

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Matheus Costa Cerqueira

**Estudo numérico de correlações gluônicas em teorias de
Yang-Mills a temperatura finita**

São Carlos

2022

Matheus Costa Cerqueira

**Estudo numérico de correlações gluônicas em teorias de
Yang-Mills a temperatura finita**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Física Teórica e Experimental

Orientadora: Profa. Dra. Tereza Cristina da Rocha Mendes

Versão corrigida

(Versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Cerqueira, Matheus Costa

Estudo numérico de correlações gluônicas em teorias de Yang-Mills a temperatura finita / Matheus Costa

Cerqueira; orientadora Tereza Cristina da Rocha Mendes - versão corrigida -- São Carlos, 2022.

158 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física Teórica e Experimental) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2022.

1. QCD na rede e confinamento. 2. Fixação de Gauge de Landau. 3. Algoritmos de otimização. 4. QCD a temperatura finita. 5. Correlações gluônicas. I. Mendes, Tereza Cristina da Rocha, orient. II. Título.

Este trabalho é dedicado a minha esposa, por me apoiar em todas as dificuldades enfrentadas nessa dura jornada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por conseguir produzir essa tese. Sem ele, eu não sei como conseguiria dar continuidade nesse trabalho e reconheço todo o sustento que tive em suas mãos. Passei por momentos tão difíceis e complicados nesses mais de 5 anos, que só o Senhor poderia me ajudar tanto me ouvindo como me sustentando. Não sei o que seria de mim sem ti. Meu mais profundo e sincero agradecimento.

Agradeço a minha esposa Raphaela Cristina, por se manter sempre ao meu lado nos momentos mais difíceis que passei na elaboração dessa tese. Sempre muito parceira, me ajudando e incentivando a todo o momento. Não poderia desejar companhia melhor nesses momentos. As madrugadas em que fiquei acordado trabalhando e estudando e você compreendendo e orando por mim. Demonstrando todo o tempo uma preocupação que fez uma diferença incrível.

Agradeço a minha mãe Katia Lucia, ao meu pai Albino Cesar e ao meu irmão João Victor, pois mesmo que eu estivesse distante fisicamente deles em quase todo o tempo que estive em São Carlos, senti todo o apoio de vocês daqui. Todas as ligações e conversas rápidas me deram ânimo para conseguir finalizar esse projeto. Vocês são muito importantes em toda a minha vida e demonstraram ser nesse momento.

Agradeço imensamente a minha avó Ruth e ao meu avô Almir. É impressionante o quanto vocês se preocupam comigo a ponto de orarem e perguntarem todos os dias como estou. Sempre me incentivaram a estudar e trabalhar com dignidade e respeito, e carreguei muito isso nessa tese. Com certeza, tem uma porção de vocês aqui.

Agradeço a minha orientadora Prof. Dra. Tereza Mendes, pois os seus ensinamentos e acompanhamento foram essenciais para que esse material pudesse ser desenvolvido da melhor maneira possível. Você me direcionou para bons livros e papers, e sempre me ajudou com minhas repetidas dúvidas em temas centrais dessa tese. Seu apoio em momentos que não foram fáceis para mim me ajudou bastante. Além disso, também agradeço ao Prof. Dr. Attilio Cucchieri, por sempre tirar as minhas dúvidas também, e por sempre estar disposto a me ajudar, verificar os meus códigos e dando dicas de melhoria. Fiquei atento a cada detalhe e me preocupei em implementar como me direcionou.

Agradeço a companhia de meus amigos de mestrado e doutorado. Cito meus queridos Nelson Lachini, Willian Serenone, Leandro Viscardi, Leonardo Carvalho e Jesuel Leal. Nossas conversas sérias sobre o trabalho e nossos momentos de desconpressão desde tomando um café a dar uma volta me auxiliaram a ter um ambiente propício a um bom desenvolvimento da tese. Vocês foram muito importantes, cada um de uma maneira especial.

Agradeço a Primeira Igreja Batista de São Carlos, por me receberem tão bem nessa cidade quando cheguei sozinho para iniciar minha nova jornada de vida. Vocês me apoiaram muito nos estudos e agradeço a todos pelas orações e incentivos, principalmente na pessoa do pastor Marcos Valério. Agradeço também as amizades tão valiosas que construí nesse local que me sustentaram de maneira ímpar. Cito: Jean Alex, Karin Silva, Fabio Noia, Eduardo Pacheco, Henrique Lecco, Maria Fernanda, Alê, Ester, Lilian Raquel, Anita, Sofia, Rafael, Tamires, Pepe, Jhonattan, Tatyane Maria, Mk, Samuka, Elsani, Julia, Luiz Felipe, Maria Caroline, Amanda, Ariadne, Ariane, Danny, Guilherme, Nathalia, Hatus, João Victor, Isaque, Kleber, Leo, Nicole, Pablo, Paulo Sergio, Willian, Yan, Ives, Shayenne, entre muitos outros nomes. Agradeço a todos os pais e mães que me acolheram profundamente nessa comunidade. Vocês não fazem ideia da importância que tiveram nesses meus 5 anos e meio em São Carlos.

Agradeço a minhas grandes amigas cariocas, que sempre estiveram preocupados comigo, a ponto de se preocuparem em me visitar em viagens de mais de 10 horas. Agradeço imensamente ao meu querido brother Salomão por sua parceria de anos. Agradeço ao meus queridos Diogo Henrique, Roger Lopes e Matheus Evangelista. Como vocês são importantes na minha vida e tornaram meu dia a dia mais leve para que a tese pudesse ser desenvolvida da melhor maneira possível.

Agradeço a todos os meus colegas de trabalho da Raccoon.Monks, por entrarem na minha vida em um momento tão difícil que estava passando. Obrigado a todos pelo apoio para que eu pudesse finalizar a tese da melhor maneira possível. Agradeço os meus gerentes Letícia Dami e Augusto Freitas e meu diretor Carlinhos por me incentivarem a finalizar o doutorado e garantirem o melhor ambiente possível para que isso acontecesse. Cito também meus queridos Vinicius Castelo por todo o incentivo a produzir um ótimo material da tese, ao João Victor Martins por sempre me mostrar que meu trabalho nessa tese é relevante, a Carol Amaro por seu apoio nesse processo, e todos meus amigos de guilda que diariamente me incentivaram a desenvolver essa tese. Vocês foram muito importantes.

Agradeço a todos os funcionários da biblioteca e da secretaria pós graduação do IFSC que me auxiliaram e direcionaram da melhor maneira possível a finalizar essa tese. Com ceteza vocês tiveram uma participação única nisso tudo.

Agradeço ao CNPq pelo financiamento.

“A ciência, meu rapaz, é feita de erros, mas são erros úteis de serem cometidos, porque eles pouco a pouco conduzem à verdade.”

Julio Verne

RESUMO

CERQUEIRA, M. C. **Estudo numérico de correlações gluônicas em teorias de Yang-Mills a temperatura finita.** 2022. 158p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria de gauge que descreve as interações fortes, com uma lagrangiana baseada em campos quânticos de quarks interagindo por troca de glúons, que são os bósons de gauge da teoria, análogos aos fótons no eletromagnetismo. Uma característica central da QCD é que ela apresenta comportamentos distintos nos regimes de altas e baixas energias, sendo observado que, a baixas energias, os quarks e glúons estão confinados em partículas chamadas de hádrons, que são na verdade estados ligados de quarks. O limite de baixas energias da QCD, e em geral das teorias de Yang-Mills, pode ser estudado de forma não perturbativa, através da formulação da teoria em uma rede espaço-temporal, conhecida como QCD na rede, utilizando simulações numéricas com métodos de Monte Carlo. Este trabalho investiga aspectos dessas simulações, considerando as teorias de Yang-Mills (ou QCD “pura”, sem férmions) para os grupos de gauge SU(2) e SU(3). Apresentamos, nesta tese, uma introdução às teorias de Yang-Mills, ao problema do confinamento e à formulação de rede, além de um estudo detalhado da fixação de gauge de Landau, incluindo uma contribuição original para a otimização de métodos no caso SU(3). Nosso objetivo é o cálculo do propagador de glúons utilizando a fixação de gauge de Landau em redes assimétricas (temperatura finita), para melhor compreensão do fenômeno de desconfinamento de cor na região da temperatura crítica, e como ele se manifesta nas correlações dos campos gluônicos da teoria.

Palavras-chave: QCD na Rede e Confinamento. Fixação de gauge de Landau. Algoritmos de Otimização. QCD a Temperatura Finita. Correlações Gluônicas.

ABSTRACT

CERQUEIRA, M. C. **Numerical study of gluonic correlations in Yang-Mills theories at finite temperature.** 2022. 158p. Thesis (Doctor in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Quantum chromodynamics (QCD) is the gauge theory that describes the strong interactions, with a Lagrangian based on quantum fields of quarks interacting by exchanging gluons, which are the gauge bosons of the theory, analogous to photons in electromagnetism. A central characteristic of QCD is that it presents different behaviors in the high- and low-energy regimes, being it observed that, at low energies, quarks and gluons are confined in particles called hadrons, which are actually bound states of quarks. The low-energy limit of QCD, and in general of Yang-Mills theories, can be studied in a non-perturbative way, through the formulation of the theory on a space-time lattice, known as Lattice QCD, using numerical simulations with Monte Carlo methods. This work investigates aspects of these simulations, considering Yang-Mills theories (or “pure” QCD, without fermions) for the SU(2) and SU(3) gauge groups. In this thesis, we present an introduction to Yang-Mills theories, the confinement problem and the lattice formulation, as well as a detailed study of Landau gauge fixing, including an original contribution to the optimization of methods in the SU(3) case. Our goal is the calculation of the gluon propagator using Landau gauge fixing on asymmetric lattices (finite temperature), for a better understanding of the phenomenon of color deconfinement around the critical temperature, and how it manifests itself in the correlations of the gluonic fields of the theory.

Keywords: Lattice QCD and Confinement. Landau Gauge Fixing. Optimization Algorithms. QCD at Finite Temperature. Gluonic Correlations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração da plaqueta. O percurso se inicia no ponto n e é anti horário, até que retorne a esse mesmo ponto.	48
Figura 2 – Gráfico da termalização para teoria SU(2) em temperatura zero. Valores de β e Volume de rede retirados de Teper e Lucini. (1)	85
Figura 3 – Gráfico de aplicação de binning para Volume 8^4 e $\beta = 2.25$. A plaqueta foi utilizada como observável.	87
Figura 4 – Gráfico de aplicação de binning para Volume 12^4 e $\beta = 2.40$. A plaqueta foi utilizada como observável.	87
Figura 5 – Gráfico de aplicação de binning para Volume 8^4 e $\beta = 2.25$. O módulo do loop de Polyakov foi utilizada como observável	88
Figura 6 – O gráfico da esquerda mostra como uma configuração específica decai sob o algoritmo SR para valores diferentes de ω . O gráfico da direita mostra como a mesma configuração do gráfico anterior se comporta para o algoritmo SRE para valores diferentes de p . Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ e $\beta = 2.2836791$. Ambos os gráficos estão com escala logarítmica para o eixo vertical.	89
Figura 7 – Comparação de algoritmos para a mesma configuração de gauge. Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ e $\beta = 2.2836791$	90
Figura 8 – O gráfico da esquerda representa o cálculo de mediana para SR ao longo de diferentes valores de ω . O gráfico da direita representa o cálculo de mediana para SRE ao longo de diferentes valores de p . Foi utilizado volume 12×4 , $\beta = 2.2836791$ e 5σ de nível de confiança.	92
Figura 9 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ com 300 configurações em diferentes valores de temperatura.	96
Figura 10 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ com 300 configurações em diferentes valores de temperatura.	97
Figura 11 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $12^3 \times 4$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.	98
Figura 12 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $12^3 \times 4$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.	99

Figura 13 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $16^3 \times 4$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.	100
Figura 14 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $16^3 \times 4$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.	101
Figura 15 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $24^3 \times 4$ com 170 configurações em diferentes valores de temperatura.	102
Figura 16 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $24^3 \times 4$ com 170 configurações em diferentes valores de temperatura.	103
Figura 17 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $48^3 \times 4$ com 100 configurações em diferentes valores de temperatura.	104
Figura 18 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $48^3 \times 4$ com 100 configurações em diferentes valores de temperatura.	105
Figura 19 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $12^3 \times 8$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.	106
Figura 20 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $12^3 \times 8$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.	107
Figura 21 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $16^3 \times 8$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.	108
Figura 22 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $16^3 \times 8$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.	109
Figura 23 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $24^3 \times 8$ com 120 configurações em diferentes valores de temperatura.	110
Figura 24 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $24^3 \times 8$ com 120 configurações em diferentes valores de temperatura.	111
Figura 25 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $32^3 \times 8$ com 70 configurações em diferentes valores de temperatura.	112

Figura 26 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $32^3 \times 8$ com 70 configurações em diferentes valores de temperatura.	113
Figura 27 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 0.90$ fixando $N_t = 4$. . .	114
Figura 28 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 0.90$ fixando $N_t = 4$	115
Figura 29 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 1.00$ fixando $N_t = 4$. . .	115
Figura 30 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.00$ fixando $N_t = 4$	116
Figura 31 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 1.10$ fixando $N_t = 4$. . .	117
Figura 32 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.10$ fixando $N_t = 4$	117
Figura 33 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 4$. . .	118
Figura 34 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 4$	119
Figura 35 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 4$. . .	119
Figura 36 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 4$	120
Figura 37 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um boxplot. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 8$	121
Figura 38 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 8$	122
Figura 39 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um boxplot. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 8$	122
Figura 40 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 8$	123
Figura 41 – Mediana para 2 hits de SR e SRE, mas 1 hit para Cornell. Os valores de β para cada volume de rede está na tabela (33). O ajuste foi feito com $e_2 = A_1 N^{z_1}$	129
Figura 42 – Mediana para 2 hits de SR e SRE, mas 1 hit para Cornell. Os valores de β para cada volume de rede está na tabela (33). O ajuste foi feito com $e_6 = A_2 N_2^z$	130

Figura 43 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 4$ e $T/T_c = 0.90$	135
Figura 44 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 8$ e $T/T_c = 0.90$	137
Figura 45 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 4$ e $T/T_c = 1.00$	139
Figura 46 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 8$ e $T/T_c = 1.00$	142
Figura 47 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 4$ e $T/T_c = 1.10$	146
Figura 48 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 8$ e $T/T_c = 1.10$	147

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Tabela com valores de plaqueta calculados em relação a alguns valores de referência. (1)	87
Tabela 2	– Tabela com dados valor-p e W para teste de Shapiro-Wilk para os algoritmos SR, SRE e Cornell para tamanho de rede de $8^3 \times 4$ e 300 configurações.	91
Tabela 3	– Tabela com dados valor-p e KS para teste de Kolmogorov-Smirnov para os algoritmos SR, SRE e Cornell para tamanho de rede de $8^3 \times 4$ e 300 configurações.	91
Tabela 4	– Valores de temperatura finita com seus respectivos valores de N_t e β para teoria SU(2).	94
Tabela 5	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $8^3 \times 4$ e 300 configurações.	95
Tabela 6	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $8^3 \times 4$ e 300 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6 \times 10^{-04}$	96
Tabela 7	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $12^3 \times 4$ e 250 configurações.	97
Tabela 8	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $12^3 \times 4$ e 250 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6 \times 10^{-04}$	98
Tabela 9	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $16^3 \times 4$ e 200 configurações.	99
Tabela 10	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $12^3 \times 4$ e 200 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6 \times 10^{-04}$	100
Tabela 11	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $24^3 \times 4$ e 170 configurações.	102
Tabela 12	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $24^3 \times 4$ e 170 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6.00 \times 10^{-04}$	103
Tabela 13	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $48^3 \times 4$ e 100 configurações.	104
Tabela 14	– Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $48^3 \times 4$ e 100 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6.00 \times 10^{-04}$	104

Tabela 15 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $12^3 \times 8$ e 250 configurações.	105
Tabela 16 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $12^3 \times 8$ e 250 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$	106
Tabela 17 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $16^3 \times 8$ e 200 configurações.	108
Tabela 18 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $16^3 \times 8$ e 200 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$	109
Tabela 19 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $24^3 \times 8$ e 120 configurações.	110
Tabela 20 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $24^3 \times 4$ e 120 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$	111
Tabela 21 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $32^3 \times 8$ e 70 configurações.	112
Tabela 22 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $32^3 \times 4$ e 70 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$	113
Tabela 23 – Tabela com dados do ajuste para $T/T_c = 0.90$ fixando $N_t = 4$	114
Tabela 24 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.00$ fixando $N_t = 4$	116
Tabela 25 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.10$ fixando $N_t = 4$	118
Tabela 26 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 4$	118
Tabela 27 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 4$	120
Tabela 28 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 8$	121
Tabela 29 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 8$	123
Tabela 30 – Tabela com dados de mediana de e_2 para SR e SRE. Foi utilizado 400 configurações, $\beta = 5.9$ e $V = 4^4$. O valor do tempo é medido em segundos e equivale a mediana do tempo que todas as configurações levaram para alcançar a fixação de gauge. O tempo normalizado é o valor do tempo de cada um dos hits em relação a $\text{hit} = 1$	125
Tabela 31 – Tabela com dados da mediana de e_2 para SR e SRE. Foi utilizado 298 configurações, $\beta = 5.9$ e $V = 8^4$. O valor do tempo é medido em segundos e equivale a mediana do tempo que todas as configurações levaram para alcançar a fixação de gauge. O tempo normalizado é o valor do tempo de cada um dos hits em relação a $\text{hit} = 1$	126

Tabela 32 – Tabela com dados da mediana de e_2 para SR e SRE. Foi utilizado 197 configurações, $\beta = 5.9$ e $V = 12^4$. O valor do tempo é medido em segundos e equivale a mediana do tempo que todas as configurações levaram para alcançar a fixação de gauge. O tempo normalizado é o valor do tempo de cada um dos hits em relação a $\text{hit} = 1$	127
Tabela 33 – Tabela contendo dados para mediana de e_2 and e_6	128
Tabela 34 – Valores de ajuste para equação $e_2 = A_1 N^{z_1}$	128
Tabela 35 – Valores de ajuste para equação $e_6 = A_2 N^{z_2}$	129
Tabela 36 – Componentes do propagador do glúon transversal e longitudinal, para volume $8^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	132
Tabela 37 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	132
Tabela 38 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	133
Tabela 39 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	133
Tabela 40 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $48^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	134
Tabela 41 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 8$, $\beta = 2.478960$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	135
Tabela 42 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 8$, $\beta = 2.478960$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	136
Tabela 43 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 8$, $\beta = 2.478960$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	136
Tabela 44 – Componentes do propagador do glúon transversal e longitudinal, para volume $8^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	137
Tabela 45 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	138
Tabela 46 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	138
Tabela 47 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	139
Tabela 48 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $48^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	140
Tabela 49 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 8$, $\beta = 2.5115$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	141
Tabela 50 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 8$, $\beta = 2.5115$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	141

Tabela 51 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 8$, $\beta = 2.5115$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	141
Tabela 52 – Componentes do propagador do glúon transversal e longitudinal, para volume $8^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	143
Tabela 53 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	143
Tabela 54 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	143
Tabela 55 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	144
Tabela 56 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $48^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	145
Tabela 57 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 8$, $\beta = 2.5410534$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	145
Tabela 58 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 8$, $\beta = 2.5410534$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	146
Tabela 59 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 8$, $\beta = 2.5410534$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$	147

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	TEORIA DE YANG MILLS NO CONTÍNUO	29
2.1	Integrais de Trajetória	32
2.2	Correção de Faddeev-Popov	35
3	CAMPOS DE GAUGE NA REDE	41
3.1	Campo Escalar Real	41
3.2	Teoria de Gauge na Rede	44
3.2.1	Invariância de Gauge para a Ação Fermiônica	44
3.2.2	Ação de Gauge na Rede	47
4	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	53
4.1	Cadeia de Markov	54
4.2	Estrutura de $U_\mu(n)$	55
4.3	Algoritmos de Atualização de $U_\mu(n)$	56
4.3.1	Algoritmo de Metropolis	57
4.3.2	Algoritmo de Banho Térmico para SU(2)	58
4.3.3	Algoritmo de Banho Térmico para SU(3)	60
5	TEMPERATURA FINITA	65
5.1	Transição de Fase para Teoria de Yang-Mills	65
5.2	Teoria de Escala e Expoentes Críticos	67
5.3	Definição de Parâmetros de Rede	71
6	FIXAÇÃO DE GAUGE DE LANDAU NA REDE	73
6.1	SU(2)	76
6.1.1	Los Alamos	76
6.1.2	Sobrerrelaxação	76
6.1.3	Sobrerrelaxação Estocástica	77
6.1.4	Cornell	77
6.2	SU(3)	77
6.2.1	Los Alamos	78
6.2.2	Sobrerrelaxação	80
6.2.3	Sobrerrelaxação Estocástica	80
7	PROPAGADOR DO GLÚON NA REDE	81

7.1	Propagador do Glúon em Temperatura Zero	81
7.2	Propagador do Glúon na Rede em Temperatura Finita	82
8	RESULTADOS DE FIXAÇÃO DE GAUGE PARA SU(2)	85
8.1	Gerador de Configurações de Gauge	85
8.2	Fixação de Gauge de Landau	88
8.2.1	Introdução da Análise Exploratória	88
8.3	Temperatura Finita	94
8.3.1	Comparação de Temperatura para Volumes de Rede Distintos	95
8.3.2	Expoentes Críticos para Mediana	113
8.3.2.1	$N_t = 4$	114
8.3.2.2	$N_t = 8$	120
9	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA FIXAÇÃO DE GAUGE EM TE-	
	ORIA SU(3)	125
9.0.1	Análise de Hits para SR e SRE	125
9.0.2	Análise de Eficiência de Algoritmo	127
10	RESULTADOS NUMÉRICOS PARA PROPAGADOR DO GLÚON	
	EM TEORIA SU(2)	131
10.1	Ajuste do Tipo Gribov-Stingl	131
10.2	Temperatura Finita	131
10.2.1	$T/T_c = 0.90$	131
10.2.1.1	$N_t = 4$	132
10.2.1.2	$N_t = 8$	135
10.2.2	$T/T_c = 1.00$	137
10.2.2.1	$N_t = 4$	137
10.2.2.2	$N_t = 8$	140
10.2.3	$T/T_c = 1.10$	142
10.2.3.1	$N_t = 4$	142
10.2.3.2	$N_t = 8$	144
11	CONCLUSÃO	149
	REFERÊNCIAS	153

1 INTRODUÇÃO

Buscando compreender melhor a natureza, os físicos conseguiram descrevê-la da maneira mais elementar até os dias de hoje através de quatro interações fundamentais: gravitacional, eletromagnética, nuclear forte e fraca. (2) A construção histórica desse pensamento é extremamente interessante, formada pela unificação e descoberta de diversos fenômenos que aprofundaram nossa compreensão dessas interações e de sua importância.

A primeira interação a ser estudada e melhor formalizada matematicamente foi a gravitacional, por Isaac Newton em finais do século XVII. Ele teve uma contribuição crucial, pois foi o primeiro a entender que a gravidade terrestre (que faz maçãs caírem no chão, ou na cabeça das pessoas) é rigorosamente a mesma que a gravidade celestial, que mantém os planetas em movimento em torno do sol. Essa pode ser considerada a primeira grande unificação de uma interação fundamental da natureza. (3)

Pouco mais de 150 anos após os trabalhos de Newton com gravitação, os físicos André Marie Ampère e Michael Faraday propuseram a segunda grande unificação: o eletromagnetismo. Antes de 1820, tanto a eletricidade quanto o magnetismo, por mais que já houvesse estudos bem avançados, eram tratados separadamente e considerados fenômenos distintos, sendo a sua descrição conjunta mais um marco para a história da unificação das interações fundamentais. Entretanto, a grande contribuição veio com James Clerk Maxwell, cerca de 50 anos depois dos trabalhos estabelecidos do eletromagnetismo clássico. Ele percebeu que, se uma carga elétrica fosse acelerada, ela emitiria energia em forma de radiação eletromagnética, por ondas de rádio, calor (radiação infravermelha), raio X, etc. Logo, a grande unificação proposta por Maxwell é a do eletromagnetismo clássico com a ótica. (4)

No ano de 1905, o físico Albert Einstein propôs em seu artigo “Special Theory of Relativity” que tanto espaço quanto tempo estão em pé de igualdade. Essa contribuição foi muito importante, pois lhe permitiu escrever um artigo em 1915 que revolucionaria a física em seu tempo. (5) Agora, a teoria da gravitação newtoniana passava a ter uma descrição geométrica do espaço-tempo, sendo essa teoria considerada até os dias de hoje a maneira mais consistente de descrever as interações gravitacionais.

Quanto às interações nucleares, a sua descrição veio posteriormente. Podemos colocar o início para os estudos destas interações em 1910, com Ernest Rutherford mostrando que os átomos não eram partículas elementares, mas que consistiam de um núcleo denso, pequeno e central, rodeado por elétrons com carga elétrica negativa. (6) Em 1928, Paul Dirac previu a existência do que foi chamado posteriormente de antipartícula, sendo que cada partícula de matéria deveria ter uma cópia de si mesma com carga de sinal trocado.

Um exemplo disso seria o elétron, ao qual está associado um antielétron, comumente chamado de pósitron. (7) No ano de 1932, os físicos James Chadwick e Irène Joliot-Curie (filha da brilhante Marie Curie) revelaram que o núcleo atômico era formado por partículas, chamadas de prótons (com carga elétrica positiva) e nêutrons (carga elétrica nula). (8, 9) Por haver um núcleo que consiste somente de partículas positivas e neutras, deveria haver instabilidade atômica, já que esse núcleo jamais poderia estar coeso pela teoria eletromagnética. Sendo assim, foi postulado que deveria existir uma outra interação, com alcance muito pequeno, mas com maior intensidade do que a eletromagnética. Essa é a força forte, que se revelou ser de natureza extremamente complexa, embora inicialmente parecesse ser descrita de forma simples, como proposto por Hideki Yukawa. (10) Ironicamente, no ano de 1956, Robert Hofstadter trouxe a ideia de que tanto prótons quanto nêutrons possam não ser partículas elementares, mas que existam outras partículas que possam formá-los. Esses objetos posteriormente foram chamados de quarks em 1964 por Murray Gell-Mann. (11) Desvendar o mecanismo que confina os quarks em estados ligados (hádrons) é ainda um grande desafio, e está relacionado a nosso estudo nesta tese, como descrito abaixo.

Quanto à interação nuclear fraca, ela foi melhor explicada em 1933 por Enrico Fermi para o decaimento beta (12), após Wolfgang Pauli propor a existência dos neutrinos*. De uma maneira mais geral, essa seria a teoria que descreve os léptons, que são partículas que não interagem fortemente. Essa teoria foi unificada depois, em 1968, por Sheldon Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg, com a teoria eletromagnética, dando origem à teoria eletrofraca. (13–16)

Para a quantização das teorias das interações fundamentais, é utilizado o conceito de “campo”, segundo o qual cada uma das partículas mencionadas produz uma perturbação no espaço-tempo e pode ser pensada como um “quantum” do campo a ela associado. Assim, é concebida a *Teoria Quântica de Campos*, com objetivo de descrever como esses campos se comportam na natureza. Por conta disso, essas teorias introduzem o que chamamos de *mediadores de força*, que são os campos responsáveis por dar origem a cada uma das interações fundamentais quantizadas. Para o caso da interação eletromagnética, temos o fóton como o mediador. A teoria que descreve essa interação é chamada de Eletrodinâmica Quântica ou QED (do inglês *Quantum Electrodynamics*). Para o caso das interações nucleares, temos oito tipos de mediadores, os glúons, para a interação forte — que é descrita pela Cromodinâmica Quântica ou QCD (do inglês *Quantum Chromodynamics*) — e as partículas W^+ , W^- e Z^0 para a teoria fraca.

Para completar o que chamamos de modelo padrão das partículas elementares, falta descrever os tipos de quarks, léptons e neutrinos que existem, junto com suas respectivas antipartículas, além de incluir o bóson de Higgs, partícula prevista em 1964 por Peter Higgs (17), e descoberta em 2012 no LHC (do inglês Large Hadron Collider), no CERN.

* O decaimento beta é tal que um nêutron decai em um próton, um elétron e um antineutrino.

(18) Esse bóson é responsável por dar massa a outras partículas elementares através de um mecanismo de quebra espontânea de simetria, o Mecanismo de Higgs.

Neste trabalho, vamos considerar somente a parte do modelo padrão que corresponde à interação forte. A maneira como os quarks e os glúons interagem produz fenômenos que ainda não possuem uma boa descrição teórica, sendo eles objetivo de estudo do nosso grupo de pesquisa. Para a teoria que descreve a interação forte, existe um ponto importante que precisa ser levado em consideração: é uma teoria que carrega um análogo da carga elétrica, que é chamada de *carga de cor*. Essas cargas só podem ser encontradas nas partículas elementares sujeitas à interação forte. Contudo, elas não são observadas para os *hádrons*, que são os estados ligados de quarks, como os prótons e nêutrons. Um exemplo para entender as cargas de cor é observar o hádron Δ^{++} , que possui carga elétrica $+2$. (19) Essa partícula é um exemplo de *bárion*, pois é formada por três quarks e obedece à estatística de Fermi-Dirac, que vale para férmions (O outro tipo de partículas hadrônicas são os *mésons*, formados por um par quark-antiquark[†]). Sendo que o quark *up* tem carga elétrica $+2/3$ e o quark *down* carga elétrica $-1/3$, por conservação de carga elétrica o bárion Δ^{++} deve possuir três quarks up. Porém, como os quarks são férmions, eles devem obedecer ao princípio de exclusão de Pauli, e não poderiam coexistir dessa maneira sem que houvesse algum outro número quântico que pudesse diferenciá-los. Sendo assim, podemos solucionar o problema se supusermos que as partículas fundamentais sujeitas à força forte possuem cargas de cor, que podem assumir os “valores” *vermelho*, *verde* e *azul*. Desse modo, podemos entender os glúons como sendo aquelas partículas que trocam cor entre os quarks, carregando uma cor e uma anticor. Portanto, diferentemente dos fótons na QED, que interagem somente com as partículas de matéria, os glúons na QCD não só fazem a interação entre os quarks como também interagem entre si, já que eles também possuem cargas de cor.

A teoria da QCD (20,21) possui características interessantes no que diz respeito aos regimes de alta e baixa energia[‡]. Enquanto no regime IR se observa que os quarks jamais estão isolados, mas sim confinados dentro dos hádrons, no UV se observa que eles se movimentam como partículas livres. O fenômeno do confinamento no IR surge porque a interação entre os quarks aumenta conforme a distância entre eles aumenta. Para exemplificar essa questão, utilizaremos um méson. Para que um par quark-antiquark seja separado, é preciso que muita energia seja aplicada ao sistema. Contudo, em vez de os quarks se separarem, a energia para aumentar a separação deles faz com que sejam criados dois pares quark-antiquark, mantendo-os ainda confinados. Algumas propostas de estudo foram levantadas para melhor compreensão deste fenômeno, como o cenário de confinamento de Kugo-Ojima e o de Gribov-Zwanziger (22–26), mas não há ainda um

[†] Obedecendo à estatística de Bose-Einstein, que vale para bósons.

[‡] Vamos chamar o regime de baixas energias de infravermelho ou IR, e o regime de altas energias de ultravioleta ou UV.

entendimento completo dessa questão. Note que o confinamento é uma característica geral das teorias do tipo Yang-Mills, introduzidas em (27), que se baseiam em uma simetria de gauge não abeliana, do grupo $SU(N)$. No caso da QCD temos o grupo $SU(3)$ e devemos considerar também os campos de férmions (quarks), mas é igualmente esperado que ocorra o fenômeno de confinamento para a teoria de gauge “puro” (i.e., sem férmions), seja para $N = 3$ que para outros valores de N , e.g. $N = 2$. Nesse caso, falamos genericamente em “confinamento de cor”, ou seja, confinamento das partículas que possuem carga de cor, como os quarks e também os glúons. Para o caso da QCD no UV, observamos o fenômeno da liberdade assintótica, em que a interação dos quarks se torna muito fraca, conforme a energia do sistema é aumentada. Essa propriedade foi descoberta por Hugh David Politzer, David Gross e Frank Wilczek em 1973. (28,29)

Além disso, podemos observar um comportamento peculiar em situações extremas, como a de altas temperaturas e densidades bariônicas. Neste caso, estamos supondo que o sistema possui um alto número de bárions por volume. Para altas temperaturas, a energia média das partículas será muito alta e conseqüentemente a interação será menos intensa, como discutido acima. Da mesma forma, para altos valores de densidade, temos que a estrutura hadrônica é perdida, pois os quarks passam a interagir fracamente, por estarem muito próximos uns dos outros. Isso faz com que o sistema passe a se comportar como um plasma. Esse novo estado da matéria foi chamado de plasma de quarks e glúons ou QGP (do inglês *Quark-Gluon Plasma*). (30) Existem duas situações para que o QGP possa existir naturalmente. Uma delas é no interior de estrelas de nêutrons, devido à alta densidade que elas apresentam. A outra seria próxima ao surgimento do universo, quando a temperatura era tão grande que seria inevitável que este fenômeno não tivesse ocorrido. Contudo, o interesse dos físicos é que o QGP possa ser reproduzido, já que ambas as situações naturais citadas são inviáveis para trabalhos experimentais. Logo, se utiliza a colisão de íons pesados em velocidades relativísticas como tentativa de reprodução desse fenômeno. Como essas colisões produzem alta temperatura e densidade, se trabalha com a possibilidade de a estrutura hadrônica ser perdida nestas condições extremas, resultando no QGP. (31) Infelizmente, mesmo que as condições extremas envolvam (em princípio) o limite de interação mais fraca, o problema continua sendo altamente não perturbativo. (32)

Sendo assim, para se fazer um estudo teórico da QCD em altas e baixas energias, precisamos entender o que está previsto para cada um desses regimes pela teoria quântica de campos. (20) O método usual, como é feito para a QED, é que a análise da teoria seja feita perturbativamente, por meio de uma expansão em potências da constante de acoplamento da teoria. São assim obtidos para a QED valores muito precisos, como para o momento magnético anômalo do elétron. (20) Contudo, quando se aplica esse formalismo à QCD, temos que só é possível fazer análises perturbativas em regimes de energia muito alta. Logo, para que o confinamento seja estudado, é preciso utilizar métodos não perturbativos

consistentes como, por exemplo, o formalismo de Rede (33), as regras de soma (34), as teorias efetivas (35), as equações de Dyson-Schwinger (36), entre outros. Este trabalho se baseará na QCD na Rede, que explora a equivalência entre uma teoria quântica de campos no espaço euclidiano e um modelo de mecânica estatística clássica, através de uma densidade de probabilidade. Além disso, temos a discretização do espaço-tempo, de maneira que os quarks sejam representados por sítios de uma rede e os glúons de forma indireta pelos elos que conectam os sítios. Uma ferramenta muito poderosa para estudar a teoria na formulação de rede é a simulação numérica, utilizando métodos de Monte Carlo. De fato, a QCD na rede vem se tornando cada vez mais crucial para o entendimento de processos de baixa energia na QCD, como a determinação do espectro de massas e constantes de decaimento hadrônicas. (37–40)

Muito se tem trabalhado para compreender o mecanismo que gera o confinamento da carga de cor, inclusive usando simulações da QCD na rede (41), como faremos aqui. Uma das maneiras mais comuns de estudar esse fenômeno é a partir das funções de Green da teoria, pois é natural esperar que a propriedade de confinamento de cor esteja embutida no comportamento das correlações entre os campos fundamentais da teoria, no regime de grandes distâncias, o IR. Para esse caso, são escolhidos candidatos como o propagador dos campos do glúon, que são objetos dependentes de gauge. Isso quer dizer que essas funções de Green não são invariantes sob transformações locais de gauge, o que requer para seu estudo o processo chamado de *fixação de gauge*. Dessa forma, para calcular o propagador do glúon, é necessário fixar um determinado gauge, que no caso dessa tese foi o gauge de Landau.

Como a QCD na rede se baseia em simulações muito pesadas, é importante que haja preocupação com a otimização. Em particular, é comum buscar estratégias computacionais para tornar as simulações mais rápidas e eficientes, como paralelização em CPU ou GPU. Entretanto, muito mais do que a maneira com que a máquina irá processar o código, é muito importante estabelecer qual o algoritmo que vai produzir o resultado mais rápido, antes que ele seja paralelizado. É possível encontrar estudos de otimização dos algoritmos de fixação de gauge para a teoria SU(2), por exemplo em (42), mas não há uma descrição de otimização quando se introduz o importante componente da temperatura. Além disso, não há equivalentemente um estudo cuidadoso de eficiência de algoritmos para o caso da teoria SU(3), tratado inicialmente em. (43) Por isso, temos como foco nessa tese fazer um estudo de otimização e comparação dos algoritmos responsáveis pela fixação do gauge de Landau tanto no caso SU(2) quanto SU(3). Pretendemos construir uma metodologia de avaliação de algoritmos, assim como estudar os casos em que diferentes variáveis podem modificar a escolha de qual o melhor algoritmo a se utilizar, como o aumento do volume da rede e a temperatura. Além disso, também pretendemos testar os algoritmos selecionados em estudos de confinamento em função da temperatura, utilizando propagadores otimizados computacionalmente.

A seguir, detalhamos a organização desta tese. Dedicaremos o Capítulo 2 à descrição teórica da QCD e à definição do propagador do glúon. Em seguida, no Capítulo 3, explicaremos com detalhes o formalismo de rede, primeiro para uma teoria de campo escalar real (como exercício didático) e, em seguida, para teorias de gauge não abelianas. O Capítulo 4 abordará a parte computacional, descrevendo as simulações numéricas de Monte Carlo e como ocorre o processo de introdução e atualização dos campos da teoria. O Capítulo 5 discute alguns aspectos das teorias de campos a temperatura finita, destacando a importância de seu estudo. O Capítulo 6 contém uma descrição detalhada do processo de fixação de gauge de Landau na rede, tanto para a teoria de gauge SU(2) quanto para SU(3). Aqui reunimos os algoritmos utilizados no trabalho e como deverão ser analisados em cada caso. O Capítulo 7 é responsável por mostrar a construção do propagador do glúon na rede. Por fim, nos Capítulos 8 e 9 apresentamos os resultados do nosso estudo de otimização para as teorias SU(2) e SU(3) respectivamente, incluindo cálculos dos propagadores a temperatura finita. Apresentamos no Capítulo 10 nossos resultados para o propagador do glúon em temperatura finita.

Note que os códigos numéricos empregados nos estudos apresentados neste tese foram integralmente desenvolvidos por mim, a partir de métodos usuais da área. Parte do estudo de otimização de algoritmos de fixação de gauge foi feita comparando meus resultados aos obtidos pelos códigos desenvolvidos (independentemente, e para cálculo de outros propagadores) por Jesuel Marques, também estudante de doutorado do grupo. Resultados preliminares desse estudo foram apresentados em. (44) O artigo completo referente a esse trabalho encontra-se em preparação e deverá ser concluído em breve.

2 TEORIA DE YANG MILLS NO CONTÍNUO

As teorias de gauge não abelianas são baseadas em grupos de simetria cujos geradores satisfazem uma álgebra não comutante. Para o caso do grupo $SU(N)$, temos os geradores T^a , com $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$, que são operadores hermitianos. Esses geradores satisfazem a álgebra de Lie na forma (20, 45)

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (2.1)$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura, que são reais e completamente assimétricas. Note que usamos a convenção de índices repetidos para indicar soma. Consideremos agora a identidade de Jacobi, dada por

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^c, T^a], T^b] + [[T^b, T^c], T^a] = 0. \quad (2.2)$$

A equação (2.1) aplicada à equação (2.2) fornece a restrição das constantes de estrutura para que seja satisfeita a álgebra de Lie. Isso resulta em

$$\begin{aligned} if^{abd} [T^d, T^c] + if^{cad} [T^d, T^b] + if^{bcd} [T^d, T^a] = \\ - (f^{abd} f^{dce} + f^{cad} f^{dbe} + f^{bcd} f^{dae}) T^e = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

que implica

$$f^{abd} f^{dce} + f^{cad} f^{dbe} + f^{bcd} f^{dae} = 0. \quad (2.4)$$

Além da representação fundamental, dada por matrizes $N \times N$, podemos também utilizar a representação adjunta, em que T^a são matrizes hermitianas de dimensão $N^2 - 1$ e traço nulo, com elementos de matriz dados por

$$(T^a)_{bc} = -if^{abc}, \quad (2.5)$$

com a condição de normalização $\text{tr}(T^a T^b) = N\delta^{ab}$. Na representação fundamental, também temos matrizes hermitianas de traço nulo, e a condição de normalização é $\text{tr}(T^a T^b) = (1/2)\delta^{ab}$. Nesse caso, as matrizes T^a são dadas pelas matrizes de Gell-Mann para $N = 3$ e pelas matrizes de Pauli para $N = 2$. As matrizes de Pauli são explicitamente dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

As matrizes de Gell-Mann são explicitamente dadas por

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Com base nesta estrutura de grupo, é possível construir uma teoria de gauge levando em consideração os campos de potencial de gauge A_μ . Esses campos podem ser escritos em termos dos geradores do grupo de Lie a ser utilizado, na forma

$$A_\mu(x) = T^a A_\mu^a(x), \tag{2.8}$$

onde o índice μ representa a direção do campo. Como estamos desenvolvendo uma teoria de gauge, sua ação deve ser invariante sob transformações de gauge locais. Para o grupo $SU(N)$, o elemento de transformação de gauge é dado por

$$g(x) = e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha^a(x)T^a}, \tag{2.9}$$

onde $\alpha^a(x)$ é um número real, análogo ao ângulo da transformação de fase no eletromagnetismo. Note que esses números variam de ponto a ponto, o que configura uma transformação local. Por serem elementos de $SU(N)$, as matrizes $g(x)$ são unitárias e com determinante 1, já que

$$g^\dagger(x) = e^{-i\alpha(x)^\dagger} = e^{-i\alpha(x)} = g^{-1}(x) \tag{2.10}$$

e portanto

$$\det[g(x)] = \det[e^{i\alpha(x)}] = e^{i\text{Tr}[\alpha(x)]} = 1. \tag{2.11}$$

Um elemento importante para teorias de gauge é a derivada covariante, dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x). \tag{2.12}$$

A importância da derivada covariante está ligada à exigência da invariância da ação da teoria por transformações de gauge. Seja por exemplo a ação de Dirac, definida como

$$S_D = \int d^4x \bar{q}(x) [\gamma^\mu \partial_\mu - m] q(x), \tag{2.13}$$

onde m é a massa do férmion, q e \bar{q} são os espiniores e γ^μ são as matrizes de Dirac. Note que os campos q e \bar{q} são vetores (de dimensão N) no espaço associado ao índice a , no qual agem as matrizes g , de dimensão $N \times N$, escolhendo a representação fundamental. Ao aplicarmos uma transformação de gauge, devemos encontrar $S_D^{(g)} = S_D$. Entretanto, teremos um termo com derivada que não é invariante. De fato, utilizando as transformações para os espiniores, dadas por

$$q^{(g)}(x) = g(x)q(x) \quad (2.14)$$

$$\bar{q}^{(g)}(x) = \bar{q}(x)g^\dagger(x), \quad (2.15)$$

a transformação de gauge aplicada à ação de Dirac resultará em um termo do tipo $\bar{q}(x)g^\dagger(x)\partial_\mu g(x)q(x)$, que não é invariante de gauge. Para que possamos construir uma invariância de gauge da teoria, é preciso reescrever ∂_μ como derivada covariante, dada na equação (2.12) acima. Isso faz com que tenhamos o termo $\bar{q}(x)g^\dagger(x)D_\mu(x)g(x)q(x)$, que nos permite impor

$$D_\mu^{(g)}(x) = g(x)D_\mu(x)g^\dagger(x), \quad (2.16)$$

de modo que, agora, a ação de Dirac se torna invariante de gauge. De fato, utilizando as equações (2.12) e (2.16), é possível obter a transformação da derivada covariante proposta acima, já que

$$\begin{aligned} D_\mu^{(g)}(x) &= g(x) [\partial_\mu + iA_\mu(x)] g^\dagger(x) = [g(x)\partial_\mu] g^\dagger(x) + ig(x)A_\mu(x)g^\dagger(x) \\ &= \partial_\mu + g(x) [\partial_\mu g^\dagger(x)] + ig(x)A_\mu(x)g^\dagger(x) \\ &= \partial_\mu + i \left\{ g(x)A_\mu(x)g^\dagger(x) - ig(x) [\partial_\mu g^\dagger(x)] \right\} = \partial_\mu + iA_\mu^{(g)}(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde definimos a transformação de gauge para o campo A_μ como

$$A_\mu^{(g)}(x) = g(x)A_\mu(x)g^\dagger(x) - ig(x) [\partial_\mu g^\dagger(x)] = g(x)A_\mu(x)g^\dagger(x) + i [\partial_\mu g(x)] g^\dagger(x). \quad (2.18)$$

Note que utilizamos, no desenvolvimento das expressões acima, a equação (2.10) [i.e., a condição de unitariedade de $g(x)$] e o fato de que $D_\mu(x)$ deve agir como operador, pela esquerda, o que implica em “abrir” o efeito da derivada parcial em dois termos, pela regra da cadeia do produto de Leibniz.

Podemos agora calcular o comutador das derivadas covariantes no mesmo ponto para diferentes direções, que será diferente de zero. Temos o resultado

$$\begin{aligned} [D_\mu(x), D_\nu(x)] &= [\partial_\mu + iA_\mu(x), \partial_\nu + iA_\nu(x)] = i\partial_\mu A_\nu(x) - i\partial_\nu A_\mu(x) - [A_\mu(x), A_\nu(x)] \\ &= i \left\{ \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A partir da expressão acima, é possível definir o campo de força gluônico $F_{\mu\nu}$ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)] = -i[D_\mu(x), D_\nu(x)]. \quad (2.20)$$

Utilizando a equação (2.16), vemos que a transformação de gauge para o campo $F_{\mu\nu}$ é dada, de maneira simples, por

$$F_{\mu\nu}^{(g)} = -i[D_\mu^{(g)}(x), D_\nu^{(g)}(x)] = -ig(x)[D_\mu(x), D_\nu(x)] \quad g^\dagger(x) = g(x)F_{\mu\nu}g^\dagger(x) \quad (2.21)$$

Podemos agora escrever a ação para a teoria de campos associada aos grupos de simetria de gauge $SU(N)$, como desenvolvemos acima. Essa é a chamada ação de Yang-Mills (27) para teorias de gauge não abelianas

$$S_{YM} = \int d^4x \text{Tr} \left[\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right], \quad (2.22)$$

onde indicamos o traço nos índices matriciais dos geradores do grupo de gauge, já que a ação deve ser uma grandeza escalar.

Utilizando a equação (2.21), é possível ver que a ação de YM é invariante sob o grupo de simetria $SU(N)$. Para o caso da QCD, os campos $A_\mu(x)$ representam os glúons. O grupo de Lie utilizado é o $SU(3)$, o que resulta nos oito tipos de glúons já citados na introdução. Logo, os índices que definem os oito geradores são agora chamados de índices de cor.

