

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

DEFLEXÃO SOLAR DO GRÁVITON -
ENERGIA GRAVITACIONAL EM UMA
TEORIA NÃO-SIMÉTRICA DA
GRAVITAÇÃO.

Lucas Chibebe Céleri

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de
São Carlos, da Universidade de São Paulo, para
a obtenção do título de **Mestre** em Ciências :
Física Básica.

Orientador: Prof. Dr. Silvestre Ragusa

DEPARTAMENTO DE FÍSICA E INFORMÁTICA

SÃO CARLOS - 2003

Deflexão Solar do Gráviton - Energia Gravitacional em uma Teoria Não-Simétrica da Gravitação. Lucas Chibebe Céleri - São Carlos, 2003. 62 p.

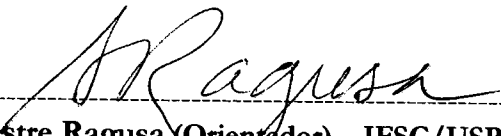
Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, 2003.

Orientador: Prof. Dr. Silvestre Ragusa.

Palavras Chaves: Deflexão, Gráviton, Energia, Teoria Não-Simétrica

**MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
DE LUCAS CHIBEBE CELERI, APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA
DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 22/08/2003.**

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Silvestre Ragusa (Orientador) – IFSC/USP



Prof. Dr. George Emanuel Abraham Matsas – IFT/UNESP



Prof. Dr. Roland Köberle – IFSC/USP

...

Dianzi a me non fuor cose create

Se non etterne, e io etterna duro

Lasciate ogne speranza, voi ch'intrate ¹

¹Antes de mim não foi criado mais/ Nada senão eterno, e eterna eu duro./ Deixai toda esperança, ó vós que entraís. - Dante Alighieri, A Divina Comédia - Inferno, Canto III. Versos escritos sobre as portas do inferno.

*Este trabalho teve o apoio
financeiro da CAPES.*

AGRADECIMENTOS

A meu orientador pelo excelente trabalho de orientação e também pela atenção e confiança em mim depositadas. A meus amigos, pelo inestimável companheirismo e pelas frutíferas discussões durante a realização deste trabalho.

A meus pais, que nunca deixaram de me apoiar. Aos professores e funcionários do Instituto, sem os quais a realização deste trabalho não teria sido possível.

Conteúdo

1	Deflexão Solar do Gráviton	11
1.1	Introdução	12
1.2	Cálculo Semi-Clássico da Seção de Choque Diferencial de Espalhamento de um Gráviton pelo Sol	17
1.3	Cálculo do Ângulo de Deflexão Solar do Gráviton	22
2	Energia Gravitacional em uma Teoria Não-Simétrica da Gravi- tação	24
2.1	Introdução	25
2.2	Análise da Energia	31
2.3	Cálculo das Constantes de Expansão da Métrica	36
3	Conclusões e Perspectivas	41
3.1	Deflexão Solar do Gráviton	42
3.2	Energia Gravitacional em uma Teoria Não-Simétrica da Gravitação	43
A	Espalhamento de Rutherford: Tratamento Quântico	45
B	Cálculo de $\bar{h}_{\mu\nu}$	47

C Soma Sobre as Polarizações do Gráviton	50
D Cálculo de $T_B^{\mu\nu}$	53
E Cálculo do Determinante da Métrica	55
F Cálculo da Função $R(r)$	57
G Transformação de Coordenadas do Elemento de Linha	60

RESUMO

Neste trabalho são estudados dois problemas, como resumidos abaixo

Parte I - Deflexão Solar do Gráviton

Neste trabalho calculamos o ângulo de deflexão do gráviton pelo Sol através de sua seção de choque diferencial de espalhamento. A expressão para a seção de choque é obtida através de uma teoria semi-clássica. O resultado obtido para o ângulo de desvio do gráviton, para pequenos ângulos, é o mesmo atribuído à luz, na sua geodésica nula.

O conteúdo deste trabalho deu origem ao artigo:

Ragusa, S. and Céleri, L. C., Gen. Relativ.. *Solar Gravitational Deflection of a Graviton*. **35**, 1125 (2003).

Parte II - Energia Gravitacional em uma Teoria Não-Simétrica da Gravitação

A ausência de modos radiativos de energia negativa numa proposta teoria da gravitação baseada em uma métrica não-simétrica é reanalisada. Isto porque a contribuição de uma parte da lagrangeana deixou de ser considerada. Mostramos aqui que tal contribuição para a energia é nula. O caráter de positividade da energia na teoria fica então firmemente estabelecido.

O conteúdo deste trabalho deu origem ao trabalho:

Ragusa, S. and Céleri, L. C. *Ghost-free Analysis of a Nonsymmetric Theory of Gravitation*. Aceito para publicação no Brazilian Journal of Physics.

ABSTRACT

Neste trabalho são estudados dois problemas, como resumidos abaixo

Parte I - Deflexão Solar do Gráviton

Neste trabalho calculamos o ângulo de deflexão do gráviton pelo Sol através de sua seção de choque diferencial de espalhamento. A expressão para a seção de choque é obtida através de uma teoria semi-clássica. O resultado obtido para o ângulo de desvio do gráviton, para pequenos ângulos, é o mesmo atribuído à luz, na sua geodésica nula.

O conteúdo deste trabalho deu origem ao artigo:

Ragusa, S. and Céleri, L. C., Gen. Relativ.. *Solar Gravitational Deflection of a Graviton*. **35**, 1125 (2003).

Parte II - Energia Gravitacional em uma Teoria Não-Simétrica da Gravitação

A ausência de modos radiativos de energia negativa numa proposta teoria da gravitação baseada em uma métrica não-simétrica é reanalisada. Isto porque a contribuição de uma parte da lagrangeana deixou de ser considerada. Mostramos aqui que tal contribuição para a energia é nula. O caráter de positividade da energia na teoria fica então firmemente estabelecido.

O conteúdo deste trabalho deu origem ao trabalho:

Ragusa, S. and Céleri, L. C. *Ghost-free Analysis of a Nonsymmetric Theory of Gravitation*. Aceito para publicação no Brazilian Journal of Physics.

Capítulo 1

Deflexão Solar do Gráviton

1.1 Introdução

Quando estudamos a deflexão da luz pelo campo gravitacional do Sol na Teoria da Relatividade Geral (RG), a trajetória do raio de luz é descrito pela geodésica nula. Nada é dito a respeito do caráter tensorial da radiação. Portanto, a única propriedade usada é que a radiação se propaga com velocidade c . Podemos então suspeitar de que todos os tipos de ondas não massivas, que viajam então com velocidade c , devam ser defletidos pelo mesmo ângulo. Neste trabalho verificamos isto para o caso do gráviton.

A maneira de se trazer a tona o caráter tensorial da onda é calculando-se o ângulo de desvio através da seção de choque diferencial de espalhamento. Este cálculo foi feito para o caso do fóton, no contexto da Teoria Quântica de Campos, por Boccalett *et al.* [1], dando o mesmo resultado da RG. Mais recentemente [2] o cálculo para o caso do bóson escalar não massivo levou ao mesmo resultado.

Neste trabalho calculamos o ângulo de deflexão do gráviton e mostramos que o resultado é também igual ao obtido através da geodésica nula. Afim de ilustrar o procedimento de obtenção do desvio do gráviton à partir da seção de choque vamos considerar como exemplo o caso do espalhamento de Rutherford. A Fig. 1.1 ilustra o espalhamento da partícula α , de carga q e massa m com velocidade inicial v_0 ao ser desviada por um núcleo com carga Q .

Na descrição clássica, partindo da lei de Newton e da força coulombiana obtém-se a relação entre o parâmetro de impacto b e o ângulo de deflexão θ ,

$$b = \frac{qQ}{mv_0^2} \cot g \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (1.1)$$

