

**Lacunaridade para caracterização de formas de
dimensão finita**

Erbe Pandini Rodrigues

Dissertação apresentada ao
Instituto de Física de São
Carlos, da Universidade de
São Paulo, para obtenção do
título de Mestre em Ciências:
Física Aplicada-opção Física
Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Luciano da Fontoura Costa

JK

USP/IFSC/SBI

São Carlos - 2004



8-2-001637

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA
INFORMAÇÃO

Rodrigues, Erbe Pandini

“Lacunaridade para caracterização de formas de dimensão finita.”
Erbe Pandini Rodrigues – São Carlos, 2004

Dissertação (Mestrado) – Área de Física Aplicada – opção Física
Computacional do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São
Paulo

2004 - Páginas: 85

Orientador: Prof. Dr. Luciano da Fontoura Costa

1. lacunaridade; sistemas complexos; análise de imagens.

I. Título



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE
MESTRADO DE ERBE PANDINI RODRIGUES APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO,
EM 16/12/2004.

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Luciano da Fontoura Costa (Orientador e Presidente) – IFSC/USP

Dr. Mateus José Martins – IFSC/USP

Prof. Dr. Marcelo Emilio Beletti – UFU

Nem todo objetivo será alcançado inteiramente

Nem todo trabalho terminará com sucesso

Nem todo relacionamento resistirá

Nem todo amor durará

Nem todo esforço será completo

Nem todo sonho será realizado

É no trabalho de escavar que a vida é vivida

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais e minha irmã que são meu referencial e esteio nesta vida. Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Luciano da Fontoura Costa pela orientação e ao Dr. Marconi Soares Barbosa que teve papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho. Finalmente quero agradecer ao pessoal do grupo de pesquisa por proporcionar um ambiente de trabalho agradável e amigável.

Sumário

1	Introdução	1
2	Descritores de forma	5
2.1	Funcionais aditivos	6
2.2	Dimensão fractal	7
2.3	Conceito multi-escala	9
2.4	Dilatação exata	10
2.5	MIA	11
2.6	Dimensão fractal multi-escala	12
2.7	Lacunaridade	14
3	Lacunaridade convencional	16
3.1	Aplicações	17
3.2	Implementação	18
3.3	Características	21
3.4	Validação e análise	22
3.5	Variações	26
4	Lacunaridade auto-referenciada	29
4.1	Implementação	30
4.2	Cálculo analítico	30

5	Propriedades da lacunaridade auto-referenciada	36
5.1	Invariância à escala	39
5.2	Invariância à rotação	42
5.3	Sensibilidade a ruídos	44
6	Aspectos computacionais	47
6.1	Modelos de crescimento	47
6.1.1	DLA convencional	48
6.1.2	DLA potencial	51
6.2	Lacunaridade: Custo computacional e complexidade	52
6.2.1	Lacunaridade convencional	52
6.2.2	Lacunaridade auto-referenciada	54
6.2.3	Comparação teórica e experimental	55
6.3	Equipamentos e <i>Softwares</i>	56
7	Aplicações	59
7.1	Caracterização de DLA	60
7.2	Classificação de DLA	63
8	Conclusão	66
A	Transformação de Moebius	70
B	Lacunaridade analítica da cruz	71

Lista de Figuras

2.1	(a) Padrão básico de construção da curva triádica (b) de Koch.	8
2.2	(a) A área do fractal dentro de cada circunferência é computada e uma curva (b) do logaritmo da área em função do logaritmo do raio é construída. O valor da dimensão fractal é numericamente igual ao coeficiente angular da reta que melhor se ajusta à curva.	9
2.3	Processo de dilatação exata de um ponto. À esquerda estão as distâncias exatas da grade. A dilatação exata é mostrada em seqüência à direita. A dilatação de uma forma consiste em dilatar por este procedimento cada um de seus pontos.	11
2.4	Padrão decomposto em blocos (pixels) que por sua vez são decompostos em um conjunto de 4 vértices, 4 bordas e 1 quadrado. Esta decomposição facilita o cálculo dos funcionais de Minkowski. Figura retirada de [1]	13
2.5	Dilatação exata de um DLA, canto superior esquerdo, em três estágios diferentes.	14
2.6	(a) Curva do logaritmo da área de um DLA dilatado com raio r em função do logaritmo deste raio de dilatação exata e (b) curva da sua dimensão fractal multi-escala.	15

3.1	A figura em forma de L é discretizada e alocada em uma grade digital que é representada por uma matriz de dimensão $l \times l$ cujas células têm valor 1 para os pontos pretos e 0 para os brancos (onde as células estão vazias). Três exemplos de janelas de raio $r = 0$, $r = 1$ e $r = 2$ estão representadas à direita. As janelas a , b e c na grade mostram como é percorrido o espaço de trabalho. O valor da área dentro de cada uma delas é respectivamente 0, 6 e 2, em unidades de elemento de área, que é o pixel no caso da imagem digital.	20
3.2	Curvas de lacunaridade dos padrões A, B e C. O padrão A apresenta invariância translacional a partir de uma escala igual ao dobro de um de seus blocos em preto. A forma B representa um padrão cujas partículas estão mais aglutinadas em relação aos outros. O valor da lacunaridade é mais alto na maior parte da escala. O padrão C é formado pela distribuição aleatória de blocos em preto. Sua lacunaridade é mais baixa que a de B, mostrando que está mais próxima da invariância translacional em relação a esta, contudo parece menos homogênea que A em cerca de 30% do intervalo.	23
3.3	Comportamento da curva de lacunaridade de um objeto em relação à razão entre sua dimensão d e a D do espaço de trabalho. No canto superior direito o gráfico mostra o comportamento da curva em relação à posição Δ do objeto dentro do espaço de trabalho.	24
3.4	Curvas de lacunaridade convencional, com janelas quadradas e circulares, de um objeto em forma de cruz que sofre rotação de vários ângulos θ . As linhas contínuas e tracejadas dizem respeito às janelas circulares e quadradas respectivamente. As setas indicam o ângulo de rotação referente às curvas de linha contínua.	25
3.5	Sierpinski <i>carpets</i>	26

4.1	Curva de lacunaridade de um DLA A e de uma folha B.	31
4.2	Curva de lacunaridade de uma curva triádica de Koch A e de um triângulo de Sierpinski B.	32
4.3	Regiões do quadrado correspondentes ao cálculo da lacunaridade nos intervalos (a) $r \in [0, L/2[$ e (b) $r \in [L/2, L]$. Nas regiões I as janelas estão totalmente preenchidas em (a) e contém todo o quadrado em (b), nas regiões II e III estão parcialmente preenchidas tanto em (a) quanto em (b).	33
4.4	Curva da lacunaridade auto-referenciada de um quadrado de lado $L = 100, 200$ e 300 unidades de medida calculada analiticamente. A linha tracejada separa os intervalos I e II em que é dividido este cálculo. A razão entre o raio de máximo da curva R_m e o valor do raio máximo $r_{máx}$ é constante e igual para as três curvas.	35
5.1	Gráfico da lacunaridade auto-referenciada de três objetos, mostrados acima no gráfico, com aproximadamente a mesma área.	37
5.2	Curvas da lacunaridade auto-referenciada e convencional (canto superior direito) de objetos em forma de coroa circular e tabuleiro.	39
5.3	Curvas de lacunaridade de um DLA e de sua ampliação por uma transformação de escala. O gráfico do canto superior direito mostra a sobreposição das curvas por uma multiplicação dos valores das abscissas da curva do DLA por dois.	43
5.4	Curvas de lacunaridade auto-referenciada de uma cruz rotacionada de vários ângulos θ calculadas com janelas quadradas e circulares. O gráfico no canto superior direito mostra uma aproximação de um trecho das curvas. As linhas tracejadas correspondem aos cálculos numéricos enquanto a linha cheia a um cálculo analítico com janelas quadradas.	44

5.5	Curva da lacunaridade convencional e auto-referenciada para um objeto em forma de cruz com presença de ruído obedecendo a uma distribuição de Poisson, com λ aumentando na direção indicada pela seta.	46
6.1	(a) Processo de agregação de partículas na formação de um DLA convencional. O rastro em cor cinza representa um possível caminho que a partícula pode percorrer até encostar-se a uma outra partícula fixa, que neste caso é a partícula inicial. (b) Representa um estágio mais avançado do processo de crescimento.	50
6.2	Agregados de partículas gerados pelo modelo DLA convencional. . . .	50
6.3	Estágios de crescimento de um DLA potencial	53
6.4	Agregados de partículas gerados pelo modelo DLA potencial.	54
6.5	(a) e (b) - Curvas teóricas do desempenho relativo em relação ao tempo de cálculo da lacunaridade convencional e auto-referenciada. (c) Curva numérica do tempo gasto no cálculo da lacunaridade de um DLA convencional para os dois métodos.	57
7.1	Curvas de lacunaridade de dez objetos de cada classe de DLA. No canto superior direito pode-se ver um representante de cada classe de DLA.	62
7.2	Curva de lacunaridade de 9 DLAs do modelo convencional em vários estágios de crescimento com o número de partículas indicados no gráfico.	63
7.3	<i>Scatter-plot</i> do Máximo \times Média das curvas de lacunaridade das duas classes de DLA. A linha tracejada separa as classes.	65
B.1	Cruz dividida em regiões no primeiro intervalo para o cálculo da lacunaridade	72
B.2	Regiões da cruz no intervalo $\frac{L2}{2} \leq r < L2$	74

B.3	Regiões da cruz no intervalo $L2 \leq r < \frac{(L1+L2)}{2}$	75
B.4	Regiões da cruz no intervalo $\frac{(L1+L2)}{2} \leq r < L1$	76
B.5	Regiões da cruz no intervalo $L1 \leq r < L1 + \frac{L2}{2}$	77
B.6	Regiões da cruz no intervalo $L1 + \frac{L2}{2} \leq r < L1 + L2$	79
B.7	Regiões da cruz no intervalo $L1 + L2 \leq r < 2L1 + L2$	80

Abstract

The shape characterization of objects is an application of image processing [2] which has been applied to the understand of natural phenomena as well as growth dynamics by mathematical modeling and computational simulation [3, 4, 5]. There are many kinds of measures that were designed to quantify auto-similar features, such as fractal forms, which are largely applied in physical studies. The fractal dimension is one of these measures associated to object complexity, used to investigate features of objects, for instance, generated by DLA (Diffusion-Limited-Aggregation) models [6, 7]. These models generate ramified structures by means of particle aggregation. Although powerful, the measure presents degeneracy, e.g., some distinct fractals may present the same fractal dimension. Intended to overlook this feature and better characterize geometrical forms, a new measure has been proposed by Mandelbrot, namely the lacunarity [8], in order to distinguish between objects whit same fractal dimensions. This measure is related to object texture and provides information about translational invariance [9, 10, 11]. Low values of lacunarity mean high translational invariance while high values mean the opposite situation, e.g., more heterogeneous objects. Although, there are several ways to calculate lacunarity [12, 13, 14, 9], some arbitrary parameters remains which make it difficult to apply these methods to finite size objects analysis [15]. The present study intends to adapt the lacunarity measure to finite size objects in order to achieve translation an rotational invariance.

Resumo

A caracterização de objetos de dimensões finitas é uma das áreas de aplicação do processamento de imagens [2]. Esta caracterização contribui para o estudo de dinâmicas de crescimento por modelagem matemática e simulação computacional [3, 4, 5]. Existem medidas que inicialmente foram criadas para quantificar certas características de objetos auto-similares, como as formas fractais, que são muito utilizadas em estudos de física. Uma das medidas mais conhecidas é a dimensão fractal, que está associada à complexidade do objeto. A dimensão fractal tem sido utilizada em estudos de objetos como os gerados pelo modelo DLA (*Diffusion-Limited-Aggregation*) [6, 7], que é um modelo que gera formas por meio de agregação de partículas. Mesmo que poderosa, a dimensão fractal é uma medida degenerada, ou seja, objetos com geometrias distintas podem apresentar mesma dimensão fractal. Com o intuito de contornar esta característica e melhor caracterizar uma forma geométrica uma nova medida denominada lacunaridade foi sugerida por Mandelbrot [8], de tal forma que objetos com mesma dimensão fractal possuíssem lacunaridade distinta. A medida de lacunaridade está relacionada com a textura do objeto e informa o quanto o objeto desvia de ser invariante à translação [9, 10, 11]. Valores baixos de lacunaridade indicam maior invariância translacional, enquanto valores altos indicam o contrário, ou seja, um objeto mais heterogêneo. Existem vários modelos para o cálculo da lacunaridade [12, 13, 14, 9], contudo, ainda restam algumas arbitrariedades que dificultam a aplicação destes no estudo de objetos finitos [15]. O objetivo deste estudo é justamente adaptar a medida de lacunaridade à análise seqüencial de imagens de objetos com auto-similaridade restrita, como por exemplo, neurônios, de forma a remover as arbitrariedades características dos algoritmos convencionais.

Capítulo 1

Introdução

Muitos fenômenos naturais geram formas e padrões de distribuição espacial. Como exemplo, podemos citar padrões formados por descargas elétricas [7], deposição eletroquímica de partículas em determinados substratos [16], modelagem de crescimento de membrana de células neurais [4, 5], distribuição espacial de espécies num ecossistema [10, 11] e a formação do sistema circulatório sanguíneo humano [17]. Um meio eficaz de se conhecer as leis que governam estes fenômenos é explorar as características das formas que eles geram, para então formular hipóteses a respeito destas leis. O conhecimento destas leis proporciona a criação de modelos matemáticos computacionais que simulam tais fenômenos, permitindo reproduzi-los com maior controle de seus parâmetros [18]. Muitas vezes alguns fenômenos são difíceis de serem reproduzidos em laboratório tanto pelo custo financeiro quanto por falta de recursos tecnológicos, por isso a simulação é de grande importância. Além de contribuir para o conhecimento das leis da natureza, o estudo de formas também tem aplicação em procedimentos que exigem inspeção visual, como por exemplo, diagnósticos de doenças por raios-X e exames de material biológico com microscópio. Células doentes podem, por exemplo, apresentar mudança morfológica estrutural que as diferenciam visualmente de células saudáveis, como acontece na leucemia

[19, 20]. O processamento digital das imagens destas formas permite a automação destes procedimentos no caso de diagnósticos automáticos e também proporciona ferramentas que melhoram a qualidade das imagens para visualização [21].

O processamento digital de imagens é uma área de pesquisa ampla envolvendo tratamento de imagens, desenvolvimento de ferramentas de visualização, reconhecimento e caracterização de padrões [2]. Entre elas, a caracterização tem aplicação ampla em várias áreas de conhecimento como física, biologia, química e engenharia. Podemos citar como exemplo, o estudo da expressão gênica na formação de estruturas biológicas [22], modelagem de crescimento e estudo da relação forma função de neurônios [18], análise e classificação de formas biológicas [23, 24], neuromorfometria para classificação de células neurais [1, 25] e caracterização para classificação de células de tumor [19, 20] por meio de sua textura.

Para caracterizar uma forma ou padrão de distribuição espacial atribui-se a ela um funcional de forma ou atributo [26, 27, 1]. Existe um número grande destes funcionais que são utilizados para caracterizar estas formas. Seu desenvolvimento e aperfeiçoamento contribuem para evolução das áreas de pesquisa que as utilizam. Estes funcionais podem ser por exemplo, uma medida de área ou volume total, perímetro, número de ramificações, caso a forma seja ramificada, número de buracos, entre outros [18, 2]. Estes funcionais podem ser usados também para caracterizar aspectos da forma como complexidade e textura [28, 27, 1].

Entre estes funcionais de forma, existe um denominado dimensão fractal, desenvolvido a princípio para caracterizar formas matemáticas complexas conhecidas como fractais. Estas formas têm como característica auto-similaridade, e este funcional é uma medida de quanto estas formas preenchem o plano. Na natureza existem formas com esta propriedade, contudo, sua auto-similaridade é restrita a uma certa escala ou faixa de escala.

Apesar de ser uma medida poderosa, a dimensão fractal é uma medida degene-

rada, ou seja, dois objetos distintos podem apresentar um mesmo valor de dimensão fractal. A caracterização destes objetos de mesma dimensão fractal pode ser feita então por outra medida sugerida por Mandelbrot [8] e denominada lacunaridade. Esta medida dá informação sobre a distribuição de lacunas em uma forma, mais precisamente, sobre o quanto a forma desvia da invariância translacional. Uma forma invariante a translação apresenta sempre o mesmo aspecto quando observada em toda sua extensão, ou seja, repete-se sempre o mesmo padrão, como acontece, por exemplo, com um tabuleiro de xadrez, numa certa escala. Valores baixos de lacunaridade indicam que a forma é mais invariante à translação, ou seja, seu aspecto visual é mais homogêneo. Valores altos indicam o oposto, ou seja, forma mais heterogênea [14, 9, 11].

Entre as aplicações para a medida de lacunaridade podemos citar o diagnóstico automático de células de tumores [19, 29], em ecologia no estudo de ecossistemas [10], geologia [11], aplicação em ciências dos materiais no estudo de morfometria de sólidos porosos [30], caracterização de neurônios [28], caracterização da distribuição espacial em células retiniais [31] e padrões de expressão gênica [22].

Existem várias propostas para calcular a lacunaridade [12, 13, 14, 9]. No entanto, existe uma que vem sendo muito utilizada em vários estudos [9], tanto teóricos quanto práticos, que se mostrou relativamente mais precisa que as outras. O algoritmo para calcular a lacunaridade de acordo com esta proposta é denominado *gliding-box* [9] e sua implementação é relativamente simples. Este algoritmo, que denominaremos lacunaridade convencional neste texto, satisfaz os requisitos básicos da medida de lacunaridade, associando valores baixos de lacunaridade (valores próximos de um) a formas invariantes à translação e valores altos às não invariantes.

Apesar destas características, resta um parâmetro arbitrário no método a ser ajustado quando aplicado a objetos de dimensões finitas [15]. Este parâmetro está relacionado à delimitação do espaço ao redor da forma considerado no cálculo de sua

lacunaridade. A maneira como o objeto pode ser delimitado não é única e influi no valor da lacunaridade. Por esse motivo, propusemos uma modificação no algoritmo anterior visando remover esta arbitrariedade. Esta mesma proposta foi sugerida em [9], contudo, fora descartada por meio da análise de um exemplo muito particular, sem maiores considerações.

Neste trabalho, investigamos vários aspectos da nova medida, que denominamos lacunaridade auto-referenciada [15], e faremos uma comparação com a lacunaridade convencional, mostrando que nosso método, além de eliminar a arbitrariedade do método convencional, apresenta algumas características superiores, como por exemplo, maior estabilidade em relação à presença de ruídos na forma e invariância em relação à sua orientação e translação na grade discreta. Estas características tornam o método mais preciso e eficiente, pois é comum a presença de ruído resultante dos processos de digitalização e segmentação. Mostraremos também, uma aplicação do método na caracterização de formas de dimensões finitas com estrutura ramificada, geradas por um modelo denominado DLA (Diffusion-Limited-Aggregation) [6, 7, 32, 33].

Capítulo 2

Descritores de forma

A compreensão de muitos fenômenos naturais requer um estudo de morfologia em que as características geométricas de determinado padrão espacial natural, ou gerado por modelagem, assume um papel fundamental. São muitas as áreas de pesquisa, tanto em aplicações quanto em estudos teóricos, que empregam técnicas de análise e processamento digital de imagens para quantificar as características destas formas ou padrões espaciais.

Em física, por exemplo, o estudo de certos fenômenos de crescimento por agregação de partículas, que leva à formação de padrões, requer o uso de descritores de forma para uma caracterização efetiva e automática. Na medicina, a metodologia associada ao processamento e análise de imagens propicia o diagnóstico automático de doenças [20]. Os descritores de forma assumem um papel importante também nas pesquisas em neurociência, que envolvem estudos de morfologia celular e a relação desta com sua função [34].

Existem várias etapas que precedem a caracterização geométrica de formas, que vão desde aquisição da imagem até digitalização [26]. A digitalização é o processo de representação de uma imagem capturada por um dispositivo qualquer, como uma câmera fotográfica, por exemplo, em uma grade discreta formada por um conjunto

de pixels. Existem várias maneiras de representar uma imagem, e neste trabalho, consideramos a imagem como sendo binária, ou seja, pixel com valor um ou zero. A notação matricial é a forma mais simples de se representar uma imagem binária bidimensional e se faz atribuindo o valor um a cada um de seus pixels pretos e zero aos brancos. Uma vez representada numericamente a imagem, que contém o objeto ou padrão de interesse, pode-se caracterizá-la definindo um conjunto de descritores, como por exemplo, área, volume, dimensão fractal e lacunaridade.

A escolha dos melhores atributos para uma caracterização depende de seu contexto e objetivos. Tais atributos, cujos valores numéricos são função da imagem, são denominados funcionais de forma (ou funcionais da imagem) [26] e carregam informação a respeito de suas propriedades. Nas seções abaixo estão descritos alguns destes funcionais bem como o conceito de multi-escala, que estende o poder de caracterização de um dado atributo por meio da incorporação de um parâmetro adicional. Em geral, este parâmetro está associado à escala espacial ou temporal em um dado modelo.

2.1 Funcionais aditivos

Os funcionais aditivos são os funcionais de forma que obedecem à seguinte relação:

$$\varphi(\mathbf{P1} \cup \mathbf{P2}) = \varphi(\mathbf{P1}) + \varphi(\mathbf{P2}) - \varphi(\mathbf{P1} \cap \mathbf{P2})$$

onde $\mathbf{P1}$ e $\mathbf{P2}$ são padrões distintos formados por pixels pretos. A área de um padrão, por exemplo, é um funcional aditivo, já que obedece a relação anterior, pois se sobrepusermos dois padrões, a área resultante da união é igual à soma das áreas menos a área de sua intersecção. Caso conheçamos os funcionais aditivos de um padrão, então os funcionais da união com outro padrão é calculado simplesmente pela relação acima.

Os funcionais aditivos de uma forma K no plano são área $A(K)$, perímetro $U(K)$

e conectividade ou número de Euler $\chi(K)$, definido como a diferença entre o número de componentes conectados e o número de buracos encontrados na forma. Estes funcionais aditivos, proporcionais aos funcionais de Minkowski, que serão explicados adiante, formam uma base, de modo que, para cada dimensão, qualquer outro funcional aditivo pode ser decomposto em uma combinação linear destes funcionais da base [26, 1].

2.2 Dimensão fractal

Existem formas tanto naturais quanto geradas por modelos matemáticos que têm como característica auto-similaridade. As formas naturais têm auto-similaridade restrita a uma certa escala enquanto as formas matemáticas conhecidas como fractais [8] têm auto-similaridade não restrita. Estas formas fractais são padrões complexos e o conceito de dimensão topológica não é suficiente para uma caracterização mais ampla de sua complexidade.

Uma maneira de caracterizar estas formas é utilizando um outro conceito de dimensão, que por ser uma alternativa para caracterizar formas fractais, foi denominado dimensão fractal. Enquanto a dimensão topológica coincide com o número de graus de liberdade de um ponto e assume somente valores inteiros, como zero para um ponto, 1 para a reta e 2 para um plano, a dimensão fractal pode assumir valores fracionários entre zero e 2 no plano.