2.1 Integrais de Trajetória

Tendo a álgebra de grupo para os campos de gauge sido bem estabelecida, vamos avançar para as integrais de trajetória da teoria quântica de campos, que é a base para a quantização da teoria da QCD. (Neste trabalho consideramos apenas a teoria de gauge pura, dada pela ação na equação (2.22) acima.) Com finalidade didática, vamos primeiro introduzir tais integrais a partir da mecânica quântica. (46) Logo, partimos da equação de Schrödinger, dada por (47)

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.23)$$

onde o estado físico do sistema é representado pela função de onda $\psi(t)$ dependente do tempo e H é o hamiltoniano. Na representação de Heisenberg, temos

$$|\psi(t_f)\rangle = e^{-i(t_f-t_i)\hat{H}} |\psi(t_i)\rangle, \quad (2.24)$$

o que significa que o operador de evolução temporal $\hat{U}(t_f - t_i) = e^{i(t_f-t_i)\hat{H}}$ promove a evolução no tempo do estado $|\psi(t_i)\rangle$ para o estado $|\psi(t_f)\rangle$. Com isso, é possível construir esse operador também a partir de autoestados de posição $|q\rangle$, da seguinte forma

$$\langle q_f | \hat{U} | q_i \rangle = \langle q_f | e^{-it_f \hat{H}} e^{it_i \hat{H}} | q_i \rangle = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \equiv K(q_f, t_f; q_i, t_i). \quad (2.25)$$

O termo $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ é conhecido como o propagador do sistema. O propagador é uma função de Green da equação de Schrödinger, que pode ser escrita equivalentemente como

$$\psi(q_f, t_f) = \int dq_i K(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i). \quad (2.26)$$

Podemos usar $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ para representar a propagação passando por estados intermediários. Para o caso de uma iteração desse processo, considerando um estado intermediário no tempo t_1 , dado, temos

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \langle q_f | e^{-i(t_f-t_1)\hat{H}} e^{i(t_1-t_i)\hat{H}} | q_i \rangle \\ &= \int dq_1 \langle q_f | e^{-i(t_f-t_1)\hat{H}} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i(t_1-t_i)\hat{H}} | q_i \rangle \\ &= \int dq_1 K(q_f, t_f; q_1, t_1) K(q_1, t_1; q_i, t_i), \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde utilizamos a relação de completeza

$$1 = \int dq |q\rangle\langle q|. \quad (2.28)$$

Com isso, podemos ver que para N iterações com estados intermediários nos tempos t_1, \dots, t_N , sendo $t_{N+1} \equiv t_f > t_N \dots > t_1 > t_0 \equiv t_i$, temos

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \left(\prod_{k=1}^N dq_k \right) \prod_{j=0}^N K(q_{N-j+1}, t_{N-j+1}; q_{N-j}, t_{N-j}), \quad (2.29)$$

onde $q_{N+1} \equiv q_f$ e $q_0 \equiv q_i$. Vamos definir, agora, para o limite de $N \rightarrow \infty$, um passo de tempo infinitesimal dado por $\varepsilon = (t_f - t_i)/(N + 1)$, ou seja, temos N tempos intermediários igualmente espaçados, dados por $t_n = t_i + n\varepsilon$, $n = 1, 2, \dots, N$. Temos, então $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ dado por

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \left(\prod_{k=1}^N dq_k \right) \prod_{j=0}^N \langle q_{N-j+1} | e^{-i\varepsilon\hat{H}} | q_{N-j} \rangle. \quad (2.30)$$

O próximo passo agora é definir o hamiltoniano \hat{H} , que deve ser independente do tempo. Vamos considerar

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q}), \quad (2.31)$$

sendo \hat{P} o operador momento e $V(\hat{Q})$ o potencial que depende do operador posição. vamos aplicar primeiro para um caso $K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j)$. No limite $n \rightarrow \infty$, pode ser utilizada a fórmula de Trotter

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{A/n} e^{B/n} \right)^n \quad (2.32)$$

e temos como resultado

$$\begin{aligned} K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j) &= \left\langle q_{j+1} \left| e^{-\frac{i\varepsilon}{2m}\hat{P}^2} e^{-i\varepsilon V(\hat{Q})} \right| q_j \right\rangle \\ &= \left\langle q_{j+1} \left| e^{-\frac{i\varepsilon}{2m}\hat{P}^2} \right| q_j \right\rangle e^{-i\varepsilon V(q_j)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aplicando a relação de completeza

$$1 = \int dp |p\rangle\langle p| \quad (2.34)$$

tanto para p_j quanto para p'_j , temos que

$$K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j) = \int dp_j \int dp'_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | e^{-\frac{i}{2m} \varepsilon \hat{p}^2} | p'_j \rangle \langle p'_j | q_j \rangle e^{-i\varepsilon V(q_j)}. \quad (2.35)$$

Utilizando

$$\langle q_{j+1} | p_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_{j+1}p_j}, \quad (2.36)$$

$$\langle p'_j | q_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip'_j q_j}, \quad (2.37)$$

$$\langle p_j | p'_j \rangle = \delta(p_j - p'_j), \quad (2.38)$$

teremos

$$\begin{aligned} K(q_{j+1}, t_{j+1}; q_j, t_j) &= \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{i\left[\frac{-\varepsilon}{2m} p_j^2 + p_j(q_{j+1} - q_j)\right]} e^{-i\varepsilon V(q_j)} \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{i\left[p_j(q_{j+1} - q_j) - \varepsilon\left(\frac{p_j^2}{2m} + V(q_j)\right)\right]}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde o segundo termo da exponencial é o hamiltoniano. De fato, podemos notar que a expressão no expoente corresponde formalmente, para ε pequeno, a $i\delta t[p\delta q/\delta t - H(p, q)]$, ou seja (por meio de uma transformação de Legendre), a densidade de lagrangiana, que deverá ser obtida por integração nos momentos, i.e. trocando-se a variável p por $\dot{q} = dq/dt$. Dessa forma, temos

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\prod_{k=1}^N dq_k \right) \left(\prod_{l=0}^N \frac{dp_l}{2\pi} \right) \prod_{j=0}^N e^{i\varepsilon \left\{ p_{N-j} \frac{(q_{N-j+1} - q_{N-j})}{\varepsilon} - \left[\frac{p_{N-j}^2}{2m} + V(q_{N-j}) \right] \right\}}. \quad (2.40)$$

Fazendo a substituição

$$\dot{q}_j = \frac{q_{j+1} - q_j}{\varepsilon} \quad (2.41)$$

na equação (2.40), temos

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \int \left(\prod_{k=1}^N dq_k \right) \left(\prod_{l=0}^N \frac{dp_l}{2\pi} \right) \prod_{j=0}^N e^{-i\varepsilon V(q_{N-j})} e^{-i\varepsilon \left(\frac{p_{N-j}^2}{2m} - p_{N-j} \dot{q}_{N-j} \right)} \\ &= \int \left(\prod_{k=1}^N dq_k \right) \left(\prod_{l=0}^N \frac{dp_l}{2\pi} \right) \prod_{j=0}^N e^{-i\varepsilon V(q_{N-j})} e^{-i\varepsilon \left\{ \left[\frac{p_{N-j}}{\sqrt{2m}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \dot{q}_{N-j} \right]^2 - \frac{m}{2} \dot{q}_{N-j}^2 \right\}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde completamos quadrado no termo da exponencial. Agora, vamos fazer a integral gaussiana sobre os momentos a partir da equação

$$\int dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (2.43)$$

que produz

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \left(\frac{m}{2i\pi\epsilon} \right)^{N/2} \int \prod_{k=1}^N dq_k \prod_{j=0}^N e^{-i\epsilon \left[\frac{m\dot{q}_{N-j}^2}{2} - V(q_{N-j}) \right]} \\ &= \left(\frac{m}{2i\pi\epsilon} \right)^{N/2} \int \prod_{k=1}^N dq_k e^{i\epsilon \sum_{j=0}^N L(q_{N-j}, \dot{q}_{N-j})}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

sendo $L(q_{N-j}, \dot{q}_{N-j})$ a lagrangiana do sistema.

Por fim, fazendo $dt = \epsilon$, vamos ter

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int D[q] e^{i \int L(q) dt} = \int D[q] e^{iS[q]}, \quad (2.45)$$

onde $D[q]$ incorpora $\prod_{k=1}^N dq_k$ e o fator constante.

Para o caso da teoria quântica de campos, é necessário fazer a generalização do que foi visto acima. (48, 49) O foco aqui será os campos da teoria, que são caracterizados por um número infinito de graus de liberdade em coordenadas do espaço-tempo. Para a construção da integral de trajetória para o caso de teorias de gauge, teremos o auxílio do funcional gerador dado por

$$Z = \mathcal{N} \int D[A_\mu] e^{iS[A_\mu]}, \quad (2.46)$$

onde $D[A_\mu] \equiv \prod_{\mu,x} dA_\mu(x)$, \mathcal{N} é um fator global de normalização e $S[A_\mu]$ é a ação de YM, definida na seção anterior. O funcional Z é o equivalente do propagador considerado acima, para o caso de uma trajetória com $x_f = x_i$, integrado também para essa posição. Por sinal, note que tínhamos uma integral a mais em p do que em q na equação (2.42) e portanto seria natural considerar esse funcional mais simétrico.

2.2 Correção de Faddeev-Popov

De maneira geral, os observáveis de interesse físico, invariantes de gauge, podem ser obtidos a partir da lagrangiana da teoria. Entretanto, para a determinação de algumas grandezas, como os propagadores dos campos de gauge, é necessário realizar uma fixação de gauge, que pode ser vista como uma condição de vínculo. Para o caso da ação de YM, é interessante considerar o funcional (20)

$$Z(J) = \mathcal{N} \int D[A_\mu(x)] e^{iS[A_\mu(x)] + \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x)}, \quad (2.47)$$

sendo $J_\mu(x)$ uma fonte externa para o campo $A_\mu(x)$. Mantendo [para $A_\mu(x)$ próximo de zero, i.e. uma solução perturbativa] no primeiro termo do expoente desse funcional apenas a parte quadrática em $A_\mu(x)$, temos

$$\begin{aligned} Z(J) &= \mathcal{N} \int D[A_\mu] e^{i \frac{1}{4} \int d^4x [\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)]^2 + \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x)} \\ &= \mathcal{N} \int D[A_\mu] e^{i \frac{1}{4} \int d^4x [A_\nu(x) \partial_\mu - A_\mu(x) \partial_\nu] [\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)] + \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x)}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde foi feita uma integração por partes na última passagem. Note que, na notação utilizada acima, as derivadas parciais agem somente sobre o respectivo termo à direita, i.e. não como operadores como era o caso da seção anterior. Fazendo uma troca de índices na equação acima, temos que

$$\begin{aligned} Z(J) &= \mathcal{N} \int D[A_\mu] e^{i \frac{1}{2} \int d^4x A^\nu(x) \partial^\mu [\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)] + \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x)} \\ &= \mathcal{N} \int D[A_\mu] e^{i \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\nu(x) \delta(x-y) [\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\nu \partial_\mu] A^\mu(y) + \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x)}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde inserimos, por conveniência, uma função delta de Dirac nos x e uma função delta de Kronecker nos μ .

A solução de integrais gaussianas para variáveis escalares, dada para um campo $\psi(x)$ qualquer como (50)

$$\begin{aligned} I(J) &= \int D[\psi] e^{-\frac{1}{2} \int dx dy \psi(x) \Omega(x,y) \psi(y) + \int dx \psi(x) J(x)} \\ &= \mathcal{C} (\det \Omega)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} \int dx dy J(x) \Omega^{-1}(x,y) J(y)}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

pode ser usada na equação (2.49), fornecendo

$$Z(J) = \mathcal{N} (\det \Omega)^{-1/2} \int D[A_\mu] e^{\frac{1}{2} \int dx dy J^\mu(x) \Omega_{\mu\nu}^{-1}(x,y) J^\nu(y)}, \quad (2.51)$$

sendo

$$\Omega_{\mu\nu}^{bc} = \delta^{bc} [\delta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda - \partial_\mu \partial_\nu], \quad (2.52)$$

com os índices de cor explicitados em letras latinas.

Para fazer o cálculo da função de correlação de dois pontos do glúon, vamos ter

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \int D[A_\mu] A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) e^{iS[A_\mu] + \int d^4x J_c^\mu(x) A_\mu^c(x)}, \quad (2.53)$$

que pode ser escrito, com base na equação (2.51), como

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = Z^{-1}[0] \left. \frac{\partial^2 Z[J]}{\partial [J^{\mu,a}(x)] \partial [J^{\nu,b}(y)]} \right|_{J=0}, \quad (2.54)$$

onde $Z[0] = \mathcal{N} (\det \Omega)^{-1/2}$. Isso faz com que tenhamos $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \Omega_{\mu\nu}^{ab(-1)}(x,y)$ como definição do propagador do glúon. Entretanto, a matriz da equação (2.52) não é invertível. De fato, tomando $A_\mu = 0$ na equação (2.18), e lembrando a equação (2.9), encontramos $A_\mu^{(g)} = [\partial_\mu g(x)] g^\dagger(x)$. Isso se torna um problema, pois esses vetores $A_\mu^{(g)}$ serão autovetores (em geral não nulos) de Ω , com autovalor nulo para qualquer $g(x)$. Isso ocorre por $A_\mu^{(g)}$ ser dado em termos de uma derivada ∂_μ , e significa que todos os campos $A_\mu^{(g)}$ equivalentes ao campo nulo contribuirão para divergência da matriz Ω^{-1} no expoente da integral que define $Z(J)$. Temos portanto uma grave divergência, que aparece mesmo em teorias abelianas como a QED. O que de fato ocorre é que a integração está sendo feita sobre o espaço

completo de todas as configurações possíveis de campos $A_\mu(x)$, ou seja, sobre campos de gauge que são equivalentes entre si. As configurações de gauge para esse caso podem ser descritas através de “órbitas”. Isso quer dizer que dois pontos de uma classe de equivalência, ou órbita, são sempre conectados por uma transformação de gauge. O fato de todas essas cópias equivalentes de A_μ estarem incluídas no cálculo, ou seja, a tentativa de somar infinitos graus de liberdade “redundantes”, faz com que percamos controle, causando um resultado divergente.

Esse problema pode ser resolvido isolando a parte que interessa da equação, o que irá contar cada configuração de gauge apenas uma única vez. É a mesma coisa que dizer que será escolhida uma função que selecionará apenas um ponto de cada órbita de gauge, e multiplicar essa função pelo volume (infinito!) correspondente a cada órbita. Assim, define-se uma função $G(A) = 0$ como uma condição de fixação de gauge, e incorpora-se essa restrição por meio da inclusão de uma função delta de Dirac na integral sobre as configurações de gauge. Isso pode ser feito na forma de um “truque”, escrevendo-se a integral da função delta, que é 1, sobre o espaço dos A_μ . Como supusemos que a condição $G(A) = 0$ garanta a seleção de apenas um representante em cada órbita $A^{(g)}$, fazemos uma mudança de variáveis de A para g (ou equivalente, α) na função G , e portanto é preciso introduzir um jacobiano. Com essas condições, é possível alcançar a fixação de gauge proposta por Ludvig Faddeev e Victor Popov (51,52) inserindo na ação de YM o termo

$$1 = \int D[g] \delta \left(G \left[A^{(g)} \right] \right) \Delta[A^{(g)}], \quad (2.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta[A^{(g)}] &= \det \left[\frac{\partial G \left[A^{(g)a}(x) \right]}{\partial \alpha^b(y)} \right] \Big|_{G[A^{(g)}]=0} \\ &\equiv \det \left[\mathcal{M}^{ab}(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

O argumento dentro do determinante da equação (2.56) é chamado de operador de Faddeev-Popov (FP) e definido como $\mathcal{M}^{ab}(x, y)$, sendo ele invariante sob transformações de gauge locais. Incluindo a identidade da equação (2.55) no funcional gerador de YM, equação (2.46), temos

$$Z = \int D[A] \int D[g] \delta \left(G \left[A^{(g)} \right] \right) \Delta[A^{(g)}] e^{(-S_{YM}[A])}. \quad (2.57)$$

Para o determinante de FP, pode-se utilizar a regra da cadeia na equação (2.56), encontrando

$$\mathcal{M}^{ab}(x, y) = \int dz \frac{\partial G[A^{(g)a}(x)]}{\partial A_\mu^{(g)c}(z)} \frac{\partial A_\mu^{(g)c}(z)}{\partial \alpha^b(y)} \Big|_{G[A^{(g)}]=0}. \quad (2.58)$$

Considerar α pequeno, i.e. transformações de gauge infinitesimais, é uma possibilidade para que uma expansão em série seja feita para identificara derivada de A_μ em

relação a α . Isso quer dizer que a equação (2.18) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
A_\mu^{(g)}(x) &= e^{i\alpha(x)} A_\mu(x) e^{-i\alpha(x)} + i \left[\partial_\mu e^{i\alpha(x)} \right] e^{-i\alpha(x)} \\
&= A_\mu(x) - i \left[A_\mu^a(x) T^a, \alpha^b(x) T^b \right] - \partial_\mu \alpha^a(x) T^a + O(\alpha^2) \\
&= A_\mu(x) + A_\mu^a(x) \alpha^b(x) f^{abc} T^c - \delta^{bc} \partial_\mu \alpha^b(x) T^c + O(\alpha^2) \\
&= A_\mu(x) - \left[\delta^{bc} \partial_\mu - A_\mu^a(x) f^{abc} \right] \alpha^b(x) T^c + O(\alpha^2) \\
&\equiv A_\mu(x) - D_\mu^{cb} T^c \alpha^b(x) + O(\alpha^2), \tag{2.59}
\end{aligned}$$

onde usamos (2.1), e definimos a derivada covariante aplicada a campos na representação adjunta de gauge, e.g. $\alpha^b(x)$, como $(D_\mu \alpha)^c = \partial_\mu \alpha^c - A_\mu^a f^{abc} \alpha^b$. Note a diferença em relação à derivada covariante aplicada ao campo fermiônico (representação fundamental), dada pela equação (2.12). Portanto, o segundo termo acima pode ser associado à derivada de A_μ em relação a α , e o operador de FP pode ser dado por

$$\mathcal{M}^{ab}(x, y) = \int dz \frac{\partial G[A^{(g)a}(x)]}{\partial A_\nu^{(g)c}(z)} \left[-D_\nu^{cb} \delta(y-z) \right] \Big|_{G[A^{(g)}]=0}, \tag{2.60}$$

sendo essa a maneira mais geral de se obtê-lo sem a escolha da condição de fixação de gauge $G(A)$. Por enquanto, será utilizada a condição de Lorentz generalizada. Isso resulta em

$$G(A_\mu^{(g)a}(x)) = \partial^\mu A_\mu^{(g)a}(x) - B^a(x), \tag{2.61}$$

sendo $B^a(x)$ um campo escalar arbitrário. Esta condição permite escrever o operador de FP como

$$\mathcal{M}^{ab}(x, y) = -\partial^\mu D_\mu^{ab} \delta(y-x) \Big|_{G[A^{(g)}]=0}. \tag{2.62}$$

Como vemos na equação acima, não há mais dependência do operador de FP com $A^{(g)}$, pois escolhemos uma condição de gauge linear em $A^{(g)}$. Voltando à equação (2.57), note que podemos substituir A por $A^{(g)}$ na ação de YM, que é invariante de gauge e também no elemento de integração $D[A]$, considerando a transformação (2.18).

Assim, o funcional gerador é reescrito como

$$Z = \int D[A^{(g)}] \int D[g] \det[-\partial^\mu D_\mu^{ab} \delta(y-x)] \delta[\partial^\mu A_\mu^{(g)a}(x) - B^a(x)] e^{(-S_{YM}[A^{(g)}])}. \tag{2.63}$$

Fazendo uma transformação do tipo $A_\mu^{(g)} \rightarrow A_\mu$, a integral $\int D[g]$ desacopla e a nossa podemos escrever o funcional como

$$Z = \mathcal{N}' \int D[A] \det[-\partial^\mu D_\mu^{ab} \delta(y-x)] \delta[\partial^\mu A_\mu^a(x) - B^a(x)] e^{(-S_{YM}[A])}, \tag{2.64}$$

onde $\mathcal{N}' = \int D[g]$. Utilizando as variáveis de Grassmann*, o determinante de FP é descrito como

$$\det \left[\mathcal{M}^{ab}(x, y) \right] = \int D[c] D[\bar{c}] e^{\left[\int d^4x d^4y \bar{c}^a(x) \mathcal{M}^{ab}(x, y) c^b(y) \right]} \tag{2.65}$$

* Variáveis que possuem álgebra anticomutante.

e assim obtermos

$$Z = \int D[A] D[c] D[\bar{c}] \delta(\partial_\mu A^\mu - B) e^{[-S_{YM} - \int d^4x \bar{c}^a(x) \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b(x)]}. \quad (2.66)$$

Agora, para eliminar a função delta de Dirac da equação acima, vamos fazer o cálculo da média no campo arbitrário B^a multiplicando por um fator gaussiano. Estas condições resultam em

$$\int D[B] \delta(\partial A - B) e^{-\frac{1}{2\xi} \int d^4x B^2} = e^{-\frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu^a)^2}, \quad (2.67)$$

sendo ξ a largura da distribuição gaussiana. Assim, esses resultados permitem reescrever a ação como

$$S = S_{YM} + \int d^4x \left[\bar{c}_a \partial^\mu D_\mu^{ab} c_b - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \right]. \quad (2.68)$$

Esta condição de gauge é chamada de *gauge covariante linear*.

É muito importante observar que a fixação de gauge proposta por Faddeev e Popov resulta em novas partículas, descritas pelos campos \bar{c} e c , chamadas de *ghosts*. Eles possuem esse nome por não serem partículas físicas, já que são partículas escalares que obedecem a estatística de Fermi-Dirac, fazendo com que eles violem causalidade, formalmente.

Para construir o propagador do glúon, vamos utilizar a nova ação da equação (2.68) sem os campos de ghost, o que resulta em

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^{\nu,a}(x) \delta(x-y) \left[\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial_\nu \partial_\mu \right] A^{\mu,a}(y). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Considerando agora a ação acima com uma fonte externa, vamos utilizar o mesmo processo das equações (2.50) e (2.51). Isso vai nos trazer

$$Z(J) = (\det \Omega)^{-1/2} \int D[A] \int D[c] \int D[\bar{c}] \int D[B] e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_a^\mu(x) (D^{-1})_{\mu\nu}^{ab}(x,y) J_b^\nu(y) - S[c,\bar{c}]}, \quad (2.70)$$

onde $S[c,\bar{c}]$ é a ação do ghost e $(D^{-1})_{\mu\nu}^{ab}(x,y)$ o propagador. Aplicando a transformada de Fourier na equação acima, temos

$$Z(J) = (\det \Omega)^{-1/2} \int D[A] \int D[c] \int D[\bar{c}] \int D[B] e^{\frac{1}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^4} J_a^\mu(-k) (D^{-1})_{\mu\nu}^{ab}(k) J_b^\nu(k) - S[c,\bar{c}]}, \quad (2.71)$$

onde

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \left[-\delta_{\mu\nu} k^2 + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) k_\mu k_\nu \right]. \quad (2.72)$$

Com isso, vamos ter a relação

$$\delta^{ab} \left[-\delta_{\mu\nu} k^2 + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) k_\mu k_\nu \right] (D^{-1})_{ab}^{\nu\gamma}(k) = i\delta_\mu^\gamma. \quad (2.73)$$

Logo, a inversão da matriz acima produzirá o propagador do glúon livre no espaço dos momentos, dado por

$$(D^{-1})_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[\delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta^{ab}, \quad (2.74)$$

onde o termo $i\epsilon$ é o polo na integração em k_0 . Com isso, podemos construir o propagador do glúon no espaço de posição através de uma transformada de Fourier inversa, dada por

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}, \quad (2.75)$$

sendo $\xi = 0$ para o gauge de Landau, que será o gauge utilizado nesta tese.

3 CAMPOS DE GAUGE NA REDE

Para introduzir o formalismo de rede para a teoria de YM (e para teorias quânticas de campos de um modo geral), são necessários três pontos principais (33, 53):

1. Utilização de integrais de Feynman para quantizar a teoria.
2. “Rodar” (i.e. continuar analiticamente) a teoria para o espaço euclidiano.
3. Fazer a discretização do espaço-tempo em uma rede, o que funciona como uma regularização UV.

Os dois primeiros pontos acima nos permitem evidenciar a equivalência da teoria quântica de campos com a mecânica estatística clássica, já que assim os valores esperados de observáveis serão dados por médias estatísticas de acordo com uma distribuição de probabilidades real, como pode ser visto a partir da equação (2.46) e como exemplificado mais abaixo. Além disso, o terceiro passo claramente permite que os valores de observáveis obtidos sejam posteriormente renormalizados, ao ser removido o corte UV. Fazendo a junção desses três pontos, torna-se possível simular a teoria em um computador, através de métodos de Monte Carlo*. Porém, antes de introduzirmos a discretização para as teorias de YM, vamos aplicar esse processo a uma teoria de campo escalar real. Essa aplicação inicial nos auxiliará a obter uma melhor compreensão dos passos envolvidos na discretização de uma teoria quântica de campos, que poderão então ser estendidos ao caso de teorias de gauge.

3.1 Campo Escalar Real

Seja a densidade de lagrangiana do campo escalar dada por (37)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} M^2 \varphi^2(x), \quad (3.1)$$

onde $\varphi(x)$ representa o campo escalar na posição $x = (\vec{x}, t)$, M é a massa associada ao campo, e o índice $\mu = 1, \dots, 4$ representa as direções no espaço-tempo usual, i.e. de Minkowski. É simples observar que a ação que corresponde a essa lagrangiana em quatro dimensões é

$$S = - \int dt d^3x \frac{1}{2} \varphi(x) [\square + M^2] \varphi(x), \quad (3.2)$$

onde $\square \equiv \partial_t^2 - \nabla^2$ é o operador d’alembertiano, sendo ∇^2 o laplaciano[†].

* Este tópico será desenvolvido no Capítulo 4.

† Estamos utilizando aqui a métrica (+, -, -, -).

O primeiro passo será fazer a transposição do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano. Isso é feito através de uma continuação analítica na variável temporal t para tempos imaginários τ (chamada de rotação de Wick) dada por

$$t = x_0 \rightarrow -ix_4. \quad (3.3)$$

Mais detalhadamente, vamos substituir a variável $t = x_0$ por $\tau = x_4$, sendo $\tau = it$, ou seja, a quarta direção agora corresponde ao tempo, tomado como puramente imaginário. Note que não se trata de uma simples mudança de variáveis, pois x_4 tomará valores reais, como para as variáveis espaciais. Isso pode ser interpretado como uma “rotação” do eixo positivo real para o eixo negativo imaginário. Dessa forma, teremos $\partial_t^2 \rightarrow -\partial_\tau^2$ no d’alembertiano e aparecerá um fator global $(-i)$ na integral na ação.

Com isso, o operador d’alembertiano \square_E passa a ser definido como

$$\partial_t^2 - \nabla^2 \rightarrow (-i\partial_{x_4})^2 - \nabla^2 = -\partial_{x_4}^2 - \nabla^2 \equiv -\square_E. \quad (3.4)$$

Logo, a ação do campo escalar real se torna

$$S = i \int \frac{1}{2} d^4x \varphi(x) [-\square_E + M^2] \varphi(x) \equiv iS_E, \quad (3.5)$$

onde S_E é a ação descrita no espaço euclidiano. Vemos, portanto, a partir da equação (2.46), que o peso de cada configuração de campos na integral de Feynman corresponderá agora a uma distribuição de probabilidade real, equivalente à de um modelo de mecânica estatística clássica.

Em segundo lugar, a versão discretizada na rede do espaço euclidiano sugere que façamos a substituição

$$x_\mu \rightarrow n_\mu a, \quad (3.6)$$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(na) \quad (3.7)$$

$$\square_E \varphi(x) \rightarrow \frac{1}{a^2} \hat{\square} \varphi(na), \quad (3.8)$$

sendo n_μ os pontos no espaço euclidiano de μ direções, separados pela constante a , chamada de espaçamento de rede. O operador d’alembertiano no formalismo de rede é escrito como $\hat{\square}$, e é descrito em função de $\varphi(x)$ por

$$\hat{\square} \varphi(na) = \sum_{\mu=1}^4 [\varphi(na + ae_\mu) + \varphi(na - ae_\mu) - 2\varphi(na)], \quad (3.9)$$

sendo e_μ o versor na direção μ . Note que as grandezas com “chapéu” serão escritas assim para indicar que estão definidas na rede (euclidiana), e não contínuo.

Pelo sistema de unidades naturais (utilizado de maneira padrão em teoria quântica de campos), a ação não possui dimensão física. Para que haja consistência dimensional na

ação, o campo φ precisa ter dimensão física de $L^{1-d/2}$, sendo L a dimensão de comprimento e $d = 4$ a dimensão do espaço-tempo. A integral da ação no formalismo de rede é aproximada por uma soma discreta como

$$\int d^d x \rightarrow a^d \sum_n. \quad (3.10)$$

Além disso, outros termos da ação euclidiana terão sua versão na rede como

$$M \rightarrow \hat{M}/a, \quad (3.11)$$

$$\varphi(x) \rightarrow a^{1-d/2} \hat{\varphi}(na), \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L}^{(E)}(x) \equiv a^{-d} \hat{\mathcal{L}}(na), \quad (3.13)$$

para que tenhamos S_E com dimensionalidade nula. Claramente, podemos pensar no espaçamento de rede a como uma grandeza com dimensão de comprimento, e de fato as transformações acima garantem a consistência dimensional. Por outro lado, note que nas unidades de rede (que serão usadas durante a simulação computacional) ele é um fator “invisível”, pois seu valor é 1.

Um ponto relevante para aplicação da formulação de rede está na necessidade de se retornar ao contínuo a partir de um limite em que se toma $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$, onde N representa o número de sítios da rede em uma determinada direção[‡]. Esse limite é importante pois o formalismo de rede é útil como um método não-perturbativo de solução de teorias de gauge SU(N) a baixas energias, mas não é a representação exata do mundo contínuo. De fato, para que sejam obtidos resultados físicos, é necessário remover o corte UV, ou seja, deve-se considerar o limite de espaçamento de rede $a \rightarrow 0$, ao mesmo tempo em que grandezas observáveis, que foram calculadas para valores finitos de a , são substituídas por seus valores renormalizados. Esse processo de renormalização, que é uma parte crucial do estudo de toda teoria quântica de campos, é realizado de forma muito elegante para teorias de campos na rede, escrevendo-se as grandezas físicas que dependem diretamente do valor do corte a em unidades físicas, i.e. GeV^{-1} . Isso pode ser obtido impondo que o valor físico de algum observável seja igual a sua expressão calculada na rede, em termos de a , para simulações com espaçamento a suficientemente pequeno, o que chamamos de “região de escala”. (54)

Além da necessidade de renormalização, satisfeita considerando-se espaçamento de rede a suficientemente pequeno, na região de escala, o que é um problema UV, temos também um problema IR, descrito a seguir. A aplicação da formulação de rede envolve simulações computacionais, mas as redes só podem ser tomadas com volumes finitos. Logo, N nas simulações precisa ser suficientemente grande para que os efeitos de volume finito deixem de influenciar de maneira significativa o sistema e possamos recuperar o limite no contínuo. Para o caso das teorias de gauge na rede, que serão descritas na próxima seção (e

[‡] Em uma rede simétrica quadridimensional, o volume é dado por $V = N^4$.

em particular para a QCD), é possível escrever valores de N e a de maneira que o produto Na esteja na escala de alguns fermi (10^{-15} metros), para que os fenômenos hadrônicos sejam bem representados.

3.2 Teoria de Gauge na Rede

Tendo discutido acima a formulação de rede para o caso mais simples de teoria quântica de campos, podemos agora descrever os campos de gauge e a teoria de YM na rede. A maneira escolhida nesta tese para a introdução deste formalismo em teorias gauge foi com base no desenvolvimento de. (38, 55)

3.2.1 Invariância de Gauge para a Ação Fermiônica

O ponto de partida será a ação de Dirac, descrita na equação (2.13). Aplicando o formalismo de rede a essa equação da mesma maneira que foi aplicado para o campo escalar real, a ação de Dirac para os quarks é dada por

$$S_D = a^4 \sum_n \bar{q}(na) \left[\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{q(na + ae_\mu) - q(na - ae_\mu)}{2a} + m q(na) \right], \quad (3.14)$$

onde q , \bar{q} , m e γ foram descritos no capítulo anterior, e na são os pontos da rede euclidiana, como descrito acima.

Considerando as transformações de gauge dos espinores de Dirac (que chamaremos de quarks a partir de agora, por conta do contexto), dadas nas equações (2.14) e (2.15), teremos na rede as transformações

$$q^{(g)}(na) = g(na) q(na), \quad (3.15)$$

$$\bar{q}^{(g)}(na) = \bar{q}(na) g^\dagger(na), \quad (3.16)$$

onde $g(na)$ é um elemento de transformação de gauge do grupo $SU(N)$. Como a ação de Dirac para os quarks deve ser invariante sob transformações de gauge, a equação (3.14) deve ter ambos os termos invariantes. Como tínhamos no caso do contínuo, o termo de massa já é invariante, como podemos simplesmente verificar, pois

$$\bar{q}^{(g)}(na) m q^{(g)}(na) = \bar{q}(na) g^\dagger(na) g(na) m q(na) = \bar{q}(na) m q(na). \quad (3.17)$$

Agora, quando vamos para o termo correspondente à derivada, encontramos um problema, pois

$$\bar{q}^{(g)}(na) q^{(g)}(na \pm ae_\mu) = \bar{q}(na) g^\dagger(na) g(na \pm ae_\mu) q(na \pm ae_\mu). \quad (3.18)$$

Como pode ser visto, o produto $g^\dagger(na) g(na \pm ae_\mu)$ difere da identidade, e portanto o primeiro termo da ação não é invariante por transformação de gauge. No contínuo, a

solução foi reescrever a derivada como uma derivada covariante, impondo a inclusão do campo $A_\mu(x)$. No caso da rede, vamos introduzir no primeiro termo da derivada um campo $U_\mu(na)$ de forma a obter

$$\bar{q}^{(g)}(na) U_\mu^{(g)}(na) q^{(g)}(na + ae_\mu) = \bar{q}(na) g^\dagger(na) U_\mu^{(g)}(na) g(na + ae_\mu) q(na + ae_\mu). \quad (3.19)$$

Note agora que o termo acima se torna invariante de gauge se definirmos a transformação do campo $U_\mu(na)$ como

$$U_\mu^{(g)}(na) = g(na) U_\mu(na) g^\dagger(na + ae_\mu). \quad (3.20)$$

Da mesma forma, temos $U_\mu^{(g)}(na - ae_\mu) = g(na - ae_\mu) U_\mu(na - ae_\mu) g^\dagger(na)$. Essas duas relações podem ser usadas para escrever uma expressão invariante de gauge para a ação S_D acima. Considerando então as variáveis de ligação, a ação fermiônica descrita na equação (3.14) pode ser reescrita como

$$S_D = a^4 \sum_n \bar{q}(na) \left[\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{U_\mu(na) q(na + ae_\mu) - U^\dagger(na - ae_\mu) q(na - ae_\mu)}{2a} + m q(na) \right]. \quad (3.21)$$

Os campos $U_\mu(na)$ que compõem as configurações de gauge são chamados de variáveis de ligação, pois formam o elo que conecta um certo sítio na a outro $na + ae_\mu$ ao longo da direção positiva μ . Por outro lado, o campo $U_{-\mu}(na)$ conecta o sítio na ao $na - ae_\mu$ no sentido negativo da direção μ . Logo, ele pode ser definido por exemplo como $U_{-\mu}(na) \equiv U_\mu^\dagger(na - ae_\mu)$, pois, tomando os U_μ como elementos do grupo $SU(N)$, a ligação no sentido inverso de μ corresponderá ao inverso da ligação na direção μ , já que $U^\dagger = U^{-1}$.

Com a variável de ligação bem definida a partir da ação fermiônica, vamos agora fazer a conexão com os campos de gauge $A_\mu(na)$ na rede. O conceito de transporte paralelo será útil para fazer essa conexão entre ambos os campos. O transporte paralelo é costumeiramente visto em relatividade geral por estar ligado a espaços curvos. Ele é uma estrutura utilizada para relacionar diferentes pontos em um determinado espaço. Considere por exemplo o movimento de um corpo em uma esfera. Para que dois pontos distintos na superfície dessa esfera sejam comparados, o caminho que está sendo percorrido precisa ser levado em consideração. A comparação de ambos os vetores nos pontos que estão sobre essa superfície esférica é feita através do transporte de um dos vetores até o outro. Como o caminho importa nesse tipo de espaço curvo, o transporte de um dos vetores produzirá uma diferença em relação ao ponto original.

Esse conceito aplicado às teorias de gauge é feito (primeiramente no contínuo) a partir de um operador chamado de transportador paralelo, dado por

$$G(x, y) = P e^{i \int_{C_{xy}} A \cdot ds}, \quad (3.22)$$

sendo P o ordenamento do caminho, e $G(x, y)$ definido como a exponencial da integral de linha do campo de gauge sobre um caminho curvo C_{xy} que conecta o ponto x ao ponto y . Utilizando a transformação do campo de gauge dada pela equação (2.18) e aplicando-a à equação (3.22), temos [veja referência (38)] o transportador paralelo possui transformação de gauge dada por

$$G^{(g)}(x, y) = g(x) G(x, y) g^\dagger(y). \quad (3.23)$$

É perceptível que o transportador paralelo da equação (3.23) possui transformação de gauge semelhante à da variável de ligação dada pela equação (3.20), principalmente quando levamos em consideração que na e $na + ae_\mu$ sejam pontos dentro do caminho. Com base nisso, é possível então reescrever o transportador de gauge no formalismo de rede para o percurso mínimo como sendo

$$U_\mu(na) = e^{iaA_\mu(na)}, \quad (3.24)$$

desde que consideremos $U_\mu(na) = G(na, na + ae_\mu) + O(a^2)$.

Para entender o limite do contínuo, tomemos $a \rightarrow 0$, o que nos permite escrever o campo $U_\mu(na)$ como

$$U_\mu(na) = 1 + iaA_\mu(na) + O(a^2), \quad (3.25)$$

$$U_{-\mu}(na) = U_\mu^\dagger(na - ae_\mu) = 1 - iaA_\mu(na - ae_\mu) + O(a^2), \quad (3.26)$$

onde uma expansão em série exponencial foi aplicada a equação (3.24). As duas equações acima podem ser aplicadas à equação (3.21) de modo a recuperarmos a ação no contínuo. Esses resultados nos mostram que a ação fermiônica contará com dois termos, sendo que o primeiro é a reprodução da ação fermiônica sem os campos de gauge (também chamada de ação fermiônica livre) e o segundo é um termo que carrega interação entre os campos $q(na)$ e $A_\mu(na)$. A ação no limite de a pequeno é dada por

$$\begin{aligned} S_D &= a^4 \sum_n \bar{q}(na) \left[\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{q(na + ae_\mu) - q(na - ae_\mu)}{2a} + mq(na) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} ia^4 \sum_n \sum_{\mu=1}^4 \bar{q}(na) \gamma_\mu \left[A_\mu(na) q(na + ae_\mu) + A_\mu(na - ae_\mu) q(na - ae_\mu) \right] + O(a^5) \\ &= a^4 \sum_n \bar{q}(na) \left[\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{q(na + ae_\mu) - q(na - ae_\mu)}{2a} + mq(na) \right] \\ &\quad + ia^4 \sum_n \sum_{\mu=1}^4 \bar{q}(na) \gamma_\mu A_\mu(na) q(na) + O(a^5), \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde foi utilizado no segundo termo que

$$q(na + ae_\mu) = q(na) + a \partial_\mu q(na) + O(a^2), \quad (3.28)$$

$$q(na - ae_\mu) = q(na) - a \partial_\mu q(na) + O(a^2), \quad (3.29)$$

$$A_\mu(na - ae_\mu) = A_\mu(na) - a \partial_\mu A_\mu(na) + O(a^2). \quad (3.30)$$

Fazendo agora a aproximação dos elementos de rede para o contínuo, temos

$$na \rightarrow x, \quad (3.31)$$

$$a^4 \sum_n \rightarrow \int d^4x, \quad (3.32)$$

$$\frac{q(na + ae_\mu) - q(na - ae_\mu)}{2a} \rightarrow \partial_\mu q(x). \quad (3.33)$$

A ação de Dirac se torna então

$$\begin{aligned} S_D &= \int d^4x \bar{q}(x) \left[\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \partial_\mu q(x) + m q(x) \right] + i \int d^4x \bar{q}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) q(x) \\ &= \int d^4x \bar{q}(x) \left[\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu D_\mu q(x) + m q(x) \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

que é a ação de Dirac com termo de interação com o campo de gauge A_μ . Logo, vemos que a equação (2.13) foi recuperada no contínuo.

3.2.2 Ação de Gauge na Rede

Agora que definimos as variáveis de ligação e o campo de gauge na rede, podemos definir a ação de gauge na rede. Ela é chamada de ação de gauge de Wilson. A partir daqui, vamos escrever apenas n para o termo na dentro dos campos, para facilitar o desenvolvimento. Vamos também desconsiderar os campos de férmions, pois vamos tratar apenas do setor de gauge da teoria no restante da tese. A forma proposta por Wilson de se introduzir na rede o tensor $F_{\mu\nu}$ presente na ação de YM é através de uma estrutura matemática chamada plaqueta. Elas são caminhos fechados formadas por quatro variáveis de ligação, definidas como

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n) U_\nu(n + ae_\mu) U_\mu^\dagger(n + ae_\nu) U_\nu^\dagger(n). \quad (3.35)$$

A figura (1) mostra o ordenamento das variáveis de ligação na formação da plaqueta.

Com esse elemento ordenado, é possível construir a ação de Wilson. Ela é definida como uma soma sobre todas as plaquetas, dada por

$$S_G = \frac{2}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}], \quad (3.36)$$

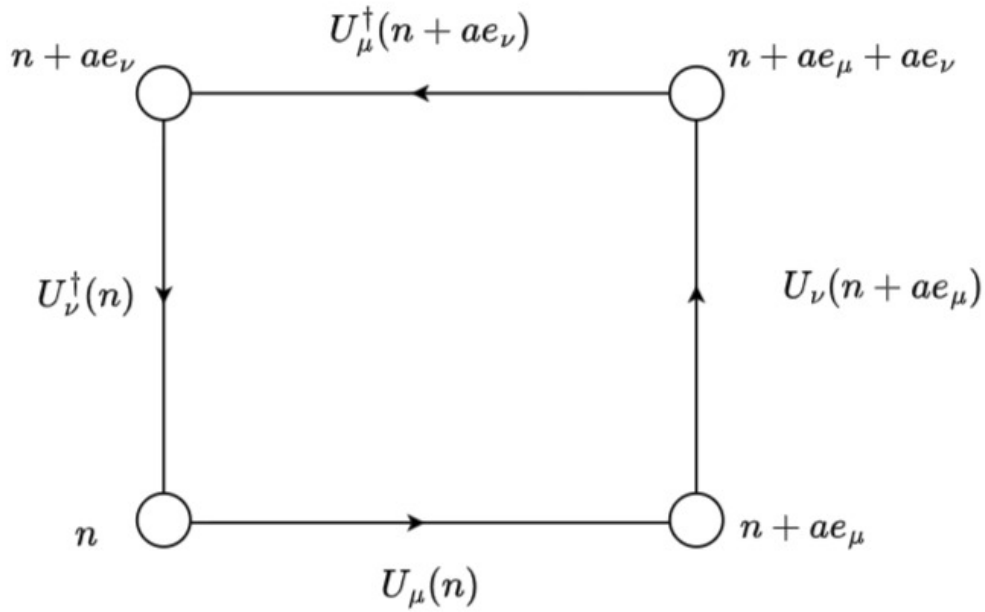


Figura 1 – Ilustração da plaqueta. O percurso se inicia no ponto n e é anti horário, até que retorne a esse mesmo ponto.

Fonte: Elaborada pelo autor.

sendo g o parâmetro de acoplamento.

Como a ação precisa ser invariante de gauge, o traço da plaqueta também precisa ser. Lembrando a expressão (3.2) para a transformação de gauge das variáveis de ligação, e a propriedade cíclica do traço, é possível afirmar que $\text{tr} [U_{\mu\nu}^{(g)}(n)] = \text{tr} [U_{\nu\mu}(n)]$.

Como a plaqueta é um produto de variáveis de ligação, escrevê-la em função dos campos de gauge é fazer um produto de exponenciais, considerando a equação (3.24). Por termos uma teoria não abeliana, é necessário utilizar a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para a exponenciação de matrizes, dada por

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[A,B]] + \dots}, \quad (3.37)$$

sendo A e B matrizes que não comutam. Logo, a plaqueta é escrita como

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(n) &= U_\mu(n)U_\nu(n+ae_\mu)U_\mu^\dagger(n+ae_\nu)U_\nu^\dagger(n) \\
&= e^{iaA_\mu(n)}e^{iaA_\nu(n+ae_\mu)}e^{-iaA_\mu(n+ae_\nu)}e^{-iaA_\nu(n)} \\
&= \exp\left(iaA_\mu(n) + iaA_\nu(n+ae_\mu) - \frac{a^2}{2}[A_\mu(n), A_\nu(n+ae_\mu)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{ia^3}{12}\{[A_\mu(n), [A_\mu(n), A_\nu(n+ae_\mu)]] \right. \\
&\quad \left. - [A_\nu(n+ae_\mu), [A_\mu(n), A_\nu(n+ae_\mu)]]\} + O(a^4)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-iaA_\mu(n+ae_\nu) - iaA_\nu(n) - \frac{a^2}{2}[A_\mu(n+ae_\nu), A_\nu(n)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{ia^3}{12}\{[A_\mu(n+ae_\mu), [A_\mu(n+ae_\nu), A_\nu(n)]] \right. \\
&\quad \left. - [A_\nu(n), [A_\mu(n+ae_\nu), A_\nu(n)]]\} + O(a^4)\right) \\
&= \exp\left\{iaA_\mu(n) + iaA_\nu(n+ae_\mu) - \frac{a^2}{2}[A_\mu(n), A_\nu(n+ae_\mu)] \right. \\
&\quad \left. - iaA_\mu(n+ae_\nu) - iaA_\nu(n) - \frac{a^2}{2}[A_\mu(n+ae_\nu), A_\nu(n)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{2}[A_\mu(n) + A_\nu(n+ae_\mu), -A_\mu(n+ae_\nu) - A_\nu(n)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{ia^3}{12}[A_\mu(n), [A_\mu(n), A_\nu(n+ae_\mu)]] \right. \\
&\quad \left. + \frac{ia^3}{12}[A_\nu(n+ae_\mu), [A_\mu(n), A_\nu(n+ae_\mu)]] \right. \\
&\quad \left. + \frac{ia^3}{12}[A_\mu(n+ae_\mu), [A_\mu(n+ae_\nu), A_\nu(n)]] \right. \\
&\quad \left. - \frac{ia^3}{12}[A_\nu(n), [A_\mu(n+ae_\nu), A_\nu(n)]] + O(a^4)\right\}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Utilizando a expansão em série para o campo de gauge, obtemos

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(n) &= \exp \left\{ iaA_\mu(n) + iaA_\nu(n) + ia^2\partial_\mu A_\nu(n) - \frac{a^2}{2} [A_\mu(n), A_\nu(n)] \right. \\
&\quad - iaA_\mu(n) - iaA_\nu(n) - ia^2\partial_\nu A_\mu(n) - \frac{a^2}{2} [A_\mu(n), A_\nu(n)] \\
&\quad + \frac{a^2}{2} [A_\mu(n), A_\nu(n)] + \frac{a^2}{2} [A_\nu(n), A_\mu(n)] \\
&\quad - \frac{ia^3}{12} [A_\mu(n), [A_\mu(n), A_\nu(n)]] + \frac{ia^3}{12} [A_\nu(n), [A_\mu(n), A_\nu(n)]] \\
&\quad \left. + \frac{ia^3}{12} [A_\mu(n), [A_\mu(n), A_\nu(n)]] - \frac{ia^3}{12} [A_\nu(n), [A_\mu(n), A_\nu(n)]] + O(a^4) \right\} \\
&= \exp \left\{ ia^2\partial_\mu A_\nu(n) - ia^2\partial_\nu A_\mu(n) - a^2[A_\mu(n), A_\nu(n)] + O(a^4) \right\} \\
&= \exp \left[ia^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^4) \right], \tag{3.39}
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (2.20) na última passagem. Além disso, os termos a^3 da equação acima se cancelam. Agora, vamos aplicar o resultado da equação (3.39) à equação (3.36), o que resulta em

$$\begin{aligned}
S_G &= \frac{2}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \text{Re Tr} \left\{ \mathbb{1} - e^{[ia^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^4)]} \right\} \\
&= \frac{2}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} \left\{ e^{[ia^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^4)]} + e^{[-ia^2 F_{\mu\nu}(n) + O(a^4)]} \right\} \right) \\
&= \frac{2}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \left\{ \mathbb{1} - \frac{1}{2} [2\mathbb{1} + a^4 F_{\mu\nu}^2(n) + O(a^5)] \right\}. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Ressaltamos que $F_{\mu\nu}$ é real. Os termos de ordem a^2 desaparecem quando tomamos o traço real na equação acima. Logo, a relação que temos entre a ação e o tensor $F_{\mu\nu}$ na rede é dada por

$$S_G = \frac{a^4}{2g^2} \sum_n \sum_{\mu, \nu} \text{tr} [F_{\mu\nu}^2(n)] + O(a^5), \tag{3.41}$$

onde aplicamos $\sum_{\mu < \nu} = (1/2) \sum_{\mu, \nu}$. Ao tomarmos o limite do contínuo $a \rightarrow 0$, a ação de gauge se transforma em

$$S_G = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{tr} [F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)], \tag{3.42}$$

e vemos que a ação de gauge no contínuo, a ação de YM da equação (2.22), é recuperada.

