as soluções dos campos F_{ij} e Φ, a matriz h está completamente determinada. No caso em que h é conhecida e os campos não, em vez de uma simples equação algébrica, o setor auto-dual (3.116) constituirá um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para os campos A_k e Φ. A necessidade de impor condições sobre os campos, isto é, conhecer a forma seja de h ou dos campos de gauge e Higgs para resolver completamente o setor modificado, é consequência da existência de mais graus de liberdades do que vínculos. No caso usual $h = \mathbb{I}$, o setor auto-dual junto com a identidade de Bianchi são suficientes para definir completamente as soluções, já no caso modificado temos que os campos

$$\frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^a_{ij}, \qquad \Phi^a, \qquad h_{ab}, \tag{3.119}$$

ao todo possuem 18 graus de liberdade, 9 graus associados ao tensor dos campos resultantes das 3 componentes da álgebra de Lie para cada componente espacial; 3 do campo de Higgs na representação adjunta e 6 da matriz h. No entanto, o setor auto-dual modificado vincula 9 graus de liberdade e a identidade de Bianchi vincula 3, resultando em um sistema físico com 18 graus de liberdade e 12 vínculos, deixando 6 variáveis livres.

As equações de Euler-Lagrange são obtidas a partir de variações nos campos h_{ab}, A_μ e Φ, deste modo, considerando as variações

$$\begin{aligned}
\delta\, F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta\, A_\nu - \partial_\nu \delta\, A_\mu + i\, e\, ([\,\delta\, A_\mu\,,\, A_\nu\,] + [\,A_\mu\,,\,\delta\, A_\nu\,]) \\
\delta\, D_\mu \Phi &= i\, e\, [\,\delta\, A_\mu\,,\,\Phi\,] \\
\delta h^{-1}_{ab} &= -h^{-1}_{ad}\delta h_{dc} h^{-1}_{cb}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\delta\, S &= \int d^4x \Big[-\frac{1}{4}\delta h_{ab} F^{\mu\nu\, a} F^b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{-1}_{ad}\delta h_{dc} h^{-1}_{cb} (D_\mu\Phi)^a (D^\mu\Phi)^b - \\
&- \frac{1}{2}\Big[h_{ab}\, (\partial_\mu \delta\, A_\nu + i\, e\, [\,\delta\, A_\mu\,,\, A_\nu\,])^a\, F^{\mu\nu\, b} + h_{ab}\, F^a_{\mu\nu}\, (\partial^\mu \delta\, A^\nu + i\, e\, [\,\delta\, A^\mu\,,\, A^\nu\,])^b \Big] \\
&+ \frac{1}{2}\Big(i\, e\, h^{-1}_{ab}\, ([\,\delta\, A_\mu\,,\,\Phi\,])^a\, (D^\mu\Phi)^b + i\, e\, h^{-1}_{ab}\, (D_\mu\Phi)^a\, ([\,\delta\, A^\mu\,,\,\Phi\,])^b \Big) \\
&+ \frac{1}{2}\, [h^{-1}_{ab}\, (D_\mu\delta\Phi)^a\, (D^\mu\Phi)^b + h^{-1}_{ab}\, (D_\mu\Phi)^a\, (D^\mu\delta\Phi)^b] \Big],
\end{aligned} \tag{3.121}$$

separando os termos de variação temos

$$\begin{aligned}
\delta\, S &= \int d^4x \Big[\Big(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu\, a} F^b_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{-1}_{da} h^{-1}_{bc} (D_\mu\Phi)^d (D^\mu\Phi)^c \Big)\, \delta h_{ab} + \\
&+ (D_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + i\, e\, [\,\Phi\,,\, \mathcal{D}^\nu\Phi\,])^a\, \delta A^a_\nu + (D_\mu \mathcal{D}^\mu \Phi)^a\, \delta\Phi^a \\
&+ \partial_\mu \Big(h_{ab} F^{\mu\nu\, a} \delta A^b_\nu \Big) + \partial_\mu \Big(h^{-1}_{ab}\, (D^\mu\Phi)^a\, \delta\Phi^b \Big) \Big],
\end{aligned} \tag{3.122}$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv h_{ab} F^{\mu\nu\, a} T_b$ e $\mathcal{D}^\mu\Phi \equiv h^{-1}_{ab}\, (D^\mu\Phi)^a\, T_b$. A última linha corresponde apenas aos termos de superfície, portanto, fixados os campos nas bordas, estes termos não contribuem

para a dinâmica do sistema, de forma que as equações de Euler-Lagrange para h_{ab}, A_μ e Φ serão

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F^{\mu\nu\,a}F^{b}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}h^{-1}_{da}h^{-1}_{bc}(D_\mu\Phi)^d(D^\mu\Phi)^c, \\ D_\mu\left(h_{ab}F^{\mu\nu\,a}\right) &= -i\,e\,\left([\,\Phi\,,\,\mathcal{D}^\nu\Phi\,]\right)^b, \\ D_\mu\left(h^{-1}_{ab}\left(D^\mu\Phi\right)^a\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.123}$$

O setor auto-dual modificado (3.110) define um setor estático do sistema tendo a energia como um invariante, e satisfaz automaticamente a equação dinâmica para h_{ab} na condição

$$F_{0i} = 0, \qquad\qquad D_0\Phi = 0 \tag{3.124}$$

onde as equações dinâmicas são

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F^{a}_{ij}F^{b}_{ij} &= \frac{1}{2}h^{-1}_{da}h^{-1}_{bc}(D_k\Phi)^d(D_k\Phi)^c, \\ D_k\left(h_{ab}F^{a}_{kj}\right) &= i\,e\,\left([\,\Phi\,,\,\mathcal{D}_j\Phi\,]\right)^b, \\ D_k\left(h^{-1}_{ab}\left(D_k\Phi\right)^a\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Todas as soluções que satisfazem as três equações acima tem energia dada pelo funcional (3.111). Note que as soluções com energia diferente de zero possuem a mesma carga topológica, portanto, a mesma carga magnética, uma vez que a carga magnética é dada através da relação (3.78)

A teoria descrita pelo funcional (3.113), não só possui simetria de Poincaré como, de maneira mais geral, tem simetria conforme espacial, como verificado no apêndice (B). Tal simetria é existente apenas devido a presença dos campos h, está possibilita a construção de uma infinidade de soluções para a teoria e nos foi útil na obtenção dos ansätze apresentados nas próximas seções.

Além do grupo de transformações espaciais, é importante verificar como os campos h transformam sobre as transformações de gauge. Na representação adjunta o tensor dos campos e a derivada covariante do Higgs transformam sobre conjugação

$$\begin{aligned} F_{ij} &\to g\,F_{ij}\,g^{-1}, \\ D_k\Phi &\to g\,D_k\Phi\,g^{-1}, \end{aligned} \tag{3.126}$$

sendo h_{ab} um tensor de rank 2 na álgebra de Lie, isto é,

$$h = h_{ab}T_a \otimes T_b, \tag{3.127}$$

então para cada um de seus índices a transformação será uma conjugação, ou seja,

$$g \otimes g\,h\,g^{-1} \otimes g^{-1} = h_{ab}\,gT_ag^{-1} \otimes gT_bg^{-1} \tag{3.128}$$

garantindo que o setor auto-dual será covariante de gauge, transformando sobre conjugações, i.e.,

$$\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\,\mathrm{ad}_{bc}(g)\,F^a_{ij}h_{ab} = \pm\,\mathrm{ad}_{cb}(g)\,(D_k\Phi)^b \tag{3.129}$$

e uma vez que o funcional de energia (3.111) é obtido sobre o traço destas quantidades, este permanece invariante sobre transformações de gauge.

Verificamos que as configurações descritas pelo funcional de energia (3.111) não são completamente determinadas pela auto-dualidade e possuem infinitas soluções, nos garantindo liberdade na obtenção de soluções. Além disso, a nova teoria possui um grupo de simetria maior que a teoria de Yang-Mills-Higgs usual, devido a simetria do grupo conforme espacial. Portanto, a nova teoria constitui uma teoria de Yang-Mills-Higgs generalizada, e fazendo uso de suas simetrias e de sua liberdade na busca de soluções, fomos capazes de encontrar duas famílias de soluções que serão apresentadas nas próximas seções.

3.3.1 Solução esférica

Uma vez construída a teoria modificada é interessante encontrar soluções que a satisfaçam, com o intuito de desvendar as informações carregadas por ela, vamos começar utilizando o que é conhecido, isto é, uma solução estática e pontual, fixada em um lugar do espaço e invariante por rotação, portanto, uma solução com simetria esférica e, como bem sabemos este é o ansätz obtido por 't Hooft e Polyakov, o qual construímos na subseção (C.1), sendo as expressões (3.84). Portanto, usando este ansätz somos levados as seguintes expressões para τ, σ e ω

$$\tau_{ab} = \frac{\delta_{ab}-\hat{r}_a\hat{r}_b}{e^2r^4}(\xi K'(\xi))^2 + \frac{\hat{r}_a\hat{r}_b}{e^2r^4}(K^2(\xi)-1)^2; \tag{3.130}$$

$$\sigma_{ab} = -\frac{\delta_{ab}-\hat{r}_a\hat{r}_b}{e^2r^4}(\xi K'(\xi))(H(\xi)K(\xi)) + \frac{\hat{r}_a\hat{r}_b}{e^2r^4}(1-K^2(\xi))(\xi H'(\xi)-H(\xi)); \tag{3.131}$$

$$\omega_{ab} = \frac{\delta_{ab}-\hat{r}_a\hat{r}_b}{e^2r^4}(H(\xi)K(\xi))^2 + \frac{\hat{r}_a\hat{r}_b}{e^2r^4}(\xi H'(\xi)-H(\xi))^2, \tag{3.132}$$

lembrando que $\xi = a\,e\,r$, onde a é o valor esperado do vácuo do Higgs, e a constante de acoplamento e r a distância radial com relação a origem. Assim podemos construir h em termos das funções $K(\xi)$ e $H(\xi)$, sendo portanto

$$h_{ab} = \pm\left((\delta_{ab}-\hat{r}_a\hat{r}_b)\frac{H(\xi)K(\xi)}{(\xi K'(\xi))} + \hat{r}_a\hat{r}_b\frac{(\xi H'(\xi)-H(\xi))}{(K^2(\xi)-1)}\right). \tag{3.133}$$

Note que a matriz h dependerá apenas de dois graus de liberdade e deste modo, podemos reescrever h como

$$h_{ab} = \delta_{ab}f + (g-f)\hat{r}^a\hat{r}^b, \tag{3.134}$$

onde as funções $f(\xi)$ e $g(\xi)$ se relacionam com os campos de gauge e Higgs através da (3.133), ou seja, as equações auto-duais, sendo

$$f = \pm\frac{HK}{\xi K'} \quad \text{e} \quad g = \pm\frac{\xi H'-H}{(K^2-1)}. \tag{3.135}$$

Para fins práticos, é interessante diagonalizar a matriz h e encontrar a relação de seus auto-valores com $f(\xi)$ e $g(\xi)$, sendo o traço e o determinante da matriz dados por

$$\widehat{\mathrm{Tr}}(h) = 2\,f(\xi) + g(\xi), \qquad\qquad \det(h) = f(\xi)^2\,g(\xi) \tag{3.136}$$

é fácil ver que a matriz diagonal será

$$h_D = \mathrm{diag}\left(f(\xi), f(\xi), g(\xi)\right). \tag{3.137}$$

Como h é uma matriz simétrica, a obtenção da matriz diagonal pode ser feita através da conjugação de uma matriz ortogonal, i.e.,

$$h = \mathrm{P}\,h_D\,\mathrm{P}^{\mathrm{T}}, \qquad\qquad \mathrm{P}\,\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = \mathbb{I} \tag{3.138}$$

onde

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{r}_2-\hat{r}_3}{\sqrt{2(1-(\hat{r}_1\hat{r}_2+\hat{r}_1\hat{r}_3+\hat{r}_2\hat{r}_3))}} & \frac{\hat{r}_1(\hat{r}_2+\hat{r}_3)-(1-\hat{r}_1\,\hat{r}_1)}{\sqrt{2(1-(\hat{r}_1\hat{r}_2+\hat{r}_1\hat{r}_3+\hat{r}_2\hat{r}_3))}} & \hat{r}_1 \\ \frac{\hat{r}_3-\hat{r}_1}{\sqrt{2(1-(\hat{r}_1\hat{r}_2+\hat{r}_1\hat{r}_3+\hat{r}_2\hat{r}_3))}} & \frac{\hat{r}_2(\hat{r}_1+\hat{r}_3)-(1-\hat{r}_2\,\hat{r}_2)}{\sqrt{2(1-(\hat{r}_1\hat{r}_2+\hat{r}_1\hat{r}_3+\hat{r}_2\hat{r}_3))}} & \hat{r}_2 \\ \frac{\hat{r}_1-\hat{r}_2}{\sqrt{2(1-(\hat{r}_1\hat{r}_2+\hat{r}_1\hat{r}_3+\hat{r}_2\hat{r}_3))}} & \frac{\hat{r}_3(\hat{r}_1+\hat{r}_2)-(1-\hat{r}_3\,\hat{r}_3)}{\sqrt{2(1-(\hat{r}_1\hat{r}_2+\hat{r}_1\hat{r}_3+\hat{r}_2\hat{r}_3))}} & \hat{r}_3 \end{pmatrix}. \tag{3.139}$$

Desta forma, concluímos que se h deve ser positiva definida, então

$$f(\xi), g(\xi) \geq 0, \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Note que as matrizes (3.130), (3.132) e (3.134) comutam entre si, portanto, compartilham o mesmo espaço de autovetores, ou seja, uma vez h diagonalizada as outras matrizes serão simultaneamente diagonalizadas, e além disso, o funcional é invariante sob ação desta conjugação. Sendo assim, podemos trabalhar apenas com a forma diagonal das matrizes

$$\tau_D = \frac{1}{e^2\,r^4}\,\mathrm{diag}\left((\xi K')^2,\,(\xi K')^2,\,(K^2-1)^2\right), \tag{3.140}$$

$$\omega_D = \frac{1}{e^2\,r^4}\,\mathrm{diag}\left((H\,K)^2,\,(H\,K)^2,\,(\xi H'-H)^2\right), \tag{3.141}$$

$$\sigma_D = \frac{1}{e^2\,r^4}\,\mathrm{diag}\left(\xi K'KH,\,\xi K'KH,\,(1-K^2)(\xi H'-H)\right). \tag{3.142}$$

Temos de forma explícita, a partir da matriz σ (3.118), a densidade de carga topológica

$$\widehat{\mathrm{Tr}}(\sigma) = \frac{a^4\,e^2}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left((1-K^2)\,\frac{H}{\xi}\right), \tag{3.143}$$

então, a carga topológica da solução é

$$Q = \int d^3x\,\widehat{\mathrm{Tr}}(\sigma) = \frac{4\,\pi\,a}{e}\left[(1-K_\infty^2)\,\left(\frac{H}{\xi}\right)_\infty\right], \tag{3.144}$$

note que a carga depende das condições no infinito espacial, pois fazemos uso das condições (3.90) na origem do espaço a fim de se ter o campos regulares e, $K(\xi)$ e $H(\xi)$ analíticos na

origem. Consequentemente, a carga magnética da solução, que pode ser calculada através da relação (3.78), será

$$Q_m = \frac{Q}{a} = \frac{4\,\pi}{e}\left[(1-K_\infty^2)\left(\frac{H}{\xi}\right)_\infty\right]. \tag{3.145}$$

Mantivemos as condições (3.90) na origem a fim de se ter a condição de analiticidade para as funções $K(\xi)$ e $H(\xi)$, já as condições no infinito espacial, que na teoria usual (3.57) eram estabelecidas para se ter energia finita, na teoria modificada (3.111) são livres, pois a presença da matriz h pode regularizar divergências mantendo a energia constante. Note que a energia constante é estabelecida por construção através da auto-dualidade (3.112). No entanto, a característica monopolar ocorre devido ao comportamento assintótico dos campos (3.86), de modo que o campo magnético ganhe uma forma Coulombiana quando o Higgs atinge uma configuração constante, satisfazendo as condições (3.51). Atribuir outros valores constantes para K_∞ e H_∞, com H_∞ não nulo a fim de se ter uma amplitude constante para o campo de Higgs, faz com que a derivada covariante no infinito espacial

$$D_k\Phi \sim \left(\frac{H}{\xi}\right)_\infty D_k\left(\frac{r^a}{r}\right) = \left(\frac{H}{\xi}\right)_\infty K_\infty\left(T_k - (\widehat{r}\cdot T)\,\widehat{r}^k\right); \qquad r\to\infty \tag{3.146}$$

não se anule, implicando a não existência de um grupo de estabilidade $U(1)$ do Higgs no infinito espacial. Portanto, para o Higgs ter amplitude constante e ser covariantemente constante no infinito espacial deve-se manter as condições

$$\left(\frac{H}{\xi}\right)_\infty = 1; \qquad K_\infty = 0, \tag{3.147}$$

implicando que a carga magnética abeliana (3.145) das soluções esféricas da teoria modificada será a mesma da teoria usual, i.e.,

$$Q_m = \frac{4\,\pi}{e} \tag{3.148}$$

Podemos impor que o Higgs não seja covariantemente constante no infinito espacial e encontrar soluções para tal condição, mas não é do nosso interesse uma vez que estaríamos nos distanciando da física inicial e trabalhando com um Higgs fora de sua configuração constante.

Estabelecemos completamente o espaço de soluções simetricamente esféricas da teoria modificada, uma vez que para construir uma dada configuração de campos temos dois caminhos: um é através da imposição de comportamentos para $H(\xi)$ e $K(\xi)$ que, automaticamente condiciona o comportamento da matriz h pela auto-dualidade não sendo necessário resolver equações diferenciais, e o segundo, trata-se do caminho inverso ao primeiro, ou seja, através da definição do comportamento para h, neste caso a obtenção de $H(\xi)$ e $K(\xi)$ é feita através de equações diferenciais definidas pelo setor auto-dual.

3.3.1.1 Uma motivação para buscar soluções

Podemos construir diversas soluções para a nova teoria, isto é, como pode ser visto nas equações (3.135), quaisquer que sejam as escolhas feitas para $H(\xi)$ e $K(\xi)$ construímos uma matriz h ou qualquer que seja a escolha da matriz h podemos investigar e possivelmente encontrar soluções para $H(\xi)$ e $K(\xi)$. Tendo toda essa liberdade podemos passar um longo tempo procurando por soluções, explorando um quarto escuro que é o conjunto infinito destas soluções, portanto, temos que usar a física como nossa lanterna a fim de encontrar saídas as quais serão as soluções de maior interesse. Portanto, usando soluções fora do limite de Prasad-Sommerfield, isto é, as soluções não BPS da teoria usual que satisfazem as equações (3.98) e, lançando mão da liberdade na construção da matriz h, encontramos um setor auto-dual gerado por estas soluções, em outras palavras, usaremos a solução de uma teoria com um potencial (3.57) para construir uma teoria auto-dual descrita pelo funcional de energia (3.111) sem a presença de um potencial.

Tomando as soluções das equações dinâmicas de 't Hooft-Polyakov (3.98) K_{tHP} e H_{tHP}, por construção, estas soluções satisfazem uma teoria modificada na forma (3.111). De modo que, através das equações auto-duais (3.135), podemos construir as funções $f(\xi)$ e $g(\xi)$ que definem h, isto é,

$$f = -\frac{H_{\text{tHP}} K_{\text{tHP}}}{\xi K'_{\text{tHP}}} \quad \text{e} \quad g = -\frac{\xi H'_{\text{tHP}} - H_{\text{tHP}}}{(K^2_{\text{tHP}} - 1)}, \tag{3.149}$$

tal que a escolha do sinal negativo é devido a necessidade das componentes f e g serem positivas de forma que a matriz h seja positiva definida. A partir das soluções numéricas mostradas na figura 1 construímos numericamente o perfil das funções $f(\xi)$ e $g(\xi)$ via (3.149) plotando para os seguintes valores de $\beta = \{0.46, 0.61, 0.76, 0.91\}$, veja figura 2, onde β é dado na expressão (3.99). Note que os valores de contorno de f_β e g_β diferem de 1 implicando que h das equações auto-duais que os monopolos de 't Hooft-Polyakov será diferente da identidade em todo o espaço, além disso, para um mesmo parâmetro β, as funções f_β e g_β possuem o mesmo valor na origem. Podemos verificar analiticamente a consistência dos valores de contorno das funções f e g obtidas numericamente (mostradas na figura 2), através de perturbações nas equações (3.98). De fato, verificamos analiticamente que no limite de $\xi \to 0$, as funções (3.149) devem ser iguais, para isso devemos analisar as equações (3.98) expandindo em torno da origem, portanto, expandindo as funções K_{tHP} e H_{tHP} em torno da origem na forma

$$K_{\text{tHP}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \xi^n \; ; \qquad \frac{H_{\text{tHP}}}{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, \xi^n, \tag{3.150}$$

verificamos, ao substituir nas equações dinâmicas de 't Hooft-Polyakov (3.98) que

$$\begin{aligned} K_{\text{tHP}} &= 1 + a_2 \, \xi^2 + \mathcal{O}\left(\xi^4\right) \; ; \\ \frac{H_{\text{tHP}}}{\xi} &= b_1 \, \xi + \frac{1}{5} \left(2 \, a_2 \, b_1 - \beta^2\right) \xi^3 + \mathcal{O}\left(\xi^4\right), \end{aligned} \tag{3.151}$$

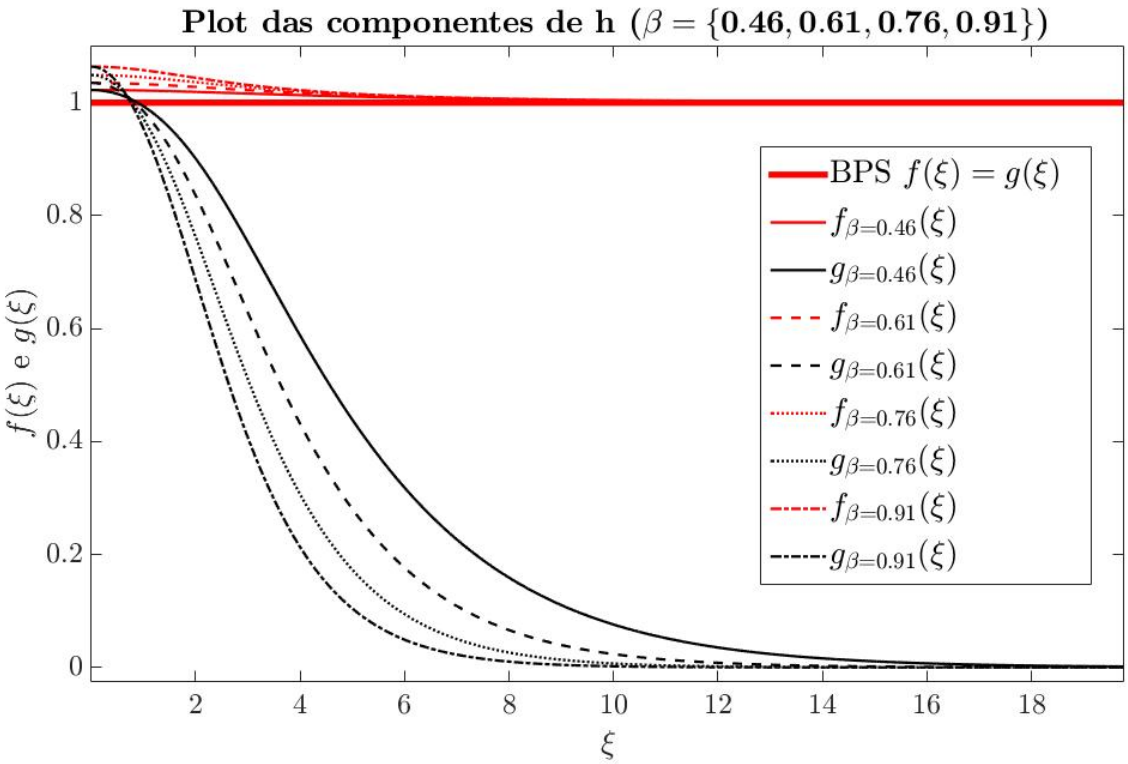


Figura 2 – Solução das funções (3.149) usando as soluções numéricas 1 obtidas pela função BVP5C do MATLAB usando $\beta^2 = \frac{2\lambda}{e^2}$. As funções BPS f, g estão associadas a $h = 1$, isto é, ao setor BPS da teoria usual de Yang-Mills-Higgs.

