

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

Rafael Rodrigues Castilho

**Um estudo da compatibilidade dos dados de Gamma Ray
Bursts com as teorias de violação da invariância de Lorentz**

São Carlos

2023

Rafael Rodrigues Castilho

Um estudo da compatibilidade dos dados de Gamma Ray Bursts com as teorias de violação da invariância de Lorentz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Física Básica

Orientador: Prof. Dr. Humberto Martínez Huerta

Versão corrigida

(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

São Carlos

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Castilho, Rafael Rodrigues

Um estudo da compatibilidade dos dados de Gamma Ray Bursts com as teorias de violação da invariância de Lorentz / Rafael Rodrigues Castilho; orientador Humberto Martínez Huerta - versão corrigida -- São Carlos, 2023.

60 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Física Básica) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Violação da Invariância de Lorentz. 2. Raios gama. 3. GRB. 4. Cosmologia. 5. Modelo padrão estendido. I. Huerta, Humberto Martínez, orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

À Lisys, minha esposa, pelo apoio incondicional.

Ao Prof Dr Humberto Martínez Huerta, meu orientador, pela amizade, os ensinamentos, os debates e a paciência, que muito me ensinou e contribuiu para meu amadurecimento.

Ao Instituto de Física de São Carlos, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) Código de Financiamento 001.

RESUMO

CASTILHO, R. R. **Um estudo da compatibilidade dos dados de Gamma Ray Bursts com as teorias de violação da invariância de Lorentz.** 2023. 60p.

Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Observatórios modernos nos permitiram avanços no estudo da astrofísica de partículas, devido a suas grandes precisões nas medidas e a possibilidade de estudar um grande número de fontes e de eventos. Graças a tais avanços, hoje é possível utilizar a astrofísica de partículas para testar física fundamental e seus limites de validade. Alguns estudos recentes dedicados a procura de teorias unificadoras, como por exemplo teorias quânticas da gravidade, são compatíveis com a quebra da invariância de Lorentz (LIV). Embora os sinais de LIV são esperados para serem pequenos e ocorram em altas energias, nós podemos utilizar da astrofísica de partículas para determinar limites de validade dadas as altíssimas energias e grandes distâncias envolvidas. Em nosso projeto realizamos um estudo do tempo de atraso de fótons em função da energia devido a quebra da invariância de Lorentz. Nós primeiramente fizemos um estudo teórico do Modelo Padrão Estendido (SME), a fim de compreender como a quebra de invariância de Lorentz pode surgir na teoria; Deduzimos a relação de dispersão modificada, que neste regime implica que fótons com altas energias possuem velocidades diferentes devido a modificações na sua relação de dispersão. Portanto, fótons emitidos simultaneamente em uma fonte astrofísica devem chegar à Terra em tempos diferentes; Também deduzimos a função que descreve esta diferença no tempo considerando efeitos cosmológicos. Em seguida, nós fizemos um estudo das fontes utilizadas neste trabalho, os Gamma Ray Bursts (GRBs), a fim entender seu comportamento e propriedades físicas, como seus diferentes tipos e mecanismos de emissão. Nós propomos um novo reescalonamento dos dados experimentais para que seja possível fazer uma análise estatística utilizando múltiplas fontes simultaneamente. Posteriormente nós selecionamos e coletamos um conjunto que contém 57 fótons de 14 GRBs. O conjunto que consiste em todos os fótons detectados pelo Telescópio Espacial Fermi de Raios Gama entre os anos de 2008 e 2020, cuja energia emitida é maior que 10 GeV e que foram detectados dentro de um intervalo de tempo, que depende do Redshift, após o *trigger*. A procura pelos GRBs com redshift conhecidos foi feita usando a base de dados do Observatório de Neutrino IceCube. Usamos a base de dados do FERMI para obter os parâmetros observacionais dos fótons individuais. Em seguida, realizamos uma análise estatística a fim de constatar a compatibilidade com o modelo de LIV. E, propomos, baseados nas propriedades dos GRBs, um conjunto de funções com objetivo de modelar a diferença no tempo de chegada como atrasos intrínsecos na fonte, não simultaneidade na emissão, e com isto, determinar se há ou não compatibilidade com o modelo de LIV.

Em nossas análises, nós demonstramos que o comportamento dos fótons depende do cutoff escolhido para a energia. Fótons mais energéticos tiveram um comportamento mais compatível com LIV e fótons menos energéticos tiveram um comportamento mais compatível com um modelo de delay intrínseco, levando a existência duas regiões com comportamentos distintos. Portanto, podemos concluir que os efeitos LIV, caso ocorram, ocorrem com fótons de altíssima energia; Para fótons menos energéticos seus efeitos são não detectáveis pelos atuais observatórios e provavelmente o atraso observado nos fótons é devido aos mecanismos de emissão.

Palavras-chave: Violação da invariância de Lorentz. Raios gama. GRB. Cosmologia. Modelo padrão estendido.

ABSTRACT

CASTILHO, R. R. **A Study of the compatibility of Gamma Ray Burst data with Lorentz Invariance Violation theories.** 2023. 60p. Dissertation (Master in Science) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Modern observatories have allowed us to make advances in the study of particle astrophysics, thanks to their high accuracy in measurements and the possibility of studying a large number of sources and events. Due to these advances, it is now possible to use particle astrophysics to test fundamental physics and determine its limits of validity. Some recent studies dedicated to the search for unifying theories, such as quantum gravity theories, are compatible with Lorentz invariance violation (LIV). Although LIV signals are expected to be small and occur at high energies, we can use particle astrophysics to determine the limits of validity, given the very high energies and large distances involved. In our project, we conducted a study of the photon time delay as a function of energy due to Lorentz invariance violation. We first carried out a theoretical study of the Standard Model Extension (SME) to understand how Lorentz invariance violation can arise in theory. We deduced the modified dispersion relation, which implies that photons with high energies have different velocities due to modifications in their dispersion relation. Thus, photons emitted simultaneously in an astrophysical source must arrive at Earth at different times. We derived the function describing this difference in time by considering cosmological effects. Next, we studied the sources used in this work, Gamma Ray Bursts (GRBs), to understand their behavior and physical properties, such as their different types and emission mechanisms. Then we proposed a new rescaling of the experimental data so that it is possible to perform a statistical analysis using multiple sources simultaneously. Subsequently, we selected and collected a set containing 57 photons from 14 GRBs. This set was selected by us and consists of all photons detected by the Fermi Space Telescope between the years 2008 and 2020, with emitted energy greater than 10 GeV, and detected within a time interval that depends on the redshift. The search for GRBs with known redshift was done using the Icecube database. With the GRBs in hand, we used the FERMI database to obtain the observational parameters of the individual photons. Then, we performed a statistical analysis to verify the compatibility with the LIV model. Next, based on the properties of GRBs, we proposed a set of functions to model the difference in arrival time as intrinsic delays at the source and non-simultaneity in the emission. With this in hand, we determined whether or not there is compatibility with the LIV model. In our analysis, we demonstrated that the behavior of the photons is dependent on the cutoff chosen for the energy. More energetic photons had a behavior more compatible with LIV, while less energetic photons had a behavior more compatible with an intrinsic delay model. This led to the existence of two regions with different behaviors. Thus, we can conclude

that the LIV effects, if they occur, occur with very high-energy photons. If they occur for less energetic photons, their effects are not detectable by current observatories. The delay observed in photons is due to emission mechanisms.

Keywords: Lorentz invariance violation. Gamma ray. GRB. Cosmology. Standard model extension.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distribuição no tempo de duração de GRBs observados pelo experimento BATSE do CGRO mostrando a existência do bimodal <i>long</i> e <i>short bursts</i> .	28
Figura 2 – Distribuição no céu de 2704 GRBs detectados pelo BATSE.	29
Figura 3 – Ilustração do Telescópio Espacial Fermi de Raios Gamma.	30
Figura 4 – O processo de detecção de um raio gama pelo LAT.	32
Figura 5 – O Processo de detecção de um raio gama pelo GBM.	33
Figura 6 – Banco de dados de todos GRBs detectados ao longo dos anos compilados pela equipe do IceCube.	35
Figura 7 – Banco de dados dos GRBs detectados pelo Fermi-LAT.	37
Figura 8 – Ferramenta de busca dos dados obtidos pelo Fermi-LAT.	37
Figura 9 – Exemplo de consulta aos dados obtidos pelo Fermi-LAT, nesta consulta coletamos os dados do GRB090902B conforme nossos critérios de seleção.	38
Figura 10 – Dados dos fótons observados do GRB090902B que satisfazem nossos critérios de seleção.	39
Figura 11 – Banco de dados do Telescópio Fermi-LAT.	41
Figura 12 – Exemplo dos picos na detecção para o GRB090902B.	42
Figura 13 – Gráfico 1: 40GeV-45s Pure LIV, O fit foi feito utilizando a equação (2.33) e o resultado obtido para E_{LIV} é $2.37 \times 10^{27} eV \pm 5.60 \times 10^{25}$. O erro está incluso porem é menor do que os pontos e linhas usadas.	47
Figura 14 – Gráfico 2: 10GeV-70s Exponencial, o fit foi feito utilizando a equação (2.37) e os resultados obtidos para os parâmetros foram $\alpha = 1.44 \times 10^2 \pm 1.40 \times 10^0$ e $\beta = -6.96 \times 10^3 \pm 3.80 \times 10^1$. O erro está incluso porem é menor do que os pontos e linhas usadas.	48
Figura 15 – Grafico 3 : 10 GeV-70s LIV+Exponencial, o fit da linha continua foi feito utilizando a equação (2.39) e os resultados obtidos para os parâmetros foram E_{LIV} é $9.37 \times 10^{26} eV \pm 1.30 \times 10^{25}$, $\alpha = 2.94 \times 10^2 \pm 1.23 \times 10^1$ e $\beta = -1.34 \times 10^2 \pm 2.04 \times 10^0$, O fit para as curvas pontilhada e tracejada foi feito usando respectivamente as equações (2.37) e (2.33) e nos domínios de 0 a 40 GeV e 40 GeV em diante, os resultados obtidos foram $\alpha = 2.07 \times 10^2 \pm 4.24 \times 10^0$, $\beta = -1.26 \times 10^2 \pm 1.33 \times 10^0$ e E_{LIV} é $2.44 \times 10^{27} eV \pm 8.25 \times 10^{25}$, tal análise foi feita com objetivo de ilustrar a prevalência do comportamento exponencial nos fótons menos energéticos e do comportamento LIV nos mais energéticos. O erro está incluso porem é menor do que os pontos e linhas usadas.	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados experimentais de onze foton advindos de sete GRBs detectados pelo Telescópio Espacial de Raios Gamma Fermi	35
Tabela 2 – Dados experimentais de cinquenta e sete fótons advindos de quatorze GRBs detectados pelo Telescópio Espacial de Raios Gama Fermi.	36
Tabela 3 – Critérios e subdivisões feitas no conjunto B	38
Tabela 4 – Análises bem sucedidas e seus resultados	46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LIV	Quebra da Invariância de Lorentz
GRB	Gamma Ray Burst
SME	Modelo Padrão Estendido
LAT	Large Area Telescope
GMB	Gamma-ray Burst Monitor
NASA	National Aeronautics and Space Administration

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	Letra grega Gama
γ	Letra grega Gama minúscula
λ	Letra grega Lambda
ψ	Letra grega Psy
ν	Letra grega Ni
κ	Letra grega Kappa
μ	Letra grega Mi
ϵ	Letra grega Épsilon
σ	Letra grega Sigma
η	Letra grega Eta
ρ	Letra grega Rho
Φ	Letra grega Phi
Ω	Letra grega Ômega
ω	Letra grega Ômega minúscula

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	DESENVOLVIMENTO	23
2.1	Formulação Matemática	23
2.2	Erupções de Raios Gama	27
2.3	Telescópio Espacial de Raios Gamma Fermi	29
2.3.1	O LAT, Large Area Telescope	29
2.3.1.1	Rastreador (<i>Tracker</i>):	30
2.3.1.2	Calorímetro (<i>Calorimeter</i>):	30
2.3.1.3	Detector de Antico incidência (<i>Antico incidence Detector</i>):	30
2.3.1.4	Sistema de aquisição de dados(<i>Data Acquisition System</i>):	30
2.3.2	O GBM, Gamma-ray Burst Monitor	31
2.3.2.1	Detectores de baixa energia (<i>Low-Energy Detectors</i>):	31
2.3.2.2	Detectores de alta energia (<i>High-Energy Detectors</i>):	31
2.3.2.3	Unidade de Processamento de Dados (<i>Data Processing Unit</i>):	31
2.4	Metodologia	33
2.4.1	A seleção dos dados de GRBs	33
2.4.2	Reescalonamento	38
2.4.3	Tempo a partir do trigger e tempo a partir do pico do GBM	41
2.4.4	Análises	42
2.4.4.1	Primeira sub-análise:	43
2.4.4.2	Segunda sub-análise:	43
2.4.4.3	Terceira sub-análise:	43
2.4.4.4	Quarta sub-análise:	44
2.4.5	O Método AIC	45
2.5	Resultados e Discussão	45
3	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICES	57
	APÊNDICE A – RELAÇÃO DE DISPERSÃO DO FÓTON - LI	59

1 INTRODUÇÃO

Um dos fundamentos da física é a constatação de que as leis da física são invariantes perante as chamadas transformações de Lorentz. Em outras palavras, as leis da física permanecem inalteradas diante a rotações e mudanças na velocidade do sistema de referências, os chamados *boost*. Este pilar é conhecido como a invariância de Lorentz. Ela foi introduzida pela Teoria da Relatividade Restrita, e continua válida mesmo no contexto da Teoria Geral da Relatividade.