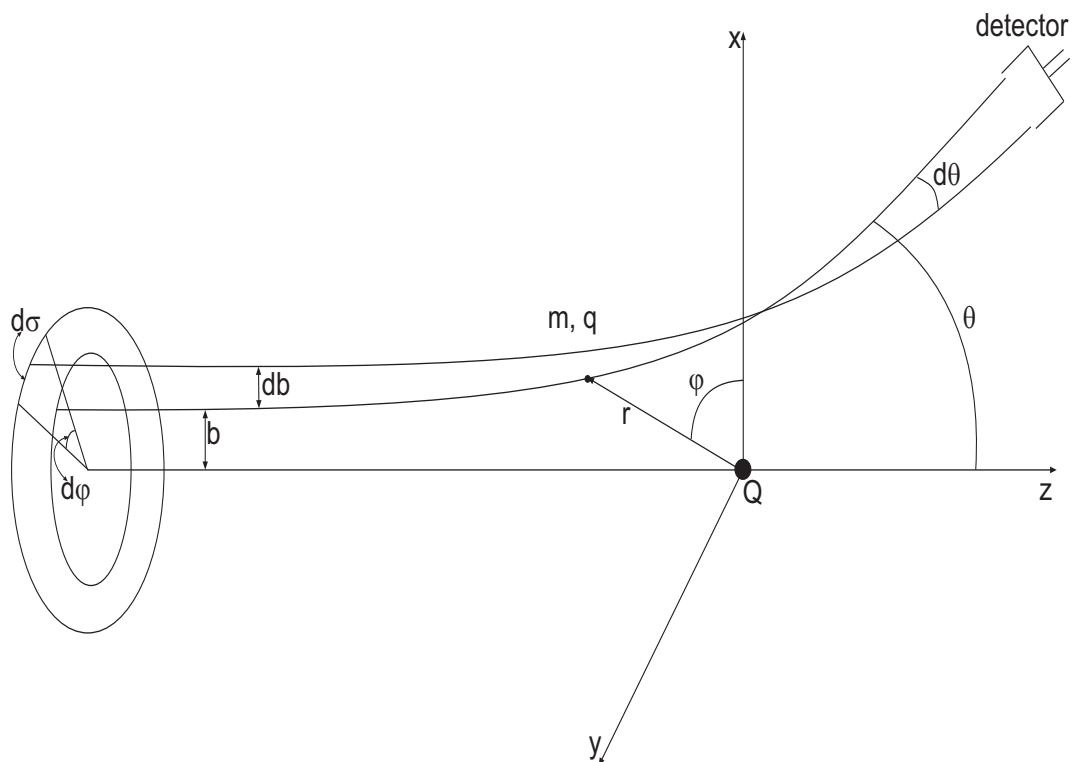


Figura 1.1: Espalhamento de Rutherford

As partículas que chegam ao detector com ângulo sólido $d\Omega$ são aquelas que passam pela área transversal elementar $d\sigma$ chamada seção de choque. Da Fig. 1.1 temos $d\Omega = -\sin\theta d\theta d\phi$ e $d\sigma = b d\phi db$. Portanto, a distribuição angular é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{bd\phi db}{\sin\theta d\theta d\phi} = -\frac{bdb}{\sin\theta d\theta}. \quad (1.2)$$

O sinal negativo está de acordo com o fato de que uma diminuição do parâmetro de impacto corresponde a um aumento no ângulo de desvio. Usando a Eq (1.1) em (1.2) obtemos o conhecido resultado

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{qQ}{2mv_0^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.3)$$

Notemos agora que, inversamente, conhecendo-se a expressão para a seção de choque podemos obter a relação entre parâmetro de impacto e o ângulo de

espalhamento. Esta situação é a que poderia ocorrer quando o problema do espalhamento de Rutherford é tratado quanticamente (este cálculo é apresentado no Apêndice A), pois neste caso a Eq. (1.3) é obtida diretamente. Vejamos como isto pode ser feito pois esta é a situação na qual estaremos envolvidos ao querermos a expressão do parâmetro de impacto quando de posse da seção de choque de espalhamento do gráviton pelo Sol. Tendo a Eq. (1.3) e usando a Eq. (1.2) obtemos

$$-\frac{bdb}{\text{sen}\theta d\theta} = \left[\frac{qQ}{2mv_0^2} \right]^2 \frac{1}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.4)$$

Logo, usando a relação $\text{sen}\theta = 2\text{sen}(\theta/2)\text{cos}(\theta/2)$ resulta

$$bdb = - \left[\frac{qQ}{2mv_0^2} \right]^2 \frac{2\text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}{\text{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.5)$$

Integrando o lado esquerdo desta equação nos limites entre 0 e b e os correspondentes valores π e θ do ângulo obtemos

$$b^2 = \left(\frac{qQ}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.6)$$

Portanto, vem para b o resultado escrito na Eq. (1.1).

Antes de entrar no nosso problema vejamos algum detalhe dos casos da deflexão solar da luz e do bóson escalar não-massivo. Para a luz a expressão para a seção de choque diferencial de espalhamento pelo Sol obtida através da Teoria Quântica de Campos é [1]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 \text{cotg}^4\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (1.7)$$

Aqui M é a massa do Sol e G é a constante gravitacional. Vamos agora aplicar

o método descrito anteriormente para calcular a relação entre o parâmetro de impacto e o ângulo de desvio. Das Eqs. (1.2) e (1.7) obtemos

$$-\frac{bdb}{\text{sen}\theta d\theta} = \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \cot g^4\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (1.8)$$

Integrando obtemos

$$b^2 = 4 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \left[\frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 4\ln\left[\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right]. \quad (1.9)$$

Dividindo por b^2 e chamando $f(\theta)$ a expressão dentro do colchetes resulta

$$1 = 4 \left(\frac{GM}{bc^2}\right)^2 f(\theta). \quad (1.10)$$

Para deflexão rasante ao Sol com raio R , temos $b = R$. Neste caso o fator que multiplica $f(\theta)$ é da ordem de 10^{-12} e menor ainda se $b > R$. Concluimos então que a função $f(\theta)$ tem que ser da ordem de 10^{12} ou maior. Dada à sua estrutura vemos que isto só é possível se θ for próximo de zero. Neste caso $f(\theta)$ se reduz a $4/\theta^4$. Obtemos então

$$R^2 = 4 \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{4}{\theta^2}\right). \quad (1.11)$$

Logo, para um vôo rasante ao Sol

$$\theta = \frac{4GM}{c^2 R}, \quad (1.12)$$

que é exatamente igual ao valor obtido através do cálculo da geodésica nula.

Para o caso do bóson escalar não-massivo a expressão para a seção de choque é [2]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{M^2 G^2}{c^4 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.13)$$

Usando a Eq. (1.2) e integrando obtemos

$$b^2 = -2 \frac{M^2 G^2}{c^4} \left[\frac{-2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right]. \quad (1.14)$$

Usando o mesmo raciocínio chega-se ao mesmo resultado escrito na Eq. (1.12).

Em 1967 DeWitt [3] calculou, via Teoria Quântica de Campos, a seção de choque para o espalhamento de um gráviton por um bóson escalar massivo. No limite não-relativístico em que se despreza o recuo do bóson o resultado obtido foi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 M^2}{c^4 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[\text{sen}^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (1.15)$$

Na próxima seção mostraremos como obter diretamente este resultado através de uma teoria semi-clássica do espalhamento de um gráviton pelo Sol. Em seguida, na Sec. 1.3, obteremos a expressão para o ângulo de deflexão do gráviton a partir dessa equação.

1.2 Cálculo Semi-Clássico da Seção de Choque Diferencial de Espalhamento de um Gráviton pelo Sol

A densidade de lagrangeana de interação entre o campo gravitacional do Sol e o gráviton é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}^{(s)}T^{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Nesta expressão $h_{\mu\nu}^{(s)} = g_{\mu\nu}^{(s)} - \eta_{\mu\nu}$ é o desvio do espaço chato do campo externo do Sol com métrica $g_{\mu\nu}^{(s)}$. $T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momentum do gráviton. Sua expressão é [4]

$$T^{\mu\nu} = h^{\alpha\beta, \mu} h_{\alpha\beta, \nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h^{\alpha\beta, \rho} h_{\alpha\beta, \rho}. \quad (1.17)$$

Usaremos agora o fato de que a combinação $\bar{h}_{\mu\nu}^{(s)} = h_{\mu\nu}^{(s)} - (1/2)\eta_{\mu\nu}h^{(s)}$, com $h^{(s)} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^{(s)}$, só tem como componente não nula $\bar{h}_{00}^{(s)} = -4GM/rc^2$. Isto mostramos no Apêndice B. É interessante então colocarmos \mathcal{L} em termos de $\bar{h}_{\mu\nu}^{(s)}$. Disto resulta

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\bar{h}_{\mu\nu}^{(s)}h_{\alpha\beta, \mu} h^{\alpha\beta, \nu}. \quad (1.18)$$

Na gauge $h_{o\mu} = h_{\alpha}^{\alpha} = 0$, somente h_{ij} é não nulo. Logo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\bar{h}_{00}^{(s)}h_{ij, 0} h^{ij, 0}. \quad (1.19)$$

O gráviton é descrito semiclassicamente pela onda plana

$$h_{ij} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega V}}\varepsilon_{ij}(\hat{k}) \left(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right), \quad (1.20)$$

com coeficiente fixado de tal modo que a energia associada à onda é, seguindo Einstein, igual a $\hbar\omega$ (tratamento semiclássico). Em detalhe, partimos da onda plana

$$\begin{aligned} h_{ij} &= 2H_0\varepsilon_{ij} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + i\alpha) \\ &= H\varepsilon_{ij}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + H^*\varepsilon_{ij}e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

com $H = H_0e^{i\alpha}$, frequência ω , vetor de onda \vec{k} e polarização ε_{ij} ($\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 1$). A energia da onda dentro da caixa de normalização com volume $V = L^3$ é, da Eq. (1.17)

$$E = \int T^{00} dV = \int h^{ij,0} h_{ij}{}^{,0} dV. \quad (1.22)$$

Daqui resulta

$$\begin{aligned} E &= \int 4H_0^2\omega^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + i\alpha) dV \\ &= 4H_0^2\omega^2 \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + i\alpha) dV. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Usando $k_i = n_i 2\pi/L$, com $n_i = \pm 1, \pm 2, \dots$, proveniente da condição de contorno periódica, o valor da integral é $V/2$. Logo, $E = 2H_0^2\omega^2 V$. Com $E = \hbar\omega$ resulta $H_0 = \sqrt{\hbar/2\omega V} = |H|$. O valor da integral também decorre se tomarmos o valor médio temporal de seu integrando.

