UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E INFORMÁTICA

Emissão de Momentum Angular - Massa Eletromagnética na Teoria de Maxwell e na Não-linear de Born-Infeld

Matheus Jatkoske Lazo

Dissertação apresentada ao Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências: Física Básica

USP/IFSC/SBI

8-2-001436

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Silvestre Ragusa*

SÃO CARLOS

2002

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA INFORMAÇÃO

Lazo, Matheus Jatkoske

"Emissão de momentum angular – Massa eletromagnética na teoria de Maxwell e na não-linear de Born-Infeld"/ Matheus Jatkoske Lazo – São Carlos, 2002

Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2002 – páginas: 76
Área: Física Básica
Prof. Dr. Silvestre Ragusa

1. Radiação, 2. Massa, 3. Born-Infeld

I. Título

UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Caixa Postal 369
13560-970 São Carlos, SP
Av. Trabalhador São-carlense, 400,
13566-590 São Carlos, SP

Fone/Fax 16 273 9777
www.if.sc.usp.br
wladerez@if.sc.usp.br

MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MATHEUS JATKOSKE LAZO, APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO FÍSICA BÁSICA, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, EM 14/03/2002.

COMISSÃO JULGADORA:

S Ragusa

Prof. Dr. SILVESTRE RAGUSA (Orientador) – IFSC/USP

Antonio José Accioly

Prof. Dr. ANTÔNIO JOSÉ ACCIOLY – UNESP

L. Ioriatti

Prof. Dr. LIDÉRIO CITRÂNGULO IORIATTI JÚNIOR – IFSC/USP

À minha família

Agradecimentos

- À minha querida Helena.
- Ao caríssimo Prof. Silvestre Ragusa pela orientação, dedicação e amizade.
- Aos estimados amigos, Paulo, Leonardo, Ronny, Clodoaldo, Maira, Yuri, Cláudia, Maurício, Silvio e Nilva pelas agradáveis horas que suas companhias me proporcionaram.
- A todos os colegas de trabalho.

Este trabalho foi financiado pela Fundação de de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Resumo

Neste trabalho estudamos quatro tópicos. Nos dois primeiros calculamos a emissão de momentum angular até a ordem de quadrupolo elétrico, primeiro através do fluxo dos campos e depois trabalhando nas próprias fontes. Os outros dois referem-se à massa eletromagnética. No primeiro a analisamos seguindo o trabalho de Dirac. No segundo a analizamos no contexto da eletrodinâmica não-linear de Born-Infeld mostrando que é igual à energia eletrostática dividida por c^2 para um sistema qualquer, pontual ou não.

Abstract

In this work we have studied four topics. In the first two we have calculated the emission of angular momentum up to electric quadrupole order, first through the flux of fields and afterwards working on the sources themselves. The other two refer to the electromagnetic mass. In the first one we have analysed it following Dirac's work. In the second one we have analysed it in the context of the Born-Infeld's nonlinear electrodynamics showing that it is equal to the electrostatic energy divided by c^2 for any system, point like or not.

Sumário

Introdução **1**

1 Emissão de momentum angular até a ordem de quadrupolo **4**

2 Emissão de momentum angular e energia através das fontes **8**

2.1 Emissão de momentum angular 8

2.2 Emissão de energia 12

3 Massa eletromagnética **14**

3.1 Cálculo não-relativístico 14

3.1.1 Análise do cálculo relativístico 20

3.2 Massa no contexto da eletrodinâmica não linear de Born-Infeld 23

Conclusão **28**

A Cálculo dos campos longe da fonte **30**

B Cálculo da integral da taxa de variação de momentum angular **34**

C Cálculo dos campos na fonte **38**

D Cálculo do torque **41**

E Cálculo da energia **53**

F Cálculo dos campos de uma carga pontual **59**

G Cálculo da integral do fluxo **63**

H Expressão relativística da força **66**

I Cálculo relativístico **69**

J Cálculo do segundo termo **74**

Referências Bibliográficas **76**

Introdução

Neste trabalho estudamos quatro tópicos dois deles relacionados com a radiação eletromagnética e dois relativos à massa eletromagnética.

Esses tópicos estão delineados como segue:

1. Emissão de momentum angular através do fluxo até a ordem de quadrupolo elétrico.

2. Emissão de momentum angular e de energia até a mesma ordem trabalhando nas próprias cargas.

3. Cálculo não-relativístico da relação entre a massa eletromagnética e a energia e considerações sobre a relação relativística no esquema de Dirac.

4. Obtenção da relação massa eletromagnética$\times$energia na eletrodinâmica não-linear de Born-Infeld para um sistema qualquer, pontual ou não.

Na mesma ordem estão detalhes desses assuntos.

1. Obtivemos a emissão de momentum angular eletromagnético de um sistema até a ordem de quadrupolo elétrico em complemento ao cálculo de Landau-Lifshitz (LL) [1] feito até dipolo. O cálculo é feito de forma usual, através dos campos, pelo fluxo do momentum angular eletromagnético.

2. Calculamos a emissão de momentum angular e também de energia trabalhando nas próprias cargas. Os cálculos também são feitos até a ordem de quadrupolo elétrico. As emissões de energia e momentum angular são calculadas respectivamente pelas

médias temporais do torque e da taxa de trabalho mecânico das forças internas do sistema contra as próprias forças eletromagnéticas. Este método de cálculo através das fontes segue o tratamento elaborado por Peres [2] para a emissão do momentum linear eletromagnético, como ilustração ao que ele executa depois para a emissão do momentum linear gravitacional.

3. Lorentz [4] calculou, trabalhando nas cargas, a auto-força sobre uma carga (elétron extenso) obtendo para a massa eletromagnética m_e (que aparece multiplicando a aceleração $\vec{a}$) o valor $m_e = (4/3)U/c^2$, onde U é a energia eletrostática do sistema. Este resultado não está de acordo com a previsão da relação massa×energia da RR. Dirac [5] calculou a força relativisticamente através do fluxo do tensor momentum-energia. O fluxo é calculado através de um tubo fechado tri-dimensional no espaço-tempo que envolve um trecho da linha de universo da partícula. Dirac o faz somente através da superfície lateral, inferindo por argumentos de simplicidade o valor da contribuição das bases, que leva à renormalização da massa do elétron. O cálculo explícito dessa contribuição foi feito por de Groot e Suttorp [6], os quais mostraram claramente que tal contribuição leva à relação $m_e = U/c^2$, como previsto na RR. Neste trabalho tentamos entender, e localizar, onde e porque o fator $4/3$ do cálculo não-relativístico reduziu-se ao desejado fator 1. Afim de estabelecer uma ponte com o trabalho de Dirac recalculamos a força não-relativisticamente em termos do fluxo dos campos (em contraposição ao feito através das fontes por Lorentz). Novamente, apareceu o fator $4/3$, como era de se esperar. Em seguida fizemos o limite de baixas velocidades do cálculo de Dirac com o intuito de ver de perto quais os termos adicionais aos presentes no nosso resultado não-relativístico, qual o significado físico de cada um e quais os seus valores. Verificamos que os termos adicionais tem origem na cinemática relativística provenientes da construção do tubo de Dirac. Dessa construção relativística resultam os termos do nosso cálculo não-relativístico e dois termos adicionais. Um deles pro-

vém da área lateral e o outro das bases. O primeiro termo exprime uma transformação de Lorentz temporal e o outro é o termo de correção relativística à definição usual de momentum eletromagnético de um sistema. Calculamos tais termos em separado e verificamos que dão a contribuição de $-1/3$ para a massa eletromagnética. Juntando ao $4/3$ do cálculo não-relativístico obtem-se então o desejado fator 1.

4. Neste trabalho mostramos que a relação entre a massa eletromagnética e a energia de uma carga qualquer na teoria de Born-Infeld é a prescrita pela Relatividade Restrita quando o momentum eletromagnético da carga em translação é definido por uma transformação de Lorentz, como ocorre na teoria de Maxwell. Obtemos $m_e = U/c^2$ onde U é a energia eletrostática da teoria para um sistema qualquer, pontual ou não, com simetria esférica ou não, sem restrições de qualquer natureza.

Capítulo 1

Emissão de momentum angular até a ordem de quadrupolo

Obtivemos a expressão da emissão de momentum angular eletromagnético por unidade de tempo até a ordem de quadrupolo elétrico como em geral é feito para a emissão de energia e de momentum. O cálculo é feito a maneira usual através do fluxo de momentum angular através de uma superfície envolvendo o sistema de cargas. Este resultado complementa o de Landau-Lifschitz (LL) [1] feito até dipolo.

A quantidade de momentum angular emitida por unidade de tempo por uma distribuição é igual ao seu fluxo através de uma superfície distante que a envolve. A expressão do fluxo através de uma superfície esférica de normal $\vec{n}$ e raio r que tende ao infinito é [1]

$$M_i = \int_A \varepsilon_{ijk} T'_{lk} x_j n_l dA = \int_0^{4\pi} \varepsilon_{ijk} T'_{lk} n_j n_l r^3 d\Omega, \tag{1.1}$$

onde está sub-entendido a soma sobre índices repetidos, $dA = r^2 d\Omega$ é o elemento de área sobre a superfície e

$$T'_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E^2 + B^2\right)\right] \tag{1.2}$$

é o tensor dos esforços. A "linha" foi usada para distinguí-lo da componente espaço-espaço do tensor energia-momentum-esforços $T_{\mu\nu}$ da Relatividade Restrita, que tem sinal contrário, $T_{ij} = -T'_{ij}$. Substituindo essa expressão no integrando de Eq. (1.1) resulta

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{E}\right)\left(\vec{n}\times\vec{E}\right) + \left(\vec{n}\cdot\vec{B}\right)\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)\right]r^3 d\Omega. \tag{1.3}$$

Necessitamos das expressões dos campos longe da distribuição ($r \to \infty$). No caso da emissão de energia e momentum basta conhecê-los até a ordem $1/r$ pois os respectivos integrandos são quadráticos nos campos como aqui e só contem o fator r^2 vindo do elemento de área. Aqui esse fator é r^3 e, portanto, precisamos das contribuições dos campos que vão como $1/r$ e também $1/r^2$. Os primeiros são bem conhecidos e são encontrados por exemplo em LL [1] ao calcularem a emissão de energia e momentum linear até a ordem de quadrupolo. No Apêndice A estendemos o cálculo até $1/r^2$. Obtemos, com a notação $Q_i = Q_{ij}n_j$,

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r}\left[\left(\ddot{\vec{d}}\times\vec{n}\right)\times\vec{n} + \frac{1}{6c}\left(\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n}\right)\times\vec{n} + \vec{n}\times\ddot{\vec{m}}\right] +$$

$$+\frac{1}{cr^2}\left[\left(\dot{\vec{d}}\times\vec{n}\right)\times\vec{n} + 2\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}\right) + \frac{1}{2c}\left(\ddot{\vec{Q}}\times\vec{n}\right)\times\vec{n} +\right.$$

$$\left. +\frac{1}{2c}\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{Q}}\right) + \vec{n}\times\dot{\vec{m}}\right] \tag{1.4}$$

e

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2 r}\left[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c}\,\dddot{\vec{Q}} \times \vec{n} + \left(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n}\right] +$$

$$+\frac{1}{cr^2}\left[\dot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{2c}\,\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n} + \left(\dot{\vec{m}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n} + 2\vec{n}\left(\vec{n}\cdot \dot{\vec{m}}\right)\right]. \qquad (1.5)$$

Nessas equações $\vec{d}$, $\vec{m}$ e Q_{ij} são, respectivamente, os momentos de dipolo elétrico e magnético e o de quadrupolo

$$d_i = \int_{v'} \rho' x'_i dV', \qquad (1.6)$$

$$m_i = \frac{1}{2c}\int \left(\vec{r}' \times \vec{J}'\right)_i dV'. \qquad (1.7)$$

e

$$Q_{ij} = \int_v \rho' \left(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}\right) dV' \qquad (1.8)$$

Para calcular a integral Eq. (1.3) utilizamos as seguintes relações

$$\int_0^{4\pi} n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}, \qquad (1.9)$$

$$\int_0^{4\pi} n_i n_j n_k n_l d\Omega = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \qquad (1.10)$$

e

$$\int_0^{4\pi} \left(n_{\underline{o}}\, impar\, de\, n_i, s\right) d\Omega = 0. \qquad (1.11)$$

As relações acima podem ser verificadas por cálculo explicito. Podem ser obtidas diretamente notando que as integrais são tensores constantes e o único tensor simétrico

constante é δ_{ij}. A primeira integral é, então, proporcional a δ_{ij} e a segunda a uma combinação simétrica dessas quantidades. Os coeficientes resultam depois por contrações dos índices. Para um número ímpar as integrais são nulas pois não existem vetores ou tensores constantes com um número ímpar de componentes (o único outro tensor constante é ε_{ijk} que é anti-simétrico).

Os campos no integrando da Eq. (1.3) estão em expressões quadráticas dando então contribuições de ordem r^{-2}, r^{-3} e r^{-4}, que serão multiplicadas por r^3. Os termos de ordem r^{-2} têm número ímpar de componentes da normal não contribuindo para a integral. Isto é bom pois se tal não fosse a integral desses termos seria divergente. Os termos de ordem r^{-4} vão contribuir para a integral com termos da ordem de r^{-1} que se anulam no infinito. Portanto os termos quadráticos que dão contribuição são os cruzados, os proporcionais a r^{-3}. Fazendo os cálculos (detalhes no Apêndice B) resulta,

$$M_i = \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\vec{d}} \times \dot{\vec{d}}\right)_i + \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\vec{m}} \times \dot{\vec{m}}\right)_i + \frac{1}{90c^5}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jl}\ddot{Q}_{kl} +$$

$$+\frac{1}{15c^4}\left[\ddot{Q}_{ij}\ddot{m}_j + \dddot{Q}_{ij}\dot{m}_j\right]. \tag{1.12}$$

O primeiro termo reproduz o resultado de dipolo elétrico de LL [1]. Os termos de ordem maior são novos. É de se notar que o lado direito dessa equação está calculado no instante retardado em relação a origem, $t - r/c$.

Capítulo 2

Emissão de momentum angular e energia através das fontes

2.1 Emissão de momentum angular

Calculamos aqui o valor médio temporal da taxa de emissão do momemtum angular eletromagnético, até a mesma ordem de quadrupolo elétrico, através do valor médio do torque das forças internas do sistema contra as próprias forças eletromagnéticas. Este método de cálculo foi feito por Peres [2] para a emissão do momentum linear eletromagnético como ilustração ao que executa depois para a emissão do linear gravitacional. Sendo ρ e $\vec{J}$ as densidades de carga e corrente e $\vec{E}$ e $\vec{B}$ os campos gerados pelas próprias fontes, o torque mecânico ($\vec{T}$) realizado por essa distribuição de carga é

$$\vec{T} = \int_v \vec{r} \times \left[\rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\left(\vec{J}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)\right)\right] dV. \qquad (2.1)$$

Como sabido, é daqui que resulta a Eq. (1.1) quando se faz uso das equações de Maxwell para eliminar as cargas em favor dos campos. Obtem-se LL [1]

$$T_i = -\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int \left(\vec{r} \times \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)\right)_i dV + M_i. \tag{2.2}$$

O primeiro termo do lado direito representa a taxa de variação do momentum angular dos campos e o segundo representa o fluxo de momentum angular através da superfície que envolve a distribuição escrita na Eq. (1.1) .

Da Eq. (2.2) é fácil ver que o valor medio temporal $\langle\rangle$ do torque é igual ao valor médio da taxa de emissão de momentum angular. Isto decorre do fato de que o valor médio temporal de derivadas em relação ao tempo é nulo. Resulta então

$$\langle T_i \rangle = \langle M_i \rangle . \tag{2.3}$$

Neste capítulo calculamos o lado esquerdo explicitamente e no final verificaremos que o resultado concorda com o obtido pela média de M_i.