A física das forças fundamentais é constituída pelas duas teorias mais bem sucedidas da história da física. De um lado nós temos a Teoria Geral da Relatividade, que descreve o comportamento da força gravitacional através do estudo de como os corpos massivos deformam o espaço-tempo. É a teoria responsável por explicar o Universo em larga escala. Do outro lado nós temos o Modelo Padrão da Física de Partículas que descreve o comportamento das partículas fundamentais e das forças eletromagnética, forte e fraca através da interação entre os campos quânticos que as descrevem. É a teoria responsável por explicar o Universo nas menores escalas. A diferença no escopo de atuação das duas teorias levou os físicos a formularem teorias que fossem capazes de explicar o Universo tanto em pequena escala quanto larga escala, que são conhecidas como Teorias de Unificação.(1)

As Teorias de Unificação consistem nas tentativas dos físicos de encontrarem uma teoria capaz de explicar o universo em todas as escalas, seja a partir de modificações na relatividade e no Modelo Padrão seja a partir de tentativas de unificação entre os dois modelos, como Teorias de Gravidade Quânticas. Modelos como: *deformed relativity*, *loop quantum gravity*, *non-commutative geometry*, *spin foam models*, Modelo Padrão Estendido (SME) e alguns modelos tipo *string theory*(2–6), incluem como consequência aquilo que podemos chamar de "nova física", que são previsões da existência de efeitos, estados, eventos, partículas ou características não previstas por modelos atuais. Dentre tais previsões, nós temos um aspecto comum, que é a existência de uma escala de energia, na ordem da energia de Planck, em que relações no espaço-tempo antes válidas podem deixar de valer. Tal violação é conhecida como quebra da invariância de Lorentz.

Tais mudanças profundas nas teorias físicas podem surgir de duas formas nos modelos de unificação. A primeira forma é conhecida como quebra espontânea de simetria(7), devido a consequências matemáticas deduzidas no modelo que LIV se faz presente na teoria. A segunda forma surge devido a imposição direta da quebra da invariância de Lorentz(8), Na introdução de termos nas teorias já existentes, através de hipóteses de que certas relações são na verdade uma série de Taylor. Ambas maneiras de se chegar na quebra de invariância de Lorentz estão presentes em diversos modelos. Um dos modelos que iremos explorar mais profundamente nos próximos capítulos é o Modelo Padrão Estendido. (5)

O Modelo Padrão Estendido foi apresentado originalmente em (5, 9), e consiste em uma tentativa de aprimorar o Modelo Padrão pela adição de todos os termos possíveis na lagrangiana que fazem com que as seguintes propriedades sejam preservadas: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ invariância de gauge, preserva a renormalização por contagem de potência (dim 4), micro-causalidade, energia positiva, conservação de energia-momento, característica escalar e hermeticidade da lagrangiana. Uma das maneiras de que LIV surge no Modelo Padrão Estendido na relação de dispersão do fóton que diverge da relação prevista pelo Modelo Padrão. Tal diferença na relação de dispersão leva a quebra da invariância de Lorentz. No caso da relação de dispersão no Modelo Padrão Estendido será mostrada nesta tese.

Uma das principais maneiras de se estudar os efeitos causados por LIV previstos pelos modelos apresentados acima é a partir do teste experimental. Ao longo dos anos de estudos de LIV vários experimentos foram propostos com objetivo de encontrar evidências que corroboram com o modelo LIV e determinar limites aos modelos. Dentre os experimentos propostos podemos classificá-los em 3 categorias os terrestres, os gravitacionais e os astrofísicos. Dentre os experimentos terrestres podemos citar os seguintes: experimentos de *penning trap*(10, 11), experimentos de comparação de relógios(12), experimentos de cavidade(Michelson-Morley *like*)(13), e experimentos envolvendo múons.(14, 15) Duas famílias de experimentos gravitacionais são os que utilizam de ondas gravitacionais e os que utilizam de observações cosmológicas. Por último, alguns experimentos astrofísicos são: tempo de voo(16, 17), birrefringência(18), decaimento do fóton(19), radiação de Cherenkov no vácuo(20, 21), estudos do limite GZK(22), oscilação de neutrinos.(23) Neste estudo, nós focamos nos experimentos astrofísicos e, em particular nos estudos de tempo de voo, que é como é chamado o atraso no tempo de chegada dos fótons. O estudo do tempo de voo pode ser considerado o mais simples dos chamados experimentos astrofísicos pois o experimento consiste na observação do tempo de chegada (tempo de voo) de fótons advindos de fontes astrofísicas e a conseguinte comparação no tempo de chegada de diferentes fótons energias diferentes. Alguém pode se perguntar, se a luz (os fótons) não possui a mesma velocidade independente da energia ou do estado de movimento do observador. A resposta é sim nos modelos clássicos. Em alguns modelos de LIV modificações na relação de dispersão do fóton implicam que fótons com diferentes energias possuem velocidades diferentes, o que levaria a diferentes tempos de chegada dos fótons vindos de fontes astrofísicas. Um exemplo de tal modificação na relação de dispersão será deduzida neste estudo. O estudo no tempo de voo deve ser feita utilizando dados de uma fonte que satisfaça certas características, pois, efeitos de LIV não são observados para fótons com baixa energia e nem viajando em curtas distâncias. (24) Por isso, devemos usar fótons com altíssima energia, que viajaram por longas distâncias e que o momento relativo de sua emissão possa ser estimado, para que possamos comparar diferentes fótons. Fontes astrofísicas que satisfaz tais características são os *Gamma Ray Bursts* (GRBs).

Os GRBs são usados como fontes para o estudo de LIV através do tempo de voo há algum tempo e os resultados obtidos tem sido usados para servir de parâmetros e limites para modelos teóricos.(16,24) Em nossa tese, usamos os GRBs detectados pelo Telescópio Espacial Fermi como fontes dos dados utilizados em nossa análise.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Formulação Matemática

Uma das maneiras de mostrar como a quebra da invariância de Lorentz pode aparecer na teoria é considerar o SME, cuja a quebra da invariância de Lorentz é uma proposta. O Modelo Padrão Estendido consiste na adição de todos os termos possíveis na lagrangiana do Modelo Padrão que fazem com que as seguintes propriedades sejam preservadas: ser invariante por $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, micro-causalidade, energia positiva, conservação de energia-momento, a característica escalar e hermeticidade da lagrangiana. (25) A conservação de tais propriedades implica que a lagrangiana do Modelo Padrão estendido para o sector elétron-fóton seja:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\nu D_\nu\psi - \bar{\psi}M\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(k_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}(K_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

onde:

$$\Gamma^\nu = \gamma^\nu + c^{\mu\nu}\gamma_\mu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\mu + e^\nu + if^\nu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu\nu}\sigma_{\lambda\mu}. \quad (2.2)$$

e

$$M = m + a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

onde $\frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\nu D_\nu\psi - \bar{\psi}m\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ é o modelo padrão e os termos adicionais são devidos ao modelo SME, termos $c^{\mu\nu}, d^{\mu\nu}eH^{\mu\nu}$ são os termos CPT-par, $c^{\mu\nu}ed^{\mu\nu}$ são hermitianos e sem dimensão, $H^{\mu\nu}$ é anti-simétrico e com dimensão de massa, $a_\mu eb_\mu$ são os termos CPT-ímpar com dimensão de massa, $e^\nu, f^\nu eg^{\lambda\mu\nu}$ são os termos extras, adicionados aqui somente por completeza pois são compatíveis com a simetria de carga $U(1)$ porém não podem ser reduzidos de uma versão geral do SME, já que são reais e sem dimensão. Os coeficientes do fóton são k_{AF} que é um operador CPT-ímpar e contém apenas coeficientes de dimensão de massa ímpar enquanto K_F só contém coeficientes de dimensão d par e é CPT-par.(25)

Uma maneira de mostrar como a violação espontânea da simetria de Lorentz ocorre é calcular a relação de dispersão do fóton. Para fazer este cálculo devemos considerar a Lagrangiana estendida para o fóton:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}A_\lambda(k_{AF})_\kappa F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\kappa\lambda}(K_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Consideraremos o caso mais simples, que é um modelo no vácuo, não birrefringente, na menor dimensão diferente de zero e isotrópico. Nestas condições nós temos que k_{AF} é nulo, pois ele somente contribui para efeitos birrefringentes. Já o termo K_F contribui com termos birrefringentes e não birrefringentes, a parte não birrefringentes pode ser completamente caracterizada por $c_F^{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$(K_F)^{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\nu\rho}c_F^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\rho}c_F^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho}c_F^{\nu\rho} - \eta^{\mu\sigma}c_F^{\nu\rho}). \quad (2.5)$$

onde η é a métrica de Minkowski.

Dado que $(K_F)^{\kappa\lambda\mu\nu}$ satisfaz a seguinte relação de simetria $0 = \partial^{[\rho}(K_F)^{\mu\nu]\kappa\lambda}$ nós temos que $c_F^{\mu\nu}$ satisfaz consequentemente $0 = \partial^{[\rho}(c_F)^{\mu]\nu}$ no caso não birrefringente, cuja solução é dada via potencial escalar (26):

$$c_F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial^\nu \Phi_F. \quad (2.6)$$

onde as derivadas atuam no espaço de momento. Expandindo Φ_F em harmônicos esféricos nós temos:

$$\Phi_F = \sum_{dnjm} \omega^{d-2-n} p^n Y_{jm}(p) (c_F^d)_{njm}. \quad (2.7)$$

onde $Y_{jm}(p)$ são os harmônicos esféricos, p é o momento, ω a frequência do fóton e $(p)(c_F^d)_{njm}$ nosso conjunto mínimo de coeficientes não birrefringentes. Nossas condições de mínima dimensão ($d = 6$) e vácuo ($\omega = p$), permitem que reescrevemos $c_F^{\mu\nu}$ a partir da eq. 2.6 da seguinte forma:

$$c_F = \sum_{dnjm} p^2 Y_{jm}(p) (c_F^d)_{njm}. \quad (2.8)$$

Nossa condição de isotropia implica em $Y_{jm}(p) = (-1)^d$ e dado que nossa dimensão é par c_F é dado por:

$$c_F = \sum_{dnjm} p^2 (c_F^d)_{njm}. \quad (2.9)$$

Nossa nova lagrangiana é dada da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\rho} c_F^{\mu\nu} F_\nu{}^\rho. \quad (2.10)$$

onde:

$$\xi^0 = \frac{1}{2} \sum_{dnjm} p^2 (c_F^d)_{njm}. \quad (2.11)$$

A equação do movimento é obtida através da variação da Lagrangiana e a relação de dispersão segue da equação do movimento:

$$-\frac{1}{4}(1 + \xi^0)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Com a Lagrangiana da eq. 2.12 o cálculo da relação de dispersão é completamente análoga ao caso LI como feito no Apêndice A. Sendo assim, nossa relação de dispersão é dada por:

$$E = (1 + \xi^0)p. \quad (2.13)$$

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$E^2 = p^2c^2 \left[1 + \left(\frac{(pc)^2}{E_{LIV}} \right) \right]. \quad (2.14)$$

Reescrevendo $\sum_{dnjm} \frac{1}{2}(c_F^d)_{njm}$ como $\frac{1}{E_{LIV}}$ onde $E_{LIV}^{(n)}$ é o parâmetro de escala de energia onde efeitos de LIV são esperados.

E aqui nós temos a violação espontânea de Lorentz, pois a velocidade dos fótons não é mais uma constante mas sim uma função da energia.

A relação de dispersão da Eq. 2.14 foi deduzida para o fóton no Modelo Padrão Estendido, porém existem muitas outras formas de se deduzir um *modified dispersion relation* (MDR) tanto para diferentes partículas e teorias subjacentes com LIV (veja por exemplo, Refs. (27–29)), algumas das quais podem levar a fenomenologias similares, o que é muito útil para testar LIV em ambientes extremos, quanto cenários astrofísicos. Seguindo esta linha de raciocínio, nós podemos definir uma família de MDRs pela seguinte expressão (30),

$$E_a^2 - p_a^2 = m_a^2 \pm |\delta_{a,n}|A_a^{n+2}. \quad (2.15)$$

onde a representa o tipo de partícula, A pode ser a energia E ou momento p , $\delta_{a,n}$ é o parâmetro de LIV e $n = 0, 1, 2, \dots$, é a principal ordem de correção. Em alguns teorias efetivas, $\delta_{a,n} = \epsilon^{(n)}/M$, onde M é a escala de energia da nova física, por exemplo, a escala de energia de Plank, E_{Pl} , ou ou alguma escala de energia de gravidade quântica, E_{QG} . Observe que a MDR derivado em Eq. 2.14 é o caso particular da Eq. (2.15), com $n = 0$, $A = p$ e a representa o fóton.