Além disso, podemos definir um observável muito importante em teorias de gauge na rede, o loop de Wilson. Restringindo-nos à ação de YM, observáveis são funções invariantes de gauge das variáveis de ligação. Alguns exemplos de observáveis desse tipo são traços de produtos de variáveis de ligação em loops fechados. O loop de Wilson é o valor esperado

de um desses loops, definido como (39)

$$W[U] = \text{tr} \left[\prod_{\mu, n} U_{\mu}(n) \right]. \quad (3.43)$$

Este observável é importante pois, nos trabalhos de Wilson, o confinamento foi associado a uma lei de área envolvendo laços retangulares. De fato, o loop de Wilson pode ser escrito como

$$\langle W[U] \rangle \approx e^{-V(r)T}, \quad (3.44)$$

sendo $V(r)$ o potencial de um par quark-antiquark estático separado por uma distância r e T a extensão temporal do laço. (38) Como já dito antes, o desenvolvimento teórico feito até o momento é válido para qualquer grupo $SU(N)$. Os casos que trataremos nessa tese são o $SU(3)$, para o qual os campos de gauge são os oito glúons, e o $SU(2)$, que corresponde a uma teoria fictícia, com apenas três “glúons”. Lembremos que o número de glúons (campos de gauge) é dado por $N_c^2 - 1$, sendo N_c o número de cores na teoria.

4 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Para investigarmos de maneira prática a teoria de YM no formalismo de rede, é preciso fazer um desenvolvimento numérico, pois cálculos analíticos para os principais problemas não perturbativos de interesse em teorias quânticas de campos e física estatística são completamente inviáveis. Um exemplo que mostra essa inviabilidade utilizar um modelo estatístico quadridimensional de spins no sistema podem assumir apenas valores $+1$ e -1 . Definindo uma rede de tamanho $N_r = 16$ (equivale a 16 sítios em cada direção da rede), contando todas as combinações possíveis de spin para esse modelo, teremos $2^{N_r^4} = 2^{65536} \approx 10^{19660}$ configurações neste sistema. Mesmo que dispuséssemos de uma máquina com capacidade de cálculo de Petaflops (10^{15} operações por segundo), um cálculo envolvendo somas com esse número de possibilidades levaria da ordem de 10^{19645} segundos, ou seja aproximadamente 10^{19626} vezes a idade do universo! Isso mostra como é necessário utilizar uma abordagem probabilística para a resolução de problemas como esse.

O método utilizado nesta tese é o de Monte Carlo, que consiste na utilização de uma amostragem para cálculo de valor esperado para determinada grandeza física. A ideia é que não seja necessário considerar todas as configurações possíveis, principalmente por levar em conta mais variáveis no sistema que o exemplo do parágrafo anterior. Logo, o valor esperado de um observável O é descrito como (38)

$$\langle O \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N O[U_n], \quad (4.1)$$

supondo que as configurações de gauge sejam distribuídas de acordo com a medida de Gibbs, dada por

$$dP(U) = D(U) \frac{e^{-S[U]}}{\int D(U) e^{-S[U]}}, \quad (4.2)$$

onde a configuração de gauge é dada na rede pelas variáveis de elo U , e S é a ação de YM na rede, discutida no capítulo anterior.

Sendo o método de Monte Carlo uma maneira de se aproximar da equação (4.1), temos que

$$\langle O \rangle \approx \frac{1}{N_{MC}} \sum_{n=1}^N O[U_n], \quad (4.3)$$

onde N_{MC} é o número de configurações geradas na simulação, sendo o erro estatístico proporcional a $1/\sqrt{N_{MC}}$. Claramente, o método de Monte Carlo deve ser usado apenas em situações em que os problemas a serem abordados são muito complicados, de modo que outra alternativa numérica traga um erro maior que o erro estatístico do próprio Monte Carlo. Um exemplo disso é a regra de Simpson, uma abordagem por aproximação polinomial de Lagrange, que carrega consigo um erro estatístico proporcional a $N^{-4/d}$ que

deve ser comparado ao erro $N^{-1/2}$ do método de Monte Carlo. (56) Com isso, o Monte Carlo é aconselhável para problemas que envolvam integrações em dimensões $d \geq 10$. Isso quer dizer que ele é o mais importante na utilização de teoria quântica de campos com integrais funcionais, já que o número de dimensões na integração é igual ao número de graus de liberdade da teoria, como vimos anteriormente.

4.1 Cadeia de Markov

Para encontrar as configurações $U_\mu(n)$ que seguem a distribuição de probabilidade dada pela equação (4.2), será utilizada a cadeia de Markov. Esse processo consiste em iniciar o sistema com alguma configuração arbitrária e, com isso, construir uma sequência estocástica de configurações que eventualmente seguem uma distribuição de equilíbrio $P_{eq}(U)$ dada pela equação (4.2). Em particular, consideremos a sequência de configurações

$$U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \dots U_n, \quad (4.4)$$

onde o índice n indica a ordem em que as configurações vão surgindo na cadeia de Markov. Cada atualização de configuração será chamada de varredura. A cadeia de Markov é caracterizada por uma probabilidade de transição condicional dada por

$$P(U_n = U' | U_{n-1} = U) = T(U' | U), \quad (4.5)$$

ou seja, esta probabilidade depende somente das configurações U e U' e não dos índices n . Neste caso, U é a configuração atual e U' a configuração que será obtida a partir de U . A probabilidade de transição de U para U' obedece

$$0 \leq T(U' | U) \leq 1, \quad (4.6)$$

$$\sum_{U'} T(U' | U) = 1. \quad (4.7)$$

Uma importante propriedade para que o processo de Markov reproduza a distribuição desejada $P_{eq}(U)$ no equilíbrio, i.e. para grandes valores do “tempo” n , é

$$P_{eq}(U') = \sum_U T(U' | U) P_{eq}(U), \quad (4.8)$$

que mostra que a distribuição $P_{eq}(U)$ (distribuição de equilíbrio) é um ponto fixo do processo de Markov. Uma vez que se obtém a distribuição de equilíbrio, o sistema continuará sendo atualizado por $T(U' | U)$, mas a propriedade acima garante que a configuração será distribuída de acordo com P_{eq} . Claramente a probabilidade de transição $T(U' | U)$, que define a cadeia, deverá ser escolhida de modo a satisfazer a equação (4.8) e então a convergência para a distribuição será garantida. (56) Uma condição suficiente para que $T(U' | U)$ satisfaça a equação (4.8), que é geralmente fácil de implementar na prática, é a condição de *balanço detalhado*, dada por

$$P_{eq}(U) T(U' | U) = P_{eq}(U') T(U | U'), \quad (4.9)$$

como pode ser verificado prontamente, somando o lado direito de U . De forma geral, os métodos de Monte Carlo utilizados em simulações de modelos estatísticos não triviais e de teorias de gauge na rede são elaborados para satisfazer a propriedade de balanço detalhado acima (é o caso do método de Metropolis, por exemplo) ou então para satisfazer exatamente a distribuição $P_{eq}(U)$ condicionada, mantendo fixa a configuração U exceto por um sítio, ou elo, o que também garante que a distribuição de equilíbrio seja alcançada exatamente. Esse é o caso do algoritmo de banho térmico, empregado em nosso estudo.

Além disso, para que tenhamos resultados corretos, a cadeia de Markov precisa acessar todas as configurações do problema, para um número finito de passos de Monte Carlo. Logo, se a matriz de transição $T(U'|U)$ é estritamente positiva para todos os pares U', U , então o processo é aperiódico e toda configuração pode ser eventualmente alcançada. Chamamos essa propriedade de *ergodicidade forte*.

4.2 Estrutura de $U_\mu(n)$

Para simulações numéricas em uma rede finita, é importante que as condições de contorno estejam bem definidas. Usualmente, utilizamos as condições de contorno periódicas, dadas para uma rede simétrica quadridimensional com N pontos por direção por

$$U_\mu(0, n_2, n_3, n_4) \equiv U_\mu(N, n_2, n_3, n_4), \quad (4.10)$$

$$U_\mu(n_1, 0, n_3, n_4) \equiv U_\mu(n_1, N, n_3, n_4), \quad (4.11)$$

$$U_\mu(n_1, n_2, 0, n_4) \equiv U_\mu(n_1, n_2, N, n_4), \quad (4.12)$$

$$U_\mu(n_1, n_2, n_3, 0) \equiv U_\mu(n_1, n_2, n_3, N), \quad (4.13)$$

onde os índices n_1, n_2, n_3 e n_4 tomam valores $1, \dots, N$ e o índice 0 foi usado em cada direção para sinalizar que a ligação do sítio 1 será feita com o sítio N . Da mesma maneira, definem-se vizinhos fictícios com índice $N + 1$, igualando seu valor à variável de índice 1. Na prática, implementar o procedimento acima utiliza muita memória, e as condições periódicas são implementadas diretamente a cada vez que o cálculo envolve conexão com o sítio vizinho.

Para representar as configurações de gauge, vamos primeiramente considerar o caso $SU(2)$. Essas configurações são escritas como

$$U_{SU(2)} = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \mathbb{1} + i \vec{x} \cdot \vec{\sigma}, \quad (4.14)$$

sendo x_0 e as componentes de $\vec{x} \in \mathbb{R}$. O vetor σ denota o vetor das matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

que são os geradores desse grupo.

Para $SU(3)$, iremos representar as configurações de gauge através de dois vetores tridimensionais \vec{u} e \vec{v} , que correspondem a seis números complexos. A restrição para esses vetores é que eles precisam ser unitários e ortogonais entre si, de forma que

$$|\vec{u}|^2 = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 = 1, \quad (4.16)$$

$$|\vec{v}|^2 = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 = 1, \quad (4.17)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + u_3^* v_3 = 0. \quad (4.18)$$

Para a construção da configuração de gauge U , os vetores \vec{u} e \vec{v} ocupam as duas primeiras linhas da matriz. A terceira linha é construída a partir das duas primeiras, fornecendo

$$U_{SU(3)} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{u}^* \times \vec{v}^* \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Como pode ser facilmente verificado, essa parametrização é geral [pois temos doze números reais sujeitos a quatro condições nas equações acima, correspondendo aos oito parâmetros independentes associados ao grupo $SU(3)$] e garante a propriedade de unitariedade, i.e. $UU^\dagger = 1$. Pode-se também verificar que a matriz assim definida terá automaticamente determinante igual a 1.

Por fim, para completar o processo de geração de configurações de gauge no $SU(3)$ devemos garantir que as variáveis de ligação geradas como proposto acima serão de fato matrizes que pertencem a esse grupo durante toda a simulação. De fato, erros de arredondamento podem fazer com que a propriedade de normalização e ortogonalidade dos vetores \vec{u} e \vec{v} seja perdida, e para restaurá-la não é suficiente apenas renormalizar cada vetor independentemente. Essa garantia é feita através do processo de Gram-Schmidt, em que a primeira linha é normalizada e a segunda linha é gerada a partir de um cálculo da primeira linha normalizada mantendo a ortogonalidade entre os vetores. Com isso, os novos vetores $\vec{\mathbf{u}}_{\text{nov}} e \vec{\mathbf{v}}_{\text{nov}}$ são dados por

$$\vec{\mathbf{u}}_{\text{nov}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\text{nov}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{\text{nov}}^*), \quad (4.21)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{nov}} = \mathbf{v}'/|\mathbf{v}'|. \quad (4.22)$$

Para a terceira linha de U , basta fazer o produto $u_{\text{nov}}^* \times v_{\text{nov}}^*$ e assim teremos toda a matriz com os elementos devidamente normalizados.

4.3 Algoritmos de Atualização de $U_\mu(n)$

Para a aplicação do processo de Markov, é utilizada a ação de gauge de Wilson quadridimensional, definida na equação (3.36). Entretanto, vamos agora reescrever a ação

de gauge definida no capítulo anterior em termos de um parâmetro β como

$$S_G[U] = \frac{\beta}{N} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)], \quad (4.23)$$

onde $\beta = 2N/g^2$ é chamado de acoplamento inverso. Essa maneira de escrever a ação é amplamente utilizada para a formulação de rede e nos auxiliará a fazer comparação de resultados. Para a teoria SU(2), temos $N = 2$ e para a teoria SU(3), $N = 3$.

Vamos agora inicializar o sistema para alguma configuração U . O candidato a configuração atualizada U' passará por um processo ergódico, como explicado anteriormente. Para um sistema quadridimensional, a variável de ligação é compartilhada por 6 plaquetas, e somente estas são afetadas quando ocorre a mudança $U_\mu(n) \rightarrow U'_\mu(n)$. Logo, a contribuição local para a ação é dada por

$$S[U'_\mu(n)]_{loc} = \frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^6 \text{Re}\{\text{tr}[\mathbb{1} - U'_\mu(n)P_i]\} = \frac{\beta}{N} \text{Re}\{\text{tr}[6\mathbb{1} - U'_\mu(n)A]\}, \quad (4.24)$$

onde

$$A = \sum_{i=1}^6 P_i = \sum_{\nu \neq \mu} [U_\nu(n + ae_\mu)U_{-\mu}(n + ae_\mu + ae_\nu)U_{-\nu}(n + ae_\nu) + U_{-\nu}(n + ae_\mu)U_{-\mu}(n + ae_\mu - ae_\nu)U_\nu(n - ae_\nu)], \quad (4.25)$$

sendo P_i o produto das outras três variáveis de ligação que constroem as plaquetas. Esses produtos são chamados de *grampos*. Logo, para a mudança da ação se obtém que

$$\Delta S = S[U'_\mu(n)]_{loc} - S[U_\mu(n)]_{loc} = -\frac{\beta}{N} \text{Re}\left(\text{tr}\{[U'_\mu(n) - U_\mu(n)]A\}\right), \quad (4.26)$$

notando que A não é afetado pela mudança de $U_\mu(n)$.

Nosso próximo passo é escolher o algoritmo que fará a atualização das configurações de gauge seguindo o desenvolvimento acima.

4.3.1 Algoritmo de Metropolis

O Algoritmo de Metropolis foi desenvolvido em um trabalho sobre gases de esferas maciças. (57) Ele consiste na proposição de uma nova configuração e, em seguida, utilizando a propriedade de balanço detalhado, decidir se essa configuração será rejeitada ou não.

Ele consiste primeiro em sortear um elemento X de SU(N). Em seguida, é proposta uma atualização para a variável de ligação U como $U' = XU$. Com isso, é sorteado um número aleatório r distribuído no intervalo $[0,1]$. A nova configuração é aceita se $r \leq \exp(-\Delta S)$ e rejeitada se essa equação não for verdadeira.

Isso significa que a proposta U' é aceita com probabilidade $P_{eq}(U')/P_{eq}(U)$, ou seja a probabilidade de transição estará de acordo com a equação (4.9). Note que aqui usamos

U e U' para representar a variável de ligação a ser atualizada, e no início do capítulo para representar a configuração de gauge completa. Para atualizações locais, como as que realizamos, cada atualização envolve de fato apenas uma variável de ligação e não há confusão, já que isolamos apenas a probabilidade condicionada à atualização realizada, e o fator restante será constante. Como dito acima, uma atualização completa da rede, ou varredura, consiste em repetir o processo para todas as variáveis de ligação.

Com base nos trabalhos desenvolvidos por nosso grupo de pesquisa do IFSC-USP (26, 31, 55, 58), por mais que Metropolis seja um algoritmo de simples implementação, é preferível utilizar outro algoritmo, o banho térmico, que será visto nas próximas seções. Por ele ser mais eficiente, empregamos o algoritmo banho térmico em nossas simulações tanto para o caso $SU(2)$ quanto para o $SU(3)$.

4.3.2 Algoritmo de Banho Térmico para $SU(2)$

O princípio desse algoritmo é realizar a escolha de um novo valor da variável de ligação — que passaremos a chamar de *link*, por conveniência — $U'_\mu(n)$ de acordo com a distribuição de probabilidade local definida em torno dos grampos (59)

$$dP(U) = dU e^{\frac{\beta}{N} \text{Re tr}[UA]}. \quad (4.27)$$

As somas do grampo A são calculadas como na equação (4.25), i.e. envolvendo todos os links a não ser $U = U'_\mu(n)$.

Para o caso $SU(2)$, vamos definir que

$$A = \alpha V, \quad \text{com} \quad \alpha = \sqrt{\det[A]}. \quad (4.28)$$

Caso $\det[A]$ seja nulo, nós escolhemos uma matriz aleatória $SU(2)$ para U . Caso $\det[A]$ não seja nulo, nós encontramos que $V = A/\alpha$ é uma matriz $SU(2)$. Isso ocorre porque a soma de matrizes $SU(2)$ é proporcional a uma matriz $SU(2)$. Portanto, ao se normalizar A obtemos uma matriz $SU(2)$. Sendo assim, a equação (4.27) pode ser escrita como

$$dP(U) = dU e^{\frac{\alpha\beta}{2} \text{Re tr}[UV]}. \quad (4.29)$$

Sendo a medida de Haar* dU invariante sob transformações da origem no espaço do grupo, podemos escrevê-la então como $d(UV)$. Definindo uma matriz X , tal que $X = UV$, a distribuição de probabilidade local será dada por

$$dP(X) = dX e^{\frac{\beta}{2} \text{Re tr}[X]}. \quad (4.30)$$

* A medida de Haar aparece quando estamos fazendo a função de partição para a teoria de gauge na rede, pois não lidamos diretamente com os campos gluônicos, mas sim com as variáveis de link U_μ .

Caso a geração da matriz X seja distribuída adequadamente, os candidatos para o novo link $U'_\mu(n)$ são dados por

$$U'_\mu(n) \equiv U' = \frac{XA^\dagger}{\alpha}. \quad (4.31)$$

Tendo X dada pela equação (4.14), onde $x \in \mathbb{R}^4$ e $x^2 = 1$, podemos definir a medida de Haar como

$$dX = \frac{1}{\pi^2} d^4x \delta(x_0^2 + \mathbf{x}^2 - 1), \quad (4.32)$$

pois sua integração é igual a 1, lembrando que a área da esfera unitária em quatro dimensões é $2\pi^2$.

Usando as propriedades da função delta de Dirac, a equação (4.32) pode ser escrita como

$$dX = \frac{1}{\pi^2} d^4x \frac{\theta(1-x_0^2)}{2\sqrt{1-x_0^2}} \left[\delta\left(|\mathbf{x}| - \sqrt{1-x_0^2}\right) + \delta\left(|\mathbf{x}| + \sqrt{1-x_0^2}\right) \right]. \quad (4.33)$$

Vamos agora reescrever o elemento de volume como $dx_0 d^3x = dx_0 d|\mathbf{x}| |\mathbf{x}|^2 d\Omega$, sendo $d\Omega$ o elemento de integração angular usual em três dimensões. Usando a delta de Dirac para remover a integração em $|\mathbf{x}|$, temos

$$dX = \frac{1}{\pi^2} d\Omega dx_0 \frac{(1-x_0^2)\theta(1-x_0^2)}{2\sqrt{1-x_0^2}}. \quad (4.34)$$

Pela representação matricial de X , temos que $|x_0| \leq 1$ e isso nos permite omitir a função degrau θ . Sendo $\text{tr}[X] = 2x_0$, a distribuição de probabilidade pode então ser dada por

$$dP(x) = \frac{1}{2\pi^2} d[\cos(\varphi_1)] d\varphi_2 dx_0 \sqrt{1-x_0^2} e^{a\beta x_0}, \quad (4.35)$$

onde $x_0 \in [-1, 1]$, $\cos(\varphi_1) \in [-1, 1]$ e $\varphi_2 \in [0, 2\pi)$. Como a matriz X é aleatória, temos que amostrar cada uma destas variáveis de acordo com a distribuição acima. Para a variável aleatória x_0 , nós a encontramos através de sua distribuição no termo $\sqrt{1-x_0^2} e^{a\beta x_0}$. O método para que isto seja feito é introduzindo uma variável λ , tal que

$$x_0 = 1 - 2\lambda^2, \quad (4.36)$$

o que corresponde à transformação

$$dx_0 \sqrt{1-x_0^2} \exp(a\beta x_0) \propto d\lambda \lambda^2 \sqrt{1-\lambda^2} \exp(-2a\beta\lambda^2), \quad (4.37)$$

com $\lambda \in [0, 1]$. O objetivo agora é gerar λ utilizando

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 \exp(-2a\beta\lambda^2) \quad (4.38)$$

e ele será aceito através de um passo de aceitação e rejeição usando

$$p_2(\lambda) = \sqrt{1 - \lambda^2}. \quad (4.39)$$

O procedimento para amostrar λ que acabamos de descrever é o método de rejeição, e consiste em gerar a variável de acordo com uma função que sabemos amostrar, no caso $p_1(\lambda)$, e depois aceitá-la com probabilidade igual à razão entre a distribuição desejada $p_{tot}(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$ e a distribuição $p_1(\lambda)$. Assim, λ será gerado de fato com probabilidade $p_1(\lambda)[p_{tot}(\lambda)]/p_1(\lambda)$, que é a probabilidade desejada. Note que p_1 é estritamente maior do que a função desejada $p_{tot}(\lambda)$, como exigido para a aplicação do método.

Para amostragem da distribuição $p_1(\lambda)$ (60), é preciso primeiro gerar um tripleto de números aleatórios r_i , distribuídos uniformemente em $(0, 1]$. Teremos então que

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2a\beta} [\log(r_1) + \cos^2(2\pi r_2) \log(r_3)] \quad (4.40)$$

segue a distribuição que foi requerida. Esse valor de λ^2 só deverá ser aceito caso

$$r^2 \leq 1 - \lambda^2, \quad (4.41)$$

onde r é uma outra variável uniforme em $(0, 1]$.

Com a aceitação, é escrito que $x_0 = 1 - 2\lambda^2$. Se não houver aceitação, o valor de λ^2 é rejeitado e reinicia-se o processo com um novo sorteio de números aleatórios.

Quanto às variáveis angulares $\cos(\varphi_1)$ e φ_2 da equação (4.35), elas correspondem à parte \vec{x} do quadrivetor x e são uniformemente distribuídas. Uma possibilidade para isso é escolher vetores \mathbf{b} aleatórios, com componentes uniformemente distribuídas em $[-1, 1]$, de forma que só serão aceitos vetores que obedeçam $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \leq 1$, que serão então normalizados ao comprimento $|\mathbf{x}| = \sqrt{1 - x_0^2}$. Dessa forma, podemos escrever

$$x_i = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} b_i, \quad \text{onde } i = 1, 2, 3. \quad (4.42)$$

Sendo o X calculado, é possível definir o novo $U'_\mu(n)$ dado pela equação (4.31) e assim efetuar a varredura da rede, completando uma iteração do método.

4.3.3 Algoritmo de Banho Térmico para SU(3)

Para SU(3), o método mais popular utilizado é o de Cabibbo-Marinari. (61) Ele pode ser aplicado para SU(N), sendo $N > 2$, pois esse método depende apenas da utilização de subgrupos SU(2) na sua construção. A proposta de Cabibbo-Marinari é gerar atualizações das variáveis de gauge através da equação

$$U' = T S R U, \quad (4.43)$$

onde essas matrizes são definidas como elementos de $SU(3)$ construídos a partir das matrizes

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 0 \\ -r_2^* & r_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2^* & 0 & s_1^* \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & -t_2^* & t_1^* \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

que são geradas a partir de subgrupos $SU(2)$. Note que as entradas não nulas ou unitárias dessas matrizes seguem a parametrização dada na equação (4.14).

O ponto de partida para esse método é considerar primeiro apenas uma das matrizes acima no cálculo, enquanto as outras são tomadas como a identidade. Vamos iniciar com a matriz R e considerar T e S como a identidade. A equação (4.27) será dada por

$$\begin{aligned} dP(U) &= dU \exp \left[\frac{\beta}{3} \text{Re tr}(UA) \right] = d(RU) \exp \left[\frac{\beta}{3} \text{Re tr}(RUA) \right] \\ &= d(R) \exp \left[\frac{\beta}{3} \text{Re tr}(RW_R) \right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde $W_R \equiv UA$. Temos que o cálculo acima é semelhante ao apresentado na equação (4.30) para teoria de gauge $SU(2)$, onde foi definida uma matriz $X = UV$. Na equação (4.45) temos o produto RW_R , que é dado por

$$\begin{aligned} \text{Re tr}(RW_R) &= \text{Re}(r_1 w_{11}^R + r_2 w_{21}^R - r_2^* w_{12}^R + r_1 w_{22}^R + w_{33}^R) \\ &= \text{Re}(r_1) \text{Re}(w_{11}^R + w_{22}^R) - \text{Im}(r_1) \text{Im}(w_{11}^R - w_{22}^R) \\ &\quad - \text{Re}(r_2) \text{Re}(w_{12}^R - w_{21}^R) - \text{Im}(r_2) \text{Im}(w_{12}^R + w_{21}^R) + w_{33}^R, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde w_{ij}^R representam os elementos de W_R e o termo w_{33}^R pode ser absorvido na normalização. Fazendo o mesmo produto acima, mas agora considerando R e W_R como matrizes $SU(2)$, com parametrização usual, teremos

$$\begin{aligned} \text{Re tr}(RW_R)_{SU(2)} &= 2 \left[\text{Re}(r_1) \text{Re}(w_1^R) - \text{Im}(r_1) \text{Im}(w_1^R) \right. \\ &\quad \left. - \text{Re}(r_2) \text{Re}(w_2^R) - \text{Im}(r_2) \text{Im}(w_2^R) \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Com base na equação acima e na equação (4.46), podemos definir as seguintes variáveis

$$\tilde{w}_{1R} = \frac{\text{Re}(w_{11}^R + w_{22}^R) + i \text{Im}(w_{11}^R - w_{22}^R)}{2}, \quad (4.48)$$

$$\tilde{w}_{2R} = \frac{\text{Re}(w_{12}^R - w_{21}^R) + i \text{Im}(w_{12}^R + w_{21}^R)}{2}. \quad (4.49)$$

Essas variáveis serão utilizadas para que seja gerado um elemento V_R do grupo $SU(2)$, dado por

$$V_R = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{1R}/\det(w_R) & \tilde{w}_{2R}/\det(w_R) \\ -\tilde{w}_{2R}^*/\det(w_R) & \tilde{w}_{1R}^*/\det(w_R) \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

onde $\det(w_R) = \sqrt{\tilde{w}_{1R} \tilde{w}_{1R}^* + \tilde{w}_{2R} \tilde{w}_{2R}^*}$.

Agora, com nosso elemento V_R no $SU(2)$, semelhante a equação (4.31), vamos aplicar todo o passo a passo de atualização do banho térmico no $SU(2)$, para encontrar uma matriz X que também é $SU(2)$, e depois obter $R = XV_R^\dagger$ pela definição da equação (4.45). Os termos da matriz R que serão encontrados em $SU(2)$ devem ser transformados em seguida para $SU(3)$. Isso pode ser feito utilizando a estrutura matricial de R presente na equação (4.44). Após isso, finalizamos aplicando a atualização $U'_R = RU$, com R definido no $SU(3)$, para gerar essa nova configuração de gauge parcial. Esse mesmo passo a passo deve ser aplicado para as matrizes S e T , sendo que, para cada uma delas, as outras também devem ser consideradas matrizes unitárias para iniciar a atualização.

Para o caso da matriz S , utilizamos $W_S = U'_R A$. Ou seja, a configuração de gauge que será utilizada aqui é justamente a que foi gerada pelo processo de atualização através da matriz R . Vamos aplicar a mesma lógica presente nas equações (4.45) e (4.46) para a matriz S da equação (4.44). Ou seja, vamos encontrar a parametrização $SU(2)$ para W_S que reproduza $\text{Re Tr}[SW_S]$ em termos dos S e W_S originais. As variáveis \tilde{w}_{1S} e \tilde{w}_{2S} serão definidas aqui como

$$\tilde{w}_{1S} = \frac{\text{Re}(w_{11}^S + w_{33}^S) + i \text{Im}(w_{11}^S - w_{33}^S)}{2}, \quad (4.51)$$

$$\tilde{w}_{2S} = \frac{\text{Re}(w_{13}^S - w_{31}^S) + i \text{Im}(w_{13}^S + w_{31}^S)}{2}, \quad (4.52)$$

de modo que tenhamos

$$V_S = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{1S}/\det(w_S) & \tilde{w}_{2S}/\det(w_S) \\ -\tilde{w}_{2S}^*/\det(w_S) & \tilde{w}_{1S}^*/\det(w_S) \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

onde $\det(w_S) = \sqrt{\tilde{w}_{1S} \tilde{w}_{1S}^* + \tilde{w}_{2S} \tilde{w}_{2S}^*}$. O passo seguinte é encontrar $S = XV_S^\dagger$ no $SU(2)$. Em seguida, se transforma S para o $SU(3)$. A nova configuração de gauge parcial será dada por $U'_S = SU'_R$.

Por fim, esse processo é repetido para T , de modo que $W_T = U'_S A$, onde U'_S é a matriz que foi atualizada pela aplicação de S . As variáveis \tilde{w}_{1T} e \tilde{w}_{2T} são dadas por

$$\tilde{w}_{1T} = \frac{\text{Re}(w_{22}^T + w_{33}^T) + i \text{Im}(w_{22}^T - w_{33}^T)}{2}, \quad (4.54)$$

$$\tilde{w}_{2T} = \frac{\text{Re}(w_{23}^T - w_{32}^T) + i \text{Im}(w_{23}^T + w_{32}^T)}{2}, \quad (4.55)$$

que nos dá a matriz

$$V_T = \begin{pmatrix} w_{1T}/\det(w_T) & w_{2T}/\det(w_T) \\ -w_{2T}^*/\det(w_T) & w_{1T}^*/\det(w_T) \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

onde $\det(w_T) = \sqrt{\tilde{w}_{1T} \tilde{w}_{1T}^* + \tilde{w}_{2T} \tilde{w}_{2T}^*}$. Temos então no $SU(2)$ o cálculo de XV_T^\dagger . Isso fará com que seja encontrada a matriz T , que precisa ser transformada para o $SU(3)$. Com

isso, se encontra a configuração de gauge U'_T do processo de Cabibbo-Marinari, dada por $U'_T = TU'_S$.

Logo, U'_T representa a nova configuração de gauge U' , dada pela equação (4.43). Mesmo que U' seja completamente atualizado, é preciso aplicar o método de Gram-Schmidt para garantir que essa configuração seja um elemento $SU(3)$.

5 TEMPERATURA FINITA

Para uma análise numérica da teoria de gauge a temperatura finita, devemos alterar alguns parâmetros da formulação de rede e da simulação vistas nos capítulos anteriores. Só assim poderemos estudar, por exemplo, a transição de fase de um comportamento hadrônico para um plasma de quarks e glúons. A introdução da temperatura em teorias quânticas de campo pode ser feita através do formalismo de Matsubara para sistemas estatísticos. (62) Nesse caso, ao invés de se trabalhar com a coordenada temporal padrão, faz-se uma rotação de Wick para esta coordenada dentro de um intervalo $[0, 1/T]$, onde T é a temperatura*. Além disso, adotam-se condições de contorno periódicas no tempo.

O processo de transformação de uma teoria quântica de campos do contínuo para o formalismo de rede em temperatura zero (sistema sem temperatura) depende de uma rotação de Wick, como visto na equação (3.3). Com base nisso, podemos ver que a introdução de temperatura em um sistema contínuo é bem semelhante a essa transformação. Note que a temperatura surge quando eliminamos a evolução da teoria no tempo para introduzir uma descrição termodinâmica, impondo que haja termalização a temperatura T . Na formulação euclidiana, isso é obtido diretamente associando a integral temporal na ação da equação (3.36), por exemplo, com a temperatura inversa. Dessa forma, a distribuição estatística em (4.2) será agora explicitamente térmica, e dada pela mesma expressão anterior, com uma dimensão temporal finita e associada com o inverso da temperatura. Como para a formulação de rede usual, a discretização na direção temporal é dada por $t = N_t a$, sendo N_t o tamanho da rede na direção temporal e t a coordenada temporal, podemos introduzir a temperatura no sistema através da equação

$$N_t a = \frac{1}{T}. \quad (5.1)$$

Agora, temos um sistema de volume espacial finito e uma temperatura fixada T . Logo, por conta da equação (5.1) e da ideia de se trabalhar com volumes grandes de rede a diminuir o efeitos de volume finito no problema, é importante buscar valores maiores para a relação N_s/N_t mantendo constante a temperatura, ou seja a relação (5.1), o que significa que passaremos a considerar uma rede assimétrica, com $N_s > N_t$ sendo N_s a extensão espacial da rede.

5.1 Transição de Fase para Teoria de Yang-Mills

Como primeiro passo de análise em temperatura, vamos definir o parâmetro de ordem para a teoria YM com ausência de quarks. Ele será uma grandeza que assume valor

* Para o caso do sistema natural de unidades $k_B = 1$.

zero na fase desordenada e diferente de zero na fase ordenada. Esse parâmetro é o *loop de Polyakov*, cujas componentes são dadas por (38)

$$L(\mathbf{n}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \prod_{t=1}^{N_t} U_4(\mathbf{n}, t), \quad (5.2)$$

onde N_c é o número de cores na teoria, $U_4(\mathbf{n}, t)$ é a variável de ligação na direção temporal e \mathbf{n} representa a parte espacial dos pontos da rede, i.e. $n_i = 1, \dots, N_s$ para $i = 1, 2, 3$. Para definição do parâmetro de ordem, vamos considerar a média dessa grandeza na rede espacial

$$L = \frac{1}{N_s^3} \sum_{\mathbf{n}} L(\mathbf{n}). \quad (5.3)$$

Pode-se observar pela equação (5.2) que o loop de Polyakov é formado pelo produto de variáveis de gauge na direção temporal em um percurso fechado. Além disso, o valor esperado de L se relaciona com a energia livre F_q de uma carga estática como (37)

$$P \equiv \langle L \rangle \sim e^{-F_q/T}. \quad (5.4)$$

Quando $F_q \rightarrow \infty$, o parâmetro de ordem vai a zero e, quando $F_q < \infty$, $\langle L \rangle \neq 0$. Isso mostra que definitivamente o loop de Polyakov para esse caso de ausência de quarks é parâmetro de ordem para a transição de desconfinamento. Este comportamento é semelhante ao que ocorre com a magnetização no modelo de Ising, pois há uma fase em que $M \neq 0$ e uma fase $M = 0$. Em ambos casos há quebra de simetria, mas para a teoria de gauge não é tão simples visualizá-la, pois $\langle L \rangle$ não se quebra espontaneamente pelo grupo de simetria $SU(N_c)$. Contudo, ele é quebrado pelo grupo de simetria discreto $Z(N_c)$, que corresponde ao centro do grupo de gauge local $SU(N_c)$. É possível observar isto quando usamos o elemento z do grupo $Z(N_c)$. A transformação é dada por

$$U_4(\mathbf{n}, t_0) \rightarrow zU_4(\mathbf{n}, t_0), \quad (5.5)$$

já que o link acima aparece no loop de Polyakov apenas uma vez. Para a ação, a simetria é conservada, pois as plaquetas não são afetadas. Mas quando é observado somente o loop de Polyakov, que multiplica as configurações de gauge somente na direção temporal, ocorre a transformação

$$P \rightarrow zP. \quad (5.6)$$

Vemos que o observável P (loop de Polyakov, valor esperado de L) sinaliza a quebra de simetria $Z(N_c)$ pois, na fase de altas temperaturas, quando os quarks estão desconfinados e F_q é finita, ele é diferente de zero e portanto a simetria é quebrada, i.e. não vale a invariância pela transformação da equação (5.6). Na fase de baixas temperaturas temos F_q infinita (pois não pode existir um quark isolado), e portanto P é nulo, sendo invariante por (5.6). A situação é inversa à da magnetização de um modelo de spins, que é

diferente de zero na fase de baixas temperaturas, mas exceto por essa inversão temos o mesmo comportamento para o parâmetro de ordem.

Explorar o loop de Polyakov é de grande importância, pois é através desse estudo que é possível fazer a identificação da temperatura em que ocorre a transição de fase. Para o caso da teoria de gauge puro $SU(2)$, ocorre uma transição de fase de segunda ordem, que significa que a teoria apresenta um ponto crítico. Desse modo, pode-se explorar o estudo dos fenômenos críticos. Um ponto importante disso é que a teoria de transição de fase prevê classes de universalidade. Isso quer dizer que fenômenos que são completamente distintos podem apresentar expoentes críticos semelhantes, e isso ocorre com a teoria de gauge $SU(2)$ e o modelo de spins de Ising tridimensional. Logo, podemos comparar os seus expoentes críticos e confirmar a região crítica de $SU(2)$. (63,64)

O conhecimento dos expoentes críticos possibilita o uso de uma ferramenta muito poderosa para investigar a teoria de gauge. Por isso, vamos desenvolver na próxima seção a teoria de escala de tamanho finito, de grande importância para as simulações numéricas de fenômenos críticos. Como já mencionamos, o caso $N_c = 2$ é especial, pois a transição de desconfinamento envolve comportamento de observáveis com expoentes críticos, enquanto que para $N_c = 3$ (QCD sem férmions) temos uma transição de fase de primeira ordem, e em princípio não vale a mesma análise de escala. Entretanto, como veremos mais adiante em nosso estudo de otimização de algoritmos, é muito importante poder identificar o comportamento “temporal” da simulação como função do tamanho de rede, identificando o expoente crítico associado a um dado algoritmo. Isso ocorre porque, independentemente de ser tratado o caso da teoria de gauge na rede a temperatura finita ou não, o limite do contínuo corresponde a um ponto crítico do modelo estatístico associado, como argumentaremos no final deste capítulo.

5.2 Teoria de Escala e Expoentes Críticos

Os parâmetros importantes para descrição da transição de desconfinamento na teoria pura $SU(2)$, e seus respectivos expoentes críticos, são descritos como

$$\langle L \rangle \sim |T - T_c|^\beta, \quad \text{para } T \rightarrow T_c^+, \quad (5.7)$$

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}, \quad \text{para } T \rightarrow T_c, \quad (5.8)$$

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}, \quad \text{para } T \rightarrow T_c, \quad (5.9)$$

onde χ é a susceptibilidade, i.e. a flutuação estatística do parâmetro de ordem, e ξ é o comprimento de correlação. (65) Note que o comportamento singular para os observáveis como função da temperatura está associado à divergência do comprimento característico do sistema (i.e. ξ), de forma que ocorre a perda de escala, e sejam possíveis apenas comportamentos como leis de potência.

A rigor, o fenômeno crítico é estudado para valores de volume infinito. Para o caso da rede finita, vamos ter o comprimento de correlação limitado pelo comprimento característico do sistema, que chamamos de N_s , ou seja o comprimento espacial de rede[†]. Isto nos motiva a introduzir uma nova variável de escala (64)

$$y = \frac{N_s}{\xi}, \quad (5.10)$$

sendo ξ o comprimento de correlação da rede de volume infinito. Como vemos, a variável y parametriza a distância entre o tamanho da rede usada na simulação e o comprimento de correlação ξ , que diverge perto de uma transição de fase de segunda ordem, como na equação (5.9). Se, ao invés da temperatura, for usada uma variável normalizada

$$x = \frac{T - T_{c,\infty}}{T_{c,\infty}}, \quad (5.11)$$

ou, no caso da teoria SU(2),

$$x = \frac{4/g^2 - 4/g_{c,\infty}^2}{4/g_{c,\infty}^2}, \quad (5.12)$$

qualquer observável \mathcal{O} com comportamento crítico pode ser escrito em termos de seu expoente crítico ρ da forma

$$\mathcal{O}_\infty \sim x^{-\rho}, \quad \text{para } x \rightarrow 0. \quad (5.13)$$

Note que usamos a definição do parâmetro de rede β (que não deve ser confundido com o expoente crítico β) como $2N_c^2/g^2$, introduzida na Seção 4.3. De acordo com a equação (5.1), para cada valor fixo de extensão temporal de rede N_t teremos um valor crítico para β (ou g^2), correspondendo à temperatura crítica T_c .

A hipótese de escala de tamanho finito (FSS, do inglês finite size scaling) pode ser introduzida afirmando que, para $N_s \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow 0$, vamos ter que a razão entre o valor esperado \mathcal{O} a volume finito sobre seu valor a volume infinito deve depender apenas de y , ou seja

$$\frac{\mathcal{O}_{N_s(x)}}{\mathcal{O}_\infty(x)} = \bar{Q}_\mathcal{O}(y), \quad (5.14)$$

sendo y introduzido em (5.10) e $\bar{Q}_\mathcal{O}$ uma função de escala. Note que a definição de y sugere que seja aumentado o tamanho da rede N_s à medida que nos aproximamos do ponto crítico (que corresponde à divergência de ξ) mantendo fixa a razão entre N_s e ξ . De fato, de acordo com a hipótese de FSS, y parametriza a diferença entre observáveis na rede finita e infinita, já que relaciona os comprimentos característicos dessas duas redes. Considerando a proporcionalidade de ξ com x , temos que a variável de escala pode ser reescrita como

$$y \sim N_s x^\nu, \quad (5.15)$$

[†] Para este caso, usaremos argumentos de grupo de renormalização. (50)

e podemos reescrever um observável qualquer da teoria como

$$\mathcal{O}_{N_s}(x) = \mathcal{O}_\infty(x) Q_{\mathcal{O}} \left(x N_s^{1/\nu} \right), \quad (5.16)$$

para alguma função de escala $Q_{\mathcal{O}}$.

Lembrando agora o comportamento de \mathcal{O}_∞ dado acima na equação (5.13), vemos que a forma para \mathcal{O}_{N_s} se torna

$$\mathcal{O}_{N_s}(x) = x^{-\rho} Q_{\mathcal{O}}(x N_s^{1/\nu}) = N_s^\Omega \tilde{Q}(x N_s^{1/\nu}) \quad (5.17)$$

para uma função de escala $\tilde{Q}(z) = z^\rho Q(z)$. O expoente crítico associado ao comportamento de \mathcal{O} a volume finito, Ω , é dado por

$$\Omega = \frac{\rho}{\nu}. \quad (5.18)$$

Sendo assim, vamos isolar a parte singular da densidade de energia livre, que está associada ao comportamento de escala na temperatura crítica,

$$f_s = \frac{F_s}{VT} = -\frac{1}{V} \ln Z_s \quad (5.19)$$

e formular o *Ansatz* de FSS (66)

$$f_s(x, h, N_s) = N_s^{-d} Q \left(g_T N_s^{1/\nu}, g_h N_s^{(\beta+\gamma)/\nu}, g_i N_s^{y_i} \right) \quad (5.20)$$

para esta grandeza, sendo d a dimensão espacial utilizada. Note que generalizamos a discussão acima para incluir a dependência da função de escala Q com vários campos de escala, g_h, g_i , além do campo térmico g_T , associado a x .

Em particular, os campos de escala térmico e magnético são dados respectivamente por

$$g_T = c_T x + O(x^2), \quad (5.21)$$

$$g_h = c_h h + O(xh), \quad (5.22)$$

onde c_T e c_h são constantes e h denota um eventual acoplamento com o parâmetro de ordem, ou seja um termo de quebra de simetria explícita $h \sum_{\mathbf{n}} L(\mathbf{n})$ na ação. A dependência adicional em campos de escala irrelevantes g_i com $y_i < 0$ determina os termos de correção de escala. Para encontrar os valores do expoente Ω para o loop de Polyakov e sua susceptibilidade, basta utilizar as derivadas de f_s e temos

$$\langle L \rangle = - \left. \frac{\partial f_s}{\partial h} \right|_{h=0} = N_s^{-\beta/\nu} Q_{\langle L \rangle} \left(g_T N_s^{1/\nu}, g_i N_s^{y_i} \right), \quad (5.23)$$

$$\chi = \left. \frac{\partial^2 f_s}{\partial h^2} \right|_{h=0} = N_s^{\gamma/\nu} Q_\chi \left(g_T N_s^{1/\nu}, g_i N_s^{y_i} \right), \quad (5.24)$$

confirmando os resultados que tínhamos desenvolvido acima para um observável genérico \mathcal{O} .

Um outro observável importante é o quarto cumulante normalizado do loop de Poylakov, chamado cumulante de Binder. Ele é dado por

$$B = \frac{\langle L^4 \rangle}{\langle L^2 \rangle^2} - 3. \quad (5.25)$$

Esse cumulante possui uma relação com a energia livre f_s , dada por

$$B = \left. \frac{\partial^4 f_s}{\partial h^4} \right|_{h=0} (\chi^2 N_s^d)^{-1} = Q_{g_r} (g_T N_s^{1/\nu}, g_i N_s^{y_i}), \quad (5.26)$$

ou seja ele é diretamente a própria função de escala. Os comportamentos esperados acima podem ser reescritos de uma maneira mais geral como

$$\mathcal{O}(x, N_s) = N_s^{(\rho/\nu)} Q_{\mathcal{O}} (g_T N_s^{1/\nu}, g_i N_s^{y_i}), \quad (5.27)$$

onde ρ equivale a $-\beta$, γ e 0 para $\langle L \rangle$, χ e g_r respectivamente. O resultado acima pode ser expandido em primeira ordem de Q em $x = 0$, o que resultará em

$$\mathcal{O}(x, N_\sigma) = [c_0 + (c_1 + c_2 N_\sigma^{y_1}) x N_\sigma^{1/\nu} + c_3 N_\sigma^{y_1}] N_\sigma^{\rho/\nu}, \quad (5.28)$$

sendo c_i constantes.

Para encontrar os valores dos expoentes críticos, primeiro tomamos $x = 0$ na equação acima, o que resultará em

$$\mathcal{O}(x = 0, N_\sigma) = N_\sigma^{\rho/\nu} [c_0 + c_3 N_\sigma^{-\omega}], \quad (5.29)$$

onde consideramos $y_1 = -\omega$ como o maior expoente irrelevante da função de escala. Agora, para o caso de $\langle L \rangle$ e χ , podemos aplicar logaritmo na equação acima e escrever

$$\ln \langle L \rangle = \ln c_0 - \frac{\beta}{\nu} \ln N_\sigma, \quad (5.30)$$

$$\ln \chi = \ln c_0 + \frac{\gamma}{\nu} \ln N_\sigma, \quad (5.31)$$

onde desprezamos os termos com expoentes irrelevantes. Note que as relações acima são extremamente poderosas, já que nos permitem obter, a partir de uma simulação em volume finito, os expoentes críticos válidos a volume infinito, a partir de um gráfico log-log, por exemplo, para resultados dos observáveis calculados para vários valores de N_s . Ou seja, um simples ajuste dessas equações nos proporcionará os valores dos expoentes $-\beta/\nu$ e γ/ν . Claramente, para que possamos aplicar o método, devemos saber com precisão o valor de β_c , correspondente a $x = 0$. Vejamos como isso pode ser feito por meio do cumulante de Binder.