Esta medida é aplicada na caracterização de formas auto-similares como, por exemplo, a curva de Koch no plano. Sua utilidade é dar informação sobre o quanto uma forma o preenche. Seu valor é igual à razão entre os logaritmos do comprimento de arco S do padrão básico que constitui a curva auto-similar e a distância L entre os pontos extremos deste padrão. Veja a Figura 2.1(a), que é o padrão elementar de uma curva triádica e a Figura 2.1(b) que é uma curva de Koch. Neste exemplo

a dimensão fractal F é igual a $\log(S)/\log(L) = \log(4)/\log(3) \cong 1,26$. A dimensão

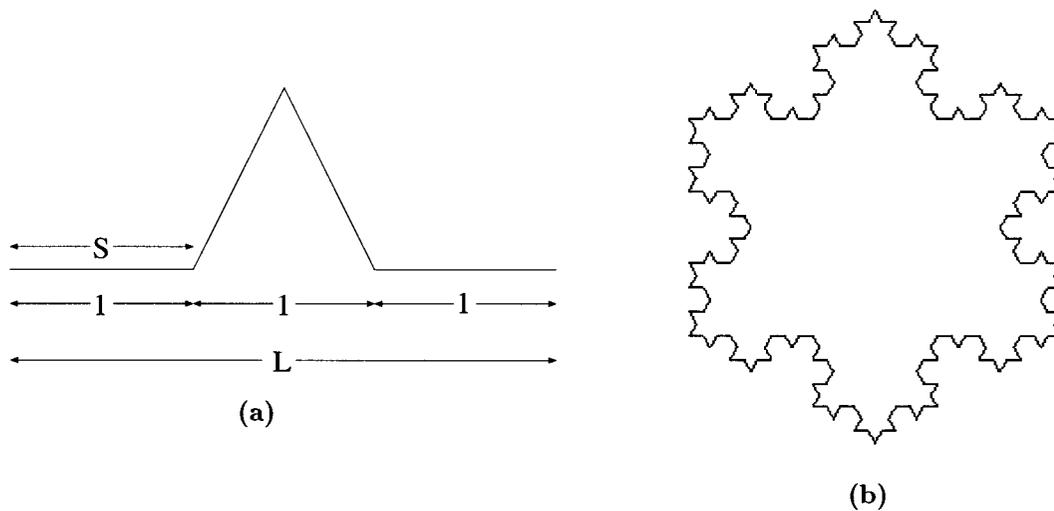


Figura 2.1: (a) Padrão básico de construção da curva triádica (b) de Koch.

fractal tem aplicação na caracterização de formas auto-similares reais ou geradas por processos de modelagem. Contudo, existe uma dificuldade nesta aplicação, pois a auto-similaridade destas formas é restrita a uma certa escala. O cálculo da dimensão fractal destas formas reais pode ser realizado por métodos numéricos, sendo um dos mais conhecidos denominado *box-counting*. O método consiste em sobrepor à forma várias grades distintas e computar quantos elementos destas contém pelo menos uma parte da forma. Um gráfico é construído com o logaritmo do número destes elementos em função da dimensão do seu lado. O valor da dimensão fractal é igual ao negativo do valor do coeficiente angular da reta que melhor se ajusta à curva.

Um outro método para calcular a dimensão fractal consiste em computar a área da forma dentro de uma circunferência de raio crescente centrado em um ponto da forma, que pode ser seu centro de massa, por exemplo, e construir um gráfico do logaritmo da área em função do logaritmo do raio da circunferência. A dimensão fractal da forma é definida como sendo o coeficiente angular da reta que melhor se ajusta à curva. A Figura 2.2 ilustra este método.

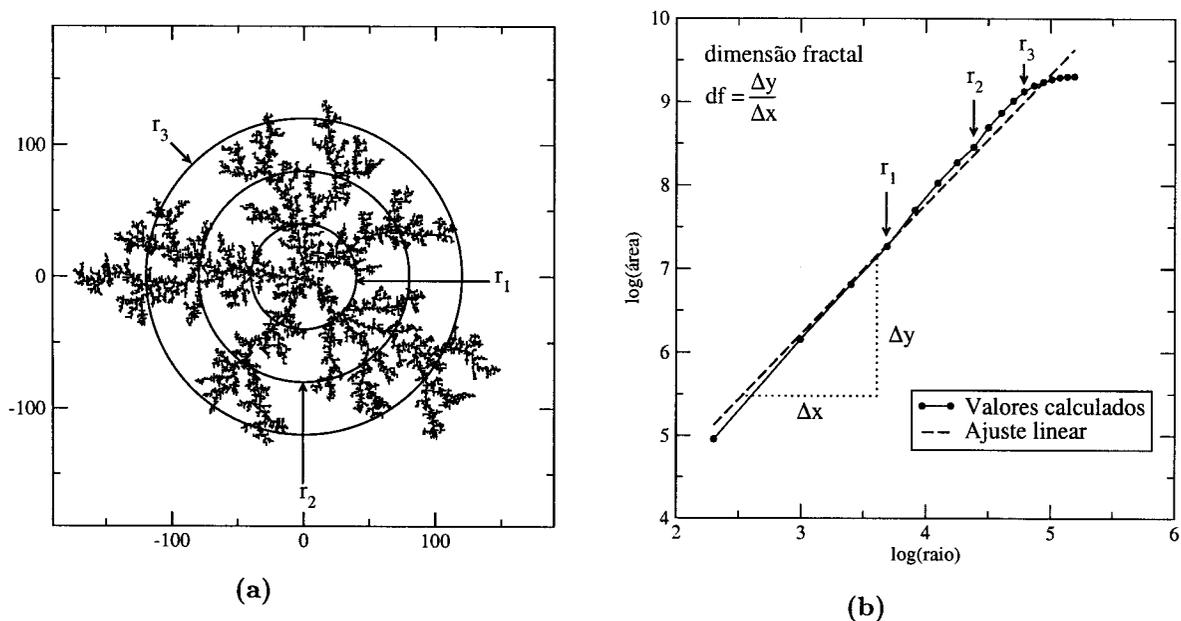


Figura 2.2: (a) A área do fractal dentro de cada circunferência é computada e uma curva (b) do logaritmo da área em função do logaritmo do raio é construída. O valor da dimensão fractal é numericamente igual ao coeficiente angular da reta que melhor se ajusta à curva.

2.3 Conceito multi-escala

Muitos fenômenos na natureza, cujo estudo é de interesse teórico e/ou prático, evoluem obedecendo a certas leis. A caracterização mais precisa destes fenômenos requer uma análise que considere sua evolução, que pode ser em relação a um parâmetro qualquer. Podemos citar como exemplos, a complexidade de uma forma que cresce em função do tempo e o modo de escoamento de um fluido como função da sua viscosidade.

Assim como os exemplos acima, o estudo de uma forma geométrica pode ser mais informativo considerando, por exemplo, o comportamento de sua textura em relação a um parâmetro de escala.

Esta consideração multi-escala incrementa o poder de análise de várias medidas, disponibilizando mais informação a respeito de um fenômeno ou forma que em uma

análise convencional. Com este conceito, cada valor de uma característica da forma é associado a um parâmetro de escala, como por exemplo, um raio de dilatação exata [35], possibilitando a construção de uma curva. Conhecendo a curva podemos extrair características básicas do objeto na escala desejada como dimensão fractal, lacunaridade e área em função do raio de dilatação.

Informações adicionais a respeito da forma que podem ser extraídas das curvas são média, variância e área sob a curva. Nas seções seguintes descreveremos alguns procedimentos muito utilizados em análise de imagens em que está presente o conceito multi-escala, como a metodologia usada em MIA (*Integral-geometry morphological image analysis*), a dimensão fractal multi-escala e a lacunaridade.

2.4 Dilatação exata

A dilatação é uma ferramenta utilizada em estudos multi-escala em que o parâmetro de escala é um raio de dilatação, por exemplo. Um procedimento convencional para dilatar uma forma consiste simplesmente em dilatar cada um de seus pontos com um disco de raio r . A forma dilatada de um neurônio, por exemplo, dá informação a respeito de sua área de influência, que é equivalente à região ao redor do neurônio com potencial para eventuais conexões sinápticas.

Para dilatar uma imagem digital, define-se um círculo de raio r ao redor de um ponto, preenchendo-se todos aqueles cuja distância do primeiro é menor ou igual a r .

Outro meio de se dilatar uma forma digitalizada é conhecido como dilatação exata [35, 2] e consiste em considerar no processo somente os raios possíveis na grade discreta. A parte principal do processo consiste basicamente em determinar a seqüência de distâncias, permitidas até o valor do raio de dilatação desejado. Uma vez determinadas estas distâncias basta marcar a vizinhança vazia do ponto

a ser dilatado. A Figura 2.3 ilustra o processo de dilatação exata de um ponto até o raio $r = 2$ com as distâncias permitidas $r = 1$, $r = \sqrt{2}$ e $r = 2$ à esquerda e a dilatação para cada um destes raios à direita. O conceito de dilatação exata também é utilizado no cálculo da dimensão fractal multi-escala conforme veremos adiante.

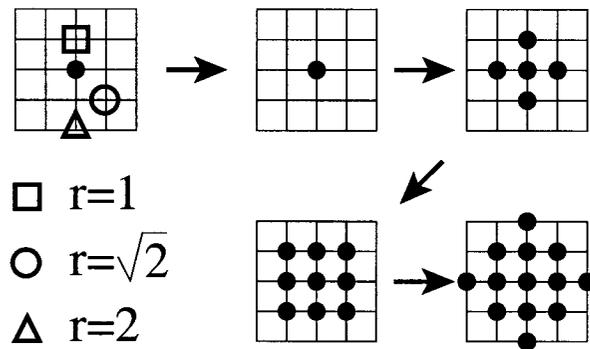


Figura 2.3: Processo de dilatação exata de um ponto. À esquerda estão as distâncias exatas da grade. A dilatação exata é mostrada em seqüência à direita. A dilatação de uma forma consiste em dilatar por este procedimento cada um de seus pontos.

2.5 MIA

Um procedimento simples para caracterizar formas é conhecido como MIA [26, 1], abreviação para *Integral-geometry morphological image analysis*. A análise de uma forma utilizando este procedimento consiste em dois passos principais, que são a determinação dos funcionais de Minkowski, que são proporcionais aos funcionais aditivos, e o estudo da evolução destes em função de um parâmetro de controle, que pode ser, por exemplo, um raio de dilatação exata [35].

Um exemplo de aplicação dos funcionais aditivos surge quando uma forma convexa K é dilatada em cada ponto com um círculo B_r de raio r . A relação abaixo fornece o valor da área da forma dilatada em função do raio de dilatação.

$$A(K \oplus B_r) = A(K) + U(K)r + \pi r^2 \quad (2.1)$$

A generalização desta expressão para uma dimensão d é dada pela fórmula de Steiner [1]

$$v^d(K \oplus B_r) = \sum_{v=0}^d \binom{d}{v} W_v^{(d)}(K) r^v$$

que permite calcular o hiper-volume da dilatação da forma. Os coeficientes $W_v^{(d)}$ são os funcionais de Minkowski que no plano são, por exemplo:

$$W_0^{(2)}(K) = A(K), \quad W_1^{(2)}(K) = \frac{U(K)}{2}, \quad W_2^{(2)}(K) = \chi(K)\pi$$

Um modo simples de calcular estes funcionais explorando sua propriedade de aditividade e o caráter digital da imagem consiste em decompô-la em blocos convexos constituintes, que no caso da imagem digital é o pixel, e cada um destes blocos em um conjunto de 4 vértices, 4 bordas e um quadrado, veja Figura 2.4. Usando recursos do formalismo da geometria integral [26, 27, 1] podemos resumir o cálculo dos funcionais contando o número de quadrados $n_q = 16$, bordas $n_b = 47$ e vértices $n_v = 30$ e calcular área, perímetro e número de Euler desta forma, que são respectivamente dados por

$$A(K) = n_q = 16, \quad U(K) = -4n_q + 2n_b = 30, \quad \chi(K) = n_q - n_b + n_v = -1$$

Este recurso permite que a equação 2.1 seja aplicada a formas não convexas, uma vez que estas podem ser decompostas em blocos convexos que obedecem as propriedades de aditividade. O passo seguinte em MIA é verificar como evoluem estes funcionais em relação a um parâmetro de controle, que pode ser o tempo num estudo de dinâmica de crescimento ou o raio de dilatação de uma forma [27].

2.6 Dimensão fractal multi-escala

A dimensão fractal convencional associa apenas um valor a um determinado padrão, sem considerar as diferentes escalas envolvidas na sua caracterização. Um modo de

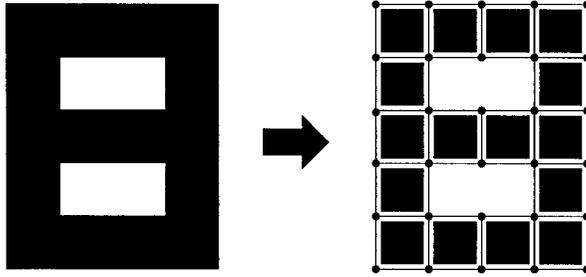


Figura 2.4: Padrão decomposto em blocos (pixels) que por sua vez são decompostos em um conjunto de 4 vértices, 4 bordas e 1 quadrado. Esta decomposição facilita o cálculo dos funcionais de Minkowski. Figura retirada de [1]

se obter uma medida mais informativa da dimensão fractal de uma forma seria considerar todas as escalas em que esta medida é realizada [36, 37]. Isto significa que cada valor da dimensão fractal estará associado a um parâmetro que identifique a escala em que a forma está sendo observada. Deste modo, a dimensão fractal fica associada a uma curva, que a cada valor do parâmetro de escala possui um valor de dimensão fractal.

Como a dimensão fractal está relacionada com a complexidade de uma forma, pode-se saber desta maneira, em que escala esta apresenta maior complexidade. Adicionalmente, pode-se extrair mais informação sobre a forma por meio da curva, considerando, por exemplo, sua média, variância e largura média de um pico.

Um modo de calcular a dimensão fractal multi-escala [36, 37] de uma forma em uma grade digital é por meio da dilatação exata [35, 2] desta com raios crescentes, até um valor máximo desejado, como pode ser visto na Figura 2.5. Em cada passo a forma é dilatada e sua área computada (contando-se simplesmente o seu número de pixels) em função do raio de dilatação e então uma curva C do logaritmo do raio pelo da sua área é construída, como visto na Figura 2.6(a). O passo seguinte é calcular a derivada desta curva, que pode ser feito ajustando-se um polinômio a esta e derivando-o analiticamente. Conhecendo-se a derivada em cada ponto, pode-se calcular a curva de dimensão fractal multi-escala, que é mostrada na Figura 2.6(b)

e definida como

$$Df = 2 - \frac{dC}{dr}$$

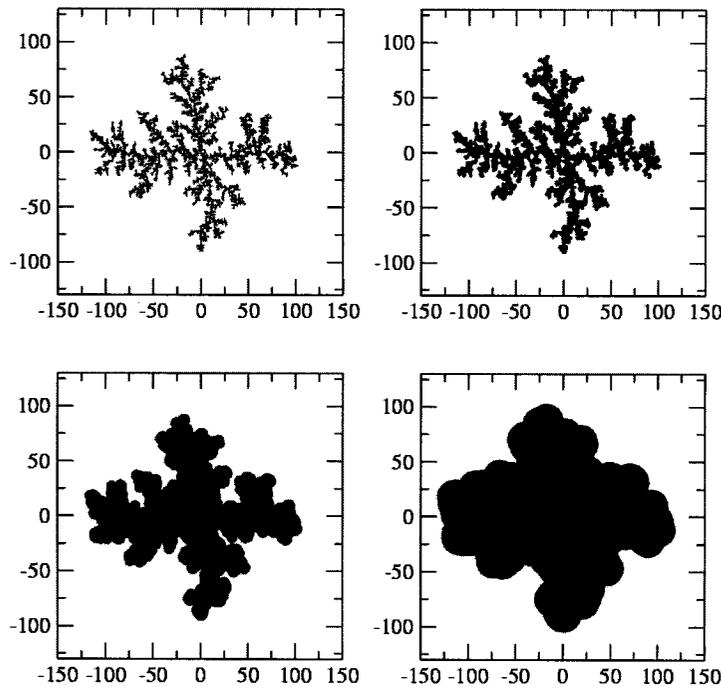


Figura 2.5: Dilatação exata de um DLA, canto superior esquerdo, em três estágios diferentes.

2.7 Lacunaridade

Entre os descritores de formas apresentados acima, a dimensão fractal é aquele que melhor quantifica a complexidade do objeto, contudo, é uma medida degenerada, pois formas distintas podem possuir mesma dimensão fractal. Como meio de resolver esta ambigüidade Mandelbrot [8] sugeriu uma nova medida, denominada lacunaridade, como complementar à dimensão fractal.

Com esta medida, formas com mesma dimensão fractal poderiam ser distinguidas pelo valor de sua lacunaridade. O que caracteriza basicamente esta medida é a quantificação da invariância translacional de uma forma. Valores baixos de lacunaridade

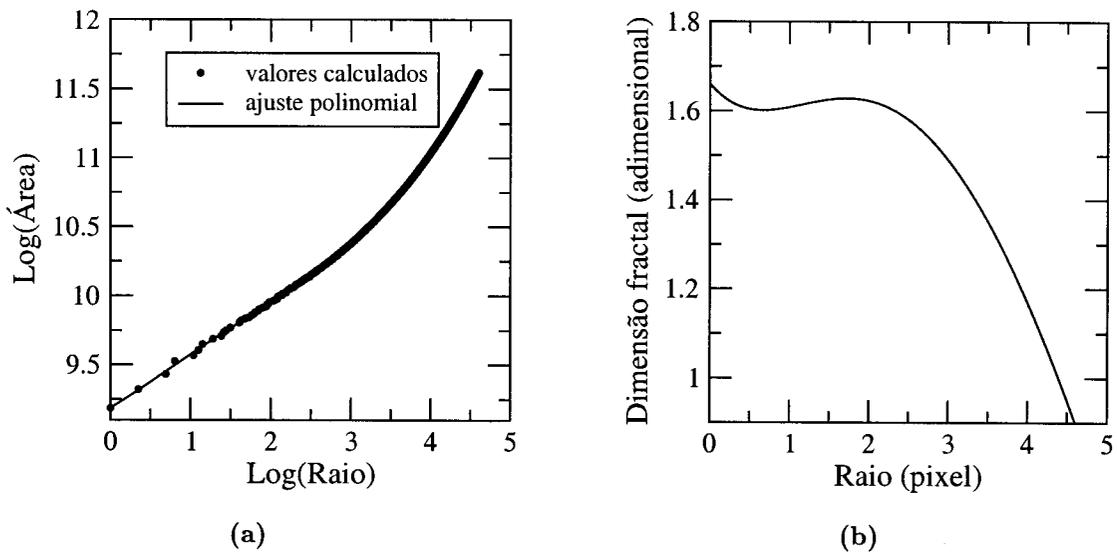


Figura 2.6: (a) Curva do logaritmo da área de um DLA dilatado com raio r em função do logaritmo deste raio de dilatação exata e (b) curva da sua dimensão fractal multi-escala.

significam maior invariância translacional. Não existe um único método para calcular a lacunaridade de formas mas todos eles medem basicamente sua distribuição de massa.

No próximo capítulo apresentaremos um método bem conhecido e utilizado em diversas aplicações. O significado da medida de lacunaridade será mais bem compreendido conforme formos descrevendo e analisando este método e suas propriedades. A partir do capítulo 4 apresentaremos o método para o cálculo da lacunaridade desenvolvido neste trabalho, bem como suas propriedades e implicações.

Capítulo 3

Lacunaridade convencional

A lacunaridade é uma medida multi-escala proposta por Mandelbrot [8] como forma de caracterizar fractais distintos cujos valores de dimensão fractal são idênticos. O principal atributo da lacunaridade é a quantificação de quanto uma forma desvia de ser invariante à translação [8, 9], com valores baixos de lacunaridade indicando maior grau de invariância translacional. O grau de invariância translacional de uma forma é um fator que depende diretamente da escala, pois existem padrões que parecem mais homogêneos em uma certa escala e heterogêneos em outras. Por esta razão, é importante que a medida seja dependente de um parâmetro de escala.

Estas propriedades da medida são favoráveis à sua aplicação na análise da homogeneidade da forma, já que formas mais homogêneas estão mais próximas da invariância translacional. Estudos recentes [28, 19, 30] aplicam a medida de lacunaridade em formas reais encontradas na natureza, e entre estas podemos citar as células do sistema nervoso e padrões que representam a distribuição de espécies em um ecossistema [28, 10].

Existem propostas diferentes para calcular a lacunaridade [12, 13, 14, 9] e cada uma delas apresenta algum tipo de limitação ou problema. Todas estas propostas envolvem a quantificação da distribuição de massa da forma. Escolhemos, entretanto,

para iniciar o estudo de lacunaridade de formas de dimensões finitas, um método proposto em [9], denominado *gliding-box*. Este método é bem conhecido e de fácil implementação e o denominaremos por conveniência de lacunaridade convencional.

Nas seções seguintes descreveremos este método e suas características. Na seção final outras propostas sugeridas para o cálculo da lacunaridade.

3.1 Aplicações

A lacunaridade convencional é basicamente uma medida de homogeneidade de uma forma, portanto podemos aplicá-la no estudo de texturas. Conforme o valor da lacunaridade, a forma é classificada como sendo mais ou menos homogênea. Espera-se que uma forma que possua uma distribuição homogênea de lacunas de mesmo tamanho tenha valores de lacunaridade mais baixos que uma que possua lacunas de tamanhos variados distribuídas em sua extensão.

Conforme já mencionado, a lacunaridade foi inicialmente proposta como medida complementar à dimensão fractal, que é degenerada, ou seja, formas com mesma dimensão fractal podem possuir geometrias distintas. Desta forma, esta medida pode ser aplicada em estudos teóricos que envolvem formas fractais. Uma das propostas para o cálculo da lacunaridade de formas fractais conhecidas como *Sierpinski carpets* foi sugerida por Lin e Yang [13].

O estudo de alguns fenômenos naturais exige um tipo de análise que considere a distribuição de massa de uma forma e mudanças na estrutura dependentes de escala. O uso da lacunaridade permite este estudo, já que a lacunaridade é uma medida dependente de um fator de escala.

Esta medida permite, por exemplo, a quantificação de texturas e análise em processos ecológicos de larga escala [10] bem como aplicação em geologia [11].

Um modo de estudar como se comporta um ecossistema consiste em analisar

como se distribui sua população. Isto pode ser feito, por exemplo, representando o ecossistema em uma imagem cujos pontos pretos representam as porções ocupadas por indivíduos ou populações e os pontos brancos às partes não ocupadas.

Em estudos de morfologia celular a lacunaridade convencional pode ser utilizada na caracterização de neurônios [28], que são formas que possuem auto-similaridade restrita, dando informação sobre a distribuição de sua massa, que está relacionada à configuração geométrica de suas ramificações. Uma aplicação possível também pode ocorrer na caracterização de propriedades de materiais [30], relacionando características morfológicas como distribuição de buracos no interior do material e resistência mecânica, por exemplo.

3.2 Implementação

A lacunaridade é basicamente uma medida de distribuição de massa de uma forma. Se a forma é uma imagem digital então a lacunaridade mede sua distribuição de pixels. Para calcular a lacunaridade consideramos a massa de uma forma contida em janelas de raio r que se sobrepõe à forma. A função $n(S, r)$ define a distribuição destas janelas, dando o número de janelas de raio r que contém massa S da forma. A lacunaridade é definida em função de $Q(S, r)$, que é a fração de janelas de raio r com massa S que a forma contém. Uma medida básica de lacunaridade é definida como a razão entre o segundo momento da distribuição de S e o quadrado do primeiro momento [9]

$$\Lambda(r) = \frac{Z^{(2)}}{(Z^{(1)})^2} \quad (3.1)$$

onde,

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= \sum S Q(S, r) \\ Z^{(2)} &= \sum S^2 Q(S, r) \end{aligned}$$

Entre as possibilidades existentes para o cálculo numérico da lacunaridade [12, 13, 14, 9] escolhemos aquela cujo algoritmo é denominado *gliding-box* [9], por facilidade de implementação e por ser um método bem conhecido e utilizado em diferentes áreas de pesquisa [10, 28]. Este algoritmo também satisfaz o seguinte critério requerido por uma medida de lacunaridade: Formas que se aproximam da invariância translacional devem possuir valores numéricos baixos de lacunaridade, enquanto o caso contrário deve possuir valores altos. Escolhemos também porque nesta proposta a lacunaridade é dependente de um parâmetro de escala, o que a torna mais informativa. Denominaremos este método por conveniência de lacunaridade convencional e mostraremos a seguir o algoritmo para o cálculo numérico da lacunaridade. Uma discussão mais detalhada sobre algumas características do método será dada adiante.

O primeiro passo consiste na digitalização da imagem, ou seja, a imagem que contém a forma deverá ser discretizada e alocada em uma grade digital. Trabalharemos somente com imagens bidimensionais e binárias (preto e branco), pois é suficiente que sejam representadas desta forma neste trabalho. A imagem é representada numa matriz em duas dimensões cujos elementos terão valor um para pontos pretos e zeros para os demais. Na Figura 3.1 vemos a imagem de um L digitalizada. A largura l da grade define o espaço de trabalho onde será calculada a lacunaridade da forma. Utilizaremos valores ímpares de l por motivo de simetria. Esta consideração facilita a implementação do algoritmo e não interfere no resultado da lacunaridade. Cada célula da grade que possui valor 1 representa um ponto da forma e as demais células vazias têm valor zero, apesar de não representado na Figura 3.1.