A solução geral é, indicando a polarização λ da onda,

$$h_{ij} = \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega V}} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k}) \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \quad (1.24)$$

A amplitude de probabilidade de transição do estado inicial $(\varepsilon_{ij}^{(\lambda)}, \vec{k})$ para o estado final $(\varepsilon_{ij}^{(\lambda')}, \vec{k}')$ é

$$\begin{aligned} S &= \frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L} dV dt \\ &= \frac{2i}{\hbar} \int \bar{h}_{00} h'_{ij} h_{ij} \omega \omega' dV dt. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Nesta expressão h_{ij} descreve o gráviton incidente com frequência ω e h'_{ij} descreve o gráviton espalhado com frequência ω' . Seguindo o tratamento semiclássico a parte com $e^{-i\omega t}$ descreve destruição (absorção) e a parte com $e^{i\omega t}$ descreve criação (emissão). Logo devemos ter para o gráviton incidente

$$h_{ij} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega V}} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)}(\hat{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.26)$$

e

$$h'_{ij} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega' V}} \varepsilon_{ij}^{(\lambda')}(\hat{k}') e^{-i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} \quad (1.27)$$

para o gráviton espalhado. Substituindo (1.26) e (1.27) na Eq. (1.25) obtemos

$$S = \frac{i}{V} \int \bar{h}_{00} \sqrt{\omega \omega'} \varepsilon_{ij}^{(\lambda')} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} e^{-i(\omega - \omega') t} dV dt. \quad (1.28)$$

Chamando $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ e introduzindo a transformada de Fourier de $\bar{h}_{00}^{(s)}(r)$

$$\bar{h}_{00}^{(s)}(q) = \int \bar{h}_{00}^{(s)}(r) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} dV, \quad (1.29)$$

resulta

$$S = \frac{i\pi}{V} \sqrt{\omega \omega'} \varepsilon_{ij}^{(\lambda')} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \bar{h}_{00}^{(s)}(q) \delta(\omega - \omega'). \quad (1.30)$$

A probabilidade de transição por unidade de tempo com o gráviton final no ângulo sólido $d\Omega$ é

$$dw = \int \frac{|S|^2}{T} d\eta, \quad (1.31)$$

com $d\eta = (V k'^2 dk' d\Omega)/(2\pi)^3$ sendo o número de estados correspondentes. Logo

$$dw = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^3 V} (\varepsilon_{ij} \varepsilon'_{ij})^2 |\bar{h}_{00}^{(E)}(\vec{q})|^2 d\Omega. \quad (1.32)$$

A seção de choque diferencial é $d\sigma = dw/J$, onde $J = c/V$ é a corrente incidente.

Portanto, a distribuição angular para raios não polarizados é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4} |\bar{h}_{00}^{(E)}(\vec{q})|^2 \frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn})(\varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn}). \quad (1.33)$$

Como $\bar{h}_{00}^{(s)}(r) = -4GM/rc^2$, a Eq. (1.29) nos dá

$$\bar{h}_{00}^{(s)}(q) = -\frac{4\pi GM}{c^2 k^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.34)$$

A soma sobre as polarizações do gráviton incidente é [5]

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \varepsilon_{mn}^{(\lambda)} &= \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{im} \hat{k}_j \hat{k}_n - \delta_{jn} \hat{k}_i \hat{k}_m \\ &\quad - \delta_{in} \hat{k}_j \hat{k}_m - \delta_{jm} \hat{k}_i \hat{k}_n + \delta_{ij} \hat{k}_m \hat{k}_n + \delta_{mn} \hat{k}_i \hat{k}_j + \hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_m \hat{k}_n). \end{aligned} \quad (1.35)$$

No Apêndice C é mostrado como obter esta expressão. Lembrando que $\hat{k}_i \hat{k}_i = 1$ e $\hat{k}_i \hat{k}'_i = \cos\theta$, resulta

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn})(\varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn}) = \cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}^8\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (1.36)$$

Com este resultado, a Eq. (1.33) fica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 M^2}{c^4 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\text{cos}^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (1.37)$$

que reproduz a Eq (1.15). De posse deste resultado podemos calcular o ângulo de deflexão do gráviton.

1.3 Cálculo do Ângulo de Deflexão Solar do Gráviton

Das Eqs. (1.2) e (1.15) obtemos

$$bdb = -\frac{G^2M^2}{c^4 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}^8\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \text{sen}\theta d\theta. \quad (1.38)$$

Integrando esta relação para b entre os valores de 0 e b e com os valores correspondentes de θ entre π e θ obtemos

$$b^2 = \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left[\frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 4\ln\left(\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - 6\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2}{3}\text{sen}^6\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{11}{3} \right]. \quad (1.39)$$

Seguindo o mesmo raciocínio apresentado na introdução, escrevemos o termo entre colchetes como $f(\theta)$ e dividimos a Eq. (1.39) por b^2 . Logo

$$1 = \left(\frac{2GM}{bc^2}\right)^2 f(\theta). \quad (1.40)$$

Como assinalado anteriormente, o fator que multiplica $f(\theta)$ é da ordem de 10^{-12} (para $b = R$) ou menor. Portanto $f(\theta)$ tem que ser da ordem de 10^{12} ou maior (se $b > R$). Analisando sua estrutura vemos que isto só pode ocorrer para o caso em que o ângulo θ é próximo de zero. Neste caso $f(\theta)$ se reduz a $4/\theta^2$ e a Eq. (1.39) torna-se

$$R^2 = \left(\frac{4GM}{c^2\theta}\right)^2. \quad (1.41)$$

Portanto, o valor do ângulo de deflexão solar para uma deflexão rasante do gráviton é

$$\theta = \frac{4GM}{c^2 R}. \quad (1.42)$$

Este é o mesmo resultado obtido para a luz através da geodésica nula. Este resultado dá suporte à conjectura de que todos os campos não massivos devam ser defletidos pelo Sol pelo mesmo ângulo.

Capítulo 2

Energia Gravitacional em uma Teoria Não-Simétrica da Gravitação

2.1 Introdução

Alguns anos atrás uma teoria estendida da gravitação baseada em uma métrica não-simétrica foi elaborada por Ragusa [6] (referido como I daqui para diante). Trata-se de gravitação pura, sem associação da parte anti-simétrica da métrica com o tensor do campo eletromagnético. Num segundo trabalho [7] (referido como II daqui para diante) foi obtida a solução das equações de campo para uma fonte pontual, junto com as implicações para o movimento de partículas e luz. Mostrou-se que a teoria é consistente com os quatro testes solares clássicos da Relatividade Geral (RG).

A teoria foi desenvolvida para tentar resolver o problema do aparecimento de modos radiativos de energia negativa (fantasmas) que, como apontado por Damour *et al.* (DDM) [8], estava presente em teorias anteriores. Antes de discutirmos em detalhes este problema vamos apresentar a estrutura da teoria proposta em I afim de definirmos precisamente que parte da energia será analisada neste trabalho. A teoria baseia-se numa métrica $g_{\alpha\beta}$ não simétrica como utilizada por Einstein ao elaborar sua teoria unificada, mas sem a identificação da parte anti-simétrica com o eletromagnetismo. A geometria do espaço é exatamente a mesma. O espaço é não-riemanoiano tendo tanto $g_{\alpha\beta}$ como a conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$ não simétricos em relação aos índices α e β . É importante o fato de que a parte anti-simétrica da conexão $\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\sigma} = (1/2)(\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma})$ é um tensor de terceira ordem ¹. Por contração resulta um tensor de primeira ordem, $\Gamma_{\alpha} = \Gamma_{[\alpha\sigma]}^{\sigma}$. Temos então em mãos tensores

¹É fácil ver da Eq. (2.37) que

$$\Gamma_{[\alpha\beta]}^{\lambda}(x) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \bar{x}^{\eta}} \frac{\partial \bar{x}^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{[\rho\sigma]}^{\eta}(\bar{x}).$$

de ordem ímpar envolvendo a conexão, não presentes na RG. Como na RG, a lagrangeana é escrita sob a forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{g}^{\alpha\beta} (Q_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Lambda g_{\alpha\beta}). \quad (2.1)$$

Aqui Λ é a constante cosmológica. Usamos a notação $\mathbf{A} = \sqrt{-g}A$, sendo g o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. A pergunta é qual é a expressão do tensor de segunda ordem $Q_{\alpha\beta}$ contendo somente derivadas primeiras e produtos quadráticos da conexão, como é o caso do tensor de Ricci na RG em relação aos símbolos de Christoffel. Santaló [9], estudando matematicamente a estrutura do espaço não riemano de Einstein mostrou que existem oito destes possíveis tensores. Uma combinação conveniente adotada em I envolve a parte simétrica $P_{(\alpha\beta)}$ e a parte anti-simétrica $P_{[\alpha\beta]}$ do tensor usado por Einstein [10]

$$P_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\lambda}^{\lambda} - \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\lambda,\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha,\beta}^{\lambda}) + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{(\lambda\rho)}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^{\rho}. \quad (2.2)$$

O conjunto completo é

$$\begin{aligned} P_{(\alpha\beta)} \quad , \quad P_{[\alpha\beta]} \quad , \quad \Gamma_{[\alpha\rho]}^{\lambda} \Gamma_{[\lambda\beta]}^{\rho} \quad , \quad \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \quad , \quad \Gamma_{(\alpha;\beta)} \\ \Gamma_{(\alpha;\beta)} \quad , \quad \Gamma_{[\alpha\beta]}^{\lambda} \Gamma_{\lambda} \quad , \quad \Gamma_{(\alpha\lambda),\beta}^{\lambda} - \Gamma_{(\beta\lambda),\alpha}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aqui usamos a notação $\Gamma_{\alpha;\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda}$. As fontes do campo na teoria não-simétrica são o tensor energia-momentum-esforços $T^{\mu\nu}$ e mais a corrente material $J^{\mu} = \rho u^{\mu}$, onde ρ é a densidade de massa no repouso e u^{μ} a quadrivelocidade. Na RG a corrente J^{μ} não comparece como fonte pelo fato de não existir um tensor de primeira ordem com o qual se poderia construir um escalar por contração com J^{μ} , que pudesse comparecer na lagrangeana da matéria. No espaço não-riemano

presente temos o tensor de primeira ordem Γ_μ , o que permite a entrada da corrente como fonte do campo.