Fonte: Elaborada pelo autor.

note que não fizemos uso das condições de contorno (3.90) na origem mas elas reapareceram na expansão das funções em torno da origem. Como já mencionado, as condições em $\xi = 0$ estão associadas a condição de analiticidade das funções, portanto, quando realizamos a expansão (3.150) já estamos considerando que as funções K_{tHP} e $\frac{H_{\text{tHP}}}{\xi}$ são analíticas em torno da origem espacial implicando na obtenção das condições em torno de $\xi = 0$. Substituindo as expansões (3.151) nas expressões (3.149) obtemos então que f_β e g_β são iguais na origem espacial, i.e.,

$$f_\beta \to -\frac{b_1}{2\,a^2}\ ; \qquad g_\beta \to -\frac{b_1}{2\,a^2}\ ; \qquad \xi \to 0. \tag{3.152}$$

O valor de b_1 depende das condições do comportamento das funções no infinito espacial.

Para analisar o comportamento assintótico, realizamos perturbações em torno de ξ grande, deste modo, usando as condições (3.90), perturbamos a função $H(\xi)$ em torno de seu valor de contorno com uma função perturbação $\alpha(\xi)$, isto é, $H(\xi) = \alpha(\xi) + \xi$, onde $\alpha(\xi)$ vai a zero quando ξ vai a infinito, e para a função $K(\xi)$ tratamos a própria função como o termo perturbativo, uma vez que que esta vai a zero no limite em que ξ vai a infinito. Portanto substituindo as perturbações nas equações (3.98) e levando em conta os

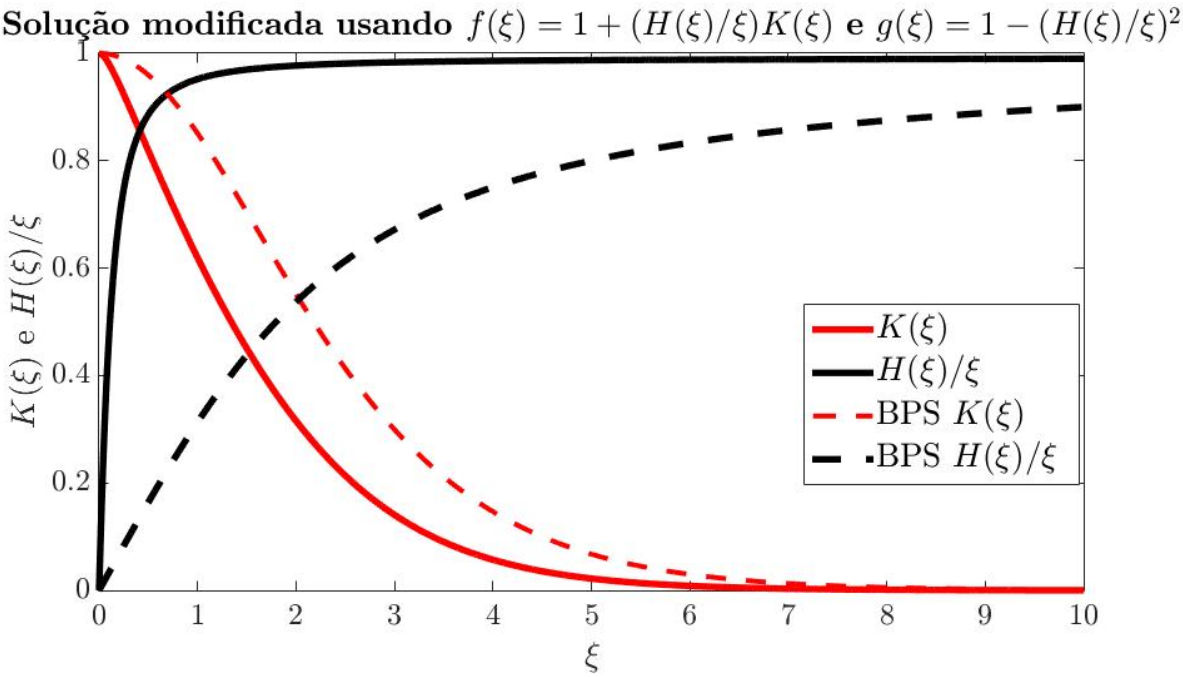


Figura 3 – Gráfico da solução numérica de $K(\xi)$ e $H(\xi)$ obtidos usando as funções (3.160), sendo BPS $K(\xi)$ e BPS $H(\xi$ as soluções BPS da teoria usual (3.97). O gráfico foi obtido usando a função BVP5C do MATLAB.

Fonte: Elaborada pelo autor.

termos de maior contribuição obtemos as equações

$$K'' = K \quad \text{e} \quad \alpha'' = \frac{2\lambda}{e^2}\alpha, \tag{3.153}$$

resultando em equações diferenciais de segunda ordem lineares, cujas soluções são

$$K(\xi) \sim A\exp(-\xi) \quad \text{e} \quad H(\xi) \sim B\exp\left(-\frac{\sqrt{2\lambda}}{e}\xi\right) + \xi\,; \qquad \xi \to \infty, \tag{3.154}$$

levando através das equações (3.135) os seguintes comportamentos assintóticos para $f(\xi)$ e $g(\xi)$

$$\begin{aligned} f(\xi) &\approx \frac{1}{\xi}B\exp\left(-\frac{\sqrt{2\lambda}}{e}\xi\right) + 1 \to 1 \\ g(\xi) &\approx \frac{B(\frac{\sqrt{2\lambda}}{e}\xi + 1)}{A^2\exp(-2\xi) - 1}\exp\left(-\frac{\sqrt{2\lambda}}{e}\xi\right) \to 0. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Note que quanto maior for o acoplamento com o potencial na teoria de Yang-Mills-Higgs mais rápido h atinge suas condições de contorno na teoria modificada. Associado a isso, temos uma intrigante observação, a energia do sistema do monopolo de 't Hooft-Polyakov, ou seja, da teoria usual (3.57), como bem vimos (3.100) depende de uma função de λ:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{tHP}} = \frac{4\pi\, a}{e}\, F(\lambda), \tag{3.156}$$

já na teoria auto-dual modificada construída a partir das soluções 't Hooft-Polyakov, tem seguinte valor

$$\mathrm{H} = |Q| = \frac{4\pi\, a}{e}. \tag{3.157}$$

Portanto na teoria descrita pela energia (3.111), com h construído pelas funções (3.149), diferentes valores de λ fornecem diferentes soluções de campo possuindo a mesma energia.

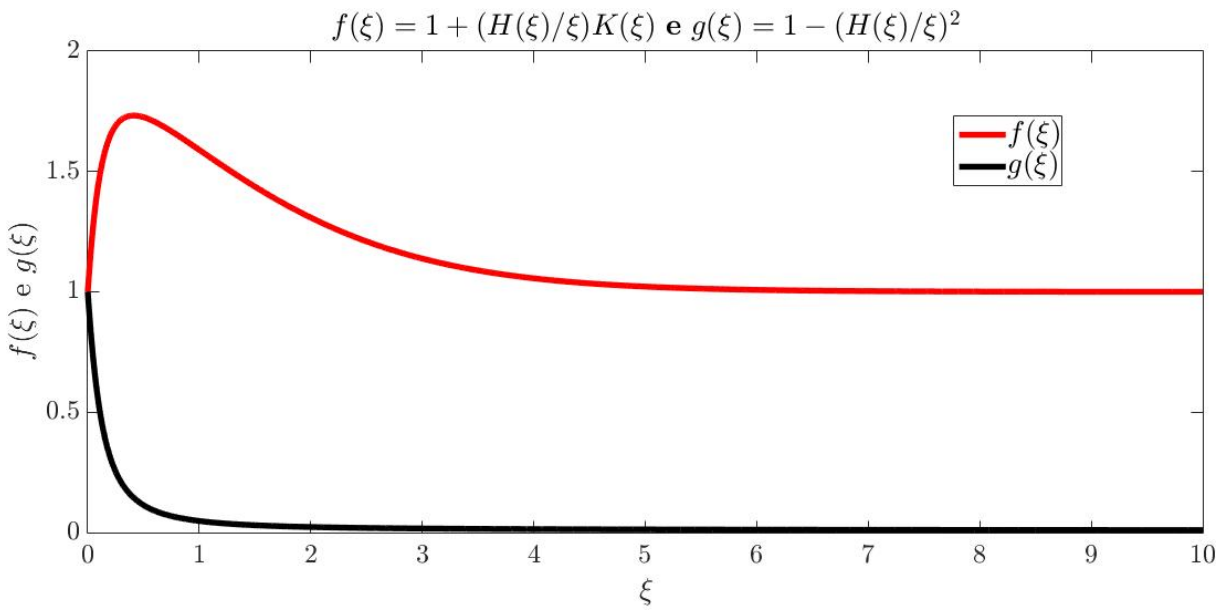


Figura 4 – Gráfico de $f(\xi)$ e $g(\xi)$, componentes da matriz h, da teoria BPS modificada. O gráfico foi obtido usando a função BVP5C do MATLAB.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Inspirados no trabalho,[26] nós definimos f e g em termos dos campos H e K para explorar comportamentos de h, lembrando que, podemos tomar uma infinidade de comportamentos para construir novas soluções. Usando as seguintes condições de contorno para $f(\xi)$ e $g(\xi)$

$$f(\xi) \to 1 \quad \text{e} \quad g(\xi) \to 1, \quad \text{quando} \quad \xi \to 0 \tag{3.158}$$

$$f(\xi) \to 1 \quad \text{e} \quad g(\xi) \to 0, \quad \text{quando} \quad \xi \to \infty, \tag{3.159}$$

escolhemos as condições tal que na origem as equações auto-duais são as mesmas que no caso BPS da teoria usual ($h = \mathbb{I}$), e no infinito tomamos os valores de contorno para h como sendo os mesmos obtidos na análise (3.155). Portanto podemos construir $f(\xi)$ e $g(\xi)$ na forma

$$f = 1 + \left(\frac{H}{\xi}\right)K, \quad \text{e} \quad g = 1 - \left(\frac{H}{\xi}\right)^2, \tag{3.160}$$

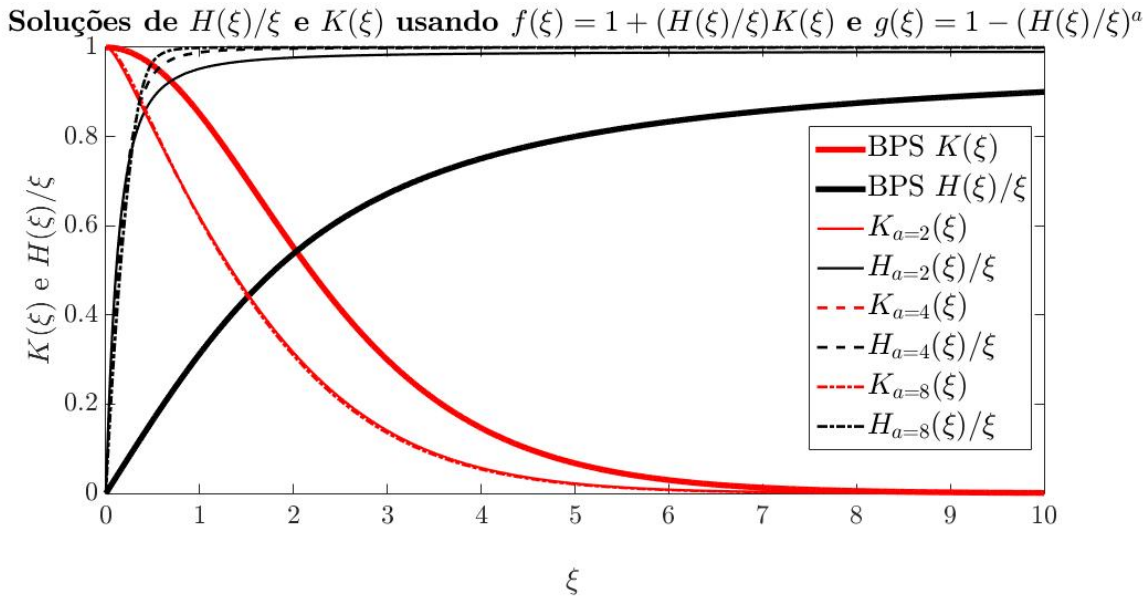


Figura 5 – Gráfico das soluções numéricas $K_a(\xi)$ e $H_a(\xi)$ da teoria BPS modificada, sendo BPS $K(\xi)$ e BPS $H(\xi)$ as soluções BPS da teoria usual (3.97). O gráfico foi obtido usando a função BVP5C do MATLAB.

Fonte: Elaborada pelo autor.

deste modo, para h ser positiva-definida devemos escolher o sinal negativo das equações (3.135), isto é, as equações que devemos resolver serão

$$K' = -\frac{1}{1+(\frac{H}{\xi})K}\left(\frac{H}{\xi}\right)K \quad \text{e} \quad \left(\frac{H}{\xi}\right)' = \frac{1}{\xi^2}\left(1-\left(\frac{H}{\xi}\right)^2\right)(1-K^2), \tag{3.161}$$

Resolvendo numericamente as equações acima obtemos as soluções para $K(\xi)$ e $H(\xi)$ mostradas na figura 3, onde comparamos com as soluções BPS $K(\xi)$ e $H(\xi)$ da teoria usual, sendo as soluções (3.97). O comportamento de $f(\xi)$ e $g(\xi)$ definido na (3.160) pode ser visto na figura 4. Note que as soluções mostradas na figura 3 decaem mais rapidamente do que as soluções do monopolo BPS da teoria usual. Deste modo, podemos atribuir parâmetros na definição dos perfis $f(\xi)$ e $g(\xi)$ em busca de obter soluções que se comparem com as soluções do monopolo de 't Hooft-Polyakov (figura 1). Então, redefinimos a função $g(\xi)$ como

$$g_a(\xi) = 1 - \left(\frac{H(\xi)}{\xi}\right)^a, \tag{3.162}$$

e mantemos $f(\xi)$ como na definição em (3.160), de modo que as equações auto-duais a serem resolvidas serão dadas por

$$K' = -\frac{1}{1+(\frac{H}{\xi})K}\left(\frac{H}{\xi}\right)K \quad \text{e} \quad \left(\frac{H}{\xi}\right)' = \frac{1}{\xi^2}\left(1-\left(\frac{H}{\xi}\right)^a\right)(1-K^2). \tag{3.163}$$

Tal mudança, com $a > 0$, contribui para o decaimento mais rápido de $g(\xi)$ para 0, o que leva a solução H_a/ξ ir mais rapidamente para 1 do que a solução BPS da teoria usual

(veja figura 5). Quanto maior a, mais rapidamente H_a/ξ atinge sua condição de contorno, enquanto $K_a(\xi)$ mantém um comportamento similar para diferentes valores de a. Note que na figura 6, usando as expressões (3.163) para as funções $f(\xi)$ e $g(\xi)$, obtemos para diferentes valores de a perfis muito próximos de um bom fit para a solução do monopolo 't Hooft-Polyakov usando $\beta = 10$. Tal análise pode ser feita usando outro valor de β para as soluções de 't Hooft-Polyakov.

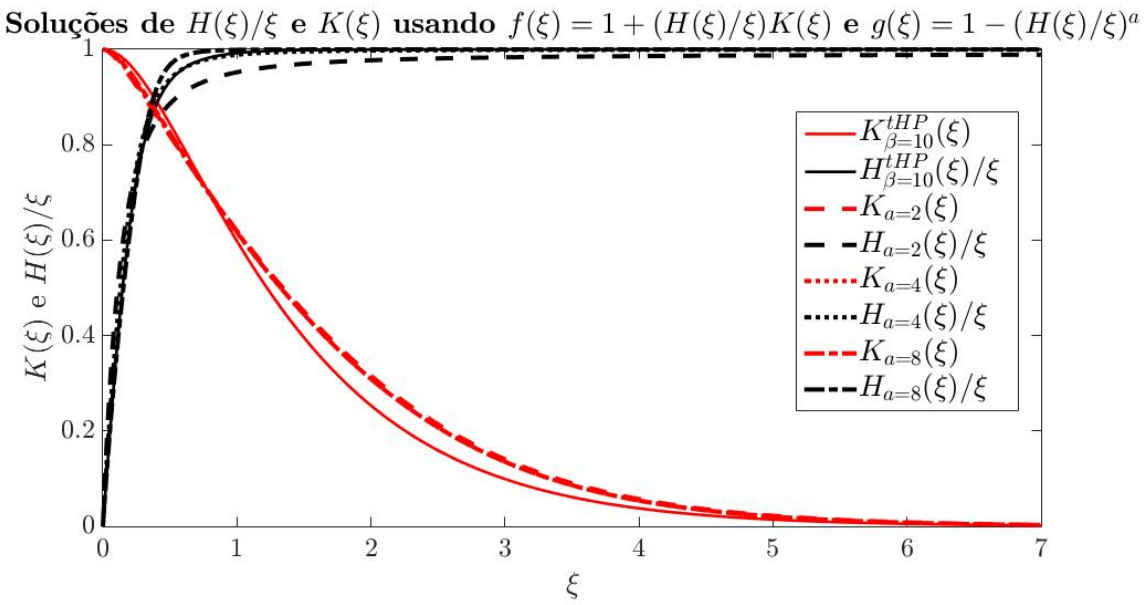


Figura 6 – As funções $K^{tHP}_{\beta=10}(\xi)$ e $H^{tHP}_{\beta=10}(\xi)$ são soluções das equações (3.98) usando $\beta = 10$, e as funções $K_a(\xi)$ e $H_a(\xi)$ são soluções das equações (3.163), a teoria BPS modificada. O gráfico foi obtido usando a função BVP5C do MATLAB.

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.2 Solução toroidal

Exploramos a simetria esférica da teoria para encontrar novas soluções usando o monopolo de 't Hooft-Polyakov como um guia, porém, como vimos, a teoria é muito mais rica já que ela possui simetria conforme espacial (B.5), de modo que se torna possível a construção de uma família de soluções invariantes sobre as transformações conforme espaciais via método de Lie. Neste caso, a escolha dos geradores no uso do método torna-se mais complexa que o caso da simetria esférica, onde a álgebra das rotações espaciais (subgrupo do grupo conforme) é isomorfa ao grupo de gauge de maneira que as rotações espaciais compensem as transformações de gauge do $SU(2)$. Sendo assim, vamos fazer uso de dois subgrupos $U(1)$ pertencentes ao grupo conforme a fim de compensar as transformações de gauge do $U(1)$ gerado por T_3 pertencente ao $SU(2)$. Portanto, inspirados na obtenção das soluções conforme para o modelo de Skyrme auto-dual no artigo,[3] escolheremos o

subgrupo composto pelas rotações no plano x_1x_2 e pela transformação conforme especial tal que

$$\begin{aligned}\partial_\phi &= x_1\partial_2 - x_2\partial_1;\\ \partial_\xi &= \frac{x_3}{a}(x_1\partial_1 + x_2\partial_2) + \frac{1}{2a}(a^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)\partial_3;\end{aligned} \tag{3.164}$$

onde os geradores ∂_ξ, ∂_ϕ junto com ∂_z compõe o sistema de coordenadas toroidais definidas no apêndice (A). A escolha da rotação x_1x_2 não é especial, uma vez que podemos escolher tanto as rotações x_3x_1 ou x_2x_3 (estamos usando (x_1, x_2, x_3) para representar as coordenadas cartesianas a fim de não causar confusão com as coordenadas toroidais), o mesmo vale para a escolha da transformação conforme especial. No apêndice (C.2) construímos o ansätz conforme verificando que o mesmo pode ser escrito como uma transformação de gauge de um potencial mais simples, dada por

$$A_i = g\, a_i\,(z)\; g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_i g\, g^{-1}\;; \qquad \Phi = g\,\widehat{\Phi}\,(z)\; g^{-1}\;; \qquad \text{com} \qquad g = e^{i\left(n_\xi\,\xi + n_\phi\,\phi\right)T_3}, \tag{3.165}$$

onde $g\,(\xi, \phi)$ é elemento do grupo de gauge $U(1)$. Em coordenadas toroidais, temos

$$A_\xi = g\,\left(a_\xi\,(z) - \frac{1}{e}n_\xi\,T_3\right)\,g^{-1}\;; \qquad A_\phi = g\,\left(a_\phi\,(z) - \frac{1}{e}n_\phi\,T_3\right)\,g^{-1} \tag{3.166}$$

onde estamos sobre a escolha do gauge $A_z = 0$, veja (A) para mais detalhes. Portanto a fim de simplificação, vamos usar os campos transformados, isto é,

$$a_z = 0; \qquad a_\xi = a_\xi(z); \qquad a_\phi = a_\phi(z); \qquad \hat{\Phi} = \hat{\Phi}(z), \tag{3.167}$$

sujeitos às transformações de gauge do tipo (3.166), dependentes apenas da componente z do sistema da coordenadas toroidais. Neste sistema de coordenadas, a coordenada z fixa, com ξ e ϕ livres descreve uma superfície toroidal, quando z toma os valores $z = 0$ e $z = 1$, estes correspondem ao infinito espacial com o eixo x_3 das coordenadas cartesianas e a um círculo de raio a no plano x_1x_2, respectivamente. Em $z = 1$, não há sentindo em variar a coordenada ξ, pois apenas ϕ e $z = 1$ definem o círculo de raio a. Portanto, as transformações de gauge (3.166) podem levar a campos plurívocos em $z = 1$, a fim de evitar tal problema fazemos a imposição de que em $z = 1$ temos que ter

$$a_\xi\,(1) = c_\xi\,T_3\;; \qquad a_\phi\,(1) = c_\phi\,T_3\;; \qquad \widehat{\Phi}\,(1) = w_1\,T_3, \tag{3.168}$$

onde c_ξ, c_ϕ e w_1 são constantes. A análise em $z = 0$ não é diferente, note que $z = 0$ descreve tanto o eixo x_3 como o infinito espacial, isto é, $z = 0$ anexa o infinito ao espaço, de modo que a região definida por $z = 0$ e ξ livre define um círculo, onde não há contribuição da coordenada ϕ. Desta forma, as transformações (3.166) serão plurívocas também em $z = 0$. Removemos essa patologia se impomos as condições

$$a_\xi\,(0) = d_\xi\,T_3\;; \qquad a_\phi\,(0) = d_\phi\,T_3\;; \qquad \widehat{\Phi}\,(0) = w_0\,T_3, \tag{3.169}$$

sendo d_ξ, d_ϕ e w_0 constantes. Entretanto, as condições de unicidade (3.168) e (3.169) somente são necessárias para os campos transformados (A_i e Φ), pois os campos a_i e $\widehat{\Phi}$ são regulares e unívocos em todo espaço sem quaisquer imposição de restrição.