A vantagem deste cálculo é mostrar explicitamente que não é necessário passar por todo o trabalho envolvido em obter a Eq. (2.2) e daí calcular M_i quando se deseja, como é usual, apenas o seu valor médio temporal.

Os campos elétrico e de indução eletromagnética são calculados através dos potenciais escalar e vetor, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - (1/c)(\partial/\partial t)\vec{A}$ e $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, definidos por

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV' \tag{2.4}$$

e

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}\int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} dV', \tag{2.5}$$

onde $R = \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|$ e $t' = t - R/c$ é o tempo retardado. Estamos interessados nos campos até a ordem de quadrupolo elétrico. Para isso expandimos nos potenciais ρ e $\vec{J}$ em potências de R na variável t' até a ordem desejada e calculamos os campos. Apresentamos os detalhes de cálculo no Apêndice C, escrevendo aqui os resultados

finais. Obtemos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_{v'} \left[\rho(\vec{r}\,',t)\frac{\vec{R}}{R^3} - \ddot{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{2!c^2}\frac{\vec{R}}{R} + \dddot{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{2}{3!c^3}\vec{R} - \right.$$

$$\left. - \overset{4}{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{3}{4!c^4}R\vec{R} + \overset{5}{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{4}{5!c^5}R^2\vec{R} \right] dV' +$$

$$+ \int_{v'} \left[- \dot{\vec{J}}\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^2}\frac{1}{R} + \ddot{\vec{J}}\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^3} - \dddot{\vec{J}}\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{2!c^4}R + \right.$$

$$\left. + \overset{4}{\vec{J}}\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{3!c^5}R^2 \right] dV' \tag{2.6}$$

e

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \int_{v'} \left[\dot{\vec{J}}(\vec{r}\,',t) \times \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R^3} - \ddot{\vec{J}}\,(\vec{r}\,',t) \times \frac{1}{2!c^3}\frac{\vec{R}}{R} + \right.$$

$$\left. + \dddot{\vec{J}}\,(\vec{r}\,',t) \times \frac{2}{3!c^4}\vec{R} \right] dV'. \tag{2.7}$$

Substituindo esses campos na equação do torque, Eq. (2.1), resulta

$$T_i = \varepsilon_{ijk} \int_v \int_{v'} \left[\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t)\frac{R_k x_j}{R^3} - \rho(\vec{r},t)\,\ddot{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{2!c^2}\frac{R_k x_j}{R} + \right.$$

$$+\rho(\vec{r},t)\,\dddot{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{2}{3!c^3}R_k x_j - \rho(\vec{r},t)\,\overset{4}{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{3}{4!c^4}RR_k x_j +$$

$$\left. +\rho(\vec{r},t)\,\overset{5}{\rho}\,(\vec{r}\,',t)\frac{4}{5!c^5}R^2 R_k x_j \right] dV'dV -$$

$$\varepsilon_{ijk} \int_v \int_{v'} \left[-\rho(\vec{r},t)\,\dot{J}_k\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^2}\frac{x_j}{R} + \rho(\vec{r},t)\,\ddot{J}_k\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^3}x_j - \right.$$

$$-\rho(\vec{r},t)\,\dddot{J}_k\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{2!c^4}Rx_j+\rho(\vec{r},t)\,\overset{4}{J}_k\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{3!c^5}R^2x_j\Big]\,dV'dV+$$

$$+\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pnk}\varepsilon_{lmn}\int_v\int_{v'}\Big[-J_p(\vec{r},t)J_m(\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^2}\frac{R_lx_j}{R^3}+$$

$$+J_p(\vec{r},t)\,\ddot{J}_m\,(\vec{r}\,',t)\frac{1}{2!c^4}\frac{R_lx_j}{R}-J_p(\vec{r},t)\,\dddot{J}_m\,(\vec{r}\,',t)\frac{2}{3!c^5}R_lx_j\Big]\,dV'dV. \qquad (2.8)$$

Calculemos agora o valor médio temporal dessa expressão utilizando dois fatos. Primeiro que o valor médio temporal de derivadas totais em relação ao tempo é nulo $\langle dF/dt\rangle = 0$ e segundo que as fontes são localizadas. Esta última implica que para uma função $\vec{F}$ qualquer das fontes

$$\int_v \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r},t)dV = 0. \qquad (2.9)$$

Como conseqüência desses fatos temos, para duas funções F e G quaisquer

$$\left\langle \dot{F}\,G\right\rangle = -\left\langle F\,\dot{G}\right\rangle \qquad (2.10)$$

e

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial x_i}GdV = -\int_v F\frac{\partial G}{\partial x_i}dV. \qquad (2.11)$$

Para o cálculo do valor médio da Eq. (2.8) utilizamos a equação da continuidade, $\dot{\rho}+\partial_iJ_i = 0$. Deste modo poderemos transformar as derivadas temporais de ρ em divergentes de $\vec{J}$ que nos possibilitará a utilização da relação (2.11). Em seguida utilizamos a (2.10) que nos possibilitará escrever a média em termos de produtos das correntes e de seus primeiros momentos. Essas relações poderão depois serem escritas em termos dos multipolos d_i, m_i e Q_{ij}, envolvendo médias dos seus produtos. Os detalhes estão no Apêndice D. O resultado final é

$$\langle T_i\rangle = \frac{2}{3c^3}\left\langle\left(\ddot{\vec{d}}\times\dot{\vec{d}}\right)_i\right\rangle+\frac{2}{3c^3}\left\langle\left(\ddot{\vec{m}}\times\dot{\vec{m}}\right)_i\right\rangle+\frac{1}{90c^5}\varepsilon_{ijk}\left\langle\dddot{Q}_{jl}\ddot{Q}_{kl}\right\rangle. \qquad (2.12)$$

Calculando o valor temporal médio de M_i na Eq. (1.12) e comparando com a Eq. (2.12) verificamos que a Eq. (2.3) é, de fato, satisfeita (Apêndice D).

2.2 Emissão de energia

Em complemento ao cálculo feito para o momentum angular, obtivemos a expressão da média temporal da taxa de variação de energia trabalhando nas próprias cargas. Esse cálculo é feito através da média temporal da taxa de trabalho mecânico, P, realizado pelas forças internas do sistema contra as próprias forças eletromagnéticas.

A expressão da potência é

$$P = \int_v \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) dV. \tag{2.13}$$

Como é sabido, é dessa equação que resulta a expressão do fluxo de energia $I = -(c/4\pi) \int_A \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{n} dA$, que é usualmente utilizada para a emissão de energia. É a utilizada por LL [1] para o cálculo da emissão de energia até a ordem de quadrupolo. I é obtida quando se faz uso das equações de Maxwell para eliminar as cargas em favor dos campos obtendo-se

$$P = -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_v \left[E^2 + B^2\right] dV + I. \tag{2.14}$$

O primeiro termo representa a taxa de variação da energia dos campos eletromagnéticos.

Da Eq. (2.14) é fácil ver que o valor médio temporal da potência é igual ao valor médio da taxa de emissão de energia. Isto decorre do fato de que o valor médio temporal de derivadas em relação ao tempo é nulo. Resulta então

$$\langle P \rangle = \langle I \rangle . \tag{2.15}$$

O campo elétrico para o cálculo da Eq. (2.13) é o utilizado para o cálculo do torque, Eq. (2.6). Substituíndo resulta

$$P = \int_v \int_{v'} J_i(\vec{r}, t) \left[\rho(\vec{r}', t) \frac{R_i}{R^3} - \ddot{\rho}\,(\vec{r}', t) \frac{1}{2!c^2} \frac{R_i}{R} + \dddot{\rho}\,(\vec{r}', t) \frac{2}{3!c^3} R_i - \right.$$

$$\left. - \overset{4}{\rho}\,(\vec{r}', t) \frac{3}{4!c^4} R R_i + \overset{5}{\rho}\,(\vec{r}', t) \frac{4}{5!c^5} R^2 R_i \right] dV' dV +$$

$$+ \int_v \int_{v'} J_i(\vec{r}, t) \left[- \dot{J}_i\,(\vec{r}', t) \frac{1}{c^2} \frac{1}{R} + \ddot{J}_i\,(\vec{r}', t) \frac{1}{c^3} - \dddot{J}_i\,(\vec{r}', t) \frac{1}{2!c^4} R + \right.$$

$$\left. + \overset{4}{J}_i\,(\vec{r}', t) \frac{1}{3!c^5} R^2 \right] dV' dV. \tag{2.16}$$

Calculamos o valor médio temporal dessa expressão, $\langle P \rangle$, da mesma forma que fizemos para o torque. Apresentamos os detalhes do cálculo no Apêndice E. O resultado final é, até a ordem de quadrupolo elétrico,

$$\langle P \rangle = -\frac{2}{3c^3} \left\langle \ddot{d} \right\rangle^2 - \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{m} \rangle^2 - \frac{1}{180c^5} \left\langle \dddot{Q}_{ij} \right\rangle^2 . \tag{2.17}$$

Calculando o valor temporal médio de I obtido por LL [1] e comparando com a Eq. (2.17) verificamos que a Eq. (2.15) é, de fato, satisfeita (Apêndice E).

Capítulo 3

Massa eletromagnética

3.1 Cálculo não-relativístico

A densidade de força eletromagnética sobre uma distribuição de cargas é,

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B}. \tag{3.1}$$

Usando as equações de Maxwell pode-se eliminar as cargas em favor dos campos e obtem-se a expressão (veja, por exemplo, Jackson [7])

$$f_i = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E^2 + B^2\right)\right)\right]. \tag{3.2}$$

Integrando no volume V da distribuição com área superficial A e usando o teorema de Gauss no segundo termo resulta

$$F_i = -\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int_V \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i dV + \int_A T'_{ij}n_j dA. \tag{3.3}$$

onde T'_{ij} é o tensor dos esforços,

$$T'_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E^2 + B^2\right)\right], \tag{3.4}$$

e $\vec{n}$ é a normal à superfície A. O primeiro termo da Eq. (3.3) é menos a taxa temporal do momentum eletromagnético e o segundo é o fluxo do tensor dos esforços através de A. Lorentz calculou a força usando a Eq. (3.1), trabalhando nas próprias cargas, e nós calcularemos usando a Eq. (3.3). O intuito é estabelecer uma ponte com o cálculo através do fluxo relativístico do esquema de Dirac.

Como considerado por Dirac focalizaremos o caso de uma carga puntiforme (elétron) e centrada numa superfície esférica de raio ε no seu sistema de repouso. O raio ε vai a zero no fim dos cálculos. Para comparação com Dirac escreveremos o impulso elementar da força F_i na Eq. (3.3)

$$F_i dt = -\frac{1}{4\pi c} d\int_V \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i dV + \int_A T'_{ij} n_j dA dt. \tag{3.5}$$

Dirac obtem a força calculando o fluxo do tensor momentum-energia através de um tubo 4-dimensional fino envolvendo um trecho da linha de universo da partícula. O fluxo através da hipersuperfície lateral (3-dimensional) desse tubo corresponde ao através da superfície A na Eq. (3.5) e o fluxo através das bases (3-dimensionais) do tubo corresponde à integral volumétrica no primeiro termo. Note que, como dV, $dAcdt$ tem dimensão 3, de volume, como tem a hiper-área da hipersuperfície do tubo. Como descrito abaixo, o nosso cálculo não-relativístico através da Eq. (3.3) dará a mesma relação $m_e = (4/3)U/c^2$ obtida por Lorentz, como esperado. Em seguida faremos o limite de baixas velocidades da expressão relativística do fluxo 4-dimensional de Dirac à procura dos termos adicionais, e quais os seus significados físicos, que consertarão o resultado não-relativístico. Mostramos que decorrente da construção do tubo, apare-

cerá na expressão do impulso de Dirac o lado direito da expressão Eq. (3.5) acrescida de dois termos adicionais, que levarão ao resultado correto para m_e. Um desses termos reflete uma transformação de Lorentz do tempo dt e o outro é um termo de correção relativística ao momentum eletromagnético de Maxwell que está no segundo termo.

Faremos todo o cálculo no sistema de repouso do elétron ($\vec{v} = 0$), com aceleração $\vec{a}$, pois queremos localizar apenas o problema da massa eletromagnética.

O primeiro termo da Eq. (3.3) não apresenta nenhuma dificuldade pois os campos estão fora da carga, na superfície que a envolve. O problema é o segundo termo. Esse termo é divergente pois a integral volumétrica contém evidentemente a origem onde está a carga, na qual os campos divergem. Esse termo dá uma contribuição infinita para a massa eletromagnética que depois é absorvida no processo de renormalização. O que se deseja é conhecer a forma explicita desse termo pois o que nos interessa é a relação , o fator de multiplicação, entre m_e e a energia eletrostática U, que é infinita. Para isso, no volume V, consideramos o elétron como limite de uma distribuição esfericamente simétrica de raio igual ao próprio ε, que vai ao limite zero. Agora as equações de Maxwell valem em todo o volume V. Como não será necessário fazer o cálculo explicito da integral a consideraremos primeiro. Estando a carga (agora extensa) com velocidade $\vec{v}$ os campos estão relacionados não-relativisticamente por $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}/c$. Estamos no sistema de repouso mas devemos guardar $\vec{B}$ em primeira ordem em $\vec{v}$ pois no segundo termo da Eq. (3.3) comparece uma derivada temporal. Segue então que $\vec{E} \times \vec{B} = c^{-1}\left[\vec{v}E^2 - \left(\vec{v} \cdot \vec{E}\right)\vec{E}\right]$. Como a distribuição é esfericamente simétrica o segundo termo dentro do colchetes é igual a $(1/3)E^2\vec{v}$. O primeiro termo da Eq. (3.3) torna-se então, com $\vec{a} = d\vec{v}/dt$,

$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int_V \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) dV = -\vec{a}\frac{2}{3c^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^{\varepsilon}\int_{\Omega} E^2 dV, \tag{3.6}$$

onde Ω designa o ângulo sólido. O termo é então proporcional à energia eletrostática

contida no volume de raio ε, $U_{(\varepsilon)} = (8\pi)^{-1} \int_{(\varepsilon)} E^2 dV$. Seu valor depende da forma da distribuição. Não precisamos explicitá-la.