Para calcular a lacunaridade é necessário saber como se distribuem os pontos na forma. Para isto, a forma deve ser percorrida com janelas de raio r , que varia de zero a $(l - 1)/2$. A princípio o formato das janelas é arbitrário [9] e escolheremos o formato quadrado, por facilidade de implementação. Na Figura 3.1, do lado direito,

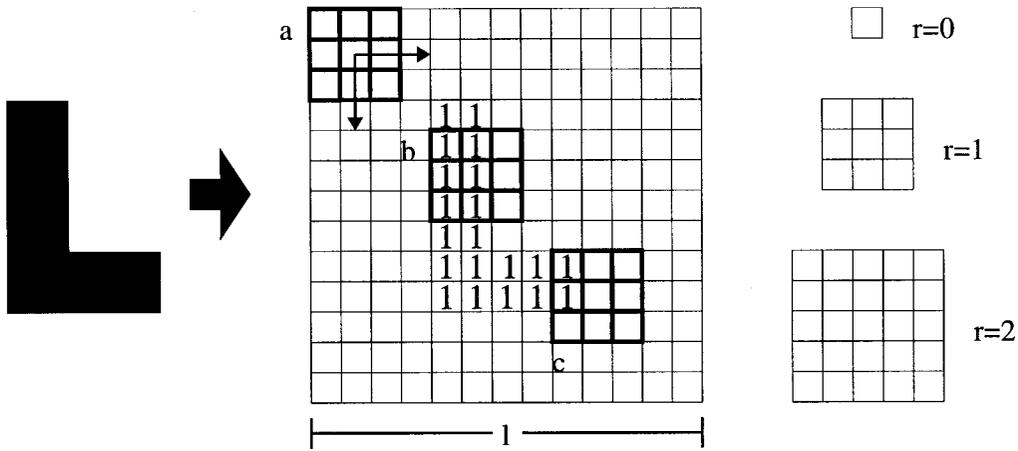


Figura 3.1: A figura em forma de L é discretizada e alocada em uma grade digital que é representada por uma matriz de dimensão $l \times l$ cujas células têm valor 1 para os pontos pretos e 0 para os brancos (onde as células estão vazias). Três exemplos de janelas de raio $r = 0$, $r = 1$ e $r = 2$ estão representadas à direita. As janelas **a**, **b** e **c** na grade mostram como é percorrido o espaço de trabalho. O valor da área dentro de cada uma delas é respectivamente 0, 6 e 2, em unidades de elemento de área, que é o pixel no caso da imagem digital.

podemos ver janelas de três raios diferentes. Explicaremos o algoritmo utilizando a janela de raio $r = 1$. O processo é facilmente estendido para os demais raios.

Podemos ver na Figura 3.1 a janela **a**, centrada no elemento $(2, 2)$ da matriz $l \times l$, $l = 13$, considerando sua origem $(1, 1)$ no canto superior esquerdo. Nesta coordenada, o número de elementos igual a um presentes dentro da janela é contado e seu valor registrado. O centro da janela é então deslocado um elemento para o lado direito e o processo se repete. O centro da janela deve percorrer toda a região delimitada pela submatriz quadrada de coordenadas superior esquerda $(r+1, r+1) = (2, 2)$ e inferior direita $(l-r, l-r) = (12, 12)$. As janelas **b** e **c** mostram dois exemplos. Cada uma delas têm 6 e 2 elementos registrados respectivamente.

Conhecendo os valores registrados respectivos às janelas podemos determinar $n(S, r)$, que é o número de janelas de raio r com S elementos da forma. Para determinar a fração de $Q(S, r)$ de janelas de raio r com S elementos basta dividir $n(S, r)$

pelo número total de janelas $N(r) = (l - 2r)$ que percorrem o espaço de trabalho, o que resulta em $Q(S, r) = n(S, r)/N(r)$. Conhecendo $Q(S, r)$ a lacunaridade $\Lambda(r)$ pode então ser calculada de acordo com a expressão 3.1

$$\Lambda(r) = \frac{Z^{(2)}}{(Z^{(1)})^2}$$

Lembrando que $Z^{(1)} = \mu_S(r) = \bar{S}(r)$, $Z^{(2)} = \sigma_S^2(r) + \bar{S}^2(r)$, onde $\sigma_S^2(r)$ é a variância, podemos escrever de modo equivalente

$$\Lambda(r) = \frac{\sigma_S^2(r)}{\mu_S^2(r)} + 1 \quad (3.2)$$

3.3 Características

A definição do cálculo da lacunaridade como apresentada acima a torna dependente de alguns parâmetros que são o raio r das janelas, a dimensão l do espaço de trabalho, a área e a geometria da forma. Para $r = 1$ temos que $Q(1, 1) = P$, onde P é igual à fração de pontos ocupados na grade (espaço de trabalho) e conseqüentemente $\Lambda(1) = Z^{(2)}/[Z^{(1)}]^2 = P/P^2$. Logo, para $r = 1$ e um mesmo valor de l , a lacunaridade é função somente da porcentagem de pixels da forma e independente de sua geometria. Conforme aumenta o raio das janelas, cresce o valor da média sobre estas e diminui o desvio que cada uma delas sofre da média, ou seja, diminui $\sigma_S^2(r)$. Como conseqüência, o valor da lacunaridade diminui até o limite em que a janela captura toda a forma, fazendo com que a variância seja igual a zero e $\Lambda(r_{m\acute{a}x}) = 1$. Se l aumenta, mantendo-se as dimensões da forma, a probabilidade de se encontrar janelas vazias aumenta, diminuindo a variância e também a média que tende a zero, logo lacunaridade tende a aumentar.

De maneira equivalente, se diminuimos a área total da forma sem modificar l , a média e a variância diminuem. Conforme a média tende a zero, a lacunaridade tende ao infinito.

Quanto à geometria, uma forma que apresente uma distribuição de pontos mais próxima da uniforme possui valores mais baixos de lacunaridade, pois a média sobre as janelas é mais próxima de ser constante e conseqüentemente a variância é baixa. Em oposição, uma forma que tenha uma distribuição cujos pontos formem aglomerados espalhados irregularmente possui lacunaridade alta, pois para $r \ll l/2$ a variância sobre as janelas é grande.

3.4 Validação e análise

A proposta da medida de lacunaridade convencional, pelo modo como é formulada, é medir o desvio da invariância translacional de uma forma. Valores próximos de um nesta abordagem significam maior invariância translacional da forma, enquanto valores altos significam o contrário.

Para conferir estas características, estudamos três padrões de distribuição de pixels diferentes, com aproximadamente o mesmo número de pontos. Os padrões e suas respectivas curvas de lacunaridade convencional podem ser vistos na Figura 3.2. Todos eles são formados por blocos quadrados de dimensão $d \simeq 15$ pixels e delimitados por um espaço de trabalho de dimensão $l \simeq 200$ pixels.

O valor da lacunaridade para $r = 0$ é aproximadamente o mesmo para todos, pois neste ponto esse valor depende apenas da fração de pontos preenchidos da grade. O mesmo acontece quando r atinge o valor máximo, pois neste ponto o número de janelas é igual a um, e portanto a variância é zero, e conseqüentemente a lacunaridade vale um.

O padrão A tem lacunaridade um a partir, de $r = 15$ pixels que é justamente a escala em que começa a apresentar invariância translacional. Antes desta escala a invariância translacional não é observada e o valor da lacunaridade é maior. O padrão B é o que apresenta maior aglutinação de partículas e portanto invariância

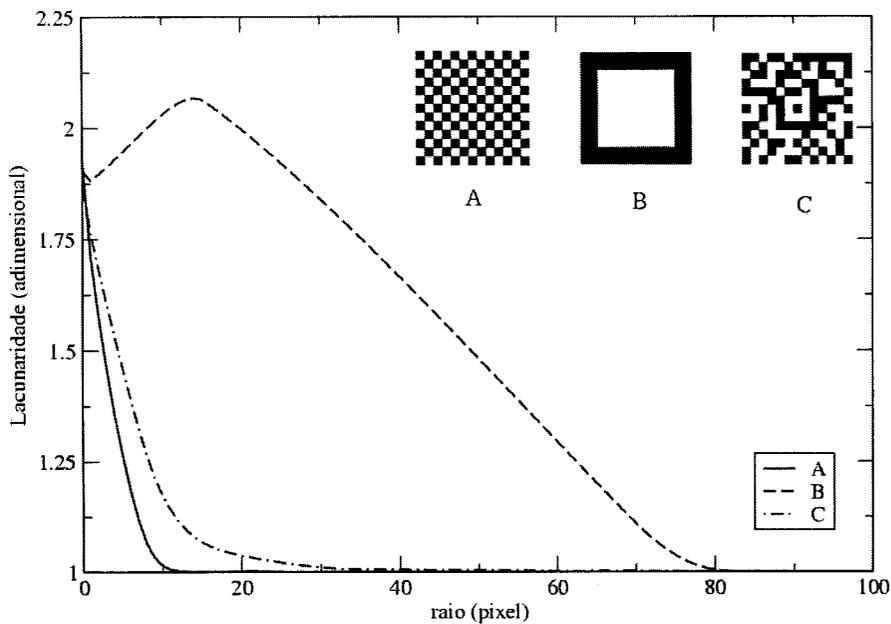


Figura 3.2: Curvas de lacunaridade dos padrões A, B e C. O padrão A apresenta invariância translacional a partir de uma escala igual ao dobro de um de seus blocos em preto. A forma B representa um padrão cujas partículas estão mais aglutinadas em relação aos outros. O valor da lacunaridade é mais alto na maior parte da escala. O padrão C é formado pela distribuição aleatória de blocos em preto. Sua lacunaridade é mais baixa que a de B, mostrando que está mais próxima da invariância translacional em relação a esta, contudo parece menos homogênea que A em cerca de 30% do intervalo.

translacional baixa. Isto é traduzido na curva como valores altos de lacunaridade. Este padrão é justamente o que apresenta maior valor de lacunaridade em toda escala. O padrão C é formado por uma distribuição aleatória. Como este tipo de distribuição é mais próximo de ser invariante à translação em escalas altas, sua curva de lacunaridade terá valores mais altos que a de A em uma região de escala mais baixa do gráfico. No gráfico podemos ver que o valor da lacunaridade torna-se mais próximo de um a partir de $r = 40$ pixels. Esta é a escala em que a forma parece mais invariante à translação. Comparando com B, vemos que a curva de C está sempre abaixo, pois o padrão B é mais heterogêneo, ou seja, menos invariante à translação que C.

A partir destes exemplos podemos concluir que os resultados da lacunaridade convencional estão condizentes com sua proposta de formulação. Contudo, existem dois parâmetros arbitrários neste algoritmo que dificultam a caracterização de formas finitas. O primeiro parâmetro é a dimensão l do espaço de trabalho. Algumas formas são fáceis de serem delimitadas, como por exemplo, um tabuleiro de xadrez ou uma textura qualquer que tenha formato quadrado. Já numa forma como um neurônio, por exemplo, que possui estrutura de ramificação, torna-se arbitrária a escolha do espaço de trabalho. Por meio da Figura 3.3, podemos ver que a curva da lacunaridade é dependente da razão entre a dimensão da forma e do espaço de trabalho, bem como da distância Δ da forma até sua borda.

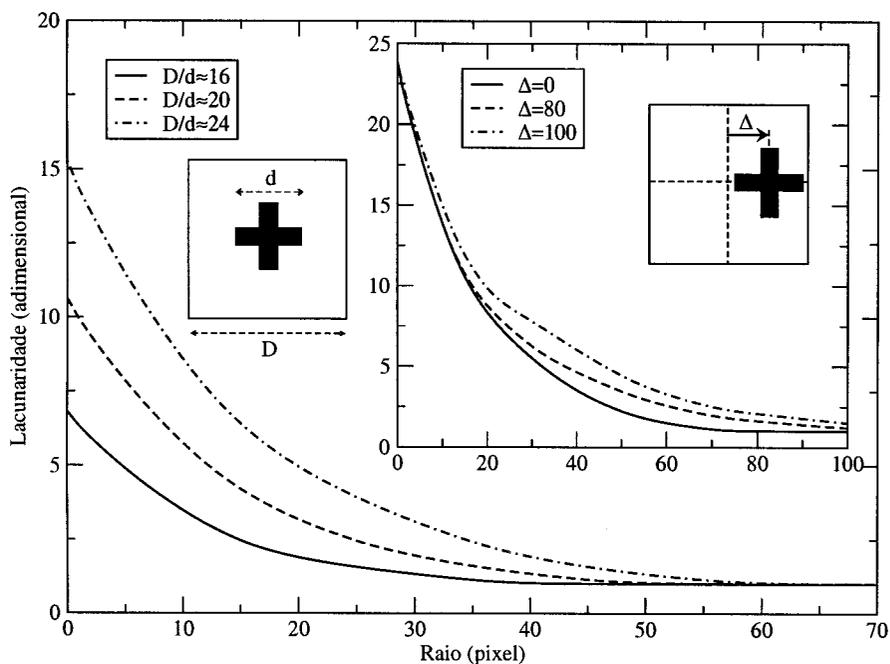


Figura 3.3: Comportamento da curva de lacunaridade de um objeto em relação à razão entre sua dimensão d e a D do espaço de trabalho. No canto superior direito o gráfico mostra o comportamento da curva em relação à posição Δ do objeto dentro do espaço de trabalho.

O segundo parâmetro é a escolha da geometria das janelas. A princípio, como já mencionado, a escolha do formato é arbitrária [9], contudo verificamos que o cálculo

da lacunaridade com janelas quadradas e circulares resulta em valores distintos em um trecho significativo da curva. Observe a Figura 3.4, as curvas de linha cheia e tracejadas referem-se a lacunaridade da forma calculada com janelas circulares e quadradas respectivamente.

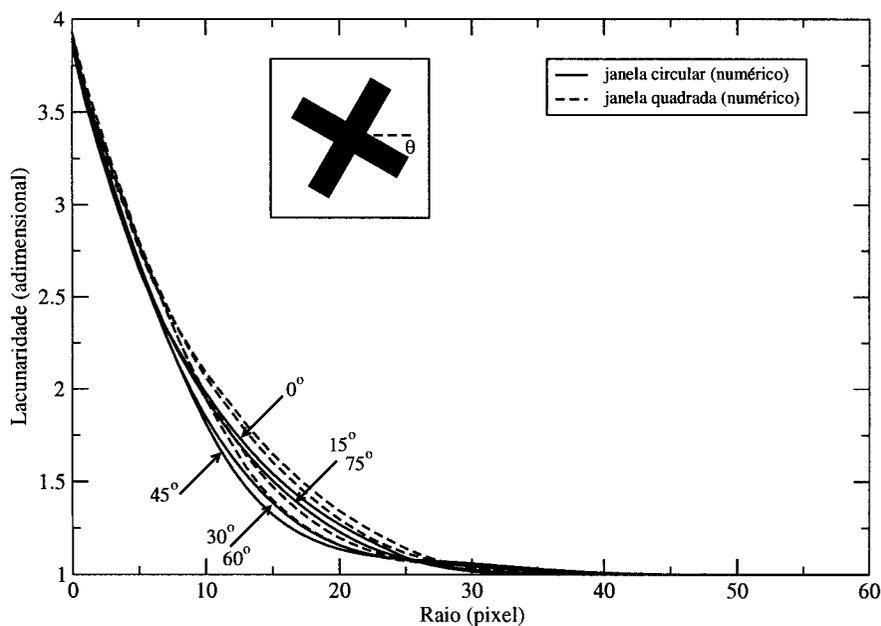


Figura 3.4: Curvas de lacunaridade convencional, com janelas quadradas e circulares, de um objeto em forma de cruz que sofre rotação de vários ângulos θ . As linhas contínuas e tracejadas dizem respeito às janelas circulares e quadradas respectivamente. As setas indicam o ângulo de rotação referente às curvas de linha contínua.

Uma característica que seria interessante no cálculo da lacunaridade é a invariância de seu valor em relação à rotação da forma. Com tal invariância, a orientação da forma na grade não interferiria no valor da lacunaridade. Testamos como se comporta a curva de lacunaridade da forma quando rotacionada de vários ângulos θ com janelas quadradas. Verificamos que as curvas sofrem desvio em relação ao ângulo de rotação. Com intuito de conseguir invariância rotacional, utilizamos janelas circulares, para garantir simetria, contudo observamos que mesmo assim a curva sofre desvio. A Figura 3.4 mostra o desvio que as curvas sofrem em relação ao

ângulo θ . Esta limitação em relação à rotação é consequência de efeito de borda, resultante da delimitação do objeto. No capítulo seguinte apresentaremos um meio de remover estas arbitrariedades e suas implicações no cálculo da lacunaridade.

3.5 Variações

Descreveremos nesta seção duas propostas diferentes sugeridas para a caracterização de formas fractais distintas com mesma dimensão fractal, conhecidas como *Sierpinski carpets*, veja Figura 3.5. Estas formas são construídas, na primeira etapa, dividindo um quadrado em b^2 subquadrados dos quais l^2 são excluídos. Na segunda etapa, cada subquadrado que resta é então subdividido em b^2 subquadrados em que novamente l^2 quadrados são excluídos respeitando o mesmo procedimento. O fractal é construído repetindo este processo indefinidamente. A Figura 3.5 mostra duas construções possíveis destas formas fractais com $b = 9$ e $l = 5$ e com apenas duas etapas de construção. De acordo com sua proposição inicial, a lacunaridade pode apresentar valores distintos para formas como os fractais da Figura 3.5, que apesar de possuírem aparências distintas possuem mesma dimensão fractal $D = 1.823$.

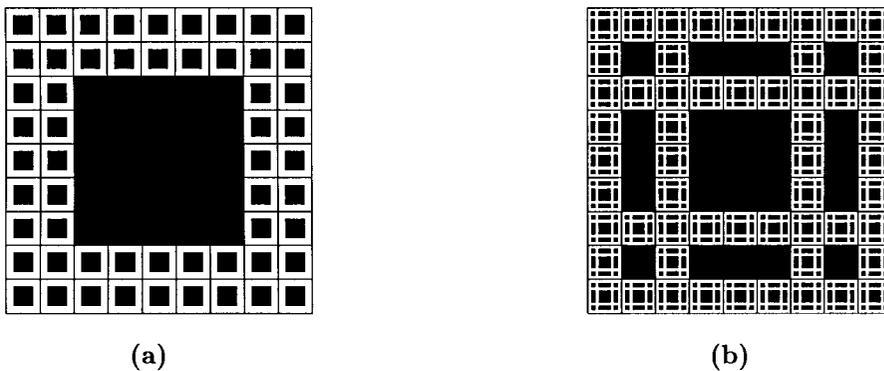


Figura 3.5: Sierpinski carpets

Uma sugestão para a expressão da lacunaridade, sugerida em [12], fornece valores

distintos de lacunaridade para cada forma e sua expressão é a seguinte

$$L' = \frac{1}{n} \sum_i (n_i - \bar{n})^2 \quad (3.3)$$

onde $\bar{n} = \sum_i n_i/n$ e n é o número total de janelas de dimensão $l \times l$ que cabem dentro da forma. n_i representa o número de subquadrados não eliminados contidos em cada uma das janelas $l \times l$. Esta expressão é simplesmente a variância sobre as janelas e mede o quanto a distribuição desvia da média.

Esta aproximação, apesar de apresentar valores coerentes de lacunaridade para as formas mostradas acima, falha em alguns casos, pois não garante que o valor da lacunaridade seja $L' = 0$ para formas invariantes à translação [13]. Como correção para este contratempo, foi sugerido em [13], que o procedimento deve considerar para o cálculo da lacunaridade janelas de dimensão $s \times s$, com $l < s < b$. O valor da lacunaridade é então determinado considerando a média sobre $L(s) = (1/\bar{n}\sqrt{L'(s)})$ no intervalos $l < s < b$ como segue

$$L = \frac{1}{N} \sum_{s=l}^b L(s)$$

onde $L'(s)$ é a variância sobre a distribuição das janelas de lado s e $N = b - l + 1$. Quando $s = l$, $L'(s)$ é idêntica à expressão 3.3.

Este último procedimento corrige o problema encontrado no anterior, contudo, considera somente um determinado intervalo para s , que para esta aplicação é suficiente, entretando, este é um caso de aplicação particular. O método também propõe a redução da curva de lacunaridade à apenas um valor. Em muitos casos isto é interessante, e o modo como esse valor é reduzido pode ser melhor determinado de acordo com o problema considerado. Por exemplo, pode-se atribuir à lacunaridade o valor médio da curva considerando toda escala ou apenas um trecho dela. Na lacunaridade convencional é considerada toda escala possível para análise da forma. É interessante notar que, se uma forma é invariante à translação em uma escala

específica, atribuir um único valor à lacunaridade faz com que esta informação seja perdida.

Capítulo 4

Lacunaridade auto-referenciada

Vimos no capítulo anterior que o algoritmo convencional utilizado para o cálculo da lacunaridade, denominado *gliding-box* [9, 10, 11], apresenta arbitrariedades quando aplicado em formas bidimensionais de dimensão finita, ou seja, formas que não se estendem indefinidamente no plano. Um dos problemas era a delimitação da região ao redor da forma considerada no cálculo da lacunaridade. Foi mostrado que o modo como é delimitada a forma influencia no valor de sua lacunaridade. Além deste problema, o método revelou instabilidade quanto à orientação do objeto.

Com o intuito de remover estas arbitrariedades, fizemos uma mudança no algoritmo acima, que apesar de já sugerida em [9], foi descartada com base num exemplo de aplicação muito particular do método. Nas seções seguintes mostraremos a modificação no algoritmo que resulta na nova medida, que desenvolvemos neste trabalho e denominamos lacunaridade auto-referenciada, além de um procedimento para fazer o cálculo analítico da mesma, visando a comparação do resultado exato com o numérico.

4.1 Implementação

No capítulo anterior definimos o espaço de trabalho como sendo a região da grade discreta delimitada por um retângulo de lado l que contém a forma, como na Figura 3.1. O algoritmo convencional percorria de todas as formas possíveis o espaço de trabalho com janelas de raio r , computando a área do objeto contida em seu interior. Na lacunaridade auto-do grau dereferenciada, ao invés de percorrer todo o espaço de trabalho, percorre-se apenas os pontos do objeto com janelas de raio r centradas nestes. A expressão da lacunaridade é a mesma, com a diferença de que $N(r)$, o número total de janelas de um dado raio, não varia, pois coincide com o número de pontos do objeto. Com esta modificação, o valor da lacunaridade não depende mais da dimensão do espaço de trabalho, nem do posicionamento do objeto neste como no algoritmo convencional, já que o objeto é tomado como referência. Adicionalmente, dependendo da implementação do algoritmo torna-se desnecessária a definição do espaço de trabalho. As Figuras 4.1 e 4.2 mostram as curvas de lacunaridade para quatro tipos de formas distintas. No próximo capítulo mostraremos a implicação desta mudança bem como algumas de suas propriedades.

4.2 Cálculo analítico

Como dito acima, o objetivo deste cálculo é proporcionar um parâmetro para comparação entre os resultados numérico e analítico, que é exato. O procedimento para o cálculo é o mesmo descrito acima, a diferença está em considerar o objeto num plano contínuo e substituir as somatórias por integrais. Nesta seção mostraremos um exemplo de cálculo com um objeto quadrado de lado L , por facilidade de compreensão, já que o cálculo da cruz é muito extenso e envolve muitos detalhes, sendo deixado para o apêndice B. Na seção 5.2 faremos a comparação entre o cálculo analítico e numérico da cruz, mostrado na Figura 5.4.