Portanto, o ansätz conforme são campos de gauge com simetria $U(1)$ gerada por T_3, que devido às condições (3.168) e (3.169), constitui o grupo de estabilidade do campo de Higgs nas regiões $z = 1$ e $z = 0$, i.e., $H = U(1)$, tal que sendo $g \in H$, onde g é da forma (3.166), então

$$\Phi(z) = g\,\widehat{\Phi}(z)\,g^{-1} = \widehat{\Phi}(z), \qquad \text{quando} \qquad z = 0, 1. \tag{3.170}$$

Entretanto, se o Higgs não satisfaz as condições (3.168) e (3.169), implica que o H não será o grupo de estabilidade do Higgs e o campo será plurívoco em $z = 0$ e $z = 1$.

Da (3.165), obtemos um tensor dos campos também dependente apenas de z, ou seja,

$$F_{ij} = g\,f_{ij}\,(z)\;g^{-1} \tag{3.171}$$

tendo em coordenadas toroidais as componentes

$$f_{z\xi} = \partial_z\,a_\xi\;; \qquad f_{z\phi} = \partial_z\,a_\phi\;; \qquad f_{\xi\phi} = i\,e\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\,. \tag{3.172}$$

A métrica no sistema de coordenadas toroidais é dada por

$$ds^2 = H_z^2\,dz^2 + H_\xi^2\,d\xi^2 + H_\phi^2\,d\phi^2, \tag{3.173}$$

onde H_Z, H_ξ e H_ϕ são os fatores de escalas dados por

$$H_z = \frac{a}{p}\,\frac{1}{2\sqrt{z\,(1-z)}}; \qquad H_\xi = \frac{a}{p}\,\sqrt{1-z}; \qquad H_\phi = \frac{a}{p}\,\sqrt{z}. \tag{3.174}$$

onde $p(z,\xi) = 1 - \sqrt{1-z}\cos\xi$. Devido aos fatores de escala, as componentes do campo na forma vetorial diferem das componentes do campo quando este é escrito na forma de uma 1-forma diferencial, i.e., seja A o campo físico de interesse, então

$$A = A_{\zeta^m} d\zeta^m\;; \qquad \vec{A} = \bar{A}_{\zeta^m}\vec{e}_{\zeta^m}\;; \qquad \text{sendo} \qquad A_{\zeta^m} \neq \bar{A}_{\zeta^m}. \tag{3.175}$$

Portanto, vamos expressar o campo magnético apenas em sua forma vetorial, enquanto os campos de gauge e o tensor de campos estão sendo escritos em termos de formas diferenciais. O vetor campo magnético em coordenadas cartesianas é dado por

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3, \tag{3.176}$$

com as componentes escritas em termos do tensor dos campos

$$b_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,f_{jk}. \tag{3.177}$$

No sistema Cartesiano, as componentes do vetor do campo são iguais as componentes de 1-forma do campo.

Através de uma transformação de coordenadas do sistema Cartesiano para o sistema toroidal, usando o apêndice(A), temos que o campo magnético será

$$\vec{b} = b_z \vec{e}_z + b_\phi \vec{e}_\phi + b_\xi \vec{e}_\xi \tag{3.178}$$

com as componentes dadas por

$$b_{\zeta^j} = \frac{1}{2} \det\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) H_{\zeta^j}\, \epsilon_{\zeta^j \zeta^l \zeta^m}\, f_{\zeta^l \zeta^m}, \tag{3.179}$$

sendo $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (z, \xi, \phi)$ e $\det\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 2\,\frac{p^3}{a^3}$. Portanto, o campo magnético no ansätz conforme é dado por

$$\begin{aligned} b_z &= \frac{p^2}{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{z\,(1-z)}}\, f_{\xi\phi} = i\,e\,\frac{p^2}{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{z\,(1-z)}}\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\,; \\ b_\xi &= \frac{2\,p^2}{a^2}\,\sqrt{1-z}\, f_{\phi z} = -\frac{2\,p^2}{a^2}\,\sqrt{1-z}\,\partial_z\, a_\phi; \\ b_\phi &= \frac{2\,p^2}{a^2}\,\sqrt{z}\, f_{z\xi} = \frac{2\,p^2}{a^2}\,\sqrt{z}\,\partial_z\, a_\xi. \end{aligned} \tag{3.180}$$

Em $z = 0$ e $z = 1$ a componente b_z poderia apresentar singularidades, entretanto, as condições (3.168) e (3.169) implicam que $f_{\xi\phi}(1) = f_{\xi\phi}(0) = 0$, regularizando possíveis problemas nas regiões definidas por $z = 0$ e $z = 1$.

3.3.2.1 O setor auto-dual em coordenadas toroidais

As equações auto-duais (3.110) em coordenadas toroidais são expressas da seguinte forma

$$b^a_{\zeta^p}\, h_{ab} = \eta\,\frac{1}{H_{\zeta^p}}\,(D_{\zeta^p}\widehat{\Phi})^b. \tag{3.181}$$

onde H_{ζ^p} são os fatores de escala do sistema de coordenadas toroidais e (3.174) $\eta = \pm 1$.

A partir do ansätz (3.167), temos que o campo de Higgs tem suas derivadas covariantes expressas pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} D_z\hat{\Phi} &= \partial_z\hat{\Phi}; \\ D_\xi\hat{\Phi} &= i\,e\left[\,a_\xi\,,\,\hat{\Phi}\,\right]; \\ D_\phi\hat{\Phi} &= i\,e\left[\,a_\phi\,,\,\hat{\Phi}\,\right]. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Note que nas equações auto-duais (3.181), o campo magnético (3.180) tem um fator quadrático em $\frac{p}{a}$, enquanto o lado direito carrega apenas uma dependência linear em p de modo que a fim de manter a consistência do ansätz de que os campos dependam apenas da coordenada toroidal z fazemos a definição

$$h_{ab}(z,\xi) \equiv \frac{a}{p(z,\xi)}\,\widehat{h}_{ab}(z), \tag{3.183}$$

permitindo que as equações auto-duais sejam reescritas com dependência apenas em z, isto é,

$$\frac{a}{p}\, b^a_{\zeta^p} \hat{h}_{ab} = \eta\, \frac{1}{H_{\zeta^p}}\, (D_{\zeta^p}\widehat{\Phi})^b, \tag{3.184}$$

de forma explicita

$$\begin{aligned} i\, e\, \frac{1}{\sqrt{z\,(1-z)}}\, ([\, a_\xi\, ,\, a_\phi\,])^a\, \hat{h}_{ab} &= \eta\, 2\, \sqrt{z\,(1-z)}\, (\partial_z \widehat{\Phi})^b; \\ -2\, \sqrt{1-z}\, (\partial_z\, a_\phi)^a\, \hat{h}_{ab} &= \eta\, i\, e\, \frac{1}{\sqrt{1-z}}\, \Big(\Big[\, a_\xi\, ,\, \widehat{\Phi}\, \Big]\Big)^b; \\ 2\, \sqrt{z}\, (\partial_z\, a_\xi)^a\, \hat{h}_{ab} &= \eta\, i\, e\, \frac{1}{\sqrt{z}}\, \Big(\Big[\, a_\phi\, ,\, \widehat{\Phi}\, \Big]\Big)^b. \end{aligned} \tag{3.185}$$

Para a obtenção de h através da forma matricial do setor auto-dual (3.117), temos que as matrizes (3.114) no ansätz conforme são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_{ab} &= \frac{p^4}{a^4}\left[4\, z\, f^a_{z\xi}\, f^b_{z\xi} + 4\, (1-z)\, f^a_{z\phi}\, f^b_{z\phi} + \frac{1}{z\,(1-z)}\, f^a_{\xi\phi}\, f^b_{\xi\phi}\right]; \\ \sigma_{ab} &= -\frac{1}{2}\, \epsilon_{ijk}\, f^a_{jk}\, \Big(D_i\widehat{\Phi}\Big)^b = -2\, \frac{p^3}{a^3}\left[f^a_{z\xi}\, \Big(D_\phi\widehat{\Phi}\Big)^b + f^a_{\xi\phi}\, \Big(D_z\widehat{\Phi}\Big)^b + f^a_{\phi z}\, \Big(D_\xi\widehat{\Phi}\Big)^b\right]; \\ \omega_{ab} &= \frac{p^2}{a^2}\Bigg[\frac{1}{z}\, (D_\phi\widehat{\Phi})^a\, (D_\phi\widehat{\Phi})^b + \frac{1}{(1-z)}\, (D_\xi\widehat{\Phi})^a\, (D_\xi\widehat{\Phi})^b + \\ &\quad +4\, z\, (1-z)\, (D_z\widehat{\Phi})^a\, (D_z\widehat{\Phi})^b\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.186}$$

3.3.2.2 Uma nova análise para a carga topológica

O traço de σ é a densidade de carga topológica (3.118), ou seja,

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x\, \widehat{\mathrm{Tr}}\, (b_i\, D_i\Phi) \\ &= \int d^3x\, \sigma_{aa}\, ; \end{aligned} \tag{3.187}$$

mostramos na seção (3.2), analisando que a carga Q é um invariante sobre transformações suaves (3.73) garantido pela identidade de Bianchi (3.69) e uma igualdade (3.75), no entanto, há mais um elemento necessário para a garantia do invariante, que é a fixação das condições de contorno. Em nossa análise, a condição de que os campos são fixados no contorno foi feita ao fixar as variações no contorno de $\mathbb{R}^3$, sendo uma uma esfera S^2 de raio infinito. Ao tratar da carga Q em coordenadas toroidais, notamos que a invariância desta quantidade só é estabelecida se fixadas as condições não na esfera que contorna $\mathbb{R}^3$ mas nos círculos definidos pelas coordenadas toroidais $z = 0$ e $z = 1$, isto é, da variação da carga topológica (3.72), temos que os termos de superfície são

$$S \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \int d^3x\, \partial_k \widehat{\mathrm{Tr}}\Big((\delta A_i\, D_j\Phi + F_{ij}\, \delta\Phi)\Big) \tag{3.188}$$

que em coordenadas toroidais são reescritos na forma

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\epsilon_{\zeta^m\zeta^n\zeta^\ell}\int dz\int d\xi\int d\phi\,\partial_{\zeta^m}\widehat{\mathrm{Tr}}\Big(\delta a_{\zeta^n}\,D_{\zeta^\ell}\Phi + f_{\zeta^n\zeta^\ell}\,\delta\Phi\Big) = \\ &= -\frac{ie}{2}\int_0^1 dz\int_0^{2\pi} d\xi\int_0^{2\pi} d\phi\,\partial_z\widehat{\mathrm{Tr}}\Big(\delta a_\xi\,[\,a_\phi\,,\,\Phi\,] - \delta a_\phi\,[\,a_\xi\,,\,\Phi\,] + 2\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\,\delta\Phi\Big) = \\ &= -\frac{i\,e}{2}\int_0^{2\pi} d\xi\int_0^{2\pi} d\phi\,\widehat{\mathrm{Tr}}\Big(\delta a_\xi\,[\,a_\phi\,,\,\Phi\,] - \delta a_\phi\,[\,a_\xi\,,\,\Phi\,] + 2\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\,\delta\Phi\Big)\Big|_0^1, \end{aligned} \tag{3.189}$$

de modo que S se anula apenas se impormos que

$$\delta a_{\zeta^m}(0) = \delta a_{\zeta^m}(1) = 0 \qquad \delta\Phi(0) = \delta\Phi(1) = 0. \tag{3.190}$$

Reescrevendo a expressão integral da carga (3.187) em coordenadas toroidais de fato verificamos a dependência da mesma em $z = 0$ e $z = 1$,

$$\begin{aligned} Q_T &= -i\,e\,4\,\pi^2\int_0^1 dz\,\partial_z\widehat{\mathrm{Tr}}\left(\widehat{\Phi}\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\right) = \\ &= -i\,e\,4\,\pi^2\,\widehat{\mathrm{Tr}}\left(\widehat{\Phi}\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\right)\Big|_0^1, \end{aligned} \tag{3.191}$$

E, através das condições (3.168) e (3.169) obtemos que a carga topológica será nula, isto é

$$Q_T = i\,e\,4\,\pi^2\,\widehat{\mathrm{Tr}}\left(\widehat{\Phi}\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\right)\Big|_0^1 = 0. \tag{3.192}$$

Entretanto, o fato da carga topológica ser trivial não é decorrente necessariamente das condições de contorno impostas para satisfazer a unicidade dos campos. Ao fixar condições para os campos em $z = 0$, para efeitos de topologia, denota que os campos estão definidos em $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$, e como S^3 não possui borda, consequentemente através do teorema de Stokes abeliano, obtemos que

$$Q_T = \int_{S^3} d^3x\,\widehat{\mathrm{Tr}}\,(b_i\,D_i\Phi) = 0. \tag{3.193}$$

Portanto, sem a condição de unicidade das transformações de gauge (3.166), o resultado (3.193) leva a condição

$$\widehat{\mathrm{Tr}}\left(\widehat{\Phi}\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\right)_{z=0} = \widehat{\mathrm{Tr}}\left(\widehat{\Phi}\,[\,a_\xi\,,\,a_\phi\,]\right)_{z=1}. \tag{3.194}$$

Devido a nulidade da carga, consequentemente, da energia, a condição de que matriz h seja positiva definida não é mais necessária, pois podemos verificar que, ao escrevermos a carga somente em termos do campo magnético e da matriz h diagonalizada, portanto, sendo h uma matriz real e simétrica, há uma matriz M ortogonal tal que

$$h = M\,h_D\,M^T\,; \qquad M\,M^T = \mathbb{I}\,; \qquad (h_D)_{ab} = \varphi_a\delta_{ab}, \tag{3.195}$$

através da auto-dualidade, podemos reescrever a carga topológica Q_T como sendo

$$Q_T = \eta\int d^3x\left(b_i^b M_{ba}\right)^2\varphi^a, \tag{3.196}$$

de forma que se $Q_T = 0$, então há duas possibilidades para tal: a densidade de carga será nula, ou seja,

$$\left(b_i^b M_{ba}\right)^2 \varphi^a = 0 \tag{3.197}$$

ou os autovalores de h não possuem o mesmo sinal, implicando que na condição de vácuo podemos ter uma matriz h não positiva definida.

Portanto, as soluções não triviais obtidas via ansätz conforme, constituem soluções de vácuo e, além disso, o fato da carga topológica ser nula nos leva a conclusão de que as soluções não possuem carga magnética, não configurando soluções de monopolos magnéticos. É natural a pergunta sobre quais são as soluções não triviais e se de fato, elas existem, verificamos, pelo menos a existência de duas soluções com comportamentos distintos: A primeira delas configura uma solução abeliana de campos de gauge e carrega uma estrutura topológica não trivial, entretanto, tal estrutura não está associada a carga Q_T ou mesmo ligada a energia do sistema, mas está associada a uma quantidade definida como helicidade dos campos de gauge. Já a segunda solução, configura um comportamento não abeliano e diferentemente da primeira, não carrega uma estrutura topológica aparente.

3.3.2.3 Solução abeliana e um novo invariante

Construímos uma solução com campos de gauge que comutam entre si, na forma

$$a_\xi(z) = \frac{1}{e}\, I(z)\, T_3; \qquad\qquad a_\phi(z) = \frac{1}{e}\, J(z)\, T_3. \tag{3.198}$$

Das equações auto-duais (3.110), verificamos que o fato dos campos de gauge comutarem entre si implica em um campo de Higgs constante em todo o espaço, i.e.,

$$\partial_z \widehat{\Phi} = 0. \tag{3.199}$$

Então, se considerarmos um campo de Higgs na forma

$$\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}^a\, T_a = \frac{1}{e}\, \nu^a\, T_a, \tag{3.200}$$

ou com qualquer componente que não seja T_3 diferente de zero, as condições (3.168) e (3.169) não são verificadas para o Higgs, implicando que o Higgs transformado será plurívoco em $z = 0$ e $z = 1$ e o subgrupo cujo elemento é dado por g da transformação (3.166) não mantém o Higgs invariante, isto é, não é um grupo de estabilidade do campo de Higgs. Além disso, sendo o Higgs constante e na forma (3.200), temos as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} \left[\, a_\xi \,,\, \widehat{\Phi} \,\right] &= \frac{i}{e^2}\, I(z)\, \left(\nu_1\, T_2 - \nu_2\, T_1\right); \\ \left[\, a_\phi \,,\, \widehat{\Phi} \,\right] &= \frac{i}{e^2}\, J(z)\, \left(\nu_1\, T_2 - \nu_2\, T_1\right); \end{aligned} \tag{3.201}$$

que, através das equações auto-duais somos levados a conclusão de que os campos de gauge não serão constantes, de modo que $I'(z)$ e $J'(z)$ satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned} 2\,(1-z)\,\frac{J'(z)}{I(z)} &= \eta\,\frac{\nu_2}{\widehat{h}_{31}} = -\eta\,\frac{\nu_1}{\widehat{h}_{32}}; \\ 2\,z\,\frac{I'(z)}{J(z)} &= -\eta\,\frac{\nu_2}{\widehat{h}_{31}} = \eta\,\frac{\nu_1}{\widehat{h}_{32}}, \end{aligned} \tag{3.202}$$

e como os campos de gauge tem somente componente em T_3, tem-se que

$$\widehat{h}_{33} = 0. \tag{3.203}$$

Das equações (3.202) tiramos uma relação de proporcionalidade entre duas componentes da matriz h, sendo

$$\widehat{h}_{32} = \lambda\,\widehat{h}_{31}\ ; \qquad\qquad \lambda = -\frac{\nu_1}{\nu_2}, \tag{3.204}$$

e uma equação diferencial vinculando as funções $I(z)$ e $J(z)$, sendo

$$2\,(1-z)\,J(z)\,J'(z) = -2\,z\,I(z)\,I'(z) \tag{3.205}$$

Esta solução satisfaz a auto-dualidade e configura uma solução de vácuo (energia igual a zero), entretanto, a condição sobre os campos de gauge serem abelianos permite a existência de um outro invariante topológico. Para compreender aparição deste invariante devemos visualizar que, como a solução tem comportamento já fixado $z = 0$, então a região onde a solução está definida pode ser visualizada como uma 3-esfera S^3, mergulhada em $\mathbb{R}^4$ descrita pela equação

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = a^2. \tag{3.206}$$

A 3-esfera é mapeada regularmente pelas coordenadas toroidais através das relações obtidas no apêndice (A),

$$\begin{aligned} y_1 &= a\,\sqrt{z}\,\cos\phi\ ; \qquad & y_2 &= a\,\sqrt{z}\,\sin\phi \\ y_3 &= a\,\sqrt{1-z}\,\sin\xi\ ; \qquad & y_4 &= a\,\sqrt{1-z}\,\cos\xi. \end{aligned} \tag{3.207}$$

Desta forma, a métrica de S^3 será

$$ds^2 = a^2\left(\frac{dz^2}{4\,z\,(1-z)} + (1-z)\ d\xi^2 + z\,d\phi^2\right), \tag{3.208}$$

com o elemento de volume dado por

$$dV = \frac{a^3}{2}\,dz\,d\xi\,d\phi. \tag{3.209}$$

Chamamos de *Target Space* ou Espaço-Alvo a região definida pela imagem dos campos, então como os campos físicos desta teoria residem na álgebra do $SU(2)$ (isomorfa a

uma 3-esfera), o espaço-alvo é uma 3-esfera S^3_T. Deste modo notamos que o comportamento da solução tem muita similaridade com o ansätz conforme para a solução de Skyrmions da referência[3] e também com as soluções de Hopfions da referência,[27] então, de maneira análoga as referências citadas definimos o espaço-alvo S^3_T através da equação

$$| Z_1 |^2 + | Z_2 |^2 = 1. \tag{3.210}$$

com os vetores complexos definidos em termos das coordenadas toroidais através das relações

$$Z_1 = \sqrt{1 - g\,(z)}\, e^{i\, m_1\, \xi}\ ; \qquad Z_2 = \sqrt{g\,(z)}\, e^{-i\, m_2\, \phi}\ ; \qquad 0 \leq g \leq 1, \tag{3.211}$$

sendo m_1 e m_2 constantes. É possível escrever os campos de gauge abelianos em termos dos campos complexos Z_a através da seguinte relação

$$\mathcal{A}_i = \frac{i}{2}\, \left(Z^\dagger_a \partial_i Z_a - \partial_i Z^\dagger_a\, Z_a \right) = i\, Z^\dagger_a \partial_i Z_a. \tag{3.212}$$

que através da associação

$$\mathcal{A}_k = \widehat{\mathrm{Tr}}\,(e\, a_k\, T_3)\,. \tag{3.213}$$

temos uma relação entre os campos de gauge obtidos pelo ansätz conforme e os vetores complexos Z_a. Então através das expressões (3.198), (3.212) e (3.213) obtemos as seguintes relações entre as funções I, J e g

$$I(z) = m_1\ (g(z) - 1)\ ; \qquad J(z) = m_2\, g(z), \tag{3.214}$$

que vinculadas através da equação (3.205) sob as condições (3.168) e (3.169) garantem uma solução analítica para g

$$g(z) = \frac{m_1^2\, z}{m_1^2\, z + m_2^2\, (1 - z)}. \tag{3.215}$$

Portanto, temos que os campos de gauge abelianos serão

$$\mathcal{A}_z = 0\ ; \qquad \mathcal{A}_\xi = -\frac{m_1\, m_2^2\, (1 - z)}{m_1^2\, z + m_2^2\, (1 - z)} \qquad \mathcal{A}_\phi = \frac{m_1^2\, m_2\, z}{m_1^2\, z + m_2^2\, (1 - z)}. \tag{3.216}$$

O campo magnético associado aos campos de gauge $\mathcal{A}_i$ pode ser calculado usando as expressões (3.180) e definindo $\mathcal{B}_i = \mathrm{Tr}\,(e\, b_i\, T_3)$, resultando então nas expressões

$$\mathcal{B}_i = \gamma\, \mathcal{A}_i\ ; \qquad \gamma \equiv 2\, \frac{p}{a}\, \frac{m_1\, m_2}{[m_1^2 z + m_2^2 (1 - z)]}. \tag{3.217}$$

Como $\vec{\mathcal{B}} = \nabla \wedge \vec{\mathcal{A}}$, dizemos que os campos de gauge são *force-free*[28] por satisfazer a relação $\nabla \wedge \vec{\mathcal{A}} \propto \vec{\mathcal{A}}$ (3.217). Usando $e = a = 1$ plotamos o comportamento do campo magnético (3.217) sobre um torus definido por $z = 0.3$ usando diferentes valores para m_1 e m_2, sendo 7, 8 e 9 Perceba que construímos um setor auto-dual cuja carga topológica (associado a

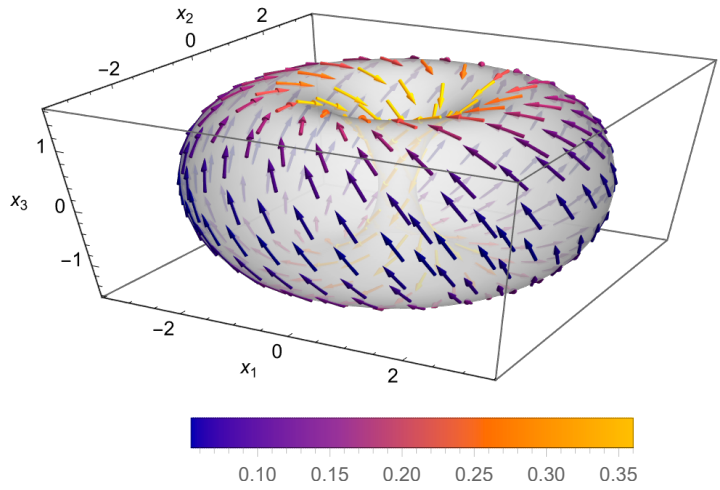


Figura 7 – Campo magnético (3.217) para $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$, e para $z = 0.3$. As cores denotam a intensidade do campo magnético

Fonte: Elaborada pelo autor.