Esta relação de dispersão modificada implica que fótons com diferentes energias viajam com velocidades diferentes, mas antes de calcular a diferença no tempo entre dois fóton que viajaram uma distância D , nós devemos lembrar que GRBs estão a distâncias cosmológicas, logo, devemos levar em consideração efeitos cosmológicos.

Para determinar a diferença no tempo com LIV e considerando efeitos cosmológicos, nós devemos estudar as *comoving distances* das duas partículas através de suas Hamiltonianas, como desenvolvido na Ref. (31)

$$\text{Da métrica } FRW : ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 dx^2.$$

onde c é a velocidade da luz padrão e $a(t)$ é fator de escala cosmológico. Nós podemos deduzir que a energia de uma partícula relativística é dada por:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \frac{p^2 c^2}{a^2}}. \quad (2.16)$$

Reescrevendo E , incluindo LIV da Eq (2.16), nós conseguimos a seguinte relação:

$$E = \left(\frac{pc}{a}\right) \sqrt{1 - (pc/(aE_{LIV}))^n}. \quad (2.17)$$

Assumindo que a relação $dx/dt = v = dE/dp$ ainda continua sendo valida e aproximando em primeira ordem as correções de LIV, nós conseguimos a seguinte *comoving distance* (31):

$$x(t, p) = \int_0^t \frac{c}{a} \left[1 - \frac{1+n}{2} \left(\frac{pc}{aE_{LIV}} \right)^n \right] dt. \quad (2.18)$$

usando a seguinte relação:

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dz}{a(t_0)H(z)}. \quad (2.19)$$

e

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (2.20)$$

onde $H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda$ são respectivamente a constante de Hubble, a densidade da matéria e a constante cosmológica. Assumindo $E \approx pc$, nós reescrevemos a Eq. (2.18) como uma função de (z, E)

$$x(z, E) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \left[1 - \frac{1+n}{2} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right)^n (1+z)^n \right] \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.21)$$

onde E é a energia da partícula medida no presente e H_0, Ω_m e Ω_Λ são os parâmetros cosmológicos medidos no presente.

Agora nós levaremos em consideração dois fótons, um com alta energia e um com baixa energia, ambos emitidos simultaneamente em uma fonte a um redshift z . O fóton

com maior energia chegará na Terra com um delay no redshift $-\Delta z$, isto acontece porque o universo se expande entre as chegadas dos fótons. Igualando as *comoving distance* dos dois fótons (elas são iguais por definição), aproximando as correções de LIV em primeira ordem e usando a aproximação $\Delta E \simeq E$, pois a energia do fóton mais energético é ordens de magnitude maior do que a do fóton menos energético e isolando o termo contendo $-\Delta z$, nós obtemos:

$$\int_{-\Delta z}^0 \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} = \int_0^z \left[\frac{1+n}{2} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right)^n (1+z)^n \right] \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.22)$$

Com este resultado, considerando que Δz é pequeno e ignorando correções de segunda ordem e superiores, nós obtemos a seguinte expressão para a diferença no tempo de chegada para partículas cosmológicas sem massa e de alta energia com efeitos de LIV:

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{H_0} = \frac{1+n}{2H_0} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right) \int_0^z \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.23)$$

Com a Eq. 2.23 podemos modelar fótons emitidos por fontes cosmológicas. Como os efeitos de LIV são esperados para ocorrer em condições extremas, como altíssimas energias e ao longo de grandes distâncias, nós precisamos de fontes astrofísicas altamente energéticas e distantes para que possamos aferir a existência de tais efeitos utilizando a Eq. 2.23. Existe tal fonte astrofísica que satisfaça nossos critérios? Sim, os *Gamma Ray Bursts* (GRBs) que são apresentados na próxima secção.

2.2 Erupções de Raios Gama

Gamma Ray Bursts ou em português Erupções de Raios Gama são picos de emissão em raios gama muito energéticos detectados aqui da Terra advindos de galáxias distantes. Eles são os eventos eletromagnéticos mais brilhantes e enérgicos conhecidos no universo, e possuem ocorrência esporádica. Considerando todos os tipos de GRBs e energias podemos dizer que eles possuem uma ocorrência de em média um por dia (32), e possuem uma duração em média de alguns poucos minutos. Os GRBs foram descobertos no final da década de 1960 por satélites espiões americanos projetados para detectar pulsos de radiação gama emitidos por armas nucleares.

Os GRBs possuem uma distribuição bimodal, como ilustrado na figura 1, e são divididos em duas categorias, os *short bursts* e os *long bursts*. A diferença entre as duas categorias é a duração do *burst*, que é definida como o tempo em que 90% da energia do *burst* é emitida, os *short bursts* duram no máximo 2 segundos enquanto os *long bursts* duram mais do que 2 segundos chegando até a alguns poucos minutos. (33) Os melhores modelos de GRBs explicam a existência destas duas categorias de GRBs. Os *short bursts*

por conta de sua duração devem ser originados em objetos compactos, devido ao argumento da causalidade. O melhor modelo para os *short bursts* é a fusão em sistemas binários de estrelas de nêutrons como demonstrado na observação simultânea de um GRB e de ondas gravitacionais feita em 2017. No caso, a emissão em raios gama no *short bursts* acontece instantes antes da fusão. (34) Já no caso dos *long bursts* a origem do GRB é o colapso gravitacional em estrelas muito massivas, e a emissão em raios gama acontece durante a supernova. Este processo de emissão é conhecido como a teoria da bola de fogo em expansão rápida, onde a estrela colapsa para formar uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. (35) Há outras características que diferenciam os *short bursts* dos *long bursts*, como os *short bursts* serem significativamente menos energéticos que os *long bursts* e também um atraso no tempo entre as bandas de raios gama com mais energia e menos energia observadas nos *long bursts*, tal atraso não é observado nos *short bursts*.

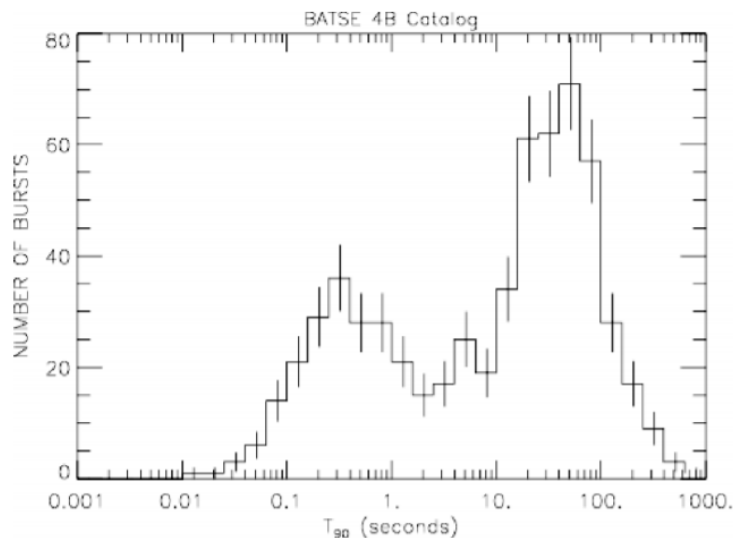


Figura 1 – Distribuição no tempo de duração de GRBs observados pelo experimento BATSE do CGRO mostrando a existência do bimodal *long* e *short bursts*.

Fonte: LONGAIR. (36)

Algumas características são gerais aos GRBs, como tempo de subida da erupção ser consideravelmente menor do que o tempo de descida, podendo o tempo de subida chegar a ser na ordem de milissegundos. Outra propriedade comum é a sua distribuição isotrópica no céu, como ilustrada na figura 2.(37)

Os modelos para GRBs também preveem que, após o *bursts* inicial deve existir uma emissão que decai com o tempo nos comprimentos de onda maiores, como raio X, ultravioleta, visível, infravermelho e rádio. Tal emissão é chamada de *afterglow*. Sua detecção é desafiadora porém nós conseguimos detectá-lo para alguns *bursts* e a sua medição é muito importante pois é a partir dela que nós conseguimos determinar o redshift do GRB através das linhas de emissão detectadas. (37–43)

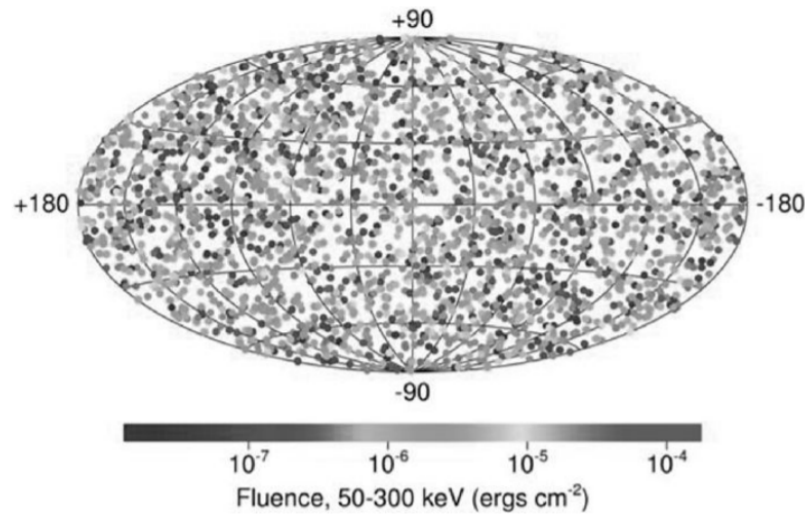


Figura 2 – Distribuição no céu de 2704 GRBs detectados pelo BATSE.

Fonte: LONGAIR. (36)

GRBs são detectados por uma série de telescópios espalhados pelo mundo, como o BASTE e também por telescópios no espaço, como o SWIFT e o Fermi Gamma-Ray Space Telescope no qual iremos discutir na próxima seção, pois iremos usar dados obtidos por um de seus detectores o FERMI-LAT.

2.3 Telescópio Espacial de Raios Gamma Fermi

O Telescópio Espacial Fermi de Raios Gamma (Fig 3) é um observatório espacial para astronomia de raios gama, composto por dois instrumentos. O primeiro é o Large Area Telescope (LAT), que é projetado para detectar raios gama individuais. Ele possui um grande campo de visão de cerca de 20% do céu e é sensível a uma faixa de energia de 20 MeV a 300 GeV. Já o segundo é o Gamma-ray Burst Monitor (GBM), que é um conjunto de detectores ao redor da espaçonave para observar todo o céu que não é bloqueado pela Terra, Em particular, o GBM foi projetado para detectar picos repentinos de raios gama produzidos por explosões de raios gama e explosões solares e é sensível a uma faixa de energia de 8 keV a 40 MeV.

Os dois detectores do FERMI, o LAT e o GBM, possuem uma série de instrumentos que permitem a detecção dos raios gama e principalmente a exclusão de falsos positivos causados pelos raios cósmicos. Para cada raio gama detectado o LAT deve filtrar entre 100 mil e 1 milhão de raios cósmicos.

Os instrumentos a bordo da espaçonave são listados e detalhados a seguir.

2.3.1 O LAT, Large Area Telescope

O LAT (44) consiste nos seguintes instrumentos:

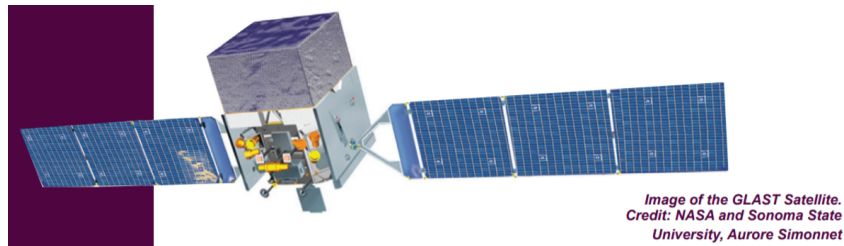


Figura 3 – Ilustração do Telescópio Espacial Fermi de Raios Gamma.

Fonte: GLAST. (44)

2.3.1.1 Rastreador (*Tracker*):

O Tracker consiste em uma matriz quatro por quatro de módulos de torre. Cada módulo de torre consiste em camadas de detectores de rastreamento de partículas de tiras de silício intercaladas com folhas conversoras de tungstênio finas. Os detectores de tiras de silício medem com precisão os caminhos do elétron e pósitron produzidos a partir do raio gama inicial. A assinatura de conversão de par também é usada para ajudar a rejeitar o fundo muito maior de raios cósmicos.

2.3.1.2 Calorímetro (*Calorimeter*):

O Calorímetro mede a energia de uma partícula quando ela é totalmente absorvida. O Calorímetro do LAT é feito de um material chamado iodeto de cério que produz flashes de luz cuja intensidade é proporcional às energias das partículas que entram. O Calorímetro também ajuda a rejeitar os raios cósmicos, já que seu padrão de deposição de energia é diferente do padrão dos raios gama.