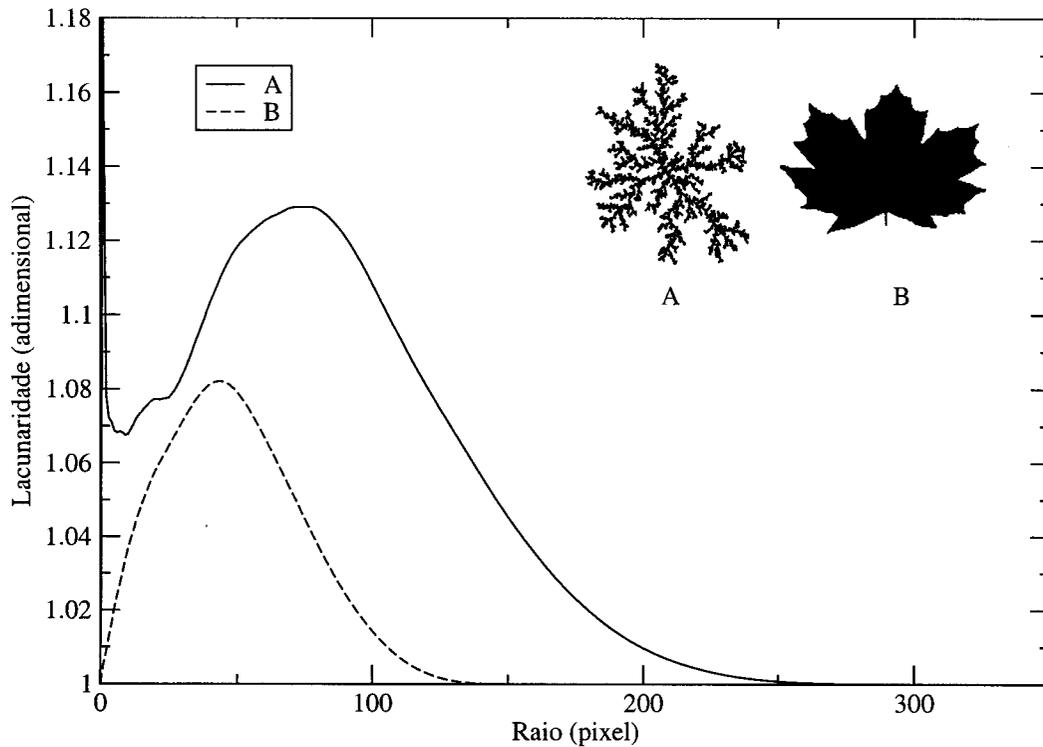


Figura 4.1: Curva de lacunaridade de um DLA A e de uma folha B.

Este cálculo analítico é em geral mais complicado que o numérico e não é viável para qualquer tipo de objeto. Para exemplificar, mostraremos como se calcula a lacunaridade do quadrado referido anteriormente. Existem duas possibilidades para as janelas que percorrem este objeto: ou estão completamente ou parcialmente preenchidas. Observe a Figura 4.3, ela mostra as regiões distintas possíveis do objeto. Existem três regiões e dois intervalos, Figura 4.3(a) e 4.3(b), que são $r \in [0, L/2[$ e $r \in [L/2, L]$ respectivamente. As linhas tracejadas delimitam as regiões nomeadas *I*, *II* e *III* e os quadrados com centro em cada região são as janelas que percorrem o objeto. Existe no objeto uma região do tipo *I* e quatro do tipo *II* e *III*.

No primeiro intervalo, as janelas têm raio menor que $L/2$ e nenhuma delas pode capturar o objeto inteiro. Observe que, quando r é maior que $L/2$, as janelas da região *I* correspondentes a este intervalo, Figura 4.3(b), englobam todo o objeto. Quando r é maior que L , todas as janelas irão conter completamente o objeto e,

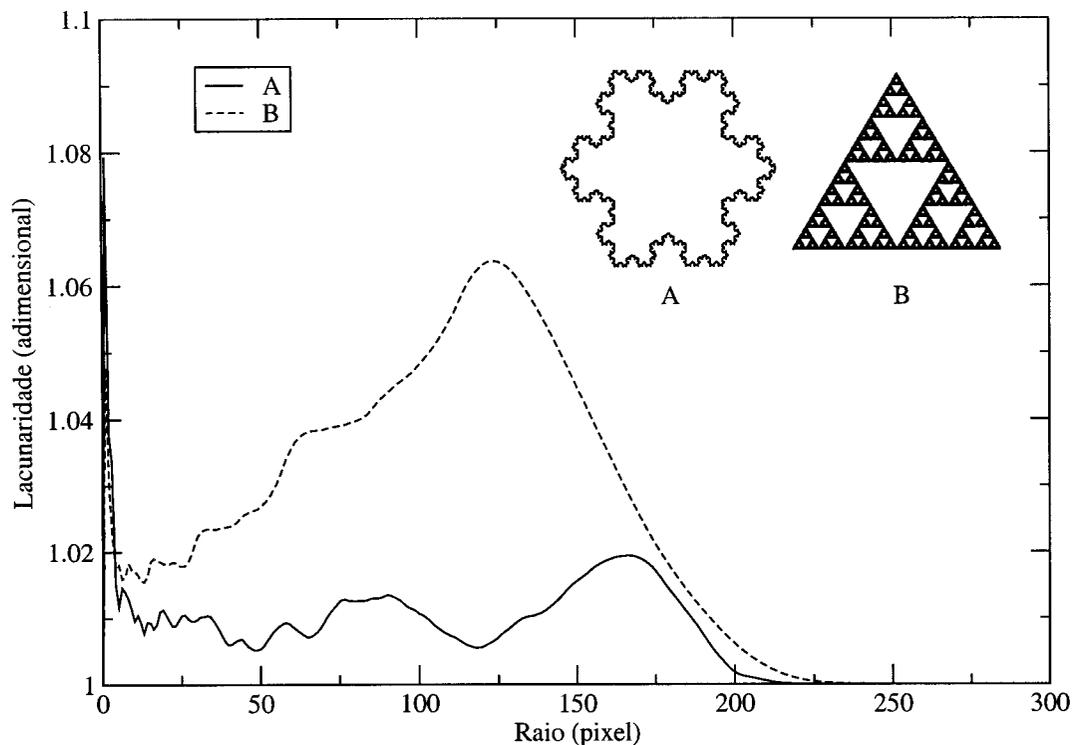


Figura 4.2: Curva de lacunaridade de uma curva triádica de Koch A e de um triângulo de Sierpinski B.

conseqüentemente, o valor da lacunaridade será igual a 1. Neste intervalo, o valor da área A dentro de cada janela, nas regiões I , II e III , em função de r e da posição do centro (x, y) da caixa são, juntamente com seus intervalos de integração, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 A_I^1(x, y, r) &= 4r^2, & x &= [r, (L - r)], & y &= [r, (L - r)] \\
 A_{II}^1(x, y, r) &= 2r^2 + 2ry, & x &= [r, (L - r)], & y &= [0, r] \\
 A_{III}^1(x, y, r) &= r^2 + [r + (L - y)]x + r(L - y), \\
 & & x &= [0, r], & y &= [(L - r), r]
 \end{aligned}$$

O valor médio $\mu(r)$ da área de todas as janelas é resultado da integração da soma de cada A_i no seu respectivo intervalo dividido por L^2 . Como existem quatro regiões

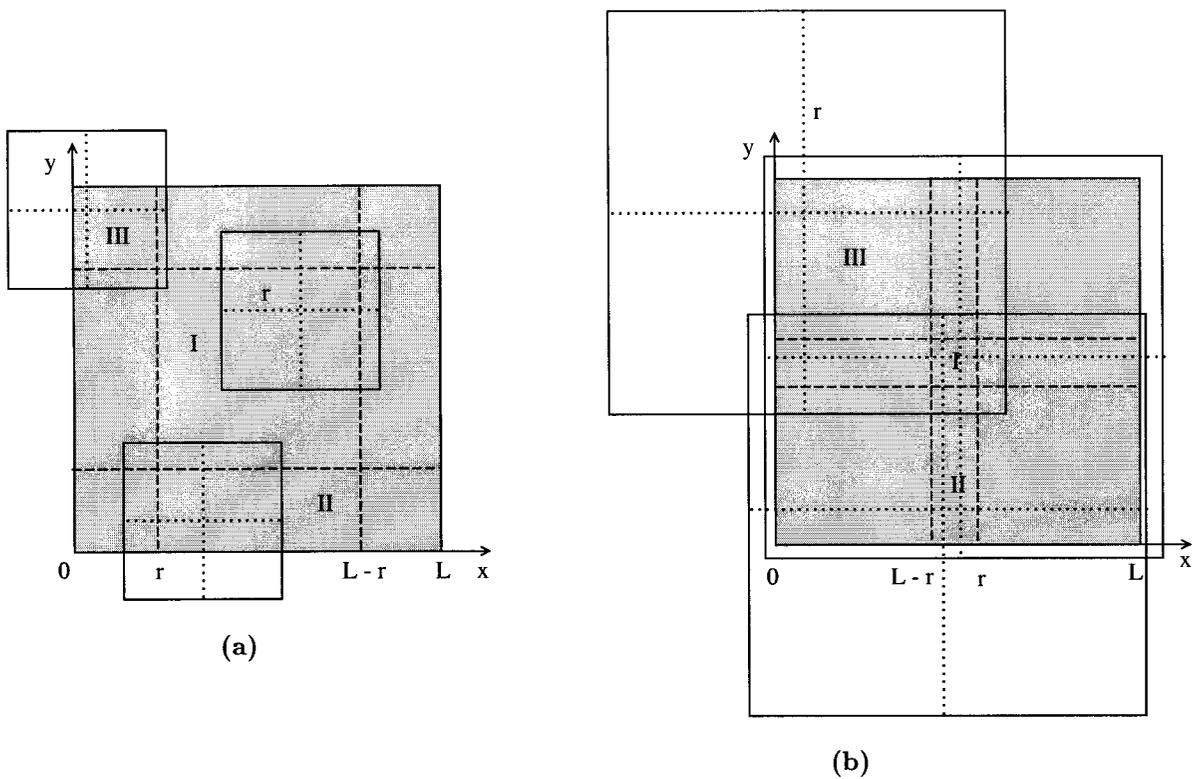


Figura 4.3: Regiões do quadrado correspondentes ao cálculo da lacunaridade nos intervalos (a) $r \in [0, L/2[$ e (b) $r \in [L/2, L]$. Nas regiões *I* as janelas estão totalmente preenchidas em (a) e contém todo o quadrado em (b), nas regiões *II* e *III* estão parcialmente preenchidas tanto em (a) quanto em (b).

tipo *II* e *III*, a média sobre todas as janelas que percorrem o objeto é:

$$\begin{aligned} \mu_1(r) &= \frac{1}{L^2} \int \int A_I^1(x, y, r) + 4A_{II}^1(x, y, r) + 4A_{III}^1(x, y, r) dx dy & (4.1) \\ &= \frac{r^2(r - 2L)^2}{L^2} \end{aligned}$$

a variância $\sigma_1^2(r)$ do conjunto de caixas de lado r , nas três regiões é:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(r) &= \frac{1}{L^2} \int \int (A_I^1(x, y, r) - \mu(r))^2 & (4.2) \\ &+ 4(A_{II}^1(x, y, r) - \mu(r))^2 \\ &+ 4(A_{III}^1(x, y, r) - \mu(r))^2 dx dy \\ &= \frac{r^5(r - 6L)(3r - 4L)(3r - 2L)}{9L^4} \end{aligned}$$

conhecendo $\mu(r)$ e $\sigma^2(r)$ podemos encontrar a expressão da lacunaridade, no intervalo $[0, L/2[$ para este objeto:

$$\Lambda_1(r) = \frac{4L^2(5r - 6L)^2}{9(r - 2L)^4} \quad (4.3)$$

O procedimento para o cálculo no segundo intervalo $r = [L/2, L]$ é equivalente, com as funções de área e seus respectivos intervalos de integração iguais a:

$$\begin{aligned} A_I^2(x, y, r) &= L^2, & x &= [(L - r), r], & y &= [(L - r), r] \\ A_{II}^2(x, y, r) &= L(r + y), & x &= [(L - r), r], & y &= [0, (L - r)] \\ A_{III}^2(x, y, r) &= r^2 + [r + (L - y)]x + r(L - y), \\ & & x &= [0, (L - r)], & y &= [r, L] \end{aligned}$$

com média, desvio padrão e lacunaridade:

$$\mu_2(r) = \frac{r^2(r - 2L)^2}{L^2} \quad (4.4)$$

$$\sigma_2^2(r) = \frac{(3L - r)(r - L)^3(3r^4 - 14r^3L + 12r^2L^2 + 6rL^3 - L^4)}{9L^4} \quad (4.5)$$

$$\Lambda_2(r) = \frac{L^2(2r^3 - 6rL^2 + L^3)^2}{9r^4(r - 2L)^4} \quad (4.6)$$

E finalmente a expressão da lacunaridade em todo o intervalo:

$$\Lambda(r) = \begin{cases} \frac{4L^2(5r-6L)^2}{9(r-2L)^4} & \text{se } r \in [0, L/2[; \\ \frac{L^2(2r^3-6rL^2+L^3)^2}{9r^4(r-2L)^4} & \text{se } r \in [L/2, L]. \end{cases} \quad (4.7)$$

A Figura 4.4 mostra o gráfico da expressão anterior.

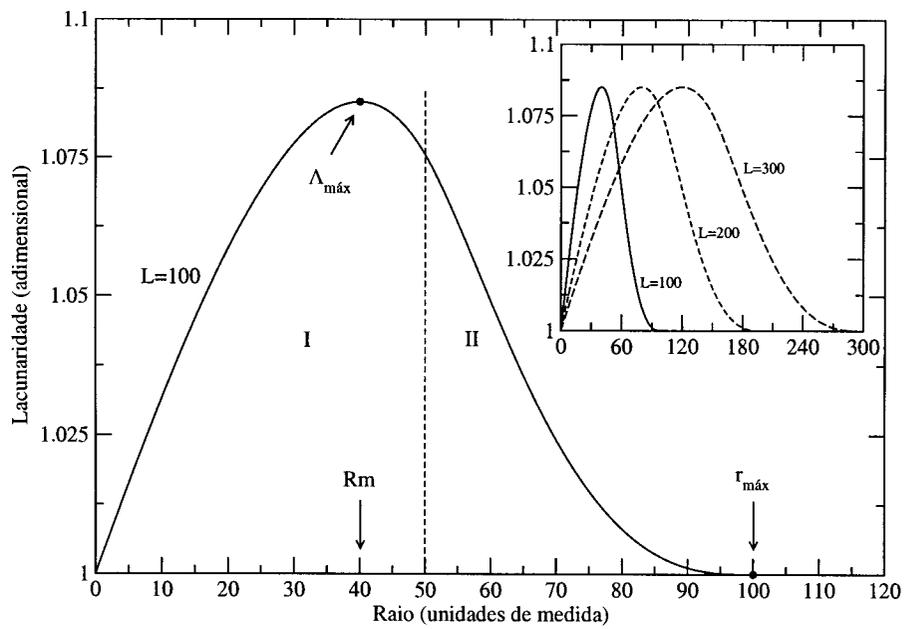


Figura 4.4: Curva da lacunaridade auto-referenciada de um quadrado de lado $L = 100, 200$ e 300 unidades de medida calculada analiticamente. A linha tracejada separa os intervalos I e II em que é dividido este cálculo. A razão entre o raio de máximo da curva R_m e o valor do raio máximo $r_{máx}$ é constante e igual para as três curvas.

Capítulo 5

Propriedades da lacunaridade auto-referenciada

Uma vez determinado que a lacunaridade auto-referenciada remove as arbitrariedades encontradas no método convencional, quando aplicado a objetos finitos, resta testar como este novo algoritmo se comporta em relação à quantificação da invariância translacional de formas, presença de ruído e invariância à rotação.

Antes de analisar as características acima, começaremos ilustrando o comportamento mais geral da curva de lacunaridade deste novo algoritmo para algumas formas geométrica simples. A Figura 5.1 mostra a curva de lacunaridade auto-referenciada de um quadrado sólido. Observe que esta inicia em um, passa por um máximo e atinge um novamente. Este comportamento pode ser justificado com auxílio da equação 3.2 que define a lacunaridade $\Lambda(r) = \sigma_S^2(r)/\mu_S^2(r) + 1$. Quando o valor do raio é zero, todas as janelas são do tamanho de um pixel e estão preenchidas, logo a variância $\sigma^2(r) = 0$ e conseqüentemente a lacunaridade é igual a um. Conforme cresce o raio, aumenta $\sigma^2(r)$ e a lacunaridade, contudo, existe um valor para o qual as janelas começam a capturar maior parte do objeto e os valores da área da forma contida em cada uma vão se tornando cada vez mais parecidos,

resultando em diminuição de $\sigma^2(r)$ e da lacunaridade. A lacunaridade cai até que os raios sejam grandes o suficiente para que todas as janelas contêmam o objeto inteiro, resultando novamente em $\sigma^2(r) = 0$.

Na mesma Figura 5.1 encontram-se a lacunaridade de mais dois objetos: um círculo e uma cruz, com aproximadamente a mesma área do quadrado. Observe que a lacunaridade do círculo é mais baixa, uma vez que a variância sobre as janelas é menor, devido à sua forma geométrica. Já a cruz, que é um objeto mais complexo que o quadrado, apresenta lacunaridade mais alta, pois a variância das janelas é maior.

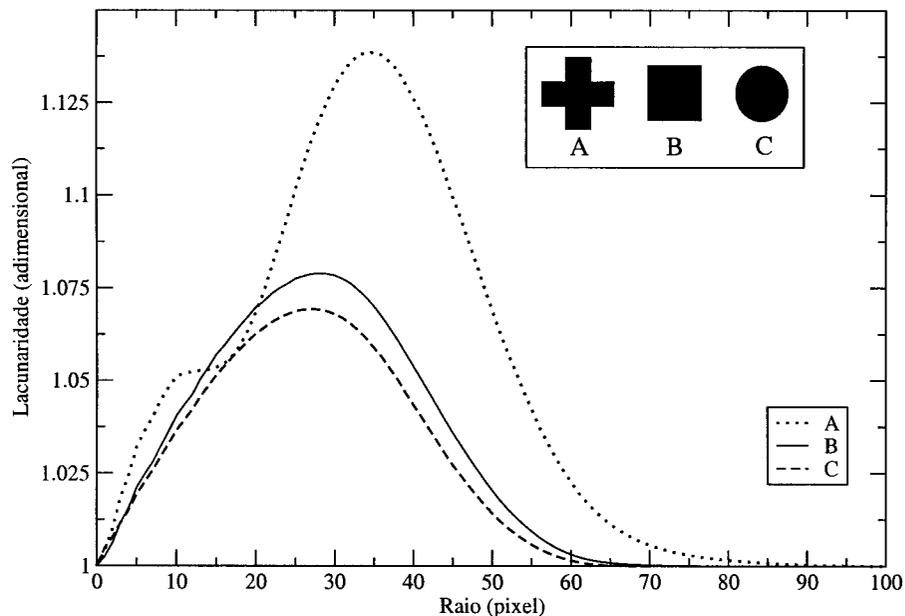


Figura 5.1: Gráfico da lacunaridade auto-referenciada de três objetos, mostrados acima no gráfico, com aproximadamente a mesma área.

A principal característica da lacunaridade é quantificar a invariância translacional de uma forma. Uma forma apresenta invariância translacional se a observando em toda sua extensão, pode-se ver repetir sempre o mesmo padrão, ou seja, a forma apresenta sempre a mesma aparência, como acontece, por exemplo, com um tabuleiro de xadrez, numa determinada escala. A invariância à translação é uma

característica dependente da escala em que se observa a forma, já que esta pode apresentar invariância numa escala e em outra não. Se observamos um tabuleiro de xadrez, por exemplo, em escalas menores que uma de suas casas, não constataremos invariância translacional, ao passo que, observando em escalas maiores, veremos o padrão definido pelas casas se repetindo.

Quanto mais um objeto se aproxima da invariância translacional, mais baixo é o valor de sua lacunaridade, cujo limite inferior é igual a 1. A Figura 5.2 mostra as curvas de lacunaridade convencional e auto-referenciada de objetos em forma de tabuleiro e coroa circular. Para a lacunaridade convencional ajustamos o espaço de trabalho exatamente ao tamanho dos objetos. Repare que, no caso do tabuleiro, para escalas maiores que $r = 15$, que é aproximadamente a largura de uma de suas casas, o valor da lacunaridade é muito próximo de um, indicando invariância translacional a partir desta escala. Isto se justifica, pois a partir desta escala, todas as janelas que percorrem o espaço de trabalho capturam aproximadamente a mesma área da forma, e recorrendo à equação 3.2, podemos ver que o valor da lacunaridade é muito próximo a 1 pois a variância σ^2 se aproxima de zero.

Na lacunaridade auto-referenciada, a interpretação de invariância translacional é diferente da anterior, pois as janelas não percorrem todo o espaço de trabalho mas somente os pontos pertencentes ao objeto. A invariância translacional é avaliada em relação ao objeto, ou seja, do ponto de vista de um observador que o percorre. Para este, o objeto seria mais invariante à translação se cada trecho observado, em vários dos seus pontos, numa determinada escala, fossem semelhantes. Deste modo, um observador que se desloca por todo o espaço de trabalho observando invariância translacional pode não perceber o mesmo resultado caso se desloque apenas referenciado no objeto. Por esta razão, a lacunaridade auto-referenciada do mesmo tabuleiro dá um resultado diferente do outro método. Se observamos na mesma Figura 5.2 a curva de lacunaridade da coroa circular podemos ver que

os valores da auto-referenciada são mais próximos de 1 para os raios maiores que a espessura da coroa, ou seja, este objeto parece mais invariante à translação que um tabuleiro. Já a lacunaridade convencional da coroa circular é maior que a do tabuleiro, uma vez que o objeto não é tomado como referência e é mais invariante à translação neste método. A invariância translacional desta forma ocorre somente em escalas bem mais altas em que as janelas já capturam maior parte da forma.

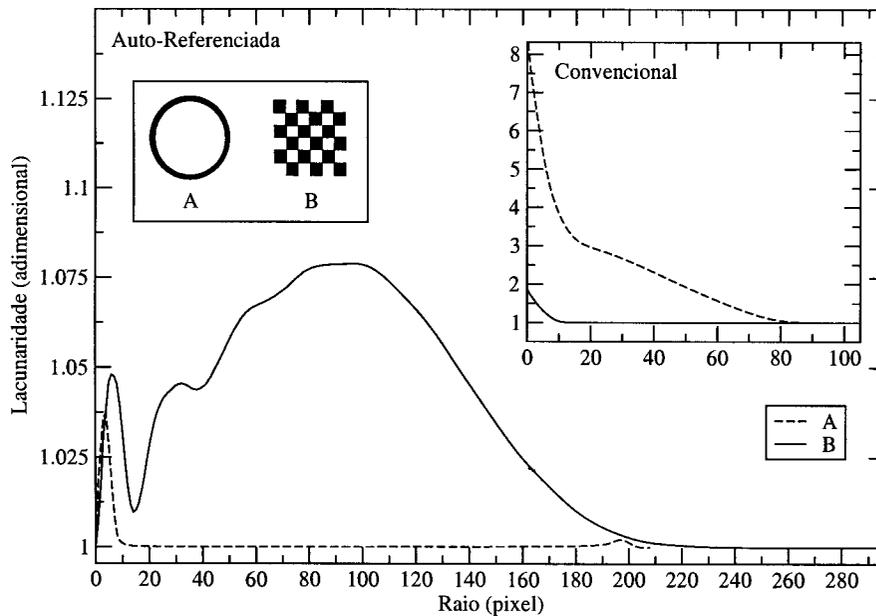


Figura 5.2: Curvas da lacunaridade auto-referenciada e convencional (canto superior direito) de objetos em forma de coroa circular e tabuleiro.

5.1 Invariância à escala

Para ilustrar como varia a lacunaridade com o tamanho do objeto, primeiro estudamos a analítica do quadrado, já calculada na seção 4.2, considerando três lados diferentes, a saber, L , $2L$ e $3L$, com $L = 100$ unidades de medida. No canto superior direito da Figura 4.4 podemos ver as curvas de lacunaridade destes objetos. Estas curvas têm a seguinte propriedade, $\Lambda_L(r) = \Lambda_{2L}(2r) = \Lambda_{3L}(3r)$, ou seja, se

aumentamos o lado do quadrado multiplicando por um valor c , o eixo das abscissas da curva de lacunaridade é multiplicado por c .