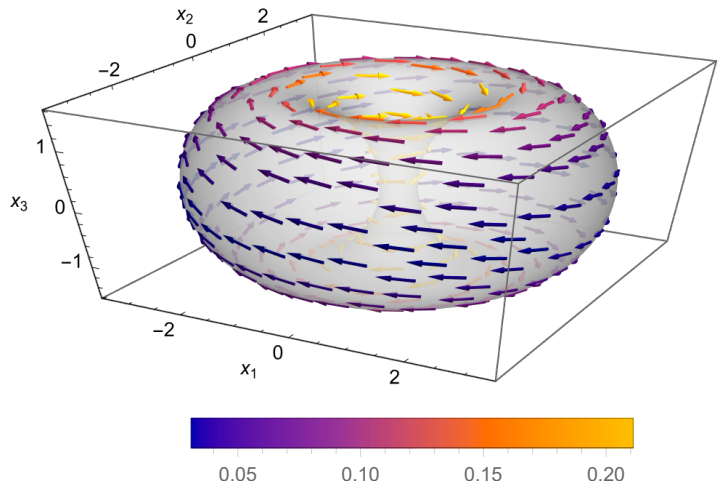


Figura 8 – Campo magnético (3.217) para $m_1 = 10$ e $m_2 = 1$, e para $z = 0.3$. As cores denotam a intensidade do campo magnético

Fonte: Elaborada pelo autor.

carga magnética) é nula, entretanto, as soluções (3.216) possibilitam a existência de um mapeamento não trivial entre todo o espaço S^3 e o espaço-alvo S^3_T definido pela relação (3.212), quantificado por um invariante que, do ponto de vista matemático, mede o número de maneiras de mapear S^3 em S^3_T. Este invariante é dado pela representação integral do *Invariante de Hopf*[27]

$$Q_H = \frac{1}{2\,\pi^2\,a^3} \int_{S^3} dV\, \epsilon_{ijk}\, \mathcal{A}_i\, \partial_j\, \mathcal{A}_k, \tag{3.218}$$

no entanto, o invariante de Hopf está associado ao mapeamento entre uma S^3 e uma S^2 e,

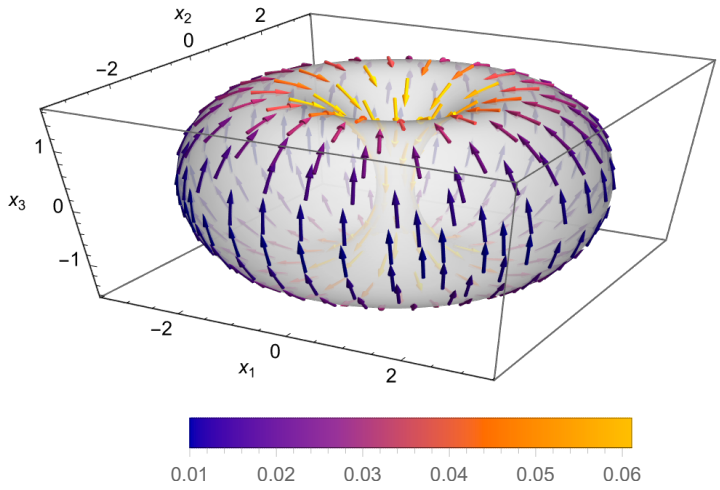


Figura 9 – Campo magnético (3.217) para $m_1 = 1$ e $m_2 = 10$, e para $z = 0.3$. As cores denotam a intensidade do campo magnético

Fonte: Elaborada pelo autor.

em nosso caso, o mapeamento de interesse está sendo feito entre S^3 (espaço físico) e S^3_T (espaço-alvo). Fisicamente, este invariante pode ser interpretado como sendo a helicidade dos campos de gauge $\mathcal{A}_k$[29] que devido a condição de que os campos são estáticos é uma quantidade constante no tempo. Portanto, calculando a helicidade da solução (3.216), temos

$$\begin{aligned} Q_H &= \frac{1}{4\,\pi^2}\int_0^1 dz \int_0^{2\,\pi} d\xi \int_0^{2\,\pi} d\phi\, \left(\mathcal{A}_\phi \partial_z \mathcal{A}_\xi - \mathcal{A}_\xi \partial_z \mathcal{A}_\phi\right) = \\ &= (m_1\, m_2)^3 \int_0^1 dz\, \frac{1}{[m_1^2 z + m_2^2\,(1-z)]^2}, \end{aligned} \tag{3.219}$$

usando o seguinte resultado

$$\int_0^1 dz\, \frac{1}{[m_1^2 z + m_2^2\,(1-z)]^2} = -\frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)[m_1^2 z + m_2^2\,(1-z)]}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{m_1^2\, m_2^2} \tag{3.220}$$

temos então que

$$Q_H = m_1\, m_2. \tag{3.221}$$

A dependência direta do campo de gauge no cálculo da helicidade (3.218) contribui para que a mesma não seja um invariante de gauge, de modo que sob as transformações de gauge do tipo (3.166) a helicidade é alterada na forma

$$Q'_H - Q_H = \frac{1}{e}\,\left(n_\phi\, m_1 - n_\xi\, m_2\right). \tag{3.222}$$

Resumindo, temos como solução os campos de gauge (3.216), a matriz h dada por

$$\widehat{h} = \begin{pmatrix} \widehat{h}_{11} & \widehat{h}_{12} & \widehat{h}_{13} \\ \widehat{h}_{12} & \widehat{h}_{22} & \lambda\,\widehat{h}_{13} \\ \widehat{h}_{13} & \lambda\,\widehat{h}_{13} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.223}$$

onde λ é dado na (3.204), e $\widehat{h}_{13}$ determinado através das equações (3.202), sendo

$$\widehat{h}_{13} = -\frac{\eta\,\nu_2}{2}\,\frac{m_1^2\,z + m_2^2\,(1-z)}{m_1\,m_2}, \tag{3.224}$$

tendo as componentes $\widehat{h}_{11}, \widehat{h}_{12}$ e $\widehat{h}_{22}$ livres. O campo de Higgs é constante, portanto é completamente determinado quando impostas condições de contorno para $\widehat{\Phi}$ em $z = 0$ e $z = 1$ que não sejam $\widehat{\Phi}_{1,2} = 0$. Pois as soluções apenas foram encontradas em decorrência do campo de Higgs ser constante e escrito na forma (3.200) não satisfazendo (3.168) e (3.169), implicando então, que transformações de gauge do tipo (3.166) são patológicas para a solução, pois saem do grupo de estabilidade do Higgs levando para um campo de Higgs plurívoco nas regiões $z = 0$ e $z = 1$. Se impormos um campo de Higgs unívoco em $z = 0$ e $z = 1$, isto é, satisfazendo as condições (3.168) e (3.169), portanto sem componentes $\widehat{\Phi}_{1,2}$, tal que

$$\widehat{\Phi}(0) = w_1\,T_3; \qquad\qquad \widehat{\Phi}(1) = w_2\,T_3, \tag{3.225}$$

através das equações auto-duais (3.185) não apenas o campo de Higgs deverá ser constante devido a (3.185), mas também os campos de gauge, pois todos os campos físicos estão na direção de T_3. Verificamos também que não há vínculo entre as funções I e J como obtido através da equação (3.205), obtendo apenas as equações

$$2\sqrt{1-z}\,I'(z)\,\widehat{h}_{3b} = 0 \qquad\qquad -2\sqrt{z}\,J'(z)\,\widehat{h}_{3b} = 0, \tag{3.226}$$

implicando que a terceira linha (e coluna) da matriz $\widehat{h}$ será nula, i.e.,

$$(\widehat{h}_{3b})_{\{b=1,2,3\}} = 0, \tag{3.227}$$

e os termos restantes são livres. Tal conclusão implica em uma matriz h não inversível e não diagonalizável em todo o espaço.

3.3.2.4 Solução não abeliana

A solução não abeliana é construída sobre as seguintes escolhas

$$a_\xi = \frac{1}{e}\,H_1\,(z)\;T_1\;; \qquad a_\phi = \frac{1}{e}\,H_2\,(z)\;T_2\;; \qquad \widehat{\Phi} = \frac{1}{e}\,H_3\,(z)\;T_3 \tag{3.228}$$

Sob as condições de unicidade (3.168) e (3.169) temos que os campos de gauge devem se anular em $z = 0$ e $z = 1$, ou seja,

$$H_1\,(0) = H_2\,(0) = 0\;; \qquad\qquad H_1\,(1) = H_2\,(1) = 0 \tag{3.229}$$

e a função H_3 do campo de Higgs satisfaz a condição

$$H_3\,(0) = w_1\;; \qquad\qquad H_3\,(1) = w_2. \tag{3.230}$$

Como os campos de gauge e campo de Higgs estão cada um em uma direção na álgebra de Lie, usar a expressão matricial da auto-dualidade (3.117) para a determinação

da matriz h será de grande facilidade. O tensor dos campos, usando as expressões (3.228) será

$$f_{z\xi} = \frac{1}{e}\, H_1'\,(z)\; T_1\;; \qquad f_{\xi\phi} = -\frac{1}{e}\, H_1(z)\, H_2(z)\, T_3\;; \qquad f_{\phi z} = -\frac{1}{e}\, H_2'\,(z)\; T_2, \tag{3.231}$$

então, a matriz τ dada por (3.186) será diagonal, isto é, sendo $\tau_{ab} = \tau_a \delta_{ab}$ tem-se

$$\tau_1 = 4\, z\, \frac{p^4}{e^2\, a^4}\, \left(H_1'\right)^2\;; \qquad \tau_2 = 4\,(1-z)\, \frac{p^4}{e^2\, a^4}\, \left(H_2'\right)^2\;; \qquad \tau_3 = \frac{1}{1-z}\, \frac{p^4}{e^2\, a^4}\, \left(H_1\, H_2\right)^2. \tag{3.232}$$

Sendo a derivada covariante do Higgs dada por

$$D_z\widehat{\Phi} = \frac{1}{e}\, H_3'\,(z)\; T_3\;; \qquad D_\xi\widehat{\Phi} = \frac{1}{e}\, H_1\,(z)\; H_3\,(z)\; T_2\;; \qquad D_\phi\widehat{\Phi} = -\frac{1}{e}\, H_2\,(z)\; H_3\,(z)\; T_1, \tag{3.233}$$

então a matriz σ dada por (3.186) também será diagonal, isto é, sendo $\sigma_{ab} = \sigma_a \delta_{ab}$ tem-se

$$\sigma_1 = 2\, \frac{p^3}{e^2\, a^3}\, H_1'\, H_2\, H_3\;; \qquad \sigma_2 = 2\, \frac{p^3}{e^2\, a^3}\, H_1\, H_2'\, H_3\;; \qquad \sigma_3 = 2\, \frac{p^3}{e^2\, a^3}\, H_1\, H_2\, H_3'. \tag{3.234}$$

Portanto, a partir das (3.232) e (3.234) para τ e σ respectivamente, podemos usar a auto-dualidade em sua forma matricial (3.117) nas regiões onde τ é inversível, logo, através da (3.232) verificamos que τ somente não será inversível em $z = 0$ e $z = 1$, então para o espaço restante obtemos uma matriz h diagonal, e sendo a redefinição de (3.183) com $\widehat{h}_{ab} = \varphi_a(z)\, \delta_{ab}$, será dada por

$$\varphi_1 = \frac{\eta}{2\, z}\, \frac{H_2\, H_3}{H_1'}\;; \qquad \varphi_2 = \frac{\eta}{2\,(1-z)}\, \frac{H_1\, H_3}{H_2'}\;; \qquad \varphi_3 = 2\, \eta\, z\,(1-z)\, \frac{H_3'}{H_1\, H_2}. \tag{3.235}$$

Em $z = 0$ e $z = 1$ deveremos analisar as equações auto-duais (3.185) a fim de se ter os valores de h. Caso quisermos utilizar o campo magnético em vez do tensor dos campos, então temos, para as expressões (3.228), que as componentes toroidais do campo magnético serão dadas por

$$\begin{aligned} b_z &= -\frac{p^2}{e\, a^2}\, \frac{1}{\sqrt{z\,(1-z)}}\, H_1\,(z)\; H_2\,(z)\; T_3; \\ b_\xi &= -\frac{2\, p^2}{e\, a^2}\, \sqrt{1-z}\, \partial_z\, H_2\,(z)\; T_2; \\ b_\phi &= \frac{2\, p^2}{e\, a^2}\, \sqrt{z}\, \partial_z\, H_1\,(z)\; T_1. \end{aligned} \tag{3.236}$$

Portanto, podemos concluir que através das equações (3.235) há uma liberdade muito grande em construir soluções que satisfazem tais equações, pois os autovalores de h e as funções $(H_i)_{\{i=1,2,3\}}$ constituem 6 graus de liberdade com apenas três vínculos dados pelas equações (3.235). Deste modo, podemos fazer imposições para o comportamento das funções dos campos desde que sejam satisfeitas as condições (3.229) e (3.230), a fim de se

ter campos unívocos e os autovalores de h sejam constantes não nulos, de modo que h seja inversível.

Um exemplo de solução que satisfaz as condições (3.229) e (3.230), é tomar os seguintes comportamentos para as funções H_i

$$H_a = z\,(1-z)\,\beta_a\ ; \qquad H_3 = w_1 + \frac{1}{2}\,z^2\,\left(1-\frac{2}{3}z\right)\ ; \qquad a=1,2; \tag{3.237}$$

com β_a constantes e

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{6}. \tag{3.238}$$

Desta forma a partir das equações (3.235), temos que os autovalores da matriz h serão

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\eta\,\beta_2}{2\,\beta_1}\,\frac{(1-z)\ w_1 + \frac{1}{2}\,z^2\ (1-z)\ \left(1-\frac{2}{3}z\right)}{(1-2\,z)}\ ;\\
\varphi_2 &= \frac{\eta\,\beta_1}{2\,\beta_2}\,\frac{z\,w_1 + \frac{1}{2}\,z^3\ \left(1-\frac{2}{3}z\right)}{(1-2\,z)}\ ;\\
\varphi_3 &= \frac{2\,\eta}{\beta_1\,\beta_2},
\end{aligned} \tag{3.239}$$

para $z \neq 0, 1$. Através das equações auto-duais (3.235) verificamos que

$$\varphi_1(1) = \varphi_2(0) = 0 \tag{3.240}$$

e $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(1)$, $\varphi_3(0)$ e $\varphi_3(1)$ permanecem indeterminados e arbitrários. A fim de se ter uma solução contínua para h tomamos então os seguintes valores para os autovalores indeterminados

$$\varphi_1(0) = \frac{\eta\,\beta_2\,w_1}{2\,\beta_1}\ ; \qquad \varphi_2(1) = -\frac{\eta\,\beta_1\,w_1}{2\,\beta_2}\,;; \qquad \phi_3(0) = \varphi_3(1) = \frac{2\,\eta}{\beta_1\,\beta_2}. \tag{3.241}$$

O campo magnético (3.236) das soluções (3.237) será dado por

$$\begin{aligned}
b_z &= -\frac{p^2}{e\,a^2}\,\beta_1\,\beta_2\,z\ (1-z)\,T_3;\\
b_\xi &= -\frac{2\,p^2}{e\,a^2}\ (1-2\,z)\ \sqrt{1-z}\,\beta_2\,T_2;\\
b_\phi &= \frac{2\,p^2}{e\,a^2}\ (1-2\,z)\ \sqrt{z}\,\beta_1\,T_1.
\end{aligned} \tag{3.242}$$

A base do sistema de coordenadas toroidal não é clara na visualização da solução, pois as componentes não são constantes em todo o espaço, portanto, para entender melhor o comportamento do campo (3.242), vamos usar a relação (A.8) do apêndice (A) e escrever

o campo magnético em termos da base do sistema cartesiano, i.e.,

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{p}{e\,a^2}\Big[2\,\beta_1\,p\,(1-2\,z)\,\sqrt{z}\,\sin\phi\,T_1 - 2\,\beta_2\,(1-2\,z)\,\sqrt{z(1-z)}\,\cos\phi\sin\xi\,T_2 + \\
&\quad +\beta_1\,\beta_2\,z\,(1-z)\,(\sqrt{1-z}-\cos\xi)\cos\phi\,T_3\Big]\,; \\
b_2 &= -\frac{p}{e\,a^2}\Big[-2\,\beta_1\,p\,(1-2\,z)\,\sqrt{z}\,\cos\phi\,T_1 - 2\,\beta_2\,(1-2\,z)\,\sqrt{z(1-z)}\,\sin\phi\sin\xi\,T_2 + \\
&\quad +\beta_1\,\beta_2\,z\,(1-z)\,(\sqrt{1-z}-\cos\xi)\sin\phi\,T_3\Big]\,; \\
b_3 &= \frac{p}{e\,a^2}\Big[2\,\beta_2\,(1-2\,z)\,\sqrt{1-z}(\sqrt{1-z}-\cos\xi)\,T_2 + \beta_1\,\beta_2\,z\,\sqrt{z}\,(1-z)\,\sin\xi\,T_3\Big].
\end{aligned}
\tag{3.243}
$$

No infinito espacial ($z=0,\xi=0$), o fator p vai a zero, portanto, o campo magnético é nulo,

$$\vec{b}\,(z=0,\xi=0,\phi)=0, \tag{3.244}$$

já no eixo x_3 que é representado em coordenadas toroidais por $z=0$ e ξ livre, temos apenas a componente do campo magnético na direção do eixo x_3 regular dependente apenas de ξ

$$\vec{b}(0,\xi,\phi)=\frac{2\,\beta_2}{e\,a^2}\,(1-\cos\xi)^2\,T_2\,\vec{e}_3. \tag{3.245}$$

Em $z=1$, temos a contribuição apenas da componente ϕ do campo magnético

$$\vec{b}(1,\xi,\phi)=\frac{2\,\beta_1}{e\,a^2}\,(\sin\phi\,\vec{e}_1-\cos\phi\,\vec{e}_2)=\frac{2\,\beta_1}{e\,a^2}\,\vec{e}_\phi. \tag{3.246}$$

Note que a solução é completamente regular em todo o espaço sem nenhum tipo de patologia, ainda que a matriz h não seja inversível nas regiões em $z=0$ e $z=1$, entretanto, ainda não é claro o que de fato este campo magnético representa fisicamente, sendo apenas mais uma solução matemática. A solução encontrada é simples e serve como um exemplo de solução não abeliana para o ansätz conforme, mostrando portanto o potencial do ansätz em encontrar diversas soluções de comportamentos distintos.

4 CARGAS DINÂMICAS

4.1 As cargas de Noether

As cargas dinâmicas das teorias do eletromagnetismo são bem conhecidas dos conceitos das teorias clássicas de campo. São quantidades conservadas obtidas a partir da simetria de fase global da teoria usando o teorema de Noether.[30] Tais cargas estão associadas à equação de continuidade

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu = 0 \tag{4.1}$$

obtida através das equações de Maxwell (2.9). Note que a identidade de Bianchi não leva a uma equação da continuidade, pois não há fontes de correntes a menos que seja imposta soluções singulares que violam tal identidade de forma a se ter

$$\partial_\nu \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\nu j_m^\nu = 0. \tag{4.2}$$

De modo que as quantidades conservadas são as cargas

$$\begin{aligned} Q_E &= \int d^3x\, j^0 = \frac{1}{2}\epsilon_{kij} \int dS_k\ \widetilde{F}_{ij}; \\ Q_B &= \frac{1}{2}\epsilon_{kij} \int dS_k\ F_{ij}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

No eletromagnetismo, o tensor dos campos é invariante sob uma transformação de gauge, portante as cargas Q_E e Q_B são invariantes de gauge. Para os campos de Yang-Mills, sobre a mesma análise, o mesmo não é observado, pois diretamente das equações de Yang-Mills (2.43), temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -ie[A_\mu, F^{\mu\nu}] + J^\nu = j_e^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j_e^\nu = 0; \\ \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} &= -ie[A_\mu, \widetilde{F}^{\mu\nu}] = j_m^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\nu j_m^\nu = 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

E como o tensor dos campos é covariante sobre transformações de gauge (2.48), temos que as cargas de Noether não são invariantes ou covariantes sobre tais transformações

$$Q'_E = \frac{1}{2}\epsilon_{kij} \int dS^k\ g(x)\widetilde{F}^{ij} g^{-1}(x) \neq Q_E, \tag{4.5}$$

e o mesmo vale para Q_B. Pois, no integrando, tem-se fatores do tipo $g(x)$ dependentes da posição que influenciam na integração. Outra forma de se observar tal problema é a partir das correntes j_e^ν e j_m^ν, note que sobre transformações de gauge elas mudam de forma local, isto é,

$$j_e^\nu \to g\, j_e^\nu\, g^{-1} + \frac{i}{e}\left[\, \partial_\mu g\, g^{-1}\, ,\, g\, F^{\mu\nu}\, g^{-1} \,\right], \tag{4.6}$$

o mesmo ocorre para j_m. O problema consiste em não contabilizar a não comutatividade dos elementos durante a integração na obtenção das cargas dinâmicas, entretanto, em

2011, L A. Ferreira e G. Luchini construíram as equações integrais das teorias de gauge não-abelianas lançando mão da generalização do teorema de Stokes para campos vetoriais não abelianos. A formulação permitiu a obtenção das cargas dinâmicas destas teorias, cargas estas que não compartilham do mesmo problema que as cargas de Noether e estão associadas a conceitos de integrabilidade.

4.2 Equações integrais das teorias de gauge

Vimos que as cargas dinâmicas das teorias de gauge não abelianas quando obtidas via Noether não são invariantes e covariantes de gauge, e em sua integração não carregam a estrutura não abeliana do grupo de simetria. Portanto, não temos garantia sobre a consistência ao associá-las às cargas dinâmicas da teoria.

A inconsistência das cargas dinâmicas das teorias não abelianas foi esclarecida com a implementação do conceito de integrabilidade[6] garantida pelas equações integrais da teoria com estruturas no espaço generalizado dos loops obtidas nas referências.[7,8] A partir desta seção apresentaremos a construção das cargas dinâmicas consistentes com a teoria não abeliana a fim de calcular as cargas das soluções da teoria modificada de Yang-Mills-Higgs (3.3). Para isso vamos fazer uso do espaço dos loops que é definido como o espaço dos mapeamentos de uma n-esfera S^n para o espaço físico, isto é, um espaço-tempo de dimensão d, onde $n < d$. O espaço de loops mais simples construído sobre espaço-tempo de Minkowski, de dimensão quatro, consiste do espaço cujos pontos correspondem a loops S^1 no espaço-tempo, e caminhos fechados no espaço dos loops representam volumes no espaço-tempo.