2.3.1.3 Detector de Antico incidência (*Antico incidence Detector*):

O Detector de Antico incidência (ACD) é a primeira linha de defesa contra os raios cósmicos. Consiste em ladrilhos de plástico especialmente formulados que produzem flashes de luz quando atingidos por raios cósmicos de partículas carregadas (mas não por raios gama, que são eletricamente neutros). O ACD forma um “chapéu” que se ajusta ao rastreador.

2.3.1.4 Sistema de aquisição de dados (*Data Acquisition System*):

O Sistema de Aquisição de Dados (DAQ) é o cérebro por trás do LAT. Ele coleta informações do Rastreador, do Calorímetro e do Detector de Antico incidência e faz a distinção inicial entre sinais indesejados de raios cósmicos e sinais reais de raios gama para decidir quais dos sinais devem ser retransmitidos para o solo. Este sistema também faz uma pesquisa integrada de rajadas de raios gama. O DAQ consiste em eletrônicos especializados e microprocessadores

2.3.2 O GBM, Gamma-ray Burst Monitor

O GBM (44) consiste nos seguintes instrumentos:

2.3.2.1 Detectores de baixa energia (*Low-Energy Detectors*):

Os detectores de iodeto de sódio de baixa energia detectam raios X com cerca de 8 keV de energia até raios gama com cerca de 1 MeV. Eles fornecem os locais de explosões de raios gama em vários graus e eles se sobrepõem em energia com outras missões que detectam GRBs, como o satélite Swift da NASA. Os detectores de baixa energia são montados em quatro bancos compostos por três detectores cada. Os 12 detectores são orientados em várias direções para que fiquem voltados para diferentes partes do céu. O GBM usa os sinais dos detectores de baixa energia para detectar locais de explosão.

2.3.2.2 Detectores de alta energia (*High-Energy Detectors*):

Os detectores de alta energia são feitos de germanato de bismuto, que às vezes é abreviado como BGO porque o germanato é um óxido de germânio. Eles cobrem a faixa de energia de cerca de 150 keV a cerca de 30 MeV, proporcionando uma boa sobreposição com os detectores de baixa energia na extremidade inferior da faixa de energia de raios gama e com o LAT na extremidade superior. O germanato de bismuto é um material de alta densidade que oferece melhor sensibilidade em altas energias. Os dois detectores de alta energia estão posicionados em lados opostos da espaçonave, fornecendo cobertura quase total do céu.

2.3.2.3 Unidade de Processamento de Dados (*Data Processing Unit*):

A eletrônica e os microprocessadores na unidade de processamento de dados recebem e analisam os dados dos detectores de baixa e alta energia. Ele detecta GRBs, determina suas energias e direções de chegada e envia dados para a espaçonave GLAST para transmissão ao solo.

1) Um raio gama entra no LAT. Ele primeiro passa pelo Detector de Anticoincidência sem produzir um sinal.

2) O raio gama interage em uma das 16 folhas finas de tungstênio. Esta interação converte o raio gama em um elétron e um pósitron via produção de pares.

3) O Tracker usa tiras de silício para medir os caminhos do elétron e pósitron, permitindo que o LAT determine a direção de chegada do raio gama.

4) O elétron e o pósitron entram no Calorímetro, que mede as energias das partículas e, portanto, a energia do raio gama original.

5) As partículas de raios cósmicos indesejadas produzem um sinal no Detector de Anticoincidência, que informa ao Sistema de Aquisição de Dados para rejeitar o sinal. O

Detector de Anticoincidência rejeita 99,97% dos sinais indesejados produzidos pelos raios cósmicos que entram no LAT.

6) O software no Sistema de Aquisição de Dados LAT também rejeita, com base na direção de chegada, raios gama indesejados que se originam na atmosfera da Terra.

A Figura 4 ilustra o processo de detecção de um raio gama pelo LAT.

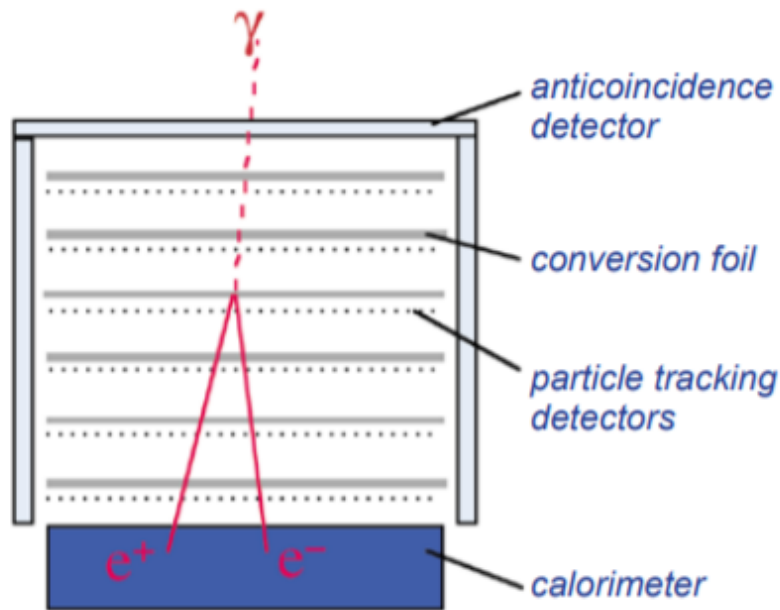


Figura 4 – O processo de detecção de um raio gama pelo LAT.

Fonte: GLAST. (44)

1) Um raio X ou raio gama de baixa energia vindo do espaço entra em um dos 12 detectores de baixa energia do GBM que produz um fraco flash de luz quando atingido. Um tubo fotomultiplicador detecta o flash.

2) Os 12 detectores estão localizados em lados opostos da espaçonave FERMI, de modo que estão voltados para direções diferentes no céu.

3) Quando os raios gama de uma explosão de raios gama alcançam o GBM, o disco voltado para a explosão detectará mais fótons do que os outros.

4) Ao comparar a taxa de sinais de quatro ou mais detectores, o GBM pode triangular a direção de chegada da explosão.

5) Dois detectores de alta energia captam os raios gama de alta energia e medem suas energias da mesma forma que os detectores de baixa energia.

A figura 5 ilustra o processo de detecção de um raio gama pelo GBM.

Em resumo, quando o telescópio FERMI detecta um GRB, o detector de baixa energia do GBM detecta uma quantidade alta de raios gama. Com esta detecção ele

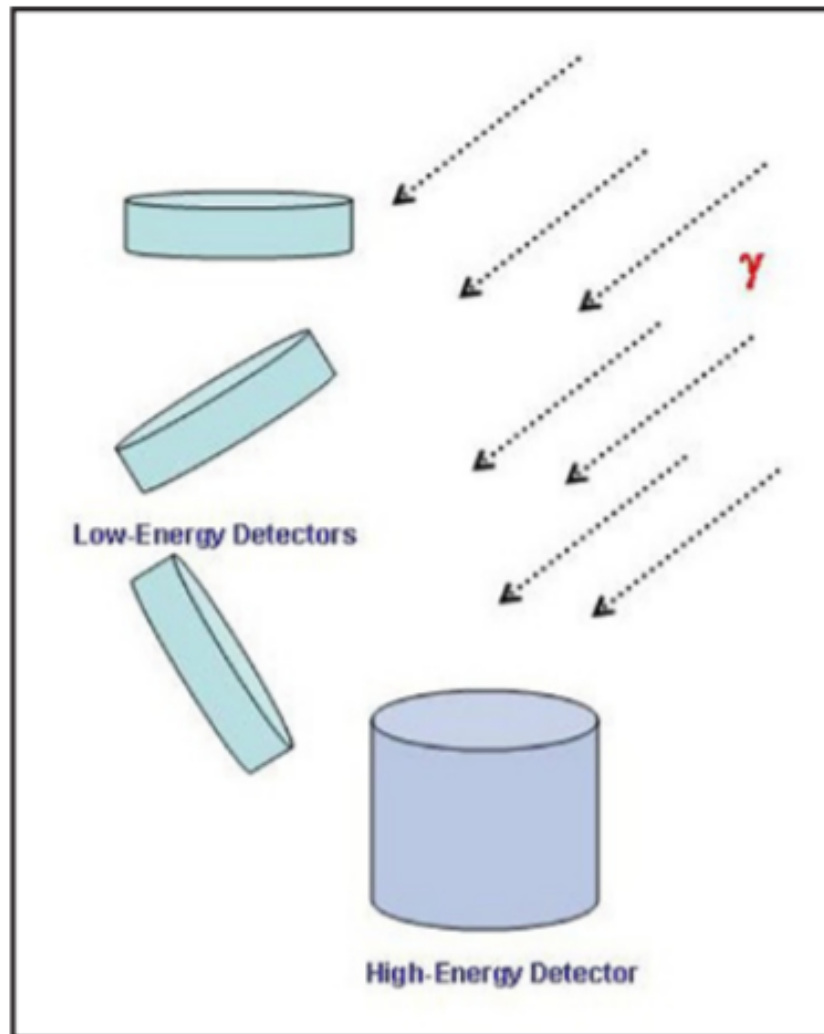


Figura 5 – O Processo de detecção de um raio gama pelo GBM.

Fonte: GLAST. (44)

determina a direção de chegada do GRB e manda um sinal para que o detector LAT seja apontado para a direção do GRB. Assim, o detector LAT os dados observacionais dos fótons advindos deste dado GRB que disparou o telescópio, como energia e tempo de chegada. Agora que sabemos como os GRBs são detectados iremos discutir na próxima seção nossos critérios de seleção dos GRBs e conseqüentemente dos fótons que serão utilizados em nossa análise. O objetivo é entender o atraso observado na detecção dos fótons advindos de GRBs.

2.4 Metodologia

2.4.1 A seleção dos dados de GRBs

Nesta tese nós analisamos dados de GRBs detectados pelo telescópio espacial FERMI com o intuito de descobrir se eles são ou não compatíveis com o modelo proposto

de LIV. Para isso nós fizemos uma série de análises estatísticas: considerando que o delay no tempo de chegada é cem por cento devido a efeito de LIV, considerando que o delay é devido a LIV mais atrasos intrínsecos na fonte e por fim considerando que delay é cem por cento devido a atrasos intrínsecos na fonte. Também analisamos como que diferentes conjuntos de dados e diferentes maneiras de se definir os dados modificam nossos estudos.

Nós apresentamos para serem analisados dois conjuntos de dados de GRBs com o redshift conhecido. O primeiro conjuntos de dados, chamado de conjunto A, foi selecionado e usado em trabalho anteriores. (16) O segundo conjunto, chamado conjunto B, foi um conjunto selecionado por nós. O conjunto B contém o conjunto A e é aproximadamente cinco vezes maior. Nosso objetivo com estes dois conjuntos é testar se as correlações positivas obtidas anteriormente entre a hipótese de LIV e o conjunto A são robustas e se elas continuam valendo caso nós adicionamos mais dados em nossa análise. Os dois conjuntos são definidos e apresentados a seguir:

O conjunto A é composto por 11 fótons de 7 GRBs diferentes. Ele possui todos os fótons detectados pelo FERMI-LAT desde do início de suas operações até o dia 09 de maio de 2016 cuja a energia do fóton emitido seja igual ou maior do que 40GeV, que pertença a um GRB cujo o redshift é conhecido e que o tempo da detecção foi menor que:

$$\Delta t \leq 10^{-16} D(z) + (1 + z)20s. \quad (2.24)$$

onde

$$D(z) = \int_0^z \frac{(1+z)dz}{H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.25)$$

do tempo de *trigger*.

O conjunto de dados A é listado na tabala 1 com o nome dos GRBs, redshifts z , energia detectada E e o tempo de detecção desde de o *trigger* t .

O conjunto de dados B é composto por 57 fótons de 14 GRBs diferentes. Ele é o conjunto é composto por todos os fótons detectados pelo FERMI-LAT desde do início de suas operações até o dia 31 de dezembro de 2020 cuja energia com que o fóton foi emitido seja igual ou maior do que 10GeV, que pertença a um GRB cujo o redshift é conhecido e que o tempo da detecção foi menor que:

$$\Delta t \leq (1 + z)70s. \quad (2.26)$$

do tempo de *trigger*.

O conjunto de dados B é listado abaixo com o nome dos GRBs, redshifts z , energia detectada E e o tempo de detecção desde de o *trigger* t .

Tabela 1 – Dados experimentais de onze foton advindos de sete GRBs detectados pelo Telescópio Espacial de Raios Gamma Fermi .

GRB	$E_{obs}[GeV]$	$t_{trigger}[s]$	z
080916C	12.4	16.54	4.35
080916C	27.4	40.50	4.35
090510	29.9	0.83	0.90
090902B	14.2	14.16	1.82
090902B	15.4	45.60	1.82
090902B	18.1	26.16	1.82
090902B	39.9	81.74	1.82
090926A	19.5	24.83	2.11
100414A	29.8	33.36	1.37
130427A	77.1	18.64	0.34
160509A	51.9	76.51	1.17

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para garantir que o conjunto fosse formado por todos os fótons que satisfazem nossos critérios nós partimos do mais amplo conjunto de dados de GRBs disponíveis e fomos aplicando nossos critérios de seleção, começamos nossa tarefa listando todos os GRBs com redshift conhecido que foram detectados desde o dia do lançamento do FERMI até o dia 31 de dezembro de 2020 disponíveis no banco de dados do Observatório de Neutrinos IceCube (45) que lista todos os GRBs detectados nos últimos anos, ilustrado na Figura 6. Esta primeira parte da tarefa nos permite descobrir quais GRBs possuem redshift conhecido e consequentemente o valor de seu redshift.