O cálculo do segundo termo na Eq. (3.3) é direto uma vez escritas as expressões dos campos de uma partícula acelerada no seu sistema de repouso ($\vec{v} = 0$). O detalhe encontra-se no Apêndice F. O campo elétrico na superfície que sobrevive no limite $\varepsilon \to 0$ é dado por

$$\vec{E} = e\left[\vec{n}\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon c^2}\left[\vec{a} - \vec{n}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)\right] + \frac{2}{3}\frac{\dot{\vec{a}}}{c^3} + O\left(\varepsilon\right)\right] \tag{3.7}$$

O campo magnético não contribuirá para esse termo da Eq. (3.3) pois estamos fazendo o cálculo para $\vec{v} = 0$. Usando as relações Eqs. (1.9), (1.10) e (1.11) para o cálculo da integral angular resulta (Apêndice G)

$$\int_A T'_{ij} n_j dA = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}\frac{1}{\varepsilon}a_i + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_i\,. \tag{3.8}$$

O primeiro termo no lado direito dá uma contribuição para m_e que diverge no limite $\varepsilon \to 0$. Para o primeiro termo da Eq. (3.8) usamos a relação

$$-\frac{e^2}{\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^\infty \int_\Omega \frac{e^2}{r^4} r^2 dr d\Omega = -\frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^\infty \int_\Omega E^2(r) dV, \tag{3.9}$$

que é proporcional então à energia eletrostática do campo contido agora em todo espaço fora da esfera de raio ε. Com isto a Eq. (3.8) torna-se

$$\int_A T'_{ij} n_j dA = -a_i \frac{2}{3c^2}\frac{1}{4\pi}\int_\varepsilon^\infty \int_\Omega E^2(r) dV + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_i\,. \tag{3.10}$$

Substituíndo as Eqs. (3.6) e (3.10) na Eq. (3.3) vemos que na soma a integral volumétrica estende-se à todo o espaço. Obtem-se

$$\vec{F} = -\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\vec{a} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{a}}, \tag{3.11}$$

onde $U = (1/8\pi)\int E^2 dV$ é a energia eletrostática do campo. Claro, diverge no limite $\varepsilon \to 0$. O primeiro termo de Eq. (3.11) mostra que o elétron tem uma massa eletromagnética

$$m_e = \frac{4}{3}\frac{U}{c^2}. \tag{3.12}$$

Isto porque da Mecânica o lado esquerdo é $F_i = m_0 a_i$ onde com m_0 indicamos a massa mecânica do elétron (massa devido à massa). Reescrevemos então a Eq. (3.11) sob a forma

$$m a_i = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{a}_i, \tag{3.13}$$

onde m é a massa total,

$$m = m_0 + m_e. \tag{3.14}$$

O processo de renormalização consiste em afirmar que m é a massa experimental (a medida em laboratório) do elétron. Claro, como m é finita e m_e é infinita, m_0 deve ser infinita também. Estamos então desde o começo com um $\vec{F}$ mecânico infinito. Mas como no fim todos os infinitos desaparecem ao dizer que m é a experimental, o processo é considerado legítimo. O que nos interessa aqui é o coeficiente 4/3 na Eq. (3.11).

Analisaremos na próxima seção o limite de baixas velocidades do cálculo relativístico no esquema de Dirac. Temos como objetivo entender o significado dos termos adicionais, que aparecem nesse contexto relativístico, que levam ao esperado coefici-

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA INFORMAÇÃO

ente 1.

Antes de prosseguirmos faremos uma observação. Notemos que a expressão da densidade da força f_i na Eq. (3.2) pode ser escrita sob a forma de

$$f^i = -\left(\frac{\partial}{\partial x^0}T^{0i} + \frac{\partial}{\partial x^j}T^{ij}\right), \tag{3.15}$$

onde estamos colocando $x^0 = ct$, $(x^i) = (x, y, z)$, todos com a mesma dimensão,

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i = T^{i0} \tag{3.16}$$

e

$$T^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left(E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E^2 + B^2\right)\right) = T_{ij}, \tag{3.17}$$

com sinal contrário à T'_{ij}. Por outro lado, a conhecida expressão da densidade de potência que chamamos f^0, $f^0 = \vec{J} \cdot \vec{E}$, em termos dos campos, que leva à Eq. (2.14) é

$$f^0 = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2 + B^2\right) - \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right). \tag{3.18}$$

Esta expressão também pode ser condensada em

$$f^0 = -\left(\frac{\partial}{\partial x^0}T^{00} + \frac{\partial}{\partial x^j}T^{0j}\right), \tag{3.19}$$

onde

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right). \tag{3.20}$$

Introduzindo indices que vão de 0 a 3 vemos que as equações Eqs. (3.15) e (3.19)

podem ser escritas como componentes da equação

$$f^{\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\nu}. \tag{3.21}$$

A estrutura covariante da equação (força, potência)×campos no espaço-tempo da Relatividade Restrita (RR) já está então aparente. $T^{\mu\nu}$ é o quadritensor energia-momentum-esforço do campo eletromagnético na RR. f^{μ} é a densidade quadridimensional de quadri-força, isto é, o quadri-impulso $\widetilde{F}^{\mu}$ é a integral de f^{μ} no quadri-volume, $d\omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = dx^0 dV$, espaço-tempo, não em dV,

$$\widetilde{F}^{\mu} = \int f^{\mu} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{3.22}$$

Para a componente i, temos

$$\widetilde{F}^{i} = \int \left(\int f^{i} dV \right) c dt = c \int F^{i} dt. \tag{3.23}$$

$d\widetilde{F}^{i} = cF^{i}dt$ é então c vezes o impulso da força usual. Das Eqs. (3.21) e (3.22) o quadri-impulso pode ser escrito:

$$\widetilde{F}^{\mu} = -\int \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} T^{\mu\nu} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{3.24}$$

Este é o ponto de partida do trabalho de Dirac. A Eq. (3.21) pode ser obtida por um cálculo mais direto usando a formulação covariante das equações de Maxwell. O cálculo está no Apêndice H.

3.1.1 Análise do cálculo relativístico

A auto-força é calculada por Dirac [5] através da integral 4-dimensional (em $d^4x = cdtdV$) do divergente do tensor momentum-energia tomando como região a envolta

por um tubo 4-dimensional envolvendo um trecho da linha de universo da partícula. Utilizando o teorema de Gauss a integral do divergente é transformada em uma integral de fluxo. A superfície desse tubo (4-dimensional) é constituída pela área lateral mais a área das bases (3-dimensionais). Dirac não calcula explicitamente a contribuição das bases, só da superfície lateral. Por argumentos de simplicidade infere que tais contribuições renormalizam a massa do elétron. Groot e Suttorp [6] calculam tais contribuições explicitamente.

Para compararmos com o nosso cálculo não-relativístico reduzimos a expressão final do impulso relativístico para o sistema de repouso do elétron. Obtivemos o seguinte resultado:

$$F_i dt = -\int_{(\varepsilon)} \left[\frac{1}{4\pi c} d\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i + \frac{1}{c^2} T'_{ij} v^j\right] dV +$$

$$+ \int_A T'_{ij} n^j \left[dt + \frac{1}{c^2} \varepsilon \vec{n}.d\vec{v}\right] dA, \tag{3.25}$$

onde T_{ij} está na Eq. (3.4).

Comparando com o cálculo não-relativístico na equação Eq. (3.5) vemos que aparecem dois novos termos decorrentes da construção do tubo. Um está presente no primeiro termo da primeira integral e o outro na integral superficial, ambos proporcionais a $d\vec{v}$. O primeiro é o termo adicional devido à velocidade $d\vec{v}$ que aparece no momentum eletromagnético quando ele é definido por uma transformação de Lorentz do seu valor no repouso, junto com a energia. Como $\varepsilon\vec{n}$ é o raio vetor da superfície esférica de raio ε, o segundo é uma correção relativística do intervalo de tempo dt também devido a $d\vec{v}$. Dividindo a Eq. (3.25) por dt resulta a expressão da força,

$$F_i = -\int_{(\varepsilon)} \left[\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i + \frac{1}{c^2} T'_{ij} a^j\right] dV +$$

$$+\int_A T'_{ij} n^j \left[1 + \frac{1}{c^2}\varepsilon \vec{n}.\vec{a}\right] dA. \tag{3.26}$$

Os termos adicionais são calculados da mesma forma que fizemos para o cálculo não-relativístico. Para detalhes de cálculo veja o Apêndice I. A integral do termo extra no volume é

$$F_i^{(1)} = -\frac{1}{c^2}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{4\pi} T'_{ij} a^j r^2 d\Omega dr = \frac{1}{3}a^i \frac{1}{8\pi c^2}\int_0^{\varepsilon}\int_{\Omega} E^2(r) dV. \tag{3.27}$$

Calculando a contribuição do termo extra na segunda integral obtemos

$$F_i^{(2)} = \frac{1}{c^2}\varepsilon \int_A T'_{ij} n^j \vec{n}.\vec{a} dA = \frac{1}{6}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i = \frac{1}{3}a_i \frac{1}{8\pi c^2}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\Omega} E^2(r) dV. \tag{3.28}$$

A soma dessas duas integrais é igual a $(1/3)(U/c^2)a_i$,

$$F_i^{(1)} + F_i^{(2)} = \frac{1}{3}\frac{U}{c^2}a_i. \tag{3.29}$$

Esse é então o termo que deve ser adicionado ao cálculo não-relativístico. Vemos claramente que esse termo converte o fator $4/3$ na massa eletromagnética no desejado fator 1 $(4/3 - 1/3 = 1)$:

$$\vec{F} = -\frac{U}{c^2}\vec{a} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{a}}\ . \tag{3.30}$$

Vamos mostrar agora que com as novas expressões livramo-nos da hipótese de distribuição esfericamente simétrica utilizada nas contas feitas no volume. Usando que $\vec{B} = \left(\vec{v} \times \vec{E}\right)/c$ e a expressão de T_{ij} no primeiro integrando da Eq. (3.26) obtemos

$$\int_{(\varepsilon)} \left[\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)_i + \frac{1}{c^2} T'_{ij} a^j \right] dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{(\varepsilon)} \left[E^2 a_i - \left(\vec{a} \cdot \vec{E} \right) E_i + \left(\vec{a} \cdot \vec{E} \right) E_i - \frac{1}{2} E^2 a_i \right] dV =$$

$$= a_i \frac{1}{8\pi c^2} \int_{(\varepsilon)} E^2 dV. \tag{3.31}$$

Vemos então claramente, o cancelamento dos termos sobre os quais a simetria esférica foi suposta. Para obtermos o segundo termo de Eq. (3.26) somamos as Eqs. (3.8) e (3.28) com o resultado

$$\int_A T'_{ij} n^j \left[1 + \frac{1}{c^2} \varepsilon \vec{n} . \vec{a} \right] dA = -a_i \frac{1}{8\pi c^2} \int_\varepsilon^\infty \int_\Omega E^2(r) dV + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{a}_i \, . \tag{3.32}$$

Somando esses resultados vemos então que resulta a Eq. (3.30) com a expressão da massa eletromagnética correta independente da hipótese de simetria esférica.

3.2 Massa no contexto da eletrodinâmica não linear de Born-Infeld

A muitos anos atrás Frenkel calculou a relação entre a massa eletromagnética m_e e a energia eletrostática U de uma partícula pontual no contexto da teoria não-linear do campo eletromagnético de Born-Infeld, obtendo o resultado esperado pela Relatividade Restrita $m_e = U/c^2$. O resultado foi obtido através do cálculo do momen-

tum eletromagnético do campo da partícula (elétron) em translação uniforme. O momentum foi tomado igual a integral da componente tempo×espaço do tensor energia-momentum-esforços da teoria $P^i = (1/c)\int T^{i0}dV$ correspondente ao usual momentum de Maxwell.

É sabido que um cálculo semelhante no contexto da teoria de Maxwell leva para um sistema com simetria esférica a uma relação diferente do esperado, isto é $m_e = (4/3)U/c^2$. Aqui o resultado esperado aparece quando adota-se a Relatividade Restrita (RR) desde o começo tomando para P^i o obtido por uma transformação de Lorentz do seu valor nulo no sistema de repouso da partícula. Isto é feito junto com a energia P^0, que é igual à eletrostática U no repouso, levando em conta o caráter de 4-vetor de P^0 e P^i. Com isto tem-se termos adicionais a T^{i0} que dão uma contribuição $-1/3$ para m_e. Isto então leva o fator $4/3$ para o desejado fator 1. Mais ainda o tratamento global da expressão do momentum mostra que o resultado correto é independente da hipótese de simetria esférica pois os termos sobre os quais tal sistema é feita se anulam.

Surge então a questão de saber o que tal definição relativística do momentum implica na teoria de Born-Infeld. Claro, já que Frenkel obteve o resultado correto para uma partícula pontual com a definição usual é de se esperar que os termos adicionais se anulam nesse caso. Verificamos que isto de fato ocorre. Mas aprendemos muito mais com a expressão do momentum obtido pela transformação de Lorentz. Com essa definição mostramos que o resultado correto vale para qualquer sistema, pontual ou não com simetria esférica ou não sem restrições de qualquer natureza.

Consideremos um sistema carregado em translação com velocidade $\vec{v}$. No seu sistema de repouso o 4-momentum é

$$P^{\mu}_{(0)} = \int T^{\mu 0}_{(0)} dV_{(0)}, \tag{3.33}$$

onde com (0) indicamos o valor das respectivas quantidades no repouso: $T^{00}_{(0)} = u$

é a densidade de energia eletrostática e $T^{i0}_{(0)} = 0$. Chamando $u^\mu = dx^\mu/cd\tau$ a 4-velocidade de um ponto representativo do sistema em translação com velocidade $\vec{v}$ tem-se $u^0 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma$ e $u^i = \gamma\vec{v}/c$. Logo no sistema de repouso $u^0_{(0)} = 1$ e $u^i = 0$. Daqui resulta que a expressão para o momentum num referencial qualquer é

$$P^\mu = \int T^{\mu\nu} u_\nu \gamma dV. \tag{3.34}$$

Essa expressão se reduz à anterior no repouso. Decompondo-a resulta

$$P^i = \frac{1}{c} \int \left[T^{i0} u_0 + T^{ij} u_j\right] \gamma dV. \tag{3.35}$$

Onde T^{ij} é o tensor dos esforços do campo. Antes de escrevermos as expressões de $T^{\mu\nu}$ na teoria de Born-Infeld notemos que, como a massa eletromagnética aparece como o coeficiente de $\vec{v}$, basta escrever a expressão acima apenas em primeira ordem em $\vec{v}$. Nessa ordem o tensor energia-momentum-esforços da teoria de Born-Infeld tem componentes

$$T^{00} = \frac{b^2}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}} - 1\right) = u \tag{3.36}$$

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi} \frac{\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}}, \tag{3.37}$$

e

$$T^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{E_i E_j}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}} + \delta_{ij} b^2 \left(\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} - 1\right)\right]. \tag{3.38}$$

A constante b^2 é o valor superior de E^2. Notemos que quando $b^2 \to \infty$ essas expressões se reduzem as correspondentes do campo de Maxwell, cuja componente espaço-espaço tem sinal contrário ao de T'_{ij}. Portanto em primeira ordem resulta

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c}\int\left[\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}} + \frac{1}{c}\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)\vec{E}}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}} + \frac{1}{c}\vec{v}b^2\left(\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}-1\right)\right]dV, \quad (3.39)$$

onde $\vec{B} = \left(\vec{v}\times\vec{E}\right)/c$ na ordem considerada. Nessa expressão $\vec{E}$ é a parte do campo elétrico independente da velocidade. Isto é, o de repouso do sistema ($\vec{E} = \vec{E}_{(0)}$).

Frenkel adota para o momentum o primeiro termo dessa expressão para o caso da partícula pontual obtendo a expressão correta para m_e. É de se esperar então que o segundo termo se anule para a partícula pontual. Verificamos que isto de fato acontece. Os cálculos estão no Apêndice J. É de se notar que na teoria de Born-Infeld o campo elétrico do elétron é finito na carga.

Com a presença do segundo termo é imediato verificarmos que o resultado correto para m_e vale para um sistema qualquer em translação. Chamando $\vec{P}_1$ o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.39) e $\vec{P}_2$ os restantes, resulta utilizando $\vec{B} = \left(\vec{v}\times\vec{E}\right)/c$,

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{4\pi c^2}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}}\left[E^2\vec{v} - \left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)\vec{E}\right]dV \quad (3.40)$$

e

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{4\pi c^2}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}}\left[\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)\vec{E} + \vec{v}b^2\left(\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}-1\right)\right]dV. \quad (3.41)$$

Somando vemos claramente o cancelamento dos termos $\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)\vec{E}$. Obtemos então

$$\vec{P} = \vec{v}\frac{1}{4\pi c^2}\int\left[\frac{E^2}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}} + b^2\left(\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}-1\right)\right]dV \quad (3.42)$$

ou

$$\vec{P} = \vec{v}\frac{1}{4\pi c^2}\int b^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}}-1\right]dV. \tag{3.43}$$

No segundo termo da equação vemos que o integrando é proporcional a densidade de energia. Resulta

$$\vec{P} = \frac{U}{c^2}\vec{v},$$

onde $U = \int u dV$ é a energia eletrostática do sistema no seu referencial de repouso.