Para o caso do cumulante de Binder, temos

$$B = c_0 + c_3 N_\sigma^{-\omega}. \quad (5.32)$$

Traçar um gráfico para g_r é muito importante, pois a partir do cruzamento das linhas destes cumulantes em um gráfico $g_r \times \beta$, em diferentes valores de volume de rede finito, determina-se onde está β_c , que está relacionado à temperatura crítica. Além disso, podemos usar a relação de hiperescala, dada por (65)

$$\gamma/\nu + 2\beta/\nu = d, \quad (5.33)$$

para verificar se os expoentes críticos estão de acordo com o esperado. Alternativamente, se não tivermos a determinação do expoente ν , podemos utilizar a equação acima para relacionar os expoentes obtidos nos ajustes a γ e β .

5.3 Definição de Parâmetros de Rede

Por fim, para trabalhar nessa tese, em vez de utilizar a forma da equação (5.1), vamos utilizar a razão T/T_c para um par (β, N_t) . Também não será necessário aplicar o método FSS, pois trabalharemos com valores de temperatura crítica de referência (64, 67, 68), dados por

$$N_t = 4, \quad \beta_c = 2.29895(10) \quad (5.34)$$

$$N_t = 8, \quad \beta_c = 2.5115(40). \quad (5.35)$$

Claramente, para encontrar β_c para outros valores de N_t , é importante utilizar o FSS.

Note que a razão T/T_c equivale a a_c/a de acordo com (5.1) e definindo um valor crítico a_c para o espaçamento de rede para N_t fixo. A partir dos valores definidos para β_c nas equações acima, é possível encontrar os valores de a_c . Para isso, vamos utilizar um desenvolvimento feito em escala assintótica, demonstrado por Bloch, Cucchieri, Langfeld e Mendes em (54), de modo a apresentar uma relação entre σa^2 e o parâmetro β de rede. O desenvolvimento mais detalhado dessa relação encontra-se na citação do parágrafo. Com isso, é escrita a equação

$$\ln(\sigma a^2) = \frac{4\pi^2}{\beta_0} \beta + \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \ln \left(\frac{4\pi^2}{\beta_0} \beta \right) + \frac{4\pi^2}{\beta_0} \frac{d}{\beta} + c, \quad (5.36)$$

onde, para SU(2),

$$\beta_0 = \frac{22}{3}, \quad \beta_1 = \frac{68}{3}, \quad c = 4.38(9), \quad d = 1.66(4) \quad (5.37)$$

e a tensão de corda $\sigma = 440 \text{ MeV}$. Nesse caso, os valores de a_c são dados por

$$N_t = 4, \quad a_c = 0.8410045 \text{ fm}, \quad (5.38)$$

$$N_t = 8, \quad a_c = 0.4179062 \text{ fm}. \quad (5.39)$$

Da mesma forma, a partir dos valores de a_c e da equação (5.36), é possível calcular os valores β que equivalem a determinadas proporções T/T_c que se deseja estudar. Esse procedimento para cálculo da temperatura nas simulações que realizamos é bastante útil, pois evita-se assim a imprecisão envolvida na prescrição usual, que consiste em “traduzir” separadamente as temperaturas em unidades físicas e comparar com a temperatura crítica (a volume infinito) estabelecida em outros estudos, dada em MeV.

Note que, no caso da teoria $SU(3)$, a transição de fase de desconfinamento, ligada à quebra espontânea de simetria $Z(3)$, será de primeira ordem (como para o modelo de spins de Potts com 3 estados). Não temos portanto, nesse caso, um fenômeno crítico, e os comportamentos de observáveis na vizinhança da temperatura de transição, chamada comumente de temperatura crítica, não terão comportamento de escala com expoentes críticos não triviais e, em princípio, não há necessidade de utilização de FSS. Na prática, porém, pode-se adaptar grande parte da discussão feita aqui, e a análise de dados na simulação é bastante semelhante, veja e.g. a referência. (62)

Finalmente, como mencionado anteriormente, a propriedade de escala de fenômenos críticos está intimamente ligada às simulações de teorias de YM na rede, independentemente de se tratar do caso com temperatura ou não. De fato, sempre que falarmos do limite do contínuo, associado à simulação para pequenos valores do espaçamento de rede (ou equivalentemente grandes valores do parâmetro de rede β) estamos tratando de um fenômeno crítico, vejamos por que. Se considerarmos que os resultados obtidos na simulação devem ser traduzidos para unidades físicas, estaremos sempre traduzindo um comprimento finito (ou massa finita, ou energia finita) como comprimento de rede vezes espaçamento de rede a em unidades físicas, e.g., fermi. Ora, se estivermos próximos do limite do contínuo, a deverá ser essencialmente zero em fermi, ou seja o respectivo comprimento em unidades de rede tenderá ao infinito, sinalizando a perda de escala característica do ponto crítico. Dessa forma, teremos claramente no comportamento dos algoritmos de simulação, que apresentam desempenho cada vez pior à medida que se aumenta o lado de rede, um fenômeno conhecido como freamento crítico (critical slowing down, em inglês). Em nosso estudo de eficiência de algoritmos, nos próximos capítulos, utilizaremos relações de escala para determinação desse comportamento.

6 FIXAÇÃO DE GAUGE DE LANDAU NA REDE

A condição de fixação de gauge de Landau na rede é dada por (58, 69)

$$\nabla \cdot A^b(n) = \nabla_\mu A_\mu^b(n) = \sum_{\mu=1}^d \left[A_\mu^b(n) - A_\mu^b(n - ae_\mu) \right] = 0, \quad (6.1)$$

onde b é o índice de cor. A definição de campo de gauge utilizada será

$$\begin{aligned} A_\mu(n) &= \left[\frac{U_\mu(n) - U_\mu^\dagger(n)}{2i} \right]_{\text{traço nulo}}, \\ A_\mu(n) &= \left[\frac{U_\mu(n) - U_\mu^\dagger(n)}{2i} \right] - \frac{\mathbb{1}}{N_c} \text{Tr} \left[\frac{U_\mu(n) - U_\mu^\dagger(n)}{2i} \right], \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde N_c é o número total de cores. A condição de fixação de gauge de Landau na rede é feita através da minimização do funcional

$$\varepsilon_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n)\} = 1 - \frac{1}{V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \text{Re} \left\{ \text{Tr} [U_\mu^{(g)}(n)] \right\}, \quad (6.3)$$

onde

$$U_\mu^{(g)}(n) = g(n) U_\mu(n) g^\dagger(n + ae_\mu) \quad (6.4)$$

é a transformação de gauge, d o número de dimensões utilizadas, V o volume de rede. A equação (6.4) é equivalente a equação (3.20). Para mostrar que a minimização do funcional acima realmente nos conduz a condição de gauge de Landau, vamos fazer a expansão em série de $g(n)$, pois esse campo é um elemento de $SU(N)$ e pode ser definido como $g(n) = \exp [i\tau \lambda^b(n) T^b]$. Com base nisso, temos que

$$g(n, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [i\tau \lambda^b(n) T^b]^m, \quad (6.5)$$

onde τ e $\lambda^b(n)$ são números reais e T_b os geradores do grupo. Logo, aplicando a expansão em série de $g(n)$ à equação (6.4), temos que

$$U_\mu^{(g)} [g(n, \tau)] = [1 + i\tau \lambda^b(n) T^b] U_\mu(n) [1 + i\tau \lambda^b(n + ae_\mu) T^b] + O(\tau^2), \quad (6.6)$$

$$U_\mu^{\dagger(g)} [g(n, \tau)] = [1 + i\tau \lambda^b(n + ae_\mu) T^b] U_\mu(n) [1 - i\tau \lambda^b(n) T^b] + O(\tau^2). \quad (6.7)$$

Agora, vamos aplicar a derivada primeira em $\varepsilon_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau)\}$ em relação a τ e em seguida, tomamos $\tau = 0$. Os termos com derivada primeira terão apóstrofo para fazer essa identificação. Isso resulta em

$$U_\mu^{\prime(g)} [g(n, \tau = 0)] = i\lambda^b(n) T^b U_\mu(n) - i\lambda^b(n + ae_\mu) U_\mu(n) T^b, \quad (6.8)$$

$$U_\mu^{\dagger\prime(g)} [g(n, \tau = 0)] = -i\lambda^b(n) U_\mu^\dagger(n) T^b + i\lambda^b(n + ae_\mu) T^b U_\mu^\dagger(n), \quad (6.9)$$

que aplicado a equação (6.3) resulta em

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau), \tau = 0\} &= -\frac{1}{V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Tr} [U_\mu'^{(g)}(n)] \right\}, \\
&= -\frac{1}{2V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \operatorname{Tr} [U_\mu'^{(g)}(n) + U_\mu'^{\dagger(g)}(n)], \\
&= -\frac{1}{2V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \operatorname{Tr} [i \lambda^b(n) T^b U_\mu(n), \\
&\quad -i \lambda^b(n + a e_\mu) U_\mu(n) T^b - i \lambda^b(n) U_\mu^\dagger(n) T^b \\
&\quad + i \lambda^b(n + a e_\mu) T^b U_\mu^\dagger(n)]. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade cíclica do traço na equação acima, temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau), \tau = 0\} &= -\frac{i}{2V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \operatorname{Tr} \{ \lambda^b(n) T^b [U_\mu(n) - U_\mu^\dagger(n)] \\
&\quad - \lambda^b(n + a e_\mu) T^b [U_\mu(n) - U_\mu^\dagger(n)] \}. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo uma translação no último termo da equação acima e reordenando o número imaginário i , temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau), \tau = 0\} &= \frac{1}{V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \operatorname{Tr} \left\{ \lambda^b(n) T^b \left[\frac{U_\mu(n) - U_\mu^\dagger(n)}{2i} \right] \right. \\
&\quad \left. - \lambda^b(n) T^b \left[\frac{U_\mu(n - a e_\mu) - U_\mu^\dagger(n - a e_\mu)}{2i} \right] \right\}. \tag{6.12}
\end{aligned}$$

O resultado da equação (6.12) deve ser inserido na equação (6.2), onde temos como resultado

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau), \tau = 0\} &= \frac{1}{V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \operatorname{Tr} [\lambda^b(n) T^b A_\mu(n) \\
&\quad - \lambda^b(n) T^b A_\mu(n - a e_\mu)]. \tag{6.13}
\end{aligned}$$

Utilizando-se da definição $A_\mu^b(n) = \operatorname{Tr} [T^b A_\mu(n)] / 2$, a equação acima se torna

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau), \tau = 0\} &= \frac{1}{V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d [\lambda^b(n) A_\mu^b(n) \\
&\quad - \lambda^b(n) A_\mu^b(n - a e_\mu)], \tag{6.14}
\end{aligned}$$

que aplicada na equação (6.1) nos dá

$$\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau), \tau = 0\} = \frac{1}{V d N_c} \sum_n \sum_\mu^d \lambda^b(n) [\nabla \cdot A^b(n)]. \tag{6.15}$$

Logo, foi possível provar que $\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(n, \tau), \tau = 0\} = 0$, independente do valor de $\lambda^b(n)$, equivale a definir o gauge de Landau.

Para construir os algoritmos de fixação de gauge de Landau na rede, vamos percorrer a rede em uma certa ordem, efetuando uma minimização em cada sítio local y . Podemos escrever a derivada do funcional como

$$\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(y)\} = C - \frac{1}{V N_d N_c} \{\text{Tr} [\omega(y)]\}, \quad (6.16)$$

onde C é uma constante, $\omega(y) \equiv g(y) h(y)$ e

$$h(y) \equiv \sum_{\mu=1}^d [U_\mu(y) g^\dagger(y + ae_\mu) + U_\mu^\dagger(y - ae_\mu) g^\dagger(y - ae_\mu)]. \quad (6.17)$$

As matrizes $h(y)$ e $\omega(y)$ também podem ser escritas como

$$h(y) \equiv \tilde{h}(y) \sqrt{\text{deth}(y)}, \quad (6.18)$$

$$\omega(y) \equiv \tilde{\omega}(y) \sqrt{\text{det}\omega(y)}, \quad (6.19)$$

$$\sqrt{\text{det}[\omega(y)]} = \sqrt{\text{det}[h(y)]}. \quad (6.20)$$

O funcional é minimizado quando em cada sítio y é escolhido uma nova matriz $g(y)$ que produz essa minimização. A atualização de $g(y)$ é dada por

$$g^{(\text{nov})}(y) = R^{(\text{atualização})}(y) g^{(\text{antigo})}(y), \quad (6.21)$$

onde $R^{(\text{atualização})}$ é a matriz que faz a atualização das matrizes $g(y)$ e deve ser um elemento de $SU(N_c)$. A variação do funcional é alcançada por

$$\varepsilon'_L [U_\mu^{(g)}] \{g(y)\} = \frac{1}{2dV} \text{Tr} \left\{ [g^{(\text{antigo})}(y) - g^{(\text{nov})}(y)] h(y) \right\}. \quad (6.22)$$

Uma forma de metrificar quantas varreduras estão sendo feitas na rede para que a fixação de gauge de Landau seja alcançada, é fazendo a verificação da medida e_2 , dada por

$$e_2 = \frac{1}{V} \sum_n \sum_{b=1}^{N_c^2-1} \text{Tr} \left\{ [\nabla_\mu A_\mu^b(n)] [\nabla_\mu A_\mu^b(n)]^\dagger \right\}, \quad (6.23)$$

onde esse fator alcança a fixação de gauge de Landau quando for menor que 10^{-12} . Também é possível metrificar a fixação de gauge através de uma outra variável denominada e_6 , dada por

$$e_6 = \frac{1}{d} \sum_{\nu=1}^d \frac{1}{N_\nu (N_c^2 - 1)} \sum_{j=1}^{N_c^2-1} \sum_{n_\nu=1}^{N_\nu} \frac{[Q_\nu(n_\nu) - \hat{Q}_\nu]_j^2}{[\hat{Q}_\nu]_j^2} \quad (6.24)$$

onde

$$\hat{Q}_\nu = \frac{1}{N_\nu} \sum_{n_\nu=1}^{N_\nu} Q_\nu(n_\nu) \quad (6.25)$$

$$Q_\nu(n_\nu) = \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{n_\mu} A_\nu(n), \quad (6.26)$$

Essa quantidade e_6 possui certa dificuldade para fixação de gauge de Landau. Logo, ela pode ser considerada como um bom parâmetro para observar a qualidade do gauge de Landau.

O próximo passo é definir os algoritmos para que $R^{(\text{atualização})}(y)$ seja determinado. Para isso, será necessário fazer a separação dos algoritmos em $SU(2)$ e $SU(3)$, pois há problemas de se identificar o mínimo local para matrizes de gauge no qual $N_c > 2$. Para esses casos, é necessário propor certas modificações nos algoritmos que estão sendo utilizados em $SU(2)$.

6.1 $SU(2)$

Para $SU(2)$, serão definidos quatro diferentes algoritmos que produzem a fixação de gauge de Landau na rede: Los Alamos, Sobrerrelaxação (SR), Sobrerrelaxação Estocástica (SRE) e Cornell.

6.1.1 Los Alamos

Dos algoritmos escolhidos, esse é o mais simples. (70) Neste caso, a matriz de atualização é dada por

$$R^{(\text{atualização})} = \tilde{\omega}^\dagger(y). \quad (6.27)$$

6.1.2 Sobrerrelaxação

Um outro algoritmo importante é o de sobrerrelaxação (SR). A atualização é feita através de (71)

$$R^{(\text{atualização})} \equiv [\tilde{\omega}^\dagger(y)]^\omega, \quad (6.28)$$

onde $1 < \omega < 2$. Se $\omega = 1$, recuperamos o algoritmo Los Alamos. Se $\omega = 2$, não temos mudança no funcional e o algoritmo não converge. Para fazer o cálculo de $[\tilde{\omega}^\dagger(y)]^\omega$, podemos usar a expansão binomial

$$[\tilde{\omega}^\dagger(y)]^\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\omega + 1)}{n! \Gamma(\omega + 1 - n)} [\tilde{\omega}^\dagger(y) - \mathbb{1}]^n. \quad (6.29)$$

Fazendo a expansão até $n = 1$, utilizando a relação

$$\tilde{\omega}^\dagger(y) = \mathbb{1} \text{Tr } \tilde{\omega} - \tilde{\omega}, \quad (6.30)$$

para fazer a reunitarização da matriz, alcançamos

$$g^{(\text{nov})} \equiv g^{(\text{over})} = \frac{\{\mathbb{1} + \omega [\tilde{\omega}^\dagger(y) - \mathbb{1}]\}}{\sqrt{1 + \omega(\omega - 1)[2 - \text{Tr} \tilde{\omega}]}} g^{(\text{antigo})} \quad (6.31)$$

6.1.3 Sobrerrelaxação Estocástica

Esse método corresponde em fazer (70)

$$g^{(\text{nov})}(y) \equiv g^{(\text{stoc})}(y) = \begin{cases} [\tilde{\omega}^\dagger(y)]^2 g(y), & \text{com probabilidade } p \\ \tilde{\omega}^\dagger(y) g(y), & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

onde $0 < p < 1$. Para o caso de $p = 0$, o algoritmo coincide com o Los Alamos, enquanto que para $p = 1$, ele não converge.

6.1.4 Cornell

Esse algoritmo é calculado utilizando a equação (72)

$$R^{(\text{atualização})} \equiv \exp \left[-\alpha (\nabla \cdot A^{(g)}) \right] \quad (6.32)$$

onde é utilizado que

$$\omega(y) = \omega^\dagger(y) + 2 \nabla \cdot A^{(g)}. \quad (6.33)$$

Com isso, aplicando a equação (6.33) em (6.32) e fazendo uma expansão de primeira ordem, o resultado para a matriz de transformação é

$$R^{(\text{atualização})}(y) = \left[1 - \frac{\alpha}{2} \text{Tr} \omega^\dagger(y) \mathbb{1} + \alpha \omega^\dagger(y) \right] \quad (6.34)$$

e com isso, aplicar a normalização para encontrar as novas matrizes $g^{(\text{nov})}(y)$.

6.2 SU(3)

Para SU(3), precisamos levar em consideração como esses mesmos algoritmos descritos em SU(2) devem ser escritos em SU(3). Para o algoritmo Cornell, a utilização é feita de maneira semelhante. Isso ocorre porque a matriz $R^{(\text{atualização})}(y)$ para esse algoritmo depende de matrizes que são elementos SU(3) e que permitem que acessemos o mínimo local de maneira exata.

Os outros algoritmos utilizados em SU(2) possuem o problema de não terem os elementos $\omega(n)$ ou $h(n)$ como sendo um elemento de SU(3). Por conta disso, é proposto

que o método de Cabibbo-Marinari para atualização de configurações de gauge $U_\mu(n)$ seja aplicada para atualização da matriz $g(n)$. (61)

Além disso, é observado um outro problema: os algoritmos de atualização de matrizes de gauge não acessa o mínimo do funcional. Suman e Schilling propõem um método em que se faz uma sucessão de hits em cada sítio da rede, de modo a se aproximar o máximo possível do mínimo local. A proposta deles é que se faça entre 5-7 hits para garantir que se acessou um valor muito próximo ao mínimo local. Seja para Los Alamos, SR ou SRE, todos eles necessitam desse processo. (43) Observamos ao buscar a reprodução dos passos trazidos por Suman e Schilling que o seu método para esses algoritmos citados carece de uma análise mais detalhada, pois há muitos parâmetros que precisam ser controlados para cada algoritmo utilizado. Tendo em vista esse problema, nós propomos fazer uma descrição mais assertiva e detalhada da teoria relacionada ao método proposto por Suman e Schilling.

Vamos fazer a descrição de Los Alamos, SR e SRE a seguir. Não incluiremos Cornell por ser semelhante ao utilizado em $SU(2)$.

6.2.1 Los Alamos

Para esse algoritmo, vamos utilizar o método de Cabibbo-Marianri, anteriormente utilizado para obter configurações de gauge $U_\mu(x)$ através de um algoritmo pseudo banho térmico. Esse método buscará encontrar um mínimo local aceitável, mas não é possível definir esse mínimo em sua maioria apenas com uma varredura em cada ponto da rede. A atualização local que faremos ocorrerá em um procedimento via três atualizações sucessivas de $g(y)$, utilizando submatrizes no $SU(2)$. Em analogia com o pseudo banho térmico, temos

$$g^{(\text{nov})}(y) = T^{(\text{atualização})}(y) S^{(\text{atualização})}(y) R^{(\text{atualização})}(y) g^{(\text{antigo})}(y), \quad (6.35)$$

onde vamos fazer definir uma matriz $A^{(\text{atualização})} = T^{(\text{atualização})} S^{(\text{atualização})} R^{(\text{atualização})}$. As matrizes R , S e T são construídas através dos elementos de $SU(2)$ como na geração dos links. Primeiro, vamos tratar do termo $R^{(\text{atualização})}$, considerando que $S^{(\text{atualização})} = T^{(\text{atualização})} = 1$. Definimos $R^{(\text{atualização})} \equiv \tilde{\omega}_R^\dagger(y)$, sendo que

$$\tilde{\omega}_R(y) = g(y) h(y). \quad (6.36)$$

Esse elemento terá o complexo conjugado tomado e em seguida, reduzido a uma

matriz $SU(2)$. Sendo a matriz $R^{(\text{atualização})}$ definida como

$$R^{(\text{atualização})} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 0 \\ -r_2^* & r_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

onde r_1 e r_2 são números complexos. A redução de $\omega_R^\dagger(y)$ será tal que

$$r_1 = \frac{\text{Re}(\omega_{11} + \omega_{22}) - i \text{Im}(\omega_{11} - \omega_{22})}{2} \quad (6.38)$$

$$r_2 = -\frac{\text{Re}(\omega_{12} - \omega_{21}) + i \text{Im}(\omega_{12} + \omega_{21})}{2} \quad (6.39)$$

Além disso, é preciso fazer a normalização desses elementos, dividindo a matriz R pelo determinante $N_R = \sqrt{r_1 r_1^* + r_2 r_2^*}$. Esse resultado resultará em

$$g'(y) = R^{(\text{atualização})}(y) g(y) \quad (6.40)$$

Com a primeira matriz finalizada, o mesmo procedimento deve ser feito para $S^{(\text{atualização})}$, considerando também as duas outras matrizes como identidade. Assim, $\tilde{\omega}_S = g'(y) h(y)$ é calculado. Seguindo então a lógica utilizada para $R^{(\text{atualização})}$, pode-se obter

$$S^{(\text{atualização})} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2^* & 0 & s_1^* \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

$$s_1 = \frac{\text{Re}(\omega_{11} + \omega_{33}) - i \text{Im}(\omega_{11} - \omega_{33})}{2} \quad (6.42)$$

$$s_2 = -\frac{\text{Re}(\omega_{13} - \omega_{31}) + i \text{Im}(\omega_{13} + \omega_{31})}{2} \quad (6.43)$$

A normalização para a matriz S será dada agora como $N_S = \sqrt{s_1 s_1^* + s_2 s_2^*}$. Assim, obtêm-se

$$g''(y) = S^{(\text{atualização})} g'(y) \quad (6.44)$$

Finalmente, fazemos $\tilde{\omega}_T = g''(y) h(y)$. Considerando as matrizes S e R como identidade e utilizando processo semelhante, temos

$$T^{(\text{atualização})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 \\ 0 & -t_2^* & t_1^* \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

$$t_1 = \frac{\operatorname{Re}(\omega_{22} + \omega_{33}) - i \operatorname{Im}(\omega_{22} - \omega_{33})}{2} \quad (6.46)$$

$$t_2 = -\frac{\operatorname{Re}(\omega_{23} - \omega_{32}) + i \operatorname{Im}(\omega_{23} + \omega_{32})}{2} \quad (6.47)$$

com a normalização $N_T = \sqrt{t_1 t_1^* + t_2 t_2^*}$. Isso resulta em

$$g'''(y) = T^{(\text{atualização})} g''(y), \quad (6.48)$$

onde nesse caso, $g'''(y) \equiv g^{\text{nov}}(y)$.

Dessa maneira, para cada atualização de Los Alamos para $SU(3)$, é necessário fazer pelo menos uma vez esse procedimento.

6.2.2 Sobrerrelaxação

Seguindo a ideia do algoritmo de SR em $SU(2)$ e o que foi descrito para Los Alamos em $SU(3)$, vamos utilizar a fórmula $A^{(\text{atualização})} = T^{(\text{atualização})} S^{(\text{atualização})} R^{(\text{atualização})}$. Nesse caso, temos

$$[A^{(\text{atualização})}]^\omega = \left\{ \mathbb{1} + \omega [A^{(\text{atualização})} - \mathbb{1}] \right\}. \quad (6.49)$$

Agora, basta seguir o passo a passo do algoritmo para $SU(2)$.

6.2.3 Sobrerrelaxação Estocástica

Seguindo a ideia do algoritmo de SR em $SU(2)$ e o que foi descrito para Los Alamos em $SU(3)$, a mudança aqui é simples, pois basta que tenhamos

$$g^{(\text{nov})}(y) \equiv g^{(\text{stoc})}(y) = \begin{cases} [A^{(\text{atualização})}]^2 g(y), & \text{com probabilidade } p \\ A^{(\text{atualização})} g(y), & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases} \quad (6.50)$$

7 PROPAGADOR DO GLÚON NA REDE

Com a fixação de gauge de Landau realizada, o próximo passo é escrever os propagadores que são dependentes desse processo de fixação. Nessa tese, vamos desenvolver o propagador do glúon. Ele será desenvolvido tanto para temperatura zero quanto para temperatura finita.

7.1 Propagador do Glúon em Temperatura Zero

Em temperatura zero, o propagador do glúon no espaço de coordenadas é dado por (42, 73)

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) \equiv \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle. \quad (7.1)$$

Como buscamos a análise no espaço dos momentos, utilizamos a transformada de Fourier (74)

$$A_\mu^a(p) = \sum_x e^{2\pi i p x} A_\mu^a(x) \quad (7.2)$$

$$= \sum_x A_\mu^a(x) [\cos(2\pi p x) + i \sin(2\pi p x)]. \quad (7.3)$$

A transformação acima é importante, pois é necessário escrever o propagador no espaço dos momentos como sendo

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D(p). \quad (7.4)$$

Vamos agora definir o propagador na rede. Fazendo as devidas transformações na equação acima, podemos encontrar as componentes de $D(p)$ na rede, que dependem de $\langle A_\mu(p) A_\mu(-p) \rangle$. As componentes podem ser definidas como

$$\begin{aligned} D(0) &\equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1) N_d V} \sum_{\mu, a} \left\langle \left[\sum_n A_\mu^a(n) \right]^2 \right\rangle, \\ D(p) &\equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1) (N_d - 1) V} \sum_{\mu, a} \left\langle \left\{ \left[\sum_n A_\mu^a(n) \cos(2\pi p \cdot n) \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\sum_n A_\mu^a(n) \sin(2\pi p \cdot n) \right]^2 \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (7.5)$$

sendo $N_c = 2$ a dimensão do grupo (pois o desenvolvimento está sendo feito para teoria de gauge no $SU(2)$) e $N_d = 4$ a dimensão do espaço-tempo. Aqui, p tem componentes p_μ dadas por $p_\mu N \equiv 0, 1, 2, \dots, N - 1$, sendo N o tamanho da rede. É importante considerar que $D(0)$ não é dado por $D(p)$ em $p = 0$. Olhando a equação acima com $1/V$, vemos que as componentes do propagador são separadas, sendo cada uma delas gerando uma contribuição diferente para propagadores com $p = 0$ e $p \neq 0$. O motivo para isso é a condição de transversalidade do gauge de Landau, como pode ser visto na equação (6.1). Para $p \neq 0$, três das quatro componentes de Lorentz do campo $A_\mu(p)$ no espaço dos momentos são independentes. Isso faz com que o termo $D(p)$ tenha um fator $N_d - 1$ enquanto que $D(0)$ tenha um fator N_d .

7.2 Propagador do Glúon na Rede em Temperatura Finita

Para o propagador do gluon em temperatura finita, é necessário escrevê-lo através da decomposição (75, 76)

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = P_{\mu\nu}^T(p)D_T^{ab}(p) + P_{\mu\nu}^L(p)D_L^{ab}(p), \quad (7.6)$$

onde os índices T e L representam as componentes transversal e longitudinal do propagador. Os projetores acima podem ser escritos como

$$P_{\mu\nu}^T(p) = (1 - \delta_{\mu 0})(1 - \delta_{\nu 0}) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), \quad (7.7)$$

$$P_{\mu\nu}^L(p) = P_{\mu\nu}(p) - P_{\mu\nu}^T(p). \quad (7.8)$$

Sendo assim, para os propagadores transversal e longitudinal do gluon na rede a temperatura finita temos que, para $p = 0$

$$D_T(0) \equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1)(N_d - 1)V} \sum_{\mu,a} \left\langle \left[\sum_n A_\mu^a(n) \right]^2 \right\rangle, \quad (7.9)$$

$$D_L(0) \equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1)V} \sum_{\mu,a} \left\langle \left[\sum_n A_\mu^a(n) \right]^2 \right\rangle. \quad (7.10)$$

No caso de $p \neq 0$, os propagadores serão dados por

$$D_T(p) \equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1)(N_d - 2)V} \sum_a \left\langle \sum_{\mu=1}^3 A_\mu^a(p)A_\mu^a(-p) - \frac{p_0^2}{p^2} A_0^a(p)A_0^a(-p) \right\rangle, \quad (7.11)$$

$$D_L(p) \equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1)V} \left(1 + \frac{p_0^2}{p^2} \right) \sum_a \langle A_0^a(p)A_0^a(-p) \rangle. \quad (7.12)$$

Quando $p_0 = 0$, D_T coincide com o propagador tridimensional do glúon, enquanto D_L pode ser identificado como o propagador do tipo campo de Higgs na teoria de tridimensional reduzida*. Essas identificações permitem associarmos D_T ao que chamamos de setor magnético e D_L ao setor elétrico. Como uma das consequências desta teoria a temperatura finita é que os propagadores dependem separadamente da energia p_0 e do momento \vec{p} , trabalharemos com os propagadores transversal e longitudinal desta maneira, escrevendo-os como

$$D_T(p) \equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1)(N_d - 2)V} \sum_a \sum_{\mu=1}^3 \left\langle \left\{ \left[\sum_n A_\mu^a(n) \cos(2\pi p \cdot n) \right]^2 + \left[\sum_n A_\mu^a(n) \sin(2\pi p \cdot n) \right]^2 \right\} \right\rangle, \quad (7.13)$$

$$D_L(p) \equiv \frac{1}{(N_c^2 - 1)V} \sum_a \left\langle \left\{ \left[\sum_n A_0^a(n) \cos(2\pi p \cdot n) \right]^2 + \left[\sum_n A_0^a(n) \sin(2\pi p \cdot n) \right]^2 \right\} \right\rangle. \quad (7.14)$$

* A altas temperaturas, pela relação da equação (5.1), para $T \rightarrow \infty$, temos que a coordenada N_t desaparece, e temos uma redução dimensional do espaço-tempo quadridimensional para o espaço tridimensional.

8 RESULTADOS DE FIXAÇÃO DE GAUGE PARA SU(2)

Nesse capítulo, faremos um detalhamento da geração de configurações de gauge antes dos resultados referentes a fixação de gauge de Landau.

8.1 Gerador de Configurações de Gauge

Para construirmos as configurações de gauge, é necessário garantir que elas passem pelo processo de *termalização*, no qual essas configurações alcançam equilíbrio. Esse processo é feito utilizando uma configuração pré determinada como ponto de partida da cadeia de Markov. Nossa inicialização é feito com a *partida fria*, que define a configuração de gauge como sendo a matriz identidade. Para garantirmos que o processo de termalização foi alcançado, definimos um observável (no nosso caso, definimos o somatório sobre a plaqueta) para medir a sua estabilidade. Ela se dá pela flutuação em torno de um valor médio para os volumes de rede e β s escolhidos. Abaixo podemos ver um gráfico que representa a termalização das plaquetas em relação as varreduras (sweeps) a partir de um valor médio de plaqueta. Esses valores foram escolhidos com base nos resultados encontrados por Teper e Lucini. (1)

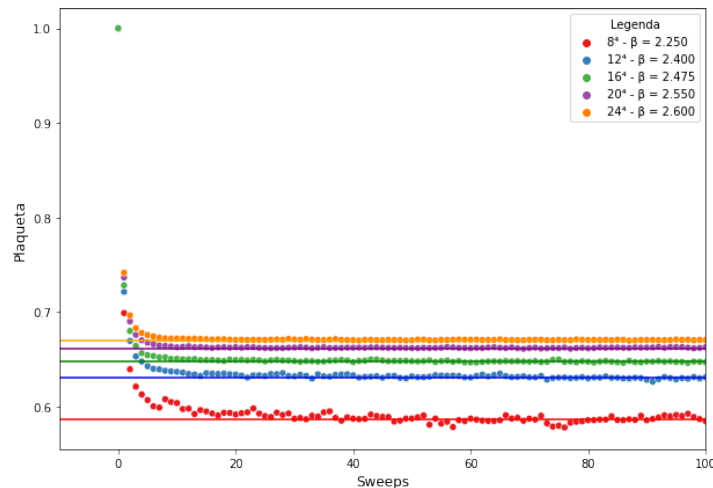


Figura 2 – Gráfico da termalização para teoria SU(2) em temperatura zero. Valores de β e Volume de rede retirados de Teper e Lucini. (1)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Algo importante de se observar é que para a figura (2), há uma flutuação maior para os valores de plaqueta em volumes de rede menores, enquanto que para volumes de rede maiores, essa flutuação é relativamente menor.

Com as configurações de gauge devidamente termalizadas, o próximo passo é utilizar configurações que estejam descorrelacionadas, ou seja, independentes entre si. A maneira que escolhemos para encontrarmos essas configurações é através de um método que nos mostre o número de varreduras necessários para que as configurações de gauge sejam independentes entre si. O método utilizado é o *Binning*. (38) Esse método consiste em considerar um observável P , no qual cada medida vale p^n , onde $n = 1, \dots, N_{conf}$. Assim, definimos um algoritmo que divide suas medidas em sub-blocos de tamanho K , de modo que as médias sejam calculadas para cada sub-bloco. Essa média será chamada de p_K^m , onde $m = 1, \dots, N_K$. (55) Podemos ver abaixo como é feito o cálculo da média de cada sub-bloco:

$$\begin{aligned} p_K^1 &= \frac{p^1 + p^2 + p^3 + \dots + p^K}{K} \\ p_K^2 &= \frac{p^{K+1} + p^{K+2} + p^{K+3} + \dots + p^{2K}}{K} \\ p_K^3 &= \frac{p^{2K+1} + p^{2K+2} + p^{2K+3} + \dots + p^{3K}}{K} \\ &\vdots \\ p_K^n &= \frac{p^{(n-1)K+1} + p^{(n-1)K+2} + p^{(n-1)K+3} + \dots + p^{nK}}{K}. \end{aligned}$$

Com isso, calculamos a variância

$$var_p^K = \frac{1}{N_K - 1} \sum_{n=1}^{N_K} N_K [p_K^n - \bar{P}]^2. \quad (8.1)$$

É esperado que a variância decaia em $1/K$ para diferentes tamanhos de sub-blocos. Em seguida, traçamos um gráfico tanto com a variância quanto um ajuste para uma função $f(K) = a/K + b$, sendo a e b valores constantes, ambos para o eixo horizontal K . Dizemos que as configurações estão descorrelacionadas quando a curva feita no ajuste se encontra com a curva feita para as diferentes variâncias de tamanhos dos sub-blocos. Logo, o valor de K nesse encontro nos mostra qual é o número de varreduras necessários para que as configurações de gauge estejam completamente independentes entre si. Para as plaquetas, as figuras (3) e (4) reproduzem a aplicação do método Binning.

Foi observado para os gráficos da figura (3) que a descorrelação ocorrerá somente após 119 varreduras, enquanto que para os gráficos da figura (4) ocorrerá para 116 varreduras. Comparamos com alguns resultados encontrados para plaqueta em SU(2) em (1) e disponibilizamos esses resultados na tabela (1). Esse comparativo é um ótimo indicador de que o gerador de números aleatórios para o banho térmico está funcionando bem, assim como o método utilizado para descorrelação das configurações de gauge.

É importante ressaltar que para diferentes observáveis, é necessário que as configurações de gauge passem pela metodologia de descorrelação deste mesmo observável.

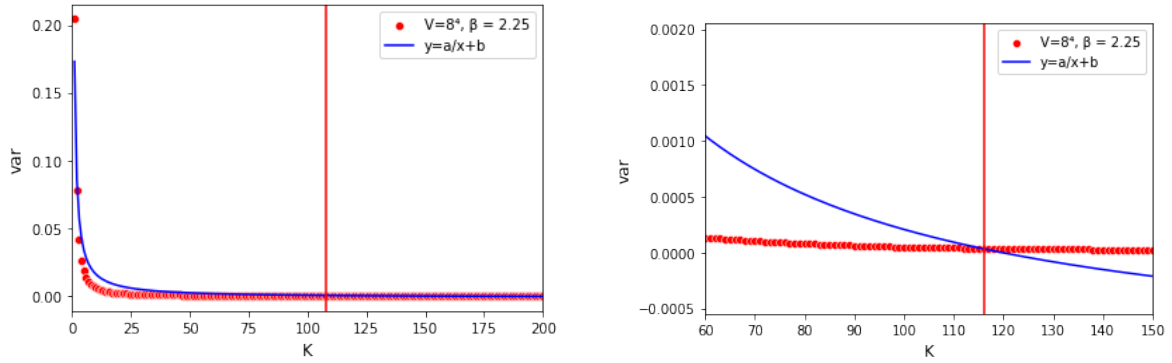


Figura 3 – Gráfico de aplicação de binning para Volume 8^4 e $\beta = 2.25$. A plaqueta foi utilizada como observável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

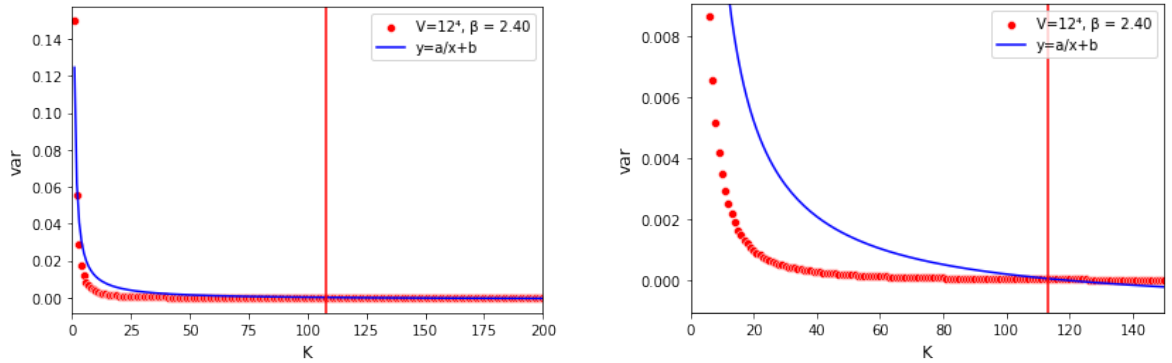


Figura 4 – Gráfico de aplicação de binning para Volume 12^4 e $\beta = 2.40$. A plaqueta foi utilizada como observável.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 1 – Tabela com valores de plaqueta calculados em relação a alguns valores de referência. (1)

Volume	β	Configurações	Varreduras	P_{calc}	P_{ref}
8^4	2.250	65000	119	0.586212(12)	0.586207(29)
12^4	2.400	35000	116	0.630004(23)	0.629995(17)
16^4	2.475	36000	114	0.646912(22)	0.646921(10)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Entretanto, para o cálculo de propagadores, não é possível utilizar o próprio propagador como um observável no Binning por haver um enorme custo computacional para produzi-los. Para casos específicos como esses, é preciso eleger algum outro observável que possa representá-lo no algoritmo de decorrelação. Foi escolhido para o propagador do glúon o módulo do loop de Polyakov por se tratar do parâmetro de ordem dentro da teoria na ausência de quarks. Essa mesma escolha de parâmetro foi feita por Cucchieri em (42), mas utilizando outro método de decorrelação.

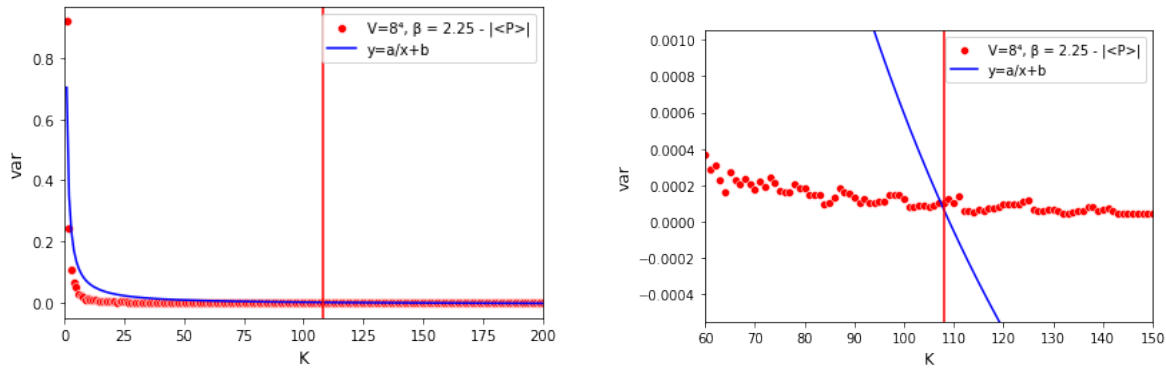


Figura 5 – Gráfico de aplicação de binning para Volume 8^4 e $\beta = 2.25$. O módulo do loop de Polyakov foi utilizada como observável

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura (5) nos mostra o método Binning sendo aplicado ao módulo do loop de Polyakov. Para esse caso, é necessário utilizar 108 varreduras para ocorrer a decorrelação.

8.2 Fixação de Gauge de Landau

O processo de fixação de gauge de Landau em si não necessita de configurações decorrelacionadas, pois ele trabalha em cada configuração separadamente. Entretanto, a decorrelação é essencial para o cálculo do propagador do glúon.

Vamos fazer previamente uma análise descritiva do processo de fixação de gauge de Landau. Em seguida, aplicaremos essa análise a redes em temperatura finita e estudaremos os seus casos.

8.2.1 Introdução da Análise Exploratória

O primeiro passo para tratarmos da fixação de gauge de Landau é o de construir gráficos que mostrem os passos utilizados pelos algoritmos de fixação. Esse gráfico deve relacionar mais especificamente o número de varreduras (vamos padronizar como *sweeps* a partir de agora) necessários para alcançar $e_2 < 10^{-12}$. Como exemplo disso, vamos utilizar os algoritmos SR e SRE, que dependem dos parâmetros ω e p . Utilizando uma configuração de gauge para volume $8^3 \times 4$ e $\beta = 2.2836791$, pode-se ver na figura (6) o número necessário de varreduras para termos o gauge fixado em diferentes parâmetros de cada um dos algoritmos que listamos como exemplo.

Vemos que para SR na figura (6), o parâmetro $\omega = 1.73$ alcança $e_2 < 10^{-12}$ mais rápido do que os outros parâmetros. Já para o caso de SRE, o parâmetro que melhor performou foi $p = 0.72$. Um ponto importante a ser levantado é que SRE não é determinístico como SR. Isso se dá pelo fato de SRE depender de sorteios vindos de um gerador de números aleatórios. Logo, toda vez que uma mesma configuração passar

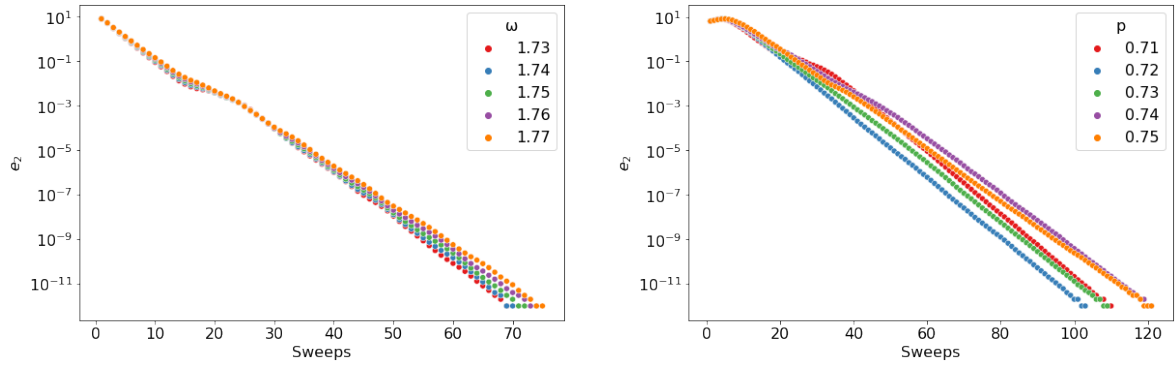


Figura 6 – O gráfico da esquerda mostra como uma configuração específica decai sob o algoritmo SR para valores diferentes de ω . O gráfico da direita mostra como a mesma configuração do gráfico anterior se comporta para o algoritmo SRE para valores diferentes de p . Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ e $\beta = 2.2836791$. Ambos os gráficos estão com escala logarítmica para o eixo vertical.

Fonte: Elaborada pelo autor.

por pelo algoritmo SRE com o parâmetro p fixado, obteremos um valor diferente de sweeps para a fixação do gauge. Por SR ser determinístico (não depende de um gerador de números aleatórios), podemos rodar o mesmo algoritmo diversas vezes para uma mesma configuração com os mesmos parâmetros, que o resultado final será o mesmo. Dessa forma, a natureza aleatória de SRE produz uma instabilidade que não é observada para SR.

Não podemos ignorar que SR e SRE são algoritmos de melhoria desenvolvidos a partir de Los Alamos. Por isso, é esperado que eles performem melhor. Isso pode ser observado na figura (7). Foi utilizado o parâmetro ω de SR e o parâmetro p de SRE que tiveram melhor desempenho com base na figura (6) e comparamos com o Los Alamos nessas mesmas condições. O resultado mostra uma diferença bem significativa dos algoritmos SRE e SR em relação a Los Alamos. Esse mesmo comportamento pode ser observado para diferentes configurações, onde os melhores parâmetros de SRE e SR sempre tiveram melhor desempenho que Los Alamos*. Por esse motivo, a análise descritiva feita a partir daqui não envolverá o Los Alamos, pois não é um algoritmo de bom desempenho.

O passo seguinte de nossa análise é utilizar medidas de tendência central a partir de um conjunto de configurações de gauge. Nada nos garante que um mesmo ω sendo aplicado a diferentes configurações de mesmo volume e β tragam o mesmo número de varreduras para que o gauge de Landau seja fixado. Isso se deve a natureza única de cada configuração de gauge. Por conta disso, as medidas de tendência central irão nos auxiliar a encontrarmos os parâmetros que estatisticamente tiveram melhor desempenho para um conjunto de configurações de gauge em condições de volume e β especificados. As medidas de tendência mais utilizadas em análises como essas são a média e a mediana. A média em

* Lembrando que o Los Alamos equivale ao SR para o parâmetro $\omega = 1.0$ e SRE para $p = 0.0$.