GRB_name	GRB_name_Fermi	T0	ra	decl	pos_error	T90	T90_error	T90_start	fluence	fluence_error	redshift	'T100'	GBM_located	mjd (T0)
		UTC	"_J2000	"_J2000	"_1-sigma	s	s	UTC	erg/cm ²	erg/cm ²		s		day
GRB210411D	---	16:31:10	358.5000	24.3000	---	---	---	---	---	---	---	---	True	59315.68831019
GRB210411C	---	15:05:51	296.6112	-39.3979	---	---	---	---	---	---	---	---	False	59315.62906250
GRB210411B	---	13:32:44	115.7000	-74.8000	---	---	---	---	---	---	---	---	True	59315.56439815
GRB210411A	---	3:30:56	259.4000	-27.4000	---	---	---	---	---	---	---	---	True	59315.14648148
GRB210410A	GRB210410037	0:53:16	269.7544	45.3619	---	48.1280	2.8280	0:53:16.519	3.1006e-05	9.9609e-08	---	48.6470	False	59314.03699074
GRB210406B	GRB210406949	22:46:05.228	6.5800	19.5800	4.484832	19.7120	0.5720	22:46:06.252	2.5706e-05	3.3959e-08	---	20.7360	False	59310.94867162
GRB210406A	GRB210406716	17:11:22	132.4988	76.5289	---	17.4080	4.9710	17:11:31.333	5.6952e-06	1.8005e-07	---	26.7410	False	59310.71622685
GRB210405A	GRB210405351	8:24:50.312	25.9700	17.4100	10.028628	14.8480	3.3280	8:24:50.312	9.5136e-07	3.4558e-08	---	14.8480	True	59309.35058231
GRB210404A	GRB210404141	3:23:22.270	175.5500	2.3400	10.842735	1.3440	0.7460	3:23:22.270	2.1673e-07	1.5176e-08	---	1.3440	True	59308.14122998
GRB210403A	---	8:27:13	2.8130	-33.0240	0.020193	168.3000	---	8:27:13	2.7000e-06	---	---	168.3000	False	59307.35223380

Figura 6 – Banco de dados de todos GRBs detectados ao longo dos anos compilados pela equipe do IceCube.

Fonte: IceCUBE. (45)

A segunda parte desta tarefa consistiu em comparar os dados obtidos na primeira parte com o banco de dados do telescópio espacial FERMI, mais especificamente o banco de dados do detector FERMI-LAT (46), ilustrado na Figura 7. Esta segunda parte nos permitiu descobrir quais GRBs detectados pelo FERMI-LAT possuíam redshift conhecido:

A terceira parte da tarefa consistiu na obtenção dos tempos em que o *trigger* do

Tabela 2 – Dados experimentais de cinquenta e sete fótons advindos de quatorze GRBs detectados pelo Telescópio Espacial de Raios Gama Fermi.

GRB	$E_{obs}[GeV]$	$t_{trigger}[s]$	z	GRB	$E_{obs}[GeV]$	$t_{trigger}[s]$	z
080916C	27,43	40,50	4,35	090926A	4,35	19,37	2,11
080916C	12,42	16,54	4,35	100414A	29,80	33,36	1,37
080916C	6,72	28,20	4,35	100414A	4,40	39,31	1,37
080916C	5,71	43,99	4,35	110731A	6,40	230,01	2,83
080916C	2,57	22,21	4,35	110731A	3,01	264,00	2,83
080916C	2,50	26,31	4,35	110731A	2,66	187,08	2,83
080916C	2,11	6,86	4,35	130427A	77,11	18,64	0,34
090323A	7,40	195,42	3,57	130427A	38,67	78,40	0,34
090323A	4,27	239,85	3,57	130427A	28,41	47,59	0,34
090323A	2,92	168,92	3,57	130427A	26,90	84,74	0,34
090323A	2,24	228,37	3,57	130427A	12,87	80,52	0,34
090510A	29,91	0,83	0,90	130427A	12,18	64,47	0,34
090510A	6,64	0,85	0,90	130427A	12,00	23,48	0,34
090902B	39,88	81,74	1,82	130427A	10,85	23,23	0,34
090902B	18,11	26,16	1,82	130427A	9,89	37,64	0,34
090902B	15,40	45,60	1,82	130427A	9,88	15,04	0,34
090902B	14,22	14,16	1,82	130427A	8,66	10,97	0,34
090902B	12,66	42,37	1,82	130427A	8,33	23,89	0,34
090902B	11,89	11,66	1,82	131231A	48,29	110,29	0,64
090902B	7,72	10,00	1,82	141028A	3,95	157,52	2,33
090902B	5,64	23,79	1,82	150403A	5,08	26,32	2,06
090902B	5,50	104,35	1,82	150403A	3,78	72,86	2,06
090902B	5,36	23,44	1,82	160509A	51,90	76,51	1,17
090902B	5,36	19,05	1,82	170214A	7,76	103,62	2,53
090902B	5,19	15,39	1,82	190114C	21,05	21,43	0,42
090902B	4,66	170,91	1,82	190114C	19,36	36,47	0,42
090902B	3,59	85,92	1,82	190114C	10,54	65,86	0,42
090926A	19,56	24,83	2,11	190114C	9,76	17,96	0,42
090926A	6,03	38,99	2,11				

Fonte: Elaborada pelo autor.

observatório ocorreu para todos os GRBs que possuíam redshift conhecido detectado pelo FERMI-LAT, ilustrado na figura 7 e também no cálculo dos limites no tempo em que os fótons detectados devem possuir para satisfazer nossos critérios :

A quarta e última parte foi a determinação dos fótons que satisfazem os critérios definidos acima. Utilizamos o mecanismo de requisição de dados do FERMI-LAT (47), ilustrado na figura 8, para cada um dos GRBs selecionados na segunda parte e assim descobrir se dado GRB possuíam fótons que obedecem nossos critérios, e se sim, quantos e quais são eles. Nós mostramos nas figuras 9 e 10 como é obtido os dados dos fótons usando como exemplo o GRB080902B. Seguindo este processo fomos capazes de obter todos os fótons que atendem nossos critérios e seus parâmetros observacionais e com os dados em mãos construímos nossa tabela 2 contendo 57 fótons de 14 GRBs distintos.

Index of /FTP/fermi/data/lat/triggers














Name	Last modified	Size	Description
 Parent Directory		-	
 2008/	17-Jul-2012 13:51	-	
 2009/	17-Jul-2012 14:09	-	
 2010/	17-Jul-2012 14:36	-	
 2011/	17-Jul-2012 14:39	-	
 2012/	28-Jul-2014 16:46	-	
 2013/	28-Oct-2015 14:12	-	
 2014/	25-Feb-2015 15:36	-	
 2015/	07-Oct-2015 18:26	-	
 2016/	11-Jan-2017 16:33	-	
 2017/	27-Apr-2017 14:34	-	
 2018/	15-Aug-2018 16:27	-	
 2019/	08-Oct-2020 21:07	-	

Figura 7 – Banco de dados dos GRBs detectados pelo Fermi-LAT.

Fonte: FERMI-LAT. (46)

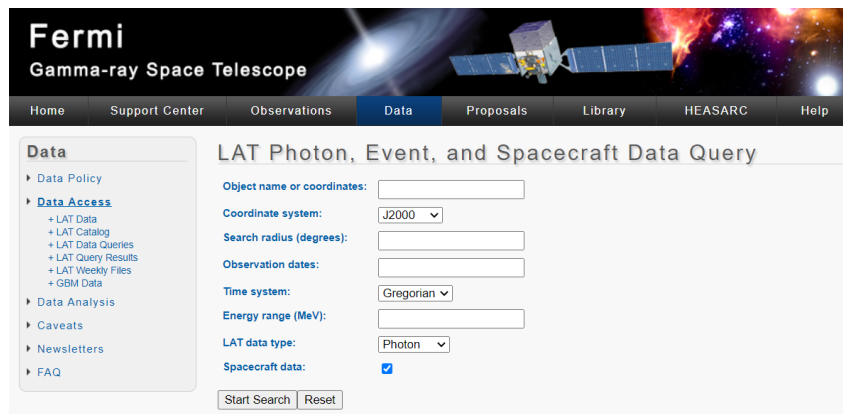


Figura 8 – Ferramenta de busca dos dados obtidos pelo Fermi-LAT.

Fonte: FERMI. (47)

O conjunto B contém o conjunto A e é maior devido ao fato de que os critérios de seleção do conjunto B serem mais abrangentes do que o do conjunto A. Com objetivo de estudar os efeitos devido ao afrouxamento dos critérios de seleção, tanto no tempo quanto na energia, nós subdividimos o conjunto B em nove subconjuntos em nossa análise, a fim de determinar como o comportamento dos dados experimentais muda devido à seleção de pontos menos energéticos e como Δt maior. Os nove subconjuntos são definidos como todos os fótons que satisfazem aos critérios apresentados na tabela 3:

Equatorial coordinates (degrees)	(264.939,27.3245)
Time range (MET)	(273582310,273582508)
Time range (Gregorian)	(2009-09-02 11:05:08,2009-09-02 11:08:26)
Energy range (MeV)	(3546,300000)
Search radius (degrees)	15

The state of your query is 2 (Query complete)

Server	Position in Queue	Estimated Time Remaining (sec)
Photon Server	Query complete	N/A
Spacecraft Server	Query complete	N/A

The filenames of the result files consist of the query ID string with an identifier appended to indicate which data from. The identifiers are of the form: `_DDNN` where DD indicates the database and NN is the file number. Generally be '00' unless the query resulted in a large data volume. In that case the data is broken up into multiple files. The database field are:

- PH - Photon Database
- SC - Spacecraft Pointing, Livetime, and History Database
- EV - Extended Database

In the event that you do not see any files with the data type you requested listed below, you should try resubmitting the query. There may have been a problem.

Filename	Number of Entries	Size (MB)	Status
L210205170005F357373F23_PH00.fits	14	0.03	Available
L210205170005F357373F23_SC00.fits	9	0.04	Available

Figura 9 – Exemplo de consulta aos dados obtidos pelo Fermi-LAT, nesta consulta coletamos os dados do GRB090902B conforme nossos critérios de seleção.

Fonte: FERMI. (47)

Tabela 3 – Critérios e subdivisões feitas no conjunto B

Subconjuntos	Cutoff-Energia	Cutoff-Tempo
Primeiro	40 GeV	(1+z)20s
Segundo	40 GeV	(1+z)45s
Terceiro	40 GeV	(1+z)70s
Quarto	25 GeV	(1+z)20s
Quinto	25 GeV	(1+z)45s
Sexto	25 GeV	(1+z)70s
Sétimo	10 GeV	(1+z)20s
Oitavo	10 GeV	(1+z)45s
Nono	10 GeV	(1+z)70s

Fonte: Elaborada pelo autor.

Iniciamos com um subconjunto muito similar ao conjunto A e terminamos com o conjunto B. Com tal subdivisão do conjunto B somos capazes de determinar se há alguma mudança no comportamento dos pontos experimentais mensurável devido a inclusão de pontos menos energéticos e pontos com Δt maiores e caso haja, podemos propor interpretações físicas para tais mudanças.

2.4.2 Reescalonamento

Para nossa análise, é necessário que façamos um reescalonamento dos parâmetros experimentais de energia E e tempo Δt utilizando o redshift z , pois isto reduz nosso

Select	E MeV	D s
<input checked="" type="checkbox"/>	7.720285E+003	2.735823203175E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	1.188704E+004	2.735823219843E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	1.421939E+004	2.735823244793E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	5.187252E+003	2.735823257104E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	5.357619E+003	2.735823293701E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	5.363476E+003	2.735823337553E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	5.643480E+003	2.735823341127E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	1.811243E+004	2.735823364808E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	1.266290E+004	2.735823526868E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	1.539866E+004	2.735823559205E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	3.988158E+004	2.735823920591E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	3.592325E+003	2.735823962411E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	5.504353E+003	2.735824146730E+008
<input checked="" type="checkbox"/>	4.659104E+003	2.735824812302E+008

Figura 10 – Dados dos fótons observados do GRB090902B que satisfazem nossos critérios de seleção.

Fonte: Elaborada pelo autor.

número de variáveis e facilita o estudo com dados obtidos de múltiplos GRBs com redshift distintos.