Conclusão

Neste trabalho estudamos 4 tópicos. Dois deles relativos a emissão de momentum angular eletromagnético junto com o de energia e dois sobre a massa eletromagnética.

Obtivemos primeiro a expressão da emissão de momentum angular até a ordem de quadrupolo elétrico complementando o resultado até a ordem de dipolo de Landau-Lifshitz [1]. O cálculo é feito através do fluxo de momentum angular no infinito, como fazem os autores para a emissão de energia e de momentum até a ordem de quadrupolo elétrico.

No segundo tópico calculamos a emissão do momentum angular trabalhando nas próprias fontes e o fizemos também para a emissão de energia. Seguimos aqui o tratamento que Peres [2] utilizou para o cálculo do momentum linear eletromagnético como preparação ao que executa em seguida para o caso da emissão do momentum gravitacional.

Nos dois últimos tópicos estudamos a massa eletromagnética na eletrodinâmica de Maxwell e na não-linear de Born-Infeld. Na primeira conseguimos detectar, e qual o significado físico, dos termos adicionais que aparecem no esquema relativístico de Dirac [5] quando comparado com o que resulta do cálculo não-relativístico. Para isso calculamos este último em termos do fluxo dos campos em vez de trabalhar com as próprias cargas como feito por Lorentz [4]. Assim o fizemos com o intuito de estabelecer uma ponte com o cálculo de Dirac que é feito através do fluxo através de uma

hipersuperfície (3-dimensional) que envolve um trecho da linha de universo da partícula. O limite de baixas velocidades do resultado relativístico mostrou a existência de dois termos adicionais sendo um deles de correção relativística temporal e o outro de correção à expressão usual do momentum eletromagnético por transformações de Lorentz.

Finalmente no caso de Born-Infeld mostramos que o momentum eletromagnético da teoria de um sistema de cargas em translação obtido por uma transformação de Lorentz leva à relação relativística correta entre a massa eletromagnética e a energia eletrostática para um sistema qualquer, pontual ou não, com simetria esférica ou não, sem quaisquer restrições.

Apêndice A

Cálculo dos campos longe da fonte

Calculamos o campo de indução através do rotacional do potencial vetor e o campo elétrico através da equação $(\partial/\partial t)\vec{E}(\vec{r},t) = c\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r},t)$. Esta última é válida na região que estamos trabalhando, fora das cargas. O potencial vetor é

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} dV', \tag{A.1}$$

onde $t' = t - \left|\vec{r}-\vec{r}'\right|/c$ é o tempo retardado. Estamos calculando os campos até a ordem de quadrupolo elétrico longe da fonte, $r \gg r'$. Vamos então expandir o potencial vetor em potencias de r'/r até a ordem desejada. Primeiro, expandindo $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ e $1/\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ e obtemos

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = r - \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}' = r - \vec{n}\cdot\vec{r}' \tag{A.2}$$

e

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r^2}. \tag{A.3}$$

Usando esses resultados e expandindo a densidade de corrente resulta

$$\vec{J}(\vec{r}',t-\frac{1}{c}\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|) = \vec{J}(\vec{r}',t-\frac{1}{c}\left[r-\vec{n}\cdot\vec{r}'\right]) = \vec{J}' + \frac{1}{c}\vec{n}\cdot\vec{r}'\,\dot{\vec{J}}', \tag{A.4}$$

onde $\vec{J}' = \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}r)$. Substituindo na expressão do potencial Eq. (A.1) resulta

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_{v'} \left[\frac{1}{cr} \left(\vec{J}' + \frac{1}{c} \dot{\vec{J}}' \vec{n} \cdot \vec{r}' \right) + \frac{1}{cr^2} \vec{J}' \vec{n} \cdot \vec{r}' \right] dV'. \tag{A.5}$$

Agora escrevemos o potencial em termos dos momentos de dipolo elétricos e magnéticos e quadrupolo elétrico, $\vec{d}$, $\vec{m}$ e $\vec{Q}$. O momentum de dipolo elétrico é definido por

$$d_j = \int_v \rho(\vec{r}, t) x_j dV. \tag{A.6}$$

Derivando essa expressão em relação ao tempo e utilizando a equação da continuidade e o fato de que as cargas estão localizadas ($\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 0$ para qualquer $\vec{F}$ das fontes) obtemos

$$\dot{d}_i = \int_v \dot{\rho}\,(\vec{r}, t) x_i dV = -\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) x_i dV = \int_v J_j(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} x_i dV =$$

$$= \int_v J_i(\vec{r}, t) dV. \tag{A.7}$$

O momentum de quadrupolo elétrico é definido por

$$Q_{ij} = 3 \int_v \rho(\vec{r}, t) \left[x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right] dV. \tag{A.8}$$

Derivando em relação ao tempo procedendo da mesma forma que para o dipolo resulta

$$\dot{Q}_{ij} = 3 \int_v \left[J_i(\vec{r}, t) x_j + J_j(\vec{r}, t) x_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} J_k(\vec{r}, t) x_k \right] dV. \tag{A.9}$$

O momentum de dipolo magnético é

$$m_k = \frac{1}{2c} \int_v \varepsilon_{lmk} x_l J_m dV. \tag{A.10}$$

Multiplicando dos dois lados por ε_{ijk}, temos

$$\varepsilon_{ijk} m_k = \frac{1}{2c} \int_v \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} x_l J_m dV = \frac{1}{2c} \int_v \left[\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right] x_l J_m dV =$$

$$= \frac{1}{2c} \int_v \left[J_j x_i - J_i x_j \right] dV = M_{ij}. \tag{A.11}$$

Numerando cada termo da integral (A.5) e utilizando essas relações Eqs. (A.7), (A.9) e (A.11) resulta:

1.

$$\int_{v'} J'_i \frac{1}{cr} dV' = \frac{1}{cr} \int_{v'} J' dV' = \frac{1}{cr}\, \dot{d}_i \,. \tag{A.12}$$

2.

$$\int_{v'} \dot{J}'_i\, \vec{n} \cdot \vec{r}' \frac{1}{c^2 r} dV' = n_j\, \ddot{Q}_{ij}\, \frac{1}{6c^2 r} - \varepsilon_{ijk} n_j\, \dot{m}_k\, \frac{1}{cr} + n_i \frac{1}{3c^2 r} \int_{v'} \dot{J}'_k\, x'_k dV' =$$

$$= n_j\, \ddot{Q}_{ij}\, \frac{1}{6c^2 r} - \varepsilon_{ijk} n_j\, \dot{m}_k\, \frac{1}{cr} = \ddot{Q}_i\, \frac{1}{6c^2 r} - \left(\vec{n} \times \dot{\vec{m}}\right)_i \frac{1}{cr}. \tag{A.13}$$

3.

$$\int_{v'} J'_i \vec{n} \cdot \vec{r}' \frac{1}{cr^2} dV' = n_j\, \dot{Q}_{ij}\, \frac{1}{6cr^2} - \varepsilon_{ijk} n_j m_k \frac{1}{r^2} + n_i \frac{1}{3cr^2} \int_{v'} J'_k x'_k dV' =$$

$$= n_j\, \dot{Q}_{ij}\, \frac{1}{6cr^2} - \varepsilon_{ijk} n_j m_k \frac{1}{r^2} = \dot{Q}_i\, \frac{1}{6cr^2} - (\vec{n} \times \vec{m})_i \frac{1}{r^2}, \tag{A.14}$$

onde $\dot{Q}_i = n_j\, \dot{Q}_{ij}$ e desprezamos o termo de integral no lado direito porque quando calcularmos o campo de indução eletromagnética ele irá zerar ($\vec{\nabla} \times \vec{n} = 0$).

Finalmente,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr}\left(\dot{\vec{d}} + \frac{1}{6c}\, \ddot{\vec{Q}} - \vec{n} \times \dot{\vec{m}}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{6c}\, \dot{\vec{Q}} - \vec{n} \times \vec{m}\right). \tag{A.15}$$

Agora vamos calcular os campos. Iniciamos pelo cálculo do campo de indução eletromagnética. Esse campo é dado pelo rotacional do potencial vetor,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) =$$

$$= \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{cr}\left(\dot{\vec{d}} + \frac{1}{6c}\, \ddot{\vec{Q}} - \vec{n} \times \dot{\vec{m}}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{6c}\, \dot{\vec{Q}} - \vec{n} \times \vec{m}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2 r}\left[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{6c}\, \dddot{\vec{Q}} \times \vec{n} + \left(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n}\right] +$$

$$+ \frac{1}{cr^2}\left[\dot{\vec{d}} \times \vec{n} + \frac{1}{2c}\, \ddot{\vec{Q}} \times \vec{n} + \left(\dot{\vec{m}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n} + 2\vec{n}\left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{m}}\right)\right]. \tag{A.16}$$

O campo elétrico é calculado através de

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r},t). \tag{A.17}$$

Calculando o rotacional e integrando em relação ao tempo obtemos

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r}\left[\left(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n} + \frac{1}{6c}\left(\dddot{\vec{Q}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n} + \vec{n} \times \ddot{\vec{m}}\right] +$$

$$+\frac{1}{cr^2}\left[\left(\dot{\vec{d}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n} + 2\vec{n}\left(\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}\right) + \frac{1}{2c}\left(\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n}\right) \times \vec{n} +\right.$$

$$\left. +\frac{1}{2c}\vec{n}\left(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{Q}}\right) + \vec{n} \times \dot{\vec{m}}\right]. \tag{A.18}$$

Apêndice B

Cálculo da integral da taxa de variação de momentum angular

Vamos resolver a integral da taxa de variação de momentum angular Eq. (1.3),

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{E}\right)\left(\vec{n}\times\vec{E}\right)+\left(\vec{n}\cdot\vec{B}\right)\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)\right]r^3 d\Omega. \tag{B.1}$$

Substituíndo as expressões dos campos Eqs. (1.4) e (1.5) resulta, mantendo apenas termos do integrando com número par de componentes da normal,

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\left[2\left(\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}\right)\left(\ddot{\vec{d}}\times\vec{n}\right)\frac{1}{c^3}+\frac{1}{12}\left(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{Q}}\right)\left(\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n}\right)\frac{1}{c^5}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{Q}}\right)\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\ddot{\vec{m}}\right)\right]\frac{1}{c^4}+2\left(\vec{n}\cdot\dot{\vec{m}}\right)\left(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n}\right)\frac{1}{c^3}+$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(\vec{n}\cdot\dot{\vec{m}}\right)\left[\vec{n}\times\left(\dddot{\vec{Q}}\times\vec{n}\right)\right]\frac{1}{c^4}\right]d\Omega. \tag{B.2}$$

Para calcular essa integral usamos as relações Eqs. (1.9) e (1.10). Enumeramos abaixo, em ordem, termo por termo dessa integral.

1.

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} 2\left(\vec{n}\cdot\dddot{\vec{d}}\right)\left(\ddot{\vec{d}}\times\vec{n}\right)_i\frac{1}{c^3}d\Omega = \frac{1}{2\pi c^3}\int_0^{4\pi}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{d}_j\dot{d}_l\,n_k n_l\frac{1}{c^3}d\Omega =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{d}_j\dot{d}_l\,\delta_{kl} = \frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\left(\ddot{\vec{d}}\times\dddot{\vec{d}}\right)_i . \tag{B.3}$$

2.

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\frac{1}{12}\left(\vec{n}\cdot\dddot{\vec{Q}}\right)\left(\ddot{\vec{Q}}\times\vec{n}\right)_i\frac{1}{c^5}d\Omega = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{12c^5}\int_0^{4\pi}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_j\ddot{Q}_l\,n_k n_l d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{12c^5}\int_0^{4\pi}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jm}\ddot{Q}_{ln}\,n_k n_l n_m n_n d\Omega =$$

$$= \frac{1}{180c^5}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jm}\ddot{Q}_{ln}\left(\delta_{kl}\delta_{mn}+\delta_{km}\delta_{ln}+\delta_{kn}\delta_{lm}\right) = \frac{1}{90c^5}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jl}\ddot{Q}_{kl} . \tag{B.4}$$

3.

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\frac{1}{2}\left(\vec{n}\cdot\dddot{\vec{Q}}\right)\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\ddot{\vec{m}}\right)\right]_i\frac{1}{c^4}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2c^4}\int_0^{4\pi}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\,\ddot{Q}_{pq}\ddot{m}_m\,n_l n_j n_p n_q d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2c^4}\int_0^{4\pi} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \ddot{Q}_{pq}\ddot{m}_m \; n_l n_j n_p n_q d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2c^4}\int_0^{4\pi} \left(\ddot{Q}_{pq}\ddot{m}_j \; n_i n_j n_p n_q - \ddot{Q}_{pq}\ddot{m}_i \; n_j n_j n_p n_q\right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{30c^4}\left[\ddot{Q}_{pq}\ddot{m}_j \; \left(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp}\right) - \ddot{Q}_{pq}\ddot{m}_i \; \left(\delta_{jj}\delta_{pq} + 2\delta_{jp}\delta_{jq}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{15c^4}\; \ddot{Q}_{ij}\ddot{m}_j \; . \tag{B.5}$$

4.

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} 2\left(\vec{n}\cdot \dot{\vec{m}}\right)\left(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}\right)_i \frac{1}{c^3} d\Omega = \frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\left(\ddot{\vec{m}} \times \dot{\vec{m}}\right)_i . \tag{B.6}$$

5.