Em vez de J^μ é utilizado em I a corrente $S^\mu = Fn^\mu$, onde n^μ é a densidade de corrente numérica e o fator F mede seu acoplamento com a geometria. Temos $n^\mu = nu^\mu$, onde n é a densidade numérica de partículas. Esta quantidade é usada já na RG para a descrição do interior de estrelas associada às partículas estáveis próton, neutron e elétron. A lagrangeana de interação da matéria com o campo é [6]

$$\mathbf{L}_M = -8\pi\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 4\pi\sqrt{-g}S^\alpha\Gamma_\alpha, \quad (2.4)$$

com a condição de não se fazer a variação de $\sqrt{-g}$.

As ondas gravitacionais provem agora de ambas as fontes, sendo a devida a S^μ relacionada diretamente com a parte anti-simétrica da métrica, $g_{[\alpha\beta]}$. DDM mostraram que em teorias anteriores as ondas devidas a S^μ tem energia negativa. Com o intuito de tê-las com energia positiva a teoria em I foi construída de tal modo que $g_{[\alpha\beta]}$ obedecesse equações do tipo de Maxwell no vácuo. Desse modo foi possível produzir as respectivas ondas com energia positiva como o são as eletromagnéticas na teoria de Maxwell. Escrevendo o tensor $Q_{\alpha\beta}$ em (2.1) como uma combinação linear dos oito tensores em (2.3) e fazendo as variações da lagrangeana do campo no vácuo com relação a $g^{\alpha\beta}$ e $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ obtemos as equações de campo contento os coeficientes da combinação linear. Tem-se quatro equações de campo. Impondo que duas delas tenham que ser do tipo de Maxwell os coeficientes ficam determinados. As equações impostas são a equação da divergência

$$(\sqrt{-g}g^{[\alpha\beta]})_{,\beta} = 0 \quad (2.5)$$

e que

$$\Lambda g_{[\alpha\beta]} = \partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha, \quad (2.6)$$

isto é, que $g_{[\alpha\beta]}$ deriva de uma função tipo potencial. Como consequência $g_{[\alpha\beta]}$ obedece a equação do rotacional

$$g_{[\alpha\beta],\mu} + g_{[\beta\mu],\alpha} + g_{[\mu\alpha],\beta} = 0. \quad (2.7)$$

As outras duas equações de campo são

$$U_{\alpha\beta} + \Lambda g_{(\alpha\beta)} = 0, \quad (2.8)$$

onde $U_{\alpha\beta}$ é a parte do tensor $P_{(\alpha\beta)}$ que contém somente a parte simétrica da conexão.

$$U_{\alpha\beta} = \Gamma_{(\alpha\beta),\lambda}^\lambda - \Gamma_{(\alpha\lambda),\beta}^\lambda + \Gamma_{(\alpha\beta)}^\rho \Gamma_{(\rho\lambda)}^\lambda - \Gamma_{(\alpha\lambda)}^\rho \Gamma_{(\rho\beta)}^\lambda. \quad (2.9)$$

A outra equação é

$$\mathbf{g}^{(\alpha\beta)}_{,\gamma} + \mathbf{g}^{(\alpha\mu)} \Gamma_{(\mu\gamma)}^\beta + \mathbf{g}^{(\beta\mu)} \Gamma_{(\mu\gamma)}^\alpha - \mathbf{g}^{(\alpha\beta)} \Gamma_{(\mu\gamma)}^\mu = 0 \quad (2.10)$$

que nos dá a relação entre $\Gamma_{(\alpha\beta)}^\sigma$ e a métrica. Tal relação é

$$\begin{aligned} \Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{(\alpha\lambda)} (s_{\gamma\nu,\mu} + s_{\mu\gamma,\nu} - s_{\mu\nu,\gamma}) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\ln \frac{s}{g} \right)_{,\gamma} (g^{(\alpha\gamma)} s_{\mu\nu} - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\gamma - \delta_\nu^\gamma \delta_\mu^\alpha). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nesta equação $s_{\alpha\beta}$ simétrico e com determinante s , é o inverso de $g^{(\alpha\beta)}$, $g^{(\alpha\beta)}s_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta$. É de se notar que o sistema de equações é compatível com o número de incógnitas. De fato, com a Eq. (2.11) o tensor $U_{\alpha\beta}$ fica conhecido em termos do tensor métrico. Com isso as Eqs. (2.5), (2.7) e (2.8) constituem um conjunto completo de 12 equações diferenciais para os doze componentes independentes da métrica (existem 16, mas quatro podem ser removidos pelo fato de que existem quatro transformações de coordenadas arbitrárias). Temos nas Eq. (2.5), (2.7) e (2.8) $4 + 4 + 10 = 18$ equações. Entretanto, existem em primeiro lugar os quatro vínculos impostos pelas quatro identidades do tipo Bianchi. Em segundo lugar temos as outras duas identidades

$$g^{[\alpha\beta]}_{,\alpha,\beta} = 0 \quad (2.12)$$

e

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} g_{[\alpha\beta],\gamma,\mu} = 0. \quad (2.13)$$

Com estas seis identidades o número de equações diferenciais é reduzido de 18 para 12, que é igual ao número de elementos independentes da métrica. A densidade de lagrangeana livre que resulta da teoria é

$$\mathbf{L} = \mathbf{g}^{\alpha\beta} \left(U_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Lambda g_{\alpha\beta} + \Gamma_{[\alpha,\beta]} \right). \quad (2.14)$$

É fácil verificar que as equações de campo obtidas, (2.5), (2.7) e (2.8), podem ser reobtidas desta expressão final para a lagrangeana fazendo a variação em relação a $g^{\alpha\beta}$, a $\Gamma_{(\alpha\beta)}^\sigma$ e a Γ_α . As equações de campo completas com as fontes são

$$U_{\alpha\beta} + \Lambda g_{(\alpha\beta)} = 8\pi \left(T_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} g_{(\alpha\beta)} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right), \quad (2.15)$$

$$\Lambda g_{[\alpha\beta]} + \Gamma_{[\alpha,\beta]} = 8\pi \left(T_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{2} g_{[\alpha\beta]} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{g}^{[\alpha\beta]}_{,\beta} = 4\pi \mathbf{S}^\alpha \quad (2.17)$$

e a Eq. (2.10).

Vamos agora passar para a discussão sobre o problema da energia.

2.2 Análise da Energia

Em I foi afirmado que as ondas gravitacionais devidas a S^μ tem energia positiva definida. Entretanto, na análise desta radiação só a parte da lagrangeana (2.14) envolvendo a parte anti-simétrica $g^{[\alpha\beta]}$ de $g^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)} + g^{[\alpha\beta]}$ foi considerada. Ficou então em aberto a questão de qual a contribuição vinda da outra parte, envolvendo a parcela simétrica $g^{(\alpha\beta)}$. Neste trabalho completamos este cálculo mostrando que a contribuição dessa última parte é nula. Isso garante que a teoria está realmente livre de fantasmas.

Para estabelecermos um contato com I reescreveremos a Eq. (2.14) sob a forma

$$\mathbf{L} = \mathbf{g}^{(\alpha\beta)} \left(U_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Lambda g_{(\alpha\beta)} \right) + \mathbf{g}^{[\alpha\beta]} \left(\frac{1}{2} \Lambda g_{[\alpha\beta]} + \Gamma_{[\alpha,\beta]} \right). \quad (2.18)$$

Só a contribuição da segunda parcela foi considerada em I, levando a uma energia positiva. A primeira parcela é a que será analisada aqui.

Seguindo DDM, a idéia por trás do cálculo, que foi seguido em I, consiste em expandir a densidade lagrangeana em torno de um espaço de fundo riemaniano da RG com métrica $G_{\alpha\beta}$. Escrevemos então $g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \bar{g}_{\alpha\beta}$ e expandimos $\bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{g}_{(\alpha\beta)} + \bar{g}_{[\alpha\beta]}$ em potências da parte anti-simétrica de ordem mais baixa $B_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta}^{(1)}$, que atua como uma perturbação. Mantendo a expansão até segunda ordem, temos

$$g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + a B_{\alpha}{}^{\rho} B_{\rho\beta} + b G_{\alpha\beta} B^{\sigma\rho} B_{\sigma\rho}. \quad (2.19)$$

Aqui a e b são parâmetros a serem determinados e índices são levantados com

a métrica $G_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha}{}^{\rho} = G^{\rho\beta}B_{\alpha\beta}$. O que desejamos é calcular a contribuição do campo $B_{\alpha\beta}$ para o fluxo de energia na zona de radiação. Este fluxo é dado por uma integral cujo elemento de integração contém um fator r^2 . Como o campo de radiação tem dependência r^{-1} , os termos que irão contribuir serão aqueles quadráticos em $B_{\alpha\beta}$, o que justifica pararmos a expansão em segunda ordem.