O conceito de integrabilidade em dimensões mais baixas reside na conservação dos auto-valores do operador

$$W_\Gamma = P \exp\left(- i\, e \int_\Gamma dx^\mu \; A_\mu(x) \right). \tag{4.7}$$

estabelecida através de uma equação de curvatura nula, isto é,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\, e \; [\, A_\mu \, , \, A_\nu \,] = 0, \tag{4.8}$$

consequentemente, o operador (4.7) não depende do caminho ao longo do espaço-tempo, tornando-se integrável. A generalização do cálculo do operador (4.7) para dimensões maiores que duas permite a obtenção das equações integrais de Yang-Mills.

A teoria de Yang-Mills foi construída como uma generalização do eletromagnetismo tendo suas equações locais baseadas nas equações parciais de Maxwell. Para apresentar a construção das equações integrais de Yang-Mills, vamos introduzir as equações integrais do eletromagnetismo via espaço dos loops encontrando a lei de conservação garantida por elas. De início, numa forma mais compacta, vamos lançar mão do teorema de Stokes

generalizado,[31] a fim de introduzir a notação que utilizaremos e apresentar as equações de maneira compacta. O teorema de Stokes generalizado permite a generalização das equações integrais de campos vetoriais na notação de formas diferenciais, mantendo um formalismo covariante para a teoria. O teorema de Stokes abeliano para uma 2-forma é dado por

$$\int_{\Sigma} B_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \int_{\mathcal{V}} \partial_{\lambda} B_{\mu\nu}\, dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}. \tag{4.9}$$

onde Σ é a borda do volume $\mathcal{V}$ de integração, e $B_{\mu\nu}$ é uma 2-forma diferencial. Aplicamos o teorema (4.9) para obter as equações integrais de Maxwell usando que a 2-forma $B_{\mu\nu}$ será

$$B_{\mu\nu} = \alpha F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{4.10}$$

α e β constantes. Das equações locais de Maxwell (2.9) temos as relações

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2!}(\alpha F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\nu}) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \beta \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} j^{\sigma}\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\lambda}. \tag{4.11}$$

Estas são o conjunto de equações integrais de Maxwell escritas numa forma compacta. Restrições sobre a superfície Σ e o volume $\mathcal{V}$ vão recuperar as equações que conhecemos, isto é, escolhendo $\mathcal{V}$ puramente espacial, apenas as componentes espaciais da 2-forma $B_{\mu\nu}$ (4.10) contribuem. Escrevendo em termos do tensor dos campos $F_{\mu\nu}$ e seu dual, temos

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2!}(\alpha F_{ij} + \beta \tilde{F}_{ij}) dx^{i} \wedge dx^{j} = \beta \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{3!} \epsilon_{0ijk} j^{k}\, dx^{i} \wedge dx^{j} \wedge dx^{k}. \tag{4.12}$$

com

$$\tilde{F}_{ij} = \epsilon_{kij} E_k \qquad\qquad F_{ij} = \epsilon_{kij} B_k, \tag{4.13}$$

sendo os elementos de área e volume definidos por

$$dS_k = \frac{1}{2!} \epsilon_{kij} dx^{i} \wedge dx^{j}, \qquad\qquad d\mathrm{Vol} = \frac{1}{3!} \epsilon_{0ijk} j^{0}\, dx^{i} \wedge dx^{j} \wedge dx^{k}, \tag{4.14}$$

Portanto, usando que $\epsilon_{0ijk} = 1$, temos que

$$\alpha \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} + \beta \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \beta\, Q; \tag{4.15}$$

onde Q é a carga dinâmica do eletromagnetismo,

$$Q = \int_{\mathcal{V}} j^{0} d\mathrm{Vol}. \tag{4.16}$$

Note que a escolha de α e β designa papéis importantes nas interpretações destas equações; de modo que tomar $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ recuperamos a conhecida lei de Gauss para o campo magnético e, no caso em que $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ obtemos a lei de Gauss para o campo elétrico. Quando o volume $\mathcal{V}$ é definido como sendo $\mathcal{V} = I \times \mathcal{S}$, onde I é um intervalo temporal e $\mathcal{S}$ é uma superfície espacial bidimensional aberta, então temos para $\beta = 0$ que

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2!} F_{0j} dx^{0} \wedge dx^{j} + \int_{\Sigma} \frac{1}{2!} F_{ij} dx^{i} \wedge dx^{j} = 0, \tag{4.17}$$

para um instante no tempo, devemos tomar que o limite do intervalo entre os valores extremos de I vai a zero, recuperando a lei de Faraday da equação (4.17)

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\vec{\gamma} + \int_{\mathcal{S}} \partial_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \mathbf{0}, \tag{4.18}$$

onde $\partial\mathcal{S} = \gamma$. Finalmente, para $\alpha = 0$, temos

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2!} \tilde{F}_{oi} dx^0 \wedge dx^i + \int_{\Sigma} \frac{1}{2!} \tilde{F}_{ij} dx^i \wedge dx^j = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{3!} \epsilon_{0ijk} j^k \; dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j \tag{4.19}$$

que no limite do intervalo I ir a zero, recuperamos a lei de Ampère, isto é,

$$\int_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \mathbf{dS} + \int_{\mathcal{S}} \partial_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS}. \tag{4.20}$$

Através da expressão (4.11), podemos obter a lei de conservação para a carga dinâmica do eletromagnetismo, via uma simetria observada no espaço dos loops. A obtenção é feita construindo uma hipersuperfície que escaneie o espaço-tempo ao longo do intervalo temporal $I \in [0, T]$. Para isso, é necessário fixar um ponto do espaço-tempo como referência de onde iniciará a integração dos volumes e, nos extremos do intervalo temporal, tomamos os volumes de duas esferas sólidas que permitem a integração ao longo das seções espaciais nos respectivos instantes. Portanto, o escaneamento (apresentado na figura 10) é completo quando anexamos os transportes temporais da superfície no infinito S^2_∞ ao longo do intervalo I e, do ponto de referência ao longo do intervalo. A união destas regiões descreve um hipercilindro $\mathcal{H}_c$ cujas tampas são definidas pelas esferas sólidas

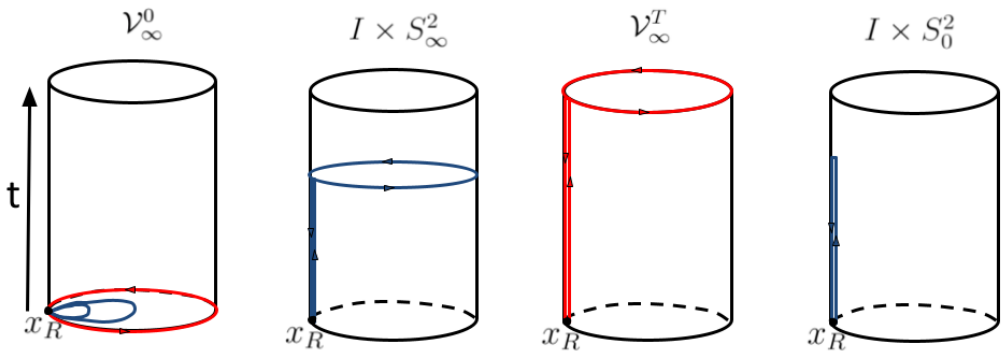


Figura 10 – Escaneamento do hipercilindro $\mathcal{H}_c$ no espaço tempo sob um ponto de referência. Os volumes $\mathcal{V}^0_\infty$ e $\mathcal{V}^T_\infty$ correspondem as tampas do hipercilindro no instante $t = 0$ e $t = T$, respectivamente. As regiões S^2_0 e S^2_∞ representam o tubo do hipercilindro. x_R é o ponto de referência do escaneamento.

Fonte: Elaborada pelo autor.

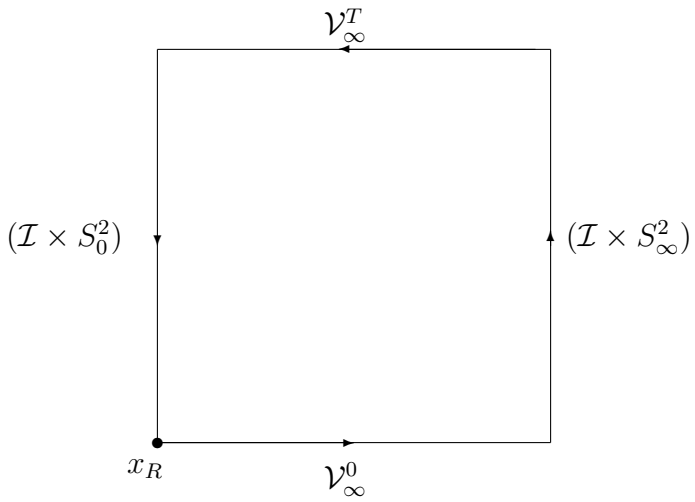
$$\text{(Tampa inferior)} = \mathcal{V}^0_\infty = \mathbb{R}^3, \qquad t = 0 \tag{4.21}$$

$$\text{(Tampa superior)} = \mathcal{V}^T_\infty = \mathbb{R}^3, \qquad t = T, \tag{4.22}$$

com tubo representado pelo produto cartesiano $I \times S^2_\infty$, onde I é o intervalo temporal $[0, T]$ e S^2_∞ é uma casca esférica de raio infinito, e pela região $I \times S^2_0$, onde S^2_0 representa um esfera infinitesimal em torno do ponto de referência. Note, que a integração sobre as regiões que definem $\mathcal{V}$ e Σ na expressão (4.11) não necessitam de ordenamento de caminho ou mesmo dependem do ponto de referência, de modo que não é necessário se preocupar com a parametrização ao longo das superfícies, consequência da propriedade abeliana dos campos. Então, neste caso, as integrais são simplificadas. Sendo o espaço dos loops o espaço dos mapeamentos entre S^1 e o espaço-tempo M fixado um ponto de referência

$$M_{loop} := \{S^1 \to M |\, \mathcal{NP} \to x_R \in M\} \tag{4.23}$$

onde $\mathcal{NP}$ é o polo norte do loop S^1 que é mapeado em x_R, este o ponto de referência dos mapeamentos. Então, o escaneamento do hipercilindro (figura 10) que descreve o espaço-tempo dentro do intervalo I, é representado no espaço dos loops como sendo



Perceba que o hipercilindro descreve um caminho fechado no espaço dos loops, isto é, o hipercilindro não tem borda $\partial\mathcal{H}_c = 0$. Desta forma, o lado esquerdo da equação (4.11) que é uma integração sobre a borda se anula, restando apenas o lado direito que consiste do calculo das fontes no hipercilindro. Portanto, aplicando o teorema de Stokes em todo o espaço-tempo caracterizado pelo hipercilindro $\mathcal{H}_c$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{H}_c} \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} j^\sigma \; dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda = \\ &= \int_{\text{Tampa inferior}} j^0 d\text{Vol} - \int_{\text{Tampa superior}} j^0 d\text{Vol} + \\ &+ \int_0^T \int_{S^2_\infty} \vec{j} \cdot d\vec{S}\, dt + \int_T^0 \int_{S^2_0} \vec{j} \cdot d\vec{S}\, dt. \end{aligned} \tag{4.24}$$

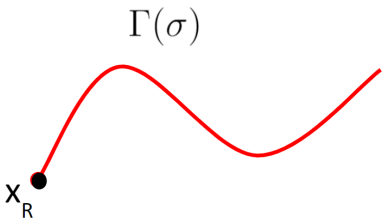


Figura 11 – Curva Γ parametrizada pelo parâmetro σ partindo de um ponto de referência x_R.

Fonte: Elaborada pelo autor.

São impostas as seguintes condições de contorno para os campos e correntes, de forma a zerarem no infinito,

$$F_{\mu\nu} \sim \frac{1}{r^{\frac{3}{2}+\delta}} \; ; \qquad j^{\mu} \sim \frac{1}{r^{2+\varepsilon}} \; ; \qquad \delta, \varepsilon > 0 \; ; \qquad r \to \infty, \tag{4.25}$$

implicando que as integrais calculadas no tubo do hipercilindro zerem, isto é, a integral calculada sobre a superfície S^2_{∞} zera devido às condições de contorno impostas para os campos e correntes e, a integral sobre a superfície S^2_0 tem valor nulo uma vez que a superfície S^2_0 tem raio infinitesimal, portanto

$$\int_0^T \int_{S^2_{\infty}} \vec{j} \cdot d\vec{S}\, dt = 0, \qquad \int_T^0 \int_{S^2_0} \vec{j} \cdot d\vec{S}\, dt = 0 \tag{4.26}$$

o que leva a igualdade

$$\int_{\text{Tampa inferior}} j^0 d\text{Vol} = \int_{\text{Tampa superior}} j^0 d\text{Vol}, \tag{4.27}$$

ou seja $Q_{t=0} = Q_{t=T}$, as cargas são conservadas no tempo, estabelecendo então, a lei de conservação para as cargas dinâmicas. Perceba que a lei de conservação é garantida pela condição de que $\partial \mathcal{H}_c = 0$ e pelas condições de contorno da teoria. Além disso, a carga Q é invariante de gauge.

Para os campos de Yang-Mills, usamos a generalização do teorema de Stokes (4.9), que leva em conta a integração dos campos não abelianos. Vamos encontrar o teorema de Stokes lançando mão espaço dos loops e de objetos consequentes da estrutura matemática das teorias de gauge. A estrutura dos campos de gauge está associada com a ação de um grupo de simetria local no sistema físico, garantindo a existência dos operadores de Wilson (4.7), estes carregam toda a informação que uma teoria de gauge possui, sendo quantidades globais pois dependem de integrações para serem obtidas. Um operador de Wilson é definido através de uma equação de transporte paralelo, isto é, seja um caminho Γ mostrado na figura 11 parametrizado por σ, definimos a equação de transporte paralelo de uma teoria de gauge não abeliana como sendo

$$\frac{d}{d\sigma} W + i\, e\, A_{\mu}\, W \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} = 0, \tag{4.28}$$

onde o campo de gauge A_μ atua como uma conexão ao longo do percurso. A solução da equação (4.28) é

$$W = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\,e)^n}{n!} \int_0^\sigma d\sigma_1 ... \int_0^\sigma d\sigma_n \, A_{\mu_1}(x(\sigma_1)) ... A_{\mu_n}(x(\sigma_n)) \, \frac{dx^{\mu_1}}{d\sigma_1} ... \frac{dx^{\mu_n}}{d\sigma_n} \right) W_0, \tag{4.29}$$

sob a escolha de $W_0 = \mathbb{I}$,

$$W = P \exp\left(-\,i\,e \int_0^\sigma d\sigma' \; A_\mu(x(\sigma')) \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \right). \tag{4.30}$$

Este informa, por exemplo, sob uma representação do grupo, o quanto os campos de gauge afetam ou interagem em um sistema físico, portanto, se queremos saber como os campos de gauge mudam ao longo de integrações no espaço-tempo, é esta quantidade que traz tal informação e possibilita a obtenção dos fluxos.

Sob um loop fechado parametrizado por $\sigma \in [0, 2\,\pi]$ (figura 12), o operador (4.31) é dado por

$$W = P \exp\left(-\,i\,e \int_0^{2\,\pi} d\sigma' \; A_\mu(x(\sigma')) \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \right). \tag{4.31}$$

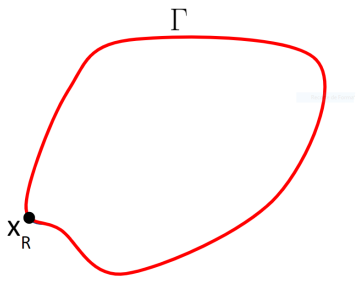


Figura 12 – Curva Γ parametrizada pelo parâmetro σ partindo de um ponto de referência x_R.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O teorema de Stokes para 1-forma, relaciona o cálculo sobre curvas com o cálculo sobre as superfícies delimitadas por tais curvas. Sendo assim, a partir da equação (4.28) calculada ao longo do caminho fechado da figura 12 sobre o ponto de referência x_R, é possível obter a equação de transporte paralelo ao longo da área Σ delimitada por Γ, vista na figura 13. A obtenção é feita variando ao longo de uma família de curvas desde o ponto x_R até a curva Γ (figura 14), computado na equação (4.28) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}(W^{-1}\delta W) - \left(\frac{d}{d\sigma}W^{-1}\right)W \;&=\; -i\,e\,W^{-1}\partial_\nu A_\mu(x) W \frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta x^\nu - i\,e\,W^{-1}A_\mu(x)\delta W \frac{dx^\mu}{d\sigma} - \\ &\quad -i\,e\,W^{-1}A_\mu(x) W \left(\frac{d\delta x^\mu}{d\sigma}\right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

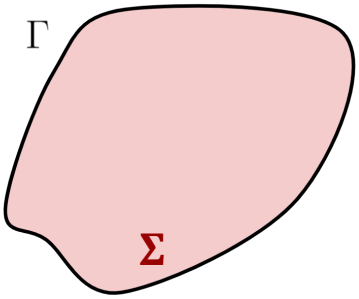


Figura 13 – Área Σ delimitada pela curva Γ.

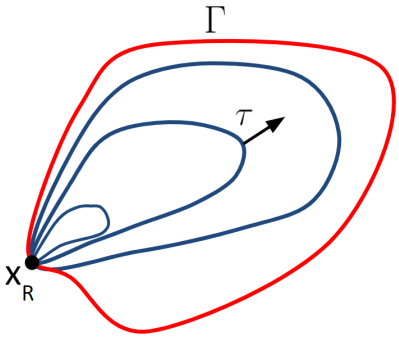


Figura 14 – Variações ortogonais a curva Γ parametrizadas pelo parâmetro τ partindo do ponto de referência x_R.

Fonte: Elaboradas pelo autor.

Tomamos que o parâmetro σ ao longo do loop está no intervalo $[0, 2\pi]$ então, as variações no ponto de referência são nulas, uma vez que este é constante, isto é, $\delta x(0) = \delta x(2\pi) = 0$, de modo que ao integrar (4.32) ao longo do loop temos a quantidade

$$W^{-1}\delta W = i\,e \int_0^{\delta x(0)} d\sigma\; W^{-1}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,A_\nu\,])W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta x^\nu. \tag{4.33}$$

E, usando que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\,e\,[\,A_\mu\,,\,A_\nu\,]\,, \tag{4.34}$$

temos que a expressão (4.33) pode ser reescrita como

$$\delta W = i\,e\,W \int_0^{2\pi} d\sigma\, W^{-1}F_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\delta x^\nu. \tag{4.35}$$

A escolha da variação pode ser definida de forma arbitrária, portanto, escolhido que o parâmetro τ parametriza as variações dos loops $\delta = \frac{d}{d\tau}\delta\tau$, onde $\tau = 0$ caracteriza um loop infinitesimal em torno do ponto de referência x_R e $\tau = 2\pi$ caracteriza o caminho Γ inicial, a relação (4.35) descreve a equação de transporte paralelo ao longo de uma superfície bidimensional

$$\frac{d}{d\tau}W = WT_{2\pi}(F, A, \tau), \tag{4.36}$$

onde a conexão é definida através da integração sobre uma 2-forma,

$$T_{2\pi}(F, A, \tau) = i\,e \int_0^{2\pi} d\sigma\; W^{-1}F_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{4.37}$$

Deste modo a quantidade W calculada via equação (4.36) será

$$W = \mathcal{P}\exp\left(i\,e \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau d\sigma\; W^{-1}F_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right). \tag{4.38}$$

É interessante notar que equação (4.36) é calculada sobre um caminho nos espaços dos loops, pois a conexão $T_{2\pi}$ é obtida via integração sobre uma família de loops parametrizada

por τ. Deste modo, temos duas formas de calcular o operador de Wilson, uma através de um caminho fechado unidimensional Γ (4.31) e outra pela superfície Σ (4.38)(onde $\partial\Sigma = \Gamma$), sendo as regiões descritas na figura 13. Igualando (4.31) com (4.38), obtemos o teorema de Stokes não abeliano que descreve o fluxo para 1-forma, ou seja, que relaciona o quadripotencial, A_μ com o tensor dos campos $F_{\mu\nu}$,

$$P\exp\left(-i\,e\int_0^{2\pi} d\sigma\; A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) = \mathcal{P}\exp\left(i\,e\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau' d\sigma'\; W^{-1}F_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma'}\frac{dx^\nu}{d\tau'}\right). \quad (4.39)$$

Para encontrar as equações de fluxo dos campos de Yang-Mills, isto é, as equações integrais do tensor dos campos de Yang-Mills, temos que construir o teorema de Stokes para uma 2-forma $B_{\mu\nu}$. Define-se então, a quantidade V através do transporte paralelo ao longo de uma superfície de forma análoga a (4.36), ou seja,

$$\frac{dV}{d\tau} - V\hat{T}_{2\pi}(B, A, \tau) = 0, \quad (4.40)$$

onde

$$\hat{T}_{2\pi}(B, A, \tau) = \int_0^{2\pi} d\sigma\; W^{-1}B_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (4.41)$$

O teorema de Stokes para 1-forma (4.39) foi obtido através da integração do operador de Wilson ao longo de uma curva (4.30) e, ao longo de uma superfície bidimensional (4.38). De forma análoga, podemos obter a quantidade V a partir da equação (4.40) integrando ao longo de uma superfície fechada, que delimita o volume $\mathcal{V}$, isto é, $\Sigma = \partial\mathcal{V}$ e também, através da integração ao longo do volume $\mathcal{V}$. Portanto, a partir da equação ao sobre uma superfície fechada (4.40), aplicamos variações ao longo de uma família de superfícies como mostrado na figura 15, partindo de uma superfície infinitesimal em torno de x_R até a superfície Σ, de forma que a variação destas superfícies descrevam o volume $\mathcal{V}$. A variação pode ser descrita através de um parâmetro ξ, tal que $M(\xi)$ é uma família de superfícies,

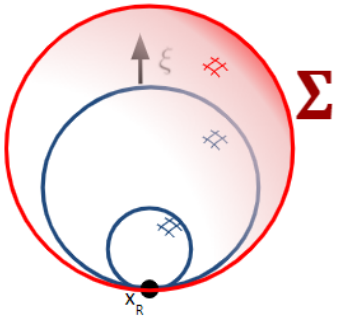


Figura 15 – Variação de superfícies fechadas parametrizadas por ξ escaneando um volume $\mathcal{V}$, iniciando no ponto de referência x_R e atingindo a superfície Σ.