Podemos generalizar esta propriedade para um objeto qualquer de área K . Se aumentamos o tamanho de um objeto de área $K1$, preservando sua geometria, de modo que possua área $K2 = c^2 K1$ então suas curvas de lacunaridade obedecem a seguinte relação

$$\Lambda_{K1}(r) = \Lambda_{K2}(cr) \quad (5.1)$$

Esta propriedade pode ser demonstrada da seguinte maneira: Seja A_{T1} a área total de uma forma $K1$ qualquer no plano e A_{T2} a área desta forma aumentada de tamanho de modo que $A_{T2} = c^2 A_{T1}$. A área da forma dentro de uma janela de raio r que percorre a forma $K1$, em função de sua posição é $A_1(x, y, r)$, e a área da janela que percorre a forma aumentada $K2$ é $A_2(x, y, r)$. Podemos relacionar A_1 e A_2 da seguinte maneira

$$c^2 A_1(x, y, r) = A_2(cx, cy, cr) \quad (5.2)$$

Integrando as expressão de ambos os lados e dividindo pelo número total de pontos $\int_{K1} dk1 = A_{T1}$ da região de integração

$$c^2 \frac{\int_{K1} A_1(x, y, r) dk1}{A_{T1}} = \frac{\int_{K1} A_2(cx, cy, cr) dk1}{A_{T1}} \quad (5.3)$$

fazendo uma transformação de variável de integração no lado direito da equação acima $cx \rightarrow x, cy \rightarrow y$ mudamos a região de integração de $K1$ para $K2$ e temos que $dk1 = dk2/c^2$ pois $dk1 = dxdy$ e $K2 = c^2 K1$, logo

$$\frac{\int_{K2} A_2(x, y, cr) dk2}{c^2 A_{T1}} = \frac{\int_{K2} A_2(x, y, cr) dk2}{A_{T2}}$$

Substituindo o termo acima na equação 5.3

$$c^2 \left(\frac{\int_{K1} A_1(x, y, r) dk1}{A_{T1}} \right) = \left(\frac{\int_{K2} A_2(x, y, cr) dk2}{A_{T2}} \right)$$

cada membro entre parênteses desta expressão é a média das área das janelas de raio r para $K1$ e $K2$

$$\mu_{K1}(r)c^2 = \mu_{K2}(cr) \quad (5.4)$$

De modo análogo podemos encontrar a relação entre σ_{K1}^2 e σ_{K2}^2 . Subtraindo a expressão 5.4 da 5.2 e elevando cada lado ao quadrado temos

$$c^4 [\mu_{K1}(r) - A_1(x, y, r)]^2 = [\mu_{K2}(cr) - A_2(cx, cy, cr)]^2$$

Integrando a expressão acima, dividindo pelo número total de pontos de cada região de integração e repetindo o procedimento de mudança de variável de integração no lado direito da expressão temos

$$\frac{c^4 \int_{K1} [\mu_{K1}(r) - A_1(x, y, r)]^2 dk1}{A_{T1}} = \frac{\int_{K2} [\mu_{K2}(cr) - A_2(x, y, cr)]^2 dk2}{A_{T2}}$$

e obtemos a expressão

$$\sigma_{K1}^2(r)c^4 = \sigma_{K2}^2(cr) \quad (5.5)$$

Dividindo 5.5 por 5.4 elevada ao quadrado obtemos

$$\frac{\sigma_{K1}^2(r)c^4}{\mu_{K1}^2(r)c^4} = \frac{\sigma_{K2}^2(cr)}{\mu_{K2}^2(cr)}$$

ou seja,

$$\Lambda_{K1}(r) = \Lambda_{K2}(cr)$$

Vejamos agora o que acontece com a razão entre o valor do raio Rm no qual a lacunaridade da curva atinge seu valor máximo e o raio máximo $r_{máx}$ (raio a partir do qual a lacunaridade é constante e vale um) do quadrado. O raio máximo é igual ao lado do quadrado, pois neste caso as janelas são quadradas, enquanto o valor de Rm pode ser encontrado derivando-se a expressão 4.7 e igualando seu valor a zero. Como o ponto de máximo, veja Figura 4.4, se localiza no intervalo I , $r \in [0, L/2[$, separado

pela linha tracejada, basta derivar a equação correspondente a este intervalo e igualar a zero

$$\Lambda'(Rm) = -\frac{8}{9} \frac{(5Rm - 2L)(5Rm - 6L)L^2}{(-2L + Rm)^5} = 0$$

A solução desta equação no intervalo I é

$$Rm = \frac{2L}{5}$$

Logo a razão entre o raio máximo Rm e $r_{máx}$ fica

$$\frac{Rm}{r_{máx}} = \frac{2L}{5} \times \frac{1}{L} = \frac{2}{5}$$

Deste modo, concluímos que esta razão é uma característica deste objeto, é constante e não depende do seu tamanho. Esta propriedade também pode ser generalizada para qualquer objeto, pois é consequência direta da propriedade da equação 5.1.

Dando continuidade a este estudo, consideramos agora formas mais complexas. A Figura 5.3 mostra as curvas de lacunaridade de um DLA, ver capítulo 6, que sofreu uma transformação de escala em que foi dobrado seu tamanho.

O modo mais simples de fazer esta transformações é pela multiplicação das coordenadas de cada ponto do DLA por dois. Cada pixel da forma é então substituído por um pequeno quadrado de 3×3 pixels para que continue conectada. No canto superior direito o gráfico mostra que a curva do DLA sobrepõe-se à do DLA de tamanho dobrado quando o valor de suas abscissas é multiplicado por 2, conforme a propriedade 5.1. A diferença das curva nas escalas mais baixas é consequência da distorção resultante da troca dos pixels explicada acima.

5.2 Invariância à rotação

Uma medida é invariante à rotação se seu valor é independente da orientação da forma na grade, ou seja, se o objeto for rotacionado de um ângulo qualquer o valor

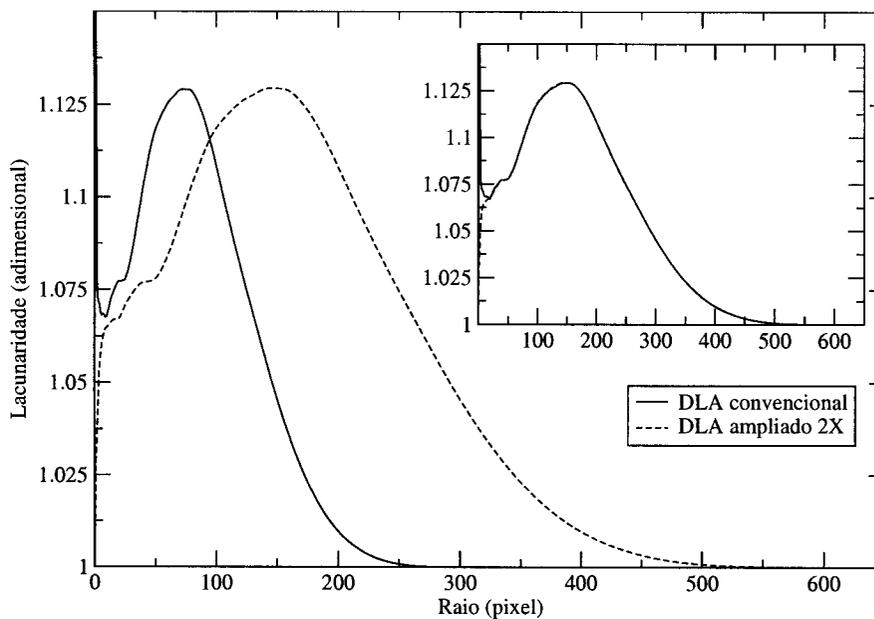


Figura 5.3: Curvas de lacunaridade de um DLA e de sua ampliação por uma transformação de escala. O gráfico do canto superior direito mostra a sobreposição das curvas por uma multiplicação dos valores das abscissas da curva do DLA por dois.

da medida não se altera. Esta propriedade é importante em uma medida, pois não é necessária a preocupação com a orientação da forma quando digitalizada.

Para verificar se a lacunaridade auto-referenciada é invariante à rotação fizemos um teste rotacionando um objeto em forma de cruz de vários ângulos θ . Testamos o algoritmo inicialmente com janelas quadradas por facilidade de implementação e verificamos que as curvas de lacunaridade sofrem um desvio significativo, veja Figura 5.4. Por esse motivo verificamos também o algoritmo com janelas circulares, cuja implementação é apenas um pouco mais complexa que a anterior. Na Figura 5.4 podemos ver que o desvio que as curvas sofrem em relação ao ângulo de rotação é mínimo se comparado com o caso anterior. Repare que uma aproximação de um trecho das curvas mostra o desvio em relação a θ .

Podemos concluir, deste modo, que a forma geométrica da janela influi consideravelmente no valor da lacunaridade auto-referenciada e a janela circular é bem

mais estável a rotações e possíveis distorções na forma causadas por esta operação. Na mesma Figura 5.4 encontra-se uma curva de cálculo analítico, portanto exato, da lacunaridade para esta cruz utilizando janelas quadradas. Note que o desvio da curva numérica e analítica é bem pequeno, o que revela a estabilidade do método em relação a distorções devido à discretização do objeto. O fato de se particionar o objeto em elementos discretos, no caso o pixel, não interfere significativamente no valor da lacunaridade.

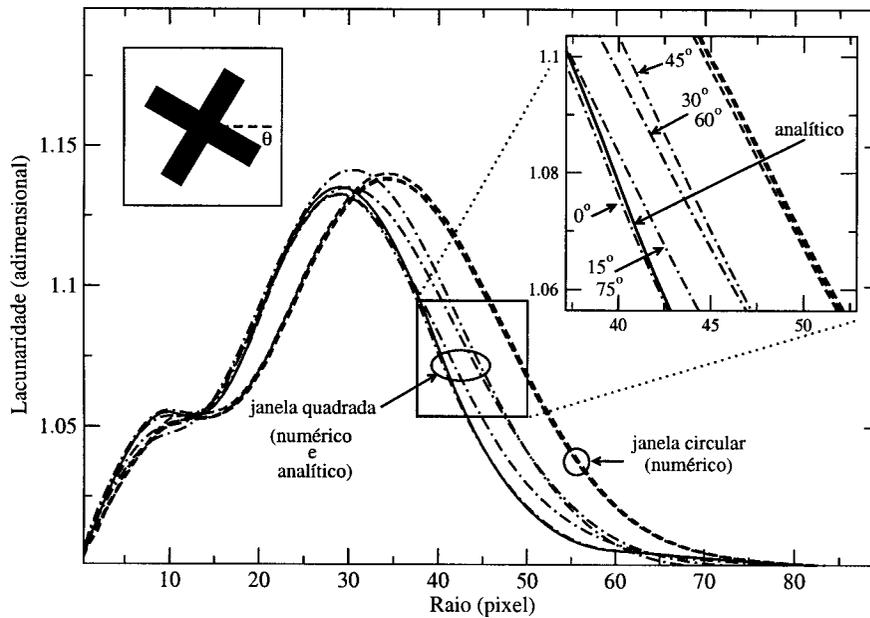


Figura 5.4: Curvas de lacunaridade auto-referenciada de uma cruz rotacionada de vários ângulos θ calculadas com janelas quadradas e circulares. O gráfico no canto superior direito mostra uma aproximação de um trecho das curvas. As linhas tracejadas correspondem aos cálculos numéricos enquanto a linha cheia a um cálculo analítico com janelas quadradas.

5.3 Sensibilidade a ruídos

Muitas vezes a caracterização de formas é aplicada no estudo de objetos reais. Antes de analisar a forma é necessário um processo que capture a forma e a transforme

em uma imagem digital. Em geral, este processo envolve a segmentação da imagem, que é a separação da forma que se deseja estudar do restante da imagem. Alguns tipos de imagem são complexos o suficiente para que um processo automático de segmentação não seja totalmente eficaz na separação da forma. Como consequência, há presença de pontos que não são necessariamente pertencentes à forma a ser estudada. Estes pontos, que podem interferir de modo indesejável na caracterização da imagem, são denominados ruído. Em alguns casos o ruído presente em uma forma pode ser retirado manualmente, contudo este processo é muito lento se comparado ao automático. Há casos em que a quantidade de imagens a serem segmentadas é muito grande, tornando esta alternativa inviável. Uma maneira de contornar esta situação é utilizar na caracterização de formas medidas que sejam pouco sensíveis à presença de ruído, considerando logicamente, que existe uma tolerância em relação à sua densidade.

Para avaliar o quanto a lacunaridade auto-referenciada é sensível à presença ruído, escolhemos um objeto em forma de cruz e o contaminamos com ruído de densidades diferentes, obedecendo a uma distribuição de Poisson. Para contaminar o objeto com ruído de densidade λ , alocamos o objeto em uma grade delimitada por um quadrado que se ajusta ao objeto. Um número aleatório no intervalo $\rho \in [0, 1]$ é sorteado para cada célula da grade vazia que então é preenchida com um ponto conforme o valor de λ . Se, por exemplo, $\lambda = 0.1000$ então o valor da célula passa a ser 1 caso $0 \leq \rho \leq 0.1000$ e 0 caso $\rho > 0.1000$.

A Figura 5.5 mostra como se comportam as curvas de acordo com o parâmetro λ . As curvas à esquerda referem-se à lacunaridade convencional, enquanto às da direita são relativas à auto-referenciada. Observe que conforme aumenta o ruído, os valores da curva da esquerda diminuem. Isto ocorre porque o espaço de trabalho é preenchido com ruído, aumentando a área total dentro deste, fazendo com que a lacunaridade diminua. Já a curva da lacunaridade auto-referenciada tem um

comportamento diferente, os seus valores aumentam. Isto acontece porque, neste algoritmo, os pontos inseridos pelo ruído são percorridos com janelas, bem como o objeto. O resultado é o aumento da variância e conseqüentemente da lacunaridade. Apesar do comportamento diferenciado em relação à anterior, o desvio relativo da curva, conforme aumenta o ruído, ainda é menor na lacunaridade auto-referenciada.

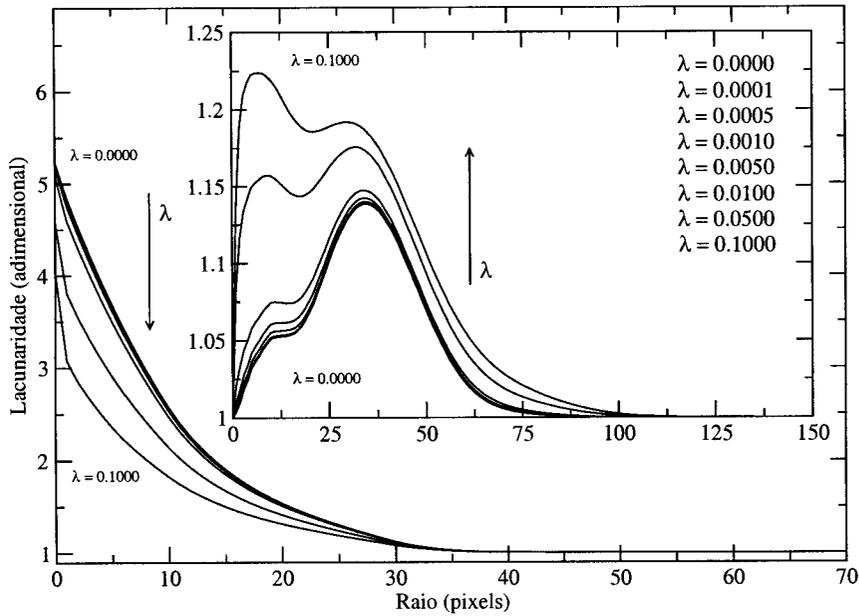


Figura 5.5: Curva da lacunaridade convencional e auto-referenciada para um objeto em forma de cruz com presença de ruído obedecendo a uma distribuição de Poisson, com λ aumentando na direção indicada pela seta.

Capítulo 6

Aspectos computacionais

Neste capítulo descreveremos com detalhes os modelos de crescimento DLA (*Diffusion-Limited Aggregation*) utilizados para gerar as formas que serão caracterizadas por meio da lacunaridade auto-referenciada no capítulo 7. Faremos também uma análise de complexidade e comparação dos algoritmos da lacunaridade auto-referenciada e convencional. Para finalizar listaremos os materiais e os *softwares* utilizados durante o desenvolvimento deste projeto.

6.1 Modelos de crescimento

A compreensão de muitos fenômenos na natureza é feita por meio do estudo de padrões de distribuição espacial. A análise computacional da imagem digital destes padrões envolve extração de características morfológicas, que é utilizada para inferir hipóteses sobre as leis físicas que os governam. Existe um interesse especial na caracterização de padrões que apresentam estrutura ramificada, pois são muito comuns na natureza. Como estes padrões são em geral complexos, é necessária uma análise mais elaborada para sua caracterização. Vários estudos têm mostrado que muitos destes padrões podem ser simulados por um modelo bem conhecido, cujo

nome é abreviado pela sigla DLA (*Diffusion-Limited-Aggregation*).

A principal característica deste modelo é gerar padrões resultantes da agregação de elementos que formam aglomerados com estrutura ramificada. Alguns dos fenômenos que vêm sendo simulados por este modelo são, por exemplo, descarga elétrica [7], crescimento dendrítico análogo ao de células neurais [32], deposição eletroquímica [16] e escoamento de fluidos em meios porosos ou em fluidos de viscosidade diferente [33, 38].

Existem variações destes modelos e entre elas escolhemos duas principais que geram padrões visualmente semelhantes por métodos diferentes. No primeiro modelo o agregado é formado por partículas que se deslocam aleatoriamente no plano aderindo-se ao agregado quando o toca. No segundo as partículas surgem na vizinhança do agregado conforme uma determinada probabilidade, crescendo do centro para fora. Denominaremos estes modelos DLA convencional e DLA potencial por conveniência e nos referiremos ao agregado formado simplesmente como DLA. Nas seções seguintes descreveremos com detalhe cada um destes modelos.

6.1.1 DLA convencional

Este modelo forma um agregado que cresce conforme partículas que percorrem aleatoriamente o plano aderem-se a ele. Sua aplicação em simulação de deposição eletroquímica de metais pode ser encontrada em [16]. Na simulação computacional deste modelo o plano que a partícula percorre é uma grade discreta. Para iniciar o crescimento, uma partícula é fixada no centro da grade e então se sorteia uma outra partícula a uma distância r , que determina a circunferência onde surge, com um ângulo aleatório θ em relação a um eixo que passa pela posição central na grade. A partícula percorre então o plano até encostar-se a outra fixa aderindo-se a ela. A posição de uma nova partícula é então determinada por r e pelo sorteio de θ no intervalo $[0, 2\pi]$. O processo se repete até que o agregado possua o número desejado

de partículas [6].

A princípio, o raio deve ser suficientemente grande de modo que o raio do DLA (a maior distância entre a partícula inicial e um ponto do DLA) no estágio final de crescimento seja bem menor que r . Contudo, a escolha de valores muito grandes de r exigem maior tempo para a formação do DLA pois as partículas têm que percorrer uma distância maior até se fixarem no agregado. As partículas podem se deslocar na vertical ou horizontal. Seu deslocamento é determinado pelo sorteio de um número aleatório no conjunto $\{1,2,3,4\}$, cujos elementos estão associados a uma determinada direção. Por exemplo, se o número sorteado é 1, a partícula desloca-se para a esquerda uma unidade (pixel) na grade.

Uma aproximação que permite maior economia de tempo no processo é considerar um raio inicial r_0 e aumentar seu valor de dr pixels (de modo que na próxima interação $r_0 = r_0 + dr$) conforme o agregado atinja a circunferência com raio $r_i \leq r_0$, de modo que $r_0 - r_i = i$, ou seja, a distância entre as circunferências é de i pixels. Adicionalmente, se a partícula que se desloca ultrapassa a circunferência determinada por um raio $r_H = r_0 + H$ é então reinserida na circunferência onde surgiu, de acordo com uma probabilidade que obedece a uma distribuição de Poisson. Uma maneira simples de implementar esta distribuição é por meio de uma transformação de Moebius [39], que pode ser encontrada no apêndice A.

Ajustamos estes parâmetros $H = 10$, $i = 50$, $r_0 = 100$ e $dr = 50$ (em pixels) de modo a manter aproximadamente a dimensão fractal do DLA, $D \approx 1.6$, conservando suas propriedades. A Figura 6.1(a) ilustra o instante inicial de crescimento e a Figura 6.1(b) mostra um estágio mais avançado do processo. A Figura 6.2 mostra seis representantes desta classe com 5000 partículas cada.

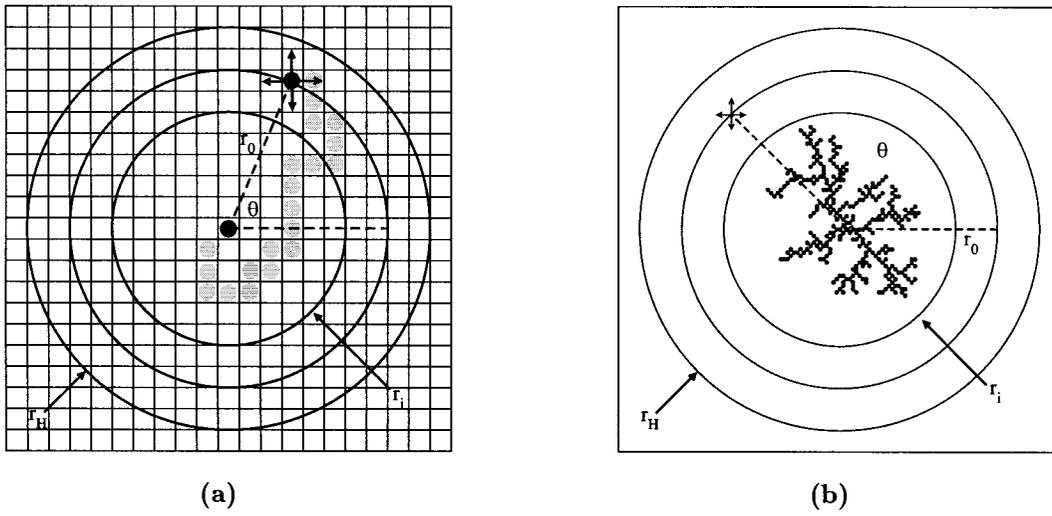


Figura 6.1: (a) Processo de agregação de partículas na formação de um DLA convencional. O rastro em cor cinza representa um possível caminho que a partícula pode percorrer até encostar-se a uma outra partícula fixa, que neste caso é a partícula inicial. (b) Representa um estágio mais avançado do processo de crescimento.

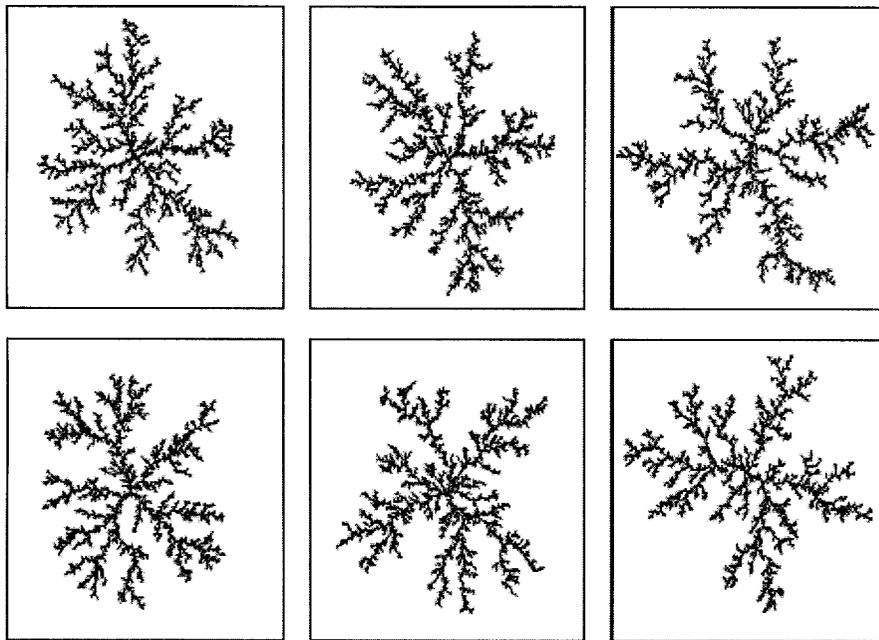


Figura 6.2: Agregados de partículas gerados pelo modelo DLA convencional.

6.1.2 DLA potencial

Este modelo tem utilidade na simulação de processos de crescimento dendrítico análogo ao de neurônios [32] e simulação de fenômenos de descarga elétrica [7]. O crescimento se dá pelo surgimento de novas partículas em posições adjacentes a uma inicialmente fixa no centro de uma grade. Este crescimento é aleatório e influenciado por um potencial gerado por um anel circular de raio r centrado na partícula inicial.