Com tal expansão a densidade de lagrangeana fica separada em dois termos

$$\mathbf{L} = \sqrt{-G}G^{\alpha\beta} \left(R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Lambda G_{\alpha\beta} \right) + \mathbf{L}_B, \quad (2.20)$$

sendo o primeiro termo a lagrangeana correspondente ao campo de fundo riemanniano com o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$. G é o determinante da métrica de fundo, $G_{\alpha\beta}$. \mathbf{L}_B é a contribuição do campo $B_{\alpha\beta}$, que se comporta então como a parte de lagrangeana de “matéria” no campo de fundo.

Nesta formulação o tensor energia-momentum devido ao campo $B_{\alpha\beta}$ é definido pela variação da ação correspondente a B , de acordo com [11] $\delta\mathbf{I} = \int \delta\mathbf{L}_B d^4x = 8\pi \int T_B^{\alpha\beta} \delta G_{\alpha\beta} d^4x$, isto é

$$T_B^{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi\sqrt{-G}} \frac{\delta\mathbf{L}_B}{\delta G_{\alpha\beta}}. \quad (2.21)$$

Como dito anteriormente, só a contribuição da segunda parcela de (2.18) foi analisada em I levando ao seguinte resultado para a contribuição para o tensor energia-momentum

$$T_B^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\Lambda \left(\frac{1}{4}G_{\mu\nu}B^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} - B^{\mu\beta}B^{\nu}{}_{\beta} \right), \quad (2.22)$$

que é típico de um tensor energia-momentum maxwelliano para $\Lambda < 0$. Isto leva a uma energia positiva, como afirmado em I. No Apêndice D mostramos em detalhes a obtenção da Eq. (2.22).

Vamos agora calcular a contribuição vinda do primeiro termo da Eq. (2.18). Como mostraremos em seguida esta contribuição é nula. Feita a expansão, o primeiro termo de (2.18) terá a forma

$$\mathbf{L}_1 = \sqrt{-G}(R + 2\Lambda) + \mathbf{L}_{1B}, \quad (2.23)$$

onde \mathbf{L}_{1B} é a contribuição de $B_{\alpha\beta}$. Para determinarmos sua forma explícita precisamos conhecer as expansões de g , $g^{\alpha\beta}$ e de $s_{\alpha\beta}$ em termos dos parâmetros a e b . O determinante da métrica é

$$g = \frac{1}{24} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\sigma} g_{\delta\rho}. \quad (2.24)$$

Da expressão para a expansão da métrica, Eq. (2.19), e definindo $B^2 = B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ temos, como mostrado detalhadamente no Apêndice E

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-G} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - a + 4b \right) B^2 \right]. \quad (2.25)$$

O inverso do tensor métrico é dado por

$$g^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta} + B^{\alpha\beta} + (1 - a) B^{\alpha\rho} B_{\rho}^{\beta} - b G^{\alpha\beta} B^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma}. \quad (2.26)$$

O inverso da parte simétrica da Eq. (2.26) é

$$s_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - (1 - a) B_{\rho(\alpha} B_{\beta)}^{\rho} + b G_{\alpha\beta} B^2. \quad (2.27)$$

De posse destas expressões podemos escrever a expansão de $\Gamma_{(\alpha\beta)}^{\sigma}$, dada na Eq. (2.11). Tal expansão é

$$\Gamma_{(\alpha\beta)}^{\sigma} = \Sigma_{\alpha\beta}^{\sigma} + \bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)}^{\sigma}. \quad (2.28)$$

O primeiro termo desta expansão é o símbolo de Christoffel do campo de fundo $G_{\alpha\beta}$ e o segundo termo é a contribuição do campo $B_{\alpha\beta}$. Tal contribuição é da ordem $O(B^2)$ e maior, pois $s_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + O(B^2)$. Substituindo esta equação na expressão para o tensor $U_{\alpha\beta}$, na Eq. (2.9), resulta

$$U_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \bar{U}_{\alpha\beta}, \quad (2.29)$$

com

$$\bar{U}_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)|\lambda}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{(\alpha\lambda)|\beta}^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)}^{\lambda} \bar{\Gamma}_{(\lambda\rho)}^{\rho} - \bar{\Gamma}_{(\alpha\rho)}^{\lambda} \bar{\Gamma}_{(\lambda\beta)}^{\rho}. \quad (2.30)$$

As barras verticais nos dois primeiros termos indicam derivadas covariantes em relação ao símbolo de Christoffel. Sabendo de tudo isso é fácil escrever a expressão para \mathbf{L}_{1B} em termos de a e b . Notemos que como cada $\bar{\Gamma}$ é da ordem $O(B^2)$ o termo $\sqrt{-G}G^{\alpha\beta}\bar{U}_{\alpha\beta}$, que provém da expansão do primeiro termo do lado direito da Eq. (2.18) não pode dar contribuição nessa ordem. Isto porque os produtos quadráticos dos $\bar{\Gamma}$ em (2.30) são de quarta ordem e os dois primeiros termos darão contribuições que podem ser escritas como derivadas ordinárias totais,² não contribuindo então para a lagrangeana. Até a desejada segunda ordem, a expressão final para \mathbf{L}_{1B} é

2

Estes termos vão aparecer na lagrangeana sob a forma $\sqrt{-G}G^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)|\lambda}^{\lambda}$. Como a derivada covariante de $G^{\alpha\beta}$ em relação aos símbolos de Christoffel é nula, podemos escrever

$$\sqrt{-G}G^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)|\lambda}^{\lambda} = \sqrt{-G} \left(G^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)}^{\lambda} \right)_{|\lambda} = \sqrt{-G} \left[\left(G^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)}^{\lambda} \right)_{,\lambda} + G^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)}^{\rho}\Sigma_{\rho\lambda}^{\lambda} \right]. \quad (2.31)$$

Usando a relação $\Sigma_{\rho\lambda}^{\lambda} = \sqrt{-G}_{,\rho}/\sqrt{-G}$ obtemos $\sqrt{-G}G^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)|\lambda}^{\lambda} = \left(\sqrt{-G}G^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{(\alpha\beta)}^{\lambda} \right)_{,\lambda}$.

$$\mathbf{L}_{1B}^{(2)} = \sqrt{-G} \left(\left[\frac{1}{4}(1 - 2a + 4b)G^{\alpha\beta} B^2 + (1 - a)B^{\alpha\mu} B_{\mu}^{\beta} \right] R_{\alpha\beta} + \Lambda(4b - a)B^2 \right). \quad (2.32)$$

Para calcular a correspondente contribuição para o tensor momentum-energia falta-nos apenas calcular os valores das constantes a e b . Este cálculo é apresentado na próxima seção.

2.3 Cálculo das Constantes de Expansão da Métrica

Para a determinação dos dois parâmetros na Eq. (2.19) faremos uso da solução das equações de campo encontradas em II para uma massa pontual. A solução para $g_{\alpha\beta}$ correspondendo ao elemento de linha estático e esfericamente simétrico, dado em sua forma padrão por

$$ds^2 = \gamma dt^2 - \alpha dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}\theta d\phi^2), \quad (2.33)$$

é

$$\gamma = \left(1 + \frac{F^2}{r^4}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r} \left[1 + \frac{F^2}{r^4}\right]^{-1/4}\right) \quad (2.34)$$

e

$$\frac{1}{\alpha} = \left(1 + \frac{F^2}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2M}{r} \left[1 + \frac{F^2}{r^4}\right]^{-1/4}\right), \quad (2.35)$$

onde M é a massa da partícula. Os últimos componentes não nulos da métrica são

$$g_{[r0]} = -g_{[0r]} = \frac{F}{r^2(1 + F^2/r^2)^{3/4}}. \quad (2.36)$$

Construiremos agora as coordenadas harmônicas X^α a partir das coordenadas padrão $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ seguindo os mesmos passos encontrados na RG [12]. Este sistema de coordenadas é usado em problemas de radiação, no qual estamos envolvidos. A condição harmônica é definida pela relação $\mathbf{g}^{(\alpha\beta)}(X)\Gamma_{(\alpha\beta)}^\lambda(X) = 0$, sendo X^μ as chamadas coordenadas harmônicas. Vamos passá-la para as coordenadas padrão x^μ . Nestas coordenadas a conexão se torna [13]

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}(x) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial X^{\eta}} \left(\frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\eta}(X) + \frac{\partial^2 X^{\eta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right). \quad (2.37)$$

Contraindo a Eq. (2.37) com $g^{(\alpha\beta)}(x)$ obtemos

$$g^{(\alpha\beta)}(x) \Gamma_{(\alpha\beta)}^{\lambda}(x) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial X^{\eta}} \left(\frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} g^{(\alpha\beta)}(x) \Gamma_{\rho\sigma}^{\eta}(X) + g^{(\alpha\beta)}(x) \frac{\partial^2 X^{\eta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right). \quad (2.38)$$