Fonte: Elaborada pelo autor.

sendo o intervalo $\xi \in [0, 2\pi]$, tal que $M(0) = x_R$ e $M(2\pi) = \partial\mathcal{V}$. Deste modo, através das variações de superfícies que escaneiam $\mathcal{V}$ e são parametrizadas por ξ, obtemos a equação de transporte paralelo para o operador V ao longo do volume $\mathcal{V}$ dada por

$$\frac{dV}{d\xi} - \left(\int_0^{2\pi} d\tau V\mathcal{K}(\xi)V^{-1} \right) V = 0, \tag{4.42}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \int_0^{2\pi} d\sigma\ W^{-1}(D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\mu\lambda}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\xi} + \\ & + \int_0^{2\pi}\int_0^{\sigma} d\sigma' d\sigma \left[B^W_{\mu\nu}(\sigma),\ F^W_{\alpha\lambda}(\sigma') - B^W_{\alpha\lambda}(\sigma') \right] \times \\ & \times \frac{dx^\alpha}{d\sigma'}(\sigma')\frac{dx^\mu}{d\sigma}(\sigma)\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}(\sigma)\frac{dx^\lambda}{d\xi}(\sigma') - \frac{dx^\nu}{d\xi}(\sigma)\frac{dx^\lambda}{d\tau}(\sigma') \right), \end{aligned} \tag{4.43}$$

com a notação $B^W_{\mu\nu}$ denotando a conjugação $W^{-1}B_{\mu\nu}W$, tendo esta grande significado físico, uma vez que ela está associada ao transporte das formas diferenciais ao longo do espaço-tempo. A demonstração completa desta equação pode ser vista na referência.[7]

Portanto, as equações (4.40) e (4.42) estabelecem duas maneiras de se calcular o operador V, resultando na igualdade

$$\mathcal{P}\exp\left(\int_{\partial\mathcal{V}} d\tau d\sigma\ W^{-1}B_{\mu\nu}W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \hat{\mathcal{P}}\exp\left(\int_{\mathcal{V}} d\tau d\xi\ V\mathcal{K}V^{-1} \right). \tag{4.44}$$

Esta relação trata-se do teorema de Stokes não abeliano para 2-formas.

No eletromagnetismo, obtemos as equações integrais definindo uma 2-forma (4.10) e substituindo no teorema de Stokes abeliano, da mesma forma, obtém-se as equações integrais de Yang-Mills tomando a 2-forma $B_{\mu\nu}$ como sendo

$$B_{\mu\nu} = i\,e\,\left(\alpha F_{\mu\nu} + \beta\tilde{F}_{\mu\nu} \right) \tag{4.45}$$

e substituindo na expressão (4.44). Então, fazendo uso das equações locais de Yang-Mills (2.43) chegamos nas equações integrais

$$\mathcal{P}\exp\left(i\,e\int_\Sigma d\tau d\sigma\ [\alpha F^W_{\mu\nu} + \beta\tilde{F}^W_{\mu\nu}]\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \hat{\mathcal{P}}\exp\left(\int_{\mathcal{V}} d\tau d\xi\ V\mathcal{K}_{YM}V^{-1} \right), \tag{4.46}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{YM} &= i\,e\int_0^{2\pi} d\sigma\ W^{-1}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\,\beta\,j^\sigma W\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\xi} - \\ & -e^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sigma} d\sigma' d\sigma \left[\alpha F^W_{\mu\nu}(\sigma) + \beta\tilde{F}^W_{\mu\nu}(\sigma),\ (1-\alpha)F^W_{\alpha\lambda}(\sigma') - \beta\tilde{F}^W_{\alpha\lambda}(\sigma') \right] \times \\ & \times \frac{dx^\alpha}{d\sigma'}(\sigma')\frac{dx^\mu}{d\sigma}(\sigma)\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}(\sigma)\frac{dx^\lambda}{d\xi}(\sigma') - \frac{dx^\nu}{d\xi}(\sigma)\frac{dx^\lambda}{d\tau}(\sigma') \right). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Estas são as equações integrais de Yang-Mills, onde podem ser utilizadas para qualquer campo de gauge não abeliano, basta definir quais campos físicos serão a 2-forma $B_{\mu\nu}$ e as equações locais as quais satisfazem. Além disso, não se tem uma clareza a respeito das constantes α e β assim como se tem no caso eletromagnético, entretanto, foi verificado[32] que as equações integrais são satisfeitas para quaisquer valores destas constantes.

Note que, as equações integrais obtidas via teorema de Stokes não abeliano são muito mais robustas e complicadas quando comparadas com as expressões de fluxo obtidas via Noether (4.3), isso decorre do teorema de Stokes não abeliano relacionar exponenciais de caminho ordenado, consequência da ação de um grupo de Lie não abeliano. Portanto, é necessário cuidado ao trabalhar com campos não abelianos, uma vez que temos que levar em conta a ação do grupo ao variarmos o campo no espaço-tempo.

4.2.1 Lei de conservação

Agora que temos as equações integrais para os campos não abelianos, podemos verificar a lei de conservação para suas cargas dinâmicas a partir do espaço dos loops assim como fizemos para o eletromagnetismo, onde mapeamos o espaço-tempo com um hipercilindro (figura 10). De início, lembremos que o hipercilindro $\mathcal{H}_c$ é fechado, ou seja, não possui borda $\partial\mathcal{H}_c = 0$, portanto, o lado esquerdo das equações (4.46) que envolve o cálculo na borda do volume deve ser trivial, i.e.,

$$\mathbb{I} = \hat{\mathcal{P}} \exp\left(\int_{\mathcal{H}_c} d\tau d\xi \; V\mathcal{K}V^{-1} \right) = V(\mathcal{H}_c). \tag{4.48}$$

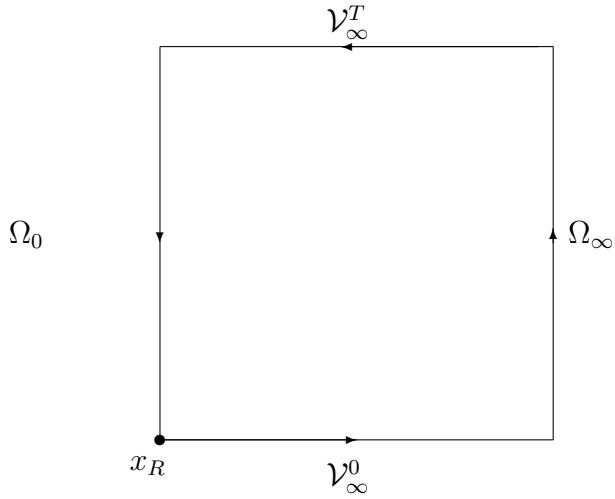
Podemos quebrar a integração no hipercilindro em quatro partes: sendo as tampas

$$\begin{aligned} \text{(Tampa inferior)} &= \mathcal{V}^0_\infty = R^3, \qquad t = 0 && (4.49) \\ \text{(Tampa superior)} &= \mathcal{V}^T_\infty = R^3, \qquad t = T && (4.50) \end{aligned}$$

e as laterais do cilindro

$$\begin{aligned} \Omega_\infty &\equiv I \times S^2_\infty && (4.51) \\ \Omega_0 &\equiv I \times S^2_0 && (4.52) \end{aligned}$$

onde Ω_∞ é a região que define propagação de uma esfera com raio infinito ao longo de $t = 0$ até $t = T$ e Ω_0 a propagação de uma esfera com raio infinitesimal centrada no ponto de referência x_R, ao longo de $t = T$ até $t = 0$. De modo que, fixado o ponto de referência x_R, a integração é realizada na seguinte orientação no espaço dos loops



Levando em conta o ordenamento de caminho, e a quebra da região $\mathcal{H}_c$ em quatro partes, podemos decompor $V(\mathcal{H}_c)$ na forma

$$V(\mathcal{H}_c) = V^{-1}(\Omega_0)\, V^{-1}(\mathcal{V}_\infty^T)\, V(\Omega_\infty)\, V(\mathcal{V}_\infty^0) = \mathbb{I}. \tag{4.53}$$

A inversão do operador V deve-se ao fato de que integração está sendo feita na orientação oposta, ou seja, na contração da superfície infinita que delimita o volume até o ponto de referência x_R.

Note que a integração começa e termina no mesmo ponto de referência x_R situado no instante $t = 0$, de modo que ambos os cálculos das tampas são feitos usando o mesmo ponto de referência x_R no mesmo instante temporal, portanto, para obter efetivamente a quantidade associada a tampa superior é necessário transportar o ponto de referência x_R para o instante $t = T$.

Analogamente ao que foi feito no caso eletromagnético, fazemos imposições de condições de contorno aos campos de modo a zerarem no infinito, i.e.,

$$F_{\mu\nu} \sim \frac{1}{r^{\frac{3}{2}+\delta}}\ ; \qquad j^\mu \sim \frac{1}{r^{2+\varepsilon}}\ ; \qquad \delta, \varepsilon > 0\ ; \qquad r \to \infty, \tag{4.54}$$

implicando que o cálculo no tubo do cilindro Ω_∞ realizado sobre uma esfera no infinito leva a um fluxo trivial, isto é, $V(\Omega_\infty) = \mathbb{I}$ e, o cálculo sobre a superfície $\mathcal{V}_\infty^0$ resulta também em um fluxo trivial $V(\mathcal{V}_0^T) = \mathbb{I}$ devido ao fato de que este é feito sobre uma esfera de raio infinitesimal. Portanto, obtemos da expressão (4.53) que

$$V(\mathcal{V}_\infty^T) = V(\mathcal{V}_\infty^0), \tag{4.55}$$

como ambos são calculados sobre o mesmo ponto de referência, isto é,

$$V(\mathcal{V}_\infty^T, x_R^{t=0}) = V(\mathcal{V}_\infty^0, x_R^{t=0}), \tag{4.56}$$

torna-se interessante a análise das quantidades nos respectivos instantes de tempo no ponto de referência x_R, sendo necessário o transporte paralelo ao longo do tempo, a fim de obter a quantidade $V(\mathcal{V}_\infty^T, x_R^{t=T})$. Portanto a evolução temporal que leva $(x_R, t=0)$ para $(x_R, t=T)$ é feita através da conjugação do operador de Wilson, uma vez que os termos dos integrandos envolvidos nas equações integrais são transportados pelo espaço através de conjugações do operador de Wilson. Então,

$$V(\mathcal{V}_\infty^T, x_R^{t=T}) = W^{-1}(x_R^0 \to x_R^T) V(\mathcal{V}_\infty^T, x_R^{t=0}) W(x_R^0 \to x_R^T) \tag{4.57}$$

substituindo na (4.56), obtemos que

$$V(\mathcal{V}_\infty^T, x_R^T) = W^{-1}(x_R^0 \to x_R^T) V(\mathcal{V}_\infty^0, x_R^{t=0}) W(x_R^0 \to x_R^T), \tag{4.58}$$

Como V é uma quantidade integral obtida através das equações dinâmicas da teoria, então, trata-se de uma quantidade dinâmica, e através da evolução iso-espectral (4.58) concluí-se que os autovalores de V são conservados no tempo, o que leva a associação de que as cargas dinâmicas conservadas das teorias de gauge não abelianas são os autovalores de V.

4.2.2 Invariância de gauge

Mostramos que os autovalores de V obtidos através das equações (4.46) são quantidades dinâmicas conservadas no tempo. Além disso, estes autovalores também são invariantes de gauge, uma vez que sobre uma transformação de gauge, V é covariante de gauge. Para mostrar tal resultando, usemos a equação (4.28) aplicando a transformação

$$A_\mu(x) \to g(x)\, A_\mu(x)\, g^{-1}(x) + \frac{i}{e}\, \partial_\mu g(x)\, g^{-1}(x) \tag{4.59}$$

obtemos

$$\frac{d}{d\sigma} W' + i\, e\, g(x)\, A_\mu(x)\, g^{-1}(x)\, W' \frac{dx^\mu}{d\sigma} - \partial_\mu g(x)\, g^{-1}(x)\, W' \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0 \tag{4.60}$$

então,

$$g(x) \frac{d}{d\sigma} \left(g^{-1}(x) W' \right) + i\, e\, g(x)\, A_\mu(x)\, g^{-1}(x)\, W' \frac{dx^\mu}{d\sigma}, \tag{4.61}$$

comparando com a (4.28) podemos notar que a menos de um fator constante $g(x_0)$ os elementos $g^{-1}(x)W'$ e W são iguais, isto é,

$$g^{-1}(x)\, W'\, g(x_0) = W. \tag{4.62}$$

Concluímos que, sob ação local do grupo $g(x)$ que leva a uma transformação de gauge, o operador de Wilson transforma na forma

$$W' = g(x)\, W\, g^{-1}(x_0). \tag{4.63}$$

Sendo $B_{\mu\nu} = i\, e \left(\alpha F_{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\nu} \right)$, temos que

$$B_{\mu\nu} \to g(x_0)\, B_{\mu\nu}\, g^{-1}(x_0) \tag{4.64}$$

então a conexão na equação (4.40) deve transformar na forma

$$\hat{T}_{2\pi}(B, A, \tau) \to g(x_0)\, \hat{T}_{2\pi}(B, A, \tau)\, g^{-1}(x_0) \tag{4.65}$$

portanto,

$$\frac{dV'}{d\tau} - V' g(x_0)\, \hat{T}_{2\pi}(B, A, \tau)\, g^{-1}(x_0) = 0, \tag{4.66}$$

levando a conclusão de que V de fato deve ser covariante de gauge, isto é,

$$V' = g(x_0)\, V\, g^{-1}(x_0), \tag{4.67}$$

implicando que o $\mathrm{Tr}\,(V)$ é uma quantidade invariante de gauge.

Portanto, os autovalores de V são quantidades globais dinamicamente conservadas e invariantes de gauge, as quais, consistentemente, são atribuídas à interpretação de cargas dinâmicas para as teorias de gauge não abelianas evitando irregularidades físicas as quais as cargas obtidas via Noether carregam. Faremos uso das equações integrais (4.46) para estudar as cargas dinâmicas das soluções da teoria de Yang-Mills-Higgs modificada (3.111) com o intuito de obter informações sobre propriedades globais de tais soluções.

5 CARGAS DINÂMICAS DE SOLUÇÕES DA TEORIA YANG-MILLS-HIGGS MODIFICADA

No capítulo sobre auto-dualidade construímos uma teoria de Yang-Mills-Higgs generalizada a qual denominamos como teoria de Yang-Mills-Higgs modificada (5). Desta teoria construímos dois ansätzes que proporcionaram soluções com comportamentos distintos, sendo o ansätz esférico e o ansätz toroidal, o primeiro caracterizando soluções monopolares, enquanto o segundo devido a carga magnética nula não caracteriza um monopolo. Portanto, a fim de investigar possíveis quantidades globais dessas soluções, vamos calcular suas cargas dinâmicas fazendo uso das equações integrais de Yang-Mills apresentadas no capítulo (4).

5.1 Carga das soluções esféricas

A simetria esférica da teoria modificada (3.111) permite a construção do ansätz de 't Hooft-Polyakov (3.84), tendo portanto, o campo magnético

$$B_k^a = -\frac{\delta_k^a r^2 - r^a r_k}{er^4}(\xi K'(\xi)) + \frac{r^a r_k}{er^4}(1 - K^2(\xi)) \tag{5.1}$$

e devido as condições de energia finita (3.90), assume um comportamento Coulombiano no infinito assintótico, tomando uma forma abeliana, i.e.,

$$\vec{B} \sim \frac{\widehat{r} \cdot T}{er^2}\,\widehat{r}, \qquad\qquad r \to \infty. \tag{5.2}$$

As cargas dinâmicas dessa solução são os autovalores da holonomia obtida sob a 2-forma da teoria, em outras palavras, são os autovalores do fluxo não abeliano do campo magnético,

$$V = \mathcal{P}\mathrm{e}^{i\,e\,\alpha \int_{\partial\mathcal{V}} F^W_{jk} \frac{dx^j}{d\sigma} \frac{dx^k}{d\tau} d\sigma\, d\tau} = \hat{\mathcal{P}}\mathrm{e}^{\int_{\mathcal{V}} d\tau d\xi\ V\mathcal{K}V^{-1}}, \tag{5.3}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \alpha\,(1-\alpha)\,e^2 \int_{\sigma_i}^{\sigma_f} \int_0^{\sigma} d\sigma' d\sigma \left[F^W_{jk}(\sigma)\,,\, F^W_{mn}(\sigma') \right] \frac{dx^m}{d\sigma'}(\sigma') \frac{dx^j}{d\sigma}(\sigma) \times \\ &\times \left(\frac{dx^k}{d\tau}(\sigma) \frac{dx^n}{d\rho}(\sigma') - \frac{dx^k}{d\rho}(\sigma) \frac{dx^n}{d\tau}(\sigma') \right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Note que fizemos uso das equações integrais (4.46) tomando $\beta = 0$. Tal escolha é feita pois estamos interessados em obter as cargas dinâmicas associadas à 2-forma F_{ij}, isto é, o fluxo não abeliano do campo magnético. Vamos nos concentrar na integral

$$Q_{(\alpha)} \equiv \int_{\mathcal{S}} F^W_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\sigma\, d\tau \tag{5.5}$$

sendo este o termo de primeira ordem em α da quantidade V obtida através da integração sobre uma superfície. O campo (5.1) está definido em todo $\mathbb{R}^3$, portanto, o fluxo não

abeliano do campo ocorre numa superfície esférica bidimensional de raio infinito S^2_∞, nesta região o campo magnético assume a forma (5.2). Portanto, sendo $\mathcal{S} = S^2_\infty$ e definindo a parametrização da superfície em termos das coordenadas esféricas, $\sigma \equiv \theta$ e $\tau \equiv \phi$, temos que

$$F_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau} = F_{\theta\phi} = B_r \tag{5.6}$$

então,

$$Q_{(\alpha)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} B_r^W\, r^2 \sin\theta d\theta\, d\phi = \frac{1}{e}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} W^{-1}\,(\widehat{r}\cdot T)\; W\, \sin\theta d\theta\, d\phi. \tag{5.7}$$

A quantidade $\widehat{r}\cdot T$ na expressão (5.2), assim como definimos na seção (2.3) pode ser interpretada como uma carga magnética associada a um campo Coulombiano, i.e.,

$$\vec{B} = \frac{\mathcal{G}_m}{r^2}\,\widehat{r}; \qquad\qquad \mathcal{G}_m \equiv \frac{1}{e}\,\widehat{r}\cdot T, \tag{5.8}$$

sendo uma quantidade covariantemente constante, isto é, ao aplicar a derivada covariante na carga

$$D_k\mathcal{G}_m = \partial_k\mathcal{G}_m + i\,e\,[\,A_k\,,\,\mathcal{G}_m\,], \tag{5.9}$$

sendo A_k dado pelo ansätz (3.84), temos

$$\partial_k\,(\mathcal{G}_m) = \frac{1}{e\,r}\left(T_k - (\widehat{r}\cdot T)\,\widehat{r}^k\right); \qquad\qquad [\,A_k\,,\,\mathcal{G}_m\,] = \frac{i}{e^2\,r}\left(T_k - (\widehat{r}\cdot T)\;\widehat{r}^k\right), \tag{5.10}$$

então

$$D_k\mathcal{G}_m = 0. \tag{5.11}$$

Sendo assim, a carga magnética pode ser escrita como uma conjugação de operadores de Wilson, ou seja,

$$\mathcal{G}_m = W\,\mathcal{G}_m^R\,W^{-1}, \tag{5.12}$$

onde $\mathcal{G}_m^R$ é escolhida como sendo calculada sobre um ponto fixo de referência, de modo que a expressão

$$\mathcal{G}_m^R = \frac{1}{e}\,\widehat{r}_R\cdot T \tag{5.13}$$

seja constante. A conjugação dos operadores de Wilson realizam o transporte da carga ao longo da superfície, resultando na expressão (5.12). Portanto a integral (5.7) pode ser resolvida de forma simples tendo o seguinte resultado

$$Q_{(\alpha)} = 4\,\pi\,\mathcal{G}_m^R. \tag{5.14}$$

O comportamento assintótico do campo é abeliano, implicando que a obtenção da quantidade (5.3) sobre a superfície não dependa do ordenamento de caminho, i.e.,

$$V = \mathcal{P}\mathrm{e}^{i\,e\,\alpha\,Q_{(\alpha)}} = \mathrm{e}^{i\,4\,\pi\,e\,\alpha\,\mathcal{G}_m^R}, \tag{5.15}$$

e ao tomar $\alpha = 1$, a integral sobre o volume se anula, pois $\mathcal{K} = 0$, levando então a uma condição de quantização para a carga magnética

$$\mathrm{e}^{i\,4\,\pi\,e\,\mathcal{G}_m^R} = \mathbb{I}. \tag{5.16}$$

Nossa construção de soluções esféricas para a teoria modificada mantém a mesma carga magnética da teoria usual de Yang-Mills-Higgs,[33] pois ambas são construídas sob o mesmo ansätz e condições de contorno (3.90).

A presença da matriz h na teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs permite soluções com diferentes condições de contorno para a função K do ansätz (3.84), mas como mencionado na seção (3.3), impor outras condições para K implica em remover o Higgs de uma configuração covariantemente constante no infinito espacial, saindo da física inicial do problema. Além disso não são arbitrarias as condições de contorno que levam a uma carga magnética covariantemente constante, isto é, seja a expressão do campo magnético assintótico na forma

$$\vec{B} \sim \frac{\widehat{r}\cdot T}{er^2}\left(1 - K_\infty^2\right)\widehat{r}; \qquad\qquad r \to \infty, \tag{5.17}$$

de modo que a carga magnética seja dada por

$$\mathcal{G}_m = \frac{1}{e}\,(1 - K_\infty^2)\widehat{r}\cdot T, \tag{5.18}$$

então, a derivada covariante da carga será

$$D_k\mathcal{G}_m = \frac{1}{e\,r}\left(1 - K_\infty^2\right)\,K_\infty^2\,\left(T_k - (\widehat{r}\cdot T)\,\widehat{r}^k\right), \tag{5.19}$$

implicando que há apenas três valores de condições de contorno para K que levam a uma derivada covariante nula, sendo eles: $K_\infty = 0$ (esta sendo a condição usual (3.90)) e, $K_\infty = \pm 1$, onde a última aniquila a forma Coulombiana do campo, pois ao substituir na (5.17) verificamos que o campo assintótico será nulo, nos levando a conclusão de que o campo cai mais rapidamente que $1/r^2$.

5.2 Carga das soluções toroidais

Construímos um ansätz conforme (3.167) na seção (3.3) com simetria toroidal, com campos fixados em $z = 0$ que constitui a região compreendida pelo eixo x_3 e o infinito espacial. O fato de fixar os campos no infinito espacial permite a interpretação das soluções estarem definidas não em $\mathbb{R}^3$, mas em uma 3-esfera S^3, sendo assim, a carga topológica da teoria (3.193) é nula consequência da aplicação do teorema de Stokes abeliano em uma superfície fechada (i.e. sem borda), portanto, com o mesmo argumento, ao aplicar o teorema de Stokes não abeliano para essas soluções em busca do fluxo da 2-forma F_{ij}, ou seja,

$$V = \mathcal{P}\mathrm{e}^{i\,e\,\alpha\,\int_{\partial\mathcal{V}} F^W_{jk}\,\frac{dx^j}{d\sigma}\,\frac{dx^k}{d\tau}\,d\sigma\,d\tau} = \hat{\mathcal{P}}\mathrm{e}^{\int_{\mathcal{V}} d\tau d\xi\;V\mathcal{K}V^{-1}}, \tag{5.20}$$

o fato de se ter $\mathcal{V} = S^3$, implica que $\partial\mathcal{V} = 0$, então

$$\mathbb{I} = \hat{\mathcal{P}}\mathrm{e}^{\int_{\mathcal{V}} d\tau d\rho \; V\mathcal{K}V^{-1}}, \tag{5.21}$$

onde $\mathcal{K}$ é dado por (5.4). A priori, podemos pensar que para as soluções toroidais também há uma condição de quantização devido à presença da identidade ao lado esquerdo da equação, no entanto, podemos ver que, fazendo uso da simetria entre as variáveis de integração σ e σ' e reescrevendo $\mathcal{K}$ como

$$\mathcal{K} = \alpha \; (1-\alpha) \; e^2 \left[W^{-1}\frac{dW}{d\tau} \, , \, W^{-1}\frac{dW}{d\rho} \right], \tag{5.22}$$

devido a presença de α uma constante livre, a igualdade (5.21) só será satisfeita se

$$\int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \, V \left[W^{-1}\frac{dW}{d\tau} \, , \, W^{-1}\frac{dW}{d\rho} \right] V^{-1} = 0 \tag{5.23}$$

implicando que a igualdade (5.21) é trivial, isto é, não há fluxo dos campos em S^3. Uma condição de quantização somente existirá se α não for livre e, como mencionado na referência,[34] uma condição como esta pode, talvez, surgir em níveis quânticos. De maneira geral, podemos concluir que de fato, o ansätz conforme não gera soluções monopolares, uma vez que tanto a carga topológica magnética quanto a carga dinâmica são triviais.