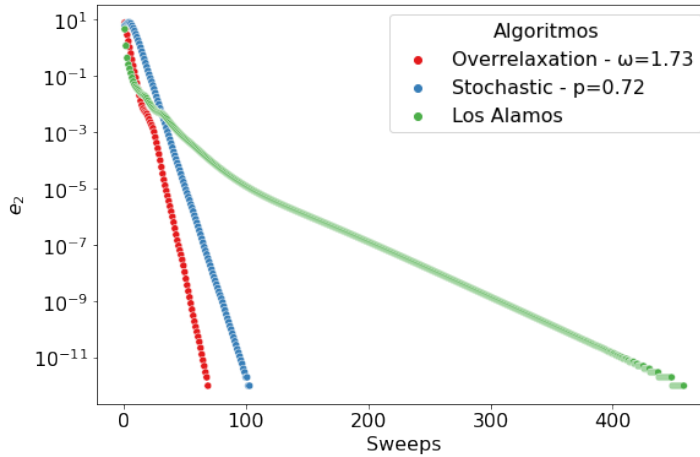


Figura 7 – Comparação de algoritmos para a mesma configuração de gauge. Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ e $\beta = 2.2836791$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

geral é melhor utilizada quando estamos lidando com uma distribuição normal. Para casos em que esse comportamento não é observado, como distribuições assimétricas a esquerda ou a direita, o ideal é utilizar a mediana como melhor medida de tendência. A compreensão do tipo de distribuição a ser trabalhada pode ser alcançado através da aplicação do teste de normalidade de *Shapiro-Wilk*. (77)

O teste parte de uma hipótese nula, que diz que a distribuição da amostra é normal. Sendo assim, caso o valor-p seja menor que a diferença da porcentagem do nível de confiança em relação ao todo (por exemplo, para nível de confiança de 2σ , que equivale a 95%, seria uma diferença do valor-p em relação a 0.05), a hipótese nula é rejeitada e utilizamos uma hipótese alternativa de que os dados não são normalmente distribuídos. A tabela (2) mostra a estatística do teste W e *valor - p* para as diferentes temperaturas em $8^3 \times 4$ na aplicação dos algoritmos SR e SRE, com um nível de confiança de 5σ , que equivale a 99.9994%[†]. Vale ressaltar que todas as distribuições de dados que obtivemos tiveram comportamento não normal e por conta disso serão tratadas como mediana. Foi utilizado a biblioteca do python Scipy com a função **shapiro(x)**, que retorna o valor de W e o valor-p diretamente.

Entretanto, não é aconselhável que este teste seja utilizado para um número de observáveis maior que 50. Por conta disso, vamos utilizar o teste de normalidade de *Kolmogorov-Smirnov*. Esse teste (também chamado de teste KS) consiste na comparação de amostras com uma distribuição de probabilidade de referência. Ao definirmos o distribuição como sendo a normal, é possível através desse teste validarmos se as distribuições de nosso problema são de fato normais ou não. (78, 79) Logo, como desejamos ter o maior número

[†] Esse valor foi usado para todos os testes de Shapiro-Wilk.

Tabela 2 – Tabela com dados valor-p e W para teste de Shapiro-Wilk para os algoritmos SR, SRE e Cornell para tamanho de rede de $8^3 \times 4$ e 300 configurações.

T/T_c	W_{over}	$valor - p_{over}$	W_{stoch}	$valor - p_{stoch}$	$W_{cornell}$	$valor - p_{cornell}$
0.80	0.58	2.32×10^{-26}	0.48	9.35×10^{-29}	0.67	1.08×10^{-23}
0.90	0.47	6.07×10^{-29}	0.40	2.33×10^{-30}	0.55	4.30×10^{-27}
0.95	0.54	3.05×10^{-27}	0.56	6.11×10^{-27}	0.54	2.41×10^{-27}
0.98	0.46	4.22×10^{-29}	0.48	1.16×10^{-28}	0.55	5.98×10^{-27}
1.00	0.65	1.84×10^{-24}	0.41	4.77×10^{-30}	0.60	9.84×10^{-26}
1.02	0.51	6.67×10^{-28}	0.39	1.63×10^{-30}	0.55	4.73×10^{-27}
1.05	0.65	3.69×10^{-24}	0.51	6.25×10^{-28}	0.64	9.73×10^{-25}
1.10	0.55	5.88×10^{-27}	0.24	3.91×10^{-33}	0.57	1.34×10^{-26}
1.20	0.39	1.60×10^{-30}	0.37	8.30×10^{-31}	0.54	2.31×10^{-27}
1.50	0.65	3.18×10^{-24}	0.61	1.71×10^{-25}	0.71	1.52×10^{-22}
2.00	0.48	1.30×10^{-28}	0.61	1.67×10^{-25}	0.61	1.67×10^{-25}

Fonte: Elaborada pelo autor.

possível de amostrar para avaliar a fixação de gauge de Landau, o teste KS vai ser na maioria das vezes, o ideal a ser utilizado. Foi utilizado a biblioteca do python Scipy com a função `kstest(x, cdf="norm")`, que retorna o valor de KS e o valor-p diretamente. A tabela (3) nos mostra os resultados para as mesmas condições da tabela (2).

Tabela 3 – Tabela com dados valor-p e KS para teste de Kolmogorov-Smirnov para os algoritmos SR, SRE e Cornell para tamanho de rede de $8^3 \times 4$ e 300 configurações.

T/T_c	KS_{over}	$valor - p_{over}$	KS_{stoch}	$valor - p_{stoch}$	$KS_{cornell}$	$valor - p_{cornell}$
0.80	0.26	1.31×10^{-19}	0.49	3.47×10^{-68}	0.22	3.98×10^{-13}
0.90	0.30	9.92×10^{-25}	0.55	5.48×10^{-85}	0.25	1.81×10^{-17}
0.95	0.28	1.19×10^{-21}	0.43	1.06×10^{-51}	0.26	4.77×10^{-19}
0.98	0.31	4.22×10^{-25}	0.40	1.58×10^{-58}	0.25	1.61×10^{-17}
1.00	0.24	1.56×10^{-15}	0.41	3.16×10^{-44}	0.22	7.89×10^{-14}
1.02	0.29	3.01×10^{-23}	0.48	1.35×10^{-63}	0.26	6.01×10^{-18}
1.05	0.23	9.41×10^{-15}	0.47	5.54×10^{-62}	0.23	5.20×10^{-14}
1.10	0.26	6.11×10^{-19}	0.47	2.80×10^{-60}	0.25	1.44×10^{-17}
1.20	0.31	1.21×10^{-26}	0.43	8.09×10^{-53}	0.25	9.71×10^{-17}
1.50	0.24	1.84×10^{-15}	0.38	4.39×10^{-40}	0.22	4.55×10^{-13}
2.00	0.31	3.80×10^{-26}	0.47	1.42×10^{-62}	0.26	3.20×10^{-18}

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base em nossos resultados de normalidade das tabelas (2) e (3), podemos perceber que essas distribuições não são normais, o que nos leva a utilizar a mediana como sendo a nossa medida de tendência central. Testamos para muitas outras configurações de gauge e encontramos que todas são distribuições normais de fixação de gauge. Usaremos a mediana para calcularmos o melhor parâmetro ω de SR, p de SRE e α de Cornell para as configurações que apresentavam as mesmas condições de volume e temperatura. A figura (8) exemplifica a maneira de encontrar os valores ideais de mediana a partir de parâmetros

distintos em um mesmo algoritmo.

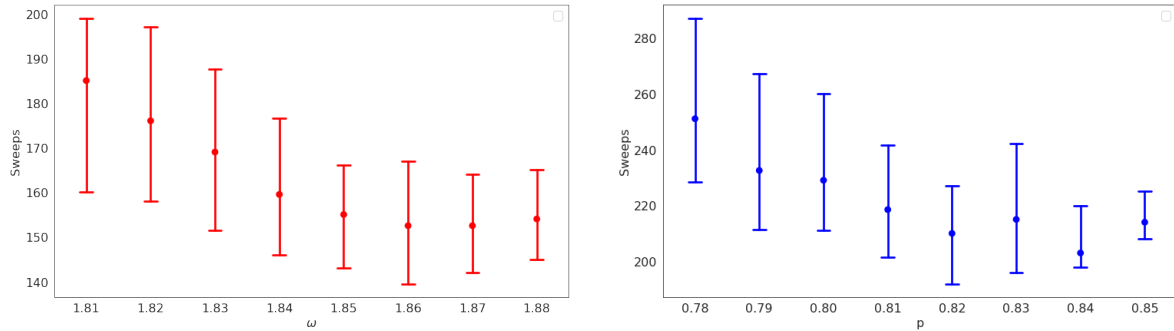


Figura 8 – O gráfico da esquerda representa o cálculo de mediana para SR ao longo de diferentes valores de ω . O gráfico da direita representa o cálculo de mediana para SRE ao longo de diferentes valores de p . Foi utilizado volume 12×4 , $\beta = 2.2836791$ e 5σ de nível de confiança.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por estarmos trabalhando com distribuição de dados, um gráfico importante é o gráfico de caixa (boxplot). Ele é construído a partir de 5 pontos: limite inferior, primeiro quartil, mediana (segundo quartil), terceiro quartil e limite superior. Os limites superior e inferior são utilizados para detectar valores que estão distantes da maior concentração de dados. Os quartis definem onde serão encontrados 50% dos dados. Logo, o primeiro quartil (Q_1) é marcado em 25% e o terceiro quartil Q_3 em 75% dos dados distribuídos. Esses dois quartis definem a caixa que forma o boxplot, onde a mediana está presente dentro dele [‡]. Quando a mediana está próxima do terceiro quartil, mostra uma densidade de dados deslocada para a esquerda, enquanto uma mediana mais próxima do segundo quartil mostra uma densidade de dados deslocada para a direita. Os limites superiores (LS) e inferiores (LI) são calculados a partir do intervalo interquartil (IQR), definido pela subtração do valor do terceiro quartil pelo primeiro. O cálculo desses limites é feito a partir das equações abaixo (80):

$$LI = Q_1 - \frac{3}{2}IQR \quad (8.2)$$

$$LS = Q_3 - \frac{3}{2}IQR \quad (8.3)$$

Vale ressaltar que nesse caso, LI e LS funcionam como pontos de corte. O gráfico não necessariamente será traçado sobre esses valores, pois eles são linhas imaginárias que vão definir onde os limitantes ficarão. Caso LI seja maior que o valor mínimo observável, então o limite inferior será o menor observável na amostra acima dessa quantidade e caso ele seja menor ou igual, o limite inferior se torna o próprio valor mínimo. Por outro lado,

[‡] Vale ressaltar que a mediana não precisa estar necessariamente no centro do caixa.

se LS for menor que o valor máximo observável, então o limite superior será o menor observável abaixo dessa quantidade. Do mesmo modo, se LS for maior ou igual que o valor máximo observável na amostragem, então o limite superior será o próprio máximo. Logo, o limitantes que serão vistos no gráfico (não necessariamente o valor calculado para LI e LS) serão os observáveis que estão mais distantes da grande concentração de dados, mas que não ultrapassou os pontos de corte. Todos os dados que estiverem fora dos pontos de corte são os outliers.

Por fim, é necessário utilizar um teste de inferência estatística para compreendermos quais são os melhores algoritmos a serem utilizados nos diversos casos que serão trabalhados. Como estamos trabalhando com distribuições que não são normais e que todas são independentes entre si e serão comparados apenas os dois melhores algoritmos por caso, o melhor teste é o de Mann-Whitney. (81) Esse teste consiste que para cada distribuição, será calculado os seguintes valores da estatística U:

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 \quad (8.4)$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2 \quad (8.5)$$

onde n_1 e n_2 correspondem a quantidade de dado presentes em cada distribuição, R_1 e R_2 a soma de todos os valores que se deseja compreender o teste (Nesse caso, a soma do total de varreduras de todas as configurações de gauge utilizadas para o algoritmo no caso específico). O passo seguinte é utilizar de uma tabela de valores de U crítico, que pode ser encontrado na tabela VIII de. (82) Essa tabela possui valores de n_1 em colunas e n_2 em linhas, de modo que utilizando o n_1 e n_2 em questão, se encontre um valor na intersecção deles. Entretanto, para números altos de amos (mais de 50 por exemplo), pode-se fazer uma aproximação a distribuição normal e calcular um valor de um valor de z , dado por

$$z = \frac{U_{obs} - U_{esp}}{\text{Erro Padrão}_U}, \quad (8.6)$$

sendo que $U_{obs} = \max(U_1, U_2)$, U_{esp} é a média de U_1 e U_2 e Erro Padrão_U é dado por

$$\text{Erro Padrão}_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}. \quad (8.7)$$

Com esse valor de z , é possível chegar no valor-p, através da tabela de valores de z presente na tabela III de. (82) Par facilitar o processo dos cálculos, foi utilizada a biblioteca `sciPy` do Python, que disponibiliza a a função `mannwhitneyu(x, y, alternative='less')`, onde a alternativa como `less` ter sido escolhida quer dizer que partimos do pressuposto H_1 de que a distribuição de x é estocasticamente menor que a distribuição de y . Essa função

retorna tanto o U quanto o valor- p , o que nos facilita comparar com o valor- p baseado no nível de confiança utilizado para nosso caso. Para trabalharmos com um critério bem rigoroso de uso dos algoritmos, será utilizado um nível de confiança de 5σ , equivalente a 99.9994%.

8.3 Temperatura Finita

Para o caso de fixação de gauge no $SU(2)$ em temperatura finita, serão utilizados 11 valores diferentes de temperatura. Eles podem ser vistos na tabela (4), onde o mesmo valor de temperatura é utilizado para duas combinações diferentes de N_t e β . Foram utilizados nessa análise os seguintes volumes de rede e número de configurações:

- $V = 8^3 \times 4$ e 300 configurações.
- $V = 12^3 \times 4$ e 250 configurações.
- $V = 16^3 \times 4$ e 200 configurações.
- $V = 24^3 \times 4$ e 170 configurações.
- $V = 48^3 \times 4$ e 100 configurações.
- $V = 12^3 \times 8$ e 250 configurações.
- $V = 16^3 \times 8$ e 200 configurações.
- $V = 24^3 \times 8$ e 120 configurações.
- $V = 32^3 \times 8$ e 70 configurações.

Tabela 4 – Valores de temperatura finita com seus respectivos valores de N_t e β para teoria $SU(2)$.

T/T_c	N_t	β	N_t	β
0.80	4	2.2328599	8	2.4428372
0.90	4	2.2676322	8	2.4789860
0.95	4	2.2836791	8	2.4956504
0.98	4	2.2929299	8	2.5052527
1.00	4	2.2989500	8	2.5115000
1.02	4	2.3048581	8	2.5176294
1.05	4	2.3135185	8	2.5266121
1.10	4	2.3274471	8	2.5410534
1.20	4	2.3535978	8	2.5681478
1.50	4	2.4212325	8	2.6381141
2.00	4	2.5095845	8	2.7292909

Fonte: Elaborada pelo autor.

8.3.1 Comparação de Temperatura para Volumes de Rede Distintos

Para podermos traçar a eficiência de qual algoritmo deve ser utilizado, o critério de ordem escolhida para as análises foi primeiro fixar os valores da direção temporal. Faremos os cálculo primeiro para $N_t = 4$ fixado e depois para $N_t = 8$. Em seguida, para cada volume espacial após termos as direções temporais fixadas, serão feitos diversos β em um intervalo $0.80 < T/T_c < 2.00$. Lembrando que o parâmetro de fixação nesse caso é e_2 .

Logo, o primeiro caso de estudo é o representado na tabela (5), que compara a mediana de sweeps para fixação de gauge de Landau considerando os algoritmos SR, SRE e Cornell em volume $N = 8^3 \times 4$ com 300 configurações para 11 valores de β (e consequentemente, de temperatura, como pode ser visto na tabela (4)).

Tabela 5 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $8^3 \times 4$ e 300 configurações.

T/T_c	$\alpha_{ótimo}$	$e_{2(\alpha)}$	$p_{ótimo}$	$e_{2(p)}$	$\omega_{ótimo}$	$e_{2\omega}$
0.80	0.275	130.0	0.74	123.5	1.79	89.0
0.90	0.272	125.0	0.75	125.0	1.81	91.0
0.95	0.270	117.0	0.71	116.5	1.79	89.0
0.98	0.268	109.0	0.72	116.0	1.78	84.0
1.00	0.267	107.5	0.70	115.0	1.78	89.5
1.02	0.267	103.0	0.73	114.0	1.78	87.0
1.05	0.266	103.5	0.72	115.0	1.76	86.0
1.10	0.265	104.0	0.72	113.0	1.77	86.0
1.20	0.265	110.5	0.72	112.5	1.75	90.5
1.50	0.256	96.0	0.69	107.0	1.76	87.0
2.00	0.248	82.0	0.68	96.0	1.76	75.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível observar na figura (9) que SR tem melhor desempenho que outros algoritmos, por apresentar menor mediana e tamanho de caixa no boxplot. Entretanto, conforme a temperatura está aumentando, o número de sweeps diminui drasticamente para Cornell. Esse gráfico é importante pois mostra o tamanho da caixa que acopla 75% dos dados em cada algoritmo, além dos tamanhos dos limites superiores. É possível ver que mesmo que Cornell tenha uma queda conforme a temperatura aumenta, o tamanho da caixa e o limite superior acabam sendo bem altos em relação ao SR. Entretanto, esse volume de rede é muito pequeno e se faz necessário explorar cada vez mais, maiores volumes de rede.

O ideal é que o teste de Mann-Whitney seja aplicado para que tenhamos certeza sobre a utilização de SR em relação aos outros algoritmos em todos o intervalo de temperatura selecionado. A ideia é que possamos ver com base nos resultados da tabela (6) e da figura (9), se SR é estatisticamente mais otimizado do que os outros dois algoritmos. Logo, a comparação será primeiro entre SR e SRE e em seguida, entre SR e Cornell. Não há necessidade de se comparar SRE e Cornell aqui pois ambos não demonstram ter valores

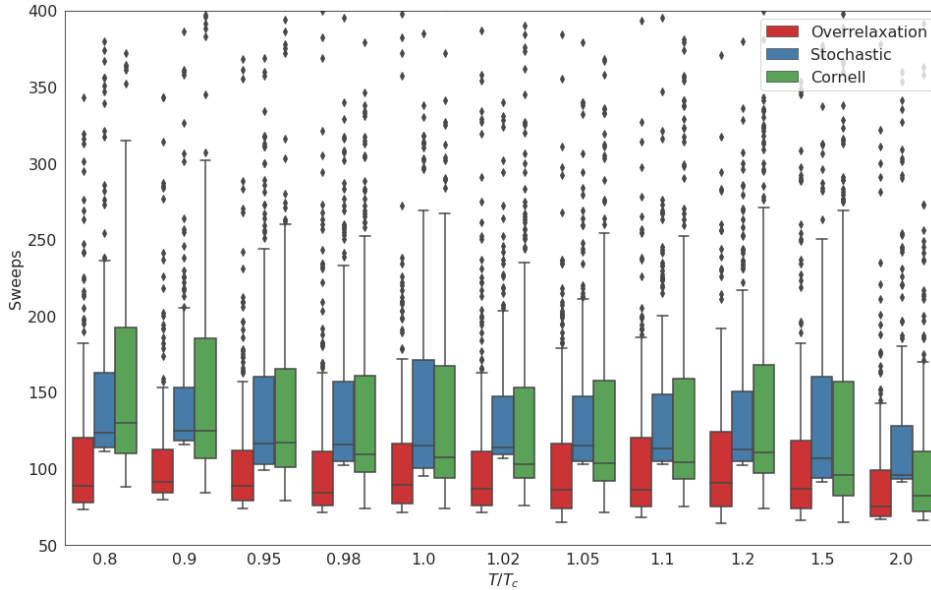


Figura 9 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ com 300 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

de mediana melhor que SR pela figura (9). Consideramos o critério rigoroso de 5σ para aplicação do teste de Mann-Whitney, presentes na tabela (6).

Tabela 6 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $8^3 \times 4$ e 300 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor- $p_{SR, SRE}$	Hipótese Aceita	valor- $p_{SR, Cornell}$	Hipótese Aceita
0.80	1.07×10^{-38}	H_1	5.87×10^{-38}	H_1
0.90	1.15×10^{-49}	H_1	6.91×10^{-38}	H_1
0.95	1.07×10^{-35}	H_1	7.38×10^{-31}	H_1
0.98	1.76×10^{-36}	H_1	2.13×10^{-26}	H_1
1.00	9.16×10^{-29}	H_1	5.49×10^{-19}	H_1
1.02	3.41×10^{-37}	H_1	1.96×10^{-21}	H_1
1.05	9.05×10^{-33}	H_1	1.04×10^{-18}	H_1
1.10	1.21×10^{-28}	H_1	1.16×10^{-18}	H_1
1.20	2.13×10^{-25}	H_1	1.64×10^{-18}	H_1
1.50	9.05×10^{-24}	H_1	6.25×10^{-08}	H_1
2.00	2.92×10^{-36}	H_1	4.91×10^{-06}	H_1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, podemos ver que SR teve melhor desempenho em todos os valores de temperatura escolhidos para $8^3 \times 4$. Entretanto, a percepção que o algoritmo Cornell diminui drasticamente para valores mais altos de temperatura é perceptível também no teste de Mann-Whitney, quando vemos o valor-p diminuindo bastante e chegando próximo ao critério de 5σ em $T/T_c = 2.00$. A figura (10) representa o gráfico de pontos considerando

5σ de incerteza para as barras de erro. Também é perceptível para esse gráfico que SR é que melhor desempenha.

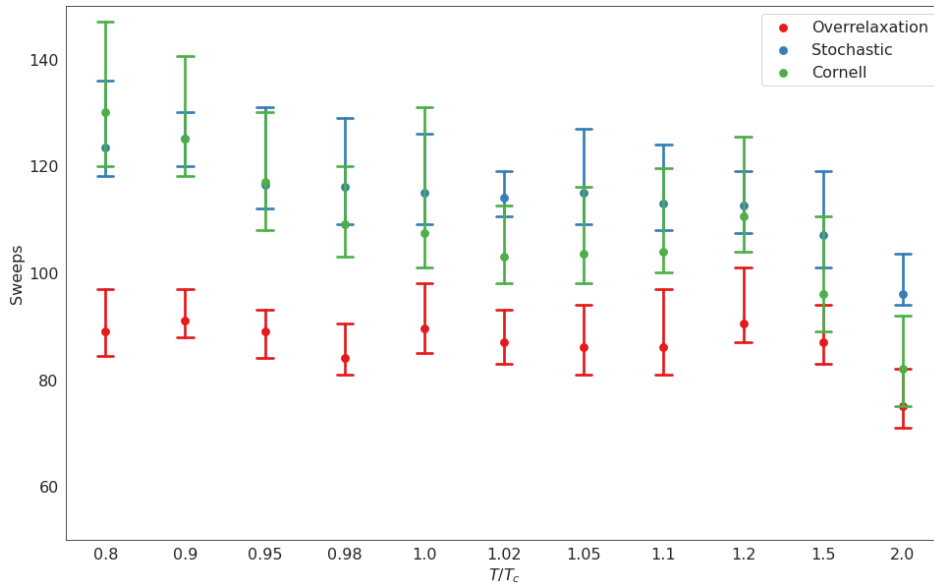


Figura 10 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $8^3 \times 4$ com 300 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos considerar $V = 12$ e utilizar os mesmos valores de β do caso anterior. A tabela (7) compara a mediana para fixação de gauge considerando os algoritmos SR, SRE e Cornell para um volume de rede de $12^3 \times 4$ com 250 configurações.

Tabela 7 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $12^3 \times 4$ e 250 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\text{ótimo}}$	$e_{2(\alpha)}$	$p_{\text{ótimo}}$	$e_{2(p)}$	$\omega_{\text{ótimo}}$	$e_{2(\omega)}$
0.80	0.282	255.5	0.84	218.0	1.87	158.5
0.90	0.280	232.0	0.83	211.0	1.87	153.5
0.95	0.278	214.0	0.84	203.0	1.87	152.5
0.98	0.277	221.0	0.82	200.5	1.86	150.0
1.00	0.276	198.5	0.83	203.5	1.86	147.5
1.02	0.276	201.5	0.84	202.0	1.87	150.5
1.05	0.276	217.5	0.84	204.5	1.86	157.0
1.10	0.276	222.5	0.82	200.0	1.86	158.5
1.20	0.270	148.0	0.82	177.0	1.85	127.5
1.50	0.265	128.0	0.79	160.0	1.84	117.0
2.00	0.260	122.5	0.78	151.0	1.82	115.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o volume de $12^3 \times 4$, é possível ver ao longo do intervalo de temperatura que SR e SRE possuem uma concentração de dados maior em relação a Cornell para $T/T_c < 1.10$

pela figura (11). Além disso, SR também possui ao longo intervalo de temperatura, um desempenho melhor, como é confirmado pelo valor da mediana na tabela (7).

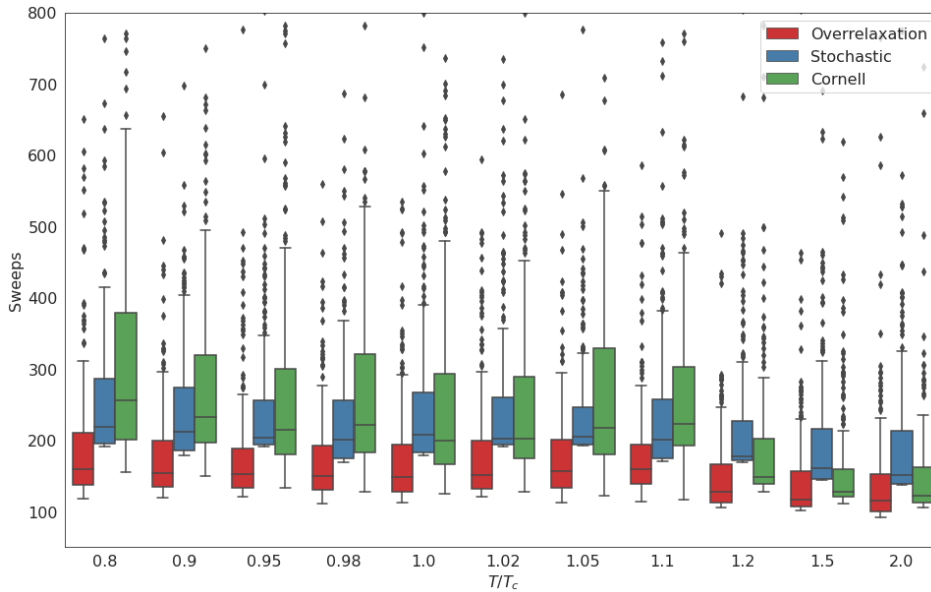


Figura 11 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $12^3 \times 4$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, vamos também fazer a aplicação do teste de Mann-Whitney. Também considerando o critério rigoroso de 5σ , encontramos os seguintes valor-p para o teste de Mann-Whitney presentes na tabela (8).

Tabela 8 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $12^3 \times 4$ e 250 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor-p _{SR, SRE}	Hipótese Aceita	valor-p _{SR, Cornell}	Hipótese Aceita
0.80	9.16×10^{-30}	H_1	2.70×10^{-36}	H_1
0.90	3.34×10^{-31}	H_1	1.79×10^{-36}	H_1
0.95	1.74×10^{-38}	H_1	2.07×10^{-31}	H_1
0.98	9.64×10^{-29}	H_1	2.92×10^{-32}	H_1
1.00	3.73×10^{-31}	H_1	4.13×10^{-23}	H_1
1.02	2.61×10^{-31}	H_1	2.04×10^{-23}	H_1
1.05	9.67×10^{-33}	H_1	3.43×10^{-26}	H_1
1.10	4.22×10^{-25}	H_1	5.54×10^{-29}	H_1
1.20	1.31×10^{-36}	H_1	3.33×10^{-16}	H_1
1.50	3.83×10^{-33}	H_1	1.07×10^{-10}	H_1
2.00	9.44×10^{-30}	H_1	1.53×10^{-07}	H_1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Da mesma forma que em $8^3 \times 4$, $12^3 \times 4$ desempenhou melhor para SR pelo teste de Mann-Whitney. Também foi observado um comportamento semelhante para os valores

mais altos de temperatura entre SR e Cornell. A figura (12) representa o gráfico de pontos considerando 5σ de incerteza para as barras de erro. Também é perceptível que SR é melhor dentro desse intervalo de temperatura.

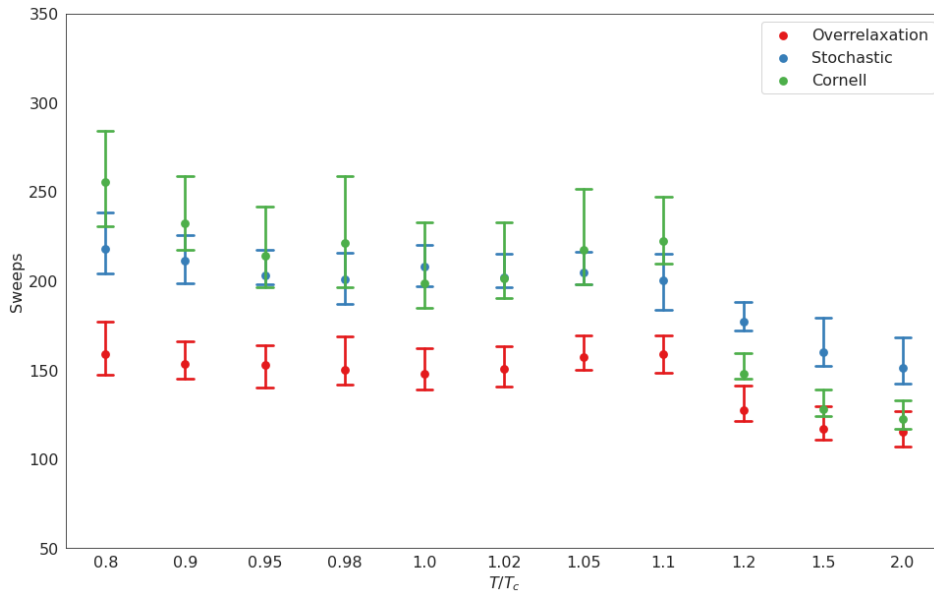


Figura 12 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $12^3 \times 4$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos para o volume $16^3 \times 4$ da forma que seguimos com os casos anteriores. A tabela (9) compara a mediana para fixação de gauge de Landau considerando os algoritmos SR, SRE e Cornell para esse volume com 200 configurações.

Tabela 9 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $16^3 \times 4$ e 200 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\acute{o}timo}$	$e_{2\alpha}$	$p_{\acute{o}timo}$	e_{2p}	$\omega_{\acute{o}timo}$	$e_{2\omega}$
0.80	0.285	385.0	0.89	338.0	1.91	231.0
0.90	0.283	345.0	0.89	310.5	1.91	222.5
0.95	0.281	331.5	0.88	298.0	1.90	229.0
0.98	0.281	322.0	0.88	292.5	1.90	216.0
1.00	0.281	370.5	0.88	302.5	1.91	234.5
1.02	0.283	355.0	0.89	314.0	1.90	244.0
1.05	0.278	284.5	0.88	291.0	1.90	208.0
1.10	0.275	227.0	0.87	275.5	1.90	187.0
1.20	0.274	214.0	0.86	261.0	1.90	186.0
1.50	0.271	195.5	0.85	242.5	1.90	174.5
2.00	0.266	178.0	0.85	233.5	1.89	165.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o volume total de rede está aumentando, é possível ver que o gráfico bloxplot presente na figura (13) começa a definir melhor uma tendência para SR e SRE, mas ainda com uma flutuação maior em Cornell para valores mais baixos de temperatura.

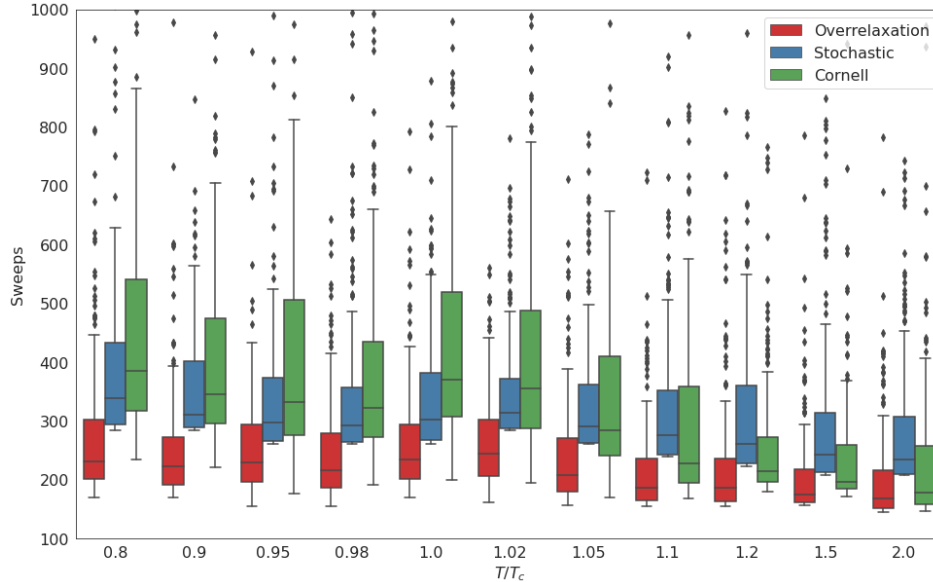


Figura 13 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $16^3 \times 4$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazendo também o teste de Mann-Whitney para esse caso, já será possível comparar também o comportamento de tendência visto para SR e Cornell em temperaturas mais altas. A tabela (10) mostra os resultados do teste aplicado a $16^3 \times 4$.

Tabela 10 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $12^3 \times 4$ e 200 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor-p _{SR, SRE}	Hipótese Aceita	valor-p _{SR, Cornell}	Hipótese Aceita
0.80	9.47×10^{-29}	H_1	9.73×10^{-34}	H_1
0.90	4.49×10^{-35}	H_1	8.59×10^{-37}	H_1
0.95	2.83×10^{-23}	H_1	2.28×10^{-25}	H_1
0.98	1.12×10^{-27}	H_1	1.12×10^{-28}	H_1
1.00	4.24×10^{-23}	H_1	8.18×10^{-34}	H_1
1.02	8.13×10^{-27}	H_1	1.64×10^{-25}	H_1
1.05	4.01×10^{-27}	H_1	9.43×10^{-22}	H_1
1.10	4.74×10^{-34}	H_1	2.65×10^{-15}	H_1
1.20	8.77×10^{-28}	H_1	7.64×10^{-13}	H_1
1.50	7.59×10^{-30}	H_1	9.36×10^{-13}	H_1
2.00	1.03×10^{-29}	H_1	2.92×10^{-04}	H_0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Diferente dos dois casos anteriores, encontramos um caso em que a hipótese de

que SR tende a ter melhor desempenho que os outros algoritmos não é verdade. Para $T/T_c = 2.00$, o valor-p entre SR e Cornell é maior que o valor que definimos como nível de significância. Como foi escolhido um valor confiança bem alto, observamos isso. Entretanto, para casos menos rigorosos, o teste daria que SR é com certeza o que melhor desempenha. Isso não quer dizer que o Cornell é melhor que SR, mas sim que estatisticamente não podemos afirmar qual é o melhor algoritmo para esse caso dentro desse nível de significância. A figura (14) representa o gráfico de pontos considerando 5σ de incerteza para as barras de erro. Neste gráfico é possível ver que para a última categoria de temperatura, o valor de mediana para SR está entre a barra de erro e o valor de mediana para Cornell e vice versa. Logo, estatisticamente não há certeza para qual desempenha melhor nesse caso.

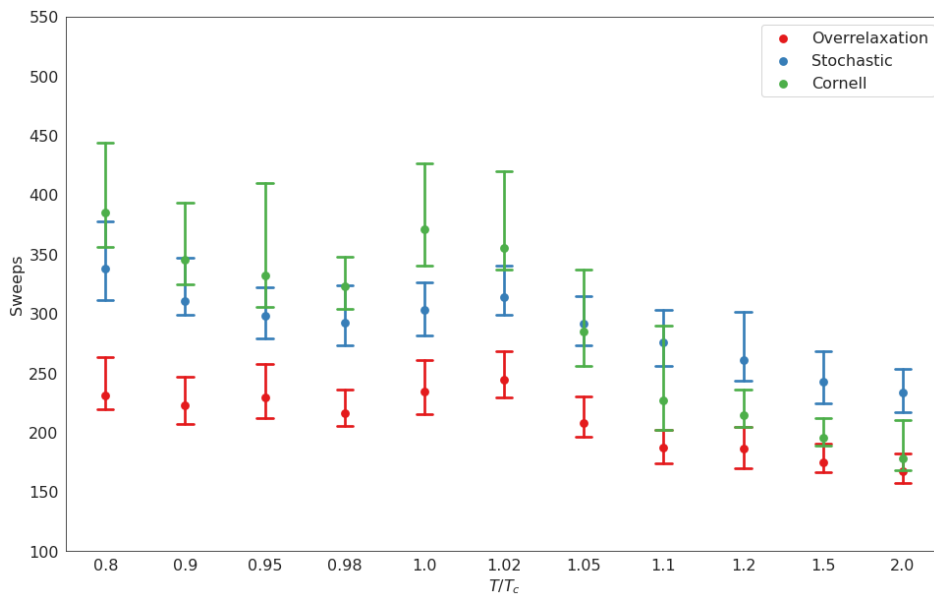


Figura 14 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $16^3 \times 4$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos aumentar mais um pouco o volume de rede, indo agora para $24^3 \times 4$. Nesse caso, foram utilizadas 170 configurações para os cálculos. A figura (11) mostra os valores de mediana de e_2 para cada algoritmo utilizado.

Nesse caso, temos observando a tabela (11) que o algoritmo SR novamente desempenha melhor que os outros também. A figura (15) nos mostra o a distribuição desses dados por meio de boxplots categorizados para as temperaturas utilizadas.

Fazendo também o teste de Mann-Whitney para esse caso, já será possível comparar também o comportamento de tendência visto para SR e Cornell em temperaturas mais altas. A tabela (12) mostra os resultados do teste aplicado a $24^3 \times 4$.

Para o caso da tabela (12), todos os casos do teste de Mann-Whitney indicaram que

Tabela 11 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $24^3 \times 4$ e 170 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\delta t_{imo}}$	$e_{2\alpha}$	$\rho_{\delta t_{imo}}$	e_{2p}	$\omega_{\delta t_{imo}}$	$e_{2\omega}$
0.80	0.288	851.0	0.93	541.5	1.95	417.0
0.90	0.285	750.5	0.93	540.0	1.94	377.5
0.95	0.284	728.5	0.93	517.0	1.94	386.0
0.98	0.283	662.5	0.93	508.5	1.94	374.5
1.00	0.283	668.0	0.93	509.0	1.94	361.0
1.02	0.281	551.0	0.92	476.0	1.94	336.0
1.05	0.281	533.0	0.93	495.0	1.95	349.0
1.10	0.280	473.5	0.92	463.5	1.95	335.5
1.20	0.278	441.0	0.93	480.5	1.95	333.0
1.50	0.275	345.5	0.92	450.0	1.94	304.5
2.00	0.273	332.5	0.92	423.5	1.93	287.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

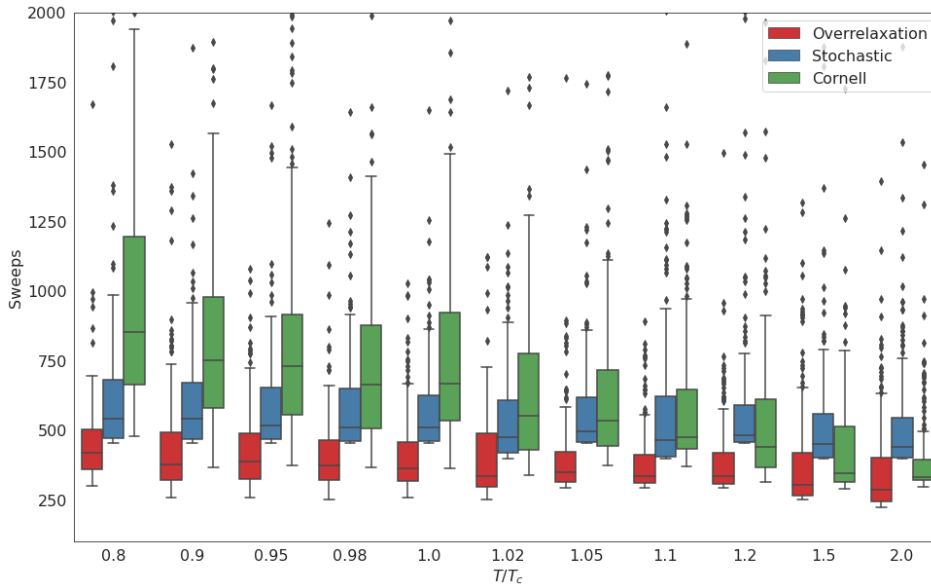


Figura 15 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $24^3 \times 4$ com 170 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

SR é o que melhor desempenha. Em relação aos casos anteriores, é possível ver que entre SR e Cornell em altas temperaturas, o valor-p para o teste de hipótese foi o maior. Isso pode indicar que para valores maiores de volume de rede, a tendência é que esses valores aumentem. A figura (16) representa o gráfico de pontos considerando 5σ de incerteza para as barras de erro. Neste gráfico é possível ver que para a última categoria de temperatura, o valor de mediana para SR está entre a barra de erro e o valor de mediana para Cornell e vice versa. Logo, estatisticamente não há certeza para qual desempenha melhor nesse caso.

Por fim, o último volume de rede fixando $N_t = 4$ será $48^3 \times 4$. Os algoritmos

Tabela 12 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $24^3 \times 4$ e 170 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor- $p_{\text{SR, SRE}}$	Hipótese Aceita	valor- $p_{\text{SR, Cornell}}$	Hipótese Aceita
0.80	4.42×10^{-23}	H_1	3.53×10^{-47}	H_1
0.90	4.54×10^{-22}	H_1	2.06×10^{-35}	H_1
0.95	7.70×10^{-24}	H_1	9.71×10^{-35}	H_1
0.98	4.46×10^{-28}	H_1	1.03×10^{-36}	H_1
1.00	1.29×10^{-28}	H_1	1.01×10^{-38}	H_1
1.02	2.26×10^{-19}	H_1	6.92×10^{-25}	H_1
1.05	6.29×10^{-32}	H_1	2.37×10^{-31}	H_1
1.10	1.14×10^{-26}	H_1	2.11×10^{-30}	H_1
1.20	7.01×10^{-31}	H_1	3.84×10^{-17}	H_1
1.50	7.65×10^{-22}	H_1	9.12×10^{-09}	H_1
2.00	1.65×10^{-24}	H_1	8.56×10^{-10}	H_1

Fonte: Elaborada pelo autor.

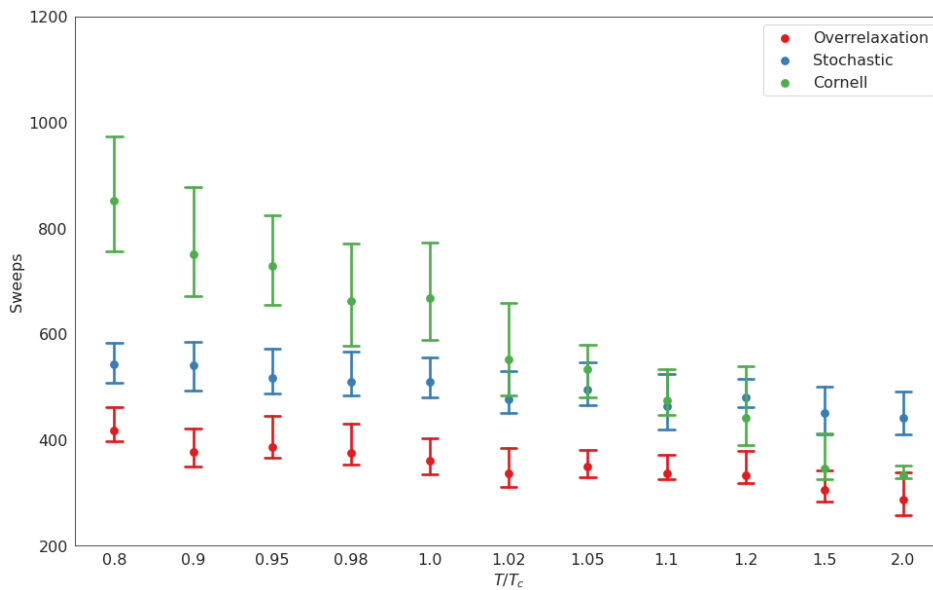


Figura 16 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $24^3 \times 4$ com 170 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

utilizados para essa rede grande pode encontrado na tabela (13). Por ter um custo computacional muito alto por serem muitos sítios a serem percorridos, foram selecionados apenas 5 valores de temperatura: $T/T_c = 0.90, 1.00, 1.10, 1.50$ e 2.00 .

É perceptível a queda brusca da mediana conforme aumenta a temperatura para o algoritmo Cornell em relação aos outros algoritmos. Além disso, a figura (17) mostra através do boxplot como está a distribuição desses dados.

Tabela 13 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $48^3 \times 4$ e 100 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\delta t_{\text{timo}}}$	$e_{2\alpha}$	$\rho_{\delta t_{\text{timo}}}$	$e_{2\rho}$	$\omega_{\delta t_{\text{timo}}}$	$e_{2\omega}$
0.90	0.286	2491.5	0.97	1123.5	1.98	876.0
1.00	0.285	2098.0	0.97	1138.5	1.97	841.0
1.10	0.282	1696.0	0.96	1122.5	1.97	838.0
1.50	0.278	1273.5	0.97	1143.0	1.98	788.0
2.00	0.276	974.0	0.96	1074.5	1.98	754.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

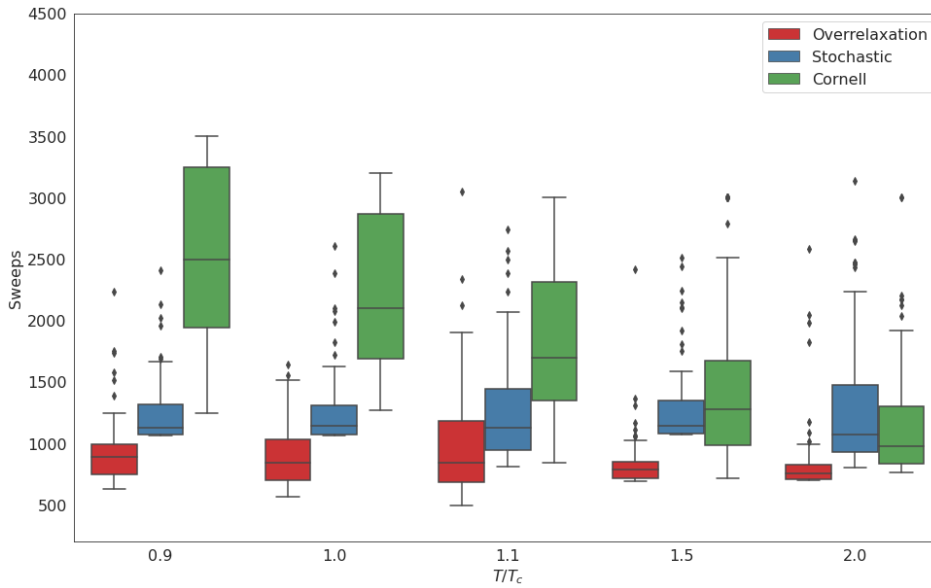


Figura 17 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $48^3 \times 4$ com 100 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos agora aplicar o teste de hipótese de Mann-Whitney para esses resultados, de modo a termos garantias sobre a escolha de SR como melhor algoritmo a partir do que já foi visto. Esses dados podem ser encontrados na tabela (14).