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} \frac{1}{3}\left(\vec{n}\cdot \dot{\vec{m}}\right)\left[\vec{n} \times \left(\dddot{\vec{Q}} \times \vec{n}\right)\right]_i \frac{1}{c^4} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{3c^4}\int_0^{4\pi} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \; \dot{m}_q \dddot{Q}_{lp} \; n_j n_m n_p n_q d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{3c^4}\int_0^{4\pi} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \dot{m}_q \dddot{Q}_{lp} \; n_j n_m n_p n_q d\Omega =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{3c^4}\int_0^{4\pi}\left(\dot{m}_q\dddot{Q}_{ip}\, n_j n_j n_p n_q - \dot{m}_q\dddot{Q}_{jp}\, n_j n_i n_p n_q\right) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{45c^4}\left[\dddot{Q}_{ip}\dot{m}_q\,(\delta_{jj}\delta_{pq} + 2\delta_{jp}\delta_{jq}) - \dddot{Q}_{jp}\dot{m}_q\,(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{jp}\delta_{iq} + \delta_{jq}\delta_{ip})\right] =$$

$$= \frac{1}{15c^4}\,\dddot{Q}_{ki}\dot{m}_i\,. \tag{B.7}$$

Somando todas essas integrais obtemos

$$M_i = \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\vec{d}} \times \dot{\vec{d}}\right)_i + \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\vec{m}} \times \dot{\vec{m}}\right)_i + \frac{1}{90c^5}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jl}\ddot{Q}_{kl} +$$

$$+\frac{1}{15c^4}\left[\ddot{Q}_{ij}\ddot{m}_j + \dddot{Q}_{ij}\dot{m}_j\right]. \tag{B.8}$$

Apêndice C

Cálculo dos campos na fonte

Vamos calcular os campos elétrico e de indução eletromagnética nas fontes até a ordem de quadrupolo elétrico. Para isso expandindo as densidades de carga e corrente em potências de $R = \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|$ na variável t'. Obtemos até a ordem que nos interessa,

$$\rho(\vec{r}', t') = \rho(\vec{r}', t) - \dot{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{c}R + \ddot{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{2!c^2}R^2 -$$

$$- \dddot{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{3!c^3}R^3 + \overset{4}{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{4!c^4}R^4 - \overset{5}{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{5!c^5}R^5 \tag{C.1}$$

e

$$\vec{J}(\vec{r}', t') = \vec{J}(\vec{r}', t) - \dot{\vec{J}}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{c}R +$$

$$+ \ddot{\vec{J}}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{2!c^2}R^2 - \dddot{\vec{J}}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{3!c^3}R^3. \tag{C.2}$$

Substituindo essas expressões nos potenciais escalar e vetor resulta

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_{v'} \left[\rho(\vec{r}', t)\frac{1}{R} - \dot{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{1}{c} + \ddot{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{R}{2!c^2} -\right.$$

$$\left. - \dddot{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{R^2}{3!c^3} + \overset{4}{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{R^3}{4!c^4} - \overset{5}{\rho}\,(\vec{r}', t)\frac{R^4}{5!c^5}\right] dV' \tag{C.3}$$

e

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_{v'} \left[\vec{J}(\vec{r}',t)\frac{1}{cR} - \dot{\vec{J}}(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2} + \right.$$

$$\left. + \ddot{\vec{J}}(\vec{r}',t)\frac{R}{2!c^3} - \dddot{\vec{J}}(\vec{r}',t)\frac{R^2}{3!c^4} \right] dV'. \tag{C.4}$$

Primeiro vamos calcular o campo elétrico. O divergente do potencial escalar é

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r},t)}{\partial x_i} = \int_{v'} \left[-\rho(\vec{r}',t)\frac{R_i}{R^3} + \ddot{\rho}(\vec{r}',t)\frac{R_i}{2!c^2R} - \right.$$

$$\left. -2\,\dddot{\rho}(\vec{r}',t)\frac{R_i}{3!c^3} + 3\,\overset{4}{\rho}(\vec{r}',t)\frac{RR_i}{4!c^4} - 4\,\overset{5}{\rho}(\vec{r}',t)\frac{R^2R_i}{5!c^5} \right] dV', \tag{C.5}$$

onde usamos

$$\frac{\partial R^n}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + r'^2)^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}R^{n-2}2(x_i - x_i') = nR^{n-2}R_i. \tag{C.6}$$

A derivada temporal do potencial vetor é

$$\frac{1}{c}\frac{\partial A_i(\vec{r},t)}{\partial t} = \int_{v'} \left[\dot{J}_i(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2R} - \ddot{J}_i(\vec{r}',t)\frac{1}{c^3} + \right.$$

$$\left. + \dddot{J}_i(\vec{r}',t)\frac{R}{2!c^4} - \overset{4}{J}_i(\vec{r}',t)\frac{R^2}{3!c^5} \right] dV'. \tag{C.7}$$

O campo elétrico resulta de menos a soma desses termos Eqs. (C.5) e (C.7),

$$E_i(\vec{r},t) = \int_{v'} \left[\rho(\vec{r}',t)\frac{R_i}{R^3} - \ddot{\rho}(\vec{r}',t)\frac{R_i}{2!c^2R} + 2\,\dddot{\rho}(\vec{r}',t)\frac{R_i}{3!c^3} - \right.$$

$$\left. -3\,\overset{4}{\rho}(\vec{r}',t)\frac{RR_i}{4!c^4} + 4\,\overset{5}{\rho}(\vec{r}',t)\frac{R^2R_i}{5!c^5} \right] dV' + \int_{v'} \left[-\dot{J}_i(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2R} + \right.$$

$$\left. + \ddot{J}_i(\vec{r}',t)\frac{1}{c^3} - \dddot{J}_i(\vec{r}',t)\frac{R}{2!c^4} + \overset{4}{J}_i(\vec{r}',t)\frac{R^2}{3!c^5} \right] dV'. \tag{C.8}$$

O campo de indução eletromagnética é calculado através do rotacional do potencial vetor, então

$$B_i(\vec{r},t) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{v'} \left[J_k(\vec{r}',t)\frac{1}{cR} - \dot{J}_k(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2} + \ddot{J}_k(\vec{r}',t)\frac{R}{2!c^3} - \right.$$

$$- \dddot{J}_k\,(\vec{r}\,', t)\frac{R^2}{3!c^4}\Bigg]\,dV' =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\int_{v'}\left[-J_k(\vec{r}\,', t)\frac{1}{c}\frac{R_j}{R^3} + \ddot{J}_k\,(\vec{r}\,', t)\frac{1}{2!c^3}\frac{R_j}{R} - \dddot{J}_k\,(\vec{r}\,', t)\frac{2}{3!c^4}R_j\right]dV'. \quad \text{(C.9)}$$

Apêndice D

Cálculo do torque

Vamos calcular o valor temporal médio da integral Eq. (2.8),

$$T_i = \varepsilon_{ijk} \int_v \int_{v'} \Big[\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t)\frac{R_k x_j}{R^3} - \rho(\vec{r},t)\ \ddot{\rho}\ (\vec{r}\,',t)\frac{1}{2c^2}\frac{R_k x_j}{R} +$$

$$+\rho(\vec{r},t)\ \dddot{\rho}\ (\vec{r}\,',t)\frac{1}{3c^3}R_k x_j - \rho(\vec{r},t)\ \overset{4}{\rho}\ (\vec{r}\,',t)\frac{3}{4!c^4}RR_k x_j +$$

$$+\rho(\vec{r},t)\ \overset{5}{\rho}\ (\vec{r}\,',t)\frac{4}{5!c^5}R^2 R_k x_j \Big]\, dV'dV -$$

$$\varepsilon_{ijk} \int_v \int_{v'} \Big[-\rho(\vec{r},t)\ \dot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^2}\frac{x_j}{R} + \rho(\vec{r},t)\ \ddot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^3}x_j -$$

$$-\rho(\vec{r},t)\ \dddot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)\frac{1}{2!c^4}Rx_j + \rho(\vec{r},t)\ \overset{4}{J}_k\ (\vec{r}\,',t)\frac{1}{3!c^5}R^2 x_j \Big]\, dV'dV +$$

$$+\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pnk}\varepsilon_{lmn} \int_v \int_{v'} \Big[-J_p(\vec{r},t)J_m(\vec{r}\,',t)\frac{1}{c^2}\frac{R_l x_j}{R^3} +$$

$$+J_p(\vec{r},t)\ \ddot{J}_m\ (\vec{r}\,',t)\frac{1}{2!c^4}\frac{R_l x_j}{R} - J_p(\vec{r},t)\ \dddot{J}_m\ (\vec{r}\,',t)\frac{2}{3!c^5}R_l x_j \Big]\, dV'dV. \qquad \text{(D.1)}$$

Para isto utilizaremos a equação da continuidade, transformando derivadas temporais de densidades de carga em divergentes de corrente, e as Eqs. (2.10) e (11). Enumeremos termo por termo as integrais acima, sub-entendendo o valor temporal médio:

1.

$$\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t)\frac{R_k x_j}{R^3}dV'dV =$$

$$=\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t)\frac{(\varepsilon_{ijk}x_k x_j-\varepsilon_{ijk}x'_k x_j)}{R^3}dV'dV =$$

$$=-\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t)\frac{x'_k x_j}{R^3}dV'dV=0, \tag{D.2}$$

essa integral é nula porque o integrando é ímpar por troca de $\vec{r}$ por $\vec{r}'$ (devido a ε_{ijk}).

2.

$$-\frac{1}{2c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\,\ddot{\rho}\,(\vec{r}',t)\frac{R_k x_j}{R}dV'dV =$$

$$=-\frac{1}{2c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\dot{\rho}\,(\vec{r},t)\,\dot{\rho}\,(\vec{r}',t)\frac{x'_k x_j}{R}dV'dV=0, \tag{D.3}$$

pois, novamente a integral é ímpar.

3.

$$\frac{1}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\,\dddot{\rho}\,(\vec{r}',t)R_k x_j dV'dV =$$

$$=\frac{1}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\dot{\rho}\,(\vec{r},t)\,\ddot{\rho}\,(\vec{r}',t)x'_k x_j dV'dV =$$

$$=\frac{1}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}J_l(\vec{r},t)\,\dot{J}_m\,(\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x'_m}x'_k x_j dV'dV =$$

$$=\frac{1}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v J_j(\vec{r},t)dV\int_{v'}\dot{J}_k\,(\vec{r}',t)dV'. \tag{D.4}$$

4.

$$-\frac{3}{4!c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\,\overset{4}{\rho}\,(\vec{r}',t)RR_k x_j dV'dV =$$

$$=\frac{3}{4!c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\ddot{\rho}\,(\vec{r},t)\,\ddot{\rho}\,(\vec{r}',t)Rx'_k x_j dV'dV=0, \tag{D.5}$$

por ser ímpar na troca de $\vec{r}$ por $\vec{r}'$.

5.

$$\frac{4}{5!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\,\overset{5}{\rho}\,(\vec{r}',t)R^2R_kx_jdV'dV =$$

$$= -\frac{4}{5!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\ddot{\rho}\,(\vec{r},t)\,\dddot{\rho}\,(\vec{r}',t)R^2x'_kx_jdV'dV =$$

$$= -\frac{4}{5!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\dot{J}_l\,(\vec{r},t)\,\ddot{J}_m\,(\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x'_m}R^2x'_kx_jdV'dV =$$

$$= \frac{4}{5!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\dot{J}_l\,(\vec{r},t)\,\ddot{J}_m\,(\vec{r}',t)\,[2\delta_{lm}x'_kx_j + 2\delta_{lj}x'_kx_m + 2\delta_{mk}x'_lx_j +$$

$$+2\,\delta_{mk}\delta_{lj}x'_nx_n]\,dV'dV = \frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\dot{J}_l\,(\vec{r},t)x_jdV\int_{v'}\ddot{J}_l\,(\vec{r}',t)x'_kdV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\dot{J}_j\,(\vec{r},t)x_ldV\int_{v'}\ddot{J}_l\,(\vec{r}',t)x'_kdV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\dot{J}_l\,(\vec{r},t)x_jdV\int_{v'}\ddot{J}_k\,(\vec{r}',t)x'_ldV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\dot{J}_j\,(\vec{r},t)x_ldV\int_{v'}\ddot{J}_k\,(\vec{r}',t)x'_ldV'. \qquad \text{(D.6)}$$

Despresamos os termos contendo x_nx_n e $x'_nx'_n$ provenientes do R^2 pois esses termos contribuem para momentos maiores que quadrupolo elétrico.

6.

$$-\frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\rho(\vec{r},t)\,\dot{J}_k\,(\vec{r}',t)\frac{x_j}{R}dV'dV =$$

$$\frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\dot{\rho}\,(\vec{r},t)J_k(\vec{r}',t)\frac{x_j}{R}dV'dV =$$

$$= \frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}J_l(\vec{r},t)J_k(\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{x_j}{R}dV'dV =$$

$$= \frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} J_l(\vec{r},t)J_k(\vec{r}',t)\left[\frac{\delta_{jl}}{R} - \frac{x_jR_l}{R^3}\right]dV'dV =$$

$$= \frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} J_l(\vec{r},t)J_k(\vec{r}',t)\left[\frac{\delta_{jl}}{R} - \frac{x_jx'_l}{R^3}\right]dV'dV = 0, \qquad \text{(D.7)}$$

por ser ímpar.

7.

$$\frac{1}{c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \rho(\vec{r},t)\ \ddot{J}_k\ (\vec{r}',t)x_jdV'dV =$$

$$= -\frac{1}{c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \dot{\rho}\ (\vec{r},t)\ \dot{J}_k\ (\vec{r}',t)x_jdV'dV =$$

$$= -\frac{1}{c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v J_j(\vec{r},t)dV\int_{v'} \dot{J}_k\ (\vec{r}',t)dV'. \qquad \text{(D.8)}$$

8.

$$-\frac{1}{2c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \rho(\vec{r},t)\ \dddot{J}_k\ (\vec{r}',t)Rx_jdV'dV =$$

$$= -\frac{1}{2c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \ddot{\rho}\ (\vec{r},t)\ \dot{J}_k\ (\vec{r}',t)Rx_jdV'dV =$$

$$= -\frac{1}{2c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \dot{J}_l\ (\vec{r},t)\ \dot{J}_k\ (\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_l}Rx_jdV'dV =$$

$$= -\frac{1}{2c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \dot{J}_l\ (\vec{r},t)\ \dot{J}_k\ (\vec{r}',t)\left[\delta_{jl}R - \frac{x_jx'_l}{R}\right]dV'dV = 0, \qquad \text{(D.9)}$$

por ser ímpar.

9.

$$\frac{1}{3!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \rho(\vec{r},t)\ \overset{4}{J}_k\ (\vec{r}',t)R^2x_jdV'dV =$$

$$= \frac{1}{3!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \ddot{\rho}\ (\vec{r},t)\ \ddot{J}_k\ (\vec{r}',t)R^2x_jdV'dV =$$

$$= \frac{1}{3!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \dot{J}_l\ (\vec{r},t)\ \ddot{J}_k\ (\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_l}R^2x_jdV'dV =$$

$$= \frac{1}{3!c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'} \dot{J}_l\left(\vec{r},t\right)\ddot{J}_k\left(\vec{r}',t\right)\left[\delta_{jl}R^2 - 2x_jx'_l\right]dV'dV =$$

$$= -\frac{1}{3c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_j\left(\vec{r},t\right)x_l dV\int_{v'}\ddot{J}_k\left(\vec{r}',t\right)x'_l dV' -$$

$$-\frac{1}{3c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_l\left(\vec{r},t\right)x_j dV\int_{v'}\ddot{J}_k\left(\vec{r}',t\right)x'_l dV'. \qquad \text{(D.10)}$$

Despresamos os termos contendo x_nx_n e $x'_nx'_n$ provenientes do R^2 pois esses termos contribuem para momentos maiores que quadrupolo elétrico.