6 CONCLUSÃO

De maneira geral, este projeto de mestrado consistiu na compreensão da relação de dois conceitos de extrema relevância das teorias de gauge, sendo a auto-dualidade e equações integrais. O primeiro conceito permitiu a compreensão de soluções bem estabelecidas nas teorias de gauge, como as soluções de Instantons e o monopolo BPS da teoria de Yang-Mills-Higgs e, permitiu a construção de uma teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs. O segundo conceito, diz respeito às equações integrais dos campos não abelianos, onde foi compreendido como realizar cálculos de fluxo dos campos não abelianos e obter as cargas dinamicamente conservadas das teorias de gauge não abelianas, e que são invariantes por qualquer transformação de gauge.

A construção da teoria generalizada de Yang-Mills-Higgs foi obtida através da introdução de uma matriz simétrica no setor auto-dual, mantendo a representação integral do invariante topológico da teoria de Yang-Mills-Higgs. A nova teoria apresenta um grupo de simetria maior que o da teoria usual, o grupo conforme espacial, o que nos permitiu a obtenção de duas famílias de soluções com comportamentos distintos. Uma família possui simetria esférica e diz respeito às soluções monopolares. Entre tais soluções encontram-se as soluções de monopolos de 't Hooft-Polyakov. A outra família possui simetria toroidal, construída através das transformações conforme especiais e rotações espaciais, além de configurar apenas soluções de energia nula. Com esta última, foi possível construir dois tipos de soluções, onde uma apresenta um comportamento abeliano e carrega um novo invariante sendo a helicidade dos campos de gauge, e a outra solução, trata-se de uma solução não abeliana, mas ainda sem uma interpretação física clara.

As duas famílias de soluções de fato apresentaram comportamentos diferentes entre si e, a fim de obter aspectos globais destas soluções, calculamos às cargas dinâmicas de cada uma fazendo uso das equações integrais dos campos não abelianos. Encontramos que as soluções esféricas carregam uma carga magnética dinâmica não trivial, cujo cálculo foi facilitado devido a condição de derivada covariante nula de tais cargas. Já para as soluções de simetria toroidal, estas podem ser compreendidas como soluções definidas em uma 3-esfera, sendo esta um espaço sem borda, implicando que não existe fluxo no infinito espacial, o que nos leva a conclusão de que as cargas dinâmicas desta teoria são triviais.

Apesar de termos compreendido o conceito de auto-dualidade, ainda há muito a ser aprendido e entendido. A teoria generalizada possui um espaço infinito de soluções, portanto, há muita possibilidade na construção de novas soluções com diferentes propriedades. Além disso a matriz que permitiu a construção da teoria generalizada não possui uma interpretação física clara, ainda que, de certa maneira, podemos dizer que trata-se de uma permeabilidade ou permissividade dos campos que varia ao longo do espaço. Deste

modo, um caminho natural seria buscar novos setores auto-duais das teorias de gauge realizando a introdução desta matriz simétrica, buscando entender qual papel esta possuirá no âmbito das teorias clássicas de campos. Note que uma outra possibilidade seria buscar uma quantização para a teoria e entender o papel da matriz em tal contexto.

Com relação as equações integrais das teorias de gauge não abelianas, estas ainda não foram abordadas em níveis quânticos, portanto, não é claro quais implicações estas poderiam ter no âmbito das teorias quânticas de campos, pois a nível clássico estas equações permitiram um melhor entendimento acerca de aspectos globais dos campos clássicos de gauge.

REFERÊNCIAS

1 FERREIRA, L. A. Exact self-duality in a modified Skyrme model. **Journal of High Energy Physics**, v. 07, p. 039, 2017. DOI: 10.1007/JHEP07(2017)039.

2 FERREIRA, L. A.; LIVRAMENTO, L. R. Self-duality in the context of the Skyrme model. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 031, 2020. DOI: 10.1007/JHEP09(2020)031.

3 FERREIRA, L. A.; SHNIR, Y. Exact self-dual skyrmions. **Physics Letters B**, v. 772, p. 621–627, 2017. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.07.040.

4 FERREIRA, L. A.; ZAKRZEWSKI, W. J. A Skyrme-like model with an exact BPS bound. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 097, 2013. DOI: 10.1007/JHEP09(2013)097.

5 FERREIRA, L. A.; KLIMAS, P.; ZAKRZEWSKI, W. J. Self-dual sectors for scalar field theories in (1 + 1) dimensions. **Journal of High Energy Physics**, v. 01, p. 020, 2019. DOI: 10.1007/JHEP01(2019)020.

6 ALVAREZ, O.; FERREIRA, L. A.; SANCHEZ-GUILLEN, J. Integrable theories and loop spaces: fundamentals, applications and new developments. **International Journal of Modern Physics A**, v. 24, p. 1825–1888, 2009. DOI: 10.1142/S0217751X09043419.

7 FERREIRA, L. A.; LUCHINI, G. An integral formulation of Yang-Mills on loop space. 2011. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1109.2120.pdf. Acesso em: 23 jan. 2021.

8 FERREIRA, L. A.; LUCHINI, G. Gauge and integrable theories in loop spaces. **Nuclear Physics B**, v. 858, p. 336–365, 2012. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2012.01.005.

9 POLYAKOV, A. M. Particle spectrum in the quantum field theory. **JETP Letters**, v. 20, n. 6, p. 194–195, 1974.

10 HOOFT, G. 't. Magnetic monopoles in unified Gauge theories. **Nuclear Physics B**, v. 79, p. 276–284, 1974. DOI: 10.1016/0550-3213(74)90486-6.

11 WEYL, H. Gravitation and electricity. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin**, v. 1918, p. 465, 1918.

12 KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)**, p. 966–972, 1921.

13 KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. **Zeitschrift fur Physik**, v. 37, n. 12, p. 895–906, 1926. DOI: 10.1007/BF01397481.

14 WEYL, H. Electron and gravitation. 1. (In German). **Zeitschrift für Physik**, v. 56, p. 330–352, 1929. DOI: 10.1007/BF01339504.

15 YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. **Physical Review**, v. 96, p. 191–195, 1954. DOI: 10.1103/PhysRev.96.191.

16 BELAVIN, A. A. *et al.* Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. **Physics Letters B**, v. 59, p. 85–87, 1975. DOI: 10.1016/0370-2693(75)90163-X.

17 BOGOMOLNY, E. B. Stability of classical solutions. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 24, n. 4, p. 449, 1976.

18 PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. An exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon. **Physical Review Letters**, v. 35, p. 760–762, 1975. DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.760.

19 NAKAHARA, M. **Geometry, topology and physics**. 2nd. ed. Boca Raton: Taylor & Francis, 2003. (Graduate student series in physics). ISBN 9780750306065. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=cH-XQB0Ex5wC. Acesso em: 23 jan. 2021.

20 FRING, A.; TUROK, N. **Lectures of David Olive on Gauge theories and Lie algebras**. Montreal: WSP, 2018. DOI: 10.1142/10920. ISBN 978-981-323-757-5.

21 DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London A**, v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931. DOI: 10.1098/rspa.1931.0130.

22 WU, T. T.; YANG, C. N. Some solutions of the classical isotopic gauge field equations. *In*: **Properties of matter under unusual conditions**, New York: Wiley-Interscience, 1969. p. 344-354.

23 NASH, C.; SEN, S. **Topology and geometry for physicists**. Amsterdam: Elsevier, 1988. ISBN 9780080570853. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=nnnNCgAAQBAJ. Acesso em: 23 jan. 2021.

24 GODDARD, P.; OLIVE, D. I. Magnetic monopoles in gauge field theories. **Reports on Progress in Physics**, v. 41, n. 9, p. 1357–1437, 1978. DOI: 10.1088/0034-4885/41/9/001.

25 WEINBERG, E. J. **Classical solutions in quantum field theory**: solitons and instantons in high energy physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. (Cambridge monographs on mathematical physics). DOI: 10.1017/CBO9781139017787. ISBN 978-0-521-11463-9, 978-1-139-57461-7, 978-0-521-11463-9, 978-1-107-43805-7.

26 CASANA, R.; FERREIRA JR, M. M.; HORA, E. da. Generalized BPS magnetic monopoles. **Physical Review D**, v. 86, p. 085034, 2012. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.085034.

27 BONFIM, A. C. R. do; FERREIRA, L. A. Spinning Hopf solitons on $S^3 \times \mathbb{R}$. **Journal of High Energy Physics**, v. 2006, n. 03, p. 097–097, 2006. DOI: 10.1088/1126-6708/2006/03/097.

28 MARSH, G. E. **Force-free magnetic fields**: solutions, topology and applications. Singapore: World Scientific, 1996. DOI: 10.1142/2965.

29 ARRAYÁS, M.; BOUWMEESTER, D.; TRUEBA, J. Knots in electromagnetism. **Physics Reports**, v. 667, p. 1–61, 2017. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.11.001.

30 MANDL, F.; SHAW, G. **Quantum field theory**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.

31 O'NEILL, B. **Elementary differential geometry**. 2nd. ed. Amsterdam: Elsevier Science, 2006. ISBN 9780080505428. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=OtbNXAIve_AC. Acesso em: 23 jan. 2021.

32 CONSTANTINIDIS, C. P.; FERREIRA, L. A.; LUCHINI, G. Direct test of the integral Yang-Mills equations through SU(2) monopoles. **Physical Review D**, v. 96, n. 10, p. 105024, 2017. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.105024.

33 GODDARD, P.; OLIVE, D. I. Charge quantization in theories with an adjoint representation Higgs mechanism. **Nuclear Physics B**, v. 191, p. 511–527, 1981. DOI: 10.1016/0550-3213(81)90311-4.

34 FERREIRA, L. A.; LUCHINI, G. Integral form of Yang-Mills equations and its gauge invariant conserved charges. **Physical Review D**, v. 86, p. 085039, 2012. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.085039.

35 WALD, R. M. **General relativity**. Chicago: Chicago University Press, 1984. DOI: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.

36 BABELON, O.; FERREIRA, L. A. Integrability and conformal symmetry in higher dimensions: a model with exact hopfion solutions. **Journal of High Energy Physics**, v. 11, p. 020, 2002. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/11/020.

37 SHNIR, Y. M. **Magnetic monopoles**. Berlin: Springer, 2005. (Text and monographs in physics). DOI: 10.1007/3-540-29082-6. ISBN 978-3-540-25277-1, 978-3-540-29082-7.

APÊNDICES

APÊNDICE A – COORDENADAS TOROIDAIS

Um torus mergulhado no espaço $\mathbb{R}^3$ é mapeado pelas coordenadas cartesianas da seguinte forma

$$x_1 = \frac{a}{p}\sqrt{z}\,\cos\phi\,; \qquad x_2 = \frac{a}{p}\sqrt{z}\,\sin\phi\,; \qquad x_3 = \frac{a}{p}\sqrt{1-z}\,\sin\xi \tag{A.1}$$

com a sendo um fator de escala, e

$$p = 1 - \sqrt{1-z}\,\cos\xi, \qquad 0 \leq z \leq 1, \qquad 0 \leq \phi\,,\,\xi \leq 2\,\pi. \tag{A.2}$$

Invertendo as relações (A.1) temos

$$z = \frac{4\,a^2\,(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2)^2}\,; \quad \xi = \mathrm{ArcTan}\left[\frac{2\,a\,x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2)}\right]; \quad \phi = \mathrm{ArcTan}\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \tag{A.3}$$

Onde a coordenada z define as superfícies toroidais e os ângulos ξ e ϕ mapeiam tais superfícies.

Com as relações (A.2) e (A.3) somos capazes de construir um triedro sobre a superfície toroidal de modo que o terno (z, ξ, ϕ) será o sistema de coordenadas toroidais e, a partir da métrica euclideana, podemos induzir a métrica sobre tais superfícies como sendo

$$ds^2 = H_z^2\,dz^2 + H_\xi^2\,d\xi^2 + H_\phi^2\,d\phi^2, \tag{A.4}$$

onde H_z, H_ξ, H_ϕ são fatores de escala dados por

$$H_z = \frac{a}{p}\,\frac{1}{2\sqrt{z\,(1-z)}}; \qquad H_\xi = \frac{a}{p}\sqrt{1-z}; \qquad H_\phi = \frac{a}{p}\sqrt{z}. \tag{A.5}$$

O elemento de volume é uma 3-forma, e o volume compreendido pela superfície toroidal é

$$dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{1}{2}\,\frac{a^3}{p^3}\,dz\,d\xi\,d\phi. \tag{A.6}$$

A relação da distância radial com as coordenadas toroidais se dá através da expressão

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2\,\frac{\left(1 + \sqrt{1-z}\,\cos\xi\right)}{\left(1 - \sqrt{1-z}\,\cos\xi\right)}. \tag{A.7}$$

Note então que o infinito espacial corresponde a $z = 0$, e $\xi = 0$ (ou $2\,\pi$). Em $z = 0$, as coordenadas toroidais descrevem o infinito espacial e o eixo x_3, ao longo do intervalo $0 \leq \xi < 2\,\pi$. A origem corresponde a $z = 0$, e $\xi = \pi$. Além disso, $z = 1$ corresponde a um círculo $x_1^2 + x_2^2 = a^2$, e $x_3 = 0$. Perceba que em $z = 0$ não há contribuição da coordenada ϕ, uma vez que não faz sentido a rotação em uma região unidimensional, e o mesmo ocorre para a coordenada ξ no círculo em $z = 1$.

Os vetores que compõe o triedro, diferentemente do que é conhecido da relatividade geral,[35] é definido com os fatores de escala como $\vec{e}_\zeta = \frac{1}{H_\zeta}\frac{d\vec{r}}{d\zeta}$, para $\zeta \equiv z, \xi, \phi$, uma vez que não consideramos o levantamento e abaixamento dos índices, então temos

$$\begin{aligned}
\vec{e}_z &= \frac{1}{p}\left[(\sqrt{1-z}-\cos\xi)\cos\varphi\,\vec{e}_1 + (\sqrt{1-z}-\cos\xi)\sin\varphi\,\vec{e}_2 - \sqrt{z}\sin\xi\,\vec{e}_3\right] \\
\vec{e}_\xi &= -\frac{1}{p}\left[\sqrt{z}\cos\varphi\sin\xi\,\vec{e}_1 + \sqrt{z}\sin\varphi\sin\xi\,\vec{e}_2 + (\sqrt{1-z}-\cos\xi)\;\vec{e}_3\right] \\
\vec{e}_\phi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2
\end{aligned} \tag{A.8}$$

onde $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, são os vetores unitários das coordenadas Cartesianas.

No sistema de coordenadas toroidal, a contração do Levi-Civita Cartesiano carrega um Jacobiano com um termo de volume, portanto, denotando $(\zeta_1\,,\,\zeta_2\,,\,\zeta_3) = (z\,,\,\xi\,,\,\phi)$ temos a seguinte relação sobre a contração do tensor de Levi-Civita

$$\epsilon^{ijk}\,\frac{\partial A}{\partial x^i}\,\frac{\partial B}{\partial x^j}\,\frac{\partial C}{\partial x^k} = \det\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\,\epsilon^{lmn}\,\frac{\partial A}{\partial \zeta^l}\,\frac{\partial B}{\partial \zeta^m}\,\frac{\partial C}{\partial \zeta^n} \tag{A.9}$$

com

$$\det\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = 2\,\frac{p^3}{a^3}. \tag{A.10}$$

Está serve de grande utilidade na determinação do campo magnético em termos do tensor dos campos.

A.1 Uma 3-esfera em coordenadas toroidais

Note que o sistema de coordenadas toroidais anexa o infinito espacial no espaço quando a coordenada $z = 0$ descreve tanto o eixo x_3 quanto o infinito espacial, o espaço resultante para tal anexação pode ser interpretada como (homotopicamente) como uma 3-esfera, onde $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$. Para realizar o mapeamento da 3-esfera em termos das coordenadas (A.1) temos que realizar a projeção estereográfica de S^3 em $\mathbb{R}^3$. A projeção estereográfica mapeia a esfera no espaço usando um ponto de referência (um dos polos da esfera), onde um ponto $\mathcal{P}$ da esfera é mapeado no espaço, através da secante que intersecta o espaço e liga o ponto $\mathcal{P}$ no ponto de referência. A 3-esfera é definida como uma variedade dentro de $\mathbb{R}^4$ através do vínculo

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = a^2, \tag{A.11}$$

onde a tem o papel de raio de S^3. Sendo um vetor em $\mathbb{R}^3$ definido pelas coordenadas

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)\,, \tag{A.12}$$

a projeção estereográfica feita usando o polo norte como referência resulta na seguinte expressão para um dado ponto da 3-esfera

$$\mathcal{P} = \left(\frac{2\,a^2\,\vec{v}}{a^2 + ||\vec{v}||^2}, a\,\frac{||\vec{v}||^2 - a^2}{||\vec{v}||^2 + a^2}\right). \tag{A.13}$$

O infinito espacial de $\mathbb{R}^3$ é mapeado no polo norte, enquanto a origem é mapeada no polo sul de S^3. Escrevendo v em coordenadas toroidais através das relações (A.1), temos que um ponto da 3-esfera descrito em coordenadas toroidais é dado pela relação

$$\mathcal{P} = a\,\left(\sqrt{z}\cos\phi,\ \sqrt{z}\sin\phi,\ \sqrt{1-z}\sin\xi,\ \sqrt{1-z}\,\cos\xi\right). \tag{A.14}$$

A escolha de a como raio da 3-esfera não foi arbitrária, foi feita com o intuito de associar com o fator de escala a das coordenadas toroidais. Verificamos a região em $z = 1$ corresponde a um círculo de raio a na 3-esfera

$$\mathcal{P}^{z=1} = a\,(\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0,\ 0)\,, \tag{A.15}$$

e o mesmo ocorre em $z = 0$, obtendo um círculo na 3-esfera

$$\mathcal{P}^{z=0} = a\,(0,\ 0,\ \sin\xi,\ \cos\xi)\,. \tag{A.16}$$

O infinito espacial em coordenadas toroidais $(z, \xi, \phi) = (0, 0, \phi)$, em S^3 corresponde ao polo norte, i.e.,

$$\mathcal{P}^{\infty} = (0,\ 0,\ 0,\ a)\,. \tag{A.17}$$

A origem de $\mathbb{R}^3$ corresponde ao polo sul

$$\mathcal{P}^{O} = (0,\ 0,\ 0,\ -a)\,. \tag{A.18}$$

APÊNDICE B – INVARIÂNCIA SOBRE TRANSFORMAÇÕES CONFORME ESPACIAIS

Neste apêndice vamos demonstrar que o funcional da teoria (3.113) é invariante sobre transformações conforme espaciais. Sabendo que o grupo conforme é constituído pelo grupo de Poincaré

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= i\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right); \\ P_\mu &= i\partial_\mu, \end{aligned} \tag{B.1}$$

sendo $L_{\mu\nu}$ geradores dos boosts temporais e rotações espaciais e P_μ os geradores das translações; e, de duas outras transformações, sendo a transformação por escala gerada por

$$\Lambda = -ix^\mu\partial_\mu, \tag{B.2}$$

e as transformações conforme especiais geradas por

$$K_\mu = i\left(\frac{1}{2}x^2\partial_\mu - x_\mu x^\nu\partial_\nu\right). \tag{B.3}$$

Portanto as transformações conforme espaciais são as que atuam apenas nas seções espaciais do espaço-tempo, sendo elas as translações espaciais geradas por

$$\begin{aligned} P_k &= -i\,\partial_k, && \text{(Translações espaciais)} \\ L_{jk} &= -i\,\left(x_j\partial_k - x_k\partial_j\right), && \text{(Rotações espaciais)} \\ \Lambda &= -i\,x_k\partial_k, && \text{(Dilatações espaciais)} \\ K_k &= -i\left(\frac{1}{2}x^2\partial_k - x_kx_j\partial_j\right). && \text{(Transformações conforme especiais)} \end{aligned} \tag{B.4}$$

O funcional (3.113) é invariante sobre ação do grupo de Poincaré devido a contração dos índices espaciais resultando em quantidades escalares. A presença dos campos h contribui para a invariância sobre dilatações espaciais e transformações conformes especiais. Para isso, tomamos que as coordenadas transformam sobre uma transformação conforme na forma

$$x_k \to x_k + \zeta_k \tag{B.5}$$

onde a seção espacial muda na seguinte forma

$$\partial_l\zeta_k + \partial_k\zeta_l = 2\Omega\delta_{lk}, \tag{B.6}$$

os campos de gauge A_k transformam como

$$A_k \to -\partial_k\zeta_jA_j, \tag{B.7}$$

tal que

$$\begin{aligned} \partial_i A_j &\rightarrow \partial_i A_j - \partial_i \partial_j \zeta_k A_k - \partial_j \zeta_k \partial_i A_k - \partial_i \zeta_k \partial_k A_j \\ [\, A_i \,,\, A_j \,] &\rightarrow -\partial_i \zeta_k \,[\, A_i \,,\, A_j \,] - \partial_j \zeta_k \,[\, A_i \,,\, A_k \,] \,, \end{aligned} \tag{B.8}$$

de modo que a transformação para o tensor dos campos será

$$F_{ij} \rightarrow -\partial_i \zeta_k F_{kj} - \partial_j \zeta_k F_{ik}, \tag{B.9}$$

e a derivada covariante do Higgs transforma na forma

$$D_k \Phi \rightarrow -\partial_k \zeta_j D_j \Phi. \tag{B.10}$$

Portanto, aplicando (B.5) nas equações (3.110)

$$\begin{aligned} - \quad & \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \delta F^a_{ij} h_{ab} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^a_{ij} \delta h_{ab} = \pm \delta (D_k \Phi^b) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & (2\, \epsilon_{kij} \partial_i \zeta_m - \epsilon_{cmj} \partial_k \zeta_c) F^a_{mj} h_{ab} = \epsilon_{kij} F^a_{ij} \delta h_{ab}, \end{aligned} \tag{B.11}$$

e usando que

$$F_{mj} = \frac{1}{2} \epsilon_{lmj} \epsilon_{ldn} F_{dn} \tag{B.12}$$

obtemos

$$2(\delta_{lk} \partial_i \zeta_i - \partial_l \zeta_k - \partial_k \zeta_l) \epsilon_{kdn} F^a_{dn} h_{ab} - \epsilon_{kij} F^a_{ij} \delta h_{ab} \tag{B.13}$$

então usando (B.6), temos que

$$\Omega \epsilon_{kdn} F^a_{dn} h_{ab} = \epsilon_{kij} F^a_{ij} \delta h_{ab}, \tag{B.14}$$

nos levando a conclusão de que os campos h_{ab} sobre a transformação (B.5) transformam na forma

$$\delta h_{ab} = \Omega h_{ab} \tag{B.15}$$

Deste modo, temos que os termos cinéticos do funcional (3.113) mudam da seguinte forma

$$\begin{aligned} & (h_{ab} F^a_{ij} F^b_{ij}) \rightarrow -3\Omega (h_{ab} F^a_{ij} F^b_{ij}) \\ & (h^{-1}_{ab} (D_k \Phi)^a (D_k \Phi)^b) \rightarrow -3\Omega (h^{-1}_{ab} (D_k \Phi)^a (D_k \Phi)^b). \end{aligned} \tag{B.16}$$