Nós iremos apresentar neste trabalho duas maneiras de reescalonar os parâmetros experimentais, a primeira forma foi usada em um trabalho anterior (16) que se baseia em uma manipulação algébrica da equação para o Δt na hipótese de LIV:

É proposta a seguinte redefinição da energia E :

$$E^* = E \frac{D(z)}{D(z^*)}. \quad (2.27)$$

onde

$$D(z) = \int_0^z \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.28)$$

e

$$D(z^*) = \int_0^{z^*} \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.29)$$

que nós permite reescrever o Δt na hipótese de LIV da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1+n}{2H_0} \left(\frac{E^*}{E_{LIV}} \right) \left(\int_0^{z^*} \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (2.30)$$

para um dado valor de redshift z^* .

A segunda maneira de reescalar os parâmetros experimentais é uma proposta feita por nós que parte do fato de que os GRBs utilizados neste estudo estão localizados em redshifts diferentes. Com isto, nós reescalamos os parâmetros experimentais energia E e tempo Δt com respeito a um valor de redshift z^* da seguinte forma:

$$E^* = E \frac{1+z}{1+z^*}, \Delta t^* = \Delta t \frac{1+z^*}{1+z}. \quad (2.31)$$

E portanto, nós podemos reescrever o Δt na hipótese de LIV da seguinte forma:

$$\Delta t^* = \frac{1+n}{2H_0} \left(\frac{E^*}{E_{LIV}} \right) \int_0^{z^*} \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.32)$$

Esta forma de se reescalar os dados pode ser interpretada como o valor que nós iríamos medir para a energia e o tempo, caso os GRBs tivessem sido observados com o redshift z^* .

Ao realizar este reescalonamento e o anterior nos dados experimentais nós reduzimos o número de variáveis pois o redshift passa a ser uma constante, ou seja, o reescalonamento normaliza os redshift dos GRBs a um valor comum. Daqui em diante utilizaremos $z^* = 1$.

Em nossa análise nós iremos utilizar somente a segunda forma de reescalonar os parâmetros experimentais. Apesar da primeira maneira sendo uma forma válida de se reescalonar os dados experimentais nós não a consideramos adequada. Ao fazer tal reescalonamento dos dados experimentais, se assume a validade do modelo de LIV, por isso, o parâmetro experimental reescalado carrega consigo efeitos devido a LIV, Portanto, esse reescalonamento pode levar a enviesamento da análise. Em contrapartida o segundo reescalonamento leva em consideração apenas efeitos cosmológicos, ou seja, do momento em que o fóton foi emitido até a sua detecção o universo se expandiu. Assim, consideramos mais adequado para a nossa análise a utilização do segundo método de reescalonamento.

2.4.3 Tempo a partir do trigger e tempo a partir do pico do GBM

Antes de começar a análise dos dados experimentais nós devemos nos atentar ao fato de existirem duas maneiras distintas para se determinar o Δt de um fóton observado. A primeira é considerar o Δt como sendo a diferença entre o momento em que o fóton foi observado e o tempo do *trigger* do telescópio FERMI, cuja a determinação do valor é direta, pois, ao coletar os dados experimentais de um determinado fótons, o valor desde de o *trigger* é um dos parâmetros coletados. A segunda é considerar o Δt como sendo a diferença entre o momento em que fóton foi observado e o pico das observações feitas em raio gama de baixa energia. Isso é, o pico das observações do GBM no FERMI, cuja obtenção do valor é menos direta do que no caso anterior. Para obter o valor do tempo desde o pico do GBM, nós coletamos primeiramente os dados da detecção feita pelo GBM dos nossos 14 GRBs no banco de dados do GBM (46), ilustrado na figura 11.

Index of /FTP/fermi/data/gbm/bursts

Name	Last modified	Size	Description
 Parent Directory		-	
 2008/	19-Jul-2011 15:37	-	
 2009/	20-Sep-2016 13:48	-	
 2010/	20-Sep-2016 14:33	-	
 2011/	20-Sep-2016 17:18	-	
 2012/	20-Sep-2016 17:31	-	
 2013/	26-Oct-2015 11:28	-	
 2014/	30-Dec-2014 16:18	-	
 2015/	31-Dec-2015 14:51	-	
 2016/	30-Dec-2016 07:32	-	
 2017/	03-Jan-2018 04:55	-	
 2018/	30-Jan-2019 07:34	-	
 2019/	27-Dec-2019 13:46	-	
 2020/	05-Jan-2021 12:46	-	
 2021/	20-Apr-2021 01:31	-	

Figura 11 – Banco de dados do Telescópio Fermi-LAT.

Fonte: FERMI-GBM. (46)

Com os dados em mãos, utilizamos do programa GSpec disponível no website do FERMI para produzir o gráfico de fótons por segundo em função do tempo. A partir do gráfico somos capazes de determinar o pico do GBM de cada um dos 14 GRBs e com isto calculamos o Δt de cada fóton subtraindo o tempo a partir do *trigger* pelo pico de detecção do GBM. A figura 12 é uma exemplo de gráfico produzido pelo programa GSpec

utilizando o GRB090902B.

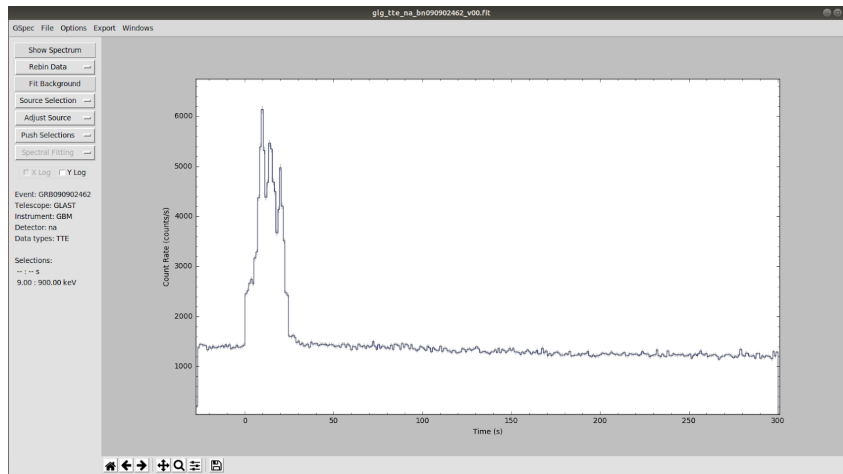


Figura 12 – Exemplo dos picos na detecção para o GRB090902B.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em nossa análise, iremos utilizar o tempo a partir do *trigger*, porque assim nós reduzimos nossas hipóteses em cima dos mecanismos de funcionamento dos GRBs ao utilizar o Δt obtido experimentalmente ao invés de assumir que os fótons de altas energias foram emitidos simultaneamente ao pico de detecção do GBM. Além disso, não há diferença estatística relevante entre considerar o tempo a partir do *trigger* ou o tempo a partir do pico do GBM. Portanto, será utilizado o tempo do *trigger* do Telescópio FERMI.

Com o objetivo de entender o comportamento dos dados experimentais, nós iremos discutir na próxima seção as maneiras na qual analisamos os dados experimentais, incluindo testar a hipótese em que o comportamento dos fótons é devido a efeitos de LIV, a hipótese em que o atraso é devido a delays intrínsecos a fonte e por fim a combinação das hipóteses anteriores, onde o atraso é devido a ambos os efeitos.

2.4.4 Análises

Vale lembrar que possuímos nove subconjuntos de dados e uma maneira de apresentar e uma maneira de manipular os dados experimentais. Iremos realizar a análise sob os nove subconjuntos de dados com o objetivo de descobrir quais diferenças tais imposições implicam em nossa análise e as consequências para a hipótese de LIV.

Nossa análise é subdividida em quatro investigações diferentes para constatarmos se os conjuntos de parâmetros experimentais são compatíveis com a hipótese de LIV apresentada. As sub-análises são feitas nos nove subconjuntos e são definidas a seguir:

2.4.4.1 Primeira sub-análise:

A primeira sub-análise é chamada de LIV pura, onde nós consideramos que todo o delay no tempo de chegada detectado é devido a efeitos de LIV e nós modelamos os dados experimentais considerando que o delay no tempo é da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1+n}{2H_0} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right) \int_0^z \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.33)$$

2.4.4.2 Segunda sub-análise:

A segunda sub-análise é chamada de LIV + delay intrínseco e constante, onde nós consideramos que delay no tempo detectado é devido a uma combinação de efeitos LIV e uma contribuição constante de atrasos intrínsecos na fonte dos fótons, Isto é feito de duas maneiras. Na primeira nós consideramos que os atrasos na fonte são os mesmos para todos os fótons e todos os GRBs, uma quantidade constante de tempo. Assim o delay no tempo detectado é modelado da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1+n}{2H_0} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right) \int_0^z \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} + (1+z)t_{int}. \quad (2.34)$$

onde t_{int} é o atraso intrínseco na fonte. A segunda maneira é nós consideramos que o atraso intrínseco é uma porcentagem do delay que nós medimos. Assim o delay no tempo detectado é modelado da seguinte forma:

$$(1 - t_{per})\Delta t = \frac{1+n}{2H_0} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right) \int_0^z \frac{(1+z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.35)$$

onde t_{per} é a porcentagem do atraso detectado que é devido a aspectos intrínsecos à fonte de fótons, neste trabalho nós consideramos $t_{per} = 0, 1, 0, 3$ e $0, 5$

2.4.4.3 Terceira sub-análise:

A terceira sub-análise é chamada de atraso intrínseco puro como uma função da energia, onde nós consideramos que todo o delay no tempo de chegada dos fótons que nós detectamos é devido a aspectos intrínsecos à fonte e que os atrasos são uma função da energia dos fótons. Isto é feito de duas maneiras diferentes. No primeiro caso iremos considerar que os atrasos na fonte possuem a forma de uma lei de potências. Assim o delay no tempo detectado é modelado da seguinte forma:

$$\Delta t = (1+z)\alpha E^\beta. \quad (2.36)$$

onde α e β são os parâmetros de nossa análise. No segundo caso, consideramos que os atrasos intrínsecos na fonte possuem a forma de uma exponencial. Assim o delay no tempo detectado é modelado da seguinte forma:

$$\Delta t = (1 + z)\alpha e^{\beta E}. \quad (2.37)$$

onde α e β são os parâmetros de nossa análise.

2.4.4.4 Quarta sub-análise:

A quarta sub-análise é chamada LIV + atraso intrínseco como uma função da energia, onde nós consideramos que o delay no tempo detectado é devido a uma combinação de efeitos LIV + aspectos intrínsecos à fonte com atrasos como uma função da energia dos fótons. Esta análise é feita de duas maneiras distintas. Na primeira nós consideramos que os atrasos intrínsecos à fonte possuem a forma de uma lei de potências. Assim o delay no tempo detectado é modelado como uma combinação de LIV + lei de potência da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1 + n}{2H_0} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right) \int_0^z \frac{(1 + z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1 + z)^3 + \Omega_\Lambda}} + (1 + z)\alpha E^\beta. \quad (2.38)$$

onde α e β são os parâmetros de nossa análise. A segunda maneira é considerar que os atrasos na fonte possuem a forma de uma exponencial. Assim o delay no tempo detectado é modelado como uma combinação de LIV + exponencial da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1 + n}{2H_0} \left(\frac{E}{E_{LIV}} \right) \int_0^z \frac{(1 + z)dz}{\sqrt{\Omega_m(1 + z)^3 + \Omega_\Lambda}} + (1 + z)\alpha e^{\beta E}. \quad (2.39)$$

onde α e β são os parâmetros de nossa análise.

Podemos aferir se o comportamento dos fótons apresentados é compatível com o modelo de LIV ou com os modelos sem LIV. Devido a nossas 9 divisões no conjunto de dados podemos também aferir se o comportamento é ou não dependente do Δt ou da energia.

Na próxima seção iremos discutir como comparar nossas diferentes análises. Devido ao fato de nossas análises possuírem diferentes números de parâmetros e nossos conjuntos de dados possuírem quantidades de dados diferentes a comparação não é tão trivial como comparar os valores de um dado método estatístico, como o χ^2 , Portanto devemos usar métodos estatísticos que levam em consideração tais diferenças como o critério de informação de Akaike.

2.4.5 O Método AIC

O critério de informação de Akaike (AIC) é um critério utilizado para determinar o quão bem um modelo se adequa a um dado conjunto de dados e é usado para comparar a qualidade relativa de um dado conjunto de modelos. O método é definido da seguinte forma:

$$AIC = 2K - 2\ln(\mathcal{L}) \quad (2.40)$$

onde k é número de parâmetros em um determinado modelo e \mathcal{L} é a máxima verossimilhança. A partir do valor obtido para AIC o critério de Akaike nos diz que o modelo com menor valor de AIC é o escolhido como o que mais se adequa ao conjunto de dados.

Quando o conjunto de dados é pequeno, como o que acontece em alguns de nossos conjuntos, temos que o critério de Akaike pode não funcionar como esperado. Desta maneira uma correção como apresentada abaixo é necessária:

$$AICc = AIC + \frac{2k^2 + 2k}{n - k - 1} \quad (2.41)$$

onde n é o tamanho amostral do nosso conjunto, note que quando $n \rightarrow \infty$ temos $AICc = AIC$.