As contribuições de origem no campo magnético, os termos restantes de Eq. (D.1), são

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lnk}\varepsilon_{pmn}\int_v\int_{v'}\left[-J_l(\vec{r},t)J_m(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2}\frac{R_px_j}{R^3} +\right.$$

$$\left. + J_l(\vec{r},t)\ddot{J}_m\left(\vec{r}',t\right)\frac{1}{2c^4}\frac{R_px_j}{R} - J_l(\vec{r},t)\dddot{J}_m\left(\vec{r}',t\right)\frac{2}{3!c^5}R_px_j\right]dV'dV =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left[\delta_{lm}\delta_{kp} - \delta_{lp}\delta_{km}\right]\int_v\int_{v'}\left[J_l(\vec{r},t)J_m(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2}\frac{x'_px_j}{R^3} -\right.$$

$$\left. - J_l(\vec{r},t)\ddot{J}_m\left(\vec{r}',t\right)\frac{1}{2c^4}\frac{x'_px_j}{R} + J_l(\vec{r},t)\dddot{J}_m\left(\vec{r}',t\right)\frac{2}{3!c^5}x'_px_j\right]dV'dV =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\left[J_l(\vec{r},t)J_l(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2}\frac{x'_kx_j}{R^3} - J_l(\vec{r},t)J_k(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2}\frac{x'_lx_j}{R^3} -\right.$$

$$- J_l(\vec{r},t)\ddot{J}_l\left(\vec{r}',t\right)\frac{1}{2c^4}\frac{x'_kx_j}{R} + J_l(\vec{r},t)\ddot{J}_k\left(\vec{r}',t\right)\frac{1}{2c^4}\frac{x'_lx_j}{R} +$$

$$\left. + J_l(\vec{r},t)\dddot{J}_l\left(\vec{r}',t\right)\frac{2}{3!c^5}x'_kx_j - J_l(\vec{r},t)\dddot{J}_k\left(\vec{r}',t\right)\frac{2}{3!c^5}x'_lx_j\right]dV'dV. \qquad \text{(D.11)}$$

Os dois primeiros termos são

$$\frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\left[J_l(\vec{r},t)J_l(\vec{r}',t)\frac{x'_kx_j}{R^3} - J_l(\vec{r},t)J_k(\vec{r}',t)\frac{x'_lx_j}{R^3}\right]dV'dV = 0, \qquad \text{(D.12)}$$

por serem ímpar por troca de $\vec{r}$ por $\vec{r}'$. Os dois termos do meio são

$$\frac{1}{2c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\left[-J_l(\vec{r},t)\ddot{J}_l\left(\vec{r}',t\right)\frac{x'_kx_j}{R} +\right.$$

$$+ J_l(\vec{r},t)\ \ddot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)\frac{x'_l x_j}{R}\Bigg]\, dV'dV =$$

$$= \frac{1}{2c^4}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\Bigg[\dot{J}_l\ (\vec{r},t)\ \dot{J}_l\ (\vec{r}\,',t)\frac{x'_k x_j}{R} +$$

$$+ \dot{J}_l\ (\vec{r},t)\ \dot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)\frac{x'_l x_j}{R}\Bigg]\, dV'dV = 0, \qquad \text{(D.13)}$$

por serem ímpar. Os dois últimos termos são

$$\frac{1}{3c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v\int_{v'}\left[J_l(\vec{r},t)\ \dddot{J}_l\ (\vec{r}\,',t)x'_k x_j\ -\ J_l(\vec{r},t)\ \dddot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)x'_l x_j\right] dV'dV =$$

$$= -\frac{1}{3c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_l\ (\vec{r},t)x_j dV\int_{v'}\ddot{J}_l\ (\vec{r}\,',t)x'_k dV' +$$

$$+\frac{1}{3c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_l\ (\vec{r},t)x_j dV\int_{v'}\ddot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)x'_l dV'. \qquad \text{(D.14)}$$

Substituindo esses resultados na Eq. (D.1) obtemos

$$\langle T_i\rangle = \Bigg\langle -\frac{2}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v J_j(\vec{r},t)dV\int_{v'}\dot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)dV' -$$

$$-\frac{4}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_l\ (\vec{r},t)x_j dV\int_{v'}\ddot{J}_l\ (\vec{r}\,',t)x'_k dV' -$$

$$-\frac{4}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_j\ (\vec{r},t)x_l dV\int_{v'}\ddot{J}_k\ (\vec{r}\,',t)x'_l dV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_j\,(\vec{r},t)x_l dV\int_{v'}\ddot{J}_l\,(\vec{r}',t)x'_k dV'+$$

$$+\frac{1}{5c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_l\,(\vec{r},t)x_j dV\int_{v'}\ddot{J}_k\,(\vec{r}',t)x'_l dV'\Big\rangle\,. \qquad \text{(D.15)}$$

Vamos agora escrever essa equação em termos dos multipolos. Para isso utilizamos as expressões Eqs. (A.7), (A.9) e (A.11). Para o primeiro termo da Eq. (D.15) obtemos

$$-\frac{2}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\int_v J_j(\vec{r},t)dV\int_{v'}\dot{J}_k\,(\vec{r}',t)dV' = -\frac{2}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{d}_j\ddot{d}_k\,.$$

Para calcular os outros termos da Eq. (D.15) vamos primeiro escrever

$$\int_v J_i x_j dV = \frac{1}{2}\int_v\Big[(J_i x_j + J_j x_i) + (J_i x_j - J_j x_i) - \frac{2}{3}\delta_{ij}J_k x_k+$$

$$+\frac{2}{3}\delta_{ij}J_k x_k\Big]\,dV = \frac{1}{6}\,\dot{Q}_{ij} + cM_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_v J_k x_k dV. \qquad \text{(D.16)}$$

Utilizando essa expressão no segundo termo da Eq. (D.15) resulta

$$-\frac{4}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_l\,(\vec{r},t)x_j dV\int_{v'}\ddot{J}_l\,(\vec{r}',t)x'_k dV' =$$

$$= -\frac{4}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{1}{6}\,\ddot{Q}_{lj} + c\,\dot{M}_{lj} + \frac{1}{3}\delta_{lj}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{6}\,\dddot{Q}_{lk} + c\,\ddot{M}_{lk} + \frac{1}{3}\delta_{lk}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= -\frac{4}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\dddot{Q}_{lk} + c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \frac{1}{9}\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV\int_v \dot{J}_n\,x_n dV + \right.$$

$$+\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{lk}\dot{M}_{lj} + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{kj}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jk}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV +$$

$$\left. +\frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{kj}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{M}_{jk}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= -\frac{4}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\dddot{Q}_{lk} + c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \right.$$

$$\left. +\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{lk}\dot{M}_{lj} + \frac{2}{3}c\varepsilon_{ijk}\,\ddot{M}_{jk}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV\right]. \qquad \text{(D.17)}$$

O terceiro termo da Eq. (D.15) é obtido trocando l por j e na primeira integral em relação ao segundo termo. Obtemos

$$-\frac{4}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_j\,(\vec{r},t)x_l dV\int_{v'} \ddot{J}_k\,(\vec{r}\,',t)x'_l dV' =$$

$$= -\frac{4}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{1}{6}\,\ddot{Q}_{jl} + c\,\dot{M}_{jl} + \frac{1}{3}\delta_{lj}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{6}\,\dddot{Q}_{kl} + c\,\ddot{M}_{kl} + \frac{1}{3}\delta_{lk}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= -\frac{4}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{jl}\dddot{Q}_{kl} + c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{jl}\ddot{M}_{kl} + \frac{1}{9}\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV\int_v \dot{J}_n\,x_n dV + \right.$$

$$+\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{jl}\ddot{M}_{kl} + \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{kl}\dot{M}_{jl} + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{kj}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jk}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV +$$

$$\left. + \frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{jk}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{M}_{kj}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= -\frac{4}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\dddot{Q}_{lk} + c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \right.$$

$$\left. -\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\ddot{M}_{lk} - \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{lk}\dot{M}_{lj} - \frac{2}{3}c\varepsilon_{ijk}\,\ddot{M}_{jk}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV\right]. \qquad \text{(D.18)}$$

O quarto termo é

$$\frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_j\,(\vec{r},t)x_l dV\int_{v'} \ddot{J}_l\,(\vec{r}\,',t)x'_k dV' =$$

$$= \frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{1}{6}\,\ddot{Q}_{jl} + c\,\dot{M}_{jl} + \frac{1}{3}\delta_{jl}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{6}\,\dddot{Q}_{lk} + c\,\ddot{M}_{lk} + \frac{1}{3}\delta_{lk}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= \frac{1}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{jl}\dddot{Q}_{lk} + c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{jl}\ddot{M}_{lk} + \frac{1}{9}\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV \int_v \dot{J}_n\,x_n dV + \right.$$

$$+\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{jl}\ddot{M}_{lk} + \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{lk}\dot{M}_{jl} + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{jk}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jk}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV +$$

$$\left. +\frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{jk}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{M}_{jk}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= \frac{1}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\dddot{Q}_{lk} - c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \right.$$

$$\left. +\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\ddot{M}_{lk} - \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{lk}\dot{M}_{lj}\right]. \qquad \text{(D.19)}$$

O último termo da Eq. (D.15) resulta

$$\frac{1}{5c^5}\varepsilon_{ijk}\int_v \dot{J}_l\,(\vec{r},t)x_j dV \int_{v'} \ddot{J}_k\,(\vec{r}',t)x'_l dV' =$$

$$= \frac{1}{15c^5}\varepsilon_{ijk}\left[\frac{1}{6}\,\ddot{Q}_{lj} + c\,\dot{M}_{lj} + \frac{1}{3}\delta_{lj}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV\right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{6}\,\dddot{Q}_{kl} + c\,\ddot{M}_{kl} + \frac{1}{3}\delta_{kl}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= \frac{1}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\dddot{Q}_{kl} + c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{kl} + \frac{1}{9}\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}\int_v \dot{J}_m\,x_m dV \int_v \dot{J}_n\,x_n dV + \right.$$

$$+\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\ddot{M}_{kl} + \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{kl}\dot{M}_{lj} + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{kj}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{1}{18}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{kj}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV +$$

$$\left. +\frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{kj}\int_v \ddot{J}_n\,x_n dV + \frac{c}{3}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{M}_{kj}\int_v \dot{J}_n\,x_n dV\right] =$$

$$= \frac{1}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\dddot{Q}_{lk} - c^2\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \right.$$

$$\left. -\frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\ddot{M}_{lk} + \frac{c}{6}\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{lk}\dot{M}_{lj}\right]. \tag{D.20}$$

Somando esses resultados vemos que os termos cruzados entre dipolo magnético com quadrupolo elétrico e com a integral $\int_v \dot{J}_n\,x_n dV$ se cancelam. O valor temporal médio do torque resulta

$$\langle T_i\rangle = \left\langle -\frac{2}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{d}_j\ddot{d}_k - \frac{1}{90c^5}\varepsilon_{ijk}\,\ddot{Q}_{lj}\dddot{Q}_{lk} - \frac{2}{3c^3}\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{lk}\right\rangle. \tag{D.21}$$

Reescrevendo o termo de dipolo magnético como

$$\varepsilon_{ijk}\,\dot{M}_{lj}\ddot{M}_{lk} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{kml}\,\dot{m}_n\ddot{m}_l =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left[\delta_{jk}\delta_{nl} - \delta_{jl}\delta_{nk}\right]\dot{m}_n\ddot{m}_l = -\varepsilon_{ijk}\,\ddot{m}_j\dot{m}_k, \tag{D.22}$$

a expressão do torque torna-se

$$\langle T_i\rangle = \frac{2}{3c^3}\left\langle\left(\ddot{\vec{d}}\times\dot{\vec{d}}\right)_i\right\rangle + \frac{2}{3c^3}\left\langle\left(\ddot{\vec{m}}\times\dot{\vec{m}}\right)_i\right\rangle + \frac{1}{90c^5}\varepsilon_{ijk}\left\langle\dddot{Q}_{jl}\ddot{Q}_{kl}\right\rangle. \tag{D.23}$$

Calculando a média temporal de M_i na Eq. (1.12) verificamos, de fato, que a Eq. (2.3) é satisfeita. Temos, notando que $\left\langle \dddot{Q}_{ij}\dot{m}_j \right\rangle = -\left\langle \ddot{Q}_{ij}\ddot{m}_j \right\rangle$,

$$\langle M_i \rangle = \frac{2}{3c^3}\left\langle \left(\ddot{\vec{d}} \times \dot{\vec{d}} \right)_i \right\rangle + \frac{2}{3c^3}\left\langle \left(\ddot{\vec{m}} \times \dot{\vec{m}} \right)_i \right\rangle + \frac{1}{90c^5}\varepsilon_{ijk}\left\langle \dddot{Q}_{jl}\ddot{Q}_{kl} \right\rangle \qquad \text{(D.24)}$$

que é igual a $\langle T_i \rangle$ escrito acima.

Apêndice E

Cálculo da energia

Vamos resolver a integral Eq. (2.16),

$$P = \int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t) \left[\rho(\vec{r}',t)\frac{R_i}{R^3} - \ddot{\rho}\,(\vec{r}',t)\frac{1}{2!c^2}\frac{R_i}{R} + \dddot{\rho}\,(\vec{r}',t)\frac{2}{3!c^3}R_i - \right.$$

$$\left. - \overset{4}{\rho}\,(\vec{r}',t)\frac{3}{4!c^4}\frac{RR_i}{4!c^4} + \overset{5}{\rho}\,(\vec{r}',t)\frac{4}{5!c^5}\frac{R^2R_i}{5!c^5} \right] dV'dV +$$

$$+ \int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t) \left[- \dot{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2}\frac{1}{R} + \ddot{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{1}{c^3} - \dddot{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{1}{2!c^4}R + \right.$$

$$\left. + \overset{4}{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{R^2}{3!c^5} \right] dV'dV. \tag{E.1}$$

Utilizando a equação da continuidade e as condições (2.10) e (2.11), encontramos

$$P = \int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t) \left[\rho(\vec{r}',t)\frac{R_i}{R^3} + \dot{J}_j\,(\vec{r}',t)\frac{1}{2!c^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{R_i}{R} - \ddot{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{2}{3!c^3} + \right.$$

$$\left. + \dddot{J}_j\,(\vec{r}',t)\frac{3}{4!c^4}\frac{\partial}{\partial x_j}RR_i - \overset{4}{J}_j\,(\vec{r}',t)\frac{4}{5!c^5}\frac{\partial}{\partial x_j}R^2R_i \right] dV'dV +$$

$$+ \int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t) \left[- \dot{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{1}{c^2}\frac{1}{R} + \ddot{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{1}{c^3} - \dddot{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{1}{2!c^4}R + \right.$$

$$\left. + \overset{4}{J}_i\,(\vec{r}',t)\frac{1}{3!c^5}R^2 \right] dV'dV. \tag{E.2}$$

Enumeraremos termo por termo as integrais acima, sub-entendendo o valor temporal médio:

1.

$$\int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t)\frac{R_i}{R^3}dV'dV = \frac{1}{2}\int_v \int_{v'} \rho(\vec{r}',t)J_i(\vec{r},t)\frac{1}{R^3}\frac{\partial}{\partial x_i}R^2 dV'dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_v \int_{v'} \rho(\vec{r}',t)R^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(J_i(\vec{r},t)\frac{1}{R^3}\right)dV'dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_v \int_{v'} \rho(\vec{r}',t)\left(\dot{\rho}\,(\vec{r},t) + 3J_i(\vec{r},t)\frac{R_i}{R^3}\right)dV'dV =$$

$$= \frac{3}{2}\int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t)\frac{R_i}{R^3}dV'dV,$$

então

$$\int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t)\frac{R_i}{R^3}dV'dV = 0. \tag{E.3}$$

A integral de $\rho(\vec{r}',t)\ \dot{\rho}\ (\vec{r},t)$ é nula pois o integrando é ímpar pela troca de $\vec{r}$ por $\vec{r}'$.

2.

$$\frac{1}{2!c^2}\int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \dot{J}_j\ (\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{R_i}{R}dV'dV =$$

$$= \frac{1}{2!c^2}\int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \dot{J}_j\ (\vec{r}',t)\left[\frac{\delta_{ij}}{R} - \frac{R_iR_j}{R^3}\right]dV'dV = 0, \tag{E.4}$$

por $J_i(\vec{r},t)\ \dot{J}_j\ (\vec{r}',t)$ ser ímpar pela troca de $\vec{r}$ e $\vec{r}'$.

3.

$$-\frac{2}{3!c^3}\int_v \int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \ddot{J}_i\ (\vec{r}',t)dV'dV =$$

$$= \frac{1}{3c^3}\int_v \dot{J}_i\ (\vec{r},t)dV \int_{v'} \dot{J}_i\ (\vec{r}',t)dV'. \tag{E.5}$$

4.

$$\frac{3}{4!c^4}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \dddot{J}_j\ (\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_j}RR_i dV'dV =$$

$$= \frac{3}{4!c^4}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \dddot{J}_j\ (\vec{r}',t)\left[\delta_{ij}R + \frac{R_iR_j}{R}\right]dV'dV = 0, \qquad \text{(E.6)}$$

por $J_i(\vec{r},t)\ \dddot{J}_j\ (\vec{r}',t)$ ser ímpar pela troca de $\vec{r}$ e $\vec{r}'$.