Vemos então que sob as transformações (B.5) e (B.6), o funcional (3.111) sofre a mudança

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{H} = & \int \delta \left(d^3 x \right) \left[\frac{1}{4} h_{ab} F^b_{ij} F^d_{ij} + \frac{1}{2} h^{-1}_{ab} (D_k \Phi)^b (D_k \Phi)^d \right] \\ & + \int d^3 x \; \delta \left[\frac{1}{4} h_{ab} F^b_{ij} F^d_{ij} + \frac{1}{2} h^{-1}_{ab} (D_k \Phi)^b (D_k \Phi)^d \right], \end{aligned} \tag{B.17}$$

tal que, usando as transformações (B.16), temos

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{H} = & \int \delta \left(d^3 x \right) \left[\frac{1}{4} h_{ab} F^b_{ij} F^d_{ij} + \frac{1}{2} h^{-1}_{ab} (D_k \Phi)^b (D_k \Phi)^d \right] \\ & - \int d^3 x \, 3\Omega \left[\frac{1}{4} h_{ab} F^b_{ij} F^d_{ij} + \frac{1}{2} h^{-1}_{ab} (D_k \Phi)^b (D_k \Phi)^d \right]. \end{aligned} \tag{B.18}$$

O elemento de volume sob transformações na forma $x_k \to x'_k$ tem sua mudança computada pelo Jacobiano

$$d^3x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^3x, \tag{B.19}$$

portanto, usando (B.5)

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = \delta_{kj} + \partial_j \zeta_k, \tag{B.20}$$

temos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial x'_i}{\partial x^1} \frac{\partial x'_j}{\partial x^2} \frac{\partial x'_k}{\partial x^3} = \\ &= 1 + 3\Omega, \end{aligned} \tag{B.21}$$

implicando na seguinte variação

$$\delta(d^3x) = d^3x' - d^3x = \left(\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| - 1\right) d^3x = 3\Omega\, d^3x. \tag{B.22}$$

Voltando a expressão (B.18) verificamos então que

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{H} = &\int d^3x\, 3\Omega \left[\frac{1}{4} h_{ab} F^b_{ij} F^d_{ij} + \frac{1}{2} h^{-1}_{ab} (D_k\Phi)^b (D_k\Phi)^d\right] \\ &- \int d^3x\, 3\Omega \left[\frac{1}{4} h_{ab} F^b_{ij} F^d_{ij} + \frac{1}{2} h^{-1}_{ab} (D_k\Phi)^b (D_k\Phi)^d\right] = 0, \end{aligned} \tag{B.23}$$

ou seja, o funcional de energia é invariante sobre as transformações conforme no setor espacial.

APÊNDICE C – MÉTODO DE LIE

De maneira geral, resolver um sistema de equações diferenciais parciais pode ser extremamente complicado, entretanto para sistemas físicos ricos em simetria, podemos simplificar as equações diferenciais reduzindo para sistemas de equações diferenciais ordinárias. A maneira de se fazer tal redução é via uso das simetrias do problema, buscando soluções que são invariantes sobre tais simetrias, obtendo um "chute educado" para o sistema de equações. Este método ganha o nome de método de Lie.

O método consiste em encontrar soluções para os campos que são invariantes sobre ação de uma dada combinação de simetrias do problema. Para isso é necessário analisar variações dos campos sobre um ponto fixo do espaço-tempo, então seja φ_α um campo físico arbitrário que sobre ação infinitesimal de um dado grupo de simetria sua forma funcional sofre a variação

$$\delta_\varepsilon \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x), \tag{C.1}$$

sendo a variação

$$\delta_\varepsilon \varphi_\alpha = \varepsilon\, G^\beta_\alpha\, \varphi_\beta \tag{C.2}$$

onde G é o gerador do grupo da simetria e os índices α e β são arbitrários podendo estar associados ao espaço-tempo ou ao espaço interno. Chamamos a variação na forma (C.1) de variação funcional pois mede a variação do campo no mesmo ponto do espaço-tempo. Se φ sofre ação de dois grupos de simetria, isto é,

$$\delta_{\varepsilon_1} \varphi_\alpha = \varepsilon_1\, G^\beta_\alpha\, \varphi_\beta, \qquad \delta_{\varepsilon_3} \varphi_\alpha = \varepsilon_2\, G^\beta_\alpha\, \varphi_\beta, \tag{C.3}$$

então a variação total do campo é dada por

$$\delta_T \varphi = \delta_{\varepsilon_1} \varphi + \delta_{\varepsilon_2} \varphi. \tag{C.4}$$

Portanto, uma solução para campo que é invariante sob os dois grupos de simetria tem variação total nula, isto é, $\delta_T \varphi = 0$. Tais soluções quando condicionadas ao sistema de Euler-Lagrange com equações diferenciais parciais leva à simplificação das equações tornando-as em equações diferenciais ordinárias.[36]

O nosso interesse está nas soluções dos setores auto-duais das teorias (3.46) e (3.113), portanto vamos trabalhar com as simetrias internas da teoria, sendo elas as simetrias de gauge, que sob ação de um elemento g do grupo de gauge, um grupo de Lie, os campos de gauge transformam na forma

$$A_\mu \to g\, A_\mu g^{-1} + \frac{i}{e} \partial_g\, g^{-1} \tag{C.5}$$

e os campos escalares na representação adjunta, sendo esta a do nosso interesse, transformam na forma

$$\Phi \to g\,\Phi\,g^{-1}. \tag{C.6}$$

E também, com as simetrias externas da teoria associadas ao espaço-tempo, estas pertencem ao grupo conforme. A fim de obter as soluções invariantes dos campos de gauge A_μ e do campo de Higgs Φ sob ação destas simetrias, é necessário analisar a variação infinitesimal destes campos da mesma maneira como mostrada na expressão (C.1). Considerando que as transformações no espaço-tempo são dadas por

$$\delta x^\mu = \zeta^\mu\ ; \qquad\qquad x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{C.7}$$

então, expandindo em Taylor o campo $A'_\mu\,(x)$ em primeira ordem de ζ, tal que

$$A'_\mu(x) = A'_\mu(x') - \zeta^\nu \partial_\nu A'_\mu(x'), \tag{C.8}$$

temos que

$$\begin{aligned} \delta_{(\zeta)} A_\mu &= A'(x) - A(x) = \\ &= A'_\mu(x') - \zeta^\nu \partial_\nu A'_\mu(x') - A_\mu(x), \end{aligned} \tag{C.9}$$

onde a notação $\delta_{(\zeta)}$ refere-se às variações decorrentes do parâmetro ζ, sendo as transformações (C.7). Usando que sobre mudanças no espaço-tempo, um campo vetorial transforma da seguinte forma

$$A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} A_\nu(x), \tag{C.10}$$

então as variações funcionais sob transformações no espaço-tempo (C.7), negligenciando termos de ordem $\mathcal{O}\,(\zeta^2)$, são dadas por

$$\delta_{(\zeta)} A_\mu = -(\partial_\mu \zeta^\nu A_\nu(x) + \zeta^\nu \partial_\nu A_\mu(x)), \tag{C.11}$$

isto é, são as transformações do campo analisadas sobre o mesmo ponto no espaço-tempo.

Os campos de gauge sob transformações de gauge (C.5), com ação de um elemento de grupo infinitesimal $g = 1 + i\eta + \mathcal{O}(\eta^2)$, mudam na forma

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} D_\mu \eta, \tag{C.12}$$

então a variação funcional será dada por

$$\delta_{(\eta)} A_\mu = A'_\mu(x) - A_\mu(x) = -\frac{1}{e} D_\mu \eta. \tag{C.13}$$

Portanto, um "chute educado" para os campos de gauge deve satisfazer a soma

$$\delta_{(\eta)} A_\mu + \delta_{(\zeta)} A_\mu = 0, \tag{C.14}$$

que implica em satisfazer as equações

$$-(\partial_\mu \zeta^\nu A_\nu(x) + \zeta^\nu \partial_\nu A_\mu(x)) = \frac{1}{e} D_\mu \eta. \tag{C.15}$$

Sobre a transformação (C.7), um campo escalar é *escalar* pois transforma da seguinte maneira,

$$\Phi'(x') = \Phi(x), \tag{C.16}$$

contudo, sua forma funcional varia, isto é, estudando a variação do campo no mesmo ponto, tem-se que

$$\delta_\zeta \Phi = \Phi'(x') - \zeta^\nu \partial_\nu \Phi(x) - \Phi(x) = -\zeta^\nu \partial_\nu \Phi(x), \tag{C.17}$$

e, sob transformações de gauge (2.48), tem-se que

$$\delta_\eta \Phi(x) = i\,[\,\eta\,,\,\Phi\,]\,. \tag{C.18}$$

Então, a equação que uma solução invariante do campo escalar deve satisfazer é dada por

$$\zeta^\nu \partial_\nu \Phi(x) = i\,[\,\eta\,,\,\Phi\,]\,. \tag{C.19}$$

C.1 Ansätz esférico

Um dos ansätzes relevantes para a obtenção de soluções dos setores auto-duais abordados neste trabalho trata-se do ansätz com simetria esférica. Este é obtido ao compensar as transformações de gauge do grupo $SU(2)$ com o grupo das rotações espaciais isomorfo ao $SU(2)$ e subgrupo do grupo conforme espacial.

As rotações espaciais tem como parâmetros ζ's (C.7) como sendo

$$\zeta^i = -x^j, \qquad \zeta^j = x^i, \qquad \zeta^k = 0, \tag{C.20}$$

onde i, j, k representam as componentes cartesianas. Portanto da expressão para o campo de gauge (C.15), as relações para essas transformações são as seguintes: com $(i, j, k) = (1, 2, 3)$,

$$\begin{aligned} -(A_2 + (x^1\partial_2 - x^2\partial_1)A_1) &= \frac{1}{e} D_\mu \eta_{12}; \\ -(-A_1 + (x^1\partial_2 - x^2\partial_1)A_2) &= \frac{1}{e} D_\mu \eta_{12}; \\ -(x^1\partial_2 - x^2\partial_1)A_3 &= \frac{1}{e} D_\mu \eta_{12}. \end{aligned} \tag{C.21}$$

com $(i, j, k) = (2, 3, 1)$,

$$\begin{aligned} -(A_3 + (x^2\partial_3 - x^3\partial_2)A_2) &= \frac{1}{e} D_\mu \eta_{23}; \\ -(-A_2 + (x^2\partial_3 - x^3\partial_2)A_3) &= \frac{1}{e} D_\mu \eta_{23}; \\ -(x^2\partial_3 - x^3\partial_2)A_1 &= \frac{1}{e} D_\mu \eta_{23}. \end{aligned} \tag{C.22}$$

E, com $(i,j,k)=(3,1,2)$

$$\begin{aligned}
-(A_1+(x^3\partial_1-x^1\partial_3)A_3) &= \frac{1}{e}D_\mu\eta_{31};\\
-(-A_3+(x^3\partial_1-x^1\partial_3)A_1) &= \frac{1}{e}D_\mu\eta_{31};\\
-(x^3\partial_1-x^1\partial_3)A_2 &= \frac{1}{e}D_\mu\eta_{31}.
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Para encontrar as soluções que satisfazem as relações (C.21), (C.22) e (C.23), vamos trabalhar no gauge radial, isto é,

$$\hat{r}^k A_k = A_r = 0, \tag{C.24}$$

e também passar para o sistema de coordenadas esférico, a fim de facilitar a obtenção das soluções, de maneira que se tem as relações

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\cos\phi\cos\theta}{r}A_\theta - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}A_\phi;\\
A_2 &= \frac{\sin\phi\cos\theta}{r}A_\theta + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}A_\phi;\\
A_3 &= -\frac{\sin\theta}{r}
\end{aligned} \tag{C.25}$$

e

$$\begin{aligned}
x^1\partial_2-x^2\partial_1 &= \partial_\phi;\\
x^2\partial_3-x^3\partial_2 &= -\sin\phi\partial_\theta-\cos\phi\cot\theta\partial_\phi;\\
x^3\partial_1-x^1\partial_3 &= \cos\phi\partial_\theta-\sin\phi\cot\theta\partial_\phi.
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Combinamos os sistema de equações (C.21), (C.22) e (C.23), a fim de se obter as equações para as componentes esféricas sendo

$$\begin{aligned}
\partial_r\eta_{12} &= 0;\\
\partial_\phi A_\phi &= -\frac{1}{e}D_\phi\eta_{12};\\
\partial_\phi A_\theta &= -\frac{1}{e}D_\theta\eta_{12};
\end{aligned} \tag{C.27}$$

temos também

$$\begin{aligned}
\sin\phi\partial_\theta A_\phi+\cot\theta\cos\phi\partial_\phi A_\phi-\cot\theta\sin\phi A_\phi+\cos\phi A_\theta &= \frac{1}{e}D_\phi\eta_{23};\\
\sin\phi\partial_\theta A_\theta+\cot\theta\cos\phi\partial_\phi A_\theta-\frac{\cos\phi}{\sin^2\theta}A_\phi &= \frac{1}{e}D_\theta\eta_{23};\\
\partial_r\eta_{23} &= 0;
\end{aligned} \tag{C.28}$$

e

$$\begin{aligned}
-\cos\phi\partial_\theta A_\phi+\cot\theta\sin\phi\partial_\phi A_\phi-\cot\theta\cos\phi A_\phi+\sin\phi A_\theta &= \frac{1}{e}D_\phi\eta_{31};\\
-\cos\phi\partial_\theta A_\theta+\cot\theta\sin\phi\partial_\phi A_\theta-\frac{\sin\phi}{\sin^2\theta}A_\phi &= \frac{1}{e}D_\theta\eta_{31};\\
\partial_r\eta_{31} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Os parâmetros η estão associados aos geradores do grupo de gauge, sendo então o grupo $SU(2)$, associamos cada um dos parâmetros aos geradores do grupo, isto é,

$$\eta_{12} \equiv e\,\eta_3\,T_3, \qquad \eta_{23} \equiv e\,\eta_1\,T_1, \qquad \eta_{31} \equiv e\,\eta_2\,T_2, \tag{C.30}$$

Portanto, como os campos de gauge são escritos na álgebra de Lie do $SU(2)$ $A_{\phi,\theta} = A^a_{\phi,\theta}T_a$, as soluções que satisfazem as equações (C.27), (C.28) e (C.29) são; para a componente A_ϕ:

$$\begin{aligned} A^1_\theta &= -C(r)\cos\phi\cos\theta + D(r)\sin\phi; \\ A^2_\theta &= -C(r)\sin\phi\cos\theta - D(r)\cos\phi; \\ A^3_\theta &= C(r)\sin\theta; \end{aligned} \tag{C.31}$$

e para a componente A_θ:

$$\begin{aligned} A^1_\phi &= C(r)\sin\theta\sin\phi + D(r)\sin\theta\cos\theta\cos\phi; \\ A^2_\phi &= -C(r)\sin\theta\cos\phi + D(r)\sin\theta\cos\theta\sin\phi; \\ A^3_\phi &= -D(r)\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{C.32}$$

com $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1$. Em coordenadas cartesianas, o ansätz para os campos de gauge invariante sobre as rotações pode ser escrito em uma forma compacta sendo

$$A^a_k = \epsilon_{akm}\frac{r^m}{r^2}D(r) - C(r)\frac{\delta_{ak}r^2 - r^a r^k}{,r^3}. \tag{C.33}$$

Na liberdade da escolha de gauge, mantendo $A_r = 0$, podemos ter apenas a expressão

$$A^a_k = \epsilon_{akm}\frac{r^m}{r^2}D(r). \tag{C.34}$$

Da expressão (C.19), as relações as quais a solução invariante do campo de Higgs satisfaz sob as rotações espaciais e os geradores do grupo de gauge $SU(2)$ são

$$\begin{aligned} \partial_\phi\Phi &= i\,e\,\eta_3\,[\,T_3\,,\,\Phi\,]\ ; \\ -\sin\phi\partial_\theta\Phi - \cos\phi\cot\theta\partial_\phi\Phi &= i\,e\,\eta_1\,[\,T_1\,,\,\Phi\,]\ ; \\ \cos\phi\partial_\theta\Phi - \sin\phi\cot\theta\partial_\phi\Phi &= i\,e\,\eta_2\,[\,T_2\,,\,\Phi\,]\,. \end{aligned} \tag{C.35}$$

Como o Higgs na representação adjunta pode ser escrito na álgebra do grupo de simetria, isto é, $\Phi = \Phi^a T_a$, então a solução das equações (C.35) será

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= \frac{F\,(r)}{r}\cos\phi\sin\theta\ ; \\ \Phi^2 &= \frac{F\,(r)}{r}\sin\phi\sin\theta\ ; \\ \Phi^3 &= \frac{F\,(r)}{r}\cos\theta \end{aligned} \tag{C.36}$$

com $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = -1$. Podemos escrever em uma forma compacta

$$\Phi^a = \frac{\hat{r}^a}{r} F(r). \tag{C.37}$$

Devido a dinâmica da teoria temos que $F(r) = \frac{H(\xi)}{e}$ e $D(r) = \frac{1}{e}(1 - K(\xi))$ onde a escolha para $(1 - K)$ é feita para efeito de comparação com as referências.[9,10,24,37]

C.2 Ansätz conforme

Para a obtenção do ansätz esférico usamos um subgrupo com estrutura de $SU(2)$ a fim de compensar as transformações de gauge, sendo o grupo das rotações espaciais. Agora, queremos obter um ansätz com aspecto conforme, de forma a obter soluções mais gerais, para isso, nos baseamos nas referências[3,36] em usar dois elementos do grupo $U(1)$ pertencentes ao grupo conforme espacial: Sendo a rotação no plano $x_1 x_2$ e a uma transformação conforme especial, isto é,

$$\begin{aligned} \partial_\phi &= x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1; \\ \partial_\xi &= \frac{x_3}{a}(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2) + \frac{1}{2a}(a^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)\partial_3. \end{aligned} \tag{C.38}$$

Estes geradores são associados à translações ao longo das coordenadas ϕ e ξ do sistema de coordenadas toroidais (A). Sendo assim, vamos compensar as translações ao longo da coordenada ξ, e da coordenada ϕ com transformações de gauge do $U(1) \in SU(2)$, subgrupo gerado pelo T_3. A escolha do subgrupo $U(1)$ do grupo de gauge, ocorre em fator dos subgrupos do grupo conforme comutarem entre si. De modo que para as translações em ξ temos

$$\zeta^z = \zeta^\phi = 0\,; \qquad \zeta^\xi = \varepsilon\,; \qquad \eta = \varepsilon\, n_\xi\, T_3, \tag{C.39}$$

tal que, das expressões (C.15) e (C.19) temos

$$\partial_\xi A_i = i\, n_\xi\, [\, T_3\,,\, A_i\,]\ ; \qquad \partial_\xi \Phi = i\, n_\xi\, [\, T_3\,,\, \Phi\,]\,, \tag{C.40}$$

e para as translações em ϕ temos

$$\zeta^z = \zeta^\xi = 0\,; \qquad \zeta^\phi = \varepsilon\,; \qquad \eta = \varepsilon\, n_\phi\, T_3 \tag{C.41}$$

tal que

$$\partial_\phi A_i = i\, n_\phi\, [\, T_3\,,\, A_i\,]\ ; \qquad \partial_\phi \Phi = i\, n_\phi\, [\, T_3\,,\, \Phi\,]\,. \tag{C.42}$$

Na obtenção do ansätz esférico tomamos o gauge $A_r = 0$, de maneira similar, para obter o gauge conforme vamos trabalhar com o gauge

$$A_z = 0. \tag{C.43}$$

Note que as relações (C.40) e (C.42) são automaticamente satisfeitas sobre a transformação de gauge

$$A_i = g\, a_i\,(z)\ g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_i g\, g^{-1}\ ; \qquad \Phi = g\, \widehat{\Phi}\,(z)\ g^{-1}\ ; \qquad \text{com} \qquad g = e^{i\left(n_\xi\, \xi + n_\phi\, \phi\right) T_3}. \tag{C.44}$$

como o elemento g não depende da componente z, através da transformação (C.44) para a componente z do campo de gauge, tem-se que

$$A_z = g\, a_z\,(z)\; g^{-1}. \tag{C.45}$$

A escolha (C.43) permanece satisfeita se $a_z = 0$. Para as componentes A_ξ e A_ϕ temos

$$A_\xi = g\,\left(a_\xi\,(z) - \frac{1}{e} n_\xi\, T_3\right)\, g^{-1}\;; \qquad\qquad A_\phi = g\,\left(a_\phi\,(z) - \frac{1}{e} n_\phi\, T_3\right)\, g^{-1}, \tag{C.46}$$

satisfazendo as relações (C.40) e (C.42) para quaisquer $a_\xi\,(z)$, $a_\phi\,(z)$. No sistema de coordenadas toroidal podemos ter problemas em duas regiões, o círculo de raio a no plano $x_1 x_2$ definido em $z = 1$ e a região definida em $z = 0$ que corresponde ao infinito espacial e o eixo x_3. Em $z = 1$, a coordenada ξ perde sentido, onde apenas ϕ é suficiente para descrever o círculo, de modo que as transformações de gauge (C.44) só serão unívocas em $z = 1$ se impostas as condições

$$a_\xi\,(1) = c_\xi\, T_3\;; \qquad\qquad a_\phi\,(1) = c_\phi\, T_3, \tag{C.47}$$

com $c_{\xi,\phi}$ constantes. Da mesma forma, em $z = 0$ a região constitui de um loop ligando constituído do eixo x_3 e o infinito espacial, portanto, se quisermos garantir transformações unívocas devemos impor

$$a_\xi\,(0) = d_\xi\, T_3\;; \qquad\qquad a_\phi\,(0) = d_\phi\, T_3, \tag{C.48}$$

com $d_{\xi,\phi}$ constantes. O mesmo deve ser analisado para o Higgs, a transformação do campo de Higgs (C.44) só será unívoca nas regiões $z = 0, 1$ se impostas as condições

$$\widehat{\Phi}\,(0) = w_1 T_3\;; \qquad\qquad \widehat{\Phi}\,(1) = w_2\, T_3, \tag{C.49}$$

com $w_{1,2}$ constantes. Além disso, no infinito espacial, $(z, \xi, \phi) = (0, 2\,\pi, 0)$ apenas ϕ permanece livre, implicando que o elemento de grupo da (3.165) é independente de ξ, isto é,

$$g = e^{i\, n_\phi\, \phi\, T_3}. \tag{C.50}$$