Tabela 14 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $48^3 \times 4$ e 100 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6.00 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor-p _{SR, SRE}	Hipótese Aceita	valor-p _{SR, Cornell}	Hipótese Aceita
0.90	4.10×10^{-24}	H_1	1.61×10^{-33}	H_1
1.00	1.89×10^{-18}	H_1	2.36×10^{-33}	H_1
1.10	7.84×10^{-09}	H_1	8.66×10^{-20}	H_1
1.50	2.71×10^{-30}	H_1	1.25×10^{-19}	H_1
2.00	1.09×10^{-23}	H_1	2.26×10^{-19}	H_1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso, podemos ter a certeza que o algoritmo SR continua sendo o melhor para

se utilizar com base no critério de $e_2 < 10^{-12}$ como fixação de gauge de Landau. A figuras (18) ajudam nessa avaliação.

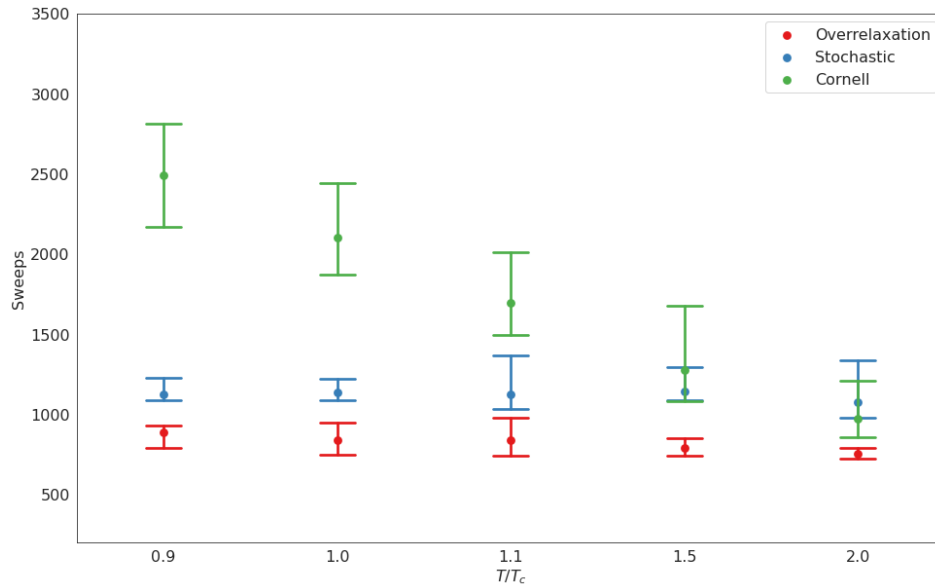


Figura 18 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $48^3 \times 4$ com 100 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos fixar o tamanho da parte temporal em $N_t = 8$. Primeiro, vamos utilizar volume de rede $12^4 \times 8$ e valores de β condizentes com a tabela (4). Logo, a tabela (15) mostra os valores de mediana de e_2 para esse novo volume de rede em relação a cada algoritmo testado.

Tabela 15 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $12^3 \times 8$ e 250 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\text{ótimo}}$	$e_{2\alpha}$	$p_{\text{ótimo}}$	e_{2p}	$\omega_{\text{ótimo}}$	$e_{2\omega}$
0.80	0.268	153.0	0.81	176.0	1.85	167.5
0.90	0.263	136.0	0.79	159.5	1.84	149.0
0.95	0.264	150.0	0.80	171.0	1.83	140.0
0.98	0.263	149.5	0.80	169.5	1.84	166.5
1.00	0.263	150.0	0.80	175.5	1.83	138.5
1.02	0.262	141.5	0.79	163.5	1.83	127.5
1.05	0.264	153.5	0.81	174.0	1.84	168.5
1.10	0.262	145.0	0.80	170.5	1.82	161.5
1.20	0.258	145.0	0.79	168.0	1.81	169.5
1.50	0.256	155.0	0.79	176.5	1.83	147.5
2.00	0.257	156.0	0.79	179.0	1.81	179.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo um pouco surpreendente por conta do que foi visto em $N_t = 4$, a tabela

(15) mostra que a Mediana funciona melhor para o algoritmo Cornell em boa parte dos resultados. A figura (19) mostra a distribuição desses dados através do boxplot.

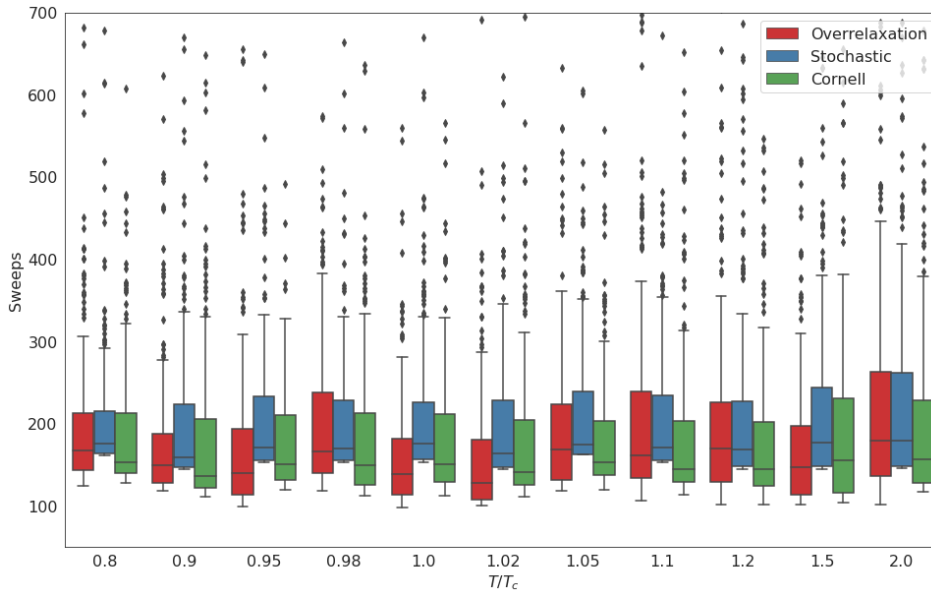


Figura 19 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $12^3 \times 8$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por conta disso, o teste de Mann-Whitney nesse caso será feito utilizando como critério de hipótese que Cornell é mais performático que SR (Corn, SR) e SRE (Corn, SRE). Para os casos em que SR tem mediana menor, vamos utilizar (SR, Corn) em $T/T_c = 0.95, 1.00, 1.02e1.50$. Quando a hipótese é confirmada, será utilizado H_1 . Caso contrário, será utilizado H_0 .

Tabela 16 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $12^3 \times 8$ e 250 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando valor-p $< 6.00 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor-p _{Corn, SRE}	Hipótese	valor-p _{Corn, SR}	Hipótese	valor-p _{SR, Corn}	Hipótese
0.80	4.84×10^{-11}	H_1	1.68×10^{-01}	H_0	-	-
0.90	4.73×10^{-13}	H_1	4.76×10^{-03}	H_0	-	-
0.95	1.01×10^{-11}	H_1	-	-	4.77×10^{-06}	H_1
0.98	1.50×10^{-10}	H_1	7.11×10^{-04}	H_1	-	-
1.00	6.85×10^{-12}	H_1	-	-	1.82×10^{-06}	H_1
1.02	1.92×10^{-11}	H_1	-	-	2.28×10^{-08}	H_1
1.05	7.12×10^{-15}	H_1	3.97×10^{-01}	H_0	-	-
1.10	2.04×10^{-12}	H_1	3.77×10^{-02}	H_0	-	-
1.20	8.22×10^{-12}	H_1	5.20×10^{-03}	H_0	-	-
1.50	1.13×10^{-07}	H_1	-	-	1.06×10^{-02}	H_0
2.00	9.21×10^{-08}	H_1	8.56×10^{-10}	H_0	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os resultados da tabela (16), Cornell é sempre melhor que utilizar SRE. Entretanto, para $T/T_c = 0.95, 1.00, 1.02$ SR é o melhor. Para $T/T_c = 0.98$, é melhor utilizar Cornell. Para os outros valores de temperatura é inconclusivo para o nível de significância escolhido, saber se o ideal é utilizar Cornell ou SR. A figura (20) representa o gráfico de pontos considerando 5σ de incerteza para as barras de erro. Nesse gráfico, fica claro que há pouca mudança em relação aos valores de temperatura como nos casos anteriores já analisados. Logo, a hipótese que levantamos para esse caso é a pequena diferença entre o tamanho da dimensão espacial e a dimensão temporal. Isso pode estar afetando os resultados, além dessa diferença estar sofrendo muito com os efeitos de volume finito.

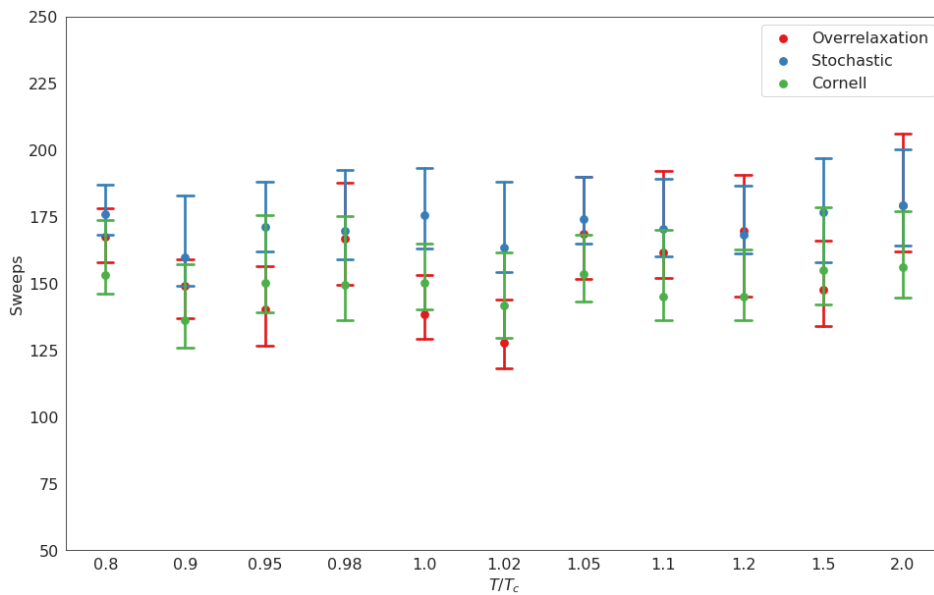


Figura 20 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $12^3 \times 8$ com 250 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos aumentar o valor do volume de rede para $16^3 \times 8$. A tabela (17) mostra os valores de mediana referente aos algoritmos testados.

A distribuição dos dados pode ser vista através da figura (21). Ainda é possível ver uma alternância entre a menor mediana ficar entre Cornell e SR. Uma outra coisa que essa figura nos mostra, são os limites superiores ainda bem altos, assim como o tamanho das caixas, o que mostra uma densidade menor dos dados. Assim como em $12^3 \times 8$, ainda não é possível ver com clareza o comportamento que era visto em $N_t = 4$.

Vamos agora aplicar o teste de Mann-Whitney de maneira semelhante a utilizada para $12^3 \times 8$. Nesse caso, vamos utilizar para $T/T_c = 0.80, 0.95, 1.02, 1.05, 1.50e2.00$ a hipótese é de que Cornell é o algoritmo mais performático, enquanto para as outras, vamos

Tabela 17 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $16^3 \times 8$ e 200 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\delta t_{\text{imo}}}$	$e_{2\alpha}$	$\rho_{\delta t_{\text{imo}}}$	e_{2p}	$\omega_{\delta t_{\text{imo}}}$	$e_{2\omega}$
0.80	0.272	224.5	0.85	247.0	1.87	228.5
0.90	0.268	220.0	0.85	249.5	1.88	183.0
0.95	0.269	200.0	0.85	232.0	1.87	217.5
0.98	0.269	207.0	0.84	235.5	1.88	185.5
1.00	0.269	209.5	0.85	242.5	1.88	194.0
1.02	0.266	179.5	0.83	217.0	1.89	204.0
1.05	0.266	173.5	0.83	223.5	1.87	201.0
1.10	0.265	181.5	0.83	217.0	1.88	164.0
1.20	0.265	201.5	0.85	228.5	1.88	183.0
1.50	0.260	153.0	0.83	190.5	1.86	169.0
2.00	0.257	159.0	0.82	198.0	1.87	186.5

Fonte: Elaborada pelo autor.

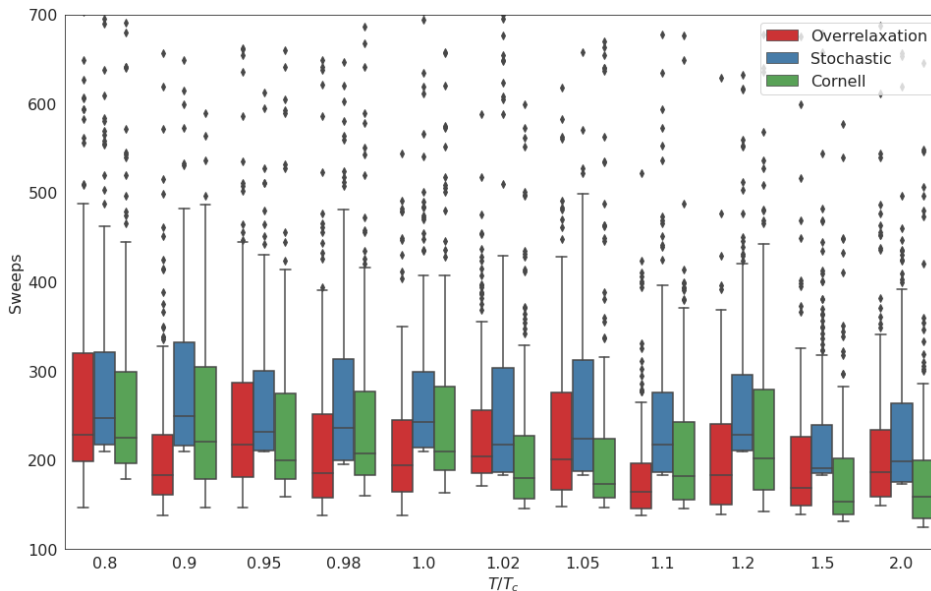


Figura 21 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $16^3 \times 8$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

considerar SR. Para comparativo com SRE, vamos considerar Cornell como o ideal a ser verificado. A tabela (18) mostra os resultados do teste aplicado a esses dados.

Diferente do teste de Mann-Whitney para $12^3 \times 4$, vemos um número bem menor de hipótese estatísticas dando inconclusivo qual algoritmo é mais performático. apenas $T/T_c = 0.80$ e 0.95 apontaram para isso. Para os outros casos, temos que $T/T_c = 0.90, 0.98, 1.00, 1.10$ e 1.20 tendo SR como o melhor, enquanto $T/T_c = 1.02, 1.05, 1.50$ e 2.00 apresentam Cornell como sendo o melhor. SRE não vence para nenhum valor de temperatura. A figura (22) representa o gráfico de pontos considerando 5σ de incerteza

Tabela 18 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $16^3 \times 8$ e 200 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor-p _{Corn, SRE}	Hipótese	valor-p _{Corn, SR}	Hipótese	valor-p _{SR, Corn}	Hipótese
0.80	2.84×10^{-07}	H_1	3.51×10^{-01}	H_0	-	-
0.90	1.07×10^{-06}	H_1	-	-	4.16×10^{-08}	H_1
0.95	1.54×10^{-11}	H_1	1.04×10^{-01}	H_0	-	-
0.98	3.59×10^{-07}	H_1	-	-	1.28×10^{-07}	H_1
1.00	1.63×10^{-11}	H_1	-	-	3.11×10^{-07}	H_1
1.02	2.48×10^{-15}	H_1	6.64×10^{-11}	H_1	-	-
1.05	1.45×10^{-16}	H_1	7.86×10^{-05}	H_1	-	-
1.10	2.19×10^{-11}	H_1	-	-	1.69×10^{-07}	H_1
1.20	9.30×10^{-10}	H_1	-	-	2.70×10^{-05}	H_1
1.50	4.86×10^{-22}	H_1	3.63×10^{-06}	H_1	-	-
2.00	5.80×10^{-19}	H_1	4.94×10^{-10}	H_1	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor.

para as barras de erro. Nesse gráfico, fica claro também que ainda há pouca mudança em relação aos valores de temperatura.

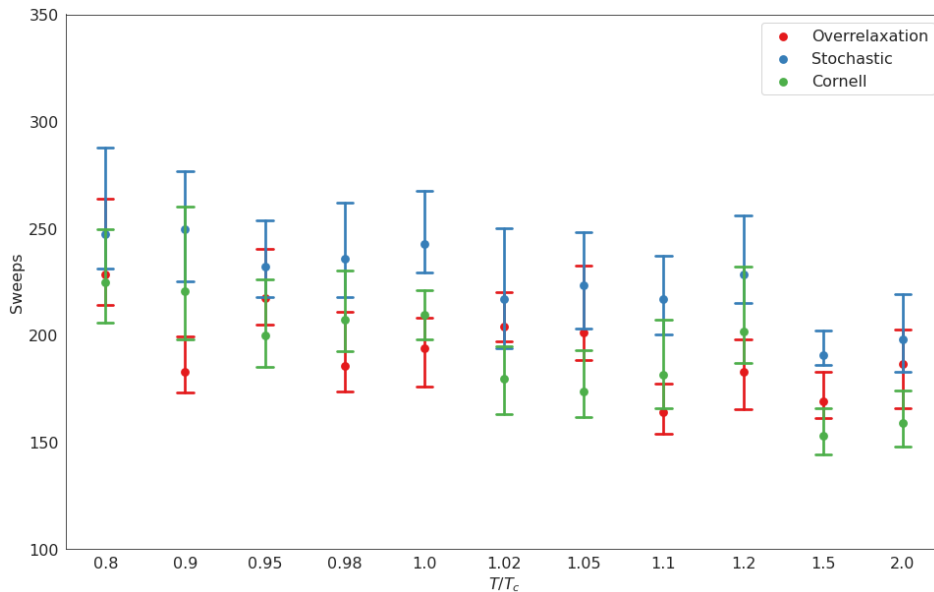


Figura 22 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $16^3 \times 8$ com 200 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para finalizar, serão analisados os algoritmos em $V = 24^3 \times 8$. A tabela (19) mostra esses resultados.

Diferente dos outros casos em $N_t = 8$, para $24^3 \times 8$ as medianas da tabela (19) mostram que SR é melhor para todos os casos. A figura (23) mostra a distribuição em

Tabela 19 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $24^3 \times 8$ e 120 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\delta t_{\text{timo}}}$	$e_{2\alpha}$	$\rho_{\delta t_{\text{timo}}}$	e_{2p}	$\omega_{\delta t_{\text{timo}}}$	$e_{2\omega}$
0.80	0.276	369.0	0.90	409.5	1.93	304.0
0.90	0.274	375.9	0.90	397.0	1.93	307.0
0.95	0.273	323.5	0.91	416.0	1.92	299.0
0.98	0.272	305.5	0.91	380.0	1.92	272.0
1.00	0.272	295.0	0.91	375.5	1.92	262.5
1.02	0.272	284.5	0.91	371.5	1.93	263.0
1.05	0.271	261.5	0.90	356.5	1.92	250.0
1.10	0.270	261.0	0.90	343.0	1.92	241.5
1.20	0.269	265.5	0.89	354.5	1.92	245.5
1.50	0.267	238.0	0.89	323.5	1.91	221.0
2.00	0.254	242.5	0.88	318.0	1.91	238.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

boxplot para os algoritmos em relação as temperaturas escolhidas.

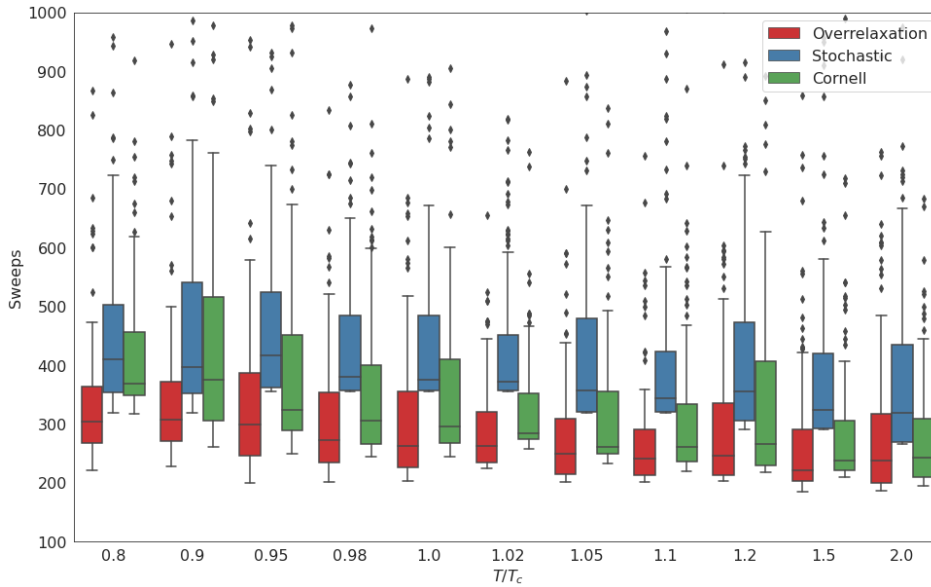


Figura 23 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $24^3 \times 8$ com 120 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o teste de Mann-Whitney, será então considerada a hipótese geral H_1 de que SR é o algoritmo mais performático em todas as situações, por possuir menor mediana. a tabela (20) mostra os resultados do teste.

O que podemos ver é que SR é estatisticamente melhor para todos os valores de SRE. Entretanto, é melhor para todos os valores em relação a Cornell, exceto para $T/T_c = 1.20, 1.50$ e 2.00 , que o resultado foi inconclusivo. A figura (24) mostra o gráfico de pontos relacionados a esses dados.

Tabela 20 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $24^3 \times 4$ e 120 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor-p _{SR, SRE}	Hipótese Aceita	valor-p _{SR, Cornell}	Hipótese Aceita
0.80	6.76×10^{-18}	H_1	1.22×10^{-15}	H_1
0.90	7.45×10^{-15}	H_1	1.78×10^{-08}	H_1
0.95	1.22×10^{-16}	H_1	4.51×10^{-05}	H_1
0.98	5.04×10^{-18}	H_1	7.50×10^{-05}	H_1
1.00	5.17×10^{-18}	H_1	2.45×10^{-06}	H_1
1.02	7.31×10^{-27}	H_1	1.45×10^{-08}	H_1
1.05	8.42×10^{-21}	H_1	1.40×10^{-05}	H_1
1.10	8.21×10^{-25}	H_1	2.57×10^{-05}	H_1
1.20	1.87×10^{-15}	H_1	1.23×10^{-03}	H_0
1.50	4.93×10^{-18}	H_1	4.93×10^{-04}	H_0
2.00	1.45×10^{-12}	H_1	1.46×10^{-01}	H_0

Fonte: Elaborada pelo autor.

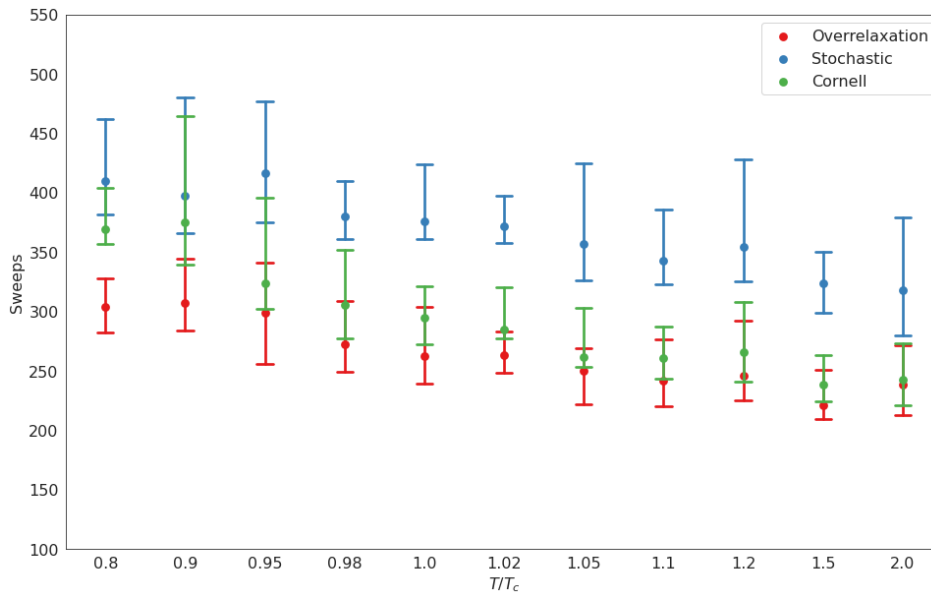


Figura 24 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $24^3 \times 8$ com 120 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir desses resultados, o próximo passo é encontrar não apenas como os algoritmos performam ao longo da temperatura quando volume de rede era fixado.

Vamos agora fazer o cálculo para $V = 32^3 \times 4$. (21) mostra esses resultados.

Com base nas medianas da tabela (21), podemos ver que mostram que SR é melhor, exceto para as duas temperaturas mais altas que a princípio, parece ser inconclusivo. A figura (25) mostra a distribuição em boxplot para os algoritmos em relação as temperaturas

Tabela 21 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE para tamanho de rede de $32^3 \times 8$ e 70 configurações.

T/T_c	$\alpha_{\delta t_{\text{opt}}}$	$e_{2\alpha}$	$\rho_{\delta t_{\text{opt}}}$	e_{2p}	$\omega_{\delta t_{\text{opt}}}$	$e_{2\omega}$
0.90	0.276	540.5	0.93	588.5	1.95	440.0
1.00	0.274	431.5	0.94	555.5	1.95	405.0
1.10	0.273	399.5	0.93	487.5	1.95	358.5
1.50	0.270	356.0	0.92	479.0	1.94	370.0
2.00	0.268	343.0	0.91	473.0	1.94	311.5

Fonte: Elaborada pelo autor.

escolhidas.

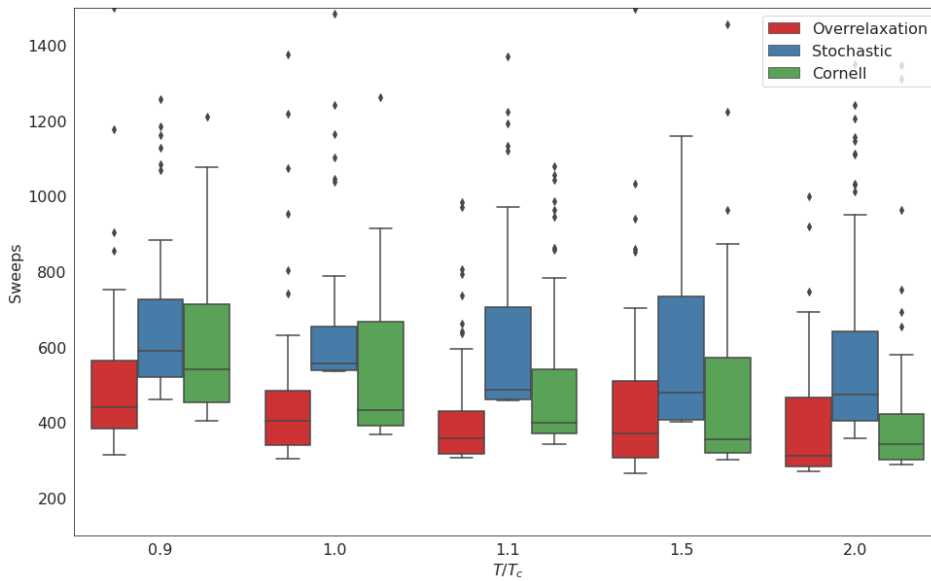


Figura 25 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em boxplot. Foi utilizado volume de $32^3 \times 8$ com 70 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o teste de Mann-Whitney, será então considerada a hipótese geral H_1 de que SR é o algoritmo mais performático em todas as situações, por possuir menor mediana. a tabela (22) mostra os resultados do teste.

que podemos ver é que SR é estatisticamente melhor para todos os valores de SRE. Entretanto, é melhor para todos os valores em relação a Cornell, exceto para $T/T_c = 1.50$ e 2.00 , que o resultado deu inconclusivo. A figura (26) mostra o gráfico de pontos relacionados a esses dados.

Uma coisa que vale ser levada em consideração, é que a volume $32^3 \times 8$ é o maior que calculamos para $N_t = 8$. Nesse caso, observamos como há uma queda de Cornell que afeta sabermos se é conclusivo ou não que SR seja o melhor algoritmo para essas temperaturas. Por estarmos em uma rede maior, essa observação é interessante, pois destoa

Tabela 22 – Dados para os algoritmos Cornell, SR e SRE com aplicação do teste de Mann-Whitney para $32^3 \times 4$ e 70 configurações. A hipótese nula é rejeitada quando $\text{valor-p} < 6.00 \times 10^{-04}$.

T/T_c	valor-p _{SR, SRE}	Hipótese Aceita	valor-p _{SR, Cornell}	Hipótese Aceita
0.90	4.43×10^{-09}	H_1	1.43×10^{-05}	H_1
1.00	1.99×10^{-13}	H_1	2.29×10^{-04}	H_1
1.10	6.39×10^{-13}	H_1	1.58×10^{-05}	H_1
1.50	4.60×10^{-07}	H_1	2.07×10^{-01}	H_0
2.00	3.41×10^{-10}	H_1	2.15×10^{-02}	H_0

Fonte: Elaborada pelo autor.

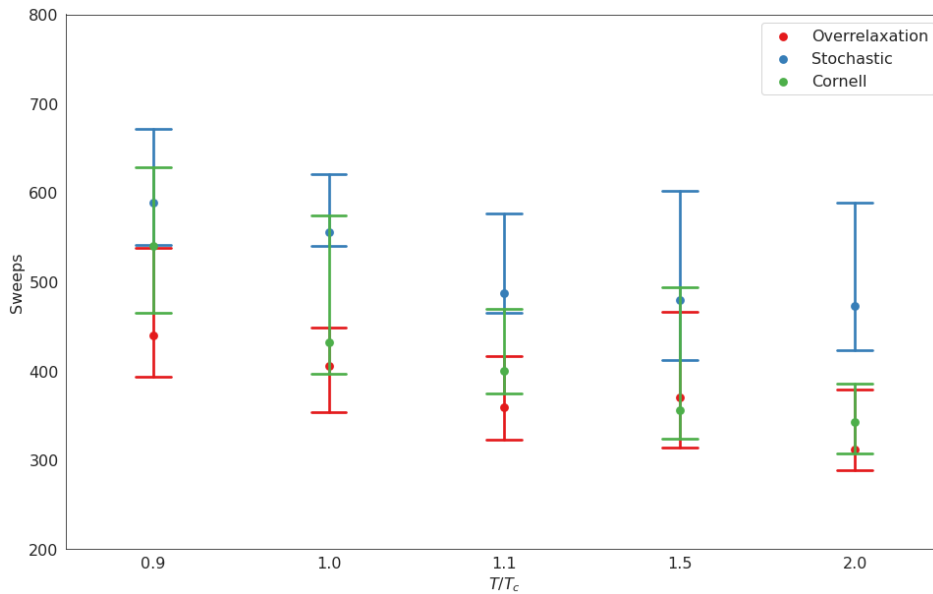


Figura 26 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Foi utilizado volume de $32^3 \times 8$ com 70 configurações em diferentes valores de temperatura.

Fonte: Elaborada pelo autor.

do que até o momento, estávamos observando em $N_t = 4$. Uma hipótese para isso ocorrer envolve o baixo número de configurações que foram incluídas.

8.3.2 Exponentes Críticos para Mediana

Agora, o objetivo é gerar gráficos para encontrar valores críticos de mediana. Esses gráficos serão feitos a partir de um ajuste com a função $C(x) = Ax^z$, onde A e z são coeficientes determinados para cada algoritmo em um determinado valor de temperatura e N_t . Os valores de temperatura a terem suas equações geradas são $T/T_c = 0.90, 1.00, 1.10, 1.50$ e 2.00 . Também será traçado um ajuste para os fatores α , ω e p , de modo a conseguirmos criar uma equação que nos auxilia a prever qual deverá ser cada um desses fatores a partir do volume de rede pré determinado.

8.3.2.1 $N_t = 4$

O primeiro passo é desenvolver as equações para cada valor de temperatura pré-determinado. Para $T/T_c = 0.90$, serão utilizados aqui os volumes: $8^3 \times 4$, $12^3 \times 4$, $16^3 \times 4$, $24^3 \times 4$ e $48^3 \times 4$. A figura (27) mostra os sweeps para fixação do gauge de Landau ao longo desses volumes de rede e $T/T_c = 0.90$.

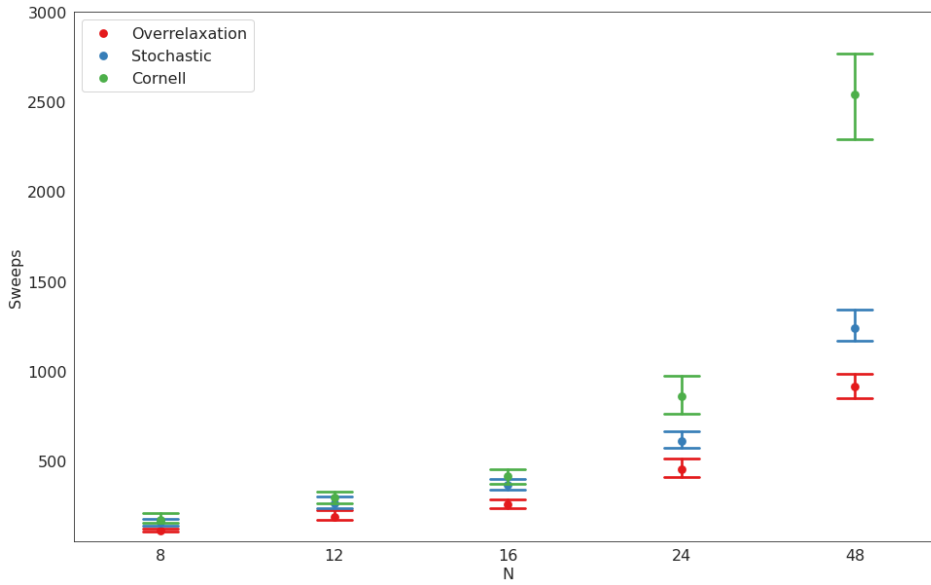


Figura 27 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 0.90$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso, foi traçado um o ajuste para os volumes de rede, levando em consideração a mediana. A figura (28) nos mostra como ficou a curva de crescimento de cada um dos algoritmos. A tabela (23) revela o valor de cada parâmetro no ajuste em relação ao seu respectivo algoritmo.

Tabela 23 – Tabela com dados do ajuste para $T/T_c = 0.90$ fixando $N_t = 4$.

Algoritmo	A	z
SR	6.88(23)	1.25(01)
SRE	12.78(2.01)	1.16(04)
Cornell	2.93(26)	1.74(02)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como pode ser visualizado na figura (23), SRE possui o menor expoente crítico $z = 1.16(04)$. Isso quer dizer que em algum momento, por mais que o gráfico não mostre, ele será o melhor algoritmo a ser utilizado. Como ele está entre o Cornell e o SR, a comparação será feita apenas com o segundo citado.

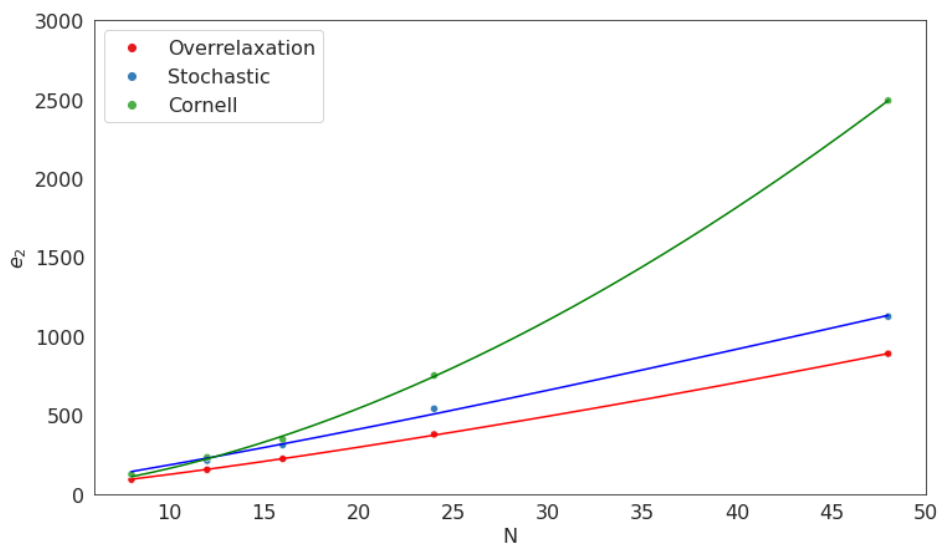


Figura 28 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 0.90$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Buscando o ponto de intersecção entre esses dois algoritmos, percebemos que SRE só será um algoritmo mais performático quando $N > 1100$. Logo, para qualquer volume espacial em $N_t = 4$ em $T/T = 0.90$, o ideal é utilizar SR.

Agora, a análise é feita observando a temperatura crítica $T/T_c = 1.00$. A figura (29) mostra os pontos categorizados para cada volume espacial em $N_t = 4$.

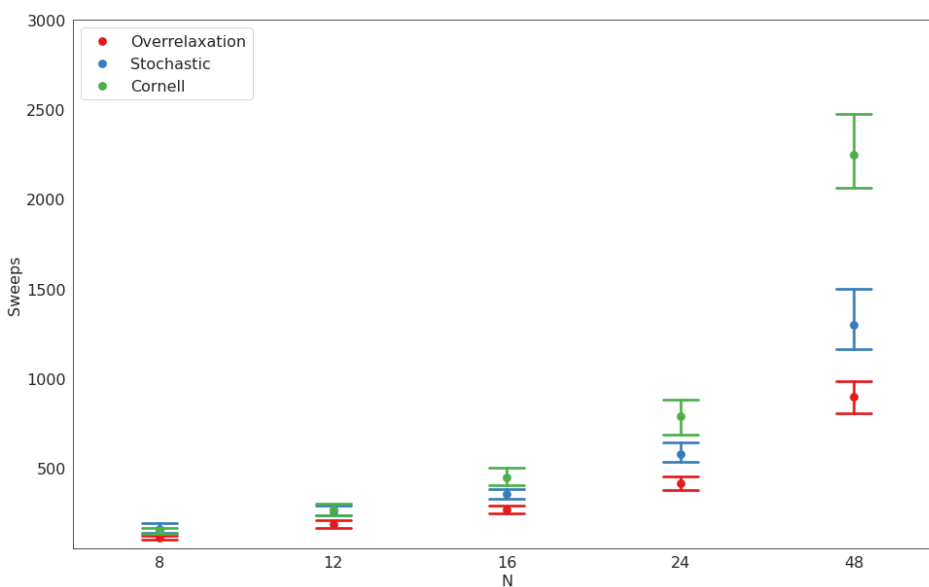


Figura 29 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 1.00$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebe-se que o número de varreduras para fixar o gauge de Landau diminui um pouco em relação a temperatura anterior. Logo, traçando o ajuste nos pontos, será encontrado a figura (30), no qual a tabela (24) mostra os resultados de cada parâmetro.

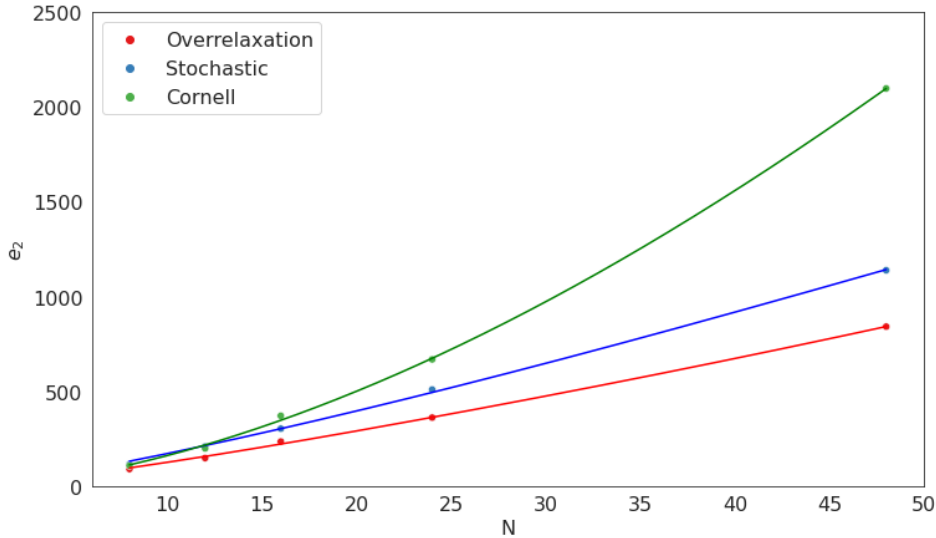


Figura 30 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.00$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 24 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.00$ fixando $N_t = 4$.

Algoritmo	A	z
SR	7.61(69)	1.22(02)
SRE	10.55(94)	1.21(02)
Cornell	3.69(37)	1.64(03)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $T/T_c = 1.00$, basicamente há um empate entre os expoentes de SR e SRE. Entretanto, o fator que multiplica o tamanho do volume espacial é maior em SRE. Por conta dessas duas observações, só ocorrerá o encontro das curvas em valores de volume espacial acima da ordem de 10^{10} , o que configura melhor utilização de SR para esse caso.

Fazendo para $T/T_c = 1.10$, podemos ver a figura (31) que mostra os pontos categorizados para cada volume espacial em $N_t = 4$. Traçando o ajuste nos pontos, será encontrado a figura (32), no qual a tabela (25) mostra os resultados de cada parâmetro.

Para $T/T_c = 1.10$, é observado que novamente na tabela (25) o menor z é o do SRE, por mais que na figura (32) mostre que para o intervalo de N escolhido, SR seja melhor. Aqui ocorre que os valores de z dentro da faixa de erro são muitoparecidos entre SR e SRE, mas A deles é bem diferentes, o que configura também para valores de N razoavelmente grandes, uma performance melhor para SR.

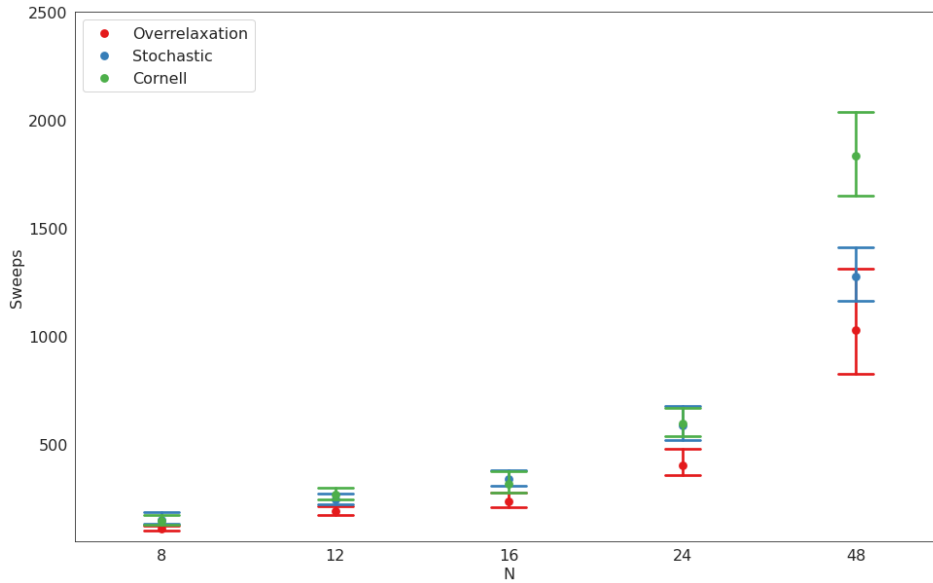


Figura 31 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 1.10$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

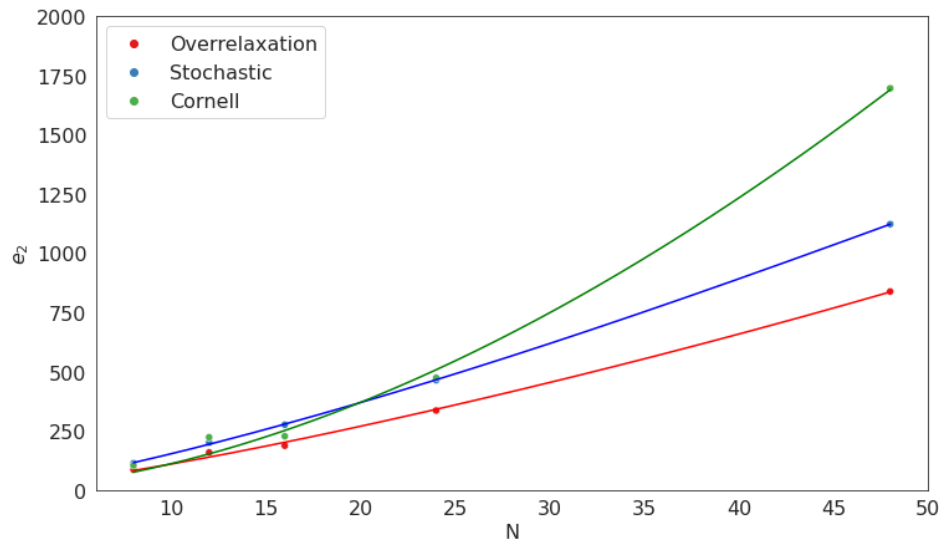


Figura 32 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.10$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazendo para $T/T_c = 1.50$, podemos ver a figura (33) que mostra os pontos categorizados para cada volume espacial em $N_t = 4$.

Traçando o ajuste nos pontos, será encontrado a figura (34), no qual a tabela (26) mostra os resultados de cada parâmetro.

Para $T/T_c = 1.50$, é observado que na tabela (26) o menor z é o do SRE, por mais

Tabela 25 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.10$ fixando $N_t = 4$.

Algoritmo	A	z
SR	5.54(82)	1.29(04)
SRE	8.23(28)	1.26(01)
Cornell	2.04(80)	1.74(10)

Fonte: Elaborada pelo autor.

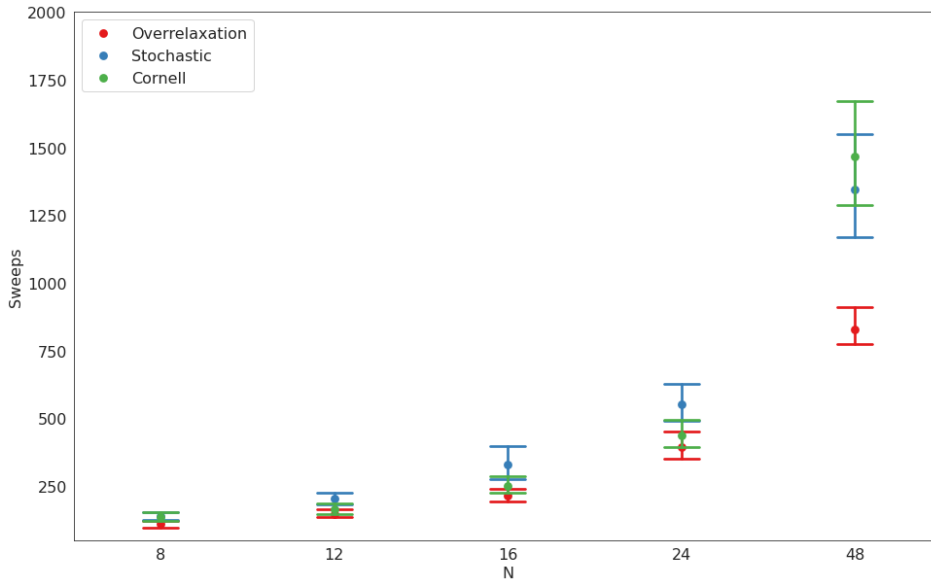


Figura 33 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 26 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 4$.