5.

$$-\frac{4}{5!c^5}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \overset{4}{J}_j\ (\vec{r}',t)\frac{\partial}{\partial x_j}R^2R_i dV'dV =$$

$$= -\frac{4}{5!c^5}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \overset{4}{J}_j\ (\vec{r}',t)\left[\delta_{ij}R^2 + 2R_iR_j\right]dV'dV =$$

$$= \frac{1}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\ (\vec{r},t)x_i dV\int_{v'} \ddot{J}_j\ (\vec{r}',t)x'_j dV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\ (\vec{r},t)x_j dV\int_{v'} \ddot{J}_j\ (\vec{r}',t)x'_i dV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\ (\vec{r},t)x_j dV\int_{v'} \ddot{J}_i\ (\vec{r}',t)x'_j dV'. \qquad \text{(E.7)}$$

Despresamos os termos contendo x_nx_n, $x'_nx'_n$, x_ix_j e $x'_ix'_j$ provenientes do R^2 e do R_iR_j pois esses termos contribuem para momentos maiores que quadrupolo elétrico.

6.

$$\frac{1}{c^2}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \dot{J}_i\ (\vec{r}',t)dV'dV = 0, \qquad \text{(E.8)}$$

por $J_i(\vec{r},t)\ \dot{J}_i\ (\vec{r}',t)$ ser ímpar pela troca de $\vec{r}$ e $\vec{r}'$.

7.

$$\frac{1}{c^3}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\ \ddot{J}_i\ (\vec{r}',t)dV'dV =$$

$$= -\frac{1}{c^3}\int_v \dot{J}_i\,(\vec{r},t)dV \int_{v'} \dot{J}_i\,(\vec{r}',t)dV'.$$

8.

$$-\frac{1}{2c^4}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\;\ddot{J}_i\,(\vec{r}',t)RdV'dV =$$

$$= \frac{1}{2c^4}\int_v\int_{v'} \dot{J}_i\,(\vec{r},t)\;\ddot{J}_i\,(\vec{r}',t)RdV'dV = 0, \qquad \text{(E.9)}$$

por ser ímpar.

9.

$$\frac{1}{3!c^5}\int_v\int_{v'} J_i(\vec{r},t)\;\overset{4}{J}_i\,(\vec{r}',t)R^2dV'dV =$$

$$= -\frac{1}{3c^5}\int_v \ddot{J}_i\,(\vec{r},t)x_jdV \int_{v'} \ddot{J}_i\,(\vec{r}',t)x'_jdV'. \qquad \text{(E.10)}$$

Despresamos os termos contendo x_nx_n e $x'_nx'_n$ provenientes do R^2 pois esses termos contribuem para momentos maiores que quadrupolo elétrico. A média temporal da taxa de energia irradiada resulta então

$$\langle P\rangle = \Big\langle -\frac{2}{3c^3}\int_v \dot{J}_i\,(\vec{r},t)dV \int_{v'} \dot{J}_i\,(\vec{r}',t)dV' -$$

$$-\frac{4}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\,(\vec{r},t)x_jdV \int_{v'} \ddot{J}_i\,(\vec{r}',t)x'_jdV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\,(\vec{r},t)x_jdV \int_{v'} \ddot{J}_j\,(\vec{r}',t)x'_idV' +$$

$$+\frac{1}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\left(\vec{r},t\right)x_i dV \int_{v'} \ddot{J}_j\left(\vec{r}',t\right)x'_j dV'\Big\rangle . \qquad \text{(E.11)}$$

Vamos agora escrever essa expressão em termos dos momentos utilizando as Eqs. (A.7), (A.9) e (A.11). Para o primeiro termo temos

$$-\frac{2}{3c^3}\int_v \dot{J}_i\left(\vec{r},t\right)dV \int_{v'} \dot{J}_i\left(\vec{r}',t\right)dV' = -\frac{2}{3c^3}\left\langle \ddot{d}^2\right\rangle . \qquad \text{(E.12)}$$

Para o segundo termo da Eq. (E.11) reescrevendo $\int_v \ddot{J}_i\, x_j dV$ como

$$\int_v \ddot{J}_i\, x_j dV = \frac{1}{2}\int_v \Big[\left(\ddot{J}_i\, x_j + \ddot{J}_j\, x_i\right) + \left(\ddot{J}_i\, x_j - \ddot{J}_j\, x_i\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\, \ddot{J}_k\, x_k +$$

$$+\frac{2}{3}\delta_{ij}\, \ddot{J}_k\, x_k\Big]\, dV = \frac{1}{6}\,\dddot{Q}_{ij} + c\,\ddot{M}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_v \ddot{J}_k\, x_k dV \qquad \text{(E.13)}$$

obtemos

$$-\frac{4}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\left(\vec{r},t\right)x_j dV \int_{v'} \ddot{J}_i\left(\vec{r}',t\right)x'_j dV' =$$

$$-\frac{4}{15c^5}\left[\frac{1}{6}\,\dddot{Q}_{ij} + c\,\ddot{M}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_v \ddot{J}_k\, x_k dV\right]\left[\frac{1}{6}\,\dddot{Q}_{ij} + c\,\ddot{M}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\int_v \ddot{J}_l\, x_l dV\right] =$$

$$= -\frac{4}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\left(\dddot{Q}_{ij}\right)^2 + c^2\left(\ddot{M}_{ij}\right)^2 + \frac{2}{9}\int_v \ddot{J}_k\, x_k dV\, \dddot{Q}_{ii} +\right.$$

$$\left. +\frac{2c}{3}\int_v \ddot{J}_k\, x_k dV\, \ddot{M}_{ii} + \frac{1}{3}\int_v \ddot{J}_k\, x_k dV \int_v \ddot{J}_l\, x_l dV\right] =$$

$$-\frac{4}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\left(\dddot{Q}_{ij}\right)^2+c^2\left(\ddot{M}_{ij}\right)^2+\frac{1}{3}\int_v \ddot{J}_i\, x_i dV \int_v \ddot{J}_j\, x_j dV\right]. \tag{E.14}$$

Utilizamos que $Q_{ii} = 0$ e $M_{ii} = 0$. Para o terceiro termo da Eq. (E.11) apenas trocamos i e j na segunda integral, então

$$\frac{1}{15c^5}\int_v \ddot{J}_i\,(\vec{r},t)x_j dV \int_{v'} \ddot{J}_j\,(\vec{r}',t)x_i' dV' =$$

$$\frac{1}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\,\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ji}+c^2\,\ddot{M}_{ij}\ddot{M}_{ji}+\frac{1}{3}\int_v \ddot{J}_i\, x_i dV \int_v \ddot{J}_j\, x_j dV\right]=$$

$$\frac{1}{15c^5}\left[\frac{1}{36}\left(\dddot{Q}_{ij}\right)^2-c^2\left(\ddot{M}_{ij}\right)^2+\frac{1}{3}\int_v \ddot{J}_i\, x_i dV \int_v \ddot{J}_j\, x_j dV\right]. \tag{E.15}$$

Substituindo as Eqs. (E.12), (E.14) e (E.15) na Eq. (E.11) resulta

$$\langle P\rangle = -\frac{2}{3c^3}\left\langle \ddot{d}^2\right\rangle - \frac{1}{3c^3}\left\langle \ddot{M}_{ij}^2\right\rangle - \frac{1}{180c^5}\left\langle \dddot{Q}_{ij}^2\right\rangle. \tag{E.16}$$

Utilizando $M_{ij} = \varepsilon_{ijk}\,\ddot{m}_k$ obtem-se

$$\langle P\rangle = -\frac{2}{3c^3}\left\langle \ddot{d}^2\right\rangle - \frac{2}{3c^3}\left\langle \ddot{m}^2\right\rangle - \frac{1}{180c^5}\left\langle \dddot{Q}_{ij}^2\,.\right\rangle \tag{E.17}$$

Calculando o valor temporal médio do fluxo de energia I obtido por LL [1] vemos que, de fato, a Eq. (2.15) é satisfeita,

$$\langle I\rangle = \left\langle -\frac{2}{3c^3}\,\ddot{d}^2 - \frac{2}{3c^3}\,\ddot{m}^2 - \frac{1}{180c^5}\,\dddot{Q}_{ij}^2\right\rangle \tag{E.18}$$

que é igual a $\langle P\rangle$ escrito acima.

Apêndice F

Cálculo dos campos de uma carga pontual

Vamos calcular os campos elétrico e de indução eletromagnética nas proximidades de uma carga pontual. Os potenciais escalar e vetor de uma partícula pontual em movimento são

$$\Phi = \left[\frac{e}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\right]_{ret} = \frac{e}{R(t') - \frac{\vec{R}(t')\cdot\vec{v}(t')}{c}} \tag{F.1}$$

e

$$\vec{A} = \left[\frac{e\vec{v}}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\right]_{ret} = \frac{e\vec{v}(t')}{R(t') - \frac{\vec{R}(t')\cdot\vec{v}(t')}{c}}, \tag{F.2}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula, $t' = t - R(t')/c$ é o tempo retardado e $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{z}(t')$ ($\vec{r}$ é a posição onde o potencial é medido e $\vec{z}$ é a posição da partícula).

Primeiro vamos calcular o potencial escalar. Como queremos o campo próximo da carga temos $R(t)$ muito pequeno. Expandindo os vetores posição e velocidade da partícula em termos de $R(t)/c$ mantendo os termos até ordem c^{-3} e c^{-2} (termos

de ordem maior não irão contribuir para a força de reação) obtemos, no sistema de repouso da carga $\vec{v}\,(t) = 0$,

$$\vec{R}(t') = \vec{R}(t - \frac{R(t')}{c}) = \vec{R}(t) - \frac{\vec{a}(t)}{2}\frac{R^2(t)}{c^2} + \frac{\dot{\vec{a}}\,(t)}{6}\frac{R^3(t)}{c^3} \tag{F.3}$$

e

$$\vec{v}(t') = -\vec{a}\frac{R(t)}{c} + \frac{\dot{\vec{a}}}{2}\frac{R^2(t)}{c^2}, \tag{F.4}$$

onde $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ é a aceleração.

O potencial escalar resulta

$$\Phi = e\left[R(t') - \frac{\vec{R}(t')\cdot\vec{v}(t')}{c}\right]^{-1} =$$

$$= e\left[R - \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{R}\right)}{2}\frac{R}{c^2} + \frac{\left(\dot{\vec{a}}\cdot\vec{R}\right)}{6}\frac{R^2}{c^3} - \vec{R}\cdot\left(-\vec{a}\frac{R}{c^2} + \frac{\dot{\vec{a}}}{2}\frac{R^2}{c^3}\right)\right]^{-1} =$$

$$= e\frac{1}{R}\left[1 + \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{R}\right)}{2}\frac{1}{c^2} - \frac{\left(\dot{\vec{a}}\cdot\vec{R}\right)}{3}\frac{R}{c^3}\right]^{-1} =$$

$$= e\frac{1}{R}\left[1 - \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{R}\right)}{2}\frac{1}{c^2} + \frac{\left(\dot{\vec{a}}\cdot\vec{R}\right)}{3}\frac{R}{c^3}\right] =$$

$$= e\frac{1}{R} - e\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{R}\right)}{2}\frac{1}{c^2R} + e\frac{\left(\dot{\vec{a}}\cdot\vec{R}\right)}{3}\frac{1}{c^3}. \tag{F.5}$$

Para calcular o potencial vetor temos que manter o termo na expansão proporcional

a velocidade pois para o calculo do campo elétrico esse potencial é derivado em relação ao tempo. Os vetores posição e velocidade expandidos até a ordem que contribuem são

$$\vec{R}(t') = \vec{R} + \vec{v}\frac{R(t)}{c} \tag{F.6}$$

e

$$\vec{v}(t') = \vec{v} - \vec{a}\frac{R(t)}{c}. \tag{F.7}$$

Substituindo esses resultados na expressão do potencial vetor temos

$$\vec{A} = e\vec{v}(t')\left[R(t') - \frac{\vec{R}(t')\cdot\vec{v}(t')}{c}\right]^{-1} =$$

$$= e\left[\vec{v}\frac{1}{c} - \vec{a}\frac{R}{c^2}\right]\left[R + \left(\vec{v}\cdot\vec{R}\right)\frac{1}{c} - \left(\vec{v}\cdot\vec{R}\right)\frac{1}{c}\right]^{-1} =$$

$$= e\vec{v}\frac{1}{cR} - e\vec{a}\frac{1}{c^2}. \tag{F.8}$$

O campo elétrico é, em função dos potenciais,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}. \tag{F.9}$$

Substituindo os potenciais obtemos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left[e\frac{1}{R} - e\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{R}\right)}{2}\frac{1}{c^2R} + e\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{R}\right)}{3}\frac{1}{c^3}\right] - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[e\vec{v}\frac{1}{cR} - e\vec{a}\frac{1}{c^2}\right] =$$

IFSC-USP SERVIÇO DE BIBLIOTECA INFORMAÇÃO

$$= e\frac{\vec{n}}{R^2} - e\frac{\vec{a}}{2}\frac{1}{c^2R} - e\frac{(\vec{a}\cdot\vec{n})}{2}\frac{\vec{n}}{c^2R} + e\frac{2}{3}\frac{\dot{\vec{a}}}{c^3}, \tag{F.10}$$

onde $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$.

O campo de indução magnética é calculado por $\vec{B} = \left(\vec{v}(t) \times \vec{E}\right)/c$ só contribuindo em termos contendo derivadas temporais (pois $\vec{v}(t) = 0$). Sua forma explícita não será utilizada.

Apêndice G

Cálculo da integral do fluxo

Vamos resolver a segunda integral da Eq. (3.3), $\int_A T_{ij} n_j dA$.

Antes de calcularmos essa integral vamos escrever os termos do tensor T_{ij} que contribuem para a integral utilizando a expressão do campo elétrico Eqs. (3.7). O campo de indução magnética não contribui para o tensor porque, em nosso referencial, $\vec{v} = 0$ no instante t. Só contribuem para a integral os termos de $T_{ij} n_j$ com número par de componentes da normal. Portanto só contribuem em $E_i E_j$

$$E_i E_j = -e^2 \left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right) \frac{n_i n_j}{c^2 R^3} - e^2 \frac{a_j}{2} \frac{n_i}{c^2 R^3} -$$

$$-e^2 \frac{a_i}{2} \frac{n_j}{c^2 R^3} + e^2 \frac{2}{3} \frac{\dot{a}_j}{c^3 R^2} \frac{n_i}{c^3 R^2} + e^2 \frac{2}{3} \frac{\dot{a}_i}{c^3 R^2} \frac{n_j}{c^3 R^2}. \tag{G.1}$$

Portanto o tensor dos esforços é

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} e^2 \left[-\left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right) \frac{n_i n_j}{c^2 R^3} - \frac{a_j}{2} \frac{n_i}{c^2 R^3} - \frac{a_i}{2} \frac{n_j}{c^2 R^3} + \frac{2}{3} \frac{\dot{a}_j}{c^3 R^2} \frac{n_i}{c^3 R^2} + \right.$$

$$+\frac{2\,\dot{a}_i}{3}\frac{n_j}{c^3R^2}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(-2\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)\frac{1}{c^2R^3}+\frac{4\left(\dot{\vec{a}}\cdot\vec{n}\right)}{3}\frac{1}{c^3R^2}\right)\Bigg]. \tag{G.2}$$

A integral do fluxo sobre uma superfície esférica de raio ε é

$$\int_A T_{ij}n_j dA=\int_0^{4\pi}T_{ij}n_j\varepsilon^2 d\Omega. \tag{G.3}$$

Substituindo o tensor dos esforços nessa integral obtemos, lembrando que $R=\varepsilon$ na superfície,

$$\int_A T_{ij}n_j dA=\frac{1}{4\pi}e^2\int_0^{4\pi}\left[-\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)\frac{n_in_jn_j}{c^2\varepsilon}-\frac{a_j}{2}\frac{n_in_j}{c^2\varepsilon}-\frac{a_i}{2}\frac{n_jn_j}{c^2\varepsilon}+\frac{2\,\dot{a}_j}{3}\frac{n_in_j}{c^3}\right]d\Omega+$$

$$+\frac{1}{4\pi}e^2\int_0^{4\pi}\left[\frac{2\,\dot{a}_i}{3}\frac{n_jn_j}{c^3}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(-2\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)\frac{n_j}{c^2\varepsilon}+\frac{4\left(\dot{\vec{a}}\cdot\vec{n}\right)}{3}\frac{n_j}{c^3}\right)\right]d\Omega. \tag{G.4}$$

Para calcular essa integral utilizaremos as seguintes propriedades Eqs. (1.9) e (1.10). Vamos calcular separadamente cada termo da integral:

1.