Sua simulação computacional é feita considerando uma partícula inicialmente fixa no centro de uma grade discreta, representada pelo número 1 numa matriz $l \times l$. Um anel circular de raio r centrado na partícula gera um potencial ϕ que influencia o crescimento do DLA. ϕ pode representar, por exemplo, um potencial elétrico [7] e seu valor é definido como $\phi = 1$ nos pontos sobre o anel e $\phi = 0$ nos pontos do agregado. O processo de crescimento consiste em resolver a equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ na região do círculo determinado por r .

O local onde a nova partícula surgirá depende de uma probabilidade p_k que é proporcional à diferença de potencial da partícula fixa e dos pontos onde a nova partícula poderá surgir. Inicialmente temos $\phi = 0$ nos pontos internos à circunferência. Um modo de resolver a equação na grade discreta é [7]

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1})$$

onde $\phi_{i,j}$ é o valor do potencial no ponto (i,j) da grade.

A cada passo $\phi_{i,j}$ é calculado em todos os pontos (i,j) com a condição de contorno $\phi = 1$ no anel e $\phi = 0$ nas partículas. Em um passo o processo foi iterado n vezes, onde n é numericamente igual a r (em pixel). Isto garante que a influência do potencial atinja a partícula central. O número de passos varia de acordo com a convergência que se deseja para a solução e depende do tamanho da grade. Para generalizar o algoritmo adotamos uma convergência adaptativa, ou seja, em um passo q , com $q > 1$, calculamos a maior diferença $\delta = |\phi_{i,j}(q+1) - \phi_{i,j}(q)|$ e

iteramos o processo até que $\delta \leq 10^{-3}$. Quando este valor é atingido, antes de iniciar o próximo passo, calcula-se agora as probabilidades p_k .

O procedimento é mais facilmente compreendido por meio da Figura 6.3. Em 6.3(a) vemos a partícula inicial, marcada com 1 na grade (observe que 1 não é valor do potencial da partícula, mas somente sua representação), e os possíveis pontos p_k onde a nova partícula pode surgir. O círculo representa o anel com potencial $\phi = 1$. Os p_k são calculados da seguinte maneira

$$p_k = \frac{\phi_k}{\sum \phi_k}$$

onde a somatória é sobre todos os p_k possíveis.

O próximo passo consiste em particionar um intervalo $[0,1]$ de acordo com os p_k possíveis, como mostrado em 6.3(a). O sorteio de um número aleatório ρ no mesmo intervalo determina onde surgirá a nova partícula. O processo todo se repete até que se atinja o número de partículas desejado. A Figuras 6.3(b) mostra o passo seguinte, onde foi sorteado $\rho = .63$. Um exemplo de seis formas desta classe pode ser visto na Figura 6.4, com 11000 partículas cada.

6.2 Lacunaridade: Custo computacional e complexidade

6.2.1 Lacunaridade convencional

Consideraremos inicialmente a implementação descrita na seção 3.2, utilizando uma matriz $l \times l$ como espaço de trabalho onde é alocada a forma. O fator de maior contribuição no tempo de cálculo computacional da lacunaridade convencional é a contagem de quantos pixels da forma contém cada janela de raio r que percorre o espaço de trabalho. Este tempo é proporcional à dimensão l do espaço de trabalho.

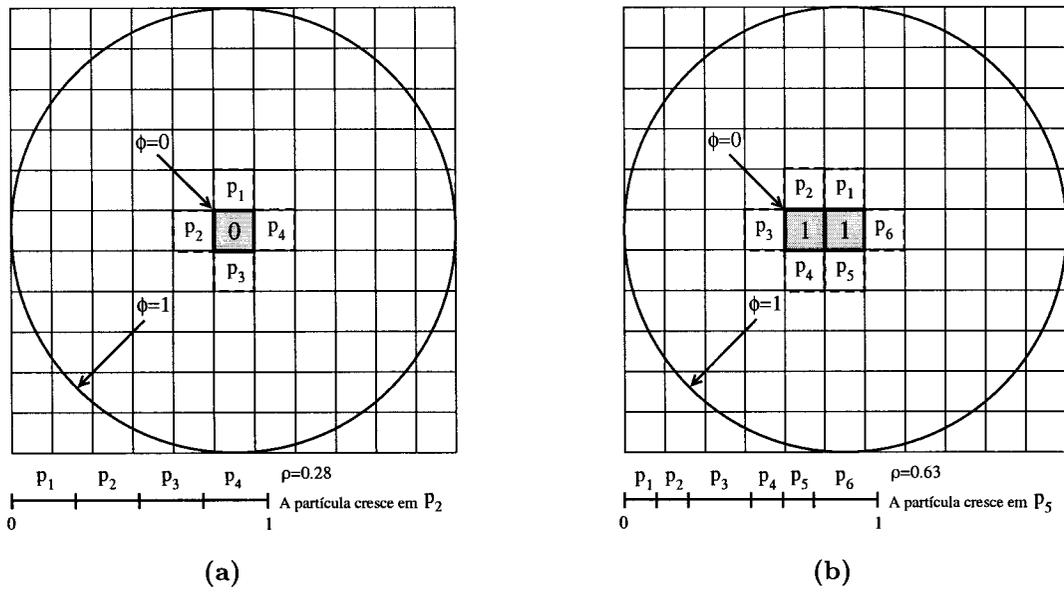


Figura 6.3: Estágios de crescimento de um DLA potencial

O tempo de execução é basicamente dependente daquele gasto com acesso à memória do computador utilizado. O tempo de avaliação das expressões matemáticas pode ser desprezado se comparado ao processo de contagem das janelas. A determinação da ordem de complexidade é feita contando quantos acessos à memória são necessários para que a curva de lacunaridade seja calculada. Para cada valor de r , o número total de janelas é $N(r) = (l - 2r)^2$ e cada janela possui $(2r + 1)^2$ elementos a serem verificados, logo o número total $N_t(l)$ de elementos contados com r variando de 0 a $r_{\max} = \frac{(l-1)}{2}$ é

$$\begin{aligned}
 N_t(l) &= \sum_{r=0}^{\frac{(l-1)}{2}} (l - 2r)^2 \cdot (2r + 1)^2 & (6.1) \\
 &= \frac{(l + 1)(l^4 + 4l^3 + 6l^2 + 4l + 15)}{60}
 \end{aligned}$$

De acordo com a expressão acima, podemos concluir que o tempo gasto no cálculo da lacunaridade é da ordem de $O(l^5)$.

A alocação de memória não é um fator tão limitante quanto o tempo de execução do programa. A quantidade de memória a ser alocada, considerando uma

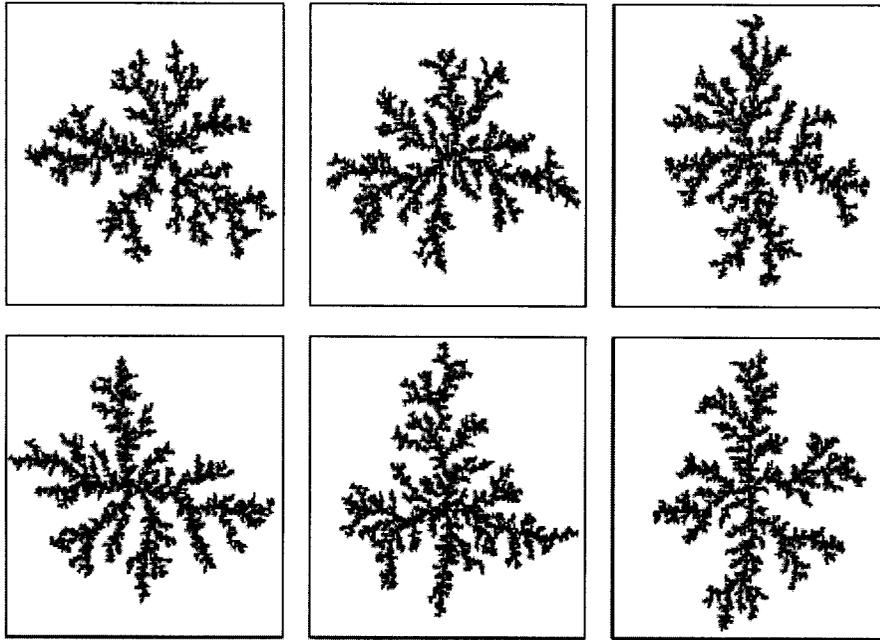


Figura 6.4: Agregados de partículas gerados pelo modelo DLA potencial.

implementação que aloque a forma em uma matriz de números inteiros de oito bits consumirá $l \times l$ bytes de memória, ou seja, o consumo de memória cresce com l^2 .

6.2.2 Lacunaridade auto-referenciada

No cálculo da lacunaridade auto-referenciada somente os pontos da forma são percorridos, e por este motivo, o número total $N(r)$ de janelas de raio r que percorrem a forma é constante e igual ao número n de pontos da forma. Para posterior comparação com a lacunaridade auto-referenciada faremos o uso de janela quadradas.

Quando o raio da janela é igual à maior distância l entre dois pontos da forma então a lacunaridade passa a valer 1 partir desta distância, pois, como já explicado, todas as janelas capturam o objeto inteiro resultando em variância nula. Adotaremos este raio como critério de parada no cálculo da lacunaridade de uma forma.

O número de janelas de raio r que percorrem a forma é $N(r) = n$ e o número de elementos verificados dentro de cada janela é $(2r+1)^2$. Conhecendo estas expressões,

podemos calcular o número total $N_t(l)$ de elementos contados com r variando de 0 a $r_{\text{máx}} = l$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} N_t(l) &= \sum_{r=0}^l n \cdot (2r + 1)^2 & (6.2) \\ &= \frac{n(4l^3 + 12l^2 + 11l + 3)}{3} \end{aligned}$$

A ordem de grandesa depende do número de pontos da forma. No pior caso $n = l^2$ e o tempo de execução varia com l^5 , ou seja, $O(l^5)$. Esta implementação tem no seu pior caso a mesma ordem de grandesa que a da lacunaridade auto-referenciada.

A quantidade de memória requerida para o processo, como no algoritmo anterior, depende da dimensão l da matriz que contém a forma, de modo que a janela de maior raio possa percorrer toda ela sem extrapolar os limites desta matriz. A dimensão da matriz deve ser no mínimo, de acordo com esta implementação, igual ao dobro da maior distância entre dois pontos da forma. Se esta distância for l então a alocação de memória é da ordem de $O(l^2)$.

6.2.3 Comparação teórica e experimental

Para podermos comparar os dois métodos, calcularemos a lacunaridade de um DLA convencional, variando o número de partículas de 1000 até 4000, com passo de 1000 partículas. O raio máximo da janela é definido de tal modo que o maior raio atingido seja igual nos dois métodos. Se o raio máximo atingido na lacunaridade auto-referenciada for L , que é distância máxima entre dois pontos do DLA, então para chegar a um raio equivalente na lacunaridade convencional, o espaço de trabalho deve ter dimensão $2L + 1$, pois o raio máximo L deve ser igual a $(l - 1)/2$, conforme a expressão 6.1. Para avaliarmos o desempenho relativo $R(L)$ entre os dois métodos, podemos dividir a expressão 6.1 por 6.2 substituindo $l = 2L + 1$ e $l = L$ respectivamente resultando na seguinte expressão

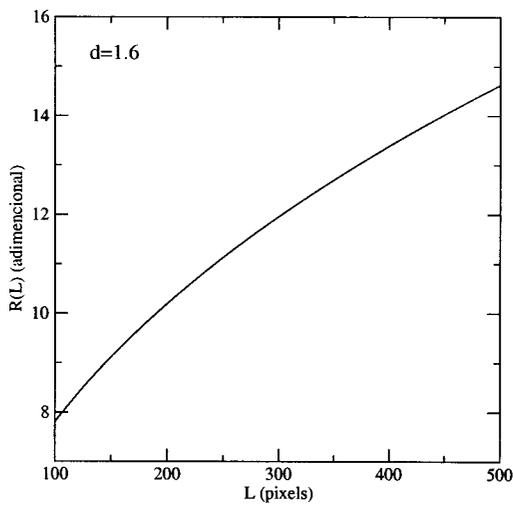
$$R(L) = \frac{8L^4 + 32L^3 + 48L^2 + 32L + 15}{5n(2L + 3)(2L + 1)}$$

O resultado da expressão mostra a razão entre o número de contagens total que cada método faz. Como o tempo é proporcional a este número, podemos fazer um gráfico de $R(L)$ e verificar o desempenho relativo entre os dois métodos. Para ver como varia R para um DLA convencional, em que L muda conforme cresce o número de partículas, podemos supor, por exemplo, que $n \approx (L/2)^d$. Esta é a expressão para o número de pontos do DLA em função do seu raio, que é aproximadamente igual à $(L/2)$, com $d = 1.6$. A Figura 6.5(a) mostra a curva de R . Podemos observar no gráfico, que conforme o DLA cresce, o tempo gasto pela lacunaridade convencional aumenta em relação à auto-referenciada. No caso limite, quando $d = 2$, ou seja, n cresce com $(L/2)^2$, ainda sim a lacunaridade convencional não chega a ser mais rápida que a auto-referenciada, observe Figura 6.5(b). Na Figura 6.5(c), encontra-se uma curva do tempo gasto no cálculo numérico da lacunaridade, pelos dois métodos, em função do número de partículas de um DLA convencional. A dimensão do espaço de trabalho é proporcional ao número de partículas do DLA.

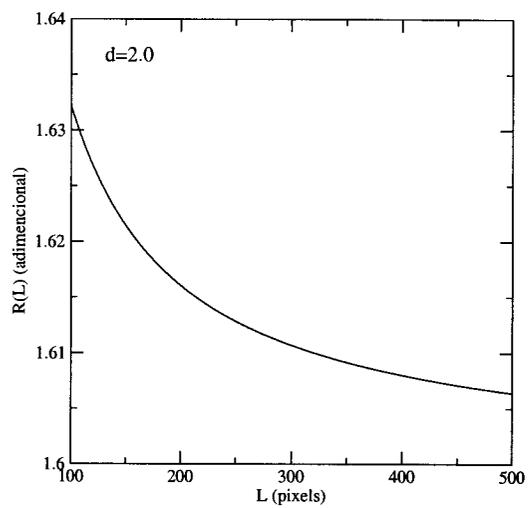
6.3 Equipamentos e *Softwares*

A parte do trabalho referente à implementação de programas, construção de gráficos e desenvolvimento da tese foi feita num microcomputador Intel PentiumIII 700 MHz com 256Mb de memória RAM e 40Gb de disco rígido. A plataforma utilizada foi Linux distribuição SUSE 9.0. Os programas foram executados principalmente num *cluster* com dez microcomputadores Intel PentiumIV 2.8GHz com 1.5Gb de memória RAM e 40Gb de disco rígido funcionando em plataforma Linux distribuição Debian com OpenMosics. A linguagem de programação adotada foi o Fortran, com o compilador Intel Fortran 8.0. Abaixo segue a relação dos softwares utilizados durante a realização do projeto de pesquisa.

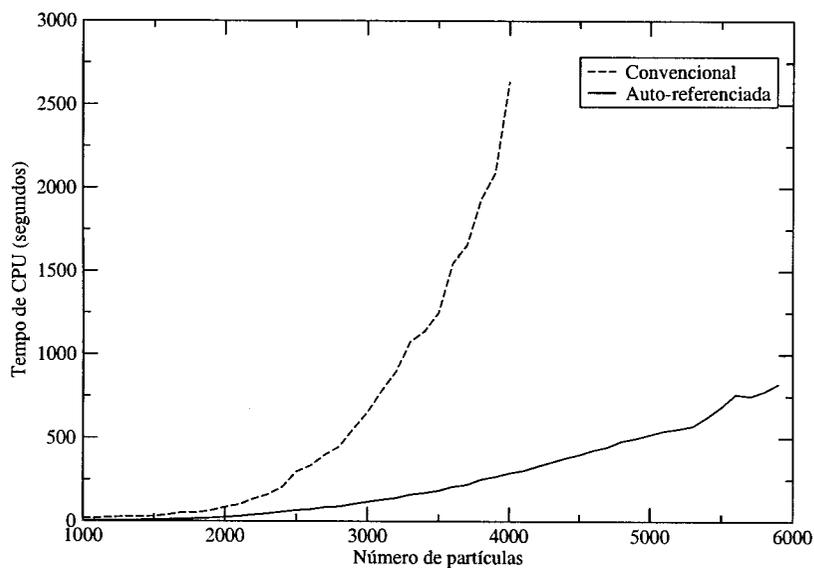
- Scilab - Ambiente para cálculo numérico e construção de gráficos



(a)



(b)



(c)

Figura 6.5: (a) e (b) - Curvas teóricas do desempenho relativo em relação ao tempo de cálculo da lacunaridade convencional e auto-referenciada. (c) Curva numérica do tempo gasto no cálculo da lacunaridade de um DLA convencional para os dois métodos.

- Xmgrace - Construção de gráficos 2D a partir de dados em ASCII
- Latex - Processador de texto

- Gimp - Edição e criação de imagens
- MapleV - Ambiente para cálculos matemáticos simbólicos e construção de gráficos
- Xfig - Criação de imagens

Capítulo 7

Aplicações

A caracterização de formas geométricas tem aplicação direta em análise de imagens [2] e em estudos de dinâmica de crescimento por modelagem matemática e simulação computacional [3, 4]. O desenvolvimento de medidas que quantifiquem os aspectos geométricos destas formas como complexidade e textura, entre outros, são fundamentais para a evolução destas áreas de aplicação, bem como a compreensão de vários fenômenos naturais como aqueles que envolvem crescimento de formas como, por exemplo, estruturas ramificadas tais como neurônios.

Uma destas medidas é conhecida como lacunaridade, inicialmente sugerida para quantificar aspectos como texturas de formas geométricas em complemento à dimensão fractal, que diz respeito a complexidade destas. Existem várias propostas para o cálculo da lacunaridade [12, 13, 14, 9], contudo, quando aplicadas a formas com auto-similaridade restrita a uma certa escala, revelaram algumas arbitrariedades na determinação de alguns de seus parâmetros [15]

A lacunaridade auto-referenciada [15] é uma medida desenvolvida neste trabalho para quantificar o quanto estas formas desviam da invariância translacional, sem exibir as arbitrariedades do procedimento convencional.

Neste capítulo, para verificar o quanto a lacunaridade auto-referenciada é útil

em aplicações, é interessante utilizá-la na caracterização de formas que apresentem graus variados de complexidade e auto-similaridade, uma vez que, vários tipos de formas reais apresentam estas propriedades. Um tipo de forma muito utilizada em estudos de física, que serve para simular vários fenômenos como descarga elétrica [7] e crescimento por agregação de partículas em determinados substratos [16] são os modelos de DLA (*Diffusion-Limited-aggregation*) [6]. Estes modelos geram formas com estrutura de ramificação e auto-similaridade restrita a uma certa escala, que podem modelar crescimento de formas semelhantes a neurônios reais [32], entre outros tipos de estruturas [33]. As seções seguintes mostram algumas aplicações da lacunaridade auto-referenciada em caracterização e classificação de DLAs.

7.1 Caracterização de DLA

Formas geradas por modelos de crescimento por agregação de partículas, conhecidos como DLA (*Diffusion-Limited Aggregation*), são muito importantes no estudo de física por simularem alguns fenômenos naturais como padrões gerados por descarga elétrica [7] e crescimento de neurônios [32]. Denominaremos as formas geradas por este modelo simplesmente DLAs.

São vários os modelos de DLA existentes e escolhemos dois modelos entre estes, denominando-os por conveniência de DLA convencional [6] e DLA potencial [32]. O primeiro deles foi escolhido por ser um modelo bem conhecido e utilizado e também de fácil implementação, o outro, por ser um candidato à modelagem de neurônios reais, pela forma como evolui. Os detalhes sobre cada modelo podem ser encontrados no Capítulo 6. Nas Figuras 6.2 e 6.4, podemos ver alguns representantes de cada classe de DLA.

Foram gerados trinta DLAs do modelo convencional e trinta do modelo potencial, com cinco mil e onze mil partículas respectivamente. O número de partículas foi

escolhido de modo a possuírem aproximadamente o mesmo tamanho para evitar distinção entre estas classes por esta característica. Para caracterizar estas duas classes de DLA aplicamos a lacunaridade auto-referenciada a cada uma delas adquirindo informação sobre o quanto cada DLA desvia de ser uma forma invariante à translação. O quanto a forma sofre este desvio depende da escala em que a observamos, já que a lacunaridade é uma medida multi-escala. Valores baixos de lacunaridade significam maior invariância a translação, o que também pode ser interpretado como maior homogeneidade da forma. A Figura 7.1 mostra as curvas de lacunaridade de dez DLAs de cada classe bem como um de seus representantes.

Note que todos eles têm valor 1 de lacunaridade em $r = 0$, pois neste raio as janelas que percorrem o DLA têm o tamanho de um pixel e cada uma contém apenas um ponto, resultando em variância igual a zero e conseqüentemente lacunaridade igual a um. A posição do máximo da curva indica em que escala o DLA sofre maior desvio de invariância translacional que equivale à região da escala onde é menos homogêneo. Adicionalmente, o ponto onde a curva de lacunaridade passa a ser constante e igual a 1, no gráfico para valores em que $r > 300$, dá informação sobre a dimensão do DLA. Isto acontece porque nesta escala, as janelas que percorrem a DLA capturam-no completamente, e conseqüentemente a variância sobre as janelas é zero e a lacunaridade vale 1.

Na interpretação das curvas consideramos apenas os pontos para os raios r maiores que cinco, pois abaixo desta região as janelas que percorrem o objeto para o cálculo da lacunaridade sofrem distorção devido à grade, desviando muito da forma circular. Além destas características que podemos observar diretamente da curva, existem outros valores que podem ser calculados a partir destas, como por exemplo seu valor médio e variância, que informam o valor da lacunaridade média e o quanto a curva desvia da média. Conhecendo estes valores que caracterizam os DLAs podemos construir um conjunto de dados sobre cada um e utilizá-los por exemplo na

sua classificação.

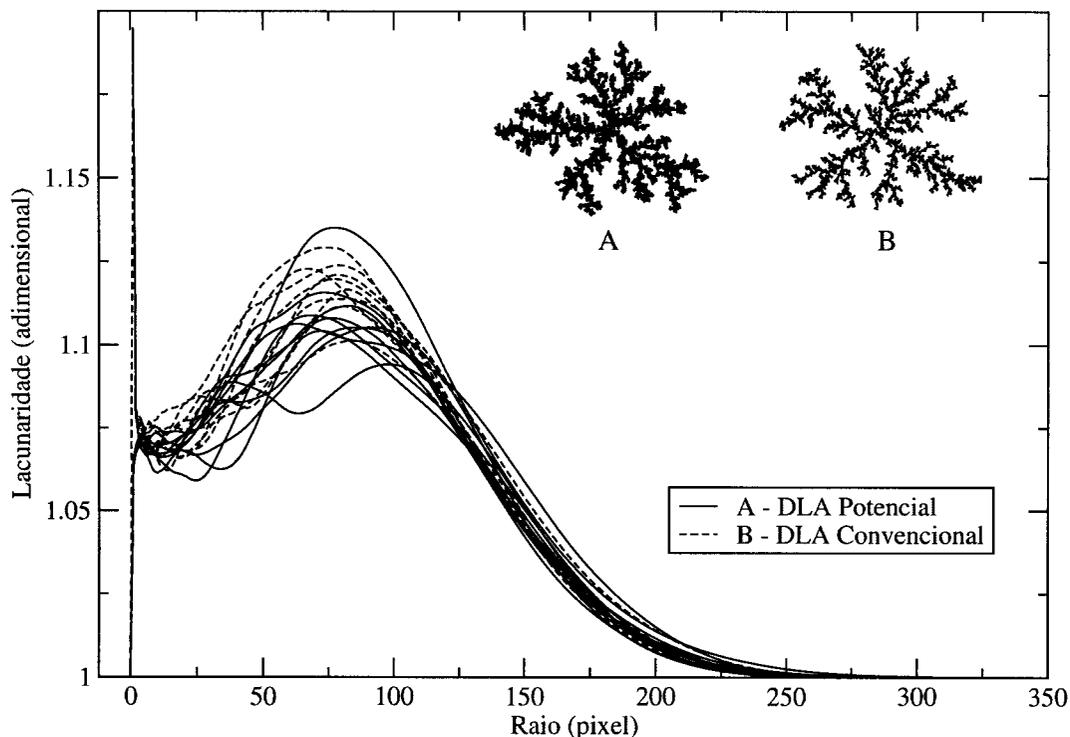


Figura 7.1: Curvas de lacunaridade de dez objetos de cada classe de DLA. No canto superior direito pode-se ver um representante de cada classe de DLA.