Algoritmo	A	z
SR	4.19(51)	1.35(03)
SRE	5.51(50)	1.38(02)
Cornell	1.46(49)	1.75(09)

Fonte: Elaborada pelo autor.

que na figura (34) mostre que para o intervalo de N escolhido, SR seja melhor. Isso se dá pelo baixo valor da constante A de SR em relação ao SRE. Entretanto, ocorre aqui algo que ainda não havia sido observado no ajuste, mas havia sido citado na subseção anterior. O comportamento de Cornell se torna melhor que de SRE para N pequeno. Entretanto, a partir de $N = 36$, o SRE passa a ser melhor. Em todos os casos dentro do intervalo observado, SR performa melhor. Como z nesse caso é para SR e SRE são muito parecidos, o que vai ditar bastante o a performance é o valor de A . Pelo de da constante A de SR ser menor que a de SRE, concluímos a partir de testes de interpolação que SR perfoma melhor também para valores de N grande.

Por fim, Fazendo para $T/T_c = 2.00$, podemos ver a figura (35) que mostra os pontos

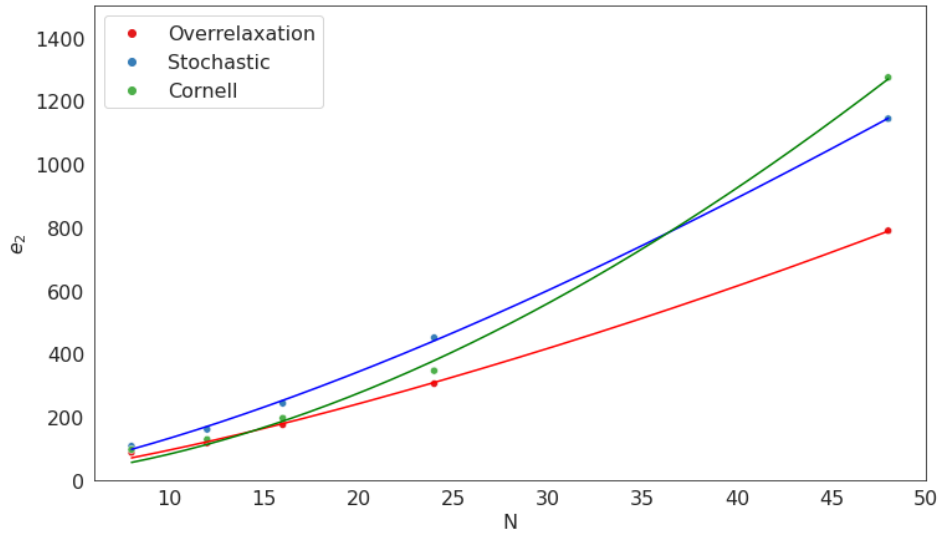


Figura 34 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

categorizados para cada volume espacial em $N_t = 4$.

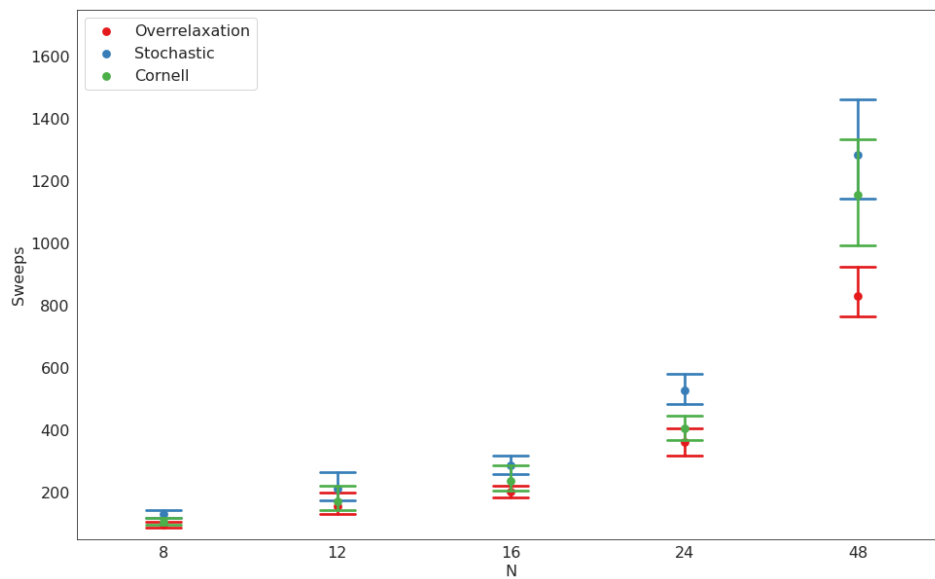


Figura 35 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um gráfico de pontos categorizado. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Traçando o ajuste nos pontos, será encontrado a figura (36), no qual a tabela (27) mostra os resultados de cada parâmetro.

Como pode ser observado na figura (36), o algoritmo de Cornell funciona melhor que o SRE no intervalo de valores de N escolhida. Entretanto, SR ainda aparece como

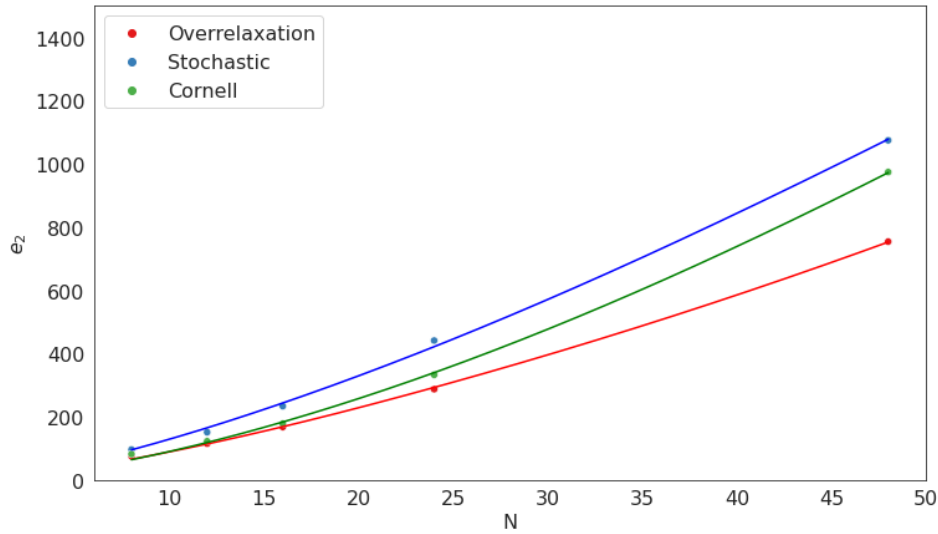


Figura 36 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 27 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 4$.

Algoritmo	A	z
SR	3.85(30)	1.36(03)
SRE	5.69(71)	1.35(03)
Cornell	2.72(35)	1.51(03)

Fonte: Elaborada pelo autor.

o mais performático. Para valores maiores de temperatura, é possível que Cornell para valores pequenos de N performe melhor que SR, mas é um teste importante a ser feito. Basicamente os valores de z de SR e SRE estão no mesmo intervalo, mas possuem valores de A razoavelmente distintos, o que configura em utilizar SR para esse caso em vez de SRE.

8.3.2.2 $N_t = 8$

Agora para $N_t = 8$, o processo será semelhante ao feito para $N_t = 4$. Entretanto, alguns problemas foram encontrados para calcular o expoente crítico para os valores de temperatura, que foram definidos como em $N_t = 4$. Tomemos $T/T_c = 1.50$. Os valores utilizados de volume de rede foram $12^3 \times 8$, $16^3 \times 8$, $24^3 \times 8$ e $32^3 \times 8$. A figura (37) mostra o boxplot para esses algoritmos. Podemos ver como para $N = 32$ as caixas aumentaram bastante de tamanho, assim como os limites superiores referente aos algoritmos Cornell e SRE.

Fazendo o cálculo de expoente crítico para esse caso, encontraremos os resultados na tabela (28), que carregam valores muito altos para no erro da constante. um dos motivos

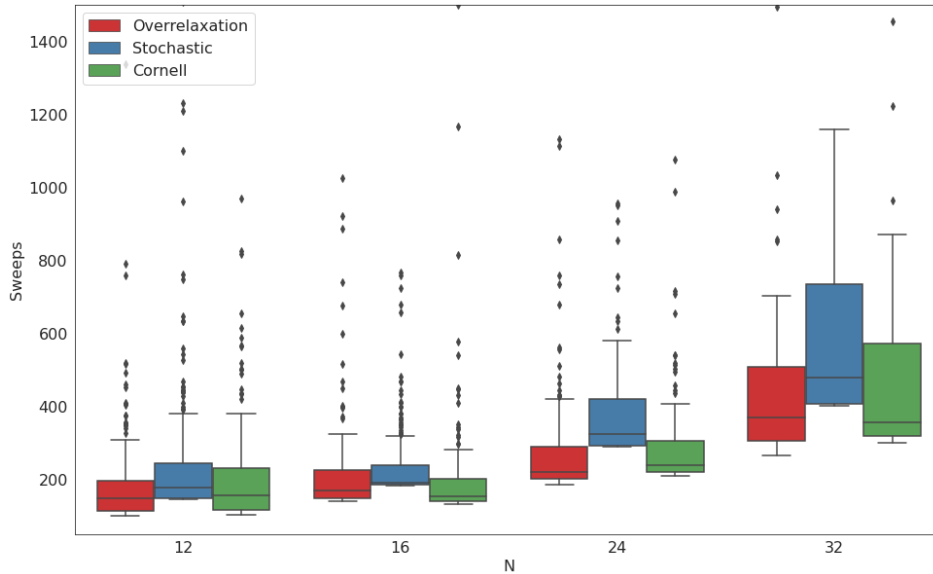


Figura 37 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um boxplot. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

disso pode ser visto na figura (37). Não foi possível fazer um bom ajuste nos dados. Um dos motivos disso se deve ao fato de que para $N_t = 8$, muitos erros presentes no volume de rede foram encontrados, o que afetou os resultados.

Tabela 28 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 8$.

Algoritmo	A	σ_A	z	σ_z
SR	9.10	6.87	1.05	0.23
SRE	8.22	3.73	1.17	0.13
Cornell	10.32	6.35	1.01	0.18

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por conta disso, nenhuma conclusão pode ser tomada, a não ser que SRE não performa bem, enquanto Cornell e SR podem ser utilizados nesse caso como bons algoritmos para fixação de gauge de Landau nessa temperatura e nesse valor de N_t .

Para $T/T_c = 2.00$, A figura (40) mostra os boxplot para os tamanhos de rede selecionados.

É possível observar na figura (40) um comportamento semelhante ao da figura (38).

Com isso, é possível observar que a partir da tabela (29) e da figura (40) o mesmo comportamento inconclusivo entre Cornell e SR por conta dos seus altos valores para o erro da constante A . Também, podemos concluir apenas que SRE não é o algoritmo ideal, por conta do comportamento visto.

Como foi possível observar, o volume $12^3 \times 8$ acaba sendo um impedidor do ajuste

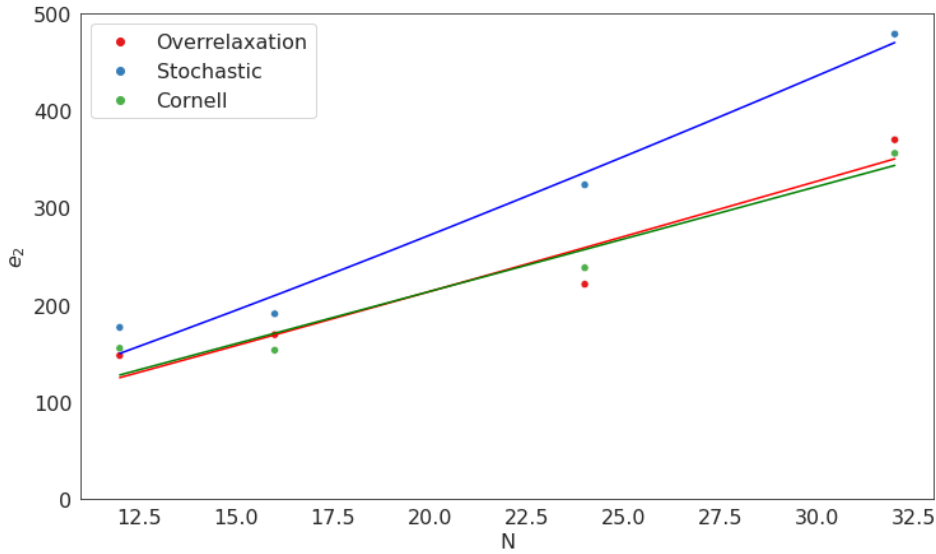


Figura 38 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 1.50$ fixando $N_t = 8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

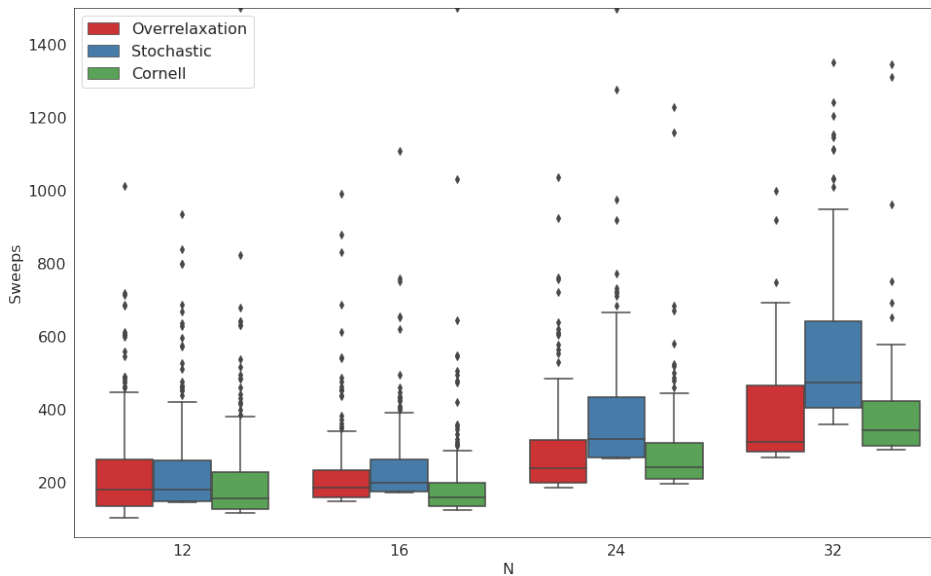


Figura 39 – Comparativo entre os algoritmos SR, SRE e Cornell em um boxplot. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

funcionar bem. O ideal seria não utilizá-lo. Contudo, fazer isso é deixar apenas 3 pontos para que um ajuste seja feito também não é ideal. Uma maneira de corrigir os problemas do ajuste é através da inclusão de novos pontos a partir de volumes maiores, como por exemplo $42^3 \times 8$ ou $48^3 \times 8$.

Tabela 29 – Tabela com dados do ajuste feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 8$.

Algoritmo	A	σ_A	z	σ_z
SR	35.40	12.07	0.62	0.11
SRE	9.50	4.13	1.12	0.13
Cornell	13.28	6.35	0.93	0.15

Fonte: Elaborada pelo autor.

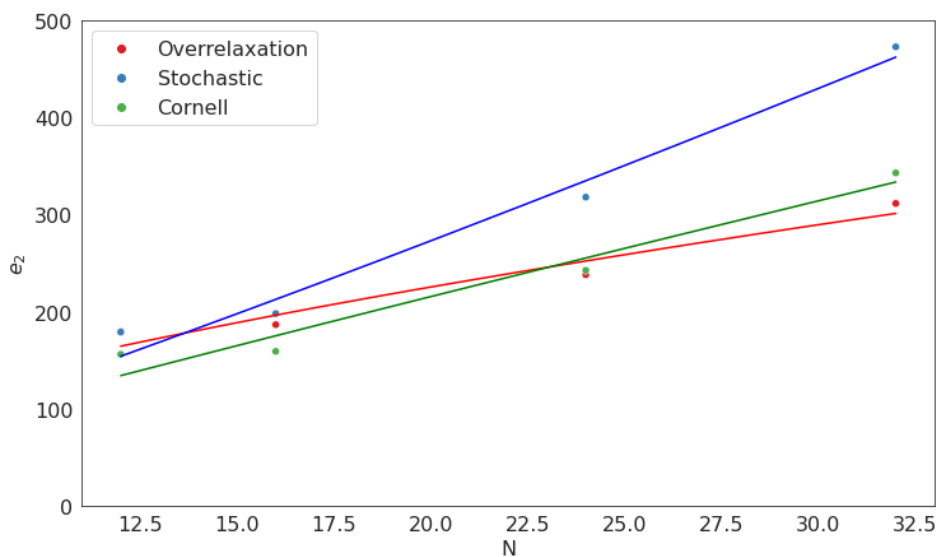


Figura 40 – Comparativo do ajuste $C(N) = AN^z$ entre os algoritmos SR, SRE e Cornell. Gráfico feito para $T/T_c = 2.00$ fixando $N_t = 8$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

9 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA FIXAÇÃO DE GAUGE EM TEORIA SU(3)

Para o caso do SU(3), foram gerados dados apenas para temperatura zero. Como já explicamos em SU(2) como funciona o processo de termalização, geração de plaquetas e decorrelação, iremos abordar apenas a análise exploratória para fixação de gauge de Landau no SU(3).

9.0.1 Análise de Hits para SR e SRE

Essa análise é necessária para Los Alamos, SR e SRE, pois fazem eles um processo de fixação que não acessa em um primeiro loop (chamaremos de hit) na rede o mínimo local. Como definido no Capítulo 7, a proposta de Suman e Schilling era de ser necessário 5-7 hits para garantir o acesso mais próximo possível do mínimo local. Por conta disso, essa análise envolve compreender para diferentes tamanhos de rede, se essa proposta é mantida. Não consideraremos Los Alamos pois SR e SRE já são algoritmos que naturalmente performam melhor, como já explicamos anteriormente. Logo, serão analisados os comportamentos para 4^4 , 8^4 e 12^4 . Essa análise também será feita fixando o valor de $\beta = 5.9$.

Em primeiro lugar, faremos a análise para 4^4 em e_2 . A tabela (30) mostra o desempenho para o melhor ω e p fazendo o processo de 1 a 5 hits. É importante salientar que para essa análise, também é importante verificar os valores de tempo, pois a mediana deve se mandar estática em certo momento.

Tabela 30 – Tabela com dados de mediana de e_2 para SR e SRE. Foi utilizado 400 configurações, $\beta = 5.9$ e $V = 4^4$. O valor do tempo é medido em segundos e equivale a mediana do tempo que todas as configurações levaram para alcançar a fixação de gauge. O tempo normalizado é o valor do tempo de cada um dos hits em relação a $\text{hit} = 1$.

Hit	$\omega_{\text{ótimo}}$	e_2	Desvio Padrão	Tempo (s)	Tempo Normalizado
1	1.62	65.0	68.73	0.1945	1.00
2	1.66	64.0	62.29	0.2100	1.07
3	1.68	64.0	54.61	0.2082	1.07
4	1.68	64.0	53.97	0.2293	1.17
5	1.68	64.0	52.70	0.2435	1.25
Hit	$p_{\text{ótimo}}$	e_2	Desvio Padrão	Tempo (s)	Tempo Normalizado
1	0.50	91.0	86.56	0.3552	1.00
2	0.58	74.0	85.62	0.2728	0.77
3	0.61	76.0	62.71	0.2938	0.83
4	0.61	75.0	86.42	0.3300	0.93
5	0.59	75.0	80.45	0.3841	1.08

Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível observar na tabela (30) é que SR nesse tamanho de rede pequeno,

funciona melhor com 1 hit. Enquanto isso, SRE funciona melhor com 2 hits. Também é possível observar desde já que há como ocorre uma estabilidade no valor da mediana, enquanto o tempo para fixar o gauge aumenta.

Para $V = 8^4$, foram utilizadas 298 configurações para 200 varreduras de decorrelação entre os links. A tabela (31) mostra esses resultados.

Tabela 31 – Tabela com dados da mediana de e_2 para SR e SRE. Foi utilizado 298 configurações, $\beta = 5.9$ e $V = 8^4$. O valor do tempo é medido em segundos e equivale a mediana do tempo que todas as configurações levaram para alcançar a fixação de gauge. O tempo normalizado é o valor do tempo de cada um dos hits em relação a $\text{hit} = 1$.

Hit	$\omega_{\text{ótimo}}$	e_2	Desvio Padrão	Tempo (s)	Tempo Normalizado
1	1.71	157.0	134.17	6.7796	1.00
2	1.82	123.0	69.06	5.7076	0.84
3	1.82	122.0	73.14	6.4260	0.95
4	1.82	121.5	95.27	6.4678	0.96
5	1.82	121.0	86.20	6.6297	0.99
Hit	$p_{\text{ótimo}}$	e_2	Desvio Padrão	Tempo (s)	Tempo Normalizado
1	0.61	240.0	183.77	12.7900	1.00
2	0.77	154.5	90.10	10.5767	0.83
3	0.76	151.5	116.05	8.9958	0.70
4	0.78	150.5	116.80	12.6850	0.99
5	0.77	153.0	163.30	16.0610	1.26

Fonte: Elaborada pelo autor.

O que podemos observar para a tabela (31) é uma diferença brusca da mediana de e_2 entre $\text{hit}=1$ e $\text{hit}=2$ para ambos algoritmos. Essa diferença também ocorre para o desvio padrão. Isso mostra também que a mediana do tempo de processamento para os links se torna razoavelmente mais curto em ambos os algoritmos. Para SR, vemos que o ideal de tempo e e_2 é utilizar 2 hits, enquanto para SRE é utilizar 3 hits.

Por fim, para $V = 12^4$, foram usadas 197 configurações com 200 varreduras de decorrelação. A tabela (32) mostra os resultados encontrados para esse caso.

Como pode ser observado em na tabela (32), Para SR há uma queda semelhante para e_2 em SR e SRE entre os hits 1 e 2. Essa mudança é mais brusca em SRE, fazendo com que a mediana do tempo de 2 hits seja menos da metade do tempo de 1 hit. Entretanto, há uma forte mudança também para SR, no qual o tempo é quase 2 vezes menor.

Esse teste nos mostrou a priori que utilizar 5-7 hits para fixação de gauge não é o ideal pois, conforme estamos aumentando o tamanho de rede, se torna mais perceptível que $\text{hit} = 2$ é o ideal a ser utilizado, principalmente por conta do tempo de processamento e da mediana de e_2 pouco se modificar, mesmo que haja diferenças no desvio padrão.

Tabela 32 – Tabela com dados da mediana de e_2 para SR e SRE. Foi utilizado 197 configurações, $\beta = 5.9$ e $V = 12^4$. O valor do tempo é medido em segundos e equivale a mediana do tempo que todas as configurações levaram para alcançar a fixação de gauge. O tempo normalizado é o valor do tempo de cada um dos hits em relação a $hit = 1$.

Hit	$\omega_{\text{ótimo}}$	e_2	Desvio Padrão	Tempo (s)	Tempo Normalizado
1	1.75	368.0	280.85	99.9523	1.00
2	1.90	195.0	148.52	59.7311	0.60
3	1.89	197.0	94.15	64.3704	0.64
4	1.89	195.0	93.03	76.2606	0.76

Hit	$p_{\text{ótimo}}$	e_2	Desvio Padrão	Tempo (s)	Tempo Normalizado
1	0.68	537.0	292.13	134.68	1.00
2	0.86	267.0	114.32	63.5717	0.47
3	0.86	262.0	100.09	69.2958	0.51
4	0.85	261.0	124.40	70.3532	0.52

Fonte: Elaborada pelo autor.

9.0.2 Análise de Eficiência de Algoritmo

A análise de eficiência nesse caso será semelhante a que foi feita para SU(2) em temperatura finita. Estudaremos o comportamento crítico para os volumes de rede, mas agora considerando configurações em constante física, ou seja, com Na constante. Neste caso, N é tamanho da rede em qualquer direção e a é o espaçamento de rede, que pode ser calculado por (38)

$$a = r_0 \exp(f(\beta)), \quad (9.1)$$

onde r_0 é o parâmetro de Somme, que é aproximadamente 0.5 fm. Além disso, $f(\beta)$ é parametrizado como

$$f(\beta) = -1.6804 - 1.7331(\beta - 6.0) + 0.7849(\beta - 6.0)^2 - 0.4428(\beta - 6.0)^3. \quad (9.2)$$

Com isso, levando em consideração também a lei de potência $f(N) = AN^z$, faremos a análise dos algoritmos SR, SRE e Cornell. Para os dois primeiros citados, a análise considerará apenas 2 hits, como foi concluído pela análise anterior. O algoritmo Cornell não depende dessa análise de hits. Foram utilizados para manter constante física os seguintes valores: $\beta = 6.0, 6.13655, 6.2601, 6.47466$. Foram usados respectivamente $8^4, 10^4, 12^4$ e 16^4 . Essas informações podem ser encontradas na tabela (33). Entretanto, para SU(3) incluiremos a análise não só levando em consideração e_2 , mas também a fixação por meio de e_6 .

Pelo apresentado na tabela (33), é perceptível a diferença de comportamento entre e_2 e e_6 , onde o último é mais custoso para fixar o gauge de Landau. Além disso, também é observado que para e_2 , SR parece ser mais performático para os tamanhos de rede presentes na tabela, enquanto e_6 parece indicar que também é SR, mas seguindo bem de perto por SRE, até que em $V = 16^4$, esse último parece performar melhor.

Tabela 33 – Tabela contendo dados para mediana de e_2 and e_6 .

Volume	Configurações	β	hits	$\omega_{\text{ótimo}}$	e_2	e_6
6^4	200	5.84572	2	1.77	92.5	106.0
8^4	200	6.00000	2	1.84	134.0	161.5
10^4	200	6.13655	2	1.86	157.0	192.5
12^4	200	6.26010	2	1.88	203.0	255.0
16^4	100	6.47466	2	1.91	268.0	352.0
Volume	Configurações	β	hits	$p_{\text{ótimo}}$	e_2	e_6
6^4	200	5.84572	2	0.70	112.0	120.0
8^4	200	6.00000	2	0.78	154.0	161.5
10^4	200	6.13655	2	0.80	196.5	223.5
12^4	200	6.26010	2	0.83	233.5	259.5
16^4	100	6.47466	2	0.89	328.0	350.5
Volume	Configurações	β	hits	$\alpha_{\text{ótimo}}$	e_2	e_6
6^4	200	5.84572	1	0.271	106.5	119.0
8^4	200	6.00000	1	0.270	141.5	168.5
10^4	200	6.13655	1	0.269	175.0	212.5
12^4	200	6.26010	1	0.272	221.0	276.5
16^4	100	6.47466	1	0.272	271.5	373.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 34 – Valores de ajuste para equação $e_2 = A_1 N^{z_1}$.

Algoritmo	A_1	z_1
SR	14.16 ± 1.72	1.06 ± 0.05
SRE	15.78 ± 0.98	1.10 ± 0.02
Cornell	18.53 ± 1.97	0.98 ± 0.04

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura (41) mostra os resultados de e_2 para N . A tabela (34) mostra como se comportam tanto a constante A_1 quanto o expoente z_1 para e_2 . Com os resultados encontrados até o momento, para $N > 30$ Cornell se tornaria o algoritmo mais performático. A figura (41) mostra como de fato, a curva de Cornell tende a tocar a curva de SR para valores não tão grandes de N . Entretanto, como são valores de tamanho de rede pequenos, o ideal é que valores maiores sejam feitos, de modo a trazer uma melhora da estatística presente.

Além disso, considerando e_6 como um padrão ainda mais rigoroso de fixação de gauge, é perceptível que os algoritmos passam a ser mais demorados tanto no tempo de processamento quanto na quantidade de varreduras necessários para fixar o gauge de Landau.

Dessa vez, ocorre uma mudança do algoritmo que é mais performático. SRE possui o menor z_2 dos 3 algoritmos, o que faz com que ele seja o ideal a partir de um certo tamanho de rede específico. Com os resultados que foram encontrados até o momento, a partir de $N = 16$ deve-se utilizar SRE. Cornell em algum momento será melhor que SR,

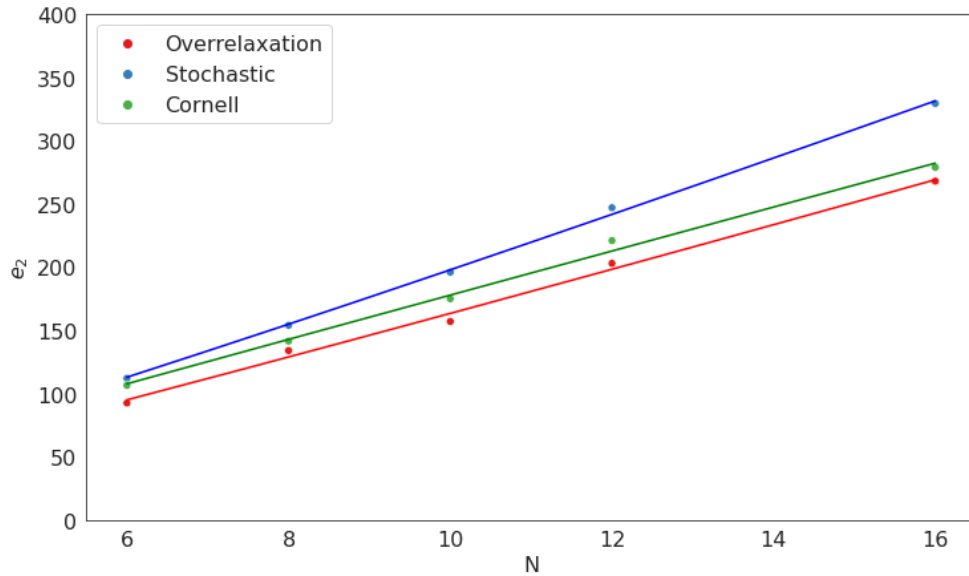


Figura 41 – Mediana para 2 hits de SR e SRE, mas 1 hit para Cornell. Os valores de β para cada volume de rede está na tabela (33). O ajuste foi feito com $e_2 = A_1 N^{z_1}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 35 – Valores de ajuste para equação $e_6 = A_2 N^{z_2}$.

Algoritmo	A_2	z_2
SR	12.80 ± 1.67	1.20 ± 0.05
SRE	17.92 ± 2.16	1.07 ± 0.04
Cornell	15.02 ± 1.35	1.16 ± 0.04

Fonte: Elaborada pelo autor.

mas nunca será melhor que SRE com os dados coletados até o momento. Para $N < 16$, deve-se utilizar SR, por possuir a menor constante A_2 .

Logo, como e_2 e e_6 possuem processos distintos para alcançar a fixação de gauge de Landau, cada um deles terá um algoritmo vencedor que deve ser utilizado, dependendo do tamanho de N a ser desenvolvido.

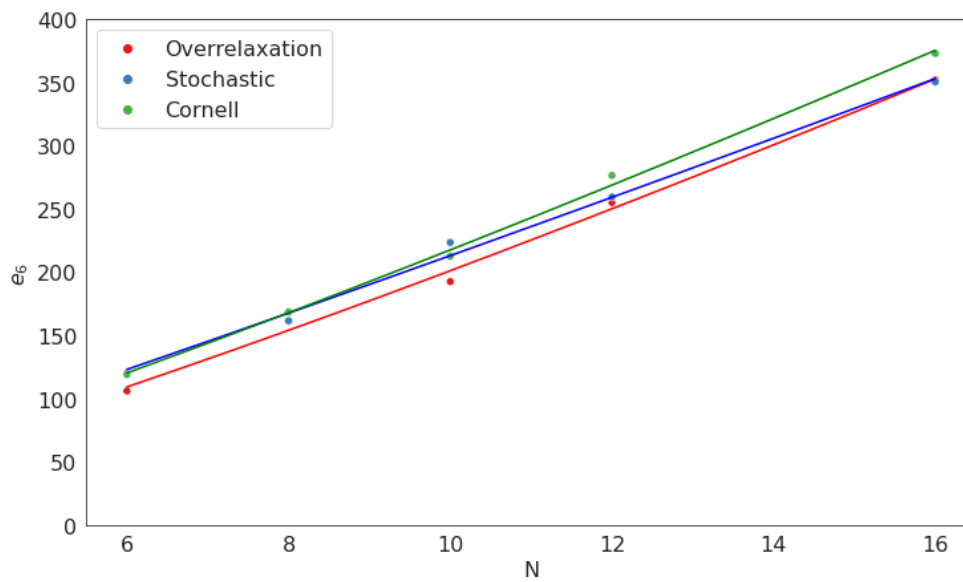


Figura 42 – Mediana para 2 hits de SR e SRE, mas 1 hit para Cornell. Os valores de β para cada volume de rede está na tabela (33). O ajuste foi feito com $e_6 = A_2 N_2^z$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

10 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA PROPAGADOR DO GLÚON EM TEORIA SU(2)

Esse capítulo contém alguns resultados preliminares para o propagador do glúon. Os resultados presentes aqui ainda precisam de tratamento mais aprofundado e adequado.

10.1 Ajuste do Tipo Gribov-Stingl

Para os nossos estudos, vamos utilizar o cálculo dos propagadores do glúon na rede, descritos no Capítulo 7. Para encontrarmos as massas de blindagem, vamos utilizar um ajuste a partir de uma forma analítica do tipo Gribov-Stingl (83–85) dada por

$$D(p^2) = C \frac{1 + dp^{2\eta}}{(p^2 + r)^2 + s^2}. \quad (10.1)$$

Na equação acima, temos que o parâmetro η deveria ser igual a 1 para que a expressão tivesse um comportamento esperado em regiões de momentos altos. Entretanto, não foi possível utilizar esse valor em nossos ajustes e por isso, mantivemos esse parâmetro também para o ajuste nos fornecer o seu valor. Além disso, essa equação acomoda dois polos complexo conjugados, que possuem “massas” dependentes de r e s , de modo que $m^2 = r \pm is$, onde $m = m_R + im_I$. (76)

Essa forma analítica foi utilizada em estudos realizados para comportamento IR de propagadores de glúons a temperatura zero pelo grupo IFSC-USP em parceria com o grupo da Universidade de Ghent. (86) As formas desse trabalho são inspiradas pelo propagador que foi obtido no cenário de Gribov-Zwanziger refinado. (87, 88)

Para o caso do propagador do glúon quadridimensional a temperatura zero, o melhor ajuste encontrado foi

$$f_1(p^2) = C \frac{p^2 + v}{p^4 + up^2 + t^2}. \quad (10.2)$$

10.2 Temperatura Finita

Vamos analisar separadamente cada um desses propagadores nas temperaturas $T/T_c = 0.90, 1.00$ e 1.10 .

10.2.1 $T/T_c = 0.90$

Mostraremos os nossos resultados separadamente para os propagadores transversal físico $D_T(p^2) = a^2 \hat{D}_T(p^2)$ e longitudinal físico $D_L(p^2) = a^2 \hat{D}_L(p^2)$. Também calcularemos os erros que cada uma de suas componentes através de, respectivamente, σ_{D_T} e σ_{D_L} . Foram utilizadas as configurações de gauge fixadas no gauge de Landau no capítulo 8.

Vamos primeiro fazer o cálculo para uma rede em que a dimensão temporal é $N_t = 4$. Em seguida, faremos para $N_t = 8$.

10.2.1.1 $N_t = 4$

Para a rede de volume $8^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (36). Nessa tabela, a componente em $p = 0$ carrega um erro maior em relação as outras componentes de momento, para cada propagador. Entretanto, pelo propagador longitudinal possuir para $p = 0$ um valor de componente maior que para o transversal, o erro associado a ele também possui um pequeno aumento.

Tabela 36 – Componentes do propagador do glúon transversal e longitudinal, para volume $8^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.413	0.112	14.611	0.375
1	0.84	1.583	0.040	3.007	0.077
2	1.63	0.391	0.009	0.456	0.011
3	2.24	0.177	0.004	0.192	0.005
4	2.47	0.145	0.004	0.167	0.004

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $12^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (37). Podemos ver como anteriormente, que a componente em $p = 0$ também carrega um erro maior que as outras componentes para o propagador. Entretanto, percebemos uma diminuição em D_T e um aumento em D_L para essa componente de momento baixa.

Tabela 37 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	3.718	0.103	19.011	0.534
1	0.56	2.434	0.067	7.130	0.199
2	1.11	0.881	0.024	1.426	0.039
3	1.63	0.374	0.010	0.455	0.012
4	2.07	0.233	0.006	0.246	0.006
5	2.37	0.162	0.004	0.164	0.004
6	2.47	0.141	0.004	0.147	0.004

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $16^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (38). Percebemos poucas mudanças em relação aos volumes anteriores.

Para a rede de volume $24^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (39). Como o tamanho da rede aumentou em relação aos casos

Tabela 38 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	3.022	0.094	20.647	0.651
1	0.42	2.449	0.076	11.168	0.350
2	0.83	1.319	0.041	2.982	0.093
3	1.25	0.651	0.020	0.951	0.029
4	1.63	0.373	0.011	0.484	0.015
5	1.97	0.228	0.007	0.261	0.008
6	2.24	0.193	0.006	0.196	0.006
7	2.41	0.155	0.005	0.168	0.005
8	2.47	0.147	0.004	0.144	0.004

Fonte: Elaborada pelo autor.

anteriores, começamos a perceber um comportamento do propagador que não era visto ainda. Isso ocorre por estarmos tanto acessando mais pontos na dimensão de momento quanto diminuindo os efeitos finitos da rede. Percebemos também um novo aumento da componente $p = 0$ no propagador longitudinal.

Tabela 39 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	2.461	0.083	28.783	0.982
1	0.28	2.491	0.084	18.643	0.633
2	0.56	2.008	0.068	7.390	0.251
3	0.83	1.264	0.042	3.083	0.104
4	1.11	0.865	0.029	1.389	0.047
5	1.38	0.541	0.018	0.743	0.025
6	1.63	0.374	0.012	0.450	0.015
7	1.86	0.276	0.009	0.351	0.011
8	2.07	0.208	0.007	0.237	0.008
9	2.24	0.184	0.006	0.194	0.006
10	2.37	0.166	0.005	0.178	0.006
11	2.44	0.142	0.004	0.165	0.005
12	2.47	0.138	0.004	0.151	0.005

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $48^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (40). Sendo essa a maior rede que calculamos para essa tese, percebemos um comportamento do propagador do glúon transversal que não era visto ainda. As componentes de D_T aumentam um pouco em $p = 0, 1$ e 2 e depois começam a diminuir até os valores mais altos de p . Esse comportamento melhor se assemelha ao comportamento do propagador do glúon tridimensional donos calculos anteriores do propagador. Para o propagador longitudinal, vemos uma diminuição no valor da componente $p = 0$, mas

ainda observamos que o erro atrelado ao propagador está maior para pequenos valores de momento.

Tabela 40 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $48^3 \times 4$, $\beta = 2.2676322$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	1.866	0.082	22.669	1.014
1	0.14	2.189	0.096	23.799	1.055
2	0.28	2.197	0.097	17.533	0.781
3	0.42	2.061	0.091	11.177	0.496
4	0.56	1.954	0.086	6.667	0.295
5	0.70	1.726	0.076	4.996	0.222
6	0.83	1.283	0.057	2.835	0.125
7	0.98	1.064	0.047	1.835	0.081
8	1.11	0.828	0.036	1.529	0.068
9	1.25	0.677	0.030	0.878	0.039
10	1.38	0.558	0.025	0.704	0.031
11	1.51	0.442	0.019	0.620	0.027
12	1.63	0.391	0.017	0.415	0.018
13	1.75	0.321	0.014	0.359	0.016
14	1.87	0.268	0.011	0.319	0.014
15	1.97	0.234	0.010	0.225	0.010
16	2.07	0.218	0.010	0.253	0.011
17	2.16	0.194	0.009	0.202	0.009
18	2.24	0.183	0.008	0.207	0.009
19	2.31	0.176	0.008	0.167	0.007
20	2.36	0.155	0.007	0.176	0.008
21	2.41	0.156	0.007	0.158	0.007
22	2.44	0.142	0.006	0.152	0.007
23	2.46	0.148	0.007	0.159	0.007
24	2.47	0.141	0.006	0.163	0.007

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com os nossos resultados de $N_t = 4$ feitas, vamos agora aplicar o ajuste com base na equação (10.1) para os volumes: $12^3 \times 4$, $16^3 \times 4$, $24^3 \times 4$, $48^3 \times 4$. Temos com isso o propagador com suas linhas de ajuste na figura (43).

Com base na figura (43), podemos ver que os melhores ajustes tanto no transversal quanto no longitudinal se encontram para $V = 48^3 \times 4$. Isso se deve muito ao número de pontos disponíveis para fazer o melhor ajuste possível. Entretanto, nesse volume também encontramos o melhor comportamento físico do propagador, pois estamos desprezando cada vez mais os efeitos finitos da rede na aproximação ao contínuo. Porém, ainda estamos com uma tamanho de rede temporal N_T muito pequeno. Vamos mostrar nossos resultados para $N_t = 8$ a seguir.

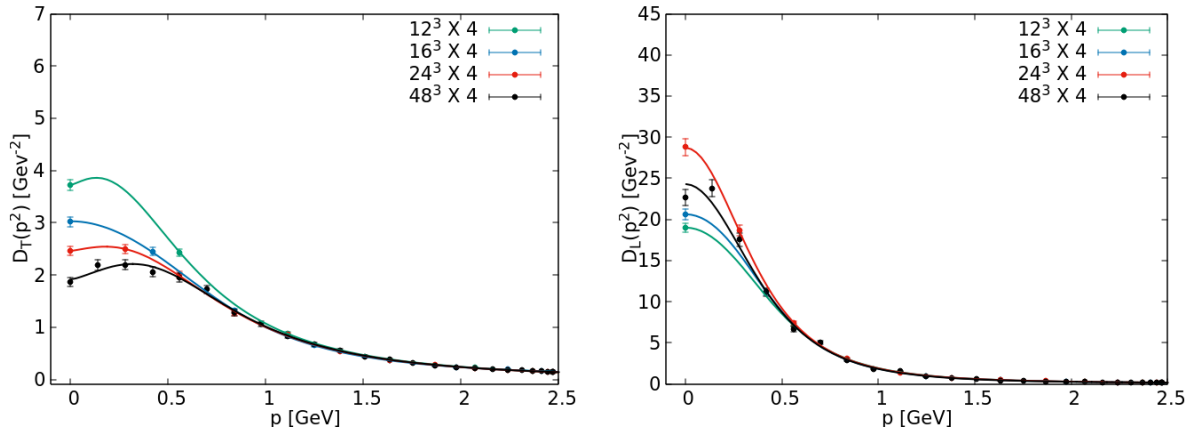


Figura 43 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 4$ e $T/T_c = 0.90$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

10.2.1.2 $N_t = 8$

Para a rede de volume $12^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (41). Da mesma maneira que em $N_t = 4$, encontramos os maiores erros presentes tanto em D_T quanto em D_L para $p = 0$.

Tabela 41 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 8$, $\beta = 2.478960$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV^{-2}]	σ_{D_T} [GeV^{-2}]	$D_L(p^2)$ [GeV^{-2}]	σ_{D_L} [GeV^{-2}]
0	0.00	5.413	0.151	8.307	0.234
1	1.13	1.018	0.028	1.236	0.034
2	2.24	0.171	0.004	0.187	0.005
3	3.29	0.067	0.001	0.066	0.001
4	4.17	0.043	0.001	0.041	0.001
5	4.76	0.031	0.001	0.031	0.001
6	4.97	0.028	0.001	0.028	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $16^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (38). Percebemos poucas mudanças em relação aos volumes anteriores. Talvez a única bem perceptível é um aumento em $p = 0$ da componente de D_L .

Para a rede de volume $24^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (43). Percebemos um novo aumento para D_L em $p = 0$ em relação aos volumes anteriores. Além disso, é visto que o comportamento de D_T para esse volume de rede ainda é distante do valor que foi encontrado em $48^3 \times 4$ para essa mesma temperatura, pois não observamos um crescimento das componentes e depois um decréscimo. O comportamento de D_T nesse caso é semelhante ao encontrado para as redes

Tabela 42 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 8$, $\beta = 2.478960$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.514	0.141	29.207	0.917
1	0.84	1.447	0.045	3.634	0.113
2	1.69	0.321	0.010	0.412	0.012
3	2.51	0.131	0.004	0.131	0.004
4	3.29	0.068	0.002	0.066	0.002
5	3.97	0.044	0.001	0.048	0.001
6	4.51	0.035	0.001	0.036	0.001
7	4.85	0.031	0.001	0.031	0.001
8	4.97	0.029	0.001	0.031	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

que consideramos pequenas. Podemos ver então que para esse tamanho de rede, ainda possuímos efeitos de volume finitos afetando nossos resultados, o que pede redes maiores.

Tabela 43 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 8$, $\beta = 2.478960$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	3.910	0.157	34.462	1.408
1	0.56	2.211	0.089	9.516	0.386
2	1.12	0.808	0.032	1.407	0.056
3	1.69	0.329	0.013	0.395	0.015
4	2.24	0.176	0.007	0.189	0.007
5	2.78	0.095	0.003	0.103	0.004
6	3.29	0.068	0.002	0.072	0.003
7	3.76	0.052	0.002	0.048	0.002
8	4.17	0.041	0.001	0.042	0.001
9	4.51	0.037	0.001	0.034	0.001
10	4.76	0.029	0.001	0.031	0.001
11	4.92	0.028	0.001	0.029	0.001
12	4.97	0.028	0.001	0.028	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com os nossos resultados de $N_t = 8$ revelados, vamos agora aplicar o ajuste com base na equação (10.1) para os volumes: $12^3 \times 8$, $16^3 \times 8$, $24^3 \times 8$. Temos com isso o propagador com suas linhas de ajuste na figura (44).

Percebemos ao observar a figura (44) que o propagador transversal ainda não se encontra com o comportamento esperado do propagador do glúon tridimensional. O principal motivo é o pequeno volume de rede. Será necessário construir propagadores com volumes de rede maiores para que esse comportamento possa ser alcançado. Já para o propagador longitudinal, observamos o comportamento esperado para $24^3 \times 8$, mas ele apresenta ainda erros altos em relação a $p = 0$. É importante que mais configurações sejam

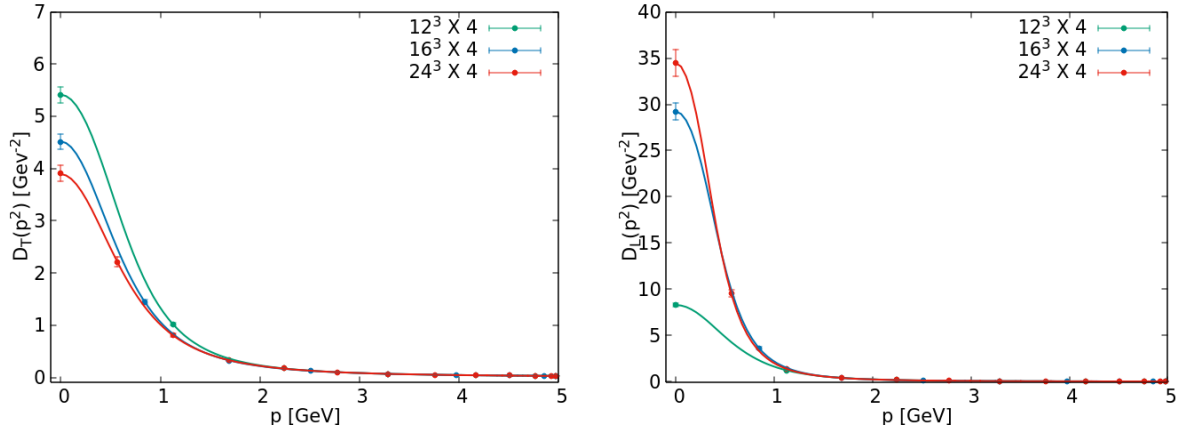


Figura 44 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 8$ e $T/T_c = 0.90$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

atrelados ao cálculo estatístico do propagador, mas também volumes de rede maiores poderão auxiliar na diminuição desses erros.