Utilizando agora a condição harmônica e também o fato de que

$$g^{\alpha\beta}(X) = \frac{\partial X^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial X^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}(x), \quad (2.39)$$

obtemos a condição harmônica escrita no sistema de coordenadas x^{μ}

$$g^{(\mu\nu)} \left(\frac{\partial^2 X^{\eta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda} \frac{\partial X^{\eta}}{\partial x^{\lambda}} \right) = 0. \quad (2.40)$$

Definimos agora as novas coordenadas X^{μ} como

$$X^1 = R(r) \text{sen}\theta \text{cos}\phi, \quad (2.41)$$

$$X^2 = R(r) \text{sen}\theta \text{sen}\phi \quad (2.42)$$

e

$$X^3 = R(r) \text{cos}\theta. \quad (2.43)$$

Procuramos por uma função $R(r)$ que satisfaça a condição (2.40). De posse desta função podemos determinar o elemento de linha no novo sistema de coordenadas e, comparando com a Eq. (2.19), determinarmos os valores dos parâmetros a e b . Para obtermos $R(r)$ voltamos para as componentes espaciais da Eq. (2.40). Desprezaremos aqui a contribuição da massa M para a curvatura, pois a dependência em F é tudo o que precisamos para determinarmos os valores das

constantes. Com isso e tomando termos até ordem F^2/r^4 obtemos as seguintes expansões para os elementos da métrica dados pelas Eq. (2.34) e (2.35).

$$\gamma = 1 + \frac{F^2}{2r^4} \quad (2.44)$$

e

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{F^2}{r^4}. \quad (2.45)$$

As componentes necessárias da conexão são dadas em II. Substituindo estas relações na Eq. (2.40) obtemos a equação diferencial de segunda ordem que deve ser satisfeita pela função $R(r)$. No Apêndice F mostramos que esta equação é

$$R'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{5F^2}{r^5} \right) R' - \frac{2R}{r^2} + \frac{4RF^2}{r^6} = 0. \quad (2.46)$$

A solução dessa equação é do tipo $R = r + y(r)F^2$, resultando para $y(r)$ a equação

$$y'' + \frac{2}{r}y' - \frac{2}{r^2}y - \frac{1}{r^5} = 0. \quad (2.47)$$

É fácil ver que a solução desta equação é proporcional a r^{-3} . O resultado é

$$y = \frac{1}{4r^3}, \quad (2.48)$$

Logo, a solução da Eq. (2.46) é

$$R = r + \frac{F^2}{4r^3}. \quad (2.49)$$

Como mostrado em detalhes no Apêndice G, o elemento de linha nessas coordenadas harmônicas tem a forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{F^2}{2r^4}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{F^2}{2r^4}\right) \delta_{ij} + \frac{F^2}{r^4} \frac{X_i X_j}{R^2} \right] dX^i dX^j. \quad (2.50)$$

Daqui vemos que

$$g_{00} = 1 + \frac{F^2}{2r^4} \quad (2.51)$$

e

$$g_{ij} = \left(-1 + \frac{F^2}{2r^4}\right) \delta_{ij} - \frac{F^2}{r^4} \frac{X_i X_j}{R^2}. \quad (2.52)$$

Da Eq. (2.19) obtemos, em ordem mais baixa

$$g_{00} = 1 + (a - 2b) B_{0i} B_{0i} \quad (2.53)$$

e

$$g_{ij} = -(1 - 2b B_{0k} B_{0k}) \delta_{ij} - a B_{0i} B_{0j}. \quad (2.54)$$

Comparando a Eq. (2.53) com a Eq. (2.51) vemos que $a - 2b = 1/2$ e $B_{0i} B_{0i} = F^2/r^4$. Notemos que esta segunda relação está de acordo com o termo de primeira ordem em (2.36) $g_{[r0]}^{(1)} = F/r^2 = \sqrt{B_{0i} B_{0i}}$, o módulo de B_{0i} . Da Eq. (2.54) e da Eq. (2.52) vemos que $2b = 1/2$ e $a = 1$. O resultado final para os parâmetros é então

$$a = 1 \quad (2.55)$$

e

$$b = \frac{1}{4}. \quad (2.56)$$

Substituindo estes valores na Eq. (2.32), obtemos

$$\mathbf{L}_{1B}^{(2)} = 0. \quad (2.57)$$

Portanto, a contribuição de segunda ordem de \mathbf{L}_{1B} é nula. Logo, a correspondente contribuição para o tensor energia-momentum é nula. Concluimos então que a Eq. (2.22) dá a expressão completa para o tensor energia-momentum relativo ao campo $B_{\alpha\beta}$. Isto então estabelece de uma maneira completa o caráter de positividade da teoria desenvolvida em I.

Capítulo 3

Conclusões e Perspectivas

3.1 Deflexão Solar do Gráviton

Neste trabalho calculamos o ângulo de desvio do gráviton pelo Sol através do cálculo da seção de choque diferencial, que foi obtida anteriormente via Teoria Quântica de Campos [3]. Mostramos como tal seção de choque pode ser obtida através de um tratamento semiclássico. Como a grandeza GM/c^2R é pequena para o Sol, da ordem de 10^{-6} , o ângulo de desvio é pequeno, como o é na RG. O resultado obtido é o mesmo que aquele atribuído a luz na sua geodésica nula. O cálculo foi motivado pelo fato de que resultados idênticos foram obtidos também através da seção de choque tanto para a luz [1] como para o bóson escalar não-massivo [2]. A deflexão da trajetória atribuída a luz na geodésica nula só utiliza o fato de que sua velocidade é c , nada sendo dito a respeito do caráter tensorial da onda. Pode-se então suspeitar de que tal resultado deve ser o mesmo para qualquer campo não-massivo. Isto foi mostrado ser correto fazendo o cálculo da deflexão através da seção de choque onde aparece então o caráter tensorial da onda. Com o valor obtido também para o gráviton pode-se conjecturar que o resultado é válido para qualquer outro campo não-massivo.

Um estudo interessante seria o cálculo do ângulo de deflexão para férmions de spin $1/2$ e $3/2$.

3.2 Energia Gravitacional em uma Teoria Não-Simétrica da Gravitação

Em I foi desenvolvida uma nova teoria não-simétrica da gravitação que se propunha a resolver o problema do aparecimento de modos radiativos de energia negativa. Tal problema estava presente em teorias anteriores, como mostrado por DDM. As ondas gravitacionais nesta nova teoria são geradas por duas fontes, a corrente S^α e o tensor energia-momentum $T^{\mu\nu}$. DDM mostraram que em teorias anteriores as ondas devidas a S^α tem energia negativa. Em I foi feita a análise da energia dessas ondas e foi afirmado que a teoria é livre de modos radiativos de energia negativa. Entretanto somente a parte da lagrangeana contendo a parcela anti-simétrica $g^{[\alpha\beta]}$ de $g^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)} + g^{[\alpha\beta]}$ foi levada em consideração, deixando em aberto a parte contendo $g^{(\alpha\beta)}$. O resultado da análise feita em I é mostrado na Eq. (2.22). Para $\Lambda < 0$ esta equação nos leva a um tensor do tipo de Maxwell, o que nos dá ondas com energia positiva. Neste trabalho o caráter de positividade da energia foi reanalisado. Calculamos a contribuição para o tensor energia-momentum, como definido pela Eq. (2.21), vindo da parte restante. Tal análise mostrou que esta contribuição é nula. Este resultado é mostrado na Eq. (2.57). Com isto concluímos que a Eq. (2.22) dá a contribuição total do campo anti-simétrico para o tensor energia-momentum. Este resultado confirma, de uma maneira completa, que a teoria desenvolvida em I é realmente livre de fantasmas.

Um interessante estudo seria a investigação das equações de movimento para partículas na teoria.

APÊNDICES

Apêndice A

Espalhamento de Rutherford: Tratamento Quântico

Da regra de ouro de Fermi segue que a probabilidade por unidade de tempo na transição da partícula com momento inicial $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ para o grupo de dn estados com momento entre \vec{p} e $\vec{p} + d\vec{p}$ induzida pelo potencial V é

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \vec{p} | V(r) | \vec{p}_0 \rangle|^2 \left(\frac{dn}{dE} \right)_{E=E_0}. \quad (\text{A.1})$$

Dividindo pela corrente incidente $J = v_0/V$, sendo V o volume de normalização, obtemos a seção de choque $d\sigma$. Como $dn = (Vp^2 dp)/(2\pi\hbar)^3$ e $dE/dp = p/m$ resulta

$$d\sigma = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \left| \int V(r) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}} dV \right|^2 d\Omega. \quad (\text{A.2})$$

Calculando a transformada de Fourier de $V = qQ/r$ obtemos

$$\int V(r) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}} dV = \frac{\pi q Q}{k^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (\text{A.3})$$

Disto resulta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{qQm}{2k^2\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (\text{A.4})$$

Utilizando a relação $mv_0 = \hbar k$ obtemos a Eq. (1.3).