Outra aplicação da lacunaridade auto-referenciada pode ser feita na caracterização de DLAs considerando sua dinâmica de crescimento. Uma vez que um modelo de crescimento gera formas semelhantes, é razoável esperar que sua dinâmica de crescimento obedeça a um determinado padrão. Por meio das curvas de lacunaridade de vários estágios de crescimento dos DLAs podemos verificar se estas formas mantêm um comportamento médio sem variações abruptas. A Figura 7.2 mostra as curvas de lacunaridade de nove DLAs da classe convencional em estágios de crescimento diferentes, considerando o número de partículas para construir cada curva. Observe que elas mantêm um comportamento semelhante que caracteriza a evolução destas formas. Conforme aumenta o número de partículas, aumentam os raios dos DLAs e as curvas de lacunaridade interceptam o eixo das abscissas em valores cada vez mais

altos. O comportamento das curvas não é igual ao de uma simples transformação de escala, como mostrada no capítulo 5.1. Ao acompanhar o crescimento de um único DLA convencional, mostrado pela curva tracejada na Figura 7.2, podemos notar que há possibilidade de mudança de propriedades da forma, que causa alteração por exemplo, no valor do máximo de sua curva de lacunaridade, que numa transformação de escala continua o mesmo.

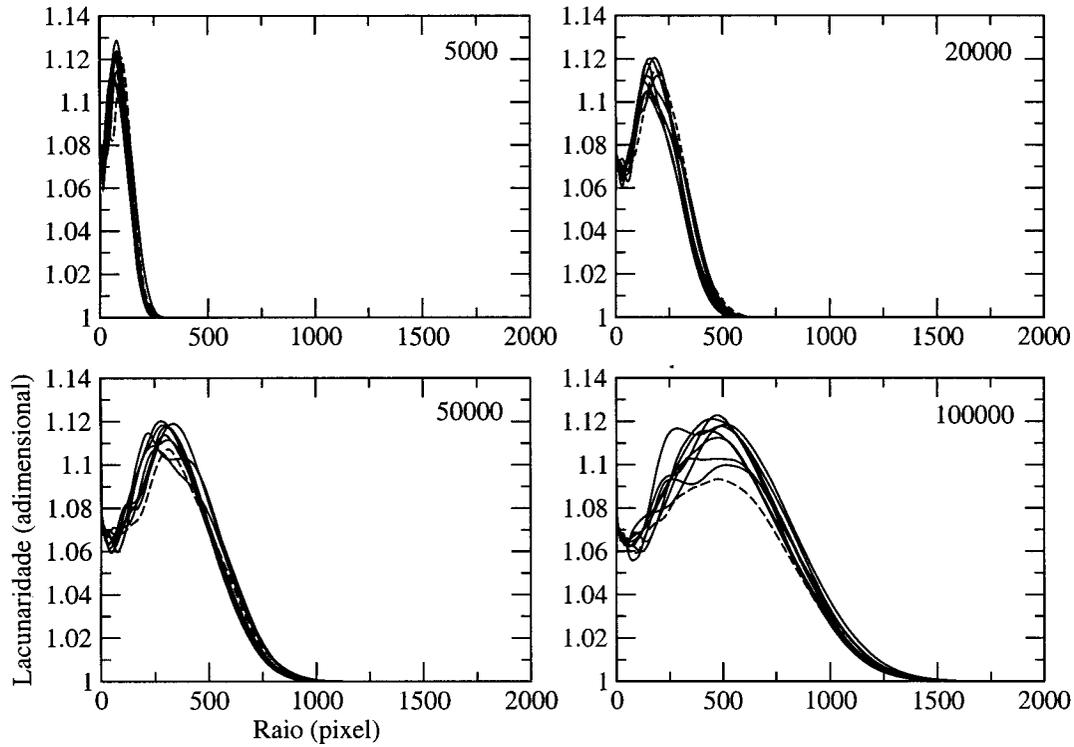


Figura 7.2: Curva de lacunaridade de 9 DLAs do modelo convencional em vários estágios de crescimento com o número de partículas indicados no gráfico.

7.2 Classificação de DLA

A classificação de padrões é uma área importante da computação por ter vasta aplicação. Um exemplo desta aplicação é o diagnóstico automático de doenças feito por meio de imagens [20]. Dado um conjunto de células reais, como os neurônios,

pode-se, por exemplo, classificá-las em saudáveis ou não, caso estas sofram mudança na sua geometria por motivo de alguma doença, como acontece com os neurônios, por exemplo, no mal de Alzheimer. Além das aplicações práticas, classificar células neurais em termos de sua morfologia [25, 37] é útil para a investigação da relação forma-função destas células [18].

A classificação de DLAs é importante como meio de verificar o desempenho da lacunaridade auto-referenciada como classificador de padrões, já que estes objetos apresentam uma certa complexidade e auto-similaridade restrita. Para classificar estes DLAs, o primeiro passo é aplicar a medida no conjunto de DLAs e obter suas curvas. O passo seguinte é coletar os valores da curva que caracterizam o DLA, como valor de máximo e abscissa do máximo. Informações complementares podem ser extraídas das curvas, como a média e variância, entre outras.

Um modo simples de analisar estas características é por meio de um *scatter-plot*, como o da Figura 7.3. Este gráfico do Máximo \times Média mostra como se distribuem os DLAs neste espaço de características. A linha tracejada no gráfico mostra uma possível divisão em duas classes distintas, com cinco elementos de cada modelo classificado como pertencendo ao outro, ou seja, o método comete dez erros em sessenta objetos classificados. Isto mostra que a lacunaridade auto-referenciada é bem sensível à estrutura de ramificação dos DLAs, separando inclusive objetos gerados pelo mesmo modelo. Como estes dois modelos geram estruturas ramificadas semelhantes em escalas mais altas (basta observar seu aspecto visual), a lacunaridade auto-referenciada captaria melhor suas diferenças em escalas mais baixas, contudo, estas escalas, $r \leq 5$ neste caso, estão associadas a erro de discretização imposto pela grade que contém a imagem.

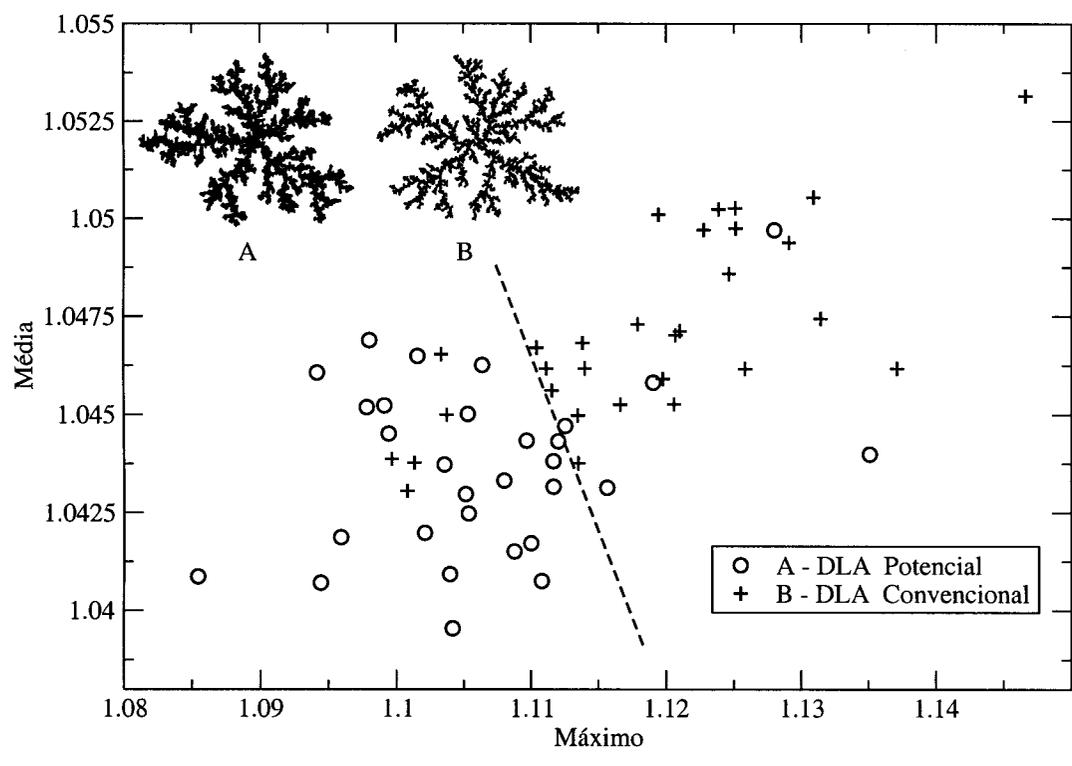


Figura 7.3: Scatter-plot do Máximo \times Média das curvas de lacunaridade das duas classes de DLA. A linha tracejada separa as classes.

Capítulo 8

Conclusão

A caracterização de formas de dimensões finitas é importante em várias áreas de pesquisa por auxiliar a compreensão de fenômenos naturais ou produzidos em laboratório. Para caracterizar estas formas vimos que existem vários tipos de descritores de forma e que cada um deles quantifica um aspecto da forma.

Entre os descritores de forma estudamos um que dá informação sobre a distribuição espacial de elementos da forma, que no caso da imagem digital são seus pixels. Este descritor de forma, denominado lacunaridade, foi proposto por Mandelbrot [8] como complementar à dimensão fractal e mede o quão homogênea é a forma, tendo aplicação em várias áreas de pesquisa tais como ecologia, com aplicação em estudo de dinâmica de populações em um ecossistema [10, 11] e a caracterização de células, como os neurônios [28].

Para calcular a lacunaridade de formas, escolhemos entre algumas propostas [12, 13, 14, 9] aquela que se adaptou melhor ao seguinte critério requerido pela medida de lacunaridade: Formas que se aproximam de invariância translacional devem ter valores numéricos baixos de lacunaridade, e caso contrário, devem possuir valores altos. Nossa escolha também se justifica porque nesta proposta a lacunaridade é dependente de um parâmetro de escala, o que a torna mais informativa. Seu algo-

ritmo é conhecido como *glind-box* [9] e sua implementação é razoavelmente simples. Demominamos este algoritmo lacunaridade convencional.

Apesar do método mostrar-se válido para caracterização de formas, encontramos um parâmetro arbitrário na sua formulação que dificulta sua aplicação em formas de dimensões finitas [15]. Mostramos que este parâmetro é o que definimos como espaço de trabalho, ou seja, a região ao redor da forma utilizada no cálculo da lacunaridade. A escolha do espaço de trabalho influencia no valor da lacunaridade e, quando os objetos são finitos, não existe uma forma única de determiná-lo. Várias áreas de estudo tratam objetos de formas finitas e uma medida de lacunaridade que não dependesse do parâmetro acima mostrar-se-ia mais apropriada para sua caracterização.

Com o intuito de remover esta dependência do espaço de trabalho, referenciamos a medida nos pontos pertencentes ao objeto. Esta mesma sugestão foi feita em [9], contudo fora descartada por meio de uma aplicação muito particular que não explorou os demais aspectos da medida. Esta modificação que fizemos na medida, que donominamos lacunaridade auto-referenciada, removeu a dependência do espaço de trabalho, além de mostrar algumas propriedades superiores em relação à lacunaridade convencional.

Examinamos as seguintes propriedades das duas medidas: Invariância a escala, invariância a rotação, sensibilidade a ruídos e custo computacional. Verificamos que na lacunaridade convencional as propriedades da curva mudam conforme muda a razão entre a dimensão do objeto e espaço de trabalho. Já na lacunaridade auto-referenciada, propriedades como valor de máximo, que é uma característica da forma, se conservam. A curva do objeto que sofre transformação de escala muda apenas pela multiplicação de seu eixo de abscissa pelo fator de transformação de escala, ou seja, se dobramos a área da forma, esse fator vale 2.

A orientação do objeto na grade influencia na curva de lacunaridade convenci-

onal. Esta influência diminui conforme a razão entre a dimensão l do espaço de trabalho e do objeto aumenta, contudo aumenta também o custo computacional do cálculo que é da ordem de $O(l^5)$. Mesmo utilizando janelas circulares, o desvio da curva persiste. Na lacunaridade auto-referenciada, o uso de janelas circulares garante que o desvio seja mínimo, e portando, a orientação do objeto não influencia no valor de sua lacunaridade. A lacunaridade auto-referenciada mostrou-se também menos sensível à presença de ruídos quando comparada à convencional.

A análise de custo computacional, considerando uma implementação equivalente nos dois métodos, revelou que a lacunaridade auto-referenciada é mais eficiente que a convencional. Em nosso exemplo, chega a ser 14 vezes mais rápida, considerando uma forma tal que seu número n de pontos é $n \approx (l/2)^{1.6}$ e $l = 500$, onde l é a maior distância entre dois pontos da forma. Na pior das hipóteses, ainda é cerca de 1.6 vezes mais rápida, considerandado $n \approx (l/2)^2$ e $l = 500$. Adicionalmente, no capítulo 6, mostramos que o custo computacional da lacunaridade convencional tem ordem de grandeza $O(l^5)$ enquanto a lacunaridade auto-referenciada tem, no pior caso, ou seja, forma muito densa, $O(l^5)$.

Conhecendo as propriedades da medida, testamos seu potencial de aplicação em formas geradas por um modelo de crescimento por agregação de partículas denominado DLA, explicado no capítulo 6. Estas formas têm dimensões finitas, apresentando estrutura ramificada e auto-similaridade restrita. A curva de lacunaridade caracteriza bem a distribuição espacial destas formas. Suas curvas de lacunaridade mostram que suas propriedades tornam-se mais semelhantes conforme aumenta a escala da medida. Em escalas mais baixas o desvio das curvas é maior, refletindo a sensibilidade do método em relação à complexidade da estrutura ramificada das formas. Adicionalmente, utilizamos a medida para acompanhar o crescimento dos DLAs. As curvas variam caracterizando as propriedades de crescimento do DLA conforme cresce o número de partículas.

Utilizamos também a lacunaridade para classificar os DLAs. Com valores de média e máximo das curvas de cada DLA, foi possível separar as duas classes de DLAs. Num total de sessenta objetos, dez foram erroneamente classificados. O método mostrou-se bem sensível quanto à estrutura de ramificação dos DLAs.

Com todas estas análises mostramos que o método tem potencial para caracterização de formas geométricas bidimensionais e finitas, sem as arbitrariedades do método convencional. Ilustramos neste trabalho apenas uma aplicação do método e como desenvolvimento futuro, temos a intenção de aplicar este novo procedimento à caracterização da morfologia de células neurais reais, como feito com a lacunaridade convencional em [31]. Uma possibilidade de generalização conceitual do procedimento apresentado neste trabalho de mestrado seria considerar a forma do objeto dilatado como referência para o cálculo da lacunaridade auto-referenciada, porém considerando a distribuição de massa do objeto original.

Apêndice A

Transformação de Moebius

No modelo DLA convencional, explicado no capítulo 6, se a partícula que se deslocava aleatoriamente no plano ultrapassava uma distância H da circunferência r_0 onde surgiu, era reinsertida nesta circunferência de acordo com uma distribuição de Poisson.

A reinsertão da partícula, obedecendo à esta distribuição, pode ser feita por meio de uma transformação de Moebius [39]. Considerando $z = e^{2\pi i\rho}$, onde ρ é um número aleatório no intervalo $[0, 1]$ e $r = 1/(1 + d)$ onde $d = H/r_0$, a transformação se dá de acordo com a seguinte expressão

$$w = \frac{z + r}{1 + rz} e^{i\theta}$$

Quando a partícula que surgiu inicialmente formando um ângulo θ com o eixo das abscissas, conforme Figura 6.1(a), atinge a distância H , determina-se d e sorteia-se um número ρ , calculando assim w . A coordenada onde a partícula será reinsertida é $x = r_0 \times \Re\{w\}$ e $y = r_0 \times \Im\{w\}$.

Apêndice B

Lacunaridade analítica da cruz

O cálculo analítico da lacunaridade da cruz k é análogo ao do quadrado apresentado na seção 4.2. Para calcular a lacunaridade da cruz definimos a função $A(x, y, r)$ que dá o valor da área do objeto dentro de uma janela de lado r em função de sua posição (x, y) na cruz. Existem sete intervalos para os raios das janelas a serem considerados, e em cada intervalo, dividimos a cruz em regiões e para cada região definimos uma função $A_i(x, y, r)$. A Figura B.1 mostra o primeiro intervalo considerado no cálculo da lacunaridade da cruz, as dimensões $L1$ e $L2$ e as regiões consideradas neste cálculo. Na Figura B.1 constam somente as regiões i não repetidas, porém no cálculo consideramos todas as possíveis regiões j . Mostraremos com mais detalhe o cálculo do primeiro intervalo. Para os demais intervalos mostraremos os $A_i(x, y, r)$, $\mu(r)$ e $\sigma^2(r)$. As Figuras B.2 a B.7 apresentam as divisões em regiões para os demais intervalos numerados de 2 à 7 em cada uma. De acordo com a expressão da lacunaridade $\Lambda(r) = (\sigma^2(r)/\mu^2(r)) + 1$ onde

$$\mu(r) = \frac{\int_k \sum A_j(x, y, r) dk}{\int_k dk}$$

e

$$\sigma^2(r) = \frac{\int_k [\sum A_j(x, y, r) - \mu(r)]^2 dk}{\int_k dk}$$

onde $\int_k dk$ é o número total de pontos da cruz k , que é numericamente igual à sua área total $A_k = 4L_1L_2 + L_2^2$.

Intervalo $0 \leq r < \frac{L_2}{2}$

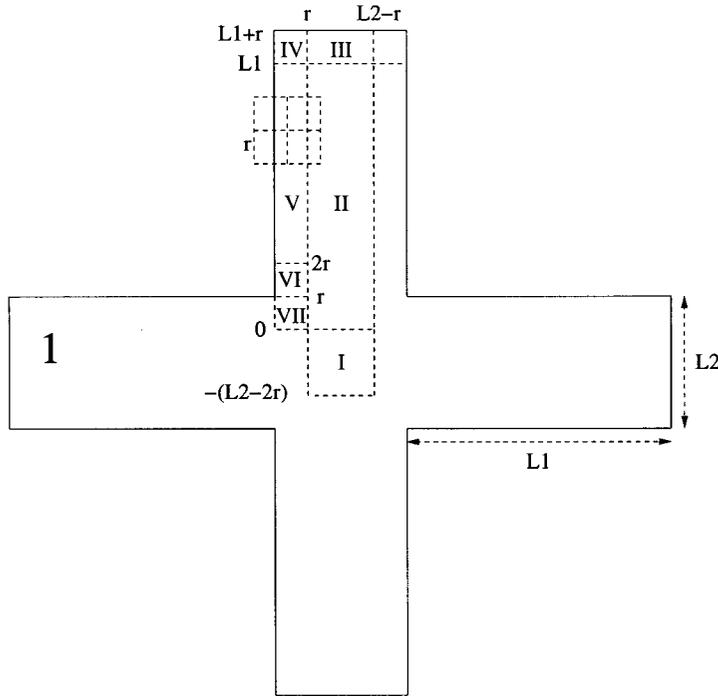


Figura B.1: Cruz dividida em regiões no primeiro intervalo para o cálculo da lacunaridade

$$\begin{aligned}
 A_I(x, y, r) &= 4r^2 \quad x = [r, L_2 - r], \quad y = [-(L_2 - 2r), 0] \\
 A_{II}(x, y, r) &= 4r^2 \quad x = [r, L_2 - r], \quad y = [0, L_1] \\
 A_{III}(x, y, r) &= (2r + L_1 - y)2r \quad x = [r, L_2 - r], \quad y = [L_1, L_1 + r] \\
 A_{IV}(x, y, r) &= (r + x)(2r + L_1 - y) \quad x = [0, r], \quad y = [L_1, L_1 + r] \\
 A_V(x, y, r) &= (r + x)(2r) \quad x = [0, r], \quad y = [2r, L_1] \\
 A_{VI}(x, y, r) &= 4r^2 - y(r - x) \quad x = [0, r], \quad y = [r, 2r] \\
 A_{VII}(x, y, r) &= 4r^2 - y(r - x) \quad x = [0, r], \quad y = [0, r]
 \end{aligned}$$

Calculando a média

$$\mu_I(r) = \frac{\int_k (A_I + 4A_{II} + 4A_{III} + 8A_{IV} + 8A_V + 8A_{VI} + 4A_{VII}) dk}{A_k}$$

$$= \frac{r^2(4L2^2 - 4rL2 + 3r^2 + 16L1L2 - 8rL1)}{L2(4L1 + L2)}$$

No nosso exemplo, $L1 = 100$ e $L2 = 50$. Para simplificar as expressões podemos fazer $L1 = 2L$ e $L2 = L$. Assim a expressão acima fica

$$\mu_I(r) = \frac{r^2(36L^2 - 20Lr + 3r^2)}{9L^2}$$

De modo análogo calculamos $\sigma^2(r)$

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(r) &= \frac{\int_k ([A_I - \mu_I(L1, L2, r)]^2 + \dots + [4A_{VII} - \mu_I(L1, L2, r)]^2) dk}{A_k} \\ &= -\frac{1}{9L2^2(4L1 + L2)^2} (-384L2L1^2 + 576rL1^2 - 432r^2L1 - 288L1L2^2 \\ &\quad + 496rL1L2 - 216L2r^2 - 48L2^3 + 81r^3 + 124rL2^2)r^5 \end{aligned}$$

Simplificando como feito anteriormente

$$\sigma_I^2(r) = -\frac{r^5(9r^3 - 120Lr^2 + 380rL^2 - 240L^3)}{81L^4}$$

A expressão da lacunaridade neste intervalo é

$$\Lambda_I(r) = \frac{4L2(4L1 + L2)(-120rL1 + 144L1L2 - 60rL2 + 36L2^2 + 59r^2)}{9(4L2^2 - 4rL2 + 3r^2 + 16L1L2 - 8rL1)^2}$$

simplificando

$$\Lambda_I(r) = \frac{4L^2(-300Lr + 59r^2 + 324L^2)}{(36L^2 - 20Lr + 3r^2)^2}$$

Intervalo $\frac{L2}{2} \leq r < L2$

$$A_I(x, y, r) = 2(2rL2) - L2^2 \quad x = [L2 - r, r], y = [-(L2 + 2r), 0]$$

$$A_{II}(x, y, r) = (2r + y - L2)L2 + (L2 - y)2r \quad x = [L2 - r, r], \quad y = [0, L2]$$

$$A_{III}(x, y, r) = L2 \times 2r \quad x = [L2 - r, r], \quad y = [L2, L1 + L2 - 2r]$$

$$A_{IV}(x, y, r) = L2(L1 + L2 - y) \quad x = [L2 - r, r],$$

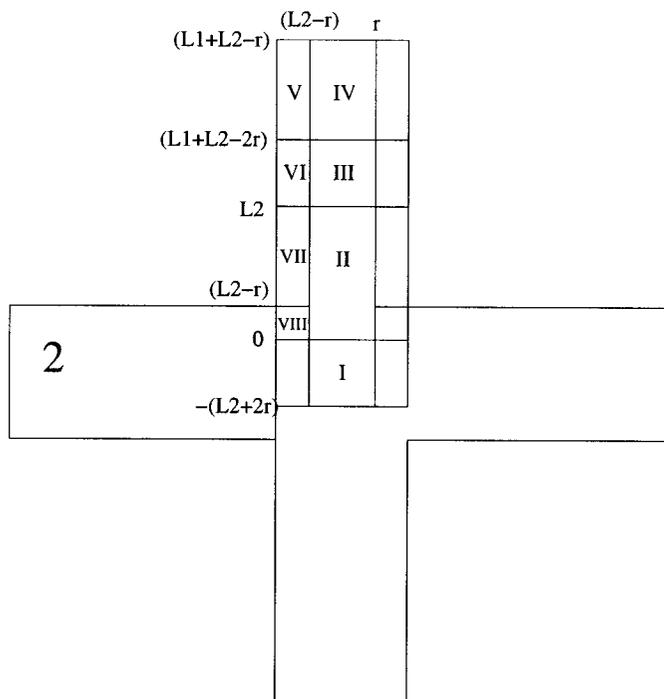


Figura B.2: Regiões da cruz no intervalo $\frac{L2}{2} \leq r < L2$

$$y = [L1 + L2 - 2r, L1 + L2 - r]$$

$$A_V(x, y, r) = (L1 + L2 - y)(r + x) \quad x = [0, L2 - r],$$

$$y = [L1 + L2 - 2r, L1 + L2 - r]$$

$$A_{VI}(x, y, r) = 2r(r + x) \quad x = [0, L2 - r], \quad y = [L2, L1 + L2 - 2r]$$

$$A_{VII}(x, y, r) = 2r(r + x) + (r - x)(L2 - y) \quad x = [0, L2 - r], y = [L2 - r, L2]$$

$$A_{VIII}(x, y, r) = 4r^2 - (2r + y - L2)(r - x) \quad x = [0, L2 - r], \quad y = [0, L2 - r]$$

$$\mu_{II}(r) = \frac{r^2(-20rL + 36L^2 + 3r^2)}{9L^2}$$

$$\sigma_{II}^2(r) = \frac{1}{81L^4}(120r^7L - 12L^7r - 9r^8 + 1248r^5L^3 + 452L^5r^3 + L^8 - 36L^6r^2 - 604r^6L^2 - 1128L^4r^4)$$

$$\Lambda_{II}(r) = \frac{L^2(-12L^5r - 192r^5L + 452L^3r^3 + L^6 - 36L^4r^2 + 12r^6 + 168r^4L^2)}{r^4(-20rL + 36L^2 + 3r^2)^2}$$