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}\int_0^{4\pi}\left(\vec{a}\cdot\vec{n}\right)n_in_jn_jd\Omega=-\frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}\int_0^{4\pi}a_ln_ln_in_jn_jd\Omega=$$

$$=-\frac{1}{15}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_l\left(\delta_{li}\delta_{jj}+\delta_{lj}\delta_{ij}+\delta_{lj}\delta_{ij}\right)=-\frac{1}{3}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i; \tag{G.5}$$

2.

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{2c^2\varepsilon}\int_0^{4\pi}a_jn_in_jd\Omega=-\frac{1}{6}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_j\delta_{ij}=-\frac{1}{6}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i; \tag{G.6}$$

3.

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{2c^2\varepsilon}\int_0^{4\pi} a_i n_j n_j d\Omega = -\frac{1}{6}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i\delta_{jj} = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i; \tag{G.7}$$

4.

$$\frac{1}{4\pi}\frac{2e^2}{3c^3}\int_0^{4\pi} \dot{a}_j\, n_i n_j d\Omega = \frac{2}{9}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_j\,\delta_{ij} = \frac{2}{9}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_i; \tag{G.8}$$

5.

$$\frac{1}{4\pi}\frac{2e^2}{3c^3}\int_0^{4\pi} \dot{a}_i\, n_j n_j d\Omega = \frac{2}{9}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_i\,\delta_{jj} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_i; \tag{G.9}$$

6.

$$\frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}\int_0^{4\pi} \delta_{ij}a_l n_l n_j d\Omega = \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_l\delta_{ij}\delta_{lj} = \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i; \tag{G.10}$$

7.

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{2e^2}{3c^3}\int_0^{4\pi} \delta_{ij}\,\dot{a}_l\, n_l n_j d\Omega = -\frac{2}{9}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_l\,\delta_{ij}\delta_{lj} = -\frac{2}{9}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_i\,. \tag{G.11}$$

Somando esses termos resulta

$$\int_A T_{ij}n_j dA = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{a}_i\,. \tag{G.12}$$

Apêndice H

Expressão relativística da força

Vamos escrever a expressão da densidade de quadri-força eletromagnética em termos do campo. Para isto utilizamos a formulação covariante das equações de Maxwell,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\nu} \tag{H.1}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F_{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} F_{\mu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} F_{\beta\mu} = 0. \tag{H.2}$$

A densidade de força eletromagnética é,

$$f^{i} = \rho E_{i} + \frac{1}{c}\left(\vec{J} \times \vec{B}\right)_{i} = \rho E_{i} + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} J_{j} B_{k}, \tag{H.3}$$

onde $\rho = \gamma \rho_{(0)}$ e $\vec{J} = \gamma \vec{J}_{(0)}$ sendo $\rho_{(0)}$ e $\vec{J}_{(0)}$ as densidades de carga e corrente no referencial da distribuição de carga. Escrevendo $E_i = F^{i0} = -F^{0i}$ e $-\varepsilon_{ijk} B_k = F^{ij}$ resulta

$$f^{i} = \rho F^{i0} - \frac{1}{c} J_{j} F^{ij} = \frac{1}{c} F^{i\mu} J_{\mu}, \tag{H.4}$$

onde $(J_\mu) = \left(c\rho, -\vec{J}\right)$. A densidade da potência é

$$f^0 = \vec{J} \cdot \vec{E} = F^{0\mu} J_\mu, \tag{H.5}$$

onde $F^{00} = 0$. As equações Eqs. (H.4) e (H.5) podem ser escritas como as componentes da equação

$$f^\mu = F^{\mu\nu} J_\nu = F^\mu{}_\nu J^\nu. \tag{H.6}$$

Usando a Eq. (H.1) obtemos

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(F^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu}\right) - F^{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^\mu{}_\nu\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(F^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu}\right) - \frac{1}{2} F^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^\mu{}_\nu + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^\mu{}_\nu\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(F^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu}\right) - \frac{1}{2} F^{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^\mu{}_\nu + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F^\mu{}_\alpha\right)\right]. \tag{H.7}$$

Usando a Eq. (H.2) no segundo termo dessa expressão resulta

$$f^\mu = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(F^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu}\right) + \frac{1}{2} F^{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\nu\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(F^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(F^{\alpha\nu} F_{\alpha\nu}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{1}{4} g^{\mu\alpha}\left(F^{\beta\nu} F_{\beta\nu}\right) - \left(F^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\mu\alpha}, \tag{H.8}$$

onde

$$T^{\mu\alpha} = \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} \left(F^{\beta\nu} F_{\beta\nu} \right) - \left(F^{\mu}{}_{\nu} F^{\alpha\nu} \right) . \tag{H.9}$$

Apêndice I

Cálculo relativístico

A auto-força é calculada por Dirac [5] através da integral do divergente do tensor momentum-energia sobre a região envolta por um tubo 4-dimensional envolvendo um trecho da linha de universo da partícula. Utilizando o teorema de Gauss a integral do divergente é transformada em uma integral de fluxo. A superfície desse tubo 3-dimensional é constituída pela área lateral mais a área das bases. A primeira definida pelas relações $x^\mu - z^\mu(s) = \varepsilon n^\mu$, $n^\mu u_\mu(s) = 0$ e $n^\mu n_\mu = -1$, onde ε é uma constante que faremos tender a zero, $x^\mu = (ct, \vec{r})$ é um ponto na superfície e $z^\mu(s) = (z^0(s), \vec{z}(s))$ e $u^\mu(s) = dz^\mu/ds$ são a posição e a velocidade da carga na posição s do elemento de arco. No sistema de repouso $n^0 = 0$ e $|\vec{n}| = 1$. A primeira nos diz que $x^0 = z^0$, mesmo tempo. A segunda nos diz que $|\vec{r} - \vec{z}(s)| = \varepsilon$, equação de uma superfície esférica de raio ε centrada na carga. Dirac não calcula especificamente a contribuição das bases. Por argumentos de simplicidade infere que tais contribuições renormalizam a massa do eletron. Groot e Suttorp calculam tais contribuições explicitamente tomando $n^\mu = u^\mu$ na base de saida da linha de universo e $n^\mu = -u^\mu$ na de entrada. A expressão da força é a seguinte

$$\int f_\mu d^4x = -\int \frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} d^4x =$$

$$-\int_{Bases} T_{\mu\nu} n^\nu dV - \int_{Lateral} T_{\mu\nu} n^\nu dV. \tag{I.1}$$

Vamos resolver a equação da força no referencial da partícula, $v^0 = 1$ e $v^i = 0$. Diferenciando $(x - z(s))_\nu (x - z(s))^\nu = -\varepsilon^2$ e lembrando que ε é constante resulta

$$(x - z)_\nu (dx - vds)^\nu = 0. \tag{I.2}$$

Como $(x - z)_\nu = \varepsilon n_\nu$ e $n_\nu v^\nu = 0$ temos

$$(x - z)_\nu dx^\nu = \varepsilon n_\nu dx^\nu = 0, \tag{I.3}$$

Dividindo o infinitesimal dx em uma parte perpendicular à v, $d_1 x \perp v$, e outra paralela, $d_2 x || v$, a equação acima resulta em

$$(x - z)_\nu dx^\nu = \varepsilon n_i d_1 x^i = 0 \tag{I.4}$$

$$d_1 x \in S \Rightarrow \vec{n} \perp S \tag{I.5}$$

de onde concluímos que a normal é perpendicular à superfície que contém $d_1 x$. Essa superfície é esférica e com raio ε. Diferenciando $(x - z)_\nu v^\nu$ obtemos

$$(dx - vds)_\nu v^\nu + (x - z)_\nu (ads)^\nu = 0, \tag{I.6}$$

utilizando $v^2 = 1$ e isolando $v_\nu dx^\nu$ resulta

$$v_\nu dx^\nu = v_\nu d_2 x^\nu = \left[1 - (x-z)_\nu a^\nu\right] ds = \left[1 - \varepsilon n_\nu a^\nu\right] ds. \tag{I.7}$$

Calculando o módulo encontramos

$$\left|v_\nu d_2 x^\nu\right| = \left|v_\nu\right| \left|d_2 x^\nu\right| = \left|d_2 x\right| = \left[1 - \varepsilon n_\nu a^\nu\right] ds. \tag{I.8}$$

Com esse resultado escrevemos a integral da lateral do tubo como

$$\int_{Lateral} T_{\mu\rho} n^\rho dV = \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{4\pi} T_{\mu j} n^j \left[1 + \varepsilon \vec{n} \cdot \vec{a}\right] \varepsilon^2 d\Omega ds. \tag{I.9}$$

A integral das bases pode ser escrita como

$$\int_{Bases} T_{\mu\rho} n^\rho dV = \int_{Base(s_1)} T_{\mu\rho} v^\rho dV + \int_{Base(s_2)} T_{\mu\rho} v^\rho dV =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{Base(s)} T_{\mu\rho} v^\rho dV\right] ds = \int_{s_1}^{s_2} \int_{(\varepsilon)} \left[v^\rho \frac{\partial}{\partial s} T_{\mu\rho} + T_{\mu\rho} a^\rho\right] dV ds. \tag{I.10}$$

Vamos escrever a equação da força no referencial da partícula ($v^0 = 1$, $v^i = 0$ e $a^0 = 0$) e usaremos notação não relativística, $v = v/c$ e $a = a/c^2$. Escrevendo $F_\mu = \int_V f_\mu dV$ temos

$$\int_{ct_1}^{ct_2} \left\{ F_\mu + \int_{(\varepsilon)} \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} T_{\mu 0} - \frac{1}{c^2} T_{\mu j} a^j\right] dV + \right.$$

$$\left. + \int_0^{4\pi} T_{\mu j} n^j \left[1 + \frac{1}{c^2} \varepsilon \vec{n} . \vec{a}\right] \varepsilon^2 d\Omega \right\} dt = 0. \tag{I.11}$$

Como esse resultado não deve depender da escolha dos limites ct_1 e ct_2, que são ar-

bitrários, o integrando deve ser nulo. Para as componentes espaciais temos, usando $T_{i0} = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i$,

$$F_i = -\int_{(\varepsilon)} \left[\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)_i + \frac{1}{c^2}T_{ij}a^j\right] dV +$$

$$+\int_0^{4\pi} T_{ij}n^j \left[1 + \frac{1}{c^2}\varepsilon \vec{n}.\vec{a}\right] \varepsilon^2 d\Omega. \tag{I.12}$$

Agora vamos calcular apenas os termos extras que aparecem nessa equação em relação ao caso não relativístico. Para o termo na integral do volume temos

$$\frac{1}{c^2}\int_{(\varepsilon)} T_{ij}a^j dV = \frac{1}{4\pi c^2}\int_{(\varepsilon)} \left(E_i E_j a^j - \frac{1}{2}E^2 a^j\right) dV =$$

$$= -\frac{1}{3}a_i \frac{1}{8\pi c^2}\int_{(\varepsilon)} E^2 dV. \tag{I.13}$$

As componentes do tensor momentum-energia que contribuem para essa integral do fluxo são

$$T_{ij} = \frac{e^2}{4\pi}\left[\frac{n_i n_j}{R^4} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{1}{R^4}\right]. \tag{I.14}$$

Substituindo na integral temos

$$\frac{1}{c^2}\int_0^{4\pi} T_{ij}n^j \vec{n}.\vec{a}\varepsilon^3 d\Omega = \frac{1}{c^2}\varepsilon^3 \int_0^{4\pi} T_{ij}n^j n_l a^l d\Omega =$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^2}\varepsilon^3 \int_0^{4\pi} \frac{1}{R^4}\left[n_i n_j n^j n_l a^l - \frac{1}{2}\delta_{ij}n^j n_l a^l\right] d\Omega = \frac{e^2}{8\pi c^2}\varepsilon^3 \int_0^{4\pi} \frac{1}{R^4}\left[n_i n_l a^l\right] d\Omega =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}\delta_{il}a^l = \frac{1}{6}\frac{e^2}{c^2\varepsilon}a_i = \frac{1}{3}a_i\frac{1}{8\pi c^2}\int_\varepsilon^\infty \int_\Omega E^2(r)dV. \tag{I.15}$$

Somando esses dois termos resulta

$$\frac{1}{3}a_i\frac{1}{8\pi c^2}\int_{(\varepsilon)} E^2 dV + \frac{1}{3}a_i\frac{1}{8\pi c^2}\int_\varepsilon^\infty \int_\Omega E^2(r)dV = \frac{1}{3}\frac{U}{c^2}a_i. \tag{I.16}$$

Apêndice J

Cálculo do segundo termo

Vamos calcular as duas últimas partes da integral Eq. (3.39),

$$\frac{1}{4\pi c^2}\int\left[\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)\vec{E}}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}}+\vec{v}b^2\left(\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}-1\right)\right]dV. \tag{J.1}$$

Utilizando $\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)\vec{E}=(1/3)\,\vec{v}E^2$ resulta

$$\frac{1}{4\pi c^2}\vec{v}\int\left[\frac{1}{3}\frac{E^2}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}}+b^2\left(\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}-1\right)\right]dV=$$

$$=\frac{1}{4\pi c^2}\vec{v}\int\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}}\left[E^2+3b^2-3E^2-3b^2\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}\right]dV=$$

$$=\frac{1}{4\pi c^2}\vec{v}\frac{1}{3}\int\left[b^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}}-1\right)+2b^2\left(\sqrt{1-\frac{E^2}{b^2}}-1\right)\right]dV. \tag{J.2}$$

A primeira integral é igual a energia eletrostática U da caga. Para calcularmos o outro termo notamos que podemos escreve-lo como

$$\int b^2 \left(\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}} - 1 \right) dV = b^2 \frac{d}{db} \int b \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{b^2}}} - 1 \right) dV = b^2 \frac{d}{db} \frac{U}{b}. \tag{J.3}$$

Para uma carga pontual a energia eletrostática é [8]

$$U = k \frac{e^2}{r_0}, \tag{J.4}$$

onde k é uma constante numérica e r_0 é o raio efetivo da partícula definido por $e/r_0^2 = b$. Portanto,

$$b^2 \frac{d}{db} \frac{U}{b} = -\frac{1}{2} U. \tag{J.5}$$

Temos então, para Eq. (J.1),

$$\frac{1}{3} \left[U + 2 \left(-\frac{1}{2} U \right) \right] = 0. \tag{J.6}$$

Como esperado, para o caso da partícula pontual.

Referências Bibliográficas

[1] L. Landau e E. Lifshitz, *The Classical Theory of Field* (Pergamon Press, 4th edição, 1975).

[2] A. Peres, Phys. Rev. **128**, 2471 (1962).

[3] A. Peres and N. Rosen, Ann. Phys. (New York) **10**, 94 (1960)

[4] Lorentz, Theory of Electrons, Dover, 1952; J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons 1.a edição, (1962)

[5] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **167**, 148 (1938)

[6] de Groot e Suttorp, Foundations of Electrodynamics, North-Holland Publishing Company, (1972)

[7] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons 1.a edição, (1962)

[8] J. Frenkel, Proc. Roy. Soc. A **146,** 930 (1934)

[9] Born, Proc. Roy. Soc. A **143,** 410 (1934); Born and Infeld, Proc. Roy. Soc. A **144,** 425 (1934)