Apêndice B

Cálculo de $\bar{h}_{\mu\nu}$

Com a expansão $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ os símbolos de Christoffel até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ ficam

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} (h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}). \quad (\text{B.1})$$

O tensor de Ricci em primeira ordem fica

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= \Sigma_{\mu\nu,\lambda}^{(1)\lambda} - \Sigma_{\nu\lambda,\mu}^{(1)\lambda} \\ &= -\frac{1}{2}h_{\mu\nu,\rho}{}^\rho + \frac{1}{2}h_{\rho\mu,\nu}{}^\rho - \frac{1}{2}h_{,\mu\nu} + \frac{1}{2}h_{\rho\nu,\mu}{}^\rho, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

com $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. A expansão para o escalar de Ricci é

$$R^{(1)} = h_{\rho\sigma,\rho}{}^{\rho\sigma} - h_{,\rho}{}^\rho. \quad (\text{B.3})$$

De posse destas expressões podemos escrever as equações de Einstein em primeira ordem (linearizadas) $R_{\mu\nu}^{(1)} - (1/2)\eta_{\mu\nu}R^{(1)} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}^{(0)}$. O resultado é

$$-\frac{1}{2}h_{\mu\nu,\rho}{}^\rho - \frac{1}{2}h_{,\mu\nu} + \frac{1}{2}(h_{\rho\mu,\nu}{}^\rho + h_{\rho\nu,\mu}{}^\rho) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h_{\rho\sigma,\rho}{}^{\rho\sigma} - h_{,\rho}{}^\rho) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (\text{B.4})$$

Como a teoria é livre por uma transformação geral de coordenadas podemos escolher um sistema de coordenadas que simplifique estas equações. Um sistema conveniente é o sistema harmônico de coordenadas, definido por $g^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}^{\lambda} = 0$. Esta relação em primeira ordem no campo $h_{\alpha\beta}$ fica

$$h^{\lambda}_{\mu, \mu} = \frac{1}{2}h_{, \lambda}^{\lambda}. \quad (\text{B.5})$$

Com esta relação a Eq. (B.4) toma a forma

$$-\frac{1}{2}\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right)_{, \rho}{}^{\rho} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (\text{B.6})$$

Chamando

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (\text{B.7})$$

temos

$$\bar{h}_{, \rho}{}^{\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}^{(0)}. \quad (\text{B.8})$$

No caso estático as componentes do tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}^{(0)}$ são $T_{00}^{(0)} = \rho c^2$, $T_{0i}^{(0)} = 0$ e $T_{ij}^{(0)} = 0$. Com isto, e lembrando que o campo $\bar{h}_{\mu\nu}$ não depende do tempo, as componentes da Eq. (B.8) tornam-se

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^2}\rho, \quad (\text{B.9})$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{0i} = 0 \quad (\text{B.10})$$

e

$$\nabla^2 \bar{h}_{ij} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Como as duas últimas equações devem valer para todo o espaço, devemos ter $\bar{h}_{0i} = 0$ e $\bar{h}_{ij} = 0$. Para uma massa pontual M temos $\rho = M\delta(\vec{r})$, e resulta

$$\bar{h}_{00} = \frac{4MG}{c^2 r} \quad (\text{B.12})$$

que é a única componente não nula.

Apêndice C

Soma Sobre as Polarizações do Gráviton

A forma mais geral de $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}$ é

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \varepsilon_{mn}^{(\lambda)} = & a\delta_{ij}\delta_{mn} + b(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + c(\delta_{im}k_jk_n + \delta_{jn}k_ik_m \\ & + \delta_{in}k_jk_m + \delta_{jm}k_ik_n) + d(\delta_{ij}k_mk_n + \delta_{mn}k_ik_j) + ek_ik_jk_mk_n. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Sendo a , b , c , d e e constantes a serem determinadas. Os termos agrupados sob os mesmos coeficientes vêm do fato de que o tensor deve respeitar a simetria entre os índices (i, j) , (m, n) e também dos pares (jm, in) . Este tensor satisfaz as condições $\varepsilon_{ij}k_i = 0$ (transversalidade), $\varepsilon_{ii} = 0$ (traço nulo) e $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 1$ (normalização). Contraíndo (C.1) com k_i e utilizando a condição de transversalidade temos

$$\delta_{mn}k_j(a + d) + \delta_{jn}k_m(b + c) + \delta_{mj}k_n(b + c) + k_jk_mk_n(2c + e + d) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned}a + d &= 0 \\ b + c &= 0\end{aligned}\tag{C.3}$$

$$2c + e + d = 0.$$

Disto resulta

$$e = a + 2b.\tag{C.4}$$

Usando agora a condição de traço nulo na Eq. (C.1), temos

$$\delta_{mn}(3a + 2b + d) + k_m k_n(4c + 3d + e) = 0.\tag{C.5}$$

Usando (C.4), chegamos a

$$\begin{aligned}a &= c \\ a &= -b \\ a &= -e.\end{aligned}\tag{C.6}$$

Da condição de normalização vem

$$3a + 12b + 8c + 2d + e = 2.\tag{C.7}$$

Logo

$$a = -\frac{1}{2}.\tag{C.8}$$

Com isso todos os coeficientes ficam determinados. A expressão final para (C.1) fica então

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda} \varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \varepsilon_{mn}^{(\lambda)} &= \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{im} k_j k_n - \delta_{jn} k_i k_m - \delta_{in} k_j k_m \\
&\quad - \delta_{jm} k_i k_n + \delta_{ij} k_m k_n + \delta_{mn} k_i k_j + k_i k_j k_m k_n).
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Apêndice D

Cálculo de $T_B^{\mu\nu}$

Vamos aqui reproduzir o cálculo apresentado em I para a contribuição do campo $B_{\alpha\beta}$ vinda da parte lagrangeana que contém a parte anti-simétrica de $g^{\alpha\beta}$. Da Eq. (2.18) temos

$$\mathbf{L}_{2B} = \mathbf{g}^{[\alpha\beta]} \left(\frac{1}{2} \Lambda g_{[\alpha\beta]} + \Gamma_{[\alpha,\beta]} \right). \quad (\text{D.1})$$

Em segunda ordem esta equação se torna

$$\mathbf{L}_{2B}^{(2)} = \sqrt{-G} B^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} \Lambda B_{\alpha\beta} + \Gamma_{[\alpha,\beta]}^{(1)} \right). \quad (\text{D.2})$$

Da Eq. (2.6) vemos que $\Gamma_{[\alpha,\beta]}^{(1)} = -\Lambda B_{\alpha\beta}$. Disto resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{2B}^{(2)} &= -\frac{\Lambda}{2} \sqrt{-G} B^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{\Lambda}{2} \sqrt{-G} G^{\alpha\rho} G^{\sigma\beta} B_{\rho\sigma} B_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Das relações $\delta\sqrt{-G} = (1/2)\sqrt{-G}G_{\alpha\beta}\delta G^{\alpha\beta}$ e $\delta G^{\mu\nu} = -G^{\mu(\alpha}G^{\beta)\nu}\delta G_{\alpha\beta}$ resulta para a variação da lagrangeana

$$\delta\mathbf{L}_{2B}^{(2)} = \sqrt{-G}\Lambda \left(B^{\mu\rho} B^\nu{}_\rho - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} B^2 \right) \delta G_{\mu\nu} \quad (\text{D.4})$$

Da definição do tensor energia-momentum dada na Eq. (2.21) chegamos ao resultado mostrado na Eq. (2.22).

Apêndice E

Cálculo do Determinante da Métrica

O determinante da métrica é

$$g = \frac{1}{24} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\eta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\sigma} g_{\delta\eta}. \quad (\text{E.1})$$

Reescrevendo a Eq. (2.19) sob a forma $g_{\alpha\mu} = G_{\alpha\mu} + \bar{g}_{\alpha\mu}$; $\bar{g}_{\alpha\mu} = B_{\alpha\mu} + aB_{\alpha}{}^{\rho}B_{\rho\mu} + bG_{\alpha\mu}B^2$ tem-se, até a segunda ordem considerada

$$g = G + \frac{1}{24} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [4G_{\alpha\mu}G_{\beta\nu}G_{\gamma\rho}\bar{g}_{\delta\sigma} + 6G_{\alpha\mu}G_{\beta\nu}\bar{g}_{\gamma\rho}\bar{g}_{\delta\sigma}]. \quad (\text{E.2})$$

Notemos que o termo $B_{\delta\sigma}$ contido em $\bar{g}_{\delta\sigma}$ não dará contribuição porque é anti-simétrico. Usando as relações $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\alpha\mu}G_{\beta\nu} = -G\varepsilon_{\alpha\beta\tau\omega}G^{\tau\rho}G^{\omega\sigma}$ e também a relação $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\omega} = -2(\delta_{\tau}^{\gamma}\delta_{\omega}^{\delta} - \delta_{\tau}^{\delta}\delta_{\omega}^{\gamma})$ obtemos

$$g = G \left(1 + \left[\frac{1}{2} - a + 4b \right] B^2 \right). \quad (\text{E.3})$$

Logo

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-G} \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - a + 4b \right] B^2 \right). \quad (\text{E.4})$$

Apêndice F

Cálculo da Função $R(r)$

A condição harmônica no sistema de coordenadas $x^\mu = (t, -r, -\theta, -\phi)$ fica (Eq. (2.40))

$$\square X_i \equiv g^{(\mu\nu)} \left(\frac{\partial^2 X_i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda \frac{\partial X_i}{\partial x^\lambda} \right) = 0. \quad (\text{F.1})$$