Intervalo $L2 \leq r < \frac{L1+L2}{2}$

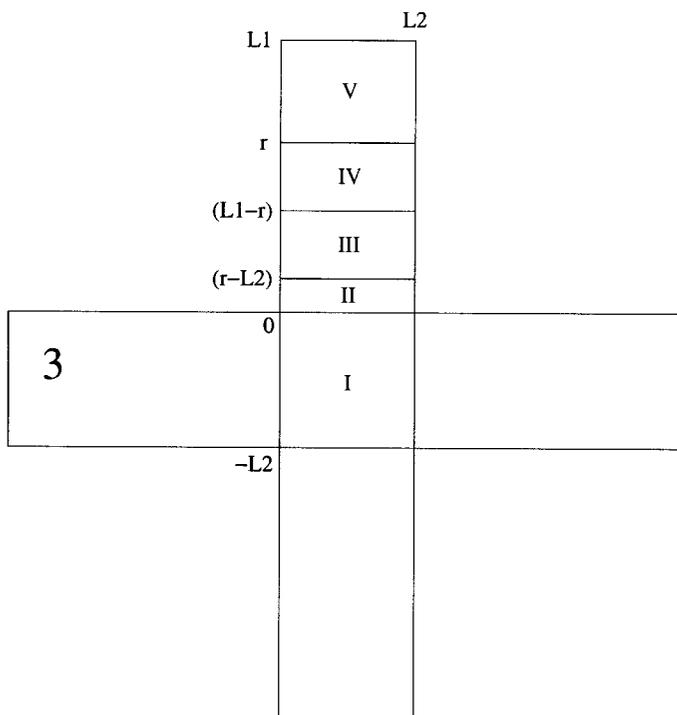


Figura B.3: Regiões da cruz no intervalo $L2 \leq r < \frac{L1+L2}{2}$

$$A_I(x, y, r) = 2L2(2r) - L2^2 \quad x = [0, L2], \quad y = [-L2, 0]$$

$$A_{II}(x, y, r) = 4rL2 - L2^2 \quad x = [0, L2], \quad y = [0, r - L2]$$

$$A_{III}(x, y, r) = L2(r + y) + (r - y)2r \quad x = [0, L2], \quad y = [r - L2, L1 - r]$$

$$A_{IV}(x, y, r) = (L1L2) + (r - y)2r \quad x = [0, L2], \quad y = [L1 - r, r]$$

$$A_V(x, y, r) = (L1 - (y - r))L2 \quad x = [0, L2], \quad y = [r, L1]$$

$$\mu_{III}(r) = \frac{4L}{3}rL + \frac{1}{9}L^2 + \frac{2}{3}r^2$$

$$\sigma_{III}^2(r) = -\frac{76}{27}r^4 - \frac{124}{9}r^2L^2 + \frac{100}{9}Lr^3 + \frac{196}{27}L^3r - \frac{112}{81}L^4$$

$$\Lambda_{III}(r) = -3 \frac{64r^4 + 320r^2L^2 - 348Lr^3 - 204L^3r + 37L^4}{(12rL + L^2 + 6r^2)^2}$$

Intervalo $\frac{L1+L2}{2} \leq r < L1$

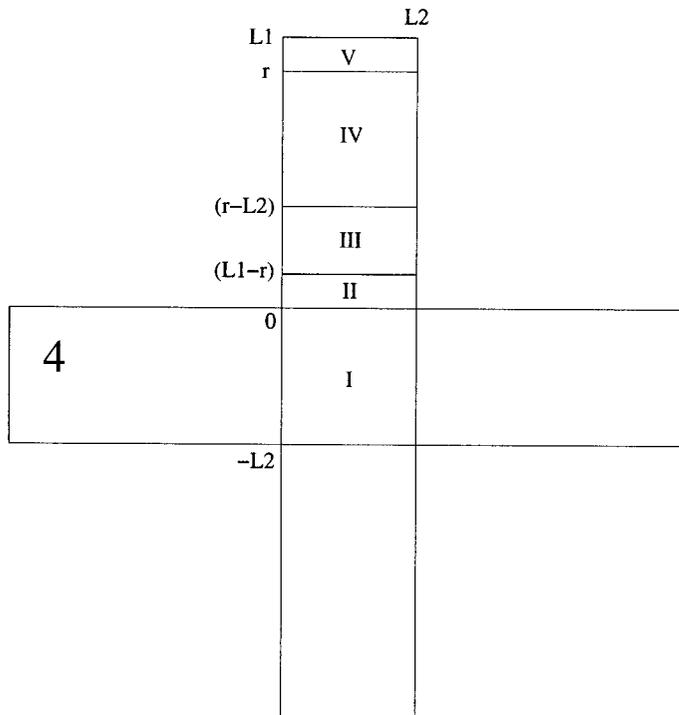


Figura B.4: Regiões da cruz no intervalo $\frac{(L1+L2)}{2} \leq r < L1$

$$A_I(x, y, r) = 2L2(2r) - L2^2 \quad x = [0, L2], \quad y = [-L2, 0]$$

$$A_{II}(x, y, r) = 2rL2 + (r - y - L2)L2 + (y + r)L2 \quad x = [0, L2], \quad y = [0, L1 - r]$$

$$A_{III}(x, y, r) = L1L2 + 2rL2 + (r - y - L2)L2 \quad x = [0, L2], \quad y = [L1 - r, r - L2]$$

$$A_{IV}(x, y, r) = L1L2 + (r - y)2r \quad x = [0, L2], \quad y = [r - L2, r]$$

$$A_V(x, y, r) = (L1 - (y - r))L2 \quad x = [0, L2], \quad y = [r, L1]$$

$$\mu_{IV}(r) = \frac{4L}{3}rL + \frac{1}{9}L^2 + \frac{2}{3}r^2$$

$$\sigma_{IV}^2(r) = -\frac{4}{9}r^4 + \frac{68}{9}r^2L^2 - \frac{20}{27}Lr^3 - \frac{236}{27}L^3r + \frac{212}{81}L^4$$

$$\Lambda_{IV}(r) = 3 \frac{L(256r^2L + 28r^3 - 228rL^2 + 71L^3)}{(12rL + L^2 + 6r^2)^2}$$

Intervalo $L1 \leq r < L1 + \frac{L2}{2}$

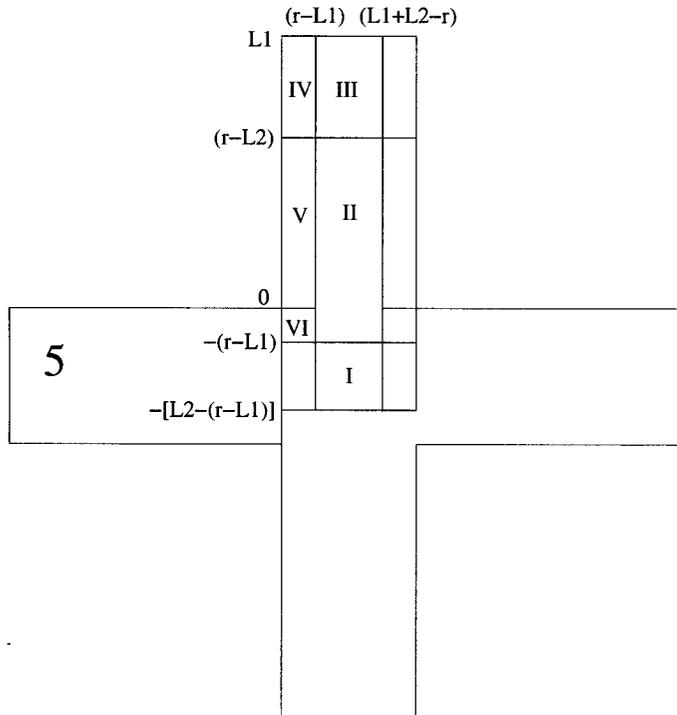


Figura B.5: Regiões da cruz no intervalo $L1 \leq r < L1 + \frac{L2}{2}$

$$A_I(x, y, r) = 2(2rL2) - L2^2 \quad x = [r - L1, L1 + L2 - r],$$

$$y = [-L1 - L2 + r, -r + L1]$$

$$A_{II}(x, y, r) = L1L2 + 2rL2 + (r - y - L2)L2 \quad x = [r - L1, L2 + L1 - r],$$

$$y = [-r + L1, r - L2]$$

$$A_{III}(x, y, r) = L1L2 + (r - y)2r \quad x = [r - L1, L2 + L1 - r], \quad y = [r - L2, L1]$$

$$A_{IV}(x, y, r) = L1L2 + (r - y)(r + x + L1) \quad x = [0, r - L1], \quad y = [r - L2, L1]$$

$$A_V(x, y, r) = L1L2 + (r + x + L1)L2 + (r - y - L2)L2 \quad x = [0, r - L1], \\ y = [0, r - L2]$$

$$A_{VI}(x, y, r) = L1L2 + (r + x + L1)L2 + (r - y - L2)L2 \quad x = [0, r - L1], \\ y = [-(r - L1), 0]$$

$$\mu_V(r) = \frac{-100 L^3 r + 90 r^2 L^2 - 24 L r^3 + 2 r^4 + 49 L^4}{9 L^2}$$

$$\sigma_V^2(r) = -\frac{2}{81 L^4} (398 L^8 + 6704 L^6 r^2 + 5717 L^4 r^4 + 448 r^6 L^2 \\ - 2144 r^5 L^3 - 8516 L^5 r^3 - 2542 L^7 r - 48 r^7 L + 2 r^8)$$

$$\Lambda_V(r) = \frac{L^2 (1605 L^6 + 5412 L^4 r^2 + 1662 r^4 L^2 + 40 r^6 - 432 r^5 L - 3320 L^3 r^3 - 4716 L^5 r)}{(-100 L^3 r + 90 r^2 L^2 - 24 L r^3 + 2 r^4 + 49 L^4)^2}$$

Intervalo $L1 + \frac{L2}{2} \leq r < L1 + L2$

$$A_I(x, y, r) = 4L1L2 + L2^2 \quad x = [L1 + L2 - r, r - L1], \\ y = [-(r - L1), -(L1 + L2 - r)]$$

$$A_{II}(x, y, r) = L2^2 + 3L1L2 + (r - y - L2)L2 \quad x = [-(L2 + L1 - r), r - L1], \\ y = [-(L1 + L2 - r), r - L2]$$

$$A_{III}(x, y, r) = L1L2 + (r - y)(2L1 + L2) \quad x = [L2 + L1 - r, r - L1], \\ y = [r - L2, L1]$$

$$A_{IV}(x, y, r) = L1L2 + (L1 + r + x)(r - y) \quad x = [0, L2 + L1 - r], \quad y = [r - L2, L1]$$

$$A_V(x, y, r) = L1L2 + (r - y - L2)L2 + (L1 + r + x)L2 \quad x = [0, L2 + L1 - r],$$

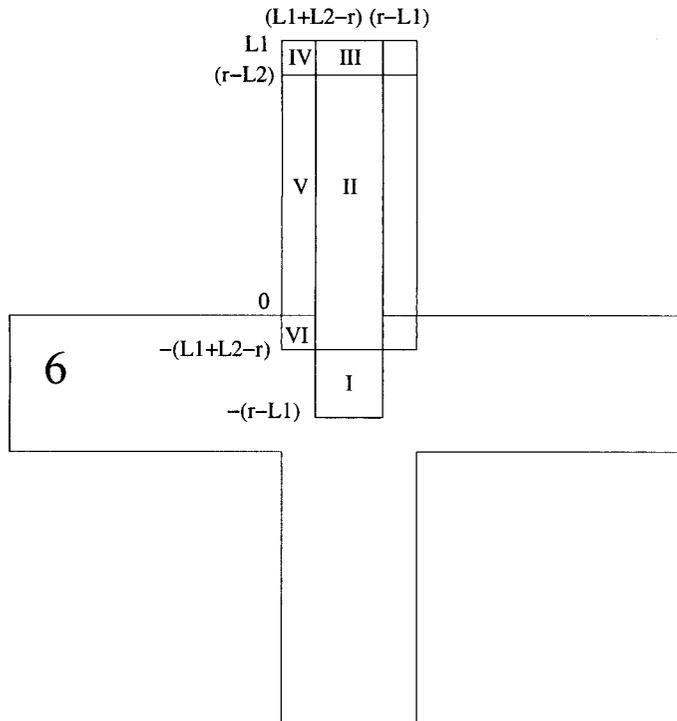


Figura B.6: Regiões da cruz no intervalo $L1 + \frac{L2}{2} \leq r < L1 + L2$

$$y = [0, r - L2]$$

$$A_{VI}(x, y, r) = L1L2 + (r - y - L2)L2 + (L1 + r + x)L2 \quad x = [0, L2 + L1 - r],$$

$$y = [-(L1 + L2 - r), 0]$$

$$\mu_{VI}(r) = \frac{-100 L^3 r + 90 r^2 L^2 - 24 L r^3 + 2 r^4 + 49 L^4}{9 L^2}$$

$$\sigma_{VI}^2(r) = -\frac{2}{81 L^4} (11804 L^6 r^2 + 6881 L^4 r^4 + 464 r^6 L^2 - 2360 r^5 L^3 - 11766 L^5 r^3 - 7042 L^7 r - 48 r^7 L + 2 r^8 + 2273 L^8)$$

$$\Lambda_{VI}(r) = -\frac{L^2 (4788 L^4 r^2 + 666 r^4 L^2 - 8 r^6 - 3180 L^3 r^3 - 4284 L^5 r + 2145 L^6)}{(-100 L^3 r + 90 r^2 L^2 - 24 L r^3 + 2 r^4 + 49 L^4)^2}$$

Intervalo $L1 + L2 \leq r < 2L1 + L2$

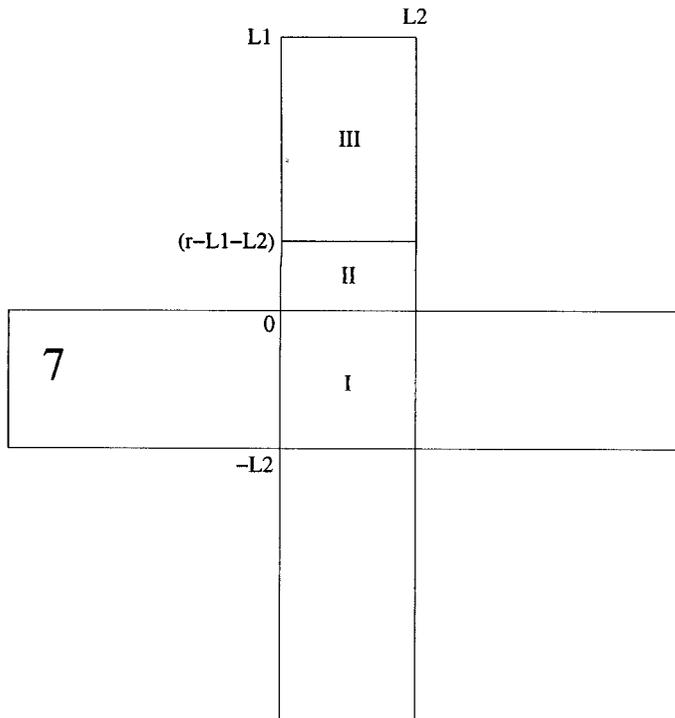


Figura B.7: Regiões da cruz no intervalo $L1 + L2 \leq r < 2L1 + L2$

$$A_I(x, y, r) = 4L1L2 + L2^2 \quad x = [0, L2], \quad y = [-L2, 0]$$

$$A_{II}(x, y, r) = 4L1L2 + L2^2 \quad x = [0, L2], \quad y = [0, r - L1 - L2]$$

$$A_{III}(x, y, r) = 3L1L2 + L2^2 + (r - y - L2)L2 \quad x = [0, L2], \quad y = [r - L1 - L2, L1]$$

$$\mu_{VII}(r) = \frac{31}{9} L^2 + \frac{20}{9} rL - \frac{2}{9} r^2$$

$$\sigma_{VII}^2(r) = -\frac{4(2L - r)(5L - r)^3}{81}$$

$$\Lambda_{VII}(r) = -\frac{3L(13L^3 - 780rL^2 + 4r^3 + 48r^2L)}{(31L^2 + 20rL - 2r^2)^2}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa M. S., Costa L. da F., Bernardes E. S., Ramakers G., and van Pelt J. Characterizing neuromorphologic alterations with additive shape functionals. *Eur. Phys. J. B*, 37:109–115, 2004.
- [2] Costa L. da F. and Cesar-Jr. R.M. *CRC Press, 2001.
- [3] Costa L. da F. How do neurons grow? In *World Congress on Neuroinformatics/Austria*, pages 386–394, 2001.
- [4] Andréa Gomes Campos Bianchi. *Caracterização, modelagem e simulação matemático-computacional da dinâmica do crescimento e conexões de células neurais*. PhD thesis, Universidade de São Paulo - Instituto de Física de São Carlos, 2003.
- [5] Costa L. da F., Bianchi A. G. C., Santos M. F., and Hamassaki-Britto D. E. Inferring shape evolution. *Pattern Recognition Letters*, 24(7):1005–1014, 2003.
- [6] Jr. Witten T. A. and Sander L. M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 47(19):1400, 1981.
- [7] Niemeyer L., Pietronero L., and Wiesmann H. J. Fractal dimension of dielectric breakdown. *Phys. Rev. Lett.*, 52(12):1033, 1984.
- [8] Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, 1983.

- [9] Allain C. and Cloitre M. Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets. *Phys. Rev. A*, 44(6):3552, 1991.
- [10] Plotnick R. E., Gardner R. H., and O'Neil R. V. Lacunarity indices as measures of landscape texture. *Landscape Ecology*, 8(3):201, 1993.
- [11] Plotnick R. E., Gardner R. H., Hargrove W. W., Prestegard K., and Perlmutter M. Lacunarity analysis: A general technique for the analysis of spatial patterns. *Phys. Rev. E.*, 53(5):5461, 1996.
- [12] Gefen Y., Aharony A., and Mandelbrot B. B. Phase transitions in fractals:iii. infinitely ramified lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 17:1277–1289, 1984.
- [13] Lin B. and Yang Z. R. A suggested lacunarity expression for sierpinski carpets. *J. Phys. A.*, 19:49, 1986).
- [14] Gefen Y., Maier Y., Mandelbrot B. B., and Aharony A. Geometric implementation of hipercubic lattices whith noninteger dimensionality by use of low lacunarity fractal lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 50(3):145, 1983.
- [15] Rodrigues E. P., Barbosa M. S., and Costa L. da F. A self-referred approach do lacunarity. *submetido*, 2004.
- [16] Matsushita M., Sano M., Hayakawa Y., Honjo H., and Sawada Y. Fractal structures of zinc metal leaves grown by electrodeposition. *Phys. Rev. Lett.*, 53(3):286–289, 1984.
- [17] Gazit Y., Berk D. A., Leunig M., Baxter L. T., and Jain R. K. Scale-invariant behavior and vascular network formation in normal and tumor tissue. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2428–2431, 1995.
- [18] Costa L. da F. On neural shape and function. In *World Congress on Neuroinformatics/Austria*, pages 397–411, 2001.

- [19] Einstein A. J., Wu H. S., and Gil J. Self-affinity and lacunarity of chromatin texture in benign and malignant breast epithelial cell nuclei. *Phys. Rev. Lett.*, (2):397–400, 1998.
- [20] Sabino D. M. U., Costa L. da F., Rizzatti E. G., and Zago M. A. A texture approach to leukocyte recognition. *Real-Time Imaging*, 10(4):205–216, 2004.
- [21] Gonzalez R. C. and Woods R. E. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [22] Costa L. da F., Barbosa M. S., Manoel E. T. M., Streicher J., and Muller G. B. Mathematical characterization of three-dimensional gene expression patterns. *Bioinformatics*, 20(11):1653–1662, 2004.
- [23] Renata Antônia Tadeu Arantes. *Análise e classificação de formas biológicas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo - Instituto de Física de São Carlos, 2004.
- [24] Takemura C. M., Cesar Jr. R. M., Arantes R. A. T., Costa L. da F., Hingst-Zaher E., Bonato V., and Reis S. F. Morphometrical data analysis using wavelets. *Journal of Real-Time Imaging*, 10(4):239–250, 2004.
- [25] Costa L. da F. and Velte J. T. Automatic characterization and classification of ganglion cells from the salamander retina. *J. Comp. Neurology*, (404):33–51, 1999.
- [26] Michielsen K. and De Raedt H. Integral-geometry morphological image analysis. *Physics Reports*, 347:461–538, 2001.
- [27] Barbosa M. S. and Costa L. da F. Bernardes E. de S. Neuromorphometric characterization with shape functionals. *Phys. Rev. E*, 67, 2003.

- [28] Smith T. G., Lange G. D., and Marks W. B. Fractal methods and results in cellular morphology - dimensions, lacunarity and multifractals. *J. Neurosci. Methods*, 69:133, 1996.
- [29] Einstein A. J., Wu H.-S., Sanchez M., and Gil J. Fractal characterization of chromatin appearance for diagnosis in breast cytology. *J. Pathol.*, 185:366–381, 1998.
- [30] Armatas G. S., Kolonia K. M., and Pomonis P. J. Morphometry of porous solids: Lacunarity, fractal dimensions, connectivity, and some similarities with neurons. *Langmuir*, 18:10421–10429, 2002.
- [31] Costa L. da F., Rocha F., and Lima S. M. A. Statistical mechanics characterization of neuronal mosaics. *Cond. Mat.*, 2004.
- [32] Caserta F., Stanley H. E., Eldred W. D., Daccord G., Hausman R. E., and Nittmann J. Physical mechanisms underlying neurite outgrowth: A quantitative analysis of neural shape. *Phys. Rev. Lett.*, 64(1):95–98, 1990.
- [33] Daccord G. Chemical dissolution of a porous medium by a reactive fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 58(5):479–482, 1987.
- [34] Costa L. da F., Barbosa M. S., Coupez V., and Stauffer D. Morphological hopfield networks. *Brain and Mind*, 4:91–105, 2003.
- [35] Costa L. da F. Particle systems analysis by using skeletonization and exact dilations. *Part. Part. Syst. Charact.*, 16:273–277, 1999.
- [36] Manoel E. T. M., Costa L. da F., Streicher J., and Müller G. B. Multiscale fractal characterization of three-dimensional gene expression data. In *Proceedings of Sibgrapi 2002 - XV Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, volume 1, pages 269–274, Brazil, 2002.

- [37] Costa L. da F., Manoel E. T. M., Faucereau F., Chelly J., Pelt V. J., and Ramakers G. A shape analysis framework for neuromorphometry. *Comput. Neural Syst.*, 13:283–310, 2002.
- [38] Daccord G. and Nittmann J. Radial viscous finger and diffusion-limited aggregation: Fractal dimension and growth sites. *Phys. Rev. Lett*, 56(4):336–339, 1986.
- [39] Kaufman H., Vespignani A., Mandelbrot B. B., and Woog L. Parallel diffusion-limited aggregation. *Phys. Rev. E*, 52(5):5602–5609, 1995.