No cálculo do método AICc é utilizado a máxima verossimilhança, porém nós podemos aproximar a máxima verossimilhança utilizando o valor do χ^2 quando o valor das incertezas são Gaussianas ou quase Gaussianas da seguinte forma:

$$\chi^2 = -2\ln(\mathcal{L}) \quad (2.42)$$

Tal comportamento das incertezas está presente em nosso conjunto de dados.

Na próxima seção utilizando do método AICc nós iremos apresentar e comparar nossas análises com intuito de determinar qual hipótese se adequa melhor aos dados experimentais e discutiremos as suas implicações físicas.

2.5 Resultados e Discussão

Nesta seção iremos apresentar as análises e resultados que obtivemos ao aplicar os modelos apresentados nas seções anteriores ao nosso conjunto de dados e discutir sobre as possíveis interpretações dos resultados obtidos.

A tabela 4 mostra todos os resultados obtidos por nossas modelagens, com a análise feita sobre qual conjunto, os valores obtidos para os parâmetros definidos para cada modelo, os erros obtidos, χ^2 e uma comparação estatística entre os resultados.

Tabela 4 – Análises bem sucedidas e seus resultados

Análises	LIV	Alpha	Beta
LIV 40GeV-20s	2.14e1		
LIV 40GeV-45s	2.37e1		
LIV 40GeV-70s	2.61e1		
LIV 25GeV-20s	2.54e1		
LIV 25GeV-45s	2.96e1		
LIV 25GeV-70s	5.19e1		
LIV 10GeV-20s	5.76e1		
LIV 10GeV-45s	1.25e2		
LIV 10GeV-70s	2.18e2		
LIV+C 40GeV-20s	6.16e1	-5.34e1	
LIV+C 40GeV-45s	5.28e1	-4.37e1	
LIV+C 40GeV-70s	1.34e2	-1.35e2	
LIV+C 25GeV-20s	5.22e1	-2.83e1	
LIV+C 25GeV-45s	6.72e1	-3.45e1	
LIV+C 25GeV-70s	2.45e2	-1.51e2	
LIV+C 10GeV-20s	1.59e2	-3.35e1	
LIV+C 10GeV-45s	3.92e2	-9.29e1	
LIV+C 10GeV-70s	7.56e2	-1.88e2	
Expo 10GeV-20s		1.00e2	-1.02e4
Expo 10GeV-45s		1.00e2	-6.32e3
Expo 10GeV-70s		1.44e2	-6.96e3
LIV+Expo10GeV-20s	1.20e0	1.08e2	-1.03e2
LIV+Expo10GeV-70s	9.36e0	2.94e2	-1.34e2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos notar que na tabela 4 não há todas as análises que foram propostas nas seções anteriores, propomos 36 análises (9 conjuntos e 4 modelos), porém a tabela apresenta somente 23 análises, por que tal discrepância? A discrepância se deve ao fato de que algumas das análises propostas, que não estão presentes na tabela, serem incapazes de modelar os pontos experimentais, ou seja, não houve curva no formato apresentado pelo modelo capaz de se adequar aos dados experimentais no dado conjunto.

Em tais análises foi possível obter uma curva capaz de se adequar aos dados experimentais dos conjuntos explicitados acima. Os valores obtidos para os parâmetros experimentais de cada modelo e os respectivos χ^2 estão ilustrados na tabela 4. Nossa análise foi feita utilizando a plataforma do CERN ROOT para a análise de dados.

Ao comparar nossas análises atual com feitas anteriormente (48), podemos notar que as análises apresentadas neste trabalho apresentam χ^2 consideravelmente maiores aos obtidos em análises similares feitas em trabalhos anteriores. Esta diferença notável se deve ao fato que neste trabalho foi levado em consideração os erros devido a observação dos pontos experimentais. Tal consideração nos mostrou que o comportamento dos dados experimentais não indique o que trabalhos anteriores indicavam. Os dados experimentais

possivelmente nos mostram uma compatibilidade significativamente menor aos modelos apresentados do que o suspeitado anteriormente.

Em nossa análise podemos notar que o comportamento dos dados experimentais depende do *cutoff* na energia e no tempo, onde para *cutoffs* altos na energia e baixos no delay levam a um comportamento mais compatível com o previsto por LIV. Já no caso contrário, onde fazemos um *cutoff* baixos na energia e altos no delay, o comportamento dos dados experimentais passa a ser mais compatível como um modelo exponencial isento de efeitos LIV. Tais constatações são ilustradas nas figuras 13, 14, 15:

1) Pure LIV 40GeV-45s

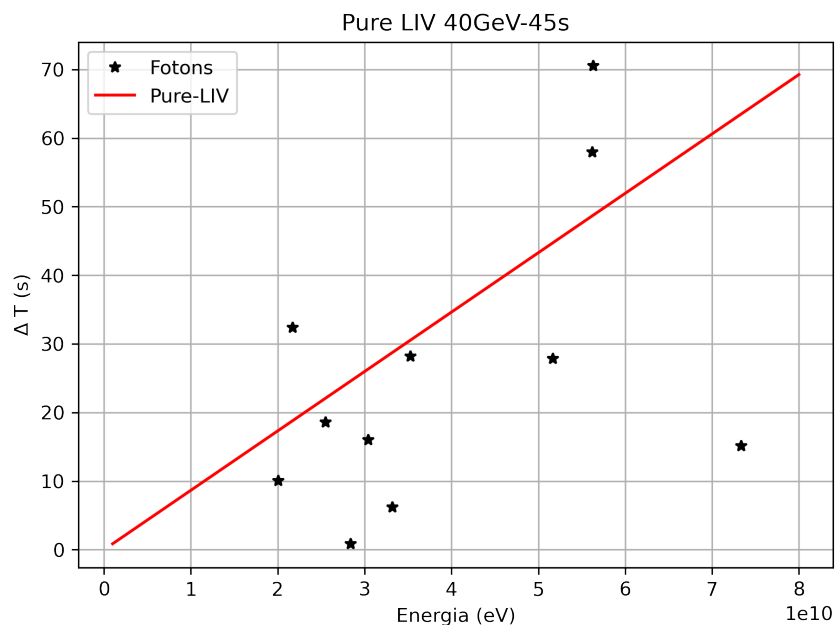


Figura 13 – Gráfico 1: 40GeV-45s Pure LIV, O fit foi feito utilizando a equação (2.33) e o resultado obtido para E_{LIV} é $2.37 \times 10^{27} eV \pm 5.60 \times 10^{25}$. O erro está incluso porem é menor do que os pontos e linhas usadas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

2) Exponencial 10GeV-70s

3) Exponencial+LIV 10GeV-70s

Os gráficos mostram a diferença de comportamento dos fótons em função dos *cutoffs* na energia e no atraso, no gráfico 1 demonstra que o modelo LIV foi o que melhor se adequou quando os *cutoffs* foram mais restritivos. Em contrapartida, o gráfico 2 demonstra que o modelo de atraso intrínseco foi o que melhor se adequou quando os *cutoffs* foram menos restritivos. O gráfico 3 ilustra o modelo misto, onde o delay é uma combinação de LIV com atrasos intrínsecos, no caso uma exponencial, tal combinação é a curva contínua, a curva descontínua demonstra que a região de menor energia possui um comportamento

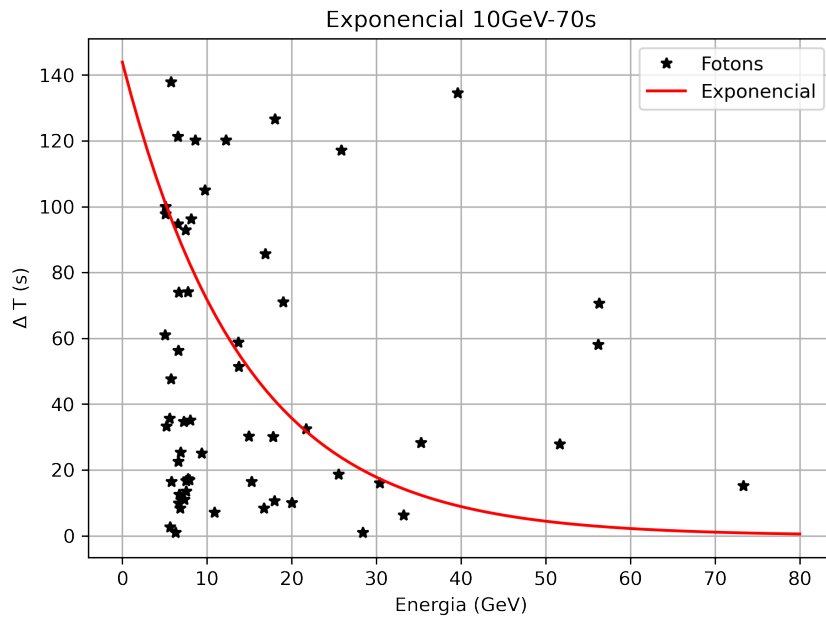


Figura 14 – Gráfico 2: 10GeV-70s Exponencial, o fit foi feito utilizando a equação (2.37) e os resultados obtidos para os parâmetros foram $\alpha = 1.44 \times 10^2 \pm 1.40 \times 10^0$ e $\beta = -6.96 \times 10^3 \pm 3.80 \times 10^1$. O erro está incluso porem é menor do que os pontos e linhas usadas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

mais compatível com o modelo exponencial e em contrapartida, a região de maior energia é mais compatível com o modelo LIV.

Com a existência destas duas regiões nós podemos concluir que os efeitos previstos pelo modelo LIV, caso ocorram, ocorrem com fótons de altíssima energia, 40 GeV ou superior, e que caso ocorram para fótons menos energéticos, seus efeitos são não detectáveis pelos atuais observatórios e o atraso observado nos fótons de altas energias advindos de GRBs é devido ou a mecanismos de emissão ou pela mera não simultaneidade e aleatoriedade da emissão dos fótons durante o colapso gravitacional.

Nós propomos como próximos passos em nossa pesquisa a expansão de nossas análises em dois pontos, sendo o primeiro a amplificação da base de dados, na obtenção de fótons mais energéticos e menos energéticos, Essa ampliação levará ao aumento de nossa estatística, permitindo que haja uma diminuição de efeitos discrepantes causados por possíveis *outliers* e possibilita uma melhor aferição de possíveis efeitos restritos a determinados níveis energéticos. O segundo caminho para expansão das análises aqui apresentadas seria o caminho da individualização dos GRBs, ou seja, repetir as análises porém aplicando-as aos GRBs individualmente. Essa mudança permitirá que possamos obter melhores parâmetros para os delays devido a características intrínsecas dos GRBs, pois assim, levaremos em consideração particularidades de cada GRB, ao invés de tratar todos os delays intrínsecos como iguais e/ou compatíveis como feito neste trabalho,

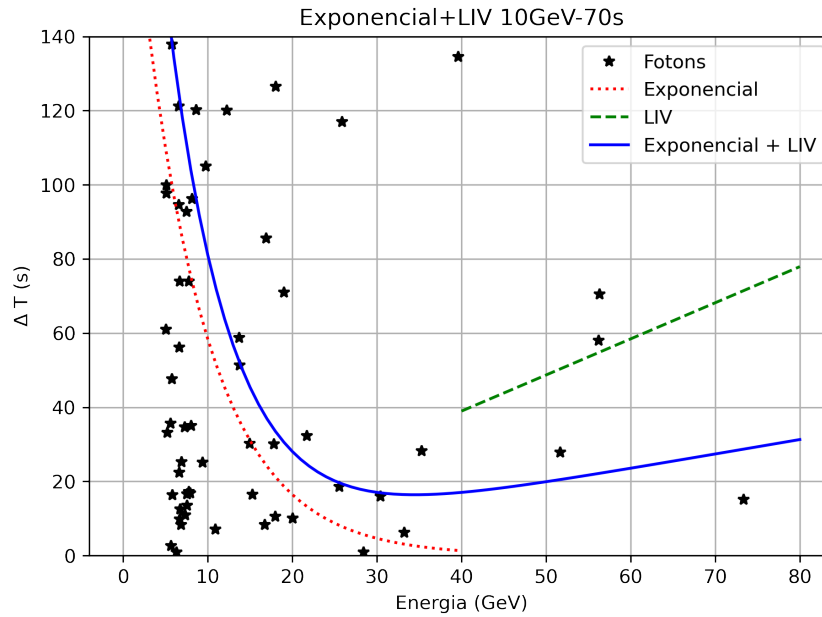


Figura 15 – Grafico 3 : 10 GeV-70s LIV+Exponencial, o fit da linha continua foi feito utilizando a equação (2.39) e os resultados obtidos para os parâmetros foram E_{LIV} é $9.37 \times 10^{26} eV \pm 1.30 \times 10^{25}$, $\alpha = 2.94 \times 10^2 \pm 1.23 \times 10^1$ e $\beta = -1.34 \times 10^2 \pm 2.04 \times 10^0$, O fit para as curvas pontilhada e tracejada foi feito usando respectivamente as equações (2.37) e (2.33) e nos domínios de 0 a 40 GeV e 40 GeV em diante, os resultados obtidos foram $\alpha = 2.07 \times 10^2 \pm 4.24 \times 10^0$, $\beta = -1.26 \times 10^2 \pm 1.33 \times 10^0$ e E_{LIV} é $2.44 \times 10^{27} eV \pm 8.25 \times 10^{25}$, tal análise foi feita com objetivo de ilustrar a prevalência do comportamento exponencial nos fótons menos energéticos e do comportamento LIV nos mais energéticos. O erro está incluso porem é menor do que os pontos e linhas usadas.