Como somente a parte simétrica do tensor $g^{\alpha\beta}$ aparece nesta equação, os únicos termos não nulos serão aqueles da diagonal, portanto

$$\begin{aligned} \square X_i = & -g^{00}\Gamma_{00}^1 X_{i,1} + g^{11} X_{i,11} - g^{11}\Gamma_{11}^1 X_{i,1} - g^{33}\Gamma_{33}^1 X_{i,1} - g^{22}\Gamma_{22}^1 X_{i,1} \\ & + g^{22} X_{i,22} - g^{33}\Gamma_{33}^2 X_{i,2} + g^{33} X_{i,33}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

As componentes necessárias de $g^{\alpha\beta}$ e da conexão, com $\omega = g_{r0}$, são [7]

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \omega^2}; & g^{11} &= -\frac{\gamma}{\alpha\gamma - \omega^2}; \\ g^{22} &= -\frac{1}{r^2}; & g^{33} &= -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{\gamma'}{2\gamma} + \frac{\gamma F^2}{\alpha r(r^4 + F^2)}; \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{\alpha'}{2\alpha} + \frac{F^2}{r(r^4 + F^2)}; \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{\alpha}; \\
\Gamma_{33}^1 &= -\frac{-r \operatorname{sen}^2 \theta}{\alpha}; \\
\Gamma_{33}^2 &= -\operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta.
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Aqui usamos a notação $\gamma' = \gamma_{,r}$. Destas expressões e também das Eq. (2.41) - (2.43) obtemos, definindo $A = r^4 + F^2$ por simplicidade

$$\begin{aligned}
\Box X_i &= -g^{00} \left[\frac{\gamma'}{2\alpha} + \frac{\gamma F^2}{\alpha r A} \right] R' \frac{X_i}{R} + g^{11} R'' \frac{X_i}{R} - \left[\frac{\alpha'}{2\alpha} + \frac{\gamma F^2}{r A} \right] g^{11} R' \frac{X_i}{R} \\
&\quad - \frac{2X_i R'}{r \alpha R} + \frac{2X_i}{r^2}.
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Fatorando o termo $g^{11} X_i / R$ e lembrando que $g^{00} / g^{11} = -\alpha / \gamma$, obtemos

$$\Box X_i = \frac{g^{11} X_i}{R} \left[\left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{\alpha'}{2\alpha} - \frac{2}{r \alpha g^{11}} \right) R' + R'' + \frac{2R}{r^2 g^{11}} \right]. \tag{F.6}$$

Usando a condição harmônica, $\Box X_i = 0$ obtemos a equação diferencial para a função $R(r)$

$$\left(\frac{\gamma'}{2\gamma} - \frac{\alpha'}{2\alpha} - \frac{2}{r \alpha g^{11}} \right) R' + R'' + \frac{2R}{r^2 g^{11}} = 0, \tag{F.7}$$

Até a desejada ordem F^2 / r^4 resultam as seguintes relações

$$\frac{\gamma'}{2\gamma} = -\frac{F^2}{r^5}, \tag{F.8}$$

$$\frac{\alpha'}{2\alpha} = -\frac{2F^2}{r^5}, \tag{F.9}$$

$$\frac{2}{r\alpha g^{11}} = -\frac{2}{r} \left(1 - \frac{F^2}{r^4}\right) \quad (\text{F.10})$$

e

$$\frac{2}{r^2 g^{11}} = -\frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{2F^2}{r^4}\right). \quad (\text{F.11})$$

Com estas expressões, a Eq. (F.7) torna-se

$$R'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{5F^2}{r^5}\right) R' - \frac{2R}{r^2} + \frac{4RF^2}{r^6} = 0. \quad (\text{F.12})$$

Que é a Eq. (2.46).

Apêndice G

Transformação de Coordenadas do Elemento de Linha

Partimos do elemento de linha no sistema padrão de coordenadas.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma dt^2 - \alpha dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}\theta d\phi^2) \\ &= \gamma dt^2 - \alpha dr^2 - r^2 d\Omega. \end{aligned} \tag{G.1}$$

Da definição das coordenadas harmônicas vemos que $R^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$. Portanto, temos $dR = (\vec{X} \cdot d\vec{X})/R$, sendo $\vec{X} \cdot d\vec{X} = X_1 dX_1 + X_2 dX_2 + X_3 dX_3$. Como $dR = (dR/dr)dr = R' dr$ obtemos

$$dr^2 = \frac{(\vec{X} \cdot d\vec{X})^2}{(RR')^2}. \tag{G.2}$$

Passemos agora para a transformação do elemento $d\Omega$. Vemos que os lados do paralelepípedo mostrado na Fig. G.1 são dados por $L_1 = dR$, $L_2 = R \text{sen}\theta d\phi$ e $L_3 = R d\theta$. Como sua hipotenusa é $dX_i dX_i = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ obtemos

$$R^2 d\Omega = dX_i dX_i - dR^2. \tag{G.3}$$

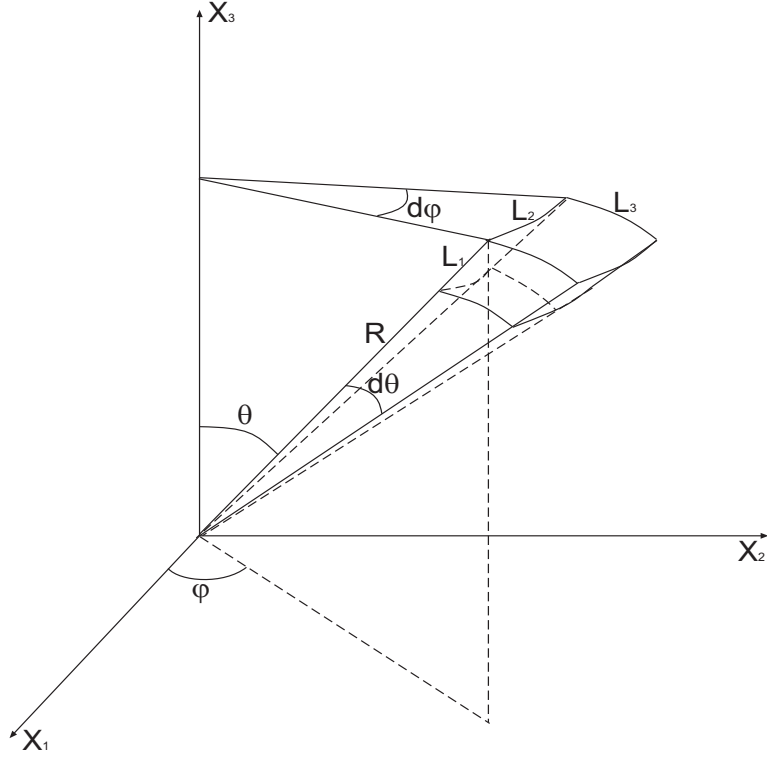


Figura G.1: Transformação do elemento de linha

Substituindo as Eqs. (G.2) e (G.2) na Eq. (G.1) obtemos

$$ds^2 = \gamma dt^2 - \frac{\alpha}{(RR')^2} (\vec{X} \cdot d\vec{X})^2 - \frac{r^2}{R^2} \left(dX_i dX_i - \frac{1}{(R')^2} (\vec{X} \cdot d\vec{X})^2 \right) \quad (\text{G.4})$$

Substituindo agora a expressão para R dada na Eq. (2.49), juntamente com as expressões para γ e α dadas em (2.44) e (2.45), obtemos

$$ds^2 = \left(1 + \frac{F^2}{2r^4} \right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{F^2}{2r^4} \right) \delta_{ij} + \frac{F^2}{r^4} \frac{X_i X_j}{R^2} \right] dX^i dX^j, \quad (\text{G.5})$$

que é a Eq. (2.50).

Bibliografia

- [1] Bocalletti, D. de Sabbata, V. Gualdi, C. e Fortini, P. *Nuevo Cimento*, **48 A**, 58 (1967).
- [2] Accioly, A. e Ragusa, S., *Class. Quantum Grav.*, **19**, 5429 (2002).
- [3] DeWitt, B. S., *Phys. Rev.*, **162**, 1239 (1967).
- [4] Landau, L e Lifshitz, E. *Teoria do Campo*, (1980). Editora Mir. p. 450.
- [5] Landau, L e Lifshitz, E. *Teoria do Campo*, (1980). Editora Mir. p. 461.
- [6] Ragusa, S., *Physical Review D*, **56**, 2864-873 (1997).
- [7] Ragusa, S., *Gen. Relat. Grav.*, p.275 (1998).
- [8] Damour, T., Deser, S., McCarthy, J.. *Phys. Rev. D*, **45**, R3289 (1993).
- [9] Santaló, L. A. *Perspectives in Geometry and Relativity*, (1963). Editado por B. Hoffmann (Indiana University Press, Bloomington).
- [10] Einstein, A., *Ann. Math.* **46**, 578 (1945); Einstein, A. and Straus, E. G., *ibid.* **47**, 731 (1946)
- [11] Landau, L e Lifshitz, E. *Teoria do Campo*, (1980). Editora Mir. p. 110.
- [12] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (1972). John Wiley & Sons, Inc.
- [13] Eisenhart, L. P. *Non-Riemannian Geometry*, (1927). American Mathematical Society. Colloquium Publications, V. **8**.