10.2.2 $T/T_c = 1.00$

Da mesma forma que fizemos para $T/T_c = 0.90$, vamos fazer agora os cálculos de propagadores para a temperatura crítica. Vamos primeiro fazer o cálculo para uma rede em que a dimensão temporal é $N_t = 4$. Em seguida, faremos para $N_t = 8$.

10.2.2.1 $N_t = 4$

Para a rede de volume $8^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (44). Para esse volume de rede, não percebemos muitas mudanças em relação aos valores encontrados para $T/T_c = 0.90$.

Tabela 44 – Componentes do propagador do glúon transversal e longitudinal, para volume $8^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV^{-2}]	σ_{D_T} [GeV^{-2}]	$D_L(p^2)$ [GeV^{-2}]	σ_{D_L} [GeV^{-2}]
0	0.00	4.502	0.114	14.288	0.376
1	0.93	1.369	0.034	2.273	0.057
2	1.82	0.295	0.007	0.318	0.008
3	2.49	0.143	0.003	0.152	0.004
4	2.75	0.112	0.002	0.106	0.003

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $12^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (45). Percebemos que em relação a tabela (44), ocorreu um aumento

de D_L para $p = 0$ e uma diminuição em D_T para mesmo momento. Isso também já havia sido observado para $T/T_c = 0.90$.

Tabela 45 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	3.859	0.107	23.177	0.655
1	0.62	2.001	0.055	6.464	0.181
2	1.24	0.734	0.020	0.953	0.026
3	1.82	0.282	0.007	0.338	0.009
4	2.30	0.168	0.004	0.179	0.005
5	2.63	0.121	0.003	0.129	0.003
6	2.75	0.116	0.003	0.106	0.002

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $16^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (38). Houve um aumento significativo para D_L em $p = 0$ no valor da componente. Esse aumento é muito alto em relação tanto aos volumes anteriores para essa mesma temperatura, mas também em relação ao volume $16^3 \times 4$ para $T/T_c = 0.90$.

Tabela 46 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	2.801	0.087	42.802	1.353
1	0.47	2.215	0.069	15.909	0.498
2	0.93	1.051	0.032	2.726	0.085
3	1.39	0.501	0.015	0.779	0.024
4	1.81	0.271	0.008	0.348	0.010
5	2.19	0.182	0.005	0.198	0.006
6	2.49	0.144	0.004	0.152	0.004
7	2.68	0.118	0.003	0.121	0.003
8	2.75	0.108	0.003	0.112	0.003

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $24^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (47). Podemos ver que D_L em $p = 0$ diminuiu consideravelmente em relação a $16^3 \times 4$ para essa mesma temperatura. Isso pode ter sido originado por conta dos efeitos físicos da rede, e por estarmos analisando os dados justamente na temperatura crítica. Para D_T , observamos pouca mudança em relação a esse mesmo volume, mas na temperatura $T/T_c = 0.90$.

Para a rede de volume $48^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (48). Como vimos em $T/T_c = 0.90$, esse é o maior volume de rede que calculamos para essa tese. Percebemos que o comportamento em D_T para

Tabela 47 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	2.379	0.081	23.903	0.826
1	0.31	2.347	0.079	15.316	0.521
2	0.62	1.716	0.058	5.541	0.188
3	0.93	1.154	0.039	2.253	0.076
4	1.23	0.673	0.022	1.039	0.035
5	1.53	0.410	0.013	0.530	0.018
6	1.81	0.286	0.009	0.322	0.011
7	2.07	0.209	0.007	0.236	0.008
8	2.30	0.163	0.005	0.174	0.006
9	2.49	0.138	0.004	0.156	0.005
10	2.63	0.125	0.004	0.124	0.004
11	2.72	0.118	0.004	0.126	0.004
12	2.75	0.120	0.004	0.111	0.004

Fonte: Elaborada pelo autor.

essa temperatura não foi semelhante ao que se observou em $T/T_c = 0.90$. Isso pode ser devido a esse tamanho de rede ainda não ser suficiente para alcançar o limite do contínuo, necessitando de volumes de rede maior. O propagador D_L diminuiu o seu valor em relação ao mesmo volume de rede em $T/T_c = 0.90$. Foi observado que em relação aos outros propagadores calculados de $T/T_c = 1.00$,

Com os nossos resultados de $N_t = 4$ feitas para a temperatura crítica, vamos agora aplicar o ajuste com base na equação (10.1) para os volumes: $12^3 \times 4$, $16^3 \times 4$, $24^3 \times 4$, $48^3 \times 4$. Temos com isso o propagador com suas linhas de ajuste na figura (45).

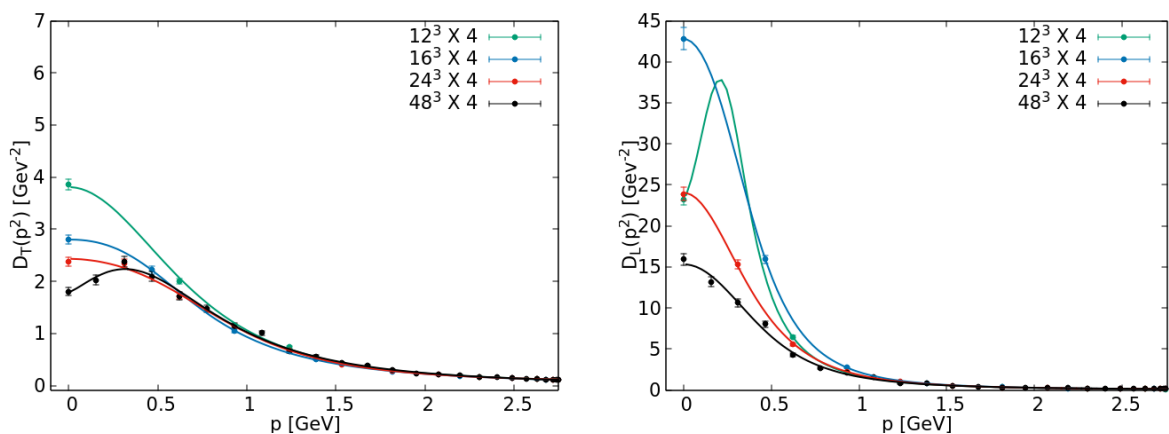


Figura 45 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 4$ e $T/T_c = 1.00$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base na figura (45), podemos ver que os melhores ajustes tanto no transversal

Tabela 48 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $48^3 \times 4$, $\beta = 2.29895$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	1.802	0.080	15.931	0.719
1	0.16	2.024	0.090	13.189	0.602
2	0.31	2.377	0.105	10.637	0.481
3	0.47	2.088	0.092	8.021	0.359
4	0.62	1.715	0.076	4.251	0.192
5	0.78	1.475	0.065	2.688	0.122
6	0.93	1.154	0.051	2.069	0.093
7	1.08	1.006	0.044	1.583	0.071
8	1.24	0.654	0.029	0.790	0.035
9	1.39	0.558	0.024	0.811	0.036
10	1.53	0.438	0.019	0.528	0.023
11	1.68	0.381	0.017	0.418	0.018
12	1.81	0.304	0.013	0.290	0.013
13	1.95	0.238	0.010	0.295	0.013
14	2.07	0.219	0.009	0.249	0.011
15	2.19	0.200	0.008	0.223	0.009
16	2.30	0.170	0.007	0.196	0.008
17	2.40	0.158	0.007	0.179	0.008
18	2.49	0.143	0.006	0.136	0.006
19	2.57	0.131	0.005	0.130	0.005
20	2.63	0.122	0.005	0.137	0.006
21	2.68	0.105	0.004	0.120	0.005
22	2.72	0.114	0.005	0.137	0.006
23	2.74	0.112	0.005	0.117	0.005
24	2.75	0.114	0.005	0.117	0.005

Fonte: Elaborada pelo autor.

quanto no longitudinal se encontram para $V = 48^3 \times 4$. Logo, temos o mesmo comportamento que o observado em $T/T_c = 0.90$. Vamos mostrar nossos resultados para $N_t = 8$ a seguir.

10.2.2.2 $N_t = 8$

Para a rede de volume $12^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (49). Da mesma maneira que em $N_t = 4$, encontramos os maiores erros presentes tanto em D_T quanto em D_L para $p = 0$.

Para a rede de volume $16^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (46). Percebemos poucas mudanças em relação aos volumes anteriores. Talvez a única bem perceptível é um aumento em $p = 0$ da componente de D_L .

Para a rede de volume $24^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (51). Percebemos um novo aumento para D_L em $p = 0$ em relação aos volumes anteriores. Além disso, percebemos que o comportamento de D_T para esse

Tabela 49 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 8$, $\beta = 2.5115$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.598	0.003	12.712	0.357
1	1.25	0.837	0.002	0.966	0.027
2	2.49	0.130	0.001	0.141	0.003
3	3.66	0.052	0.001	0.059	0.001
4	4.63	0.032	0.001	0.035	0.001
5	5.29	0.024	0.001	0.026	0.001
6	5.52	0.022	0.001	0.025	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 50 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 8$, $\beta = 2.5115$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	3.992	0.124	25.167	0.794
1	0.94	1.297	0.040	2.647	0.083
2	1.87	0.256	0.007	0.294	0.009
3	2.79	0.100	0.003	0.104	0.003
4	3.65	0.054	0.001	0.059	0.001
5	4.41	0.036	0.001	0.035	0.001
6	5.01	0.028	0.001	0.029	0.001
7	5.39	0.024	0.001	0.023	0.001
8	5.52	0.022	0.001	0.022	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

volume de rede ainda é distante do valor que foi encontrado em $48^3 \times 4$ nessa mesma temperatura. Esse comportamento é semelhante ao observado em $T/t_c = 0.90$

Tabela 51 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 8$, $\beta = 2.5115$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.141	0.167	8.768	0.357
1	0.63	2.256	0.090	3.944	0.160
2	1.25	0.749	0.030	0.870	0.035
3	1.87	0.279	0.011	0.315	0.012
4	2.49	0.138	0.005	0.139	0.005
5	3.09	0.082	0.003	0.084	0.003
6	3.65	0.053	0.002	0.058	0.002
7	4.17	0.039	0.001	0.039	0.001
8	4.63	0.033	0.001	0.032	0.001
9	5.01	0.028	0.001	0.027	0.001
10	5.29	0.026	0.001	0.026	0.001
11	5.46	0.023	0.001	0.022	0.001
12	5.52	0.022	0.001	0.023	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com os nossos resultados de $N_t = 8$ revelados, vamos agora aplicar o ajuste com base na equação (10.1) para os volumes: $12^3 \times 8$, $16^3 \times 8$, $24^3 \times 8$. Temos com isso o propagador com suas linhas de ajuste na figura (46).

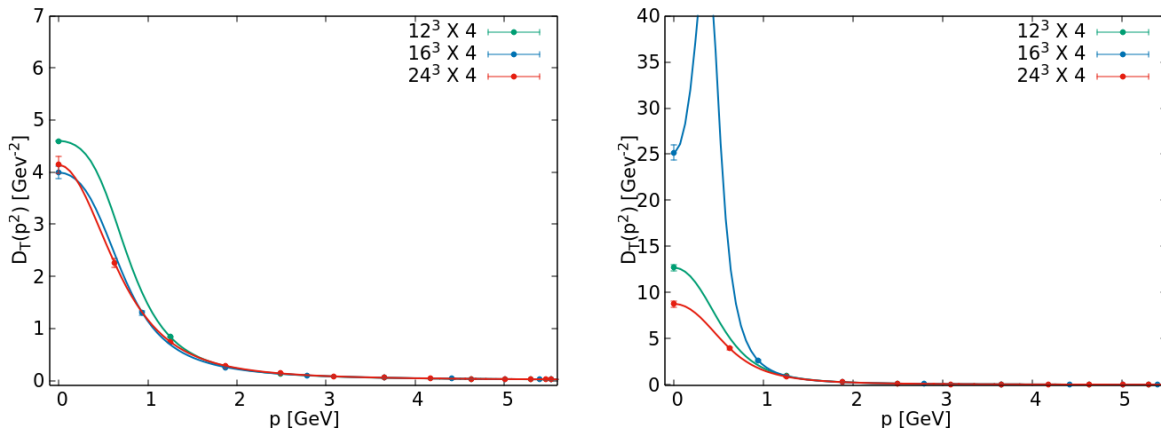


Figura 46 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 8$ e $T/T_c = 1.00$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebemos ao observar os propagadores da figura (46) que o propagador transversal ainda não se encontra com o comportamento esperado do propagador do glúon tridimensional. Para o propagador longitudinal, observamos o comportamento esperado para $24^3 \times 8$, mas ele apresenta ainda erros altos em relação a $p = 0$. É importante que mais configurações sejam atreladas ao cálculo estatístico do propagador, mas também volumes de rede maiores poderão auxiliar na diminuição desses erros.

Vemos que esses comportamentos são semelhantes ao que é visto para $T/T_c = 0.90$.

10.2.3 $T/T_c = 1.10$

Vamos agora fazer os cálculos para uma temperatura acima da temperatura crítica T_c . Vamos primeiro fazer o cálculo para uma rede em que a dimensão temporal é $N_t = 4$. Em seguida, faremos para $N_t = 8$.

10.2.3.1 $N_t = 4$

Para a rede de volume $8^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (52). Para esse volume de rede, não percebemos muitas mudanças em relação ao comportamento de valores encontrados para $T/T_c = 0.90$ e $T/T_c = 1.00$.

Para a rede de volume $12^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (53). Percebemos que em relação a tabela (52), foi observado um

Tabela 52 – Componentes do propagador do glúon transversal e longitudinal, para volume $8^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.067	0.103	16.331	0.420
1	1.02	1.168	0.029	1.883	0.048
2	2.00	0.233	0.005	0.253	0.006
3	2.74	0.107	0.003	0.116	0.002
4	3.02	0.086	0.002	0.092	0.002

Fonte: Elaborada pelo autor.

aumento de D_L para $p = 0$ e uma diminuição em D_T para mesmo momento. Isso também já havia sido observado para $T/T_c = 0.90$.

Tabela 53 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	3.006	0.084	53.507	1.500
1	0.68	1.536	0.042	7.896	0.221
2	1.36	0.522	0.014	0.909	0.025
3	2.00	0.212	0.005	0.262	0.007
4	2.53	0.121	0.003	0.133	0.004
5	2.89	0.094	0.002	0.097	0.003
6	3.02	0.087	0.002	0.082	0.002

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $16^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (54). Houve uma diminuição significativa para D_L em $p = 0$ em relação aos volumes de rede anteriores nesta temperatura. Esses são os valores mais baixos encontrados até o momento para o propagador do gluon longitudinal. Para a rede de

Tabela 54 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	3.477	0.108	4.344	0.137
1	0.51	2.394	0.074	2.996	0.093
2	1.02	1.063	0.033	1.025	0.032
3	1.52	0.425	0.013	0.439	0.013
4	2.00	0.240	0.007	0.239	0.007
5	2.41	0.138	0.004	0.157	0.004
6	2.73	0.108	0.003	0.110	0.003
7	2.95	0.097	0.003	0.095	0.002
8	3.02	0.089	0.002	0.090	0.002

Fonte: Elaborada pelo autor.

volume $24^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela

(55). Podemos ver que D_L aumentou um pouco em relação a $16^3 \times 4$ para essa mesma temperatura.

Tabela 55 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	2.702	0.091	4.283	0.146
1	0.34	2.640	0.089	3.587	0.121
2	0.68	1.743	0.058	2.031	0.068
3	1.02	0.971	0.032	1.024	0.034
4	1.36	0.541	0.018	0.583	0.019
5	1.69	0.367	0.012	0.349	0.011
6	2.00	0.233	0.007	0.248	0.008
7	2.28	0.159	0.005	0.172	0.005
8	2.53	0.141	0.004	0.125	0.004
9	2.74	0.114	0.003	0.123	0.004
10	2.89	0.102	0.003	0.094	0.004
11	2.99	0.091	0.003	0.095	0.004
12	3.02	0.093	0.003	0.085	0.003

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $48^3 \times 4$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (56). Como vimos em $T/T_c = 0.90$ e $T/T_c = 1.00$, esse é o maior volume de rede que calculamos para essa tese. O comportamento de D_T e D_L é semelhante aos das temperaturas anteriores nesse volume. Entretanto, seus valores são menores para ambos propagadores. Um indicativo desse comportamento é em relação ao aumento da temperatura.

Com os nossos resultados de $N_t = 4$ calculados, vamos aplicar o ajuste com base na equação (10.1) para os volumes $12^3 \times 4$, $16^3 \times 4$, $24^3 \times 4$, $48^3 \times 4$. Temos com isso o propagador com suas linhas de ajuste na figura (47).

Com base na figura (47), podemos ver que os melhores ajustes tanto no transversal quanto no longitudinal se encontram para $V = 48^3 \times 4$. Essa foi a mesma conclusão para as outras temperaturas pelos mesmos motivos já citadas. Para o propagador longitudinal, encontramos valores um comportamento semelhante para o maior volume em relação as outras temperaturas. Vamos mostrar nossos resultados agora para $N_t = 8$ nessa mesma temperatura.

10.2.3.2 $N_t = 8$

Para a rede de volume $12^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (57). As mudanças são bem pequenas em relação a $T/T_c = 0.90$ e $T/T_c = 1.00$.

Tabela 56 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $48^3 \times 4$, $\beta = 2.3274471$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	1.062	0.047	4.516	0.220
1	0.17	1.212	0.054	4.705	0.215
2	0.34	1.364	0.006	5.001	0.229
3	0.51	1.738	0.077	3.677	0.172
4	0.68	1.780	0.079	2.264	0.104
5	0.85	1.841	0.082	1.698	0.078
6	1.02	1.451	0.065	1.090	0.049
7	1.19	0.681	0.030	0.874	0.041
8	1.36	0.519	0.023	0.640	0.029
9	1.53	0.339	0.015	0.430	0.019
10	1.69	0.284	0.012	0.306	0.013
11	1.84	0.246	0.011	0.283	0.013
12	2.00	0.203	0.019	0.230	0.010
13	2.14	0.163	0.007	0.180	0.008
14	2.28	0.143	0.006	0.157	0.007
15	2.41	0.125	0.005	0.134	0.006
16	2.53	0.122	0.005	0.113	0.005
17	2.64	0.117	0.005	0.105	0.004
18	2.74	0.091	0.004	0.129	0.005
19	2.82	0.088	0.004	0.081	0.003
20	2.89	0.091	0.004	0.087	0.003
21	2.94	0.086	0.003	0.089	0.004
22	2.98	0.089	0.004	0.090	0.004
23	3.00	0.103	0.004	0.089	0.004
24	3.02	0.077	0.003	0.092	0.004

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 57 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $12^3 \times 8$, $\beta = 2.5410534$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.243	0.118	10.051	0.283
1	1.37	0.659	0.018	1.162	0.032
2	2.74	0.106	0.002	0.120	0.003
3	4.02	0.045	0.001	0.048	0.001
4	5.09	0.026	0.001	0.017	0.001
5	5.82	0.020	0.001	0.019	0.001
6	6.08	0.017	0.001	0.018	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a rede de volume $16^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes dos propagadores na tabela (54). Como visto anteriormente para $12^3 \times 8$, as mudanças são bem pequenas em relação as temperaturas anteriores.

Para a rede de volume $24^3 \times 8$, podemos encontrar o valor das componentes

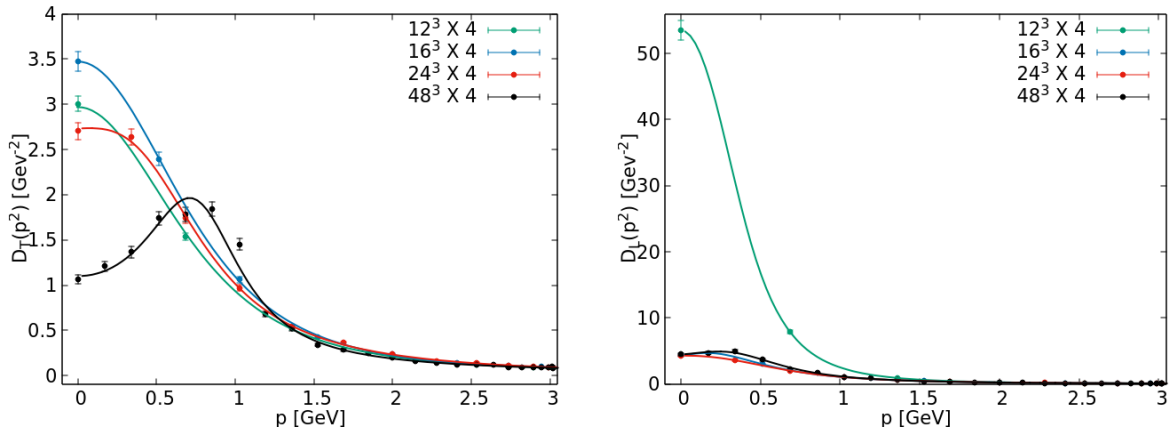


Figura 47 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 4$ e $T/T_c = 1.10$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 58 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $16^3 \times 8$, $\beta = 2.5410534$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.633	0.144	9.359	0.303
1	1.03	1.087	0.033	1.333	0.041
2	2.06	0.214	0.006	0.203	0.006
3	3.07	0.080	0.002	0.078	0.002
4	4.02	0.045	0.001	0.043	0.001
5	4.85	0.029	0.001	0.031	0.001
6	5.01	0.023	0.001	0.022	0.001
7	5.93	0.019	0.001	0.019	0.001
8	6.08	0.019	0.001	0.018	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

dos propagadores na tabela (51). Temos uma diminuição considerável para os valores do propagador longitudinal, mas temos poucas mudanças encontradas no propagador transversal.

Com os nossos resultados de $N_t = 8$ revelados, vamos agora aplicar o ajuste com base na equação (10.1) para os volumes: $12^3 \times 8$, $16^3 \times 8$, $24^3 \times 8$. Temos com isso o propagador com suas linhas de ajuste na figura (48).

Percebemos ao observar os propagadores da figura (48) que o propagador transversal ainda não se encontra com o comportamento esperado do propagador do glúon tridimensional, com o mesmo motivo dos casos anteriores. O mesmo argumento se repete para o propagador longitudinal.

Tabela 59 – Componentes do propagador do glúon transversal, para volume $24^3 \times 8$, $\beta = 2.5410534$ e $p = (p_t, 0, 0, 0)$.

p	p/a [GeV]	$D_T(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_T} [GeV $^{-2}$]	$D_L(p^2)$ [GeV $^{-2}$]	σ_{D_L} [GeV $^{-2}$]
0	0.00	4.405	0.177	5.366	0.219
1	0.68	1.885	0.076	2.526	0.102
2	1.38	0.540	0.022	0.613	0.024
3	2.06	0.203	0.008	0.217	0.008
4	2.74	0.101	0.004	0.105	0.004
5	3.40	0.062	0.002	0.067	0.002
6	4.02	0.042	0.001	0.043	0.001
7	4.60	0.033	0.001	0.034	0.001
8	5.01	0.027	0.001	0.028	0.001
9	5.51	0.022	0.001	0.022	0.001
10	5.82	0.021	0.001	0.020	0.001
11	6.01	0.018	0.001	0.020	0.001
12	6.08	0.019	0.001	0.016	0.001

Fonte: Elaborada pelo autor.

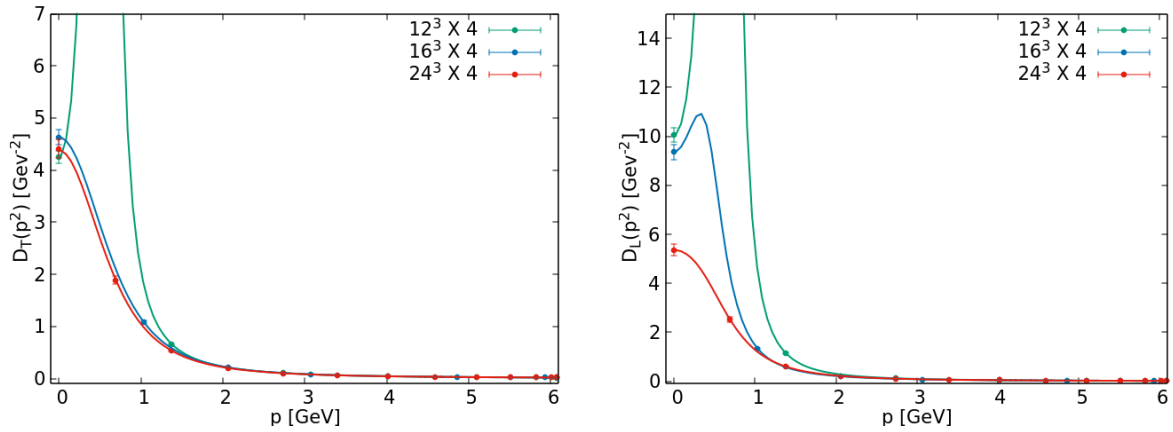


Figura 48 – Gráfico da esquerda representa o propagador do glúon transversal. O gráfico da direita representa o propagador longitudinal. Ambos gráficos para $N_t = 8$ e $T/T_c = 1.10$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

11 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, iniciamos com o desenvolvimento teórico para as teorias YM no contínuo. Esse passo foi importante para que pudéssemos avançar a aplicação das teorias de YM na rede. Mostramos como calculamos a ação de YM e como as aproximações para o contínuo ocorrem. Em seguida, mostramos o método de Monte Carlo utilizado para encontrar as variáveis de gauge U_μ . Fizemos uma introdução de temperatura na rede, além mostrar como lidamos com a transição de fase na teoria SU(2), que possui ponto crítico associado a uma transição de fase de segunda ordem. Desenvolvemos em seguida um capítulo para mostrar como alcançar a fixação de gauge de Landau na rede, tanto na teoria SU(2) quanto na SU(3). Por fim, construímos o propagador do glúon na rede para temperatura finita em SU(2). Em nossos resultados, mostramos como ocorrem os processos de termalização dos dados e como fazemos a decorrelação das variáveis de gauge. Esses são processos importantes para encontrar diferentes observáveis na rede.

A seguir, buscamos um processo de otimização para a fixação de gauge de Landau tanto na teoria SU(2) quanto na SU(3). Para a teoria SU(2), nós mostramos como cada algoritmo selecionado se comporta a partir de mudanças tanto de temperatura quanto de volume de rede. Esses resultados foram bem interessantes, pois mostraram que dependendo de qual seja o valor de temperatura utilizado, os algoritmos considerados, isto é: SR, SRE e Cornell passam a ter desempenhos distintos. Em geral, observamos que o algoritmo SR foi o que teve melhor desempenho em praticamente todos os casos, exceto em algumas pequenas diferenças em favor do algoritmo de Cornell, principalmente em temperaturas acima de $T/T_c = 1.10$. Nossos estudos estatísticos foram baseados com grau de certeza de 5σ , de modo a trazer consistência para nossas afirmações. Esses estudos também envolveram escolher sempre os melhores parâmetros ω (para SR), p (para SRE) e α (para Cornell) ao se fixar N_s , N_t , β e conseqüentemente, a temperatura.

Observando primeiro $N_t = 4$, vemos que para temperaturas abaixo da temperatura crítica, o algoritmo SR sempre tem desempenho melhor. Essa afirmação se evidencia cada vez mais conforme N_s^3 aumenta. Para valores de temperatura que estão na região ao redor da temperatura crítica, observamos que o comportamento visto anteriormente parece se manter. Entretanto, observamos que em temperaturas mais altas (de modo geral $T/T_c > 1.10$) há uma queda atenuante no número de sweeps necessários para fixação de gauge de Landau pelo algoritmo de Cornell, de modo que em $T/T_c = 2.00$, nossa maior temperatura do estudo, a mediana de Cornell se aproxima muito da mediana de SR. Por conta disso, faço a sugestão de explorar temperaturas mais altas em trabalhos futuros, de modo que os algoritmos dessa tese sejam testados, pois nossos gráficos parecem indicar que Cornell apresentou melhor desempenho para $T/T_c = 2.00$.

Em seguida, olhamos para $N_t = 8$, e vimos que valores muito pequenos de volume de rede ($12^3 \times 8$ e $16^3 \times 8$) carregam muitos erros proveniente não só dos efeitos de volume finito, mas também da pequena diferença entre N_s e N_t , que aproxima muito de um sistema com rede simétrica. Nosso estudo se torna melhor conclusivo para essa dimensão temporal quando exploramos $24^3 \times 8$, onde pudemos ver o que ocorreu em $N_t = 4$ o algoritmo SR tem desempenho melhor, mas o algoritmo Cornell também apresenta uma queda mais atenuante em relação aos outros algoritmos conforme a temperatura aumenta em relação a $T/T_c = 1.00$.

Além disso, fizemos um estudo fixando alguns valores de temperatura com o objetivo de entender o comportamento do algoritmo em diferentes volumes de rede a partir de um ajuste para a função $C(x) = Ax^z$. O que percebemos é que para $T/T_c = 0.90$ e $N_t = 4$, SRE possui o menor z , mas possui o maior A . Com isso, para essa temperatura, o ideal é utilizar SR, desde que N_s seja pelo menos menor que 1100. Ou seja, indicamos a utilização de SR. Para as outras temperaturas, os valores de z entre SR e SRE são muito próximos, o que dificulta escolher o melhor algoritmo apenas com base nesse expoente. Utilizando junto a constante A , também percebemos que para $T/T_c = 1.00, 1.10, 1.50$ e 2.00 , SR ainda é o mais indicado para uso. Não conseguimos estipular com clareza as curvas para $N_t = 8$ por conta dos problemas de pequeno volume. Para esse caso, é necessário utilizar volumes de rede maiores e incluí-los no ajuste. Isso fará com que aumentemos os pontos nos gráficos e fará com que o ajuste possa ocorrer de uma maneira melhor. Logo, com base nos dados que elaboramos para a teoria SU(2) para um intervalo de $0.80 < T/T_c < 2.00$, o ideal é utilizar o algoritmo SR, desde que o volume espacial N_s não seja enorme. Vale ressaltar que esse não é um estudo finalizado, mas carrega consigo um grau de importância singular ao conseguirmos compreender qual algoritmo escolher em cada caso.

Esse mesmo estudo aplicado na teoria SU(2) foi feito para SU(3), que não estava disponível na literatura, especialmente temperatura zero. Percebemos a necessidade de um estudo de otimização, pois não encontramos clareza quanto ao número de hits (loops sobre a mesma configuração) necessários para contornar o problema de fixação do gauge de Landau, embora a referência (43) diga em torno de 5-7 hits. Analisamos os três algoritmos novamente e percebemos que número ideal de hits não era esse. De fato, 5-7 hits garante estar mais próximo do funcional, mas é um custo de tempo de processamento muito maior que para hits menores que também produzem a fixação do gauge. Em nossos estudos, percebemos que na maioria dos casos, 2 hits é suficiente para que a fixação ocorra com menos sweeps e mais rápido. Essa primeira conclusão nossa do estudo é muito importante para que ocorra a melhor otimização. É necessário futuramente um estudo desse para redes maiores, de modo a garantirmos que esse comportamento também seja observado nessa região, mas nossos indicativos a princípio nos direcionam para a hipótese que também ocorrerá para hits menores que o estipulado no trabalho de Suman e Schilling.

Além disso, nosso estudo para SU(3) se baseou em analisar tanto o parâmetro e_2 quanto e_6 de fixação de gauge. Percebemos que, para e_2 , SR é o algoritmo ideal para ser utilizado para volumes de rede pequenos. Utilizando a mesma equação que usada em SU(2), fizemos os ajustes de cada algoritmo e para cada parâmetro de fixação. A partir disso, encontramos que para $N > 30$, sendo $V = N^4$, o ideal é utilizar Cornell. Também utilizamos o parâmetro e_6 , pois ele é mais custoso para que haja a fixação de gauge. Para o parâmetro e_6 , que tem um custo de fixação maior tanto em tempo de processamento quanto em sweeps, o ideal é utilizar SRE, enquanto que para $N \leq 16$, o melhor é utilizar SR. Com isso, podemos entender quando utilizar qual algoritmo a partir do critério de fixação de gauge escolhido.

Para a fixação de gauge de Landau em SU(3), as sugestões de continuidade de trabalho que damos está tanto em aumentar o volume para redes maiores quanto aplicar esse estudo também para temperatura finita. Ambos os trabalhos irão auxiliar a otimização de cálculo de propagadores que são dependentes das variáveis de gauge fixadas, como o propagador do glúon e o propagador do ghost.

Por fim, exploramos também o propagador do glúon no SU(2). Percebemos com nosso estudo inicial que há um limite em que os efeitos de volume finito começam a ser desprezados. Isso ocorreu principalmente quando construímos os propagadores em volume $48^3 \times 4$. Foi somente a partir desse tamanho de rede que começamos a observar por exemplo, alguns efeitos esperados para o propagador do glúon transversal, como o comportamento do propagador do glúon tridimensional. Quanto as mudanças de temperatura, percebemos como o propagador também muda o valor de suas componentes para $V = 48^3 \times 4$. Percebemos em $T/T_c = 1.10$ uma diminuição considerável, principalmente quando observamos o propagador longitudinal do glúon. Além disso, com os ajustes de Gribov-Stingl, demos ferramentas necessárias para um estudo do comportamento massivo dos propagadores transversal e longitudinal, que podemos ser interpretadas como um par de massas complexas com parte real e imaginária não nulas.

Com isso, esperamos que as nossas conclusões nessa tese possam auxiliar outros pesquisadores a compreender as melhores formas de se trabalhar fixação de gauge em temperatura finita para SU(2) e temperatura zero para SU(3), além de direcionar uma forma de explorar as massas desses propagadores de uma maneira diferente.

REFERÊNCIAS

- 1 LUCINI, B.; TEPPER, M. $Su(n)$ gauge theories in four dimensions: exploring the approach to $n = \infty$. **Journal of High Energy Physics**, v. 2001, n. 6, p. 50, 2001.
- 2 SALAM, A. **Unification of fundamental forces**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- 3 NEWTON, I. **Principia**: livros ii e iii: princípios matemáticos de filosofia natural - o sistema do mundo. São Paulo: Edusp, 2008.
- 4 REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da teoria eletromagnética**. 9. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1982.
- 5 EINSTEIN, A. *et al.* **The collected papers of Albert Einstein**. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- 6 RUTHERFORD, E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. **Philosophical Magazine**, v. 21, p. 669, 1911. DOI: 10.1080/14786440508637080.
- 7 DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society London**, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.
- 8 LEONE, M.; ROBOTTI, N. Frédéric Joliot, Irène Curie and the early history of the positron (1932–33). **Europeana Journal of Physics**, v. 31, n. 4, p. 975–987, 2010.
- 9 CHADWICK, J. The existence of a neutron. **Proceedings of Royal Society A**, v. 136, n. 830, p. 692–708, 1932. DOI: 10.1098/rspa.1932.0112.
- 10 YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles I. **Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan**, v. 17, p. 48–57, 1935. DOI: 10.11429/ppmsj1919.17.0_48.
- 11 GELL-MANN, M. The symmetry group of vector and axial vector currents. **Physique Fizika**, v. 1, n. 1, p. 63, 1964.
- 12 FERMI, E. **Collected papers note e memorie, of Enrico Fermi V1**: Italy, 1921-1938. Chicago: The University of Chicago Press, 1962.
- 13 GLASHOW, S. L. Partial symmetries of weak interactions. **Nuclear Physics**, v. 22, n. 4, p. 579–588, 1961.
- 14 SALAM, A. Weak and electromagnetic interactions. **Conference Proceedings C**, v. 680519, p. 367–377, 1968. DOI: 10.1142/8789812795915_034.
- 15 WEINBERG, S. A model of leptons. **Physical Review Letters**, v. 19, n. 21, p. 1264–1266, 1967.
- 16 GREINER, W.; MÜLLER, B. **Gauge theory of weak interactions**. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

- 17 HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Physical Review Letters**, v. 13, n. 16, p. 508–509, 1964.
- 18 AAD, G. *et al.* Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lh. **Physics Letters B**, v. 716, p. 1–29, 2012. DOI: 10.1016/j.physletb.2012.08.020.
- 19 SKANDS, P. **Introduction to QCD**. 2013. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1207.2389.pdf>. Acesso em 23 jan. 2021.
- 20 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An introduction to quantum field theory**. Boulder: Westview Press, 1995. (Frontier of Physics).
- 21 KOGUT, J. B.; STEPHANOV, M. A. **The phases of quantum chromodynamics: from confinement to extreme environments**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- 22 KUGO, T.; OJIMA, I. Manifestly covariant canonical formulation of yang-mills theories physical state subsidiary conditions and physical s-matrix unitarity. **Physics Letters B**, v. 73, n. 4, p. 452–462, 1978. DOI: 10.1016/0370-2693(78)90765-7.
- 23 ZWANZIGER, D. Local and renormalizable action from the gribov horizon. **Nuclear Physics B**, v. 323, p. 513–544, 1989. DOI: 10.1016/0550-3213(89)90122-3.
- 24 ZWANZIGER, D. Renormalizability of the critical limit of lattice gauge theory by brs invariance. **Nuclear Physics B**, v. 399, p. 477–513, 1993. DOI: 10.1016/0550-3213(93)90506-K.
- 25 GREENSITE, J. **An introduction to the confinement problem**. Berlin: Springer-Verlag, 2011. (The lecture notes in physics).
- 26 LACHINI, N. P. **Cofinement, ghost sector and geometry in lattice gauge theories**. 2019. Dissertation (Master in Science) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- 27 YANG, C. N.; MILLS, R. L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. **Physical Review**, v. 96, n. 1, p. 191–195, 1954.
- 28 GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1343–1346, 1973.
- 29 POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1346–1349, 1973.
- 30 SHURIAK, E. V. **The QCD vacuum, hadrons and superdense matter**. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004.
- 31 SERENONE, W. M. **Landau’s two-component superfluid model and the quark-gluon plasma**. 2019. Thesis (Doctor in Science) – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- 32 BELLAC, M. L. **Thermal field theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

-
- 33 WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Physical Review D**, v. 10, n. 8, p. 2445–2459, 1974.
- 34 SHIFMAN, M.; VAINSHTEIN, A.; ZAKHAROV, V. Qcd and resonance physics. theoretical foundations. **Nuclear Physics B**, v. 145, n. 5, p. 385–447, 1979.
- 35 FUKUSHIMA, K. Phase diagrams in the three-flavor nambu-jona-lasinio model with the polyakov loop. **Physical Review D**, v. 77, n. 11, p. 114028, 2008.
- 36 ROBERTS, C. D. **Strong QCD and Dyson-Schwinger equations**. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1203.5341.pdf>. Acesso em 30 nov. 2021.
- 37 ROTHE, H. J. **Lattice gauge theories: an introduction**. Singapore: World Scientific, 1992.
- 38 GATtringER, C.; LANG, C. B. **Quantum chromodynamics on the lattice: an introductory presentation**. Berlin: Springer, 2010.
- 39 MONTVAY, I.; MÜNSTER, G. **Quantum fields on a lattice**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 40 SMIT, J. **Introduction to quantum fields on a lattice**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- 41 CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Numerical test of the gribov-zwanziger scenario in landau gauge. **Proceedings of Science**, 2009. Disponível em: <https://pos.sissa.it/087/026/pdf>. Acesso em: 23 jan. 2020.
- 42 CUCCHIERI, A. Gribov copies in the minimal landau gauge: the influence on gluon and ghost propagators. **Nuclear Physics B**, v. 508, n. 1, p. 353–370, 1997. DOI: 10.1016/S0550-3213(97)80016-8.
- 43 SUMAN, H.; SCHILLING, K. A comparative study of gauge fixing procedures on the connection machines cm2 and cm5. **Parallel Computing**, v. 20, n. 7, p. 975–990, 1994. DOI: 10.1016/0167-8191(94)90013-2.
- 44 LEAL, J. M.; CERQUEIRA, M.; MENDES, T. Efficiency study of overrelaxation and stochastic overrelaxation algorithms for su(3) landau gauge-fixing. **Proceedings of Science**, p. 057, 2022. DOI: 10.22323/1.396.0057.
- 45 WEINBERG, S. **The quantum theory of fields, modern applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996, v. 2.
- 46 FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R.; STYLER, D. F. **Quantum mechanics and path integrals**. Mineola: Courier Corporation, 2010.
- 47 SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. Singapore: Addison-Wesley Publisher, 1994.
- 48 RIVERS, R. J. **Path integral methods in quantum field theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- 49 DAS, A. **Field theory: path integral approach**. Singapore: World Scientific Pub, 1993.

- 50 BINNEY, J. J. *et al.* **The theory of critical phenomena**: an introduction. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- 51 FADDEEV, L. D.; POPOV, V. Feynman diagrams for the yang-mills field. **Physics Letters B**, v. 25, n. 1, p. 29–30, 1967.
- 52 VANDERSICKEL, N. **A study of the Gribov-Zwanziger action**: from propagators to glueballs. 2011. Ph. D. Thesis (Doctor in Science) – Ghent University, Ghent, 2011.
- 53 CREUTZ, M. **Quarks, gluons and lattices**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- 54 BLOCH, J. C. R. *et al.* Propagators and running coupling from $su(2)$ lattice gauge theory. **Nuclear Physics B**, v. 687, n. 1, p. 76–100, 2004.
- 55 VISCARDI, L. A. M. **Férmions em QCD na rede**. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- 56 SOKAL, A. **Monte Carlo methods in statistical mechanics**: foundations and new algorithms. Boston: Springer, 1997.
- 57 METROPOLIS, N. *et al.* Equation of state calculations by fast computing machines. **Journal of Chemical Physics**, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953.
- 58 SANTOS, E. M. D. S. **QCD na rede**: um estudo não-perturbativo no calibre de feynman. Tese (Doutorado em Física) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- 59 CREUTZ, M. Monte carlo study of quantized $su(2)$ gauge theory. **Physical Review D**, v. 21, n. 8, p. 2308–2315, 1980.
- 60 KENNEDY, A. D.; PENDLETON, B. J. Improved heatbath method for monte carlo calculations in lattice gauge theories. **Physics Letters B**, v. 156, n. 5, p. 393–399, 1985. DOI: 10.1016/0370-2693(85)91632-6.
- 61 CABIBBO, M.; MARINARI, E. A new method for updating $su(n)$ matrices in computer simulations of gauge theories. **Physics Letters B**, v. 119, n. 4-6, p. 387–390, 1982.
- 62 KANAYA, K. **Lattice results on the phase structure and equation of state in QCD at finite temperature**. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1012.4235.pdf>. Acesso em 19 jan. 2019.
- 63 SVETITSKY, B.; YAFFE, L. G. Critical behavior at finite temperature confinement transitions. **Nuclear Physics B**, v. 210, n. 4, p. 423–447, 1982.
- 64 ENGELS, J.; FINGBERG, J.; MILLER, D. Phenomenological renormalization and scaling behaviour $su(2)$ lattice gauge theory. **Nuclear Physics B**, v. 387, n. 2, p. 501–519, 1992.
- 65 ENGELS, J.; FINGBERG, J.; WEBER, M. Finite size scaling analysis of $su(2)$ lattice gauge theory in $(3+1)$ dimensions. **Nuclear Physics B**, v. 332, n. 3, p. 737–759, 1990.

-
- 66 PRIVMAN, V. (ed.). **Finite size scaling and numerical simulation of statistical systems**. Singapore: World Scientific, 1990.
- 67 ENGELS, J. *et al.* Critical behavior $su(2)$ lattice gauge theory. a complete method analysis with χ^2 -method. **Physics Letters B**, v. 365, n. 1, p. 219–224, 1996. DOI: 10.1016/0370-2693(95)01280-X.
- 68 FINGBERG, J.; HELLER, U. M.; KARSCH, F. Scaling and asymptotic scaling in the $su(2)$ gauge theory. **Nuclear Physics B**, v. 392, n. 2, p. 493–517, 1993. DOI: 10.1016/0550-3213(93)90682-F.
- 69 CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Critical slowing-down in $su(2)$ Landau gauge-fixing algorithms. **Nuclear Physics B**, v. 471, n. 1, p. 263–290, 1996. DOI: 10.1016/0550-3213(96)00177-0.
- 70 FORCRAND, P. de; GUPTA, R. Multigrid techniques for quark propagator. **Nuclear Physics B - proceedings supplements**, v. 9, p. 516–520, 1989. DOI: 10.1016/0920-5632(89)90153-9.
- 71 MANDULA, J. E.; OLGIVIE, M. Efficient gauge fixing via overrelaxation. **Physics Letters B**, v. 248, n. 1, p. 156–158, 1990. DOI: 10.1016/0370-2693(90)90031-Z.
- 72 DAVIES, C. T. H. *et al.* Fourier acceleration in lattice gauge theories. I. Landau gauge fixing. **Physical Review D**, v. 37, p. 1581–1588, 1988. DOI: 10.1103/PhysRevD.37.1581.
- 73 MANDULA, J. E. The gluon propagator. **Physics Reports**, v. 315, p. 273–284, 1999. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00027-7.
- 74 ZWANZIGER, D. Vanishing of zero-momentum lattice gluon propagator and color confinement. **Nuclear Physics B**, v. 257, n. 1, p. 127–161, 1991. DOI: 10.1016/0550-3213(91)90581-H.
- 75 CUCCHIERI, A.; MAAS, A.; MENDES, T. Infrared properties of propagators in Landau-gauge pure Yang-Mills theory at finite temperature. **Physical Review D**, v. 75, p. 076003, 2007. DOI: 10.1103/PhysRevD.75.076003.
- 76 CUCCHIERI, A.; MENDES, T. **Electric and magnetic Landau-gauge gluon propagators in finite-temperature $SU(2)$ gauge theory**. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1105.0176.pdf>. Acesso em 29 de maio 2020.
- 77 SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test of normality (complete samples). **Biometrika**, v. 52, n. 3-4, p. 591–611, 1965.
- 78 KOLMOGOROV, A. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. **Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari**, v. 4, p. 83–91, 1933.
- 79 SMIRNOV, N. Stable for estimating the goodness of fit of empirical distributions. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 15, p. 15–23, 1948.
- 80 TUKEY, J. W. **Exploratory data analysis**. New York: Addison Wesley, 1977.
- 81 MANN, H. B.; WHITNEY, D. R. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 18, p. 50–60, 1947. DOI: 10.1214/aoms/1177730491.

- 82 BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2010.
- 83 STINGL, M. Propagation properties and condensate formation of the confined yang-mills field. **Physical Review D**, v. 34, p. 3863–3881, 1986. DOI: 10.1103/PhysRevD.36.651.
- 84 STINGL, M. Erratum: propagation properties and condensate formation of the confined yang-mills field. **Physical Review D**, v. 36, p. 651–651, 1987. DOI: 10.1103/PhysRevD.34.3863.
- 85 STINGL, M. A systematic extended iterative solution for quantum chromodynamics. **Zeitschrift für Physik A: hadrons and nuclei**, v. 365, p. 423–445, 1996. DOI: 10.1007/BF01285154.
- 86 CUCCHIERI, A. *et al.* Modeling the gluon propagator in landau gauge: lattice estimates of pole masses and dimension-two condensates. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1111.2327.pdf>. Acesso em 26 jan. 2022.
- 87 DUDAL, D. *et al.* Refinement of the gribov-zwanziger approach in the landau gauge: infrared propagators in harmony with the lattice results. **Physical Review D**, v. 78, p. 065047, 2008. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.065047.
- 88 DUDAL, D. *et al.* Landau gauge gluon and ghost propagators in the refined gribov-zwanziger framework in 3 dimensions. **Physical Review D**, v. 78, p. 125012, 2008. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.125012.