Fonte: Elaborada pelo autor.

consequentemente levando a uma melhor obtenção dos parâmetros relacionados a efeitos devido a LIV.

Em resumo, as mudanças propostas para trabalhos futuros levará a uma melhor compreensão dos possíveis efeitos devido à LIV no delay dos fótons oriundos de GRBs, devido a estatística advindas dos futuros trabalhos.

3 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos o modelo SME, que apresenta compatibilidade com LIV. A partir dele, fizemos uma derivação detalhada da equação-chave para o atraso no tempo de chegada dos fótons como função da energia e uma derivação detalhada considerando efeitos cosmológicos. Com nosso modelo teórico, nós conduzimos estudos dos objetos astrofísicos mais propensos para o estudo LIV, os GRBs, com objetivo de entender suas propriedades, mecanismos de emissão e diferentes tipos. Realizamos uma apresentação do funcionamento do telescópio FERMI, para elucidar como os GRBs são detectados, quais parâmetros são medidos e como tal medição afetaria nossa análise. Posteriormente nós selecionamos um conjunto que contém 57 Fótons de 14 GRBs, que consiste em todos os fótons detectados pelo Telescópio Espacial Fermi de Raios Gama entre os anos de 2008 e 2020 e cuja energia emitida é maior que 10 GeV e que foram detectados dentro de um intervalo de tempo, que depende do redshift, após o *trigger*.

Tendo obtido nosso conjunto de dados nós apresentamos um reescalonamento para dados experimentais devido a existência de fótons advindos de múltiplos GRBs. Usamos somente a correção devido a efeitos cosmológicos como reescalonamento. Em seguida, nossa análise foi subdividida em quatro estudos diferentes para constatar se os conjuntos de parâmetros experimentais são compatíveis com a hipótese de LIV apresentada. As sub-análises foram feitas em nove subconjuntos.

As análises mostraram que o comportamento dos fótons é dependente do *cutoff* escolhido para a energia. Fótons de mais alta energia tiveram um comportamento mais compatível com LIV e fótons menos energéticos tiveram um comportamento mais compatível com um modelo de delay intrínseco, criando assim duas regiões com comportamentos distintos. Da existência de tais regiões podemos concluir que os efeitos LIV, caso ocorram, ocorrem com fótons de altíssima energia, e que, caso ocorram para fótons menos energéticos seus efeitos são não detectáveis pelos atuais observatórios e que o atraso observado nos fótons é devido aos mecanismos de emissão.

Por fim, propomos para estudos futuros uma especialização do trabalho realizado, por meio da individualização das análises por GRB, da melhoria do nosso entendimento sobre possíveis delays intrínsecos e do aumento da base de dados dos fótons. Consequentemente, isso diminuiria possíveis erros advindos da baixa estatística, da multiplicidade dos GRBs e da necessidade do reescalonamento, possibilitando uma melhor avaliação da presença ou não de efeitos LIV durante o voo dos fótons.

REFERÊNCIAS

- 1 SALAM, A. Unification of fundamental forces. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- 2 BOJOWALD, M.; MORALES-TÉCOTL, H. A.; SAHLMANN, H. Loop quantum gravity phenomenology and the issue of lorentz invariance. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 71, Apr. 2005. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.084012.
- 3 GUBITOSI, G.; MAGUEIJO, J. Reappraisal of a model for deformed special relativity. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 33, n. 11, p. 115021, 2016.
- 4 MAVROMATOS, N. E. Lorentz invariance violation from string theory. 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0708.2250.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2022.
- 5 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 58, p. 116002, Oct. 1998. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.116002.
- 6 CASTELLANI, L. Non-commutative geometry and physics: a review of selected recent results. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 17, n. 17, p. 3377, 2000.
- 7 BEEKMAN, A. J.; RADEMAKER, L.; WEZEL, J. van. An introduction to spontaneous symmetry breaking. **SciPost Physics Lecture Notes**, SciPost, p. 11, 2019. DOI: 10.21468/SciPostPhysLectNotes.11.
- 8 ZOU, X.-B. *et al.* Model-independent constraints on lorentz invariance violation via the cosmographic approach. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 776, p. 284–294, 2018.
- 9 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 55, p. 6760 •® 6774, June 1997. DOI: 10.1103/PhysRevD.55.6760.
- 10 BROWN, L. S.; GABRIELSE, G. Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a penning trap. **Reviews Modern Physics**, American Physical Society, v. 58, p. 233 •® 311, Jan. 1986. DOI: 10.1103/RevModPhys.58.233.
- 11 GABRIELSE, G. *et al.* Precision mass spectroscopy of the antiproton and proton using simultaneously trapped particles. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 82, p. 3198 •® 3201, Apr. 1999. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.3198>.
- 12 KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D. Constraints on lorentz violation from clock-comparison experiments. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 60, p. 116010, Nov. 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.116010.
- 13 WOLF, P. *et al.* Improved test of lorentz invariance in electrodynamics. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 70, p. 051902, Sept. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.051902.

- 14 HUGHES, V. W. *et al.* Test of *cpt* and lorentz invariance from muonium spectroscopy. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 87, p. 111804, Aug. 2001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.111804.
- 15 KOSTELECKÝ, V. A. Sensitivity of *CPT* tests with neutral mesons. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 80, p. 1818 •® 1821, Mar. 1998. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.1818.
- 16 AMELINO-CAMELIA, G. *et al.* In-vacuo-dispersion features for GRB neutrinos and photons. **Nature Astronomy**, v. 1, p. 0139, 2017. DOI: 10.1038/s41550-017-0139.
- 17 XU, H.; MA, B.-Q. Light speed variation from gamma ray burst GRB 160509A. **Physics Letters**, B760, p. 602 •®604, 2016. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.07.044.
- 18 GLEISER, R. J.; KOZAMEH, C. N. Astrophysical limits on quantum gravity motivated birefringence. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 64, p. 083007, Sept. 2001. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.083007.
- 19 JACOBSON, T.; LIBERATI, S.; MATTINGLY, D. Tev astrophysics constraints on planck scale lorentz violation. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 66, p. 081302, Oct. 2002. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.081302.
- 20 LEHNERT, R.; POTTING, R. Vacuum Čerenkov radiation. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 93, p. 110402, Sept. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.110402.
- 21 LEHNERT, R.; POTTING, R. Čerenkov effect in lorentz-violating vacua. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 70, p. 125010, Dec. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.125010.
- 22 STECKER, F. W. Cosmic physics: the high energy frontier. **Journal of Physics G: nuclear and particle physics**, IOP Publishing, v. 29, n. 10, p. R47 •®R88, Sept. 2003. DOI: 10.1088/0954-3899/29/10/201.
- 23 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Lorentz violation and short-baseline neutrino experiments. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 70, p. 076002, Oct. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.076002.
- 24 KOSTELECKY, A.; RUSSELL, N. **Data Tables for Lorentz and CPT Violation**. 2008. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0801.0287.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2022.
- 25 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 58, p. 116002, Oct. 1998. DOI: 10.1103/PhysRevD.58.116002.
- 26 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Electrodynamics with lorentz-violating operators of arbitrary dimension. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 80, p. 015020, July 2009. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.015020.
- 27 KLINKHAMER, F. R.; SCHRECK, M. New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified-Maxwell theory. **Physical Review D**, v. 78, n 8, p. 085026, 2008.

-
- 28 MYERS, R. C.; POSPELOV, M. Ultraviolet modifications of dispersion relations in effective field theory. **Physical Review Letters**, v. 90, n. 21, p. 211601, 2003.
- 29 KISLAT, F.; KRAWCZYNSKI, H. Search for anisotropic Lorentz invariance violation with gamma-rays. **Physical Review D**, v. 92, n. 4, p. 045016, 2015.
- 30 MARTÍNEZ-HUERTA, H.; PÉREZ-LORENZANA, A. Restrictions from lorentz invariance violation on cosmic ray propagation. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 95, p. 063001, Mar. 2017. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.063001.
- 31 JACOB, U.; PIRAN, T. Lorentz-violation-induced arrival delays of cosmological particles. **Journal of Cosmology and Astroparticles Physics**, v. 2008, p. 031, 2008. DOI: 10.1088/1475-7516/2008/01/031.
- 32 D'AVANZO, P. Short gamma-ray bursts: a review. **Journal of High Energy Astrophysics**, v. 7, p. 73–80, 2015. DOI: 10.1016/j.jheap.2015.07.002.
- 33 KOUVELIOTOU, C. *et al.* Identification of two classes of gamma-ray bursts. **Astrophysical Journal**, v. 413, n. 2, p. L101, Aug. 1993.
- 34 EICHLER, D. *et al.* Nucleosynthesis, neutrino bursts and -rays from coalescing neutron stars. **Nature News**, Nature Publishing Group, v. 340, p. 126-128, 1989. DOI: 10.1038/340126a0.
- 35 MESZAROS, P. Theories of gamma-ray bursts. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 40, n. 1, p. 137–169, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev.astro.40.060401.093821>. Acesso em: 30 abr. 2022.
- 36 LONGAIR, M. S. High energy astrophysics. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- 37 PIRAN, T. The physics of gamma-ray bursts. **Reviews of Modern Physics**, American Physical Society (APS), v. 76, n. 4, p. 1143 • @1210, Jan. 2005. DOI: /10.1103/RevModPhys.76.1143.
- 38 VERES, P.; BHAT, P. N.; BRIGGS, E. A. Observation of inverse compton emission from a long -ray burst. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 575, n. 7783, p. 459 • @463, Nov. 2019. DOI: 10.1038/s41586-019-1754-6.
- 39 MAGIC Collaboration. Teraelectronvolt emission from the -ray burst GRB 190114C. **Nature**, v. 575, p. 455–458, 2019. DOI: 10.1038/s41586-019-1750-x.
- 40 ABDALLA, H.; AHARONIAN, F.; BENKHALI, e. a. A. Revealing x-ray and gamma ray temporal and spectral similarities in the grb 190829a afterglow. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 372, n. 6546, p. 1081 • @1085, June 2021. DOI: 10.1126/science.abe8560.
- 41 PARADIJS, J. van *et al.* Transient optical emission from the error box of the -ray burst of 28 february 1997. **Nature**, v. 386, p. 686–689, 1997. DOI: 10.1038/386686a0.
- 42 KULKARNI, S. R. *et al.* Identification of a host galaxy at redshift $z = 3.42$ for the -ray burst of 14 december 1997. **Nature**, v. 393, p. 35–39, 1998. DOI: 10.1038/29927.

43 COSTA, E.; FRONTERA, F.; HEISE. Discovery of an x-ray afterglow associated with the -ray burst of 28 february 1997. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 387, n. 6635, p. 783 • @785, June 1997. DOI: 10.1038/42885.

44 NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. GLAST science writer's guide : exploring the extreme universe. 2008. Disponível em: https://www.nasa.gov/pdf/221503main_GLASTWritersGuide_0408.pdf. Acesso em: 30 abr. 2022.

45 ICECUBE, U. of W. Grbs data table. 2023. Disponível em: https://user-web.icecube.wisc.edu/~grbweb_public/Summary_table/Summary_table.html. Acesso em: 30 abr. 2022.

46 NASA. Index of lat triggers. 2023. Disponível em: <https://heasarc.gsfc.nasa.gov/FTP/fermi/data/lat/triggers/>. Acesso em: 30 jan. 2022.

47 NASA. Fermi ssc - lat photon, event and spacecraft data. 2023. Disponível em: <https://fermi.gsfc.nasa.gov/cgi-bin/ssc/LAT/LATDataQuery.cgi>. Acesso em: 30 jan. 2022.

48 CASTILHO, R. R. **A quebra da invariância de Lorentz no tempo de chegada dos raios gama**. 2019. Trabalho de conclusão de curso (Física) - Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – RELAÇÃO DE DISPERSÃO DO FÓTON - LI

Para que possamos calcular a relação de dispersão do fóton nós devemos primeiramente introduzir o tensor eletromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{A.1})$$

onde A é o quadripotencial. A lagrangiana eletromagnética é escrita como função do tensor eletromagnético da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

que pode ser expandida e simplificada como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) \quad (\text{A.4})$$

Para calcular a relação de dispersão nós devemos usar as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Da nossa lagrangiana podemos ver que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Calculando as derivadas, temos que:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Agora nós podemos usar o condição de gauge de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{A.8})$$

e assim nossas equações se tornam:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \tag{A.9}$$

Para resolver esta equação diferencial nós podemos usar o seguinte ansatz:

$$A^\nu = \exp(-ikx), k = (\omega, -\vec{k}) \tag{A.10}$$

que quando substituída na equação diferencial nos leva a:

$$\omega^2 - k^2 = 0 \implies \omega^2 = k^2 \implies E = P \tag{A.11}$$

que é a relação de dispersão do fóton.